线性卷积(convolution)

连续信号

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

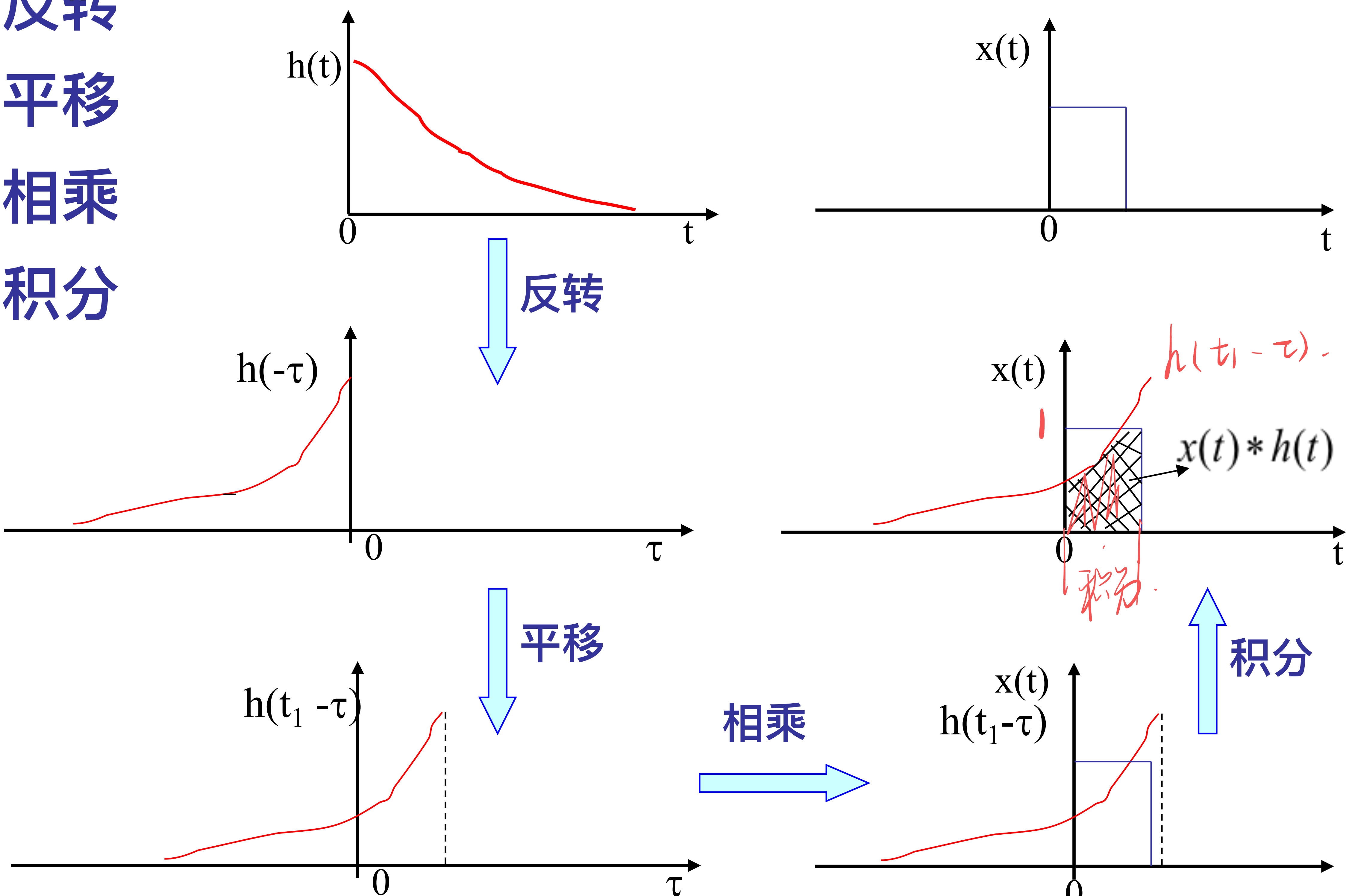
离散信号

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m)$$

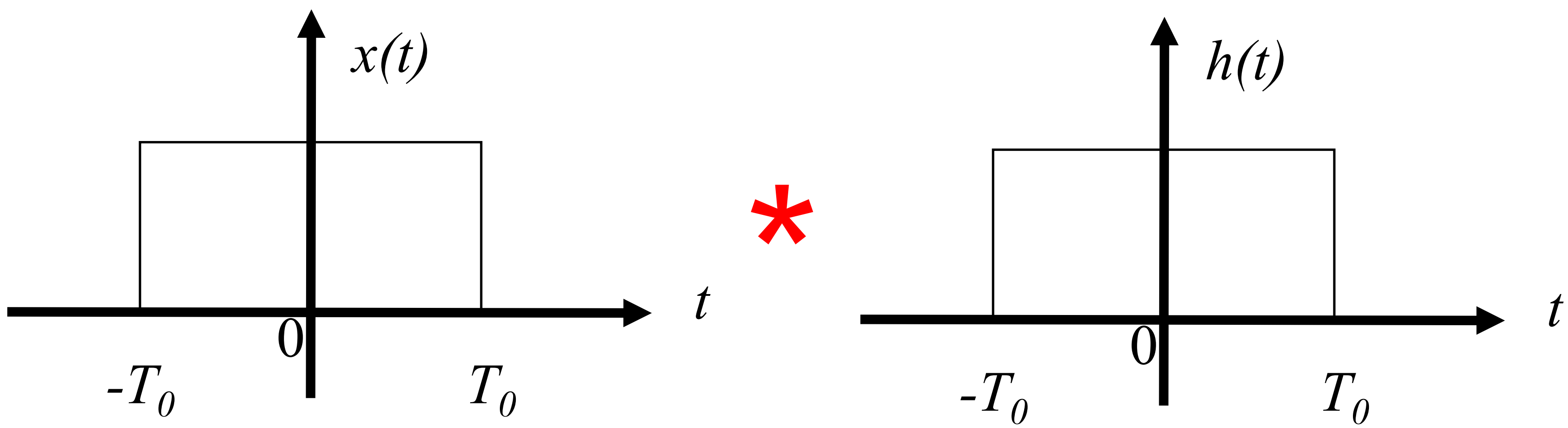
卷积的运算

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

- 反转
- 平移
- 相乘
- 积分



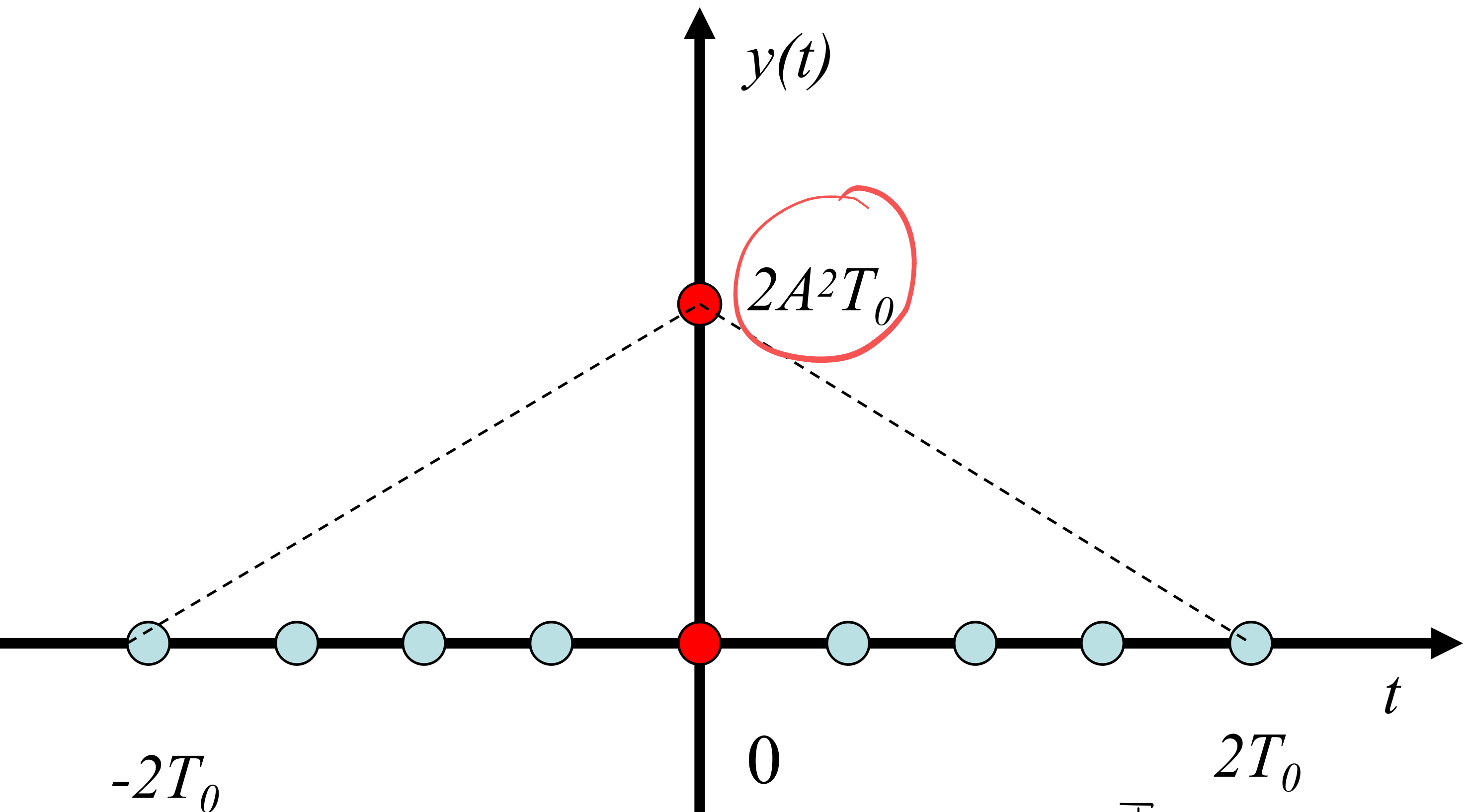
卷积的运算示例(1)



$$y(t) = x(t) * h(t-\tau)$$

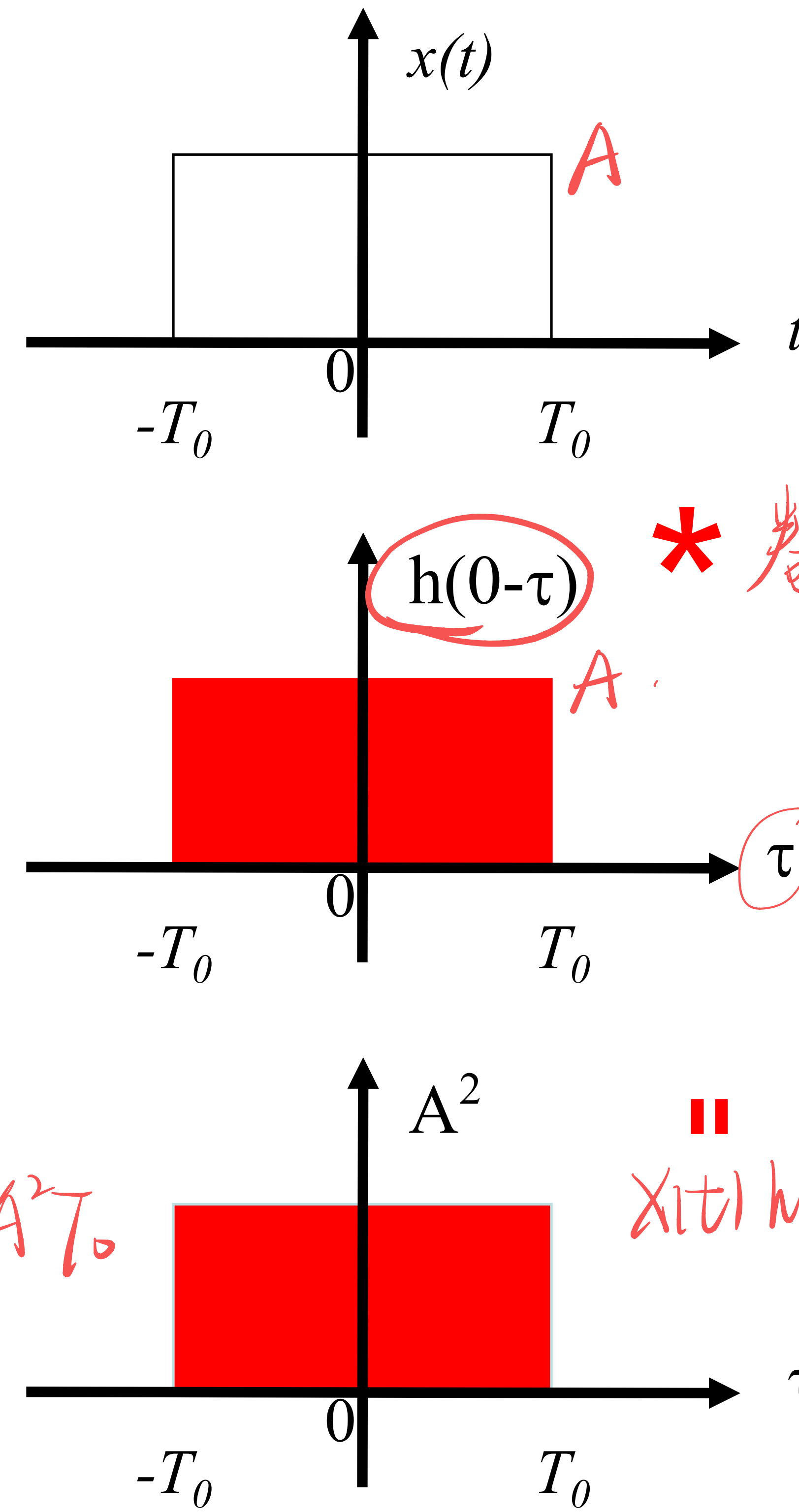
卷积的运算示例(1)

