高数基础班（23）

23	三重积分、线面积分的概念、计算方法及举例（曲线积分）	P179-P190

主讲 武忠祥 教授

第十二章 多元积分学及其应用

第一节 三重积分

1. 定义 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{dV} = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\xi_k)\Delta v_k$

2. 性质

3. 计算

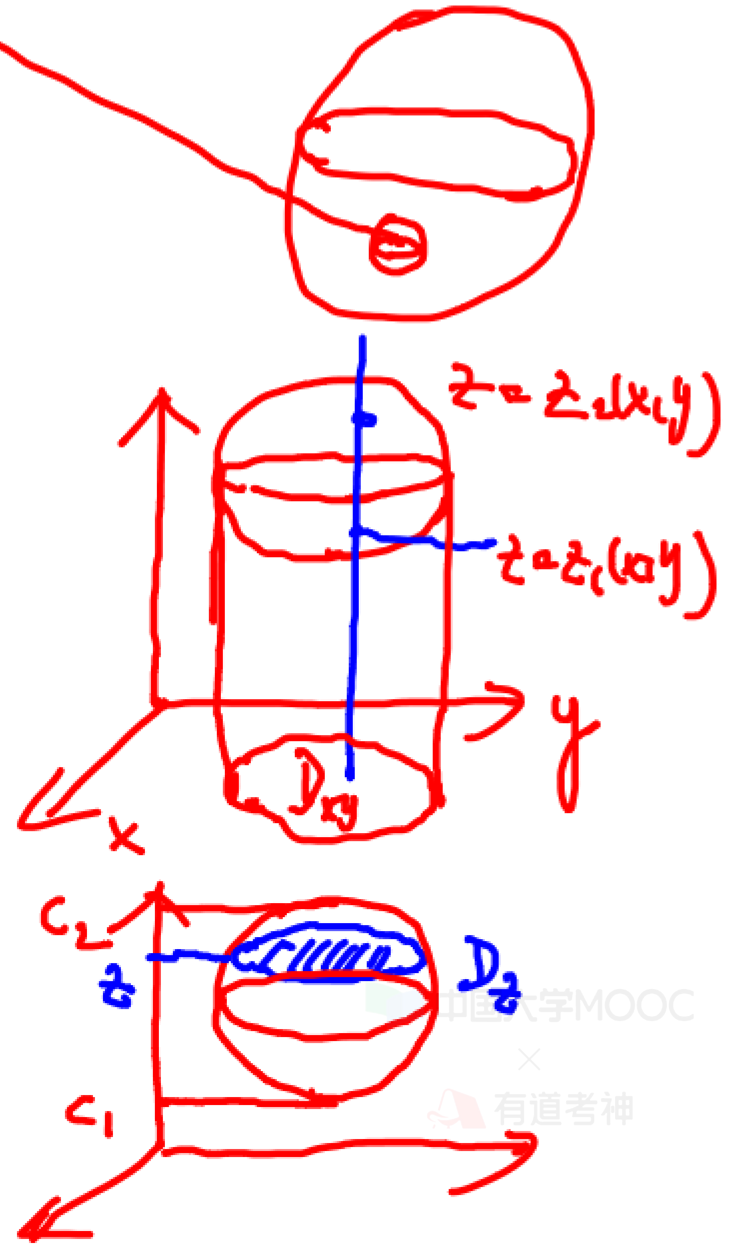
1) 直角坐标

i）先一后二；

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{dv} = \iint\limits_{D_{xy}} d\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

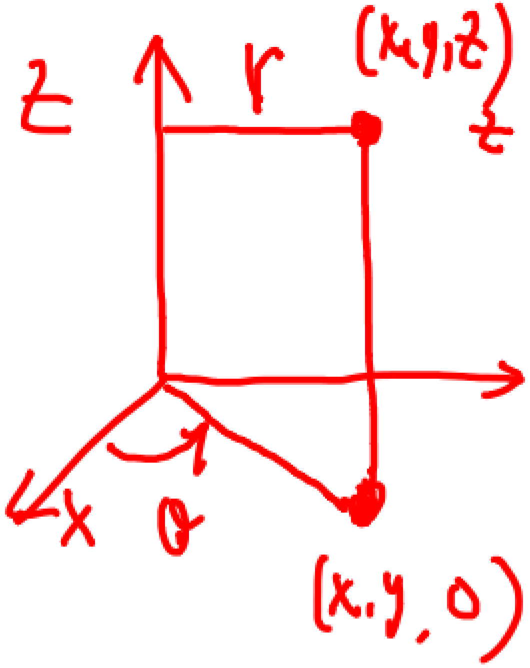
i i）先二后一；

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{dv} = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$



2) 柱坐标

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, & 0 \le r < +\infty, \\ y = r\sin\theta, & 0 \le \theta \le 2\pi, \\ z = z, & -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$



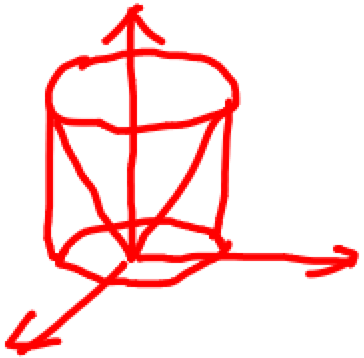
$r = c$

$$\boxed{dv = r\,dr\,d\theta\,dz}$$

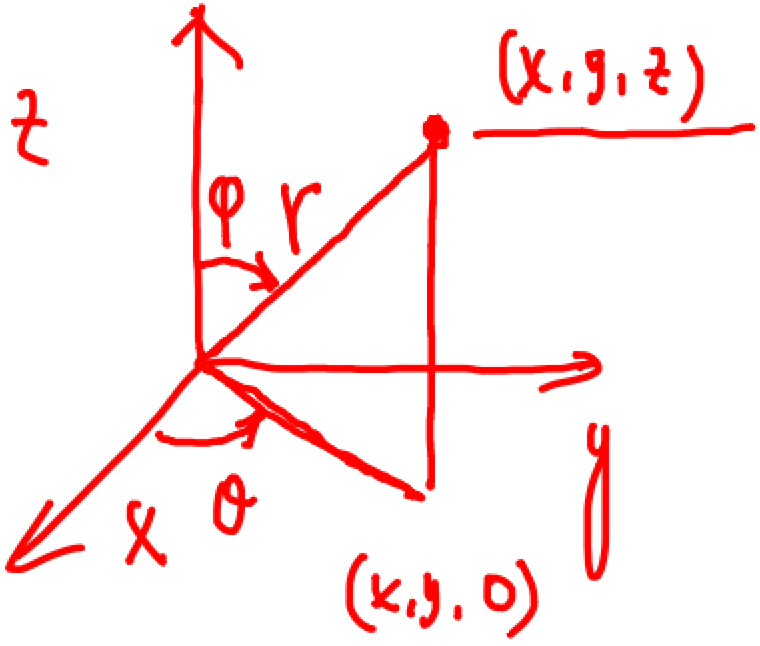
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = \iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

