Fundamenten voor de Computerwetenschappen

Master in de ingenieurswetenschappen: computerwetenschappen

July 8, 2018

B. Demoen
KU Leuven
Departement Computerwetenschappen

Contents

Chapter 1

Voorwoord

Algoritmen staan centraal in de computerwetenschappen. Effectieve algoritmen voor concrete problemen steunen altijd op een goede keuze van de abstractie en formeel inzicht in die abstractie. Het blijkt dat **grafen** dikwijls van pas komen en daarom begint deze cursus met een stukje grafentheorie: basisbegrippen i.v.m. grafen, een paar stellingen, en wat algoritmen die steunen op stellingen. In de daaropvolgende hoofdstukken komen die regelmatig van pas. Na grafentheorie volgen twee hoofdstukken over **talen** en **beslissingsproblemen**: een hiërarchie van talen wordt opgebouwd aan de hand van de machinerie die nodig is om een taal te beslissen en het formalisme om een taal te specifiëren. Bovendien wordt ruim aandacht besteed aan de niet-beslisbare talen: dit geeft de limieten aan van wat mogelijk is met een algoritme. De cursus eindigt met een inleiding tot complexiteitstheorie: daarin wordt één van de centrale problemen van de computerwetenschappen formeel aangebracht, namelijk de vraag of **P** gelijk is aan **NP**. Behalve tijdscomplexiteit komt ook ruimtecomplexiteit aan bod.

Deze tekst bevat stukken uit de cursustekst voor de vakken

* *Fundamenten voor de Informatica* 1^{ste} Bachelor Informatica, geschreven samen met collega K. De Kimpe in 1997,
* *Automaten en Berekenbaarheid* 3^{de} Bachelor Informatica, geschreven in 2004.

Dat verklaart de niet-uniforme stijl.

Geraadpleegde bronnen en bijkomend materiaal staan soms op het einde van een hoofdstuk, soms op het einde van een onderwerp, soms in de tekst zelf. Oefeningen zijn met opzet niet opgenomen, maar er staan wel regelmatig *selfies* in: dingen om zelf te doen.

Chapter 2

Inleiding tot Grafentheorie

Grafen kunnen dikwijls gebruikt worden als abstractie om een concreet probleem op te lossen en zijn dan ook een context waarbinnen veel algoritmen zijn ontwikkeld: een kortste-pad zoeken (gps), een opspannende boom (optimalisatie van netwerken), grafenkleuring (registerallocatie door een compiler), systematisch doorlopen van een boom (een zoekboom of een spelboom), maximale netwerkflow, kringen allerhande ... Het is daarom goed om de abstracte context van grafen wat formeler te bestuderen. Dit hoofdstuk behandelt o.a. definities i.v.m. grafen en voorbeelden van speciale grafen; vlakke grafen - formule van Euler, K_3 en $K_{2,2}$ als minimale niet-vlakke grafen; kringen (Euler en Hamilton); gewogen grafen; minimaal opspannende (Steiner) boom (Kruskal en Prim); het maximale flow en het SCCS algoritme; grafen kleuren; problemen modelleren met grafen.

Inleiding

Informeel is een graaf een tekening van punten (die we knopen noemen) die verbonden kunnen zijn door lijnen (bogen). Later definiëren we alles meer formeel.

De drie munten

Drie munten liggen op tafel, alle met kop (K) omhoog. Je mag verschillende keren de volgende handeling uitvoeren: neem twee munten, draai ze om en leg ze terug. Gevraagd wordt: is het mogelijk dat na een aantal van zulke handelingen alle munten met de muntkant (M) boven liggen?

Eén van de manieren om dit (type van) probleem op te lossen, is een graaf te tekenen met de mogelijke configuraties van de 3 munten als knopen; tussen twee configuraties wordt

enkel een verbinding getekend als het mogelijk is om van de ene configuratie naar de andere te gaan door de spelregels te volgen: twee munten tegelijk omkeren. We bekomen de graaf in Figuur 2.1.

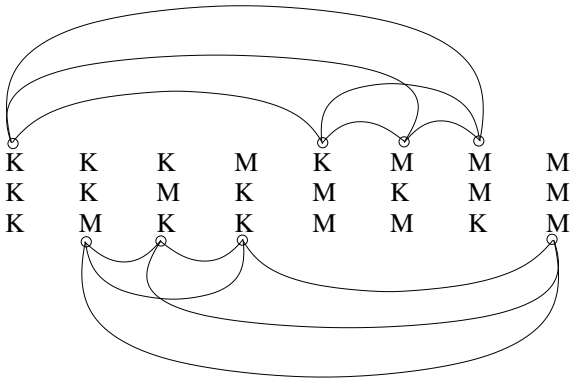


Figure 2.1: De graaf met de 3 munten

Uit de graaf is vlug duidelijk dat het niet mogelijk is om van de KKK configuratie tot MMM te komen terwijl de spelregels gerespecteerd worden, omdat je niet van KKK naar MMM kan gaan door verbindingen te volgen. KKK en MMM liggen in een verschillende component van de graaf.

De wolf, de geit en de kool.

Een boer bezit een wolf, een geit en een kool; hij leeft aan de linkeroever van een rivier en wil al zijn bezittingen naar de overkant brengen. Hij heeft een bootje, maar dat is niet groot genoeg om meer dan één van zijn bezittingen tegelijk naar de overkant te varen. Hij zou natuurlijk drie keer over kunnen varen met telkens één van zijn bezittingen, maar zogauw hij de geit en de kool alleen laat, eet de geit de kool op; en hetzelfde geldt voor de wolf en de geit: dat wil de boer natuurlijk vermijden. Bestaat er een manier om alles naar de overkant te brengen?

Om dit op te lossen, kan je natuurlijk alle mogelijkheden proberen en dan zit je met het probleem van boekhouding. Hier is een systematische manier om het te doen: schrijf eerst alle mogelijke situaties neer; vermits een situatie volledig vastligt als je weet wat op welke oever is, kan je dat doen door de voorstelling BGK te gebruiken voor de situatie: de boer, de geit en de kool zijn op de linkeroever. Sommige situaties zijn a priori verboden: GK zou willen zeggen dat de geit en de kool op de linkeroever zitten (en de boer en de wolf op de rechteroever of onderweg in het bootje) en dat is verboden, want de geit zou de kool opeten. Alle situaties zijn dus neer te schrijven als in Figuur 2.2(a), waarbij $*$ gebruikt wordt om aan te duiden dat niets zich op de linkeroever bevindt.

(a) De mogelijke situaties voor de boer, de wolf, de geit en de kool

(b) De graaf voor de wolf, de geit en de kool

Figure 2.2: De boer, de wolf, de geit en de kool

Vervolgens verbinden we elke twee situaties α en β als de boer door overvaren - en eventueel één van zijn bezittingen mee te nemen - de situatie α in β kan wijzigen. We verkrijgen dan de graaf in Figuur 2.2(b). Het probleem is nu herleid tot de vraag: bestaat er een pad langs de lijnen van de graaf in Figuur 2.2(b) van punt BWGK naar $*$?

In het probleem van de munten en dat van de boer, wolf, geit en kool hebben we telkens een probleem herleid tot de vraag naar het bestaan van een pad tussen twee knopen in een graaf: dit is één van de problemen in grafen die we zullen bestuderen. Dikwijls zijn we geïnteresseerd in het kortste pad.

De bruggen van Königsberg

18de eeuw, Königsberg (nu Kaliningrad in Rusland): door de stad stroomt de Pregel (Figuur 2.3), een rivier met daarin twee eilanden, onderling en met de oever verbonden door 7 bruggen. In het weekend wandelen de inwoners van Königsberg over de bruggen en vragen zich af: is het mogelijk om een wandeling te maken die alle bruggen één keer aandoet en zodat de wandeling begint en eindigt op dezelfde plaats? In 1736 lost de Zwitser Leonhard Euler (1707-1783) dit probleem op in het eerste artikel dat ooit over grafentheorie verscheen.

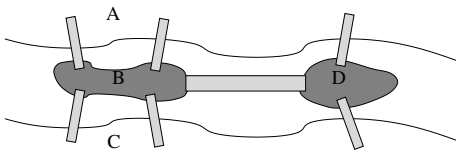


Figure 2.3: De bruggen aan de Pregelrivier

Wat heeft het probleem met grafen te maken? Een voorstelling van de bruggen en hoe ze

oevers en eilanden verbinden m.h.v. een graaf vind je in Figuur 2.4. Het probleem is nu teruggebracht tot zijn essentie: bestaat in die graaf een kring, t.t.z. een gesloten pad, dat alle bogen juist één maal aandoet? Zulk een kring noemt men een Euleriaanse kring. Het zal blijken dat het karakteriseren van grafen die een Euleriaanse kring hebben eenvoudig is, alsook het vinden van een Euleriaanse kring.

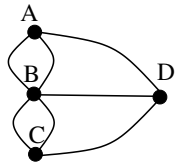


Figure 2.4: De graaf die overeenkomt met de bruggen aan de Pregel

Het zoeken van een Euleriaanse kring (of pad) ken je waarschijnlijk ook van het volgende: gegeven een figuur waarin punten met lijnen zijn verbonden, teken de figuur door je pen in een punt te zetten, alle lijnen te volgen zonder een lijn twee keer te doorlopen en zonder je pen ooit op te heffen.

In het *echte* leven is het vinden van een Euleriaanse kring ook van belang, bijvoorbeeld als je de staat van de middenbermen van de snelwegen in België wil controleren: je moet dan alle snelwegen doorlopen maar je wil daarvoor liefst elke snelweg slechts één keer afgaan.

Het speelgoed van Hamilton

Sir William Rowan Hamilton probeerde rond 1850 een 3-dimensionale puzzel op de markt te brengen in de vorm van een dodecahedron (12 5-hoeken): Figuur 2.5 geeft een vlakke weergave van die ruimtelijke figuur. Elke hoek had de naam van een stad en het probleem is van een weg te vinden die begint bij een stad, elke stad juist één keer aandoet en terug bij de beginstad eindigt. Zulk een weg wordt een Hamiltoniaanse kring genoemd: het zal heel wat moeilijker blijken om het bestaan van een Hamiltoniaanse kring te bewijzen of er één te construeren dan voor een Euleriaanse kring.

De puzzel was een commerciële flop, maar het is de voorloper van het “reizende verkopers-probleem” (TSP) in een later hoofdstuk

Er is een probleem dat lijkt op het “reizende verkopers-probleem”: het postman-probleem; de postman wil op zijn ronde elke straat juist twee maal doorlopen (eens langs elke kant van de straat) en de vraag is of dat mogelijk is ...

Figuur 2.6 toont een Hamiltoniaanse kring voor de puzzel van Hamilton.

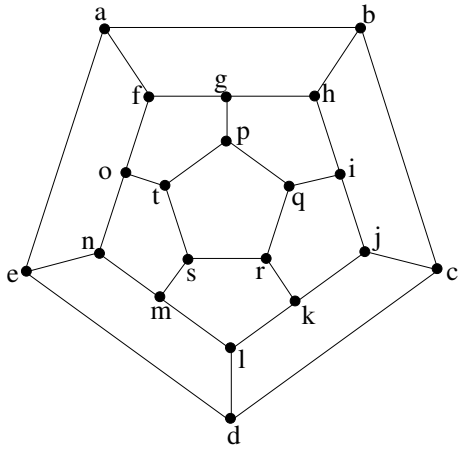


Figure 2.5: De puzzel van Hamilton

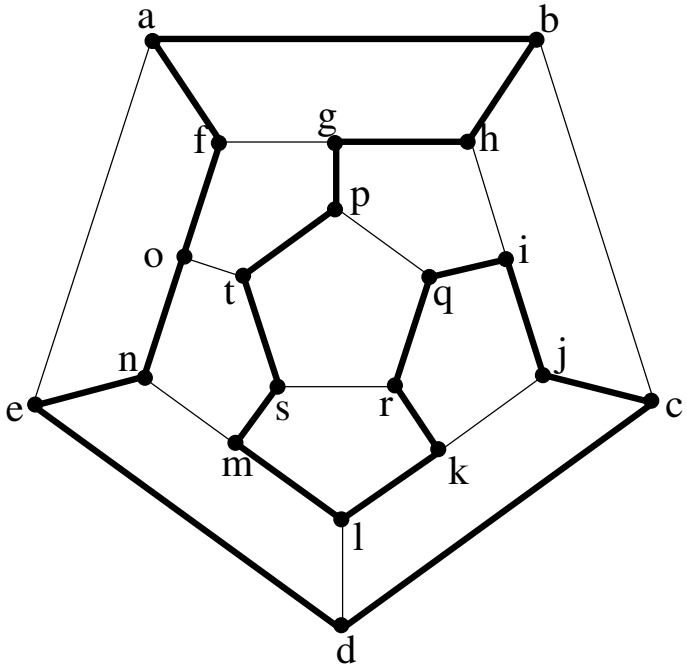


Figure 2.6: Een oplossing voor de puzzel van Hamilton

Grafen

Allerhande paden

Definitie 2.2.1. *Graaf*
Een (niet-gerichte) **graaf** G is een koppel (V, E) waarbij V een verzameling van **knopen** (knoop = vertex) is en E een (multi-)verzameling[1] van **bogen** (boog = edge) waarbij elke boog $e \in E$ een niet-geordend paar (v, w) uit $V \times V$ is; we schrijven $e = (v, w)$ of $e = (w, v)$. (In het Engels: (undirected) graph).

We staan ons soms wat vrijheid van notatie toe:

- we schrijven $G(V, E)$ als afkorting voor: de graaf G met knopen V en bogen E
- we schrijven $e \in G$ voor: $e \in E$ waarbij E de bogen van G zijn (als we al weten dat e een boog is)
- we schrijven $v \in G$ voor: $v \in V$ waarbij V de knopen van G zijn (als we al weten dat v een knoop is)
- als e een boog is met eindknopen x, y en G de graaf (V, E), dan bedoelen we met $G \cup \{e\}$ de graaf $(V \cup \{x, y\}, E \cup \{e\})$: we zeggen "voeg e toe aan G"
- als b een knoop is en G de graaf (V, E), dan bedoelen we met $G \cup \{b\}$ de graaf $(V \cup \{b\}, E)$ en we zeggen "voeg b toe aan G"

Soms veronderstellen we impliciet dat de knopen genummerd zijn van 1 tot n met n het aantal knopen. We zullen ook enkel met eindige grafen te maken hebben.

Een boog wordt ook soms een ribbe genoemd en een knoop een top: dit naar analogie met veelvlakken die mee aan de oorsprong liggen van de grafentheorie.

Merk op dat in E twee bogen (v, w) kunnen voorkomen: we noemen zulke bogen **parallel**.

We zeggen dat de boog (v, w) invalt ("is incident on") in de knoop v (en w) en dat de knopen v en w grenzen ("are adjacent to") aan de boog (v, w).

Definitie 2.2.2. *Gerichte graaf*
Een **gerichte graaf** G is een paar (V, E) waarbij V een verzameling van knopen is en E een (multi-)verzameling van bogen waarbij elke boog $e \in E$ een geordend paar (v, w) uit $V \times V$ is; we schrijven $e = (v, w)$. (in het Engels: directed graph of digraph)

[1] Het begrip *multiverzameling* is analoog aan dat van een verzameling, met die uitzondering dat een element meer dan eens mag voorkomen, bv. $\{1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5\}$ is een multiverzameling.

Definitie 2.2.3. *Lus*
Een **lus** in een graaf is een boog (v, v).

Definitie 2.2.4. *Enkelvoudige graaf*
Een graaf is **enkelvoudig** als de graaf geen parallelle bogen noch lussen heeft.

Definitie 2.2.5. *Graad van een knoop*
De **graad** $\delta(v)$ **van een knoop** v van de graaf (V, E) is het aantal bogen $(v, w) \in E$.

Opmerking: Een lus in een knoop v draagt een factor 2 bij tot de graad $\delta(v)$.

Definitie 2.2.6. *Geïsoleerde knoop*
Een knoop v in een graaf (V, E) noemt men **geïsoleerd** *indien $\delta(v) = 0$.*

Stelling 2.2.7. *Som van de graden van de knopen*
De som van de graden van de knopen van een graaf is even.

Proof. Vermits elke boog (v, w) één bijdraagt tot de graad van zowel v als w, is de bijdrage van elke boog tot de som van de graden gelijk aan twee en bijgevolg is de som van de graden van de knopen van een graaf even. ■

Stelling 2.2.8. *Aantal knopen met oneven graad*
In elke graaf is er een even aantal knopen met oneven graad.

Proof. Als de graaf knopen a_i $(i = 1, \ldots, n)$ heeft met even graad en b_i $(i = 1, \ldots, m)$ met oneven graad, dan is door Stelling 2.2.7

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} \delta(a_i) + \sum_{i=1}^{m} \delta(b_i) \right) \bmod 2 = m \bmod 2$$

en bijgevolg is de stelling waar. ■

Definitie 2.2.9. *Pad*
Een **pad** (van lengte n) in een graaf (V, E) is een rij bogen

$$(e_1 = (v_1, v_2),\ e_2 = (v_2, v_3),\ \ldots, e_n = (v_n, v_{n+1})).$$

Impliciet wordt hier verondersteld dat bij het geven van een pad, het duidelijk is welke van de (eventueel) parallelle bogen in het pad gebruikt worden.
Anderzijds is in een enkelvoudige graaf, een pad ook gekarakteriseerd door de rij knopen $(v_1, \ldots, v_{n+1})$, maar in een graaf die niet enkelvoudig is, kan zulk een rij knopen staan voor meerdere paden.

Definitie 2.2.10. *Enkelvoudig pad*
Een **enkelvoudig pad** $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ is een pad waarvan voor alle $i \neq j$ geldt dat $v_i \neq v_j$

Definitie 2.2.11. *Kring*
Een **kring** is een pad $((v_1, v_2), ..., (v_n, v_{n+1}))$, waarbij alle gebruikte bogen onderling verschillend zijn en waarbij $v_1 = v_{n+1}$.

Een kring wordt ook een circuit genoemd.

Definitie 2.2.12. *Euleriaanse kring (pad)*
Een **Euleriaanse kring (pad)** is een kring (pad) die alle bogen van een graaf juist één maal aandoet en ook alle knopen doorloopt.

Definitie 2.2.13. *Hamiltoniaanse kring*
Een **Hamiltoniaanse kring** is een kring die alle knopen van een graaf juist één keer aandoet.

Definitie 2.2.14. *Samenhangende graaf*
Een graaf is **samenhangend** als er voor elke twee verschillende knopen v en w een pad is van v naar w.

Stelling 2.2.15. *Het bestaan van een Euleriaanse kring.*
Een graaf $G(V, E)$ heeft een Euleriaanse kring als en slechts als G samenhangend is en de graad van elke knoop even is.

De intuïtie achter het bewijs is dat wanneer je in een knoop toekomt, je er nog altijd weg kan geraken, vermits de graad even is: daardoor maakt het niet zo veel uit welk pad je volgt als je maar niet te vlug terugkeert naar je startpunt. Deed je dat wel, dan kan het pad nog aangepast worden.

Proof.

- Indien de graaf een Euleriaanse kring heeft dan is de graaf samenhangend, want de kring verbindt alle knopen en er is dus een pad van elke knoop naar elke andere knoop. Vermits bij het doorlopen van een kring, we telkens ook vertrekken uit een knoop waar we toekwamen, en vermits alle bogen doorlopen worden door een Euleriaanse kring, moet de graad van elke knoop even zijn.

- Construeer een kring P in de graaf als volgt: start bij een willekeurige knoop s, volg een willekeurige boog die invalt in s; vanaf dan, breid het partieel pad uit met een willekeurige boog vanaf de laatst toegevoegde knoop, maar gebruik geen boog meer dan eens. Herhaal totdat er geen boog meer voorhanden is. Vermits elke knoop een even graad heeft, is P een kring die in s vertrekt en aankomt. Indien P alle bogen van G gebruikt, is de stelling bewezen. In het andere geval is er een knoop s' op het pad P, waaruit er eveneens een boog vertrekt die niet tot P behoort (waarom?). Construeer nu in s' een kring P' die geen bogen van P gebruikt (waarom kan dit?). We kunnen P' toevoegen aan P om een kring te bekomen, die meer bogen gebruikt dan P. We kunnen deze procedure herhalen totdat er geen ongebruikte bogen meer zijn: de Euleriaanse kring is geconstrueerd. Figuur 2.7 illustreert de constructie.

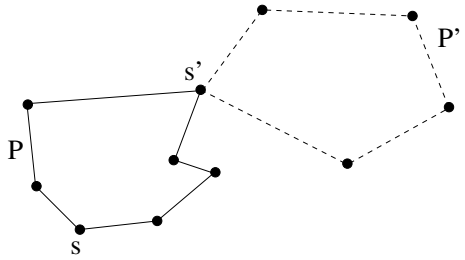


Figure 2.7: P en de uitbreiding P'

■

Stelling 2.2.16. *Bestaan van een Euleriaans pad*
Een samenhangende graaf G heeft een Euleriaans pad van knoop v naar w ($v \neq w$) indien v en w de enige knopen zijn met oneven graad.

Proof. Beschouw de graaf G' die je verkrijgt door aan G de boog (w, v) toe te voegen. G' is samenhangend en elke knoop heeft nu een even graad, bijgevolg bestaat een Euleriaanse

kring $(w, v, \ldots, w)$; laat uit die kring de eerste boog weg en je verkrijgt een pad $(v, \ldots, w)$ in G. ■

Als je nu terugkijkt naar Figuur 2.4 (de graaf voor de bruggen in Königsberg), dan zie je dat alle vier de knopen een oneven graad hebben en dus niet voldoen aan de voorwaarden van de stellingen van Euler; bijgevolg is er geen Euleriaanse kring (noch Euleriaans pad) in die graaf en dus heeft het probleem van de bruggen aan de Pregel een negatieve oplossing.

Definitie 2.2.17. *Deelgraaf*
Een graaf (V_1, E_1) is een **deelgraaf** van (V, E) indien $V_1 \subseteq V$ en $E_1 \subseteq E$.

Definitie 2.2.18. *Component van een graaf*
Een **component** C van een graaf G is een maximaal samenhangende deelgraaf van G, t.t.z. $\forall C' \subseteq G : C \subset C' \Rightarrow C'$ is niet samenhangend.

Stelling 2.2.19. *Partitie van een graaf*
De componenten (V_i, E_i) $(i = 1, \ldots, n)$ van een graaf (V, E) vormen een partitie, t.t.z. $(V, E) = (\cup_{i=1}^{n} V_i, \cup_{i=1}^{n} E_i)$ *en voor $i \neq j$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ en $E_i \cap E_j = \emptyset$*

Proof. Het is duidelijk dat elke knoop tot minstens één component moet behoren en ook elke boog. Stel dat een knoop tot twee componenten α en β behoort, dan is de unie van α en β een samenhangende deelgraaf van (V, E) en bijgevolg moet $\alpha = \beta$ en daaruit volgt dat $V_i \cap V_j = \emptyset$ voor $i \neq j$. Vermits een boog behoort tot de component van zijn eindknopen, is het bewijs gemakkelijk te vervolledigen. ■

De Stelling 2.2.19 is belangrijk omdat het dikwijls eenvoudiger is eigenschappen te bewijzen voor samenhangende grafen en Stelling 2.2.19 geeft ons een manier om op eenduidige wijze een niet-samenhangende graaf in samenhangende delen te verdelen.

Voorstelling van grafen

Tot nog toe hebben we grafen gewoon getekend. Dikwijls hebben we ook een meer formele voorstelling van grafen nodig, bijvoorbeeld als we programma's schrijven die grafen behandelen. Sommige voorstellingen lenen zich beter tot manipulatie dan andere en we zullen dan ook meerdere voorstellingsmanieren bekijken. We bekijken eerst niet-gerichte grafen en daarna gebruiken we een variante om gerichte grafen voor te stellen.

Voor een graaf $G(V, E)$ met n knopen kunnen we de knopen nummeren van 1 tot n en een $n \times n$ matrix opstellen met op de (i, j)-de plaats een 1 als $(i, j) \in E$ en anders een 0; die

matrix noemen we de buurmatrix van G.

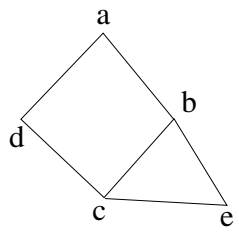


Figure 2.8: Voorbeeld

De buurmatrix A van de graaf van Figuur 2.8 is

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Een buurmatrix van een enkelvoudige graaf heeft op de diagonaal alleen maar nullen. Aan de buurmatrix van een graaf kan je niet zien of de graaf parallelle bogen heeft of niet. Een buurmatrix is steeds symmetrisch en daarom niet erg efficiënt als voorstelling. Toch heeft de buurmatrix interessante eigenschappen.

Laat ons A^2 berekenen; we verkrijgen:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

We verkregen het (a, c)-de element van A^2 door:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 2$$

en de positieve bijdragen aan het resultaat komt van paden $(a,b)-(b,c)$ en $(a,d)-(d,c)$. Dat wijst erop dat $A^2[i,j]$ = het aantal paden van knoop i naar knoop j met lengte 2. Maar we moeten toch oppassen met die uitspraak: de buurmatrix laat geen parallelle bogen zien en parallelle bogen vergroten het aantal paden tussen twee knopen. Daarom beperkt de volgende stelling zich tot enkelvoudige grafen:

Stelling 2.2.20.
Indien A de buurmatrix is van een enkelvoudige graaf $G(V,E)$,
dan is $A^n[i,j]$ = het aantal paden met lengte n van knoop i naar knoop j.

Proof. We gebruiken inductie op n. Voor $n=1$ is de stelling waar door de definitie van buurmatrix.

Stel dat de stelling waar is voor n, we bewijzen dat de stelling waar is voor (n+1): we weten dat $A^{n+1} = A^n * A$ en dus $A^{n+1}[i,j] = \sum_{k=1}^{\#V} A^n[i,k] * A[k,j]$; door de inductiehypothese is $A^n[i,k]$ het aantal paden van i naar k en als er een boog van k naar j is (t.t.z. als $A[k,j]=1$) dan zijn er ook $A^n[i,k]$ aantal paden van i naar j die langs k passeren juist voor ze in j toekomen. Vermits geen twee paden dezelfde zijn (waarom niet?) verkrijgen we het resultaat voor $(n+1)$. ■

Voor de graaf van Figuur 2.8 is

$$A^4 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 11 & 1 & 6 \\ 3 & 15 & 7 & 11 & 8 \\ 11 & 7 & 15 & 3 & 8 \\ 1 & 11 & 3 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & 8 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Gebruik makend van voorgaand resultaat kunnen we inzien dat $(\sum_{k=1}^{n} A^k)[i,j]$ gelijk is aan het aantal paden korter dan n bogen van i naar j.

Een ander gebruik van de buurmatrix vinden we door de buurmatrix niet te vullen met 0 of 1, maar met met de boolse waarden *true* of $false$; matrixvermenigvuldiging wordt dan gedefinieerd als:

$$(A * B)[i,j] = (A[i,1] \wedge B[1,j]) \vee (A[i,2] \wedge B[2,j]) \vee \ldots \vee (A[i,n] \wedge B[n,j])$$

Als B de boolse buurmatrix van de graaf G voorstelt, dan is $B^n[i,j]$ gelijk aan de waarheidswaarde van "er is een pad met lengte n van i naar j".

En analoog is $(\sum_{k=1}^{n} B^k)[i,j]$ (de som is hier ook nu de boolse som, t.t.z. $\vee$) de waarheidswaarde van "er is een pad van lengte kleiner dan of gelijk aan n van i naar j". Terwijl

de waarden in de machten van de gewone buurmatrix onbeperkt stijgen, zijn die voor de boolse buurmatrix $false$ of $true$ en monotoon stijgend en dus bestaat de limiet. Het is een manier om de transitieve sluiting van de relatie gedefinieerd door de bogen te berekenen en de limiet wordt gevonden na hoogstens n vermenigvuldigingen, als n het aantal knopen in de graaf is. We zien hiervan een toepassing bij gerichte grafen.

Een andere voorstelling van een graaf is gegeven door de incidentiematrix I: die heeft voor elke knoop een rij en voor elke boog een kolom. $I[i, j] = 1$ indien de j-de boog i als eindpunt heeft en anders 0. De incidentiematrix van de graaf in Figuur 2.8

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} ab & ad & cd & bc & ce & be \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

In de incidentiematrix vind je lussen en ook parallelle bogen terug.

De voorstelling van een gerichte graaf kan gebeuren zoals bij niet-gerichte grafen: een buurmatrix die een 1 heeft op de (i, j)-de plaats indien er een gerichte boog van i naar j bestaat, en anders een 0. De matrix is nu niet meer symmetrisch, maar we hebben daar eigenlijk nooit gebruik van gemaakt en de veralgemening van stelling 2.2.20 ligt voor de hand, evenals de definitie van de boolse buurmatrix.

Een belangrijke toepassing van de boolse buurmatrix ligt in het opsporen van de functies die opgeroepen worden (rechtsreeks of onrechtsreeks) door een andere functie in het programma; de directe-oproep relatie kan men voorstellen door een gerichte graaf of door zijn boolse buurmatrix B. De matrix verkregen als de boolse som $\sum B^i$ stelt de transitieve sluiting van de boog-relatie voor en bevat rechtstreeks de informatie of een functie een andere oproept of niet. Het is bovendien gemakkelijk te zien welke functies nooit opgeroepen worden: dat zijn de functies die niet verbonden zijn met de hoofdfunctie (main); zulke functies zijn in het compiler jargon *dode code*. In sectie 2.2.7 op pagina 27 gebruiken we dit voorbeeld nog eens voor een interessant grafenalgoritme.

Isomorfisme van grafen

We voeren het volgende experiment uit: een groep studenten wordt gevraagd een blad en een pen te nemen en zonder spieken de opdracht uit te voeren

- teken 5 punten en zet er een naam bij
- verbind het eerste punt dat je tekende met het tweede

- verbind het tweede met het derde punt
- verbind het derde met het vierde
- verbind het vierde met het vijfde
- verbind het vijfde met het eerste

Er is een goede kans dat sommige studenten één van de grafen uit Figuur 2.9 hebben getekend.

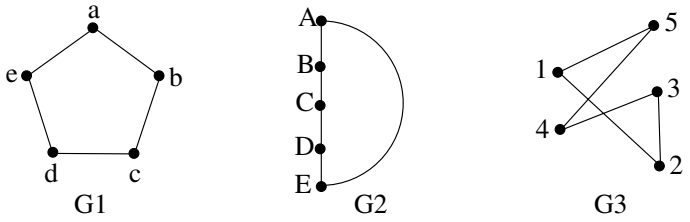


Figure 2.9: Drie verschillende of drie dezelfde grafen?

Al zien die grafen er verschillend uit, ze zijn getekend aan de hand van dezelfde instructies en we zouden ze dus graag als gelijk beschouwen, daarom de volgende definitie:

Definitie 2.2.21. *Isomorfisme van grafen*
De grafen $G_i(V_i, E_i)$ (i = 1,2) worden **isomorf** genoemd, indien er een bijectie $f : V_1 \to V_2$ bestaat zodanig dat $g : E_1 \to E_2$ gedefinieerd door $g((v, w)) = (f(v), f(w))$ voor alle $v, w \in E_1$ goed gedefinieerd (d.w.z. dat $g((v, w)) \in E_2$) is en een bijectie. Dergelijke f noemen we een isomorfisme tussen de twee grafen.

Tussen graaf G_1 en G_2 van Figuur 2.9 kan een isomorfisme f gedefinieerd worden door:

f(a) = B
f(b) = C
f(c) = D
f(d) = E
f(e) = A

en je kan nagaan dat G_1 en G_2 inderdaad isomorf zijn. Er is een andere karakterisatie van isomorfe grafen m.b.v. de volgende stelling:

Stelling 2.2.22. *Karakterisatie van isomorfe grafen m.b.v. de incidentiematrix*
De grafen G_1 en G_2 zijn isomorf als en slechts als er een ordening van de knopen en bogen bestaat waarvoor de incidentiematrices van G_1 en G_2 gelijk zijn.

Proof.
- Veronderstel dat G_1 en G_2 isomorf zijn, via een isomorfisme f. Kies een willekeurige orde op de knopen van G_1, dan volgt de orde op de knopen van G_2 door: $f(v) < f(w) \Leftrightarrow v < w$; de orde op de bogen van G_2 wordt analoog geïnduceerd door de orde op de bogen van G_1 en de bijectie tussen de bogen. De incidentiematrices zullen gelijk zijn.
- Als de incidentiematrices gelijk zijn, is het isomorfisme f triviaal te construeren en het isomorf zijn volgt direct.

■

We weten al dat de buurmatrix niet volledig een graaf bepaalt: immers parallelle bogen zijn niet zichtbaar in de buurmatrix. Daarom de meer beperkte stelling:

Stelling 2.2.23. *Karakterisatie van isomorfe enkelvoudige grafen m.b.v. de buurmatrix*
De enkelvoudige grafen G_1 en G_2 zijn isomorf als en slechts als er een ordening van de knopen bestaat waarvoor de buurmatrices van G_1 en G_2 gelijk zijn.

Proof. Het bewijs mag je zelf geven. ■

De stellingen over isomorfisme van grafen, geven een manier om isomorfisme te testen bij een meer concrete voorstelling van de graaf (m.b.v. de buur- of incidentiematrix): dat is nuttig bij het programmeren.

Elk bekend algoritme om te testen of twee grafen isomorf zijn, is minstens exponentieel. Er bestaan echter heel efficiënte testen die kunnen aantonen dat twee grafen *niet* isomorf zijn: daarbij gaat men na of een eigenschap die invariant is onder isomorfisme, geldig is voor beide grafen. De eenvoudigste voorbeelden van invariante eigenschappen (onder isomorfisme van grafen) is "het aantal knopen" en "het aantal bogen": dat volgt direct uit definitie 2.2.21. Wanneer we meer over grafen hebben geleerd, zullen we nog meer eenvoudig te testen eigenschappen kennen die al dan niet invariant zijn onder isomorfisme.

Gewogen grafen

Definitie 2.2.24. *Gewogen graaf*
Een **gewogen graaf** (V, E) is een graaf waarbij elke boog $e \in E$ een **gewicht** $w(e) \in \mathbb{R}_0^+$ heeft. Het gewicht $w(G)$ van een gewogen graaf G, is de som van de gewichten van de bogen van G.

Het gewicht van een boog kan men zien als de lengte van de boog of een kost geassocieerd met het doorlopen van de boog: de graaf kan bijvoorbeeld een wegennetwerk tussen steden

voorstellen en het gewicht is dan de afstand tussen steden of de tol die voor het gebruik van de weg tussen twee steden geheven wordt. Met het **gewicht van een graaf** bedoelt men de som van de gewichten van alle bogen van de graaf; met **gewicht van een pad** de som van de gewichten van de bogen van het pad. Als de graaf een wegennetwerk voorstelt, is het duidelijk dat het kennen van een **kortste pad** tussen twee knopen, t.t.z. een pad met kleinste gewicht dat de twee knopen verbindt, interessant is. Vermits deze twee knopen noodzakelijkerwijze in dezelfde component moeten liggen (waarom?) hebben we het in deze sectie steeds over samenhangende grafen.

Het bestaan van een kortste pad in een samenhangende (eindige!) graaf ligt voor de hand, en werd uitvoerig behandeld in andere vakken.

We zullen in deze sectie steeds met enkelvoudige grafen werken: immers, lussen komen niet voor in een kortste pad en van een stel parallelle bogen hebben we genoeg met de kortste. (je kan dat zelf formeel bewijzen).

Algoritmen in dit hoofdstuk bestaan uit een opeenvolging van opdrachten genummerd 1,2, ... Op het textueel einde van elke opdracht n staat impliciet **Ga naar opdracht (n+1)**. Met "stop" wordt bedoeld dat het algoritme gedaan is.

Vlakke grafen

Intuïtief is een vlakke graaf, een graaf die je op papier kan tekenen zonder dat twee bogen mekaar snijden: je hebt geen derde dimensie nodig om de graaf te realiseren. Bij de studie van vlakke grafen, spelen bepaalde grafen met een speciale eigenschap een belangrijke rol: de grafen waarvan de knopen in twee disjuncte verzamelingen kunnen verdeeld worden zodanig dat er geen bogen zijn tussen knopen binnen dezelfde verzameling. Figuur 2.10 laat zulk een graaf zien.

Definitie 2.2.25. *Tweeledige graaf*
Een **tweeledige graaf** is een graaf (V, E) waarvan $V = V_1 \cup V_2$ zodanig dat $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ en $E \subseteq V_1 \times V_2$

Met $K_{n,m}$ zullen we in het vervolg de tweeledige graaf aanduiden waarvan V_1 n elementen bevat en V_2 m en waarvan elke knoop van V_1 verbonden is met elke knoop van V_2. $K_{n,m}$ komt van pas als je n huizen wil verbinden met m nutsvoorzieningen (water, elektriciteit, gas, internetaansluiting ...).

Met K_n zullen we de graaf met n knopen aanduiden, waarbij er een boog is tussen elke twee knopen - zulke grafen noemt men volledig verbonden en met spreekt ook wel van een kliek (in het Engels clique).

De K is ter ere van Kazimierz Kuratowski.

In Figuur 2.10 vind je een voorstelling van K_4 en van $K_{2,2}$.

Figure 2.10: K_4 en $K_{2,2}$

Als je K_n tekent op papier voor opeenvolgende waarden van n, en je probeert dat te doen zodanig dat geen twee bogen mekaar kruisen op je tekening, dan merk je dat je vanaf $n = 5$ daar niet meer in slaagt. En als je $K_{n,m}$ tekent voor opeenvolgende waarden van (n, m) merk je dat de graaf steeds kruisende bogen heeft voor $n, m > 2$.

Er is iets speciaals aan grafen die je kan tekenen zonder dat bogen mekaar kruisen: zulke grafen worden **vlak** genoemd. Een toepassing van het begrip *vlakke graaf* vind je in het beschouwen van een net van wegen tussen steden: indien de graaf van het wegennet vlak is, betekent dit dat er geen kruispunten (noch bruggen of tunnels) nodig zijn. In 1752 bewees Euler de volgende formule[2]:

Stelling 2.2.26. *Eulers formule voor vlakke grafen:*
Indien G een samenhangende vlakke graaf is met e bogen, v knopen en f "zijvlakken" dan $v - e + f = 2$.

We hebben "zijvlak" niet formeel gedefinieerd: intuïtief is het een stukje van het vlak dat omsloten wordt door een zo klein mogelijke kring, maar ook het stuk van het vlak dat buiten de graaf ligt (het oneindig grote stuk) telt mee als een zijvlak. De oorsprong van de term zijvlak (in het Engels face) is weer bij de veelvlakken te vinden.

Proof. We gebruiken inductie op het aantal bogen. Stel $e = 1$. Dan is G één van de grafen in Figuur 2.11. In beide gevallen is de formule van Euler correct. Stel dat de formule juist is voor grafen met n bogen. Laat G een graaf zijn met $(n + 1)$ bogen.

Figure 2.11: De twee grafen met $e = 1$

1) Onderstel eerst dat G geen kringen bevat. Neem een maximaal enkelvoudig pad in G;

[2]Descartes (± 1600) kende de formule reeds, en waarschijnlijk ook Archimedes (± –250)

dat pad bevat een knoop a met $\delta(a) = 1$: beschouw de graaf G' die je verkrijgt door uit G a te verwijderen alsook de enige boog die erin toekomt; G' heeft 1 knoop en 1 boog minder dan G en hetzelfde aantal zijvlakken en G' is nog steeds samenhangend (waarom?), dus voor G' geldt de formule van Euler, dus ook voor G (zie bijvoorbeeld Figuur 2.12).

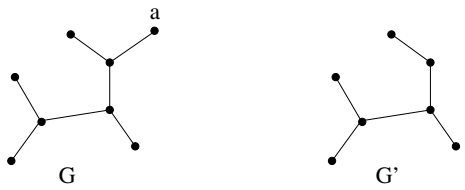


Figure 2.12: G zonder kringen

2) Stel nu dat G een kring bevat: neem een boog x van een kring van G; verwijder de boog x maar niet de knopen die de boog verbindt; we verkrijgen G' (zie bijvoorbeeld Figuur 2.13). G' heeft n bogen en nog evenveel knopen als G, maar één zijvlak minder dan G; bovendien

Figure 2.13: G met een kring

is G' samenhangend (waarom?); dus voor G' geldt (door de inductiehypothese) de formule van Euler en bijgevolg voor G ook. ■

Opmerking: de voorwaarde dat de graaf samenhangend is, is essentieel; de graaf met juist twee knopen en zonder boog, heeft $f = 1, e = 0, v = 2$ en de formule van Euler is duidelijk niet geldig. Maar je kan de formule wel veralgemenen!

De oorsprong van Euler's interesse in de formule was de studie van ruimtelijke figuren, met name de polyhedra: de veelvlakken; die interesse bestaat al sinds de Griekse oudheid: in de regelmatige polyhedra vond men de bouwstenen van de wereld. De formule drukt het verband uit tussen het aantal vlakken, ribben en hoekpunten van een polyhedron. De transformatie van een polyhedron naar een vlakke graaf gaat als volgt: beeld je in dat de polyhedron van rekbaar materiaal is gemaakt, zoals een ballon en dat de hoekpunten en ribben erop getekend zijn; prik een gaatje in het midden van een willekeurig vlak, rek dat gaatje open totdat al het materiaal in een plat vlak ligt. De resulterende figuur

gevormd door de ribben en hoekpunten is de vlakke graaf; het vlak dat doorprikt werd, komt overeen met het oneindige "zijvlak".

Stelling 2.2.27. *$K_{3,3}$ en K_5 zijn niet vlak.*

Proof. Veronderstel dat $K_{3,3}$ wel een vlakke graaf is. Laat β het aantal bogen voorstellen dat een zijvlak begrenst (tel een boog n keer als hij n zijvlakken begrenst). Vermits elke boog maximaal 2 zijvlakken begrenst, hebben we voor elke vlakke graaf $2 * e \geq \beta$ (in het algemeen begrenzen sommige bogen geen zijvlak).

In $K_{3,3}$ heeft elke kring minimaal 4 bogen (waarom?) en dus is $\beta \geq 4 * f$. Samen met de vorige ongelijkheid hebben we dus: $e \geq 2 * f$. Stel dat $K_{3,3}$ vlak is. Door gebruik van de formule van Euler om in het rechterlid f te elimineren, bekomen we $e \geq 2 * (e - v + 2)$. Vul daarin de waarden van e en v in voor $K_{3,3}$ en we verkrijgen $9 \geq 10$ en contradictie. Bijgevolg is $K_{3,3}$ niet vlak.

In K_5 heeft elke kring minimaal 3 bogen ... en het vervolg van het bewijs is analoog. ■

We hebben vroeger de definitie van isomorfe grafen gezien, maar soms lijken twee grafen op elkaar zonder dat ze hetzelfde aantal knopen hebben: als we in het midden van een boog van een graaf een extra knoop zetten, dan hebben we weinig essentieels aan de graaf veranderd (als de graaf vlak was, blijft ze vlak; als de graaf samenhangend of ... - vul zelf nog wat eigenschappen in - was, behoudt ze die eigenschap). Daarom is de volgende transformatie op grafen ingevoerd: drie (verschillende) knopen a,b,c van een graaf liggen op een rij als er bogen (a,b) en (b,c) bestaan en als er geen andere bogen invallen in b (anders gezegd: $\delta(b) = 2$). Een **rijreductie** bestaat erin om uit de oorspronkelijke graaf de bogen (a,b) en (b,c) en de knoop b te verwijderen en een nieuwe boog (a,c) toe te voegen: zie Figuur 2.14.

Figure 2.14: Een rijreductie op een graaf

Definitie 2.2.28. Twee grafen G_1 en G_2 worden **homeomorf** genoemd als beide grafen door een rij rijreducties kunnen herleid worden tot dezelfde graaf G

Stelling 2.2.29. *Stelling van Kuratowski*
Een graaf G is vlak als en slechts als G geen deelgraaf bevat die homeomorf is met K_5 of $K_{3,3}$.

Proof. Indien G een deelgraaf bevat die homeomorf is met K_5 of $K_{3,3}$, dan is het duidelijk dat G niet vlak kan zijn, vermits K_5 noch $K_{3,3}$ het zijn. Het bewijs van het omgekeerde valt buiten het bestek van deze cursus. ■

Deze stelling maakt K_5 en $K_{3,3}$ in zekere zin tot de kleinste niet-vlakke grafen.

Het kleuren van grafen

Definitie 2.2.30. Een **kleuring** van een graaf (V, E) is een toekenning van een kleur aan elke $v \in V$ zodanig dat de kleuren van v en w verschillen indien $(v, w) \in E$. Een **n-kleuring** is een kleuring met n of minder verschillende kleuren. Een **minimale** kleuring is een n-kleuring met minimale n.

Er zijn heel wat praktische toepassingen van het (minimaal) kleuren van een graaf. Als voorbeelden

- Je moet 4 vergaderingen plannen voor 4 personen A,B,C en D. In de eerste vergadering zitten A,B; in de tweede A,C, in de derde zitten B,C,D en in de vierde C,D. Wat is het minimale aantal tijdstippen waarop een vergadering moet gepland worden? Twee vergaderingen moeten op een verschillend tijdstip doorgaan als eenzelfde persoon aan beide vergaderingen moet deelnemen.

  Je kan het probleem voorstellen door de graaf van figuur 2.15: elke knoop stelt een vergadering voor en twee vergaderingen zijn verbonden als ze niet op hetzelfde tijdstip mogen doorgaan omdat er iemand in beide vergaderingen moet zijn. Je zoekt er de kleuring met het kleinste aantal kleuren voor en je hebt het antwoord (elke nieuwe kleur komt overeen met een nieuw tijdstip).

- Je moet in een warenhuis een aantal goederen opstapelen in de rekken, maar je mag bepaalde goederen niet naast elkaar zetten: bijvoorbeeld benzine mag niet naast brood, porno niet naast kuisproducten enzovoort. Ook hier kan je een graaf opstellen die al die beperkingen voorstelt en waarbij een kleuring van de graaf het probleem oplost.

- Een compiler tracht integer variabelen in machineregisters te houden in plaats van in het geheugen. Typisch zijn er meer variabelen dan registers, doch soms kan hetzelfde register gebruikt worden voor meer dan één variabele. Bijvoorbeeld in

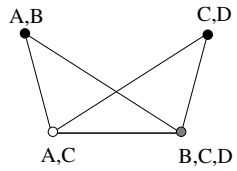


Figure 2.15: De vergaderingsgraaf met kleuring

```
{
   int i,j,k,l,m;

   i = 1;
   j = 2;
   k = i+j;
   i = 3;
   j = 4;
   l = i+j;
   m = k+l;
}
```

kan aan i en l hetzelfde register worden toegekend en aan k en m ook. Dat kan men vinden door de "interferentie-graaf" van het stukje code neer te schrijven, d.w.z. een graaf met als knopen de variabelen en een boog tussen twee variabelen als ze tegelijkertijd "in leven" zijn. We bekomen de graaf in Figuur 2.16.

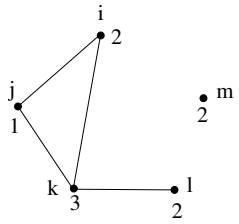


Figure 2.16: De interferentiegraaf met kleuring (in cijfers)

Een minimale kleuring geeft aan hoeveel registers je minimaal moet hebben om elke veranderlijke in een register te bewaren.

Een probleem dat ook een praktisch aspect heeft, maar vooral historisch belangrijk is, is het vier-kleurenprobleem: kan elke landkaart gekleurd worden met vier verschillende kleuren zodanig dat twee aangrenzende landen nooit dezelfde kleur hebben? Het probleem werd

voor het eerst gesteld door Francis Guthrie rond 1850. De conjectuur bleef onbewezen - ondanks verwoede pogingen van menig wiskundige - tot 1976, toen K. Appel en W. Haken bewezen dat er 1936 grafen bestaan waarvan er minstens één terug te vinden is in elke minimale niet 4-kleurbare graaf en vervolgens bewezen dat zulke grafen niet minimaal zijn. Beide stappen in het bewijs werden geleverd door een computerprogramma.

Laten we nu het verband met grafen zien: we zullen van een vlakke kaart een vlakke graaf maken en het kleuren van de kaart herleiden tot het kleuren van de graaf.

Een vlakke kaart is een vlakke graaf G waarvan de zijvlakken geïnterpreteerd worden als landen en de bogen als de grenzen tussen de landen. De **duale** graaf van G, G' wordt als volgt geconstrueerd: teken een knoop in elk land van G (ook een knoop voor het onbegrensde stuk van de kaart) en verbind twee knopen door een boog indien de twee knopen in aangrenzende landen liggen.

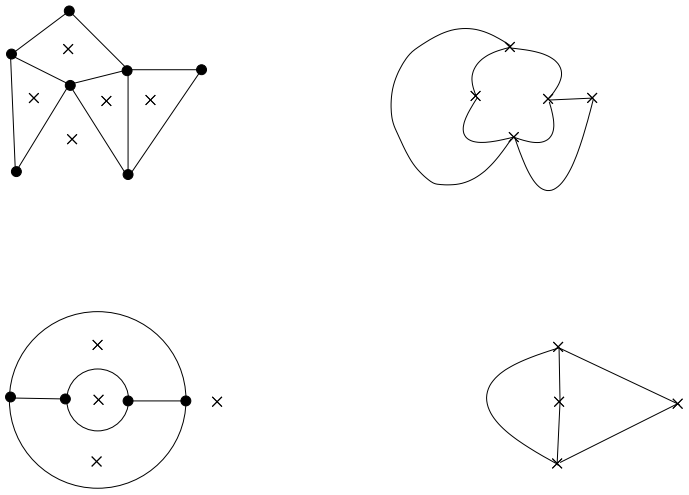


Figure 2.17: Twee vlakke kaarten en hun duale grafen

Merk op dat de duale graaf van een vlakke kaart vlak is (en enkelvoudig).

Stelling 2.2.31. *Voor elke vlakke, enkelvoudige graaf G met meer dan één boog geldt dat* $e \leq 3 * v - 6$

Proof. We bewijzen de stelling enkel voor het geval G ook samenhangend is: verwijder eerst uit G knopen met graad = 1 (en de bijbehorende boog), totdat er geen zulke knoop meer bestaat. Je hebt nu graaf G' die nog steeds vlak, enkelvoudig en samenhangend is, met f zijvlakken en e' bogen en v' knopen. Bovendien is $e - e' = v - v'$ het aantal verwijderde knopen of bogen: noteer dat aantal door t.

1) Indien $e' = 0$ dan moet $v' = 1$; vermits $e > 1$ is $t > 1$; verder kunnen we schrijven: $e = t$ en $3 * v - 6 = 3 * (v' + t) - 6 = 3 * t - 3$ en vermits $t \leq 3 * t - 3$ is ook $e \leq 3 * v - 6$.

2) e' kan niet gelijk zijn aan 1 of 2 (waarom niet?), dus

3) $e' > 2$; nu is elke zijvlak begrensd door minstens 3 bogen (vermits er geen lussen noch parallelle bogen zijn); stel met $\sum$ de som voor van het aantal bogen in alle zijvlakken, dan is $\sum \geq 3 * f$; vermits elke boog grenst aan exact 2 zijvlakken (waarom?), is ook $\sum = 2 * e'$, bijgevolg is $2 * e' \geq 3 * f$. Gebruik nu de formule van Euler voor G' om f te elimineren uit die ongelijkheid en je krijgt: $e' \leq 3 * v' - 6$ en dus ook $e' + t \leq 3 * (v' + t) - 6$ en dus $e \leq 3 * v - 6$. ■

Stelling 2.2.32. *In elke vlakke, enkelvoudige graaf bestaat er minstens één knoop, zeg v, zodanig dat $\delta(v) \leq 5$.*

Proof. Dit is duidelijk waar voor een graaf met 1 of 2 knopen. Stel dat de stelling niet voldaan is voor een bepaalde graaf met minstens 3 knopen, d.w.z. alle knopen hebben graad 6 of meer, dan is de som van de graden van alle knopen minstens $6 * v$, en bijgevolg $e \geq 3 * v$, hetgeen in tegenspraak is met $e \leq 3 * v - 6$. ■

Het is nu duidelijk dat het kleuren van de vlakke kaart equivalent is met het kleuren van de duale graaf. De volgende stelling laat zien dat het kleuren van een vlakke graaf altijd kan met vijf kleuren:

Stelling 2.2.33. *Elke enkelvoudige, vlakke graaf $G(V, E)$ heeft een 5-kleuring.*

Proof. We zullen inductie op het aantal knopen gebruiken: indien G juist één knoop heeft, is de stelling duidelijk waar. Veronderstel verder dat G samenhangend is; zoniet is de stelling waar voor elke component van G en bijgevolg voor G. Stel dat de stelling waar is voor grafen met n knopen; stel G heeft $n + 1$ knopen. Dan bestaat er wegens de vorige stelling minstens één knoop v met graad 5 of minder.
Indien de knoop graad 4 of minder heeft, komt v voor in de graaf G als in Figuur 2.18.

