Spis treści

0.1 Zbiory

Definicja 0.1 ((Nad)Podzbiór). Niech A, B będą zbiorami oraz każdy element zbioru A jest również elementem zbioru B, wtedy A jest *podzbiorem* zbioru B, oznaczany przez $A \subseteq B$ lub równoważnie B jest *nadzbiorem* zbioru A, oznaczamy przez $B \supseteq A$.

Skrótowo powyższą zależność pomiędzy zbiorami zapisujemy jako $A \subseteq B$. *Rodziną zbiorów* będę określać „zbiór zbiorów" danego zbioru. Jest to wygodniejsza językowo forma tego określenia pozwalająca uniknąć niezręcznych językowo sytuacji. *Podrodziną* będę określał podzbiór danej rodziny zbiorów (czyli podzbiór zbioru zbiorów).

Definicja 0.2 (Zbiór potęgowy). Niech X będzie zbiorem. Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X nazywamy zbiorem potęgowym i oznaczamy $\mathcal{P}(X)$.

Rozdział 1

Przestrzenie

Definicja 1.1 (Topologia). Nich X będzie zbiorem. *Topologią* w zbiorze X nazywamy rodzinę podzbiorów $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ taką, że:

(i) $\emptyset, X \in \tau$,

(ii) część wspólna dowolnej skończonej liczby zbiorów należących do τ także należy do τ,

(iii) suma dowolnej, nawet nieskończonej liczby zbiorów należących do τ także należy do τ.

Definicja 1.2 (Przestrzeń topologiczna). Zbiór X z ustaloną w nim topologią τ nazywamy *przestrzenią topologiczną* i oznaczamy (X, τ).

Zbiory należące do τ nazywa się *otwartymi* w przestrzeni topologicznej (X, τ) a elementy zbioru X punktami.

Definicja 1.3 (Otoczenie punku). Niech x będzie punktem przestrzeni topologicznej (X, τ). Zbiór $V \subseteq X$ nazywamy *otoczeniem* punktu x gdy istnieje zbiór otwarty $U \in \tau$ taki, że $x \in U \subseteq V$.

Definicja 1.4 (Przestrzeń $\mathbf{T_1}$). Przestrzeń topologiczną (X, τ) nazywamy *przestrzenią T_1*, jeśli dla dowolnych dwóch różnych punktów tej przestrzeni istnieją otoczenia tych punktów nie zawierające drugiego z punktów.

Definicja 1.5 (Punkt skupienia zbioru). Niech dany będzie zbiór A przestrzeni topologicznej T_1. *Punktem skupienia zbioru* jest taki punkt x zadanej przestrzeni, dla którego przekrój dowolnego otoczenia punktu x ze zbiorem A jest niepusty.

Definicja 1.6 (Metryka). *Metryką* w zbiorze X nazywamy funkcję $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, która dla dowolnych $x, y, z \in X$ spełnia warunki:

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (niezdegenerowanie),

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (symetria),

(iii) nierówność trójkąta tzn. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (nierówność trójkąta).

Liczba $d(x, y)$ nazywa się odległością pomiędzy punktami $x, y \in X$ w metryce d.

Definicja 1.7 (Przestrzeń metryczna). Zbiór X z ustaloną w nim metryką d nazywamy *przestrzenią metryczną* i oznaczamy (X, d).

Definicja 1.8 (Własność Hausdorffa). Mówimy, że przestrzeń topologiczna (X, tau) spełnia *własność Hausdorffa* jeżeli dla dowolnych dwóch różnych punktów tej przestrzeni istnieją otoczenia tych punktów, których przecięcie jest zbiorem pustym.

Definicja 1.9 (Przestrzeń $\mathbf{T_2}$). Przestrzeń topologiczną (X, τ) nazywamy *przestrzenią T_1* lub *przestrzenią Hausdorffa*, jeśli spełnia własność Hausdorffa.

Uwaga 1.1.
Każda przestrzeń T_2 jest również przestrzenią T_1.