① $g(z)f(\sqrt{x^2+y^2}) = g(z)f(r)$

② Ω



3) 球坐标



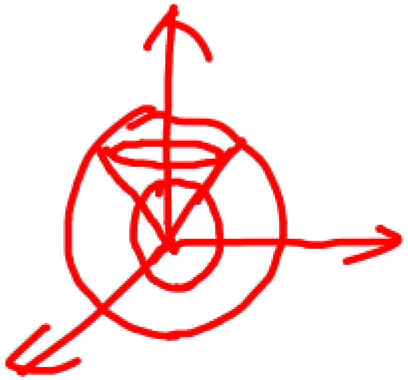
$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, & 0 \le r < +\infty, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, & 0 \le \varphi \le \pi, \\ z = r\cos\varphi, & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

$$\boxed{dv = r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta}$$

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\mathrm{dv} = \iiint_\Omega f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

① $f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = f(r)$

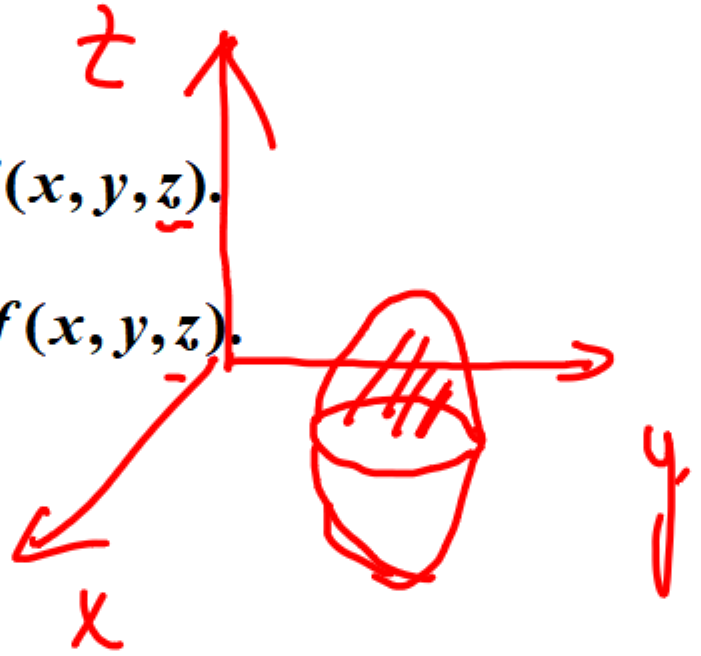
②



4) 利奇偶性

若积分域 Ω 关于 xoy 坐标面对称

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \begin{cases} 2\iiint_{\Omega_{z\geq 0}} f(x,y,z)\mathrm{d}V & f(x,y,-z)=f(x,y,z). \\ 0 & f(x,y,-z)=-f(x,y,z). \end{cases}$$



5)利用变量的对称性

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq R^2} (x^2+y^2)\,dV \overset{*}{=} \frac{2}{3}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq R^2} (x^2+y^2+z^2)\,dV$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{R} r^2 r^2 \sin\varphi \, dr$$

常考题型与典型例题

常考题型

三重积分计算

【例1】（1988年）设有空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0$;

及 $\Omega_2: x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$, 则（　　）

（A）$\iiint\limits_{\Omega_1} x\,dv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} x\,dv$　　> 0　　> 0

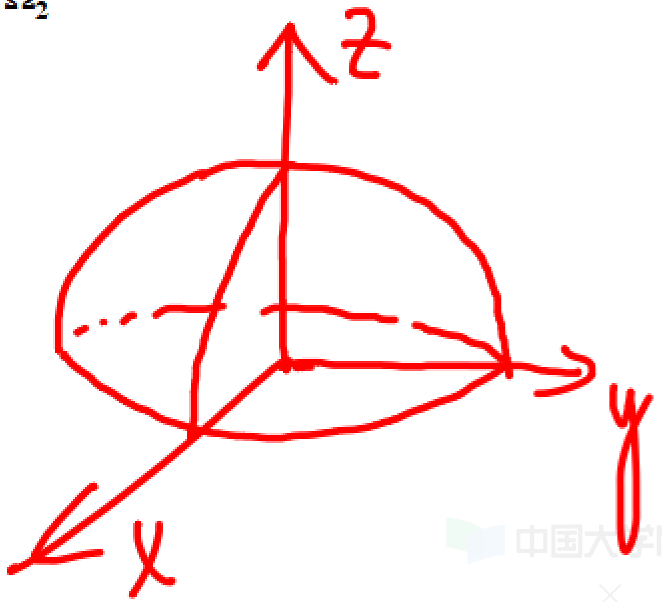
（B）$\iiint\limits_{\Omega_1} y\,dv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} y\,dv$　　> 0　　> 0

（C）$\iiint\limits_{\Omega_1} z\,dv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z\,dv$

（D）$\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\,dv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\,dv$　　4　0　　> 0

【解】

x　y



【例2】（2009年）设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$，则

$\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$ ________. $[\frac{4}{15}\pi]$

① $f(z)$

② D_z: $x^2+y^2\le 1-z^2$

S 好求

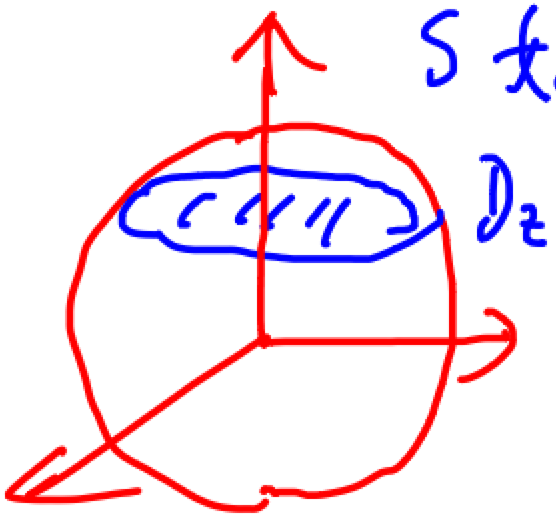
$\boxed{先=后一}$

【解1】

$$原式=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1} z^2\cdot\pi(1-z^2)\,\mathrm{d}z$$

$$=2\int_{0}^{1}\pi z^2(1-z^2)\,\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi$$



【例2】（2009年） 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\underline{\qquad\qquad}.$$

$[\frac{4}{15}\pi]$

【解2】

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2\,dV \overset{*}{=} \frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dV$$