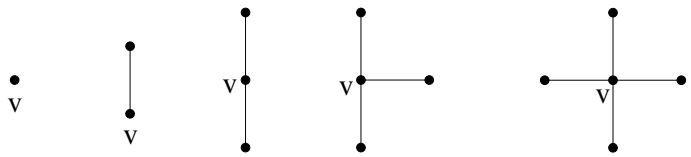


Figure 2.18: De 5 mogelijkheden waarbij $\delta(v) < 5$

Beschouw de graaf G' die je verkrijgt door uit G v weg te laten en alle bogen die in v toekomen. G' voldoet aan de voorwaarden van de stelling en heeft n knopen, bijgevolg heeft G' een 5-kleuring. Vermits v hoogstens 4 buren heeft, kan je aan v een kleur toekennen die verschillend is van de buren en toch één van de 5 kleuren is die voor de 5-kleuring van G' gebruikt werden.

Indien $\delta(v) = 5$, dan komt v voor in G zoals op de figuur 2.19: bij elke buur w_i van v is ook de kleur c_i $(i = 1, \ldots, 5)$ gezet, zoals bepaald door de 5-kleuring van G'.

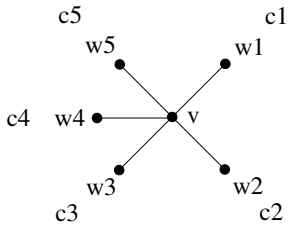


Figure 2.19: $\delta(v) = 5$

We moeten nu nog een kleur bepalen voor v. Indien de buren van v niet alle 5 kleuren opgebruiken, kunnen we v een overblijvende kleur geven.

Stel dus dat alle c_i verschillend zijn. Beschouw de verzameling $P_{1,3}$ van alle paden in G' die bij w_1 beginnen en waarvan de knopen afwisselend de kleuren c_1 en c_3 hebben. Zulke paden noemen we $c_1 - c_3$ paden. Er zijn nu twee mogelijkheden:

$P_{1,3}$ **bevat geen pad dat** w_3 **bevat:** verander elke knoop in $P_{1,3}$ met kleur c_1 in c_3 en elke knoop in $P_{1,3}$ met kleur c_3 in c_1. We hebben nog altijd een 5-kleuring van de graaf G' (waarom?) en nu hebben knopen w_3 en w_1 beide de kleur c_3 zodat v geen buur heeft met kleur c_1 dus de nieuwe 5-kleuring van G' kan uitgebreid worden tot een 5-kleuring van G door aan v de kleur c_1 toe te kennen.

$P_{1,3}$ **bevat een pad** $p_{1,3}$ **dat** w_3 **bevat:** construeer nu ook $P_{2,5}$: zoals je op de Figuur 2.20 kan zien, kan $P_{2,5}$ geen pad bevatten dat w_5 bevat; immers, als zulk een pad $p_{2,5}$ bestond dan konden de paden $p_{1,3}$ en $p_{2,5}$ beide uitgebreid worden met de knoop v en kringen vormen in G, en die kringen zouden mekaar ergens moeten snijden, wat niet mogelijk is vermits G vlak is. Nu kunnen we door omwisseling van de kleuren van de knopen in $P_{2,5}$ analoog met het eerste geval de stelling bewijzen.

■

Appel en Haken *bewezen* dat elke vlakke graaf een 4-kleuring heeft en bijgevolg *bewezen* ze dus de vier-kleurenconjectuur voor vlakke kaarten.

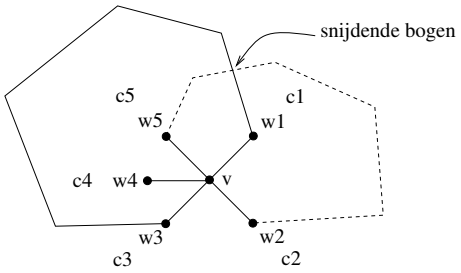


Figure 2.20: $p_{1,3}$ en $p_{2,5}$

Misschien is dit het juiste ogenblik om even stil te staan bij het concept van "een bewijs m.b.v. de computer": of iets als bewijs geldt of niet, is grotendeels een sociaal gebeuren; het is misschien wel juist te beweren dat de mathematische correctheid van een bewijs onafhankelijk is van of anderen akkoord zijn met die correctheid, maar een bewijs bestaat maar bij de gratie van een gemeenschap die het aanvaardt - zelfs als het bewijs later verkeerd blijkt te zijn. Het is dus aan de gemeenschap (enkel de wiskundige gemeenschap?) dat het toekomt om in het algemeen computergesteunde bewijzen te accepteren of niet: men kan zich een tak van de wetenschap voorstellen die enkel bewijzen geleverd door mensen op papier aanvaardt, net zoals er een tak van de wiskunde is die wel constructieve maar geen existentiële bewijzen aanvaardt. Het is dus zelfs niet mogelijk enkel gebaseerd op wetenschappelijke argumenten te beslissen of computergesteunde bewijzen geldig kunnen zijn of niet. Feit is wel dat naar gelang er meer bewijzen per computer worden geleverd, de druk groter is om ze te aanvaarden, vooral als wetenschappers geen andere manier kennen om het bewijs te leveren, en zeker als er nuttige of bruikbare gevolgen aan vastzitten.

Anderzijds is het dikwijls mogelijk om een computerbewijs in principe na te kijken "met de hand". Een "hand-matig" nakijken van het bewijs moet nu het computerprogramma nakijken, of liever: bewijzen dat het correct is. Maar een formeel bewijs van de correctheid van grote computerprogramma's is nog altijd niet doenbaar. Bovendien moet ook de correctheid van de machine waarop het programma wordt uitgevoerd bewezen worden ... misschien iets dat we aan een andere computer kunnen overlaten?

Om terug te komen op het kleuren van grafen: er zijn (niet-vlakke) grafen die geen 4-kleuring hebben; het eenvoudigste voorbeeld is K_n met $n > 4$: daarvoor zijn minimaal n kleuren nodig. Als een graaf K_n bevat, dan zijn er minstens n kleuren nodig om de graaf te kleuren. Maar er zijn ook grafen die geen K_4 (of groter) bevatten, en toch meer dan 3 kleuren nodig hebben.

Er zijn ook niet-vlakke grafen die wel een 4-kleuring hebben: in het bijzonder heeft $K_{3,3}$ zelfs een 2-kleuring.

Sterk samenhangende componenten: een algoritme van Tarjan

In het engels heet het *strongly connected components*, en we korten *sterk samenhangende component* af tot SCC. Robert Endre Tarjan [3] - de meester algoritmist - ontwierp in 1972 een bijzonder leuk algoritme om in een gerichte graaf (een *digraph*) de deelverzamelingen knopen te vinden die onderling bereikbaar zijn. Eerst een voorbeeld met toepassing, dan pas het algoritme. Gegeven een programma in pseudo-code, waaruit alles is weggelaten behalve de oproepen van de functies/methodes:

```
main()              venus()             aurochs()           tarpan()
{ venus();          { pluto();          { dodo();           { aurochs();
  aurochs();          venus();            tarpan();         }
}                   }                   }

                    pluto()             dodo()              mamoet()
                    { venus();          { tarpan();         { mamoet();
                    }                     mamoet();         }
                                        }
```

De *oproepgraaf* (call graph) is de gerichte graaf in Figuur 2.21 waarin de nodes de procedures zijn en een gerichte boog van A naar B betekent: A roept B op[4]. Oproepen van een procedure naar zichzelf hebben we weggelaten.

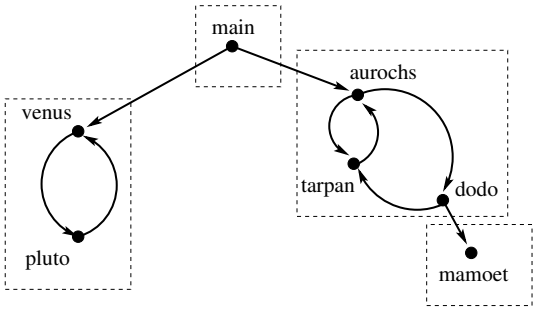


Figure 2.21: De gerichte oproepgraaf die bij het programma hoort

De SCCs daarvan laten toe om het programma op te delen in kleinere stukken waarvan de analyse onafhankelijk kan gebeuren, en/of op een goede manier sequentieel gepland. Met analyse bedoelen we hier zaken als complexiteit, programma-invarianten (voor correctheid), data-flow en liveness analyse (voor optimizatie) ... Buiten die context zijn er ook heel wat toepassingen van SCCs.

In Figuur 2.21 zijn de SCCs al aangeduid met een rechthoek rond elke SCC: elke knoop behoort tot exact één SCC. Probeer dat in te zien of te bewijzen.

[3] Turing award 1986

[4] Denk daarover even na: is dat echt waar ?

De versie in Algoritme 1 is aangepast van Wikipedia[5]. Elke knoop v heeft 4 velden: de booleans instack en visited die initiëel FALSE zijn, en de integers index en lowlink die op tijd geïnitialiseerd worden. Hun selectie wordt aangeduid bv. door $v.visited$.

Algorithm 1 Tarjan's algoritme om SCCs te berekenen

```
function TARJAN
    index := 1;
    for all v ∈ V ∧ (¬v.visited) do
        strongconnect(v);
    end for
end function

function STRONGCONNECT(v)
    v.visited := TRUE;
    v.index := v.lowlink := index++;
    push(v); v.instack := TRUE;

    for all (v, w) ∈ E do
        if ¬w.visited then;
            strongconnect(w);
            v.lowlink := min(v.lowlink, w.lowlink);
        else if w.instack then
            v.lowlink := min(v.lowlink, w.index)
        end if
    end for
    if v.lowlink == v.index then
        start a new SCC
        repeat
            w := pop(); w.instack := FALSE;
            add w to current SCC
        until w == v
        output current SCC
    end if
end function
```

Argumenteer zelf de correctheid en de eindigheid van dit algoritme.

Donald E. Knuth[6] zegt[7] dat Tarjan's algoritme zijn favoriete algoritme is, o.a. omdat het ook nog topologisch sorteert als een bijproduct. Zie je dat in het algortime ?

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Tarjan's_strongly_connected_components_algorithm, 28-7-2014
[6] Turing award in 1974
[7] http://www.informit.com/articles/article.aspx?p=2213858&WT.mc_id=Author_Knuth_20Questions

Bomen

Inleiding

Definitie 2.3.1. *Boom*
Een **boom** is een enkelvoudige graaf met de eigenschap dat er tussen elke twee verschillende knopen een uniek enkelvoudig pad bestaat.

Een willekeurige knoop van een boom kan aangewezen worden als de **wortel**.

Definitie 2.3.2. *Hoogte van een knoop*
De **hoogte van een knoop** v in een boom met wortel w, is het aantal bogen in het pad van w naar v.

Definitie 2.3.3. *Hoogte van een boom*
De **hoogte van een boom** is het maximum van de hoogtes van zijn knopen.

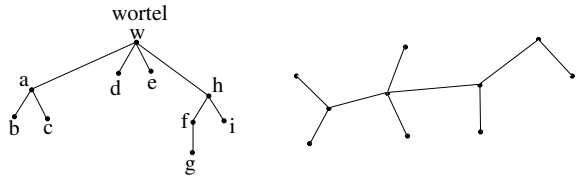


Figure 2.22: Voorbeelden van bomen

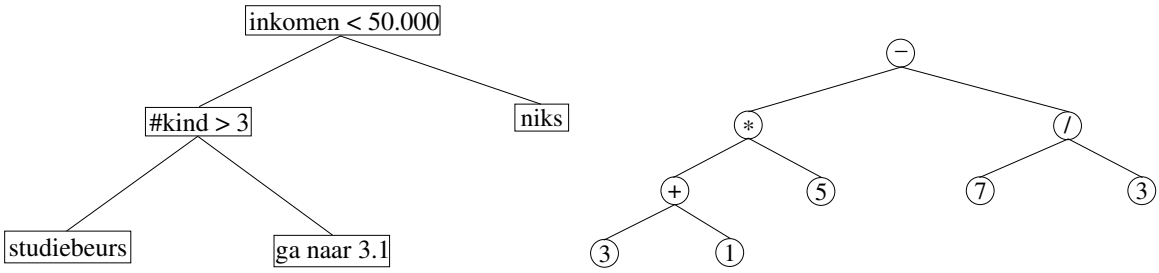
Figuur 2.22 laat een boom met een wortel w zien en een boom zonder wortel. De hoogtes van $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ en w zijn respectievelijk 1,2,2,1,1,2,3,1,2 en 0.

Figuur 2.23(a) toont een beslissingsboom: elke knoop bevat een test. De wortel is de knoop met de test "$inkomen < 50.000$"; afhankelijk van of de test positief of negatief uitvalt, ga je naar links of rechts waar je meer testen vindt of advies/antwoord op de vraag "heb ik recht op een studiebeurs?".

Figuur 2.23(b) toont de boomvoorstelling van de rekenkundige uitdrukking $(3+1)*5-7/3$.

Eigenschappen van bomen

De volgende stelling geeft een aantal equivalente karakterisaties van bomen:



(a) Beslissingsboom

(b) Voorstelling van $(3+1)*5-7/3$

Figure 2.23: Nuttige bomen

Stelling 2.3.4. *Voor een enkelvoudige graaf T met n knopen geldt dat* $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$ *met*

(a) T is een boom
(b) T is samenhangend en bevat geen kring
(c) T is samenhangend en heeft $(n-1)$ bogen
(d) T bevat geen kring en heeft $(n-1)$ bogen

Proof.

- $(a) \Rightarrow (b)$: als T een boom is bestaat er een pad tussen elke twee knopen, bijgevolg is T samenhangend; er kan geen kring zijn in T anders zouden sommige knopen door meer dan één enkelvoudig pad verbonden zijn

- $(b) \Rightarrow (c)$: we bewijzen door inductie op n dat T $(n-1)$ bogen heeft; voor $n=1$ heeft T nul bogen en de basis voor de inductie is waar; stel dat elke samenhangende graaf, zonder kringen en met n knopen $(n-1)$ bogen heeft; neem een graaf S met $(n+1)$ knopen, zonder kringen en samenhangend; kies een enkelvoudig pad P van maximale lengte in S (is dit mogelijk?); vermits er geen kringen zijn in S, bevat P een knoop v met $\delta(v)=1$ (indien $\delta(v)>1$ dan kon het pad P uitgebreid worden en dan was het niet maximaal); beschouw S_* de graaf die je verkrijgt door uit S knoop v (en zijn boog) weg te laten; S_* heeft n knopen, heeft geen kring en is samenhangend en door inductie bevat S_* $(n-1)$ bogen; bijgevolg bevat S n bogen

- $(c) \Rightarrow (d)$: stel dat T een kring bevat, dan kunnen we bogen (minstens één! en geen knopen!) verwijderen uit T totdat de resulterende graaf T_* kringloos is maar nog steeds samenhangend; nu is T_* zonder kringen, samenhangend en bevat n knopen en we kunnen bijgevolg het resultaat $(b) \Rightarrow (c)$ gebruiken: T_* bevat $(n-1)$ bogen; daaruit volgt dat T strikt meer dan $(n-1)$ bogen had, in tegenspraak met de onderstelling in (c); daaruit volgt dat T geen kring bevat

- $(d) \Rightarrow (a)$: we moeten bewijzen dat T samenhangend is en dat er een uniek pad bestaat tussen elke twee knopen; we kunnen een partitie maken van T in zijn componenten $\{T_i\}_{i=1}^{k}$; stel dat het aantal knopen van T_i gelijk is aan n_i; elk van de T_i is samenhangend en kringloos en heeft bijgevolg $(n_i - 1)$ bogen; dus: $(n-1) = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k}(n_i) - k = n - k$; daaruit volgt dat $k = 1$ en dus is T samenhangend; stel nu dat er twee paden van a naar b bestaan, dan kan je met die paden een kring vormen; maar T is kringloos, dus is elk pad tussen twee knopen uniek; bijgevolg is T een boom

■

De stelling is o.a. belangrijk om de volgende reden: rondlopen in een graaf die geen boom is, is gevaarlijk omdat je in een kring kan terecht komen en op die manier in een oneindige lus. Om dat te vermijden, zou je altijd moeten bijhouden waar je al geweest bent. De stelling zegt o.a. dat voor een boom je een pad altijd kan uitbreiden "voorwaarts" en vermits er geen kringen zijn, zal je op de duur niet meer verder kunnen. Bijgevolg, als je weet dat je met een boom te doen hebt, dan kan je (eigenlijk zou je moeten) van die eigenschap gebruik maken bij het programmeren van toepassingen met die datastructuur.

Definitie 2.3.5. *Terminologie i.v.m. bomen*
Laat T een boom zijn met wortel v_0; laten x, y en z knopen zijn in T en $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ een pad in T, dan

- v_{n-1} is de **ouder** van v_n; we spreken soms ook over vader of moeder;
- $v_0 \ \ldots \ v_{n-1}$ zijn **voorouders** van v_n en v_n is een **afstammeling** van $v_0 \ \ldots \ v_{n-1}$
- v_n is een **kind** van v_{n-1}; we spreken soms van zoon of dochter
- als x en y kinderen zijn van z, dan zijn x en y broers of zusters (in het Engels: siblings)
- als x geen enkel kind heeft, dan is x een **blad** of **eindknoop**
- als x geen blad is, is x een **inwendige knoop**
- de deelgraaf van T die een knoop x bevat en al de afstammelingen van x, is de **deelboom** van T met wortel x[8]

Voorbeelden van al die terminologie: voor Figuur 2.24 geldt dat

- c, d, e zijn bladeren of eindknopen
- a is de ouder van d

[8] In feite moeten we bewijzen dat die deelgraaf een boom is!

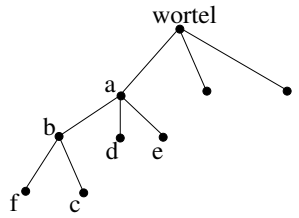


Figure 2.24: Voorbeeldboom

- b, c, f zijn de afstammelingen van a
- a,wortel zijn de voorouders van b
- b, d, e zijn siblings
- a, b zijn inwendige knopen
- de deelboom met wortel a bevat de knopen a, b, c, d, e, f

Soms vinden we de volgorde van de kinderen van een knoop in een boom belangrijk, in het bijzonder is dat zo bij een binaire boom.

Definitie 2.3.6. *Binaire boom*
Een **binaire boom** is een boom met een wortel en waarvan elke knoop 0, 1 of 2 kinderen heeft; wegens de manier waarop binaire bomen getekend en gebruikt worden, spreekt men van een linkerkind (verbonden door de linkertak met de ouder) en een rechterkind (...); de orde van de takken is dus belangrijk.

Je zag al een binaire boom in Figuur 2.23(a): het is daar belangrijk te weten of je links of rechts moet gaan bij een positief antwoord op de test in de knoop.

Definitie 2.3.7. *Volledige binaire boom*
Een **volledige binaire boom** is een binaire boom waarvan elke inwendige knoop juist twee kinderen heeft.

Een voorbeeld van een volledige binaire boom vinden we in de boomvoorstelling van de directe uitschakeling in een tornooi: figuur 2.25.

Stelling 2.3.8. *Indien T een volledige binaire boom is met i inwendige knopen, dan heeft T $(i+1)$ bladeren en $(2i+1)$ knopen.*

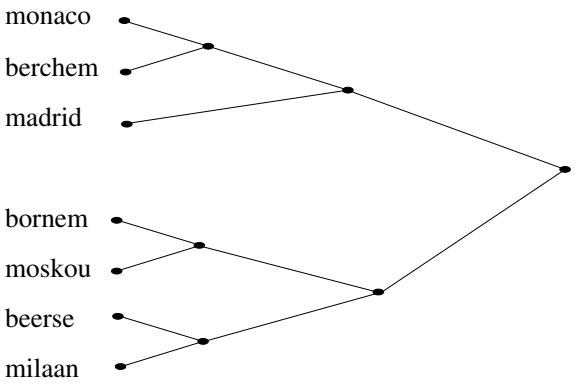


Figure 2.25: Tornooiboom

Proof. Elke inwendige knoop heeft 2 kinderen, er zijn dus $2i$ kinderen in T; er is ook één knoop die geen kind is, namelijk de wortel, bijgevolg zijn er $2i + 1$ knopen. Vermits een blad geen inwendige knoop is en vice versa, en vermits elke knoop een blad is of een inwendige knoop, hebben we ook dat het aantal bladeren gelijk is aan $2i+1-i = i+1$ ■

Bij een tornooi met directe uitschakeling met n deelnemers, kan je de vraag stellen: hoeveel matchen moeten er ingericht worden om de winnaar te kunnen aanduiden? De tornooiboom heeft n bladeren, bijgevolg heeft hij $n-1$ inwendige knopen en dat is ook het aantal matchen.

Stelling 2.3.9. *Indien T een binaire boom is met hoogte h en t bladeren, dan* $\log_2(t) \leq h$ *(of $t \leq 2^h$).*

Proof. We bewijzen de stelling door inductie op h en door de deelbomen van T te beschouwen: voor $h = 0$ hebben we één blad (de wortel), dus $t = 1 = 2^h = 2^0$ en de stelling is voldaan.

Stel $h > 0$; beschouw T_l en T_r de linker- en rechterdeelboom van de wortel van T. T_l of T_r kunnen leeg zijn, maar niet beide. Onderstel eerst dat T_r leeg is: dan is $h_l = h - 1$ en door inductie is $t_l \leq 2^{h_l}$; vermits $t_l = t$ verkrijgen we $t \leq 2^{h-1} \leq 2^h$.

Het geval dat T_l leeg is, is analoog.

Stel T_l noch T_r leeg, dan is $h_l \leq h - 1$ en door inductie is $t_l \leq 2^{h_l}$; analoog is $t_r \leq 2^{h_r}$ en dus $t = t_l + t_r \leq 2^{h_l} + 2^{h_r} \leq 2^{h-1} + 2^{h-1} = 2^h$. ■

Stelling 2.3.10. *Voor een binaire boom T met n knopen en hoogte h, is* $\log_2(n+1) \leq h+1$

Proof. Breid eerst de boom T uit tot een boom T' als volgt:

- hang aan elk blad een linker- en een rechtertak
- als een inwendige knoop een linkertak mist, voeg een linkertak toe
- als een inwendige knoop een rechtertak mist, voeg een rechtertak toe

T' heeft nu n inwendige knopen (alle originele knopen van T) en hoogte $(h+1)$; vermits T' volledig en binair is, kunnen we stelling 2.3.8 toepassen en besluiten dat T' $(n+1)$ bladeren heeft en door Stelling 2.3.9 besluiten dat $lg(n+1) \leq h+1$ ■

Figuur 2.26 toont een boom en zijn uitbreiding zoals gedefinieerd in Stelling 2.3.10: de toegevoegde knopen zijn getekend als een zwart rechthoekje. Merk ook op dat als de oorspronkelijk boom al volledig is, de uitbreiding toch verschilt!

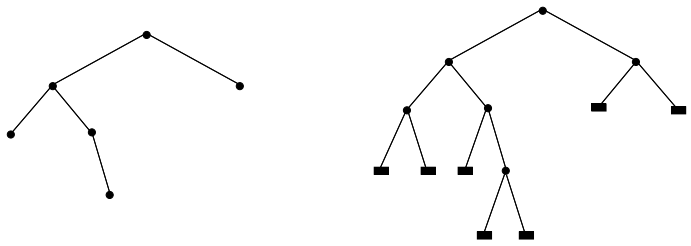


Figure 2.26: Een binaire boom en zijn uitbreiding tot een volledige binaire boom

Definitie 2.3.11. *Binaire zoekboom*
Een **binaire zoekboom** is een binaire boom waarin met elke knoop v een waarde $w(v)$ is geassocieerd (bv. een getal) zodanig dat als l behoort tot de linker– en r tot de rechterdeelboom van v, dat dan $w(l) < w(v) < w(r)$

Een binaire zoekboom wordt ook soms gesorteerde binaire boom genoemd.

Figuur 2.27 toont een binaire zoekboom waarin de waarde van de knopen woorden zijn; de orde is alfabetisch.

Het volgende algoritme zoekt of een bepaalde waarde aanwezig is in een binaire zoekboom: het algoritme is geschreven als een procedure die TRUE teruggeeft als de waarde gevonden is, anders FALSE.

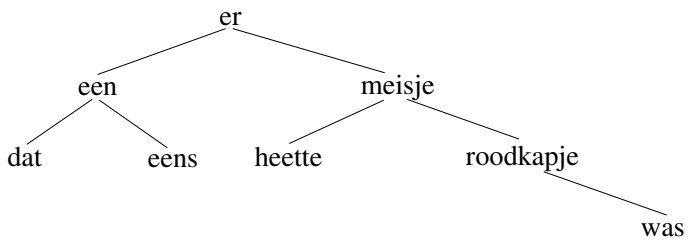


Figure 2.27: Een binaire zoekboom voor de woorden uit de zin "Er was eens een meisje dat Roodkapje heette"

```
boolean zoek(T boom, W waarde);
{
    P = wortel(T);
    doevoort = not(empty(T));
    zoek = FALSE;
    while (doevoort)
    {
        if (waarde(P) == W)
            {
                doevoort = FALSE;
                zoek = TRUE;
            }
        else
        if (waarde(P) < W)
            P = rechterkind(P);
        else P = linkerkind(P);
        if (empty(P))
            doevoort = FALSE
    }
}
```

We kunnen de complexiteit van dit algoritme uitdrukken in het aantal keer dat het lichaam van de lus wordt uitgevoerd. In het slechtste geval zit de gezochte waarde niet in de boom en zoeken we langs het langste pad, vertrekkend aan de wortel; dat pad heeft een lengte die gelijk is aan de hoogte h van de boom en de lus wordt dus $h + 1$ keer uitgevoerd. Uit Stelling 2.3.10 weten we dat $lg(n + 1) \leq h + 1$ en voor een vaste n kunnen we het slechtste geval dus niet beter maken dan $lg(n + 1)$. Door de boom zo goed mogelijk te "balanceren" verkrijgen we een slechtste geval dat gelijk is aan $\lceil lg(n+1) \rceil$. Een voorbeeld van twee binaire bomen met dezelfde knopen zie je in Figuur 2.28: de rechterboom is beter

gebalanceerd dan de linkerboom en is dus minder hoog.

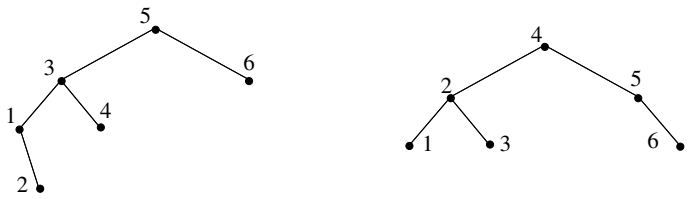
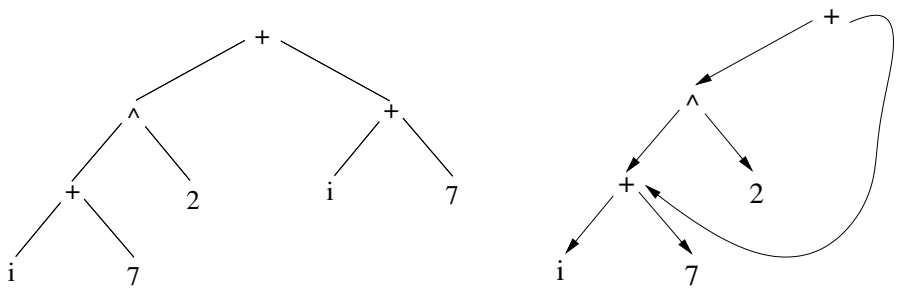


Figure 2.28: Twee bomen met dezelfde knopen en verschillende hoogte

Een meer compacte voorstelling voor bomen.

Dikwijls wordt een boom voorgesteld met *gerichte* bogen; die voorstelling benadrukt dat de functies *linkerkind* en *rechterkind* dikwijls expliciet aanwezig zijn (in een Java-voorstelling van een boom als velden in de klasse die de knoop voorstelt), doch niet de functie *ouder*.

Daarenboven kan het ook nuttig zijn een boom als een (gerichte) graaf voor te stellen die geen boom meer hoeft te zijn; neem bijvoorbeeld de boomvoorstelling van de rekenkundige uitdrukking $(i + 7)^2 + i + 7$ in Figuur 2.29(a); daarin zie je twee deelbomen die precies dezelfde zijn: de deelboom voor de deeluitdrukking $i+7$; de overeenkomstige gerichte graaf (die geen boom meer is) staat in figuur 2.29(b). De voorstelling m.b.v. een gerichte graaf is meer compact omdat het voorkomen van de deeluitdrukking $i + 7$ door twee deelbomen *gedeeld* wordt (in het Engels: shared).



(a) Boomvoorstelling (b) Graafvoorstelling

Figure 2.29: Twee voorstellingen van $(i + 7)^2 + i + 7$

Het delen van deelbomen is niet zonder gevaar: als de gedeelde deelboom gewijzigd wordt, veranderen beide voorkomens in de niet-gedeelde voorstelling van de boom! Indien zulk een effect niet gewenst wordt, mag men de efficiëntere voorstelling niet gebruiken.

Opspannende bomen

In deze sectie werken we uitsluitend met enkelvoudige grafen.

Definitie 2.3.12. *Opspannende boom*
Een boom T is een **opspannende boom** van een graaf G, indien T een subgraaf is van G die alle knopen van G bevat en T een boom is.

Een opspannende boom draagt dus alle knopen van een graaf en is in zekere zin een kleinste samenhangende deelgraaf die alle knopen draagt: als je een boog van een opspannende boom weglaat, dan zal je geen boom meer hebben (de samenhangendheid verdwijnt) en misschien zal er een knoop niet meer gedragen worden.

Stelling 2.3.13. *Een graaf G heeft een opspannende boom T als en slechts als G samenhangend is.*

Proof.
- Als G een opspannende boom T heeft, dan is G samenhangend, want dan is er een pad (over de bogen van de boom T) tussen elke twee knopen.
- Als G samenhangend is en kringloos, dan is G een boom en een opspannende boom van zichzelf.

  Indien G samenhangend is en een kring heeft, verwijder dan één boog uit die kring (maar geen knopen); de resulterende graaf is nog steeds samenhangend en heeft een kring minder dan G; door inductie op het aantal kringen is de stelling nu bewezen.

■

De stelling doet meer dan het bestaan van een opspannende boom bewijzen: het geeft een constructieve methode om een opspannende boom te vinden; ruwweg: verwijder een boog uit elke kring en wat je overhoudt is een opspannende boom. Een algoritme gebaseerd hierop is niet erg efficiënt, want het houdt in dat we kringen moeten zoeken en dat is in het algemeen tijdrovend.

Stelling 2.3.14. *Karakterisatie van een opspannende boom*
Een deelgraaf T van een samenhangende graaf G die kringvrij is en die een maximaal aantal bogen van G bevat, is een opspannende boom van G.

Proof. We nemen aan dat G minstens 2 knopen heeft.
Dat T een maximaal aantal bogen bevat, betekent hier dat je geen boog kan toevoegen zonder een kring te maken. We moeten bewijzen dat T samenhangend is (dan is T een

boom) en dat T alle knopen van G bevat (dan is T opspannend).
Stel dat de knoop $v \in G \backslash T$; vermits G samenhangend is bestaat er een boog b die in v toekomt; $b \notin T$ want anders zou $v \in T$; vermits T maximaal is, bevat de graaf $T \cup \{b\}$ een kring die natuurlijk b bevat. Maar dat betekent dat $v \in T$, hetgeen in tegenspraak is met de onderstelling. Bijgevolg bevat T alle knopen van G.
Stel T is niet samenhangend; beschouw de partitie in componenten $\{T_i\}_{i=1}^{n}$. Figuur 2.30 laat T_1 en T_2 zien. Vermits G zelf samenhangend is, bestaan er knopen $v_1 \in T_1$ en $v_2 \in T_2$ die verbonden zijn door een pad P (zonder kring) in G dat verder geen knopen met T_1 of T_2 gemeen heeft (op Figuur 2.30 in stippellijn). Onderstel dat P slechts één boog b heeft. $T \cup \{b\}$ bevat nu een kring en die kring loopt door v_1 en v_2; maar dat betekent dat er al een pad was van v_1 naar v_2 in T, wat de onderstelling dat T_1 en T_2 verschillende componenten waren tegenspreekt.
We moeten nog bewijzen dat in een partitie $\{V_k\}_{k=1}^{n}$ van knopen van een samenhangende graaf G, we altijd een V_i en V_j kunnen kiezen zodanig dat er een $v_i \in V_i$ en $v_j \in V_j$ en de boog $(v_i, v_j) \in G$: neem V_1 en een willekeurige andere V_k; daar G samenhangend is, bestaat er een pad van een knoop v_1 naar een knoop van V_k; we kunnen v_1 zodanig kiezen dat de eerste boog toekomt in een knoop $v \notin V_1$. Als $v \in V_k$, dan zijn we klaar; anders behoort v tot een V_j met $j \neq 1$ en we zijn klaar. ■

Een bijkomende karakterisatie van opspannende bomen:

Eigenschap 2.3.15. *Indien T een deelgraaf is van een samenhangende, enkelvoudige graaf G met n knopen, en T is kringloos en heeft $n-1$ bogen, dan is T een opspannende boom van G.*

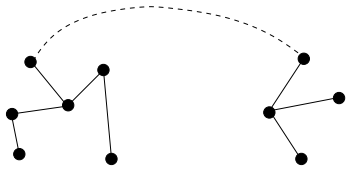


Figure 2.30: Twee componenten van T verbonden door een pad van G

De Stelling 2.3.14 geeft aanleiding tot een algemeen (niet deterministisch) algoritme voor het construeren van een opspannende boom voor een graaf G: vertrek van de lege graaf T; voeg aan T herhaaldelijk een boog uit G toe die geen kring introduceert in T en totdat dat niet meer mogelijk is; T is een opspannende boom.

Merk op dat: (1) je hoeft elke boog maar één keer te beschouwen (waarom?) (2) de volgorde waarin je bogen beschouwt, is onbelangrijk (3) uiteindelijk is T een boom, maar zolang je nog bezig bent met bogen toevoegen, hoeft T niet samenhangend te zijn (4) je al kan stoppen als je $n-1$ bogen hebt toegevoegd als G n knopen heeft.

Er zijn twee volgordes van bogen kiezen die hun oorsprong vinden in algemene keuzestrategien (later ook meer daarover in de sectie over het doorlopen van bomen): *diepte-eerst* en *breedte-eerst*. We beschrijven de methodes informeel:

Diepte-eerst constructie van opspannende boom: kies een knoop en construeer een zo lang mogelijk pad zonder kring vertrekkend van die knoop; heel dat pad zal tot de opspannende boom behoren; keer één stap terug in het pad en van daaruit construeer je weer een zo lang mogelijk pad zonder kring - als dat niet ging, ga je nog maar een stap terug; blijf dit doen tot je teruggekeerd bent in de beginknoop en geen boog meer kan toevoegen; Figuur 2.31 illustreert de methode, vertrekkend vanaf de topknoop: een boog behoort tot de opspannende boom indien hij getekend is in stippellijn.

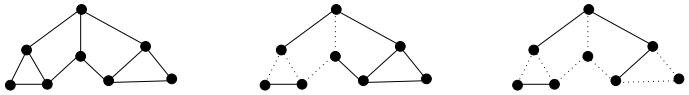


Figure 2.31: 3 fazen in de diepte-eerst constructie van een opspannende boom

Breedte-eerst constructie van opspannende boom: kies een knoop en neem alle bogen die daaruit vertrekken en zodanig dat er geen kring gevormd wordt; al die bogen zullen behoren tot de opspannende boom; in alle nieuwe knopen waar je met die net toegevoegde bogen bent toegekomen, neem je weer alle bogen die samengenomen met wat je al had, geen kring vormen; blijf dat doen tot je geen bogen meer kan toevoegen; Figuur 2.32 illustreert de methode, vertrekkend vanaf de topknoop.

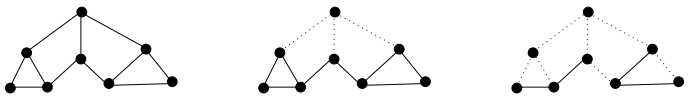


Figure 2.32: 3 fazen in de breedte-eerst constructie van een opspannende boom

De correctheid van beide methodes steunt op het feit dat alle bogen ooit eens beschouwd worden als kandidaat voor toevoeging en stelling 2.3.14. De orde is in beide methodes zo dat de tussenliggende grafen altijd een boom zijn, want samenhangend.

Figuur 2.33 laat voor K_4 zien dat de diepte-eerst opspannende bomen essentieel verschillen van de breedte-eerst opspannende bomen.

Misschien heb je nu de indruk dat alle opspannende bomen kunnen verkregen worden door ofwel de diepte-eerst ofwel de breedte-eerst methode. Figuur 2.34 laat een graaf zien en een opspannende boom, die met geen van beide methodes kan verkregen worden.

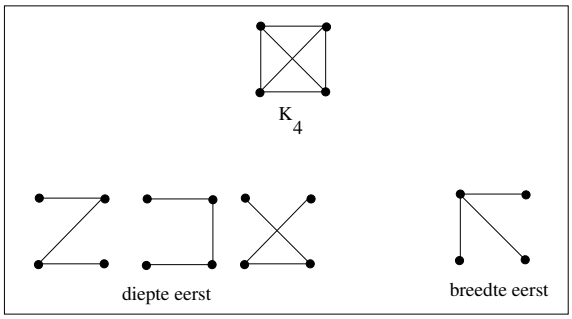


Figure 2.33: Opspannende bomen voor K_4

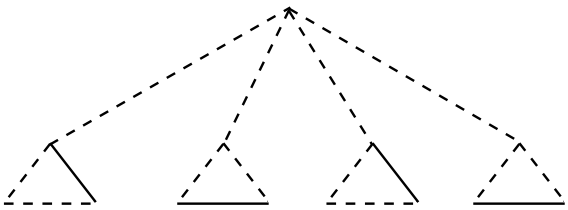


Figure 2.34: Graaf met een hybride opspannende boom

Minimale opspannende bomen

Beschouwen we het volgende probleem: gegeven een aantal steden en stel dat de kost van het bouwen van een weg tussen de steden gegeven is; bepaal welke wegen moeten aangelegd worden om te voldoen aan (1) de totale kost is minimaal (2) elke stad is bereikbaar vanuit elke andere stad. Het wegennet dat daaraan voldoet moet een boom zijn, want er kunnen geen kringen zijn (anders ware het net niet van minimale kost) en er is een pad tussen elke twee steden. Dit soort bomen wordt nu gedefinieerd:

Definitie 2.3.16. *Minimale opspannende boom*
Voor een gewogen graaf G is T een **minimale opspannende boom** indien T een opspannende boom van G is met het kleinste gewicht.

Figuur 2.35 laat een graaf G zien, een opspannende boom B en een minimale opspannende boom T.

Efficiënte algoritmen die een minimale opspannende boom construeren zijn gebaseerd op de volgende stelling:

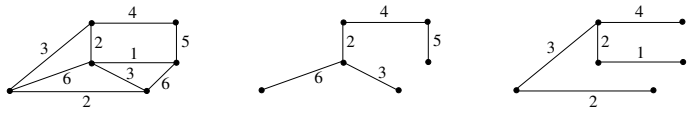


Figure 2.35: Een graaf met opspannende bomen

Stelling 2.3.17. *Een boog die tot een minimale opspannende boom behoort*
Gegeven een samenhangende graaf (V, E), $U \subset V$ en e een boog in E met minimale lengte van alle bogen met begin in U en einde in $V \backslash U$; er bestaat een minimale opspannende boom T voor (V, E) zodanig dat $e \in T$.

Proof. Neem een minimale opspannende boom T_0 voor de graaf. Indien e tot T_0 behoort is de stelling bewezen, indien niet, voeg dan e toe aan T_0. We verkrijgen T_1 die een kring bevat (Stelling 2.3.14) en die kring bevat e alsook nog een boog $e' = (u, v)$ waarbij $u \in U$ en $v \in V \backslash U$. Door uit T_1 e' te verwijderen verkrijgen we weer een opspannende boom T (waarom is T een boom?) en bovendien is de $w(T) \leq w(T_0)$ vermits $w(e) \leq w(e')$. Bijgevolg is T een minimale opspannende boom die e bevat. ■

Algoritme 2.3.18. *Prim*
Gegeven een samenhangende gewogen graaf $G(V, E)$ met een verzameling knopen $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. De volgende procedure is een algoritme dat een minimale opspannende boom T construeert.

1. ***Initialisatie**: $T := (\{v_1\}, \emptyset)$*
2. ***Stop?**: Indien T $(n-1)$ bogen heeft, stop.*
3. ***Voeg boog toe**: Van alle bogen die een knoop van T verbinden met een knoop die niet tot T behoort, kies een boog b met het kleinste gewicht en voeg die toe aan T: er bestaat minstens één zulke boog omdat G samenhangend is en T nog niet alle knopen bevat; T zal na toevoeging van b nog steeds kringloos zijn. Ga naar **Stop?**.*

Proof. Vermits bij het einde van het algoritme T een boom is met n knopen en $(n-1)$ bogen en T kringloos is, is T een opspannende boom voor G. We moeten dus terminatie van het algoritme en minimaliteit van T bewijzen.

Een illustratie van de redenering hieronder, vind je in figuur 2.36.

Eindigheid is eenvoudig want **Voeg boog toe** wordt slechts $(n-1)$ keer uitgevoerd, waarna het algoritme stopt. Misschien wil je je er nog van overtuigen dat **Voeg boog toe** altijd kan, t.t.z. dat er altijd een boog bestaat die geen kringen introduceert in T.

Na **Initialisatie** bestaat T uit één knoop en dus is T een deel van een minimale opspannende boom (mob). We bewijzen nu dat die eigenschap behouden blijft door **Voeg boog toe**: noteer met W de knopen van T en onderstel dat $T \subset T'$ met T' een mob. Noteer met $B = \{(x, y) \mid x \in W,\ y \in V \backslash W,\ (x, y) \in E\}$. Neem de kortste boog (i, j) in B die geen kring veroorzaakt indien toegevoegd aan T. Indien $(i, j) \in T'$ dan is duidelijk dat $T \cup \{(i, j)\} \subseteq T'$ =mob. Indien $(i, j) \notin T'$ dan zal $T' \cup \{(i, j)\}$ een kring bevatten, waarvan (i, j) deel uitmaakt. In die kring zit nog een boog $(x, y) \in B$ en door die uit $T' \cup \{(i, j)\}$ te verwijderen krijgen we een nieuwe opspannende boom T'' (want bevat alle knopen en is samenhangend). De vraag is dan: is T'' ook minimaal? Vermits $w(i, j) \leq w(x, y)$ (zo was (i, j) immers gekozen), is $w(T'') \leq w(T')$ en bijgevolg is T'' een mob. Bijgevolg is $T \cup \{(i, j)\}$ deel van een mob.

Bijgevolg is de opspannende boom door Prim geconstrueerd, een minimale opspannende boom. ■

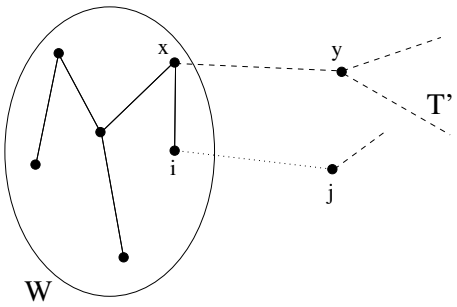


Figure 2.36: Illustratie bij Algoritme 2.3.18

Het algoritme van Prim is een klassiek voorbeeld van een "gulzig" (Engels: greedy) algoritme: op elk ogenblik dat een keuze gemaakt moet worden, wordt een keuze gemaakt die er op dat moment het beste uit ziet, t.t.z. zonder te kijken naar de vorige keuzes (niet helemaal correct) of naar de toekomstige keuzes. Niet elk gulzig algoritme bereikt dan ook een optimaal resultaat; bv. een kortste-pad algoritme dat op elk ogenblik een bestaand pad zou uitbreiden met de kortste boog, geeft niet altijd een kortste pad en een gulzig schaakspeler wint ook niet altijd. Doch in het geval van Prim werkt het perfect.

Het algoritme van Prim wordt geïllustreerd in Figuur 2.37: de initiële knoop is A; de volgorde waarin de bogen worden toegevoegd, staat bij de bogen als a,b,c ... h.

Het algoritme van Prim bouwt een mob incrementeel, t.t.z. op elk ogenblik in het algoritme is T een mob van een deelgraaf van G. Er is een variante op het algoritme van Prim dat deze eigenschap niet heeft:

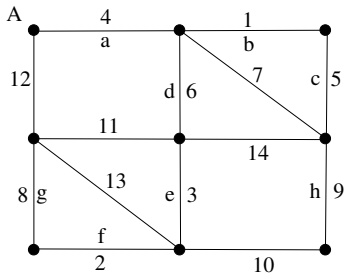


Figure 2.37: De uitvoering van Algoritme 2.3.18

Algoritme 2.3.19. *Kruskal*
Gegeven een samenhangende gewogen graaf G(V,E) met een verzameling knopen $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. *De volgende procedure is een algoritme dat een minimale opspannende boom* T *construeert.*

1. ***Initialisatie**: $T := \emptyset$*
2. ***Stop?**: Indien T $(n-1)$ bogen heeft, stop.*
3. ***Voeg boog toe**: Voeg aan T toe een boog b met minimaal gewicht en die bovendien geen kring veroorzaakt indien toegevoegd aan T. Ga naar* **Stop?**.

Proof. Eindigheid van Kruskal is analoog aan die van Prim. Dat T op het einde een opspannende boom is, is ook analoog na te gaan. We tonen nog de minimaliteit van T aan. Onderstel dat T geen mob is. Noem de bogen van T $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ in orde van toevoeging door het algoritme. Laat S een mob (van G) zijn zodanig dat $\{b_1, b_2, \ldots, b_i\} \subseteq S$ en met maximale i (zulk een S bestaat en door Stelling 2.3.17 is $i \geq 1$!) Er zijn twee mogelijkheden:

- $i = n-1$: nu is $T = S$ en T is een mob.
- $i < n-1$: dus $b_{i+1} \notin S$; laat H de graaf zijn gevormd door de bogen $\{b_1, b_2, \ldots, b_i\}$ en hun knopen. Beschouw de graaf $S \cup \{b_{i+1}\} = S'$. S' heeft een kring (want een boog te veel) waarin minstens één boog b zit die niet tot T behoort (omdat T zelf kringvrij is). Dus $b \in S$. Nu bevat $H \cup \{b\}$ geen kring, want $H \cup \{b\} \subseteq S$ en vermits Kruskal in de $(i+1)$-de **Voeg boog toe** de boog b_{i+1} koos (om toe te voegen aan H), moet $w(b_{i+1}) \leq w(b)$. Bijgevolg is $S' \backslash \{b\} = S''$ een mob. Maar nu is S'' een mob die $\{b_1, b_2, \ldots, b_{i+1}\}$ omvat wat in tegenspraak is met de maximaliteit van S. Dus het is niet mogelijk dat $i < n-1$.

■

Merk op dat T tijdens Kruskal's algoritme geen boom hoeft te zijn: de uitvoering van Kruskal wordt in Figuure 2.38 geïllustreerd op dezelfde graaf als in Figuur 2.37.

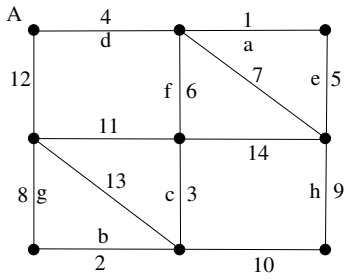


Figure 2.38: De uitvoering van Algoritme 2.3.19

Netwerkmodellen

Een netwerk van verbindingen, elk met hun eigen capaciteit, kan gemodelleerd worden als een gerichte, gewogen graaf. Als voorbeeld kan je denken aan een wegennetwerk, een elektrisch netwerk of aan een stel oliepijplijnen. Het belangrijkste probleem i.v.m. dit soort netwerken is het optimaliseren van een stroming, zonder capaciteitsoverschreiding natuurlijk. We zullen dit optimalisatieprobleem oplossen in de context van grafentheorie. Ook andere problemen die op het eerste zicht niets met optimalisatie van stroming te maken hebben, kunnen gemodelleerd worden als een netwerkprobleem: personeelstoewijzing, toekenning van resources en ook het partner-keuzeprobleem ("The marriage problem").

Transportnetwerk

Definitie 2.4.1. *Transportnetwerk*
Een **transportnetwerk** (of simpelweg een **netwerk**) is een enkelvoudige, gewogen, gerichte graaf G die voldoet aan

1. er is juist één knoop in G zonder binnenkomende bogen; deze knoop wordt de **bron** genoemd
2. er is juist één knoop in G zonder buitengaande bogen; deze knoop wordt de **put** genoemd (Engels: sink)
3. het gewicht $C_{i,j}$ van de (gerichte) boog (i, j) is postief en wordt de **capaciteit** van de boog genoemd
4. als de richting van de bogen vergeten wordt, dan is G samenhangend

Figuur 2.39 toont een netwerk: de bron is de knoop a en de put is de knoop z; de capaciteit van elke boog is bij de boog geschreven. Het netwerk modelleert bijvoorbeeld een stel eenrichtingsstraten in een stad tussen het station (knoop a) en de markt (knoop z); de capaciteit is het aantal voertuigen dat per minuut kan passeren door elke straat.

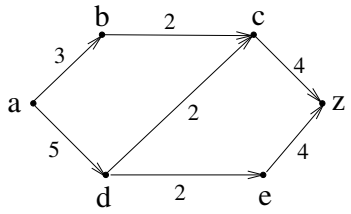


Figure 2.39: Een transportnetwerk

De beperking dat een netwerk enkelvoudig moet zijn, is niet erg groot: zowel lussen als parallelle bogen kan je wegwerken door knopen bij te zetten op elke lus of parallelle boog; er verandert niets essentieels aan het netwerk wat betreft de problemen die we bestuderen in deze sectie.

Definitie 2.4.2. *Stroming in een netwerk*
Voor een netwerk $G(V, E)$ met capaciteit $C_{i,j}$, $i, j \in V$[9]is F een **stroming** als F een afbeelding is van E naar $\mathbb{R}^+$ zodanig dat

1. $F(i, j) \leq C_{i,j}$
2. voor elke knoop j die niet de bron of de put is geldt:

$$\sum_{i \in V} F(i, j) = \sum_{i \in V} F(j, i)$$

We noemen $F(i, j)$ de stroming in boog (i, j). Voor een knoop j noemen we $\sum_{i \in V} F(i, j)$ de stroming **naar** of **in** j en $\sum_{i \in V} F(j, i)$ de stroming **uit** j.

Formule 2 in Definitie 2.4.2 drukt het behoud van stroming uit: alles wat binnenkomt in een knoop, gaat er weer buiten en alles wat buitengaat, is binnengekomen; dat verhindert dat er een ophoping of productie gebeurt in de knopen.

Figuur 2.40 toont een stroming voor het netwerk van figuur 2.39; de stroming is gedefinieerd door:

$$\begin{aligned} F(a, b) &= 2 \\ F(b, c) &= 2 \\ F(c, z) &= 3 \\ F(a, d) &= 3 \\ F(d, c) &= 1 \\ F(d, e) &= 2 \\ F(e, z) &= 2 \end{aligned}$$

en telkens naast de capaciteit van de overeenkomstige boog gezet.

Je kan nagaan dat Formule 2 in Definitie 2.4.2 voldaan is voor elke knoop behalve de bron en de put.

Je kan ook nagaan dat de stroming uit de bron gelijk is aan de stroming in de put:

$$F(a, b) + F(a, d) = F(c, z) + F(e, z).$$

Deze gelijkheid wordt veralgemeend in:

[9]als er geen boog (i, j) bestaat, dan nemen we aan dat $C_{i,j} = 0$

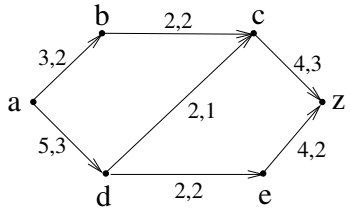


Figure 2.40: Een stroming in een transportnetwerk

Stelling 2.4.3. *Bron-uit = put-in*
Van een stroming F in een netwerk $G(V, E)$ is de stroming uit de bron gelijk aan de stroming in de put, of meer formeel:

$$\sum_{i \in V} F(a, i) = \sum_{i \in V} F(i, z).$$

Proof. Het is duidelijk dat

$$\textstyle\sum_{j \in V}(\sum_{i \in V} F(i,j)) = \sum_{i \in V}(\sum_{j \in V} F(i,j)) = \sum_{j \in V}(\sum_{i \in V} F(j,i))$$

De omwisseling van de $\sum$'s mag omdat we met eindige grafen te doen hebben. De tweede gelijkheid geldt wegens hernoeming van i en j.

