第五讲课后作业

[学号 作者]

1．查资料，描述“各态历经”的基本含义

略

2. 考虑一个稳定的线性时不变系统，其输入 $x(n)$为实信号，单位脉冲响应 $h(n)$为实序列，输出信号为 $y(n)$。假定输入信号 $x(n)$为白噪声，其均值为零，方差为σ_x^2。系统函数如下：

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

其中，假定系数 a_k 和 b_k 均为实数。

系统输入和输出信号同时还满足如下常系数差分方程：

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

如果所有 a_k 均为零，则 $y(n)$称为滑动平均(MA)线性随机过程；如果除 b_0 以外的所有 b_k 均为零，则 $y(n)$称为自回归(AR)线性随机过程；如果 a_k 和 b_k 均不为零，则 $y(n)$称为自回归滑动平均(ARMA)线性随机过程。

有以下几个问题：

(a) 以单位脉冲响应 $h(n)$来表达输出信号 $y(n)$的自相关函数 $r_y(m)$；

(b) 利用(a)的结果，以频率响应函数 $H(\omega)$来输出信号 $y(n)$的功率谱 $P_y(\omega)$；

(c) 如果 $y(n)$为 MA 过程，试说明 $y(n)$的自相关函数 $r_y(m)$只在区间$|m|\le M$ 存在非零值；

(d) 如果 $y(n)$为 AR 过程，试推导 $r_y(m)$的一般表达式；

(e) 试说明当 $y(n)$为 AR 过程，且 b_0=1 时，$r_y(m)$满足如下差分方程：

$$r_y(0)=\sum_{k=1}^{N} a_k r_y(k)+\sigma_x^2$$

$$r_y(m)=\sum_{k=1}^{N} a_k r_y(m-k),\quad m\ge 1$$

(a) $r_y(m)=r_x(m)*h(m)*h(-m)$

输入信号 $x(n)$为白噪声，其均值为零，方差为σ_x^2，则有

$$r_x(m)=\sigma_x^2\delta(m)$$

因此：$r_y(m)=\sigma_x^2 h(m)*h(-m)$

(b) $P_y(\omega)=|H(\omega)|^2\sigma_x^2$

(c) $y(n)$为 MA 过程, 所有 a_k 均为零，则

$$H(z)=\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}$$，因此，$h(n)=\{b_n\}$， $n=0,1,2,\ldots,M$

$r_y(m)=\sigma_x^2 h(m)*h(-m)$，显然，$r_y(m)$只在区间$|m|\le M$ 存在非零值。

(d) $y(n)$为 AR 过程，则

$$H(z)=\frac{b_0}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}=\frac{b_0}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-p_k z^{-1}\right)}$$

$$P_y(z)=\sigma_x^2 H(z)H^*(z)=\frac{\sigma_x^2 b_0^2}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-p_k z^{-1}\right)\left(1-p_k^* z\right)}=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{\left(1-p_k z^{-1}\right)\left(1-p_k^* z\right)}$$

$$r_y(m)=IZT\left[P_y(z)\right]=IZT\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{\left(1-p_k z^{-1}\right)\left(1-p_k^* z\right)}\right]=\sum_{k=1}^{N}A_k p_k^{|m|}$$

(e) $y(n)=\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+x(n)$

$$E\left\{y(n-m)y(n)\right\}=\sum_{k=1}^{N}a_k E\left\{y(n-m)y(n-k)\right\}+E\left\{y(n-m)x(n)\right\}$$

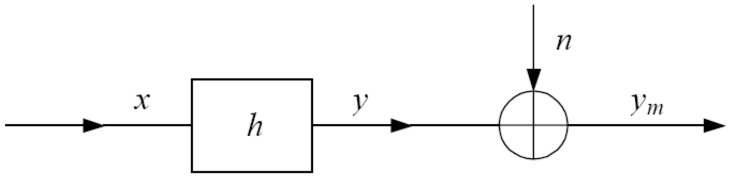
$$r_y(m)=\sum_{k=1}^{N}a_k r_y(m-k)+r_{yx}(m)$$

$$r_{yx}(m)=\begin{cases}0 & m\ge 1\\ \sigma^2 & m=0\end{cases}$$

可得：$r_y(0)=\sum_{k=1}^{N}a_k r_y(k)+\sigma_x^2$

$$r_y(m)=\sum_{k=1}^{N}a_k r_y(m-k),\quad m\ge 1$$

3. 用仿真试验和信号分析的方法确定如下图所示系统的频率响应函数 $H(\omega)$。



x 为输入系统的随机信号，y 为系统对随机信号的响应，y_m 为实际测到的混有噪声 n 的响应，$y_m = y + n$，h 为系统的单位冲激响应。系统的微分方程为：

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = x(t)$$

式中，$\Omega_n = 2\pi f_n$ 是系统的固有频率，$f_n = 50\text{Hz}$；$\zeta = 0.1$ 是系统的阻尼比。

基本要求如下：

1. 用 MATLAB 产生随机信号，作为输入 x 和混入输出 y 的噪声 n；
2. 用卷积或其他方法（例如龙格-库塔算法）计算系统对 x 的响应 y；
3. 分别用

$$H(\omega) = \frac{Y_m(\omega)}{X(\omega)}, \quad H_1(\omega) = \frac{P_{xy_m}(\omega)}{P_x(\omega)}, \quad H_2(\omega) = \frac{P_{y_m}(\omega)}{P^*_{xy_m}(\omega)}$$

估计系统在 10~250Hz 范围内的频率响应函数 $H(\omega)$，并观察结果有何不同。

根据计算结果写一个报告，首先对基本理论作一下简要阐述；其次是程序与计算结果（图表），其中程序必须进行注解，计算结果要有分析；再次是对感兴趣的参数或方法变化进行讨论与比较；最后作一下总结。

参考《Fundamentals of Signal Processing for Sound and Vibration Engineers》Example 8.10 和 Example 9.4

以及参考“课件第三讲-傅立叶变换-离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)”中的单自由度振动系统分析例子。