对称性＋球坐标

$$\overset{*}{=} \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\,r^2\sin\varphi\,dr$$

$$=\frac{4}{15}\pi$$

【例3】（2015年）设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面成的空间区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=$ ____________.

z $2z$

【解1】由变量的对称性知 $\iiint\limits_{\Omega}xdxdydz=\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$,

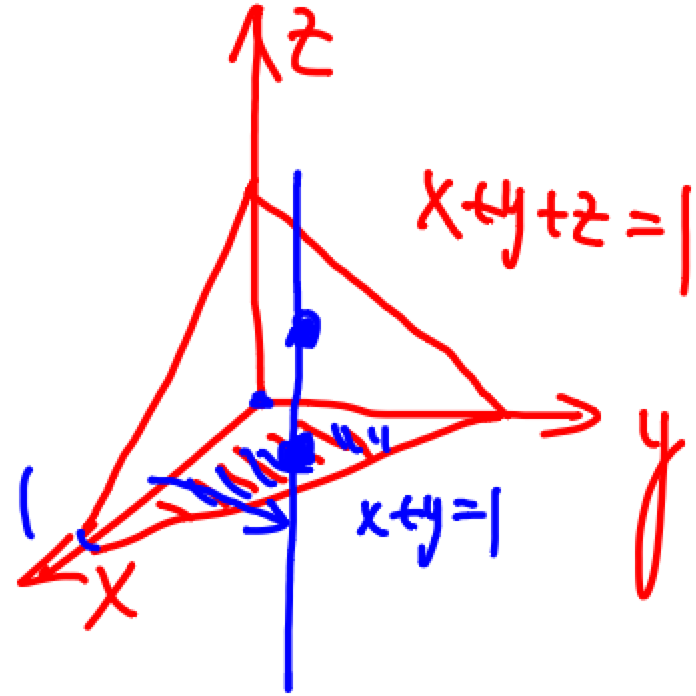
$$\iiint\limits_{\Omega}2ydxdydz=\iiint\limits_{\Omega}2zdxdydz,$$

则 $$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz\overset{*}{=}6\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$$

$$=6\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}zdz$$

$$=3\int_0^1dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2dy$$

$$=\int_0^1(1-x)^3dx=\frac{1}{4}$$

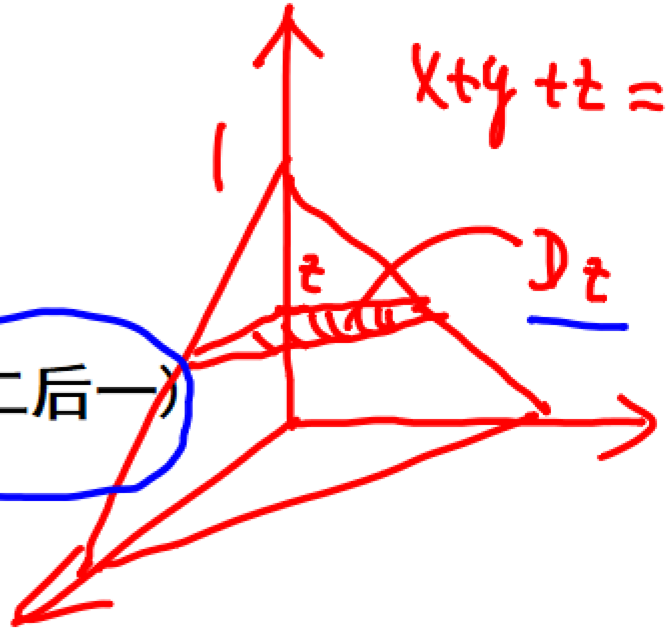


【解2】 由变量的对称性知

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz = 6\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$$

$$= 6\int_0^1 dz \iint\limits_{D_z} z\,dxdy \qquad \text{(先二后一)}$$

$$= 6\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\,dz = \frac{1}{4}$$

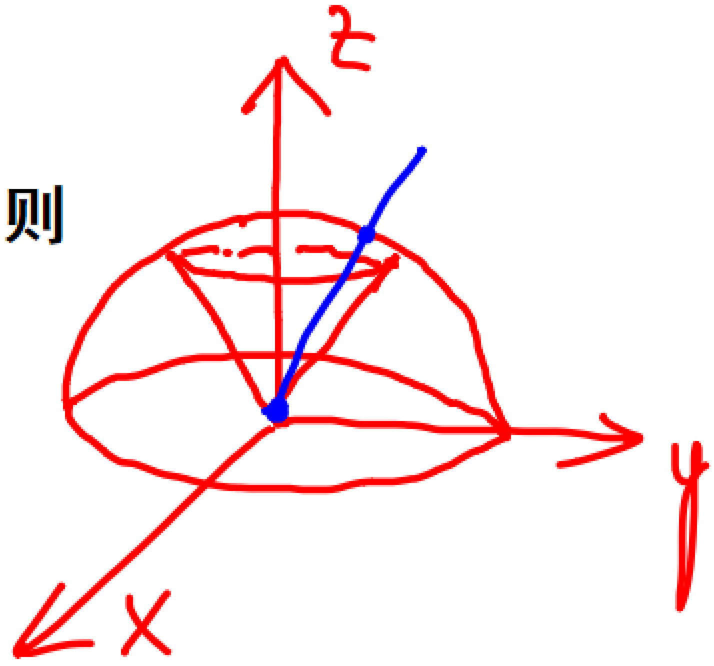


$x+y=1-z$

$1-z$

$\frac{1}{2}(1-z)^2$

【例4】（1989年）计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.



【解1】由 Ω 关于 yOz 坐标面对称，x 是 x 的奇函数, 则

①奇 $\iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}v=0.$

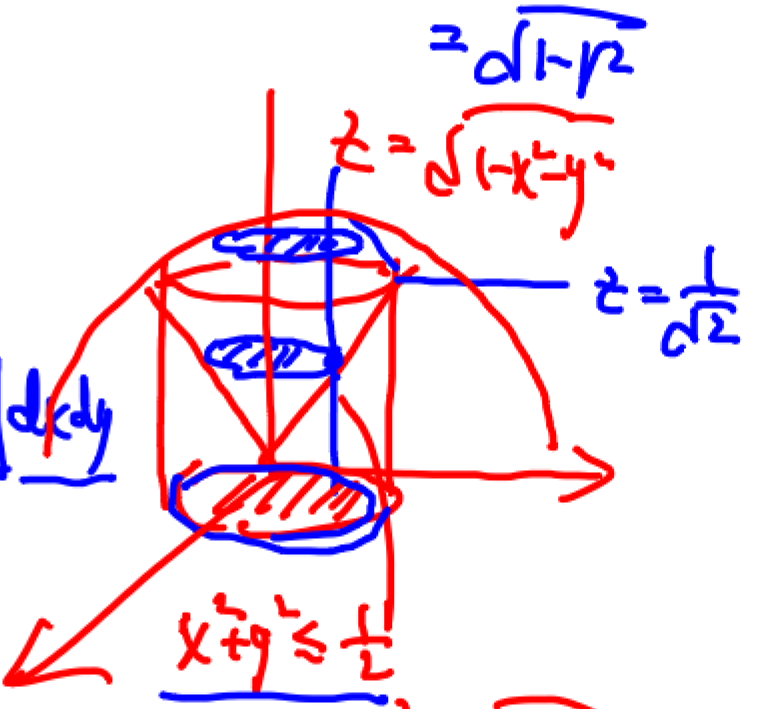
利用球面坐标计算

②球 $$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{8}.$$

所以 $$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\,\mathrm{d}v=\frac{\pi}{8}.$$

【例4】(1989年) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\,dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.