Daaruit volgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \textstyle\sum_{j \in V} \left(\sum_{i \in V} F(i,j) - \sum_{i \in V} F(j,i)\right) \\ &= \left(\textstyle\sum_{i \in V} F(i,z) - \sum_{i \in V} F(z,i)\right) + \left(\sum_{i \in V} F(i,a) - \sum_{i \in V} F(a,i)\right) \\ &\qquad + \textstyle\sum_{j \in V \setminus \{a,z\}} \left(\sum_{i \in V} F(i,j) - \sum_{i \in V} F(j,i)\right) \\ &= \textstyle\sum_{i \in V} F(i,z) - \sum_{i \in V} F(a,i) \end{aligned}$$

vermits $F(z, i) = 0 = F(i, a)$ voor $\forall i \in V$ (door Definitie 2.4.2)
en $\sum_{i \in V} F(i,j) = \sum_{i \in V} F(j,i)$ voor $\forall j \in (V \setminus \{a, z\})$ (door Formule 2 in Definitie 2.4.2) ■

Op basis van Stelling 2.4.3, kunnen we nu definiëren:

Definitie 2.4.4. *Grootte van een stroming*
De **grootte van een stroming** F in een netwerk $G(V, E)$ met bron a en put z is gedefinieerd door $\sum_{i \in V} F(a, i)$ of $\sum_{i \in V} F(i, z)$

De grootte van de stroming in Figuur 2.40 is 5.

Het netwerkprobleem kan nu als volgt geformuleerd worden: voor een gegeven netwerk G, vind de maximale stroming, of m.a.w. vind de stroming met de maximale grootte.

Tot slot van deze sectie, nog iets over netwerken met meer dan één bron of put: het netwerk in Figuur 2.41 stelt de waterbevoorrading van de steden A en B voor, vanuit de bronnen X, Y en Z en over verdeelstations b, c en d.

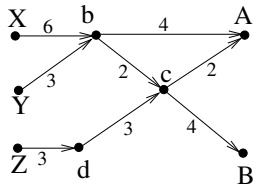


Figure 2.41: Een transportnetwerk met meerdere bronnen en putten

Door een superbron a en een superput z toe te voegen aan dit netwerk, verkrijgen we terug een gewoon netwerk: vanuit a voeg je ook een gerichte boog toe naar elke bron van het originele netwerk, en vanuit elke oude put een gerichte boog naar z; de toegevoegde bogen krijgen alle de capaciteit ∞.

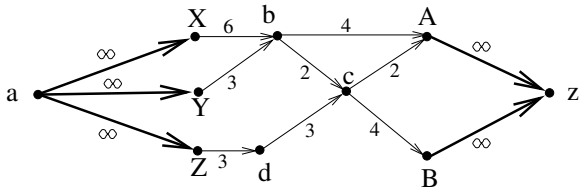


Figure 2.42: Een transportnetwerk met een superbron en superput

In dit nieuwe netwerk geeft een maximale stroming ook een maximale stroming voor het oorspronkelijke netwerk.

Denk niet dat een maximale stroming uniek is: Figuur 2.43 toont een netwerk met oneindig veel maximale stromen, nl. voor alle i,j die voldoen aan $i + j = 5$ en $0 \leq i, j \leq 3$.

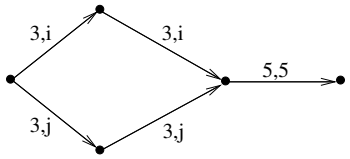


Figure 2.43: Een netwerk met oneindig veel maximale stromen

Maximale stroming

We zullen een algoritme zien om een maximale stroming te berekenen; het basisidee is eenvoudig: vertrek van een stroming en verbeter die totdat dat niet meer mogelijk is; je hebt nu een maximale stroming. Een intuïtieve beschrijving van hoe je een stroming verbetert, gaat als volgt:

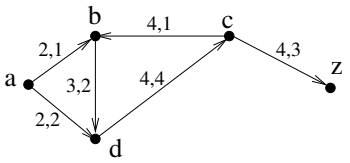
- neem een pad P van de bron a naar de put z
- zoek het minimum Δ van $C_b - F(b)$ over alle bogen $b \in P$
- bepaal de nieuwe stroming langs het pad P door bij elke $F(b)$ Δ bij te tellen

Een paar opmerkingen bij dit voorschrift:

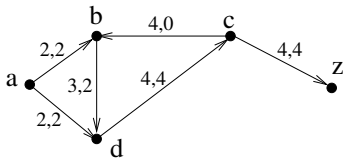
- de operatie verhoogt de stroming enkel als het pad P (toevallig) zo is dat $\Delta > 0$
- de beschrijving geldt alleen voor een pad waarvan elke boog de goede richting heeft, maar
- we mogen niet alleen paden van a naar z zoeken langs de gerichte bogen: bekijk Figuur 2.44(a); daarin zie je dat geen enkel pad van a naar z met enkel goede bogen "verbeterd" kan worden met bovenstaande methode; maar de stroming langs het pad (a, b, c, z) kan wel verbeterd worden door de stroming getoond in Figuur 2.44(b);

  we moeten dus ook paden beschouwen waarvan bogen "omgekeerd" lopen en we moeten voor die verkeerde bogen niet iets optellen bij de stroming, maar er iets aftrekken: als een "omgekeerde" boog een stroming draagt kan het immers zijn dat er alleen maar iets rondstroomt zonder ooit de put te bereiken; we formaliseren dat als volgt:

Definitie 2.4.5. *Goede en slechte boog*
In een gerichte graaf $G(V, E)$ met pad $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ noemen we de boog (v_i, v_{i+1}) **goed** (gericht) indien $(v_i, v_{i+1}) \in E$ en anders **slecht** (gericht)



(a) Een niet maximale stroming



(b) Een verbeterde stroming langs een pad met omgekeerde boog

Figure 2.44: Verbetering van stroming

In een pad P zullen we de goede bogen noteren door P_+ en de slechte door P_-.

Stelling 2.4.6. *Verbeteren van een stroming*
Laat P een pad zijn van a naar z in een netwerk $G(V, E)$, waarbij

1. $\forall(i,j) \in P_+$: $F(i,j) < C_{i,j}$
2. $\forall(i,j) \in P_-$: $0 < F(i,j)$

Laat bovendien $\Delta = min(min_{(i,j)\in P_+}\{C_{i,j} - F(i,j)\}, min_{(i,j)\in P_-}\{F(i,j)\})$; definieer de functie F' als volgt:

$$\begin{aligned} F'(i,j) &= F(i,j) \quad \forall(i,j) \notin P \\ &= F(i,j) + \Delta \quad \forall(i,j) \in P_+ \\ &= F(i,j) - \Delta \quad \forall(i,j) \in P_- \end{aligned}$$

Dan is F' een stroming waarvan de grootte Δ meer is dan die van F.

Proof. Om na te gaan dat F' een stroming is, moeten we 1 en 2 van Definitie 2.4.2 bewijzen: beide zijn niet moeilijk.

Dat de stroming met Δ verbeterd is, volgt uit het feit dat de stroming van de boog $(a, \_) \in P$ (en die is goed - waarom?) met Δ is verhoogd en de stroming door de andere bogen die vertrekken in a niet is veranderd. ■

Eén van de gevolgen van de stelling over de verbetering van de stroming, is dat bij een maximale stroming F elk pad van a naar z, minstens één goede boog heeft met $C_{i,j} = F(i,j)$ of één slechte boog met $F(i,j) = 0$; zoniet kon de stroming verbeterd worden langs

dat pad.

We zouden ook graag de volgende eigenschappen hebben:

- als een stroming geen enkel pad van a naar z heeft dat kan verbeterd worden (volgens de methode van Stelling 2.4.6) dan is de stroming maximaal - dit lijkt voor de hand liggend, maar is niet triviaal te bewijzen!
- een algoritme om de flow te maximaliseren bestaat erin om een pad te zoeken dat aan de voorwaarden van stelling 2.4.6 voldoet, de stroming langs het pad te verbeteren en dat te herhalen tot er geen zulk pad meer is - indien voorgaand puntje waar is en de procedure eindigt, dan levert dit inderdaad een maximale stroming op.

We zullen beide eigenschappen formeel aantonen. We beschrijven eerst een klassiek algoritme dat een voorbeeld is van een "labeling procedure". Je hebt vroeger al een algoritme gezien dat labels gebruikte nl. het kortste-pad algoritme van Edgser Dijkstra: knopen kregen daarbij een label met informatie. In het volgende algoritme gebruiken we een dubbel label: informeel is de eerste component van het label de knoop waarvan je kwam (en daarom zal de startknoop een lege eerste component in zijn label hebben) en de tweede component van het label zal de Δ uit Stelling 2.4.6 zijn van het pad dat tot dan is gevonden.

Algoritme 2.4.7. *Constructie van een maximale stroming.*
Laat $G(V, E)$ een netwerk zijn met bron a en put z en capaciteit C, waarbij alle capaciteiten positief en geheel zijn. Onderstel een orde op de knopen met $a = v_0, v_1, \ldots, v_n = z$.

Met $\mathcal{B}$ zullen we de verzameling beschouwde knopen aanduiden; met $\mathcal{L}$ de verzameling van knopen met een label; de operaties op $\mathcal{B}$ zullen we expliciet maken; die op $\mathcal{L}$ zijn impliciet.

1. ***Initialisatie**: Definieer $\forall (i, j) \in E : F(i, j) = 0$*
2. ***Label de bron**: Geef a het label $(\_, \infty)$; zet $\mathcal{B} = \emptyset$*
3. ***Aangekomen?**: Indien z een label heeft, verbeter de stroming en ga terug naar **Label de bron**.*

   Verbeter de stroming gaat als volgt: er is juist één pad P van a naar z dat achteruit kan geconstrueerd worden te vertrekken van z, dan de eerste component van het label van z en zo verder tot in a. De tweede component van het label van z is een grootheid Δ die nu wordt bijgeteld bij F voor goede bogen in P en afgetrokken van F voor slechte bogen van P. Daarna worden alle labels in heel het netwerk gewist.
4. ***Kies volgende knoop**: Indien $\mathcal{L} \setminus \mathcal{B} = \emptyset$, **stop**: de stroming F is maximaal.*

   Noem v de nog niet beschouwde knoop v_i met een label en met kleinste index i.

5. ***Label buren**: Stel dat het label van v gelijk is aan (α, Δ). Behandel nu elke boog van de vorm (v, w) of (w, v) in de volgorde (v, v_0), (v_0, v), (v, v_1), (v_1, v), ... waarbij w nog geen label heeft.*

   - *voor elke boog (v, w) (dus een boog die wegloopt uit v): indien $F(v, w) < C_{v,w}$ geef w het label $(v, min\{\Delta, C_{v,w} - F(v, w)\})$ anders geef je w geen label*
   - *voor elke boog (w, v) (dus een boog die toekomt in v): indien $F(w, v) > 0$ geef w het label $(v, min\{\Delta, F(w, v)\})$ anders geef je w geen label*

   *Ga naar **Aangekomen?***

Proof.

- **Eindigheid**: Punt 3 in het algoritme is cruciaal: zolang de uitgang **stop** niet genomen wordt, wordt punt 3 herhaaldelijk uitgevoerd. Vanuit punt 3, gaat de uitvoering ofwel naar punt 2 of punt 4. De overgang van punt 3 naar punt 2 kan maar een eindig aantal keer gebeuren, want die overgang impliceert dat de stroming verbeterd wordt met $\Delta > 0$; Δ is geheel omdat alle capaciteiten geheel zijn en vermits de maximale stroming begrensd is (door de som van de capaciteiten van de bogen die vertrekken in de bron) kan de gegeven stroming dus slechts een eindig aantal keer verbeterd worden. Na een eindig aantal overgangen van punt 3 naar punt 2, wordt dus steeds opnieuw de overgang van punt 3 naar punt 4 genomen. In punt 4 wordt telkens een knoop toegevoegd aan $\mathcal{B}$ (die nooit meer terug op $\emptyset$ wordt gezet). Bijgevolg zal na verloop van tijd $\mathcal{L} = \mathcal{B}$ en op dat moment stopt het algoritme.
- **Maximaliteit**: we stellen het bewijs nog even uit tot we Stelling 2.4.11 hebben gezien.

■

Merk op dat het Algoritme 2.4.7 niet alle maximale stromen vindt: zie Figuur 2.43.

Definitie 2.4.8. *Snede van een netwerk*
Een **snede** van een netwerk $G(V, E)$ met bron a en put z, is een 2-tal $(P, \overline{P})$ zodanig dat $a \in P$, $z \in \overline{P}$, $P \cup \overline{P} = V$ en $P \cap \overline{P} = \emptyset$

We kunnen een snede tekenen door een lijn die de knopen van het netwerk in twee verzamelingen verdeelt: op Figuur 2.45 is een snede aangegeven met een stippellijn.

We kunnen nagaan hoeveel stroming er globaal loopt over de snede, t.t.z. van links naar rechts in de tekening van een netwerk: daarbij moeten we een boog van P naar $\overline{P}$

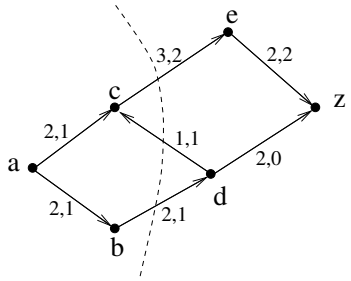


Figure 2.45: Een netwerk met een stroming en een snede

positief rekenen en een omgekeerde boog negatief; voor het net in Figuur 2.45 wordt dat:
$F(c,e) + F(b,d) - F(d,c) = 2 + 1 - 1 = 2$

Vergelijken we die grootheid met de stroming (in a of z) dan zien we dat die ook gelijk is aan 2! Is dit toeval of niet? We kunnen ook proberen een afschatting te maken van hoeveel stroming er maximaal van links naar rechts over de snede kan lopen, door optimistisch te veronderstellen dat er misschien een stroming bestaat die voor alle goede bogen over de snede maximaal is, t.t.z. gelijk aan de capaciteit van die boog en voor alle slechte bogen nul. We zullen die grootheid de capaciteit van de snede noemen. Voor hetzelfde voorbeeld geeft dat: $C_{c,e} + C_{b,d} = 2 + 3 = 5$

En het lijkt alsof capaciteit van de snede groter is dan de stroming van de snede en ook groter dan de maximale stroming (je kan nagaan dat die 4 is). Is dit toeval? We bekijken deze vragen in een meer formeel kader:

Definitie 2.4.9. *Capaciteit $C(P,\overline{P})$ van een snede*
De **capaciteit van een snede** $(P,\overline{P})$ is $C(P,\overline{P}) = \sum_{i\in P}\sum_{j\in\overline{P}} C_{i,j}$

Stelling 2.4.10. *De capaciteit van een snede is niet kleiner dan een stroming, m.a.w.*

$$\sum_{i\in P}\sum_{j\in\overline{P}} C_{i,j} \geq \sum_{i\in V} F(a,i).$$

Proof.

$$\sum_{i\in V} F(a,i) \quad = \quad \sum_{i\in V}(F(a,i) - F(i,a)) + \sum_{j\in P\setminus\{a\}}\sum_{i\in V}(F(j,i) - F(i,j))$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j\in P}\sum_{i\in V}(F(j,i)-F(i,j)) \\
&= \sum_{j\in P}\sum_{i\in P}F(j,i)+\sum_{j\in P}\sum_{i\in \overline{P}}F(j,i)-\sum_{j\in P}\sum_{i\in P}F(i,j)-\sum_{j\in P}\sum_{i\in \overline{P}}F(i,j) \\
&= \sum_{j\in P}\sum_{i\in \overline{P}}F(j,i)-\sum_{j\in P}\sum_{i\in \overline{P}}F(i,j) \\
&\leq \sum_{j\in P}\sum_{i\in \overline{P}}F(j,i) \\
&\leq C(P,\overline{P})
\end{aligned}
$$

■

Merk op dat de derde laatste regel van de stelling inderdaad aantoont dat de stroming gelijk is aan de stroming die door de snede loopt.

Een **minimale** snede is een snede met minimale capaciteit. Vorige stelling impliceert direct dat de maximale stroming kleiner of gelijk is aan de capaciteit van de minimale snede. Het verband tussen beide grootheden is nog sterker:

Stelling 2.4.11. *Max flow - min cut*
Voor een snede $(P,\overline{P})$ en stroming F in een net $G(V,E)$ geldt dat als

$$C(P,\overline{P}) = F \quad \textit{(of dus als } \sum_{i\in P}\sum_{j\in \overline{P}}C_{i,j} = \sum_{i\in V}F(a,i)\ \textit{)}$$

dan is de stroming maximaal en de snede minimaal.
Bovendien is die gelijkheid equivalent met

1. $\forall i \in P, j \in \overline{P} : F(i,j) = C_{i,j}$ *en*
2. $\forall i \in \overline{P}, j \in P : F(i,j) = 0$

t.t.z. goede bogen over de snede hebben een stroming gelijk aan hun capaciteit en slechte bogen een nul stroming.

Proof. Volgt onmiddellijk uit de ongelijkheden van Stelling 2.4.10 ■

Merk op dat we niet bewezen dat er voor elke maximale stroom een minimale snede is met die gelijkheid noch omgekeerd.

Figuur 2.46 toont een maximale stroom met minimale snede.

Nu kunnen we bewijzen dat Algoritme 2.4.7 inderdaad eindigt met een maximale stroming.

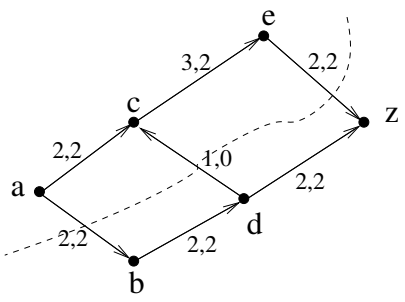
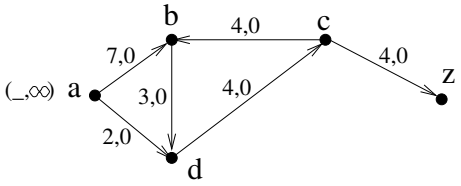


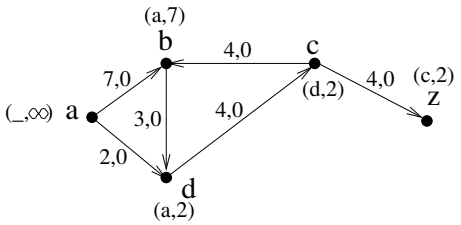
Figure 2.46: Een netwerk met een maximale stroming en een minimale snede

Proof. (van Stelling 2.4.7)
Op het ogenblik dat het algoritme stopt, is er een verzameling P van knopen met een label ($a \in P$) en $\overline{P}$ van knopen zonder label ($z \in \overline{P}$). $(P, \overline{P})$ vormt dus een snede. Beschouw een boog die vertrekt in i, t.t.z. een boog (i, j) met $i \in P$ en $j \in \overline{P}$. Vermits i een label heeft moet $F(i, j) = C_{i,j}$ anders zou j een label hebben gekregen. Beschouw nu een aankomende boog in i, t.t.z. een boog (j, i) met $i \in P$ en $j \in \overline{P}$. Vermits i een label heeft moet $F(j, i) = 0$ anders zou j een label hebben gekregen. Samen met Stelling 2.4.11 verkrijgen we dat F maximaal is. ■

We zien dus dat het algoritme tegelijkertijd een maximale stroming construeert en een minimale snede. We tonen de opeenvolgende stappen in Algoritme 2.4.7 in de reeks Figuren 2.47(a) en 2.47(b):



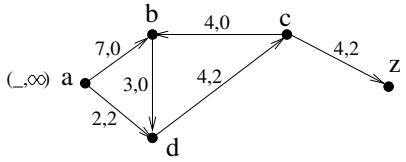
(a) Na initialisatie en labeling bron a



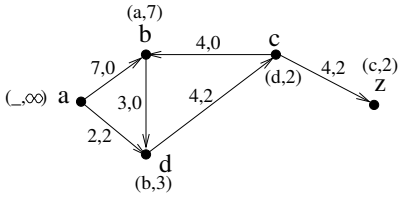
(b) Na een labeling die z bereikt

Figure 2.47: Illustratie 1 bij Algoritme 2.4.7

Als orde op de knopen kozen we (a, c, d, b, z). Vanuit a krijgt dus eerst d en dan b een label. Vanuit d wordt dan c gelabeld; vanuit d wordt b niet gelabeld omdat b al een label heeft. Vervolgens krijgt z een label vanuit c: er is nu een pad vanuit a naar z, te zien in Figuur 2.47(b). De stroming wordt aangepast: het resultaat is te zien in Figuur 2.48(a).



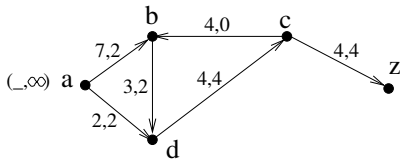
(a) De stroming is een eerste maal verbeterd



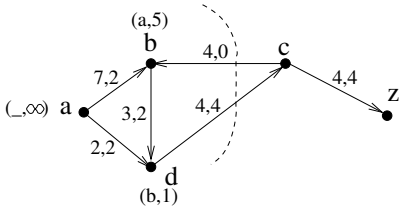
(b) Een tweede labeling heeft z bereikt

Figure 2.48: Illustratie 2 bij Algoritme 2.4.7

De labeling herbegint in de situatie van Figuur 2.48(a). Vanuit a krijgt d nu geen label, want de stroming door de boog (a, d) is al maximaal. Vanuit b krijgt c geen label, want de boog (c, b) is "slecht" en de stroming $= 0$. Dus krijgt d een label vanuit b, en vermits de capaciteit van de boog (b, d) (3) kleiner is dan de Δ van b (7 op dat ogenblik) krijgt het label van d een $\Delta = 3$. Vanuit d krijgt c een label en vermits de overschotcapaciteit van de boog (d, c) nog 2 is, krijgt c een $\Delta = 2$. Vanuit c kan enkel nog z gelabeld worden: de eindsituatie is te zien in figuur 2.48(b). Weerom kan de stroming langs het bekomen pad aangepast worden, wat resulteert in Figuur 2.49(a).



(a) De stroming is een tweede maal verbeterd



(b) De labeling bereikt z niet meer: de snede is minimaal, de stroming maximaal

Figure 2.49: Illustratie 3 bij Algoritme 2.4.7

Op dit ogenblik is de stroming al maximaal, maar daarom stopt het algoritme nog niet: er wordt nog eens een poging gedaan om een pad van a naar z te maken, met bogen die nog overschotcapaciteit hebben. De laatste ronde van labelen begint in de situatie van figuur 2.49(a): vanuit a kan enkel b een label krijgen (de capaciteit van boog (a, d) is al opgebruikt) en boog (b, d) heeft ook nog wat overschotcapaciteit, maar dan is het gedaan: de labeling stopt bij Figuur 2.49(b). We hebben $P = \{a, b, d\}$ en $\overline{P} = \{c, z\}$ en de snede

is minimaal.

Voer zelf het algoritme uit op de netwerken in Figuur 2.50, met als orde op de knopen: (a, b, c, d, e, z).

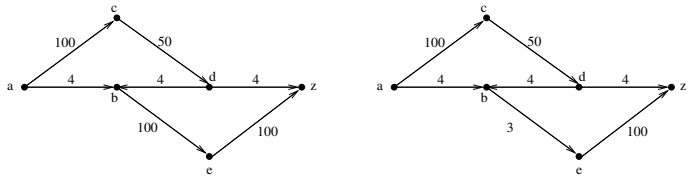


Figure 2.50: Twee netwerken om op te oefenen

Het vinden van een maximale stroming in een netwerk, komt neer op het zoeken van (gehele) getallen $F(i, j)$ zodanig dat

- $\sum_j F(a, j)$ maximaal is
- $0 \leq F(i, j) \leq C_{i,j}$ voor gegeven $C_{i,j}$
- $\forall j : \sum_i F(i, j) = \sum_i F(j, i)$

Dit soort problemen wordt ook opgelost in lineaire programmatie, m.b.v. het simplex algoritme: je leert er elders misschien meer over.

Matching

Beschouw het volgende probleem: er zijn 4 studenten (A, B, C en D) en die willen elk apart naar het monitoraat dat open is op 5 tijdstippen (a, b, c, d en e). Elk van die studenten heeft zijn voorkeur voor één of meer tijdstippen laten blijken en nu is het aan het monitoraat om een afspraakagenda vast te leggen zodat elk van die studenten kan komen op een tijdstip dat zijn voorkeur heeft. Het is duidelijk dat dit niet altijd mogelijk is: indien bijvoorbeeld studenten A en B beiden als enige voorkeur het tijdstip a hebben, dan is het al onmogelijk. Maar zelfs als het mogelijk is, is het niet triviaal om dit probleem op te lossen, zeker niet als er veel meer dan 4 studenten en veel meer dan 5 tijdstippen zijn.

Op het eerste zicht heeft dit probleem niet veel met grafen te maken, maar laten we toch een graaf maken van dit probleem: de knopen zijn de studenten en de tijdstippen en er is een gerichte boog tussen een student en een tijdstip, indien die student dat tijdstip verkiest. Stel dat A voorkeur $\{b, c\}$ heeft, B heeft $\{a, b\}$, $C\{d, e\}$ en D $\{b, c, e\}$. Dan krijgen we Figuur 2.51

We hebben een tweeledige, gerichte graaf. Het verband met de vorige sectie zien we als we een bron en put toevoegen en elke boog capaciteit gelijk aan één geven. Zie Figuur 2.52.

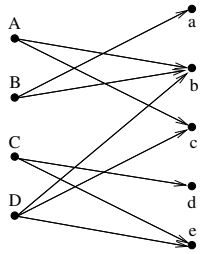


Figure 2.51: Graaf voor het toekenningsprobleem

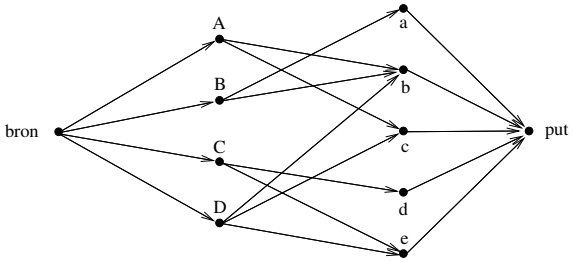


Figure 2.52: Netwerk voor het toekenningsprobleem: alle bogen hebben capaciteit = 1

Als we nu een maximale gehele stroming F in dat netwerk vinden en de waarde van die maximale stroming is 4 (het aantal studenten) dan hebben we ook een toekenning van de studenten aan de tijdstippen: een boog e van een student naar een tijdstip met $F(e) = 1$ is zulk een toekenning. Figuur 2.53 toont een maximale stroming (de stroming met waarde één loopt door de bogen in stippellijn). De oplossing geeft de toekenning (A, b), (B, a), (C, d), (D, e). We hebben een volledige toekenning of matching.

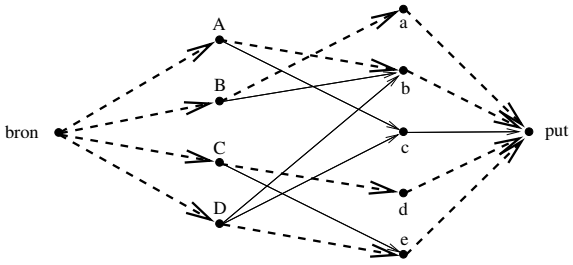


Figure 2.53: Een oplossing voor het toekenningsprobleem

Het is ook mogelijk dat de maximale stroom kleiner is dan het aantal studenten (voor een andere voorkeur natuurlijk); dan geeft de maximale stroming enkel een maximale matching.

Meer formeel nu:

Definitie 2.4.12. Voor een gerichte, tweeledige graaf $G(V \cup W, E)$ waarbij $V \cap W = \emptyset$ en $E \subseteq V \times W$, is M een **overeenkomst** of **matching** indien

- $M \subseteq E$ en
- $\forall (x, y),\ (i, j) \in M$: indien $(i, j) \neq (x, y)$ dan is $i \neq x$ en $j \neq y$ (t.t.z. in elke knoop komt hoogstens één boog aan en er vertrekt er hoogstens één)

Een **maximale** matching heeft een maximaal aantal bogen in M. Een matching is **volledig** indien $\forall v \in V,\ \exists w \in W :\ (v, w) \in M$.

Een gerichte, tweeledige graaf $G(V \cup W, E)$ waaraan een bron en put wordt toegevoegd, bogen van de bron naar de knopen in V en bogen van de knopen in W naar de put, en waar aan elke boog de capaciteit één wordt toegekend, noemen we het **matching netwerk** dat van G is afgeleid.

De volgende stelling formaliseert de overeenkomst tussen een maximale stroming in een matching netwerk en een maximale matching. Een *gehele* stroming F is zodanig dat F enkel gehele waarden heeft.

Stelling 2.4.13. *Voor een gerichte, tweeledige graaf $G(V \cup W, E)$ waarbij $V \cap W = \emptyset$ en $E \subseteq V \times W$ geldt dat*

- *Een gehele stroming F in het overeenkomstige matching netwerk, geeft een matching in G: $v \in V$ komt overeen met $w \in W$ als en slechts als $F(v, w) = 1$*
- *Een maximale gehele stroming komt overeen met een maximale matching.*
- *Een gehele stroming met waarde $\#V$ komt overeen met een volledige matching.*

Proof. Het bewijs van de stelling mag je zelf uitwerken. ■

Als we geïnteresseerd zijn in een volledige matching, dan is er soms een vlugge test die aantoont dat er geen volledige matching bestaat (zodat zoeken ernaar vermeden kan worden): het is duidelijk dat als n studenten samen minder dan n verschillende voorkeuren hebben opgegeven, ze niet allen hun zin kunnen krijgen. Veralgemeend betekent dat:

- definieer de afbeelding[10]

[10] $\mathcal{P}(S)$ stelt de machtsverzameling van S voor

$$\begin{array}{rccl} R: & \mathcal{P}(V) & \rightarrow & \mathcal{P}(W) \\ & S & \mapsto & \{w \in W \mid \exists v \in S \text{ met } (v,w) \in E\} \end{array}$$

- Indien G een volledige matching heeft, dan moet $\#S \leq \#R(S),\ \forall S \subseteq V$

De Engelse wiskundige Philip Hall bewees in 1935 ook het omgekeerde:

Stelling 2.4.14. *De trouwstelling van Hall*
Een gerichte, tweeledige graaf $G(V \cup W, E)$ waarbij $V \cap W = \emptyset$ en $E \subseteq V \times W$, heeft een volledige matching als en slechts als $\#S \leq \#R(S),\ \forall S \subseteq V$

Proof. Als G een volledige matching heeft, is zeker $\#S \leq \#R(S), \forall S \subseteq V$: dat hebben we voordien al geargumenteerd. We bewijzen nu het omgekeerde.

We stellen $m = |V|$. We bewijzen nu door inductie op m dat de voorwaarde voldoende is. In het basisgeval $m = 1$ is het duidelijk dat er een volledige matching bestaat. Stel nu $m \geq 2$. Dan zijn er twee gevallen te onderscheiden:

1. Stel dat voor alle S zodanig dat $\emptyset \neq S \subsetneq V$ het waar is dat $|S| + 1 \leq |R(S)|$. Neem dan een willekeurige boog (v, w) met $v \in V$ en beschouw de graaf $G' = G \setminus \{v, w\}$. G' voldoet aan de voorwaarde van Hall zijn V' is strict kleiner dan m: door de inductiehypothese weten we dat G' een volledige matching heeft. Voeg daaraan de boog (v, w) toe om een volledige matching voor G te bekomen.

2. Stel nu dat een S bestaat met $\emptyset \neq S \subsetneq V$ en $|S| = |R(S)|$. Beschouw nu de subgrafen G_1 geïnduceerd door de knopen $S \cup R(S)$, en G_2 geïnduceerd door $(V \setminus S) \cup (W \setminus R(S)$. Toon aan dat G_1 en G_2 beide aan de voorwaarde van Hall voldoen, en dus elk een volledige matching hebben: neem daarvan de unie, en je hebt een volledige matching voor G. Figuur 2.54 illustreert de constructie.

■

De stelling van Hall 2.4.14 kan toegepast worden op partnerkeuzes, vandaar de naam.

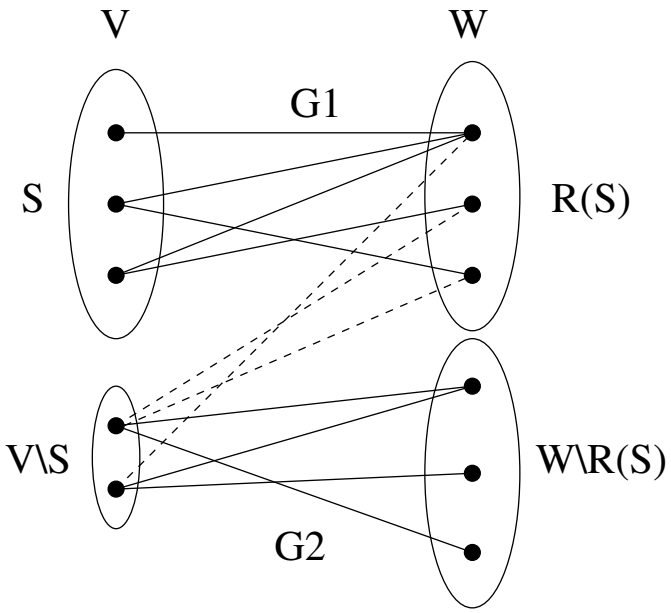


Figure 2.54: De stippellijnen behoren tot de oorspronkelijke graaf, maar niet tot G_1 of G_2

Referenties

- Richard Johnsonbaugh "Discrete Mathematics", MacMillan, 1984
- Shimon Even "Graph Algorithms", Pitman, 1979
- Ralph P. Grimaldi "Discrete and Combinatorial Mathematics"
- William Barnier, Jean B. Chan "Discrete Mathematics"
- Michael Townsend "Discrete Mathematics: Applied combinatorics and graph theory"

Chapter 3

Talen en Automaten

Inleiding

Informatici hebben veel te maken met programma's, en programma's berekenen dikwijls bij een gegeven input een output. Dat moet heel ruim opgevat worden: input kan een elektrisch signaal zijn dat een temperatuursschommeling aanduidt, een karakter dat van het toetsenbord komt, een programma, een gegevensbank ... en de bijbehorende output kan dan een rij signalen zijn om klepopeningen te regelen, een aangepast document, een bestand met foutenboodschappen, een display met gevraagde gegevens ...

Vanuit praktisch standpunt zijn bovenstaande voorbeelden heel verschillend en als we te veel naar de details van de voorbeelden kijken, dan missen we veel, want er is een kader dat abstractie van vele details maakt en waarin elk van die voorbeelden te beschrijven valt: het gaat steeds om een mapping van elementen die uit een inputdomein komen, naar een element uit een outputdomein. Die domeinen zijn altijd discreet, maar soms wel onbegrensd groot. Vanuit theoretisch standpunt zijn programma's dus altijd terug te brengen tot functies van (een deel van) $\mathbb{N}$ naar (een deel van) $\mathbb{N}$.

Als het inputdomein klein is, dan is de functie niet erg interessant: je kan een tabel aanleggen en de functiewaarde voor een gegeven input berekenen is een simpele lookup.[1]

Als het inputdomein groot is, of niet a priori bekend, dan is het voordien tabuleren van de functie niet mogelijk, en is het beter van te doen alsof het inputdomein oneindig groot is.

Het outputdomein moet minstens twee elementen bevatten om een interessante functie te verkrijgen. Die twee elementen zouden *ja, nee* kunnen zijn en laten toe om *besliss-*

[1] Tabulatie is in deze context een interessante dynamische implementatietechniek, zowel in functioneel (inclusief OO) als in logisch programmeren (waar relaties worden gespecifieerd i.p.v. functies). Wil je meer weten, vraag !

ingsproblemen te beschrijven: problemen waarbij je wil weten of een input voldoet aan een bepaalde eigenschap, zoals *is dit programma syntactisch correct?*, of nog *is vandaag een goede dag om te beleggen in FCW?* [2] ...

Als het outputdomein meer dan twee, maar wel eindig veel elementen bevat, dan is het gemakkelijk om door een rij ja-nee vragen over de input, de juiste output te verkrijgen. Stel dat je wil berekenen op welke dag van de week je best in FCW belegt, dan stel je de volgende ja-nee vragen: *is maandag de beste dag om in FCW te beleggen ?*, *is dinsdag de beste dag om in FCW te beleggen?*, *is woensdag de beste dag om in FCW te beleggen?*, ... Van de eindige outputdomeinen, zijn dus alleen die met juist twee waarden echt interessant.

Als het outputdomein oneindig groot is, dan kunnen we dat niet zomaar reduceren naar een eindige rij functies met eindig outputdomein.

We besluiten dat er maar twee soorten interessante functies bestaan: functies met signatuur $\mathbb{N} \to \{ja, nee\}$ en functies met signatuur $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Laat ons nog eens naar die eerste klasse kijken: er is een zekere structuur en semantiek geassocieerd met het outputdomein, maar het inputdomein is zeer generisch. $\mathbb{N}$ staat immers voor een willekeurige aftelbare oneindige verzameling: een andere aftelbare oneindige verzameling zou net zo goed kunnen dienen. Verder: als we elementen van $\mathbb{N}$ noteren, dan gebruiken we (bijvoorbeeld) de tien decimale cijfers en vormen daarmee strings (rijen van decimale cijfers), maar we hadden net zo goed in een andere basis kunnen werken, bijvoorbeeld binair, of hexadecimaal, of op nog totaal andere manier de elementen van $\mathbb{N}$ voorstellen: excess-3, ... Die voorstellingswijzen hebben gemeen dat ze gebruik maken van een eindig aantal symbolen, dat de voorstelling uniek is en dat als je twee voorstellingen (van twee gelijke of verschillende) getallen achter elkaar plaatst, je de voorstelling krijgt van een nieuw getal. De eindige verzameling van symbolen noemen we een alfabet, en gelijk welke eindige rij symbolen stelt een getal voor. Stel met Σ een eindig alfabet voor, en met Σ^* alle eindige rijen van symbolen uit Σ. Dan hebben we nu juist zowat verantwoord dat we functies zullen bekijken met signatuur $\Sigma^* \to \{ja, nee\}$. Een functie F van die klasse wordt nu helemaal bepaald door de verzameling symboolrijen s waarvoor geldt dat $F(s) = ja$ en we kunnen i.p.v. zulke functies te bekijken, net zo goed naar deelverzameling V van Σ^* kijken met de bijbehorende vraag *behoort een gegeven s tot V*. Het is belangrijk om te beseffen dat we geen echt grotere klasse van functies beschouwen dan $\mathbb{N} \to \{ja, nee\}$, maar ook dat het dikwijls beter is om beslissingsproblemen op meer natuurlijke manier te beschrijven, t.t.z. vanuit het standpunt van delen van Σ^*. Bijna alle theorie i.v.m. berekenbaarheid zal geformuleerd worden in dit kader.

De tweede klasse functies met signatuur $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ zullen iets minder aan bod komen, maar ze zijn natuurlijk heel belangrijk.

[2] Ja !

Zelf doen:

De inleiding maakt vereenvoudigingen of veronderstellingen waarmee je misschien niet akkoord gaat, of die op zijn minst argumentatie vereisen. Zoek mogelijke *gaten* in de inleiding, bedenk alternatieven, argumenteer voor en tegen ...

Beschrijf een beslissingsprobleem dat je al kende met behulp van een alfabet en een deelverzameling die de oplossing van het probleem is. Doe dat voor een probleem met cijfers en getallen, een probleem met letters en woorden, ... Zorg dat je telkens een probleem kiest waarvoor de deelverzameling eindig is, en eentje waarvoor de deelverzameling oneindig is. Wat als je ja/nee omkeert?

Wat is een taal?

De inleiding motiveert om beslissingsproblemen te bekijken. Een beslissingsprobleem komt overeen met een deelverzameling van de rijen (ook strings genoemd) die je kan maken met elementen uit een alfabet Σ. Zulk een deelverzameling noemen we een *taal* over Σ. Elementen uit de taal noemen we *woorden* of *strings*. Een alfabet heeft altijd een eindig aantal elementen.

Definitie 3.2.1. *String over een alfabet* Σ
Een **string** over een alfabet Σ is een opeenvolging van nul, één of meer elementen van Σ

Het is duidelijk dat als we twee strings x en y achter elkaar zetten, we een nieuwe string krijgen. We noteren die met xy.

Definitie 3.2.2. *Taal L over een alfabet* Σ
Een **taal** L over een alfabet Σ is een verzameling van eindige strings over Σ

Een taal kan eindig zijn of oneindig. Als een taal L oneindig is, is L dan aftelbaar?[3]

Om een taal vast te leggen moet je een beschrijving geven van elk element van de taal. Bijvoorbeeld: de taal van even getallen (over een alfabet van decimale cijfers) bevat juist alle getallen die eindigen op een 0, 2, 4, 6 of 8. Een ander voorbeeld: elk woord dat rijmt op fantastisch. Of nog: elke ...

Een beschrijving van elk element van een taal is liefst eindig, zelfs als de taal oneindig is.

Een beschrijving van elk element van een taal kan je (meestal) gebruiken om na te gaan of een string tot de taal behoort, maar (meestal) ook om elk element van de taal te construeren of genereren. Let hier goed op de *(meestal)*: daarover komen later vragen.

[3] als je niet meer weet wat aftelbaar is, zoek het op

Als de beschrijving van een taal eenvoudig is, dan verwachten we dat de taal eenvoudig is - maar hebben we wel een goed beeld van wat eenvoudig is?

Hier zijn nog wat vragen om je over te bezinnen en waarop in deze cursus antwoorden worden aangereikt:

- Bestaat er een formalisme om taalbeschrijvingen te noteren?
- Geeft dat formalisme aanleiding tot het (automatisch) afleiden van testers en generators van de taal?
- Bestaan er talen die niet in een formalisme kunnen gevat worden?
- Wat is de goede notie van testen? En genereren?
- Zijn sommige talen inherent gemakkelijker dan andere om te beschrijven/testen/genereren?

Tenslotte is er de vraag:

> Waarom moet een universitaire informaticus dit kennen?

Zelf doen:

> Kan je een beschrijving van de even getallen gebruiken om alle even getallen te genereren?
>
> Alle woorden rijmend op fantastisch?
>
> Hoe zit het met testen?
>
> Verzin zelf een taal, een beschrijving van die taal en gebruik die beschrijving om te testen of een gegeven string tot de taal behoort, en ook om alle strings van de taal te genereren. Hoe extravaganter de taal is, hoe beter.
>
> Zie je in je voorbeelden een verband tussen hoe eenvoudig het is om je taal te beschrijven en testen of te genereren?
>
> Heb je al een gevoel voor de andere vragen die hiervoor gesteld werden?

Een algebra van talen

Een algebra - of algebraische structuur - is een verzameling met daarop een aantal inwendige operaties: dikwijls binaire operaties, maar unair of met grotere ariteit kan ook. Zo wordt de verzameling van alle talen over een alfabet Σ een algebra als we als operaties unie, doorsnede, complement ... definiëren. Meer concreet: als L_1 en L_2 twee talen zijn, dan is

- de unie ervan een taal: $L_1 \cup L_2$
- de doorsnede ervan een taal: $L_1 \cap L_2$
- het complement ervan een taal: $\overline{L_1}$

Daarmee kan je nog andere operaties maken.

Een nieuwe manier om uit twee talen een taal te maken is *concatenatie*:

Definitie 3.3.1. *Concatenatie van twee talen*
Gegeven twee talen L_1 en L_2 over hetzelfde alfabet Σ, dan noteren we de concatenatie van L_1 en L_2 als L_1L_2 en definiëren we:
$L_1L_2 = \{xy | x \in L_1, y \in L_2\}$

We hebben geen haakjes gezet rond de concatenatie van talen, want het is duidelijk dat concatenatie associatief is, t.t.z. $(L_1L_2)L_3 = L_1(L_2L_3)$

Als we L n keer concateneren met zichzelf, noteren we dat door L^n. L^0 bevat alleen de lege string die we noteren door ϵ.

Tenslotte definiëren we nog een operatie die toelaat om oneindige talen te construeren vanuit een eindige taal:

Definitie 3.3.2. L^* - *de Kleene* **ster** *van een taal* L

$$L^* = \cup_{n=0}^{\infty} L^n$$

Als afkorting voor LL^* wordt L^+ gebruikt.

Met die notatie kunnen we nu een taal L definiëren als een deelverzameling van Σ^*, of equivalent daarmee $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$

Zelf doen: zoek nieuwe operaties die van een taal een (mogelijke nieuwe) taal maken.

Talen beschrijven

In de wiskunde gebruikt men verzamelingennotatie om verzamelingen te beschrijven. Bijvoorbeeld:

Voorbeeld 3.4.1. *Met* $\Sigma = \{x, y, z\}$*:*

- $\Sigma^* = \{a_1a_2a_3...a_n | a_i \in \Sigma, n \in \mathbb{N}\}$
- $L = \{a_1a_2a_3...a_n | a_1 = y, n \in \mathbb{N}, \forall i > 1 : a_i \in \Sigma\}$
  L is de verzameling van strings die met y beginnen.

Ook informele beschrijvingen kunnen, zolang ze maar ondubbelzinnig zijn zodat elk *ding* een element is of niet:

Voorbeeld 3.4.2.

- $H(n) = \{P | P \textit{ is een Javaprogramma en } P \textit{ stopt na hoogstens } n \textit{ seconden bij input } n\}$
- $Prime = \{n | n \in \mathbb{N}, n \textit{ is een priemgetal}\}$

Die laatste is ook informeel, maar er zit natuurlijk een definitie van priemgetal achter die formeel kan uitgeschreven worden. Zoiets als

$$Prime = \{n | n \in \mathbb{N}, \forall i : 1 < i < n \rightarrow n \bmod i \neq 0\}$$

Voor ons is zulke beschrijving echter niet genoeg: wij willen een formalisme dat beter toelaat om strings te genereren en te testen. Dat bestaat al voor natuurlijke talen: een grammatica voor het nederlands beschrijft de structuur van een nederlandse zin. Nederlands is echter een ingewikkelde taal, met een complexe structuur en veel uitzonderingen: het heeft zin om eerst een klasse meer eenvoudige talen te bestuderen.

We werken toe naar een

hiërarchie van talen

met bijbehorende hiërarchie van beschrijvingsmechanismen of grammatica's

met bijbehorende hiërarchie van *test* en *generatie* procedures

Die hiërarchie heet de *Chomsky-hiërarchie*[4]. We beginnen onderaan, t.t.z. bij de *gemakkelijke* talen ...

[4]Noam Chomsky

Reguliere expressies en reguliere talen

Definitie 3.5.1. *Reguliere Expressie (RE) over een alfabet* Σ
E is een **reguliere expressie over alfabet** Σ indien E van de vorm is

- ϵ
- ϕ
- a waarbij $a \in \Sigma$
- $(E_1 E_2)$ waarbij E_1 en E_2 reguliere expressies zijn over Σ
- $(E_1)^*$ waarbij E_1 een reguliere expressie is over Σ
- $(E_1|E_2)$ waarbij E_1 en E_2 reguliere expressies zijn over Σ

Hierboven is de verzameling van reguliere expressies *RegExps* op inductieve manier gedefinieerd. Er is onder verstaan dat iets dat niet onder de definitie valt, geen reguliere expressie is. Dikwijls is het impliciet duidelijk welk alfabet we gebruiken en vermelden we het niet meer. We gebruiken haakjes zodat er geen enkele ambiguïteit kan bestaan: haakjes behoren niet tot het alfabet. In de volgende voorbeelden is $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Voorbeeld 3.5.2. *Reguliere expressies over* Σ*:*

- b
- $a(\epsilon c)$
- $(((ab))^*c \mid (bc))$

Gebruiken we te veel haakjes - of te weinig? Waarom?

Definitie 3.5.3. *Een reguliere expressie E* **bepaalt** *een taal L_E over hetzelfde alfabet Σ als volgt:*

- als E = a (met $a \in \Sigma$) dan is $L_E = \{a\}$ (de taal met één string die enkel het teken a is)
- als E = ϵ dan is $L_E = \{\epsilon\}$ (de lege string)
- als E = ϕ dan is $L_E = \emptyset$ (de lege verzameling)
- als E = (E_1E_2) dan $L_E = L_{E_1}L_{E_2}$
- als E = $(E_1)^*$ dan $L_E = L^*_{E_1}$
- als E = $(E_1|E_2)$ dan $L_E = L_{E_1} \cup L_{E_2}$

Die overeenkomst tussen een reguliere expressie en een taal maakt dat we in reguliere expressies ook wegkomen met minder haakjes: concatenatie van talen is immers associatief en als we afspreken dat de * sterker bindt dan concatenatie die sterker bindt dan unie, dan kunnen veel haakjes weg.

Zelf doen: Geef een woordelijke beschrijving van de talen die bepaald worden door de volgende RE's over $\{a, b\}$ - de eerste dient als voorbeeld:

$(ab)^*$: elke a wordt direct door een b gevolgd en er zijn evenveel a's als b's

$(aba)^*$

$(a|b)^*$

$(a|b)^*\phi$

$a\epsilon b$

Zelf doen: Bewijs de volgende uitspraken, of geef een tegenvoorbeeld:

als een reguliere expressie E geen * bevat, dan is L_E eindig

als een reguliere expressie E * bevat, dan is L_E oneindig

$L_E \subseteq L_{(E|F)}$ voor alle RE's E en F

de verzameling van alle reguliere expressies (over een gegeven alfabet) is zelf een taal (en over welk alfabet?)

de verzameling van alle reguliere expressies (over een gegeven alfabet) is zelf een reguliere taal

Definitie 3.5.4. *Reguliere Taal*
Een taal die door een reguliere expressie bepaald wordt is een **reguliere taal**.

Is het duidelijk dat een reguliere taal een taal is? De verzameling van reguliere talen duiden we aan met $RegLan$. Kijk na welke van volgende formules zin hebben, en welke juist zijn.

1. $RegLan \subseteq \Sigma$
2. $RegLan \subseteq \Sigma^*$
3. $RegLan \subseteq \mathcal{P}(\Sigma)$
4. $RegLan \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$
5. $RegLan \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Sigma^*))$
6. indien $x \in RegLan$ dan $x \in \Sigma$
7. indien $x \in RegLan$ dan $x \in \Sigma^*$
8. indien $x \in RegLan$ dan $x \in \mathcal{P}(\Sigma)$
9. indien $x \in RegLan$ dan $x \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$
10. indien $x \in RegLan$ en $y \in x$ dan $y \in \Sigma$
11. indien $x \in RegLan$ en $y \in x$ dan $y \in \Sigma^*$
12. indien $x \in RegLan$ en $y \in x$ dan $y \in \mathcal{P}(\Sigma)$
13. indien $x \in RegLan$ en $y \in x$ dan $y \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$

Zelf doen:

Is de volgende uitspraak juist? *voor elke reguliere taal L bestaat een reguliere expressie E zodanig dat* $L_E = L$.

Is het duidelijk dat er talen zijn die NIET regulier zijn?

Is elke eindige taal regulier?

Is elke oneindige reguliere taal aftelbaar?

Is het mogelijk om gegeven een reguliere taal de bijhorende reguliere expressie te construeren?

Als je een string s krijgt en een reguliere expressie E, kan je dan (gemakkelijk) bepalen of $s \in L_E$?

Kan je alle strings in L_E genereren als je E krijgt?

De subalgebra van reguliere talen

De verzameling van talen over een alfabet Σ noteren we met L_Σ. Ze vormt een algebra: de verzameling zelf is $\mathcal{P}(\Sigma^*) = L_\Sigma$.

Als we twee talen L_1 en L_2 uit L_Σ nemen, dan kunnen we die gebruiken om de taal $L_1 L_2$ te maken (concatenatie van talen), de taal $L_1 \cup L_2$ (unie van talen), de taal L_1^* (willekeurig lange concatenatie) en de complementstaal $\overline{L_1}$. Het resultaat zit terug in L_Σ. Dus: L_Σ is een algebra met (minstens) vier inwendige operaties.

Vermits $RegLan \subseteq L_\Sigma$ is het zinvol om te vragen of RegLan een subalgebra is van L_Σ: daarvoor moeten de operaties ook inwendig zijn op RegLan.

Formuleer de stelling die uitdrukt dat RegLan een subalgebra is van L_Σ en bewijs je stelling op een constructieve manier, t.t.z. construeer o.a. een E zodanig dat $L_E = L_{E_1} \cup L_{E_2}$. Heb je een probleem met het complement van een reguliere taal?

Eindige toestandsautomaten

Eindige toestandsautomaten zijn bedoeld om talen mee te beschrijven - testen en genereren van strings horen daarbij. Eindige toestandsautomaten kunnen grafisch voorgesteld worden en daarmee beginnen we: later geven we een formele definitie. Figuur 3.1 toont een eerste voorbeeld van een NFA[5] over het alfabet $\{a, b, c\}$.

