高数基础班（18）

18	多元函数的极值（无约束极值；条件极值）；最大最小值	P137-P141

主讲 武忠祥 教授

第三节　多元函数的极值与最值

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）无约束极值

（二）条件极值与拉格朗日乘数法

（三）最大最小值

二. 常考题型方法与技巧

题型一　求极值（无条件）

题型二　求最大最小值

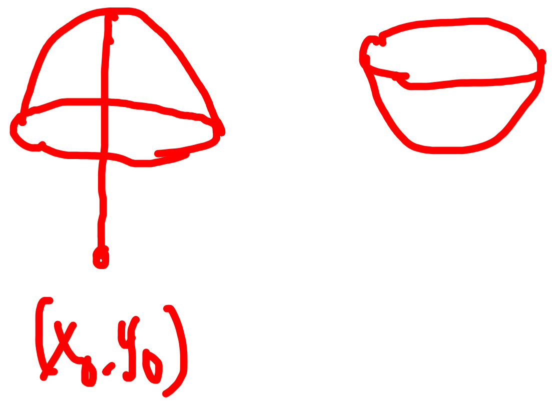
题型三　最大最小值应用题

考试内容概要

（一）无约束极值

定义7　若在点 (x_0, y_0) 的某邻域内恒成立不等式

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0) \quad (f(x,y) \ge f(x_0,y_0))$$



则称 f 在点 (x_0,y_0) 取得**极大值**（**极小值**），点 (x_0,y_0) 称为 f 的**极大值点**（**极小值点**），极大值与极小值统称为**极值**，极大值点与极小值点统称为**极值点**.

定理5（极值的必要条件） 设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) ① 存在偏导数，且 (x_0,y_0) ② 为 $f(x,y)$ 的极值点，则

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

(0,0) ✓

驻点 $\xrightarrow{xy}$ 极值

驻点 $\xleftarrow{|x|+|y|}$ 极值

定理6（极值的充分条件） 设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有二阶连续偏导数，又 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$，f(x,y) 可导

记 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则

（1）当 $AC-B^2>0$ 时，有极值 $\begin{cases} A>0 & \text{极小值；} \\ A<0 & \text{极大值。} \end{cases}$

（2）当 $AC-B^2<0$ 时，无极值.

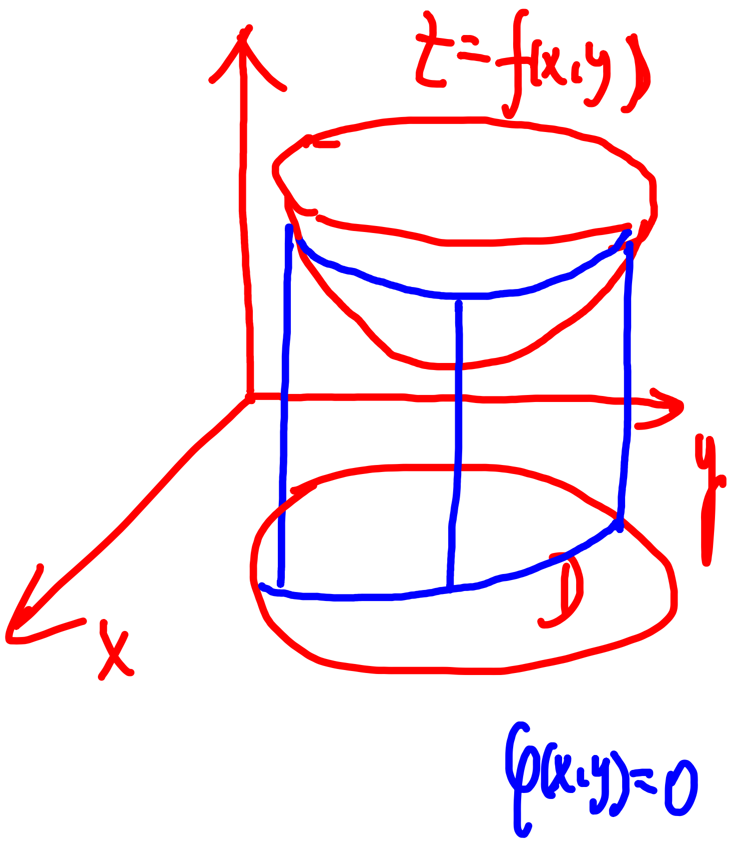
（3）当 $AC-B^2=0$ 时，不一定（一般用定义判定）.

可能极值点 ①驻点 ✱

② f_x 与 f_y 都不存在 ✓ ; f_x 不存在，$f_y=0$; $f_x=0$，f_y 不存在

（二）条件极值与拉格朗日乘数法

$z=f(x,y)$



1） 函数 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 条件下的极值.

