第六讲课后作业

[119020910064 王旭]

(1) 考虑一个系数为实数的 FIR 滤波器 $h(n)$，且当 $n<0$ 及 $n>M$ 时，$h(n)=0$。$h(n)$ 具有以下其中一个对称特点：

偶对称： $h(n)=h(M-n)$

奇对称： $h(n)=-h(M-n)$

则 FIR 滤波器 $h(n)$ 具有线性相位特性，即：

$$H(\omega)=A(\omega)e^{-j\alpha\omega+j\beta}$$

其中，$A(\omega)$ 是频率 ω 的实函数，α 和 β 为实常数。

试说明 $A(\omega)$ 具有如下表所示的表达式，并求解对应的 α 和 β。

类型	对称特点	滤波器长度 (M+1)	$A(\omega)$ 表达式	α	β
I	偶对称	奇数	$\sum_{n=0}^{M/2} a(n)\cos\omega n$	$\alpha=\frac{M}{2}$	$\beta=0$
II	偶对称	偶数	$\sum_{n=1}^{(M+1)/2} b(n)\cos\omega(n-1/2)$	$\alpha=\frac{M}{2}$	$\beta=0$
III	奇对称	奇数	$\sum_{n=1}^{M/2} c(n)\sin\omega n$	$\alpha=\frac{M}{2}$	$\beta=\frac{\pi}{2}$
IV	奇对称	偶数	$\sum_{n=1}^{(M+1)/2} d(n)\sin\omega(n-1/2)$	$\alpha=\frac{M}{2}$	$\beta=\frac{\pi}{2}$

解：

I. 偶对称： $h(n)=h(M-n)$，$(M+1)$ **为奇数，**

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{M}h(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{(M-2)/2}h(n)e^{-j\omega n}+\sum_{n=(M+2)/2}^{M}h(n)e^{-j\omega n}+h(\frac{M}{2})e^{-j\omega n},$$

令 $m=M-n$，则

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{(M-2)/2}h(n)e^{-j\omega n}+\sum_{n=(M+2)/2}^{M}h(n)e^{-j\omega n}+h(\frac{M}{2})e^{-j\omega M/2}$$

$$=\sum_{n=0}^{(M-2)/2}h(n)e^{-j\omega n}+\sum_{m=0}^{(M-2)/2}h(M-m)e^{-j\omega(M-n)}+h(\frac{M}{2})e^{-j\omega M/2},$$

$$=e^{-j\omega M/2}\left\{2\sum_{m=0}^{M/2}h(m)\cos(\frac{M}{2}-m)\omega+h(\frac{M}{2})\right\}$$

再令$n=M/2-m$，得

$$a(n)=\begin{cases}h(\frac{M}{2}) & n=0\\ 2h(\frac{M}{2}-n) & n=1,2,\cdots,M/2\end{cases},$$

则$H(e^{j\omega})=e^{-j\omega M/2}\sum_{n=0}^{M/2}a(n)\cos(\omega n)$。

II. 偶对称：$h(n)=h(M-n)$，$(M+1)$为偶数，

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{M}h(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{(M+1)/2-1}h(n)e^{-j\omega n}+\sum_{n=(M+1)/2}^{M}h(n)e^{j\omega(n)}$$

$$=e^{-j\omega M/2}\left\{\sum_{n=0}^{(M+1)/2-1}h(n)e^{[j(M/2-n)\omega]+[-j(M/2-n)\omega]}\right\}=e^{-j\omega M/2}\sum_{n=0}^{(M+1)/2-1}2h(n)\cos[(M/2-n)\omega],$$

令$m=(M+1)/2-n$，再将变量换成n，则上式变为

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\omega M/2}\sum_{n=1}^{(M+1)/2}2h(\frac{N}{2}-n)\cos[(n-\frac{1}{2})\omega],$$

令$b(n)=2h(\frac{N}{2}-n),n=1,2,\cdots,\frac{N}{2}$，

则$H(e^{j\omega})=e^{-j\omega M/2}\sum_{n=1}^{(M+1)/2}b(n)\cos[(n-\frac{1}{2})\omega]$。

