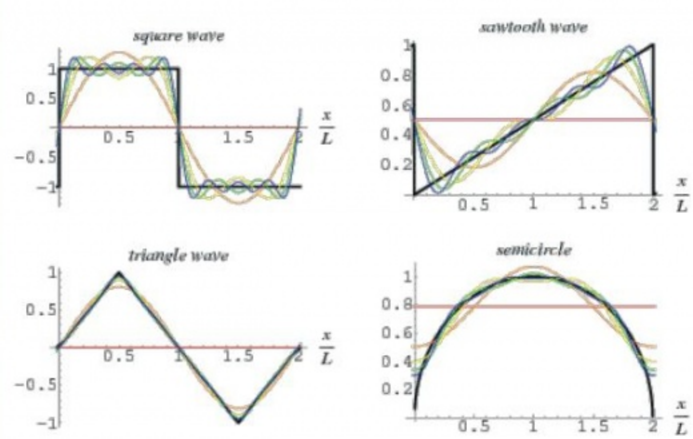
“SERIES DE FOURIER”

17 de abril de 2013

Material Didáctico.

Ismael Hernández de Jesús, Eloy García Santiago. Licenciatura en Ingeniería Física, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco

Av. San Pablo 180, C.P. 02200 México, D.F.



SERIES DE FOURIER INTRODUCCIÓN

Una función se puede representar en forma de Serie, lo cual es una práctica muy común en las matemáticas, y es que con bastante frecuencia encontramos ventajas al expandir una función en alguna serie. Seguramente recuerda expansiones un poco más familiares y que además ha trabajado con ellas, como las series de potencia de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n \tag{1}$$

Las series de Fourier dadas en términos de seno y coseno han sido una importante herramienta para la solución de aquellos problemas donde intervienen ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, además de emplearse para analizar funciones periódicas a través de la descomposición en una suma infinita de funciones senoidales mucho más simples. Si bien toda la teoría que engloba las series de Fourier es complicada, la aplicación de éstas, llega a ser más simple, siendo, en cierto sentido, más universales que las series de Taylor, ya que muchas funciones de interés práctico que son periódicas discontinuas pueden desarrollarse en series de Fourier, pero no tienen representación en series de Taylor. (Kreyszig 1999).

El nombre se debe al matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), que desarrolló la teoría cuando estudiaba la ecuación de calor. Fue el primero en estudiar tales series sistemáticamente, publicando sus resultados iniciales en 1807 y 1811. (Kreyszig 1999).

Entre las áreas de aplicación donde se suele emplear series de Fourier podemos encontrar el análisis vibratorio, acústica, óptica, procesamiento de imágenes y voz, señales, en teoría de comunicaciones. (Glyn James 2008)

Una serie de Fourier de una función en su forma general es la siguiente: (Dennis G. Zill, Michael R. Cullen, 2009):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\frac{n\pi}{p}x + b_n sen\frac{n\pi}{p}x) \tag{2}$$

Estando definida en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, cuyo periodo es $2p$. El término $n = 0$, es independiente de x y está fuera de la sumatoria.

De la Ecuación 2 encontramos un coeficiente llamado a_0, el cual corresponde a una constante real. Y los a_ny b_n son coeficientes de la serie.

En conjunto estos tres coeficientes son llamados Coeficientes de Fourier y son el verdadero detalle de las series de Fourier. La forma de calcularlos se muestran en las Ecuaciones 3, 4 y 5.

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\, dx \tag{3}$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\, cos\, \frac{n\pi}{p} x\, dx \tag{4}$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\, sen\, \frac{n\pi}{p} x\, dx \tag{5}$$

Algunos ejemplos aparecen al final de éste trabajo.

BASES DE FUNCIONES.

Un espacio vectorial de dimensión infinita cuyos vectores de base son funciones, es un tipo de espacio-funcional. Esto significa que cada función en el espacio funcional puede representarse como una combinación lineal de las *funciones de la base.*

Para ilustrar el concepto, se empleo el siguiente ejemplo:

Se puede crear un vector bidimensional sumando múltiplos de los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

En éste ejemplo, se puede decir que el vector (x, y) está generado por los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Los vectores base más adecuados son ortogonales, lo que se cumple para $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero, lo que significa que están en ángulo recto. De la misma forma, dos funciones son ortogonales si su producto escalar es cero. Las funciones y son ortogonales, ya que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} sen\, x\, cos\, x\, dx = 0 \tag{7}$$

Una función $f(x)$ es de cuadrado integrable sí y solo sí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2\, dx < \infty \tag{8}$$

Cualquier función de cuadrado integrable (como por ejemplo: una grabación musical) puede representarse por una suma de senos y cosenos varias amplitudes y frecuencias. Esta descomposición lleva a la transformada de Fourier. En este caso los senos y los cosenos son las funciones de base. Es importante destacar que mientras que el espacio bidimensional está generado únicamente por dos vectores, un espacio funcional está generado por un número infinito de funciones de base, porque su espacio funcional es de dimensión infinita.

ORTONORMALIDAD

Dos vectores x & y de un espacio euclidiano E, se dice que son ortogonales si su producto interno es nulo:

$$< x, y >= 0 \tag{9}$$

(Rafael Bru, Joan Josep Climent, 2001)

Además dos vectores son ortonormales sí:

- **Si su producto interno, (llamado también escalar), es cero.**
- **Los dos vectores son unitarios.**

Un ejemplo de esto es:

En el espacio euclídeo bidimensional el conjunto S = {e1, e2} formado por los dos vectores e1 = (1,0), e2 = (0,1) es un conjunto ortonormal.como se muestra en la figura 1.

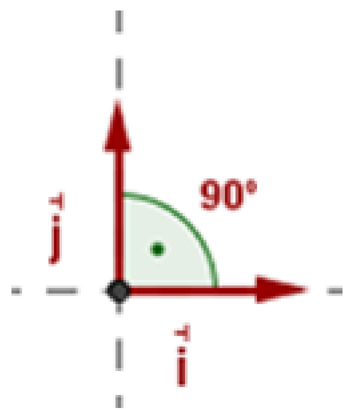


Figura 1: Vectores i & j ortonormales entre sí.

En el caso de funciones $cos(mx)$ y $cos(nx)$, así como de las funciones $sen(nx)$ y $cos(nx)$ se sabe que son ortogonales en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$:

$$< f_1,\, f_2 >= \int_a^b f_1(x)\, f_2(x)\, dx \tag{10}$$

$$< cos(mx),\, cos(nx) >= \int_{-\pi}^{\pi} cos(mx)cos(nx)\, dx = 0 \tag{11}$$

Si m y n son números enteros no negativos distintos.

En álgebra lineal, una base ortonormal de un espacio es un conjunto mutuamente ortogonal y normal (es decir, de magnitud unitaria) que puede desarrollar (generar) todo vector de dicho espacio. Recíprocamente, en un espacio vectorial todo vector puede ser expresado como una combinación lineal de la base.

Una base ortogonal satisface las mismas condiciones, salvo la de magnitud unitaria; es muy sencillo transformar una base ortogonal en una base ortonormal mediante el producto por un escalar apropiado y de hecho, esta es la forma habitual en la que se obtiene una base ortonormal; por medio de una base ortogonal. Así, una base ortonormal es una base ortogonal, en la cual la norma de cada elemento que la compone es unitaria.

$$\|V\| = \|(v_x, v_y, v_z)\| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2} \tag{12}$$

$$\widehat{V} = \frac{v_x}{V}\hat{U}_x + \frac{v_y}{V}\hat{U}_y + \frac{v_z}{V}\hat{U}_z \tag{13}$$

$$< cos(mx),\ cos(nx) >= \int_{-\pi}^{\pi} cos(mx)cos(nx)\, dx = 0 \tag{14}$$

$$\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x)\, dx} = 1 \tag{15}$$

Tiene la propiedad de que es 1 para n=1,2,3,4.....

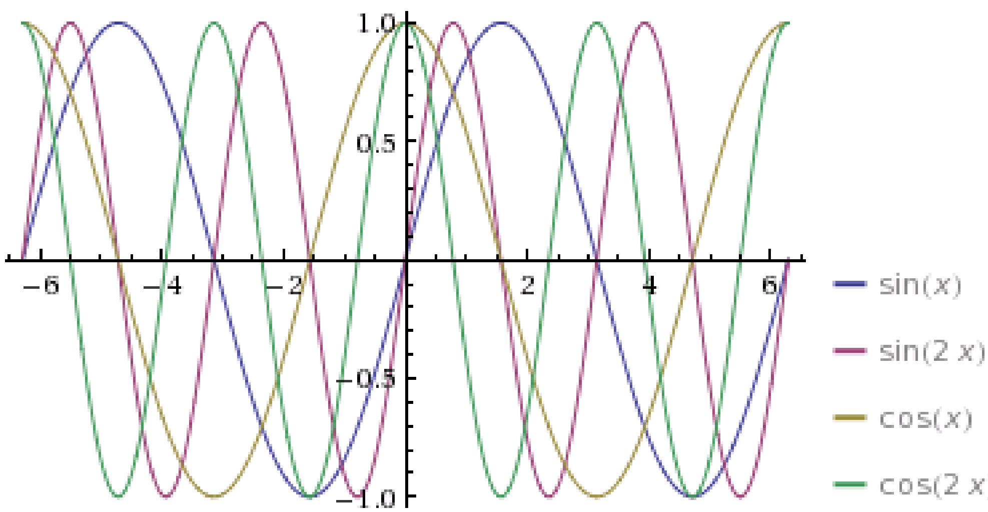


Figura 2: Funciones $sen(mx)$ y $cos(mx)$ ortogonales entre sí.

SERIES DE FOURIER; EJEMPLOS Y SUMAS PARCIALES DE FUNCIONES PERIÓDICAS.

El Ejemplo 1.1 se encuentra resuelto en el libro de Ecuaciones Diferenciales de los autores Zill y Cullen, de este ejemplo se muestra la serie de Fourier correspondiente, además de la gráfica tanto de la función como de la serie de Fourier de la quinta suma. Junto con esta primer serie y la de los ejemplos 1.2 y 1.3 se realizó una tabla que índica la evaluación de los siete primeros sumandos, obteniendo las primeras siete sumas parciales (desde $n = 1$ hasta $n = 7$). Así, en la Tabla 1 se observan los valores de las sumas parciales con el valor de las funciones respectivas evaluadas en $(x = \pi)$, y se presentan los resultados.

A partir del Ejemplo 1.2 se ilustra de forma detallada la forma de encontrar la Serie de Fourier para funciones de valores reales, así como el desarrollo de la serie de Fourier de funciones exponenciales.

Ejemplo 1.1 (Citado en la Tabla 1 para comparación de resultados). *Ejemplo 1, de la sección 11.2, extraído del libro de Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera, Séptima edición, de los autores Zill y Cullen*

Desarrollo de una función $f(x)$ en una Serie de Fourier.

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \\ \pi - x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

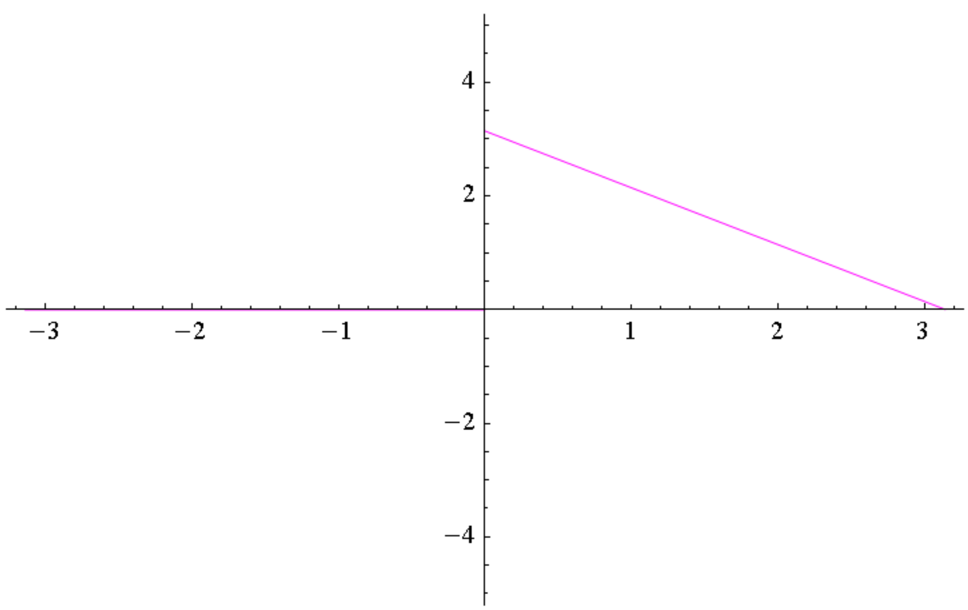


Figura 3: Gráfica de la función $f_1(x)$.