令 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

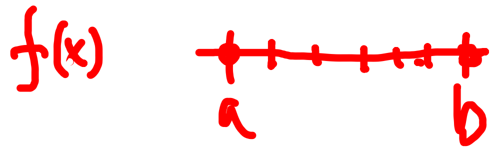
$$\begin{cases} F_x=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0, \\ F_y=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0, \\ F_\lambda=\varphi(x,y)=0, \end{cases}$$

2） 函数 $f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0,\psi(x,y,z)=0$

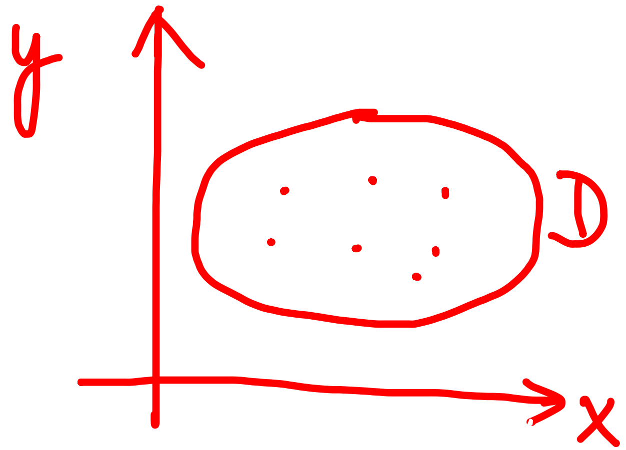
条件下的条件极值.

令 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$

（三）最大最小值



1. 求连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上的最大最小值



1） 求 $f(x,y)$ 在 D 内部可能的极值点.

2） 求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大最小值. $*$

3） 比较

2. 应用题

1) $z=f(x,y)$ ✓

常考题型与典型例题

常考题型

1. 求极值
2. 求连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上的最大最小值；
3. 最大最小值应用题.

【例1】(2003年, 3) 设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值则下列结论正确的是

(A) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零.

(B) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零.

(C) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零.

(D) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在.

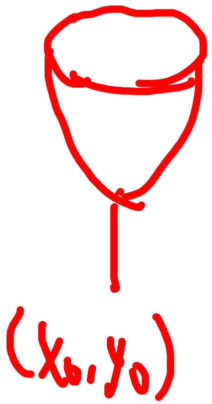
【解】

$f(x_0,y)=\varphi(y)$

$f_y(x_0,y_0)=\varphi'(y_0)$

[解1] $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$

$\varphi'(y_0)=0$,



[解2] $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 极小值

$\varphi(y)=f(x_0,y)$ 在 y_0 极小值

$\varphi'(y_0)=0$

【例2】(2009年, 2) 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为

z_x　z_y

$dz = x dx + y dy$, 则点 $(0,0)$

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点.

(B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

【解1】

$z_x = x$, $z_y = y$

① $z_x(0,0) = z_y(0,0) = 0$　$(0,0)$

② $A = z_{xx} = 1$, $C = z_{yy} = 1$, $B = z_{xy} = 0$

$AC - B^2 = 1 > 0$ 有极值.

$A = 1 > 0$, 极小值.

【例2】(2009年, 2) 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$, 则点 $(0,0)$

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点.

(B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

【解2】 $z=z(x,y)$

$z_x=x,\ z_y=y$

直接法

① 偏积分.

$z_x=x \quad z=\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+\varphi(y)$

$z_y=y \quad + \quad z_y=\varphi'(y)=y,\ \varphi(y)=\frac{1}{2}y^2+C$

$\boxed{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+C}$ 极小值.

② 凑微分.

$dz=xdx+ydy=d(\frac{1}{2}x^2)+d(\frac{1}{2}y^2)$

$=d(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2)$

$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+C$

【例2】(2009年, 2) 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为

$dz=xdx+ydy$, 则点 $(0,0)$

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点.

(B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

【解3】排除法

$z=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

【例3】(2017年3) 二元函数 $z = xy(3 - x - y)$ 的极值点是（　）

(A) $(0,0)$,　(B) $(0,3)$,　(C) $(3,0)$,　(D) $(1,1)$.

【解】由 $\begin{cases} z_x = y(3 - 2x - y) = 0 \\ z_y = x(3 - 2y - x) = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(0,0), (0,3), (3,0), (1,1)$.

$$z_{xx} = -2y, z_{yy} = -2x, z_{xy} = 3 - 2x - 2y.$$

在 $(0,0)$ 点　$AC - B^2 = -9 < 0$, 无极值;

在 $(0,3)$ 点　$AC - B^2 = -9 < 0$, 无极值;

在 $(3,0)$ 点　$AC - B^2 = -9 < 0$, 无极值;

在 $(1,1)$ 点　$AC - B^2 = 3 > 0$, 有极值;

【例4】(2009年, 1, 3) 求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

x=0　　y=1/e

【解】① $f'_x(x,y)=2x(2+y^2)$, $f'_y(x,y)=2x^2y+\ln y+1$.

