高数基础班（2）

2	函数极限概念，极限的性质，极限存在准则，无穷小及无穷大	P9-P16

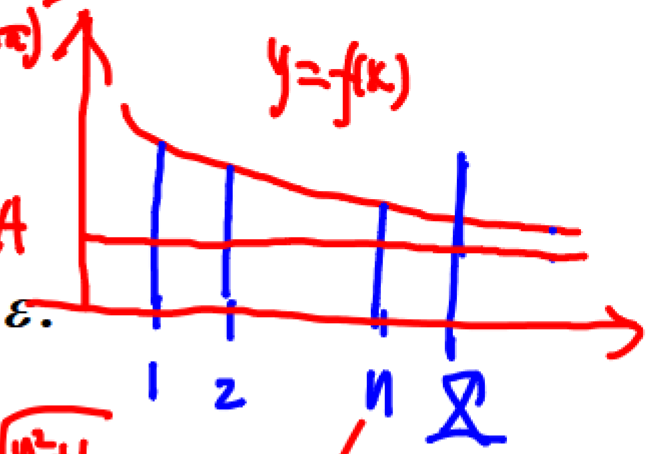
主讲 武忠祥 教授

2. 函数的极限

$a_n = f(n)$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(n) = A$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(\pi x)$ 不存在

1) 自变量趋于无穷大时函数的极限

$f(x)=\sin(\pi x)$. $f(n)=\sin(n\pi) \to 0$



定义2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = A$

$|f(n)-A|<\varepsilon$ $y=A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$，当 $x > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

N $n>N$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ $n\to\infty \Leftrightarrow n\to+\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$，当 $x < -X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1$ ✗ 不存在

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ $x\to\infty \Leftrightarrow |x|\to+\infty$ $\sqrt{x^2}=|x|$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = 1$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$，当 $|x| > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -1$

定理1 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$

2)自变量趋于有限值时函数的极限

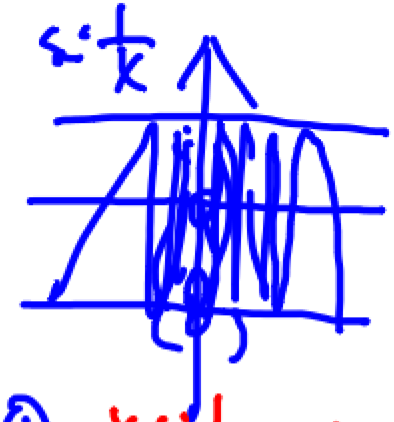
$\Delta\to0,\ \ne0$

$\lim_{\square\to0}\frac{\sin\square}{\square}=1$

$\lim_{\Delta\to0}\frac{\sin\Delta}{\Delta}=1$

定义5 $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=A}$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.



【注】（1）ε 与 δ 的作用，ε 的任意性；

$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$

（2）几何意义；

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，

$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{x\sin\frac{1}{x}}=1$ ✗

① $x\sin\frac{1}{x}\to0$

② $x\sin\frac{1}{x}\ne0$

（3）$x\to x_0$，但 $x\ne x_0$.

