图像处理与分析

(第3章-图像变换)

肖 阳 (副教授)
Yang_Xiao@hust.edu.cn

华中科技大学人工智能与自动化学院

个人简介

·2014/07至今，在华中科技大学人工智能与自动化学院担任专职教师；

•2012/03至2014/07，分别在新加坡南洋理工大学计算机学院与媒体创新研究所从事博士后研究员工作；

•2000/09至2011/12　分别在华中科技大学电子与信息工程系，外语系和图像识别与人工智能研究所获得学士、硕士与博士学位；

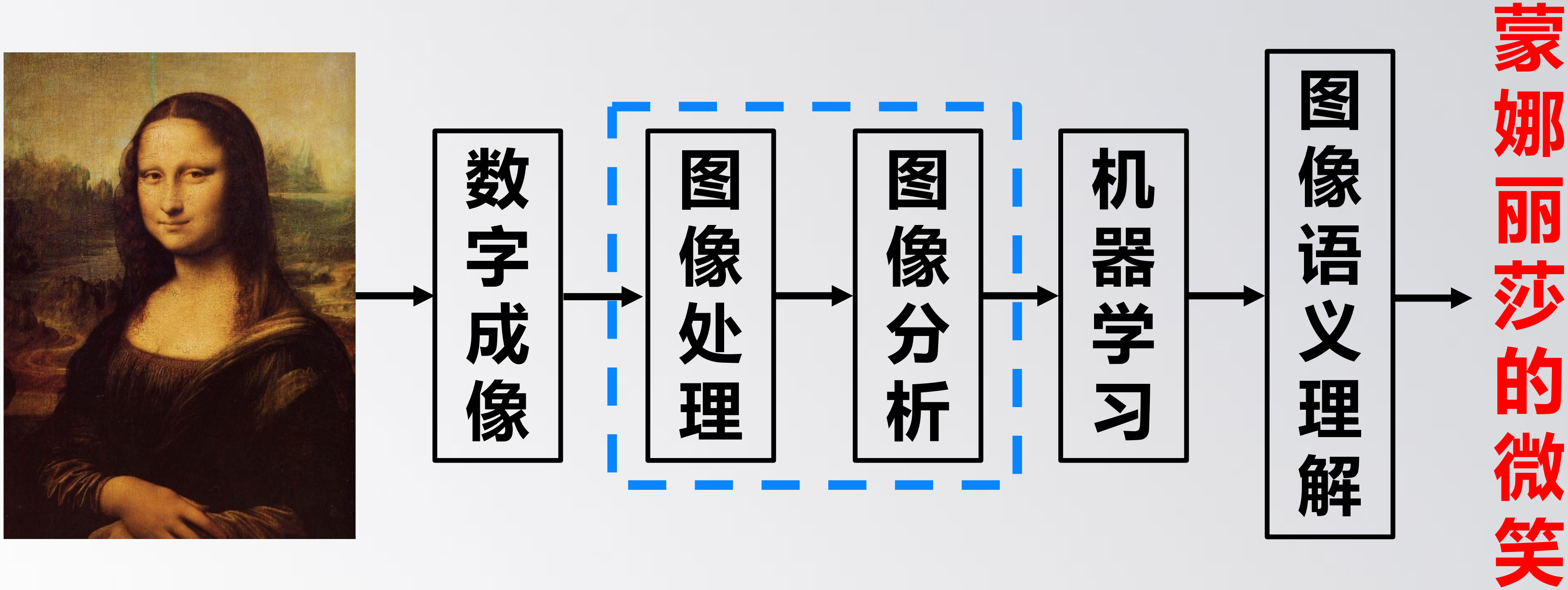
•研究兴趣：计算机视觉、图像分析与机器学习。

图像处理与分析的应用

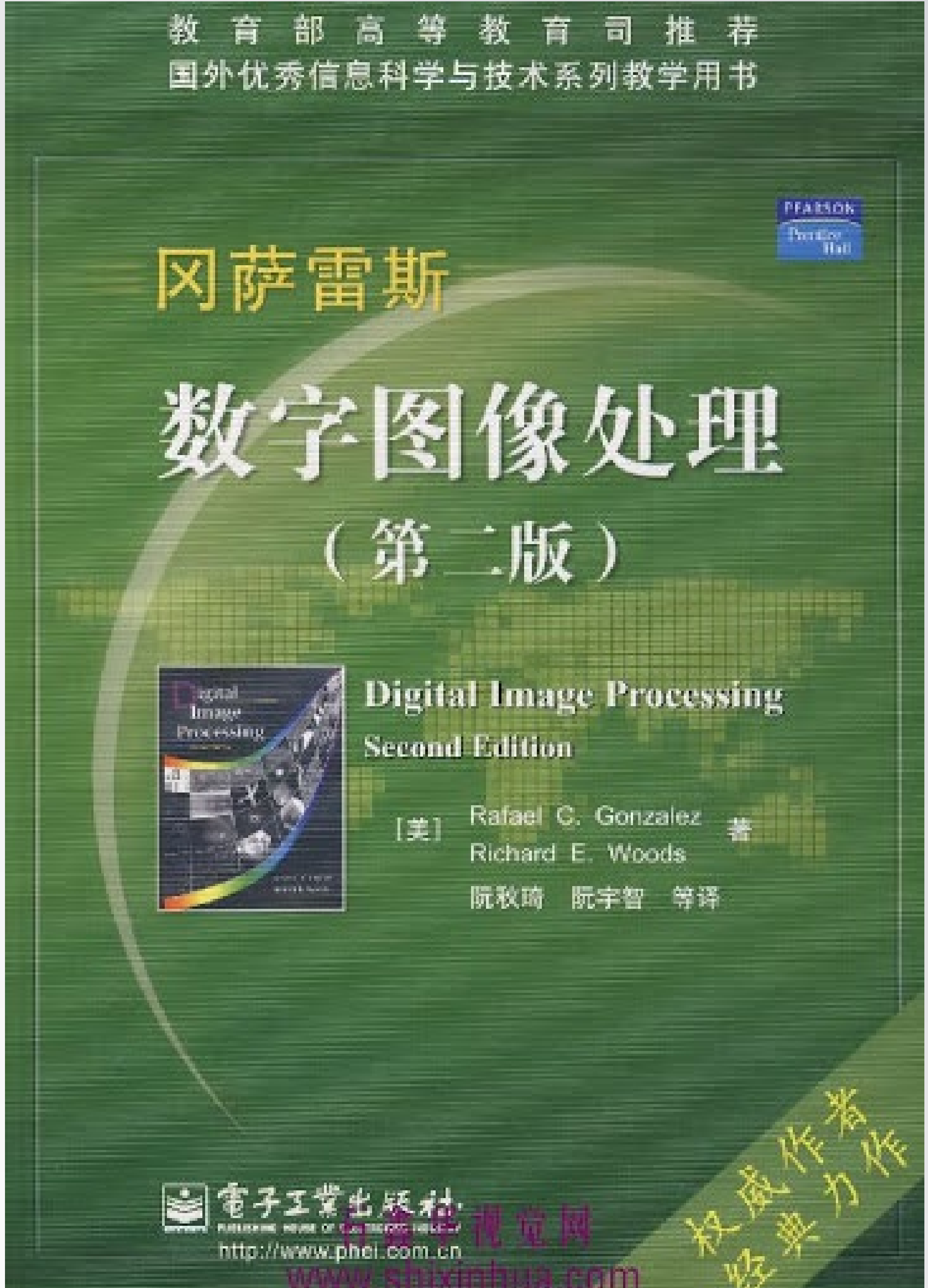
- 辅助安全驾驶；
- 人-机器人互动；
- 跌倒检测；
- 手势解析。

兴趣是最好的老师！

图像处理与分析的理论价值




清华大学电子与信息技术系列教材
图象工程
上册
图象处理和分析
章毓晋 编著
清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn


教育部高等教育司推荐
国外优秀信息科学与技术系列教学用书
PEARSON
Prentice Hall
冈萨雷斯
数字图像处理
（第二版）
Digital Image Processing
Second Edition
[美] Rafael C. Gonzalez
Richard E. Woods 著
阮秋琦 阮宇智 等译
電子工業出版社
http://www.phei.com.cn
权威作者
经典力作
www.shixinhua.com