（1） $t=0$时, $y(0)=2A^2T_0$



$y(0)=\int_{-T_0}^{T_0} A^2 d\tau = 2A^2T_0$

$$y(t)=x(t)*h(t-\tau)$$



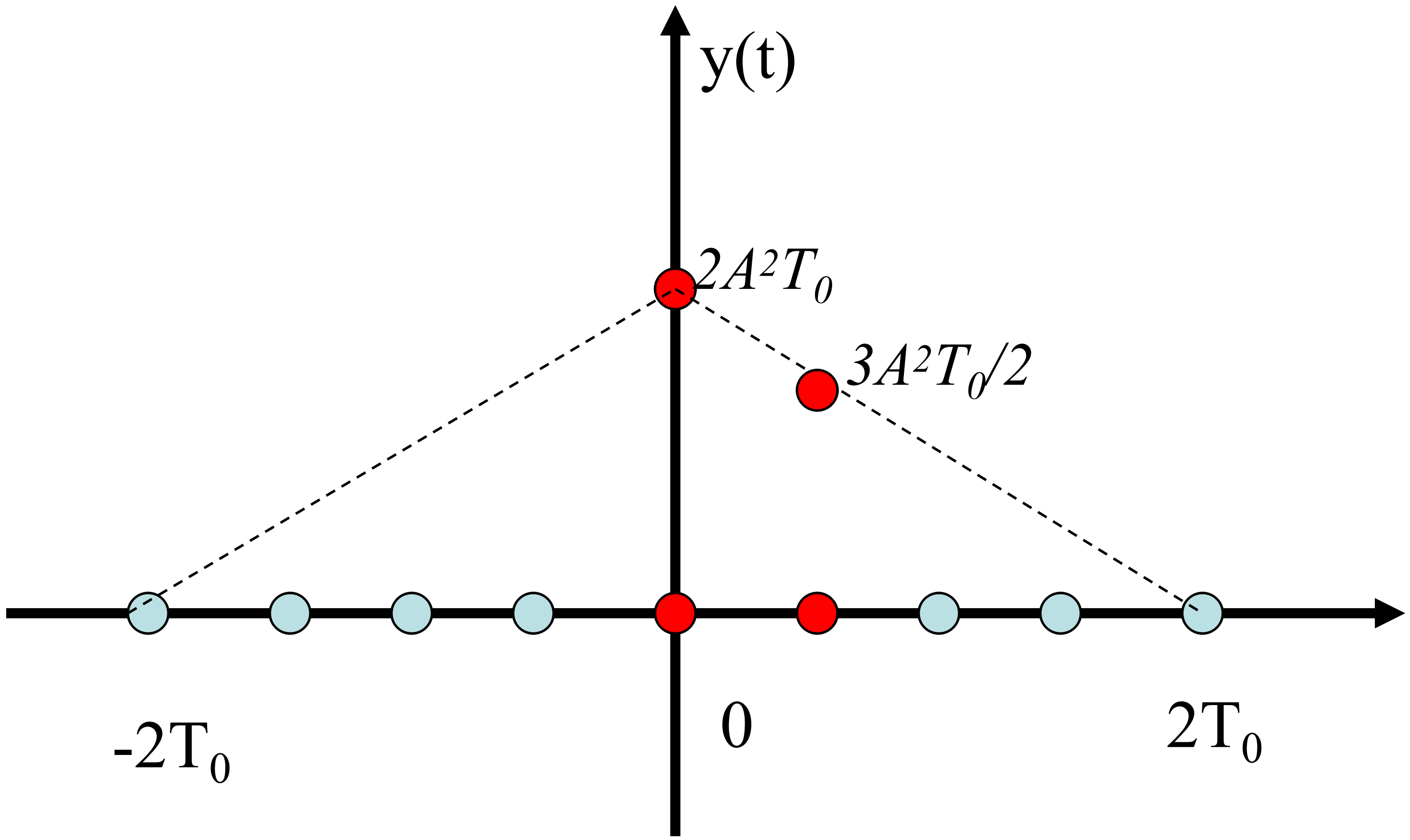
* 卷积

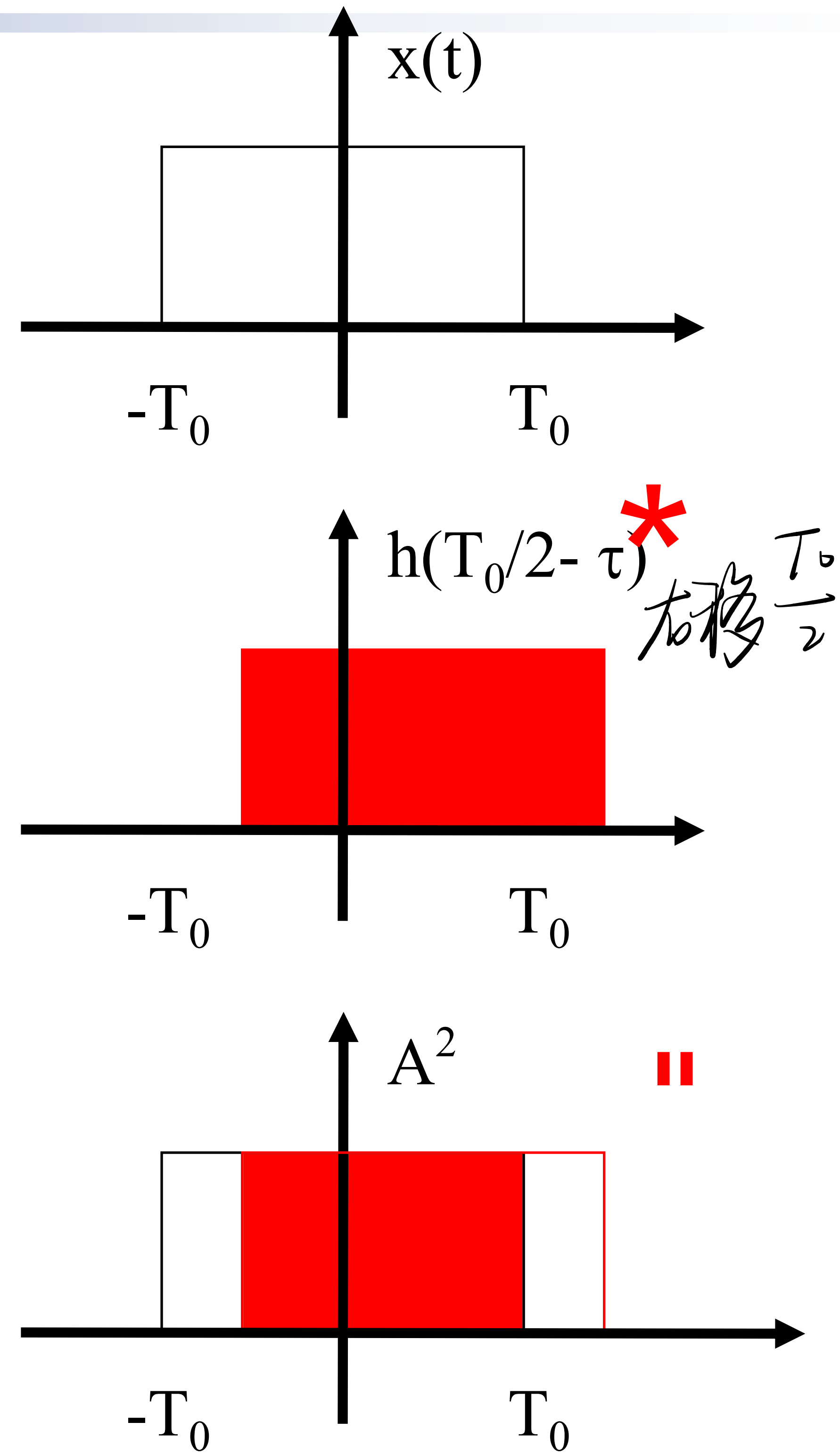
=

$x(t)h(0-\tau)$

卷积的运算示例(1)

(2） $t=T_0/2$时，$y(T_0/2)=3A^2\,T_0/2$



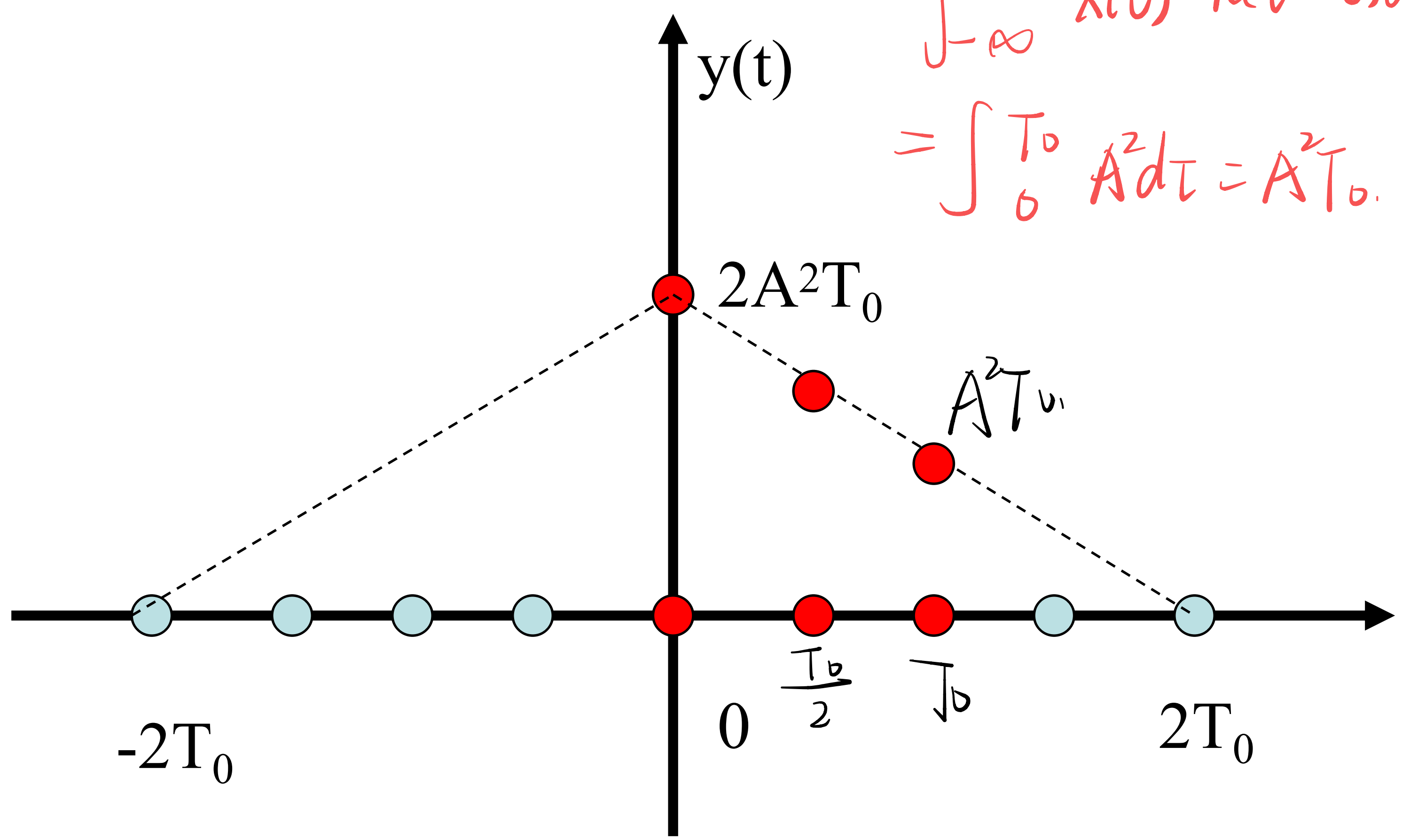


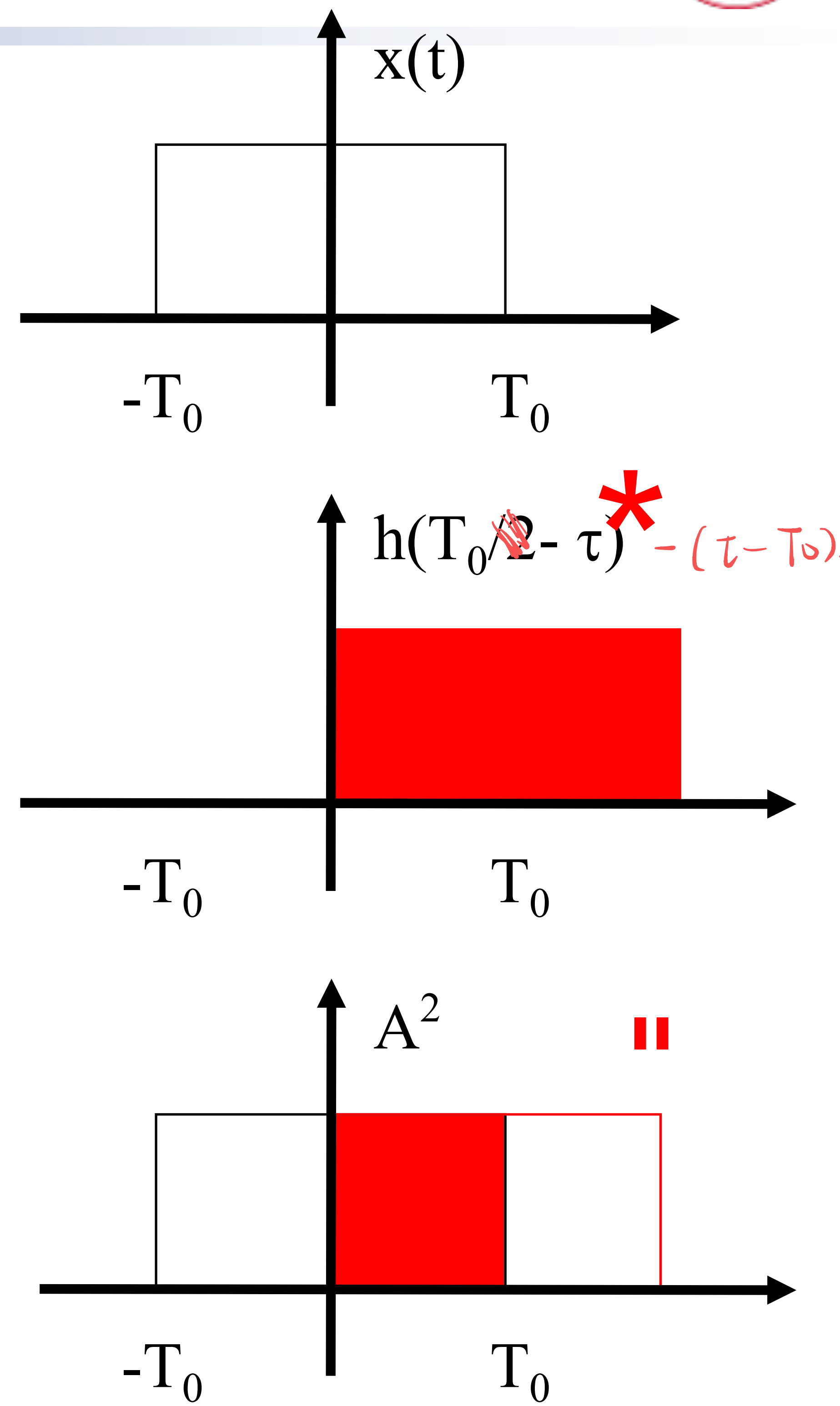
$$y(t)=x(t)*h(t-\tau)$$

卷积的运算示例(1)

(3) $t=T_0$时，$y(T_0)=A^2 T_0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_0^{T_0} A^2 d\tau = A^2 T_0.$$

