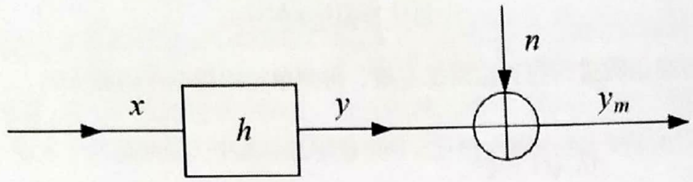
1 题目

用仿真试验和信号分析的方法确定如下图所示系统的频率响应函数 $H(\omega)$。x 为输入系统的随机信号，y



为系统对随机信号的响应，y_m 为实际测到的混有噪声 n 的响应，$y_m = y + n$，h 为系统的单位冲激响应。系统的微分方程为：

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = x(t) \tag{1.1}$$

式中，$\Omega_n = 2\pi f_n$ 是系统的固有频率，$f_n = 50\,\mathrm{Hz}$；$\zeta = 0.1$ 是系统的阻尼比。

基本要求如下：

1. 用 MATLAB 产生随机信号，作为输入 x 和混入输出 y 的噪声 n；
2. 用卷积或其他方法（例如龙格-库塔算法）计算系统对 x 的响应 y；
3. 分别用

$$H(\omega) = \frac{Y_m(\omega)}{X(\omega)}, H_1(\omega) = \frac{P_{xy_m}(\omega)}{P_x(\omega)}, H_2(\omega) = \frac{P_{y_m}(\omega)}{P^*_{xy_m}(\omega)}$$

估计系统在 $10 \sim 250\,\mathrm{Hz}$ 范围内的频率响应函数 $H(\omega)$，并观察结果有何不同。

根据计算结果写一个报告，首先对基本理论作一下简要阐述；其次是程序与计算结果（图表），其中程序必须进行注解，计算结果要有分析；再次是对感兴趣的参数或方法变化进行讨论与比较；最后作一下总结。

2 理论分析

2.1 理论频率响应函数 $H(\omega)$

对系统微分方程式 1.1两边作拉普拉斯变换，得到

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 2\zeta\Omega_n(sY(s) - y(0)) + \Omega_n^2 Y(s) = X(s) \tag{2.1}$$

零初条件下，得到系统传递函数 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\Omega_n s + \Omega_n^2} \tag{2.2}$$

令 $s = j\omega$，得到频率响应函数为

$$H(\omega) = \frac{1}{\Omega_n^2 - \omega^2 + 2\zeta\Omega_n j\omega} \tag{2.3}$$

代入系统固有频率 $\Omega_n = 2\pi f_n$ ，$f_n = 50\,\mathrm{Hz}$，系统阻尼比 $\zeta = 0.1$，得到

$$H(\omega) = \frac{1}{10000\pi^2 - \omega^2 + 20\pi j\omega} \tag{2.4}$$

2.2 卷积法求系统输出

系统输出是输入与系统单位冲激响应的卷积，即

$$y(t) = x(t) * h(t) \tag{2.5}$$

其中，对式 2.2表示的传递函数进行拉普拉斯反变换，得到单位冲激响应函数 $h(t)$

$$h(t) = \frac{1}{\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\mathrm{e}^{-\zeta\Omega_n t}\sin(\Omega_d t), \quad 其中\ \Omega_d = \Omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{2.6}$$

卷积的连续形式为:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.7}$$

离散形式为:

$$y(i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)h(n-i) \tag{2.8}$$

对于混有噪声 n 的输出 y_m，表达式为

$$y_m(i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)h(n-i) + n(i) \tag{2.9}$$

2.3 使用 $H_0(\omega) = \frac{Y_m(\omega)}{X(\omega)}$ 和估计频率响应函数

求得结果包含噪声频谱，即

$$H_0(\omega) = \frac{Y_m(\omega)}{X(\omega)} = \frac{Y(\omega)+N(\omega)}{X(\omega)} = H(\omega) + \frac{N(\omega)}{X(\omega)} \tag{2.10}$$

