高数基础班（4）

4	求极限方法举例（洛必达法则；泰勒公式；夹逼原理；单调有界准则；定积分定义）	P24-P31

主讲 武忠祥 教授

方法4 利用洛必达法则求极限

洛必达法则

若 1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0\ (\infty)$; $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或 ∞）;

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} \overset{?}{=} \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. 存 (∞)

$0\cdot\infty$

$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$

注：1）适用类型 $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 1^∞; ∞^0; 0^0.

2）解题思路 $\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty} \Leftarrow \begin{cases} 0\cdot\infty \Leftarrow \begin{cases} 1^\infty \\ \infty^0 \\ 0^0 \end{cases} \\ \infty-\infty \end{cases}$

① $1^\infty=\lim(1+\alpha)^\beta$

② $\lim \alpha\beta=A$

③ 原式 $=e^A$

【例30】求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}$. $\dfrac{0}{0}$

【解】 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\tan(x-1)}{-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x}$ ✓ $\dfrac{0}{0}$（洛必达法则） ✓

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}$$ $\dfrac{0}{0}$ $(\tan(x-1)\sim x-1)$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{1}{-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}x}$$ （洛必达法则） ✓

$$=-\frac{4}{\pi^2}$$

$0 \cdot \infty$

【例31】（1988年3） 求极限 $\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi}{2}x.$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

【解】原式 $= \lim\limits_{x\to1}\overset{2}{(1+x)}(1-x)\dfrac{\overset{1}{\sin\frac{\pi}{2}x}}{\cos\frac{\pi}{2}x}$

$$= 2\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi}{2}x} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= 2\lim_{x\to1}\frac{-1}{-\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4}{\pi}$$

【例32】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

∞^0

【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} \overset{*}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}}$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1}=0$$

$\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=e^0=1$$

【例33】设 $f(x)$ 二阶可导 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=2$

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$ $\quad \dfrac{0}{0}$

【解1】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}$ （洛必达法则）

① $f(x)$ n阶可导 $\quad \underline{f^{(n-1)}(x)}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$$

② $f(x)$ 有n阶 连续导数 $\quad f^{(n)}(x)$

$$=\frac{f''(0)}{2}$$

$\boxed{\text{（导数定义）}}$

$$=1$$

洛必达 连续

【注】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}\overset{?}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}\underset{\times}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2}\underset{\times}{=}\dfrac{f''(0)}{2}=1$ 经典的错误 标准的0分

【例33】设 $f(x)$ 二阶可导 $f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=2$

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$

泰勒

【解2】 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$

即 $f(x)=x+x^2+o(x^2)$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+o(x^2)}{x^2}=1$

方法5 利用泰勒公式求极限

定理（泰勒公式） 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n$$

若 $\alpha\sim\beta$，则 $\alpha=\beta+o(\beta)$

几个常用的泰勒公式

$\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3$ *

$\tan x-x=\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

$\boxed{\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}$

$\arcsin x$

$\arctan x$,

(1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$

(2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$

(3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$

(4) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$

(5) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

【例34】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$. $\dfrac{0}{0}$ $[-\frac{1}{12}]$

【解1】 $\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$ $\qquad e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}---$

$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^4}{4}+o(x^4)$ $\qquad \frac{1}{24}-\frac{1}{8}=-\frac{1}{12}$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}$

【解2】原式 $\overset{洛\,\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+xe^{-\frac{x^2}{2}}-x}{4x^3}=\frac{1}{4}\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\overbrace{x-\sin x}^{\frac{1}{6}x^3}}{x^3}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\overbrace{[e^{-\frac{x^2}{2}}-1]}^{-\frac{1}{2}x^2}}{x^3}\right]$

$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right]$ $\qquad \frac{1}{6}-\frac{3}{6}=-\frac{1}{3}$

$=-\frac{1}{12}$

【例35】（1994年3）设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则（ ）.

$\frac{0}{0}$

$\boxed{-(\frac{1}{2}+b)=2}$

$a=1$

（A）$a=1,b=-\dfrac{5}{2}$　　（B）$a=0,b=-2$

（C）$a=0,b=-\dfrac{5}{2}$　　（D）$a=1,b=-2$

【解1】$2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)]-(ax+bx^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\overbrace{(1-a)}^{=0}x-(\frac{1}{2}+b)x^2+o(x^2)}{x^2}$

$\frac{1}{2}+b=-2$

$b=-2-\frac{1}{2}$

$=-\frac{5}{2}$

【解2】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x}=0\Rightarrow a=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\overbrace{\ln(1+x)-x}^{-\frac{1}{2}x^2}}{x^2}-b=2$

个个击破

【解3】代入 $a=0$，矛盾 $\Rightarrow a=1$.

【例36】（2000年2）若 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}\right)=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$.

（A）0　　（B）6　　（C）36　　（D）∞

【解1】 $0=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x-\frac{1}{3!}(6x)^3+o(x^3)+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}-36$

【注】 $0=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)\neq\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 经典的错误 标准的0分

【例36】（2000年2）若 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)\cancel{=}\,0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36$.

（A）0 （B）6 （C）36 （D）

【解2】 $$0=\lim_{x\to0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{\overset{-\frac{1}{6}(6x)^3}{\sin 6x-6x}}{x^3}$$

$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$.

$$=\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}-36$$

$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$

[解3] $\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0+\alpha \Rightarrow f(x)=\cdots\cdots$

[解4] 排除法 $f(x)=-\frac{\sin 6x}{x}$

方法6　利用夹逼原理求极限

有限项 !!!

