高数基础班（13）

13	反常积分举例（敛散性；计算），定积分应用（几何；物理）	P98-P105

主讲 武忠祥 教授

常考题型与典型例题

常考题型

1. 反常积分敛散性

2. 反常积分计算

（一）反常积分的敛散性

【例3】（2015年2）下列反常积分中收敛的是（ ）

（A）$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.　　（B）$\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ $= \frac{1}{2}\ln^2 x \Big|_2^{+\infty} = +\infty$

（C）$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x} dx$ $= \ln\ln x \Big|_2^{+\infty} = +\infty$　　（D）$\int_2^{+\infty} \frac{x^{1000}}{e^x} dx$.

① 定义．
② 比较法：
③ p积分．

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$

【解】(A) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\Big|_2^{+\infty} = +\infty$ 发　$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$　$p = \frac{1}{2} \le 1$ 发

(D) $\int_2^{+\infty} x e^{-x} dx = -\int_2^{+\infty} x\, de^{-x} = -xe^{-x}\Big|_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_2^{+\infty}$

$\frac{x}{e^x} \le \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$　$e^x \ge x^3$　$\frac{x}{e^x} \to 0$　$x \to +\infty$

【例4】(2013年2) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e,\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\ge e.\end{cases}$

若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则

(A) $\alpha<-2$.　　(B) $\alpha>2$.

(C) $-2<\alpha<0$.　　(D) $0<\alpha<2$. ✓

【解】

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^e \frac{dx}{(x-1)^{\alpha-1}} + \int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^{\alpha+1}x} \xlongequal{\ln x=t} \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{\alpha+1}}$$

收敛　收敛　收敛　p　$d\ln x$　$p>1$

$\Rightarrow \alpha-1<1$

$\Rightarrow \alpha<2$

$\Rightarrow \alpha+1>1$

$\Rightarrow \alpha>0$

【例5】（2016年2）反常积分 $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx,\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 的敛散性为（　）

（A）收敛，收敛.　　（B）收敛，发散.

（C）发散，收敛.　　（D）发散，发散.

$(-\infty,0]$

乐

【解】 $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{-\infty}^{0}=0+1=1$ 收　$x\to0^-$

"e^{∞}"

$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{0}^{+\infty}=-1+(+\infty)=\infty$ 发　$x\to0^+$

$[0,+\infty)$

【例6】（2016年1）反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛，则（　　）

（A）$a<1,b>1.$　　　　（B）$a>1,b>1.$

（C）$a<1,a+b>1.$　　　　（D）$a>1,a+b>1.$

【解】$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx=\int_0^1\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$

$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$　　$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$　$p>1$ 收敛.

$a<1$

收敛 1　　收敛

$\frac{1}{x^{a+b}}, >1$

$\frac{1}{x^{a+b}(1+\frac{1}{x})^b}$

$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^a}}=1$　　$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^{a+b}}}=1$

$\Rightarrow a<1$　　$\Rightarrow p=a+b>1$

(二）反常积分的计算

$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

【例7】（2000年, 2） $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}} =$ ________. $[\frac{\pi}{3}]$

① 换元 ② 分部

【解1】令 $\sqrt{x-2}=t$，$x-2=t^2$

$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x}$

$$原式 = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{t(t^2+9)}dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{9+t^2} = \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\arctan\frac{t}{3}\Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{3}\left[\frac{\pi}{2}-0\right]$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

【解2】

$$原式 = \int_2^{+\infty} \frac{2d\sqrt{x-2}}{9+(\sqrt{x-2})^2} = \frac{2}{3}\arctan\frac{\sqrt{x-2}}{3}\Big|_2^{+\infty} = \frac{2}{3}\left[\frac{\pi}{2}-0\right] = \frac{\pi}{3}$$

【例8】（2000年4）计算 $I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2-x}}$ ✓ $\left(\frac{\pi}{4\mathrm{e}}\right)$

【解】 $I \overset{*}{=} \int_1^{+\infty}\frac{e^x\,dx}{e^{2x}+e^2}=\int_1^{+\infty}\frac{de^x}{e^2+(e^x)^2}$

$=\frac{1}{e}\arctan\frac{e^x}{e}\Big|_1^{+\infty}$

$=\frac{1}{e}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi}{4e}$

【例9】（2013年，1，3）$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$ ________. (ln 2)