2.4 使用 $H_1(\omega) = \frac{Pxy_m(\omega)}{P_x(\omega)}$ 和 $H_2(\omega) = \frac{P_{y_m}(\omega)}{P^*_{xy_m}(\omega)}$ 估计频率响应函数

由于实际输出 $y_m(i)$ 混有噪声，即

$$y_m(i) = y(i) + n(i) \tag{2.11}$$

因此，$y_m(i)$ 的自相关函数 $r_{y_m}(m)$ 为

$$r_{y_m}(m) = r_y(m) + r_{yn}(m) + r_{ny}(m) + r_n(m) \tag{2.12}$$

互相关函数 $r_{xy_m}(m)$ 为

$$r_{xy_m}(m) = r_{xy}(m) + r_{xn}(m) \tag{2.13}$$

对式 2.12和式 2.13两边作傅里叶变换，分别有

$$P_{y_m}(\omega) = P_y(\omega) + P_{yn}(\omega) + P_{ny}(\omega) + P_n(\omega) \tag{2.14}$$

$$P_{xy_m}(\omega) = P_{xy}(\omega) + P_{xn}(\omega) \tag{2.15}$$

由教材已知

$$P_y(\omega) = P_x(\omega)H(\omega)H^*(\omega) \tag{2.16}$$

$$P_{xy}(\omega) = P_x(\omega)H(\omega) \tag{2.17}$$

所以，根据式 2.14、式 2.15、式 2.16、式 2.17，可推导出

$$H_1(\omega)=\frac{Pxy_m(\omega)}{P_x(\omega)}=\frac{P_x(\omega)H(\omega)+P_{xn}(\omega)}{P_x(\omega)}=H(\omega)+\frac{P_{xn}(\omega)}{P_x(\omega)} \tag{2.18}$$

$$H_2(\omega)=\frac{P_{y_m}(\omega)}{P^*_{xy_m}(\omega)}=\frac{P_x(\omega)H(\omega)H^*(\omega)+P_{yn}(\omega)+P_{ny}(\omega)+P_n}{P_x(\omega)H(\omega)+P_{xn}(\omega)} \tag{2.19}$$

从作图的角度看，此时 $H_1(\omega)$ 相比理论 $H(\omega)$，含有纵轴上的与 $H(\omega)$ 无关的微小误差项 $P_{xn}(\omega)$；而 $H_2(\omega)$ 的误差项与 $H(\omega)$ 有关，难以分辨。但是如果考虑噪声是从输入混入的，则此时 $H_2(\omega)$ 与当前的 $H_1(\omega)$ 类似，将仅在横轴含有与 $H(\omega)$ 无关的微小误差项。

因此，$H_1(\omega)$ 适用于输出混有独立噪声的情况，$H_2(\omega)$ 适用于输出混有独立噪声的情况

3 仿真试验

3.1 仿真结果

随机信号 x 和噪声 n、以及理想频率响应函数、三种频率响应函数估计算法结果如图 1所示。

3.2 分析总结

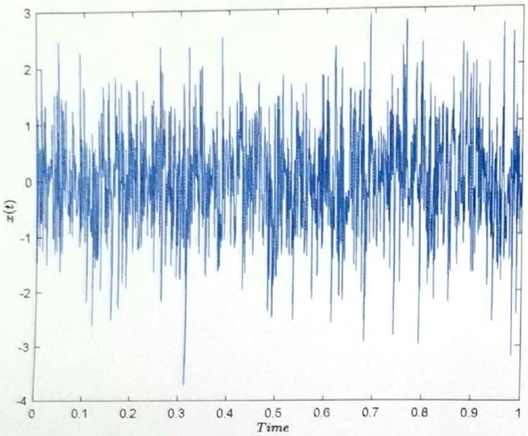
使用 $H_1(\omega)$ 估计时非常接近理想情况，是一种无偏估计，比 $H_0(\omega)$ 要好的多，适用于输出混有噪声的情况。使用 $H_2(\omega)$ 会显著受到噪声影响，且随着噪声方差的增大而增大，在使用时需要计算输出的信噪比作为参考。