El resultado de la serie de Fourier para la función $f_1(x)$ es de la siguiente forma:

$$f_1(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} cos\, nx + \frac{1}{n} sen\, nx \right\}$$

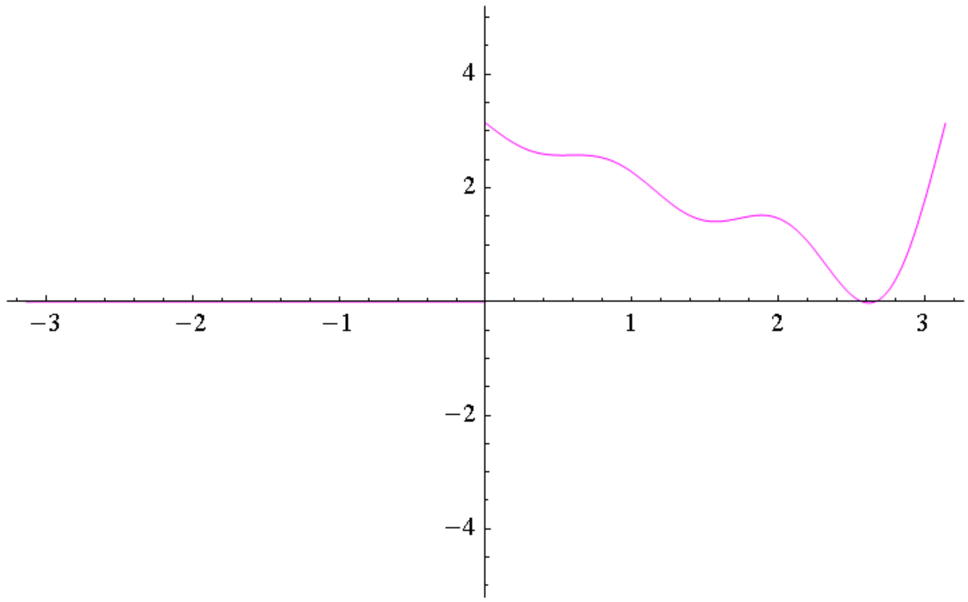


Figura 4: Gráfica de la Serie de Fourier de la función $f_1(x)$, con una $n = 5$

Haciendo las sumas parciales correspondientes a $n = 1$ hasta $n = 7$ para $f_1(x)$ son:

El elemento $n = 1$ de la suma es:

$$S_1 = \frac{2}{\pi} cosx + senx$$

El elemento $n = 2$ de la suma es:

$$S_2 = \frac{1}{2} sen\, 2x$$

El elemento $n = 3$ de la suma es:

$$S_3 = \frac{2}{9\pi} cos\, 3x + \frac{1}{3} sen\, 3x$$

El elemento $n = 4$ de la suma es:

$$S_4 = \frac{1}{4} sen\, 4x$$

El elemento $n = 5$ de la suma es:

$$S_5 = \frac{2}{25\pi} cos\, 5x + \frac{1}{5} sen\, 5x$$

El elemento $n = 6$ de la suma es:

$$S_6 = \frac{1}{6} sen\, 6x$$

El elemento $n = 7$ de la suma es:

$$S_7 = \frac{2}{49\pi} cos\, 7x + \frac{1}{7} sen\, 7x$$

Por lo tanto, hasta la séptima Suma parcial de la serie de Fourier, queda de la forma:

$$Sp_7\_f_1(x) = \frac{\pi}{4} + \{\left(\frac{2}{\pi} cosx + senx\right) + \left(\frac{1}{2} sen\, 2x\right) + \left(\frac{2}{9\pi} cos\, 3x + \frac{1}{3} sen\, 3x\right) + \left(\frac{1}{4} sen\, 4x\right) + \left(\frac{2}{25\pi} cos\, 5x + \frac{1}{5} sen\, 5x\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{6} sen\, 6x\right) + \left(\frac{2}{49\pi} cos\, 7x + \frac{1}{7} sen\, 7x\right)\}$$

Ejemplo 1.2 (Citado en la Tabla 1 para comparación de resultados), *Ejercicio 5 de la sección 11.2, extraído del libro de Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera, Séptima edición, de los autores Zill y Cullen.*

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \\ x^2 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

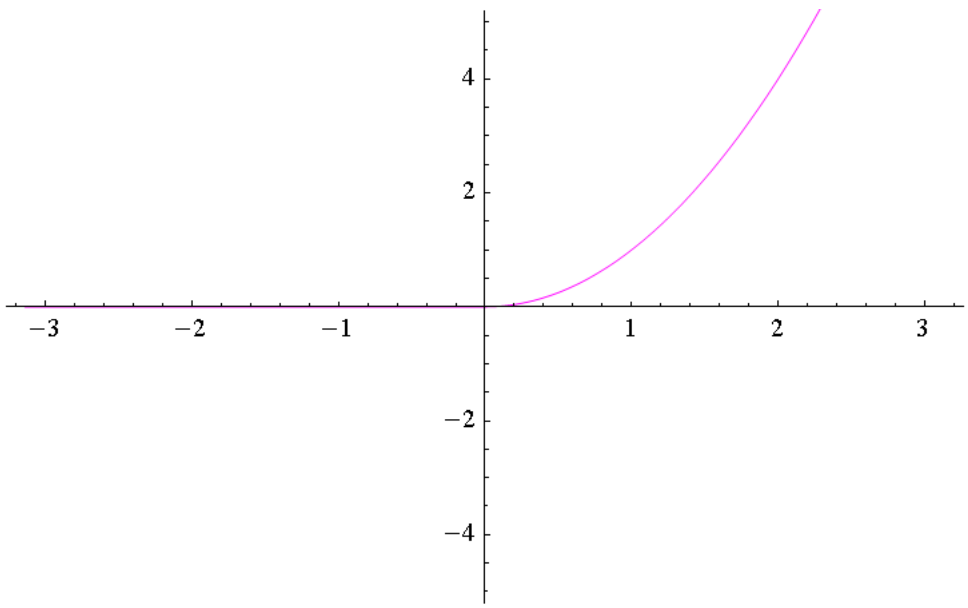


Figura 5: Gráfica de la función $f_2(x)$.

Calculando el coeficiente a_o se tiene que:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{\pi} (x^2)\, dx\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

Ahora se calcula a_n y b_n.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(x)\, cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\, cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} (x^2)\, cos(nx)dx\right]$$

Integrando por partes tenemos que:

$$u = x^2 \qquad dv = cos\, nx\, dx$$

$$du = 2x\, dx \qquad v = \frac{1}{n} sen\, nx$$

Y la forma para resolver una integral de este tipo es:

$$uv - \int vdu$$

Sustituyendo valores

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{n} sen\, nx - \int \frac{2x}{n} sen\, nx\, dx\right]_0^\pi$$

De nuevo se puede observar que la integral del lado derecho se tiene que resolver por partes.

$$u = x \qquad dv = sen\, nx\, dx$$

$$du = dx \qquad v = -\frac{1}{n} cos\, nx$$

$$\left[\frac{x^2}{n\pi} sen\, nx + \frac{2x}{n^2\pi} cos\, nx - \frac{2}{n^3\pi} sen\, nx\right]_0^\pi$$

Evaluando con los límites de integración nos queda:

$$a_0 = \frac{2(-1)^n}{n^2}$$

Y se hace lo mismo para b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(x)\, sen(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\, sen(nx)dx + \int_0^\pi (x^2)\, sen(nx)dx\right]$$

Integrando por partes tenemos que:

$$u = x^2 \qquad dv = sen\, nx\, dx$$

$$du = 2x\, dx \qquad v = -\frac{1}{n} cos\, nx$$

Y la forma para resolver una integral de este tipo es:

$$uv - \int vdu$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{n} cos\, nx + \int \frac{2x}{n} cos\, nx\, dx\right]_0^\pi$$

$$u = x \qquad dv = cos\, nx\, dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{n} sen\, nx$$

$$\left[-\frac{x^2}{n\pi} cos\, nx + \frac{2x}{n^2\pi} sen\, nx + \frac{2}{n^3\pi} cos\, nx\right]_0^\pi$$

Evaluando con los límites de integración nos queda:

$$b_n = -\frac{\pi(-1)^n}{n} + \frac{2(-1)^n}{\pi n^3} - \frac{2}{\pi n^3} = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{\pi n^3}\left[(-1)^n - 1\right]$$

Por lo tanto el resultado final de la serie de Fourier es

$$f_2(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2(-!)^n}{n^2} cos\, nx + \left[\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{\pi n^3}\left[(-1)^n - 1\right]\right] sen\, nx\right\}$$

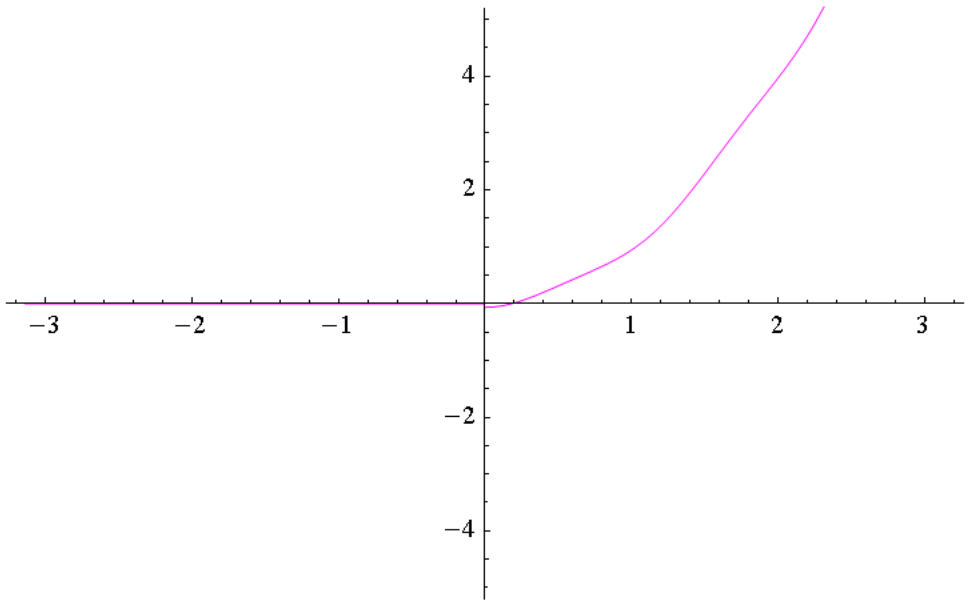


Figura 6: Gráfica de la Serie truncada de Fourier de la función $f_2(x)$, con una $n = 5$.

Haciendo las sumas parciales correspondientes a $n = 1$ hasta $n = 7$ para $f_2(x)$ son:

El elemento $n = 1$ de la suma es:

$$S_1 = -2cos\, x + \left[\pi - \frac{4}{\pi}\right] sen\, x$$

El elemento $n = 2$ de la suma es:

$$S_2 = \frac{2}{4} cos\, 2x + \left[-\frac{\pi}{2}\right] sen\, 2x$$

El elemento $n = 3$ de la suma es:

$$S_3 = -\frac{2}{9} cos\, 3x + \left[\frac{\pi}{3} - \frac{4}{27\pi}\right] sen\, 3x$$

El elemento $n = 4$ de la suma es:

$$S_4 = \frac{2}{16} cos\, 4x + \left[-\frac{\pi}{4}\right] sen\, 4x$$

El elemento $n = 5$ de la suma es:

$$S_5 = -\frac{2}{25} cos\, 5x + \left[\frac{\pi}{5} - \frac{4}{125\pi}\right] sen\, 5x$$

El elemento $n = 6$ de la suma es:

$$S_6 = \frac{2}{36} cos\, 6x + \left[-\frac{\pi}{6}\right] sen\, 6x$$

El elemento $n = 7$ de la suma es:

$$S_7 = -\frac{2}{49} cos\, 7x + \left[\frac{\pi}{7} - \frac{4}{343\pi}\right] sen\, 7x$$

Por lo tanto, hasta la séptima Suma parcial de la serie de Fourier, queda de la forma:

$$Sp_{7\_}f_2(x) = \frac{\pi^2}{6} + \{\left(-2 cos\, x + \left[\pi - \frac{4}{\pi}\right] sen\, x\right) + \left(\frac{2}{4} cos\, 2x + \left[-\frac{\pi}{2}\right] sen\, 2x\right) + \left(-\frac{2}{9} cos\, 3x + \left[\frac{\pi}{3} - \frac{4}{27\pi}\right] sen\, 3x\right)$$

$$+ \left(\frac{2}{16} cos\, 4x + \left[-\frac{\pi}{4}\right] sen\, 4x\right) + \left(-\frac{2}{25} cos\, 5x + \left[\frac{\pi}{5} - \frac{4}{125\pi}\right] sen\, 5x\right) + \left(\frac{2}{36} cos\, 6x + \left[-\frac{\pi}{6}\right] sen\, 6x\right)$$

$$+ \left(-\frac{2}{49} cos\, 7x + \left[\frac{\pi}{7} - \frac{4}{343\pi}\right] sen\, 7x\right)\}$$

Ejemplo 1.3 (Citado en la Tabla 1 para comparación de resultados), *Ejercicio 7 de la sección 11.2, extraído del libro de Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera, Séptima edición, de los autores Zill y Cullen.*

$$f_3(x) = x + \pi \qquad -\pi < x < \pi$$

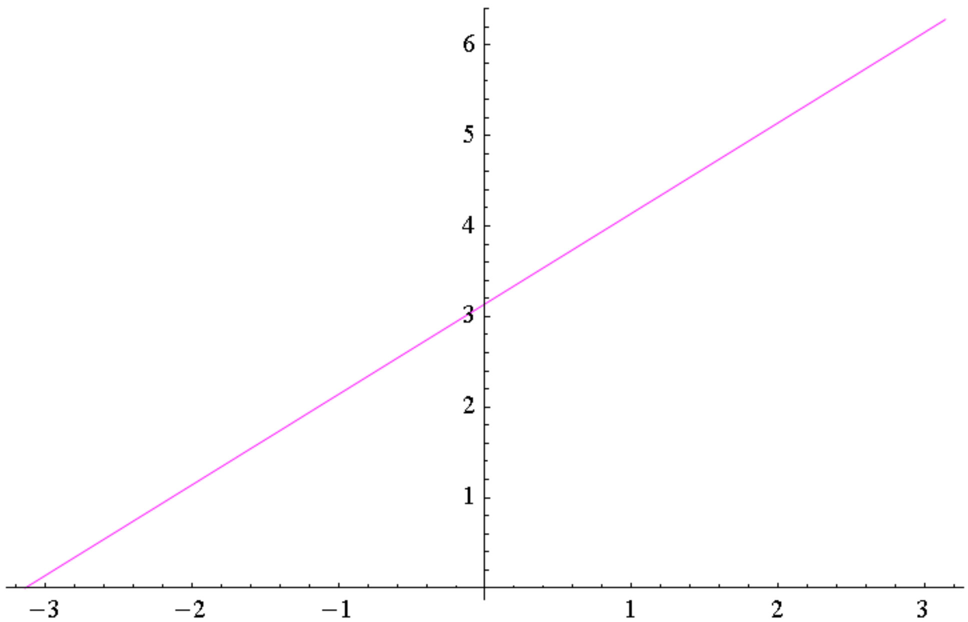


Figura 7: Gráfica de la función $f_3(x)$.

