

高数基础班 (15)

15	差分方程；微分方程举例（方程求解；综合题；应用题）	P115-PP122
----	---------------------------	------------



还不关注，
你就慢了



主讲 武忠祥 教授

中国大学MOOC

×

有道考神

(五) 差分方程 (仅数三要求)

1. 一阶常系数线性齐次差分方程 $y_{t+1} + ay_t = 0,$

通解为 $y_c(t) = C \cdot (-a)^t,$

2. 一阶常系数线性非齐次差分方程 $y_{t+1} + ay_t = f(t),$

通解为 $y_t = y_c(t) + y_t^*.$

1) $f(t) = P_m(t),$

(1) 若 $a \neq -1,$ 令 $y_t^* = Q_m(t);$

(2) 若 $a = -1,$ 令 $y_t^* = tQ_m(t);$

2) $f(t) = d^t \cdot P_m(t) \quad (d \neq 0)$

(1) 若 $a + d \neq 0,$ 令 $y_t^* = d^t \cdot Q_m(t);$

(2) 若 $a + d = 0,$ 令 $y_t^* = td^t \cdot Q_m(t);$

【例12】(1997) 差分方程 $y_{t+1} - y_t = t2^t$ 的通解为 _____.

【解】齐次方程通解为 $y_c(t) = C \cdot 1^t = C$ a = -1

令 $y_t^* = \underline{2^t}(at + b)$ d = 2

代入原方程得 $\underline{2^{t+1}[a(t+1) + b]} - \underline{2^t(at + b)} = t2^t$

解得 $a = 1, b = -2,$

原方程通解为 $y_t = \underline{C} + \underline{(t-2)2^t}$

【例13】(1998) 差分方程 $2y_{t+1} + 10y_t - 5t = 0$ 的通解为 _____.

【解】 齐次差分方程为 $y_{t+1} + 5y_t = 0$

其通解为 $y_c(t) = C(-5)^t$.

设原方程的特解为

$$y_t^* = at + b$$

代入原方程得

$$2a(t+1) + 2b + 10at + 10b = 5t$$

即

$$12at + 2a + 12b = 5t$$

比较系数知

$$a = \frac{5}{12}, b = -\frac{5}{72}$$

则

$$y_t^* = \frac{5}{12} \left(t - \frac{1}{6} \right)$$

原差分方程的通解为 $y_t = C(-5)^t + \frac{5}{12} \left(t - \frac{1}{6} \right)$.

【例14】(2001) 某公司每年的工资总额在比上一年增加20%的基础上再追加2百万元, 若以 W_t 表示第 t 年的工资总额 (单位: 百万元), 则 W_t 满足的差分方程是 _____.

【解】 $W_t = 1.2 \cdot \underline{W_{t-1}} + 2$

【例15】(2017) 差分方程 $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$ 的通解为 _____.

【解】齐次方程通解为 $y_c(t) = C \cdot 2^t$

令

$$y_t^* = at2^t$$

$$a = -2$$

$$d = 2$$

$$a + d = 0$$

代入原方程得

$$a(t+1)2^{t+1} - 2at2^t = 2^t$$

$$at2^t$$

$$a = \frac{1}{2},$$

原方程通解为

$$y_t = C2^t + \frac{1}{2}t2^t$$

常考题型与典型例题

- | | | |
|------|----------|---|
| 常考题型 | (一) 方程求解 | ✓ |
| | (二) 综合题 | ✓ |
| | (三) 应用题 | ✓ |

(一) 方程求解 $\ln \frac{x}{y}$

【例16】(2014年1) 微分方程 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 满足条件

$y(1) = e^3$ 的解为 $y =$ _____.