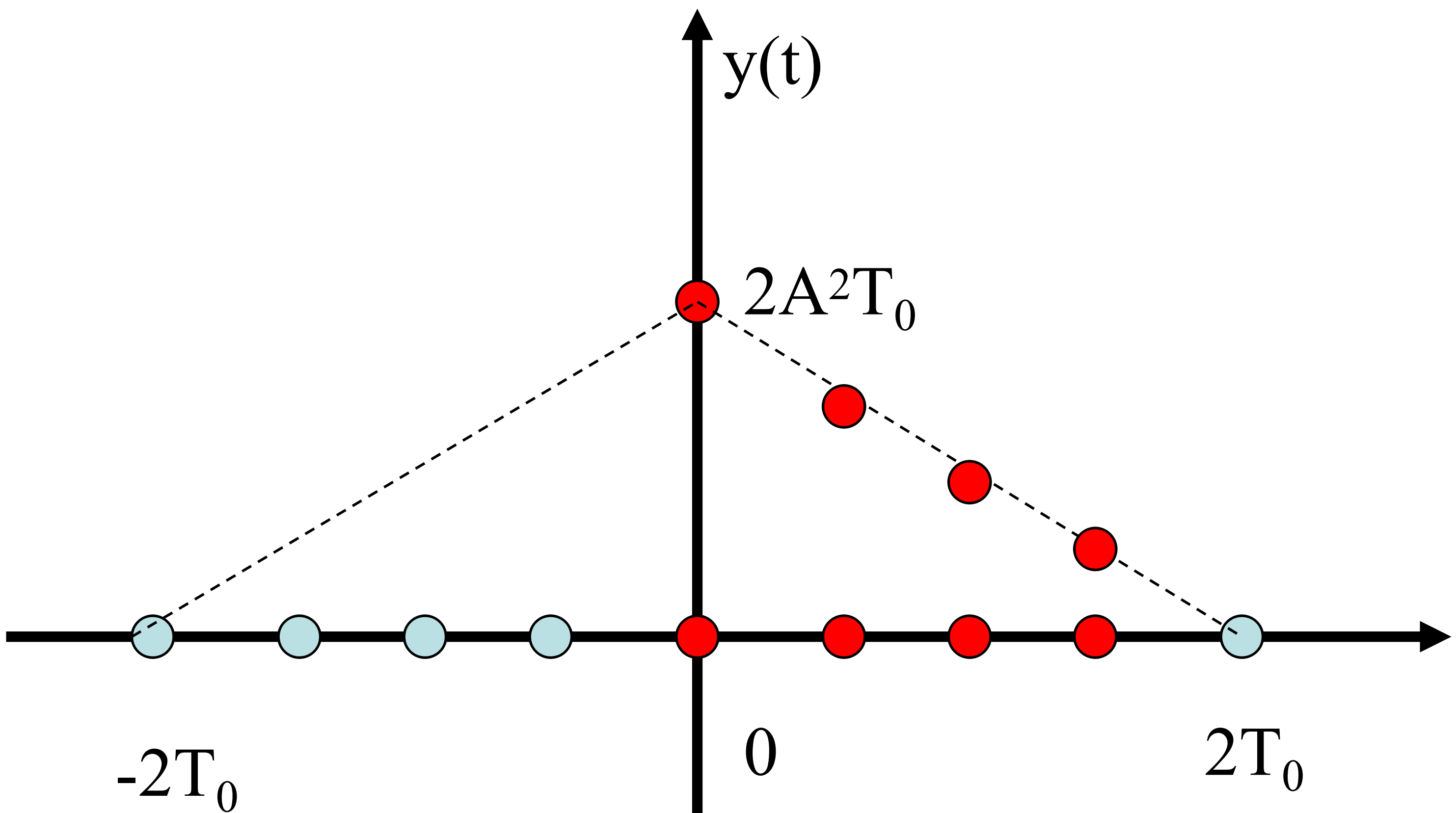


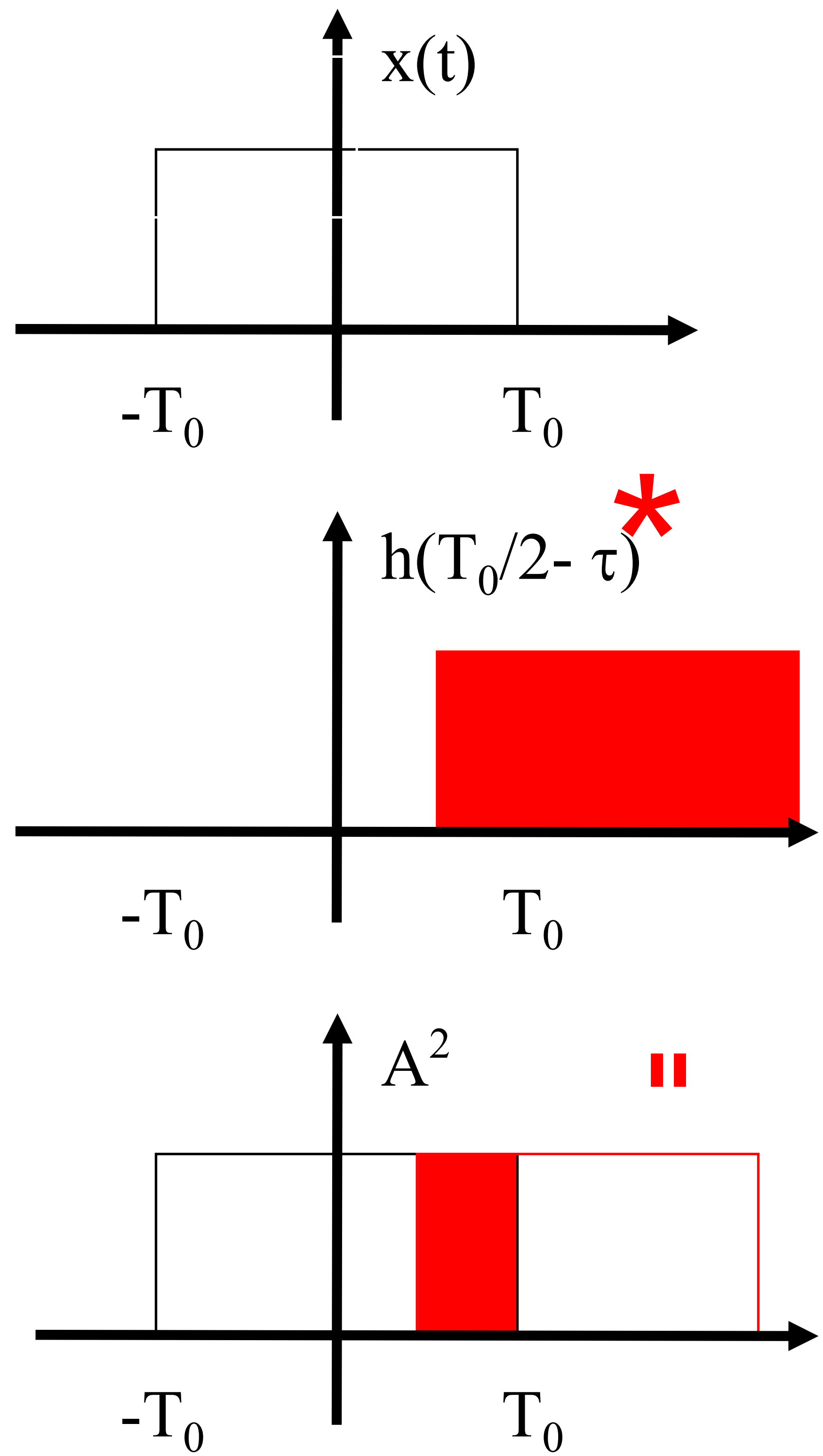


$$y(t)=x(t)*h(t-\tau)$$

卷积的运算示例(1)

(4） $t=3T_0/2$时，$y(3T_0/2)=A^2\,T_0/2$

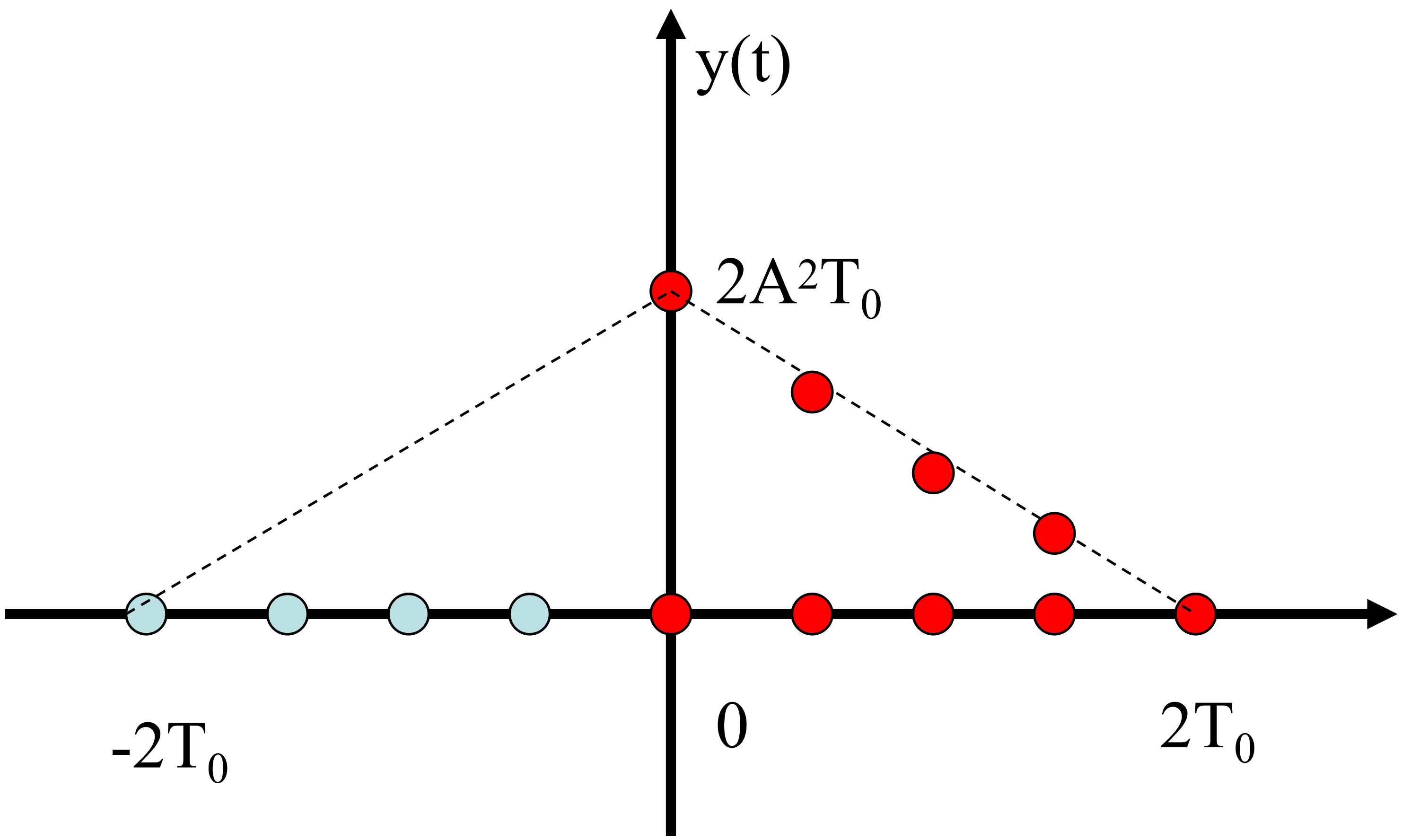




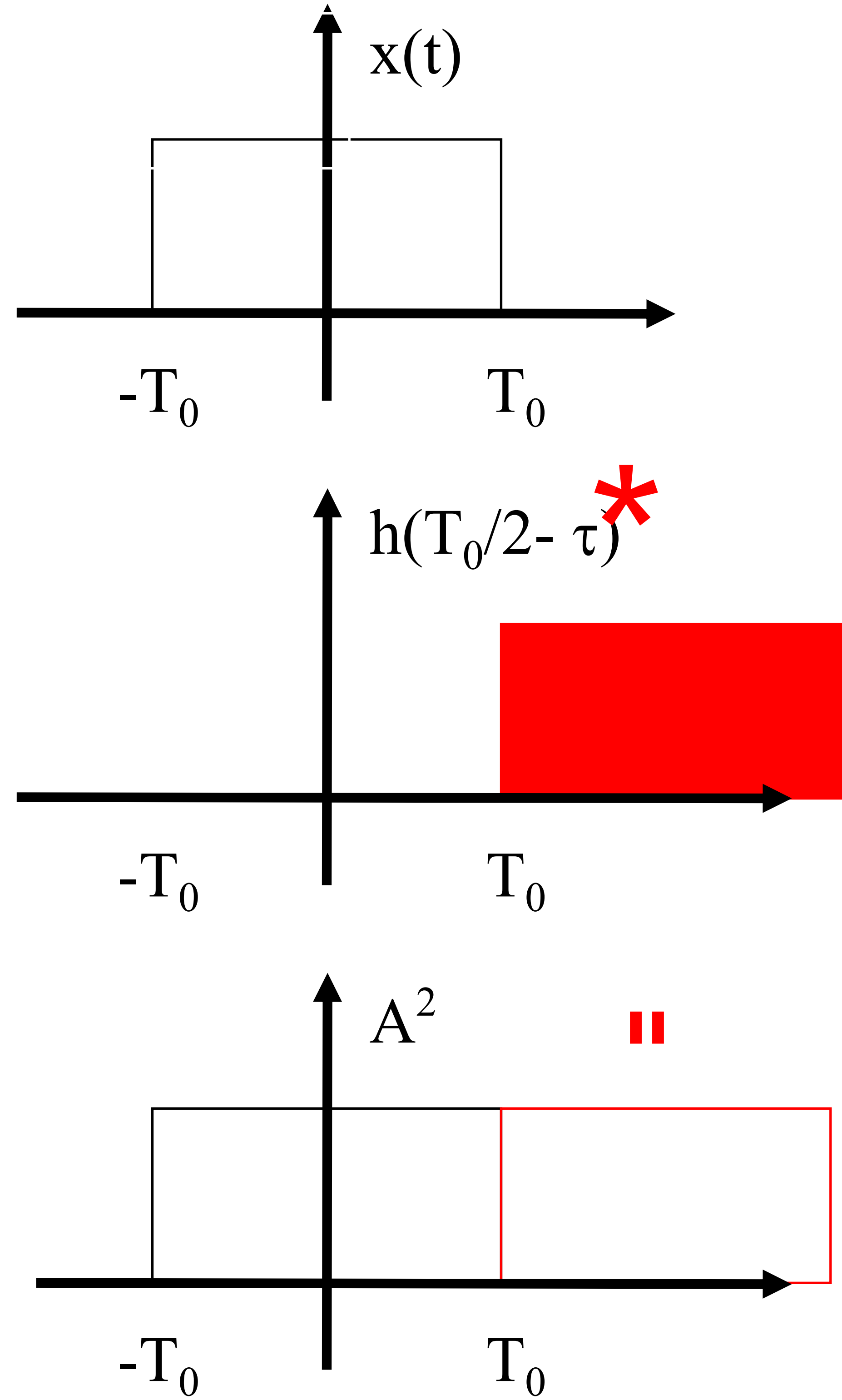
$$y(t)=x(t)*h(t-\tau)$$

卷积的运算示例(1)