【解】

原式 $= -\int_1^{+\infty} \ln x \, d\frac{1}{1+x}$

分部

$= -\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty}\frac{1+x-x}{x(1+x)}dx$

$\ln x - \ln(1+x)$

$= \ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^{+\infty} = 0 - \ln\frac{1}{2}$

$= \ln 2$

第六章　定积分应用

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）几何应用

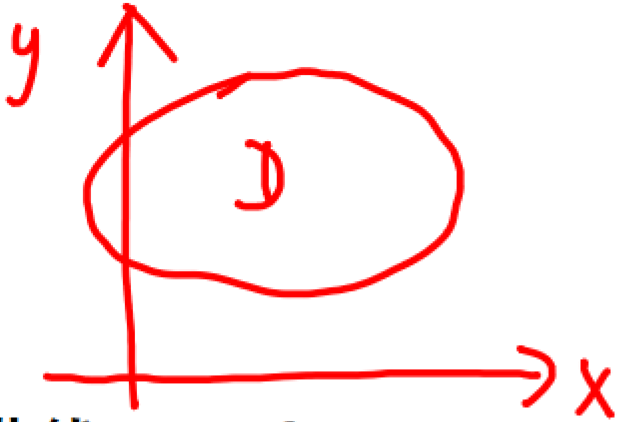
（二）物理应用

二. 常考题型与典型例题

题型一　几何应用

题型二　物理应用

（一）几何应用



$$\boxed{\iint_D 1\, d\sigma = S}$$

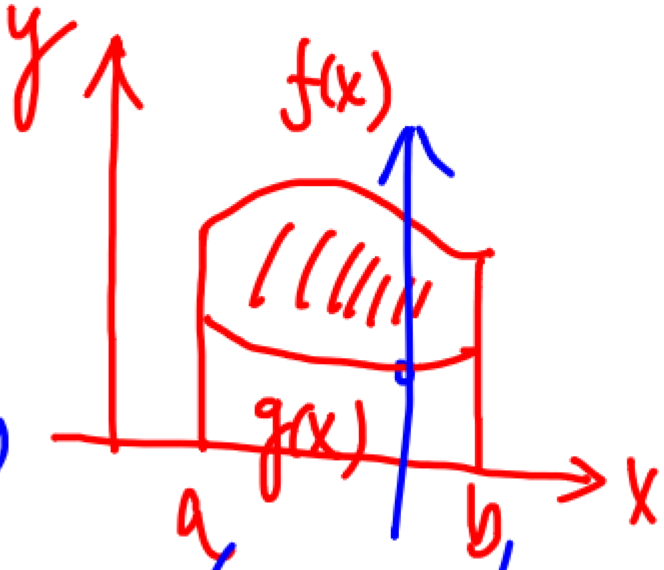
1. 平面图形的面积

（1）若平面域 D 由曲线 $y=f(x), y=g(x)(f(x)\ge g(x))$,

$x=a$, $x=b$ $(a<b)$ 所围成，则

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

$$S=\iint_D 1\, d\sigma=\int_a^b dx\int_{g(x)}^{f(x)} dy$$



（2）若平面域 D 由曲线 $\rho=\rho(\theta), \theta=\alpha, \theta=\beta(\alpha<\beta)$

所围成，则

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$S=\iint_D d\sigma \qquad d\sigma=\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\rho(\theta)}\rho\, d\rho$$