Calculando $a_0$se tiene:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_3(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\,dx\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}+\pi x\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\left[\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{2}\right]+\left[\pi^2+\pi^2\right]\right] = \frac{1}{\pi}\left[2\pi^2\right] = 2\pi$$

Ahora se calcula a_n y b_n .

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_3(x)\,cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\,cos(nx)dx\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}(x)\,cos(nx)dx + \int_{-\pi}^{\pi}(\pi)\,cos(nx)dx\right]$$

Integrando por partes el lado izquierdo nos queda:

$$u = x \qquad dv = cos\, nx\, dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{n} sen\, nx$$

Y la forma para resolver una integral de este tipo es:

$$uv - \int vdu$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{1}{\pi}\left[\left[\frac{x}{n} sen\, nx - \int \frac{1}{n} sen\, nx\, dx\right] + \frac{\pi}{n} sen\, nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\left[\frac{x}{n\pi} sen\, nx + \frac{1}{n^2\pi} cos\, nx + \frac{1}{n} sen\, nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Evaluando en los límites de integración nos queda:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\pi n^2} - \frac{(-1)^n}{\pi n^2} = 0$$

Y se hace lo mismo para b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_3(x)\ sen(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} (x+\pi)\ sen(nx)dx\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} (x)\ sen(nx)dx + \int_{-\pi}^{\pi} (\pi)\ sen(nx)dx\right]$$

Integrando por partes el lado izquierdo tenemos que:

$$u = x \qquad dv = sen\, nx\, dx$$

$$du = dx \qquad v = -\frac{1}{n} cos\, nx$$

Y la forma para resolver una integral de este tipo es:

$$uv - \int vdu$$

Sustituyendo valores

$$\frac{1}{\pi}\left[\left[-\frac{x}{n}cos\, nx + \int \frac{1}{n}cos\, nx\, dx\right] - \frac{\pi}{n}cos\, nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\left[-\frac{x}{n\pi}cos\, nx + \frac{1}{n^2\pi}sen\, nx - \frac{1}{n}cos\, nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Evaluando con los limites de integración nos queda:

$$b_n = \left[\left[-\frac{\pi(-1)^n}{\pi n} - \frac{\pi(-1)^n}{\pi n} + \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{2\pi(-1)^n}{n\pi}\right]\right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Por lo tanto el resultado final de la serie de Fourier es:

$$f_3(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}sen\, nx\right\}$$

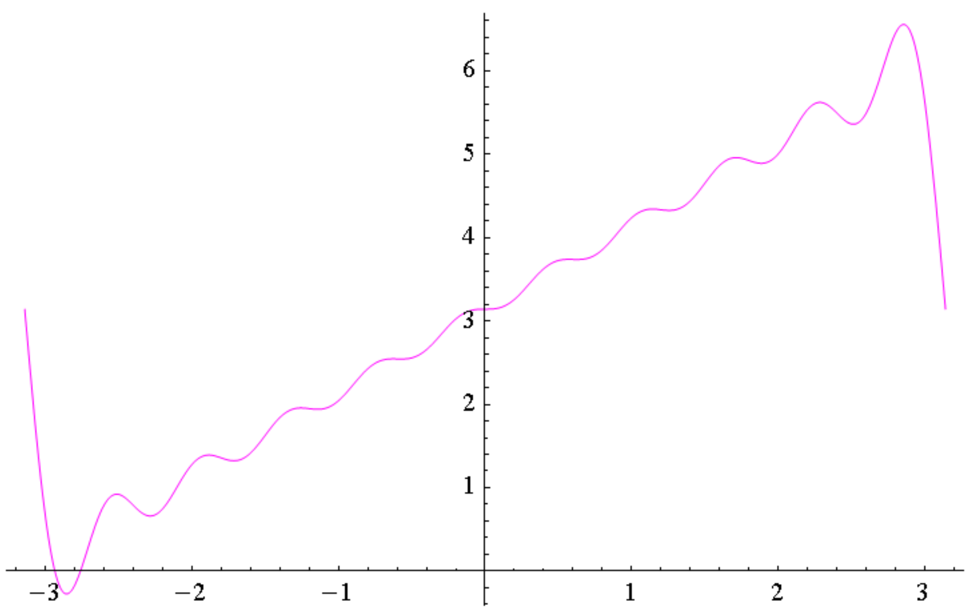


Figura 8: Gráfica de la Serie truncada de Fourier de la función $f_3(x)$, con un $n = 5$.

Haciendo las sumas parciales correspondientes a $n = 1$ hasta $n = 7$ para $f_3(x)$ son:

El elemento $n = 1$ de la suma es:

$$S_1 = 2sen\,x$$

El elemento $n = 2$ de la suma es:

$$S_2 = -2sen\,2x$$

El elemento $n = 3$ de la suma es:

$$S_3 = \frac{2}{3}sen\,3x$$

El elemento $n = 4$ de la suma es:

$$S_4 = -\frac{2}{4}sen\,4x$$

El elemento $n = 5$ de la suma es:

$$S_5 = \frac{2}{5}sen\,5x$$

El elemento $n = 6$ de la suma es:

$$S_6 = -\frac{2}{6}sen\,6x$$

El elemento $n = 7$ de la suma es:

$$S_7 = \frac{2}{7}sen\,7x$$

Por lo tanto, hasta la séptima Suma parcial de la serie de Fourier, queda de la forma:

$$Sp_{7\_}f_3(x) = \pi + \left\{(2sen\,x) + (-2sen\,2x) + \left(\frac{2}{3}sen\,3x\right) + \left(-\frac{2}{4}sen\,4x\right) + \left(\frac{2}{5}sen\,5x\right) + \left(-\frac{2}{6}sen\,6x\right) + \left(\frac{2}{7}sen\,7x\right)\right\}$$

Comparación entre las funciones y sus series parciales.

A continuacion, se comparan los valores de las funciones en dos puntos,($x = \pi$ y $x = \pi/2$), con los valores de las sumas parciales hasta el séptimo elemento, correspondientes a cada función.

Tomando los valores de los elementos y dándole valores a $x = \pi$ y $x = \pi/2$ se tienen los siguientes valores mostrados en la Tabla 1.

Tabla 1. Evaluacion en $x = \pi$ de los primeros 7 elementos de la Serie de Fourier para los ejemplos 1.1, 1.2 y 1.3. Se muestra también la evaluacion de las primeras sumas parciales y la diferencia del valor de $f(\pi)$ y la septima suma parcial.

Ejemplo 1.1	a_0	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$f(\pi) - S_7$
elemento enésimo	.79	-.64	.00	-.070	.00	-.025	.00	-.013	
sumas parciales de$i = 0$ a $i = n$	.79	.15	.15	.078	.078	.052	.052	.03	-0.039
Ejemplo 1.2									
elemento enésimo	1.64	2.00	.50	-.22	.13	.08	.06	.04	
sumas parciales de$i = 0$ a $i = n$	1.64	3.64	4.14	3.92	4.04	4.12	4.18	4.22	0,710
Ejemplo 1.3									
elemento enésimo	3.14	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	
sumas parciales de$i = 0$ a $i = n$	3.14	3.14	3.14	3.14	3.14	3.14	3.14	3.14	0

Ejemplo 1.1	a_0	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$f(\pi/2) - S_7$
elemento enésimo	0.785	1	0	-0.333	0	0.2	0	-0.142	
sumas parciales de $i = 0$ a $i = n$	0.785	1.785	1.785	1.452	1,452	1.652	1.652	1.509	0.061
Ejemplo 1.2									
elemento enésimo	1.644	1.868	-0.5	1.094	0.125	0.618	-0.055	0.452	
sumas parciales de $i = 0$ a $i = n$	1.644	3.513	3.013	4.107	4.232	4.850	4.795	5.247	-2.780
Ejemplo 1.3									
elemento enésimo	3.141	5.141	3.141	2.474	3.141	3.541	3.141	2.855	
sumas parciales de $i = 0$ a $i = n$	3.141	8.283	11.424	13.899	17.041	20.582	23.724	26.580	-21.867

Como puede verse en la tabla y graficas, la aproximacion lograda con una serie de Fourier truncada en algun n, puede acercarse mucho o no, al valor de la funcion evaluada en algun x_0, ya sea en el dominio o en el borde del dominio. Un analisis de la funcion previo a la expansion en la serie de Fourier generalmente es de utilidad, incluyendo graficacion. (en Tabla 1, n=7, en figuras de las series truncadas de las funciones se muestran graficas de series hasta n=5, 20, 50, 300).

Los siguientes ejemplos corresponden a algunos ejercicios sugeridos del libro de los autores Zill y Cullen, en ellos no se evalua la función ni se desarrollan los términos y sumas parciales.

Ejemplo 1.4, *Ejercicio 11 de la sección 11.2, extraído del libro de Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera, Séptima edición, de los autores Zill y Cullen*

Desarrollar la serie de Fourier de la siguiente función:

$$f_4(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < -1 \\ -2, & -1 \leq x < 0; \\ 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

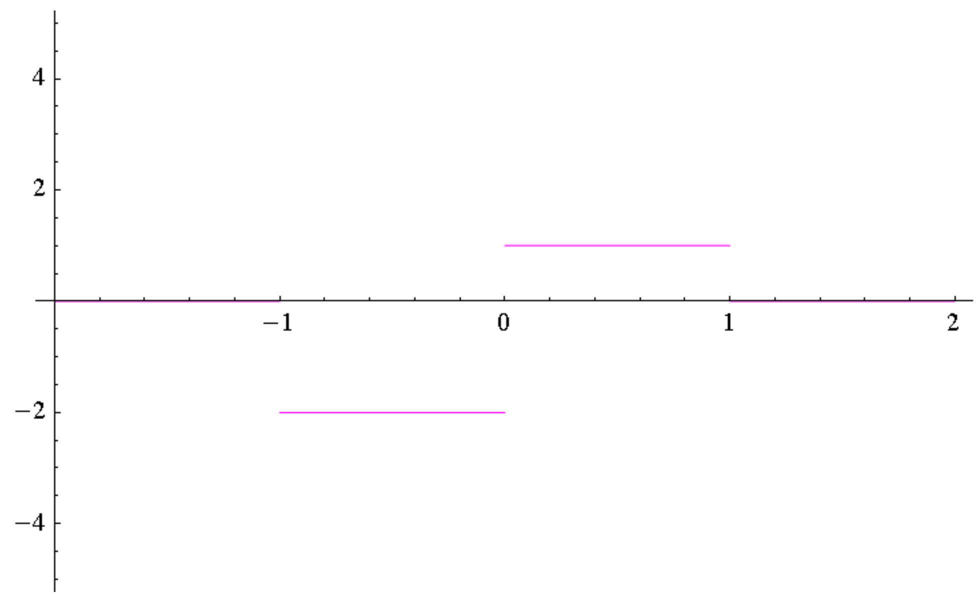


Figura 9: Gráfica de la función $f_4(x)$.