(5) $t=2T_0$时，$y(2T_0)=0$

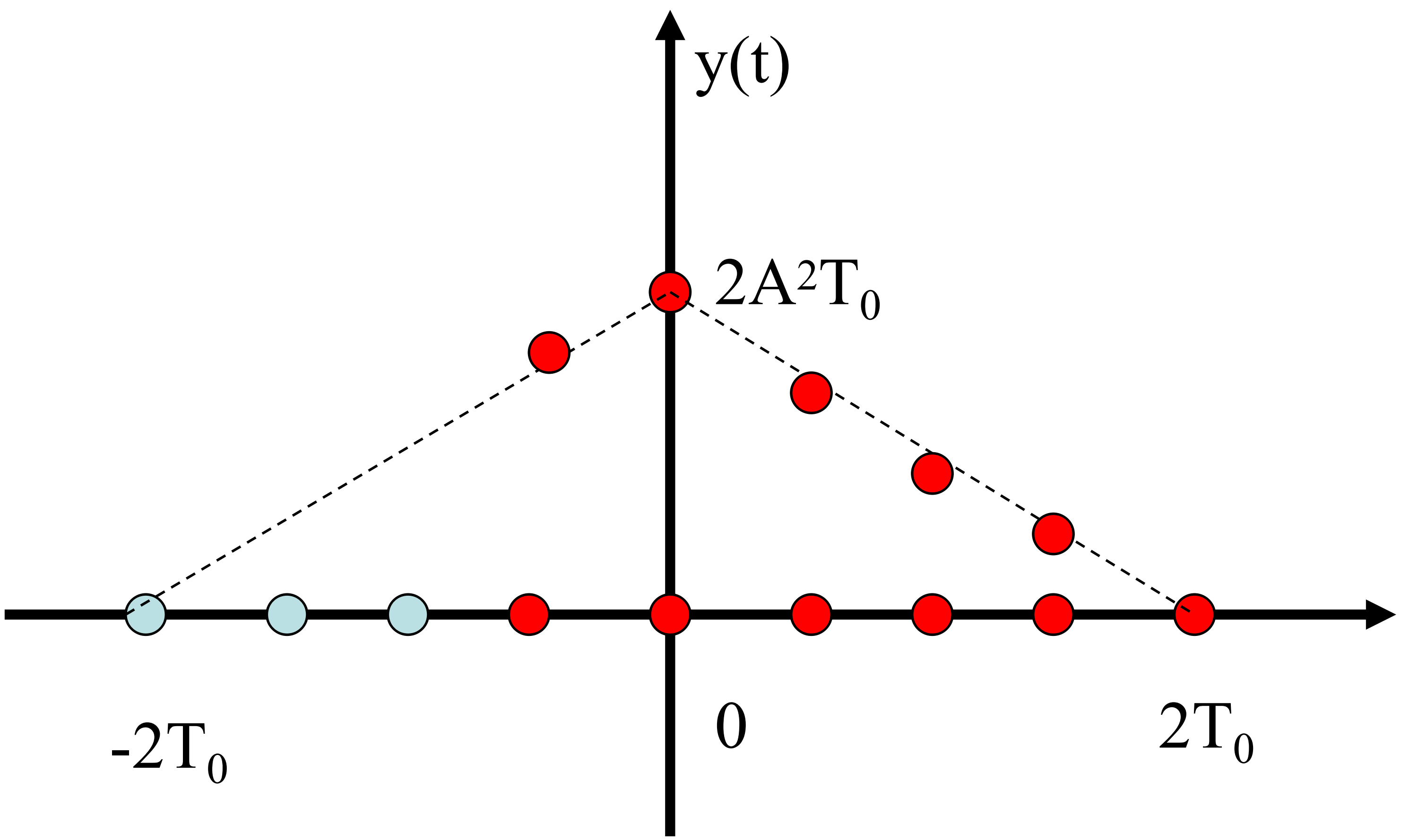


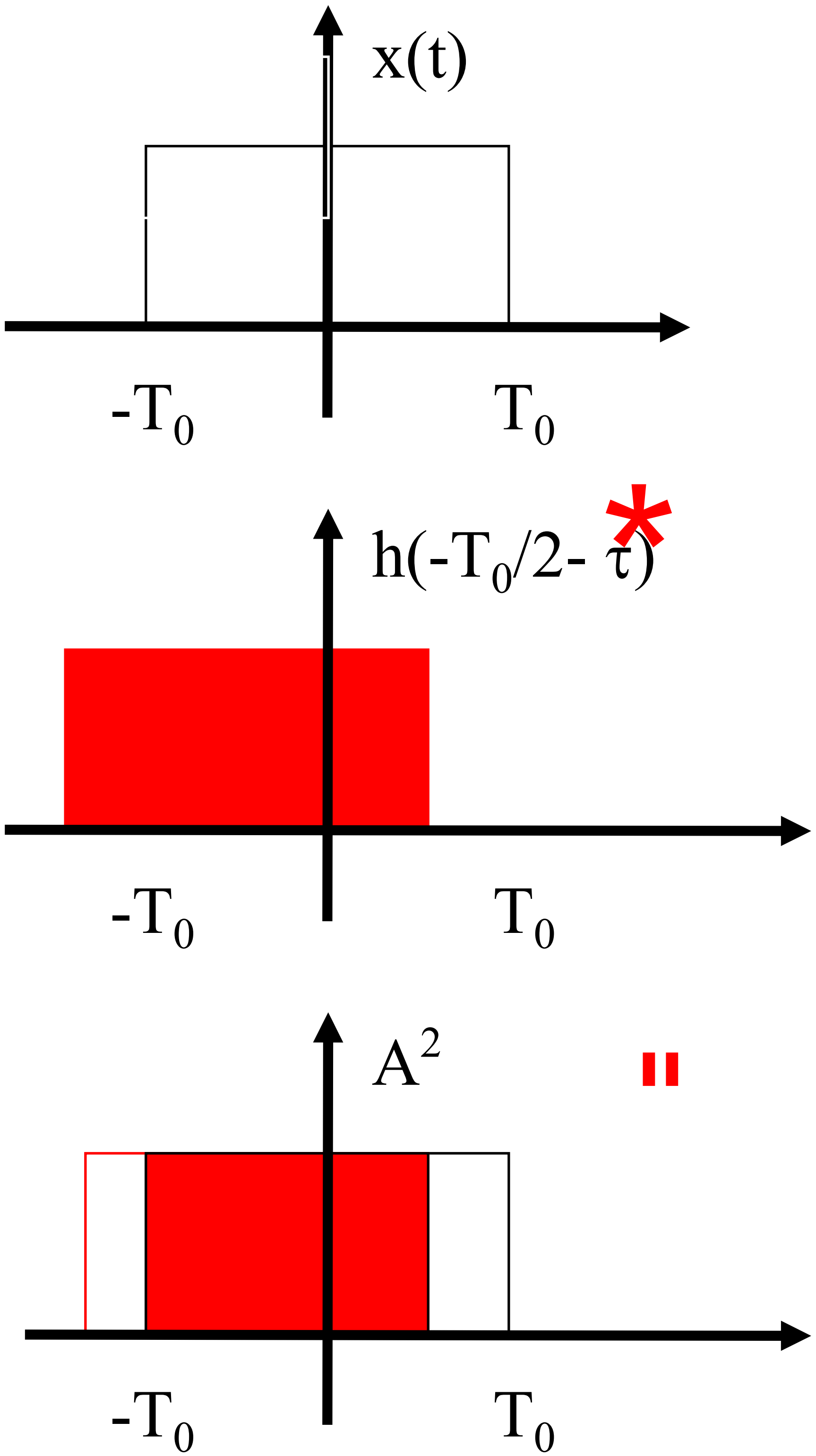
$$y(t)=x(t)*h(t-\tau)$$



卷积的运算示例(1)

(6) $t=-T_0/2$时，$y(-T_0/2)=3A^2T_0/2$

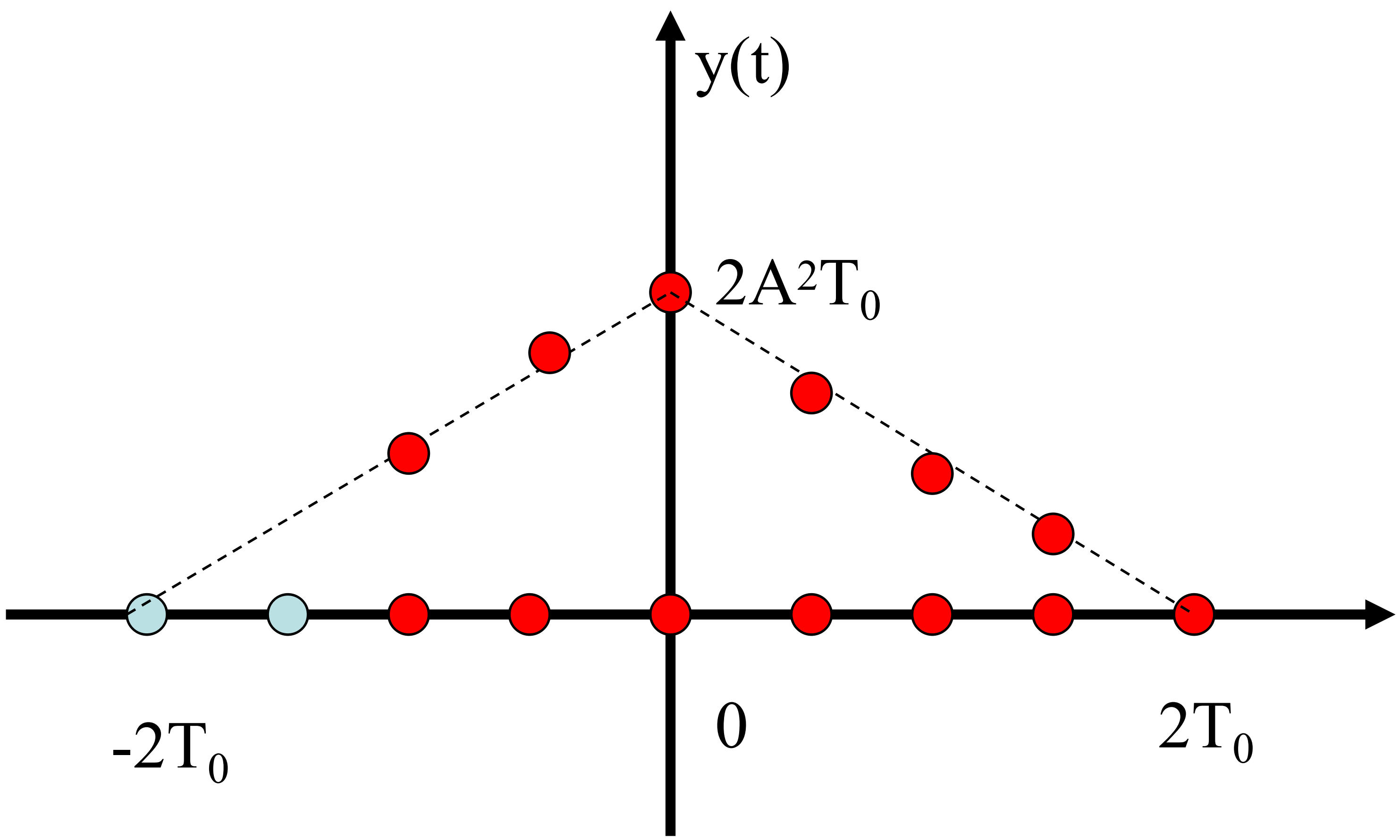


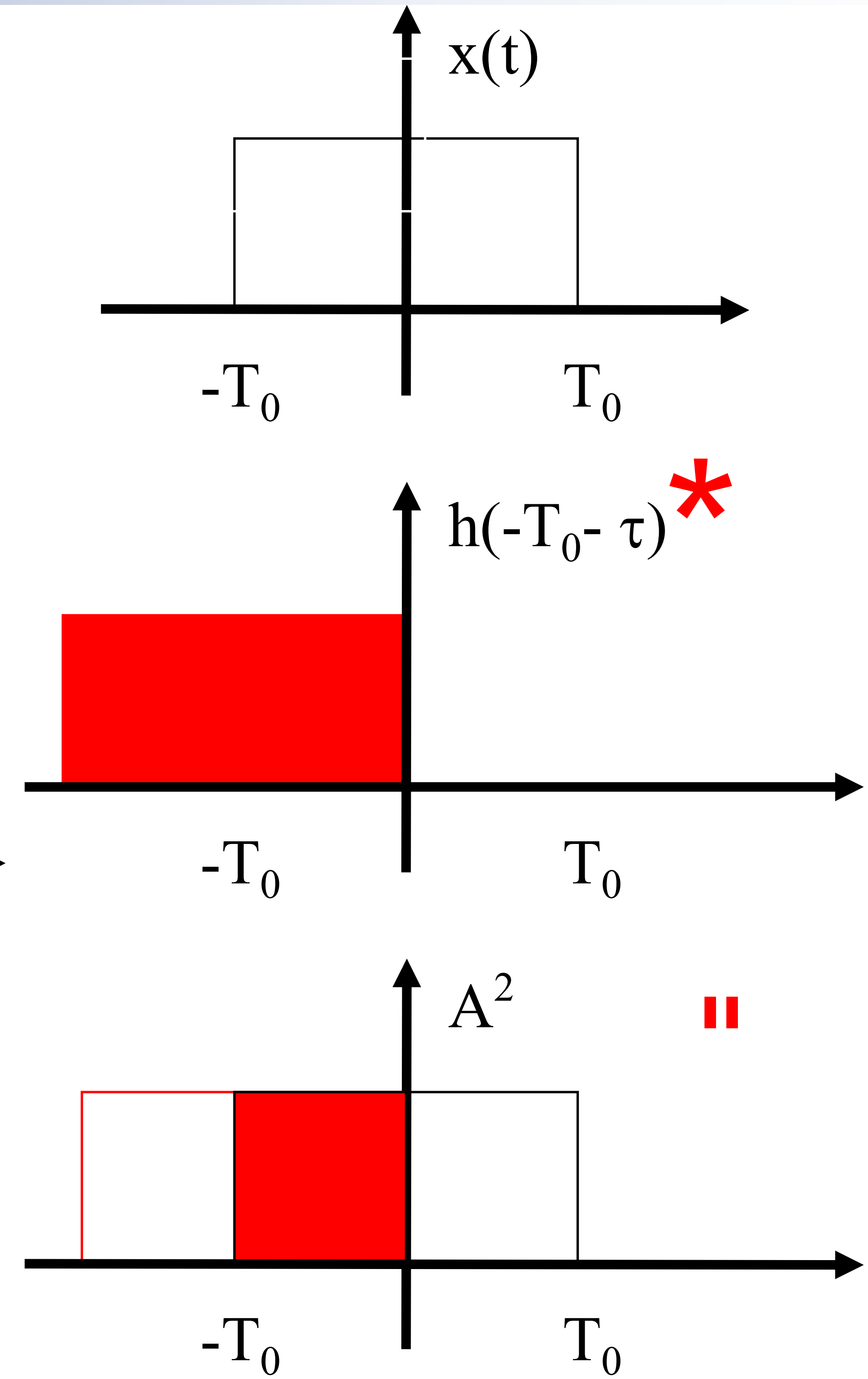


$$y(t)=x(t)*h(t-\tau)$$

卷积的运算示例(1)