教学提纲

- 概述
- 傅里叶变换
- 可分离和正交变换
- 沃尔什变换
- 哈达玛变换
- 离散余弦变换
- 霍特林变换

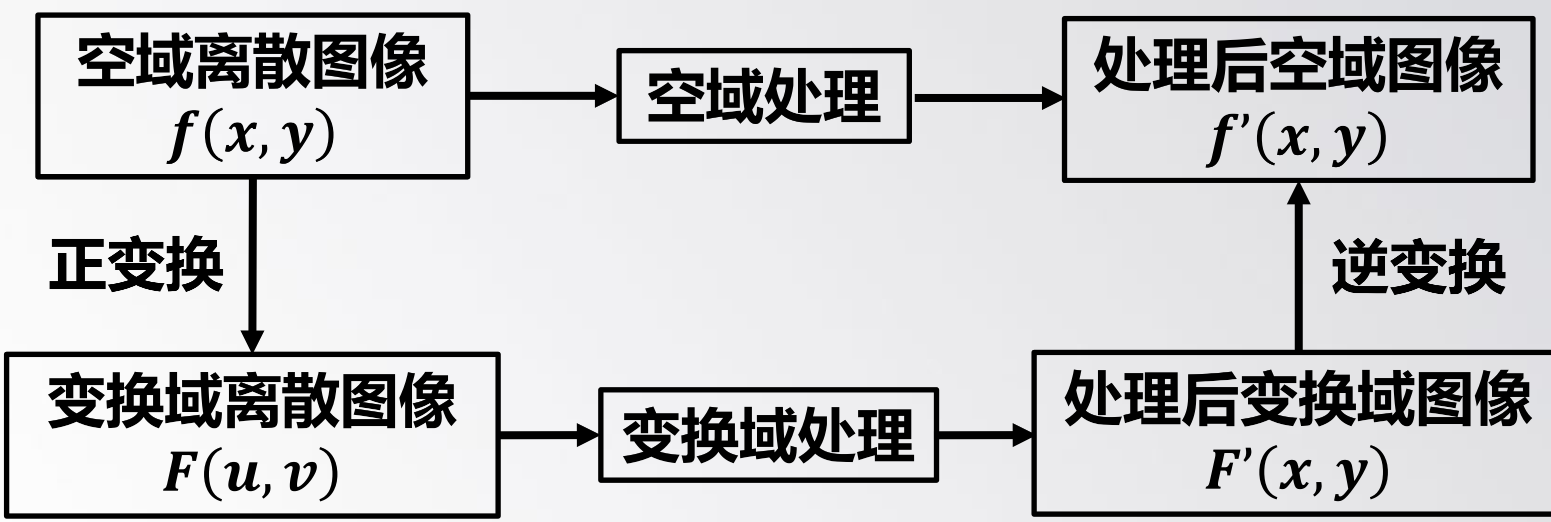
概述

- 原则上，所有图像处理都是图像的变换，而本章所谓的图像变换特指数字图像经过某种数学工具的处理，把原先**二维空间域**中的数据，变换到另外一个**“变换域”**形式描述的过程。例如，傅里叶变换将时域或空域信号变换成频域的能量分布描述。

- 任何图像信号处理都不同程度改变图像信号的**频率成份分布**，因此，对信号的频域（变换域）分析和处理是重要的技术手段，而且，有一些在空间域不容易实现的操作，可以在频域（变换域）中简单、方便地完成。

概述

- 如上所述，图像变换是讲$N \times N$维空间图像数据变换成另外一组基向量空间（通常是正交空间向量）的坐标参数，我们希望这些离散图像信号坐标参数更集中地代表了图像中的有效信息，或者是更便于达到某种处理目的。



傅里叶变换

- 傅里叶变换是一种**线性的积分变换**，常在将信号在时域（或空域）和频域之间变换时使用。因其基本思想首先由法国学者**约瑟夫·傅里叶**系统地提出，所以以其名字来命名以示纪念。