III. 奇对称：$h(n)=-h(M-n)$，$(M+1)$为奇数，

此时$h(\frac{M}{2})=0$，与**I**中同理推导，

令$c(n)=2h(\frac{M}{2}-n),n=1,2,\cdots,\frac{M}{2}$，

则$H(e^{j\omega})=e^{[j(\frac{\pi}{2}-\frac{M}{2}\omega)]}\sum_{n=1}^{M/2}c(n)\sin(n\omega)$。

IV. 奇对称：$h(n)=-h(M-n)$，$(M+1)$为偶数，

此时$h(\frac{M+1}{2})=0$，与**II**中同理推导，

令 $d(n)=2h(\frac{M+1}{2}-n), n=1,2,\cdots,\frac{M+1}{2}$，

则 $H(e^{j\omega})=e^{[j(\frac{\pi}{2}-\frac{M}{2}\omega)]}\sum_{n=1}^{(M+1)/2}d(n)\sin[(n-\frac{1}{2})\omega]$。

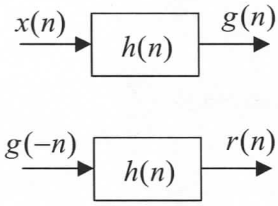
(2) 信号通过滤波器会产生相位延迟问题，现考虑设计零相位延迟滤波器。

在采用序贯数据(sequential data)输入进行实时信号处理时，输入信号的采样值是一个接一个进入系统，因此，系统的输出不能早于输入，即滤波器 $h(n)$是一个因果系统，即 $h(n)$在 n 小于零时恒为零。此时，滤波器不可能实现零相位延迟。

当采用块数据(block data)进行非实时信号处理时，输入数据在计算机内存中是整体已知的，$h(n)$在 n 小于零时也可以不为零，即非因果系统是可以实现的。此时，滤波器可以实现零相位延迟设计。

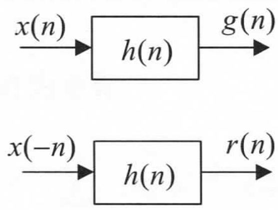
零相位延迟滤波器可以通过将待滤波的整段信号正向和反向通过同一滤波器，最终实现零相位延迟滤波设计。两种设计方法 A 和 B 如图 1 和图 2 所示，滤波器输入为 $x(n)$，而 $h(n)$ 为一个具有任意相位特性的滤波器，其频率响应为 $H(\omega)$。两种方法得到的输出均为 $s(n)$。

试根据图 1 和图 2，说明以 $x(n)$ 为输入和 $s(n)$ 为输出的滤波器 $h_A(n)$ 和 $h_B(n)$ 具有零相位延迟的特性。



$$s(n)=r(-n)$$

图 1 零相位延迟滤波设计方法 A



$$s(n)=g(n)+r(-n)$$

图 2 零相位延迟滤波设计方法 B

解：

1) 设计方法 A：

$$
\begin{aligned}
&S(e^{j\omega})\\
&=R^*(e^{j\omega})=[G^*(e^{j\omega})H(e^{j\omega})]^*=G(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}),\\
&=X(e^{j\omega})\left|H(e^{j\omega})\right|^2
\end{aligned}
$$

由于$\left|H(e^{j\omega})\right|^2$为一个实数，因此不含有相位信息，则$h_A(n)$具有零相位延迟特性。

2) 设计方法 B：

$$
\begin{aligned}
&S(e^{j\omega})\\
&=G(e^{j\omega})+R^*(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})+[X^*(e^{j\omega})H(e^{j\omega})]^*=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})+X(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}),\\
&=X(e^{j\omega})[H(e^{j\omega})+H^*(e^{j\omega})]
\end{aligned}
$$

由于$H(e^{j\omega})$和$H^*(e^{j\omega})$互为共轭，则$H(e^{j\omega})+H^*(e^{j\omega})=2\,\mathrm{Re}[H(e^{j\omega})]$，为一个实数，不含有相位信息，则$h_B(n)$具有零相位延迟特性。

综上，则两设计方法都具有零相位延迟特性。

A+ 11/15