高数基础班 (3)

3 常考题型举例: 1.极限概念、性质、存在准则, 2.求极限方法举例 (基本极限;等价代换;有理运算)

P16-P24





主讲 武忠祥 教授



常考题型与典型例题

1)极限的概念、性质及存在准则 — 是 超级. 证明级



- 2) 求极限
- 3) 无穷小量阶的比较



有道考神

(一) 极限的概念、性质及存在准则

【例14】(1999年2)"对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$, 总存在正数 N,

 $||x_n|| \le 2\varepsilon$ "是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 为

- (A) 充分条件但非必要条件;
- (B) 必要条件但非充分条件.
- √(C) 充分必要条件.
 - (D) 既非充分条件又非必要条件.



$$\frac{1}{1000} \times \frac{1}{1000} = 0$$

【例15】(2015年3)设 $\{x_n\}$ 是数列,下列命题中不正确的是

(A) 若
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
, 则 $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$. ✓

(B) 若
$$\lim_{n \to \infty} x_{2n}^{\vee} = \lim_{n \to \infty} x_{2n+1}^{\vee} = a$$
, 则 $\lim_{n \to \infty} x_n = a$,

(C) 若
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
, 则 $\lim_{n\to\infty} x_{3n} = \lim_{n\to\infty} x_{3n+1} = \underline{a}$.

(D) 若
$$\lim_{n\to\infty} x_{3n} = \lim_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$$
, 则 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$,



【解】应选(D)

由于对任意给定的 M>0 及 $\delta>0$, 总存在

$$(x_n) = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, (y_n) = \frac{1}{2n\pi}, \rightarrow 0$$

使得 $0 < x_n < \delta$, $0 < y_n < \delta$, 此时

$$\frac{1}{x_n^2} \sin \frac{1}{x_n} = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2 > M, \qquad \frac{1}{y_n^2} \sin \frac{1}{y_n} = 0 < M,$$



(二) 求极限

常用的求极限方法(8种)

利用基本极限求极限 🗸 方法2 利用等价无穷小代换求极限 / 方法3 利用有理运算法则求极限 方法4 利用洛必达法则求极限 方法5 利用泰勒公式求极限 方法6 利用夹逼原理求极限 方法7 利用单调有界准则求极限 🗸

方法8 利用定积分定义求极限



$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{1} = 1$ $x\rightarrow 0$ $x\rightarrow 0$ \boldsymbol{x}

2) (1°)′ 型极限常用结论

若
$$\lim \alpha(x) = 0$$
, $\lim \beta(x) = \infty$, 且 $\lim \alpha(x)\beta(x) = A$

则
$$\lim_{\alpha \to \infty} (1 + \alpha(x))^{\beta(x)} = e^{A}$$

 $|\alpha = \lim_{\alpha \to \infty} (|\alpha|)^{\alpha} |\alpha|$

可以归纳为以下三步:

1)写标准形式 原式 =
$$\lim[1 + \alpha(x)]^{\beta(x)}$$
;

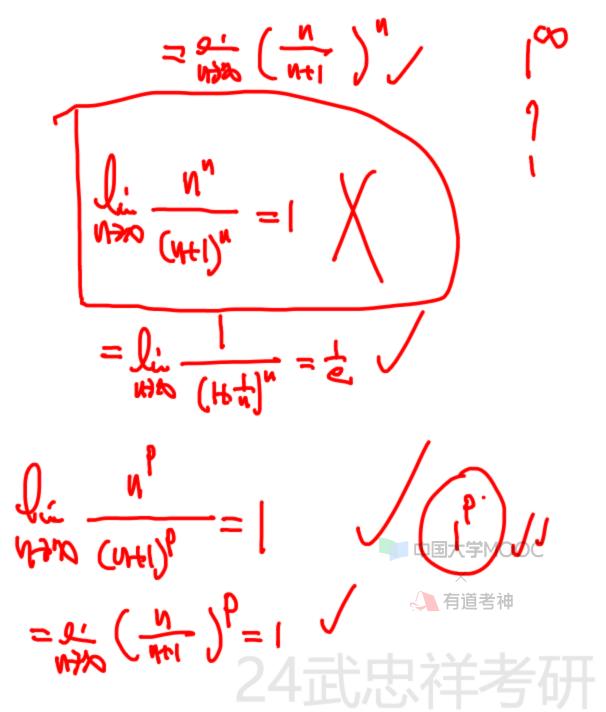
2)求极限
$$\lim \alpha(x)\beta(x) = A;$$

$$9$$
 原式 = e^A .



【例17】
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} \sin \frac{1}{n}$$
【解】原式 =
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} n \sin \frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$



【例18】极限
$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x = 20[0(-)]$$

(A) 1 (B) e (C) e^{a-b} (D) e^{b-a}
【解1】直接法 $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x-a} \right)^x \left(\frac{x}{x+b} \right)^x$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{a}{x} \right)^{-x} (1 + \frac{b}{x})^{-x}$$

$$= e^a \cdot e^{-b} = e^{a-b}$$





【例19】
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$$
,其中 $a>0, b>0, c>0$.



【解】原式 =
$$\lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} - 3}{3} \right]^n$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} - 3}{3} \right) n$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \to \infty} \frac{(\sqrt[n]{a} - 1) + (\sqrt[n]{b} - 1) + (\sqrt[n]{c} - 1)}{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{3} (\ln a + \ln b + \ln c)$$

$$= \ln \sqrt[3]{abc}$$



有道考神

原式 =
$$e^{\ln \sqrt[3]{abc}}$$
 = $\sqrt[3]{abc}$

(3)

方法2 利用等价无穷点

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha_1 - \beta_1} = 1$$



(1) 代换原则:

若
$$\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$$
, 则

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1}$$

若
$$\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1,$$
且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1$ 则 $\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$

$$\int_{\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\alpha_1 - \beta_1}.$$

若
$$\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$$
, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1$. 则 $\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$.





(2) 常用的等价无穷小: 当 $x \to 0$ 时

$$\lim_{X \to s_1 X} \frac{X - s_2 X}{X^2} = \lim_{X \to s_1 \to s_2} \frac{1 - v_3 X}{3 X^2} = \frac{1}{5}$$

$$- \lim_{x \to \infty} (x) \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1;$$

$$a^{x}-1 \sim x \ln a$$
, $(1+x)^{\alpha}-1 \sim \alpha x$, $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^{2}$

$$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^{3}$$

$$\arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^{3}$$

$$\tan x - x \sim \frac{1}{3} x^3$$

$$\arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^3 \qquad x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3$$

$$\frac{x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2}{80 - 80}$$

△ 有道考神

【例20】(2016年3) 已知函数 f(x)满足

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = 2, \quad \emptyset \lim_{x\to 0} f(x) = \underline{\hspace{1cm}}.$$

【解】由
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = 2$$
 及 $\lim_{x\to 0} (e^{3x}-1) = 0$ 知,

$$\lim_{x \to 0} f(x) \sin 2x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + f(x) \sin 2x} - 1}{e^{3x} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} f(x) \sin 2x}{3x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} f(x) \cdot 2x}{3x}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}f(x)=2$$

中国大学MO × 有道考神

故 $\lim_{x \to 0} f(x) = 6$.

【例21】 (2015年, 1)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} =$$

【解1】原式 =
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

【例22】(2009年. 3)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1 + x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

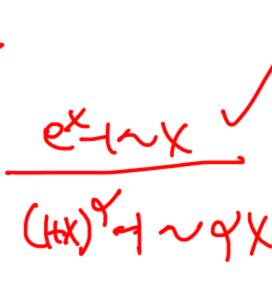
【解1】原式 = $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x}(e^{1-\cos x} - 1)}{\frac{1}{3}x^2}$

= $e\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{1}{3}x^2}$

= $e\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{1}{3}x^2}$

[解2】原式 = $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{1}{3}x^2}$

[解3】原式 = $\lim_{x\to 0} \frac{e^{1-e^{x}}}{\frac{1}{3}x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{1-e^{x}}}{\frac{1}{3}x^2} =$



【例23】(2006年2) 求极限
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$$

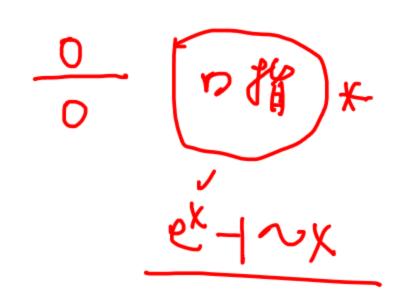
【解1】原式
$$=\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \left[e^{x \ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)} - 1 \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\int x \ln\left(\frac{2 + \cos x}{3}\right)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\cos x - 1}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$



(等价无穷小代换)

(等价无穷小代换)