1768-1830

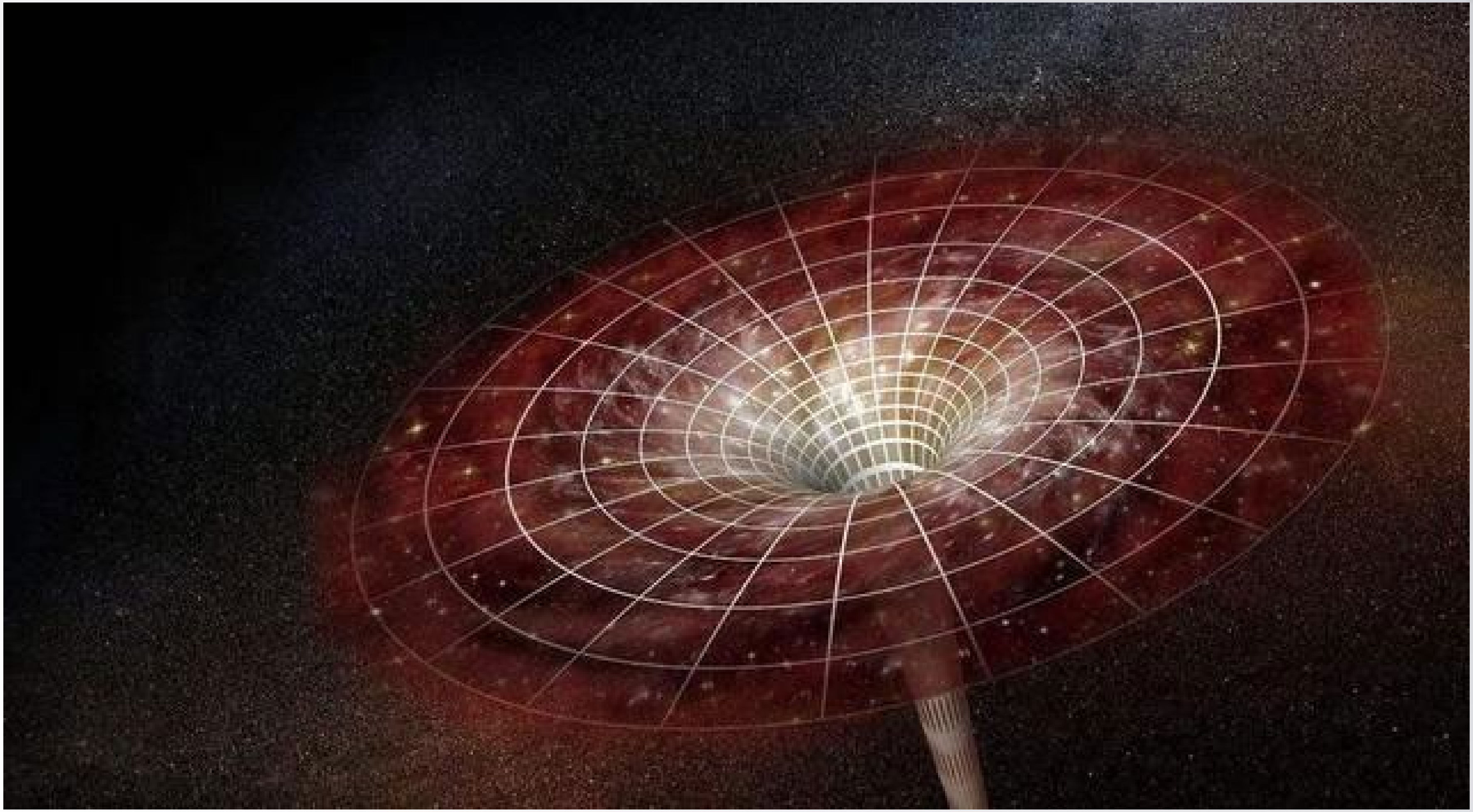
- 傅里叶变换在物理学、光学、结构动力学、量子力学、数论、组合数学、概率论、统计学、信号处理、通讯、金融等领域都有着广泛的应用。例如在信号处理中，傅里叶变换的典型用途是将信号分解成**振幅分量**和**频率分量**。