先一后二

【解2】 $\iiint\limits_{\Omega} z\,dV=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}z\,dz=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{1}{2}}\left[(1-x^2-y^2)-(x^2+y^2)\right]dxdy$

先二后一

【解3】 $\iiint\limits_{\Omega} z\,dV=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}z\,dxdy+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z^2}z\,dxdy$

$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}z\pi z^2\,dz+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}z\pi(1-z^2)\,dz$

柱

【解4】 $\iiint\limits_{\Omega} z\,dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dr\int_r^{\sqrt{1-r^2}}z\,r\,dz$

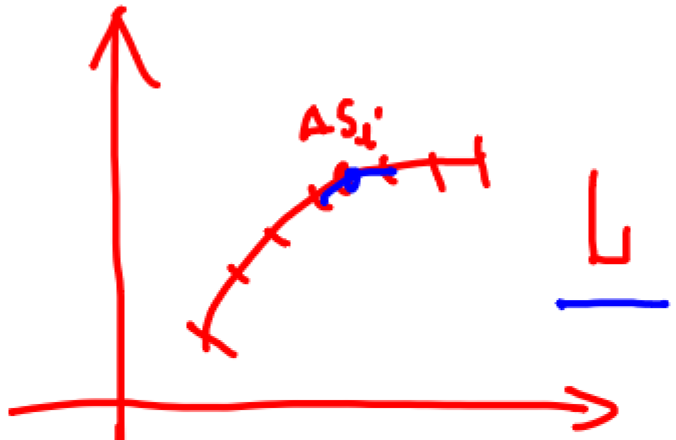
$z=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{r^2}=r$

$x^2+y^2=r^2$

$r=\sqrt{1-r^2}$

$r^2=1-r^2$ $\quad r=\frac{1}{\sqrt{2}}$

第二节 曲线积分



(一）对弧长的线积分（第一类线积分）

1. 定义 $\int_L f(x,y)ds = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$

2.性质 $\int_{L(\overset{\frown}{AB})} f(x,y)ds = \int_{L(\overset{\frown}{BA})} f(x,y)ds$（与路径方向无关）

3.计算方法:

1. 直接法

$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases}$

1）若 $C:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta$

大

则 $\boxed{\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t}$

小

2）若 $C: y = y(x), \quad a \le x \le b$

则 $\boxed{\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x}$

3）若 $C:\rho=\rho(\theta)\quad \alpha\le\theta\le\beta$

则 $\int_C f(x,y)ds=\boxed{\int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta}$

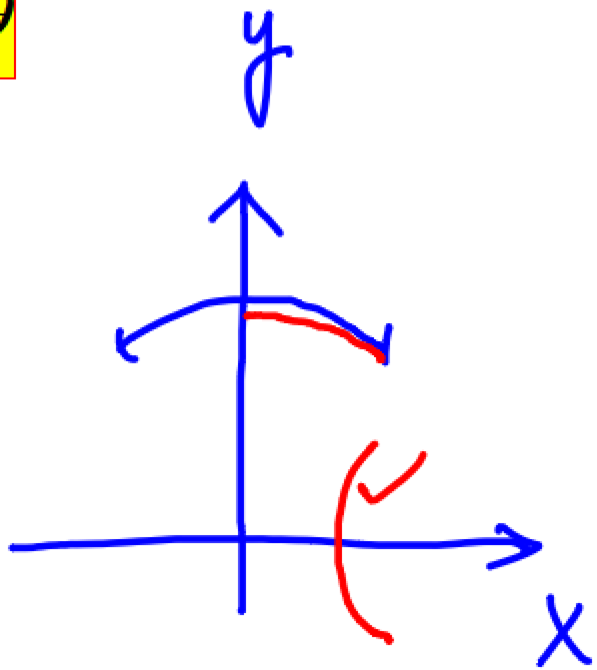
2. 利用奇偶性

i）若积分曲线关于 y 轴对称，则.

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s=\begin{cases}2\int_{C_{x\ge0}}f(x,y)\mathrm{d}s, & f(-x,y)=f(x,y)\\ 0, & f(-x,y)=-f(x,y)\end{cases}$$

ii）若积分曲线关于 x 轴对称，则

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s=\begin{cases}2\int_{C_{y\ge0}}f(x,y)\mathrm{d}s, & f(x,-y)=f(x,y)\\ 0, & f(x,-y)=-f(x,y)\end{cases}$$

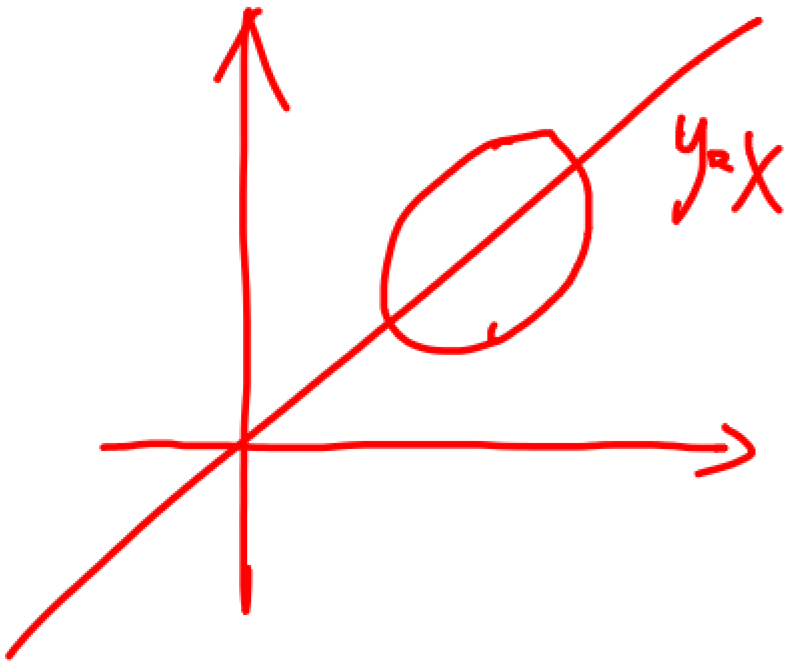


3.利用对称性

若积分曲线关于直线 $y=x$ 对称，则

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s=\int_C f(y,x)\mathrm{d}s$$