2. 旋转体体积

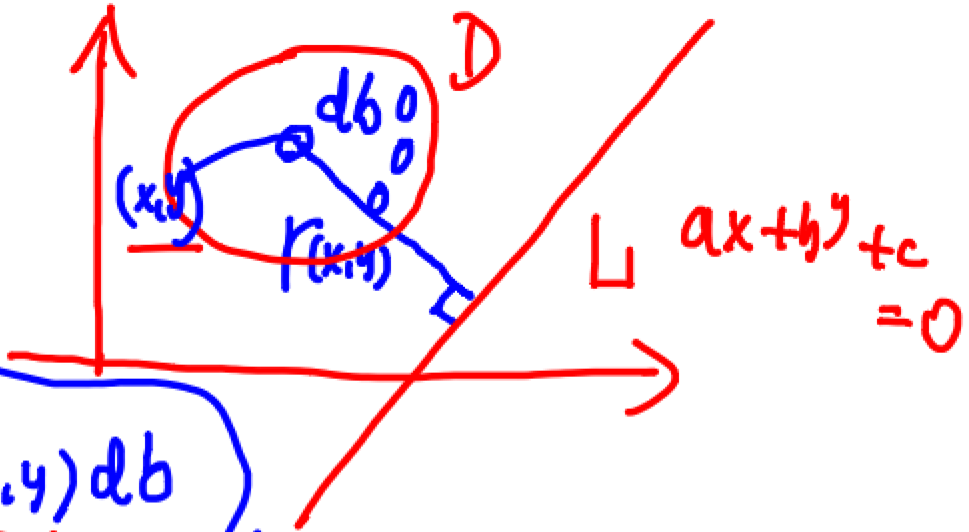
若平面域 D 由曲线 $y=f(x),(f(x)\ge 0)$,

$x=a, x=b\,(a<b)$ 所围成，则

$$dV = 2\pi r(x,y)\,d\sigma$$

*

$$\boxed{V = 2\pi\iint_D r(x,y)\,d\sigma}$$

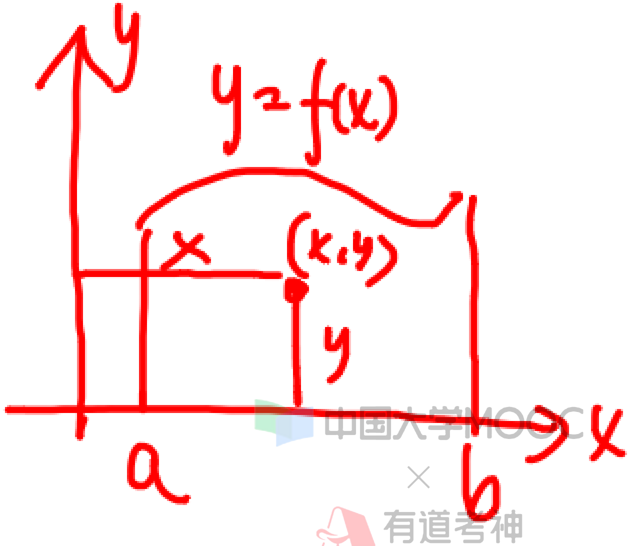


$$r(x,y)=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

1）区域 D 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体积为

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$V_x=2\pi\iint_D y\,d\sigma=2\pi\int_a^b dx\int_0^{f(x)} y\,dy=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$



2）区域 D 绕 y 轴旋转一周所得到的旋转体积为

$$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x$$

$$V_y=2\pi\iint_D x\,d\sigma=2\pi\int_a^b dx\int_0^{f(x)} x\,dy=2\pi\int_a^b x f(x)\,dx$$

3. 曲线弧长（数三不要求）

ds

1) $C: y=y(x),\quad a\le x\le b.\quad s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

2) $C:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\quad \alpha\le t\le\beta.\quad s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$

$o(dx)$

3) $C: \rho=\rho(\theta),\quad \alpha\le\theta\le\beta.\quad s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$

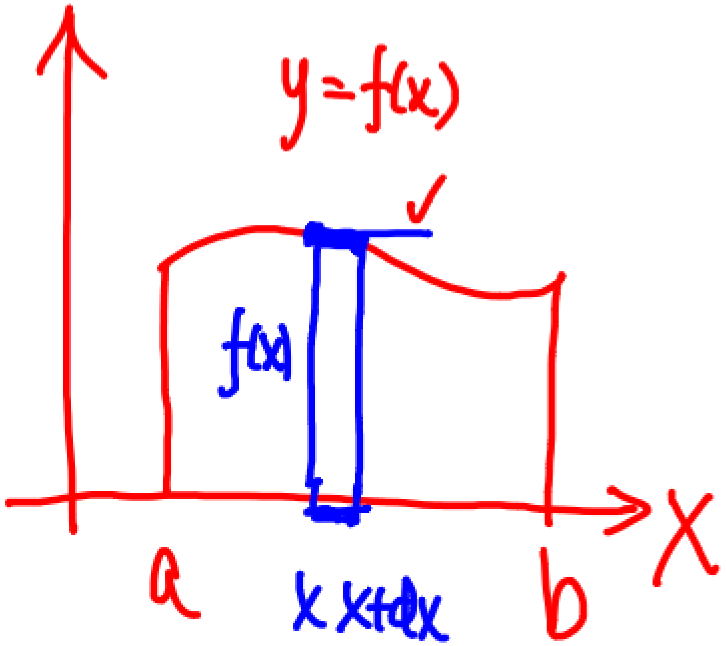
ds

4. 旋转体侧面积（数三不要求）

$y(t)\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

ds



（二）物理应用（数三不要求）

$2\pi\int_\alpha^\beta \rho\sin\theta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$

