第五次作业

2020年11月24日 星期二　09:34

第五讲课后作业

12002091009３　[学号 作者] 周资崴

1. 查资料，描述“各态历经”的基本含义
2. 考虑一个稳定的线性时不变系统，其输入 $x(n)$为实信号，单位脉冲响应 $h(n)$为实序列，输出信号为 $y(n)$。假定输入信号 $x(n)$为白噪声，其均值为零，方差为 σ_x^2。系统函数如下：

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

其中，假定系数 a_k 和 b_k 均为实数。

系统输入和输出信号同时还满足如下常系数差分方程：

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

如果所有 a_k 均为零，则 $y(n)$称为滑动平均(MA)线性随机过程；如果除 b_0 以外的所有 b_k 均为零，则 $y(n)$称为自回归(AR)线性随机过程；如果 a_k 和 b_k 均不为零，则 $y(n)$称为自回归滑动平均(ARMA)线性随机过程。

有以下几个问题：

(a) 以单位脉冲响应 $h(n)$来表达输出信号 $y(n)$的自相关函数 $r_y(m)$；

(b) 利用(a)的结果，以频率响应函数 $H(\omega)$来输出信号 $y(n)$的功率谱 $P_y(\omega)$；

(c) 如果 $y(n)$为 MA 过程，试说明 $y(n)$的自相关函数 $r_y(m)$只在区间 $|m|\le M$ 存在非零值；

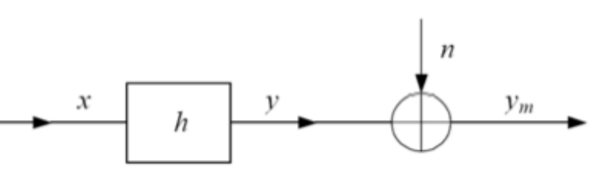
(d) 如果 $y(n)$为 AR 过程，试推导 $r_y(m)$的一般表达式；

(e) 试说明当 $y(n)$为 AR 过程，且 $b_0=1$ 时，$r_y(m)$满足如下差分方程：

$$r_y(0)=\sum_{k=1}^{N} a_k r_y(k)+\sigma_x^2$$

$$r_y(m)=\sum_{k=1}^{N} a_k r_y(m-k),\quad m\ge 1$$

3. 用仿真试验和信号分析的方法确定如下图所示系统的频率响应函数 $H(\omega)$。



x 为输入系统的随机信号，y 为系统对随机信号的响应，y_m 为实际测到的混有噪声 n 的响应，$y_m=y+n$，h 为系统的单位冲激响应。系统的微分方程为：

$$\ddot{y}(t)+2\zeta\Omega_n\dot{y}(t)+\Omega_n^2 y(t)=x(t)$$

式中，$\Omega_n=2\pi f_n$ 是系统的固有频率，$f_n=50\text{Hz}$；$\zeta=0.1$ 是系统的阻尼比。

基本要求如下：

1. 用 MATLAB 产生随机信号，作为输入 x 和混入输出 y 的噪声 n；
2. 用卷积或其他方法（例如龙格-库塔算法）计算系统对 x 的响应 y；
3. 分别用

$$H(\omega)=\frac{Y_m(\omega)}{X(\omega)},\quad H_1(\omega)=\frac{P_{xy_m}(\omega)}{P_x(\omega)},\quad H_2(\omega)=\frac{P_{y_m}(\omega)}{P^*_{xy_m}(\omega)}$$

估计系统在 10~250Hz 范围内的频率响应函数 $H(\omega)$，并观察结果有何不同。

根据计算结果写一个报告，首先对基本理论作一下简要阐述；其次是程序与计算结果（图表），其中程序必须进行注解，计算结果要有分析；再次是对感兴趣的参数或方法变化进行讨论与比较；最后作一下总结。

解 (1) 各态历经基本含义：

对某一平稳信号 $X(n)$，如果它的所有样本函数在某一固定时刻的一阶和二阶统计特性和单一样本函数在长时间内的统计特性一致，则称 $X(n)$ 为各态遍历信号，其意义是：单一样本函数随时间变化的过程可以包括该信号所有样本函数的取值经历，这样就可以仿照确定性的功率信号那样来定义各态遍历信号的一阶、二阶数字特征