(7)　$t= -T_0$时，$y(-T_0)=A^2T_0$

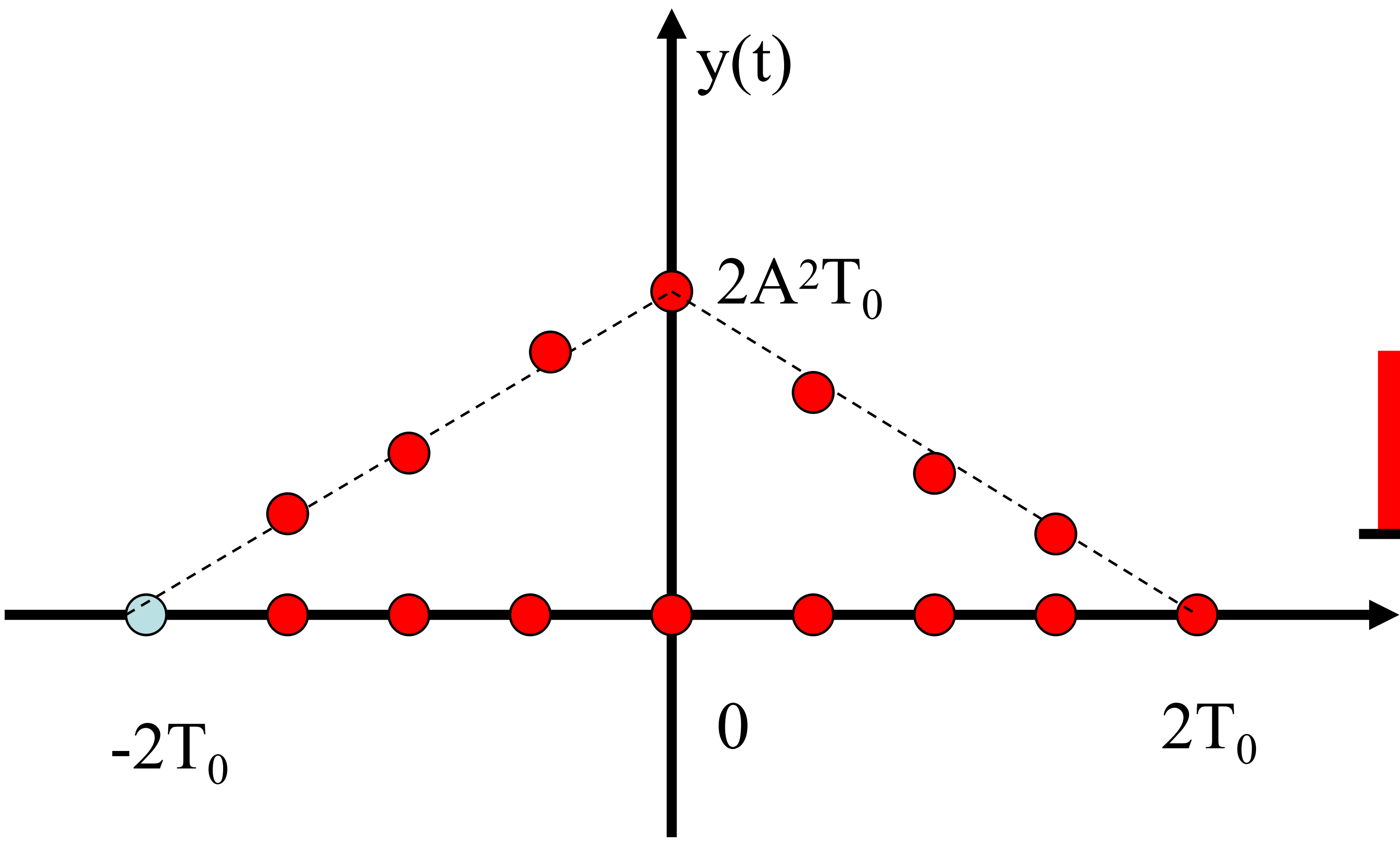


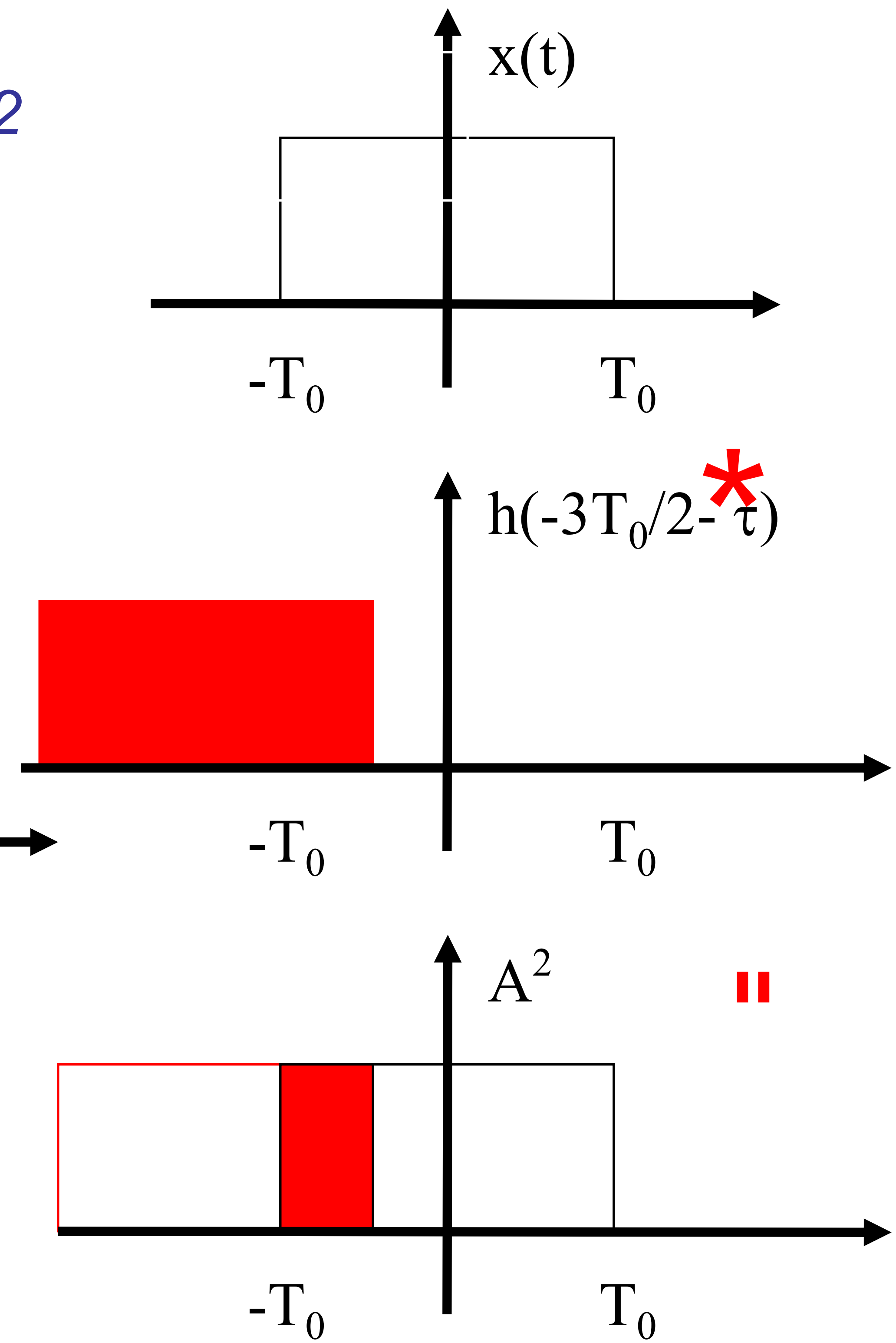


$$y(t)=x(t)*h(t-\tau)$$

卷积的运算示例(1)

(8)　　$t=-3T_0/2$时，$y(-3T_0/2)=3A^2T_0/2$

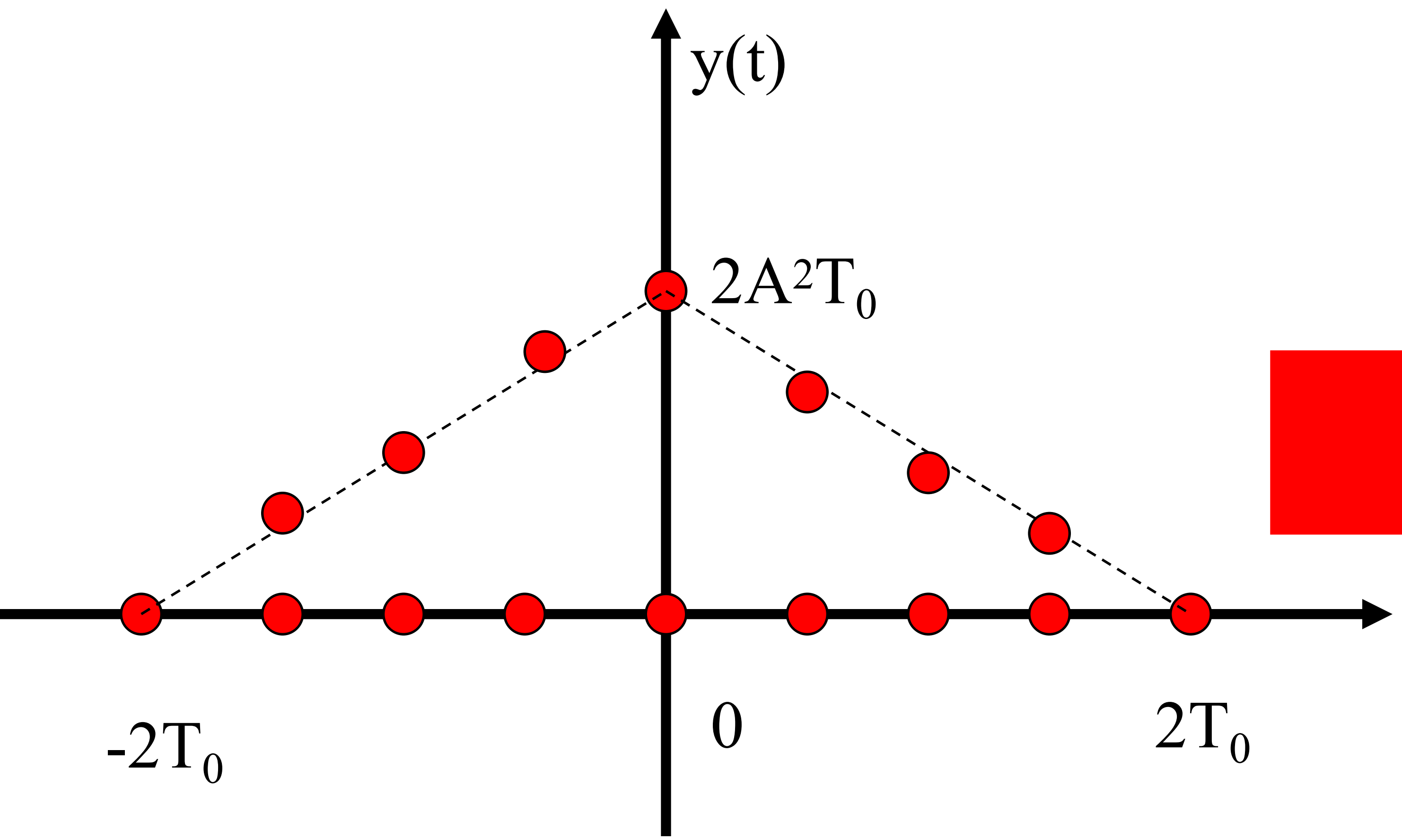


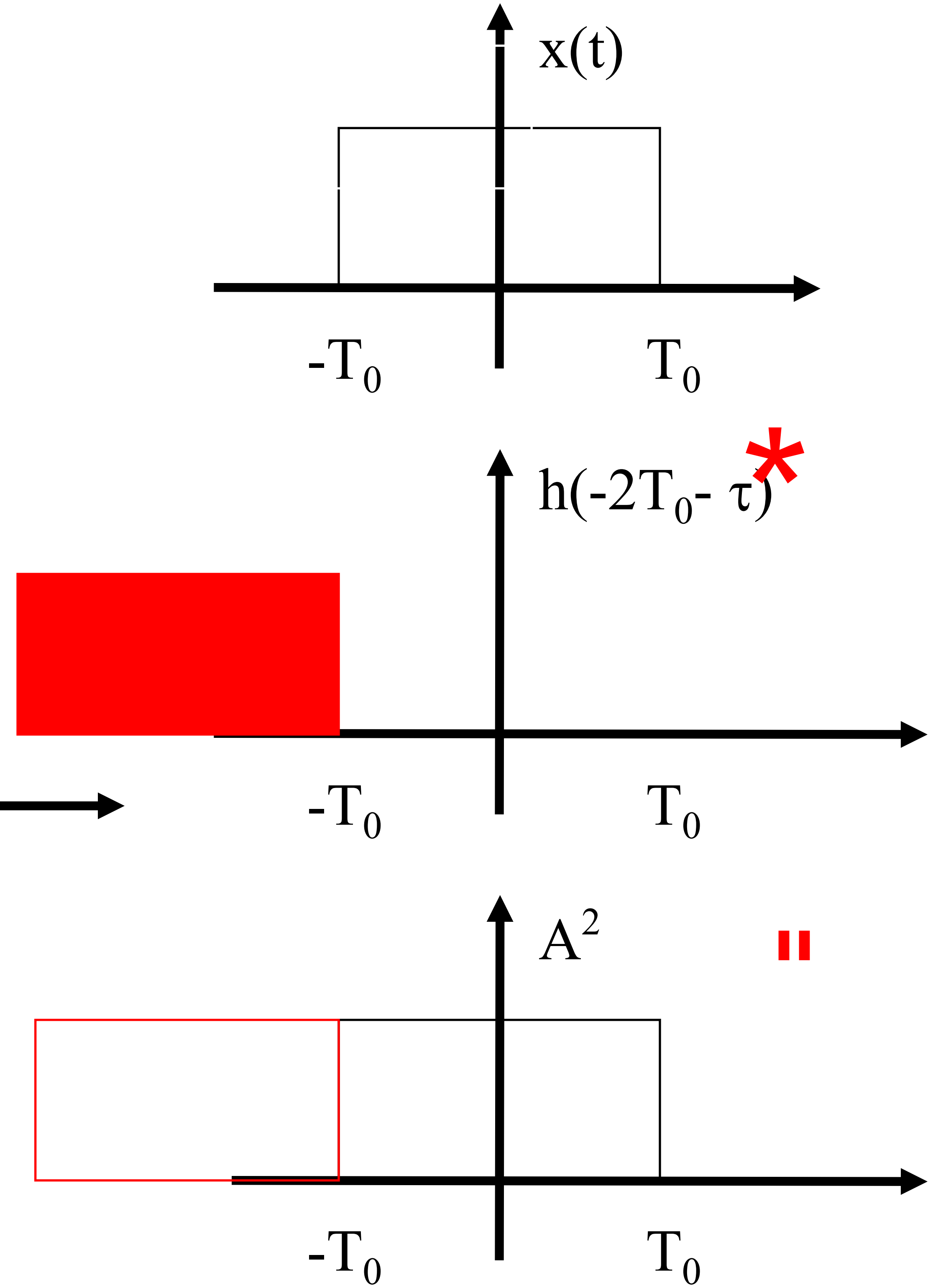


$$y(t)=x(t)*h(t-\tau)$$

卷积的运算示例(1)

(8)　$t = -2T_0$时，$y(-2T_0)=0$





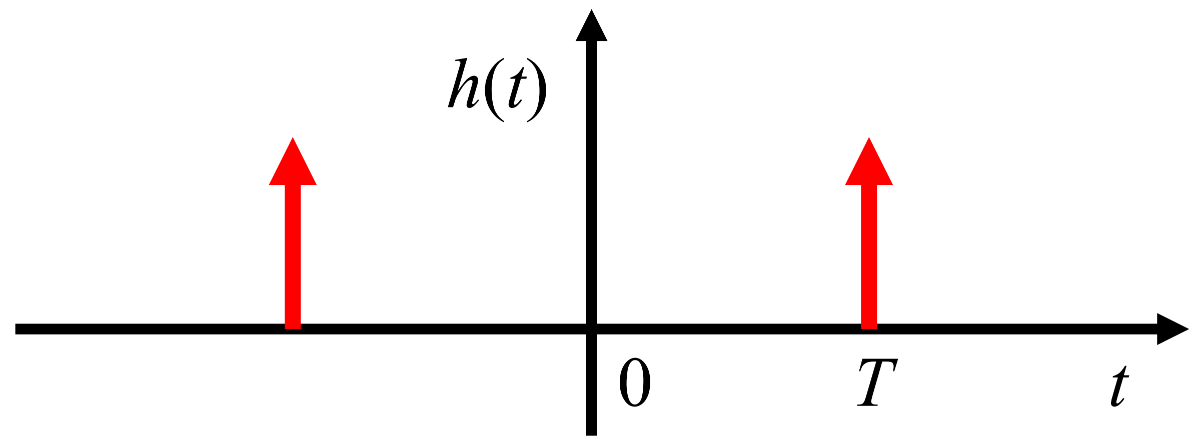
$$y(t) = x(t) * h(t - \tau)$$

卷积的运算示例(2)