Calculando a_0, tenemos:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f_4(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1} 0\,dx + \int_{-1}^{0}(-2)\,dx + \int_{0}^{1} 1\,dx + \int_{1}^{2} 0\,dx\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left[-2x\mid_{-1}^{0} + x\mid_{0}^{1}\right] = \left[-1 + \frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{2}$$

Calculando a_n, tenemos:

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f_4(x)\, cos\, \frac{n\pi}{2}x\, dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1} 0\, cos\frac{n\pi}{2}x\, dx + \int_{-1}^{0}(-2)\, cos\frac{n\pi}{2}x\, dx + \int_{0}^{1} cos\frac{n\pi}{2}x\, dx + \int_{1}^{2} 0\, cos\frac{n\pi}{2}x\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{4}{n\pi}sen\frac{n\pi}{2}x\ |_{-1}^{0} + \frac{2}{n\pi}sen\frac{n\pi}{2}x\ |_{0}^{1}\right]$$

$$a_n = \left[-\frac{2}{n\pi}sen\frac{n\pi}{2}x\ |_{-1}^{0} + \frac{1}{n\pi}sen\frac{n\pi}{2}x\ |_{0}^{1}\right] = -\frac{2}{n\pi}sen\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}sen\frac{n\pi}{2} = -\frac{1}{n\pi}sen\frac{n\pi}{2}$$

y ahora calculandob_n,tenemos que:

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f_4(x)\, sen\, \frac{n\pi}{2}x\, dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1} 0\, sen\frac{n\pi}{2}x\, dx + \int_{-1}^{0}(-2)\, sen\frac{n\pi}{2}x\, dx + \int_{0}^{1} sen\frac{n\pi}{2}x\, dx + \int_{1}^{2} 0\, sen\frac{n\pi}{2}x\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{n\pi}cos\frac{n\pi}{2}x\ |_{-1}^{0} - \frac{2}{n\pi}cos\frac{n\pi}{2}x\ |_{0}^{1}\right]$$

$$b_n = \left[\frac{2}{n\pi}cos\frac{n\pi}{2}x\ |_{-1}^{0} - \frac{1}{n\pi}cos\frac{n\pi}{2}x\ |_{0}^{1}\right] = \frac{2}{n\pi} - \frac{2}{n\pi}cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n\pi}cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n\pi} = -\frac{3}{n\pi}cos\frac{n\pi}{2} + \frac{3}{n\pi}$$

Por lo tanto el resultado final de la serie de Fourier es:

$$f_4(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n}sen\frac{n\pi}{2}\, cos\frac{n\pi}{2}x + \frac{3}{n}\left(1 - cos\frac{n\pi}{2}\right) sen\frac{n\pi}{2}x\right]$$

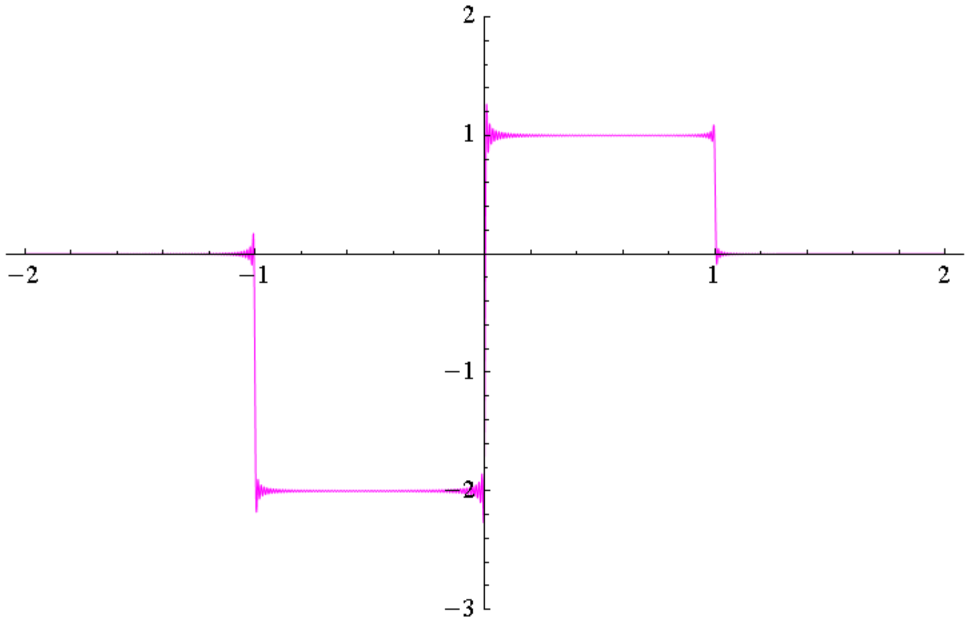


Figura 10: Gráfica de la Serie truncada de Fourier de la función $f_4(x)$, con una $n = 300$.

Ejemplo 1.5, *Ejercicio 13 de la sección 11.2, extraído del libro de Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera, Séptima edición, de los autores Zill y Cullen.*

$$f_5(x) = \begin{cases} 1, & -5 < x < 0 \\ \\ 1+x, & 0 \leq x < 5 \end{cases}$$

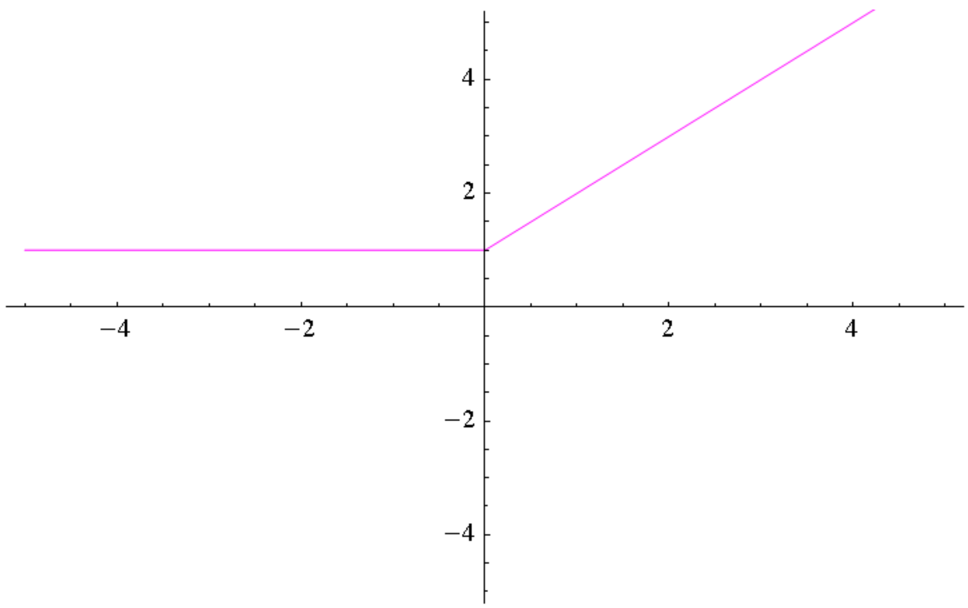


Figura 11: Gráfica de la función $f_5(x)$.

Calculando a_0, se tiene:

$$a_0 = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f_5(x)\,dx = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} dx + \int_{0}^{5}(1+x)\,dx\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{5}\left[x\mid_{-5}^{0} + x\mid_{0}^{5} + \frac{x^2}{2}\mid_{0}^{5}\right] = \frac{1}{5}\left[5+5+\frac{25}{2}\right] = \frac{1}{5}\left(\frac{45}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

Ahora se calcula a a_n y b_n:

$$a_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f_5(x)\,cos\,\frac{n\pi}{5}x\,dx = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}(1)\,cos\frac{n\pi}{5}x\,dx + \int_{0}^{5}(1)\,cos\frac{n\pi}{5}x\,dx + \int_{0}^{5}(x)\,cos\frac{n\pi}{5}x\,dx\right]$$

Integrando por partes la integral de la derecha tenemos:

$$u = x \quad dv = cos\frac{n\pi}{5}xdx$$

$$du = dx \quad v = \frac{5}{n\pi}sen\frac{n\pi}{5}x$$

La forma para resolver esta integral de este tipo es :

$$uv - \int v\,du$$

Sustituyendo los valores

$$\frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} cos\frac{n\pi}{5}x\,dx + \int_{0}^{5} cos\frac{n\pi}{5}x\,dx + \frac{5x}{n\pi}sen\frac{n\pi}{5}x\,|_0^5 - \int_0^5 \frac{5}{n\pi}sen\frac{n\pi}{5}x\,dx\right]$$

$$\frac{1}{5}\left[\frac{5}{n\pi}\,sen\frac{n\pi}{5}x\,|_{-5}^{0} + \frac{5}{n\pi}sen\frac{n\pi}{5}x\,|_0^5 + \frac{5x}{n\pi}sen\frac{n\pi}{5}x\,|_0^5 + \frac{25}{n^2\pi^2}cos\frac{n\pi}{5}x\,|_0^5\right]$$

$$a_n = \frac{1}{5}\left[\frac{25}{n^2\pi^2}cos\frac{n\pi}{5}x\,|_0^5 = \frac{25(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{25}{n^2\pi^2}\right] = 5\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\right)$$

y ahora se hace lo mismo para b_n:

$$b_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f_5(x)\,sen\,\frac{n\pi}{5}x\,dx = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}(1)\,sen\frac{n\pi}{5}x\,dx + \int_0^5 (1)\,sen\frac{n\pi}{5}x\,dx + \int_0^5 (x)\,sen\frac{n\pi}{5}x\,dx\right]$$

Integrando por parte la integral de la derecha

$$u = x \quad dv = sen\frac{n\pi}{5}xdx$$

$$du = dx \quad v = -\frac{5}{n\pi}cos\frac{n\pi}{5}x$$

La forma para resolver esta integral de este tipo es :

$$uv - \int v\,du$$

sustituyendo valores:

$$\frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}(1)\,sen\frac{n\pi}{5}x\,dx+\int_{0}^{5}(1)\,sen\frac{n\pi}{5}x\,dx-\frac{5x}{n\pi}cos\frac{n\pi}{5}x\mid_{0}^{5}+\int_{0}^{5}\frac{5}{n\pi}cos\frac{n\pi}{5}x\,dx\right]$$

$$\frac{1}{5}\left[-\frac{5}{n\pi}\,cos\frac{n\pi}{5}x\mid_{-5}^{0}-\frac{5}{n\pi}cos\frac{n\pi}{5}x\mid_{0}^{5}-\frac{5x}{n\pi}cos\frac{n\pi}{5}x\mid_{0}^{5}+\frac{25x}{n^2\pi^2}sen\frac{n\pi}{5}x\mid_{0}^{5}\right]$$

$$b_n=\left[\left[-\frac{1}{n\pi}+\frac{(-1)^n}{n\pi}\right]+\left[\frac{1}{n\pi}-\frac{(-1)^n}{n\pi}\right]+\left[\frac{5(-1)^{n+1}}{n\pi}\right]\right]=\frac{5(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Por lo tanto el resultado de la Serie de Fourier es:

$$f_5(x)=\frac{9}{4}+5\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}cos\frac{n\pi}{5}x+\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}sen\frac{n\pi}{5}x\right]$$

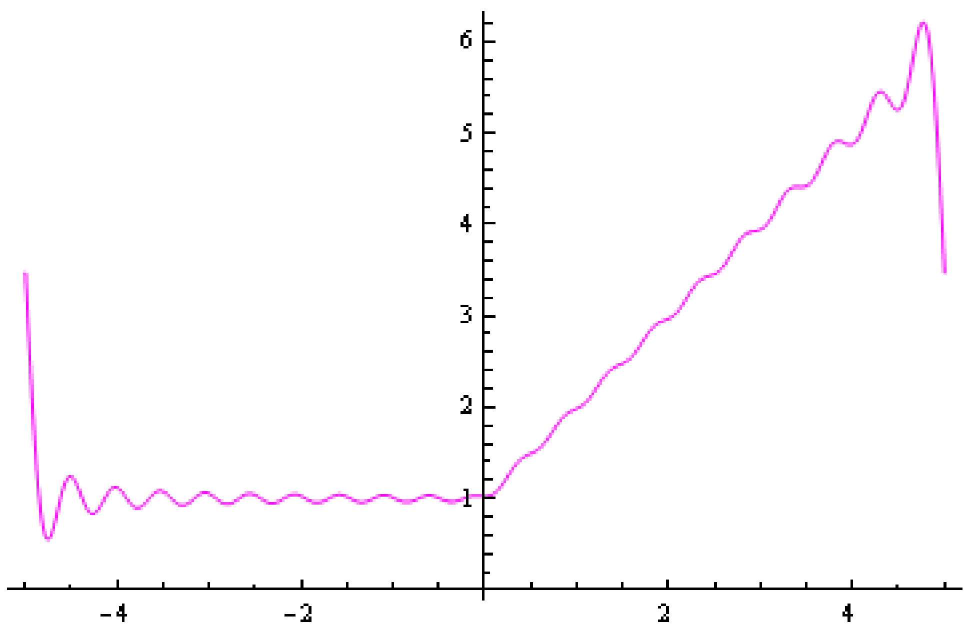


Figura 12: Gráfica de la Serie truncada de Fourier de la función $f_5(x)$, con una $n = 20$.