① $x\to0$

② $x\ne0$

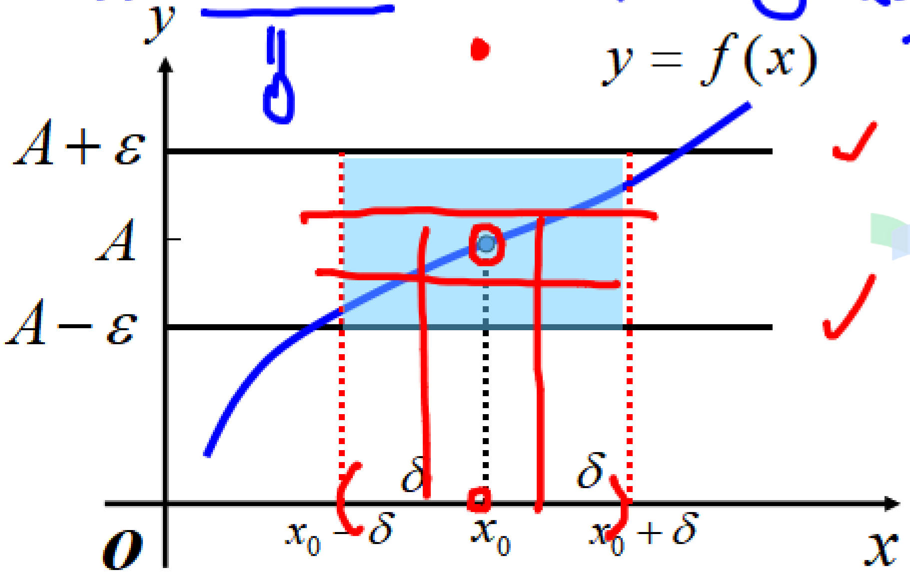
$x\to x_0$

$x\ne x_0$

$f(x)\to A$

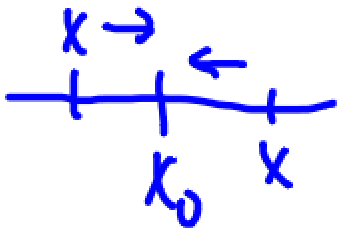
或 $f(x)=A$

$\lim_{x\to x_0}f(x)$ 与 $f(x_0)$ 无关



左极限： $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^{\ -}) = f(x_0 - 0)$

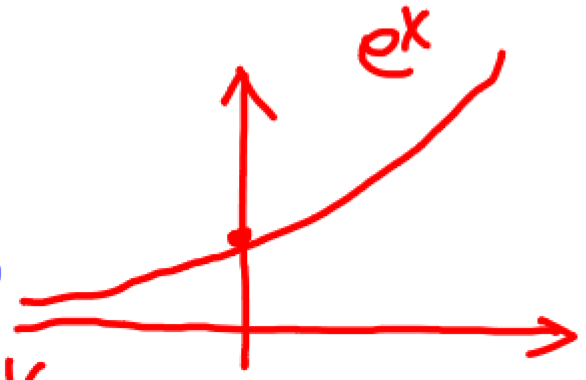
右极限： $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^{\ +}) = f(x_0 + 0)$



定理2 $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A}$

需要分左、右极限求极限的问题主要有三种：

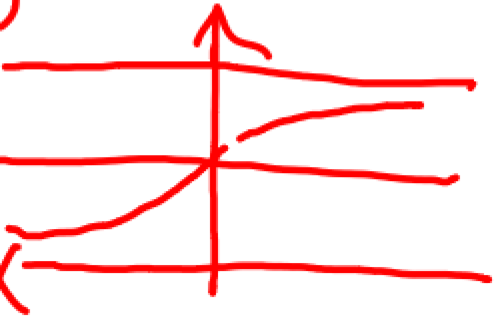
(1) 分段函数在分界点处的极限（在该分界点两侧函数表达式不同）$e^{\infty} \neq \infty$　$e^{+\infty}=+\infty$，$e^{-\infty}=0$



(2) e^{∞} 型极限 （如 $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$，$\lim\limits_{x\to\infty} e^{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}$）$=\infty$ ✗

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$

(3) $\arctan\infty$ 型极限 （如 不存在 $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$）$=\frac{\pi}{2}$ ✗



$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$　$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$

$x\to 0^+$　$\arctan\frac{1}{x}\to\frac{\pi}{2}$，　$x\to 0^-$　$\arctan\frac{1}{x}\to-\frac{\pi}{2}$

【例3】(1992年1, 2, 3) 当 $\underset{x\neq 1}{\underline{x\to 1}}$ 时，函数 $\underset{(x+1)}{\underline{\dfrac{x^2-1}{x-1}}}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限（ ）

$\boxed{e^{\infty}}$

(A) 等于2　　(B) 等于0　　(C) 为 ∞　　2 (D) 不存在但不为 ∞

【解】应选 (D)

本题中出现 e^{∞}，所以要分左、右极限

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^-}\overset{2\cdot 0}{\frac{x+1}{1}e^{\frac{1}{x-1}}}=2\times 0=0$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}\overset{2\cdot +\infty}{\frac{x+1}{1}e^{\frac{1}{x-1}}}=+\infty$$

所以，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在，但不是 ∞，应选 (D).