含有脉冲函数的卷积

设

$$h(t)=[\delta(t-T)+\delta(t+T)]$$

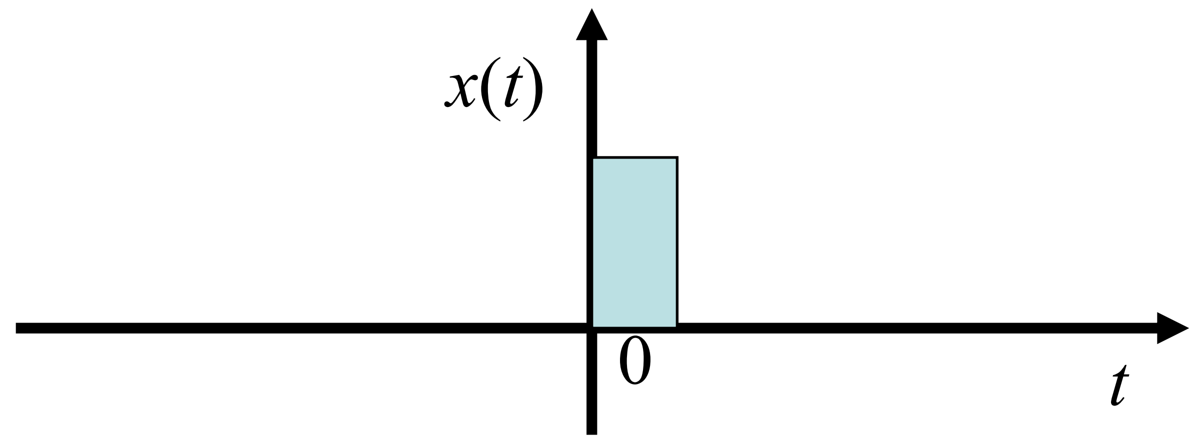


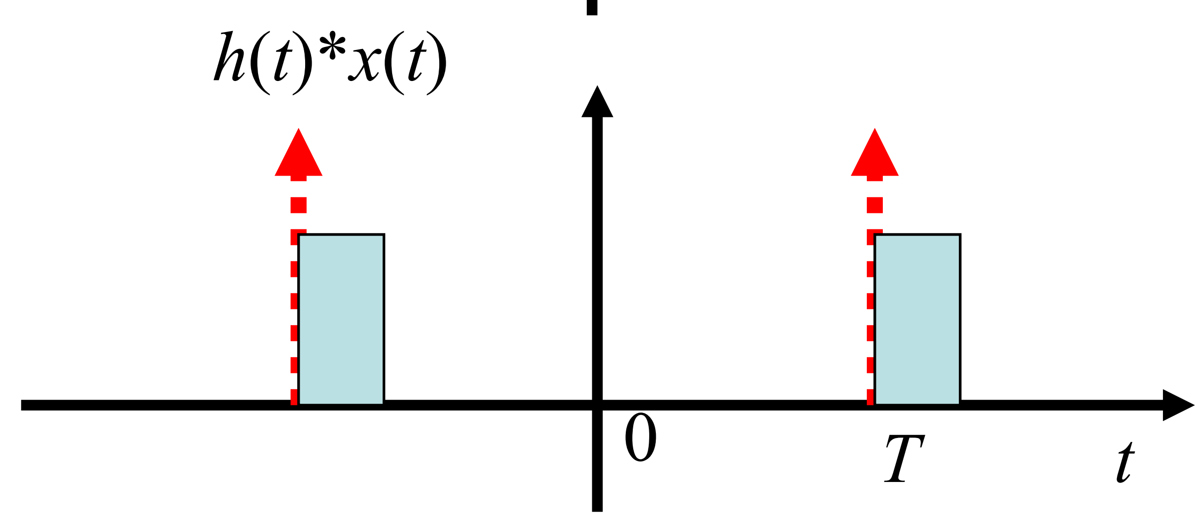
卷积为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(\tau-T)+\delta(\tau+T)]x(t-\tau)d\tau$$

$$=x(t-T)+x(t+T)$$





计算函数x(t)和脉冲函数的卷积，就是简单地将x(t)在发生脉冲函数的坐标位置上(以此作为坐标原点)重新构图。

相关运算(correlation)

连续信号相关运算

- 函数 $x(t)$与 $y(t)$的互相关函数定义为

共轭、没有翻转

$$r_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y^{*}(t+\tau)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}x(t\text{-}\tau)y^{*}(t)\mathrm{d}t$$

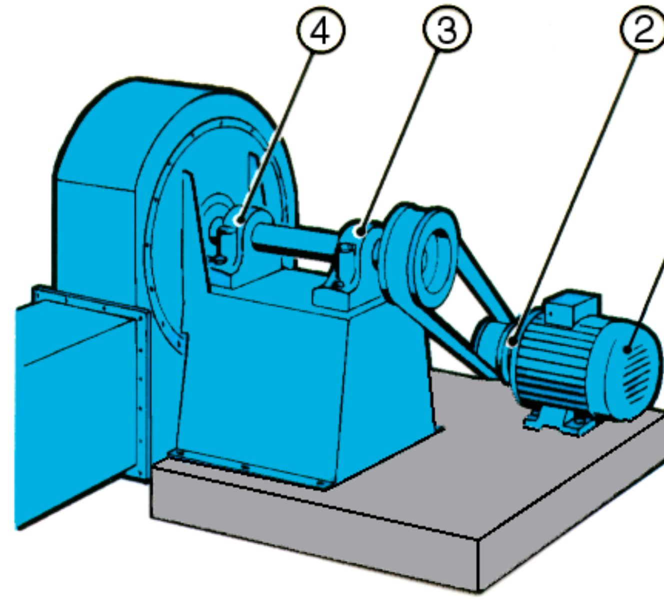
$$r_{yx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)x^{*}(t+\tau)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}y(t\text{-}\tau)x^{*}(t)\mathrm{d}t$$

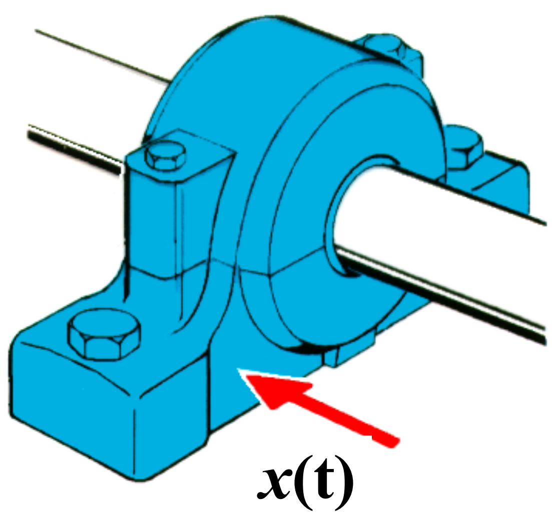
$$r_{xy}(\tau)=r_{yx}^{*}(-\tau)$$

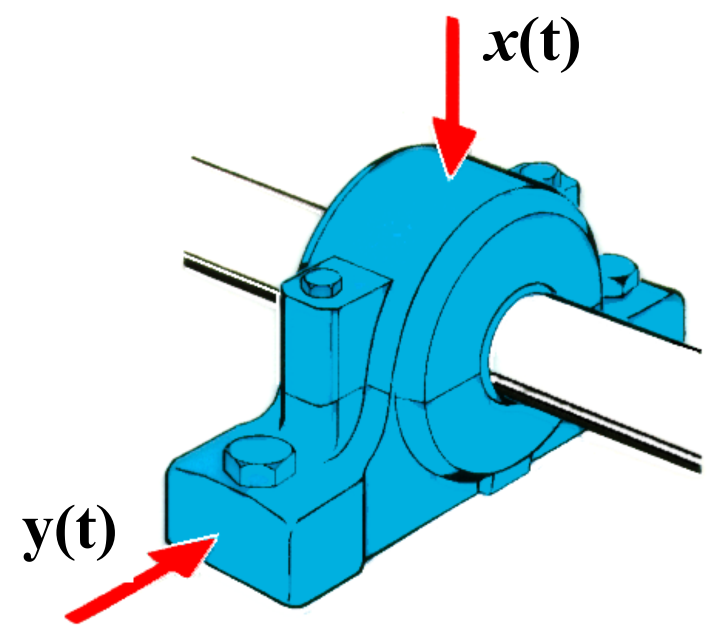
- 函数 $x(t)$的自相关函数定义为

$$r_{x}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)x^{*}(t+\tau)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}x(t\text{-}\tau)x^{*}(t)\mathrm{d}t$$

相关运算



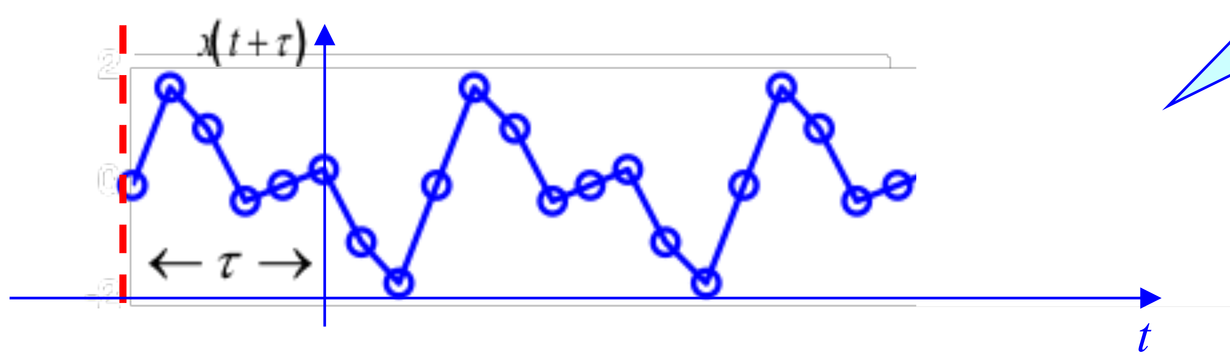




研究变量 $x(t)$ 与延迟时间 τ 后的 $x(t+\tau)$ 之间的关系，称为自相关

研究变量 $x(t)$ 与延迟时间 τ 后的另一个变量 $y(t+\tau)$ 之间的关系，称为互相关

自相关运算示例



研究 t 时刻与 $t+\tau$ 时刻，两个信号之间的依赖关系

对功率信号，除以周期长度

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)d\tau$$

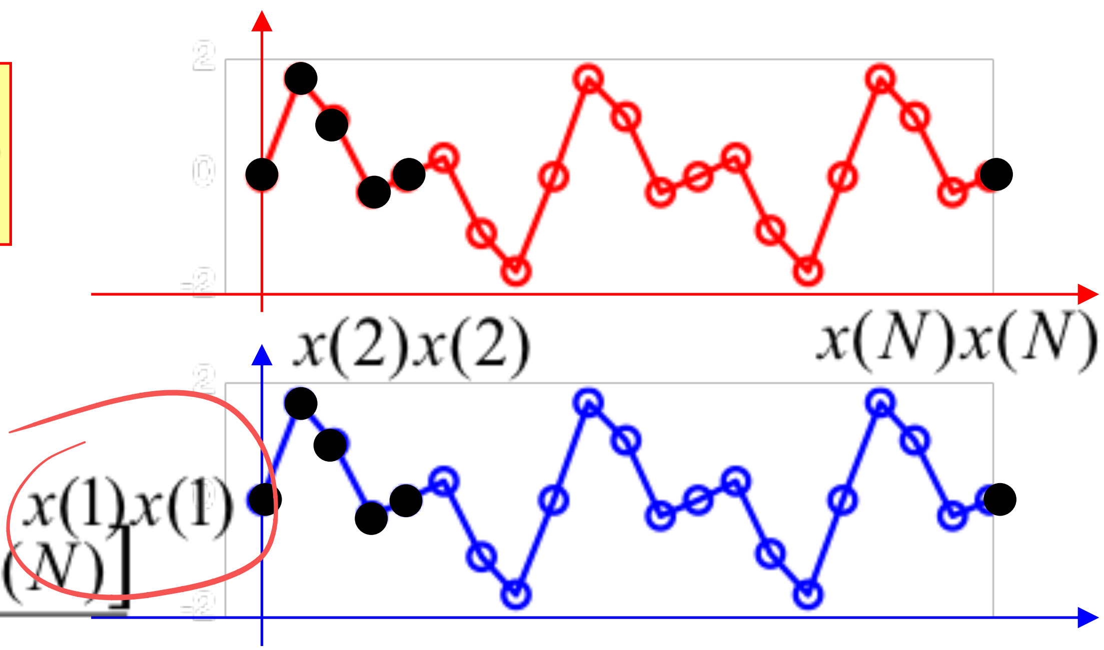
- **实际工程应用中**

乘积、加和、求平均

$$R_x(\tau) = \frac{1}{N-\tau} \sum_{t=1}^{N-\tau} x(t)x(t+\tau)$$

自相关运算示例

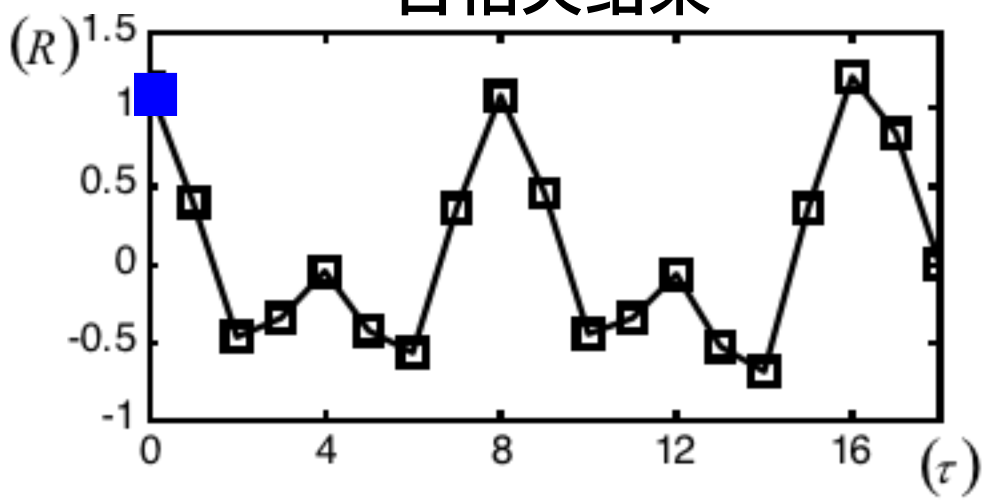
$$R_x(\tau)=\frac{1}{N-\tau}\sum_{t=1}^{N-\tau}x(t)x(t+\tau)$$