Dowód: Zależność wynika wprost z definicji przestrzeni T_1 i T_2. Jeżeli dla dowolnych dwóch różnych punktów tej przestrzeni istnieją otoczenia tych punktów, których przecięcie jest zbiorem pustym to tym bardziej każde z tych otoczeń nie zawiera drugiego z punktów. ⊠

Definicja 1.10 (Kula). *Kulą (otwartą)* w przestrzeni metrycznej (X, d) o środku w punkcie $x_0 \in X$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$B(x_0, r) := \{x \in X : d(x_0, x) < r\}. \tag{1.0.1}$$

Twierdzenie 1.1.
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Rodzina podzbiorów zbioru X:

$$\tau(d) := \{U \subseteq X : \forall_{x_0 \in U}\, \exists_{r>0}\, B(x_0, r) \subseteq U\} \tag{1.0.2}$$

jest topologią w X, spełniającą warunek Hausdorffa.

Dowód: Zacznę od pokazania, że $\tau(d)$ jest topologią udowadniając osobno każdy z warunków definicji topologi.

Dowód warunku (i). Zbiór $\emptyset$ z definicji nie zawiera żadnych elementów także warunek by dla każdego punktu tego zbioru istniała kula o środku w tym punkcie zawarta w tym zbiorze jest automatycznie spełniony. Znów zbiór X jest całą przestrzenią także dowolny zbiór w tym dowolna kula w tej przestrzeni jest podzbiorem X.

Dowód warunku (ii). Jeśli zbiory $U_1, \ldots, U_n$ należą do $\tau(d)$ oraz punkt $x_0 \in U_1 \cap \ldots \cap U_n$ i dla każdego $i = 1, \ldots, k$ istnieje promień $r_i > 0$ taki, że $B(x_0, r_i) \subseteq U_i$ to dla $r := \min\{r_1, \ldots, r_k\}$ zachodzi inkluzja $B(x_0, r) \subseteq U_1 \cap \ldots \cap U_n$.

Dowód warunku (iii). Niech dana będzie dowolna rodzina zbiorów $\{U_i \in \tau(d)\}_{i \in I}$ oraz punkt $x_0 \in \bigcup_{i \in I} U_i$, wtedy istnieje i_0 także, że $x_0 \in U_{i_0}$ oraz promień $r > 0$ taki, że $B(x_0, r) \in U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, to $\{U_i\}_{i \in I} \in \tau(d)$. Kończy to dowód, że $\tau(d)$ jest topologią.

Dowód drugiej części tezy zacznę od pokazania, że dowolna kula $B(x, r)$ o środku w $x \in X$ i promieniu $r > 0$ należy do $\tau(d)$. Niech $y \in B(x, r)$, wtedy kula $B(y, r_1)$, gdzie $r_1 := r - d(x, y)$ jest podzbiorem $B(x, r)$. Założę nie wprost, że istniej takie $z \in B(y, r_1)$ oraz $z \notin B(x, r)$. Wtedy dostajemy, że $d(y, z) < r_1$ oraz $d(x, z) \geqslant r$. Następnie z nierówności trójkąta oraz symetrii otrzymujemy

$$r = d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z) = r - r_1 + d(y, z) < r - r_1 + r = r.$$

Mianowicie dla każdego $y \in B(x, r)$ Niech x, y będą dwoma różnymi punktami w X oraz $r = d(x, y)/2$. Z własności niezdegenerowania oraz dodatniości metryki mamy, że $d(x, y) > 0$ także $r > 0$. Wtedy kule $B(x, r), B(y, r)$ są otoczeniami tych punktów ponieważ należą do $\tau(d)$ oraz ich przecięcie jest zbiorem pustym. Załóżmy, że drugie stwierdzenie jest nieprawdziwe, czyli istnieje punkt z należący do obu tych kul, wtedy $d(x, z) < r$ oraz $d(y, z) < r$. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) = d(x, z) + d(y, z) < 2r = d(x, y)$. Co daje sprzeczność i koczy dowód spełnienia własności Hausdorffa jak i cały dowód. $\boxtimes$

Wniosek 1.1.1.

Każda kula $B(x_0, r)$ o środku w $x_0 \in X$ i promieniu $r > 0$ jest zbiorem otwartym tzn. należy do $\tau(d)$. Co uzasadnia nazywanie kuli kulą otwartą.

Wniosek 1.1.2.

Każda przestrzeń metryczna (X, d) z topologią generowaną w zbiorze X prze metrykę d jest przestrzenią T_2. Oznaczamy ją przez $(X, \tau(d))$.

Rozdział 2

Funkcje