高数基础班（12）

12	定积分举例（定积分概念；定积分计算；变上限积分；）反常积分	P86-P97

主讲 武忠祥 教授

中国大学MOOC × 有道考神

常考题型与典型例题

常考题型

1.定积分的概念、性质及几何意义

2.定积分计算

3.变上限积分

中国大学MOOC
×
有道考神

（一）定积分的概念、性质及几何意义

$x=\frac{1}{n}$

$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

【例1】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=$ ________ . (ln 2)

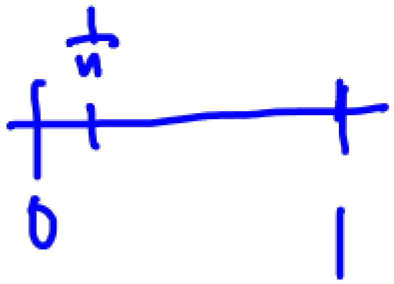
小 1 大

$\frac{n}{n+n}\le[\quad]\le\frac{n}{n+1}$

$\frac{1}{2}$ $\quad$ 1

【解】 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$



$=\ln 2$

中国大学MOOC × 有道考神

【例2】（2012年2）$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$ ________. $(\frac{\pi}{4})$

【解】原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right]$

$$=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

中国大学MOOC × 有道考神

【例3】(2016年2, 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)=$ ________. $(\sin 1-\cos 1)$

【解】原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\boxed{\frac{1}{n}}\left[\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right]$

$$=\int_0^1 x\sin x\,dx=-\int_0^1 x\,d\cos x$$

$$=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x\,dx$$

$$=-\cos 1+\sin 1=\sin 1-\cos 1$$

中国大学MOOC × 有道考神

【例4】（2017年1, 2, 3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})=$ ________. $[\frac{1}{4}]$

【解】原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\boxed{\frac{1}{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln(1+\frac{k}{n})$

① 夹逼 ✓

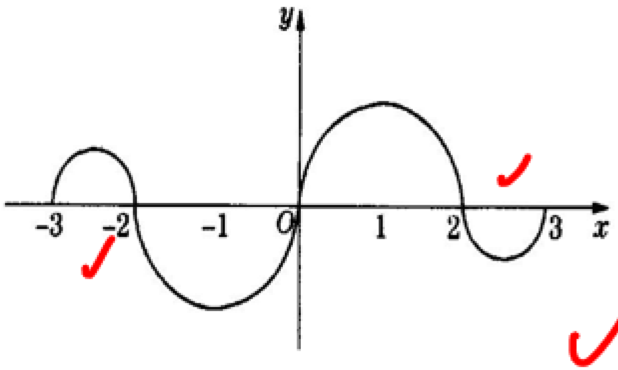
② 定积分定义 ✓

$$=\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)\,dx^2$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\,dx=\frac{1}{4}$$

中国大学MOOC × 有道考神

【例5】(2007年1, 2, 3)如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$，$[2,3]$ 上的图形分别是直径为1的上、下半圆周，在区间 $[-2,0]$，$[0,2]$ 的图形分别是直径为 2的下、上半圆周．设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则下列结论正确的是（　）．



(A) $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$　　(B) $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$

(C) $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$　　(D) $F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$

几何意义

【解1】$F(2)=\int_0^2 f(t)\,dt=\frac{\pi}{2}$，$F(3)=\int_0^3 f(t)\,dt=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}$

$F(-2)=\int_0^{-2} f(t)\,dt=-\frac{\pi}{2}$ X　$\int_a^b$　$a<b$!!

$F(-2)=-\int_{-2}^0 f(t)\,dt=\frac{\pi}{2}$，$F(-3)=\int_0^{-3}=-\int_{-3}^0=\frac{3\pi}{8}$

【解2】$f(x)$ 奇．

$F(x)$ 偶．

$F(-2)=F(2)>0$

$F(-3)=F(3)>0$

C

中国大学MOOC × 有道考神

【例6】（1997年1, 2）设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0, f'(x)<0,$ $f''(x)>0$. 令 $S_1=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ S_2=f(b)(b-a),$ $S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$, 则（ ）. (B)