时间延迟 $\tau=0$

$$R(0)=\frac{[x(1)x(1)+x(2)x(2)+\cdots+x(N)x(N)]}{N}$$

自相关结果

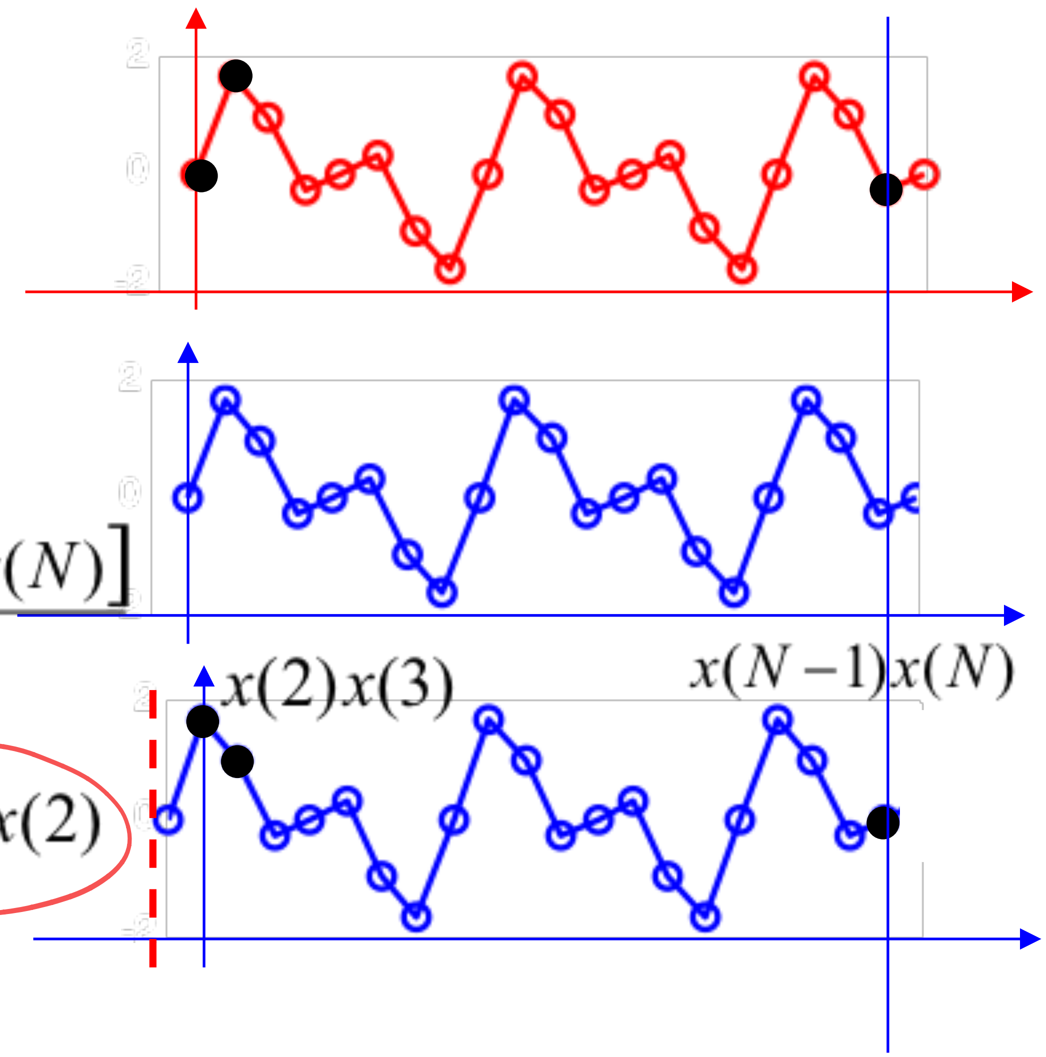


自相关运算示例

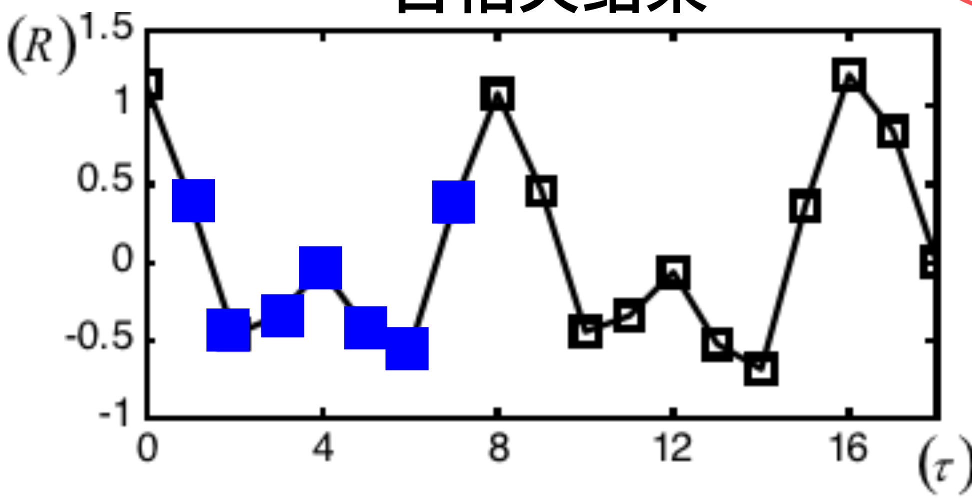
$$R_x(\tau)=\frac{1}{N-\tau}\sum_{t=1}^{N-\tau}x(t)x(t+\tau)$$

时间延迟 $\tau=1$

$$R(1)=\frac{[x(1)x(2)+x(2)x(3)+\cdots+x(N-1)x(N)]}{N-1}$$

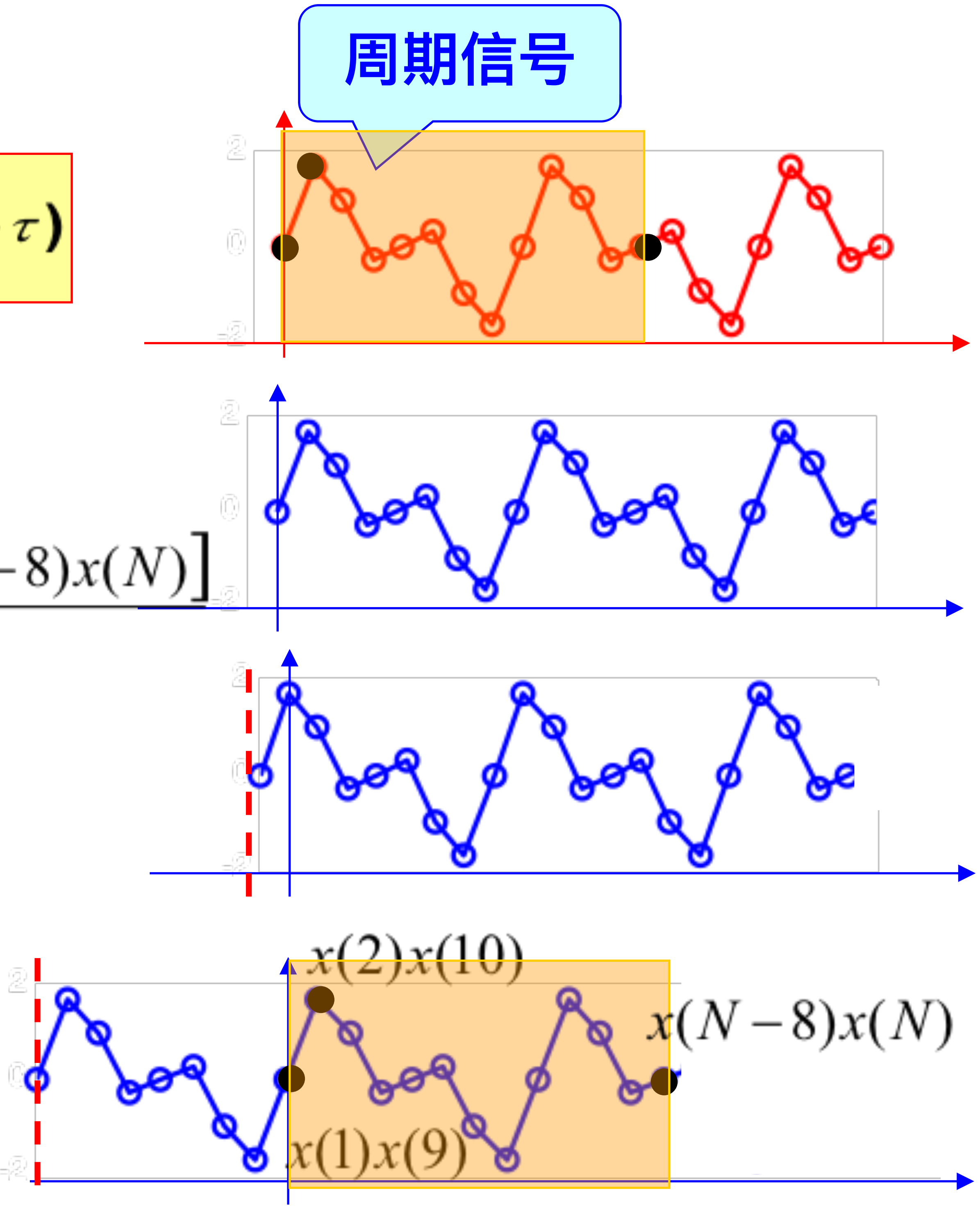


自相关结果



自相关运算示例

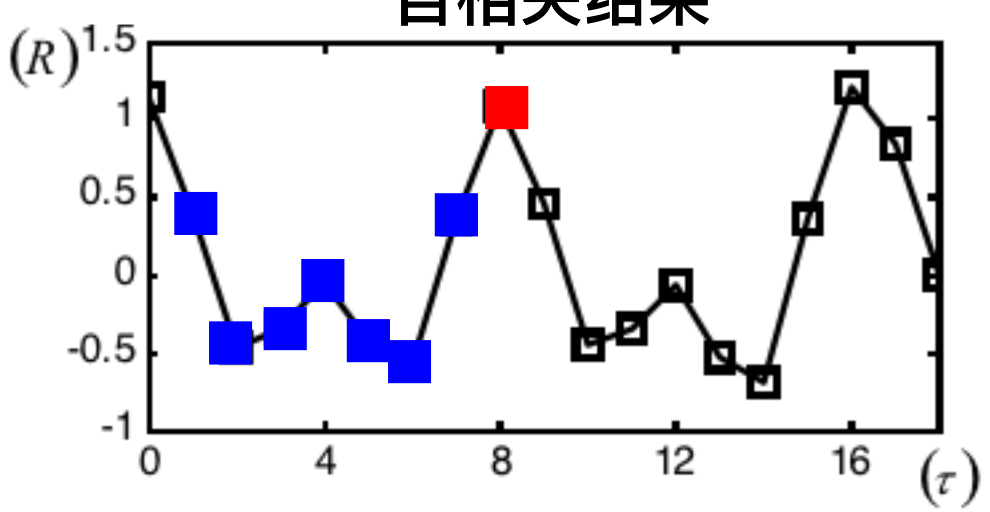
$$R_x(\tau)=\frac{1}{N-\tau}\sum_{t=1}^{N-\tau}x(t)x(t+\tau)$$



时间延迟 $\tau=8$

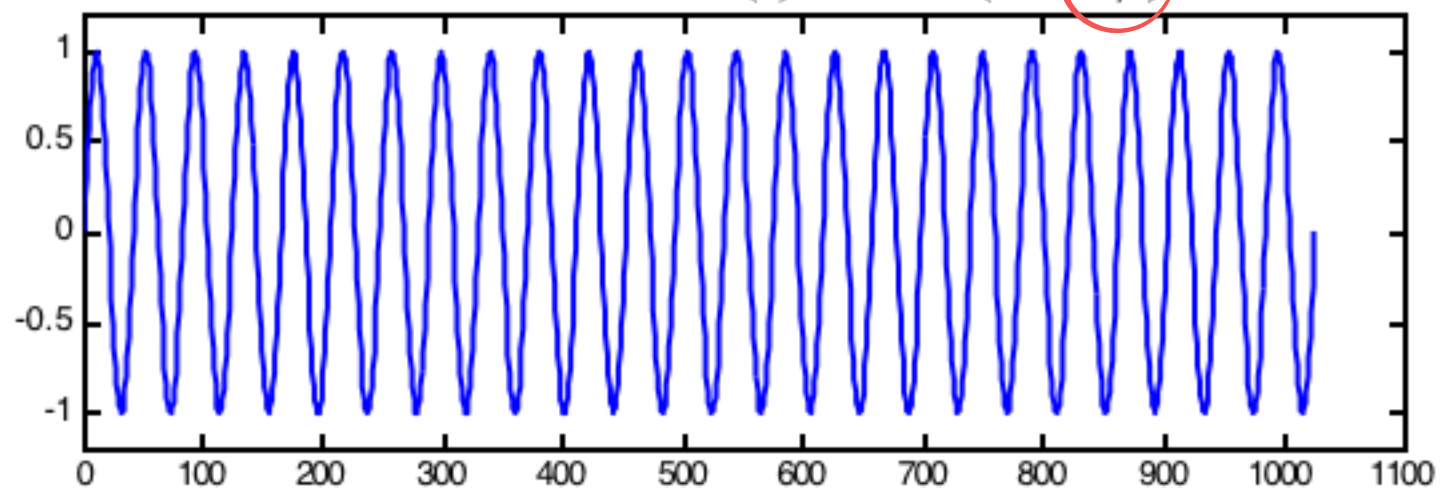
$$R(8)=\frac{[x(1)x(9)+x(2)x(10)+\cdots+x(N-8)x(N)]}{N-8}$$