1. 压力；　2. 变力做功；　3. 引力。

重点

$2\pi f(x)\,dx$

ds

常考题型与典型例题

常考题型

1.几何应用

2.物理应用

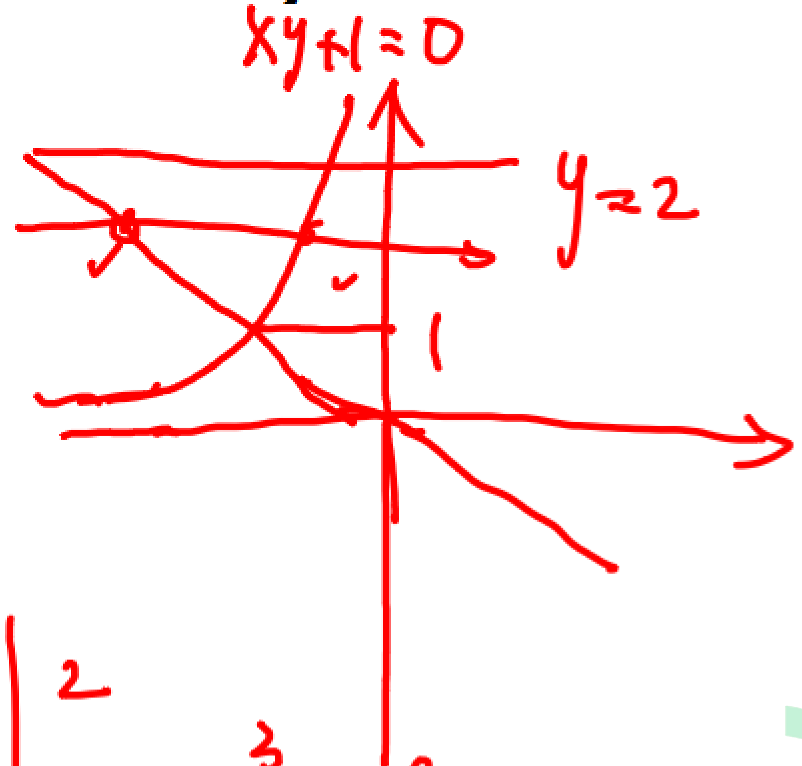
（一）　几何应用

$xy=-1$　　$-y^2=-1$　　$y^2=1$

【例1】（2014年, 3） 设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域，则 D 的面积为 ______　$(\frac{3}{2}-\ln 2)$

$y=-x$

$y+x=0$



【解】

$S=\iint\limits_D 1\,d\sigma$

$=\int_1^2 dy\int_{-y}^{-\frac{1}{y}} dx$

$=\int_1^2\left(y-\frac{1}{y}\right)dy=\left(\frac{1}{2}y^2-\ln y\right)\Big|_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2$

【例2】(2013年, 2) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\,(-\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6})$，则 L 所围平面图形的面积是 ____.

【解1】 $$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\,d\theta=\underline{\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\,d\theta}$$

$$\overset{*}{=}\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 6\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{6}\sin 6\theta\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}$$

【解2】 $$S=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\,d\theta$$

$$\overset{3\theta=t}{=\!=\!=}\frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{12}$$

$*$

【例3】(2015年2, 3)设 $A>0, D$ 是由曲线段 $y=A\sin x\ (0\le x\le \frac{\pi}{2})$ 及直线 $y=0, x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域，V_1, V_2 分别表示 D 绕 x 轴与 y 轴旋转所成旋转体的体积. 若 $V_1=V_2$，求 A 的值.