【例4】(2021年3) 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，求 a 的值.

$a=\frac{e^{-1}-e}{\pi}$

10分

【解】

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=a\cdot\frac{\pi}{2}+e$

$\|$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1-x)^{\frac{1}{x}}\right]=-\frac{\pi}{2}a+e^{-1}$

$\pi a=e^{-1}-e$

$a=\frac{e^{-1}-e}{\pi}$

（二）极限性质

1）有界性

收敛 $\underset{\times}{\rightleftarrows}$ 有界

(有极限) $(-1)^n$

发散 (没极限)

1）（数列）如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

$x_n \to a$

2）（函数）若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域有界(即局部有界).

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\underset{\times}{\rightleftarrows}$ $f(x)$ 在 x_0 局部有界

$|\sin\frac{1}{x}| \le 1$

$f(x)=\sin\frac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在

2）保号性

1)（数列） 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \neq 0$

（1）如果 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$x_n>0$（或 $x_n<0$）；

$A\geq 0$　　　$x_n\geq 0$　　$\frac{(-1)^n}{n}\to 0$

（2）如果存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$x_n\geq 0$（或 $x_n\leq 0$ 则 $A\geq 0$（或 $A\leq 0$），

$x_n>0$　　$A>0$　　$\frac{1}{n}>0,\ \frac{1}{n}\to 0$

2)（函数） 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

（1）如果 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $\delta>0$，当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)>0$（或 $f(x)<0$）．

8:07

（2）如果存在 $\delta>0$，当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)\geq 0$（或 $f(x)\leq 0$），那么 $A\geq 0$（或 $A\leq 0$）.

【例5】(1995年3) 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点 $x=a$ 处（   ）

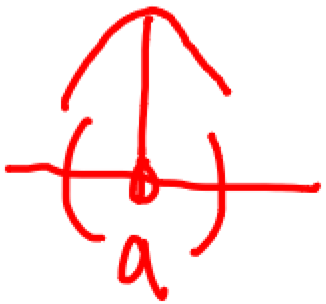
<0

（A）$f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$

✓（B）$f(x)$ 取得极大值　　（C）$f(x)$ 取得极小值

（D）$f(x)$ 的导数不存在.

极大



【解1】直接法　应选（B）

① 由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1<0$ 及极限的保号性可知，在点 $x=a$

保号性.

$$\frac{\overset{<0}{f(x)-f(a)}}{\underset{>0}{(x-a)^2}}<0$$

即　$f(x)-f(a)<0$　　② 定义 ✓

【例5】(1995年3) 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点 $x=a$ 处（　）

$= -(x-a)^2$

(A) $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$

(B) $f(x)$ 取得极大值　　(C) $f(x)$ 取得极小值

(D) $f(x)$ 的导数不存在.

① 何时用? (一般函数)

② 如何用? (特殊函数)

具体

【解2】排除法　应选 (B)

$f(a)=0$

令 $\boxed{f(x)=-(x-a)^2}$, 显然 $f(x)$ 符合题设条件，但在点 $x=a$ 处, $f(x)$ 可导, 且 $f'(a)=0$, 并取得极大值,

$f'(x)=-2(x-a)$.　$f'(a)=0$

则选项 (A) (C) (D) 都不正确，故应选 (B).

3）极限值与无穷小之间的关系;

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x) \qquad \text{其中} \quad \lim \alpha(x) = 0.$$

$f(x) - A = \alpha(x) \to 0$

$f(x) = A + \alpha(x)$

（三）极限存在准则

1）夹逼准则

若存在 N, 当 $n > N$ 时, $x_n \le y_n \le z_n$,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

a

n项和

2）单调有界准则

$x_{n+1} = f(x_n)$

单调有界数列必有极限.

* ① 证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在（单调有界）

② $a = f(a)$

单调增、有上界的数列必有极限;

单调减、有下界的数列必有极限;

【例6】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right]$. $=0$

小 大 $=1$

n项

$n\to+\infty$

【解】由于

$$\frac{n^2}{n^2+n}\le\left[\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right]\le\frac{n^2}{n^2+1}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right]=1.$

【例7】求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x[\frac{1}{x}]$.

$$\boxed{x-1 < [x] \le x}$$

【解】由于 $\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]\le\frac{1}{x}$ $(x>0)$

上式两端同乘以 x 得

$$1-x<x[\frac{1}{x}]\le 1$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{x\to 0^+} x[\frac{1}{x}]=1$

【例8】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}$.

$\dfrac{\infty}{\infty}$

【解1】由于

$n-2 \le 1$

$$0<\frac{2^n}{n!}=\frac{2\times\boxed{2\times2\times\cdots}\times2}{1\times\boxed{2\times3\times\cdots}\times n}<\frac{4}{n}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n}=0,$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$

$a_n=\dfrac{2^n}{n!}$

$a_{n+1}=f(a_n)$

$a_{n+1}=\dfrac{2}{n+1}a_n$

$a_n>0$

【例8】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}$.

【解2】令 $x_n=\dfrac{2^n}{n!}$，则 $x_{n+1}=x_n\cdot\dfrac{2}{n+1}$ $x_n>0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2}{n+1}\le 1$$ $x_n\downarrow$

则数列 $\{x_n\}$ 单调减，又 $x_n=\dfrac{2^n}{n!}>0$，即 $\{x_n\}$ 下有界，由单调有界准则知数列 $\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，

等式 $x_{n+1}=x_n\cdot\dfrac{2}{n+1}$ 两端取极限得 $a=a\cdot 0$

则 $a=0$.

（四）无穷小量

1）无穷小量的概念 若函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的极限为零，则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小量.

2) 无穷小的比较 设 $\alpha(x) \to 0,\ \beta(x) \to 0$

（1）高阶： 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$； 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$;

（2）低阶： 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$;

（3）同阶： 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$;

（4）等价： 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$； 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

（5）无穷小的阶： 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C \neq 0$， 称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

$x \to 0$

x

x^2 2

$1-\cos x$

x^{100} 100

$x \to \infty$

$\frac{1}{x} \to 0$

【例9】（2013年2） 设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\frac{\pi}{2}$，

则当 $x\to0$ 时，$\alpha(x)$ 是（　　）

（A）比 x 高阶的无穷小量；

（B）比 x 低阶的无穷小量；

（C）与 x 同阶但不等价的无穷小量；

（C）与 x 等价的无穷小量.

$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$

$\sim-\frac{1}{2}x^2$

$\sin\alpha(x)=\frac{\cos x-1}{x}\to0$

$\alpha(x)\to\pi$

$\lim\limits_{x\to0}\sin\alpha(x)=0\to\lim\limits_{x\to0}\alpha(x)=0$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}$　$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$

$=-\frac{1}{2}\neq0$

3) 无穷小的性质

（1）有限个无穷小的和仍是无穷小.

（2）有限个无穷小的积仍是无穷小.

（3）无穷小量与有界量的积仍是无穷小.

$\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right] = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} \to \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} = 0$

存　存?

无穷小　有界　$=0$

n项

（五）无穷大量

$|f(x)| \to +\infty$

1）无穷大量的概念 若函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时趋向于无穷，则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷大量.