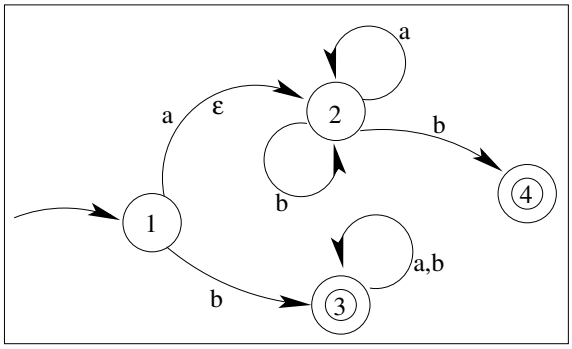


Figure 3.1: Een eindige toestandsautomaat

De belangrijke kenmerken:

- we zien een gerichte graaf
- de knopen hebben een naam (hier een getal) - de knopen noemen we toestanden
- er zijn twee soorten knopen: knopen met een dubbel cirkeltje getekend noemen we (aanvaardende) eindtoestanden
- lussen zijn toegestaan (bogen van een knoop naar dezelfde knoop)
- de bogen dragen een label (soms meer dan één); dat label is een symbool uit het alfabet, of meerdere symbolen uit het alfabet (gescheiden door een komma) en/of ϵ
- er is slechts één boog die niet vertrekt in een knoop; die boog komt aan in een knoop die we de starttoestand noemen

We gebruiken de grafische voorstelling van de NFA als volgt:

1. je krijgt een string s over het alfabet in handen en vertrekt ermee in de starttoestand

[5] Onze afkorting voor een eindige toestandsautomaat: we verklaren die later wel.

2. je mag nu van één toestand naar een andere gaan door een boog te volgen en in je vertrektoestand een symbool achter te laten dat op de boog staat en van voor in je string staat: je string wordt daardoor korter; als de boog ook ϵ bevat, dan hoef je niet een teken achter te laten
3. blijf overgangen maken: als je aankomt in een eindtoestand en je string is leeg op dat ogenblik, dan zeggen we *de NFA heeft de initiële string s aanvaard*

Dit geeft ons slechts een informele definitie van aanvaarde string!

Hier is een tweede manier om die grafische voorstelling te gebruiken:

1. vertrek met een lege string in de starttoestand
2. volg nu willekeurig bogen van de toestand waarin je bent, naar een volgende toestand: als op die boog een symbool staat, voeg het vanachter toe aan je huidige string; blijf rondlopen
3. telkens je in een eindtoestand arriveert, en je hebt string s opgebouwd ondertussen, roep luid *deze machine aanvaardt s*

Zelf doen: beantwoord

wordt ac door de NFA in Figuur 3.1 aanvaard?

wordt bbb door de NFA in Figuur 3.1 aanvaard?

zijn er verschillende manieren om bbb te aanvaarden?

kan het zijn dat je vast komt te zitten en wat zegt dat over bbb?

kan je strings geven die niet door de machine worden aanvaard?

maak een NFA die een kring bevat: kan je in een lus komen? is dat erg?

Informele definitie 3.7.1. *De taal door een NFA M bepaald*
Een taal L wordt bepaald door een NFA M, indien M elke string van L aanvaardt en geen andere strings. We noteren L_M.

Het is niet zo belangrijk dat de alfabetten van de NFA en de taal dezelfde zijn, maar we zullen het voor het gemak wel dikwijls veronderstellen.

Definitie 3.7.2. *Equivalentie van twee NFA's*
Twee NFA's worden **equivalent** genoemd als ze dezelfde taal bepalen

De notie *equivalentie van NFA's* bepaalt een equivalentierelatie op de NFA's en we kunnen de equivalentieklassen van de NFA's beschouwen onder die equivalentierelatie: elke equivalentieklasse komt nu overeen met één taal.

Zelf doen: denk na over

er bestaat een procedure om na te gaan of twee gegeven NFA's equivalent zijn

voor elke NFA bestaat een equivalente met hoogstens één eindtoestand

voor elke NFA bestaat een equivalente waarin je nooit *vast kan komen te zitten*

We hebben regelmatig de verzameling $\Sigma \cup \{\epsilon\}$ nodig: we zullen die afkorten door Σ_ϵ.

Definitie 3.7.3. *Niet-deterministische eindige toestandsautomaat*
Een **niet-deterministische eindige toestandsautomaat** is een 5-tal $(Q, \Sigma, \delta, q_s, F)$ waarbij

- Q een eindige verzameling toestanden is
- Σ is een eindig alfabet
- δ is de overgangsfunctie van de automaat, t.t.z. $\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \to \mathcal{P}(Q)$
- q_s is de starttoestand en natuurlijk een element van Q
- $F \subseteq Q$: F is de verzameling eindtoestanden

NFA is de afkorting van *Non-deterministic Finite Automaton*.

We definiëren nu ook formeel wat het betekent dat een string s wordt aanvaard door een NFA.

Definitie 3.7.4. *Een string s wordt aanvaard door een NFA*
Een string s wordt aanvaard door een NFA $(Q, \Sigma, \delta, q_s, F)$ indien s kan geschreven worden als $a_1a_2a_3...a_n$ met $a_i \in \Sigma_\epsilon$, en er een rij toestanden $t_1t_2t_2t_3...t_{n+1}$ bestaat zodanig dat

- $t_1 = q_s$
- $t_{i+1} \in \delta(t_i, a_i)$
- $t_{n+1} \in F$

Zelf doen:

> Je hebt nu een intuïtieve notie van NFA's d.m.v. hun grafische voorstelling, en je hebt nu een formele definitie; zorg dat je intuïtie in overeenstemming is met de definitie. Doe hetzelfde met de notie van aanvaarde string.

Hierboven worden niet-deterministische automaten gedefinieerd: het is mogelijk dat in sommige toestanden je door een bepaald symbool achter te laten de keuze hebt tussen meerdere bogen, en/of dat je zelfs niks moet achterlaten. Sommige automaten die onder de definitie vallen, zijn echter deterministisch: je hebt in geen enkele toestand de keuze, t.t.z. het eerste symbool van je huidige string bepaalt altijd je volgende overgang (als er al één mogelijk is). Zulk een deterministische automaat korten we af door DFA.

Het vervolg van deze sectie brengt de notie van reguliere expressie en NFA samen: eerst construeren we vanuit een RE een NFA zodanig dat

$L_{RE} = L_{NFA}$. Daarna doen we het omgekeerde. Te samen bewijst dat dat de twee formalismen equivalent zijn.

De transitietabel

De δ van een NFA is een functie met een eindig domein, en kan gemakkelijk voorgesteld worden in tabelvorm: we noemen die tabel de transitietabel, omdat die aangeeft welke de overgangen zijn in de NFA . Een voorbeeld:

Q	Σ_ϵ	$\mathcal{P}(Q)$
1	a	$\{2\}$
1	b	$\{3\}$
1	ϵ	$\{2\}$
2	a	$\{2\}$
2	b	$\{2,4\}$
3	a	$\{3\}$
3	b	$\{3\}$
2	ϵ	$\emptyset$
3	ϵ	$\emptyset$
4	a	$\emptyset$
4	b	$\emptyset$
4	ϵ	$\emptyset$
1,2,3,4	c	$\emptyset$

Table 3.1: De transitietabel voor de NFA in Figuur 3.1

Voor elke toestand van de NFA in combinatie met een symbool uit Σ_ϵ waarvoor een

boog bestaat in de grafische voorstelling, hebben we een overeenkomstige verzameling toestanden waarnaar de overgang mogelijk is. Als er geen boog is, dan kunnen we een entry in de tabel toevoegen met een lege verzameling van toestanden.

De transitietabel ziet eruit als iets dat we zouden kunnen gebruiken in een programma dat een NFA implementeert. Maar het niet-determinisme is nog storend: niet panikeren, we werken dat later wel weg.

De algebra van NFA's

Laat ons een vast alfabet kiezen: later kunnen we die afspraak eventueel wat afzwakken. De verzameling NFA's over dat alfabet is goed gedefinieerd: gebruik de definitie van NFA op pagina 74. We laten zien dat er op die verzameling drie inwendige operaties bestaan, die we *unie*, *concatenatie* en *ster* noemen. Ondertussen weten jullie dat een NFA altijd genoeg heeft aan één eindtoestand, waaruit bovendien geen pijlen vertrekken. Dat maakt het iets gemakkelijker.

De unie van twee NFA's: Figuur 3.2 laat de intuïtie zien achter hoe de unie van twee NFA's kan genomen worden: maak één nieuwe eindtoestand en teken een ϵ-boog tussen de oude eindtoestanden en de nieuwe. Maak van de oude eindtoestanden gewone toestanden. Maak een nieuwe begintoestand en verbind die met een ϵ-boog met de oude begintoestanden (die worden daardoor gedegradeerd naar gewone toestanden).

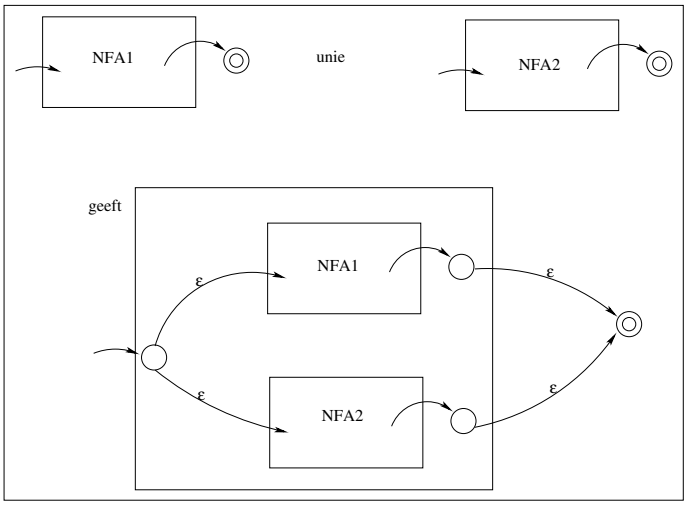


Figure 3.2: Unie van twee NFA's

Formeel schrijven we:

Gegeven $NFA_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{s1}, \{q_{f1}\})$ en $NFA_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{s2}, \{q_{f2}\})$.
De unie $NFA_1 \cup NFA_2$ is de $NFA = (Q, \Sigma, \delta, q_s, F)$ waarbij

- $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_s, q_f\}$ waarbij q_s en q_f nieuwe toestanden zijn
- $F = \{q_f\}$
- δ is gedefinieerd als:

  $\delta(q, x) = \delta_i(q, x) \quad \forall q \in Q_i \backslash \{q_{fi}\}, x \in \Sigma_\epsilon$ voor i=1,2
  $\delta(q_s, \epsilon) = \{q_{s1}, q_{s2}\}$
  $\delta(q_s, x) = \emptyset \quad \forall x \in \Sigma$
  $\delta(q_{fi}, \epsilon) = \{q_f\}$ voor i = 1,2
  $\delta(q_{fi}, x) = \emptyset \quad \forall x \in \Sigma$ en voor i = 1,2

De concatenatie van twee NFA's: Deze keer geven we alleen de visuele representatie van de concatenatie in Figuur 3.3:

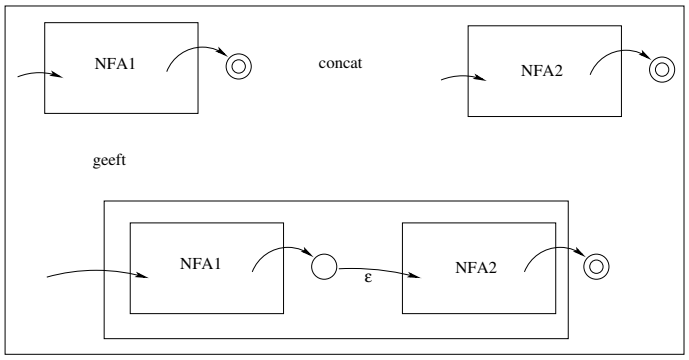


Figure 3.3: Concatenatie van twee NFA's

De ster van een NFA: weerom geven we enkel de visuele representatie, in Figuur 3.4.

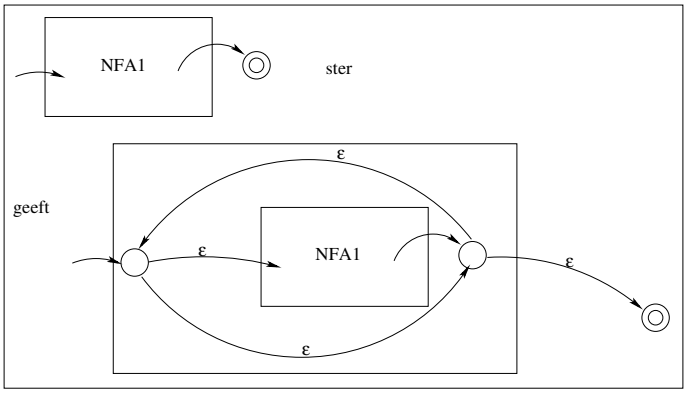


Figure 3.4: De ster van een NFA

Werk de formele beschrijvingen van concatenatie en de ster zelf uit.

Zelf doen:

De concatenatie van NFA_1 en NFA_2 bepaalt $L_{NFA_1}L_{NFA_2}$. Bewijs dat.

Formuleer iets analoogs voor de ster en de unie.

Wat bewijst dat over de algebraïsche isomorfie tussen ... en ...?

Van reguliere expressie naar NFA

We hebben alle ingrediënten om van een reguliere expressie RE een NFA te maken, en zodanig dat de $L_{RE} = L_{NFA}$. Vermits reguliere expressies inductief gedefinieerd zijn (zie definitie pagina 68) zullen we voor elk lijntje van die definitie een overeenkomstige NFA definiëren. We gebruiken de notatie NFA_{RE} om de NFA aan te duiden die overeenkomt met de reguliere expressie RE.

Figuur 3.5 geeft de NFA voor de eerste drie basisgevallen in de definitie op pagina 68:

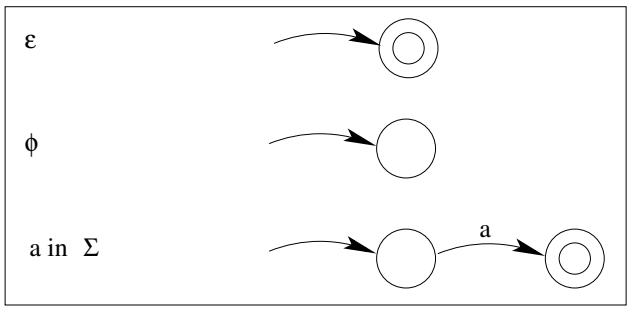


Figure 3.5: Een NFA voor de drie basisgevallen

De drie recursieve gevallen beschrijven we als volgt: laat E_1 en E_2 twee reguliere expressies zijn, dan is

- $NFA_{E_1E_2} = concat(NFA_{E_1}, NFA_{E_2})$
- $NFA_{E_1^*} = ster(NFA_{E_1})$
- $NFA_{E_1|E_2} = unie(NFA_{E_1}, NFA_{E_2})$

Stelling 3.10.1. *De constructie hierboven bewaart de taal, t.t.z.*
$$L_{NFA_E} = L_E.$$

Proof. Geef zelf een bewijs door structurele inductie. ■

Van NFA naar reguliere expressie

De weg omgekeerd is iets meer complex: we voeren eerst een nieuwe soort van eindige automaten in - de GNFA's, de G staat voor gegeneraliseerd. Daarna zullen we het volgende traject doorlopen:

$NFA \rightarrow GNFA \rightarrow GNFA\ met\ 2\ toestanden \rightarrow reguliere\ expressie$

In elk van die stappen zullen we hard moeten maken dat de taal beschreven door het formalisme niet verandert.

Informele definitie 3.11.1. *GNFA*
Een **GNFA** is een eindige toestandsmachine met de volgende wijzigingen en beperkingen:

- er is slechts één eindtoestand en die is verschillend van de starttoestand
- er is juist één boog van de starttoestand naar elke andere toestand, maar er komen geen pijlen aan (behalve de startpijl)
- er is juist één boog van elke toestand naar de eindtoestand maar uit de eindtoestand vertrekken geen pijlen
- tussen elke andere twee toestanden is er juist één boog in beide richtingen
- er is ook juist één boog van elke andere toestand naar zichzelf
- de bogen hebben als label een reguliere expressie

Figuur 3.6 toont een GNFA.

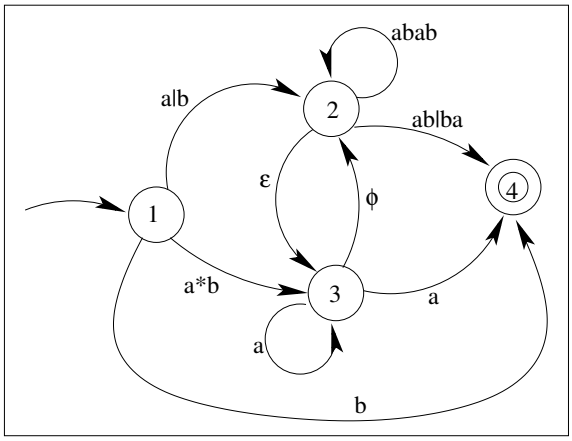


Figure 3.6: Een GNFA

We gebruiken de (grafische voorstelling van de) GNFA als volgt:

1. je krijgt een string s over het alfabet en vertrekt ermee in de starttoestand
2. je mag nu van één toestand naar een andere overgaan door een boog te volgen en in je vertrektoestand een rij symbolen die van voor op je string voorkomen achter te laten; die rij symbolen moet voldoen aan de reguliere expressie die op de boog staat; je string wordt daardoor korter; als de boog ook ϵ bevat, dan hoef je niet een teken achter te laten; als de boog enkel maar ϕ bevat, dan kan je de boog niet nemen
3. blijf overgangen maken: als je aankomt in de eindtoestand en je string is leeg op dat ogenblik, dan zeggen we *de GNFA heeft de initiële string s aanvaard*

Zelf doen:

Zoek voor de GNFA in Figuur 3.6 strings die aanvaard worden en strings die niet aanvaard worden.

We beschrijven nu een algoritme om van een gegeven NFA een RE te maken:

Stap 1: *Maak van de NFA een GNFA*

Voer een nieuwe starttoestand in en een nieuwe (unieke) eindtoestand. Teken een ϵ-boog van de nieuwe begintoestand naar de oude begintoestand, en van elke oude eindtoestand naar de nieuwe eindtoestand. Teken de ontbrekende bogen met een ϕ. Als er nu tussen twee toestanden twee of meer parallelle gerichte bogen zijn, neem die dan samen met als label de unie van de labels van de parallelle bogen.

Stap 2: *Reduceer de GNFA*

Kies een willekeurige toestand X verschillend van de start- of eindtoestand - als er geen meer zijn, ga naar stap 3. Verwijder die knoop als volgt: kies toestanden A en B zodat er bogen zijn van A naar B met label E_4, van A naar X met E_1, van X naar zichzelf met E_2 en van X naar B met E_3. Vervang het label op de boog van A naar B door $E_4 \mid E_1E_2^*E_3$. Doe dit voor alle koppels A en B. Verwijder daarna de knoop X met alle bogen die erin toekomen of vertrekken.

De basisstap wordt geïllustreerd in Figuur 3.7.

Herhaal stap 2.

Stap 3: *Bepaal RE*

De GNFA heeft nu juist 2 toestanden (start- en eindtoestand) en daartussen één boog; die boog heeft een RE als label; dit is de RE die we zochten.

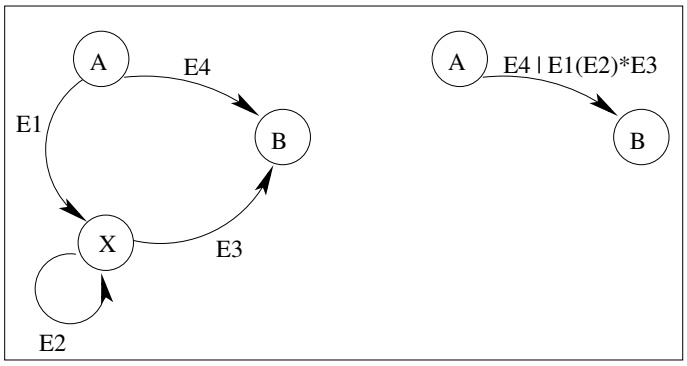


Figure 3.7: Verwijdering van één toestand uit een GNFA

Voorbeeld: We passen dit stapsgewijze toe op de GNFA van Figuur 3.6: Figuren 3.8 en 3.9 tonen dat.

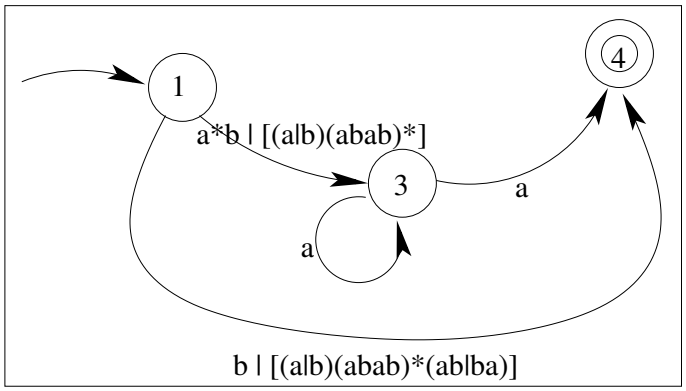


Figure 3.8: Toestand 2 is verwijderd

We moeten nog bewijzen dat de reductie met één toestand in Stap 2 in het algoritme de verzameling aanvaarde strings niet verandert. We moeten daarvoor twee dingen bewijzen: (1) indien een string s aanvaard werd voor de reductie, dan ook na de reductie; (2) indien een string s niet aanvaard werd voor de reductie, dan ook niet na de reductie.

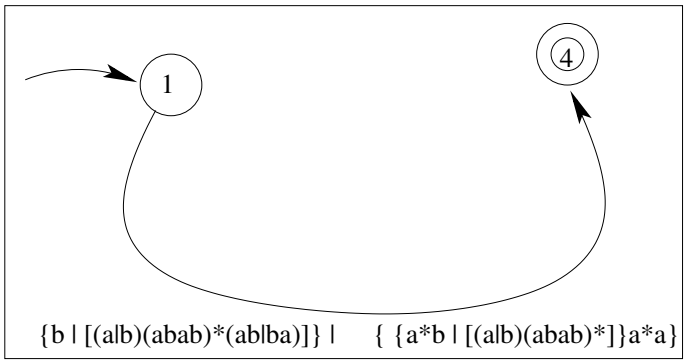


Figure 3.9: Toestand 3 is verwijderd

We gebruiken de notie van het pad doorheen de toestanden dat je kan volgen om een string te accepteren (die notie staat voor een NFA in de definitie op pagina 74 - schrijf ze hier eens uit voor een GNFA): zulk een acceptatiepad is dus een opeenvolging van toestanden. We verwijzen naar de machine voor de reductie met $GNFA_{voor}$ en naar de machine erna met $GNFA_{na}$.

1. Als s aanvaard werd door $GNFA_{voor}$ met een pad dat X niet bevat, dan wordt s door datzelfde pad in $GNFA_{na}$ aanvaard.

   Als dat pad X bevat, dan zijn er toestanden A en B, zodat AX^nB ($n > 0$) een opeenvolging is in het pad. De reguliere expressies op de bogen AX, XX, XB zijn E1, E2, E3 en bijgevolg kost van A naar B gaan langs X een stukje string dat voldoet aan $E1(E2)^*E3$: die reguliere expressie staat ook in de boog AB in $GNFA_{na}$, dus ...

2. Als s aanvaard wordt door $GNFA_{na}$ dan bevat het acceptatiepad uiteraard alleen maar toestanden verschillend van X. Op een boog van A naar B (twee opeenvolgende toestanden in het acceptatiepad) staat de reguliere expressie $E4|E1(E2)^*E3$: die gebruiken betekent een stukje string uitgeven dat voldoet aan E4 of aan $E1(E2)^*E3$, dus in $GNFA_{voor}$ komt dat overeen met ofwel de boog AB volgen ofwel de bogen AX, XX (zo dikwijls als nodig) en XB. AB had als label $E4$, AX heeft E1, ...

   Dus als een string aanvaard wordt door $GNFA_{na}$ dan ook door $GNFA_{voor}$.

We moeten ook nog stap 1 verantwoorden, t.t.z. argumenteren dat door de NFA om te vormen naar een GNFA, de taal niet verandert. Doe dat zelf.

Besluit: twee formalismen (NFA en RE) bepalen precies dezelfde klasse van talen die we de reguliere talen hebben genoemd. We hebben dat bewezen en de bewijzen zijn

constructief: we kunnen de bewijzen gemakkelijk omvormen tot programma's in Java, Prolog ... om vanuit een RE een NFA te berekenen, of omgekeerd. We kunnen echter beter doen dan tot nu toe: onze NFA's zijn niet-deterministisch en het zou leuk zijn als we genoeg hebben aan deterministische automaten. In Sectie 3.12 zullen we dit uitspitten. Tenslotte kunnen we ook een minimaliteitscriterium voor deterministische automaten bestuderen: dat gebeurt in Sectie 3.13.

Deterministische eindige toestandsmachines

De definitie van een eindige toestandsmachine NFA laat toe dat vanuit een bepaalde toestand bogen vertrekken met ϵ en ook meer dan één boog met (bijvoorbeeld) het label a (a in het alfabet). Dat is de bron van niet-determinisme: als in die toestand het eerste symbool van je huidige string a is, dan heb je de keuze: a achterlaten en nog keuze tussen welke boog met a erop volgen, of niets achterlaten en de ϵ-boog volgen. Dit implementeren (bijvoorbeeld op basis van de transitietabel) is niet moeilijk, maar als je alle mogelijkheden wil uitproberen, dan moet je op je stappen kunnen terugkeren. Ook weer niet onoverkomelijk, maar het is duidelijk dat dit niet tot optimale programma's zal leiden. Het ware efficiënter als er in elke toestand slechts één mogelijkheid bestond per symbool en geen ϵ -overgangen. We beperken dus de klasse van automaten tot de deterministische eindige toestandsmachines - we noteren DFA - door geen ϵ-overgangen toe te laten en bovendien mag een symbool van het alfabet hoogstens op één uitgaande boog per toestand staan. Formeel doen we dat door te schrijven dat $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ een partiële functie is. Het zou moeten duidelijk zijn dat een taal bepaald door een DFA ook regulier is. De volgende vraag is daarmee nog niet beantwoord: kan elke reguliere taal bepaald worden door een DFA?

Een andere manier om daar tegenaan te kijken is de volgende: gegeven een reguliere taal L, dan bestaat er een reguliere expressie E voor L; voor die E kunnen we gemakkelijk de automaat NFA_E maken (zie pagina 79). Laat ons nu proberen die NFA_E om te vormen tot een DFA die dezelfde taal (L) aanvaardt. Als dat lukt hebben we bewezen dat elke reguliere taal door een DFA bepaald wordt.

We beschrijven de transformatie van een NFA naar de DFA in het algemeen.

Gegeven: een NFA $= (Q_n, \Sigma, \delta_n, q_{sn}, F_n)$

Gevraagd: een DFA $= (Q_d, \Sigma, \delta_d, q_{sd}, F_d)$ zodanig dat $L_{NFA} = L_{DFA}$

Constructie: $Q_d = \mathcal{P}(Q_n)$: elke toestand in de DFA is een verzameling toestanden van de NFA

$F_d = \{S | S \in Q_d, S \cap F_n \neq \emptyset\}$: een eindtoestand in de DFA bevat altijd een eindtoestand van de NFA

Dat laat ons nog δ_d. Voor de duidelijkheid: $\delta_d : (\mathcal{P}(Q_n) \times \Sigma) \to \mathcal{P}(Q_n)$

We voeren eerst een afbeelding $eb : Q_n \to \mathcal{P}(Q_n)$ in (eb staat voor **e**psilon-**b**ereikbaar):

- $eb(q)$ is de verzameling toestanden in NFA die met nul, één of meer ϵ-bogen bereikbaar zijn vanuit q
- We liften de definitie van eb naar $\mathcal{P}(Q_n)$ op de gewone manier: voor een $\mathcal{Q} \in \mathcal{P}(Q_n)$
$$eb(\mathcal{Q}) = \cup_{q \in \mathcal{Q}} eb(q)$$
- δ_n liften we op dezelfde manier.

Vervolgens definiëren we δ_d als volgt:

- $\delta_d(\mathcal{Q}, a) = eb(\delta_n(\mathcal{Q}, a))$ [6] voor $\mathcal{Q} \in Q_d$
- in woorden: vanuit een toestand $\mathcal{Q}$ in de DFA ga je naar een volgende toestand in de DFA door voor elke NFA toestand in $\mathcal{Q}$ eerst de overgangsfunctie van de NFA te gebruiken, en daarna de ϵ-bogen te volgen - van al die resulterende toestandsverzamelingen neem je de unie.

Tenslotte definiëren we

$$q_{sd} = eb(q_{sn}).$$

Einde

We passen die constructie toe op de NFA in Figuur 3.10. Die NFA heeft 3 toestanden, dus hebben we in principe 8 toestanden in de resulterende DFA.

[6] Kijk de signatuur na!

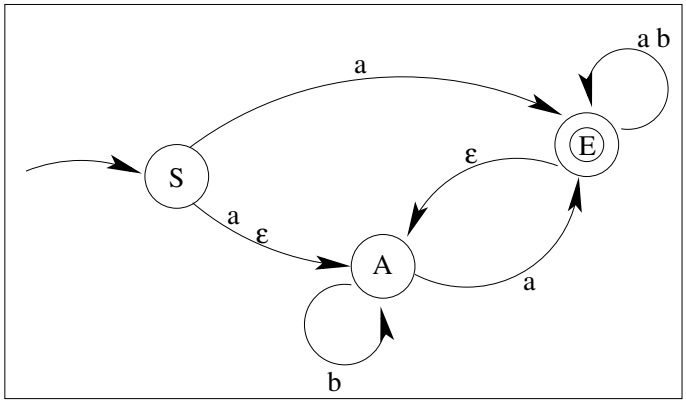


Figure 3.10: Een NFA

Tabel 3.2 laat het resultaat zien van de constructie van de verschillende onderdelen van de DFA.

$q \in Q_d$	$eb(q)$	$\delta_n(q,a)$	$\delta_n(q,b)$	$\delta_d(q,a)$	$\delta_d(q,b)$
{}	{}	{}	{}	{}	{}
{S}	{S,A}	{A,E}	{}	{A,E}	{}
{A}	{A}	{E}	{A}	{A,E}	{A}
{E}	{A,E}	{E}	{E}	{A,E}	{A,E}
{S,A}	{S,A}	{A,E}	{A}	{A,E}	{A}
{S,E}	{S,A,E}	{A,E}	{E}	{A,E}	{A,E}
{A,E}	{A,E}	{E}	{A,E}	{A,E}	{A,E}
{S,A,E}	{S,A,E}	{A,E}	{A,E}	{A,E}	{A,E}

Table 3.2: De onderdelen van de DFA voor de NFA in Figuur 3.10

Een aantal toestanden is niet bereikbaar vanuit de starttoestand $\{S, A\}$. Het is voldoende om enkel de bereikbare toestanden voor te stellen: de grafische voorstelling van de DFA is te zien in figuur 3.11.

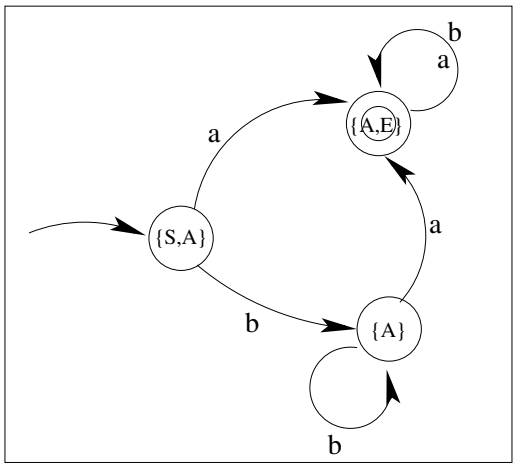


Figure 3.11: De resulterende DFA

Zelf doen:

Bepaal welke taal deze automaat beschrijft. Of maak er een reguliere expressie van en druk dan in woorden uit welke strings aanvaard worden. Is dit de *kleinste* automaat die deze taal bepaalt? Wat is volgens jou een goede notie van *kleinste* automaat?

De constructie vereist maximaal $2^{\#Q_n}$ toestanden in de DFA, maar het voorbeeld toont dat het voorkomt dat Q_d niet veel groter hoeft te zijn dan Q_n, als we de niet bereikbare toestanden niet opnemen. Is het mogelijk dat de DFA *minder* toestanden heeft dan de NFA waarvan we vertrokken?

Uitbreiding van δ naar strings: voor een DFA heeft δ als domein $Q \times \Sigma$. Het is handig δ uit te breiden tot een functie δ^* op het domein $Q \times \Sigma^*$ als volgt:

- $\delta^*(q, \epsilon) = q$
- $\delta^*(q, aw) = \delta^*(\delta(q, a), w)$ indien $\delta(q, a)$ bestaat - hierin is $a \in \Sigma$ en $w \in \Sigma^*$.

Zelf doen:

Bewijs dat $\delta^*(q, wa) = \delta(\delta^*(q, w), a)$ voor $a \in \Sigma$ en $w \in \Sigma^*_\epsilon$

Minimale DFA

Voor een gegeven reguliere taal L bestaan er meestal veel DFA's die de taal bepalen[7]. Het is belangrijk om kleine machines te maken: als je in een toepassing een DFA nodig hebt, dan moet je op een of andere manier de toestanden voorstellen en dus heb je er belang bij het aantal toestanden laag te houden. Het is zonder meer duidelijk dat er voor een gegeven reguliere taal een DFA bestaat met het minimale aantal toestanden. De vraag is hoe we een minimale DFA construeren, en bewijzen dat de constructie een minimale DFA oplevert. We proberen minimaliteit te verkrijgen door toestanden weg te halen uit de machine.

Toestanden die niet bereikbaar zijn vanuit q_s zijn nutteloos: die toestanden kunnen we zonder meer wegdoen.

Om nog meer toestanden weg te doen, eerst een voorbeeld: Figuur 3.12 toont links een DFA met 5 toestanden.

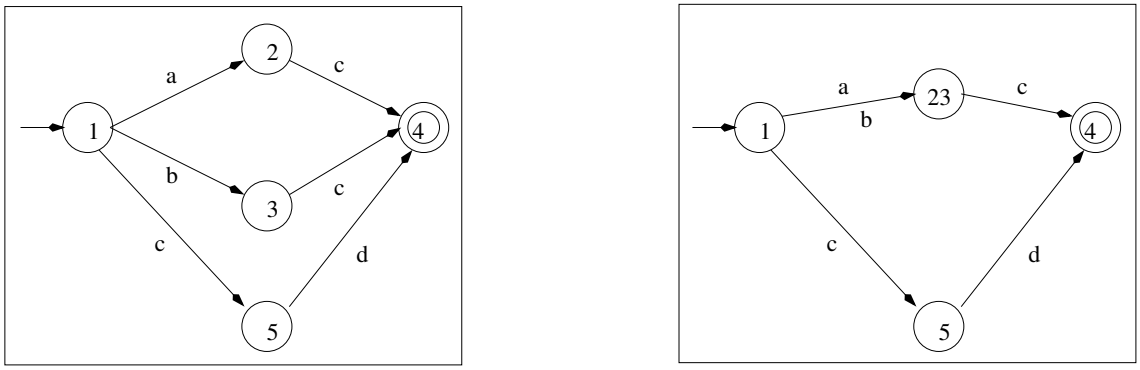


Figure 3.12: Links een DFA met 2 equivalente toestanden; rechts zijn ze samengenomen

Vanuit de toestanden 2 en 3 vertrekken bogen met hetzelfde label naar de eindtoestand. Dat geeft aan dat die twee toestanden *f-gelijk* zijn, t.t.z. eens je in 2 of 3 geraakt bent, geraak je met dezelfde strings tot aan de eindtoestand: de f in f-gelijk staat voor *finaal*. Langs de andere kant: om van 5 naar de eindtoestand te gaan heb je een andere string nodig dan om van 3 naar de eindtoestand te gaan, en we noemen 3 en 5 dan ook *f-verschillend*.[8] De idee van minimalisatie van een DFA is nu: identificeer verzamelingen van f-gelijke toestanden en neem die samen.

Voor het gemak zullen we eisen dat vanuit elke toestand er een boog vertrekt voor elk symbool van het alfabet, m.a.w. dat δ een totale functie is; overtuig je ervan dat je

[7] Soms oneindig veel?

[8] In de literatuur vind je indistinguishable en distinguishable.

hoogstens één extra toestand nodig hebt om een DFA die die eigenschap niet heeft naar een DFA om te vormen met die eigenschap[9].

Laat ons eerst exact definiëren wanneer twee toestanden f-verschillend zijn en wanneer f-gelijk:

Definitie 3.13.1. *f-verschillende en f-gelijke toestanden*
Twee toestanden p en q zijn **f-gelijk** indien
$$\forall w \in \Sigma^* : \delta^*(p, w) \in F \iff \delta^*(q, w) \in F$$
Twee toestanden zijn **f-verschillend** indien ze niet f-gelijk zijn.

Als p en q f-verschillend zijn, dan wil dat zeggen dat er een woord w bestaat zodanig dat

$$\delta^*(p, w) \in F \quad en \quad \delta^*(q, w) \notin F \text{ of omgekeerd.}$$

Nu in woorden een algoritme om sets van f-gelijke toestanden te vinden:

Init: een toestand p die geen eindtoestand is, is zeker f-verschillend van elke eindtoestand; alle andere paren toestanden zijn nog onbeslist

Repeat: neem een paar toestanden p en q dat nog onbeslist is: stel dat er een symbool a bestaat zodanig dat je met dat symbool van p en q gaat naar twee f-verschillende toestanden, dan beslis je dat p en q f-verschillend zijn

Consolideer: voor elk paar toestanden p en q waarvoor je nog niet beslist had, beslis nu dat p en q f-gelijk zijn; gebruik die gelijkheidsrelatie om Q (de toestanden) te partitioneren, t.t.z. te verdelen in disjuncte Q_i die samen Q uitmaken; de Q_i vormen de toestanden van de minimale DFA; hoe δ eruit ziet komt later meer formeel

Om wat schrijfwerk uit te sparen zullen we de notatie p_a gebruiken als afkorting voor $\delta(p, a)$.

[9] Veel auteurs beschouwen van in het begin enkel DFA's met die eigenschap en relaxen die later voor het gemak.

Algoritme 3.13.2. *F-gelijke toestanden*

Init: *Beschouw de graaf V met als knopen de toestanden van de DFA; voeg een boog toe tussen elke twee knopen waarvan er precies één in F zit; label die boog met ϵ ; een boog tussen knopen x en y, met een label l, zullen we aanduiden door (x, y, l)*

Repeat: *Indien er knopen p en q zijn waarvoor geldt dat*

- *er is geen boog tussen p en q*
- $\exists a \in \Sigma : \exists(p_a, q_a, \_) \in V$

kies dan een a waarvoor geldt dat $(p_a, q_a, \_) \in V$ en voeg de boog (p, q, a) toe aan V; ga terug naar het begin van Repeat;

anders: ga naar Gelijk;

Gelijk: *Beschouw de graaf G die als knopen heeft de toestanden uit Q en die een boog heeft tussen twee knopen p en q indien V* **geen** *boog heeft tussen p en q (m.a.w. de complementsgraaf); elke component van G is een klik (een volledig verbonden graaf, isomorf met K_n voor een n); laat Q_i de verzameling knopen in component i voorstellen; alle toestanden binnen één Q_i zijn f-gelijk; elke toestand in Q_i is f-verschillend van elke toestand in Q_j voor $i \neq j$*

Proof. De eindigheid van het algoritme is evident: in Repeat wordt één boog toegevoegd en het maximaal aantal bogen dat V kan hebben is $N(N-1)/2$ met N het aantal knopen van V.

We bewijzen dat

$$(p, q, \_) \text{ is een boog in } V \iff p \text{ en } q \text{ zijn f-verschillend}$$

$\Longrightarrow$: indien (p, q, X) een boog is in V, dan zijn er twee mogelijkheden: $X = \epsilon$ of $X = a \in \Sigma$; in het eerste geval hebben we onmiddellijk dat p en q f-verschillend zijn (neem daarvoor $w = \epsilon$ in het besluit na de definitie van f-gelijk op pagina 89); in het tweede geval hebben we dat er een boog bestaat van de vorm $(p_a, q_a, \_)$ in V: je ziet nu dat je het label kunt gebruiken om in het vorige basisgeval terecht te komen, dus $\exists w \in \Sigma^* : \exists(p_w, q_w, \epsilon) \in V$, dus p en q zijn f-verschillend.

$\Longleftarrow$: indien p en q f-verschillend zijn, dan bestaat er een w zodat $\delta^*(p, w) \in F$ *en* $\delta^*(q, w) \notin F$ of omgekeerd; als die w de lege string is, dan is het besluit onmiddellijk; in het andere geval heeft w een laatste symbool $z \in \Sigma$ en kan geschreven worden als $w = vz$; we hebben dan $\delta^*(p, w) = \delta(\delta^*(p, v), z)$ dus: tussen de toestanden $\delta^*(p, v)$ en $\delta^*(q, v)$ is er een boog; we kunnen nu dat laatste symbool van v kwijtgeraken enzovoort tot we zullen uitkomen op: er is een boog tussen $\delta^*(p, \epsilon)$ en $\delta^*(q, \epsilon)$ en we zijn klaar. ■

We hebben nu in de DFA de equivalentieklassen van f-gelijke toestanden gevonden - de Q_i op het einde van het algoritme - en zijn nu klaar om de DFA_{min} te definiëren: we vertrekken van een DFA $(Q, \Sigma, \delta, q_s, F)$ zonder onbereikbare toestanden.

DFA_{min} bestaat uit $(\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{q_s}, \tilde{F})$ waarbij

- $\tilde{Q} = \{Q_1, Q_2, ...\}$ waarbij de Q_i verkregen zijn in het algoritme
- $\tilde{\delta}(Q_i, a) = Q_j$ waarbij Q_j verkregen wordt door: neem een $q \in Q_i$ (*) en neem dan de Q_j zodanig dat $\delta(q, a) \in Q_j$
- $\tilde{q_s}$ is de Q_i waarvoor geldt dat $q_s \in Q_i$
- $\tilde{F}$ is de verzameling van Q_i waarvoor geldt dat $Q_i \cap F \neq \emptyset$

Figuur 3.13 illustreert voor de DFA van Figuur 3.12 hoe V evolueert en hoe de complementsgraaf er uitziet.

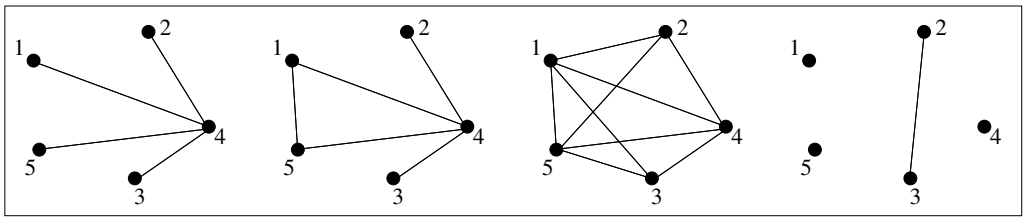


Figure 3.13: 4 tussenstappen in het algoritme

Zelf doen:

In (*) hierboven is het niet belangrijk welke $q \in Q_i$ gekozen wordt: bewijs dat.

Bewijs dat als $Q_i \cap F \neq \emptyset$, dan $Q_i \cap F = Q_i$ (m.a.w. elk element van Q_i zit in F).

Bewijs dat in DFA_{min} elke twee toestanden f-verschillend zijn.

Bewijs tenslotte dat $L_{DFA} = L_{DFA_{min}}$

Wat als je DFA ook onbereikbare toestanden had en je voert die minimisatieprocedure uit?

We zouden nu graag bewijzen dat de voorheen geconstrueerde DFA_{min} een minimaal aantal toestanden heeft. We bewijzen een iets algemenere stelling:

Stelling 3.13.3. *Als $DFA_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_s, F_1)$ een machine is zonder onbereikbare toestanden en waarin elke twee toestanden f-verschillend zijn, dan bestaat er geen machine met strikt minder toestanden die dezelfde taal bepaalt.*

Proof. Laat DFA_1 als toestanden hebben $\{q_s, q_1, ..., q_n\}$, waarbij q_s de starttoestand is. Stel dat $DFA_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, p_s, F_2)$ minder toestanden heeft dan DFA_1.

Vermits in DFA_1 elke toestand bereikbaar is, bestaan er strings $s_i, i = 1..n$ zodanig dat $\delta_1^*(q_s, s_i) = q_i$.

Vermits DFA_2 minder toestanden heeft moet voor een $i \neq j$

$$\delta_2^*(p_s, s_i) = \delta_2^*(p_s, s_j).$$

Vermits q_i en q_j f-verschillend zijn, bestaat een string v zodanig dat

$$\delta_1^*(q_i, v) \in F_1 \wedge \delta_1^*(q_j, v) \notin F_1 \text{ of omgekeerd.}$$

Dus ook $\delta_1^*(q_s, s_i v) \in F_1 \wedge \delta_1^*(q_s, s_j v) \notin F_1$ of omgekeerd. Dit betekent dat DFA_1 van de strings $s_i v$ en $s_j v$ er juist één accepteert.

Maar: $\delta_2^*(p_s, s_i v) = \delta_2^*(\delta_2^*(p_s, s_i), v) = \delta_2^*(\delta_2^*(p_s, s_j), v) = \delta_2^*(p_s, s_j v)$ hetgeen betekent dat DFA_2 ofwel beide strings $s_i v$ en $s_j v$ accepteert, of beide verwerpt.

Dus kunnen DFA_1 en DFA_2 niet dezelfde taal bepalen. ■

De vroeger geconstrueerde DFA_{min} heeft geen onbereikbare toestanden en elke twee toestanden zijn f-verschillend, dus heeft DFA_{min} een minimaal aantal toestanden.

Twee DFA's zijn pas echt gelijk als hun toestanden dezelfde zijn, hun δ en hun finale toestanden. Maar toch kunnen twee DFA's zo hard op elkaar gelijken dat hun grafische voorstelling er hetzelfde uitziet op de naam van de toestanden na. Om dat uit te drukken is er de notie van isomorfe DFA's.

Definitie 3.13.4. *Isomorfisme DFA's*
$DFA_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{s1}, F_1)$ is **isomorf** met $DFA_2 = (Q_2, \Sigma, q_{s2}, \delta_2, F_2)$ indien er een bijectie $b : Q_1 \to Q_2$ bestaat zodanig dat

- $b(F_1) = F_2$
- $b(q_{s1}) = q_{s2}$
- $b(\delta_1(q, a)) = \delta_2(b(q), a)$ (zie Figuur 3.14)

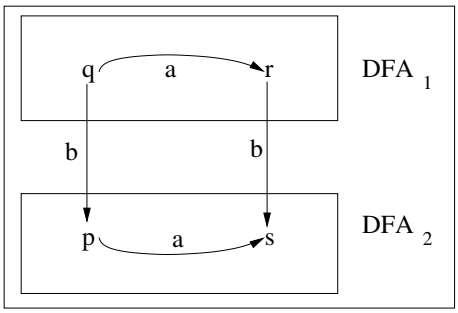


Figure 3.14: Commutatief diagram voor b en δ_i

Het is gemakkelijk om in te zien dat twee isomorfe DFA's dezelfde taal bepalen.

We kunnen nu rechtsreeks bewijzen dat de minimale DFA uniek is op isomorfisme na - probeer het! Maar het kan ook langs een elegante omweg. De bagage daarvoor krijg je in de volgende sectie.

Het pompen van strings in reguliere talen

We bekijken hier een manier om van een taal aan te tonen ze niet regulier is.

Neem een reguliere taal L met oneindig veel strings. Voor L bestaat een DFA. Die DFA heeft $N = \#Q$ toestanden. Neem een string in L die langer is dan N, en begin met die string in de hand op je tocht van de starttoestand naar een eindtoestand. Vermits er maar N toestanden zijn en je string meer dan N lang is en je bij elke overgang juist één symbool achterlaat, moet je op je weg naar de eindtoestand minstens één toestand S twee keer (of meer) tegenkomen: je hebt ergens een kring gemaakt. Tijdens die kring heb je een substring van de oorspronkelijke string gebruikt, t.t.z. je initiële string is van de vorm xyz, waarbij x, y en z substrings zijn, x het stuk voor je aan S kwam, y het stuk van S tot de eerstvolgende weer aan S, en z alles erna. Probeer je er nu van te overtuigen dat je die kring twee keer zal doen als je als initiële string $xyyz$ had gekregen, en dat $xyyz$ ook wordt aanvaard. En hetzelfde voor xz, en $xyyyz$ ... en xy^iz voor elke i.

Formeel nu:

Stelling 3.14.1. *Het pompend lemma voor reguliere talen*
Voor een reguliere taal L bestaat een pomplengte d, zodanig dat als $s \in L$ en $|s| \geq d$, dan bestaat er een verdeling van s in stukken x, y en z zodanig dat $s = xyz$ en

1. $\forall i \geq 0 : xy^i z \in L$
2. $|y| > 0$
3. $|xy| \leq d$

Proof. Neem een DFA die L bepaalt. Neem $d = \#Q + 1$.

Neem een willekeurige $s = a_1 a_2 ... a_n$ met $n \geq d$. Beschouw de accepterende sequentie van toestanden $(q_s = q_1, q_2, ..., q_f)$ voor s; die heeft lengte strikt groter dan d, dus zijn er bij de eerste d zeker twee toestanden gelijk (omdat er maar $d - 1$ toestanden zijn). Stel dat q_i en q_j gelijk zijn met $i < j \leq d$ dan nemen we $x = a_1 a_2 ... a_i$ en $y = a_{i+1} ... a_j$ en z de rest van de string. Alles volgt nu direct. Figuur 3.15 illustreert de verdeling van s in xyz. ■

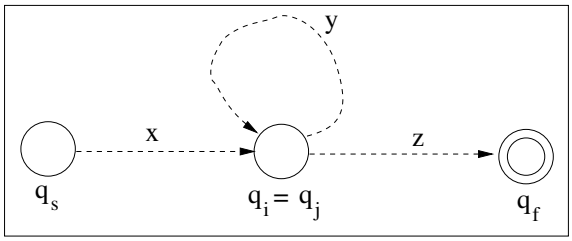


Figure 3.15: Illustratie van de verdeling van de string

Het pompend lemma gebruiken

Het is belangrijk eerst voor jezelf uit te maken dat het pompend lemma niet nuttig is om te bewijzen dat een taal regulier is - probeer maar :-)

We kunnen het wel gebruiken om te bewijzen dat een gegeven taal niet regulier is. Als voorbeeld nemen we nog eens de taal $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ over het alfabet $\{a, b\}$.

Stel dat er voor die taal een pomplengte d bestond, beschouw dan de string $s = a^d b^d$. Neem een willekeurige opdeling van $s = xyz$ met $|y| > 0$. Dan zijn er drie mogelijkheden

- y bevat alleen a's: dan bevat xyyz meer a's dan b's en zit dus niet in L

- y is van de vorm $a^i b^j$ met $i \neq 0, j \neq 0$: dan bevat xyyz niet alle a's voor de b's, en zit dus niet in L
- y bevat alleen b's: dan bevat xz meer a's dan b's en zit dus niet in L

Bijgevolg kan L niet regulier zijn.

We hebben punt 3 van het lemma niet gebruikt. Als je dat wel wil doen, dan gaat het bewijs dat L niet regulier is soms korter of gemakkelijker. In dit geval wordt het:

Stel dat er voor die taal een pomplengte d bestond, beschouw dan de string $s = a^d b^d$. Neem een willekeurige opdeling van $s = xyz$ met $|y| > 0$ en $|xy| \leq d$. Dan bestaat y uitsluitend uit a's en dus bevat xz minder a's dan b's en zit dus niet in L.

Merk op: Het pompend lemma gebruiken om te bewijzen dat L niet in RegLan zit, heeft de volgende ingrediënten:

- voor een willekeurig getal d gekozen als pomplengte
- bestaat een string s langer dan d
- waarvoor **elke** opdeling pompen verhindert

Vooral dat laatste realiseren is belangrijk - hier een voorbeeld: neem L de taal gegenereerd door de reguliere expressie ab^*c. We gaan (verkeerdelijk) bewijzen dat L niet regulier is door (foutief) gebruik te maken van het pompend lemma. Neem een willekeurige pomplengte d (groter dan bijvoorbeeld 10), en neem een willekeurige string met lengte groter dan d+1. De string is van de vorm ab^ic met $i > 9$. Neem voor x,y en z uit de stelling $x = \epsilon$, $y = a$ en $z = b^ic$. Het is nu duidelijk dat xyyz niet behoort tot L en dus kunnen we de string niet pompen. Dus is L niet regulier ...

Zelf doen:

Welke fout werd hierboven gemaakt?

Definieer wat talen en gebruik het pompend lemma om na te gaan of ze regulier (kunnen) zijn. Is de taal van reguliere expressies regulier?

Bestaat een niet-reguliere taal waarvan elke string kan gepompt worden?

Bestaat er een minimale pomplengte voor elke taal? Is er een verband met de minimale DFA voor die taal?

