# 第六次作业

2020年12月8日 星期二 10:04



## 第六讲课后作业

[学号 作者]

(1) 考虑一个系数为实数的 FIR 滤波器 $h(n)$，且当 $n<0$ 及 $n>M$ 时，$h(n)=0$。$h(n)$ 具有以下其中一个对称特点：

偶对称：　$h(n)=h(M-n)$

奇对称：　$h(n)=-h(M-n)$

则 FIR 滤波器 $h(n)$ 具有线性相位特性，即：

$$H(\omega)=A(\omega)e^{-j\alpha\omega+j\beta}$$

其中，$A(\omega)$ 是频率 $\omega$ 的实函数，$\alpha$ 和 $\beta$ 为实常数。

试说明 $A(\omega)$ 具有如下表所示的表达式，并求解对应的 $\alpha$ 和 $\beta$。

| 类型 | 对称特点 | 滤波器长度 $(M+1)$ | $A(\omega)$ 表达式 | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 偶对称 | 奇数 | $\sum_{n=0}^{M/2} a(n)\cos\omega n$ | $\alpha=\frac{M}{2}$ | $\beta=0$ |
| II | 偶对称 | 偶数 | $\sum_{n=1}^{(M+1)/2} b(n)\cos\omega(n-1/2)$ | $\alpha=\frac{M}{2}$ | $\beta=0$ |
| III | 奇对称 | 奇数 | $\sum_{n=1}^{M/2} c(n)\sin\omega n$ | $\alpha=\frac{M}{2}$ | $\beta=\frac{\pi}{2}$ |
| IV | 奇对称 | 偶数 | $\sum_{n=1}^{(M+1)/2} d(n)\sin\omega(n-1/2)$ | $\alpha=\frac{M}{2}$ | $\beta=\frac{\pi}{2}$ |

解：

① 偶对称 $h(n)=h(M-n)$．$M+1$ 为奇数

$$H(w)=\sum_{n=0}^{M}h(n)e^{-jwn}=\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1}h(n)e^{-jwn}+\sum_{\frac{M}{2}+1}^{M}h(n)e^{-jwn}+h(\tfrac{M}{2})e^{-jw\cdot\frac{M}{2}}$$

令 $m=M-n$，有



$$H(w)=\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1}h(n)e^{-jwn}+\sum_{n=\frac{M}{2}+1}^{M}h(n)e^{-jwn}+h(\tfrac{M}{2})e^{-jw\frac{M}{2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1}h(n)e^{-jwn}+\sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1}h(M-m)e^{-jw(M-m)}+h(\tfrac{M}{2})e^{-jw\frac{M}{2}}$$

$$=e^{-jw\frac{M}{2}}\left[2\sum_{m=0}^{\frac{M}{2}}h(m)\cos(\tfrac{M}{2}-m)w+h(\tfrac{M}{2})\right]$$

再令 $n=\frac{M}{2}-m$，得

$$a(n)=\begin{cases}h(\frac{M}{2}) & n=0\\ 2h(\frac{M}{2}-n) & n=1,2\cdots\frac{M}{2}\end{cases}$$

则 $H(e^{jw})=e^{-jw\frac{M}{2}}\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}}a(n)\cos(wn)$

② 偶对称：$h(n)=h(M-n)$，$(M+1)$ 为偶数

$$H(w)=\sum_{n=0}^{M}h(n)e^{-jwn}=\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-\frac{1}{2}}h(n)e^{-jwn}+\sum_{n=\frac{M}{2}+\frac{1}{2}}^{M}h(n)e^{-jwn}$$

$$=e^{-jw\frac{M}{2}}\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-\frac{1}{2}}h(n)e^{[j(\frac{M}{2}-n)w]+[-j(\frac{M}{2}-n)w]}$$

$$=e^{-jw\frac{M}{2}}\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-\frac{1}{2}}2h(n)\cos[(\tfrac{M}{2}-n)w]$$

令 $m=\frac{M+1}{2}-n$ 得

$$H(e^{jw})=e^{-jw\frac{M}{2}}\sum_{n=1}^{\frac{M}{2}+\frac{1}{2}}2h(\tfrac{N}{2}-n)\cos[(n-\tfrac{1}{2})w]$$

令 $b(n)=2h(\frac{N}{2}-n)$，$n=1,2\cdots\frac{N}{2}$ 得

$$H(e^{jw})=e^{-jw\frac{M}{2}}\sum_{n=1}^{\frac{M}{2}+\frac{1}{2}}b(n)\cos[(n-\tfrac{1}{2})w]$$

③ 奇对称：$h(n)=-h(M-n)$，$M+1$ 为奇数

此时 $h(\frac{M}{2})=0$，与①推导同理

令 $c(n)=2h(\frac{M}{2}-n)$，$n=1,2\cdots\frac{M}{2}$

则 $H(e^{jw})=e^{j(\frac{\pi}{2}-\frac{M}{2}w)}\sum_{n=1}^{\frac{M}{2}}c(n)\sin(nw)$

④ 奇对称：$h(n)=-h(M-n)$，$M+1$ 为偶数

此时 $h(\frac{M+1}{2})=0$，与②推导同理

令 $d(n)=2h(\frac{M+1}{2}-n)$，$n=1,2\cdots\frac{M+1}{2}$

则 $H(e^{jw})=e^{j(\frac{\pi}{2}-\frac{M}{2}w)}\sum_{n=1}^{\frac{M}{2}+\frac{1}{2}}d(n)\sin[(n-\tfrac{1}{2})w]$