数字信号处理

第四次作业

山东大学

019020910113 于小洛

(1) (a) 由分辨率要求确定最小记录时间长度

$$T = \frac{1}{\Delta f} = 0.1s$$

(b) 由抽样时间间隔确定允许处理的最高频率

$$T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{2f_c} \qquad f_c = \frac{1}{2T_s} = \frac{1}{2\times 0.1ms} = 5000\,Hz$$

(c) 最小采样点数 N 应满足

$$N \geq \frac{f_s}{\Delta f} = \frac{2f_c}{\Delta f} = \frac{10000}{10} = 1000$$

故最少采样点数 $N_{min} = 2^{10} = 1024$ 点

(2). (a) 证明：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(w)e^{jwn}dw\right]^*$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\cdot X^*(w)\int_{-\pi}^{\pi} x(n)e^{-jwn}dw\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(w)X(w)dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(w)|^2dw$$

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(w)e^{jwn}dw$$

(b) 根据 (a) 及 DTFT 的性质

有 $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{dX(w)}{dw}\right|^2dw = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|n\cdot x(n)|^2 = (-2\times2)^2+(-1\times1)^2+[1\times(-1)]^2+(2\times2)^2+(4\times1)^2+(-1\times5)^2 = 75$$

故 $$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{dX(w)}{dw}\right|^2dw = 2\pi\times75 = 150\pi$$

(3). (a) DFT： $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot W_N^{nk}$ ，$k=0,1\cdots N-1$ 当 N=4 时

k=0 有 $X(0) = \sum_{n=0}^{3} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{3} x(n)\cdot(e^{-j2\pi/N})^{nk} = \sum_{n=0}^{3} x(n) = 9$

$H(0) = \sum_{n=0}^{3} h(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{3} h(n) = 1$

同理 k=1 有 $X(1) = -2+j$ $\quad H(1) = j$

k=2 有 $X(2) = -1$ $\quad H(2) = 3$

k=3 有 $X(3) = -2-j$ $\quad X(4) = -j$

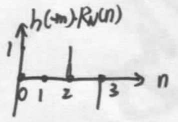
故 x(n) 的4点DFT为 $X(k) = \{9, -2+j, -1, -2-j\}$

h(n) 的4点DFT为 $H(k) = \{1, j, 3, -j\}$

14-650437

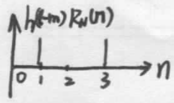
(b) 4点循环卷积 $y(n)=x(n)⊛h(n)=\sum_{m=0}^{3}x(m)h((n-m))_N R_N(n)$, $N=4$

$n=0$ 时



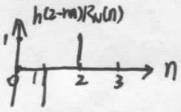
$y(0)=1\times1+1\times3-1\times3=1$

$n=1$ 时



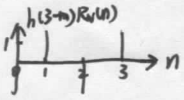
$y(1)=-1+2+3=4$

$n=2$ 时



$y(2)=1-2+3=2$

$n=3$ 时



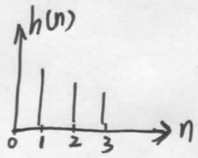
$y(3)=2-3+3=2$

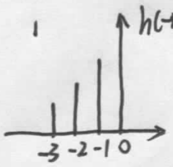
故 $y(n)=\{1,4,2,2\}$

$Y(k)=X(k)\cdot H(k)=\{9,-1-2j,-3,-1+2j\}$

(4)

(a).





$m+n-1=7$ 从0~6

$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)h(n-m)$

$y(0)=1\times4=4$

$y(1)=1\times3+2\times4=11$

$y(2)=1\times2+2\times3+3\times4=20$

$y(3)=1\times1+2\times2+3\times3+4\times4=30$

$y(4)=2\times1+3\times2+4\times3=20$

$y(5)=3\times1+4\times2=11$

$y(6)=4\times1=4$

$y(n)=\{4,11,20,30,20,11,4\}$

(b). $L_{x(n)}=4$ $L_{h(n)}=4$

$N\geq L_{x(n)}+L_{h(n)}-1=7$ 取 $N=2^k$, $k\in N^+$

故 $N=8$ 至少取8点

(c) 对线性卷积 复乘次数 $N_1=L_1\cdot L_2$

直接

对快速卷积

两次N点FFT

$N_{21}=(L_1+L_2-1)\log_2^{(L_1+L_2-1)}$

相乘 $Y(k)=X(k)H(k)$

$N_{22}=L_1+L_2-1$

一次N点IFFT

$N_{23}=\frac{1}{2}(L_1+L_2-1)\log_2^{(L_1+L_2-1)}$

总计 $N_2=N_{21}+N_{22}+N_{23}=\frac{3}{2}(L_1+L_2-1)\log_2^{(L_1+L_2-1)}+(L_1+L_2-1)$

15). $X(k)=DFT[x(n)]$, $k=0,1,2,\cdots N-1$

根据DFT的对称性 $k=\frac{N}{2}\cdots N-1$ 对应负频率

构造函数 $Z(k)=\begin{cases}X(k) & , k=0\\ 2X(k) & , k=1,2,\cdots\frac{N}{2}-1\\ 0 & , k=\frac{N}{2}\cdots N-1\end{cases}$

对 $Z(k)$ 作离散傅里叶逆变换，可得 $x(n)$ 的解析信号 $z(n)$

即 $z(n)=IDFT[Z(k)]=x(n)+j\hat{x}(n)$

$x(n)$ 的 Hilbert 变换 $\hat{x}(n)=\frac{1}{j}(IDFT[Z(k)]-x(n))=IDFT\{-j[Z(k)-X(n)]\}$

即 $\hat{x}(n)=x(n)*h(n)=\frac{2}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{x(n-2m-1)}{2m+1}$

A+ 11/4