第五讲课后作业

A+ 12/1

[学号 作者] 019020910013 杨纪楠

1．查资料，描述“各态历经”的基本含义

2．考虑一个稳定的线性时不变系统，其输入 $x(n)$为实信号，单位脉冲响应 $h(n)$为实序列，输出信号为 $y(n)$。假定输入信号 $x(n)$为白噪声，其均值为零，方差为σ_x^2。系统函数如下：

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

其中，假定系数 a_k 和 b_k 均为实数。

系统输入和输出信号同时还满足如下常系数差分方程：

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

如果所有 a_k 均为零，则 $y(n)$称为滑动平均(MA)线性随机过程；如果除 b_0 以外的所有 b_k 均为零，则 $y(n)$称为自回归(AR)线性随机过程；如果 a_k 和 b_k 均不为零，则 $y(n)$称为自回归滑动平均(ARMA)线性随机过程。

有以下几个问题：

(a) 以单位脉冲响应 $h(n)$来表达输出信号 $y(n)$的自相关函数 $r_y(m)$；

(b) 利用(a)的结果，以频率响应函数 $H(\omega)$来输出信号 $y(n)$的功率谱 $P_y(\omega)$；

(c) 如果 $y(n)$为 MA 过程，试说明 $y(n)$的自相关函数 $r_y(m)$只在区间$|m|\le M$存在非零值；

(d) 如果 $y(n)$为 AR 过程，试推导 $r_y(m)$的一般表达式；

(e) 试说明当 $y(n)$为 AR 过程，且 b_0=1 时，$r_y(m)$满足如下差分方程：

$$r_y(0)=\sum_{k=1}^{N} a_k r_y(k)+\sigma_x^2$$

$$r_y(m)=\sum_{k=1}^{N} a_k r_y(m-k),\quad m\ge 1$$

3．用仿真试验和信号分析的方法确定如下图所示系统的频率响应函数 $H(\omega)$。

1. "各态历经"：对于一个平稳随机信号 $X(n)$，如果它的所有样本函数在某一固定时刻的一阶和二阶统计特性和单一样本函数在长时间内的统计特性一致，则称 $X(n)$ 为各态历经信号。设 $X(t)$ 为一平稳过程，如果 $X(t)$ 的时间平均与均值在所有样本函数中相等，即 $\langle X(t)\rangle = E[X(t)] = \mu_X$ 以概率1成立，则称随机过程 $X(t)$ 的均值具有各态历经性。如果对于实数 τ，$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle = E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$ 以概率1成立，则称随机过程 $X(t)$ 的自相关函数具有各态历经性。如果 $X(t)$ 的均值和自相关函数都具有各态历经性，则称 $X(t)$ 是各态历经的。

2. (a)
$$r_y(m) = E\{y(n)y(n+m)\} = E\left\{\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)x(n-l)\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n+m-k)\right)\right\}$$
$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(l)h(k)E\{x(n-l)x(n+m-k)\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(l)h(k)r_x(m+l-k)$$
$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)\,h(m+l) * r_x(m+l)$$

因 $x(n)$ 为白噪声，故 $r_x(m+l) = \sigma_x^2\delta(m+l)$　故 $r_y(m) = \sigma_x^2\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)h(m+l)$

(b)
$$P_y(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\sigma_x^2\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)h(m+l)\right]e^{-j\omega m} = \sigma_x^2\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m+l)e^{-j\omega m}$$
$$\underline{\underline{k=m+l}}\ \sigma_x^2\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega(k-l)} = \sigma_x^2\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)e^{j\omega l}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$$
$$= \sigma_x^2\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(-l)e^{-j\omega l}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} = \sigma_x^2 H^*(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \sigma_x^2|H(e^{j\omega})|^2$$

(c) 因 $y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$　故 $y(n)$ 的非零值在 $0 \le n \le M$ 处取得。

$r_y(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n+m)y(n)$　或 $r_y(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(m-n)y(n)$　$y(-n) = g(n)$.

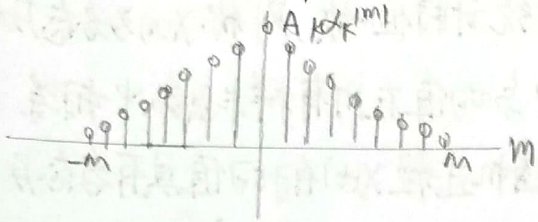
故 $r_y(n) = y(-n) * y(n)$　因 $y(-n)$ 的非零值在 $-M \le n \le 0$ 处取得。

