

[L&W-I] - Equivalentiebewijs

Door: Mathijs de Jong (V1A)

Inleiding

Het doel van deze opdracht is om te bewijzen dat de wet van Peirce een tautologie is in de propositielogica. Er moet aangetoond worden dat $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p \equiv T$, door enkel gebruik te maken van de herschrijfgeregels beschreven in stelling 2.3.2 van de reader.

We beginnen met de linkerhelft van de stelling, $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$, en versimpelen deze stap voor stap met behulp van de herschrijfgeregels tot het gewenste eindresultaat, T . We hebben dan bewezen dat de wet van Peirce een tautologie is.

| | |
|--|--|
| 0. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ | Beginsituatie |
| 1. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ | Buitenste haakjes verwijderd (deze zijn overbodig) |
| 2. $((\neg p \vee q) \rightarrow p) \rightarrow p$ | Regel 7 toegepast |
| 3. $(\neg(\neg p \vee q) \vee p) \rightarrow p$ | Regel 7 toegepast |
| 4. $\neg(\neg(\neg p \vee q) \vee p) \vee p$ | Regel 7 toegepast |
| 5. $(\neg\neg(\neg p \vee q) \wedge \neg p) \vee p$ | Regel 9 toegepast |
| 6. $((\neg p \vee q) \wedge \neg p) \vee p$ | Regel 1 toegepast |
| 7. $((\neg p \vee q) \vee p) \wedge (\neg p \vee p)$ | Regel 12 toegepast |
| 8. $((\neg p \vee q) \vee p) \wedge (p \vee \neg p)$ | Regel 2 toegepast |
| 9. $((\neg p \vee q) \vee p) \wedge T$ | Regel 16 toegepast |
| 10. $((\neg p \vee q) \vee p)$ | Regel 1 toegepast |
| 11. $(\neg p \vee q) \vee p$ | Buitenste haakjes verwijderd (deze zijn overbodig) |
| 12. $(q \vee \neg p) \vee p$ | Regel 2 toegepast |
| 13. $q \vee (\neg p \vee p)$ | Regel 5 toegepast |
| 14. $q \vee (p \vee \neg p)$ | Regel 2 toegepast |
| 15. $q \vee T$ | Regel 16 toegepast |
| 16. T | Regel 16 toegepast |

Conclusie

We hebben $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ nu omgeschreven naar T door enkel gebruik te maken van de herschrijfgeregels uit stelling 2.3.2 van de reader. Daarmee hebben we dus bewezen dat $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p \equiv T$, oftewel, dat de wet van Peirce een tautologie is.