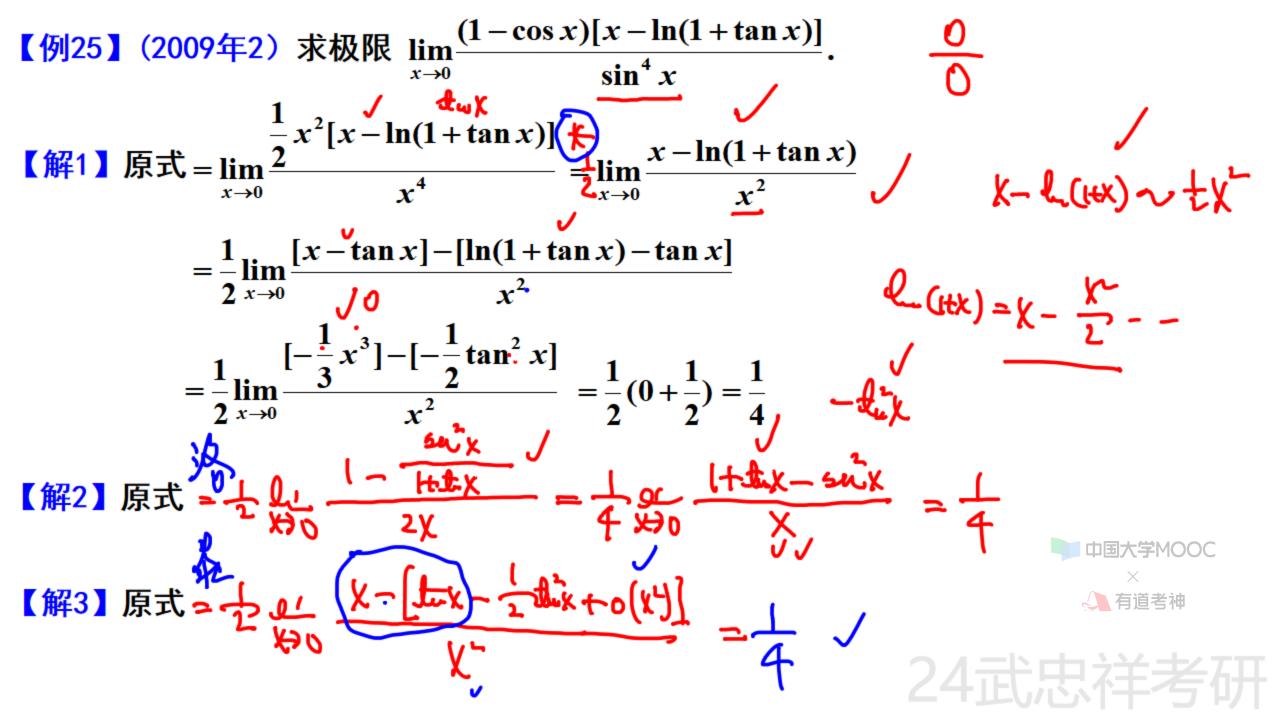
【注】当
$$(x \to 0)$$
 时, $(1+x)^{\alpha}-1\sim \alpha x$. 这个结论推广可得:

若
$$\alpha(x) \to 0$$
 $\alpha(x)\beta(x) \to 0$,
则 $(1+\alpha(x))^{\beta(x)}-1 \sim \alpha(x)\beta(x)$

[例24] 求极限
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{\arctan x - \tan x}$$
.

[例24] $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac$





方法3 利用有理运算法则求极限

有理运算法则

若 $\lim_{x \to a} f(x) = A$, $\lim_{x \to a} g(x) = B$, 那么:

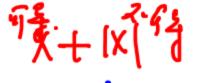
$$\lim (f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$$

$$\lim (f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$$

$$\lim \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \quad (B \neq 0)$$

【注】1)存在 ± 不存在 = 不存在}

- 2) 不存在 ± 不存在 = 不一定.
- 3) 存在 $x \div$ 不存在 = 不一定;
- 4) 不存在x÷不存在 = 不一定.

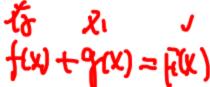


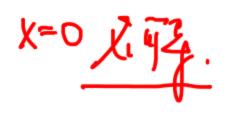












常用的结论: 1)
$$\lim_{f(x)=A\neq 0} f(x) = A = 0$$
 $\Rightarrow \lim_{f(x)g(x)=A} f(x) = A = 0$ $\Rightarrow \lim_{f(x)=0} f(x) = 0$ $\Rightarrow \lim_{f(x)=0} f(x$

【例26】(2010年3)若
$$\lim_{x\to 0}$$
 $\left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a\right)e^{x}\right] = 1$, 则 a 等于()

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

$$1 = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^{x} \right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1 - e^{x}}{x} \right] + a \lim_{x \to 0} e^{x}$$

$$= -1 + a$$

则
$$a=2$$
 故应选 (C).



【例27】(2018年3) 已知实数 a,b 满足 $\lim [(ax+b)e^x-x]=2$, $x \rightarrow +\infty$ $\lim be^x + \lim (axe^x - x)$ $x \rightarrow +\infty$ $=b+\lim x(ae^x-1)$ $x \rightarrow +\infty$ $= b + \lim x(e^x - 1)$ (a=1) $x \rightarrow +\infty$ $= b + \lim_{n \to \infty} x \cdot \frac{1}{n}$ $x \rightarrow +\infty$ \boldsymbol{x} = b + 1

故 a=b=1.

有 有道考神

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5 \pm 0$$

【解】由于
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x (\cos x - b)}{e^x - a} = \underbrace{\frac{0}{5 \neq 0}}$$

$$\coprod_{x\to 0} \lim \sin x(\cos x - b) = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} (e^x - a) = 0,$$
 \mathbb{P} $a = 1.$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} (\cos x - b)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} (\cos x - b) = 1 - b$$

由
$$1-b=5$$
 得, $b=-4$.



[例29] (1997年2) 求极限
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$$
 [解1] 原式 = $\lim_{x \to -\infty} \frac{(-x)[\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x}]}{(-x)\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}}$ = $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}}$ = 1

[解2] 原式 = $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1}}{\sqrt{x^2 + \sin x}} + \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$ 中国大学MOOC 不有過考神

$$=2-1+0=1$$