高数基础班（3）

3	常考题型举例：1.极限概念、性质、存在准则，2.求极限方法举例（基本极限；等价代换；有理运算）	P16-P24

主讲 武忠祥 教授

常考题型与典型例题

1）极限的概念、性质及存在准则 —— 选择题．证明题　难点．

2）求极限　重点

3）无穷小量阶的比较

（一）极限的概念、性质及存在准则

【例14】（1999年2）“对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，总存在正数 N，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| \le 2\varepsilon$”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 为

(A) 充分条件但非必要条件；

(B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件. ✓

(D) 既非充分条件又非必要条件.

“逻辑”

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$\varepsilon < 2\varepsilon$

$|x_n - a| < \varepsilon \;\rightleftarrows\; |x_n - a| \le 2\boxed{\varepsilon} = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$

$\frac{\varepsilon}{3}$

【例15】（2015年3）设 $\{x_n\}$ 是数列，下列命题中不正确的是

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$.

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$.

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+2} = a$

【例16】(1993年3) 当 $x\to 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是（　）

$\frac{1}{x}=2n\pi+\frac{\pi}{2}$

(A) 无穷小　　　　　　(B) 无穷大

(C) 有界的, 但不是无穷小;　(D) 无界的, 但不是无穷大　$\frac{1}{x}=2n\pi$

【解】应选 (D)

由于对任意给定的 $M>0$ 及 $\delta>0$, 总存在

$$x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},\ y_n=\frac{1}{2n\pi},\ \to 0$$

使得 $0<x_n<\delta$, $0<y_n<\delta$, 此时

$$\frac{1}{x_n^2}\sin\frac{1}{x_n}=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2>M,\quad \frac{1}{y_n^2}\sin\frac{1}{y_n}=0<M,$$

(二) 求 极 限

常用的求极限方法（8种）

方法1　利用基本极限求极限 ✓

方法2　利用等价无穷小代换求极限 ✓

方法3　利用有理运算法则求极限 ✓

方法4　利用洛必达法则求极限 ?

方法5　利用泰勒公式求极限 ?

方法6　利用夹逼原理求极限 ✓

方法7　利用单调有界准则求极限 ✓

方法8　利用定积分定义求极限 ?

方法1　利用基本极限求极限

$\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{1}{x})^x=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ ✗ 不存在

1）常用的基本极限

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+0}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^0=1$

$[f(x)]^{g(x)}$　$f(x)>0$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;\qquad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e;$$

1^∞

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$　$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,(a>0),$$

"抓大"

√ 泰勒，$f(x)=$多项式$+R_n(x)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^5-2x^4}{x^3-x^2}=-2$

$$\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ \infty, & |x|>1,\\ 1, & x=1\\ \text{不存在}, & x=-1.\end{cases}$$

$+\infty$　$(-1)^n$

$e^\infty \neq \infty$

$$\lim_{n\to\infty}e^{nx}=\begin{cases}0, & x<0,\\ +\infty, & x>0\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

2) "1^{∞}" 型极限常用结论

若 $\lim \alpha(x)=0$, $\lim \beta(x)=\infty$, 且 $\lim \alpha(x)\beta(x)=A$

A

则 $\lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=e^{A}$

$1^{\infty}=\lim\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha\beta}=e^{A}$

可以归纳为以下三步:

1)写标准形式 原式 $=\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}$;

2)求极限 $\lim \alpha(x)\beta(x)=A$;

3)写结果 原式 $=e^{A}$.

【例17】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n}\sin\dfrac{1}{n}$

【解】原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^n}\underbrace{n\sin\dfrac{1}{n}}$ $=1$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{e}$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

1^∞ ?

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{e}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^p}{(n+1)^p}=1$

1^p

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p=1$

【例18】极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=$ 2010(一) 1^∞

(A) 1 (B) e (C) e^{a-b} (D) e^{b-a}

【解1】直接法 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\overset{1^\infty}{\left(\dfrac{x}{x-a}\right)^x}\overset{1^\infty}{\left(\dfrac{x}{x+b}\right)^x}$ a, b

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^{-x}\left(1+\dfrac{b}{x}\right)^{-x}$

$=e^a\cdot e^{-b}=e^{a-b}$

【例18】极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=$

~~(A) 1~~ ~~(B) e~~ (C) e^{a-b} e^{-b} ~~(D) e^{b-a}~~ e^{b}

【解2】排除法 $a=0$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+b}\right)^x=e^{-b}$$