✓（B） $S_2<S_1<S_3$

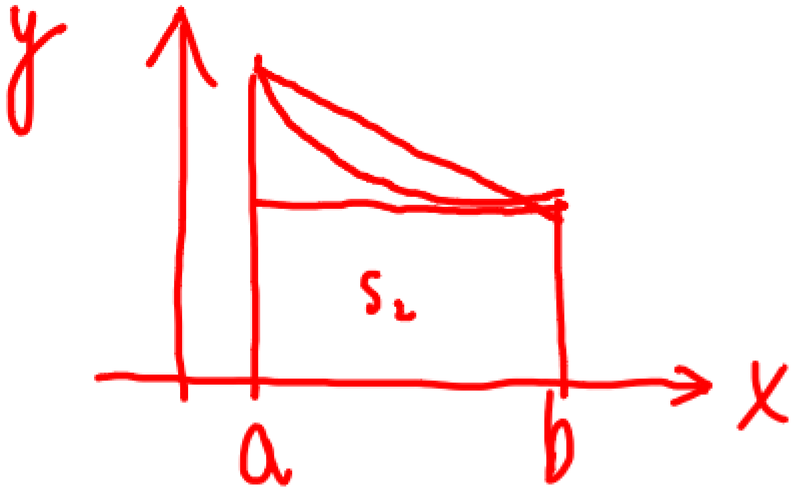
（A） $S_1<S_2<S_3$

（C） $S_3<S_1<S_2$

（D） $S_2<S_3<S_1$

【解】

$S_2<S_1<S_3$



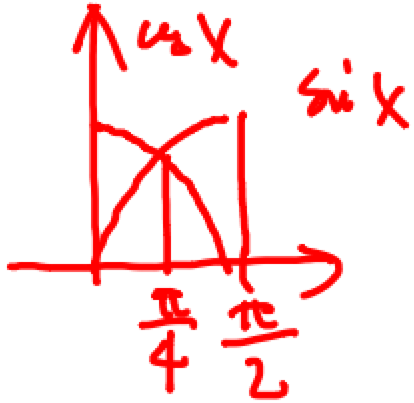
中国大学MOOC × 有道考神

【例7】（2011年1, 2, 3）设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,\mathrm{d}x$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x$，则 I,J,K 的大小关系为（　）

(A) $I<J<K$　　　　(B) $I<K<J$

(C) $J<I<K$　　　　(D) $K<J<I$

【解】$0<x<\frac{\pi}{4}$，　$\sin x<\cos x<\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$



$I<K<J$

中国大学MOOC × 有道考神

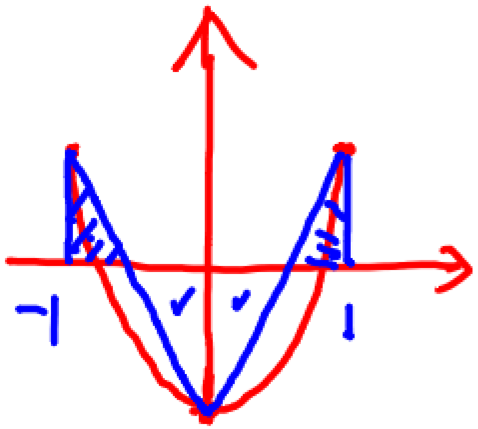
【例8】（2017年2）设二阶可导函数 $f(x)$ 满足

$f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1$，且 $f''(x)>0$，则（　） (B)

$f(x)$

(A) $\int_{-1}^{1} f(x)dx > 0.$　　(B) $\int_{-1}^{1} f(x)dx < 0.$

(C) $\int_{-1}^{0} f(x)dx > \int_{0}^{1} f(x)dx.$　　(D) $\int_{-1}^{0} f(x)dx < \int_{0}^{1} f(x)dx.$



【解1】$-1 \le x \le 1$,　$f(x) \le g(x)$　$g(x)$　几何.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx < \int_{-1}^{1} g(x)dx = 0$$

【解2】令 $\boxed{f(x)=2x^2-1}$　具体举例.

$f(x)=2x^2-1$

$$\int_{-1}^{1}(2x^2-1)dx = 2\int_{0}^{1}(2x^2-1)dx = 2\left(\frac{2}{3}-1\right)<0$$

中国大学MOOC × 有道考神

【例9】（1991年1，2）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(0)$，证明在 $(0,1)$ 内存在一点 c，使 $f'(c)=0$.