特别的 $\int_C f(x)ds=\int_C f(y)ds$



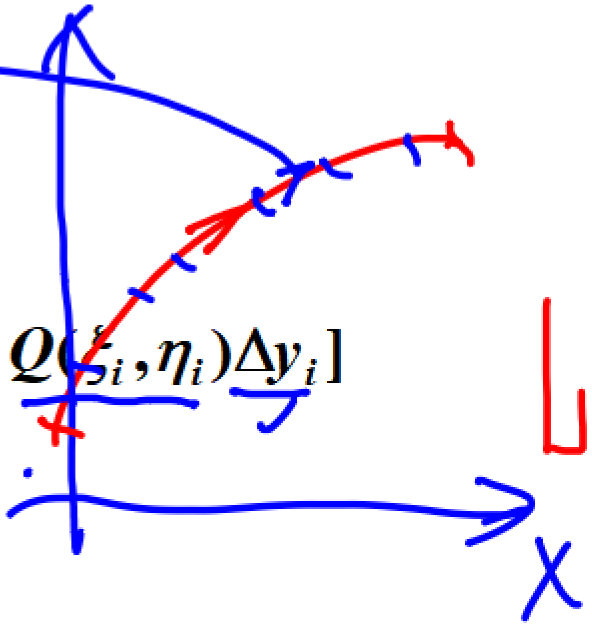
设空间曲线 L 的方程为：

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t) \qquad (\alpha\le t\le\beta)$$

则

$$\boxed{\int_L f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt}$$

（二）对坐标的线积分（第二类线积分）



1. 定义 $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$$

2. 性质 $\int_{L(\overset{\frown}{AB})} Pdx + Qdy = -\int_{L(\overset{\frown}{BA})} Pdx + Qdy$

（与积分路径方向有关）

3. 计算方法 (平面)

1)直接法 设 $L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$, 则

终

$$\boxed{\int_L Pdx + Qdy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]dt}$$

起

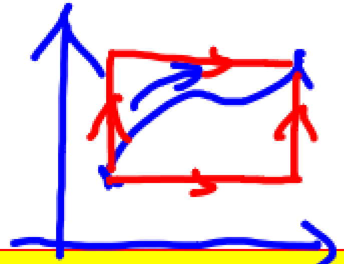
2)格林公式 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$

3)补线用格林公式

4)利用线积分与路径无关

i）判定：$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ （区域 D 单连通）

ii）计算：



✓ a）改换路径；

✓ b）利用原函数 $\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_1)$

$\| $ dF

$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \mathrm{d}F(x,y)$

求原函数方法：①偏积分；②凑微分.

L封闭 — 是 — 格林

否 — 补线格林 ✓ / 直接算 / 与路径无关 ✓

4. 两类线积分的联系：

$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \oint_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\mathrm{d}s$

L

5.计算方法（空间）

1)直接法

设 $L: x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

终

$$= \int_\alpha^\beta \{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t) + R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt$$

起

2)斯托克斯公式

$$\oint_L P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)dz$$

$$= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

Σ 平面

$$= \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

曲线积分计算

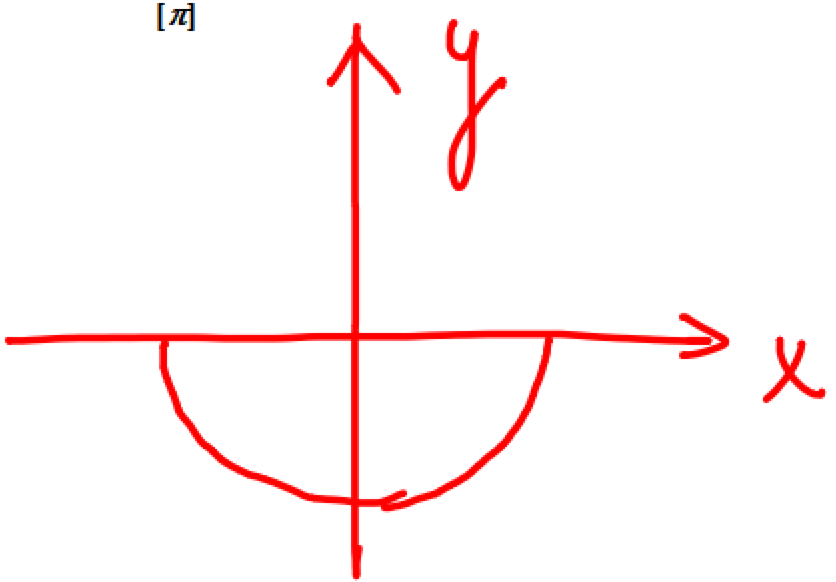
一.第一类曲线积分的计算

$x^2+y^2=1$

【例1】（1989年）设平面曲线 L 为下半圆 $y=-\sqrt{1-x^2}$，

则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s=$ ________.

[π]



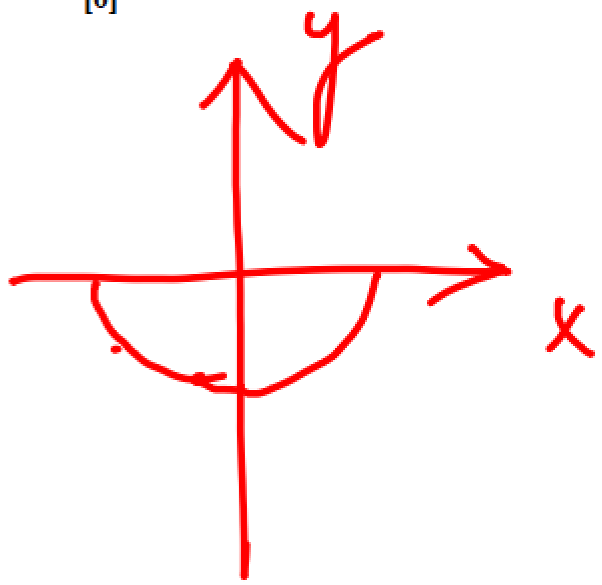
【解】

$原式=\int_L 1\,ds=\pi$

【例1】（1989年）设平面曲线 L 为下半圆 $y=-\sqrt{1-x^2}$，

则曲线积分 $\int_L \overset{\text{奇}}{x}\,\mathrm{d}s=$ ________.