$[V_1=\frac{\pi^2}{4}A^2, V_2=2\pi A, A=\frac{8}{\pi}]$

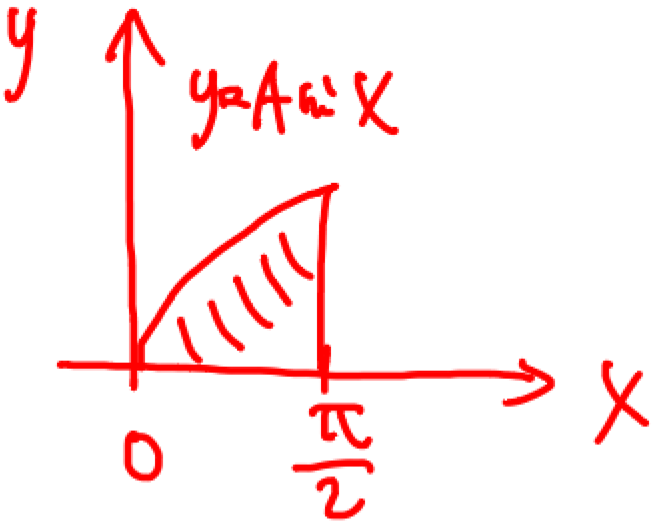
【解】

$$V_1=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}A^2\sin^2 x\,dx=\pi A^2\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2A^2}{4}$$

$$V_2=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}xA\sin x\,dx=2\pi A\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\boxed{\sin x\,dx}$$

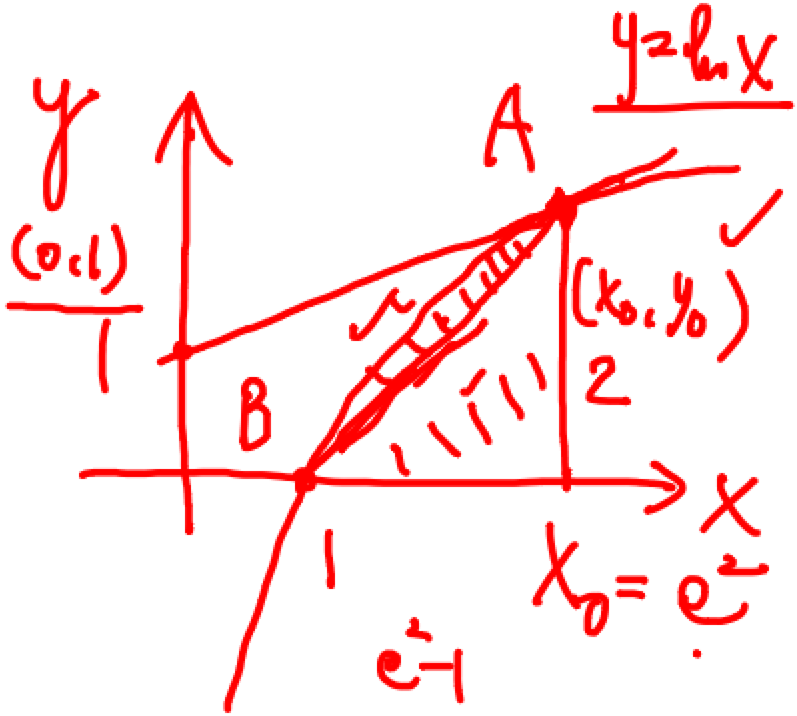
$$=2\pi A.$$

$$V_1=V_2\rightarrow A=\frac{8}{\pi}$$



【例4】(2012年，数二) 过点 $(0,1)$ 作曲线 $L: y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成. 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积. $[S=2;V=\frac{2\pi}{3}(e^2-1)]$

文



【解1】 设切点为 (x_0,y_0)，则切线方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$

$1-\ln x_0=-1$ $\quad 2=\ln x_0$ $\quad x_0=e^2$ $\quad y=\ln x$ ✓

【解2】 设过点 $(0,1)$ 的线方程为 $y-1=kx$， $\quad y=1+kx$ ✓

$$\begin{cases}\ln x=1+kx \\ \frac{1}{x}=k\end{cases} \Rightarrow \ln x=2,\ x=e^2,\ k=e^{-2}$$

$$S=\int_1^{e^2}\ln x\,dx-\frac{1}{2}e^2\cdot 2 = 2 \quad ✓$$

(e^2-1)

$$V=\pi\int_1^{e^2}\ln^2 x\,dx-\frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot(e^2-1) = \frac{2\pi}{3}(e^2-1) \quad ✓$$

【例5】（2011年1, 2）曲线 $y=\int_0^x \tan t dt (0\le x\le \frac{\pi}{4})$ 的弧长

$s=$ ________.