【解】

[证] $\exists\ \xi \in (\frac{2}{3},1)$,

$$3\cdot(1-\frac{2}{3})f(\xi)=f(0)$$

$*$

$$f(\xi)=f(0)$$

$\exists\ c\in(0,\xi)$，使 $f'(c)=0$

中国大学MOOC × 有道考神

（二）定积分的计算

奇　　偶

【例10】（2001年2）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\,dx=$ ______.　　$(\frac{\pi}{8})$

【解】 原式 $\overset{*}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\,dx$

$$\overset{*}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x(1-\sin^2 x)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{8}$$

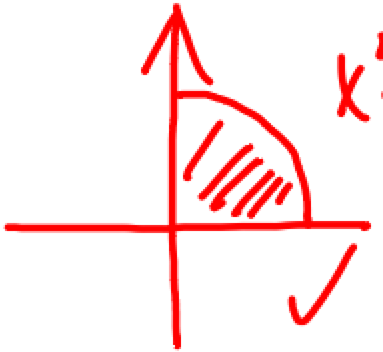
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx$$

中国大学MOOC × 有道考神

【例11】（2017年3）$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})\mathrm{d}x=$ ______.

奇　　偶.

$[\frac{\pi^3}{2}]$



$x^2+y^2=a^2$

【解】

原式 $\overset{*}{=} 2\int_0^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\,dx$

$\overset{*}{=} 2\cdot\frac{\pi}{4}\pi^2$

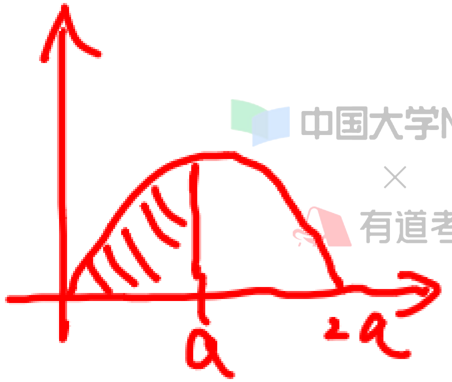
$=\frac{\pi^3}{2}$.

① $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi a^2}{4}$ $(a>0)$

② $\int_0^a\sqrt{2ax-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}a^2$

③ $\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}a^2$

$x^2+y^2=2ax$



中国大学MOOC × 有道考神

【例12】（2000年，1）$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx =$ ______ .　$(\frac{\pi}{4})$

【解1】 原式 $= \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx \xlongequal{x-1=\sin t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 t\,dt$ ✓

✓

$\int_0^a \sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}a^2$　　$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ ✓

【解2】 $a=1$

原式 $= \frac{\pi}{4}$ ✓　几何

中国大学MOOC × 有道考神

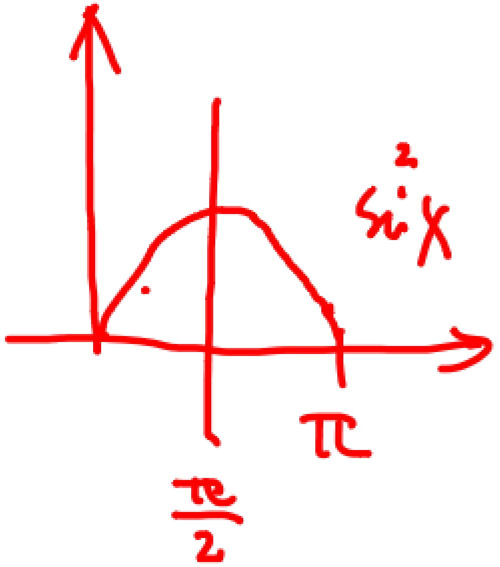
【例13】 $\int_0^\pi x\sin^2 x dx =$ ________. $(\frac{\pi^2}{4})$

【解】 原式 $\stackrel{*}{=} \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx$

$\stackrel{*}{=} \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$

$\stackrel{*}{=} \pi\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$

$$\int_0^\pi x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$$



中国大学MOOC × 有道考神

【例14】（2005年2）计算 $\int_0^1 \frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.　　　　$(\frac{\pi}{4})$

【解】 $\boxed{x=\sin t}$

$-d\cos t$

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\cos t}{(2-\sin^2 t)\cos t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$