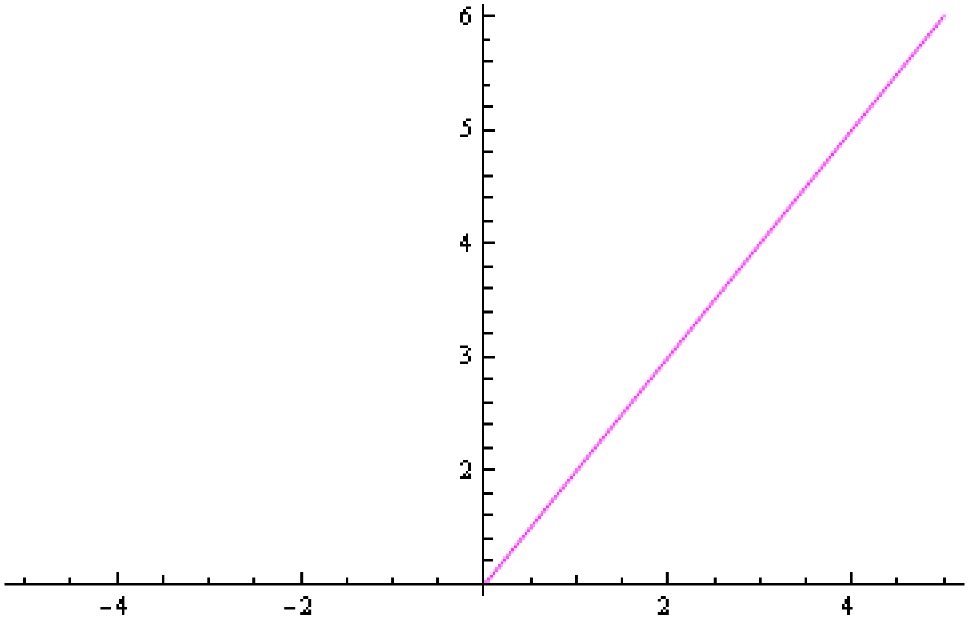


Figura 13: Gráfica de la Serie de Fourier de la función $f_5(x)$

Ejemplo 1.6

Encuentre la Serie de Fourier de la función dada en el respectivo intervalo:

$$f_6(z) = \begin{cases} 0 & -\pi < z < 0 \\ \\ 4\pi - 3z & 0 \leq z < \pi \end{cases}$$

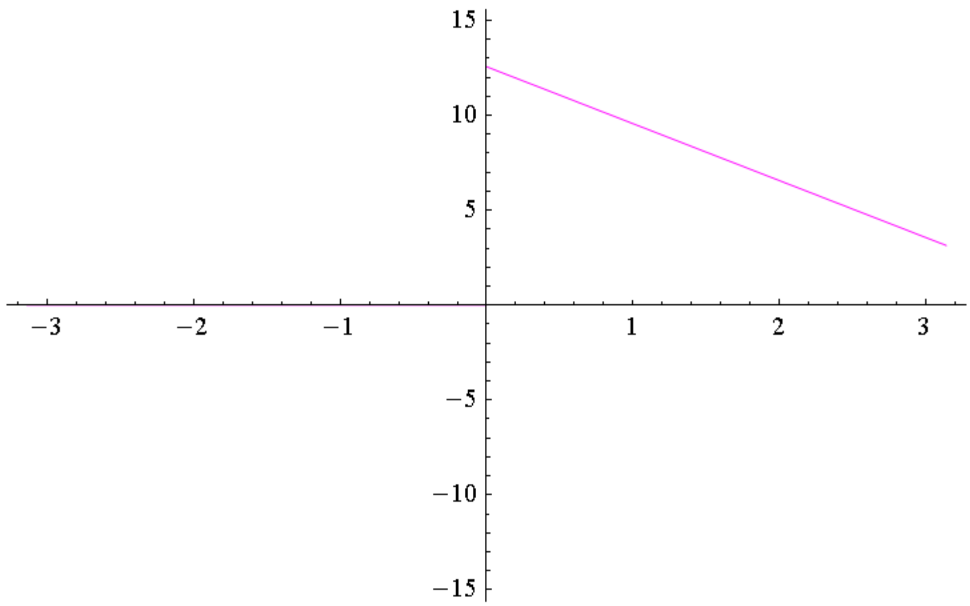


Figura 14: Gráfica de la función $f_6(z)$.

Se calculan los coeficientes $a_{0,}a_{n,}b_n$ para construir la serie de Fourier de $f_6(z)$ con $p = \pi$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_6(z)\,dz = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dz \int_{0}^{\pi} (4\pi - 3z)\,dz\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[4\pi z - \frac{3z^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{5\pi}{2}$$

Para $a_n$se tiene:

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f_6(z)\,cos\,nz\,dz = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dz \int_{0}^{\pi} (4\pi - 3z)\,cos\,nz\,dz\right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[(4\pi - 3z)\,\frac{sen\,nz}{n}\,|_0^\pi + \frac{3}{n}\int_0^\pi sen\,nz\,dz\right]$$

Por lo tanto el resultado para a_n es:

$$a_n = -\frac{3}{n\pi}cos\frac{nz}{n}\,|_0^\pi = \frac{3-3(-1)^n}{n^2\pi}$$

Donde se toma al $cos\,n\pi = (-1)^n$

Ahora por ultimo hay que calcular b_n.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (4\pi - 3z)sen\,nz\,dz = \frac{4-(-1)^n}{n}$$

Por lo tanto con los resultados obtenidos de los coeficientes, la serie nos queda de la siguiente forma:

$$f_6(z) = \frac{5\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-3(-1)^n}{n^2\pi}cos\,nz + \frac{4-(-1)^n}{n}sen\,nz$$

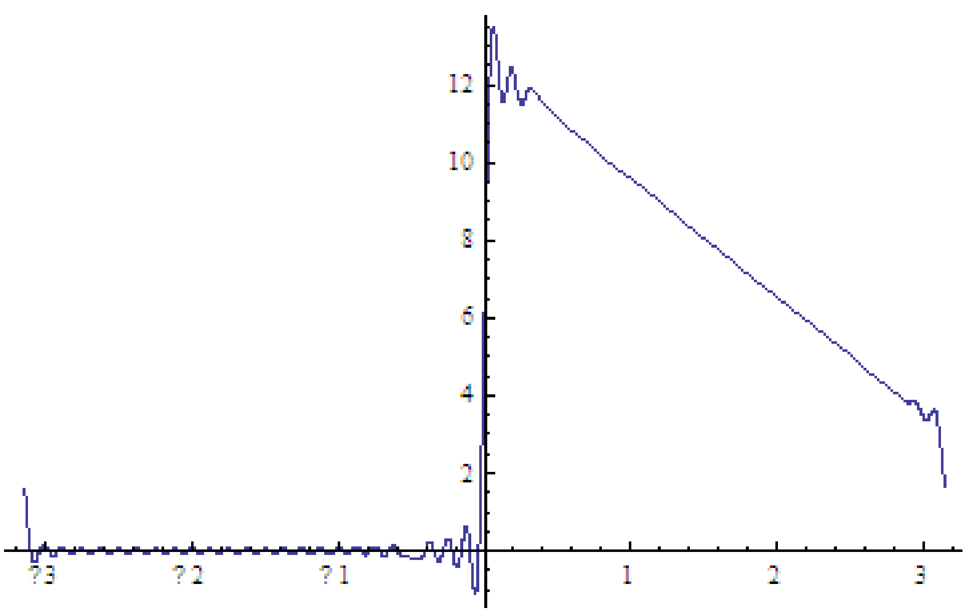


Figura 15: Gráfica de la Serie truncada de Fourier de la función $f_6(z)$, con una $n = 50$.

Ejemplo 1.7

Determinar la Serie de Fourier de la función mostrada a continuación, en el intervalo indicado:

$$f_7(m) = 3m + 6\pi \quad -\pi < m < \pi$$

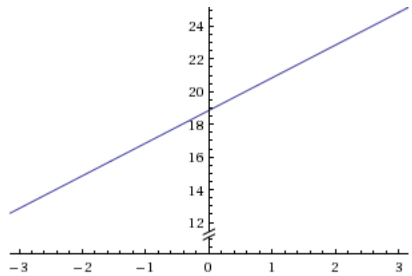


Figura 16: Gráfica de la función $f_7(m)$

Lo primero que se tiene que hacer es calcular los coeficientes para así poder darle la forma de Serie de Fourier.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_7(m)\,dm = \frac{1}{\pi}\left[+\int_{-\pi}^{\pi}(3m+6\pi)\,dm\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{3m^2}{2} + 6\pi m\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\left[\frac{3\pi^2}{2} - \frac{3\pi^2}{2}\right] + \left[6\pi^2 + 6\pi^2\right]\right] = \frac{1}{\pi}12\pi^2 = 12\pi$$

Ahora solo se calcula a_n y b_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_7(m)\,cos(nm)dm = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}(3m+6\pi)\,cos(nm)dm\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}(3m)\,cos(nm)dm + \int_{-\pi}^{\pi}6\pi\,cos(nm)dm\right]$$

Integrando por partes el lado izquerdo nos queda:

$$u = m \quad dv = cos\, nm\, dm$$

$$du = dm \quad v = \frac{1}{n} sen\, nm$$

Y la forma de resolver esta integral es:

$$uv - \int vdu$$

Sustituyendo valores

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{6\pi}{n} sen\, nm + \frac{3m}{n} sen\, nm - 3 \int \frac{1}{n} sen\, nm\, dm \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\left[\frac{6\pi}{n\pi} sen\, nm + \frac{3m}{n\pi} sen\, nm + \frac{3}{n^2\pi} cos\, nm \right]_{-\pi}^{\pi}$$

Por lo tanto el resultado para a_n es:

$$a_n = \frac{3(-1)^n}{n^2\pi} - \frac{3(-1)^n}{n^2\pi} = 0$$

Ahora por último calculamos b_n.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_7(m)\, sen(nm) dm = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} (3m + 6\pi)\, sen(nm) dm \right]$$

$$\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} (3m)\, sen(nm) dm + \int_{-\pi}^{\pi} 6\pi\, sen(nm) dm \right]$$

Integrando por partes el lado izquierdo nos queda:

$$u = m \quad dv = sen\, nm\, dm$$

$$du = dm \quad v = -\frac{1}{n} cos\, nm$$

Y la forma de resolver esta integral nuevamente es:

$$uv - \int vdu$$

Sustituyendo valores:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{6\pi}{n}cos\,nm - \frac{3m}{n}cos\,nm + 3\int \frac{1}{n}cos\,nm\,dm\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\left[-\frac{6}{n}cos\,nm - \frac{3m}{n\pi}cos\,nm + \frac{3}{n^2\pi}sen\,nm\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Evaluando los límites de integración nos queda:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\left[-\frac{3\pi(-1)^n}{n} - \frac{6\pi(-1)^n}{n} - \frac{3\pi(-1)^n}{n} + \frac{6\pi(-1)^n}{n} = -\frac{6\pi(-1)^n}{n}\right]\right] = \frac{6(-1)^{n+1}}{n}$$

Por lo tanto el resultado final para la Serie de Fourier es:

$$f_7(m) = 6\pi + 6\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}sen\,nm\right\}$$

Ejemplo 1.8

Determinar la Serie de Fourier de la función mostrada a continuación, en el intervalo indicado:

$$f_8(h) = \begin{cases} 4 & -5 < h < 0 \\ \\ 2 + 8h & 0 \leq h < 5 \end{cases}$$

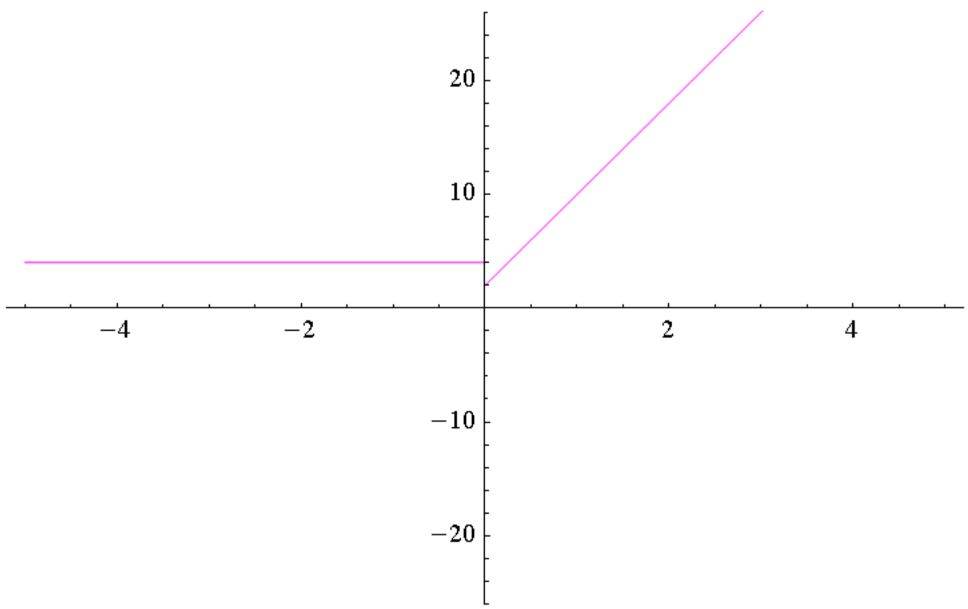


Figura 17: Gráfica de la función $f_8(h)$.

$$a_0 = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f_8(h)\,dh = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}(4)\,dh + \int_{0}^{5}(2+8h)\,dh\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{5}\left[4h\mid_{-5}^{0} + 2h\mid_{0}^{5} + \frac{8h^2}{2}\mid_{0}^{5}\right] = \frac{1}{5}\left[20 + 10 + \frac{200}{2}\right] = \frac{1}{5}\left(\frac{260}{2}\right) = 26$$

Ahora se calcula a_n y b_n.

$$a_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f_8(h)\,cos\frac{n\pi}{5}h\,dh = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} 4\,cos\frac{n\pi}{5}h\,dh + \int_{0}^{5} 2\,cos\frac{n\pi}{5}h\,dh + \int_{0}^{5} 8h\,cos\frac{n\pi}{5}h\,dh\right]$$