3.3 MATLAB 代码

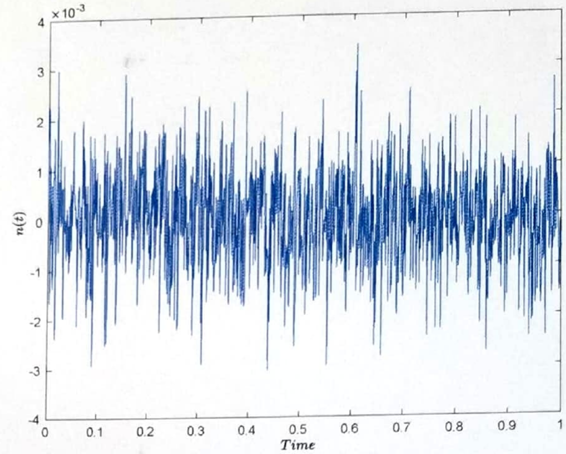
代码如下所示。

```
clc
clear
close all

Fs = 1000; % 采样频率
T = 1 / Fs; % 采样时间
L = 10240; % Length of signal
t = (0:L-1)*T; % Time vector

f_n = 50;
w_n = 2 * pi * f_n; % 系统的固有频率
zeta = 0.1; % 系统的阻尼比
w_d = w_n * sqrt(1 - zeta ^ 2); % 系统的阻尼自振角频率
h = (1 / w_d) * exp(-zeta * w_n * t).* sin(w_d * t); % 单位冲击响应函数h(t)

rng(10,'twister'); % 设置随机生成器状态
x = randn(1, 40*L); % 输入随机信号x
rng(20,'twister');
n = 0.001 * randn(1, 40*L); % 输出混杂的噪声n

figure
plot((0:40*L-1)*T, x); % 绘制输入随机信号x
xlabel('$Time$','Interpreter','latex');
```

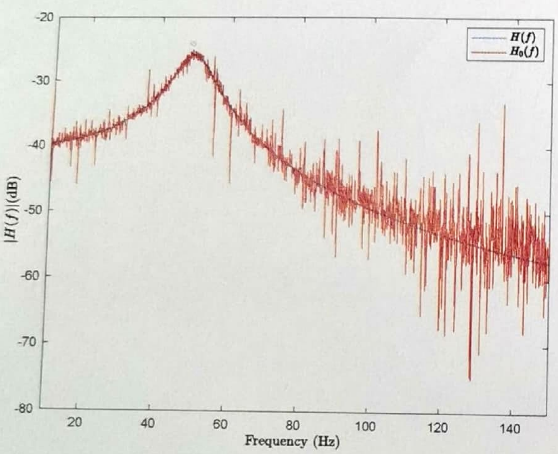
```
ylabel('$x(t)$','Interpreter','latex');
xlim([0, 1])

figure
plot((0:40*L-1)*T, n); % 绘制输出混杂的噪声n
xlabel('$Time$','Interpreter','latex');
ylabel('$n(t)$','Interpreter','latex');
xlim([0, 1])

y = conv(x, h); % 使用卷积求系统输出
y = y(1:40*L);
y_m = y + n; % 输出混杂噪声

% 使用cpsd计算输入输出信号的互功率谱和自功率谱
[Pxx, ¬]=cpsd(x, x, hanning(L), L / 2, L, Fs);
[Pyy, ¬]=cpsd(y_m, y_m, hanning(L), L / 2, L, Fs);
[Pxy, f]=cpsd(x, y_m, hanning(L), L / 2, L, Fs);

H = fft(h); % 系统理想的频率响应函数
H_0 = fft(y_m(1:L))./fft(x(1:L)); % 题中H_0
H_1 = Pxy ./ Pxx; % 题中H_1
H_2 = Pyy ./ conj(Pxy); % 题中H_2

figure % 绘制H和H_0对比图
plot(f, 20*log10(abs(H(1:L / 2 + 1))))
hold on

plot(f, 20*log10(abs(H_0(1:L / 2 + 1))))
hold on

set(legend('$H(f)$','$H_0(f)$'),'Interpreter','latex');
xlabel('Frequency (Hz)','Interpreter','latex');
ylabel('$|H(f)|$(dB)','Interpreter','latex');
xlim([10, 150])


figure % 绘制H和H_1对比图
plot(f, 20 * log10(abs(H(1:L/2+1))))
hold on

plot(f, 20 * log10(abs(H_1)))
hold on

set(legend('$H(f)$','$H_1(f)$'),'Interpreter','latex');
xlabel('Frequency (Hz)','Interpreter','latex');
ylabel('$|H(f)|$(dB)','Interpreter','latex');
xlim([10, 150])


figure % 绘制H和H_2对比图
plot(f, 20 * log10(abs(H(1:L / 2 + 1))))
hold on

plot(f, 20 * log10(abs(H_2)))
hold on

set(legend('$H(f)$','$H_2(f)$'),'Interpreter','latex');
xlabel('Frequency (Hz)','Interpreter','latex');
```