[0]



【解】

原式 $=0$

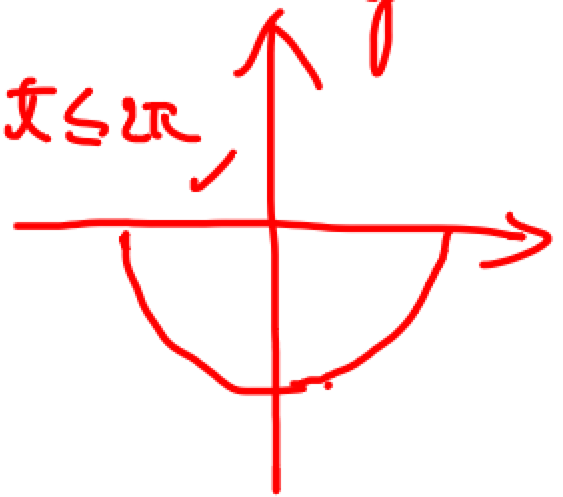
【例1】（1989年）设平面曲线 L 为下半圆 $y=-\sqrt{1-x^2}$，

则曲线积分 $\int_L y\,ds=$ ________.

[−2]

【解】

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \quad \pi\le t\le 2\pi$$



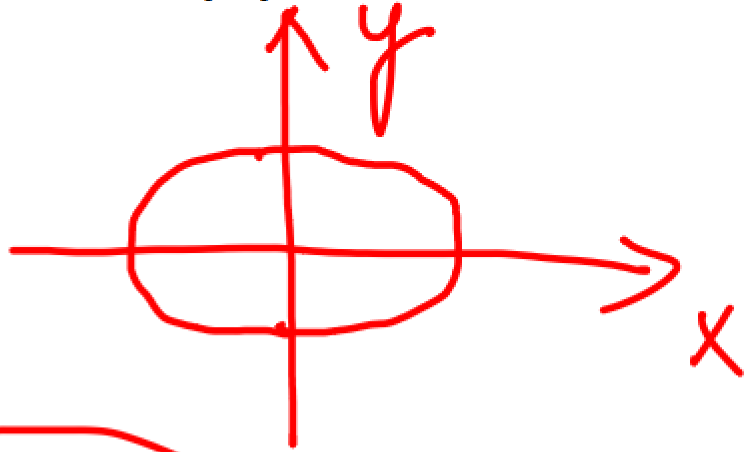
$$\text{原式}=\int_{\pi}^{2\pi}\sin t\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt$$

$$=-2$$

【例2】（1998年）设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a

则 $\oint_L(\underbrace{2xy}_{0}+3x^2+4y^2)\,ds=$ ____________.

[12a]



【解】

$$原式 \stackrel{*}{=} \oint_L (3x^2+4y^2)\,ds$$

$$= 12\oint_L\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\right)ds = 12\boxed{\oint_L 1\,ds}$$

$$=12a$$

【例3】（2009年）已知曲线 $L: y=x^2\ (0\le x\le\sqrt{2})$，则

$\int_L x\,\mathrm{d}s=$ ____.

[$\frac{13}{6}$]

【解】

$$\int_L x\,ds=\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+4x^2}\,dx \qquad \frac{1}{8}d(1+4x^2)$$

$$=\frac{13}{6}$$

二. 第二类曲线积分的计算

【例4】（2004年）设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分 $\int_L x\,\mathrm{d}y-2y\,\mathrm{d}x=$ ________. $[\frac{3}{2}\pi]$

【解】 $x=\sqrt{2}\cos t$，$y=\sqrt{2}\sin t$ 　直接法

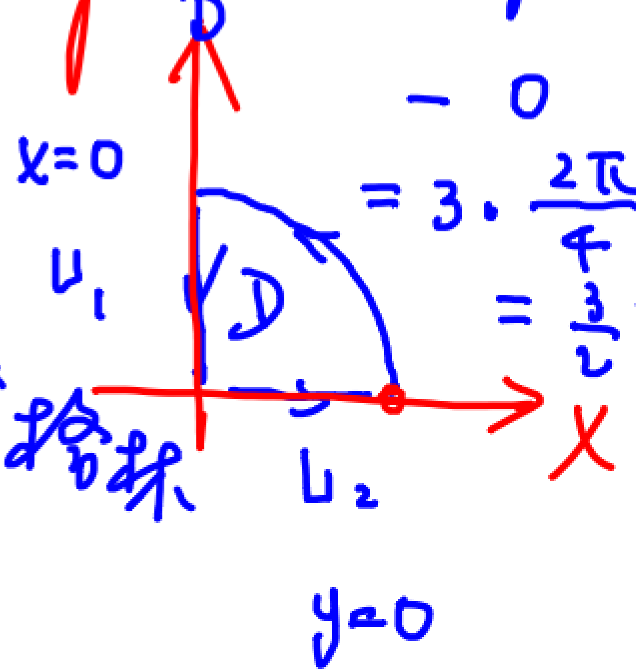
$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(\sqrt{2}\cos t)^2+2\sqrt{2}^2\sin^2 t\right]dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[2\cos^2 t+4\sin^2 t\right]dt=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$$

[解2] 补线格林

$$\text{原式}=\oint_{L+L_1+L_2}-\int_{L_1}-\int_{L_2}$$

$$=\iint_D(1+2)\,dx\,dy-0-0=3\cdot\frac{2\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$$



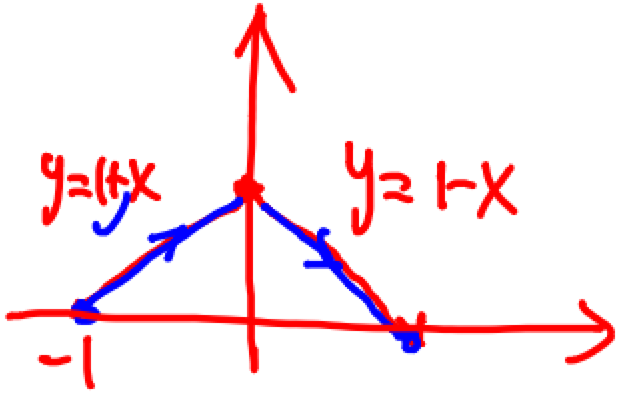
【例5】（2010年）已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|\ (x\in[-1,1])$，

起点是 $(-1,0)$，终点为 $(1,0)$，则曲线积分

$$\int_L xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=\_\_\_\_\_\_.$$

【解1】 $L=L_1+L_2$，其中 $L_1: y=1+x\ (-1\le x\le 0)$

$L_2: y=1-x\ (0\le x\le 1)$



$$\int_{L_1} xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{0}[x(1+x)+x^2]\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}(2x^2+x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$$

$$\int_{L_2} xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=$$

$$\int_{0}^{1}[x(1-x)-x^2]\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}(x-2x^2)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}$$

$$\int_L xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=0$$

【例5】（2010年）已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|\,(x\in[-1,1])$，起点是 $(-1,0)$，终点为 $(1,0)$，则曲线积分