Integrando por partes la integral de la derecha tenemos que:

$$u = h \quad dv = cos\,\frac{n\pi}{5}h\,dh$$

$$du = dh \quad v = \frac{5}{n\pi}sen\,\frac{n\pi}{5}h$$

y la forma para resolver esta integral es:

$$uv - \int vdu$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} 4\,cos\frac{n\pi}{5}h\,dh + \int_{0}^{5} 2\,cos\frac{n\pi}{5}h\,dh + \frac{5h}{n\pi}sen\,\frac{n\pi}{5}h\,|_0^5 - \int_0^5 \frac{5}{n\pi}\,sen\frac{n\pi}{5}h\,dh\right]$$

$$\frac{1}{5}\left[\frac{20}{n\pi}sen\,\frac{n\pi}{5}h\,|_{-5}^{0} + \frac{10}{n\pi}sen\,\frac{n\pi}{5}h\,|_0^5 + \frac{40}{n\pi}sen\,\frac{n\pi}{5}h\,|_0^5 + \frac{200}{n^2\pi^2}cos\,\frac{n\pi}{5}h\,|_0^5\right]$$

$$a_n = \frac{1}{5}\left[\frac{200}{n^2\pi^2}cos\,\frac{n\pi}{5}h\,|_0^5 = \frac{200(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{200}{n^2\pi^2}\right] = 40\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\right)$$

y ahora se hace lo mismo para b_n:|

$$b_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f_8(h)\,sen\frac{n\pi}{5}h\,dh = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} 4\,sen\frac{n\pi}{5}h\,dh + \int_0^5 2\,sen\frac{n\pi}{5}h\,dh + \int_0^5 8h\,sen\frac{n\pi}{5}h\,dh\right]$$

Integrando por partes la integral de la derecha tenemos que:

$$u = h \quad dv = sen\,\frac{n\pi}{5}h\,dh$$

$$du = dh \quad v = -\frac{5}{n\pi}cos\,\frac{n\pi}{5}h$$

y la forma para resolver esta integral es:

$$uv - \int vdu$$

Sustituyendo valores

$$\frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} 4\,sen\frac{n\pi}{5}h\,dh + \int_{0}^{5} 2\,sen\frac{n\pi}{5}h\,dh - \frac{40h}{n\pi}cos\,\frac{n\pi}{5}h\,|_0^5 + \int_0^5 \frac{40}{n\pi}\,cos\frac{n\pi}{5}h\,dh\right]$$

$$\frac{1}{5}\left[-\frac{20}{n\pi}cos\,\frac{n\pi}{5}h\,|_{-5}^{0} - \frac{10}{n\pi}cos\,\frac{n\pi}{5}h\,|_0^5 - \frac{40}{n\pi}cos\,\frac{n\pi}{5}h\,|_0^5 + \frac{200}{n^2\pi^2}sen\,\frac{n\pi}{5}h\,|_0^5\right]$$

$$b_n = \frac{1}{5}\left[\left[-\frac{20}{n\pi}+\frac{20(-1)^n}{n\pi}\right]+\left[\frac{10}{n\pi}-\frac{10(-1)^n}{n\pi}\right]+\left[-\frac{200(-1)^n}{n\pi}\right]\right] = \left(\frac{38(-1)^{n+1}-2}{n\pi}\right)$$

Por lo tanto el resultado final de la Serie de Fourier es:

$$f_8(h) = 13 + \sum_{n=1}^{\infty} 40\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}cos\,\frac{n\pi}{5}h\right] + \left[\frac{38(-1)^{n+1}-2}{n\pi}sen\frac{n\pi}{5}h\right]$$

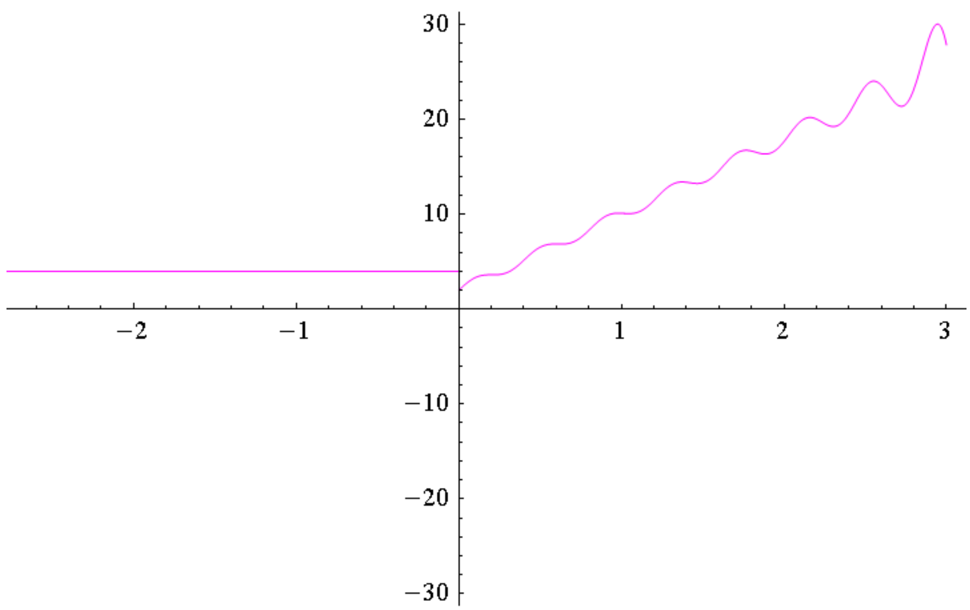


Figura 18: Gráfica de la serie truncada de Fourier de $f_8(h)$, con una $n = 5$

Ejemplo 1.9 *La función exponencial. Este ejemplo es un clásico en Series de Forier, por lo que lo podemos encontrar en la sección de Ejercicios, siendo el número 15 de la sección 11.2 del libro de Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera, Séptima edición, de los autores Zill y Cullen.*

Encontrar la Serie de Fourier de la función $f_9$en el intervalo dado:

$$f_9(x) = e^x, \qquad -\pi < x < \pi$$

Calculando el coeficiente a_0, tenemos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_9(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)$$

Para a_n tenemos:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_9(x)cosnx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x cosnx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[e^x sen\frac{nx}{n} - \int sen\frac{nx}{n}\,e^x dx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}$$

Por último, para b_n, tenemos:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_9(x)sennx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x sennx\,dx$$

Desarrollando la integral por partes de lado derecho tenemos:

$$u = e^x \quad dv = sen\,nxdx$$

$$du = e^x dx \quad v = -\frac{cosnx}{n}$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{1}{n}\left[-e^{x}\frac{cosnx}{n}+\int\frac{cosnx}{n}e^{x}dx\right]|_{-\pi}^{\pi}$$

$$b_n=\frac{(-1)^n n(e^{-\pi}-e^{\pi})}{\pi(1+n^2)}$$

$$f_9(x)=\frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}cosnx+\frac{(-1)^n n(e^{-\pi}-e^{\pi})}{\pi(1+n^2)}sennx\right]$$

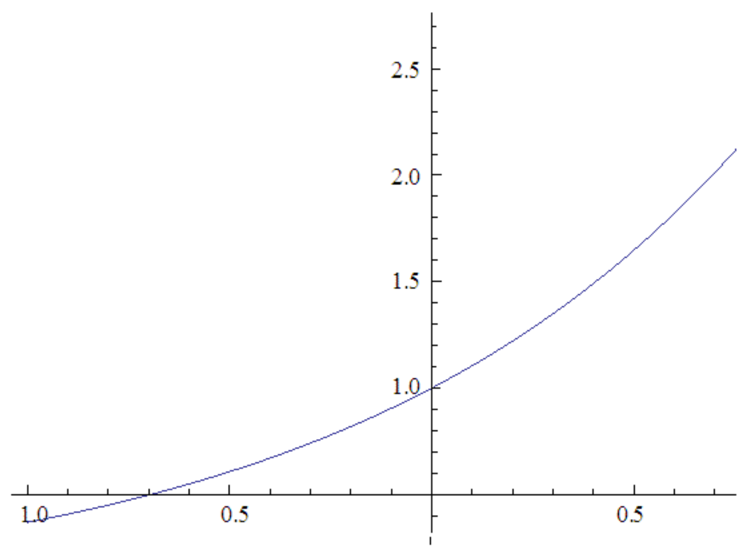


Figura 19: Gráfica de la función Exponencial $f_9(x)$. El eje x corresponde a la recta $y = 5$

Serie de Fourier de una Funcion Compleja

Ejemplo 1.10 *Funcion exponencial compleja.*

$$f_{10}(x) = e^{i2\pi x}$$

Se trata de una función exponencial compleja, lo que ímplica que la serie de Fourier a considerar es:

$$f\,(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

donde:

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f\,(x)e^{-in\pi x/L}dx$$

Calculamos el coeficiente $c_n$como sigue:

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_{10}(x)e^{-in\pi x/L}dx$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{i2\pi x}\cdot e^{-in\pi x/L}dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{(i2\pi x - in\pi x/L)}dx$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{(i2\pi - in\pi/L)x}dx = \frac{1}{2L}e^{(i2\pi - in\pi/L)x}\left(\frac{1}{(i2\pi - in\pi/L)}\right)|_{-L}^{L}=$$

$$= \frac{1}{2L}\cdot\left(\frac{1}{(i2\pi - in\pi/L)}\right)\left[e^{(i2\pi - in\pi/L)L} - e^{(i2\pi - in\pi/L)(-L)}\right]$$

Si multiplicamos tanto al numerador como al denominador por el factor: $(i2\pi + in\pi/L)$, sabiendo que: $e^{in\pi} = e^{in\pi} = (-1)^n$, y además que $senhz = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$, obtenemos:

$$c_n = \frac{1}{2L}\left(\frac{1}{(i2\pi - in\pi/L)}\right)(e^{i2\pi L}e^{-in\pi} - e^{-i2\pi L}e^{in\pi})\cdot\left(\frac{(i2\pi + in\pi/L)}{(i2\pi + in\pi/L)}\right)$$

$$= \frac{1}{2L}\left(\frac{(2\pi + n\pi/L)i}{(n\pi/L)^2 - (2\pi)^2}\right)(-1)^n(e^{i2\pi L} - e^{-i2\pi L})$$

$$c_n = \frac{1}{L}\left(\frac{(2\pi + n\pi/L)i}{(n\pi/L)^2 - (2\pi)^2}\right)(-1)^n(senh(i2\pi L))$$

Esto nos lleva a construir la serie del siguiente modo:

$$f_{10}(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{in\pi x/L}$$

$$f_{10}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L}\left(\frac{(2\pi + n\pi/L)i}{(n\pi/L)^2 - (2\pi)^2}\right)(-1)^n(senh(i2\pi L)) \cdot e^{in\pi x/L}$$

Ejemplo 1.11 *Ejercicio 47, sección 11.3, extraído del libro de Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera, Séptima edición, de los autores Zill y Cullen.*

Problema: Cuando una viga uniforme está soportada por un cimiento elástico y sujeta a una carga $w(x)$por unidad de longitud, la ecuación diferencial de su flexión $y(x)$es:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} + ky = w(x)$$

donde k es el módulo del cimiento. Suponga que la viga y el cimiento elástico tienen longitud infinita (esto es que $-\infty < x < \infty$), y que la carga por unidad de longitud es la función periódica:

$$w(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < -\pi/2 \\ w_0, & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \quad w(x+2\pi) = w(x) \\ 0, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

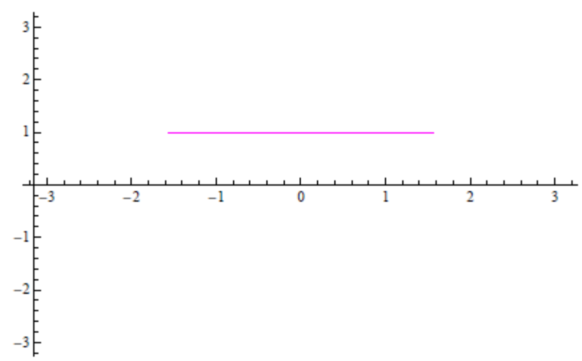


Figure 20: Gráfica de la función $W(x)$.

Determinar una solución particular $y_p(x)$de la ecuación diferencial.