故 $r_y(m)$ 只在区间 $|m| \le M$ 存在非零值。

(d)
$$H(z) = \frac{b_0}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0}{\prod_{k=1}^{N}(1-a_k z^{-1})}$$
由(b)知 $P_y(z) = \sigma_x^2 H(z)H^*(z)$

$$r_y(z) = \frac{b_0^2}{\prod_{k=1}^{N}(1-a_k z^{-1})(1-a_k^* z)}$$
其极点为共轭倒数，将 $r_y(z)$ 分部极数展开，每个极点都将产生一系列 $A_k\alpha_k^{|m|}$，如下图所示

因此，$r_y(m)=\sum_{k=1}^{N} A_k \alpha_k^{|m|}$



(e) $b_0=1$ $H(z)=\frac{1}{A(z)}=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$ 即 $y(n)=\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)+x(n)$

$r_y(m)=r_y(-m)=E\{y(n+m)y(n)\}=E\{y(n-m)(\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)+x(n))\}$

$=\sum_{k=1}^{N} a_k E\{y(n-m)y(n-k)\}+E\{y(n-m)x(n)\}$

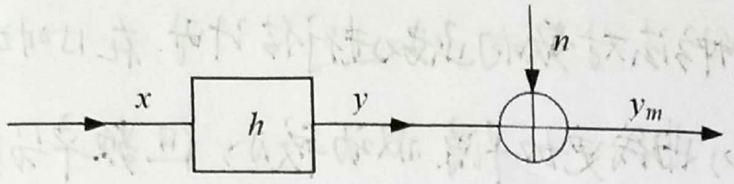
$=\sum_{k=1}^{N} a_k r_y(m-k)+r_{yx}(-m)=\sum_{k=1}^{N} a_k r_y(m-k)+r_{xy}(m)$

$r_{xy}(m)=E\{x(n-m)y(n)\}=E\{x(n)\sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-m-k)\}$

$=\sigma^2\sum_{k=0}^{\infty} h(k)\delta(m+k)=\sigma^2 h(-m)$ $m\geq 0$

故 $r_{xy}(m)=\begin{cases}0 & m\geq 1\\ \sigma_x^2 h(0) & m=0\end{cases}$

故 $r_y(0)=\sum_{k=1}^{N} a_k r_y(k)+\sigma_x^2$ $r_y(m)=\sum_{k=1}^{N} a_k r_y(m-k)$, $m\geq 1$



x 为输入系统的随机信号，y 为系统对随机信号的响应，y_m 为实际测到的混有噪声 n 的响应，$y_m = y + n$，h 为系统的单位冲激响应。系统的微分方程为：

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = x(t)$$

式中，$\Omega_n = 2\pi f_n$ 是系统的固有频率，$f_n = 50\text{Hz}$；$\zeta = 0.1$ 是系统的阻尼比。

基本要求如下：

1. 用 MATLAB 产生随机信号，作为输入 x 和混入输出 y 的噪声 n；
2. 用卷积或其他方法（例如龙格-库塔算法）计算系统对 x 的响应 y；
3. 分别用

$$H(\omega) = \frac{Y_m(\omega)}{X(\omega)},\quad H_1(\omega) = \frac{P_{xy_m}(\omega)}{P_x(\omega)},\quad H_2(\omega) = \frac{P_{y_m}(\omega)}{P^*_{xy_m}(\omega)}$$

估计系统在 10~250Hz 范围内的频率响应函数 $H(\omega)$，并观察结果有何不同。

根据计算结果写一个报告，首先对基本理论作一下简要阐述；其次是程序与计算结果（图表），其中程序必须进行注解，计算结果要有分析；再次是对感兴趣的参数或方法变化进行讨论与比较；最后作一下总结。

$x_m(n) = x(n)$

输出信号染噪声影响：$y_m(n) = y(n) + n_y(n)$

$$H_1(\omega) = \frac{DTFT[R_{x_m y_m}(k)]}{DTFT[R_{x_m x_m}(k)]} = \frac{P_{x_m y_m}(\omega)}{P_{x_m x_m}(\omega)} = \frac{P_{xy}(\omega)}{P_x(\omega)}$$

其中 $R_{x_m y_m}(k) = E\{x(n)[y(n+k) + n_y(n+k)]\} = R_{xy}(k)$

$R_{x_m x_m}(k) = R_{xx}(k)$

$$H_2(\omega) = \frac{DTFT[R_{y_m y_m}(k)]}{DTFT[R^*_{x_m y_m}(k)]} = \frac{P_{y_m}(\omega)}{P_{xy_m}(\omega)}$$

其中 $DTFT[R_{y_m y_m}(k)] = R_{yy}(k)$

$DTFT[R^*_{x_m y_m}(k)] = E[x^*(n)[y(n+k) + n_y(n+k)]] = R^*_{xy}(\omega)$