$f(x) = \frac{1}{x} \to \infty$ $\quad x \to 0$

即：若对任意给定的 $M > 0$，总存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x)| > M$.

$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty}$

2）常用的一些无穷大量的比较

（1）当 $x \to +\infty$ 时

$$\ln^{\alpha} x \ll x^{\beta} \ll a^{x}$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1.$

（2）当 $n \to \infty$ 时

$$\ln^{\alpha} n \ll n^{\beta} \ll a^{n} \ll n! \ll n^{n}$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1.$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{100\cdots0} x}{x^{0.0\cdots1}}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^{10000}}{2^{n}}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n}}{n!}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{(100000)^{n}}{n!}=0$$

【例10】（2010年3）设 $f(x)=\ln^{10}x, g(x)=x, h(x)=e^{\frac{x}{10}}$

则当 x 充分大时，有（　）.

（A）$g(x)<h(x)<f(x)$　　（B）$h(x)<g(x)<f(x)$

（C）$f(x)<g(x)<h(x)$　　（D）$g(x)<f(x)<h(x)$

3）无穷大量的性质

有限

（1）两个无穷大量的积仍为无穷大量；

（2）无穷大量与有界变量之和仍为无穷大量.

无穷小:

① 和. ✗

② 积 ✓

③ . ✗.

$(n)+(-n)=0$

无穷大 · ① $\infty+\infty \neq \infty$

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

$\infty\cdot\infty=\infty$ ✓

无穷大 · 有界 = 无穷大 ✗

$n^2 \cdot \frac{n}{\sin n} \cdot \frac{1}{n} \to 1 \to 0$

4）无穷大量与无界变量的关系：

1）数列 $\{x_n\}$ 是无穷大量：　　$x_1 \cdots x_N$ 　N

$\forall M>0, \exists N>0$, 当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n|>M$.　　$\exists M, \forall n, |x_n| \le M$.

$|x_n|$都很大

2）数列 $\{x_n\}$ 是无界变量：

$\forall M>0, \exists N>0$, 使 $|x_N|>M$.　　$|x_n|$有很大

无穷大量 $\Rightarrow$ 无界变量　　$a_n = n \to \infty$

$1, 0, 3, 0, \cdots 0 \quad 0$　N

无界：非无穷大

【例11】数列 $x_n = \begin{cases} n, & n\text{为奇数}, \\ 0, & n\text{为偶数}. \end{cases}$ 是无界变量但不是无穷大量.

【例12】（1991年5） 设数列的通项为

$$x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, \to \infty & 若n为奇数,\\[2ex] \dfrac{1}{n}, \to 0 & 若n为偶数,\end{cases}$$

则当 $n\to\infty$ 时，x_n 是（　　）

(A) 无穷大量　　　　(B) 无穷小量

(C) 有界变量　　　　(D) 无界变量

【解】应选（D）

当 n 为奇数时　$x_n=\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}=n+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=+\infty$$

当 n 为偶数时　$x_n=\dfrac{1}{n}$　　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

5）无穷大量与无穷小量的关系

在同一极限过程中，如果 $f(x)$ 是无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)} \to 0$ 是无穷小；反之，如果 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大；

$\neq 0$

$f(x) \equiv 0$ $\dfrac{1}{0}$

【例13】$f(x) \equiv 0$，是 $x \to x_0$ 时的无穷小量，但 $\dfrac{1}{f(x)}$ 无意义.

$x_n = \frac{1}{n}$ —

$x_n = \frac{n-100}{n} \to 1 > 0$

$n > N$ $x_n > 0$

100

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

$y = A$

邻域

$x_0-\delta$ $x_0+\delta$.

$U(x_0,\delta)$ ✓ x_0

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pm\sin x}{x} = 0$ ✓

$\mathring{U}(x_0,\delta)$ ✓

去心邻域

$a_1 = -1,\ a_2 = -3,\ a_3 = \frac{1}{n} \to 0$