Doorsnede, verschil en complement van DFA's

We hebben al wel de unie van reguliere talen bekeken, maar nog niet de andere gebruikelijke set-operaties: doorsnede, (symmetrisch) verschil en complement. Stel gegeven twee DFA's $(Q_i, \Sigma, \delta_i, q_{si}, F_i)$ voor i=1,2. We maken een generische product DFA $(Q, \Sigma, \delta, q_s, F)$ als volgt:

- $Q = Q_1 \times Q_2$
- $\delta(p \times q, x) = \delta_1(p, x) \times \delta_2(q, x)$
- $q_s = q_{s1} \times q_{s2}$

Nu moeten we enkel nog F bepalen om te komen tot een volledige definitie. Dat kan natuurlijk op verschillende manieren. Hier zijn er een aantal:

- $F = F_1 \times F_2$: de DFA is nu de doorsnede van de twee talen
- $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$: de DFA is nu de unie van de twee talen
- $F = F_1 \times (Q_2 \setminus F_2)$: de DFA bepaalt nu de strings die tot L_1 behoren, maar niet tot L_2
- $F = (Q_1 \setminus F_1) \times (Q_2 \setminus F_2)$: de DFA bepaalt nu de strings die tot geen van beide talen behoren

De bovenstaande constructies tonen aan dat de unie (dat wisten we al), de doorsnede, het verschil en het symmetrisch verschil van twee reguliere talen ook regulier is. Daaruit volgt ook dat het complement van een reguliere taal regulier is, want $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$.

Zelf doen:

> Vind een eenvoudigere constructie van een complements-DFA als de DFA van een taal gegeven is.
>
> Als diezelfde constructie wordt gedaan op een NFA, krijg je dan nog wat je bedoelde? Waarom (niet)?

Reguliere expressies en lexicale analyse

Met een reguliere expressie kan dikwijls gemakkelijk gespecifieerd worden welke *input* in een bepaalde context toegelaten is. Bijvoorbeeld:

$$20(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)$$

geeft aan dat ergens alleen een jaartal in deze eeuw mag ingetypt worden.

Voor programmeertalen wordt heel dikwijls van RE's gebruik gemaakt om het lexicon van de taal te definiëren. Een klein stukje van het lexicon van Java zou kunnen zijn: $(a|b|c)(a|b|c|0|1|2)^* \mid (-|\epsilon)(1|2)(0|1|2)^*$ waarmee we dan identifiers kunnen beschrijven die met één van de letters a,b of c beginnen en dan nog een willekeurig aantal letters en cijfers (enkel 0,1,2) kunnen bevatten, en gehele getallen die optioneel een minteken hebben en dan ...

Het wordt snel omslachtig als we geen afkortingen gebruiken en het is dus gebruikelijk om zulke specificatie van het lexicon te doen als volgt:

$$PosCijfer \leftarrow 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$$

$$Cijfer \leftarrow PosCijfer \mid 0$$

en dan kan dat jaartal voorgesteld worden als

$$DezeEeuw \leftarrow 20CijferCijfer$$

en de algemene vorm van een integer als $(+|-|\epsilon)PosCijfer\ Cijfer^* \mid 0$

en voor een veld waarin een bankrekeningnummer moet ingetypt worden:

$$BANKNR \leftarrow Cijfer^3(- \mid \epsilon)Cijfer^7(- \mid \epsilon)Cijfer^2$$

Op die manier wordt het nu eenvoudig om een beschrijving te geven van het lexicon van bijvoorbeeld een programmeertaal. Hier is een stukje uit de beschrijving van Java:

$$JavaProgr \leftarrow (Id|Int|Float|Op|Delimiter)^*$$

$$Id \leftarrow Letter\ (Letter|Cijfer)^*$$

$$Cijfer \leftarrow PosCijfer \mid 0$$

$$PosCijfer \leftarrow 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$$

$$Teken \leftarrow (+|-|\epsilon)$$

$$Unsigned \leftarrow PosCijfer\ Cijfer^*$$

$$Int \leftarrow Teken\ Unsigned$$

$$Float \leftarrow Int\ .\ Unsigned$$

...

Die beschrijving kan gebruikt worden om een lexer te maken voor Java, t.t.z. een programma dat aan lexicale analyse van een reeks tekens doet en beslist of ze behoren tot de taal (Java in dit geval). Er bestaan natuurlijk tools om gegeven een beschrijving van een lexicon m.b.v. reguliere expressies en afkortingen zoals hierboven, de benodigde automaten te genereren en de juiste glue-code om het zaakje werkende te houden. Zo vind je flex (zie `http://flex.sourceforge.net/`) dat C-code genereert: die C-code implementeert de DFA's en de glue-code. jflex (`http://www.jflex.de/`) is op hetzelfde principe gebaseerd en genereert Java-code. flex en jflex zijn lexicale analyse generatoren.

Zelf doen:

Lees meer over (j)flex.

Probeer vanuit een reguliere expressie E een Prolog programma te genereren, met een predicaat lex/1 dat opgeroepen met een string s slaagt alss s tot L_E behoort: een string zoals abc stel je in Prolog voor door $[a, b, c]$. Een RE zoals $a^*b \mid c$ kan je voorstellen als de term $of([ster(a), b], [c])$ (maar kan ook anders).

De beschrijving van bijvoorbeeld *JavaProgr* hierboven, is een BNF-grammatica, anders gezegd *staat in Backus-Nauer vorm*: eigenlijk is die bedoeld voor context-vrije talen. BNF kan je ook gebruiken voor reguliere talen, omdat die ook context-vrij zijn: zie Sectie 3.19.

Varianten van eindige toestandsautomaten

Transducer

Een transducer zet een string om in een andere: we passen de definitie van een DFA een beetje aan, zodat ook output kan geproduceerd worden. Eén figuur is bijna een definitie waard:

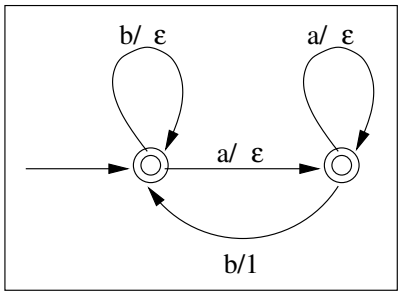


Figure 3.16: Een eenvoudige transducer

De labels zijn nu van de vorm a/x waarbij a in het inputalfabet zit en x in een outputalfabet (inbegrepen de lege string). Wat voor de / staat wordt gebruikt om de weg te vinden in de transducer alsof het een DFA was. Wat na de / staat wordt op de output gezet als die boog genomen wordt. Bovenstaande transducer accepteert elke string en geeft als output een 1 voor elke b die vlak na een a komt.

Een optelchecker m.b.v. een DFA

Een DFA kan alleen gebruikt worden om te beslissen of een string behoort tot een taal. Zo zou je kunnen een taal definiëren van strings die correcte optellingen voorstellen en als die taal regulier is er een DFA voor bouwen. Hier is een poging: $\Sigma = \{0, 1\}$. De twee getallen die we willen optellen en het resultaat komen in binair, omgekeerd en we maken ze even lang door bij de kortste(n) wat leidende nullen toe te voegen. Dus als we 3 willen optellen bij 13, met resultaat 16, dan hebben we de drie bitstrings 11000 10110 en 00001. Die mengen we nu systematisch, t.t.z. we maken groepjes van 3 bits die op de i-de plaats voorkomen en schrijven die groepjes achter elkaar. Dus we hebben

110 100 010 010 001

waarbij de blanco's enkel dienen om de groepering per drie te laten zien. Dus de string 110100010010001 stelt de correcte optelling 3+13=16 voor. Een DFA voor de taal van correcte optellingen staat in Figuur 3.17.

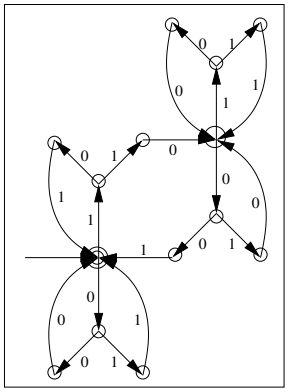


Figure 3.17: Een optelchecker

Een opteller m.b.v. een transducer

Optellen bestaat eigenlijk in: gegeven twee getallen als input, output de som. Dat kan met een transducer: gebruik dezelfde voorstelling van de twee getallen die je wil optellen als hiervoor, en meng die op dezelfde manier, dus 3+13 wordt voorgesteld als de string 1110010100. Figuur 3.18 toont twee optel-transducers die van de optelchecker zijn afgeleid.

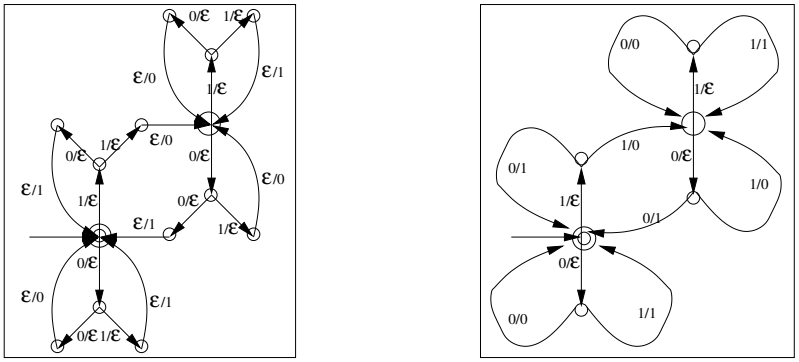


Figure 3.18: Twee transducers die als output de som geven

Zelf doen:

Kan je met een transducer ook andere rekenkundige bewerkingen doen, bijvoorbeeld min of maal?

Is de output van een transducer ook een reguliere taal?

Kan je een transducer schrijven die elk derde teken uit een inputstring geeft?

Kan je een transducer schrijven die elk derde teken uit een inputstring niet geeft?

Kan je een transducer schrijven die inputstrings omgekeerd uitschrijft?

Kan je elke reguliere taal als output van een transducer krijgen?

Two-way finite automata

Een DFA wordt ook wel een *one-way finite automaton* genoemd. De reden is dat je hem ook kan beschrijven als een machine met een invoerband waarop de inputstring staat. Die machine heeft een leeskop die in de begintoestand op het eerste teken staat, en bij elke overgang één positie naar rechts opschuift in de input: altijd in dezelfde richting, namelijk naar het einde van de string toe.

Het is slechts een kleine aanpassing aan de automaat om toe te laten dat de leeskop in twee richtingen mag bewegen: daarvoor pas je de definitie van δ gepast aan (zie in hoofdstuk 4 hoe dat voor de Turingmachines gebeurt). Je krijgt dan een 2DFA.

Van andere klassen van automaten is het geweten dat meer vrijheid laten in de manipulatie van het *geheugen* aanleiding geeft tot meer berekeningskracht: om dit te appreciëren moeten we daarmee eerst nog kennismaken natuurlijk, maar denk eraan bij de PDA en de LBA.

De vraag *is een 2DFA krachtiger dan een DFA*, of *zijn er niet-reguliere talen die met een 2DFA kunnen herkend worden* is dus van belang. Het blijkt dat de 2DFA ook enkel de reguliere talen bepaalt.

Büchi automaten

Büchi[10] automaten trekken op NFA's maar je geeft er geen eindige strings aan, wel oneindig lange: er is dus geen moment waarop je string *op* is bij het doorlopen van de automaat en de definitie van welke strings geaccepteerd worden door de Büchi automaat moet worden aangepast. Die definitie wordt:

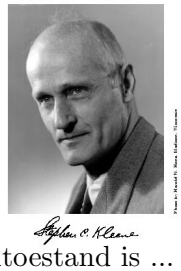
Definitie 3.17.1. Een oneindige string s wordt aanvaard door een Büchi automaat indien de rij toestanden waarlangs je passeert oneindig dikwijls een aanvaardende toestand heeft.

Je kan dat natuurlijk niet uitproberen, maar daarvoor dienen Büchi automaten niet noodzakelijk: je modelleert er een probleem mee (bijvoorbeeld een oneindig repetitief process, een protocol ...) en bewijst dan voor welke strings de acceptance conditie waar is.

Niet-deterministische Büchi automaten zijn strikt sterker dan deterministische Büchi automaten: als voorbeeld kan je voor taal $(a|b)^*b^\omega$ eens een Büchi automaat proberen te maken.

[10] Julius Büchi

Referenties



Veel van wat je hierboven leerde is afkomstig van Stephen Kleene, die je ook al kende van een fixpoint stelling. Hij heeft ook bijdragen geleverd in logica, recursie theorie en intuïtionisme.

In moderne teksten over reguliere talen/expressies/machines is de volgorde niet altijd dezelfde, maar de vorige hoofdstukken hebben aangetoond dat het kip&ei probleem niet bestaat: ze zijn equivalent. Ook zijn er dikwijls kleine verschillen in de basisdefinities, maar ook die maken niks uit: bijvoorbeeld of δ totaal is of niet, of er meer dan één eindtoestand is ...

Eenzelfde diversiteit in aanpak/definities vinden we later ook terug bij andere talen/machines en we proberen oog te hebben voor die verschillen, maar de equivalenties ervan in te zien.

Referenties:

- Dexter C. Kozen *Automata and Computability*
- Peter Linz *An Introduction to Formal Languages and Automata*
- Michael Sipser *Introduction to the Theory of Computation*
- John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*
- Marvin Lee Minsky *Computation: Finite and Infinite Machines (Automatic Computation)*

Als je hierdoor begeesterd wordt, vergeet dan ook niet een andere standaard referentie: *Regular algebra and finite machines*[11] van John Horton Conway - dezelfde die *The Game of Life* uitvond dat later in deze tekst nog aan bod komt, en nog zoveel andere boeiende zaken (o.a. het *Angels and Devils game*) die aan ons inzicht in algoritmiek rechtsreeks aanbelangen.

[11] Dit werk staat niet in onze bib, maar als je geïnteresseerd bent, kom eens langs.

Zelf doen: Als L1 en L2 reguliere talen zijn, is L3 dan ook regulier? We spreken af dat het alfabet altijd hetzelfde is en minstens a en b bevat. We gebruiken de notatie $\hat{s}$ om de string aan te duiden die dezelfde tekens als s bevat maar in omgekeerde volgorde. Schrijf telkens formeel neer wat L3 is.

L3 is strings van gelijke lengte uit L1 en L2 gemengd (schrijf formeel neer wat gemengd is)

L3 = $\widehat{L1}$

L3 is strings van even lengte uit L1

L3 is strings s van even lengte uit L1 en die dan in twee gekapt s1s2 met gelijke lengte en dan s1 concat omgekeerde van s2

L3 is strings s van L1 en dan s concat omgekeerde van s

L3 is strings van L1 met elke a vervangen door b

L3 is alles uit L1 dat niet in L2 zit

L3 is de taal van strings uit L1 waarin de symbolen op de even plaatsen weggenomen zijn

$L3 = \{x | \exists y \in L2, xy \in L1\}$

$L3 = \{x | \exists y \in L2, yx \in L1\}$

Contextvrije talen en hun grammatica

Reguliere expressies geven een manier om een taal te bepalen. Een kleine uitbreiding aan RE's is het toelaten van *afkortingen* voor RE's om op die manier kortere beschrijvingen van een taal te verkrijgen. Een afkorting bestaat erin van een naam te geven aan een ding en als je op een bepaalde plaats de naam gebruikt hebt, mag je daar het ding zelf zetten (of een kopie ervan) en dan is de betekenis nog dezelfde en de naam is weg. Maar bijvoorbeeld in

$$\text{Haakjes} \rightarrow \text{HaakjesHaakjes} \mid [\text{Haakjes}] \mid \epsilon$$

kan je het symbool Haakjes niet kwijtgeraken door substitutie. Toch kunnen we die regel gebruiken om een taal te genereren. Zulke regels vormen een *contextvrije grammatica*. Voor we een definitie geven, eerst nog wat voorbeelden:

Voorbeeld 3.19.1.

- $S \rightarrow aSb$

  $S \rightarrow \epsilon$

  Deze grammatica beschrijft strings van de vorm $a^n b^n$

- $S \rightarrow PQ$

  $P \rightarrow aPb$

  $P \rightarrow \epsilon$

  $Q \rightarrow cQd$

  $Q \rightarrow \epsilon$

  Deze grammatica beschrijft strings van de vorm $a^n b^n c^m d^m$

- $Stat \rightarrow Assign$

  $Stat \rightarrow ITE$

  $ITE \rightarrow If\ Cond\ Then\ Stat\ Else\ Stat$

  $ITE \rightarrow If\ Cond\ Then\ Stat$

  $Cond \rightarrow Id == Id$

  $Assign \rightarrow Id := Id$

  $Id \rightarrow a$

  $Id \rightarrow b$

  $Id \rightarrow c$

Informeel kunnen we zeggen: een contextvrije grammatica (CFG) bestaat uit regels; aan de linkerkant van een regel staat een niet-eindsymbool; aan de rechterkant staat een opeenvolging van eindsymbolen, niet-eindsymbolen en ϵ . Er is een startsymbool.

Je kan een CFG gebruiken om strings te genereren, en om na te gaan of een string voldoet aan de grammatica. Genereren doe je door een afleiding te maken vertrekkend van het startsymbool. Voor het eerste voorbeeld is wat volgt een afleiding:

$$S \rightarrow\ aSb \rightarrow\ aaSbb \rightarrow\ aabb$$

De idee achter afleiding is: in een string waarin nog een niet-eindsymbool staat, kies een niet-eindsymbool X en vervang X door de rechterkant van een regel waarin X links voorkomt. Begin met het startsymbool en werk door tot er alleen nog eindsymbolen staan.

We kunnen die afleiding ook voorstellen in een *syntax boom* of *parse tree*: zie Figuur 3.19.

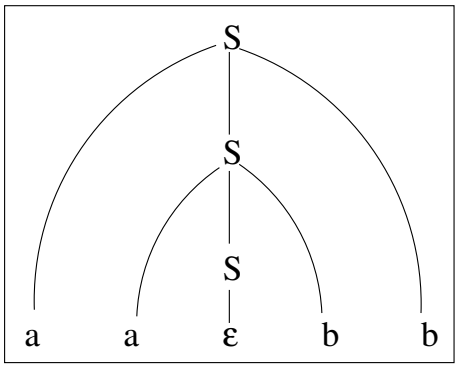


Figure 3.19: Syntaxboom van aabb

Definitie 3.19.2. *Contextvrije grammatica - CFG*
Een contextvrije grammatica is een 4-tal (V, Σ, R, S) waarbij

- V een eindige verzameling niet-eindsymbolen is (ook variabelen genoemd, of nonterminals)
- Σ een eindig alfabet van eindsymbolen (terminals), disjunct met V
- R is een eindige verzameling regels (of producties); een regel is een koppel van één niet-eindsymbool en een string van elementen uit $V \cup \Sigma_\epsilon$;
  we schrijven de twee delen van zulk een koppel met een $\rightarrow$ ertussen
- S is het startsymbool en behoort tot V

Dikwijls ligt het voor de hand welke de eindsymbolen zijn en welk symbool het startsymbool is: we geven dan alleen de regels.

Definitie 3.19.3. *Afleiding m.b.v. een CFG*
Gegeven een CFG (V, Σ, R, S). Een string f over $V \cup \Sigma_\epsilon$ wordt afgeleid uit een string b over $V \cup \Sigma_\epsilon$ m.b.v. de CFG als er een eindige rij strings $s_0, s_1, ..., s_n$ bestaat zodanig dat

- $s_0 = b$
- $s_n = f$
- s_{i+1} verkregen wordt uit s_i (voor $i < n$) door in s_i een niet-eindsymbool X te vervangen door de rechterkant van een regel waarin X links voorkomt.

We noteren: $s_i \Rightarrow s_{i+1}$ en $b \Rightarrow^* f$

Definitie 3.19.4. *Taal bepaald door een CFG*
De taal L_{CFG} bepaald door een CFG (V, Σ, R, S) is de verzameling strings over Σ die kunnen afgeleid worden van het startsymbool S; formeel: $L_{CFG} = \{s \in \Sigma^* | S \Rightarrow^* s\}$.

Definitie 3.19.5. *Contextvrije taal - CFL*
Een taal L is **contextvrij** indien er een CFG bestaat zodanig dat $L = L_{CFG}$

We zullen i.v.m. contextvrije talen zowat dezelfde weg bewandelen als voor reguliere talen: we definiëren een machine die contextvrije talen bepaalt en we bewijzen dat die machines *equivalent* zijn met de contextvrije grammatica's; we bestuderen het verschil tussen deterministische en niet-deterministische versies van die machines; we maken een versie van het pompend lemma voor contextvrije talen; we bestuderen de algebraïsche operaties op de contextvrije talen. We zullen niet aan minimizatie doen. We zullen aandacht besteden aan ambiguïteit: dit probleem hebben we niet bij reguliere talen besproken omdat het daar niet belangrijk is.

Ambiguïteit

We nemen als voorbeeld de CFG Arit1

- Expr → Expr + Expr
- Expr → Expr * Expr
- Expr → a

waarbij Expr het startsymbool is. Neem de string $a + a * a$: die zit duidelijk in de taal bepaald door de Arit1. Bekijk nu de twee afleidingen van die string (we onderlijnen de

gesubstitueerde non-terminal als er keuze is):

$$Expr \Rightarrow \underline{Expr} + Expr \Rightarrow a + Expr \Rightarrow a + \underline{Expr} * Expr$$
$$\Rightarrow a + a * Expr \Rightarrow a + a * a$$

en

$$Expr \Rightarrow Expr + \underline{Expr} \Rightarrow Expr + Expr * \underline{Expr} \Rightarrow Expr + \underline{Expr} * a$$
$$\Rightarrow Expr + a * a \Rightarrow a + a * a$$

In de eerste afleiding hebben we telkens het meest linkse niet-eindsymbool verder ontwikkeld, en in de tweede afleiding het meest rechtse. Maar als we die afleidingen omzetten naar een parse tree krijgen we twee keer hetzelfde. Die afleidingen zijn dus niet essentieel verschillend en dikwijls zullen we daarom ook enkel kijken naar meest-linkse[12] afleidingen.

Beschouw nu de volgende twee meest-linkse afleidingen van $a + a * a$:

$$Expr \Rightarrow Expr + Expr \Rightarrow a + Expr \Rightarrow a + Expr * Expr$$
$$\Rightarrow^* a + a * a$$

en

$$Expr \Rightarrow Expr * Expr \Rightarrow Expr + Expr * Expr \Rightarrow a + Expr * Expr$$
$$\Rightarrow^* a + a * a$$

of in termen van de overeenkomstige parse trees: zie Figuur 3.20:

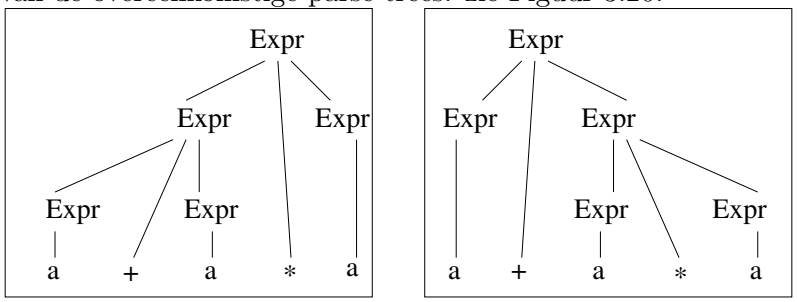


Figure 3.20: Twee parse trees voor $a + a * a$

De string a+a*a heeft meerdere meest-linkse afleidingen en dus ook meerdere parse trees: de string wordt daarom *ambigu* genoemd. We noemen de grammatica Arit1 ambigu omdat er strings bestaan in L_{Arit1} die ambigu zijn t.o.v. Arit1. A priori is het niet duidelijk of voor dezelfde taal ook een niet-ambigue grammatica bestaat. Eerst een nuttige definitie:

[12] In het engels: leftmost derivation.

Definitie 3.19.6. *Equivalente CFG's*
Twee contextvrije grammatica's $CFG1$ en $CFG2$ zijn equivalent indien
$$L_{CFG1} = L_{CFG2}$$

Je moet eigenlijk bewijzen dat dit een equivalentierelatie op de CFG's definieert, maar dat is natuurlijk kinderspel voor jullie.

Hier is een andere CFG Arit2:

- Expr $\rightarrow$ Expr + Term
- Expr $\rightarrow$ Term
- Term $\rightarrow$ Term $*$ a
- Term $\rightarrow$ a

Je kan nagaan dat Arit1 en Arit2 equivalent zijn.

Je kan ook nagaan dat $a + a * a$ nu enkel de meest-linkse afleiding

$Expr \Rightarrow Expr + Term \Rightarrow Term + Term \Rightarrow a + Term$

$\Rightarrow a + Term * a \Rightarrow a + a * a$

heeft en dat elke string slechts één parse tree heeft voor Arit2. Daarom noemen we Arit2 een niet-ambigue grammatica.

Niet elke contextvrije taal heeft een niet-ambigue CFG: zulk een contextvrije taal heet *inherent ambigu*. Hier is een voorbeeld van een inherent ambigue taal: $\{a^n b^n c^m, a^n b^m c^m | n, m \geq 0\}$. Het bewijs daarvan kan je vinden in het boek van Hopcroft-Motwani-Ullman, maar bewijs zelf dat de taal contextvrij is! Later hebben we het nog over ambiguïteit.

Als een niet-terminaal symbool aan de linkerkant van meerdere regels voorkomt, dan kunnen we die samennemen. Bijvoorbeeld kan grammatica Arit2 ook beschreven worden als:

- Expr $\rightarrow$ Expr + Term | Term
- Term $\rightarrow$ Term $*$ a | a

CFG's in een speciale vorm

Soms is het handig een meer restrictieve vorm van een grammatica te hebben, liefst zonder contextvrije talen uit te sluiten. Hier is zulk een vorm:

Definitie 3.19.7. *Chomsky Normaal Vorm*
Een CFG heeft de Chomsky Normaal Vorm als elke regel één van de volgende vormen heeft:

1. A $\rightarrow$ BC
2. A $\rightarrow$ α
3. S $\rightarrow$ ϵ

Daarin is α een eindsymbool, A is een niet-eindsymbool, en B en C zijn niet-eindsymbolen verschillend van S (het startsymbool).

Soms laat men de regel S $\rightarrow$ ϵ niet toe: dan kan die CFG niet de lege string afleiden natuurlijk.

Stelling 3.19.8. *Voor elke contextvrije grammatica bestaat een equivalente contextvrije grammatica in Chomsky Normaal Vorm.*

Proof. We geven een constructief bewijs: het is lang maar niet moeilijk. We vertrekken van een willekeurige CFG en transformeren hem terwijl we equivalentie bewaren naar Chomsky Normaal Vorm.

1. We beginnen met te zorgen dat er een startsymbool is dat alleen links in een regel voorkomt: als S het startsymbool is in de grammatica, vervang het dan overal door een nieuw niet-eindsymbool (bijvoorbeeld X) en voeg de regel $S \rightarrow X$ toe

2. Daarna voldoen we aan de derde eis van Chomsky Normaal Vorm:

stel dat we een regel $\mathcal{E} = A \rightarrow \epsilon$ hebben en een regel $\mathcal{R} = B \rightarrow \gamma$ waarin A voorkomt in γ, dan definiëren we de verzameling regels $V(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ als de verzameling regels van de vorm $B \rightarrow \eta$ waarbij η verkregen wordt uit γ door elke combinatie van voorkomens van A in γ weg te laten.

We transformeren de grammatica dan als volgt:

> zolang er regels $\mathcal{E} = A \rightarrow \epsilon$ en een regel $\mathcal{R} = B \rightarrow \gamma$ waarin A voorkomt zijn zodanig dat $V(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ nieuwe regels bevat, voeg $V(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ toe aan de grammatica

Zorg dat je inziet dat dit eindigt!

Daarna (dus ook nadat je het ingezien hebt :-) verwijderen we uit de bekomen grammatica alle regels van de vorm $A \to \epsilon$, behalve als $A = S$: dit mag de enige regel zijn die ϵ afleidt.

Zorg dat je inziet dat de bekomen grammatica nog dezelfde taal bepaalt: je kan dat doen door te redeneren op afleidingen.

3. Nu willen we afgeraken van de regels van de vorm $A \to B$. Voor een regel van de vorm $\mathcal{E} = A \to B$ en een regel van de vorm $\mathcal{R} = B \to \gamma$, definieer de regel $U(\mathcal{E}, \mathcal{R}) = A \to \gamma$.

> zolang er regels van de vorm $\mathcal{E} = A \to B$ (waarin B ook een niet-terminal is) en $\mathcal{R} = B \to \gamma$ bestaan en $U(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ een nieuwe regel is, voeg $U(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ toe aan de grammatica

Zorg dat je inziet dat dit eindigt!

Daarna (dus ook nadat je het ingezien hebt :-) verwijderen we uit de bekomen grammatica alle regels van de vorm $A \to B$.

Zorg dat je inziet dat de bekomen grammatica nog dezelfde taal bepaalt: je kan dat doen door te redeneren op afleidingen.

4. We hebben nu nog 3 soorten regels te behandelen:

(a) $A \to \gamma$ waar γ uit juist twee niet-terminalen bestaat: die laten we gerust

(b) $A \to \gamma$ waar γ minstens twee symbolen bevat: vervang elke terminal a door een nieuwe niet-terminaal A_a en voeg de regel $A_a \to a$ toe

(c) eventueel $S \to \epsilon$: die mag blijven

Zorg dat je inziet dat dit eindigt en dezelfde taal genereert!

5. de regels van de vorm $A \to X_1 X_2 ... X_n$ met $n > 2$ vervang je door
$A \to X_1 Y_1$, $Y_1 \to X_2 Y_2$, ..., $Y_{n-2} \to X_{n-1} X_n$

Zorg dat je inziet dat dit eindigt en dezelfde taal genereert!

Is aan alle eisen voldaan nu? ■

De Chomsky normaal vorm heeft als voordeel dat we direct kunnen zien of de taal van een grammatica de lege string bevat, en dat elke parse tree (bijna) een volledige binaire boom is: dat zal van pas komen in het pompend lemma voor CFL's. Bovendien heeft elke afleiding van een string van lengte $n > 0$ lengte $2n - 1$.

Er bestaan nog een andere normaalvormen voor CFG's: bijvoorbeeld de Greibach[13] normaal vorm laat enkel regels toe van de vorm

- A $\rightarrow$ aX
- S $\rightarrow$ ϵ

waarin X een (mogelijk lege) sequentie is van niet-terminalen, en a een terminal. Het voordeel van die vorm is dat een afleiding van een string van lengte n niet langer kan zijn dan n. Als oefening kan je ook het analoog van de stelling op pagina 110 bewijzen voor de Greibach normaal vorm.

Zelf doen:

Bewijs dat een afleiding van een string van lengte $n > 0$ uit een grammatica in Chomsky normaalvorm lengte $2n - 1$ heeft.

Bewijs dat een afleiding van een string van lengte $n > 0$ uit een grammatica in Greibach normaalvorm lengte n heeft.

Kan je de transformatie naar Chomsky normaalvorm gebruiken om in te zien dat elke (zuiver) Prologprogramma kan getransformeerd worden naar een equivalent Prologprogramma met in elke clause juist nul of twee doelen?

[13] Sheila Greibach

De push-down automaat

Een FSA heeft behalve zijn toestand geen geheugen. Doordat er maar een eindig aantal toestanden zijn, kan een FSA dus niet onbegrensd *tellen* en niet al te veel talen bepalen. Een push-down automaat heeft een onbeperkt geheugen, doch het kan slechts op een beperkte manier gebruikt worden: het geheugen is georganiseerd als een stapel (of stack) en daarvan kan op elk ogenblik enkel de top geïnspecteerd worden. Verder kunnen er elementen worden bijgezet of afgehaald. Net zoals bij de reguliere automaten gebruiken we een PDA om van een string na te gaan of ie geaccepteerd wordt of niet: dat gebeurt door opeenvolgende tekens van de string te consumeren en afhankelijk van de huidige toestand en dat teken, naar een andere toestand over te gaan. Bij de PDA komt daar nog bij dat die overgang kan afhangen van de top van de stack, en dat er een teken kan bijgezet worden op de stack. Net zoals bij de reguliere automaten definiëren we de PDA direct met niet-determinisme.

Definitie 3.20.1. *Een push-down automaat*
Een push-down automaat is een 6-tal $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_s, F)$ waarbij

- Q is een eindige verzameling toestanden
- Σ is een eindig inputalfabet
- Γ is een eindig stapelalfabet
- δ is een overgangsfunctie met signatuur $Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma_\epsilon \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\epsilon)$
- q_s is de starttoestand
- $F \subseteq Q$ is een verzameling eindtoestanden

Deze definitie zegt nog niks over de werking. Eerst een grafische voorstelling van een PDA, in de stijl van de grafische voorstelling van een FSA. Als voorbeeld nemen we de PDA $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_s, F)$ met

- $Q = \{q_s, q_f, x, y\}$
- $F = \{q_f\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $\Gamma = \{m, \$\}$

De δ van de PDA kan je zien in de grafische voorstelling ervan in Figuur 3.21.

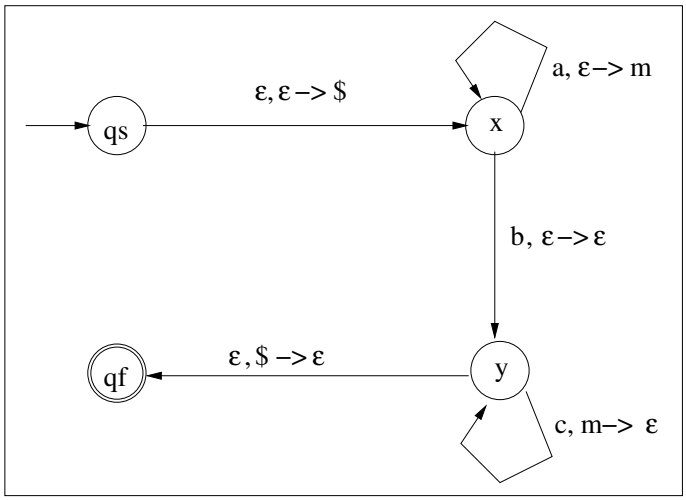


Figure 3.21: Een push-down automaat

De bedoeling van een label zoals $\alpha, \beta \to \gamma$ op een boog is

- indien α het eerste symbool is van de huidige string
- en β staat op de top van de stapel
- volg dan de boog en
  - verwijder α van de string
  - verwijder β van de stapel
  - zet γ op de stapel

Daarin mogen α, β en γ ook ϵ zijn, wat voor α wil zeggen: houd geen rekening met de huidige inputstring; voor β: houd geen rekening met de huidige top van de stapel; voor γ: push niets.

De bogen met hun labels specificeren dus de δ.

Als we nu beginnen in q_s met de string a^2bc^2, dan bevat de stapel $mm\$$ op het ogenblik dat we de eerste keer in y komen, en de string bestaat nog uit c^2. Na nog twee keer δ toepassen is de string helemaal geconsumeerd en nog één toepassing brengt ons in de eindtoestand. We zeggen: a^2bc^2 wordt geaccepteerd door de PDA, of a^2bc^2 behoort tot de taal door de PDA bepaald. Hier is een meer formele definitie van

Definitie 3.20.2. *Aanvaarding van een string s door een PDA*
Een string s wordt aanvaard door een PDA indien s kan worden opgesplitst in delen w_i, i= 1..m ($w_i \in \Sigma_\epsilon$), er toestanden q_j, j= 0..m zijn, en stacks $stack_k$, k=0..m ($stack_k \in \Gamma^*$), zodanig dat

- $stack_0 = \epsilon$ (de stack is leeg in het begin)
- $q_0 = q_s$ (we vertrekken in de begintoestand)
- $q_m \in F$ (we komen aan in een eindtoestand met een lege string)
- $(q_{i+1}, y) \in \delta(q_i, w_{i+1}, x)$ waarbij $x, y \in \Gamma_\epsilon$ en
  $stack_i = xt, \quad stack_{i+1} = yt$ met $t \in \Gamma^*$

De laatste bullet geeft aan dat de overgangen juist gebeuren volgens δ.

Let op: Bovenstaande definitie zegt niets over de stackinhoud op het ogenblik dat we in de eindtoestand komen: die zegt enkel dat we met een lege string in een eindtoestand moeten geraken. Er bestaan alternatieve definities van PDA: soms mag meer dan één symbool gepusht worden in één overgang. Soms wordt acceptatie gedefinieerd als: *de string is op en de stack is leeg* (dan is F zelfs van geen belang) en soms als *de string is op en de stack is leeg en we zitten in een eindtoestand.* Uiteindelijk zijn al deze definities equivalent wat betreft de talen die kunnen bepaald worden. Bijkomende eisen kunnen zijn: in elke overgang wordt ofwel een symbool gepusht ofwel gepopt maar niet beide, of er is slechts één eindtoestand ... maar ook dat verandert niets essentieels.

Definitie 3.20.3. *Taal bepaald door een PDA*
De taal L bepaald door een PDA bestaat uit alle strings die door de PDA aanvaard worden.

Het is duidelijk dat de taal $\{a^n bc^n | n \geq 0\}$ door een PDA bepaald wordt: Figuur 3.21 gaf een implementatie. Strings zoals aabc worden niet aanvaard.

Hoe tricky het is, zie je in Figuur 3.22: op het eerste zicht zou je kunnen denken dat die dezelfde taal aanvaardt, maar is dat wel zo?

Als je voor de PDA in Figuur 3.22 acceptatie definieert als *aankomen in de eindtoestand met lege stack*, dan bepaalt deze PDA wel dezelfde taal: de details van de definitie bepalen dus wel wat een bepaalde PDA juist accepteert, maar niet de klasse van talen die door een PDA kunnen bepaald worden.

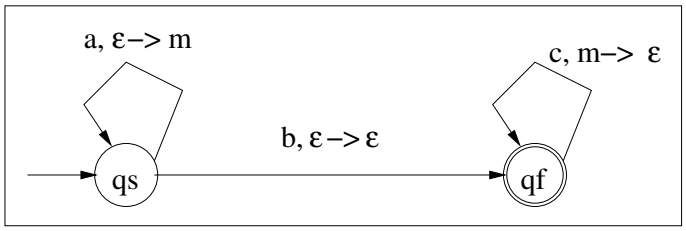


Figure 3.22: Een tweede push-down automaat

Equivalentie van CFG en PDA

We willen de volgende stelling bewijzen:

Stelling 3.21.1. *Elke push-down automaat bepaalt een contextvrije taal en elke contextvrije taal wordt bepaald door een push-down automaat.*

Proof. Er zijn duidelijk twee delen in deze stelling. Het eerste deel bewijzen we in het lemma op pagina 118, het tweede in het lemma op pagina 119. ■

Eerst wat voorbereidend werk en een voorbeeld.

We hebben voordien al eens gezegd dat in één push er meerdere symbolen bij mogen komen op de stapel zonder dat dat de kracht van PDA's verandert (als je het nog niet deed ... dit is een goed moment om het te bewijzen). We gaan daarvan gebruik maken, omdat het de beschrijving heel wat korter maakt.

Voorbeeld 3.21.2. *Beschouw de CFG Arit1 van pagina 107*

- $E \rightarrow\ E + E \qquad E \rightarrow\ E * E \qquad E \rightarrow\ a$

waarbij E het startsymbool is. En kijk nu eens naar de PDA in figuur 3.23.

Die PDA vertoont wat meer symmetrie dan je vertrekkend van een andere grammatica zou krijgen, maar hij is op de volgende manier systematisch geconstrueerd:

- *er zijn slechts 3 toestanden: de begintoestand q_s, de eindtoestand q_f en één hulptoestand x*
- *er is slechts één boog van q_s naar x: die kijkt niet naar de string of de stapel, en zet een marker \$ op de stapel en het beginsymbool*

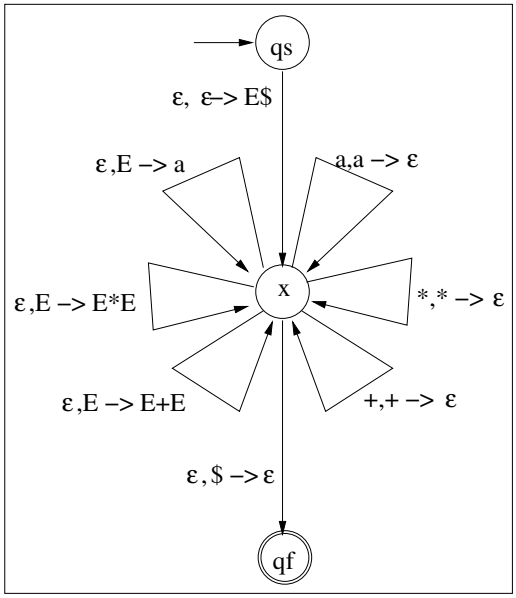


Figure 3.23: Een PDA afgeleid van Arit1

- *er is slechts één boog van x naar q_f: die consumeert niks van de string en haalt de marker \$ van de stapel*
- *de andere bogen gaan van x naar x; de labels corresponderen met*
  - *de symbolen uit het invoeralfabet: voor elke $\alpha \in \Sigma$, is er een boog met label $\alpha, \alpha \rightarrow \epsilon$; die bogen betekenen dus: als de top van de stapel gelijk is aan het eerste symbool van de string, consumeer dan beide*
  - *de regels van de grammatica: voor elke regel $X \rightarrow \gamma$ is er een label $\epsilon, X \rightarrow \gamma$; die bogen betekenen dus: als de top van de stapel een niet-eindsymbool X is, vervang het door de rechterkant γ van een regel in de grammatica waarvan X de linkerkant is; γ is een rij eind- en niet-eindsymbolen*

Zelf doen: Wat is de relatie tussen het inputalfabet en het stapelalfabet enerzijds en de terminals en non-terminals van de grammatica anderzijds?

We gebruiken die PDA eens om de string $a + a * a$ te parsen: tabel 3.3 laat de stapel en de string zien in de opeenvolgende toestanden. Merk op dat als we een reeks symbolen XYZ op de stapel willen pushen, we die eigenlijk in omgekeerde volgorde op de stapel willen hebben, en de representatie van een stapel is dan ook een string die we van voor aanvullen (zonder omkeren van XYZ) en waarvan we van voor weer wegnemen.

string	stapel	toestand
a+a∗a	ϵ	q_s
a+a∗a	E$	x
a+a∗a	E∗E$	x
a+a∗a	E+E∗E$	x
a+a∗a	a+E∗E$	x
+a∗a	+E∗E$	x
a∗a	E∗E$	x
a∗a	a∗E$	x
∗a	∗E$	x
a	a$	x
ϵ	$	x
ϵ	ϵ	q_f

Table 3.3: Parsing van $a + a * a$

Deze parsing geeft een meest-linkse afleiding. Die is niet noodzakelijk uniek: als je bij de tweede overgang E+E kiest i.p.v. E∗E dan kom je er ook nog!

Kan het zijn dat je vastloopt? Probeer eens om in de derde overgang E*E te kiezen i.p.v. E+E en je ziet het. Is dat erg?

Ga nu na dat elke string die door de Arit1 wordt bepaald, door de PDA in Figuur 3.23 wordt aanvaard en omgekeerd.

Dat voorbeeld generaliseren we direct tot het volgende lemma:

Lemma 3.21.3. *De constructie van een PDA uit een CFG zoals hierboven gegeven, levert een PDA die de taal L_{CFG} accepteert.*

Proof. Je kan nagaan dat er een één-éénduidig verband is tussen een afleiding in de CFG van een string s en een accepterende uitvoering van de PDA voor s. ■

Tenslotte nog een woordje over niet-determinisme en ambiguïteit: met bovenstaande constructie van een PDA uit een CFG bekomen we een niet-deterministische PDA indien er voor minstens één niet-terminaal symbool twee regels bestaan. Dat lijkt ambiguïteit te impliceren van de grammatica, maar dat is niet zo: ook grammatica Arit2 op pagina 109 geeft aanleiding tot een niet-deterministische PDA (met bovengaande constructie) maar Arit2 is een niet-ambigue grammatica.

Langs de andere kant kan je je afvragen of de uitspraak *indien er een deterministische PDA bestaat voor L, dan is L niet-ambigu* waar is.

De constructie van een PDA uit een CFG is zo gemakkelijk: slechts drie toestanden nodig

en een heel uniforme beschrijving van de overgangen. Het valt dan ook tegen dat we omgekeerd - van PDA naar CFG - zo veel meer werk hebben ... immers, niet elke PDA heeft slechts drie toestanden en onze methode van GNFA naar GNFA met slechts twee toestanden lijkt hier niet te werken.

Voor we de constructie beschrijven, veronderstellen we eerst dat de PDA van een bepaalde vorm is:

- er is slechts één eindtoestand
- de stapel wordt leeggemaakt voor we daarin terechtkomen
- elke transitie neemt één symbool weg van de stapel, of zet er één op, maar niet beide

We hebben die vorm al eens vermeld en je kan nu een bewijsje maken dat dit niet restrictief is.

Constructie van een CFG (V, Σ, R, S) uit een PDA $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_s, \{q_f\})$:

- $V = A_{p,q}$ waarbij $p, q \in Q$
- $S = A_{q_s,q_f}$
- R bestaat uit drie delen:
  - regels van de vorm $A_{p,p} \to \epsilon$ voor elke $p \in Q$
  - regels van de vorm $A_{p,q} \to A_{p,r}A_{r,q}$ voor alle $p, q, r \in Q$
  - regels van de vorm $A_{p,q} \to aA_{r,s}b$ waarbij
    $p, q, r, s \in Q, a, b \in \Sigma_\epsilon, t \in \Gamma, (r, t) \in \delta(p, a, \epsilon), (q, \epsilon) \in \delta(s, b, t)$

De intuïtie achter de constructie is de volgende: de strings die je met een initieel lege stapel van toestand p naar q brengen met lege stapel, worden gegenereerd door het niet-eindsymbool $A_{p,q}$.

Lemma 3.21.4. *Bovenstaande constructie van een CFG uit een PDA bewaart de taal.*

Proof. Het bewijs wordt dit jaar niet gezien. ■

Gevolg I: als een taal door een PDA wordt bepaald, dan is die taal contextvrij.

Gevolg II: elke reguliere taal is contextvrij. Dat komt doordat een FSA eigenlijk enkel maar een PDA is waarbij de stapel nooit meespeelt in de beslissingen.

Zelf doen: Er was een andere manier om in te zien dat elke reguliere taal contextvrij is: stel voor een gegeven reguliere taal een CFG op.

Afsluiter: We vermelden nog twee stellingen die inzicht geven in de structuur van contextvrije talen. De Chomsky-Schützenberger stelling zegt dat elke contextvrije taal essentieel de doorsnede is van een reguliere taal met een *geneste haakjestaal*[14] (mogelijk met meerdere soorten haakjes). De stelling van Parikh kan geformuleerd worden met behulp van een transformatie Ord van een taal: voor een gegeven string s is $Ord(s)$ de string die je verkrijgt door de symbolen van s in alfabetische volgorde te zetten. Bijvoorbeeld $Ord(bacabbc) = aabbbcc$. Parikh zegt nu dat voor elke contextvrije taal L er een reguliere taal R bestaat zodat $Ord(L) = Ord(R)$. M.a.w. afgezien van de volgorde van de symbolen zijn regulier en contextvrij gelijk!

[14] Die geneste haakjestalen worden ook wel Dyck talen genoemd, naar Walther von Dyck.

Een pompend lemma voor Contextvrije Talen

Stelling 3.22.1. *Voor een contextvrije taal L bestaat een getal p (de pomplengte) zodanig dat elke string s van L met lengte minstens p kan opgedeeld worden in 5 stukken u,v,x,y en z uit Σ^* zodanig dat $s = uvxyz$*

1. $\forall i \geq 0 : uv^ixy^iz \in L$
2. $|vy| > 0$
3. $|vxy| \leq p$

Proof. We gebruiken weer het duivenhokprincipe, maar nu op de parsetree voor lang genoege strings. Neem eerst een CFG in Chomsky normaalvorm voor L: dat werkt iets gemakkelijker, want elke regel heeft nu ofwel twee ofwel nul niet-terminalen aan de rechterkant. Laat het aantal niet-eindsymbolen in de CFG n zijn. ■

Voor een string s uit L bestaat er een parse tree. Als je van die boom de onderste takken wegsnoeit hou je een volledige binaire boom over want de grammatica staat in Chomsky normaalvorm. Die boom heeft hoogte minstens gelijk aan $log_2(|s|)$. Het langste enkelvoudig pad van de wortel van die boom bevat dus minstens $log_2(|s|) + 1$ knopen en als we s lang genoeg kiezen, dan is $log_2(|s|) + 1$ groter dan n en bijgevolg moet er op dat langste pad minstens één niet-eindsymbool - zeg X - herhaald worden. Neem de laagste X (noteren we door X_2) en zijn dichtste herhaling (X_1) op dat pad - X is zeker verschillend van het startsymbool (waarom?). Zie Figuur 3.24 voor een voorstelling van de zaken. We kunnen nu uit die parse tree een afleiding construeren waarvan we enkel wat tussenstappen laten zien:

$$S \Rightarrow^* uX_2z \Rightarrow^* uvX_1yz \Rightarrow^* uvxyz \text{ (a)}$$

In die afleiding zijn u,v,x,y,z strings uit Σ^* en bovendien zijn v en y niet tegelijkertijd leeg, want dan zou men uit X zichzelf kunnen afleiden en dat kan niet wegens de vorm van de grammatica.

Vermits (a) een geldige afleiding is, is

$$S \Rightarrow^* uX_2z \Rightarrow^* uxz$$

dat ook en ook

$$S \Rightarrow^* uXz \Rightarrow^* uvXyz \Rightarrow^* uvvxyyz$$

is er eentje en ...

We hebben dus al (1) en (2) van de opgave van de stelling, als we strings nemen die langer

zijn dan $2^{(n-1)}$: dat wordt onze pomplengte p.

We besluiten nu ook (3): vxy wordt afgeleid vanuit X met een parse tree die kleiner is dan n, dus hoogstens 2^{n-1} bladeren heeft en die corresponderen juist met vxy. Figuur 3.24 verduidelijkt dat nog eens. ■

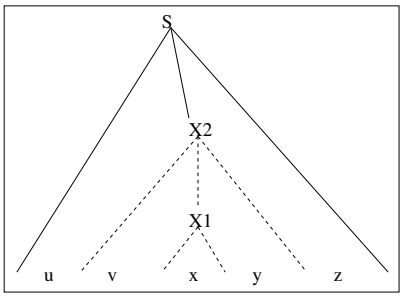


Figure 3.24: De parse tree met de repeterende non-terminal X

Toepassing van het pompend lemma voor CFL's

Neem de taal $L = \{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$. Stel dat er een pomplengte p bestaat. Neem een string s die langer is, namelijk $s = a^p b^p c^p$. Stel dat $s = uvxyz$ met $|vy| > 0$. Dan zijn er twee mogelijkheden:

1. v is van de vorm α^k en y is van de vorm β^l waarbij α en β in $\{a, b, c\}$ zitten; daarbij is $k + l > 0$; in dat geval kan uv^2xy^2z niet bestaan uit een gelijk aantal a's, b's en c's

2. v of y bevat meer dan één symbool uit $\{a, b, c\}$; in dat geval bevat v^2 of y^2 die symbolen niet in de juist volgorde en zit uv^2xy^2z niet in de taal

Gevolg: s kan niet gepompt worden en dus is L niet contextvrij.

Een algebra van contextvrije talen?

Voor de unie van twee contextvrije talen bepaald door de grammatica's CFG_1 en CFG_2[15] kunnen we gemakkelijk een CFG maken: stel dat de startsymbolen S_1 en S_2 zijn, maak dan een grammatica met de unie van de regels van de CFG_i, voeg de regels $S_{new} \rightarrow S_i$ toe en neem S_{new} als nieuwe startsymbool. Daarmee is bewezen dat de verzameling van contextvrije talen gesloten is voor de unie operator.

Hoe zit het met de doorsnede van CFL's? Neem als eindsymbolen $\{a, b, c\}$ en definieer $L_1 = \{a^n b^n c^m | n, m \geq 0\}$ en $L_2 = \{a^n b^m c^m | n, m \geq 0\}$. Het is duidelijk dat de L_i contextvrij zijn[16]. De doorsnede van de L_i is echter de taal $\{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$ en daarvan hebben we in Sectie 3.22.1 bewezen dat die taal niet contextvrij is. Dus: de doorsnede van contextvrije talen is niet noodzakelijk contextvrij.

We kunnen nu ook direct besluiten dat het complement van een CFL niet contextvrij hoeft te zijn, want $A \cap B = \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})}$.

Voor L contextvrij en A regulier kunnen we tenslotte ook nog kijken naar de vragen:

- is $L \cup A$ contextvrij/regulier?
- is $L \cap A$ contextvrij/regulier?

Wat denk je ervan?

Zelf doen: Neem $\Sigma = \{a, b\}$. De taal $\{ss | s \in \Sigma^*\}$ is niet contextvrij. Bewijs dat. Laat zien dat het complement van die taal wordt gegenereerd door de contextvrije grammatica:

- S → AB | BA | A | B
- A → CAC | a
- B → CBC | b
- C → a | b

[15] Hernoem eerst de niet-eindsymbolen zodat ze disjunct zijn.
[16] Stel een CFG op voor die talen.