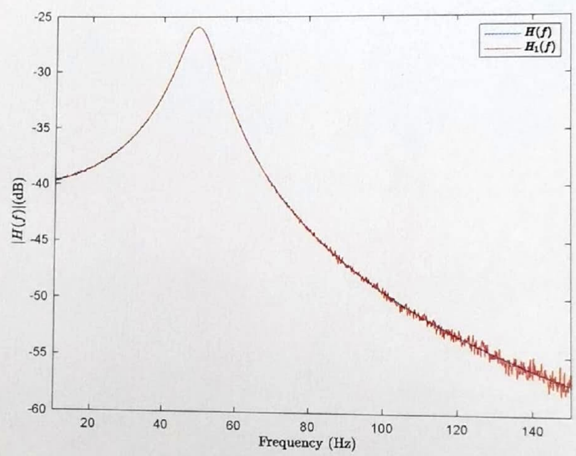
(a) 输入信号 x



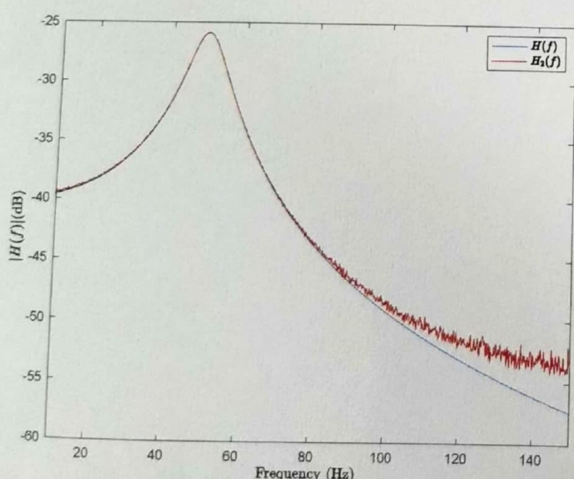
(b) 输出混杂的噪声 n，默认方差为 0.001



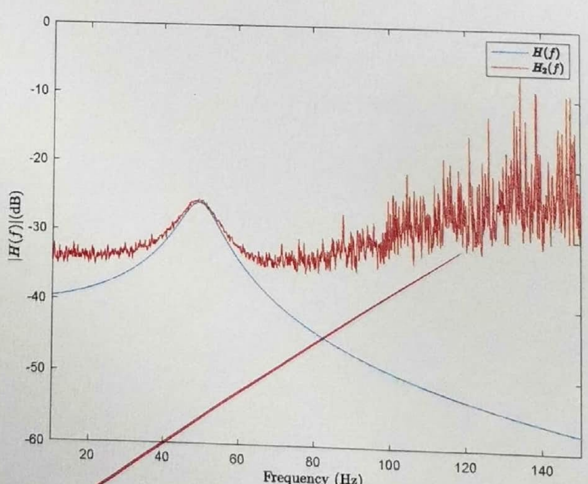
(c) H_0 与理想频响函数比较



(d) H_1 与理想频响函数比较



(e) 噪声方差为 0.001 时的 H_2



(f) 噪声方差为 0.01 时的 H_2

图 1: 仿真结果