【例19】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$，其中 $a>0,b>0,c>0.$

1^{∞}

【解】原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}{3}\right]^n$

①

②

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}{3}\right)n$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{a}-1)+(\sqrt[n]{b}-1)+(\sqrt[n]{c}-1)}{\frac{1}{n}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a}$$

$$=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)$$

$$=\ln\sqrt[3]{abc}$$

原式 $=e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}$

③

方法2　利用等价无穷小代换求极限

$$\lim \frac{\alpha-\beta}{\alpha_1-\beta_1} = \lim \frac{\beta\left[\frac{\alpha}{\beta}-1\right]}{\beta_1\left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}-1\right]} = 1$$

A-1　A-1≠0

（1）代换原则：

a）乘除关系可以换

若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 则

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1}$$

$x \to 0$, $\tan 2x - \sin x \sim 2x - x = x$

$\tan x + \sin x \sim x + x = 2x$

$\tan x - \sin x \sim x - x = 0$

b）加减关系$\boxed{\text{在一定条件}}$下可以换

不等价

若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\boxed{\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1}$, 则 $\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$.

若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1$, 则 $\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$.

(2) 常用的等价无穷小：当 $x \to 0$ 时

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

($1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$)

一阶 $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$;

$a^x - 1 \sim x\ln a$, $\quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $\quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$ $\quad \tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3$ $\quad x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2$

$\arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^3$ $\quad x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3$

$\infty - \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

① $x = \frac{1}{t}$

② 泰勒

$$=\lim_{x\to\infty} x^2\left[\frac{1}{x} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$\arcsin\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sim \frac{1}{6}\arcsin^3\frac{1}{x}$

$\sim \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}\right)^3$

【例20】（2016年3） 已知函数 $f(x)$满足

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2,\quad \text{则} \lim_{x\to 0}f(x)=\underline{\quad 6 \quad}.$$

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1 \to 0}{e^{3x}-1 \to 0}=2$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}(e^{3x}-1)=0$ 知，

$$\lim_{x\to 0}f(x)\sin 2x=0$$

$$\text{则}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}\overset{?}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\cdot 2x}{3x}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}f(x)=2$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6.$

$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$

$x\to 0$

【例21】（2015年, 1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$ ________.

$\dfrac{0}{0}$

【解1】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}$

$\ln(1+x)\sim x$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$　（等价无穷小代换）

【解2】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\tan x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

$f(x)=\ln x$

【解3】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)-\ln 1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\overset{1}{\frac{1}{\xi}}\overset{-\frac{1}{2}x^2}{(\cos x-1)}}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

【例22】（2009年. 3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$ ________ .

$\dfrac{0}{0}$

【解1】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}(e^{1-\cos x}-1)}{\frac{1}{3}x^2}$

e

$=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{3}x^2}$

$=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}=\dfrac{3e}{2}$

$e^x-1\sim x$

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

$f(x)=e^x$

【解2】原式 ① $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\frac{1}{3}x^2}$ ② $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}\cdot\sin x}{\frac{2}{3}x}=\dfrac{3}{2}e$

e

【解3】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^1-e^{\cos x}}{\frac{1}{3}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e(1-\cos x)}{\frac{1}{3}x^2}=e\cdot\dfrac{3}{2}$

$\frac{1}{2}x^2$

【例23】（2006年2）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

$\frac{0}{0}$ 幂指

【解1】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1\right]$

$e^x-1\sim x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^3}$$ （等价无穷小代换）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$$

$\ln(1+x)\sim x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$ （等价无穷小代换）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

【例23】（2006年2）求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

$x\to 0$　　$\frac{x^2}{\sin x}\to 0$

【解2】原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)^x-1\right]$

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x(\cos x-1)}{3}}{x^3}=-\frac{1}{6}$$

$\cos x-1\sim -\frac{1}{2}x^2$

$(1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}-1\sim\frac{x^2}{\sin x}\sim x$，$\frac{1}{\sin x}\to\infty$，$x^2\to 0$

$e^x-1\sim x$

【注】当 $x\to 0$ 时，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$. 这个结论推广可得：

若 $\alpha(x)\to 0$，$\alpha(x)\beta(x)\to 0$，

则 $(1+\alpha(x))^{\beta(x)}-1\sim\alpha(x)\beta(x)$

$(1+\alpha(x))^{\beta(x)}-1=e^{\beta(x)\ln(1+\alpha(x))}-1$

$\sim\beta(x)\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)\beta(x)$.