$= -\arctan(\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{4}$

中国大学MOOC × 有道考神

【例15】（2010年1）$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx=$ ________. (-4π)

【解】$\sqrt{x}=t$　　$x=t^2$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx$$

$$\text{原式}=2\int_0^{\pi} t^2 \cos t\,dt$$

$$=2\int_0^{\pi} t^2\,d\sin t=2t^2\sin t\Big|_0^{\pi}-4\int_0^{\pi} t\sin t\,dt$$

$$=-4\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin t\,dt=-4\pi$$

中国大学MOOC × 有道考神

【例16】 计算 $\int_0^1 x\arcsin x\,dx.$ $\left(\frac{\pi}{8}\right)$

【解1】 $-1+1$

原式 $\overset{*}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 \arcsin x\,dx^2 = \frac{1}{2}x^2\arcsin x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[-\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right]$ $\quad \arcsin x\Big|_0^1$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{8}$

【解2】 $x = \sin t$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,d\sin t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,d\sin^2 t = \frac{1}{2}t\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \underline{\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt}$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$

中国大学MOOC × 有道考神

【例17】（1995年3）设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}dt$，计算 $\int_0^\pi f(x)dx$.

$f(0)=0$

分部

【解1】原式 $= \underbrace{xf(x)\Big|_0^\pi}_{0、0} - \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\pi - x}dx$　　$d(x-\pi)$

$= \int_0^\pi \frac{\pi \sin x}{\pi - x}dx - \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\pi - x}dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\sin x}{\pi - x}dx = \int_0^\pi \sin x dx$

$= 2$

【解2】原式 $\triangleq \int_0^\pi f(x)\,d(x-\pi) = (x-\pi)f(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{(x-\pi)\sin x}{\pi - x}dx$

$= \int_0^\pi \sin x dx = 2$

中国大学MOOC × 有道考神

（三）变上限定积分

【例18】设 $f(x)$ 连续，试求下列函数的导数 拆项.

(1) $\int_{e^x}^{x^2} f(t)dt$; 1

(2) $\int_0^x (x-t)f(t)dt$; $= x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt$

换元

(3) $\int_0^x \cos(x-t)^2 dt$

3

(4) $\int_1^2 f(x+t)dt$. 换元

【解】(1) $\left(\int_{e^x}^{x^2} f(t)dt\right)' = f(x^2)\cdot 2x - f(e^x)\, e^x$

(2) $\left(\int_0^x (x-t)f(t)dt\right)' = \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)dt$

(3) $\int_0^x \cos(x-t)^2 dt \xlongequal{x-t=u} \int_0^x \cos u^2 du$, $\left(\int_0^x \cos(x-t)^2 dt\right)' = \cos x^2$

(4) $\int_1^2 f(x+t)dt \xlongequal{x+t=u} \int_{x+1}^{x+2} f(u)du$ $\quad \left(\int_1^2 f(x+t)dt\right)' = f(x+2) - f(x+1)$

中国大学MOOC × 有道考神

【例19】（2015年2, 3）设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2} xf(t)dt$.

若 $\varphi(1)=1, \varphi'(1)=5$，则 $f(1)=$ ___2___ .

(2)

【解】

$1=\varphi(1)=\int_0^1 f(t)dt$

$\varphi(x)=x\int_0^{x^2} f(t)dt$，　$\varphi'(x)=\int_0^{x^2} f(t)dt + x\,f(x^2)\cdot 2x$

$\varphi'(1)=\int_0^1 f(t)dt + 2f(1)=5$

$f(1)=2$

中国大学MOOC
×
有道考神

【例20】（1998年1）设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$

(A) $xf(x^2)=x$ (B) $-xf(x^2)=-x$

(C) $2xf(x^2)=2x$ (D) $-2xf(x^2)=-2x$

$-2t\,dt=du$

【解1】直接法 $\int_0^x tf(x^2-t^2)dt \xlongequal{x^2-t^2=u} -\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)du=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)du$

$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=\frac{1}{2}f(x^2)\cdot 2x=xf(x^2)$

【解2】排除法. $f(x)\equiv 1$, $\frac{d}{dx}\int_0^x t\,dt=x$

中国大学MOOC × 有道考神

【例21】（1993年3）已知 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1, \\ 1, & 1\le x\le 2, \end{cases}$ 设 $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt\ (0\le x\le 2)$，则 $F(x)$ 为（ ）.