【解】由 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 得, $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

$x > 0$

$y = xu$

$y' = u + xu' = u \ln u$

令 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式得 $u' = \frac{u(\ln u - 1)}{x}$ ✓

$$d(\ln u - 1) \cdot \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln |\ln u - 1| = \ln x + C,$$

$$\text{即 } \ln u - 1 = Cx, \quad \ln \frac{y}{x} - 1 = Cx,$$

$$\text{由 } y(1) = e^3 \text{ 得 } C = 2, \text{ 则 } \ln \frac{y}{x} - 1 = 2x, \quad y = xe^{2x+1}.$$

【例17】(2012年2) 微分方程 $y \frac{dx}{dy} + (x - 3y^2) \frac{dy}{dy} = 0$ 满足条件

$y|_{x=1} = 1$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

($y = \sqrt{x}$)

【解1】 $y \frac{dx}{dy} + x = 3y^2$, $\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = 3y$ — 线性.

$$x = e^{-\int \frac{1}{y} dy} \left[\int 3y e^{\int \frac{1}{y} dy} dy + C \right] = \frac{1}{y} [y^3 + C]$$

$$x = y^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{x} \Rightarrow y = \sqrt{x}$$

分组凑微分

【解2】* $\underbrace{[y dx + x dy]} - 3y^2 dy = \underbrace{d(xy)} - dy^3 = d[xy - y^3] = 0$

$$xy - y^3 = C$$

$$xy = y^3$$

【例18】(2017年1) 微分方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的通解为

$y =$ _____.

$$[e^{-x}(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x)]$$

【解】

$$r^2 + 2r + 3 = 0.$$

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{2}i$$

$$\alpha = -1, \beta = \sqrt{2}$$

$$y = e^{-x} (C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x)$$

【例19】(2017年2) 微分方程 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \cos 2x)$

的特解可设为 $y^* = ()$

(A) $Ae^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x),$

(B) $Axe^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x),$

✓ (C) $Ae^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x),$

(D) $Axe^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x),$

$1e^{2x}$
✓ ✓

$\frac{e^{2x} \cos 2x}{\checkmark}$
[C]

$\lambda = 2$

$\alpha + i\beta = 2 + 2i$

【解】

$r^2 - 4r + 8 = 0$

$y^* = Ae^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$

$r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{4 \pm 4i}{2} = 2 \pm 2i$
 $\alpha = 2, \beta = 2$

【例20】 (2015年2, 3) 设函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$

的解, 且在 $x=0$ 处取得极值 3, 则 $y = y(x) =$ _____.

【解】

$$r^2 + r - 2 = 0 \quad (r-1)(r+2) = 0$$

$$r_1 = 1, r_2 = -2$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

$$\begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ c_1 - 2c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3c_2 = 3 \Rightarrow c_2 = 1 \\ c_1 = 2 \end{cases}$$

$$y = 2e^x + e^{-2x}$$

$$[2e^x + e^{-2x}]$$

【例21】(2015年1) 设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 则 ()

- ✓ (A) $a = -3, b = 2, c = -1$. (B) $a = 3, b = 2, c = -1$.
(C) $a = -3, b = 2, c = 1$. (D) $a = 3, b = 2, c = 1$.

【解】由 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 是方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解可知, $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^x$ 是齐次方程的两个线性无关的解,

$y^* = xe^x$ 是非齐次方程的一个解.

齐次方程的特征方程为 $(r-1)(r-2) = 0$

即 $r^2 - 3r + 2 = 0$ 则 $a = -3, b = 2$

将 $y = xe^x$ 代入方程 $y'' - 3y' + 2y = ce^x$
得 $c = -1$. 故应选 (A).

$$Ae^{2x} \quad ce^x$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*$$

$$y = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}e^x$$

✓ 非 ✓
 $y_1 = e^{2x}$

【例22】(2009年1) 若二阶常系数线性齐次微分方程

$r=1$ 2重

$y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x$, 则非齐次方程

$y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解为 _____.

【解】 由 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x$ 知, $r=1$ ✓

是齐次方程的特征方程的二重根, 则齐次方程的特征方程为

$(r-1)^2 = 0$, 即 $r^2 - 2r + 1 = 0$. 则 $a = -2, b = 1$, 非齐次方程为

$$y'' - 2y' + y = x \quad \checkmark \quad x e^{0x} \quad \lambda=0$$

$$-2a + ax + b = x$$

设非齐次方程的特解为 $y^* = ax + b$, 代入方程得 $a = 1, b = 2$.

则其通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x + x + 2$

由 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 知 $C_1 = 0, C_2 = -1$

故 $y = x(1 - e^x) + 2$ ✓

【例23】(2013年1, 2) 已知 $y_1 = e^{3x} - \underline{\underline{xe^{2x}}}$, $y_2 = e^x - \underline{\underline{xe^{2x}}}$,

$y_3 = -\underline{\underline{xe^{2x}}}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的3个解,

则该方程的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$(y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - x e^{2x})$$

$$y_2 - y_1 = \underbrace{(e^x - e^{3x})}_{\neq 0}$$

【解】 $y_1 - y_3 = \underbrace{e^{3x}}_{\neq 0}$ $y_2 - y_3 = \underbrace{e^x}_{\neq 0}$

$\frac{e^{3x}}{e^x}$ 与 e^x 无关, 无关

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - x e^{2x}$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 (e^x - e^{3x}) + (-x e^{2x})$$

(二) 综合题

【例24】(1994年3) 设 $y = f(x)$ 是微分方程 $y'' - y' - e^{\sin x} = 0$ ✓

的解, 且 $f'(x_0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 ().

(A) x_0 的某个邻域内单调增加

(B) x_0 的某个邻域内单调减少

✓ (C) x_0 处取得极小值 ✓

(D) x_0 处取得极大值 ✓

【解】

$$f''(x) - f'(x) - e^{\sin x} = 0$$

$$x = x_0$$

$$f'(x_0) - e^{\sin x_0} = 0$$

$$\underline{f''(x_0) = e^{\sin x_0} > 0} \quad \text{极小值}$$

【例25】(2002年2) 设 $y = y(x)$ 是二阶常系数微分方程

$y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解, 则当

$x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限 ()

(A) 不存在; (B) 等于1; (C) 等于2; (D) 等于3

【解】由 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 知 $y''(x)$ 连续且 $y''(0) = 1$

极限.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{y(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{y'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{y''(x)} = \frac{2}{y''(0)} = 2$$

$$\frac{0}{0}$$

故应选 (C) .

【例26】(2018年2, 3) 设函数 $f(x)$ 满足

$$\underbrace{f(x + \Delta x) - f(x)}_{\Delta y} = \underbrace{2xf(x)}_A \underbrace{\Delta x}_{\Delta x} + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0), \quad \checkmark$$

且 $\underline{f(0) = 2}$, 则 $f(1) = \underline{2e}$.

【解】由 $f(x + \Delta x) - f(x) = 2xf(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0)$

$$\text{知 } \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \underbrace{2xf(x)}_{f'(x)} + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$* \quad \underline{f'(x) = 2xf(x)}$$

$$f(x) = Ce^{x^2}$$

又 $f(0) = 2$, 则 $C = 2$, $\boxed{f(x) = 2e^{x^2}}$, $f(1) = 2e$.

$$f(x) \quad \Delta y = \checkmark \checkmark \underline{A \Delta x} + o(\Delta x)$$

$$dy = A dx$$

[附2] 微分定义

$$dy = 2xf(x)dx$$

$$df = 2xf dx$$

积分定义

【例27】(1995年4) 已知连续函数 $f(x)$ 满足条件

$f(x) = \int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right) dt + e^{2x}$, 求 $f(x)$.

$f(0) = 1$

【解】等式 $f(x) = \int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right) dt + e^{2x}$ 两端对 x 求导数得

$f'(x)$ $= 3$ $f(x)$ $+ 2e^{2x}$

$f'(x) - 3f(x) = 2e^{2x}.$

$f(x)$ 求导
 $\Rightarrow \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$

$f(x) = e^{-\int P(x) dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right] = e^{3x} \left[\int 2e^{2x} \cdot e^{-3x} dx + C \right]$

$= e^{3x} \left(2 \int e^{-x} dx + C \right) = e^{3x} (C - 2e^{-x}) = \underline{Ce^{3x} - 2e^{2x}}.$ ✓

由 $f(0) = 1$, 可得 $C = 3$, 于是

$f(x) = 3e^{3x} - 2e^{2x}.$

【例28】(2016年3) 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足

$$\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1, \text{ 求 } f(x) \text{ 的表达式.}$$

【解】令 $u = x - t$, 则 $\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x f(u)du$ (注意: $du = -dt$)

$$\int_0^x f(u)du = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt + e^{-x} - 1$$

两端求导得 $f(x) = \int_0^x f(t)dt - e^{-x}$, 且 $f(0) = -1$. (注意: $f(x) - x f(x)$)

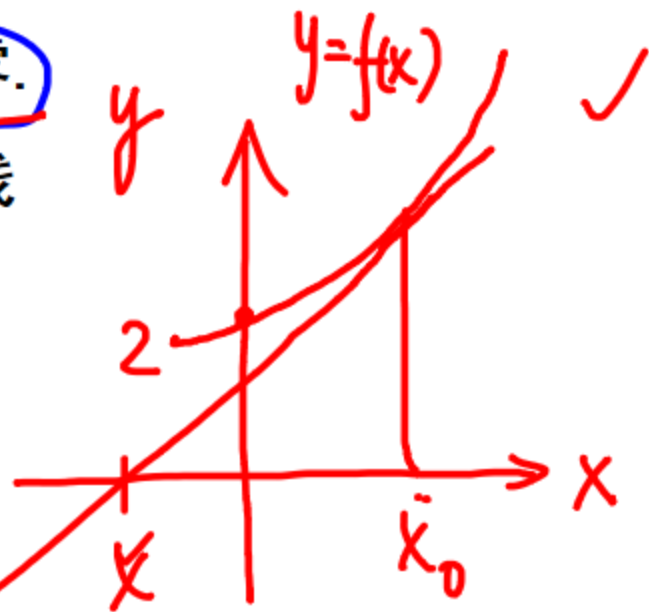
$$f'(x) - f(x) = e^{-x}$$

$$f(x) = e^{\int dx} \left[\int e^{-x} e^{-\int dx} dx + C \right] = Ce^x - \frac{e^{-x}}{2}$$

由 $f(0) = -1$, 得 $C = -\frac{1}{2}$, 所以 $f(x) = -\frac{e^x + e^{-x}}{2}$. ✓

(三) 应用题

【例29】(2015年1, 3) 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对于任意的 $x_0 \in I$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0) = 2$, 求 $f(x)$ 的表达式.



【解】曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \text{ 令 } y = 0 \text{ 得, } x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

切线、直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围区域的面积

$$S = \frac{1}{2} \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \cdot |f(x_0)| = 4$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \frac{f^2(x_0)}{f'(x_0)} = 4, \text{ 记 } y = f(x_0), \text{ 则 } \frac{1}{2} y^2 = 4 y'$$

$$\text{解方程得 } -\frac{8}{y} = x + C \text{ 由 } y(0) = 2 \text{ 知, } C = -4, \text{ 则 } y = \frac{8}{4-x}.$$

【例30】(2006年3) 在 xOy 坐标平面上, 连续曲线 L 过点 $M(1,0)$, 其上任意点 $P(x,y)(x \neq 0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax (常数 $a > 0$).

(I) 求 L 的方程;

(II) 当 L 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时, 确定 a 的值.

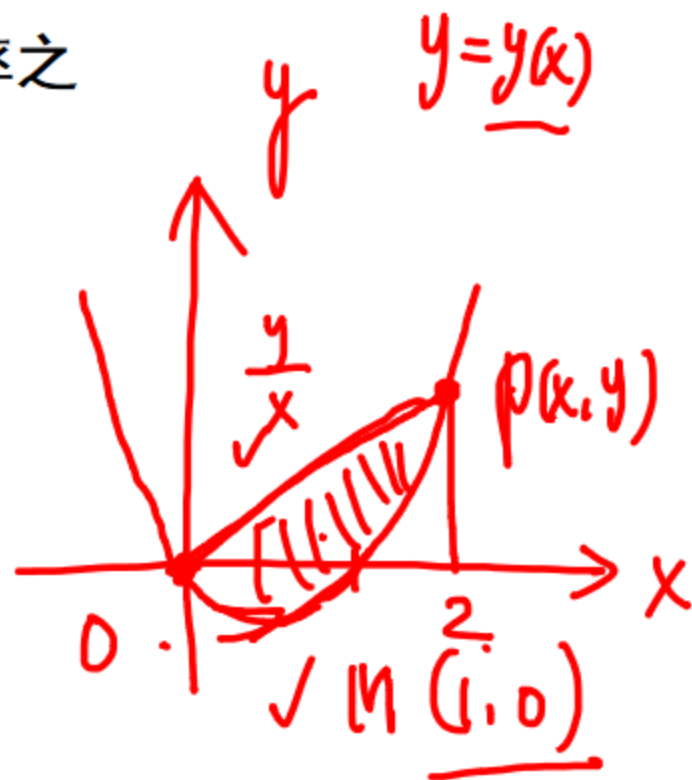
【解】(I) 依题意得 $y' - \frac{1}{x}y = ax$, 求得其通解为

$$y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int ax e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) = ax^2 + Cx.$$

将 $x=1, y=0$ 代入上式得 $C=-a$, 从而 L 的方程为 $y = ax^2 - ax$

(II) L 与直线 $y=ax$ 的交点坐标为 $(0,0)$ 和 $(2,2a)$

$$S(a) = \int_0^2 (ax - ax^2 + ax) dx = \int_0^2 (2ax - ax^2) dx = \frac{4}{3}a \quad a=2$$



$$ax - ax = ax$$

$$ax^2 = 2ax$$

$$x=2$$

【例31】(2009年2) 设非负函数 $y = y(x)$ ($x \geq 0$) 满足微分方程 $xy'' - y' + 2 = 0$. 当曲线 $y = y(x)$ 过原点时, 其与直线 $x = 1$ 及 $y = 0$ 围成的平面区域 D 的面积为2, 求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

【解】记 $y' = p$, 则 $y'' = p'$, 代入微分方程得 $p' - \frac{1}{x}p = -\frac{2}{x}$

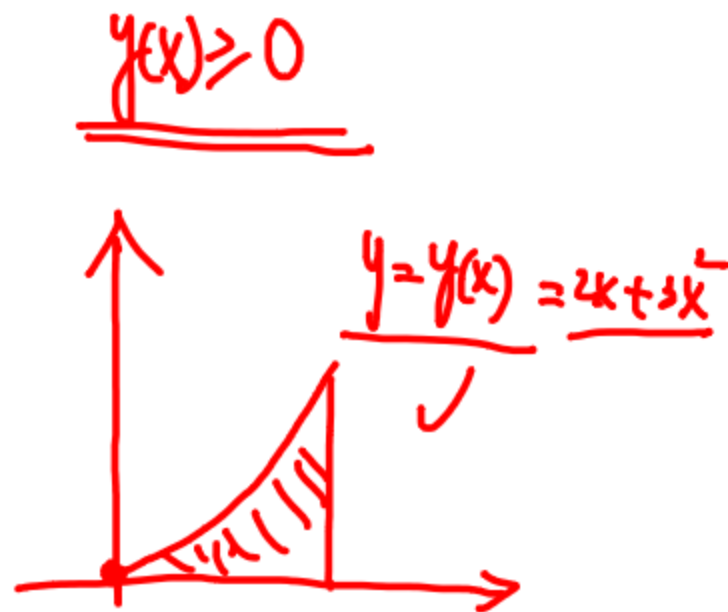
$$y' = p = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int -\frac{2}{x} e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C_1 \right) = x \left(\int -\frac{2}{x^2} dx + C_1 \right) = 2 + C_1 x.$$

$$y = 2x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 \quad (x > 0).$$

由已知 $y(0) = 0$, 有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = 0$, 于是 $C_2 = 0$, $y = 2x + \frac{1}{2}C_1 x^2$

$$\text{由于 } 2 = \int_0^1 \left(2x + \frac{1}{2}C_1 x^2 \right) dx = 1 + \frac{1}{6}C_1$$

所以 $C_1 = 6$, 故 $y = 2x + 3x^2$.



$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

故所求体积为

$$V = \underline{2\pi} \int_0^1 \overset{\checkmark}{xy(x)} dx = \underline{2\pi \int_0^1 (2x^2 + 3x^3) dx} = \frac{17\pi}{6}.$$

✓ ✓
方程 + 定积分应用.

高数基础班 (15)

主讲 武忠祥 教授



还不关注，
你就慢了



中国大学MOOC

×

有道考神