(2) (a) $r_y(m)=r_x(m)*h(m)*h(-m)$

其中 $r_x(m)=\sigma_x^2\delta(m)$

则 $r_y(m)=\sigma_x^2\delta(m)*h(m)*h(-m)$

(b) $P_y(w)=P_x(w)\,|H(w)|^2=\sigma_x^2\,|H(w)|^2$

(c) $y(n)$ 为MA过程，即 $a_k=0\ (k=1,2\cdots)$

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

该式说明输出 $y(n)$ 是现在和过去 M 个白噪声的加权和，即自相关函数 $r_y(m)$ 只在区间 $|m|\le M$ 内有相关性，即存在非零值

(d) $y(n)$ 为AR过程，即 $b_k=0\ (k=1,2\cdots)$

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)+b_0 x(n)$$

$r_y(m)=E\{y(n)y(n+m)\}$，将 $y(n)$ 带入可得

$$r_y(m)=E\left\{\left[\sum_{k=1}^{N} a_k y(n+m-k)+b_0 x(n+m)\right]y(n)\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{N} a_k E\{y(n+m-k)\cdot y(n)\}+b_0 E\{x(n+m)\cdot y(n)\}$$

对于前一项 $\sum_{k=1}^{N} a_k E\{y(n+m-k)\cdot y(n)\}=\sum_{k=1}^{N} a_k r_y(m-k)$

对于后一项 $E\{x(n+m)\cdot y(n)\}=E\{x(n+m)\cdot\sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)\}$

$$=\sigma_x^2\sum_{k=0}^{\infty} h(k)\delta(m+k)=\sigma_x^2 h(-m)=\begin{cases}0 & m\ge 1\\ \sigma_x^2 h(0) & m=0\end{cases}$$

其中 $\lim_{z\to\infty} H(z)=h(0)=1$

故 $r_y(m)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{N} a_k r_y(m-k) & m\ge 1\\ \sum_{k=1}^{N} a_k r_y(m-k)+b_0\sigma_x^2 & m=0\end{cases}$

(e) $y(n)$ 为AR过程，即 $b_k=0\ (k=1,2\cdots)$

由(d)的结果

$$r_y(m)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{N} a_k r_y(m-k) & m\ge 1\\ \sum_{k=1}^{N} a_k r_y(m-k)+b_0\sigma_x^2 & m=0\end{cases}$$

当 $b_0=1$ 时

$$r_y(m)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{N} a_k r_y(m-k) & m\ge 1\\ \sum_{k=1}^{N} a_k r_y(m-k)+\sigma_x^2 & m=0\end{cases}$$

(3)

① 对系统微分方程拉式变换可得

$$s^2Y(s)-sy(0)-\dot{y}(0)+2\zeta\Omega_n(sY(s)-y(0))+\Omega_n^2Y(s)=X(s)$$

零初始条件下解得 $H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s^2+2\zeta\Omega_n s+\Omega_n^2}$

令 $s=jw$ 得到频率响应函数

$$H(w)=\frac{1}{\Omega_n^2-w^2+2\zeta\Omega_n jw}$$

带入数据 $\Omega_n=2\pi f_n$，$f_n=50\text{HZ}$，$\zeta=0.1$ 可得

$$H(w)=\frac{1}{10000\pi^2-w^2+20\pi jw}$$

② 卷积法求系统输出

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

对传递函数反拉氏变换可得单位冲激响应 $h(t)$

$$h(t)=\frac{1}{\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\Omega_n t}\sin(\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t)$$

卷积的离散形式为

$$y(i)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)h(n-i)$$

对于有噪声 n 的输出 y_m 的表达式为

$$y_m(i)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)h(n-i)+n(i)$$

③ 根据 $H_0(w)=\frac{Y_m(w)}{X(w)}$ 估计频响函数

$$H_0(w)=\frac{Y_m(w)}{X(w)}=\frac{Y_m(w)+N(w)}{X(w)}=H(w)+\frac{N(w)}{X(w)}$$

④ 根据 $H_1(w)=\frac{P_{xy_m}(w)}{P_x(w)}$ 和 $H_2(w)=\frac{P_{y_m}(w)}{P^*_{xy_m}(w)}$ 估计频响函数

由于 $y_m(i)=y(i)+n(i)$

于是 $y_m(i)$ 的自相关函数为

$$r_{y_m}(m)=r_y(m)+r_{yn}(m)+r_{ny}(m)+r_n(m)$$

互相关函数 $r_{xy_m}(m)$ 为

$$r_{xy_m}(m)=r_{xy}(m)+r_{xn}(m)$$

对上两式傅里叶变换得

$$P_{y_m}(w)=P_y(w)+P_{yn}(w)+P_{ny}(w)+P_n(w)$$

$$P_{xy_m}(w)=P_{xy}(w)+P_{xn}(w)$$

且由 $P_y(w)=P_x(w)H(w)H^*(w)$ 和 $P_{xy}(w)=P_x(w)H(w)$ 可得

$$H_1(w)=\frac{P_{xy_m}(w)}{P_x(w)}=\frac{P_x(w)H(w)+P_{xn}(w)}{P_x(w)}=H(w)+\frac{P_{xn}(w)}{P_x(w)}$$

$$H_2(w)=\frac{P_{y_m}(w)}{P^*_{xy_m}(w)}=\frac{P_x(w)H(w)H^*(w)+P_{yn}(w)+P_{ny}(w)+P_n}{P_x(w)H(w)+P_{xn}(w)}$$