【例37】（1995年3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\overset{0}{1}}{n^2+n+1}+\dfrac{\overset{0}{2}}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{\overset{0}{n}}{n^2+n+n}\right]=0$ ✗

n项和0.

小　　大　　$=\dfrac{1}{2}$

$n\to+\infty$

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}\le\left[\quad\right]\le\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}$$

大 $\Downarrow$ $\dfrac{1}{2}$　　　小 $\Downarrow$ $\dfrac{1}{2}$

【例38】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n} = 3$ ∞^0

$\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ $|x|<1$

[解1] 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} 3\sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}$ 1^0

$= 3$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$

$\sqrt[n]{3} \leq$

[解2] $\sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{1+2^n+3^n} \leq \sqrt[n]{3\cdot 3^n}$

$\downarrow$ $\downarrow$

3 3

【例39】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^{\ n}+a_2^{\ n}+\cdots+a_m^{\ n}}$， 其中 $a_i>0,(i=1,2,\cdots m)$

$=\max a_i = a$

$$\sqrt[n]{a^n} \leqslant \sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n} \leq \sqrt[n]{m\ a^n}$$

$\sqrt[n]{a^n} \downarrow a$ $\qquad$ $\sqrt[n]{m\ a^n} \downarrow a$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n} = 3$$

【例40】(2008年4) 设 $0 < a < b$，则 $\lim_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=$

(A) a　　(B) a^{-1}

(C) b　　(D) b^{-1}

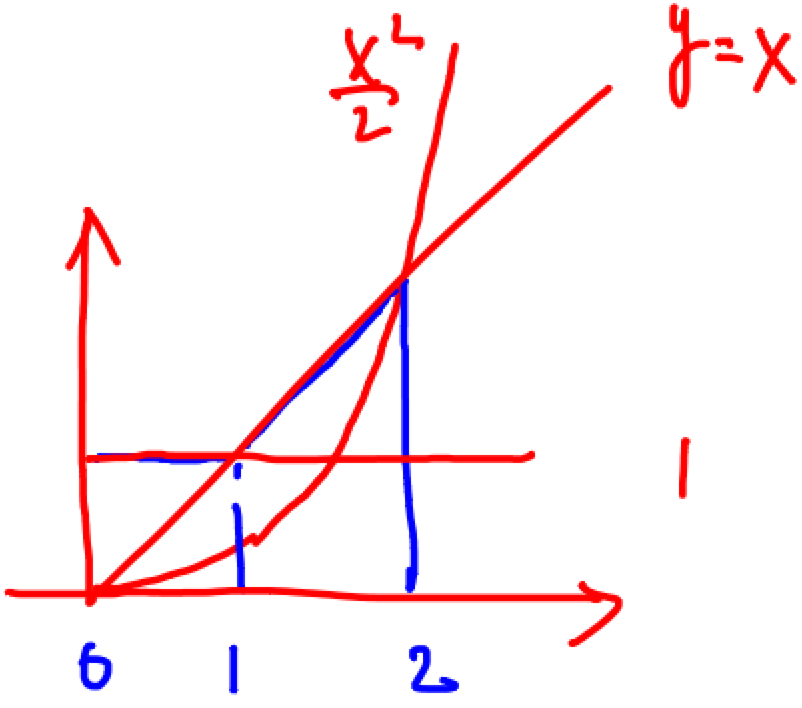
$$\underbrace{\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^n+\left(\frac{1}{b}\right)^n}} \to \frac{1}{a}=a^{-1}$$

【例41】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$, $(x>0)$.

2 1^n+1^n 100

【解】原式 $= \max\left\{1,\ x,\ \frac{x^2}{2}\right\}$

$$= \begin{cases} 1 & 0\le x<1 \\ x & 1\le x<2 \\ \frac{x^2}{2} & x\ge 2 \end{cases}$$



n项

方法7 利用单调有界准则求极限

$x_{n+1}=f(x_n)$ 10分

① 证存在（单调有界）

② $a=f(a)$

【例42】设 $x_1>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$, $n=1,2,\cdots$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

$-x_n$

【解】由题设知 $x_n>0$, 且

①

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)=\frac{1}{2}\left[(\sqrt{x_n})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2\right]\ge\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_n}}=1$$

$x_{n+1}\ge 1$

$2ab\le a^2+b^2$

① $$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n}-x_n\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x_n^2}{x_n}\le 0$$

$x_n>0$

$x_1=1$, $x_{n+1}=1-x_n$ $(n=1,2\cdots)$

$a=1-a$?

$\sqrt[3]{abc}\le\frac{a+b+c}{3}$

或 $$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{x_n^2}\right]\le\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{1}\right]=1$$

$x_n\Downarrow$. $\Rightarrow a=\frac{1}{2}$ ×

1, 0, 1, 0, 1, ...

2分 ② $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

$2a=a+\frac{1}{a}$

$$a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\quad \lim_{n\to\infty}x_n=1.$$

$a=\pm 1$ $a^2=1$

方法8 利用定积分定义求极限

①夹逼
②定积分

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad \frac{b-a}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum f(\xi_k)$$

n等分

【例43】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2+1^2}+\dfrac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right]$

【解】原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{\frac{1}{n}}{1+(\frac{1}{n})^2}+\dfrac{\frac{2}{n}}{1+(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\dfrac{\frac{n}{n}}{1+(\frac{n}{n})^2}\right]$

抓取"可爱因子" $\frac{1}{n}$

$$=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$$

$$\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$$

高数基础班（4）

4	求极限方法举例（洛必达法则；泰勒公式；夹逼原理；单调有界准则；定积分定义）	P24-P31