自相关结果

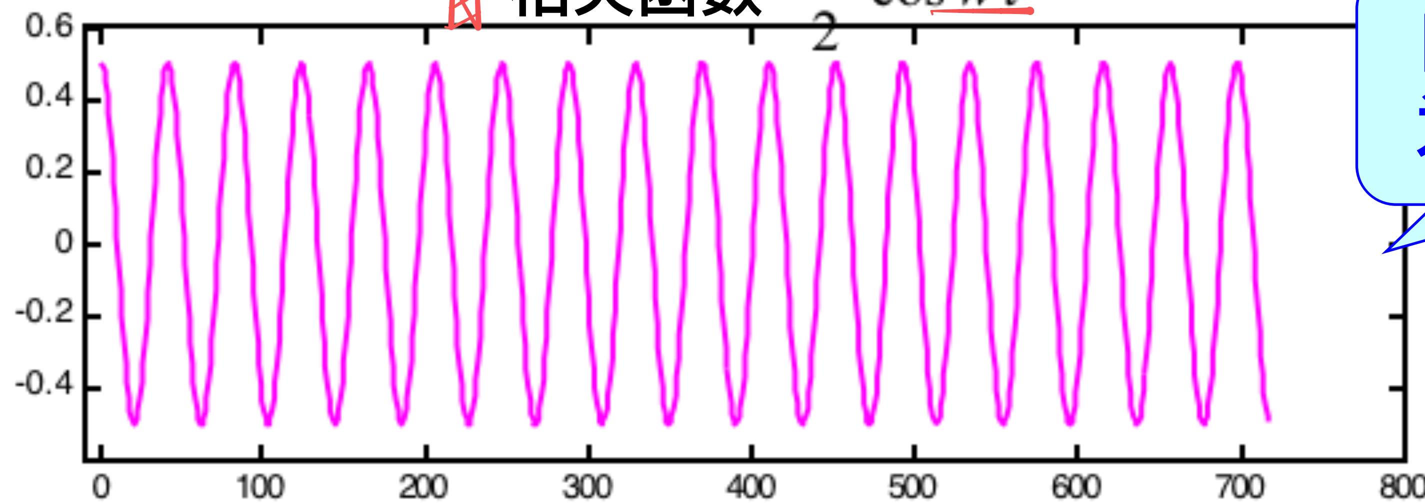


自相关的计算--仿真信号

周期函数 $x(t) = A\sin(wt + \varphi)$



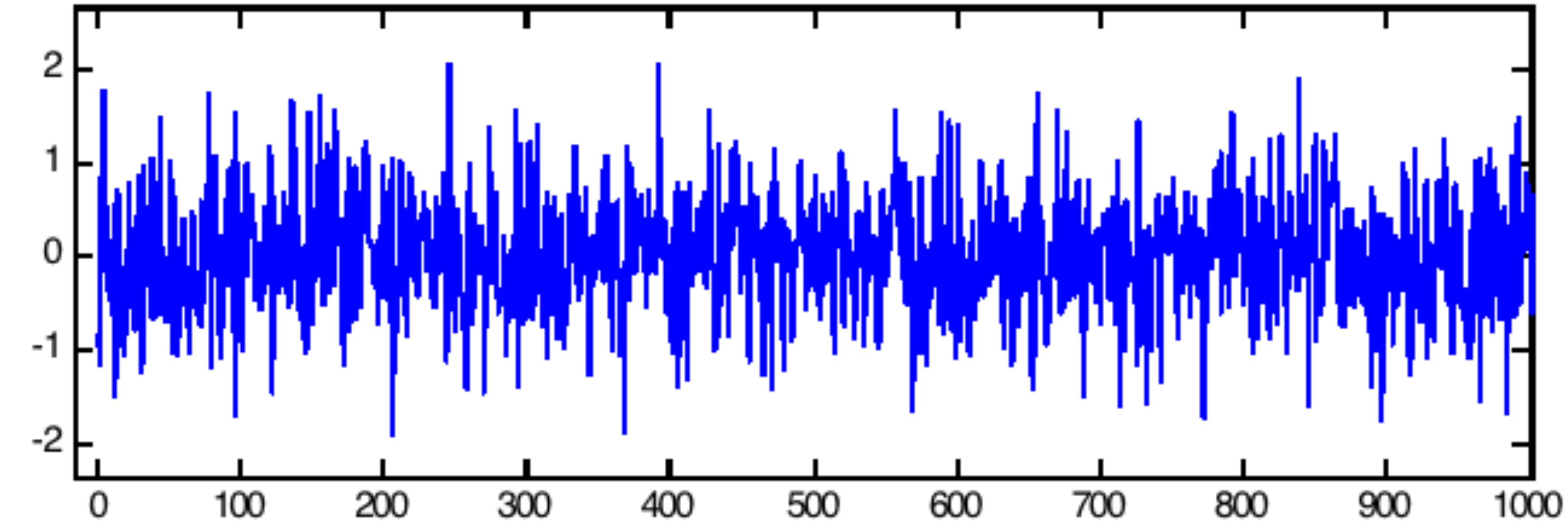
自相关函数 $\frac{A^2}{2}\cos w\tau$



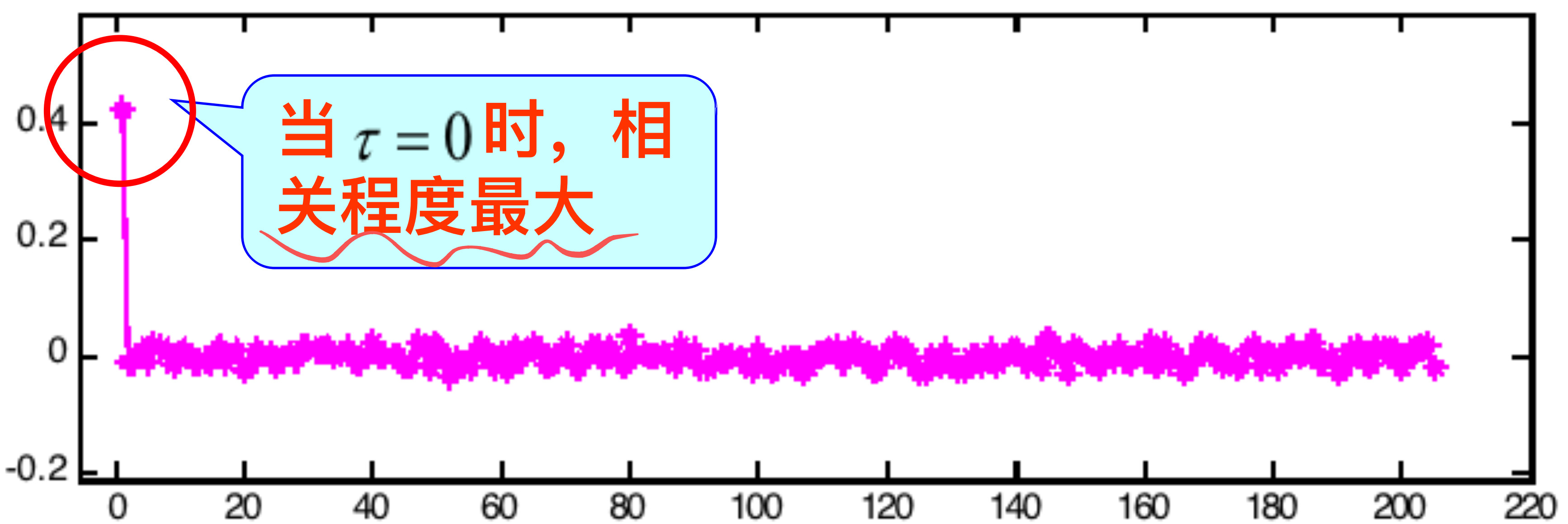
自相关结果为余弦函数

- 周期函数的自相关结果仍为同频率的周期函数
- 幅值与原周期信号的幅值有关
- 丢失原信号的相位信息

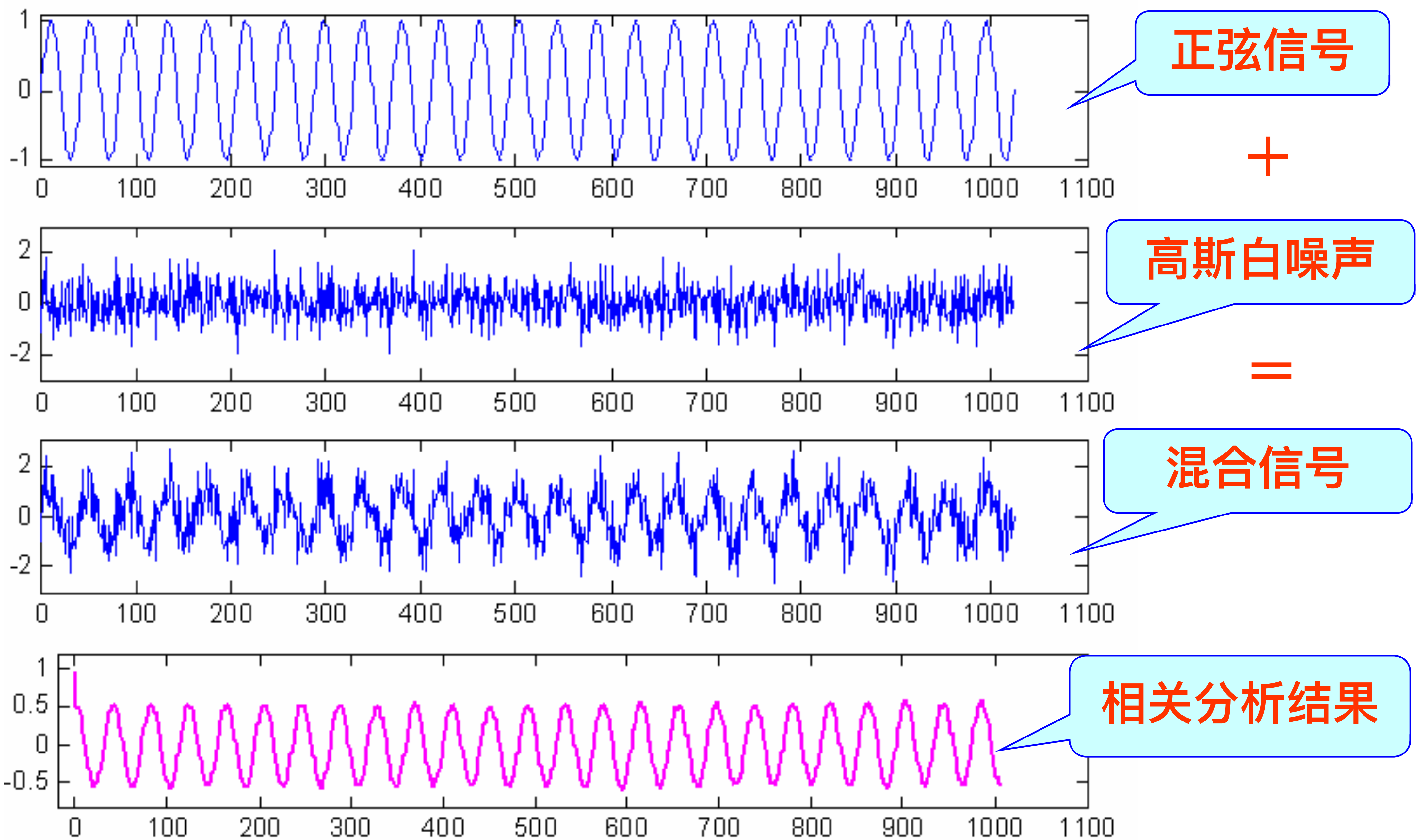
自相关的计算--仿真信号



相关函数



自相关的计算--仿真信号

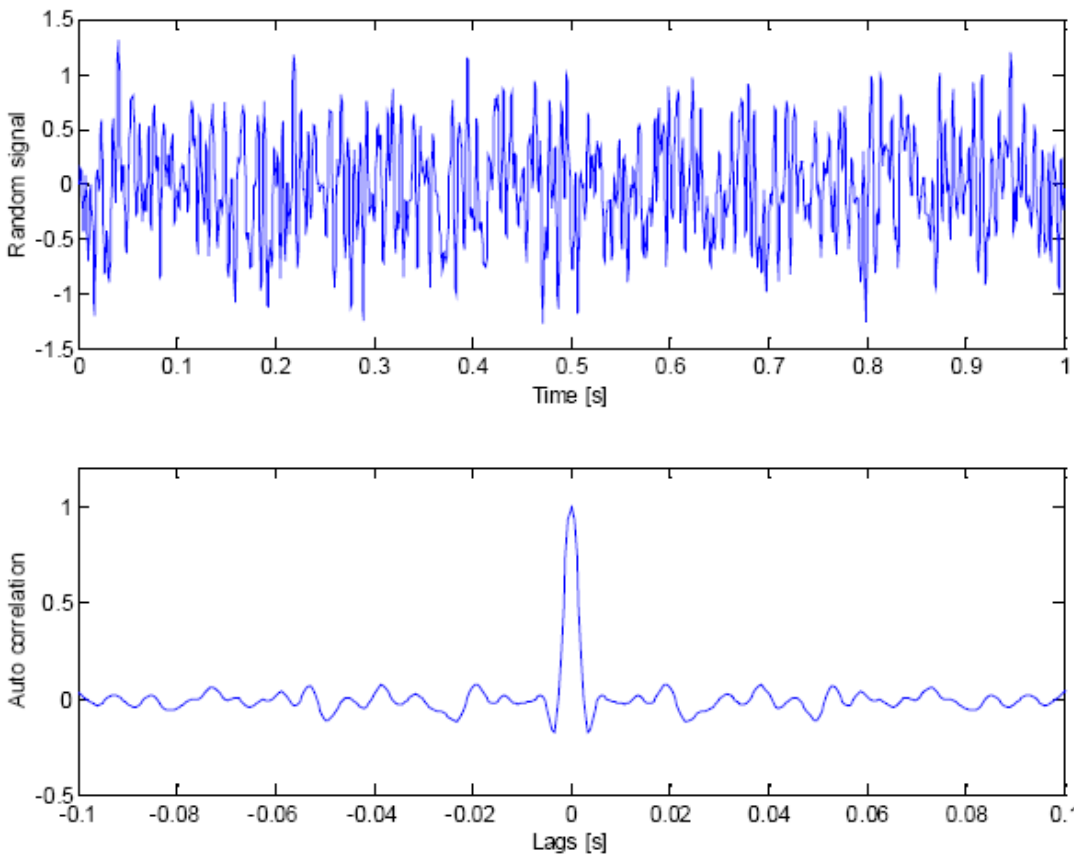


能从复杂信号中提取出周期成分

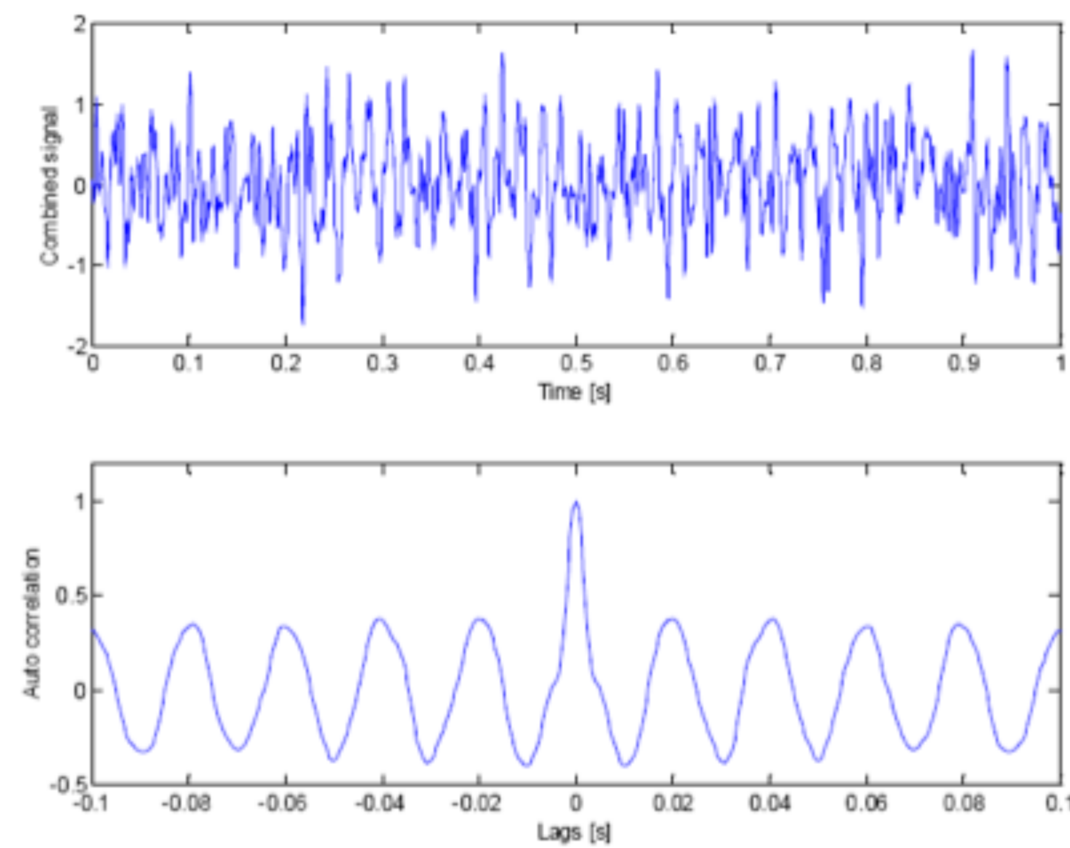
自相关的应用

- 当$\tau = 0$ 时，相关程度最大；完全重叠
- 对于周期函数，当 $\tau = nT$ 时，相关程度最大；
- 原来为周期的函数，自相关后仍为周期函数；

用于检测混于随机噪声中的确定性信号 ✓



宽带随机信号及其自相关函数



宽带随机信号+周期信号
及其自相关函数