高数基础班（5）

5	无穷小量阶的比较举例；函数连续性及常考题型举例	P31-P39

还不关注，你就慢了

主讲 武忠祥 教授

三、无穷小量阶的比较

【例43】（2005年2）当 $x \to 0$ 时，$\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1 + x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k =$ ______.

【解1】
$$1 = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1 + x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{kx^2}$$

$$= \frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{1 + x\arcsin x - \cos x}{x^2[\sqrt{1 + x\arcsin x} + \sqrt{\cos x}]}$$

（有理化）

$$= \frac{1}{2k}\lim_{x\to 0}\frac{1 + x\arcsin x - \cos x}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2k}[\lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin x}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}]$$

$$= \frac{1}{2k}[1 + \frac{1}{2}] = \frac{3}{4k}$$

则 $k = \frac{3}{4}$.

【例43】(2005年2) 当 $x \to 0$ 时，$\alpha(x) = kx^2$ 与

$\beta(x) = \sqrt{1 + x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k =$ ______.

$$\boxed{1 - \cos^{\alpha} x \sim \frac{\alpha}{2} x^2}$$

$f(x) = \sqrt{x}$

【解2】 $$1 = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{kx^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\left(1 + x\arcsin x - \cos x\right)}{kx^2}$$

(*) 拉.

$$= \frac{1}{2k}\left[\lim_{x \to 0} \frac{x\arcsin x}{x^2} + \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}\right] = \frac{1}{2k}\left[1 + \frac{1}{2}\right]$$

$$(1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x$$

【解3】 $$1 = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{kx^2} \overset{*}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\left[\sqrt{1 + x\arcsin x} - 1\right] - \left[\sqrt{\cos x} - 1\right]}{kx^2}$$

等价.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left[\frac{1}{2}x^2\right] - \left[-\frac{1}{4}x^2\right]}{kx^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3}{4}x^2}{kx^2} \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

【例44】（2001年2）设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）4

$$(1-\cos x)\ln(1+x^2) \sim \frac{1}{2}x^2\cdot x^2 = \frac{1}{2}x^4$$

$$x\sin x^n \sim x^{n+1}$$

$$e^{x^2}-1 \sim x^2$$

$$2 < n+1 < 4$$

$$n+1 = 3$$

【例45】（2014年2）当 $x \to 0^+$ 时，若 $\ln^\alpha(1+2x), (1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的取值范围是

（A） $(2,+\infty)$ ✓（B） $(1,2)$

（C） $(\frac{1}{2},1)$ （D） $(0,\frac{1}{2})$

等价代换.

[解]

$\ln^\alpha(1+2x) \sim (2x)^\alpha = 2^\alpha x^\alpha$ $\alpha > 1$

$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}} \sim \left(\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{2}{\alpha}}$ $\frac{2}{\alpha} > 1 \Rightarrow \alpha < 2$

$1 < \alpha < 2$

【例46】（2016年2）设

$$\alpha_1 = x(\cos\sqrt{x}-1),\ \alpha_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}),\ \alpha_3 = \sqrt[3]{x+1}-1.$$

当 $x \to 0^+$ 时，以上3个无穷小量从低阶到高阶的排序是

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　　　(B) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$.

(C) $\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$.　　　(D) $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$.

$(1+x)^{\alpha}-1 \sim \alpha x$

① 两两比

② 估阶

$\alpha_1 \sim x\left(-\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x^2$　　2阶

$\alpha_2 \sim \sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}}$　　$\frac{5}{6}$阶

$\alpha_3 \sim \frac{1}{3}x$　　1阶

$\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_1$

【例47】(2020年3) 已知 a,b 为常数，若 $(1+\frac{1}{n})^n-e$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 在 $n\to\infty$ 时是等价无穷小，求 a,b.

