第三次课后作业

119020910008　方田

(1) 根据帕斯瓦尔定理，$P=\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt$

$x^2(t)=x(t)x^*(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{inw_0t}\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_m^* e^{-imw_0t} \Rightarrow P=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_nC_m^*\int_0^T e^{i(n-m)w_0t}dt$

由于 e^{inw_0t}、e^{imw_0t} 为正交函数，当 $m\neq n$ 时，$\int_0^T e^{i(n-m)w_0t}=0$。

$\therefore P=\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2$，平均功率等于每条谱线上的功率之和，$|C_n|^2$ 称为功率谱

$\therefore$ 信号的功率谱为幅谱的平方。

(2) 对于 $p_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$

$\therefore C_n=\frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{T_s/2}p_s(t)e^{-in\frac{2\pi}{T_s}t}dt=\frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{T_s/2}\delta(t)e^{-in\frac{2\pi}{T_s}t}dt$

根据 $\delta(t)f(t)=f(0)\delta(t)$　$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=f(0)$

$\therefore C_n=\frac{1}{T_s}$　故 $p_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_s}e^{in\frac{2\pi}{T_s}t}$

(3) 对于窗函数　$x(t)=\begin{cases}1 & |t|\le \tau/2\\ 0 & |t|>\tau/2\end{cases}$

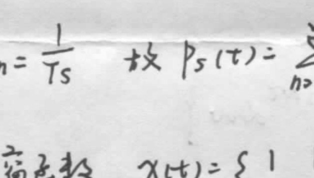
$X(w)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-jwt}dt=\tau\,\mathrm{sinc}(\frac{w\tau}{2})=\tau\frac{\sin(\frac{w\tau}{2})}{w\tau/2}$　令 $\tau=2a$　$\therefore X(w)=\frac{2\sin aw}{w}=2\pi\frac{\sin aw}{\pi w}$

根据对偶性质　$FT[X(t)]=2\pi x(-w)$　即 $FT[2\pi\frac{\sin at}{\pi t}]=2\pi x(w)$　由于 $x(w)=x(-w)$

$\therefore FT[\frac{\sin at}{\pi t}]=x(w)=\begin{cases}1 & |w|\le a\\ 0 & |w|>a\end{cases}$

又 $\because g(t)=\frac{\sin at}{\pi t}$　$\therefore G(w)=\begin{cases}1 & |w|\le a\\ 0 & |w|>a\end{cases}$

$\therefore$



(4) $\because x(t)=e^{-at^2}\ (a>0)$

$\therefore X(w)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-at^2}e^{-iwt}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a(t^2+\frac{iwt}{a})}dt=e^{-\frac{w^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a(t+\frac{iw}{2a})^2}dt=e^{-\frac{w^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx$

令 $I(x)=\int_0^{\infty}e^{-ax^2}dx$, $I(y)=\int_0^{\infty}e^{-ay^2}dy$ $\therefore I(x)=I(y)$

$\therefore I(x)\cdot I(y)=\int_0^{\infty}e^{-ax^2}dx\cdot\int_0^{\infty}e^{-ay^2}dy=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-a(x^2+y^2)}dxdy$ $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$

$\therefore I^2=\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-ar^2}\cdot r\,d\theta dr=\int_0^{\infty}\frac{\pi}{2}re^{-ar^2}dr=\frac{\pi}{4a}$ $\therefore \int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=2\int_0^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

$\therefore X(w)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{w^2}{4a}}$

(5) 解析信号：在能量不变的前提下，利用希尔伯特变换构造一个虚部，原信号加上这个虚部后得到的信号即为解析信号，其只有正频谱。

$\hat{x}(t)=x(t)*h(t)$，解析信号：$a_x(t)=x(t)+i\hat{x}(t)$

$A_x(w)=X(w)+i\hat{X}(w)=X(w)+iH(w)X(w)$

若令 $H(w)=\begin{cases}-i, & w>0\\ i, & w<0\end{cases}$ 即可使得 $A_x(w)=\begin{cases}2X(w) & w>0\\ 0 & w<0\end{cases}$

令 $H_1(w)=e^{\beta|w|}H(w)\ (\beta<0)$

$\therefore h(t)=IFT[H(w)]=\lim_{\beta\to0}\{IFT[H_1(w)]\}=\lim_{\beta\to0}\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_1(w)e^{iwt}dw\}$

$=\frac{1}{2\pi}\lim_{\beta\to0}\{\int_{-\infty}^{0}ie^{-\beta w}e^{iwt}dw+\int_0^{\infty}(-ie^{\beta w}e^{iwt})dw\}$

$=\frac{1}{2\pi}\lim_{\beta\to0}(\frac{i}{it-\beta}+\frac{i}{it+\beta})=\frac{1}{\pi t}$

$\therefore \hat{x}(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau$ [Hilber 变换]

解析信号即：$a_x(t)=x(t)+\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau$

A+ 10/18

(6) 对 $f(t)$ 连续信号采样：$f_s(t)=f(t)p_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s)$ $\because p_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_s}e^{inw_st}$

$\therefore F_s(w)=FT[f_s(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)p_s(t)e^{-iwt}dt=\frac{1}{T_s}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{inw_st}e^{-iwt}dt$

$=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i(w-nw_s)t}dt=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(w-nw_s)$

∴采样信号的频率是连续信号 $f(t)$ 频谱 $F(w)$ 的周期延拓，重复周期即为采样频率 w_s

只有 $w_s>2w_{max}$ 时，作周期延拓的过程中相邻两个频谱不发生频域混叠。