SOLUCIÓN:

Planteamos este problema del siguiente modo; la función $w(x)$ es periódica cada2π. Por lo que se hace una serie de Fourier de cosenos, lo que implica que utilizaremos las siguientes relaciones:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{p} x$$

con a_0

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f\left(x\right)dx$$

y a_n

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f\left(x\right)\cos\frac{n\pi}{p}xdx$$

Esto para una función $f(x)$ par en un intervalo$(-p,\, p)$

En nuestro caso la función $w\left(x\right)$en efecto es una función par y utilizaremos un valor de $p = \pi$, para así calcular:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} w\left(x\right)dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} w_0 dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 0dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[w_0 x\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[w_0\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)\right] = w_0$$

$$\therefore$$

$$a_0 = w_0$$

Para a_n tenemos:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} w\left(x\right)cos\frac{n\pi}{\pi}xdx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} w_0 cos\, nxdx + \int_{\pi/2}^{\pi} 0\cdot cos\, nxdx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{w_0}{n}sen\, nx\right]_0^{\pi/2} = \frac{2w_0}{n\pi}\left[sen\frac{n\pi}{2} - sen\, n\cdot 0\right] = \frac{2w_0}{n\pi}sen\frac{n\pi}{2}$$

$$\therefore$$

$$a_n = \frac{2w_0}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Asi, la Serie de Fourier de cosenos queda como:

$$w\left(x\right)=\frac{w_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2w_0}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)cos\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right)$$

Sacando un término constante de la sumatoria y unificando aπen el término coseno queda:

$$w\left(x\right)=\frac{w_0}{2}+\frac{2w_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)cos\left(nx\right).$$

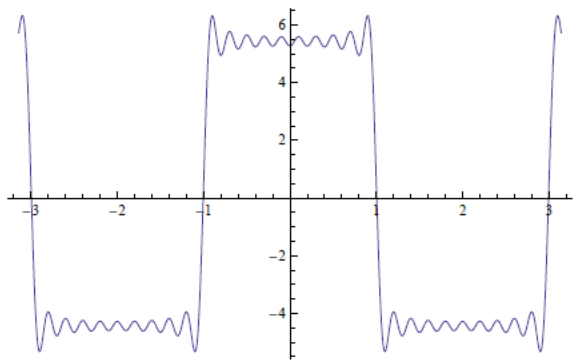


Figure 21: Gráfica de la serie de truncada de Fourier de $w(x)$ para $n=20$

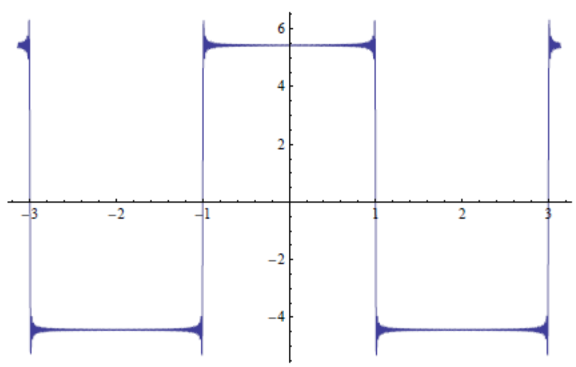


Figure 22: Gráfica de la serie de truncada de Fourier de $w(x)$ para $n=300$

Asumiendo una solución particular de la forma:

$$y_p\left(x\right)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n cos\, nx$$

La cuarta derivada sería entonces:

$$y_p^4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n n^4 cos\, nx$$

Así al sustituir en la ecuación diferencial, y realizando operaciones del lado derecho obtenemos:

$$EI \cdot y_p^4(x) + k \cdot y_p(x) = EI \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n n^4 cos\, nx + k \cdot \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n cos\, nx \right)$$

$$= k \cdot \frac{A_0}{2} + k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n cos\, nx + EI \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n n^4 cos\, nx$$

$$= k \cdot \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} k A_n cos\, nx + \sum_{n=1}^{\infty} EIn^4 A_n cos\, nx$$

$$= \frac{kA_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(k + EIn^4\right) A_n cos\, nx = w(x)$$

Nótese que esto es igual a $w(x)$, y sustituyendo obtenemos la expresión:

$$\frac{kA_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(k + EIn^4\right) A_n cos\, nx = w(x) = \frac{w_0}{2} + \frac{2w_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) cos\,(nx)\,.$$

Entonces, comparando términos tenemos que:

$$\frac{kA_0}{2} = \frac{w_0}{2} \therefore A_0 = \frac{w_0}{k}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(k + EIn^4\right) A_n cos\, nx = \frac{2w_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) cos\,(nx)$$

$$\therefore$$

$$A_n = \frac{2w_0}{\pi} \cdot \frac{sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n \cdot (k + EIn^4)}$$

Así, sustituimos en nuestra expresión de la solución particular:

$$y_p(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n cos\, nx$$

quedando finalmente de la siguiente forma:

$$y_p\left(x\right) = \frac{w_0}{2k} + \frac{2w_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\cdot\left(k+EIn^4\right)}cos\,nx.$$

Ejemplo 1.12 *Ejercicio extraido del libro Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas, George F. Simmons*

Desarrollar a la función f_{12} en una serie adecuada de cosenos o senos.

$$f_{12}(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

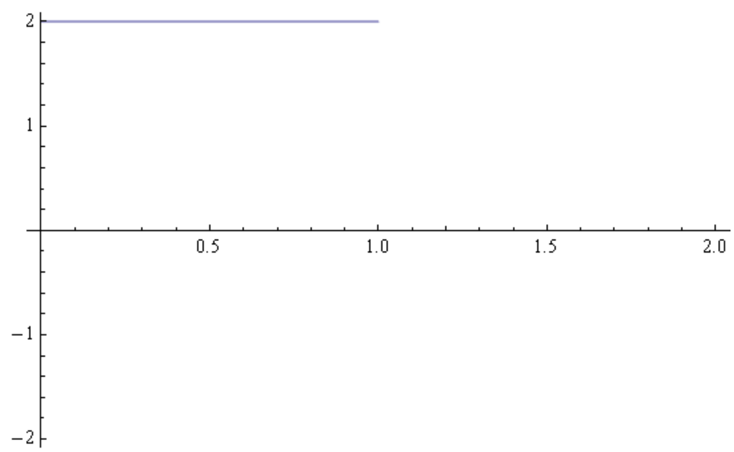


Figure 23: Gráfica de la función $f_{12}(x)$.

La serie del coseno tiene la forma de este tipo:

$$f(x) = \frac{q_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(\frac{n\pi x}{p})$$

Por lo tanto hay que resolver lo coeficientes a_0 y a_n,

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f_{12}(x)dx$$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f_{12}(x)dx = \int_0^1 2dx + \int_1^2 0dx$$

-

$$a_0 = \left[2x\mid_0^1\right] = \left[2\,(2)\right] - \left[2\,(0)\right] = 2$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f_{12}(x)cos(\frac{n\pi x}{2})dx$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^2 f_{12}(x) \cdot cos(\frac{n\pi x}{2})dx = \int_0^1 2cos(\frac{n\pi x}{2})dx + \int_1^2 0 \cdot cos(\frac{n\pi x}{2})dx$$

$$= \left[\frac{4}{n\pi}sen(\frac{n\pi x}{2})\right]_0^1 = \left[\left[\frac{4}{n\pi}sen(\frac{n\pi}{2})\right] - [0]\right] = \frac{4}{n\pi}sen(\frac{n\pi}{2})$$

Por lo tanto la expresión de la serie queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{f_{12}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{n\pi}sen(\frac{n\pi}{2})\right] cos(\frac{n\pi x}{2})}$$

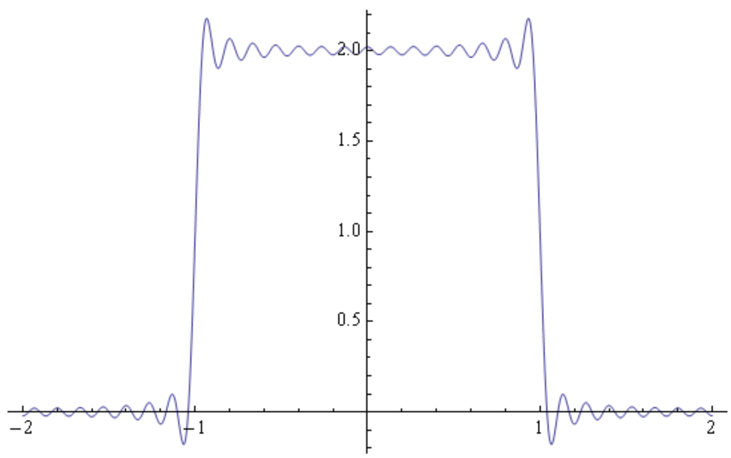


Figure 24: Gráfica de la serie truncada de Fourier de la funcion $f_{12}(x)$, con $n = 30$

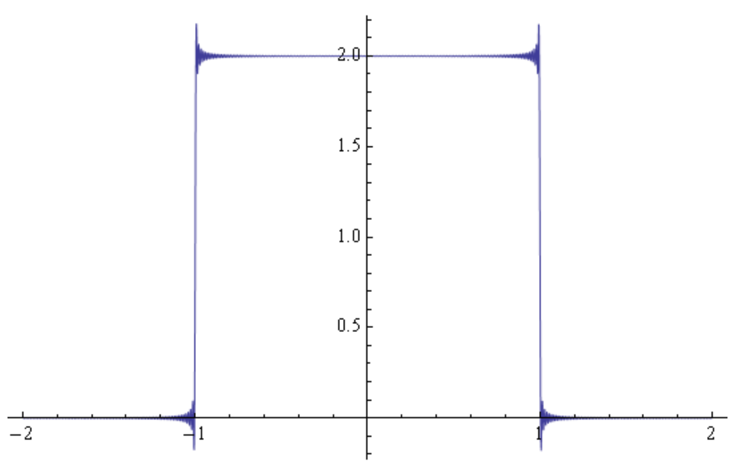


Figure 25: Gráfica de la serie truncada de Fourier de la funcion $f_{12}(x)$, con $n = 300$

Ejemplo 1.13 *Ejercicio extraido del libro Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas, George F. Simmons*

Desarrollar a la función f_{13} en una serie adecuada de cosenos o senos.

$$f_{13}(x) = x^2 - x + 16 \quad 0 < x < 1$$

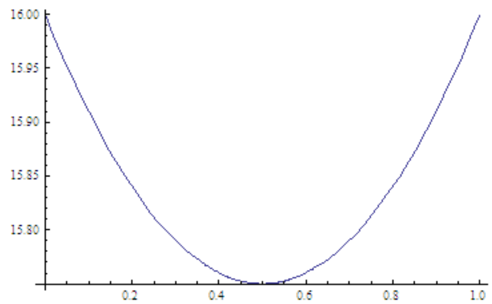


Figure 26: Gráfica de la función $f_{13}(x)$.

$$f_{13}(x) = \frac{q_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(\frac{n\pi x}{p})$$

Por lo tanto hay que resolver lo coeficientes a_0 y a_n,

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f_{13}(x)dx$$

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 f_{13}(x)dx = 2\left[\int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x dx + 16\int_0^1 dx\right]$$

$$a_0 = 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 16x\right]_0^1 = 2\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 16\right) - 0\right] = \frac{95}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f_{13}(x)\cdot cos(\frac{n\pi x}{p})dx$$

$$= \frac{2}{1}\int_0^1 f_{13}(x)\cdot cos(n\pi x)dx = 2\left[\int_0^1 x^2 cos(n\pi x)dx - \int_0^1 x cos(n\pi x)dx + 16\int_0^1 cos(n\pi x)dx\right]$$

$$u = x^2 \quad dv = cos(n\pi x)dx$$

$$du = 2xdx \quad v = \frac{1}{n\pi}sen(n\pi x)$$

-

$$= 2\left[\left[\frac{x^2}{n\pi}sen(n\pi x) - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 2xsen(n\pi x)dx\right]_0^1 - \left[\frac{x}{n\pi}sen(n\pi x) - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 sen(n\pi x)dx\right]_0^1 + \left[\frac{16}{n\pi}sen(n\pi x)\right]_0^1\right]$$

$$= 2\left[\left[\frac{x^2}{n\pi}sen(n\pi x) - \frac{2}{n\pi}\left[-\frac{x}{n\pi}cos(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2}sen(n\pi x)\right]\right]_0^1 - \left[\frac{x}{n\pi}sen(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2}cos(n\pi x)\right]_0^1 + \left[\frac{16}{n\pi}sen(n\pi x)\right]_0^1\right]$$

$$= 2\left[\left[\frac{x^2}{n\pi}sen(n\pi x) + \frac{2x}{n^2\pi^2}cos(n\pi x) - \frac{2}{n^3\pi^3}sen(n\pi x)\right]_0^1 - \left[\frac{x}{n\pi}sen(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2}cos(n\pi x)\right]_0^1 + \left[\frac{16}{n\pi}sen(n\pi x)\right]_0^1\right]$$

$$= 2\left[\left[\left[\frac{2}{n^2\pi^2}cos(n\pi)\right] - \left[\frac{1}{n^2\pi^2}cos(n\pi x) - \frac{1}{n^2\pi^2}cos(0)\right]\right]\right]$$

$$= \left[\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2} + \frac{2}{n^2\pi^2}\right]$$

Por lo tanto la expresión de la serie queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{f_{13}(x) = \frac{95}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2} + \frac{2}{n^2\pi^2}\right]cos(n\pi x)}$$

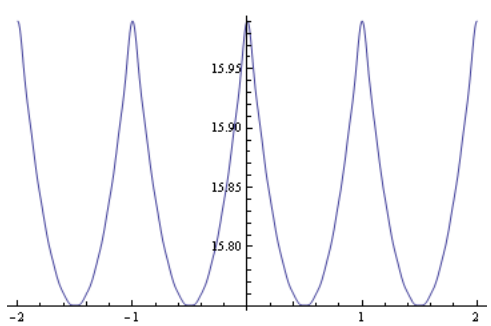


Figure 27: Gráfica de la serie truncada de Fourier de la funcion $f_{13}(x)$, con $n = 20$

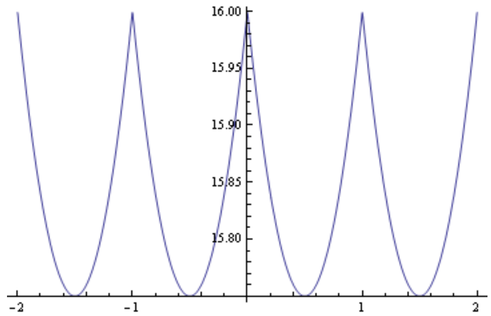


Figure 28: Gráfica de la serie truncada de Fourier de la funcion $f_{13}(x)$, con $n = 200$

Ejemplo 1.14, *Ejercicio 17 de la sección 11.2 del libro de Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera, Séptima edición, de los autores Zill y Cullen.*

Con el resultado Obtenido del problema 1.2 demostrar:

$$a)\ \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ...$$

$$b)\ \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}...........$$

La función con la que se trabajo en el problema 1.2 es la saiguiente:

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

con la que obtuvimos el siguiente resultado para la serie de Fourier.

$$f_2(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} cos(nx) + \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n3} \left[(-1)^n - 1 \right] sen(nx) \right)$$

Solución:

a)

Se observa que la función es discontinua en $x = \pi$, por lo que la serie de Fourier correspondiente converge en $^{\pi^2}/2$cuando x toma este valor.