Ambiguïteit en determinisme

We kijken hier wat meer in detail naar het verband tussen de inherente ambiguïteit van een contextvrije taal en zijn determinisme. We noteren door DCFL de verzameling van contextvrije talen die een deterministische PDA hebben (DPDA).

Een ambigue taal kan onmogelijk deterministisch zijn, dus deterministische talen zijn niet-ambigu.

Omgekeerd is niet waar: er bestaan niet-ambigue talen die niet deterministisch zijn. Een standaard voorbeeld is de taal $\{s\hat{s}|s \in \{a,b\}^*\}$ waarin $\hat{s}$ de omgekeerde string betekent. Een niet-ambigue grammatica voor deze taal is

$$\text{S} \rightarrow \text{ aSa | bSb | } \epsilon$$

maar een PDA weet van tevoren niet waar het midden van de string is en moet daarnaar *raden*: dat is de essentie van het niet-determinisme nodig om die taal te parsen. Dat betekent natuurlijk niet dat er geen deterministische parser mogelijk is voor deze taal: je kan er gemakkelijk eentje schrijven in Java. Maar het kan niet met een deterministische PDA.

Een andere manier om een niet-deterministische taal te vinden is te steunen op de eigenschap dat het complement van een DCFL ook DCFL is [17]. Neem nu de taal $L = \{ss|s \in \{a,b\}^*\}$. Je kan met het pompend lemma bewijzen dat L niet CFL is. $\overline{L}$ is echter contextvrij: pagina 123 bevat er een CFG voor. Bijgevolg is $\overline{L}$ geen DCFL.

Voorbeelden van niet-deterministische talen worden dikwijls verkregen door de unie te nemen van twee CFL's die overlappen: de taal

$$L = \{a^m b^n c^k | m \neq n\} \cup \{a^m b^n c^k | n \neq k\} \text{ is de unie van twee DCFL's.}$$

Stel dat L een DCFL was, dan zou zijn complement dat ook zijn, en dan ook de intersectie van dat complement met de reguliere taal $\{a^*b^*c^*\}$, maar dat geeft de taal $\{a^n b^n c^n | n \in \mathbb{N}\}$ en die taal is niet eens contextvrij!

Hier is nog een niet-deterministische taal en een schets van een constructie die dat bewijst: $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^n b^{2n} | n \in \mathbb{N}\}$.

[17] Voor een bewijs zie bijvoorbeeld het boek van Kozen.

Stel dat er een DPDA M bestaat voor L, dan heeft die de structuur zoals in Figuur 3.25.

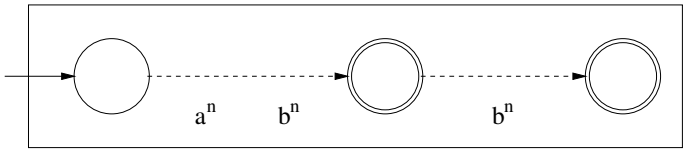


Figure 3.25: De DPDA voor L

Vervang in het laatste deel de b's door c, en maak van de linkse accepterende toestand een gewone toestand. Dan krijg je de machine in Figuur 3.26.

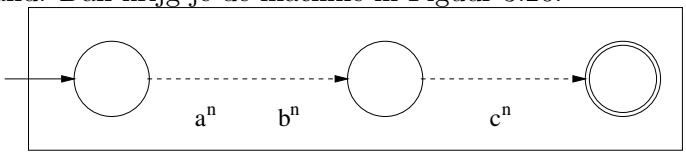


Figure 3.26: De DPDA voor L'

Deze PDA accepteert de taal $L' = \{a^n b^n c^n | n \in \mathbb{N}\}$ maar we weten al dat die laatste taal niet contextvrij is!

Het boek van Linz bevat een variante met meer details.

Het belang van bovenstaande redenering/voorbeeld is dat wat waar was voor reguliere talen (elke reguliere taal wordt bepaald door een deterministische FSA) niet waar is voor CFL's en PDA's: door één stapje hoger in de Chomsky hiërarchie te gaan, speelt niet-determinisme ineens een belangrijke rol.

Praktische parsingtechieken

Dikwijls worden we geconfronteerd met het probleem: gegeven de specificatie van een taal, maak er een herkenner voor. Die taal kan bijvoorbeeld zijn wat in een vakje op een formulier kan worden ingevuld: dat kan afhangen van wat er elders al is ingevuld (bijvoorbeeld mag je niet 3 namen van kinderen invullen, als je elders declareerde dat je er maar 2 hebt). Die taal kan een programmeertaal zijn met een ingewikkelde structuur: geneste if-then-else, statement blocks, aritmetische expressies, package qualificaties ... Meestal is zulk een taal contextvrij en het is de gewoonte om de beschrijving van een programmeertaal in twee niveaus te doen: het eerste niveau is lexicaal (zie pagina 98) en het andere syntactisch. Men maakt dan gebruik van de BNF-notatie. BNF staat voor Backus[18]-Naur[19] form en werd voor de eerste keer gebruikt om Algol[20] te beschrijven[21]. BNF trekt hard op CFG en we hebben het al min of meer gebruikt op pagina 105 voor de grammatica van Stat.

Net zoals flex vanuit een reguliere expressie omzet naar een efficiënte lexer, bestaan er tools die een CFG omzetten in een efficiënte syntax analyser. De algemene constructie van een PDA uit een CFG is niet goed genoeg o.a. omdat het bijna altijd een niet-deterministische automaat oplevert. Het deterministisch maken van een PDA is niet eenvoudig (en zelfs niet altijd mogelijk zoals we ondertussen weten). Daarom worden dikwijls extra beperkingen opgelegd aan de talen/grammatica's die zulke parsergeneratoren aankunnen.

Bekende parsergeneratoren zijn Bison (de opvolger van Yacc die C genereert) en ANTLER (Java). Het praktische gebruik van deze tools ligt buiten het bestek van deze cursus.

De automatisch geconstrueerde PDA uit een CFG gaf ons een meest-linkse top-down afleiding: we vertrekken van het startsymbool en de boom wordt vanuit de wortel opgebouwd. Dat kan verwezelijkt worden in een (deterministisch) programma door een *recursive descent parser* m.b.v. een aantal wederzijds recursieve procedures die overeenstemmen met de non-terminals in de grammatica. Dat werkt enkel als de grammatica CFG van het type *LL(k)* is. Daarin staat de eerste L voor: de input van Links naar rechts lezen; de tweede L staat voor Leftmost derivation; de k staat voor het aantal tekens van de invoer waarop de volgende beslissing genomen wordt, of wat men de *look-ahead* noemt.

Er is ook een andere manier: we gaan over de invoerstring van links naar rechts en telkens als we iets zagen dat een rechterkant van een regel is, dan gebruiken we die regel *omgekeerd*. Hier weer het voorbeeld $a + a * a$ in een tabel zodat je kan zien wat al bekeken was en wat niet.

[18] Turing award in 1977

[19] Turing award in 2005

[20] Zoek Algol op: het is een belangrijke stap in language design geweest!

[21] Er is een hele historie aan verbonden, o.a. of Naur er wel bij moet, en of anderen niet het krediet moeten krijgen ... kijk eens in wikipedia

al gezien	nog te bekijken	te nemen actie
	a+a∗a	shift
a	+a∗a	reduce
E	+a∗a	shift
E+	a∗a	shift
E+a	∗a	reduce
E+E	∗a	reduce
E	∗a	shift
E∗	a	shift
E∗a		reduce
E∗E		reduce
E		stop

Table 3.4: Bottom-up parsing van $a + a * a$

De acties komen overeen met wat een shift-reduce parser doet: ofwel het eerste teken van de input op de stack zetten (en de input pointer shiften), ofwel wat op de stack staat reduceren m.b.v. een omgekeerde grammaticaregel. De basis waarop de beslissing genomen wordt is hier niet aangeduid, maar is voor shift-reduce parsers de huidige toestand (die hier helemaal niet vermeld is) en de k eerste input symbolen. Zulk een parser heet dan LR(k), waarbij de R aanduidt dat we een meest-rechtse afleiding maken.

Het construeren van praktische parsers is een uitgebreid onderzoeksdomein waarvan de verworvenheden nu gebruikt worden o.a. bij de constructie van compilers, analyse van XML documenten ... Ook het automatisch herstellen van fouten, genereren van syntax-directed editors en relevante foutenmeldingen gebeurt op basis van grammatica's.

Contextsensitieve Grammatica

In de stap van regulier naar contextvrij hebben we recursie over de non-terminals toegelaten, maar de linkerkant van een regel moest altijd bestaan uit juist één nonterminal.

De volgende laag in de Chomsky-hiërarchie wordt gevormd door de contextsensitieve talen, gegenereerd door contextsensitieve grammatica's: de linkerkant van een regel mag nu een bijna willekeurige string zijn van terminals en nonterminals, waarvan er eentje herschreven wordt. Bijvoorbeeld:

$$a\underline{X}Yz \rightarrow\ a\underline{bCD}Yz$$

is een contextsensitieve grammaticaregel: enkel in de context van a (langs links) en Yz (langs rechts) mag X herschreven worden tot bCD. Er zijn alternatieve (equivalente) definities van wat juist een contextsensitieve grammaticaregel is, maar we gaan er hier niet dieper op in.

Een equivalente definitie van een contextsensitieve grammatica is dat in een regel van de vorm $\alpha \rightarrow\ \beta$, altijd $|\alpha| \leq |\beta|$.

Het is a priori natuurlijk niet duidelijk dat niet alle contextsensitieve talen ook contextvrij zijn. Maar neem de taal $\{a^n b^n c^n | n \in \mathbb{N}\}$ waarvan we vroeger aantoonden dat die niet contextvrij is. Hier is een contextsensitieve grammatica (volgens de equivalente definitie) voor die taal:

S $\rightarrow$ abc

S $\rightarrow$ aSBc

cB $\rightarrow$ Bc

bB $\rightarrow$ bb

Zelf doen : bewijs dat de bovenstaande grammatica inderdaad de gevraagde taal bepaalt.

Er bestaat ook een normaal vorm voor contextsensitieve grammatica's (die de lege string niet genereren), nl. de Kuroda normaal vorm: elke regel is van de vorm

$$AB \rightarrow CD$$

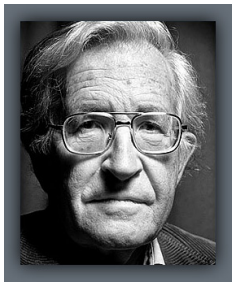
$$A \rightarrow BC$$

$$A \rightarrow B$$

$$A \rightarrow a$$

met A,B,C en D nonterminals, en a een terminal.

Een contextsensitieve taal kan geparsed worden door een niet-deterministische lineair begrensde automaat (LBA) - een klasse automaten die strikt sterker is dan de push down automaten, en die we in een volgend hoofdstuk zullen invoeren. Pas als we wat eigenschappen ervan kennen, zullen we zijn plaats in de hiërarchie appreciëren. LBA's zijn belangrijk omdat ze beslissingsproblemen oplossen in $O(n)$-space!



Daarmee zijn we bijna aan de top van de Chomsky hiërarchie: als we de laatste restrictie op de linkerkant van een regel wegnemen, dan komen we bij de *unrestricted grammars*. De machinerie nodig om de bijbehorende talen te parsen komt van de Turing machines: ook die worden in een volgend hoofdstuk ingevoerd.

De hiërarchie zelf vind je in Tabel 3.5: er zijn verfijningen (o.a. i.v.m. determinisme) maar die hebben we niet vermeld.

	Grammatica	Taal	Automaat
Type-0	unrestricted	herkenbaar	Turingmachine
Type-1	context-sensitief	context-sensitief	lineair-begrensd
Type-2	context-vrij	context-vrij	push-down
Type-3	regulier	regulier	eindig

Table 3.5: De Chomsky-hiërarchie

Chomsky is ook bekend om zijn politiek activisme - de moeite om eens te lezen.

Chapter 4

Talen en Berekenbaarheid

De Turingmachine als herkenner en beslisser

In vorige hoofdstukken hebben we twee klassen uit de Chomsky hiërarchie van dichtbij bekeken, met hun bijbehorende herkenners. We weten al dat reguliere talen contextvrij zijn en dat er talen bestaan die niet contextvrij zijn. Het is tijd om machinerie op te zetten om zekere niet-contextvrije talen te herkennen of te beslissen. De machine die we zullen gebruiken is de Turingmachine: die is krachtiger dan de LBA die we al eens vermeld hebben. Op de LBA komen we later nog terug in dit hoofdstuk.

Ruwweg bestaat een Turingmachine uit een twee-zijdig onbegrensde band die verdeeld is in vakjes, een controle-eenheid, en een leeskop die op elk ogenblik de inhoud van een vakje op de band kan lezen. De actie van de machine hangt af van de inwendige toestand van de controle-eenheid en het teken onder de leeskop. Figuur 4.1 toont die onderdelen en ook de actie beschreven door de δ van de Turingmachine.

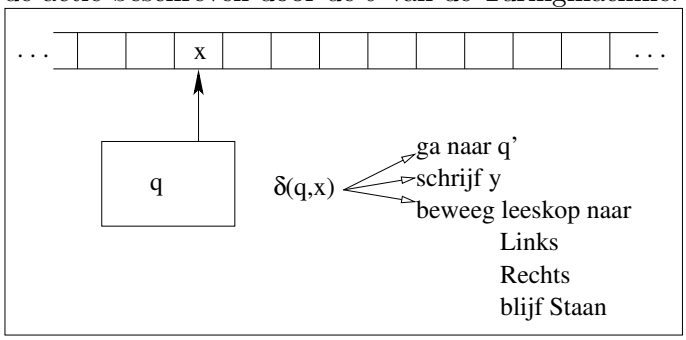


Figure 4.1: Schema van een Turingmachine

Meer formeel:

Definitie 4.1.1. *Turingmachine*
Een **Turingmachine** is een 7-tuple $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_s, q_a, q_r)$ waarbij Q, Σ, Γ eindige verzamelingen zijn en

- Q is een verzameling toestanden
- Σ is een input alfabet dat # niet bevat
- Γ is het tape alfabet; $\# \in \Gamma$ en $\Sigma \subset \Gamma$
- q_s is de starttoestand
- q_a is de accepterende eindtoestand
- q_r is de verwerpende eindtoestand (r van reject) verschillend van q_a
- δ is de transitiefunctie: een totale functie met signatuur
$$Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}$$

De machine wordt geïnitialiseerd als volgt:

- een eindig aantal symbolen uit het input alfabet worden aaneensluitend op de band gezet: dat is de inputstring; op de rest komt een #
- de machine wordt in toestand q_s gezet
- de leeskop wordt gepositioneerd op het meest linkse teken van de inputstring; als de string leeg is, dan op een willekeurig hekje

De machine werkt nu als volgt: op basis van het teken onder de leeskop en de toestand van de machine (dus $Q \times \Gamma$) wordt met behulp van δ bepaald naar welke toestand de machine moet overgaan, welk symbool er moet geschreven worden en welke beweging de leeskop maakt (dus $Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}$). Dit wordt uitgevoerd en dat blijft zo doorgaan

- totdat de machine in q_a komt: de inputstring is geaccepteerd en eventueel beschouw je wat nu op de band staat als het resultaat van een berekening
- totdat de machine in q_r komt: de inputstring is verworpen
- en blijft zo doorgaan ... de machine zit in een *oneindige lus*

We hebben reeds met de Turingmachine kennisgemaakt in een vroegere cursus, dus moeten we er hier niet heel diep op ingaan. Wel willen we nog de klassieke varianten van de definitie van Turingmachine aangeven: eventueel aan jullie om te bewijzen dat die alle *equivalent* zijn (maar je zal zelf een redelijke notie van equivalentie moeten formaliseren).

- de leeskop kan enkel naar Links of Rechts, maar niet blijven Staan
- er is meer dan één accepterende toestand en/of meer dan één verwerpende toestand
- de band is onbegrensd in slechts één richting
- er is meer dan één band
- het inputalfabet heeft slechts twee symbolen
- er zijn slechts drie toestanden
- de machine heeft twee stacks i.p.v. een oneindige band

Tenslotte nog iets over het hekje #: het wordt o.a. gebruikt om aan te geven dat een vakje op de band nog niet is beschreven (al mag de Turingmachine het later wel schrijven). In veel teksten wordt het beschreven als *het blanco symbool* en er wordt het symbool $\sqcup$ voor gebruikt. We zullen soms ook verwijzen naar ons # met *het blanco symbool*, of het *hekje*.

Voor een gegeven Turingmachine TM kunnen we Σ^* verdelen in drie disjuncte stukken:

1. de strings die door de TM worden geaccepteerd: L_{TM}
2. de strings waarvoor de TM niet stopt: ∞_{TM}
3. de rest

We gebruiken die verzamelingen in de volgende definities.

Definitie 4.1.2. *Herkennen*
Een Turingmachine TM herkent L_{TM}

Een aansluitende definitie is natuurlijk

Definitie 4.1.3. *Turing-herkenbare taal*
Een taal L is Turing-herkenbaar indien er een Turingmachine TM bestaat zodanig dat $L = L_{TM}$

Laten we meteen een voorbeeld geven van een herkenbare taal L en een TM die L herkent: $\Sigma = \{a, b\}$, en $L = \{a\}^*$. De volgende tabel beschrijft δ:

Het is duidelijk dat ∞_{TM} niet leeg is: voor elke string niet in L gaat de machine in een lus. Voor dezelfde taal L bestaat ook een TM die altijd stopt, bijvoorbeeld:

Dat onderscheid vatten we in de volgende definities:

Q	Γ	Q	Γ	LRS
q_s	a	q_s	#	R
q_s	b	x	b	S
q_s	#	q_a	-	-
x	a	x	a	S
x	b	x	b	S
x	#	x	#	S

Table 4.1: TM die $\{a\}^*$ herkent

Q	Γ	Q	Γ	LRS
q_s	a	q_s	#	R
q_s	b	q_r	-	-
q_s	#	q_a	-	-

Table 4.2: TM die $\{a\}^*$ beslist

Definitie 4.1.4. *Beslissen*
Een Turingmachine TM beslist een taal L, als TM L herkent en bovendien $\infty_{TM} = \emptyset$

en

Definitie 4.1.5. *Turing-beslisbare taal*
Een taal L heet Turing-beslisbaar als er een Turingmachine is die L beslist.

A priori is het niet duidelijk dat herkennen en beslissen verschillen van elkaar, maar het zal blijken dat er een belangrijk onderscheid tussen bestaat. Wat wel duidelijk moet zijn: een beslisbare taal is ook herkenbaar.

Definitie 4.1.6. *Co-herkenbaar/co-beslisbaar*
Een taal L is **co-herkenbaar/co-beslisbaar** als $\overline{L}$ herkenbaar/beslisbaar is.

Stelling 4.1.7. *Als L beslisbaar is, dan is L ook co-beslisbaar.*

Proof. In de Turingmachine die L beslist, verwissel je de rol van q_a en q_r. ■

Stelling 4.1.8. *Als L herkenbaar is en co-herkenbaar, dan is L beslisbaar.*

Proof. Laat M1 de machine zijn die L herkent, en M2 de machine die $\overline{L}$ herkent. De idee is nu dat we M1 en M2 samen laten lopen als een nieuwe machine M, in parallel: zodra M1 accepteert, dan accepteert M, en zodra M2 accepteert, dan verwerpt M. M1 en M2 kunnen niet samen accepteren, en voor elke string zal minstens één van de machines M1 en M2 stoppen - in zijn aanvaardende toestand. M beslist L.

De bovenstaande constructie van M is informeel en eigenlijk moeten we die formeler maken. Dat kan door M te definiëren als een 2-tape machine: je kan zelf de details uitwerken. ■

Stelling 4.1.9. *Er bestaat een taal die niet herkenbaar is.*

Proof. Het bewijs steunt op het begrip kardinaliteit: we weten van vroeger dat het aantal Turingmachines aftelbaar oneindig is. We weten ook dat elke Turingmachine juist één taal herkent[1]. En tenslotte weten we ook dat het aantal talen niet-aftelbaar oneindig is, want de verzameling talen is $\mathcal{P}(\Sigma^*)$. Bijgevolg bestaat een niet-herkenbare taal. In feite is daarmee zelfs bewezen dat er niet-aftelbaar veel niet-herkenbare talen bestaan. Meer nog: bijna alle talen zijn niet-herkenbaar! ■

Wat zijn we van plan met Turingmachines en die definities ...

- het onderscheid tussen beslissen en herkennen verder bestuderen
- reguliere en contextvrije talen in dit plaatje inpassen
- voorbeelden van talen bekijken die niet-herkenbaar zijn of niet-beslisbaar

De engelse termen zijn:

- herkenbaar: recognisable en recursive enumerable
- beslisbaar: decidable en recursive

In Sectie 4.9 zullen we de historische reden voor de term *enumerable* zien.

Zelf doen: Wat denk je van de uitspraken:

- elke string is herkenbaar
- elke string is beslisbaar

[1] Zorg dat je snapt waarom!

- elke eindige taal is beslisbaar/herkenbaar
- de unie/doorsnede van twee herkenbare talen is herkenbaar
- de doorsnede van een herkenbare en een beslisbare taal is beslisbaar

Grafische voorstelling van een Turingmachine

Net zoals bij FSA's en PDA's kunnen we een Turingmachine goed visualiseren met een graaf: daarin zijn de knopen de toestanden van de TM. Een voorbeeld verduidelijkt veel: Figuur 4.2 toont de voorstelling met een graaf van een TM die (hopelijk) de taal $\{0^n1^n | n \geq 0\}$ beslist.

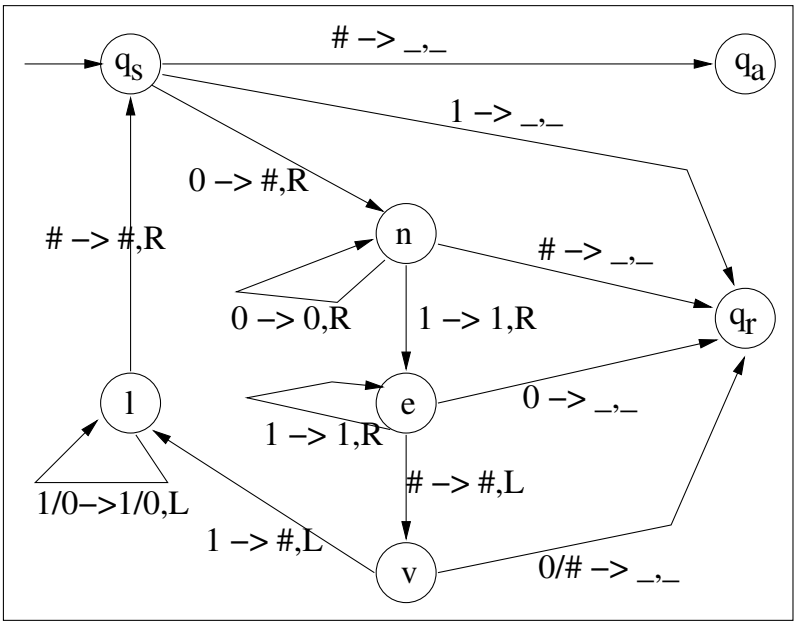


Figure 4.2: Grafische voorstelling van een Turingmachine
Vanuit elke toestand vertrekken zoveel bogen als er elementen zijn in Γ (maar sommige worden samengenomen). Het label op een boog symboliseert de δ van de machine. Een _ wordt gebruikt om aan te duiden dat het er niet toe doet welk symbool er staat: typisch wanneer het een overgang naar een eindtoestand betreft.

We kunnen in woorden beschrijven wat die machine doet met een input van nullen en enen (en ook de lege string).

- als in de starttoestand een

  - # gezien wordt, dan accepteer
  - 1 gezien wordt, dan verwerp
  - 0 gezien wordt, veeg die uit en ga rechts naar de toestand n die alle nullen overslaat

- als in toestand n een
  - # gezien wordt, verwerp
  - 1 gezien wordt, ga rechts naar e die alle enen overslaat
  - 0 gezien wordt, ga naar rechts

- in toestand e
  - zolang 1-en gezien worden, ga naar rechts
  - bij een 0, verwerp
  - bij een #, ga links naar toestand v die één 1 zal uitvegen

- in v
  - een 0 of # zijn fout, dus verwerp
  - veeg de 1 uit en ga links naar toestand l die de linkerkant van de string zal opzoeken

- in toestand l
  - ga naar links zolang je 0 of 1 ziet
  - bij #, ga rechts naar de begintoestand

Zoals je ziet heeft elke toestand zijn eigen functie.

De TM in Figuur 4.2 toont aan dat de taal $\{0^n1^n|n \geq 0\}$ beslisbaar is.

Berekeningen van een TM voorstellen en nabootsen

We willen dikwijls een *configuratie* van een TM compact voorstellen: een configuratie is dan de toestand van de TM, de band en waar de leeskop zich bevindt. Vermits de band op elk ogenblik tijdens een uitvoering slechts een eindig aantal tekens verschillend van # bevat - of alternatief: er is altijd een linker- en rechteroneindig stuk van de band met enkel # - kunnen we de volgende notatie gebruiken:

$$\alpha q \beta$$

stelt voor dat de band $\alpha\beta$ bevat, en links en rechts ervan enkel #; de machine is in toestand q en de leeskop van de machine bevindt zich op het eerste teken van β. α en β mogen # bevatten.

Een beginconfiguratie is nu altijd van de vorm $q_s\alpha$

Een eindconfiguratie is van de vorm $\alpha q_a\beta$ (een accepterende configuratie) of $\alpha q_r\beta$ (een verwerpende configuratie).

Tijdens de uitvoering van een TM zijn twee opeenvolgende configuraties verbonden door δ op de volgende manier:

$\alpha qb\beta \rightarrow \alpha pc\beta$ indien $\delta(q,b) = (p,c,S)$

$\alpha aqb\beta \rightarrow \alpha pac\beta$ indien $\delta(q,b) = (p,c,L)$

$\alpha qb\beta \rightarrow \alpha cp\beta$ indien $\delta(q,b) = (p,c,R)$

Die overgangen moet je nog aanvullen voor het geval dat α of β leeg zijn: dan moet je een extra # erbij zetten.

Een opeenvolging van configuraties van een beginconfiguratie tot een eindconfiguratie noemt men een *computation history*.

Het is nu redelijk gemakkelijk om in te zien dat de berekeningen van een willekeurige TM door een programmeertaal zoals Prolog of Java kunnen gesimuleerd worden. Om dat wat concreter te maken geven we gewoon wat Prologcode. Een configuratie $\alpha q\beta$ wordt voorgesteld door een term met hoofdfunctor conf/3 als volgt:

$conf([a_n,...,a_2,a_1],q,[b_1,b_2,...,b_m])$, met $a_1a_2...a_n = \alpha$ en $b_1b_2...b_m = \beta$
waarbij de a_i en b_j in Γ zitten.[2]

Een deel van het Prologprogramma dat op configuraties werkt:

```
onestep(conf(Alpha,Q,[]), NewConf) :-
          onestep(conf(Alpha,Q,[#]), NewConf).
onestep(conf(Alpha,Q,[B|Beta]), conf(Alpha,P,[C|Beta])) :-
          delta(Q,B,P,C,stop).
```

Zelf doen: Breid bovenstaand programma uit, en leg in woorden uit wat de functie is van elke clause.

Omgekeerd moeten we kunnen inzien dat met een Turingmachine ook een Prologprogramma kan worden gesimuleerd: om dat "direct" te doen vraagt veel werk. Hier is een klassieke omweg: eerst toon je dat Prolog kan geïmplementeerd worden op een Intel machine; dat is niet moeilijk: SWI-Prolog is een voorbeeld; dan toon je aan dat de Intel

[2] Zoek eens op *Huet Zipper*

machine kan gesimuleerd worden met een register machine; een register machine is al een theoretische constructie en van daar naar de Turingmachine is nog maar een kleine stap.

Daarmee is de kring rond. Als een Turingmachine elk X-programma kan simuleren, en een X-programma elke Turingmachine, dan hebben X en TM's dezelfde berekeningskracht. Pas op: voor ons betekent dat niets i.v.m. complexiteit, enkel i.v.m. welke talen kunnen beslist/herkend worden.

In de toekomst zullen we daarvan meer dan eens gebruik kunnen maken.

Zelf doen: Turingmachines samenstellen We hebben dikwijls nodig dat een aantal Turingmachines $TM_1, TM_2 ... TM_n$ gecombineerd worden tot een nieuwe Turingmachine TM. We gebruiken woorden zoals

TM roept TM_1 op als een subroutine

en

als TM_1 stopt in een aanvaardende eindtoestand, dan laat TM TM_2 lopen op de string s

Zorg dat je weet wat zulke uitspraken willen zeggen, t.t.z. formaliseer die tot op zekere hoogte.

Niet-deterministische Turingmachines

We vermelden niet-deterministische Turingmachines hier omdat elk boek over berekenbaarheid het doet: we zullen er verder geen gebruik van maken in de studie van berekenbaarheid. Niet-deterministische Turingmachines zijn wel belangrijk in de context van complexiteit.

In de definitie van niet-deterministische Turingmachine heeft δ signatuur

$$Q \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}),$$

t.t.z. dat er vanuit een gegeven configuratie mogelijk meer dan één configuratie kan bereikt worden: eigenlijk is twee genoeg (probeer dat in te zien!). Een string wordt door de machine geaccepteerd als er een computation history bestaat die eindigt met een accepterende configuratie. Dat is in lijn met het acceptatiecriterium voor NFAs: één accepterend pad is voldoende.

Een niet-deterministische Turingmachine kan door een deterministische gesimuleerd worden. Sommige boeken beschrijven een simulatie van een NDTM door een DTM. Voor ons is het gemakkelijker te zeggen: het Prologprogramma dat we vroeger (gedeeltelijk) gaven, kunnen we met een meta-vertolker uitvoeren die werkt volgens iterative deepening

(of breedte-eerst) en die laten stoppen zogauw we in de accept toestand komen[3]. Als we in Prolog een NDTM kunnen simuleren, dan dus ook met een DTM.

Talen, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, eigenschappen en terminologie

Wij hebben herkenbaarheid/beslisbaarheid geformuleerd in termen van talen over een alfabet. Even gebruikelijk is het om die concepten te definiëren in de context van deelverzamelingen van $\mathbb{N}$. Die twee zijn equivalent omdat we $\mathbb{N}$ kunnen beschouwen als $\{0,1\}^*$, dus alle strings over het alfabet $\{0,1\}$ (binaire notatie, maar een andere zou ook goed zijn), en een deel van $\mathbb{N}$ is dus een taal over dat alfabet. Soms reserveert men de terminologie *(recursive) enumerable* voor zulke verzamelingen (of talen) en de termen *decidable* en *recognisable* voor eigenschappen. Dat onderscheid is niet echt belangrijk: stel dat E een eigenschap is die elementen van een verzameling V kunnen hebben of niet, dan kan je definiëren: $\{x|x \in V, x\ heeft\ eigenschap\ E\}$. Dan zie je duidelijk dat eigenschappen en subsets een gelijkwaardig zicht op de problematiek geven.

Het woord *recursive* roept bij ons meestal het beeld op van een functie (methode, predicaat, procedure ...) die zichzelf oproept, of een data type dat in termen van zichzelf is gedefinieerd (lijst, boom, ...). In de term *recursive enumerable* heeft het stukje *recursive* daar niet rechtsreeks mee te maken.

Encodering

Als we informeel een taal beschrijven, dan moeten we niet denken aan de encodering ervan. Zo kunnen we spreken over *alle vlakke grafen* maar geen specifiek alfabet in gedachten hebben waarin we die verzameling als taal kunnen beschrijven. Maar als we een algoritme willen schrijven om te beslissen of een graaf vlak is, dan is een alfabet nodig en een mapping van de grafen naar strings. Zulk een mapping is een encodering. Encoderingen moeten *redelijk* zijn. De volgende eigenschappen moeten minstens vervuld zijn (als voorbeeld i.v.m. grafen):

- elke graaf encodeert naar één string
- twee *verschillende* grafen encoderen naar twee verschillende strings
- van een string moet beslist kunnen worden of ie een graaf encodeert en welke graaf

Een redelijke encodering introduceert ook geen extra informatie.

Wat voorbeelden:

[3]Niet de meest efficiënte manier, maar die analyse herinner je je nog van FVI natuurlijk.

1. Je wil de priemgetallen bekijken als verzameling. Je kiest voor een unaire representatie van getallen; het alfabet is {@}. Dus 7 wordt voorgesteld door 7 keer het symbool @: @@@@@@@

   Dit is redelijk.

2. Je wil de priemgetallen bekijken als verzameling. Je kiest voor een binaire representatie van getallen; het alfabet is {@, !}. Dus 9 wordt voorgesteld door !@@!

   Dit is redelijk.

3. Je wil de priemgetallen bekijken als verzameling. Je kiest voor een representatie van getallen in twee delen: het eerste deel is een bit die aanduidt of het getal priem is of niet (voorgesteld door p en n); het tweede deel is een unaire representatie van het getal met alfabet {@}. Dus 7 wordt voorgesteld door p@@@@@@@ en 9 door n@@@@@@@@@

   Dit is niet redelijk: je encodering heeft extra informatie.

   Misschien heb je de indruk dat die eis je tegenwerkt. Immers, met die laatste representatie is het beslisbaar in constante tijd of een getal priem is of niet, want je hoeft alleen maar naar het eerste symbool te kijken. Mis! Wat gebeurt er met de string p@@@@? Die behoort tot Σ^*, maar stelt geen getal voor, want het eerste symbool beweert dat de string een priemgetal voorstelt, terwijl het tweede deel het getal 4 voorstelt. Het kost nu evenveel werk om van een string in Σ^* te beslissen of ie een getal voorstelt als om te beslissen dat een getal priem is in een redelijke encodering.

Vanuit het standpunt van berekenbaarheid zijn de encoderingen in (1) en (2) hiervoor equivalent: er bestaat een algoritme dat de ene in de andere omzet; je kan het met een Turingmachine implementeren; de mapping van de ene naar de andere is Turingberekenbaar.

Vanuit het standpunt van de complexiteit zijn de encoderingen in (1) en (2) hiervoor niet equivalent! Bijvoorbeeld: twee getallen optellen in unaire notatie is O(n) waarbij n het grootste van de twee getallen is. In binaire notatie is dat O(log(n)), want het is lineair in het aantal bits nodig om de getallen voor te stellen.

De encodering van een object S zullen we aanduiden met $\langle S \rangle$. Als we een encodering willen van een aantal objecten S_i, dan wordt dat gewoon $\langle S_1, S_2, ... \rangle$.

Zelf doen:

Zoek redelijke encoderingen voor bomen, XML-documenten, ...

Zoek er ook wat onredelijke, eventueel voor andere objecten.

Als je een functie (bijvoorbeeld van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$) implementeert, dan kan de output ook geëncodeerd zijn. Je kreeg als opdracht een functie te implementeren die bij

input i het i-de priemgetal teruggeeft. Je was vlug klaar, want je schreef bij input i gewoon het getal i uit, met als argument dat i in de output gewoon de encodering is van het i-de priemgetal. Je professor was niet tevreden. Was dat redelijk?

Universele Turingmachines

Een TM kunnen we helemaal beschrijven door zijn transitietabel te geven: we kunnen die transitietabel encoderen en op een band plaatsen. We spreken daarbij bijvoorbeeld af dat we toestanden en inputsymbolen encoderen door *getallen* die we encoderen met één willekeurig symbool in unaire notatie. We hebben ook nog een nieuw symbool nodig als delimiter, om stukjes van de encodering af te scheiden van elkaar, en we vermelden apart welke de toestanden q_s, q_a en q_r van de TM zijn. De encodering van de TM hebben we op een band gezet: de programmaband; op een tweede band zetten we een inputstring (in dezelfde encodering) voor de TM: het werkgeheugen.

Nu maken we één nieuwe machine UTM met een Γ' die bovenstaande Γ bevat, en ook de delimiter en misschien ook nog andere hulpsymbolen. UTM gebruikt de twee banden als input. Als je wil mag die UTM nog extra banden hebben: we weten dat we niks essentieels toevoegen aan de kracht van Turingmachines. UTM gebruikt het programma op de programmaband om de acties van TM uit te voeren op de geheugenband. Zogauw TM zou stoppen in q_a of q_r, gaat UTM naar zijn eigen q'_a of q'_r.

Bovenstaand scenario is in meer detail te verwezenlijken, maar voor ons is dit voldoende. De Universele Turingmachine kan elke TM simuleren - als die maar geëncodeerd wordt zoals nodig: we kunnen de UTM zelfs laten beginnen met controleren of wat op de banden staat wel een geldige encodering is.

Laat je niet in de war brengen door de sectie over samenstellen van Turingmachines, waar een TM_1 een andere TM_2 als subroutine gebruikt: in dat geval zijn de toestanden van TM_2 een subset van de toestanden van TM_1. Bij de UTM is dat niet zo: UTM heeft een vast aantal toestanden, onafhankelijk van welke TM er gesimuleerd wordt; en de geëncodeerde toestanden van de gesimuleerde machine, zijn geen toestanden van de UTM.

Hoe *groot* is een UTM? Claude Shannon liet zien dat we in een TM altijd toestanden voor symbolen kunnen ruilen - zie de opgave op pagina 132. Daarom is het de gewoonte geworden om de grootte van een TM uit te drukken als $(|Q|, |\Gamma|)$, of het product $|Q| \times |\Gamma|$. Marvin Minsky[4] vond in 1956 een (7,4) UTM. Later vond men kleinere UTM's. Van een bepaalde (2,3) machine is ondertussen bewezen dat ie universeel is - wel wat controversieel overigens. Een (2,2) TM kan niet universeel zijn.

[4] Turing award 1969

Het Halting-probleem

Informeel gaat het om het volgende: gegeven een Turingmachine M en een string s, kan je bepalen of M bij input s stopt. De vraag is hier niet of M s accepteert of verwerpt: in beide gevallen stopt de machine. De vraag is of M in de derde mogelijkheid terecht komt, namelijk in een lus. Verder willen we die vraag laten beantwoorden door een algoritme, dus we willen eigenlijk een Turingmachine H die de taal $\{\langle M, s\rangle | M \textit{ is een Turingmachine die stopt bij input } s\}$ **beslist**. De taal die we willen beslissen noteren we door H_{TM}.

We zullen laten zien dat H_{TM} niet beslisbaar is. We wisten al dat er niet-beslisbare talen moeten bestaan, maar H_{TM} is ons eerste concrete voorbeeld. Een gerelateerd probleem is het acceptatieprobleem voor Turingmachines. De geassocieerde taal is

$$A_{TM} = \{\langle M, s\rangle | M \textit{ is een Turingmachine en } s \in L_M\}$$

A_{TM} is de eerste taal waarvoor we bewijzen dat ie niet beslisbaar is.

Stelling 4.8.1. *A_{TM} is niet beslisbaar.*

Proof. We gebruiken *bewijs door contradictie.*

Stel er bestaat een beslisser B voor A_{TM}. Dat betekent dat bij input $\langle M, s\rangle$ B accepteert als M bij input s stopt in zijn q_a en verwerpt als M bij input s stopt in zijn q_r of loopt. We schrijven

$B(\langle M, s\rangle)$ is accept als M s accepteert en anders reject

Construeer nu de contradictie machine C met eigenschap:

$C(\langle M\rangle) = \textit{opposite}(B(\langle M, M\rangle))$ voor elke Turingmachine M.

Daarbij is $\textit{opposite}(\textit{accept}) = \textit{reject}$ en $\textit{opposite}(\textit{reject}) = \textit{accept}$.

Neem nu voor M hierboven C zelf, dan krijgen we:

$C(\langle C\rangle) = \textit{opposite}(B(\langle C, C\rangle))$

Als $C(\langle C\rangle) = \textit{accept}$, dan is $B(\langle C, C\rangle) = \textit{accept}$, dan is $\textit{opposite}(B(\langle C, C\rangle)) = \textit{reject}$, dan is $C(\langle C\rangle) = \textit{reject}$, dan is $B(\langle C, C\rangle) = \textit{reject}$, dan is $\textit{opposite}(B(\langle C, C\rangle)) = \textit{accept}$, dan is $C(\langle C\rangle) = \textit{accept}$ ...

Dus C kan niet bestaan, dus B bestaat niet. Dus A_{TM} is niet beslisbaar. ■

Stelling 4.8.2. *H_{TM} is niet beslisbaar.*

Proof. Stel dat H_{TM} beslisbaar is door een Turingmachine H. We construeren nu beslisser

B voor A_{TM} als volgt: bij input $\langle M, s\rangle$ doet B:

- laat eerst H lopen op $\langle M, s\rangle$
- als $H(\langle M, s\rangle) = accept$, dan laat B M lopen op s en geeft als resultaat wat M geeft
- als $H(\langle M, s\rangle) = reject$ dan reject B ook de string $\langle M, s\rangle$.

Vermits er geen beslisser voor A_{TM} bestaat, kan H niet bestaan en is dus ook H_{TM} niet beslisbaar. ■

Stelling 4.8.3. *H_{TM} is herkenbaar.*

Proof. De herkenner H voor H_{TM} laat gewoon bij input $\langle M, s\rangle$ M lopen op s: als die stopt, dan accepteert H zijn input. Als M niet stopt, dan blijft H lopen op zijn input. ■

Stelling 4.8.4. *A_{TM} is herkenbaar.*

Proof. Gelijkaardig aan de herkenner voor H_{TM}. ■

We hebben nu als direct gevolg van deze stellingen:

Gevolg 4.8.5. *$\overline{A_{TM}}$ en $\overline{H_{TM}}$ zijn niet herkenbaar.*

Proof. Als $\overline{A_{TM}}$ herkenbaar is, en vermits A_{TM} herkenbaar is, moet A_{TM} ook beslisbaar zijn (zie stelling op pagina 133). Maar A_{TM} is niet beslisbaar, dus is $\overline{A_{TM}}$ niet herkenbaar. Idem voor H_{TM}. ■

De enumeratormachine

De enumeratormachine is eigenlijk de machine zoals orgineel voorgesteld door Alan Turing in zijn publicatie in 1936: hij was geïnteresseerd in het genereren van decimale expansies van *berekenbare reële getallen*. Het verband met herkenbare talen is echter direct, maar we moesten wachten met de enumerator tot na het Halting-probleem want dat zullen we gebruiken.

Zoals je ziet op Figuur 4.3 trekt een enumerator op een Turingmachine en heeft als extra's

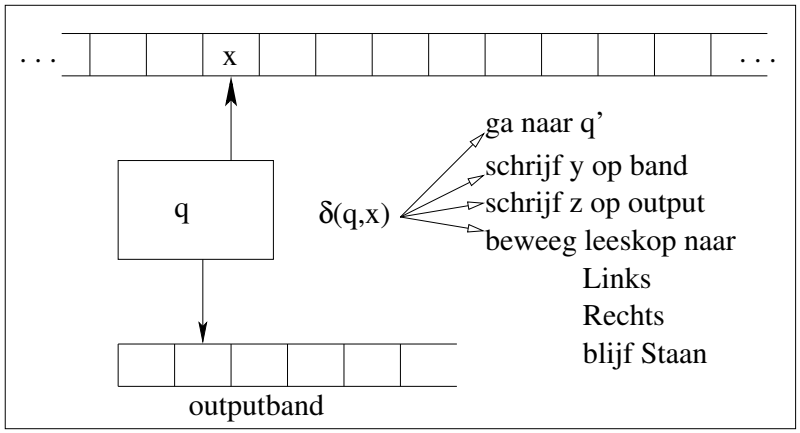


Figure 4.3: Schema van een enumeratormachine

- een enumeratortoestand q_e
- een outputband
- een outputmarker

De δ van de enumerator heeft als signatuur $Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \Gamma_\epsilon \times \{L, R, S\}$. Daarin is de laatste Γ_ϵ bedoeld als symbool dat (bij die overgang) geschreven wordt op de outputband.

De machine start met lege band en lege outputband, in de gewone q_s en begint te werken. Telkens bij een overgang iets op de output wordt geschreven verschuift de schrijfkop naar rechts. Telkens de machine in toestand q_e komt, wordt op de output de outputmarker geschreven, overgegaan naar q_s en de machine loopt verder.

Het is mogelijk dat de enumerator niet stopt en altijd maar weer strings (gescheiden door een outputmarker) output. Het is mogelijk dat de enumerator niet stopt en blijft werken aan dezelfde outputstring (misschien zelfs de eerste!). Het is ook mogelijk dat de machine stopt en dat er een eindig aantal strings (gescheiden door de marker) op de output staan. Gelijk hoe, het heeft zin om te spreken over de verzameling (eindige) outputstrings door de enumerator geproduceerd - of geënumereerd. Die verzameling is de taal door de enumerator bepaald of geënumereerd. De enumerator mag daarbij dezelfde string meer dan eens op de output zetten. We kunnen nu bewijzen:

Stelling 4.9.1. *De taal door een enumerator bepaald is herkenbaar en elke herkenbare taal wordt door een enumerator geënumereerd.*

Proof. (1) We beschrijven informeel een herkenner TM voor de taal L bepaald door een

gegeven enumerator Enu: TM gebruikt Enu als subroutine als volgt.

> Geef een string s aan de TM. De TM start de Enu. Telkens de Enu in zijn q_e komt, kijkt TM na of de laatst geproduceerde string op de outputband van de Enu gelijk is aan s. Indien ja: TM accepteert. Indien niet, laat de Enu verderrekenen.

(2) Laat de TM L bepalen. We construeren de Enu voor die L als volgt. Maak eerst een TM_{gen} die gegeven een getal n de eerste n strings uit Σ^* op de band zet: $s_1, s_2, ...s_n$. Maak een TM_n die op elk van die n strings, n stappen van TM uitvoert: als daarbij een string s_i geaccepteerd wordt, schrijf die dan op de outputband voor de Enu. Maak nu een TM_{driver} die de opeenvolgende getallen n genereert en dan TM_{gen} en TM_n oproept.

■

Waarvoor hadden we nu het Haltingprobleem nodig? We zouden naïef de volgende procedure hebben kunnen voorstellen om een enumerator Enu te maken van een Turingmachine TM:

> genereer de strings van Σ^* in een bepaalde volgorde $s_1, s_2...$
>
> geef elke s_i als input aan TM en als TM accepteert, output s_i

Dit werkt niet omdat TM voor sommige s_i misschien niet stopt en we - dankzij het Haltingprobleem - weten dat er geen manier is om dat van te voren te weten. Als dan s_{i+1} wel tot L_M behoort, dan enumereert Enu die string niet.

Beslisbare talen

In verband met de reguliere talen

Zomaar zeggen *een reguliere taal is beslisbaar*, is voor een aantal interpretaties vatbaar: we moeten precies zeggen welke input we aan de beslisser willen geven. Daarom zijn er van voorgaande uitspraak verschillende versies, afhankelijk van de manier waarop de reguliere taal gegeven is.

We definiëren een aantal talen:

- $A_{DFA} = \{\langle D, s\rangle | D \textit{ is een } DFA, \textit{ en } D \textit{ accepteert } s\}$
- $A_{NFA} = \{\langle N, s\rangle | N \textit{ is een } NFA, \textit{ en } N \textit{ accepteert } s\}$
- $A_{RegExp} = \{\langle RE, s\rangle | RE \textit{ is een reguliere expressie, en } RE \textit{ genereert } s\}$

Stelling 4.10.1. *A_{DFA}, A_{NFA} en A_{RegExp} zijn beslisbaar.*

Proof. Het bewijs is constructief.

- De beslisser B krijgt als input $\langle D, s\rangle$. B simuleert D op s. Als D s accepteert, dan stopt B in zijn q_a. Als D s verwerpt, dan stopt B in zijn q_r. Er is geen probleem met niet stoppen.
- Bij het simuleren van een NFA kan het zijn dat we in een lus gaan, dus doen we het wat anders: de beslisser B krijgt als input $\langle N, s\rangle$. De NFA wordt eerst omgezet naar een DFA met het algoritme dat we zagen in Sectie 3.12. Dan passen we de simulatie toe.
- Voor input $\langle RE, s\rangle$ construeren we eerst vanuit de RE een DFA en dan passen we hierboven toe.

■

We kunnen nu ook besluiten dat een reguliere taal beslisbaar is. Probeer het subtiele verschil met bovenstaande stelling toch te waarderen (er staat een hint bij het bewijs).

Drie populaire vragen i.v.m. talen zijn de volgende:

- bevat de taal de lege string?
- is de taal leeg?
- zijn twee gegeven talen gelijk?

We kunnen voor elk ervan een beslisser maken, maar we moeten natuurlijk weer heel goed de input voor die beslisser beschrijven en dan de beslisser construeren. I.p.v. een TM te maken als beslisser, zullen we naar goede gewoonte informeel beschrijven wat ie doet.

De eerste vraag is voor reguliere talen triviaal, want A_{DFA} is beslisbaar.

Stelling 4.10.2. *$E_{DFA} = \{\langle DFA\rangle | L_{DFA} = \phi\}$ is beslisbaar.*

Proof. Er zijn veel manieren om dit te bewijzen - hier ééntje die gebruik maakt van een boel theorie (en die eigenlijk een overkill is).

Transformeer de DFA naar een minimale DFA_{min} die dezelfde taal accepteert: als $L_{DFA} = \phi$, dan is DFA_{min} isomorf met ... (teken zelf eens die machine). Dat beslissen is eenvoudig.
■

Stelling 4.10.3. *$EQ_{DFA} = \{\langle DFA_1, DFA_2\rangle | L_{DFA_1} = L_{DFA_2}\}$ is beslisbaar.*

Proof. Er zijn weer veel manieren om dit te bewijzen - hier ééntje die gebruik maakt van de algebraïsche eigenschappen van de DFA's.

Uit DFA_1 en DFA_2 construeer je de DFA_Δ die het symmetrisch verschil tussen L_{DFA_1} en L_{DFA_2} bepaalt. Beslis dan of DFA_Δ de lege taal bepaalt m.b.v. vorige stelling. ■

Zelf doen: zoek andere bewijzen voor de stellingen hierboven.

In verband met de contextvrije talen

De vragen zijn analoog aan die bij reguliere talen en ook hier kunnen we een CFL geven door zijn CFG of door zijn PDA. We doen het enkel vertrekkend van de grammatica.

Stelling 4.10.4. *$A_{CFG} = \{\langle G, s\rangle | G$ is een CFG, en $s \in L_G\}$ is beslisbaar:* acceptance *van een string door een CFG is beslisbaar.*

Proof. Een naief bewijsidee zou zijn om de CFG te gebruiken om strings te genereren en als s gegenereerd wordt te accepteren. Dat zou ons enkel een herkenner geven en geen beslisser. We maken gebruik van de Chomsky Normaal Vorm van een CFG, want die garandeert dat een string met lengte $n > 0$ enkel kan afgeleid worden in $2n - 1$ stappen. Dus:

Bij input $\langle G, s\rangle$, converteer G eerst naar zijn Chomsky Normaal Vorm. Genereer alle mogelijke strings met een derivatielengte $2|s| - 1$: dat zijn er eindig veel. Indien s ertussen zit, accept, anders reject. ■

Stelling 4.10.5. *$E_{CFG} = \{\langle G\rangle | G$ is een CFG, en $L_G = \phi\}$ is beslisbaar:* emptyness *van een CFL is beslisbaar.*

Proof. We beschrijven informeel een algoritme dat G transformeert naar een vorm waarin de beslissing gemakkelijk is.

- als er een regel $A \to \alpha$ in zit, en α bestaat alleen uit eindsymbolen (mag dus ook ϵ zijn), dan
  - verwijder alle regels waar A aan de linkerkant staat

  - vervang in elke regel waar A rechts voorkomt, de voorkomens van A door α

- blijf dit doen totdat ofwel
  - het startsymbool verwijderd is: reject, want het startsymbool kan een string afleiden
  - er geen regels zijn van de benodigde vorm: accept, want de taal is leeg

■

Pas toch een beetje op met bovenstaand bewijs: de grammatica wordt getransformeerd naar een niet-equivalente!

Zelf doen: Geef een grammatica die de lege taal bepaalt en pas er bovenstaand algoritme op toe. Leerde je daardoor iets over Prologprogramma's die geen antwoorden (kunnen) geven?

Stelling 4.10.6. *$ES_{CFG} = \{\langle G\rangle | G$ is een CFG, en $\epsilon \in L_G\}$ is beslisbaar: het is beslisbaar of een CFG de lege string genereert.*

Proof. We transformeren de CFG naar zijn Chomsky Normaal Vorm. Indien die de regel $S \to \epsilon$ bevat, accepteer, anders reject. ■

Stelling 4.10.7. *Elke CFL is beslisbaar. De CFL wordt gegeven door zijn CFG.*

Proof. Hier wordt gevraagd om voor een gegeven CFG G te bewijzen dat er een beslisser B_G bestaat die voor elke string s kan beslissen of ie door G wordt gegenereerd. Dat is niet hetzelfde als A_{CFG} beslissen. Maar het trekt er voldoende op: werk de details zelf uit. ■

Er blijft nog over: is EQ_{CFG} beslisbaar, t.t.z. als we twee contextvrije grammatica's krijgen, kunnen we dan beslissen of ze dezelfde taal bepalen? De oplossing voor EQ_{DFA} steunde op het symmetrisch verschil van reguliere talen. Datzelfde idee kunnen we niet gebruiken voor CFL's want die zijn niet gesloten onder complement of doorsnede.