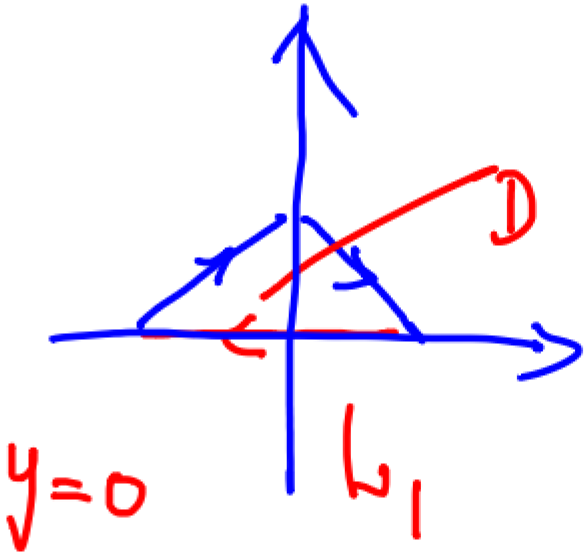
$$\int_L xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \underline{\qquad\qquad}.$$

【解2】补线用格林公式 *

$$原式 = \oint_{L+L_1} - \int_{L_1}$$

$$= \iint_D [2x - x]\,dxdy - 0$$

$$= \iint_D x\,dxdy = 0$$

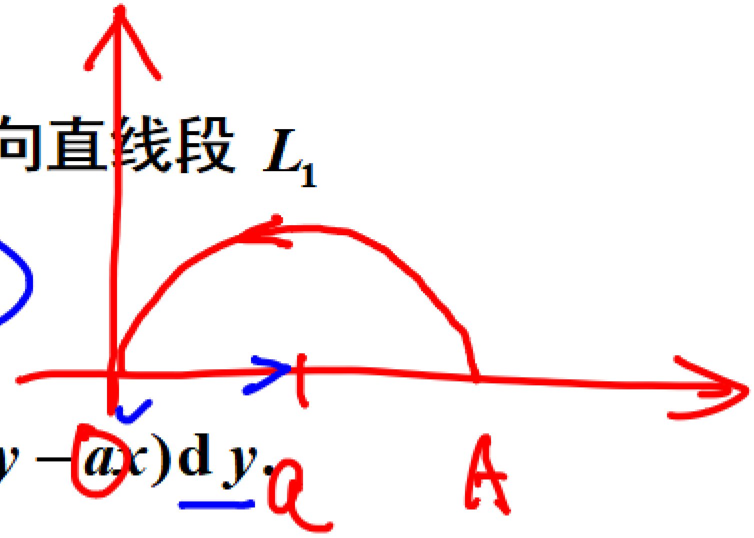


【例6】(99年) 求 $I=\int_L (\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\,\mathrm{d}y$

$e^x\cos y-b$ $\quad$ $e^x\cos y-a$

其中 a,b 为正的常数，~~L 为~~从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$

到点 $O(0,0)$ 的弧.



【解1】 添加从点 $O(0,0)$ 沿 $y=0$ 到点 $A(2a,0)$ 的有向直线段 L_1

$$I=\oint_{L\cup L_1}(\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\,\mathrm{d}y$$

$$-\int_{L_1}(\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\,\mathrm{d}y.$$

$y=0$

$$I_1=\iint_D(b-a)\,\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{2}a^2(b-a),$$

$$I_2=\int_0^{2a}(-bx)\,\mathrm{d}x=-2a^2b.$$

补线格林

从而 $I=I_1-I_2=\dfrac{\pi}{2}a^2(b-a)+2a^2b=\left(\dfrac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\dfrac{\pi}{2}a^3.$

【解2】 $$I=\int_L (\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\,\mathrm{d}y$$

无关·

$$=\int_L \mathrm{e}^x\sin y\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\cos y\,\mathrm{d}y-\int_L b(x+y)\,\mathrm{d}x+ax\,\mathrm{d}y.$$

前一积分与路径无关，所以

$$\int_L \mathrm{e}^x\sin y\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\cos y\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^x\sin y\Big|_{(2a,0)}^{(0,0)}=0.$$

对后一积分，取得参数方程: $\begin{cases}x=a+a\cos t,\\ y=a\sin t,\end{cases}$

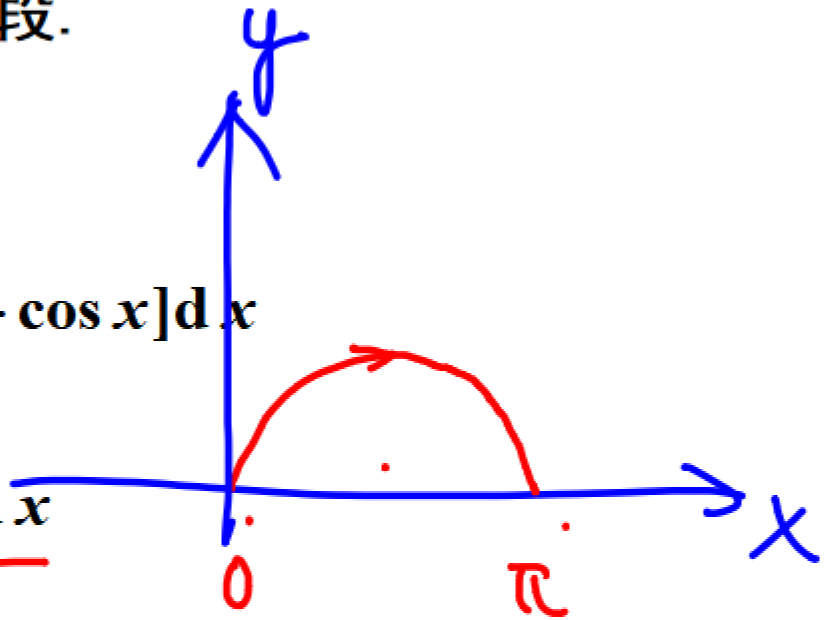
$$\int_L b(x+y)\,\mathrm{d}x+ax\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\pi}(-a^2b\sin t-a^2b\sin t\cos t-a^2b\sin^2 t+a^3\cos t+a^3\cos^2 t)\,\mathrm{d}t$$

$$=-2a^2b-\frac{1}{2}\pi a^2b+\frac{1}{2}\pi a^3,$$

【例7】（2008年）计算曲线积分 $\int_L \sin 2x \,\mathrm{d}x + 2(x^2-1)y\,\mathrm{d}y$

其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段.