(D)

（A）$\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0\le x<1, \\ x, & 1\le x\le 2 \end{cases}$

（B）$\begin{cases} \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\le x<1, \\ x, & 1\le x\le 2 \end{cases}$

（C）$\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0\le x<1, \\ x-1, & 1\le x\le 2 \end{cases}$

（D）$\begin{cases} \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\le x<1, \\ x-1, & 1\le x\le 2 \end{cases}$

【解1】

$F(x)=\begin{cases} \int_1^x t^2\,dt, & 0\le x<1 \\ \int_1^x 1\,dt & 1\le x\le 2 \end{cases}$

$=\begin{cases} \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3} & 0\le x<1 \\ x-1 & 1\le x\le 2 \end{cases}$

【解2】

$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续.

$F(x)$ 在 $[0,2]$ 可导.

$F'(x)=f(x)$

在 $[0,1)$ 和 $(1,2]$ 上

$F'(x)=f(x)$

(A)(B)(C) $F(x)$ 在 $x=1$ 不连续.

$F'(1)$ 不存在，排除

A, B, C

中国大学MOOC
有道考神

【例22】（1988年3）设 $x \geq -1$，求 $\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t$.

【解】

$$\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt \overset{*}{=} \begin{cases} \int_{-1}^{x}(1+t)dt, & -1 \leq x < 0 \\ \int_{-1}^{x}(1-t)dt & x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \int_{-1}^{0}(1+t)dt + \int_{0}^{x}(1-t)dt, \quad x \geq 0$$

中国大学MOOC × 有道考神

【例23】（2013年2）

不连续，

设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi,\\ 2, & \pi\le x\le 2\pi,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则

（A） $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点；

（B） $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点；

（C） $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导；

（D） $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导.

【解】

$$F(x)=\begin{cases}\int_0^x \sin t\,dt, & 0\le x<\pi\\ \int_0^\pi \sin x\,dx+\int_\pi^x 2\,dt & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}=\begin{cases}1-\cos x & 0\le x\le\pi\\ 2+2(x-\pi). & \pi<x\le 2\pi\end{cases}$$

$F(x)$ 在 $x=\pi$ 连续， $F'_+(\pi)=2\Big|_{x=\pi}=2$， $F'_-(\pi)=\cos x\Big|_{x=\pi}=0$

$F'(\pi)$ 不存在

中国大学MOOC

【例24】（1998年2）确定常数 a,b,c 的值，使

$$\lim_{x\to0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\,dt}=c\neq0\quad(c\neq0).$$

$(a=1, b=0, c=\frac{1}{2})$

【解】

$$\int_b^0\frac{\ln(1+t^3)}{t}\,dt=0\Rightarrow b=0$$

∞

$$c=\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{x^2}$$

$a-1\neq0$ 矛盾.

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$a=1$

中国大学MOOC × 有道考神

【例25】（2017年2, 3）求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^t\,dt}{\sqrt{x^3}}$. [$\frac{2}{3}$]

$\frac{0}{0}$

e 没 b

【解1】 $\int_0^x \sqrt{x-t}\,e^t\,dt \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 \sqrt{u}\,e^{x-u}\,du = e^x\int_0^x \sqrt{u}\,e^{-u}\,du$

$$\text{原式}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{u}\,e^{-u}\,du}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}\,e^{-x}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}$$

积分中值

x，定号

$(x-t)^{\frac{1}{2}}$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

【解2】
$$\text{原式}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\xi}\int_0^x\sqrt{x-t}\,dt}{\sqrt{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{2}{3}(x-t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^3}}=\frac{2}{3}$$

中国大学MOOC × 有道考神

【例26】（2010年3）设可导函数 $y=y(x)$ 由方程

$$\int_0^{x+y} e^{-t^2}\,dt = \int_0^x x\sin t^2\,dt$$ 确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$ ________. [−1]

【解】

$$\int_0^y e^{-t^2}\,dt = 0 \Rightarrow y=0 \qquad x=0$$

$e^{-t^2} > 0$

变上限求导

x

$$\int_0^{x+y} e^{-t^2}\,dt = x\int_0^x \sin t^2\,dt$$

$$e^{-(x+y)^2}(1+y') = \int_0^x \sin t^2\,dt + x\sin x^2$$

$$1+y'(0)=0 \Rightarrow y'(0)=-1$$

中国大学MOOC × 有道考神

第二节　反常积分

本节内容要点

$\int_a^b f(x)\,dx$

① $[a,b]$ 有限 ✓

② $f(x)$ 有界 ✓

一. 考试内容概要

（一）无穷区间上的反常积分

（二）无界函数的反常积分

二. 常考题型与典型例题

题型一　反常积分的敛散性

题型二　反常积分的计算

中国大学MOOC × 有道考神

（一）无穷区间上的反常积分

定义1 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\underline{\int_a^t f(x)dx}$ 收敛.