Zelf doen:

Bewijs dat $\overline{EQ_{CFG}}$ herkenbaar is.

Wat betekent dat voor EQ_{CFG}?

Bewijs dat Stelling 10.6 rechtsreeks volgt uit Stelling 10.4.

Niet-beslisbare talen

We hebben in Sectie 4.8 bewezen dat A_{TM} en H_{TM} niet beslisbaar zijn. We doen dat hier voor nog meer talen.

Stelling 4.11.1. *$E_{TM} = \{\langle M\rangle | M$ is een TM, en $L_M = \phi\}$ is niet beslisbaar: het is niet beslisbaar of een Turingmachine geen enkele input accepteert.*

Proof. Stel dat E_{TM} beslisbaar is, dan bestaat er een beslisser E voor die taal. Construeer nu een beslisser B voor A_{TM} als volgt: B krijgt als input $\langle M, s\rangle$

- construeer een machine M_s die als volgt te werk gaat: voor input w doet M_s
  - indien $w \neq s$, reject
  - laat M lopen op w en geef hetzelfde resultaat terug
- laat E lopen op $\langle M_s\rangle$
  - als E $\langle M_s\rangle$ accepteert, dan laten we B zijn input $\langle M, s\rangle$ verwerpen; immers, M_s bepaalt de lege taal, dus M accepteerde s niet
  - als E $\langle M_s\rangle$ verwerpt, dan laten we B zijn input accepteren; vermits M_s niet leeg is, accepteert M s

Dit toont aan dat B een beslisser is voor A_{TM}, wat niet kan, dus bestaat E niet en E_{TM} is niet beslisbaar. ■

We kunnen E_{TM} lichtjes anders formuleren, als een instantie van het meer algemeen probleem: bepaalt de TM een taal die komt uit een gegeven verzameling van talen, ofwel

$$IsIn_{TM,S} = \{\langle M\rangle | L_M \in S\}.$$

Dan is $E_{TM} = IsIn_{TM,\{\phi\}}$

Hier is een andere instantie van het algemene probleem:

> bepaalt een gegeven Turingmachine een reguliere taal; of is $IsIn_{TM,RegLan}$ beslisbaar; dit probleem wordt ook aangeduid met $REGULAR_{TM}$

Stelling 4.11.2. *$REGULAR_{TM}$ is niet beslisbaar.*

Proof. Stel dat Turingmachine R een beslisser is voor $REGULAR_{TM}$. We nemen eerst twee willekeurige symbolen die we aanduiden met 0 en 1, en we maken een beslisser B voor A_{TM} als volgt: bij input $\langle M, s\rangle$ doet B

- construeert een hulpmachine H_s die op input x het volgende doet:
  - als x van de vorm 0^n1^n is dan accepteer
  - anders: laat M lopen op s; als M s accepteert, dan accept
- laat R lopen op $\langle H_s\rangle$
- als R accepteert, accept; als R verwerpt, reject

Bemerk eerst dat de H_s machine nooit moet lopen: ze dient alleen als input voor R. Om de redenering nu af te maken:

H_s accepteert ofwel de taal $\{0^n1^n\}$ (niet-regulier) ofwel heel Σ^* (regulier). Dus B accepteert $\langle M, s\rangle$ alss R $\langle H_s\rangle$ accepteert, alss H_s heel Σ^* accepteert, alss M s accepteert. Dus is B een beslisser voor A_{TM}, hetgeen niet kan, dus R bestaat niet en $REGULAR_{TM}$ is niet beslisbaar. ■

Stelling 4.11.3. *EQ_{TM} is niet beslisbaar.*

Proof. We weten al dat E_{TM} niet beslisbaar is, en eigenlijk is dit hier een speciaal geval: het is duidelijk dat als we van twee willekeurige machines kunnen beslissen of ze dezelfde taal genereren, dan moet dat ook kunnen met een willekeurige machine en M_ϕ (de machine waarvan de taal leeg is). Bijgevolg krijgen we een contradictie door te veronderstellen dat EQ_{TM} beslisbaar is. ■

De bewijstechniek hierboven wordt opnieuw bekeken in sectie 4.16.

Vóór we de volgende stelling bewijzen, moeten we de klasse van *Lineair Begrensde Automaten* invoeren.

Definitie 4.11.4. *Lineair Begrensde Automaat*
Een Lineair Begrensde Automaat is een Turingmachine die niet leest of schrijft buiten het deel van de band dat initieel invoer bevat.

De naam van die automaat is misschien raar, maar een equivalente definitie laat toe dat het stuk band dat de machine gebruikt slechts een constante factor f groter mag zijn dan de invoer: die f is onafhankelijk van de grootte van de invoer natuurlijk. We hebben vroeger al vermeld dat zulke automaten context-sensitieve talen kunnen parsen.

Een beslisser om uit te maken of een gegeven Turingmachine eigenlijk een LBA is, kan niet (je kan het bewijs over $REGULAR_{TM}$ aanpassen). Maar je kan van elke Turingmachine gemakkelijk een LBA maken door links en rechts van de invoer een marker te zetten en de transitietabel van de TM aan te passen zodat die nooit overschreden wordt.[5]

Het acceptance probleem voor LBA is gedefinieerd als de taal

$$A_{LBA} = \{\langle M, s\rangle | M \textit{ is een LBA en } s \in L_{LBA}\}.$$

Misschien verrassend, maar ...

Stelling 4.11.5. *A_{LBA} is beslisbaar*

Proof. We kijken naar de configuraties die kunnen voorkomen tijdens de uitvoering van een LBA op een string met lengte n. Het aantal toestanden van de LBA noteren we met q en het aantal elementen in het bandalfabet met b. Het aantal mogelijke strings die tijdens de uitvoering op de band kunnen staan is begrensd door b^n. De leeskop kan onder elk van de symbolen staan terwijl de machine in elk van de toestanden kan zitten. Dat geeft in het totaal maximaal qnb^n configuraties.

We kunnen nu een beslisser B voor A_{LBA} construeren als volgt: bij input $\langle M, s\rangle$ doet B het volgende

- berekent $Max = qnb^n$
- simuleert dan M op s voor maximaal Max stappen
- indien M ondertussen accepteerde, accept
- indien M ondertussen verwierp, reject
- indien M nog niet stopte, betekent dat dat M in een lus zit en dus niet zal accepteren: reject

■

Stelling 4.11.6. *$E_{LBA} = \{M | M \textit{ is een LBA die de lege taal bepaalt}\}$ is niet beslisbaar*

Proof. We laten eerst zien dat voor een gegeven Turingmachine M en string s we een LBA kunnen construeren die gegeven een eindige rij configuraties (van M) kan beslissen of die rij een accepterende computation history is voor s. Een rij configuraties kan gemakkelijk op een band geplaatst worden zoals in de figuur hieronder

[5] **Zelf doen**: toon met een voorbeeld aan dat de taal wijzigt!

$	a	q_4	c	d	$	a	b	q_7	d	$

Die stelt een overgang voor waarbij $\delta(q_4, c) = (q_7, b, R)$.

Wat moet een machine doen om na te gaan of een rij configuraties een accepterende computation history is voor s?

- nakijken of twee opeenvolgende configuraties verbonden zijn door de δ
- nakijken of de eerste configuratie q_s bevat op de juiste plaats
- nakijken of de laatste configuratie q_a bevat

Zonder veel in detail te treden moet het duidelijk zijn dat hiervoor slechts een constante hoeveelheid extra bandruimte nodig is en dat die beslissing dus kan genomen worden door een LBA. We maken die LBA zo dat ie bij een accepterende computation history accepteert en anders reject. Nu kunnen we het bewijs zelf beginnen.

Stel dat we een beslisser E hebben voor E_{LBA}. We construeren een beslisser B voor A_{TM} als volgt. Bij input $\langle M, s\rangle$ doet B:

- construeer de LBA $A_{M,s}$ die van input kan beslissen of een inputstring een accepterende computation history is voor M op input s
- laat E los op $\langle A_{M,s}\rangle$: als E aanvaardt, reject; anders accept

B beslist A_{TM} want B accepteert $\langle M, s\rangle$ alss E $\langle A_{M,s}\rangle$ reject, alss $A_{M,s}$ aanvaardt minstens één string, alss er bestaat een accepterende computation history voor M op s. Het laatste is equivalent met zeggen dat M s accepteert.

Die B kan niet bestaan, dus ook E niet en E_{LBA} is onbeslisbaar. ■

Een klein overzichtje dat overeenkomsten en verschillen tussen PDA, LBA en TM laat zien:

- acceptance en halting
  - PDA en LBA zijn gelijk: acceptance en halting zijn beslisbaar
  - TM verschilt: acceptance en halting zijn niet beslisbaar
- leegheid
  - LBA en TM zijn gelijk: leegheid is niet beslisbaar
  - PDA verschilt: leegheid is beslisbaar

De talen die door een LBA worden bepaald liggen dus tussen de CFL's en de willekeurige talen: zij worden gegenereerd door de context-sensitieve grammatica's.

Als afsluiter (voorlopig): het is niet beslisbaar of een CFG alle strings uit Σ^* genereert, dus $ALL_{CFG} = \{\langle G\rangle | L_G = \Sigma^*\}$ is niet beslisbaar. Dat is wel opmerkelijk want E_{CFG} is wel beslisbaar.

Stelling 4.11.7. *ALL_{CFG} is niet beslisbaar.*

Proof. Het bewijs wordt niet gezien. ■

Zelf doen: Bewijs dat ALL_{RegExp} beslisbaar is.

Wat weetjes over onze talen

Met $Besl$ duiden we de beslisbare talen aan, met $Herk$ de herkenbare. Eerst wat inclusies: zij zijn allemaal strikt.

$$RegLan \subset DCFL \subset CFL \subset Besl \subset Herk \subset \mathcal{P}(\Sigma^*)$$

Nu wat eigenschappen i.v.m. operaties op talen:

$RegLan$ is gesloten onder unie, doorsnede, complement

$DCFL$ is gesloten onder complement, maar CFL niet

CFL is gesloten onder unie, maar $DCFL$ niet

$Besl$ is gesloten onder unie en complement

$Herk$ is gesloten onder unie

Voor de aardigheid eens een niet zo gewone operatie op talen: de omkering. Noteer met $\hat{s}$ de string die je krijgt door de symbolen van s in omgekeerde volgorde te schrijven. Dan is $\widehat{L} = \{\hat{s} | s \in L\}$.

$RegLan$, CFL, $Besl$ en $Herk$ zijn gesloten onder omkering

$DCFL$ is NIET gesloten onder omkering

Voorbeeld: De taal $\{ba^m b^n c^k | m \neq n\} \cup \{ca^m b^n c^k | n \neq k\}$ is deterministisch contextvrij (maak er een CFG voor!) maar zijn omgekeerde is dat niet.

Aftelbaar

Dit is een goed moment om op het begrip aftelbaar terug te komen: in het engels spreekt men van countable, maar er bestaat ook de notie van enumerable (of effective enumerable). Dat laatste noemen we *effectief aftelbaar* of *opsombaar*.

Een verzameling V is aftelbaar als er een bijectie bestaat tussen V en (een deel van) $\mathbb{N}$. Die definitie zegt enkel iets over het bestaan van de bijectie, niet over het gemak waarmee die kan berekend worden: wat de definitie betreft hoeft dat zelfs niet.

Nochtans is dat in de context van berekenbaarheid belangrijk, want we hebben al verschillende keren constructies gebruikt zoals *een TM die alle strings van* Σ^* *één voor één genereert*. Om dat mogelijk te maken moet de verzameling effectief aftelbaar zijn. Is het eenvoudig aan te tonen dat er ook aftelbare verzamelingen zijn die niet effectief aftelbaar zijn?

Laat ons eerst het verband zien tussen gegenereerd worden door een enumeratormachine en effectief aftelbaar: de enumeratormachine genereert soms dubbels, maar die kan je vermijden door de machine uit te breiden door in de enumeratortoestand eerst te kijken op de outputband of de nieuwe string wel echt nieuw is. Dus: een enumeratormachine maakt een effectieve aftelling van zijn gegenereerde taal.

Maar elke taal door de enumerator gegenereerd is herkenbaar en we bewezen dat er een taal L bestaat die niet herkenbaar is. Die L kan niet effectief afgeteld worden. Nochtans is die L wel aftelbaar.

Zelf doen: Geef concrete voorbeelden van talen die aftelbaar zijn, maar niet opsombaar.

Een dooddoener: de stelling van Rice

We hebben van een aantal concrete talen bewezen dat ze niet beslisbaar zijn, meestal door reductie naar A_{TM}: elke keer vonden we een nieuw truukje om van een veronderstelde beslisser een beslisser te maken voor A_{TM}. De stelling van Rice is dan ook een leukerd: die bewijst dat elke taal (die aan bepaalde voorwaarden voldoet) niet-beslisbaar is. Hier is de context meer precies.

Beschouw de verzameling van Turingmachines (over een vast alfabet als je wil). Een eigenschap P van de Turingmachines verdeelt die in twee verzamelingen: de machines met de eigenschap P ofwel $Pos_P = \{M | P(M) = true\}$, en de machines die de eigenschap niet hebben $Neg_P = \{M | P(M) = false\}$.

Definitie 4.14.1. *Niet-triviale eigenschap*
Een eigenschap P van Turingmachines heet *niet-triviaal* indien
$Pos_P \neq \emptyset$ en ook $Neg_P \neq \emptyset$.

Definitie 4.14.2. *Taal-invariante eigenschap*
De eigenschap P heet *taal-invariant* indien
$L_{M_1} = L_{M_2} \Longrightarrow P(M_1) = P(M_2)$
of in woorden *alle machines die dezelfde taal bepalen hebben ofwel allemaal P, ofwel heeft geen enkele ervan P.*

Zelf doen:

Geef wat extravagante voorbeelden van taal-invariante niet-triviale eigenschappen van Turingmachines.

Geef wat extravagante voorbeelden van niet-taal-invariante eigenschappen van Turingmachines.

Voor een gegeven niet-triviale taal-invariante eigenschap P, hoeveel machines zijn er die eigenschap P hebben? En niet hebben?

Stelling 4.14.3. *Stelling I van Rice*
Voor elke niet-triviale, taal-invariante eigenschap P van Turingmachines geldt dat Pos_P (en ook Neg_P) niet beslisbaar is.

Proof. Veronderstel dat $M_\emptyset$ (de machine die de lege taal beslist) de eigenschap P niet heeft - indien dat niet zo is, verander dan P in zijn negatie. Vermits P niet-triviaal is bestaat er een taal L_X zodat X een Turingmachine is met de eigenschap P. Stel dat Pos_P (en dus ook Neg_P) beslisbaar is: we zullen een beslisser B voor Pos_P gebruiken om een beslisser A te maken voor A_{TM}. A krijgt als input $\langle M, s\rangle$ en doet het volgende:

- construeer een hulpmachine $H_{M,s}$ die het volgende doet bij input x:
  - laat M lopen op s
  - indien M s accepteert laat dan X lopen op x en accepteer als X x accepteert
- laat nu B los op $H_{M,s}$
- als B $H_{M,s}$ accepteert, dan accept, anders reject

Kijk eerst na dat je begrijpt dat $H_{M,s}$ ofwel de lege taal accepteert, ofwel L_X. Daarvan maken we gebruik:

A accepteert $\langle M, s\rangle$ alss B $H_{M,s}$ accepteert, alss $H_{M,s}$ heeft de eigenschap P, alss $H_{M,s}$ accepteert L_X, alss M accepteert s.

Dus, A is een beslisser voor A_{TM}, hetgeen niet kan, dus kan B niet bestaan en Pos_P is niet beslisbaar. ■

Er bestaat een tweede stelling van Rice: elke niet-monotone eigenschap is niet-herkenbaar; de moeite om nader te bekijken!

Zelf doen:

Wat concludeer je nu over de herkenbaarheid van Pos_P en/of Neg_P?

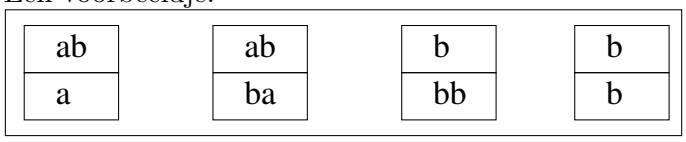
Gebruik Rice voor een nieuw bewijs van vroegere stellingen.

Het *Post Correspondence Problem*

Het gaat hier om Emile Post en de *correspondence* heeft niks te maken met het versturen van correspondentie, maar met *overeenkomst*. Emile Post was één van de grondleggers van recursietheorie en ook hij zocht naar universele berekeningsmechanismen. Hij ontwierp het volgende *spel*:

Gegeven een eindig aantal verschillende dominostenen, maar van elk zoveel kopieën als je maar wil. We zullen stenen altijd vertikaal leggen. Op boven- en onderhelft staan strings met tekens uit een gegeven (eindig) alfabet. Kan je een (eindige) rij stenen tegen elkaar leggen zodanig dat de string uit de bovenhelften gelijk is aan de string uit de onderhelften?

Een voorbeeldje:



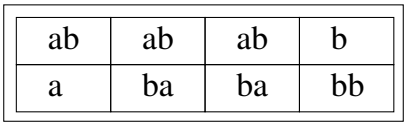


Figure 4.4: Vier gegeven stenen en een oplossing

De Figuur 4.4 laat zien dat je niet alle stenen hoeft te gebruiken, en dat je een steen meerdere keren mag gebruiken.

Het gaat hier om een beslissingsprobleem: het is genoeg om met zekerheid ja of nee te kunnen antwoorden; het is niet nodig om bij een ja een constructie te maken van een overeenkomst.

Dit simpele *spelletje* blijkt (1) onbeslisbaar en (2) krachtig genoeg om **alle** berekeningen mee te doen die je met een Turingmachine kan doen. Het eerste volgt uit het tweede, van zodra we kunnen laten zien dat *het stoppen van een willekeurige Turingmachine* kan vertaald worden naar *er bestaat een oplossing voor een bepaald PCP*. Die vertaalslag doen we expliciet voor een voorbeeld: de generalisatie kan je vinden o.a. in Sipser of Minsky.

Van Turingmachine naar het Postspelletje

In dit concreet voorbeeld gebruiken we X voor de starttoestand, A voor accepterende toestand, Z voor de reject toestand. Het alfabet is $\{a, b\}$, en de transitietabel is

1	X	a	B	a	R
2	X	b	Z	_	_
3	X	#	A	#	S
4	B	a	Z	_	_
5	B	b	X	b	R
6	B	#	Z	_	_

De nummering dient om er later gemakkelijk naar te kunnen verwijzen. Kijk na dat deze tabel een Turingmachine specifieert die de taal $(ab)^*$ accepteert. Stel dat de input waarop we de machine laten lopen *ab* is. We voeren nog een nieuw symbool in: \$. We geven nu de stenen die we nodig hebben om met een Postspel die Turingmachine na te bootsen:

- voor elk symbool x maak een steen met van boven en van onder x, dus de 4 stenen:

a	b	\$	#
a	b	\$	#

en stenen met Ax of xA van boven en A van onder, dus 8 stenen:

aA	bA	$A	#A	Aa	Ab	A$	A#
A	A	A	A	A	A	A	A

- voor regel 1 in de transitietabel maken we een steen $\begin{array}{|c|}\hline \text{Xa} \\ \hline \text{aB} \\ \hline \end{array}$
- voor regel 5 in de transitietabel maken we een steen $\begin{array}{|c|}\hline \text{Bb} \\ \hline \text{bX} \\ \hline \end{array}$
- voor regel 3 maken we $\begin{array}{|c|}\hline \text{X\#} \\ \hline \text{A\#} \\ \hline \end{array}$
- de volgende stenen hangen niet af van de gegeven Turingmachine:
  de afsluiter $\begin{array}{|c|}\hline \text{A\$\$} \\ \hline \text{\$} \\ \hline \end{array}$ en de hekjes generatoren links en rechts: $\begin{array}{|c|c|}\hline \text{\$} & \text{\$} \\ \hline \text{\$\#} & \text{\#\$} \\ \hline \end{array}$
- en tenslotte gieten we de input ab in de steen $\begin{array}{|c|}\hline \text{\$} \\ \hline \text{\$Xab\$} \\ \hline \end{array}$: een beginconfiguratie.

We vragen nu: construeer een correspondentie met deze stenen beginnend met de inputsteen.[6] Hier is de oplossing:

$	Xa	b	$	a	Bb	#	$	a	b	X#	$	a	bA	#	$	aA	#	$	A#	$	A$$
Xab	aB	b	#$	a	bX	#	$	a	b	A#	$	a	A	#	$	A	#	$	A	$	$

In de onderste lijn zie je tussen twee $-tekens telkens een configuratie: twee opeenvolgende configuraties zijn verbonden door de transitiefunctie, tot op het ogenblik dat de accepterende toestand verschijnt. Daarna wordt de configuratie leeg gemaakt tot daarin alleen nog de accepterende toestand staat, en dan volgt de afsluiter.

Zelf doen:

Overtuig je er nu van dat als je begint te bouwen met een input die geen string is in de taal $(ab)^*$, je geen correspondentie kan vinden.

Zoek het algemene verband tussen δ en de stenen: hierboven hadden we geen bewegingen van de leeskop naar links!

Formuleer nu nauwkeuriger het verband tussen PCP en H_{TM}.

[6] Het algemene PCP laat toe om met een willekeurige steen te beginnen, maar je kan het ene in het andere transformeren.

Een extraatje: de Post tag machine E. Post staat ook bekend om zijn *tag systems* of *Post tag machines*. Laten we een klein voorbeeld geven van een 2-tag systeem:

- het alfabet is $\{a, b, c\}$ en er is een haltsymbool H
- de regels zijn
  - a $\rightarrow$ aa
  - b $\rightarrow$ accH
  - c $\rightarrow$ a
- het initieel woord is aab
- en hier is een herschrijfrij

  aab $\rightarrow$ baa $\rightarrow$ aaccH $\rightarrow$ ccHaa $\rightarrow$ Haaa

De algemene regel voor herschrijven is: de eerste letter van het woord bepaalt welke regel zal gebruikt worden (er kunnen meerdere regels zijn voor dat symbool indien het een niet-deterministisch tag systeem is). Schrijf de rechterkant van de regel vanachter bij de string en veeg van voor 2 symbolen uit - dezelfde 2 als in 2-tag systeem.

Als er een H links staat is de berekening gedaan en kan je de string beschouwen als het resultaat van de berekening bij input de initiële string.

Ook dit herschrijfsysteem is Turingcompleet.

2-tag systems zijn belangrijk o.a. omdat ze met kleine UTM's kunnen gesimuleerd worden.

Veel-één reductie

Je hebt in je inleiding tot complexiteitstheorie al kennis gemaakt met het begrip *is polynoom reduceerbaar naar*. Die relatie gaf inzichten in de structuur van P, en liet de definitie van NP-compleet toe. Als een taal L_1 polynoom naar L_2 kan gereduceerd worden, dan weten we ook dat L_2 in zekere zin *moeilijker is*.

In de context van berekenbaarheid bestaat een gelijkaardige reductie van talen. Vermits complexiteit nu niet belangrijk is, laten we zeker de eis van polynomialiteit vallen: we vervangen ze door Turing-berekenbaarheid.

Definitie 4.16.1. *Turing-berekenbare functie*
Een functie f heet Turing-berekenbaar indien er een Turingmachine bestaat die bij input s uiteindelijk stopt met $f(s)$ op de band.

We hebben niet geëist dat de machine in de accepterend eindtoestand stopt, maar dat zou niks essentieels veranderen. Dikwijls kort men Turing-berekenbaar af tot berekenbaar.

Definitie 4.16.2. *Reductie van talen*
We zeggen dat taal L_1 (over Σ_1) naar taal L_2 (over Σ_2) kan gereduceerd worden indien er een afbeelding f met signatuur $\Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ bestaat zodanig dat $f(L_1) \subseteq L_2$ en $f(\overline{L_1}) \subseteq \overline{L_2}$, en zodanig dat f Turing-berekenbaar is.
We noteren dat door $L_1 \leq_m L_2$.

In het engels heet zulk een reductie een *many-one reduction* en reduceerbaar wordt *(mapping) reducible* genoemd. Figuur 4.5 toont de eerste voorwaarde in de definitie.

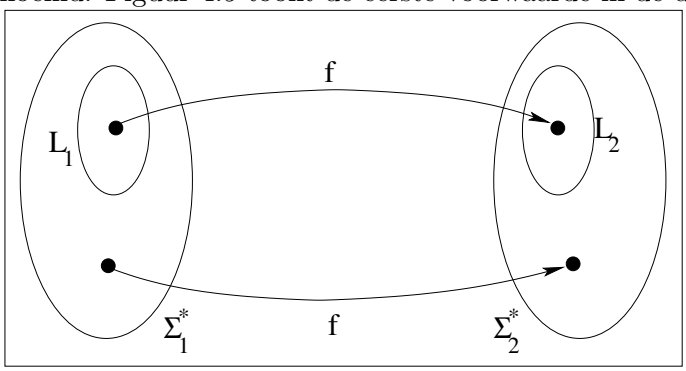


Figure 4.5: Schematische voorstelling van een reductie

Een reductie f geeft een manier om vragen over L_1 om te zetten naar vragen over L_2, in het bijzonder vragen van de vorm $s \in L_1$? Inderdaad, om te testen of $s \in L_1$, kunnen we volstaan met testen of $f(s) \in L_2$. De volgende stellingen en gevolg geven wat verbanden tussen twee zulke talen: bewijs ze zelf.

Stelling 4.16.3. *Als $L_1 \leq_m L_2$ en L_2 is beslisbaar, dan is L_1 beslisbaar.*

Stelling 4.16.4. *Als $L_1 \leq_m L_2$ en L_2 is herkenbaar, dan is L_1 herkenbaar.*

Gevolg 4.16.5. *Als $L_1 \leq_m L_2$ en L_1 is niet-herkenbaar, dan is L_2 niet-herkenbaar. Als $L_1 \leq_m L_2$ en L_1 is niet-beslisbaar, dan is L_2 niet-beslisbaar.*

We hebben vroeger al één keer een mapping reductie gebruikt, zij het informeel: in de stelling op pagina 150 toen we bewezen dat EQ_{TM} niet beslisbaar is. We doen het hier meer formeel

Stelling 4.16.6. *EQ_{TM} is niet beslisbaar.*

Proof. We weten al dat E_{TM} niet beslisbaar is, en we
reduceren nu E_{TM} naar EQ_{TM} met de functie f die bij input $\langle M \rangle$ als resultaat geeft: $\langle M, M_\phi \rangle$ waarin M_ϕ een Turingmachine is die de lege taal bepaalt. Het is duidelijk dat f Turing-berekenbaar is.

Bijgevolg $E_{TM} \leq_m EQ_{TM}$ en we kunnen vorig gevolg gebruiken. ■

Stelling 4.16.7. *Als $A \leq_m B$ dan ook $\overline{A} \leq_m \overline{B}$.*

Proof. Zelf doen! ■

We hebben vroeger ook al andere *reducties* gemaakt van één taal naar een andere: het bewijs van de stelling op pagina 149 gebruikt de onbeslisbaarheid van A_{TM} om die van E_{TM} aan te tonen.[7] Die stelling maakte wel een mapping reductie van $\overline{A_{TM}}$ naar E_{TM}, als volgt: met $\langle M, s \rangle$ laten we overeenkomen $\langle M_s \rangle$ (zie het bewijs van die stelling)...

Stelling 4.16.8. *EQ_{TM} is niet herkenbaar en ook niet co-herkenbaar.*

Proof. We zullen twee mapping reducties construeren, de eerste zal
aantonen dat $A_{TM} \leq_m \overline{EQ_{TM}}$ en de andere toont aan dat $A_{TM} \leq_m EQ_{TM}$. Vermits $\overline{A_{TM}}$ niet herkenbaar is, bewijst dat de stelling.

1. f transformeert $\langle M, s \rangle$ in $\langle M_s, M_\phi \rangle$; daarin is M_s een machine die elke string accepteert indien M s accepteert; het is duidelijk dat f berekenbaar is; we moeten nog de andere voorwaarden aantonen:
   - indien M s accepteert, dan zijn M_s en M_ϕ verschillend
   - indien M s niet accepteert, dan zijn M_s en M_ϕ gelijk
2. f transformeert $\langle M, s \rangle$ in $\langle M_s, M_{\Sigma^*} \rangle$; M_{Σ^*} is de machine die alles accepteert; M_s is zoals hiervoor; de voorwaarden op f zijn gemakkelijk na te gaan

■

In volgend hoofdstuk bekijken we een tweede manier om talen te reduceren.

[7] Maar een mapping reductie van A_{TM} naar E_{TM} bestaat niet - probeer dat te bewijzen of in te zien.

Orakelmachines en een hiërarchie van beslisbaarheid

Stel dat we een manier hadden om A_{TM} te beslissen, kunnen we dan alles beslissen? Laten we die vraag eerst wat concreter maken:

- een manier om A_{TM} te beslissen kan niet een Turingmachine zijn; we moeten het dus een nieuwe naam geven: een *orakel*; we zien later meer concreet hoe een orakel kan gerealiseerd worden ...
- het orakel moet kunnen geraadpleegd worden door een Turingmachine; meer concreet, het orakel voor A_{TM} moet door een Turingmachine kunnen opgeroepen worden als een subroutine, met een string als input voor het orakel; het orakel heeft slechts een eindig aantal stappen nodig om de beslissing aan de Turingmachine mee te delen;
- op die manier hebben we een orakelmachine $O^{A_{TM}}$ gebouwd: een Turingmachine die vragen kan stellen aan het orakel voor A_{TM}

Het is duidelijk dat we een $O^{A_{TM}}$ kunnen maken die A_{TM} beslist: geef de input $\langle M, s\rangle$ aan het orakel, en geef als antwoord wat het orakel zegt. Het is dus direct duidelijk dat de verzameling van orakelmachines met orakel A_{TM} strikt sterker is dan de verzameling Turingmachines. Hier nog een voorbeeld:

Stelling 4.17.1. *Er bestaat een $O^{A_{TM}}$ die E_{TM} beslist.*

Proof. We construeren $O^{A_{TM}}$ als volgt: bij input $\langle M\rangle$ doet $O^{A_{TM}}$

- construeer een Turingmachine P die bij input w doet:
  - laat M lopen op alle strings van Σ^* (*)
  - als M een string accepteert, accept
- vraag aan het orakel voor A_{TM} of $\langle P, x\rangle \in A_{TM}$
- als het orakel **ja** antwoordt, reject; anders accept

Als $L_M \neq \emptyset$, dan accepteert P elke input, en zeker input x; dus antwoordt het orakel **ja** en dus moet $O^{A_{TM}}$ verwerpen. Omgekeerd: als $L_M = \emptyset$, dan accepteert $O^{A_{TM}}$. We besluiten dat $O^{A_{TM}}$ de taal E_{TM} beslist. ■

Verdergaand op vorige stelling: we zeggen dat E_{TM} beslisbaar is relatief t.o.v. A_{TM}. Dit brengt ons bij de definitie:

Definitie 4.17.2. *Turingreduceerbaar*
Een taal A is Turingreduceerbaar naar taal B, indien A beslisbaar is relatief t.o.v. B, t.t.z. er bestaat een orakelmachine O^B die A beslist. We schrijven $A \leq_T B$.

Die definitie sluit aan bij onze intuïtie over wat reduceerbaarheid zou moeten betekenen:

Stelling 4.17.3. *Indien $A \leq_T B$ en B is beslisbaar, dan is A beslisbaar.*

Het bewijs hiervan - en ook van de volgende stelling - doe je zelf.

Stelling 4.17.4. *Indien $A \leq_m B$ dan is ook $A \leq_T B$.*
M.a.w. $\leq_m$ is fijner dan $\leq_T$.

Hier een beschrijving van een orakel voor L: elke string heeft een volgnummer in de lexicografische orde met kortere strings eerst. De taal kan voorgesteld worden als een bitmap, waarbij op de i-de plaats een 1 staat als de i-de string in L zit, en anders een 0. Die bitmap kunnen we op een band zetten. Als het orakel een vraag krijgt over een string s, dan berekent het orakel het volgnummer i van s, en kijkt wat er op de i-de plaats van de bitmapband staat.

Kan de klasse van orakelmachines met een orakel voor A_{TM} elke taal beslissen? Nee. Het aantal talen is niet-aftelbaar; het aantal orakelmachines met het orakel voor A_{TM} is aftelbaar. Dus bestaat er een taal X die niet beslisbaar is m.b.v. het orakel voor A_{TM}. Je kan nu die redenering herhalen met een orakel voor X en je merkt dat er een hele hiërarchie bestaat van steeds moeilijker te beslissen talen. Ook in de context van complexiteitstheorie worden orakelmachines gedefinieerd. Dat geeft ook aanleiding tot een hiërarchie. Die kan nog altijd instorten als blijkt dat $NP = P$. Onze berekenbaarheidshiërarchie blijft echter zeker overeind.

Zelf doen: In de stelling op pagina 162 staat een (*): hoe kan M lopen op alle strings? Dat zijn er oneindig veel!

Turing-berekenbare functies en recursieve functies

We hebben in een vorig hoofdstuk een definitie gegeven van de Turing-berekenbare functies. Die was nogal abstract en vooral existentieel. Een andere manier om greep te krijgen op welke functies door een Turingmachine berekenbaar zijn, is door *bottom-up* te werken: we beginnen met eenvoudige functies, stellen die samen met eenvoudige operatoren en zien hoe ver we geraken. Deze weg werd bewandeld door Kurt Goedel en Jacques Herbrand.

Primitief recursieve functies

Basisfuncties

- de nulfunctie: $nul : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$$nul(x) = 0$$
- de successorfunctie: $succ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$$succ(x) = x + 1$$
- projecties: ${p_i}^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$
$${p_i}^n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i$$

Compositie

Gegeven:

- $g_1, g_2, ..., g_m$ functies $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$
- f functie $\mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$

maak door compositie functie $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$:

$$h(\overline{x}) = f(g_1(\overline{x}), g_2(\overline{x}), ..., g_m(\overline{x}))^8$$

Notatie: $h = Cn[f, g_1, \ldots, g_m]$

Primitieve recursie

Gegeven:

- $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$
- $g : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$

maak door primitieve recursie $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$:

$$h(\overline{x}, 0) = f(\overline{x})$$
$$h(\overline{x}, y + 1) = g(\overline{x}, y, h(\overline{x}, y))$$

Notatie: $h = Pr[f, g]$

[8] $(\overline{x} = x_1, x_2, ..., x_k)$

Bovenstaande geldt voor $k > 0$. Voor $k = 0$ is het: $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$h(0) = c \text{ waarbij } c \text{ een getal is}$$
$$h(y+1) = g(y, h(y))$$

Definitie 4.18.1. *Primitief recursieve functie*
Alle functies die je kan maken door te vertrekken van de basisfuncties en door gebruikmaking van compositie en primitieve recursie, noemen we **primitief recursief**.

Primitief recursieve functies zijn overal gedefinieerd. Ze kunnen berekend worden met for-programma's.

Voorbeelden

- $Cn[succ, nul]$ is de constante functie 1
- $Cn[succ, Cn[succ, Cn[succ, nul]]]$ is de constante functie 3
- $Pr[{p_1}^1, Cn[succ, {p_3}^3]]$ = som van 2 inputs ($\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$)
  schrijf uit en zie analogie met:
  som(x,0) = x
  som(x,y+1) = som(x,y) + 1
- $Pr[nul, Cn[som, {p_1}^3, {p_3}^3]]$ = product van 2 inputs ($\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$)
- faculteitsfunctie, predecessor ...

Recursieve functies

Een niet primitief-recursieve functie: de Ackermann functie

Goedel's originele constructie van *alle berekenbare functies* bevatte oorspronkelijk alleen maar de primitief-recursieve functies. Wilhelm Ackermann, student van David Hilbert, publiceerde de nu bekende Ackermann functie in 1928: die functie is duidelijk *berekenbaar* volgens een intuïtief begrip van berekenbaarheid (en ook op een Turingmachine, maar bestond die al in 1928?), maar is niet primitief-recursief. Voor de historische noot: een andere student van Hilbert, Gabriel Sudan, was eigenlijk de eerste die een berekenbare, niet primitief-recursieve functie ontdekte. Hier is de definitie van de Ackermann functie in twee veranderlijken.

$$\text{Ack}(0, \text{y}) = \text{y} + 1$$

Ack(x + 1, 0) = Ack(x, 1)

Ack(x + 1, y + 1) = Ack(x, Ack(x + 1, y))

Deze functie is overal gedefinieerd (probeer dat in te zien!) en stijgt sneller dan elke primitief recursieve functie: daarom is ze niet primitief recursief.

Dikwijls wordt met Ackermann's functie een functie in één argument bedoeld, gedefinieerd als volgt: `Ack(n) = Ack(n,n)`. Deze functie stijgt zeer snel: ook sneller dan elke primitief-recursieve functe in één veranderlijke. Zijn inverse is o.a. van belang in complexiteitsanalyse: zoek het Union-Find algoritme.

Onbegrensde minimizatie

Goedel moest dus zijn klasse van functies uitbreiden om ook de Ackermann functie toe te laten. Hij deed dat door *onbegrensde minimizatie* te introduceren.

Gegeven

- $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$

Construeer door onbegrensde minimisatie:

$g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ als volgt:

$g(\overline{x}) = y$ als

$f(\overline{x}, y) = 0$ en
$f(\overline{x}, z)$ is gedefinieerd voor alle $z < y$ en $f(\overline{x}, z) \neq 0$

en anders is $g(\overline{x})$ niet gedefinieerd

Notatie: $g = Mn[f]$

g geeft minimale nulpunten van f

Code om Mn[f](x) te berekenen

```
y = 0;
while (f(x,y) != 0)
   y++;
return y;
```

Je kan op twee manieren in een lus terecht komen ...

Definitie 4.18.2. *Recursieve functies*
Recursieve functies verkrijg je uit de basisfuncties en toepassen van Pr, Cn en Mn. Die functies worden ook *μ-recursive* genoemd.

Deze functies kunnen met while-programma's berekend worden. Meer bepaald kan elke recursieve functie berekend worden met een Turingmachine en omgekeerd. Dus: de Turing-berekenbare functies zijn exact de recursieve functies. Het is duidelijk uit de definitie van onbegrensde minimisatie dat recursieve functies *partieel* kunnen zijn. Dat is consistent met Turing-berekenbaar, vermits ook een TM dikwijls slechts een partiële functie definieert. De Ackermann functie laat zien dat een echte recursieve functie ook totaal kan zijn.

Zelf doen:

Als het domein van een partiële recursieve functie beslisbaar is, dan kan de functie uitgebreid worden tot een totale functie, die ook recursief is: probeer dat in te zien, of nog beter, te bewijzen.

Bestaat er een partiële recursieve functie waarvan het domein niet beslisbaar is?

Is het domein van een (partiële) recursieve functie herkenbaar?

Is het bereik van een (partiële) recursieve functie herkenbaar?

De bezige bever en snel stijgende functies

De Ackermann functie liet al zien dat snel stijgen een aanduiding kan zijn dat er extra machinerie nodig is om de functie nog te kunnen berekenen. Voor de Ackermann functie lukte dat nog met machinerie die door een Turingmachine kan geïmplementeerd worden: onbegrensde minimizatie. De essentie daarvan is *zoek het* **kleinste** *getal dat aan een voorwaarde V voldoet.* Dat kan je implementeren door:

$i = 0$;

while not$(V(i))$ $i++$;

en je weet al dat dat niet eindigt als geen enkele i voldoet aan V.

Stel dat we nu als nieuwigheid invoeren *onbegrensde maximalisatie*, t.t.z. *zoek het* **grootste** *getal dat voldoet aan voorwaarde V.* Hoe zou dat kunnen geïmplementeerd worden? Hier een eerste poging:

$i = \infty$;

$while\ not(V(i))\ i--;$

Dat werkt niet - argumenteer zelf.

Hier een tweede poging:

$i = 0;$

$while\ i < \infty$

$if\ V(i)\ max = i;$

$i++;$

Ook die heeft problemen ...

Dit laat zien dat het invoeren van een nieuwe constructie om een grotere klasse functies te kunnen berekenen, niet zonder gevaar is.

De bezige bever

Tibor Radó bedacht in 1962 de volgende functie S: bschouw alle Turingmachines met alfabet $\{0, 1\}$ en n toestanden. Zo zijn er maar een eindig aantal. We kunnen die Turingmachines laten lopen met als input een lege band (allemaal nullen), en we tellen hoeveel stappen het duurt voor de machine stopt (in q_a of q_r maakt niet uit). Een bezige bever is een kampioen in zijn klasse, t.t.z. voor een gegeven n bestaat geen andere machine in dezelfde klasse die **meer** stappen nodig heeft voor ie stopt. We noteren het aantal stappen dat een bezige bever van klasse n nodig had met $S(n)$. Tibor Radó beperkte zich tot Turingmachines die bij elke overgang de leeskop naar links of rechts bewegen, en formuleerde alles in termen van hoeveel keer de leeskop beweegt - maar dat maakt niet echt uit.

S definieert een totale functie met signatuur $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. De vraag *is S Turing-berekenbaar* is dus aan de orde.

Voor kleine n lijkt het te doen om een bezige bever te construeren - door exhaustief alle TM's te maken met n toestanden, die te laten lopen op een lege input en het aantal stappen te tellen.

Maar er is een probleem: door het Halting-probleem weten we dat we niet altijd kunnen weten of een machine stopt op de lege input. Dus moeten we van de machines die al heel lang lopen, telkens een apart bewijs geven dat ze eigenlijk in een lus zitten, ofwel kunnen we alleen maar ondergrenzen vinden voor $S(n)$. En vergis je niet: men weet dat er kleine universele Turingmachines bestaan, dus al bij heel kleine n zijn er machines waarvoor het niet-triviaal is sommige eigenschappen te bewijzen.

De waarden van $S(n)$ zijn exact bekend voor $n < 5$. Voor $n = 5$ is het huidige record 47 176 870, maar van een aantal machines (die nog niet gedaan hebben :-) is niet geweten

of ze in een lus zitten: die machines zouden dus nog het record kunnen verbeteren. Een gelijkaardige situatie bij $n = 6$ waar het record op 10^{2879} staat.

S is een functie die verkregen wordt door *begrensde* maximalisatie, maar wel over een niet-berekenbare verzameling: die verzameling bevat juist de stoppende Turingmachines (met n toestanden). Dat vormt de inherente reden waarom S niet berekenbaar is, al bestaat de functie overal en is ze abstract goed gedefinieerd.

Veel open problemen uit de wiskunde zouden *eenvoudig* opgelost kunnen worden als we S exact kenden voor sommige n.

Zelf doen: Welke uitspraken zijn juist? Graag argumentatie bij je antwoorden!

$S(n)$ kan bepaald worden voor elke n, maar is ∞ voor n groot genoeg.

Het is mogelijk dat voor n groot genoeg $Ack(n) > S(n)$.

Elke functie die trager stijgt dan een gegeven primitief-recursieve functie is zelf primitief-recursief.

Chapter 5

Inleiding tot Complexiteitstheorie

In Hoofdstuk 3 wordt bestudeerd of een gegeven taal beslist/bepaald kan worden en welke machinerie daarvoor nodig is. Als een taal beslist kan worden dan bestaat er een algoritme om de beslissing (voo elke gegeven string) te nemen: een algoritme is een voorschrift (of procedure of programma) dat altijd (t.t.z. voor elke invoer) stopt. De natuurlijke vraag is dan: *hoe duur is het beslissingsproces*, en ook *hoe duur* **moet** *het beslissingsproces zijn.*

Kost wordt altijd uitgedrukt in een aantal eenheden van een bepaald type. In het geval van de uitvoering van een algoritme zijn er twee natuurlijke types: tijd en plaats. In dit hoofdstuk gaat het hoofdzakelijk over tijd. Tijd meten we gewoonlijk in veelvouden van seconden of onderdelen ervan, maar die tijdseenheid is moeilijk te formaliseren op een algemene manier: we willen de kost van een algoritme of beslissingsprobleem niet laten afhangen van de toevallig voorhanden technologie. Er is gelukkig een universele technologie, namelijk de Turingmachine. Tijd betekent niks voor een TM, maar er is wel de notie van een elementaire operatie in de TM: één toepassing van δ. Die gebruiken we als de tijdseenheid. Dit model wordt later bekritiseerd, maar het zal overeind blijven. Om heel precies te zijn: de TM heeft één band en die is onbeperkt in beide richtingen; de lees/schrijfkop van de TM kan bij elke stap naar links of naar rechts bewegen, maar ook stilstaan.

Om je inzicht te geven in de performantie van een algoritme zou je een tabel kunnen krijgen met daarin voor een aantal invoerstrings s de tijd $time_A(s)$ die het algoritme A nodig heeft om die string te beslissen. Het is moeilijk om dat voor genoeg relevante strings te doen en het is moeilijk om zulk een tabel goed te gebruiken of te interpreteren. Het spel kan dus best op een andere manier gespeeld worden, maar hoe? Eén ding is (bijna) zeker: we verwachten dat het voor een langere string langer duurt om te beslissen of ie tot de taal behoort. Daarom heeft het zin om de performantie van een algoritme A uit te drukken als een functie $time_A$ die de lengte van de invoerstring afbeeldt op één van de volgende grootheden:

- de minimale tijd die A gebruikt om een string s met $|s| = n$ te beslissen
- de gemiddelde tijd die A gebruikt om een string s met $|s| = n$ te beslissen
- de maximale tijd die A gebruikt om een string s met $|s| = n$ te beslissen

We zullen hier die laatste manier gebruiken. Ze staat bekend als de *slechtste geval* (tijds)complexiteit: de formele definitie komt later.

In dit hoofdstuk worden de volgende begrippen behandeld:

- tijdscomplexiteit op een Turingmachine
- de klasse **P** en zijn robuustheid
- certificaat en verifier
- de twee definities van de klasse **NP**
- polynomiale reductie en $\mathbb{N}$P-compleetheid
- voorbeelden van **NP**-complete problemen: SAT, HAMPATH ...
- de tijdshiërarchie
- co-**NP** en $\overline{\mathbf{NP}}$
- een kijkje in ruimtecomplexiteit

Tijdscomplexiteit van algoritmen

Definitie 5.1.1. *Tijdscomplexiteit van een algoritme*
De **tijdscomplexiteit** *van een algoritme A is een functie $time_A(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die voor een gegeven invoergrootte n het maximum aantal stappen aangeeft, die door het algoritme A bij een invoeromvang van grootte n worden gemaakt. Meer formeel:*

$$time_A(n) = max(\{time_A(s) |\ |s| = n\})$$

waarin $time_A(s)$ het aantal stappen is dat gemaakt wordt bij de beslissing over s.

Aan de definitie zien we dat $time_A(n)$ een **slechtste geval** maat is. Het is best mogelijk dat het algoritme voor de meeste strings van lengte n minder dan $time_A(n)$ stappen maakt en dat slechts in enkele uitzonderlijke gevallen $time_A(n)$ stappen nodig zijn.

Binnen complexiteitstheorie is het tijdsgedrag van een algoritme voor grote invoer van belang. Bovendien is de echte tijdsduur van één stap in de Turingmachine niet bepaald. Daarom is de tijdscomplexiteit slechts op een constante na significant[1]. Dan is het volgende handig:

[1] Er is ook nog het linear speedup theorem!

Definitie 5.1.2. *De (grote) O-notatie (In het Engels: "big oh")*
Indien f, g functies zijn van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{R}^+$, dan zeggen we "$f(n)$ is $O(g(n))$" (of f is $O(g)$, en we schrijven ook $f(n) = O(g(n))$) indien

$$\exists c \in \mathbb{R}_0^+,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}:\ n \geq N \Rightarrow f(n) \leq c.g(n)$$

Men zegt: f is van orde g, of f wordt asymptotisch gedomineerd door g.

Het is mogelijk dat zowel f is $O(g)$ als g is $O(f)$.

Voorbeeld 5.1.3. *De functie die n afbeeldt op $3n^2 + 4n + 3$ is $O(n^2)$, omdat*

$$3n^2 + 4n + 3 \leq 4n^2,\ \ \forall n \geq 5\ \ (c = 4,\ \ N = 5).$$

Omgekeerd is n^2 ook $O(3n^2 + 4n + 3)$ omdat

$$n^2 \leq 3n^2 + 4n + 3,\ \ \forall n \geq 0\ \ (c = 1,\ \ N = 0).$$

Zelf doen: bewijs dat een positieve veelterm van graad k $O(n^{k+i})$ is als $i \geq 0$ maar niet als $i < 0$; bewijs dat de relatie *domineert asymptotisch* transitief is; geef twee functies f en g zodanig dat f is niet $O(g)$ en tegelijkertijd g is niet $O(f)$.

Definitie 5.1.4. *Asymptotische equivalentie van functies.*
Twee functies $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ worden asymptotisch equivalent genoemd indien

$$f \text{ is } O(g) \text{ en } g \text{ is } O(f)$$

We noteren deze situatie door f is $\theta(g)$ (en dus ook g is $\theta(f)$).

Zelf doen: *asymptotisch equivalent* is een equivalentierelatie; twee positieve veeltermen zijn asymptotisch equivalent als en slechts als ze dezelfde graad hebben.

Met de O-notatie kunnen we algoritmen met elkaar vergelijken. Veronderstel dat twee algoritmen A en B eenzelfde probleem oplossen. We noteren de respectievelijke complexiteitsfuncties met $time_A(n)$ en $time_B(n)$. Het algoritme A wordt beter (voor grote invoer) genoemd dan het algoritme B indien

1. $time_A(n)$ is $O(time_B(n))$, maar
2. $time_B(n)$ is niet $O(time_A(n))$

Indien we dus een algoritme A hebben met een lineaire tijdscomplexiteit (t.t.z. $time_A(n)$ is $O(n)$) en een algoritme B hebben met een kwadratische complexiteitsfunctie ($time_B(n)$

is $O(n^2)$), dan beschouwen we A als een beter algoritme. Nochtans mag men daarom niet besluiten dat algoritme A altijd moet verkozen worden boven B: de constante factor c uit de definitie van big oh, kan immers heel groot zijn voor A en klein voor B en indien geweten is dat n klein blijft, kan B efficiënter zijn.

Om goed te kunnen werken met dit begrip van complexiteit is het handig om enkele functies en hun asymptotisch gedrag te kennen. In de rij hieronder wordt van enkele belangrijke functies hun asymptotisch gedrag gegeven: een functie $f(n)$ staat links van $g(n)$ indien $f(n)$ is $O(g(n))$ (en niet omgekeerd).

$$\log_2 n \;\; n \;\; (n \log_2 n) \;\; n^2 \;\; \cdots \;\; n^k \;\; \cdots \;\; 2^n \;\; n!$$

Definitie 5.1.5. *Gegeven een functie $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. We zeggen dat een Turingmachine M loopt in tijd T als M op elke invoerstring s stopt na hoogstens $T(|s|)$ stappen.*

Voor het gemak zeggen we dat M een T-tijd Turingmachine is. Het algoritme door M bepaald is dan $O(T)$, maar niet omgekeerd.

Definitie 5.1.6. *Een polynomiaal algoritme*
Een algoritme is **polynomiaal** *(of polynoom) indien zijn tijdscomplexiteit $O(n^k)$ is voor een $k \in \mathbb{N}$.*

Definitie 5.1.7. *Een exponentiëel algoritme*
Een algoritme is **exponentiëel** *indien zijn tijdscomplexiteit $\theta(c^n)$ is voor een reëel getal $c > 1$.*

Een kleine vergelijking toont aan dat algoritmen van exponentiële tijd heel wat minder efficiënt zijn dan algoritmen van polynomiale tijd. Veronderstel even dat een probleem kan opgelost worden door middel van twee algoritmen A en B, waarbij A een tijdscomplexiteit $time_A(n) = n^5$ heeft en waarbij $time_B(n) = 2^n$. Indien we deze algoritmen laten lopen op een machine die 10 miljoen instructies per seconde kan uitvoeren, dan lost het algoritme A het probleem bij een probleemgrootte van $n = 60$ in minder dan 1,5 minuten op, terwijl het algoritme B meer dan 3500 jaar nodig heeft! We zeggen dan *algoritme B schaalt slecht.*

We hebben er dus belang bij om voor specifieke problemen polynomiale algoritmen te zoeken. Dat lukt niet altijd, en zelfs als het lukt is het mogelijk dat de graad van de polynoom onpraktisch hoog is. Dan moeten andere methoden gebruikt worden om aanvaardbare oplossingen voor het probleem te construeren.

Wat als we andere machines gebruiken? Een heleboel andere berekeningsformalismen zijn ook Turing-compleet. Dan lijkt het willekeurig om complexiteitstheorie op te

bouwen vanuit de TMs. We zien later waarom het toch werkt. Het is bovendien mogelijk om de complexiteit van een algoritme uit te drukken in het aantal elementaire operaties van een bepaalde soort (bijvoorbeeld vergelijkinging van twee getallen, of omwisseling van twee getallen): zo zegt men wel eens dat quicksort $O(n^2)$ is maar die n is het aantal te sorteren getallen, niet de invoergrootte. Die n^2 telt het aantal vergelijkingen. Voor quicksort is dat in het slechtste geval inderdaad $O(n^2)$, maar een vergelijking op een TM kost vele stappen (en is afhankelijk van de grootte van de voorstelling van de te vergelijken getallen). Bovendien is *sorteren* geen beslissingsprobleem ...