$e^x-1\sim x$

【解1】 $(1+\frac{1}{n})^n-e=e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}-e$

$$=e[e^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1}-1]$$

$x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2$

$$\sim e[n\ln(1+\frac{1}{n})-1]=en[\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}]$$

$$\sim en\left(-\frac{1}{2n^2}\right)$$

$$=-\frac{e}{2n}$$

$a=1,b=-\frac{e}{2}$

【例47】(2020年, 3) 已知 a,b 为常数, 若 $(1+\frac{1}{n})^n-e$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 在 $n\to\infty$ 时是等价无穷小, 求 a,b.

$e^x-1\sim x$

$\boxed{f(x)=e^x}$

【解2】 $(1+\frac{1}{n})^n-e=e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}-e^1$

$$=e^{\xi}[n\ln(1+\frac{1}{n})-1]$$

*

$x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2$

$$\sim en[\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}]$$

$$\sim en\left(-\frac{1}{2n^2}\right)$$

$$=-\frac{e}{2n}$$

$a=1, b=-\frac{e}{2}$

第三节　函数的连续性

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）连续性的概念

（二）间断点及其分类

（三）连续性的运算与性质

（四）闭区间上连续函数的性质

二. 常考题型与典型例题

题型一　讨论函数连续性及间断点的类型

题型二　有关闭区间上连续函数性质的证明题

第三节 函数的连续性

考试内容概要

（一）连续性的概念

(a, b)

$[a, b]$

定义1 若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0.$

则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定义2 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ 则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定义3 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ 则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ 则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

定理 $f(x)$ 连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 左连续且右连续

定义4 区间上的连续

【例1】(2017年1, 2, 3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\le 0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则( )

(A) $ab=\frac{1}{2}$.　　(B) $ab=-\frac{1}{2}$.

(C) $ab=0$.　　(D) $ab=2$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x}{ax}=\frac{1}{2a}=b$$

$$ab=\frac{1}{2}$$

【例2】(1994年3) 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$

在 $(-\infty,+\infty)$ 处连续，则 $a=$ <u>-2</u>. [−2]

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}=2+2a=f(0)=a$$

$$2+2a=a$$

$$a=-2$$

【例3】(2008年3) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & |x|\le C, \\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>C \end{cases}$，在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $C=$ ___1___.

[1] $\frac{2}{|x|}$　　x^2+1　　$\frac{2}{|x|}$

$-C$　　0　　C

f(x)偶.

$\lim\limits_{x\to C^-}(x^2+1)=C^2+1=f(C)=C^2+1$

对称美 ✱

$\lim\limits_{x\to C^+}\frac{2}{|x|}=\boxed{\frac{2}{C}=C^2+1}$　　$2=C^3+C$

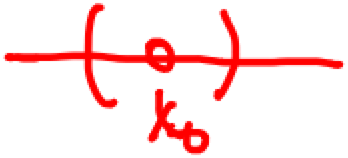
$C^3-1+C-1=0$　　$(C-1)[C^2+C+2]=0$　　$\boxed{C=1}$

（二）间断点及其分类

$\ln x$　　$x=-1$

1. 间断点的定义

定义5 若 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域有定义，但在 x_0 处不连续，则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点。



2. 间断点的分类

1）第一类间断点：左，右极限均存在的间断点

可去间断点：　左极限 = 右极限

跳跃间断点：　左极限 ≠ 右极限

2）第二类间断点：左，右极限中至少有一个不存在

无穷间断点　　　　振荡间断点

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$　　　$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$

【例4】(2008年2)设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{\underline{|x-1|}}\underline{\overset{x=0}{\sin x}}$，则 $f(x)$ 有（ ）

✓（A）1个可去间断点，1个跳跃间断点　　$x=1$

（B）1个可去间断点，1个无穷间断点

（C）2个跳跃间断点　　　（D）2个无穷间断点

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$$

$\underline{x=0}$，

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\overset{\infty\cdot0}{\ln|x|\cdot\underline{\sin x}}=\lim_{x\to0}x\ln|x|=\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}\quad\frac{\infty}{\infty}$$

$$\ln x=\ln[1+\underline{(x-1)}]\sim x-1\qquad=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0\quad 可去$$

$x=1$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\sin1\underline{\lim_{x\to1}}\frac{\ln x}{|x-1|}=\sin1\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\underline{|x-1|}}=\begin{cases}\sin1, & x\to1^+\\ -\sin1 & x\to1^-\end{cases}\ 跳跃$$