【例24】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{\arctan x-\tan x}$. $[-\frac{1}{2}]$

$\frac{0}{0}$

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\underbrace{[\arcsin x-x]}_{}^{\frac{1}{6}x^3}-\overbrace{[\sin x-x]}^{-\frac{1}{6}x^3}}{\underbrace{[\arctan x-x]}_{-\frac{1}{3}x^3}-\underbrace{[\tan x-x]}_{\frac{1}{3}x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{6}x^3-(-\frac{1}{6}x^3)}{(-\frac{1}{3}x^3)-\frac{1}{3}x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3}{-\frac{2}{3}x^3}$

$=-\frac{1}{2}$

【例25】（2009年2）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

$\dfrac{0}{0}$

【解1】原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}$

$\tan x$

$x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[x-\tan x]-[\ln(1+\tan x)-\tan x]}{x^2}$

$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}-\cdots$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[-\frac{1}{3}x^3]-[-\frac{1}{2}\tan^2 x]}{x^2}=\dfrac{1}{2}(0+\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}$

$-\tan^2 x$

【解2】原式 洛 $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\frac{\sec^2 x}{1+\tan x}}{2x}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\tan x-\sec^2 x}{x}=\dfrac{1}{4}$

【解3】原式 泰 $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-[\tan x-\frac{1}{2}\tan^2 x+o(x^2)]}{x^2}=\dfrac{1}{4}$

方法3 利用有理运算法则求极限

可导 + |x| 不可导

x=0 不可导

有理运算法则

若 $\lim f(x)=A$（存），$\lim g(x)=B$（存），那么：

$$\lim\big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim f(x)\pm\lim g(x)$$

$$\lim\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$$

$$\lim\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\quad (B\neq 0)$$

* ① 极限 *
② 连续 ✓
③ 导数 ✓
④ 积分 ✓

相同

【注】1）存在 ± 不存在 = 不存在；

存　不　✓
$f(x)+g(x)=F(x)$　　$g(x)=F(x)-f(x)$

2）不存在 ± 不存在 = 不一定.

$n+n=2n$.　　$n+(-n)=0$ 存

3）存在 ×÷ 不存在 = 不一定；

$\frac{1}{n}\cdot n=1$ 存.　　$\frac{1}{n}\cdot n^2=n^2$ 不

4）不存在×÷不存在 = 不一定.

$n\cdot n=n^2$ 不.　　$(-1)^n\cdot(-1)^n=1$ 存在

常用的结论：1） $\lim f(x)=A\neq 0 \Rightarrow \lim f(x)g(x)=A\lim g(x)$;

即：极限非零的因子的极限可先求出来.

2） $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在， $\lim g(x)=0 \Rightarrow \lim f(x)=0$;

3） $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0, \lim f(x)=0 \Rightarrow \lim g(x)=0$;

$$\frac{f(x)g(x)}{f(x)}=g(x)$$

$$f(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)\to 0$$

$$g(x)=\frac{f(x)\to 0}{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\to A\neq 0}\to\frac{0}{A}=0$$

【例26】(2010年3) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\overset{\infty}{\frac{1}{x}}-\left(\overset{\infty}{\frac{1}{x}}-\overset{a}{a}\right)e^{x}\right]=1$，则 a 等于（　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【解】 应选（C）

存　　存　　存在　　不

$$1=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-e^{x}}{x}\right]+a\lim_{x\to 0}e^{x}$$

$$=-1+a$$

则 $a=2$ 故应选（C）.

【例27】（2018年3）已知实数 a,b 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x]=2$，求 a,b.

存.

$g(x)=\dfrac{f(x)g(x)}{f(x)}\to 0$

【解】 $2=\lim\limits_{x\to+\infty} be^{\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to+\infty}(axe^{\frac{1}{x}}-x)$

10分

$=b+\lim\limits_{x\to+\infty} x(ae^{\frac{1}{x}}-1)$

$a-1=0$

存.

$\lim f(x)g(x)$ 存在 A

$\lim f(x)=\infty$

$\Rightarrow \lim g(x)=0$

$=b+\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)\quad (a=1)$

$=b+\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\dfrac{1}{x}$

$=b+1$

故 $a=b=1$.

【例28】(2004年3)若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$ $\neq 0$ 则

$a=$____, $b=$____.

【解】由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-b)}{e^x-a}=5\neq 0$

且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x(\cos x-b)=0$,

$\lim\limits_{x\to 0}(e^x-a)=0$, 即 $a=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}(\cos x-b)=1-b$$

由 $1-b=5$ 得，$b=-4$.

【例29】(1997年2) 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

$+\infty \quad -\infty \qquad \dfrac{\infty}{\infty}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2}+x}{\sqrt{x^2}}$

$\sqrt{x^2}=|x|=-x \qquad x<0$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x+x}{-x}=1$

【解1】原式 $= \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(-x)\left[\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}\right]}{(-x)\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$

$2 \quad -1 \quad 0$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=1$

抓大头

【解2】原式 $= \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}}{\sqrt{x^2+\sin x}}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+\sin x}}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

$2 \quad -1 \quad 0$

$=2-1+0=1$