Beslissen of berekenen? Beslissers gedragen zich als functies waarvan het bereik slechts twee waarden heeft: accept en reject. Wat op de band van de TM staat, kan ook beschouwd worden als het resultaat van een berekening. Dan implementeert TM M_f een functie f met bereik Σ^*. Je kan nu een TM M_{fbit} construeren die als invoer een tuple $\langle s, i, b\rangle$ krijgt en die accepteert als de i-de bit van $f(s)$ gelijk is aan b: M_{fbit} gebruikt M_f als *subroutine*. Zo zie je een sterk verband tussen beslissen en berekenen. Ook omgekeerd werkt het: als je M_{fbit} krijgt (zelfs zonder inwendig M_f) dan kan je M_f bouwen, of toch bijna ... Wat ontbreekt er nog?

Niet-deterministische tijdscomplexiteitsklassen We hebben later ook nood aan een complexiteitsmaat voor niet-deterministische Turingmachines (NDTM). Het niet-deterministisch analoog voor Definitie 5.1.5 is

Definitie 5.1.8. *Gegeven een functie $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. We zeggen dat een niet-deterministische Turingmachine M loopt in tijd T als voor elke keuze van de overgang M op elke invoerstring s stopt na hoogstens $T(|s|)$ stappen.*

Tijdscomplexiteit van talen of beslissingsproblemen

Nu we weten wat de tijdscomplexiteit van een algoritme is, kunnen we proberen voor een gegeven taal L het *beste* algoritme te bepalen. Dat zou een karakterisatie geven van de moeilijkheid van een beslissingsprobleem. Dat lukt echter niet. Een andere manier geeft wel meer greep op de moeilijkheidsgraad van een probleem.

Tijdscomplexiteitsklassen

Definitie 5.2.1. *DTIME(T)*
DTIME(T) is de verzameling talen die beslist worden door een (deterministische) c.T-tijd Turingmachine, met $c > 0$.

$NDTIME(T)$ staat nu voor de talen die beslist kunnen worden door een $c.T$-tijd NDTM.

Zelf doen:

als $f = O(g)$, dan $DTIME(f) \subseteq DTIME(g)$.
$DTIME(T) \subseteq NDTIME(T)$

De volgende definitie vat de klasse van talen die beslist kunnen worden met een polynomiale Turingmachine:

Definitie 5.2.2. $\mathbf{P} = \cup_{k \geq 1} DTIME(n^k)$

Voorbeelden van talen in P

- $Sum = \{\langle a, b, c\rangle | a, b, c \in \mathbb{N} \wedge a + b = c\}$
- $Sorted = \{[a_1, a_2, ..., a_n] | a_i \in \mathbb{N} \wedge (a_i \leq a_{i+1})\}$
- $Connected = \{\langle G\rangle | G \textit{ is een samenhangende graaf}\}$

De definitie van P is robuust. We hebben vroeger vastgelegd dat de tijdscomplexiteitsfunctie wordt bepaald op een Turingmachine met één lees/schrijf band, langs twee kanten onbegrensd, en met de mogelijkheid om de leeskop te laten stilstaan. Wat gebeurt met **P** als we een andere machine gebruiken? Het antwoord is *niks* op voorwaarde dat we het normaal houden: meerdere banden, een half-onbegrensde band ... het maakt niet uit. We mogen zelfs random-access machines gebruiken, meer-dimensionale banden ... Elk van die varianten kan met polynomiale overhead gesimuleerd worden door de Turingmachines waartoe we ons beperken. Het wordt gevaarlijk als we toelaten om in één cel van het geheugen een willekeurig groot getal op te slaan, of op zulke getallen rekenkundige operaties aan te rekenen met eenheidskost, maar meestal is iets polynomiaal nog altijd polynomiaal. Het wordt bijvoorbeeld raar als je de kost van de n^{de} stap van de Turingmachine een tijdskost 2^{-n} toekent[2]: elk algoritme neemt nu hoogstens één tijdseenheid ... en het is gedaan met complexiteitstheorie.

[2]Zulk een machine heet een Zeno-machine.

En buiten P ... Voor sommige problemen volstaat polynomiaal veel tijd niet. Zo bestaat een klasse van talen die exponentieel veel tijd vragen:

Definitie 5.2.3. EXP $= \cup_{k\geq 1} DTIME(2^{n^k})$

Het moet duidelijk zijn dat **P** $\subseteq$ **EXP**. De inclusie is zelfs strikt: zie Sectie 5.3. Er bestaan ook beslisbare talen buiten **EXP** : Presburger aritmetiek levert een voorbeeld.

Wat met de encodering? Het wordt stilaan tijd om de encodering van de taal nader te bekijken. Ons beslissingsprobleem is meestal geformuleerd zonder direct naar een encodering te verwijzen. Zo kunnen we het hebben over het probleem om te beslissen of een getal even is of oneven. Eens we de codering vastleggen kunnen we aan een algoritme beginnen.

Er zijn zeker twee natuurlijke manieren om de natuurlijke getallen te representeren: met een unair alfabet, en met een binair alfabet. In de eerste heeft de voorstelling van 2048 lengte 2048, in de tweede heeft die lengte 12. We schrijven een TM_u en een TM_b voor elk van die voorstellingen. De best mogelijke TM_u moet tellen (modulo 2) hoeveel tekens er in s staan, en is dus $O(|s|)$. De beste TM_b moet ook alle tekens van s overslaan tot het laatste en neemt dan de beslissing: weerom is het algoritme $O(|s|)$. Maar je ziet ook dat als je de complexiteit uitdrukt in termen van de grootte van het getal dat door s wordt voorgesteld, de binaire representatie superieur is, want voor 2048 heeft TM_b slechts iets meer dan $log_2(2048)$ stappen nodig, terwijl TM_u er ongeveer 2048 nodig heeft. Langs de ene kant geven beide encoderingen een lineaire complexiteit, langs de andere kant heeft de unaire encodering exponentieel meer tijd nodig.

Een tweede voorbeeld maakt het nog erger: bekijk een naïef algoritme om te bepalen of een getal n priem is. Het bevat een lus van de vorm

```
i := 2
while i ≤ n do
    if i deelt n then
        REJECT;
    end if
    i += 1;
end while
ACCEPT
```

In beide voorstellingen wordt de lus n keer doorlopen, maar uitgedrukt in de lengte van de representatie is dat met de binaire representatie exponentieel meer dan met de unaire representatie. In het ene geval zouden we kunnen denken dat het algoritme polynomiaal is, in het andere geval is het exponentieel.

We moeten dus afspreken welke encodering we gebruiken om meer eenduidig de complex-

iteit van een algoritme vast te leggen, en daarmee samenhangend de complexiteitsklasse waartoe een taal behoort. Voor getallen moeten we de binaire representatie gebruiken: een decimale mag ook, maar niet de unaire. Voor andere objecten moeten we (soms ad-hoc) afspreken welke de encodering is. Voor grafen bijvoorbeeld gebruiken we de bits van de buurmatrix: alle redelijke representaties zijn overigens naar mekaar omzetbaar met een polynomiale machine, zodat de robuustheid van **P** niet in het gedrang komt.

De complexiteit van vermenigvuldigen: een korte uitstap

Laten we voor het gemak een decimale voorstelling van getallen gebruiken en even kijken naar het aantal elementaire vermenigvuldigingen om twee getallen te vermenigvuldigen. Een elementaire vermenigvuldiging is tussen twee getallen ≤ 9: die hebben constante kost. Voor het gemak bekijken we enkel het geval van twee getallen met evenveel cijfers: $a = a_n a_{n-1}...a_1$, en $b = b_n b_{n-1}...b_1$. We willen $a \times b$ berekenen. We leerden op school een methode die n^2 elementaire vermenigvuldigingen doet, en een hoop optellingen. Er werd lang gedacht - en zelfs als conjecture geponeerd door A. Kolmogorov - dat het met minder niet kon. A. Karatsuba liet zien dat het toch mogelijk is.

Veronderstel nu voor het gemak dat n even is en gelijk aan $2m$. Dan kan je a en b schrijven als $a = A_2 10^m + A_1$ en $b = B_2 10^m + B_1$. Dan is

$$a \times b = (A_2 \times B_2)10^{2m} + (A_2 \times B_1 + A_1 \times B_2)10^m + A_1 \times B_1$$

waarin je 4 vermenigvuldigingen ziet.

A. Karatsuba merkte op dat de coëfficiënt van 10^m ook anders berekend kan worden:

$$(A_2 \times B_1 + A_1 \times B_2) = (A_2 + A_1) \times (B_2 + B_1) - (A_2 \times B_2) - (A_1 \times B_1).$$

Daarin zijn de laatste twee vermenigvuldingen de coëfficiënten van 10^{2m} en 10^0. Door het resultaat van de laatste twee vermenigvuldigingen te onthouden en te hergebruiken, is $a \times b$ te verkrijgen met slechts 3 vermenigvuldigingen. Door dit principe recursief toe te passen (verdeel-en-heers) wordt vermenigvuldigen nu $O(n^{log_2(3)})$. Ondertussen zijn algoritmen bekend met een lagere complexiteit.

Wat leerden we uit dit uitstapje? Soms denken we intuïtief dat iets op slechts één manier mogelijk is, om dan later te ontdekken dat er ook andere manieren mogelijk zijn.

Certificaat en verifier

De concepten certificaat en verifier worden hier ingevoerd los van complexiteitsklassen.

Definitie 5.2.4. *Een* **verifier** *voor een taal L is een deterministische TM V zodanig dat*

$$\forall s \in \Sigma^* : (s \in L \leftrightarrow \exists c \in \Sigma^* : V(\langle s, c \rangle) = accept)$$

c is een **certificaat** *voor s*

In de context van complexiteitstheorie zullen we enkel *beslissers* beschouwen, t.t.z. de V in de definitie stopt op elke invoer.

Wat voorbeelden:

- de taal L is de verzameling van getallen die niet priem zijn; er bestaat zeker een TM M die samengestelde getallen accepteert, en de priemgetallen reject, maar het is duidelijk dat als $s \in L$ dan bestaat er voor die s een certificaat c - een deler - van dat feit: de verifier V moet dan enkel maar nagaan dat het certificaat inderdaad die s deelt; de taak van V is eenvoudiger dan die van M; merk op: je kan de verifier niet misleiden; of anders gezegd: als ik de V correct implementeer, dan kan geen enkel zogezegd certificaat voor een gegeven s mij ten onrechte doen geloven dat s deelbaar is terwijl s priem is
- L is de taal van tuples van de vorm $\langle G, a, b\rangle$ waarbij G een graaf is, en a en b knopen waartussen een pad bestaat in G; weerom bestaat een TM M die kan beslissen of een gegeven string tot L behoort; een verifier V voor die taal is eenvoudiger: het certificaat kan een pad voorstellen van a naar b; V moet nu enkel nakijken dat het certificaat echt een pad in G is; V heeft minder werk dan M, want die moet een pad vinden - of op zijn minst bewijzen dat er een pad bestaat; weerom is er geen manier om V te bedriegen
- L is de taal van Turingmachines M waarvoor L_M niet leeg is; deze taal is niet beslisbaar (dat zagen we vroeger); maar voor elke Turingmachine M met $L_M \neq \emptyset$ bestaat een certificaat, namelijk een string $c \in L_M$ die een verifier kan gebruiken om te laten zien dat die $c \in L_M$

De eerste twee voorbeelden geven de intuïtie dat een verifier voor L minder werk heeft (of kan hebben) dan een beslisser voor L. In het derde voorbeeld is dat overweldigend duidelijk: er hoeft niet eens een beslisser te bestaan, en toch bestaat een verifier en certificaat.

Confused? Denk na en lees Definitie 5.2.4 nog eens na.

Het valt niet direct op, maar Definitie 5.2.4 behandelt strings in L anders dan strings in $\overline{L}$: er bestaat een certificaat voor $s \in L$ maar voor $s \notin L$ is elke string **geen** certificaat.

De intuïtie blijft overeind: een verifier heeft minder werk dan een beslisser voor de taal. Er blijven vragen:

- heeft elke taal een verifier en een certificaat voor elke string in de taal?
- kan er meer dan één certificaat bestaan voor een $s \in L$?
- hoe moeilijk is het om het certificaat te construeren?

De tweede vraag heeft voor elke van de drie voorbeelden een *ja* als antwoord: elke deler is een certificaat voor een deelbaar getal; elk pad is een certificaat voor verbondenheid van a en b; elke s die in L_M zit is een certificaat.

Als we die laatste vraag toetsen aan de drie voorbeelden, dan zien we dat voor de eerste twee een certificaat kan gegeneerd worden: in het eerste voorbeeld weten we niet of dat polynomiaal kan, in het tweede geval wel. In het derde geval kan geen enkele altijd stoppende TM een certificaat genereren voor elke invoer. Denk daarover toch even na, want het is misschien subtieler dan je denkt.

Een bijkomende vraag over de lengte van het certificaat:

- is er een verband tussen de lengte van $s \in L$, de lengte van zijn certificaat c, de moeilijkheid van het probleem?

Toets dit aan de drie voorbeelden.

Stel nu dat je weet dat als er een verifier V en certificaat c voor s bestaan, en dat de lengte van c begrensd is door een functie f van de lengte van s, dus: $|c| \leq f(|s|)$. Nu kan je een certificaat genereren voor $s \in L$, namelijk als volgt:

for all $(i \leq f(|s|) \wedge (c \in \Sigma^i)$ **do**
  if $V(\langle s, c\rangle)$ accepts **then**
    ACCEPT
  end if
end for
REJECT

Dit algoritme loopt alle mogelijke certificaten op systematische manier af. Het is een deterministisch algoritme. Wat kunnen we zeggen over zijn complexiteit?

- de for-loop wordt $O(2^{f(|s|)})$ uitgevoerd in het slechtste geval (we veronderstellen een alfabet met twee elementen)
- als V een g-tijd machine is, dan is de kost van de body van de for-loop $O(g(|s|+|c|))$, dus $O(g(|s| + f(|s|)))$
- de totale complexiteit is $O(g(n + f(n)) \times 2^{f(n)})$ met n gelijk aan de lengte van de invoer

Als f minstens lineair is, dan is de complexiteit van dit algoritme minstens exponentieel, zelfs als g dat niet is. Je kan wel argumenteren dat voor sommige problemen er een minder naïeve manier bestaat om certificaten te genereren, minder naïef dan exhaustief, maar het cruciale probleem is: voor heel wat problemen zijn *we* daarin nog niet geslaagd. Dat wordt verder geformaliseerd in het vervolg.

Het algoritme hierboven *raadt op systematische manier*. Die systematiek kan gemodelleerd worden met een niet-deterministische procedure waarbij de volgorde van de gegenereerde (potentiële) certificaten niet van belang is: een Prolog predicaat bijvoorbeeld. Het kan ook gemodelleerd worden met een niet-deterministische Turing machine $NDTM_V$ waarbij er telkens twee mogelijkheden zijn voor de overgang. Bij input s schrijft $NDTM_V$ in zijn eerste $f(|s|)$ stappen niet-determininstisch een string uit $\Sigma^{f(|s|)}$ op de tape. Dan roept ie de deterministische verifier V op. Als één van de takken accpeteert, dan wordt s geaccepteerd. Figuur 5.1 illustreert dat: de lengte van het certificaat is 2.

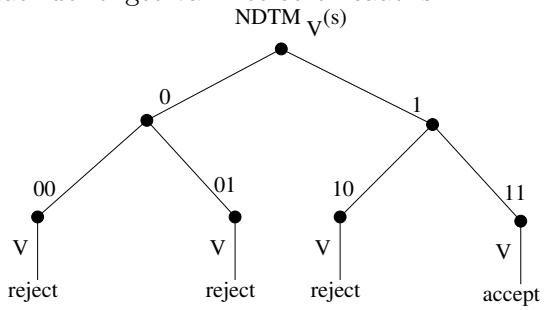


Figure 5.1: Generatie van het certificaat als de lengte gekend is

Van die $NDTM_V$ kunnen we nu opnieuw een verifier maken: die heeft een certificaat nodig. Neem als certificaat een string die de keuzes voorstelt die opeenvolgend gemaakt worden door $NDTM_V$ om in een accept-toestand te komen. Nu simuleren we de $NDTM_V$ met die keuzes met behulp van een deterministische machine ...

Daarmee is de zaak rond: van verifier+certificaat (met gekende lengte) naar een niet-deterministische Turingmachine en terug.

Twee definities van NP

De klasse **NP** kan op twee manieren gedefinieerd worden.

Definitie 5.2.5. *Verifiers en* **NP**
NP *is de verzameling talen L waarvoor een polynomiale verifier bestaat en een polynoom p zodanig dat een certificaat c voor elke $s \in L$ bestaat waarvoor $|c| \leq p(|s|)$.*

Meer formeel: $L \in$ **NP** *als en slechts als*
$\exists$ *een polynomiale TM M en een polynoom $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, zodanig dat*
$s \in L \Leftrightarrow \exists c \in \Sigma^{p(|s|)}$ *met $M(\langle s, c \rangle) = accept$*

De alternatieve definitie maakt gebruik van niet-determinisme.

Definitie 5.2.6. *Niet-determinisme en* **NP**
NP *is de verzameling talen L geaccepteerd door een polynomiale niet-deterministische Turingmachine.*

De definities beschrijven dezelfde klasse van talen: het verband tussen de twee definities is te vinden in voorgaande sectie. Je moet nu kunnen argumenteren dat ook de definitie **NP** robuust is t.o.v. het uitvoeringsmodel.

Wat voorbeelden van talen in **NP** :

- vermits $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$ (zie je waarom?) kan elk probleem van **P** dienen als voorbeeld ...
- koppels van isomorfe grafen (*)
- de grafen met een Hamiltoniaanse kring (*)
- de niet-samenhangende grafen
- de gewogen grafen met tussen twee gegeven knopen een simpel pad dat langer is dan een gegeven getal (*)
- verzin zelf iets!

Geef bij elk van de voorbeelden een beschrijving van een verifier en het certificaat voor een gegeven string die tot de taal behoort. Argumenteer telkens de polynomialiteit. Voor de voorbeelden met een (*) is geen polynomiaal algoritme gekend.

Let op: NP staat voor *niet-deterministisch polynomiaal*, en niet voor *niet-polynomiaal*.

Polynomiale reductie

We hebben vroeger talen gereduceerd naar andere talen: de many-one reductie $\leq_m$ bijvoorbeeld (zie Pagina 160). Die wordt hier wat verfijnd:

Definitie 5.2.7. *Polynomiale reductie van een taal*
Gegeven twee talen $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ (op een alfabet T_1) en $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$. We zeggen dat L_1 polynomiaal reduceert naar L_2 indien er een afbeelding $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ bestaat waarvoor geldt:

1. $\forall x \in \Sigma_1^*$: $\quad x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$
2. *Er bestaat een (deterministische) TM die f in polynomiale tijd berekent.*

We noteren deze situatie door $L_1 \leq_p L_2$.

$\leq_p$ verschilt van $\leq_m$ enkel in het feit dat de afbeelding ook polynomiaal moet zijn en niet enkel maar berekenbaar door een TM. $\leq_p$ is ook fijner dan $\leq_m$: als $A \leq_p B$ dan ook $A \leq_m B$. Waren de voorbeelden van $\leq_m$ vroeger in de cursus soms ook $\leq_p$?

Stelling 5.2.8. *De relatie $\leq_p$ is transitief, of expliciet: als $L_1 \leq_p L_2$ en $L_2 \leq_p L_3$ dan is ook $L_1 \leq_p L_3$.*

Proof. Laat f de polynomiaal berekenbare functie zijn die bij $L_1 \leq_p L_2$ hoort, en g bij $L_2 \leq_p L_3$; M_f en M_g zijn de bijhorende TMs: de ene is een T_f-machine, de andere een T_g-machine waarbij T_f en T_g polynomen zijn. We bewijzen dat $h = g \circ f$ de functie is die we zoeken voor $L_1 \leq_p L_3$.

Het is duidelijk dat $s \in L_1 \Leftrightarrow h(s) \in L_3$, en dat h berekenbaar is door een Turingmachine, namelijk de TM M_h die eerst M_f laat lopen tot die klaar is, dan de leeskop helemaal naar links verplaatst en dan M_g laat lopen. We moeten dus enkel nog de polynomialiteit van M_h aantonen.

Laat s met lengte groot genoeg de invoer zijn voor M_h. Op het ogenblik dat M_f klaar is, staat op de band een string s_f van lengte hoogstens $T_f(|s|)$. De leeskop naar links verplaatsen kost nu hoogstens polynomiaal werk in $|s|$. Het uitvoeren van M_g op s_f neemt hoogstens $T_g(T_f(|s|)$ tijd, dus in het totaal hebben we als bovenschatting van de totale tijd van M_h: $T_f(|s|) + T_f(|s|) + (T_g \circ T_f)(|s|)$ hetgeen een polynoom is in $|s|$. ■

De volgende stelling lijkt een beetje op een stelling i.v.m. $\leq_m$.

Stelling 5.2.9. *Als $L_1 \leq_p L_2$ en $L_2 \in \mathbf{P}$ dan $L_1 \in \mathbf{P}$.*

Proof. Veronderstel dat $L_1 \subseteq T_1^*$ en $L_2 \subseteq T_2^*$ en dat $L_1 \leq_p L_2$ via een afbeelding $f : T_1^* \to T_2^*$ die in polynomiale tijd berekenbaar is door een TM M_f. Omdat $L_2 \in \mathbf{P}$ bestaat er een TM M_2 die L_2 beslist in polynomiale tijd. Construeer nu de TM M die de TM M_2 na M_f schakelt. We kunnen dan net zoals in het bewijs van de vorige stelling aantonen dat M een TM is met een polynomiale tijdscomplexiteit. Daarenboven is M een TM die de taal L_1 beslist, dus geldt $L_1 \in \mathbf{P}$. ■

We beschouwen twee talen als equivalent indien de ene in de andere polynomiaal gereduceerd kan worden en omgekeerd.

Definitie 5.2.10. *Polynomiale equivalentie van talen*
Twee talen L_1 en L_2 worden polynomiaal equivalent genoemd, notatie $L_1 \sim_p L_2$, indien

$$L_1 \leq_p L_2 \quad en \quad L_2 \leq_p L_1$$

De volgende eigenschap rechtvaardigt deze definitie.

Eigenschap 5.2.11. *De relatie $\sim_p$ is een equivalentierelatie.*

Proof. We moeten aantonen dat de relatie $\sim_p$ reflexief, symmetrisch en transitief is. De reflexiviteit volgt onmiddellijk uit de definitie van een polynomiale reductie van een taal, waarin we voor f de identieke functie kunnen nemen. Symmetrie volgt onmiddellijk uit de definitie van $\sim_p$ en de transitiviteit werd reeds aangetoond in Stelling 5.2.8. ■

Zoals bij elke equivalentierelatie kunnen we ook hier de equivalentieklassen beschouwen. De klasse **P** is opgebouwd uit drie van deze equivalentieklassen.

De klasse NP–compleet

Binnen **NP** bestaat een speciale klasse talen: de moeilijkste van **NP**.

Definitie 5.2.12. *De klasse* **NP***–compleet*
Een taal L is **NP***–compleet als en slechts als*

1. *$L \in$ **NP** en*
2. *voor elke taal $L' \in$ **NP** geldt dat $L' \leq_p L$.*

De klasse van alle **NP***–complete talen duiden we aan door* **NPC**.

Informeel kan je zeggen dat een **NP**–complete taal een taal is die zo moeilijk is dat elke andere taal in **NP** er in polynomiale tijd naar kan vertaald worden. Of in termen van problemen geformuleerd: een probleem is **NP**–compleet als het een oplossing heeft (in de vorm van een algoritme) zodanig dat elk ander **NP** probleem een oplossing heeft die door een polynomiale reductie van de **NP**–complete af te leiden is. Het is helemaal niet voor de hand liggend dat er **NP**–complete talen bestaan, noch of **NPC** niet samenvalt met **NP** of **P**. We illustreren echter eerst hun belang aan de hand van de volgende stelling.

Stelling 5.2.13.

1. **NPC** *is een equivalentieklasse voor de relatie* $\sim_p$.
2. *Indien* $\mathbf{NPC} \cap \mathbf{P} \neq \emptyset$ *dan is* $\mathbf{NP} = \mathbf{P}$.

Proof.

1. Veronderstel dat $L_1, L_2 \in \mathbf{NPC}$. Dan geldt per definitie van **NP**–compleetheid dat zowel $L_1 \leq_p L_2$ als $L_2 \leq_p L_1$. Bijgevolg zijn L_1 en L_2 polynomiaal equivalent. De klasse **NPC** behoort dus tot één enkele equivalentieklasse. Bovendien bestaan er geen elementen buiten **NPC** in deze equivalentieklasse, want indien $L \in \mathbf{NP}$ een taal is die equivalent is met een **NP**–complete taal L_1, dan weten we dat voor elke andere taal $L' \in \mathbf{NP}$ geldt dat $L' \leq_p L_1$. Samen met $L_1 \leq_p L$, weten we dan dat (Stelling 5.2.8) $L' \leq_p L$, wat aantoont dat L een **NP**–complete taal is.
2. Stel dat $L \in \mathbf{P} \cap \mathbf{NPC}$. Beschouw een willekeurige andere taal $L' \in \mathbf{NP}$. Omdat $L \in \mathbf{NPC}$ geldt dat $L' \leq_p L$. Hieruit en door het feit dat $L \in \mathbf{P}$ volgt (door Stelling 5.2.9) dat ook $L' \in \mathbf{P}$. Bijgevolg is $\mathbf{NP} = \mathbf{P}$.

■

De vorige stelling toont dus aan dat indien er één **NP**–compleet probleem behoort tot de klasse van de problemen die oplosbaar zijn in polynomiale tijd, alle problemen binnen de klasse **NP** in polynomiale tijd oplosbaar zijn. Alles wijst er echter op dat de klasse **NP** niet samenvalt met de klasse **P**.[3]

Figuur 5.2 toont de twee mogelijkheden: ofwel $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ ofwel $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

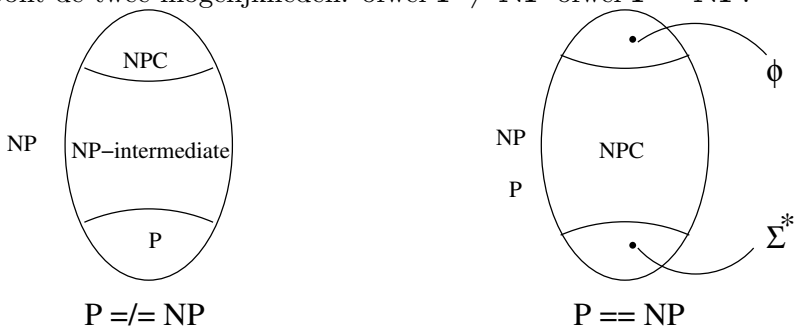


Figure 5.2: De (mogelijke) onderlinge ligging van de klassen **P**, **NP** en **NPC**

[3]Hoewel ... Donald Knuth gelooft dat $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

De verzameling **NP**-intermediate is niet leeg in het geval dat $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$. Mogelijk is *isomorfe grafen* een element van **NP** -intermediate.

Het eerste probleem waarvan men kon aantonen dat het tot **NPC** behoort was het **vervulbaarheidsprobleem** (In het Engels: Satisfiability Problem). Dit probleem wordt vaak afgekort met de drie letters SAT en we hebben eerst wat definities nodig: gegeven is een eindige verzameling van booleaanse veranderlijken $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ (met andere woorden, elke veranderlijke u_i kan de waarden "waar" of "onwaar" aannemen). Met een atoom uit U bedoelen we ofwel één van deze veranderlijken u_i ofwel de ontkenning van één van deze veranderlijken die we noteren met $\neg u_i$ (te lezen als *niet* u_i). Beschouw nu een formule in Conjunctieve NormaalVorm (CNF) over U, t.t.z. een conjunctie van disjuncties van atomen, zoals bijvoorbeeld $C = (u_1 \vee u_2) \wedge (u_2 \vee \neg u_4 \vee u_7) \wedge (\neg u_2 \vee u_3)$.

Het probleem is nu: gegeven een formule in DNF, bestaat er een waarheidstoekenning aan de variabelen die de formule waar maakt.

Meer precies: SAT is de taal van formules in DNF die waar gemaakt kunnen worden.

In 1971 kon Stephen A. Cook[4] de volgende stelling aantonen

Stelling 5.2.14. *Stelling van Cook-Levin.* $SAT \in \mathbf{NPC}$

Het bewijs van deze stelling valt buiten het bestek van deze cursus. Inzien dat SAT behoort tot de klasse **NP** moet wel kunnen: gebruik daarvoor eens de niet-deterministische definitie van **NP**, en ook eens de verifier-definitie. Hoe groot is het certificaat? Hoe heb je de taal gecodeerd?

Eenmaal dit eerste **NP**–compleet probleem bekend was, heeft men van vele andere problemen ook kunnen aantonen dat ze **NP**–compleet zijn. Hier volgt een klein lijstje: grafen met Hamiltoniaanse kring, grafen kleurbaar met een gegeven aantal kleuren, subgrafeisomorfisme, het knapzak probleem, pannenkoeksorteren, 0-1 integer programming, heel wat combinatorische problemen en ook puzzels zoals Sudoku.

Als een taal L enkel aan de tweede voorwaarde van Definitie 5.2.12 voldoet, dan noemen we L *NP-hard*. Men gebruikt de term **NP**–hard ook voor optimizatieproblemen waarvan de beslissingstegenhanger **NP**–compleet is. Er bestaan **NP**–harde problemen die niet **NP**–compleet zijn (m.a.w. niet in **NP** zitten): zo kan SAT kan polynomiaal gereduceerd worden naar H_{TM}, dus kan elk probleem in **NP** naar H_{TM} gereduceerd worden.

[4]Turing award 1982

Voorbeelden van polynomiale reducties

SAT naar 3-SAT

3-SAT is zoals SAT, maar nu heeft in de DNF elke disjunctie exact 3 atomen. Hier is een formule uit 3-SAT: $(a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee c)$. We laten zien hoe een formule in DNF omgevormd kan worden tot dat formaat. Beschouw elke disjunctie in de formule. Er zijn drie gevallen:

- de disjunctie bevat minder dan drie atomen: herhaal dan één van de atomen tot er drie zijn;
- de disjunctie bevat juist drie atomen: niets aan veranderen; of
- de disjunctie bevat meer dan drie atomen: de disjunctie is van de vorm $a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_n$ met $n > 3$.

  Vind een nieuwe booleaanse veranderlijke uit, bijvoorbeeld b, en vervang de disjunctie door twee disjuncties

  (1) $b \vee a_{n-1} \vee a_n$ en
  (2) $\neg b \vee a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_{n-2}$

  Herhaal dat totdat geen enkele disjunctie langer is dan 3.

Controleer of deze transformatie

* een formule $\in SAT$ op een formule $\in$ 3-SAT wordt afgebeeld
* een string $\notin SAT$ op een formule $\notin$ 3-SAT wordt afgebeeld
* polynomiaal kan geïmplementeerd worden op een TM

3-SAT $\in$ **NP**, want je kan voor elementen van 3-SAT een polynomiaal certificaat geven. Alles samen levert dat op: 3-SAT zit in **NPC** . Je kan nu ook zien dat elke n-SAT met $n \geq 3$ ook **NP**–compleet is.

2-SAT is zoals 3-SAT, maar nu hebben alle disjuncties exact twee atomen. Voor 2-SAT bestaan verschillende polynomiale[5] algoritmen - je leest dikwijls zelfs lineaire algoritmen, maar dat is dan niet op een TM, wel op een random access machine. In elk geval, 2-$SAT \notin$ **NPC** ... of toch?

[5] in het aantal atoomvoorkomens

3-SAT naar k-CLIQUE

De taal k-CLIQUE bestaat uit tuples $\langle G, i\rangle$ waarbij G een graaf is met een clique van grootte i, t.t.z. G bevat een subgraaf die isomorf is met K_i. We tonen hoe de reductie werkt met twee voorbeelden:

Voorbeeld 5.2.15. *De formule is* $(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c)$

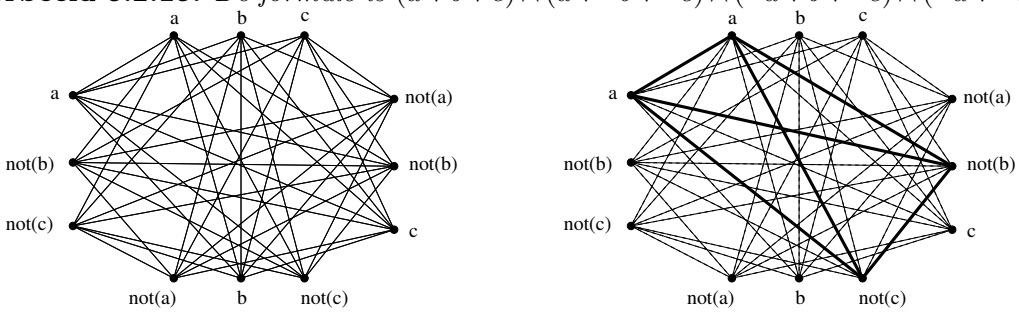


Figure 5.3: De graaf die overeenkomt met de eerste formule, en een 4-clique

Figuur 5.3 toont links de graaf die de reductie oplevert:

- *elk atoom correspondeert met één knoop met het atoom als naam*
- *een boog bestaat tussen twee knopen die* compatibel *zijn: p en $\neg p$ zijn niet compatibel, en twee knopen die van dezelfde disjunctie afkomstig zijn ook niet compatibel*

De buurmatrix van deze graaf kan je berekenen in polynomiale tijd. De clique die je nodig hebt heeft als grootte het aantal disjuncties in de formule.

Je moet nog inzien dat de geproduceerde graaf een clique heeft van de gevraagde grootte als en slechts als de formule behoort tot SAT.

Voorbeeld 5.2.16. *We kunnen die reductie ook uitvoeren op kleinere disjuncties (je mag eventueel atomen herhalen in een disjunctie). We nemen als formule* $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$

Omdat de graaf geen 4-clique heeft, behoort de formule niet tot SAT. Er bestaan wel cliques in die graaf: de grootste k waarvoor een k-clique bestaat, geeft je het maximaal aantal disjuncties die je in de formule tegelijkertijd kunnen waargemaakt worden. Zo zijn ook twee optimizatieproblemen aan elkaar gelinkt.

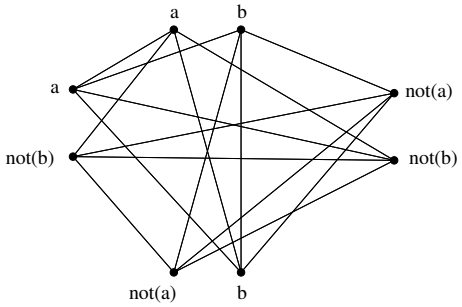


Figure 5.4: De graaf overeenkomend met de tweede formule: er is geen 4-clique

Zelf doen:

- heb je een overeenkomst gezien tussen de SAT naar 3-SAT reductie en de manier waarop een CFG in Chomsky-normaalvorm werd gezet?
- reduceer 3-SAT naar SAT
- voorgaande was gemakkelijk omdat 3-SAT $\subsetneq SAT$, daarom nog volgende vragen:
  * als $A \subseteq B$ en $A \in \mathbf{P}$, dan ook $B \in \mathbf{P}$?
  * als $A \subseteq B$ en $A \in \mathbf{NP}$, dan ook $B \in \mathbf{NP}$?
  * als $A \subseteq B$ en $A \in \mathbf{NPC}$, dan ook $B \in \mathbf{NPC}$?
  * als $A \subseteq B$ en $B \in \mathbf{P}$, dan ook $A \in \mathbf{P}$?
  * als $A \subseteq B$ en $B \in \mathbf{NP}$, dan ook $A \in \mathbf{NP}$?
  * als $A \subseteq B$ en $B \in \mathbf{NPC}$, dan ook $A \in \mathbf{NPC}$?

Waarom zijn sommige problemen zo moeilijk?

Voor SAT zouden we kunnen zeggen: er zijn 2^n mogelijke toekenningen (met n het aantal booleaanse variabelen), en onze intuïtie zegt dat we die allemaal moeten afgaan om een goeie te vinden ...

Voor Hamiltoniaanse kring zouden we kunnen zeggen: het aantal simpele kringen in een graaf is exponentieel in het aantal knopen, en onze intuïtie ...

Voor Minimaal Opspannende Boom zouden we kunnen zeggen: het aantal opspannende bomen van een gegeven graaf met n knopen kan n^{n-2} zijn - dat is nog slechter dan exponentieel. Waarom hebben we hierover niet diezelfde intuïtie? Omdat een stelling uit de grafentheorie ons een gulzig polynomiaal algoritme oplevert.

Misschien dat voor SAT de juiste stelling nog niet bewezen is, de stelling die ons een polynomiaal algoritme oplevert, en dan kan onze intuïte bijgesteld worden, net zoals toen Karatsuba het deed voor vermenigvuldigen.

De tijdshiërarchie

Tot nu toe is de structuur van **P** heel amorf. De tijdshiërarchiestelling brengt daarin verandering: hieronder staat niet de sterkste versie.

Stelling 5.3.1. $DTIME(f) \subsetneq DTIME(f^2)$ *voor elke* f *die* time-constructible *is.*

Ruwweg is een functie f time-constructible als f kan berekend worden door een TM die $O(f)$ stappen nodig heeft en bovendien $f(n) \geq n$. Mogelijk kom je van je leven nooit een functie tegen die (niet triviaal) niet time-constructible is.

R. Stearns en J. Hartmanis bewezen in 1965 de eerste versie van de tijdshierarchie, dus toch een aantal jaar voordat de notie van **NP**–compleet bestonden. O.a. daarvoor kregen ze (heel terecht) de Turing award in 1993.

Los daarvan: het is belangrijk te beseffen dat je met $O(n^2)$ **minder** kan doen dan met $O(n^4)$. Maar ook dat $O(4^n)$ meer kan dan $O(2^n)$: tijd is een *resource* en wat je ermee kan doen is beperkt. Overigens is dit een goed ogenblik om even na te denken over

- hoeveel talen zitten in $DTIME(n^k)$?
- hoeveel talen zitten in **P** ?
- hoeveel talen zitten in **NP** ?
- als je ergens *aftelbaar oneindig* antwoordde, is het dan ook opsombaar?

co-NP

Vermits de definitie van **NP** elementen van de taal anders behandelt dan elementen daarbuiten, heeft het zin om te onderzoeken of er iets interessants te vertellen is over talen waarvan het complement in **NP** zit. Dat wordt gevat in

Definitie 5.4.1. *co-***NP** *:* *co-***NP** $= \{L | \overline{L} \in \mathbf{NP}\}$

Pas op: co-**NP** is niet gelijk aan $\overline{\mathbf{NP}}$. Het complement van **NP** bevat niet-beslisbare talen zoals A_{TM}, maar in co-**NP** zitten enkel beslisbare talen. Wat voorbeelden maken duidelijk dat het helemaal niet evident is of co-**NP** en **NP** gelijk zijn.

- $SAT \in$ **NP** want we hebben een kort (polynomiaal) certificaat voor formules die satisfieerbaar zijn; $\overline{SAT} \in$ *co*-**NP**; hoe zit het met certificaten voor $\overline{SAT}$? $\overline{SAT}$ bevat formules die niet kunnen waargemaakt worden; welk kort certificaat zou je daarvoor kunnen geven? niemand weet het
- langs de andere kant is er $TAUTOLOGY$, de taal van formules die waar zijn voor **elke** toekenning aan de variabelen; $\overline{TAUTOLOGY}$ zit zeker in **NP**: een kort certificaat bestaat uit een toekenning die de formule onwaar maakt; maar een kort certificaat dat kan geverifieerd worden zodat de formule inderdaad een tautologie blijkt ... niemand kent het
- de gesorteerde rijen zitten in **NP**; een certificaat voor een niet-gesorteerde rij zou kunnen bestaan uit een index i zodanig dat het i-de element groter is dan het (i+1)-de; dus zit de taal van gesorteerde rijen in co-**NP**; je had natuurlijk kunnen zeggen: de taal van gesorteerde rijen zit in **P**, dus ook in co-**NP**; juist, maar dan had je iets gemist, namelijk het bedenken van een niet-triviaal en polynomiaal certificaat
- COMPOSITE (de deelbare getallen) heeft een kort certificaat: een deler van het gegeven getal; maar een kort certificaat voor PRIME is moeilijk in te denken; langs de andere kant weten we sinds 2004 dat PRIME $\in$ **P**, dus heb je niet eens een certificaat nodig

Na deze voorbeelden moet je inzien dat **P** $\subseteq$ **NP** $\cap$ co-**NP** , en dat het helemaal niet duidelijk is of **NP** = co-**NP** .
Ook moet je kunnen argumenteren dat als **P** = **NP**, dan **NP** = co-**NP** .
Wat als $SAT \in$ co-**NP**?

NP–compleet of P?

Hier willen we er alleen maar op wijzen hoe belangrijk de juiste formulering van een probleem is. Beschouw de volgende twee talen:

- k-CLIQUE = $\{\langle G, i\rangle |$ i een geheel getal, G een graaf met een i-clique$\}$
- 7-CLIQUE = $\{\langle G\rangle |$ G een graaf met een 7-clique$\}$

Van k-CLIQUE hebben we laten zien dat het in **NPC** zit (we reduceerden SAT ernaar), maar 7-CLIQUE is polynomiaal: stel n het aantal knopen in G, dan zijn er C_n^7 subsets van de knopen die mogelijk een clique vormen. Nakijken of een bepaalde set van 7 knopen een clique vormt is polynomiaal in de grootte van G, stel $O(n^c)$ voor een c. Vermits $C_k^7 = O(n^7)$ hebben we een algoritme met complexiteit $O(n^{c+7})$. Daar de encodering van G (als buurmatrix) zelf $O(n^2)$ is, zit het probleem in **P** .

Bovenstaand fenomeen komt veel voor: één of meer parameters van het probleem constant houden kan een polynomiale versie opleveren van een **NP**–compleet probleem.

Denk even terug aan de twee problemen:

- $A_{TM} = \{\langle M, w\rangle | w \in L_M\}$
- $E_{TM} = \{\langle M\rangle | \epsilon \in L_M\}$

Door één parameter van A_{TM} constant te houden krijgen we E_{TM}. Levert dat iets op?

Ruimtecomplexiteit

Naast tijd is ook ruimte een resource: is je Java-programma ooit al afgebroken omdat er niet genoeg plaats was voor de runtime stack, of de heap? Of vertraagde de uitvoering van je programma onaanvaardbaar wegens excessieve swapping of garbage collection? Dan heb heb je het aan der lijve ondervonden. In eerste instantie zou men ruimtecomplexiteit willen definieren als het aantal cellen op de band die gelezen of geschreven worden. Dat is niet zo nuttig omdat

- de invoer bij niet-triviale problemen helemaal gelezen moet worden, dus ruimtecomplexiteit zou niet sublineair kunnen zijn: de ruimtekost van de invoer is niet te vermijden
- anderzijds hebben veel algoritmen heel weinig **extra** ruimte nodig buiten de plaats van de invoer

Dat laatste moet je bekend voorkomen: bv. om te testen of een rij gesorteerd is, heb je enkel een index nodig in die rij en wat plaats om de twee elementen die je wil vergelijken tijdelijk op te slaan; dat is een kleine overhead (in termen van de grootte van de invoer).

Voor we aan de definities beginnen: ruimte kan je hergebruiken, tijd niet. Daarom verwacht je dat *minder* ruimte dan tijd nodig is voor een bepaalde taak.

Voor de definitie van ruimtecomplexiteit baseren we ons op een TM-model met

- één read-only band met daarop de invoer
- één read-write band

De ruimtekost van een algoritme wordt dan enkel bepaald door het aantal cellen dat op de RW-band gebruikt wordt.

Definitie 5.6.1. *DSPACE(f) is de verzameling talen die beslist worden door een deterministische Turingmachine die $O(f)$ cellen op de RW-band gebruikt.*

Eigenschap 5.6.2. *Als de functie f berekend wordt door een T-tijd TM, dan is $|f(s)| \leq T(|s|)$.*

Die eigenschap zegt essentiëel: de TM kan op niet meer vakjes van de band schrijven dan dat hij stappen maakt.

Argumenteer dat $DTIME(f) \subseteq DSPACE(f)$.

Definitie 5.6.3. PSPACE $= \cup_{k \geq 1} DSPACE(n^k)$

Het is nu duidelijk dat **P** $\subseteq$ **PSPACE**.

Voor ruimte is er een hierarchiestelling zoals voor tijd, dus o.a. $DSPACE(f) \subsetneq DSPACE(f^2)$ voor *fatsoenlijke* f.

Definitie 5.6.4. NPSPACE *is zoals* **PSPACE** *, maar dan met niet-deterministische Turing Machines.*

De inclusie **PSPACE** $\subseteq$ **NPSPACE** ligt voor de hand, en je zou kunnen verwachten dat **PSPACE** niet gelijk is aan **NPSPACE**, of dat het niet geweten is. Hier dan toch een verrassing: **PSPACE** = **NPSPACE** = co-**PSPACE**. Dat niet-determinisme niks toevoegt aan **PSPACE** komt weerom doordat ruimte herbruikbaar is: een niet-determininistische TM kan met weinig ruimte-overhead deterministisch gesimuleerd worden. Dan krijg je direct de intuïtie dat ook co-**NPSPACE** gelijk moet zijn aan **NPSPACE** en daaruit is de laatste gelijkheid af te leiden.

Minder dan lineaire ruimte? Ook dat kan. Neem als voorbeeld de taal van even getallen: die kan je beslissen door geen extra ruimte te gebruiken. Dat werkt overigens voor alle reguliere talen. Er zijn ook meer interessante talen die in sublineaire ruimte kunnen beslist worden: neem het probleem van te beslissen of een gegeven gerichte graaf (V, E) een pad heeft tussen twee gegeven knopen. We beschrijven een $log(n)^2$-ruimte algoritme, waarbij n het aantal knopen is in de graaf, in pseudo-code:

```
function EXISTSPATH(a,z,l)
    if (l = 0) then
        return(a = z)
    end if
    if (a, z) ∈ E then
```

```
        return(TRUE)
    end if
    for all (v ∈ V do
        if EXISTSPATH(a, v, l/2) ∧ EXISTSPATH(v, b, l − l/2) then
            return(TRUE)
        end if
    end for
    return(FALSE)
end function
```

EXISTSPATH(a, z, n) geeft TRUE terug als er een pad bestaat van a naar z met lengte hoogstens l. Zijn tijdscomplexiteit is verschrikkelijk, maar als je je inbeeldt dat dit op een klassieke machine wordt uitgevoerd, dan merk je dat op de runtime stack nooit meer dan $\log(n)$ stack frames nodig zijn, en dat elk stack frame in grootte beperkt is tot $\log(n)$ bits. Het algoritme kan met dezelfde ruimtecomplexiteit op een DTM geïmplementeerd worden.

Verder is het interessant dat je ruimte en tijd kan uitwisselen: je kan een versie van EXISTSPATH maken die minder tijd nodig heeft, maar dan wel meer plaats gebruikt, bijvoorbeeld door een diepte-eerst zoektocht in de graaf. Die heeft minder tijd nodig, maar je houdt dan typisch in een knoop bij of je die al bezocht hebt: dat kost één bit per knoop, dus lineair in het aantal knopen.

Log-ruimte gebruiken is interessant genoeg voor een eigen klasse:

Definitie 5.6.5. $\mathbf{L} = DSPACE(\log)$

Log-ruimte algoritmen zijn belangrijk, bijvoorbeeld in de context van grote databases of lange DNA-sequenties: met log van de plaats die een database inneemt heb je genoeg plaats om pointers (binair) op te slaan en te manipuleren. Met een constant aantal van die pointers heb je dikwijls genoeg om de database te doorlopen, en queries te beantwoorden.

Een rij van inclusies

We hebben nu voldoende inzicht om een rij inclusies te verantwoorden:

$$\mathbf{L} \subseteq \mathbf{NL} \subseteq \mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \subseteq \mathbf{PSPACE} = \mathbf{NPSPACE} \subseteq \mathbf{EXP}$$

Door de hierarchiestellingen weten we zeker dat $\mathbf{L} \neq \mathbf{PSPACE}$ en $\mathbf{P} \neq \mathbf{EXP}$, dus zijn sommige van die inclusies strikt, maar er is niet bekend welke.

Complexiteit en de Chomsky hiërarchie

Is er een verband tussen de complexiteit waarmee een taal beslist kan worden en zijn plaats in de Chomsky hiërarchie?

Het is gemakkelijk in te zien dat een reguliere taal beslist wordt in $O(n)$ stappen (van de FSA) met n het aantal symbolen in de input. Of dit ook kan in $O(n)$ stappen op een Turing machine valt nog aan te tonen (door jullie). Je hebt ook heel weinig (extra) ruimte nodig om een reguliere taal te beslissen: geen enkele. Met strikt minder dan log-SPACE kan overigens niks anders beslist worden dan reguliere talen.

Voor context vrije talen is er een algemeen $O(n^3)$ (op een TM met 3 banden) algoritme: het algoritme van Cocke-Younger-Kasami. Het is een vorm van *chart* of *tabular parsing*, of dynamisch programmeren. Je komt ook toe met lineaire ruimte (de stapel), dus $CFL \subset SPACE(n)$.

De niet-deterministische LBA beslist talen door niet meer plaats te gebruiken dan de invoer: de context-sensitieve talen vormen dan ook de klasse **NSPACE**(n).

Besluit

Aan de basis van de studie[6] van de complexiteit van algoritmen, ligt de wens om binnen een bepaald formeel kader "snelle" algoritmen te karakteriseren en de problemen die een "snel" algoritme toelaten. Daarbij heeft men al vlug ingezien dat de grootte van de input voor het algoritme een belangrijke rol moet spelen in die karakterisatie.

Pas in 1965 werd door Jack Edmonds voorgesteld "snel" te definiëren als "polynomiaal in de lengte van de input", daarmee inspelend op het algemeen gevoel dat een polynomiaal algoritme snel genoeg is en een exponentieel te traag. De problemen met een snelle oplossing vormen **P**. Problemen die niet in **P** zitten, worden beschouwd als "intractable" of onbehandelbaar voor praktische doeleinden.

Tegen het einde van de jaren 1960 werd het duidelijk dat voor sommige ogenschijnlijk eenvoudige problemen (bijvoorbeeld SAT) niemand een polynomiale oplossing vond. Steve Cook bedacht dan de notie van "verifieerbaar in polynomiale tijd", t.t.z. de problemen waarvoor in polynomiale tijd kan geverifieerd worden of iets een oplossing is voor het probleem en **NP** was geboren. In 1971 bewees Cook dan dat er binnen **NP** een klasse problemen bestaat die het "moeilijkst" zijn, nl. de klasse **NP**-compleet en dat die klasse niet leeg is. Leonid Levin (USSR) bewees hetzelfde resultaat onafhankelijk en praktisch gelijktijdig, maar publiceerde natuurlijk in het Russisch en was daarom minder bekend. Het sluitstuk is de realisatie dat indien één probleem uit **NP**-compleet ook in **P** zit,

[6] aanvang te situeren minstens 150 jaar geleden!

de twee klassen **P** en **NP** samenvallen. De (on)gelijkheid van **P** en **NP** is echter nog steeds een open probleem, al lijkt wedden op gelijkheid een slechte zaak: er zijn immers te veel problemen waarvoor heel wat onderzoekers gezocht hebben naar een polynomiaal algoritme zonder het te vinden.

Voorlopig is het onderscheid tussen **NP**-compleet en **P** dus belangrijk omdat men niet mag hopen op een efficiënte oplossingmethode voor intractable problemen (voor steeds grotere invoer). Vermits heel wat alledaagse problemen **NP**-compleet zijn (vehicle routing, examenroosters opstellen ...) of een te hoge exponent hebben (PRIME), werden andere oplossingsmethoden ontwikkeld, samen met hun theorie. Zo bestaan er echt snelle probabilistische methoden om na te kijken of een getal priem is (ze falen heel zelden), en heuristieken en benaderingsschema's voor optimalisatieproblemen die (nog) geen polynomiaal algoritme hebben. Soms kan een parameter van het probleem gefixeerd worden, en dan krijgen we toch nog een tractable probleem. Complexiteitstheorie heeft ook vertakkingen in cryptografie, quantumcomputing, informatietheorie, circuit-design ... , maar de centrale vraag blijft voorlopig of $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

Referenties

- V.J. Rayward–Smith, "Inleiding in de berekenbaarheidstheorie", Academic service, 1987
- Sanjeev Arora and Boaz Barak, "Computational Complexity: A Modern Approach", Cambridge University Press