【例5】（2020年3）函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为（　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4　【C】

$+\infty$　1　-1　0　2

0

-1　$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty$　第二类 ✓

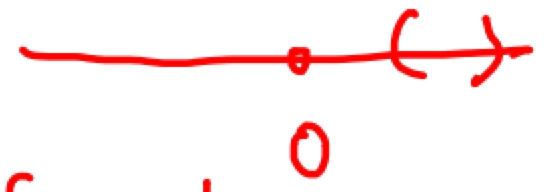
e^{∞}

0　$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\frac{1}{2e}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{e^x-1}{x}}=-\frac{1}{2e}$　可去

1　$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\infty$　第二类 ✓

2　$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$　…… ✓

（三）连续性的运算与性质



定理1 连续函数的和、差、积、商（分母不为零）仍为连续函数；

$f(x)=\frac{1}{x}$

$(0,+\infty)$

定理2 连续函数的复合仍为连续函数； 唯一

定理3 基本初等函数在其定义域内是连续；

$f(x)=\sqrt{\cos x-1}\geq 0$ 初等

定理4 初等函数在其定义区间内是连续；

（四）闭区间上连续函数的性质

定理5（有界性定理）

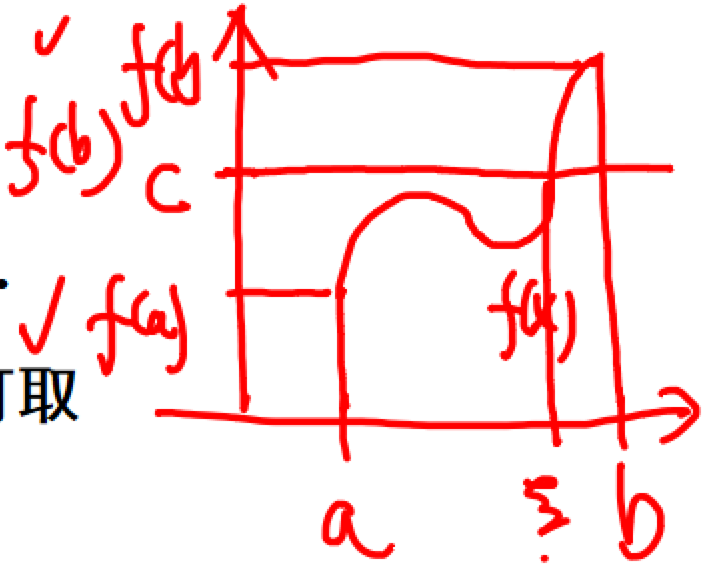
若 $f(x)$ 在 $[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界

定理6（最值定理）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$上必有最大值和最小值；

定理7（介值定理）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对 $f(a)$与

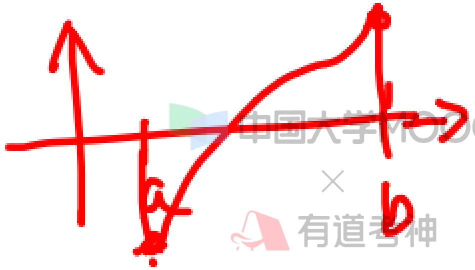


之间任一数C，至少存在一个 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=C$.

推论： 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$在 $[a,b]$ 上可取到介于它在 $[a,b]$ 上最小值与最大值之间的一切值.

定理8（零点定理）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则必 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$.



常考题型与典型例题

1。讨论函数的连续性及间断点的类型； *

2。有关闭区间上连续函数性质的证明题；

【例6】（1997年2）已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{1/x^2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ $\underline{e^{-\frac{1}{2}}}$.

1^∞

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=f(0)=a$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overset{-\frac{1}{2}x^2}{\cos x-1}}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

【例7】讨论 $f(x)=\dfrac{x}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的连续性并指出间断点类型.