令 $\begin{cases} f'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)=0, \end{cases}$ 解得唯一驻点 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$. 由于

② $A=f''_{xx}\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=2(2+y^2)\Big|_{\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}=2\left(2+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$,

$B=f''_{xy}\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=4xy\Big|_{\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}=0$,

$C=f''_{yy}\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\left(2x^2+\dfrac{1}{y}\right)\Big|_{\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}=\mathrm{e}$,

"先代后求"

所以 $AC-B^2=2\mathrm{e}\left(2+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)>0$　$A>0$. 极小值为 $f\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

【例5】（2008年2） 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ ≥ 0

和 $x+y+z=4$ 下的最大值和最小值.

条件极值.

【解】

① $F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4)$.

$$
令 \begin{cases} F'_x=2x+2\lambda x+\mu=0, \\ F'_y=2y+2\lambda y+\mu=0, \\ F'_z=2z-\lambda+\mu=0, \\ F'_\lambda=x^2+y^2-z=0, \\ F'_\mu=x+y+z-4=0, \end{cases}
$$

$x(1+\lambda)=y(1+\lambda)$, $(x-y)(1+\lambda)=0$

① 若 $\lambda=-1 \Rightarrow \mu=0 \Rightarrow z=-\frac{1}{2}$, ×

② 若 $x=y$, $z=2x^2$

$2x^2+2x-4=0$

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$x_1=1$, $x_2=-2$

解方程组，得 $(x_1,y_1,z_1)=(1,1,2)$, $(x_2,y_2,z_2)=(-2,-2,8)$.

② 故所求的最大值为72，最小值为6.

【例6】(2005年2) 已知 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=2x\,dx-2y\,dy$

$2x=0$

$-2y=0$

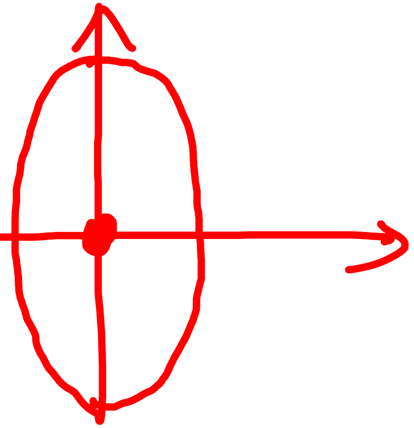
$(0,0)$

且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1\right\}$ 上的最大最小值.

【解1】① 由 $dz=2x\,dx-2y\,dy$ $=dx^2-dy^2=d(x^2-y^2)$

可知 $z=f(x,y)=x^2-y^2+C$.

$\boxed{y^2=4-4x^2}$



再由 $f(1,1)=2$，得 $C=2$，故 $z=f(x,y)=\boxed{x^2-y^2+2.}$

$-1\le x\le 1$

令 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x=0,\dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y=0$, 解得驻点 $(0,0)$

② 在椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上，$z=x^2-(4-4x^2)+2$

化条件为无条件

即 $z=5x^2-2\quad(-1\le x\le 1)$,

其最大值为 $z\big|_{x=\pm1}=3$，最小值为 $z\big|_{x=0}=-2$. 再与 $f(0,0)=2$

比较，可知 $f(x,y)$ 在椭圆域 D 上的最大值为3，最小值为 -2.

【解2】 同解法一，得驻点 $(0,0)$

设 $L = x^2 - y^2 + 2 + \lambda\left(x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1\right)$

拉格,

令 $\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = -2y + \dfrac{\lambda}{2} y = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0, \end{cases}$

$x(1+\lambda)=0$

① $x=0$, $y=\pm 2$ X

② $\lambda=-1 \Rightarrow y=0, x=\pm 1$

$y\left(\frac{\lambda}{2}-2\right)=0$

解得4个可能的极值点 $(0,2),(0,-2),(1,0)$ 和 $(-1,0)$

① $y=0 \Rightarrow x=\pm 1$ X

又 $f(0,2)=-2, f(0,-2)=-2, f(1,0)=3, f(-1,0)=3$，再与

② $\frac{\lambda}{2}-2=0 \Rightarrow x=0, y=\pm 2$

$f(0,0)=2$ 比较, 得 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为3，最小值为 $-2.$

【解3】 同解法一，得驻点 $(0,0)$

椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的参数方程为 $x=\cos t, y=2\sin t.$

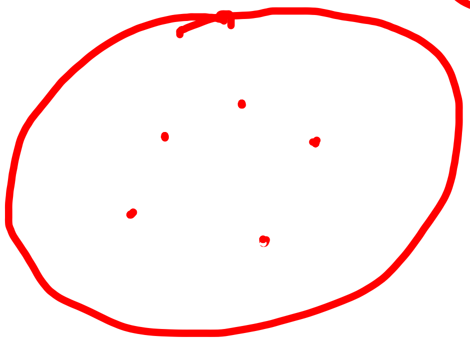
则 $z=f(x,y)=x^2-y^2+2=\cos^2 t-4\sin^2 t+2$

$$=3-5\sin^2 t$$

故 $f_{\max}=3, f_{\min}=-2$

化条件为无条件

（参数式）



(0,0)

高数基础班（18）

主讲 武忠祥 教授