【解1】 直接法

$$\int_L \sin 2x\,\mathrm{d}x + 2(x^2-1)y\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}[\sin 2x + 2(x^2-1)\sin x\cdot\cos x]\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}\sin^2 x = x^2\sin x\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= (-2)\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

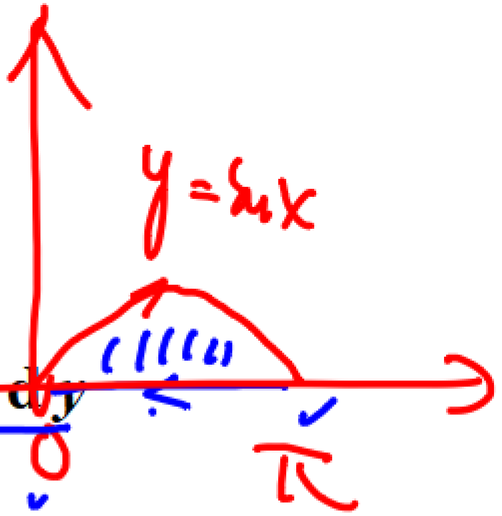
$$= -2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx = (-2\pi)\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{2}$$

$\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

【解2】取 L_1 为 x 轴上从点 $(\pi,0)$ 到点 $(0,0)$ 的一段，

y=0



$$\int_L \sin 2x\,\mathrm{d}x + 2(x^2-1)y\,\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{L+L_1} \sin 2x\,\mathrm{d}x + 2(x^2-1)y\,\mathrm{d}y - \int_{L_1} \sin 2x\,\mathrm{d}x + 2(x^2-1)y\,\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_D 4xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_\pi^0 \sin 2x\,\mathrm{d}x = -\int_0^\pi \mathrm{d}x\int_0^{\sin x} 4xy\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^\pi$$

$$=-2\int_0^\pi x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

补线格林

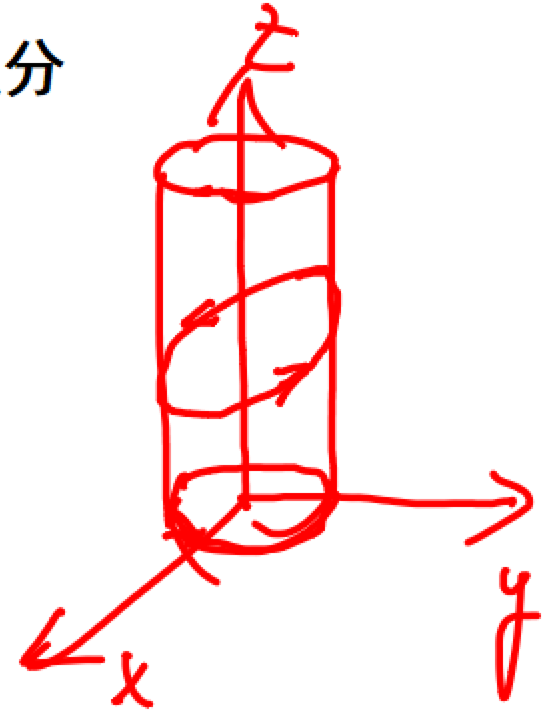
$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx$$

$$=(-2)\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$=-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = (-2\pi)\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{2}$$

【例8】（2014年）设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分

$$\oint_L z\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}z = \underline{\qquad\qquad}.$$



【解1】直接法　参数方程

$$x=\cos t, y=\sin t, z=-\sin t$$

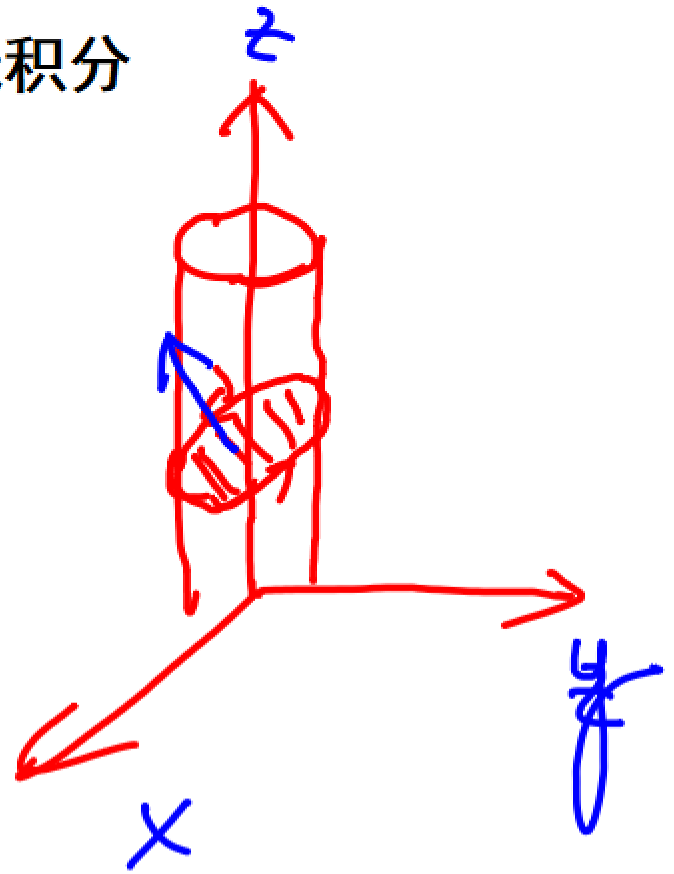
$$I=\int_0^{2\pi}(\sin^2 t-\sin t\cos t)dt$$

$\frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_0^{2\pi}$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt=4\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\pi$$

【例8】（2014年）设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L z\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}z=$ ________.

$y=-z$



【解2】 利用斯托克斯公式

$$\oint_L z\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}z=\iint_\Sigma (1-0)dydz+(1-0)dzdx+(0-0)dxdy$$

$$=\iint_\Sigma dzdx$$

$$=\iint_{D_{zx}} dzdx=\pi$$

$x^2+z^2=1$

【例8】（2014年）设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分

曲 平面

$\oint_L z\,dx + y\,dz =$ ________.

$-(ydx+ydy)$　　$\boxed{z=-y}$

$C: x^2+y^2=1$

【解3】 化为平面线积分

大

$$\oint_L z\,dx + y\,dz = \oint_C (-ydx - ydy) \qquad (C: x^2+y^2=1)$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy \qquad \text{（格林公式）}$$

$$= \pi$$

高数基础班（23）

23	三重积分、线面积分的概念、计算方法及举例（曲线积分）	P179-P190

主讲 武忠祥 教授