定义2 $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx.$

定义3 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \underline{\int_{-\infty}^0 f(x)dx} + \underline{\int_0^{+\infty} f(x)dx}$

收.

都收.

中国大学MOOC × 有道考神

定理1(比较判别法)

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $0\le f(x)\le g(x)$，则

大 小

1）$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

小 大

2）$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散

定理2(比较判别法的极限形式)

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 非负连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lambda$，则

1）当 $\lambda>0$ 时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散；

2）当 $\lambda=0$ 时，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；

3）当 $\lambda=+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

常用结论： $\int_a^{+\infty}\dfrac{1}{x^P}dx \begin{cases} P>1 & \text{收敛} \\ P\le 1 & \text{发散} \end{cases} \quad (a>0)$

中国大学MOOC × 有道考神

【例1】判别下列反常积分的敛散性

（1）$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx.$ （2）$\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx.$

$x \geq 1$ 发

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ $p>1$ 收 $p\leq 1$ 发

【解1】

(1) 比较 $\frac{\sqrt{x}}{1+x^2} < \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}}$

$\frac{3}{2}>1$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ 收 $\rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 收.

(2) ① 定义 $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^{+\infty} = +\infty$ 发.

$\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{x}$. 发

② 比较 $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{x}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{x}$

【解2】极限

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$, 同敛散

③ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = 1$ 发

中国大学MOOC
有道考神

（二）无界函数的反常积分

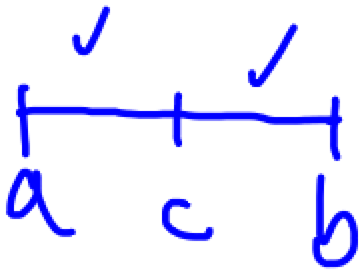
定义1 设点 a 为函数 $f(x)$ 的瑕点

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$$

收.

定义2 设点 b 为函数 $f(x)$ 的瑕点

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx.$$



定义3 设点 c 为函数 $f(x)$ 的瑕点 $(a<c<b)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

都收

中国大学MOOC × 有道考神

定理1（比较判别法）

设 $f(x),g(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，且 $0\le f(x)\le g(x)$，则

1）$\int_a^b g(x)dx$ 大 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 小 收敛；

2）$\int_a^b f(x)dx$ 小 发散 $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ 大 发散.

定理2（比较判别法的极限形式）

设 $f(x),g(x)$ 在 $(a,b]$ 非负连续，$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lambda$，则

1）当 $\lambda>0$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛散；

2）当 $\lambda=0$ 时，$\int_a^b g(x)dx$ 大 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 小 收敛；

3）当 $\lambda=+\infty$ 时，$\int_a^b g(x)dx$ 小 发散 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 大 发散.

常用结论： $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^P}dx, \int_a^b \frac{1}{(b-x)^P}dx$ $\begin{cases} P<1 & 收敛 \\ P\ge 1 & 发散 \end{cases}$

中国大学MOOC × 有道考神

【例2】判别下列反常积分的敛散性

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$$

【解】

$x=0$，　$x=1$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^p}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{(1-x)^p}$$

$p<1$ 收敛，

$p\geq 1$ 发散，

收敛，

收敛，　收敛，

[解] $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

$\sqrt{x(1-x)}$　　$\sqrt{x(1-x)}$　　$\sqrt{1-x}$

极限

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}} = 1 \qquad p=\frac{1}{2}<1$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}}{\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}} = 1 \qquad p=\frac{1}{2}<1 \text{ 收敛}$$

中国大学MOOC × 有道考神

高数基础班（12）

主讲 武忠祥 教授

还不关注，你就慢了

中国大学MOOC × 有道考神