从作图的角度看，$H_1(w)$ 比 $H_2(w)$ 含有纵轴上的与 $H(w)$ 无关的微小误差项 $P_{xn}(w)$ 而 $H_2(w)$ 的误差项仅与 $H(w)$ 有关，难以分辨，但如果考虑噪声是输入混入的，则此时 $H_2(w)$ 与 $H_1(w)$ 类似，将仅在横轴上含有与 $H(w)$ 无关的微小误差项

故 $H_1(w)$ 适用于输出混有独立噪声的情况，$H_2(w)$ 适用于输入混有独立噪声的情况

⑤ 仿真实验

仿真实验：

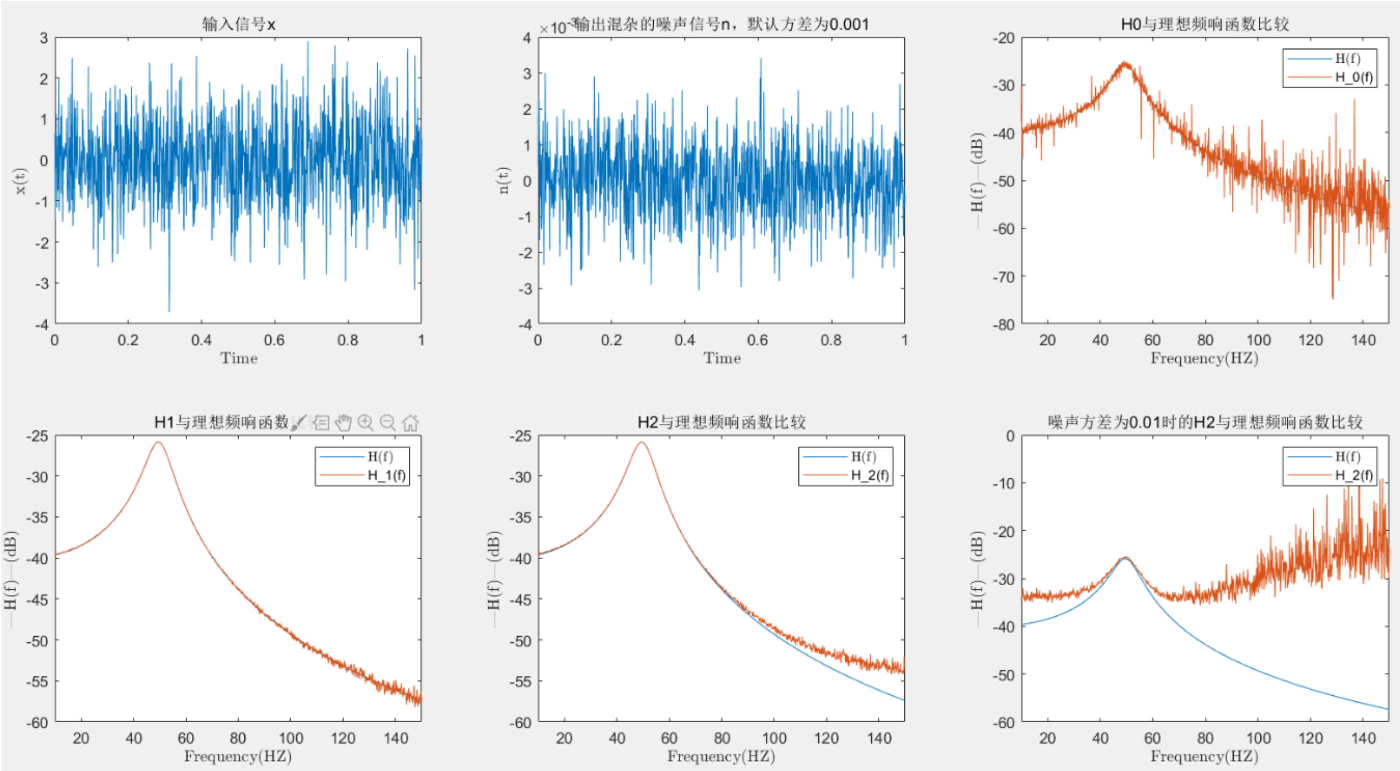
Matlab 代码如下：

```
clc;
clear;
close all;
Fs = 1000;%采样频率
T = 1/Fs;%采样时间
L = 10240;%信号长度
t = (0:L-1)*T; %时间序列

%% 参数定义
f_n = 50;
w_n = 2*pi*f_n;%固有频率
zeta = 0.1;%阻尼比

%% 输入信号和噪声信号生成
w_d = w_n * sqrt(1-zeta^2);
h = (1/w_d)*exp(-zeta*w_n*t).*sin(w_d*t);%单位冲激响应函数 h(t)

rng(10,'twister'); %设置随机生成器状态
x = randn(1,40*L); %随机输入信号 x

rng(20,'twister');
n = 0.001*randn(1,40*L); %输出混杂的噪声 n，方差为 0.001

%% 画输入信号
figure;
subplot(2,3,1);
plot((0:40*L-1)*T,x);
xlabel('Time','Interpreter','latex');
ylabel('x(t)','Interpreter','latex');
xlim([0,1]);
title('输入信号 x');
%% 画噪声信号
subplot(2,3,2);
plot((0:40*L-1)*T,n);
xlabel('Time','Interpreter','latex');
ylabel('n(t)','Interpreter','latex');
xlim([0,1]);
title('输出混杂的噪声信号 n，默认方差为 0.001');

%% 输出信号生成
y = conv(x,h); %卷积求系统输出
y = y(1:40*L);
```

```
y_m = y+n; %输出信号

%% 使用 cpsd 计算互功率谱和自功率谱
[Pxx,w]=cpsd(x,x,hanning(L),L/2,L,Fs);
[Pyy,w]=cpsd(y_m,y_m,hanning(L),L/2,L,Fs);
[Pxy,f]=cpsd(x,y_m,hanning(L),L/2,L,Fs);

%% 设置题目参数条件
H = fft(h); %系统理想的频率响应函数
H_0 = fft(y_m(1:L))./fft(x(1:L)); %题目中 H0
H_1 = Pxy./Pxx; %题目中 H1
H_2 = Pyy./conj(Pxy); %题目中 H2

%% 绘制 H 与 H0 对比图
subplot(2,3,3);
plot(f,20*log10(abs(H(1:L/2+1))))
hold on;

plot(f,20*log10(abs(H_0(1:L/2+1))))
hold on;

set(legend('H(f)','H_0(f)'),'Interpreter','latex');
xlabel('Frequency(HZ)','Interpreter','latex');
ylabel('|H(f)|(dB)','Interpreter','latex');
xlim([10,150]);
title('H0 与理想频响函数比较');

%% 绘制 H 与 H1 对比图
subplot(2,3,4);
plot(f,20*log10(abs(H(1:L/2+1))))
hold on;

plot(f,20*log10(abs(H_1)))
hold on;

set(legend('H(f)','H_1(f)'),'Interpreter','latex');
xlabel('Frequency(HZ)','Interpreter','latex');
ylabel('|H(f)|(dB)','Interpreter','latex');
xlim([10,150]);
title('H1 与理想频响函数比较');

%% 绘制 H 与 H2 对比图
subplot(2,3,5);
plot(f,20*log10(abs(H(1:L/2+1))))
hold on;

plot(f,20*log10(abs(H_2)))
hold on;