$[\ln(1+\sqrt{2})]$

$y=y(x)$

【解】

$s \stackrel{*}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 x}\, dx$

$y'=\tan x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x\, dx = \ln(\overset{\sqrt{2}}{\sec x}+\overset{1}{\tan x})\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\ln(1+\sqrt{2})$

（二） 物理应用

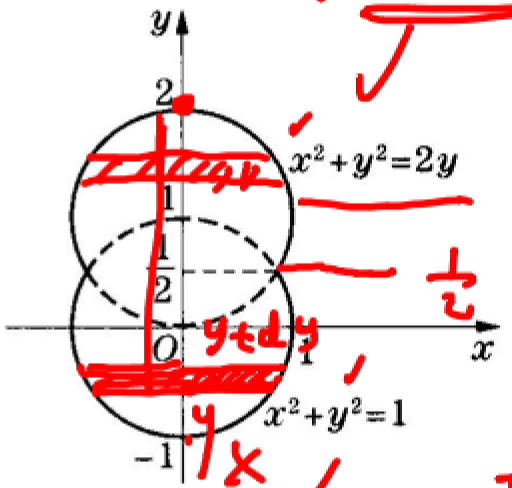
【例6】（2011年2）一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面，该曲线由 $x^2+y^2=2y\left(y\geq\frac{1}{2}\right)$ 与 $x^2+y^2=1\left(y\leq\frac{1}{2}\right)$ 连接而成.

（I）求容器的容积；

（II）若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功？

（长度单位：m，重力加速度为 $g\,\text{m/s}^2$，水的密度为 10^3kg/m^3）

位移 · g · ρ · dV



$\pi x^2 dy$

$\frac{1}{2}$

$= \pi(2y-y^2)dy$

$\pi x^2 dy = \pi(1-y^2)dy$

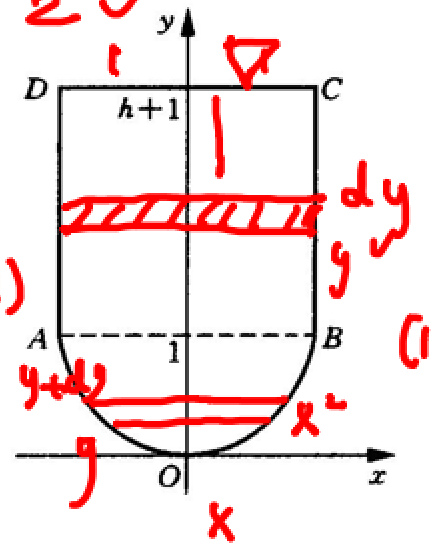
$2-y$

$g\cdot 10^3\cdot\pi(1-y^2)dy$

【解】 $V=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}x^2\,dy=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)\,dy=\frac{9\pi}{4}.$

$$W=10^3\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\pi(1-y^2)(2-y)g\,dy+10^3\int_{\frac{1}{2}}^{2}\pi[2y-y^2](2-y)g\,dy=\frac{27}{8}\pi\rho g$$

【例7】（2002年2）某闸门的形状与大小如图所示，其中 y 轴为对称轴，闸门的上部为矩形 $ABCD$，DC=2m，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成，当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为5：4，闸门矩形部分的高 h 应为多少



压力

$p = g\rho(h+1-y)$

$dP = g\rho(h+1-y)\cdot 2dy$

$A = 2x\,dy = 2\sqrt{y}\,dy$

压强 $p = g\rho h$

压力 $P = p\cdot A$

【解】 $$P_1 = 2\int_1^{h+1} \rho g(h+1-y)\,\mathrm{d}y = 2\rho g\left[(h+1)y - \frac{y^2}{2}\right]_1^{h+1} = \rho g h^2,$$

$$P_2 = 2\int_0^1 \rho g(h+1-y)\sqrt{y}\,\mathrm{d}y = 2\rho g\left[\frac{2}{3}(h+1)y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$$= 4\rho g\left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15}\right).$$

$$\frac{h^2}{4\left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15}\right)} = \frac{5}{4}.$$

$h = 2$ $\quad h = -\frac{1}{3}$

$p = g\rho(h+1-y)$

$dP = g\rho(h+1-y)\cdot 2\sqrt{y}\,dy$

高数基础班（13）

主讲 武忠祥 教授