# 行列式

## 二阶行列式

考虑以下二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

将方程组的未知数系数按相对位置排列成一个方阵，如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

这样的东西就叫做 **二阶行列式**，常用符号 “D” 表示

**对于二阶行列式来说，它的值总是等于所有 右下对角线的积 减去 左下对角线的积**

回到刚刚的方程组中，我们可以化简出方程的两个解分别是

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

想要利用行列式，我们可以设以下内容：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

**(前提：$D \neq 0$)**

**其中$D_n$表示使用等式右边的常数替换掉行列式的第n列而构成的新行列式**，并且我们可以发现，系数 a 的下标正好表示位于行列式中的第几行第几列

则我们可以得出：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}$$

那么求解的步骤就可以通过先求各行列式的值来进行

# 三阶行列式

现在让我们考虑三元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

我们可以向二阶一样定义三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

**我们可以很容易发现，三阶行列式的值也是符号对角线元素相乘后的和再相减的**

如同二阶一样，我们可以同理定义D、$D_1$、$D_2$、$D_3$(用等式右边常数替换行列式对应列)，然后通过以下方法解出方程的解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}, 其中 D \neq 0$$