```

```
set(legend('H(f)','H_2(f)'),'Interpreter','latex');
xlabel('Frequency(HZ)','Interpreter','latex');
ylabel('|H(f)|(dB)','Interpreter','latex');
xlim([10,150]);
title('H2 与理想频响函数比较');

%% 更改噪声方差为 0.01 绘制 H 与 H2 对比图
rng(20,'twister');
n = 0.01*randn(1,40*L); %方差为 0.01 的噪声 n
y_m = y+n; %新的输出信号
[Pyy,w]=cpsd(y_m,y_m,hanning(L),L/2,L,Fs);
[Pxy,f]=cpsd(x,y_m,hanning(L),L/2,L,Fs);

H = fft(h); %系统理想的频率响应函数
H_2 = Pyy./conj(Pxy); %题目中 H2

subplot(2,3,6);
plot(f,20*log10(abs(H(1:L/2+1))))
hold on;

plot(f,20*log10(abs(H_2)))
hold on;

set(legend('H(f)','H_2(f)'),'Interpreter','latex');
xlabel('Frequency(HZ)','Interpreter','latex');
ylabel('|H(f)|(dB)','Interpreter','latex');
xlim([10,150]);
title('噪声方差为 0.01 时的 H2 与理想频响函数比较');
```

运行结果



结果分析

使用$H_1(w)$估计时非常接近理想情况，是一种无偏估计，比$H_0(w)$好得多，适用于输出混有噪声的情况。使用$H_2(w)$会显著受到噪声影响，且随着噪声方差的增大而增大，在使用时需要计算输出的信噪比作为参考。