$e^x-1\sim x$

$x=1,\ x=0$

e^{∞}　　$\arctan\infty$

[解] 由于 $f(x)$ 是初等函数，则除 $x=0,1$ 以外处处连续，

$x=0$　　$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{-\frac{x}{1-x}}=-1$　　可去. ✓

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$ ✗

$x=1$　　$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$　　跳跃 ✓

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=0$

$x(x+1)$

【例8】函数 $f(x)=\dfrac{(x^2+x)(\ln|x|)\sin\dfrac{1}{x}}{x^2-1}$　　0　　2　　±1

±1

的可去间断点的个数为（　　）　　$(x+1)$

$(x-1)(x+1)$

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【解】$f(x)$ 有三个间断点，$x=0, x=\pm1$.

$0\cdot\infty$

在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\lim\limits_{x\to0} x\ln|x|\sin\dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to0} x\ln|x|=\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=0$$　（无穷小量）

则 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$，$x=0$ 为可去间断点.

在 $x=-1$ 处，$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x\ln|x|\sin\dfrac{1}{x}}{x-1}=0$　则 $x=-1$ 为可去间断点.

-1　0　$-\sin 1$　-2

【例8】 函数 $f(x)=\dfrac{(x^2+x)(\ln|x|)\sin\frac{1}{x}}{x^2-1}$　$x(x+1)$

的可去间断点的个数为（　　）　$(x-1)(x+1)$

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

在 $x=1$ 处，　　　$\ln x=\ln[1+(x-1)]$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln|x|\sin\frac{1}{x}}{x-1}=\sin1\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}$$

$\sin1\lim_{x\to1}\dfrac{\ln|x|}{x-1}$　$\dfrac{0}{0}$

$$=\sin1\lim_{x\to1}\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}$$

$=\sin1\lim_{x\to1}\dfrac{[illegible]}{1}$

$$=\sin1\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1}=\sin1$$

则 可去 $x=1$ 为可去间断点.

【例9】（1998年3）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数的间断点，其结论为

（A）不存在间断点　　（B）存在间断点 $x=1$

（C）存在间断点 $x=0$　　（D）存在间断点 $x=-1$

$\lim\limits_{n\to\infty} e^{nx}=\begin{cases}0 & x<0\\ +\infty & x>0\\ 1 & x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x^{n}=\begin{cases}0, & |x|<1\\ \infty & |x|>1\\ 1 & x=1\\ \text{不存在} & x=-1\end{cases}$

【解】① $f(x)=\begin{cases}1+x & |x|<1\\ 0 & |x|>1\\ 1 & x=1\\ 0 & x=-1\end{cases}$

0　0　$1+x$　1　0

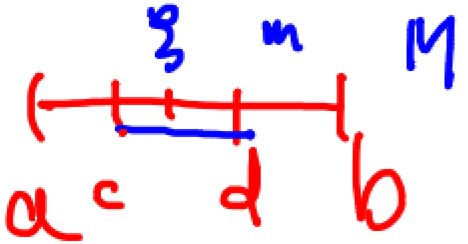
-1　0　1

$x=-1$ 连续.

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0\neq f(1)=1$

【例10】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<c<d<b$. 试证对任意的正数 p,q，至少存在一个 $\xi\in[c,d]$，使

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$$



数.

$$m\le\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}\le M$$

$$=f(\xi)$$

[证] 由题设知 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上连续，存在最小值 m，最大值 M，

① 最大值

$$m=\frac{pm+qm}{p+q}\le\boxed{\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}}\le\frac{pM+qM}{p+q}=M$$

② 介值.

由介值定理推论知，$\exists\,\xi\in[c,d]$，使 $f(\xi)=\dfrac{pf(c)+qf(d)}{p+q}$

第一章 函数 极限 连续

函数

题型一 复合函数

题型二 函数性态

极限

题型一 极限的概念、性质及存在准则

题型二 求 极 限 1

题型三 无穷小量阶的比较 2 $\frac{0}{0}$

连续

题型一 讨论连续性及间断点类型 3

题型二 介值定理、最值定理及零点定理的证明题

高数基础班（5）

5	无穷小量阶的比较举例；函数连续性及常考题型举例	P31-P39