Al evaluar tenemos:

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} cos(n\pi) + \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n3} \left[(-1)^n - 1 \right] sen(n\pi) \right)$$

como se puede ver la parte del $senn\pi$ se vuelve cero, por lo que solo se trabaja con el término que depende del coseno.

$$\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} cos(n\pi)$$

$$\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2}(-1)^n$$

$$\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{2n}}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{2n}}{n^2}$$

$$\frac{2\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{2n}}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n^2}$$

evaluando desde $n = 1, 2, 3, 4, 5......$ se obtiene:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

Solución:

b)

Se evalua la funcion en $x = 0$, ya que aquí se presenta otra discontinuidad de la función. Y evaluamos como en el inciso anterior:

$$f(0) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} cos(0) + \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n3} \left[(-1)^n - 1 \right] sen(0) \right)$$

al igual que en el inciso a) se observa que la parte del seno se anula:

$$0 = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} cos(0)$$

$$-\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} \cdot 1$$

$$-\frac{\pi^2}{2\cdot 6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2}$$

$$-\frac{\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

evaluando nuevamente en $n=1,2,3,4,5$......... y multiplicando por -1 a la ecuación, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\pi^2}{12}=+1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$$

Quedando así comprobados los incisos requeridos en el problema.

Ejemplo 1.15 *Ejercicio extraido del libro Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas, George F. Simmons*

Hallar la serie de Fourier de tipo coseno para la función definida por:

$$f_{15}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{3}{4}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

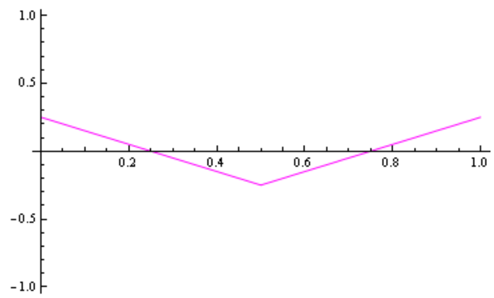


Figure 29: Gráfica de la función $f_{14}(x)$.

Para la serie de Fourier de tipo coseno, tenemos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{p} x$$

con coeficientes a_0 y a_n;

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f_{15}(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f_{15}(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx$$

Esto para una función $f(x)$ par en un intervalo$(-p, p)$. Para esta función tomamos un valor de $p = 1$, ya que de $(-p,\, p)$ la función se comporta como una función par.

Así, para calcular a_0 hacemos:

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f_{15}(x)\, dx = \frac{2}{1} \int_0^1 f_{15}(x)\, dx = 2 \left[\left(\int_0^{1/2} \left(\frac{1}{4} - x \right) dx \right) + \left(\int_{1/2}^1 \left(x - \frac{3}{4} \right) dx \right) \right] =$$

$$a_0 = 2\left[\left(\frac{1}{4}x - \frac{x^2}{2}\right)_0^{1/2} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x\right)_{1/2}^{1}\right] = 0$$

$$a_0 = 0$$

Ahora, para $a_n$tenemos:

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f_{15}(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx = \frac{2}{1}\int_0^1 f_{15}(x)\cos\frac{n\pi}{1}xdx = 2\left[\left(\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{4} - x\right)\cdot\cos n\pi xdx\right) + \left(\int_{1/2}^1\left(x - \frac{3}{4}\right)\cdot\cos n\pi xdx\right)\right] =$$

$$= 2\left[\int_0^{1/2}\frac{1}{4}\cos n\pi xdx - \int_0^{1/2} x\cdot\cos n\pi xdx + \int_{1/2}^1 x\cdot\cos n\pi xdx - \int_{1/2}^1\frac{3}{4}\cdot\cos n\pi xdx\right] =$$

$$= 2\left[\frac{sen\frac{n\pi}{2}}{4n\pi} - \left(\frac{sen\frac{n\pi}{2}}{2n\pi} - \frac{1}{(n\pi)^2}\right) + \left(\frac{\cos n\pi}{(n\pi)^2} - \frac{sen\frac{n\pi}{2}}{2n\pi}\right) - \left(-\frac{3}{4n\pi}sen\frac{n\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\left[\frac{sen\frac{n\pi}{2}}{4n\pi} - \frac{sen\frac{n\pi}{2}}{2n\pi} + \frac{1}{(n\pi)^2} + \frac{\cos n\pi}{(n\pi)^2} - \frac{sen\frac{n\pi}{2}}{2n\pi} + \frac{3sen\frac{n\pi}{2}}{4n\pi}\right] =$$

$$= \frac{sen\frac{n\pi}{2}}{2n\pi} - \frac{sen\frac{n\pi}{2}}{n\pi} + \frac{2}{(n\pi)^2} + \frac{2\cos n\pi}{(n\pi)^2} - \frac{sen\frac{n\pi}{2}}{n\pi} + \frac{3sen\frac{n\pi}{2}}{2n\pi} =$$

Agrupando términos, simplificando y sabiendo que $\cos n\pi = (-1)^n$, resulta:

$$= 2\frac{sen\frac{n\pi}{2}}{n\pi} - 2\frac{sen\frac{n\pi}{2}}{n\pi} + \frac{2}{(n\pi)^2} + \frac{2\cos n\pi}{(n\pi)^2} = \frac{2}{(n\pi)^2} + \frac{2\cos n\pi}{(n\pi)^2} = \frac{2}{(n\pi)^2}\cdot(1 + (-1)^n) =$$

$$a_n = \frac{2}{(n\pi)^2}\cdot(1 + (-1)^n).$$

Por lo que al sustituir en la serie de Fourier de tipo coseno, la expresión para$f(x)$queda:

$$f_{15}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{p}x = \frac{0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(n\pi)^2}\cdot(1 + (-1)^n)\right]\cdot\cos\frac{n\pi}{1}x =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{(n\pi)^2} \cdot (1 + (-1)^n) \right] \cdot \cos n\pi x =$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(1 + (-1)^n)}{(n\pi)^2} \right] \cdot \cos n\pi x$$

Resultando la serie de Fourier del siguiente modo:

$$f_{15}(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(1 + (-1)^n)}{(n\pi)^2} \right] \cdot \cos n\pi x$$

Ejemplo 1.16 *Ejercicio extraido del libro Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas, George F. Simmons*

Demostrar que:

$$\frac{1}{2}L - x = \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}sen\frac{2n\pi x}{L}, \quad 0 < x < L$$

Solución:

Comenzamos calculando el coeficiente b_n del siguiente modo:

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\, sen\frac{n\pi}{p}x\,dx.$$

$$b_n = \frac{2}{L/2}\int_0^{L/2}\left(\frac{L}{2} - x\right) sen\frac{n\pi}{L/2}x\,dx = \frac{4}{L}\left[\int_0^{L/2}\frac{L}{2}\,sen\frac{2n\pi}{L}x\,dx - \int_0^{L} x\,sen\frac{2n\pi}{L}x\,dx\right] =$$

La primer integral es sencilla de resolver, la segunda se hará por partes, haciendo:

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = sen\frac{2n\pi}{L}x\,dx \\ du = dx & v = -\frac{L}{2n\pi}\,cos\frac{2n\pi}{L}x \end{array}$$

Así, regresando a la integral y reacomodando tenemos:

$$b_n = \frac{4}{L}\left[-\frac{L^2}{4n\pi}cos\frac{2n\pi}{L}x - \left(-\frac{xL}{2n\pi}cos\frac{2n\pi}{L}x - \int -\frac{L}{2n\pi}cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx\right)\right]_0^{L/2} =$$

$$b_n = \frac{4}{L}\left[-\frac{L^2}{4n\pi}cos\frac{2n\pi}{L}x + \frac{xL}{2n\pi}cos\frac{2n\pi}{L}x - \frac{L^2}{4n^2\pi^2}sen\frac{2n\pi}{L}x\right]_0^{L/2} =$$

al evalular en los límites de integración, y simplificando terminos resulta:

$$b_n = \frac{4}{L}\left[\left(-\frac{L^2}{4n\pi}cosn\pi + \frac{L^2/2}{2n\pi}cosn\pi - \frac{L^2}{4n^2\pi^2}senn\pi\right) - \left(-\frac{L^2}{4n\pi}\right)\right] =$$

$$b_n = \frac{4}{L}\left[-\frac{L^2}{4n\pi}(-1)^n + \frac{L^2}{4n\pi}(-1)^n + \frac{L^2}{4n\pi}\right] =$$

$$b_n = \frac{4}{L}\left[\frac{L^2}{4n\pi}\right] = \left[\frac{L}{n\pi}\right]$$

$$b_n = \frac{L}{n\pi}$$

Esto para trabajar con la serie de Fourier de senos conformada como se muestra a continuación:

$$f\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\frac{n\pi}{p}x$$

Así tenemos:

$$f\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} sen\frac{n\pi}{L/2}x$$

$$f\left(x\right) = \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} sen\frac{2n\pi}{L}x$$

Demostrando asi que:

$$\frac{1}{2}L - x = \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} sen\frac{2n\pi}{L}x$$

Ejercicio 1.17 *Ejercicio 9 de la sección 11.2 del libro de Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera, Séptima edición, de los autores Zill y Cullen.*

Encontrar la serie de Fourier en el intervalo dado

$$f_{17}(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ sen\, x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Solución:

Calculando $a_0$tenemos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{17}(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{\pi} sen\, x\, dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[cos\, x\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}\left[cos\, \pi - cos\, 0\right] = -\frac{1}{\pi}\left[-1-1\right] = \frac{2}{\pi}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}.$$

Calculando $a_n$tenemos:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{17}(x)\cdot cos\,\frac{n\pi}{\pi}x\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\cdot cos\, nx\, dx + \int_{0}^{\pi} sen\, x\cdot cos\, nx\, dx\right] =$$

Utilizando una identidad trigonométrica y acomodando de modo conveniente, tenemos a la integral del siguiente modo:

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{\pi}\left[sen\ (n+1)\, x + sen\ (1-n)\, x\right] dx\right] = \frac{1+(-1)^n}{\pi\,(1-n^2)}$$

Pero resulta para un $n = 2, 3, 4, \ldots$

Por lo que calculamos $a_1$para un mejor resultado:

$$a_1 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{\pi}\left[sen\, 2x\right] dx\right] = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2}cos\, 2x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2}cos\, 2\pi + \frac{1}{2}cos\, 0\right]$$

$$a_1 = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right] = 0$$

$$a_1 = 0.$$

Calculamos ahora a b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{17}\left(x\right)\cdot sen\,\frac{n\pi}{\pi}x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\cdot sen\,nx\,dx + \int_{0}^{\pi} sen\,x\cdot sen\,nx\,dx\right] =$$

Nuevamente utilizamos una identidad trigonométrica y acomodamos:

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{\pi}\left[cos\left(1-n\right)x - cos\left(1+n\right)x\right]\,dx\right] = 0$$

Observamos qué ocurre al calcularb_1, y obtenemos un mejor resultado:

$$b_1 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{\pi}\left[1-cos\,2x\right]\,dx\right] = \frac{1}{2\pi}\left[x-\frac{1}{2}sen\,2x\right]_{0}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\pi\right) = \frac{1}{2}$$

$$b_1 = \frac{1}{2}$$

Por lo que al desarrollar la primer suma, nuestra serie de Fourier queda del siguiente modo:

$$f_{17}\left(x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi}{p}x + b_n sen\frac{n\pi}{p}x\right)$$

$$= \frac{2}{2\,\pi} + 0\cdot cos\,nx + \frac{1}{2}sen\,nx + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+\left(-1\right)^n}{\pi\left(1+n^2\right)}\right)cos\,nx$$

$$f_{17}\left(x\right) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}sen\,x + \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+\left(-1\right)^n}{\left(1+n^2\right)}\right)cos\,nx.$$

REFERENCIAS

1. Dennis G. Zill, Michael R. Cullen, Ecuaciones Diferenciales con Problemas con Valores en la Frontera, Séptima edición, Cengage Learning Editores, México D.F. 2009.

2. Kreyszig Erwin, Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería Vol. II, Tercera edicón, Limusa Wiley, México 2008

3. Glyn James, Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería, Segunda edición, Prentice Hall, México 2002.

4. Rafael Bru, Joan Josep Climent, Àlgebra Lineal, Alfaomega, México D.F. 2001.

5. http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/file.php/541/semana8clase1.pdf

6. http://www.geoan.com/vectores/ortogonales.html

7. George F. Simmons, Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas.