高数基础班（6）

6	导数与微分的概念及几何意义，导数公式及求导法则（有理运算；隐函数、反函数、参数方程求导法；对数求导法）	P40-P47

主讲 武忠祥 教授

第二章　导数与微分

本章内容要点

一. 考试内容概要

（一）导数与微分的概念

（二）导数公式与求导法则

（三）高阶导数

二. 常考题型与典型例题

题型一　导数定义

题型二　复合函数、隐函数、参数方程求导

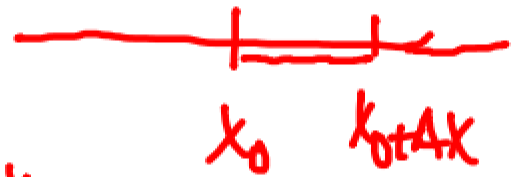
题型三　高阶导数

题型四　导数应用

第二章 导数与微分

考试内容概要

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 无关



（一）导数与微分的概念

1. 导数的概念

定义1（导数） $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

x

① 变化率

动 定

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

② $f(x_0)$ 与 $f(x_0)$ 有关

定义2（左导数） $f'_{-}(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

定义3（右导数） $f'_{+}(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

定理1 可导 $\Leftrightarrow$ 左右导数都存在且相等

$f'(x)$

定义4（区间上可导及导函数） (a,b) $[a,b]$

x a b

【例1】（1994年3）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\le 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的（ ）.

$x=1$

（A）左、右导数都存在

（B）左导数存在但右导数不存在 ✓

（C）左导数不存在但右导数存在

（D）左、右导数都不存在

[解1] $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\frac{2}{3}(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=2$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=\infty$ 不存在

[解2] $f'_-(1)=\left(\frac{2}{3}x^3\right)'\Big|_{x=1}=(2x^2)\Big|_{x=1}=2$ ✓

$f'_+(1)=(x^2)'\Big|_{x=1}=(2x)\Big|_{x=1}=2$ ✗

非右连续.

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}x^2=1\ne f(1)=\frac{2}{3}\Rightarrow f'_+(1)$ 不存在

【例2】(1990年4, 5) 设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x)=af(x)$ 且有 $f'(0)=b$，其中 a,b 为非零常数，则（ ）.

（A）$f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导；

（B）$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=a$；

（C）$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=b$；

（D）$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=ab$.

$x=0$, $f(1)=af(0)$

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

[解] $$f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{af(\Delta x)-af(0)}{\Delta x}$$

$$=a\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=ab$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f[1+(x-1)]-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{af(x-1)-af(0)}{x-1}$$

$$=a\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)-f(0)}{x-1}=ab$$

2. 微分的概念

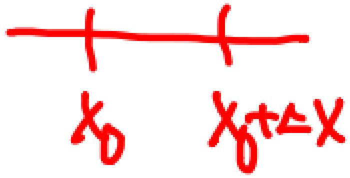
变.

定义5（微分） 如果 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0)$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微，称 $A\Delta x$ 为微分，记为

$$\mathrm{d}y = A\Delta x$$



① 线性函数 — 均匀

② 主部

* **定理2** 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且有

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)\,\mathrm{d}x.$$

【例3】(1988年1, 2, 3) 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则当 $\Delta x \to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是（　）

(A) 与 Δx 等价的无穷小；

(B) 与 Δx 同阶的无穷小；

(C) 比 Δx 低阶的无穷小；

(D) 比 Δx 高阶的无穷小.

$f'(x_0) \neq 0$

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x} \to \frac{1}{2} \neq 0$$

3. 导数与微分的几何意义

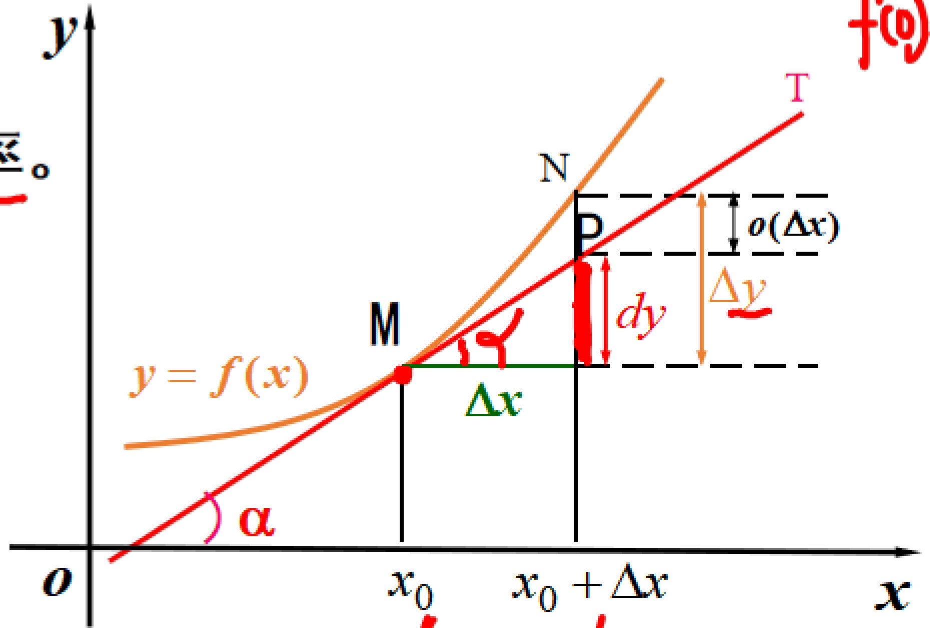
导 $\rightarrow$ 有切线

$y=x^{\frac{1}{3}}$

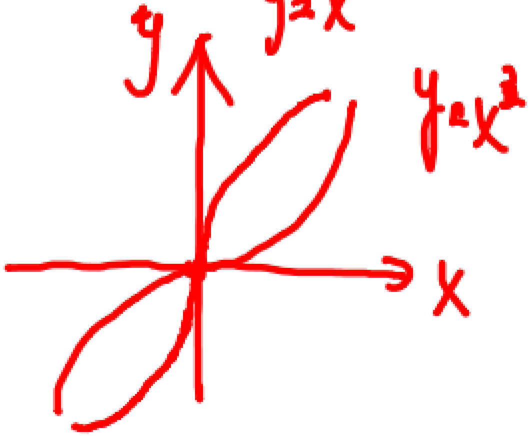
1）导数的几何意义：导数 $f'(x_0)=\tan\alpha$

在几何上表示曲线 $y=f(x)$

在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率。



$f'(0)=\infty$



切线方程

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

法线方程

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

2）微分的几何意义：微分 $dy=f'(x_0)dx$ 在几何上表示

Δx

曲线 $y=f(x)$ 的切线上的增量。

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \qquad \Delta y\approx dy$$

【例4】（2004年1）曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为 ______. $(y=x-1)$

$k=-1$

$y'=\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x=1$

切线 $y-\ln 1=1\cdot(x-1)$

$y=x-1$

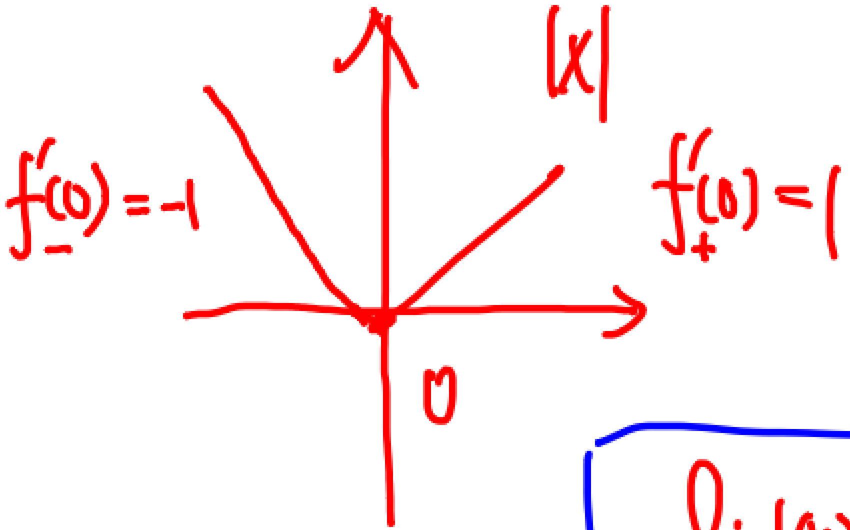
4. 连续,可导,可微之间的关系

$|x|$

连续 $\rightleftarrows$ **可导**

$|x|$

可微



尖点

$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$, $\alpha \to 0$

可导 → 可微.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\boxed{\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

① 定义.

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$$

②

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha \Rightarrow f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$$

$o(\Delta x)$

可导 → 连续.

【例】证明：$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x\neq 0. \end{cases}$

处处可导，但 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在.

f(x)在x_0可导 → f(x)在x_0连续

【证】$x\neq 0$，$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}$　$\lim\limits_{x\to 0}$ 0 存在　$\lim\limits_{x\to 0}$ 不存在

$x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=0=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在

一阶可导

$f(x)$ 在 x_0 的某邻域可导 $\not\Rightarrow$ $f'(x)$ 在 x_0 处连续

$\not\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在

【例33】设 $f(x)$ 二阶可导 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=2$

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}$

定义　$\lim\limits_{x\to 0} f''(x)$ 存在　$f''(x)$ 连续.

【注】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}\overset{?}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{2x}\cancel{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}\cancel{=}\frac{f''(0)}{2}=1$　经典的错误 标准的0分

【例5】（2020年1）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$，则 $=f(0)$

（A）当 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导；

（B）当 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导；

（C）当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$；

（D）当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=0$.

导数，

$f'(0)$ 与 $f(0)$ 有关.

$f'(0)$ 不存在

$x=0$ 不连续.

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & x\neq0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在

$f(x)=x$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim_{x\to0}\Big[\underbrace{\frac{f(x)}{x}}_{\text{存在}}\cdot\underbrace{\frac{x}{\sqrt{|x|}}}_{0}\Big]=0$$

（二）导数公式及求导法则

1. 基本初等函数的导数公式

1） $(C)' = 0$

2） $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

3） $(a^x)' = a^x \ln a$

4） $(e^x)' = e^x$

5） $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

6） $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

7） $(\sin x)' = \cos x$

8） $(\cos x)' = -\sin x$

9） $(\tan x)' = \sec^2 x$

10） $(\cot x)' = -\csc^2 x$

11） $(\sec x)' = \sec x \tan x$

12） $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

13） $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14） $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15） $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

16） $(arc\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

2. 求导法则

(1) 有理运算法则

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$ 2) $(uv)' = u'v + uv'$

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$

初等函数

(2) 复合函数求导法:

设 $u = \varphi(x)$, $y = f(u)$ 可导，则 $y = f[\varphi(x)]$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u)\varphi'(x)$$

【例6】(1995年2) 设 $y = \cos(x^2)\sin^2\dfrac{1}{x}$，则 $y' =$ ________.

$$y' = -\sin(x^2)\cdot 2x \cdot \sin^2\frac{1}{x} + \cos(x^2)\, 2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

【例7】设函数 $f(x)$ 可导，试证

1）若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$ 是偶函数；

2）若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f'(x)$ 是奇函数；

3）若 $f(x)$ 是周期函数，则 $f'(x)$ 也是周期函数.

$f'(-x)=f'(x)$

$f(x)+f(-x)$

【证】1） $f(-x)=-f(x)$，x，

$-f'(-x)=-f'(x)\Rightarrow f'(-x)=f'(x)$ 偶

【例8】（2022年3）已知函数 $f(x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}$，则 $f'''(2\pi)=$ $\underline{\quad 0 \quad}$.

$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}\cdots$

$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}\cdots$

$f'(0)=0$

$f'''(0)$

周期 2π，偶

$f'(x)$ 奇

$f''(x)$ 偶

$f'''(x)$ 奇

$f'''(0)=0$

$f^{(101)}(0)=0$

$f(x)=e^{\sin x}$

（3）隐函数求导法：

$$F(x,y)=0 \qquad y=y(x)\ \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

【例9】(1993年3) 函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定，则 $\frac{dy}{dx}=$ ____________.

$\left[\frac{y^2-e^x-2x\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}\right]$

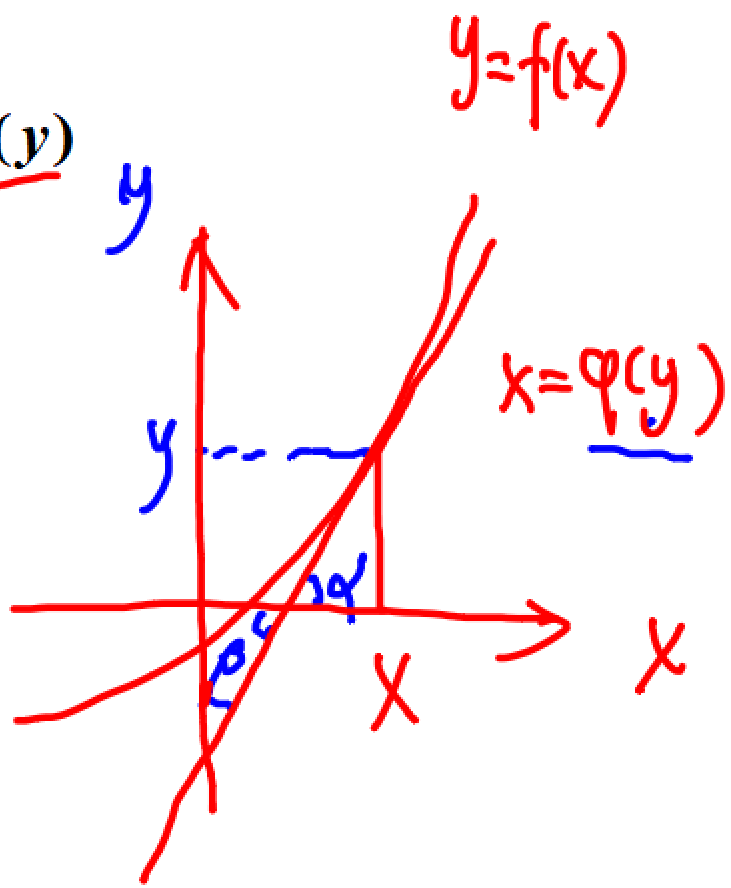
【解】 $\cos(x^2+y^2)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)+e^x-\left(y^2+2xy\frac{dy}{dx}\right)=0$

（4）反函数的导数；

若 $y=f(x)$ 可导，且 $f'(x)\neq 0$，则其反函数 $x=\varphi(y)$

也可导，且

$$\tan\beta=\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\tan\alpha \qquad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$



【例10】证明 $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

[证]. 设 $y=\arcsin x$, $x=\sin y$ $\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$

$$y'_x=(\arcsin x)'_x=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

（5）参数方程求导法：

$t=\varphi^{-1}(x)$

设 $y=y(x)$ 是由 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, $(\alpha<t<\beta)$ 确定的函数，则

1） 若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

2）若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 二阶可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}$$

【例11】(2020年1, 2)设 $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}) \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} =$ $\underline{\quad -\sqrt{2} \quad}$. $(-\sqrt{2})$

【解1】 t

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}}=\frac{1}{t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq -\frac{1}{t^2} \qquad -1$$

x $\qquad t$ $\qquad$!!!

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{t^2}\,\frac{1}{x'(t)}=-\frac{1}{t^2}\,\frac{1}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}},\qquad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$$

$-\sqrt{2}$

【解2】 $x=\sqrt{t^2+1}$, $\quad x^2=t^2+1$, $\quad t=\sqrt{x^2-1}$

$t=1,\ x=\sqrt{2}$

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=(x^2-1)^{-\frac{1}{2}},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x$$

（6）对数求导法：

② $= e^{x\ln(1+\sin x)}$

【例12】（2005年2） 设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $dy|_{x=\pi}=$ $\underline{-\pi dx}$. [$-\pi dx$]

$y'(\pi)$

① $\ln y = x\ln(1+\sin x)$

$$\frac{y'}{y}=\ln(1+\sin x)+\frac{x\cos x}{1+\sin x}$$

$$y'(\pi)=-\pi$$

【例13】 设 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$，求 y'.

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$$

[解]

$$\ln|y|=\frac{1}{2}\left[\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|\right]$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right]$$

① 导数、微分、关系　　概念、理论（4个定理）

② 求导法．
1）有理
2）复合
3）隐
4）参（数三不要求）
5）对．

方法