傅里叶变换

傅里叶变换将函数的时域（红色）与频域（蓝色）相关联。频谱中的不同成分频率在频域中以峰值形式表示。

傅里叶变换

傅里叶变换



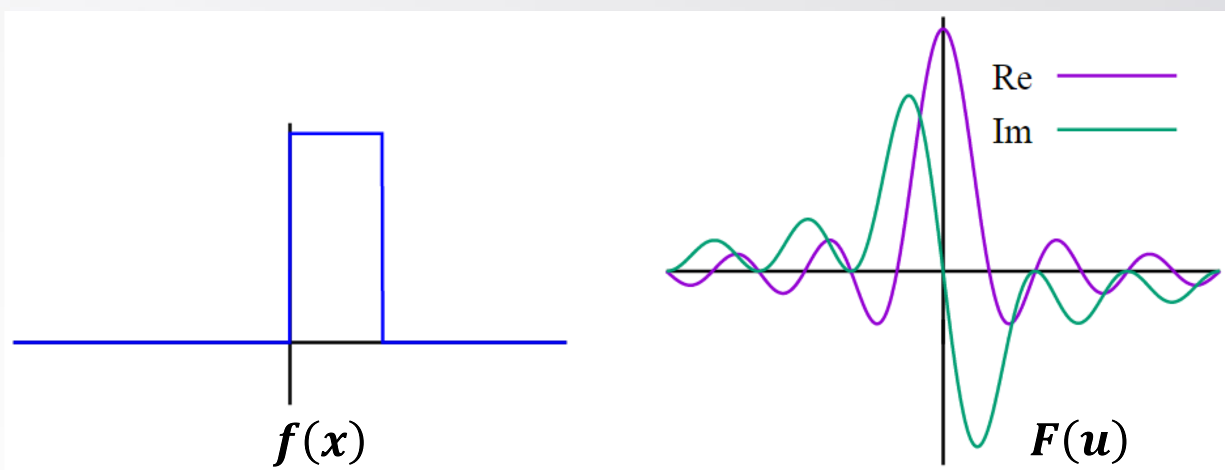
升维思考，降维打击

傅里叶变换 — 一维傅里叶变换

一维傅里叶变换的定义：$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)exp(-j2\pi ux)dx$

一维傅里叶逆变换定义：$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(u)exp(j2\pi ux)du$

$F(u)$ **包含了正弦和余弦项的无限项的和，**u**称为频率分量，它的每一个值确定了所对应的正弦-余弦对的频率。**



傅里叶变换—— 一维傅里叶变换

根据欧拉公式： $exp(-j2\pi ux) = cos2\pi ux - jsin2\pi ux$

傅里叶变换系数可以写成如下式的复数和极坐标形式:

$$F(u) = R(u) + jI(u) = |F(u)|exp[j\emptyset(u)]$$

其中:

傅里叶谱（幅值函数）为： $|F(u)| = \left[R^2(u) + I^2(u)\right]^{1/2}$

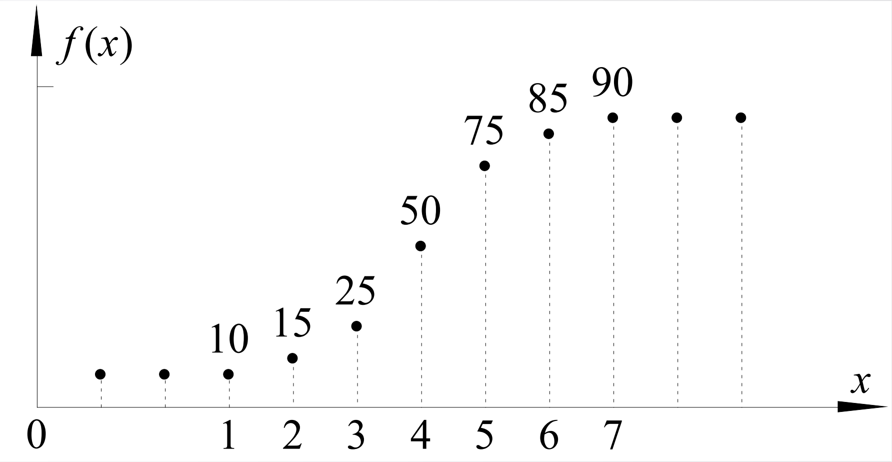
相位角为： $\emptyset(u) = arctan\left[{}^{I(u)}/_{R(u)}\right]$

功率谱为： $P(u) = |F(u)|^{\,2}$

傅里叶变换—— 一维傅里叶变换

由于实际问题的时间或空间函数的区间是**有限的**，或者是频谱有**截止频率**，至少在横坐标超过一定范围时，函数值已趋于0而可以忽略不计。将$f(x)$和$F(u)$的有效宽度同样等分为N个小间隔，对连续傅里叶变换进行近似的数值计算，得到**离散傅里叶变换**定义。

对一个连续函数$f(x)$等间隔采样



傅里叶变换—— 一维傅里叶变换

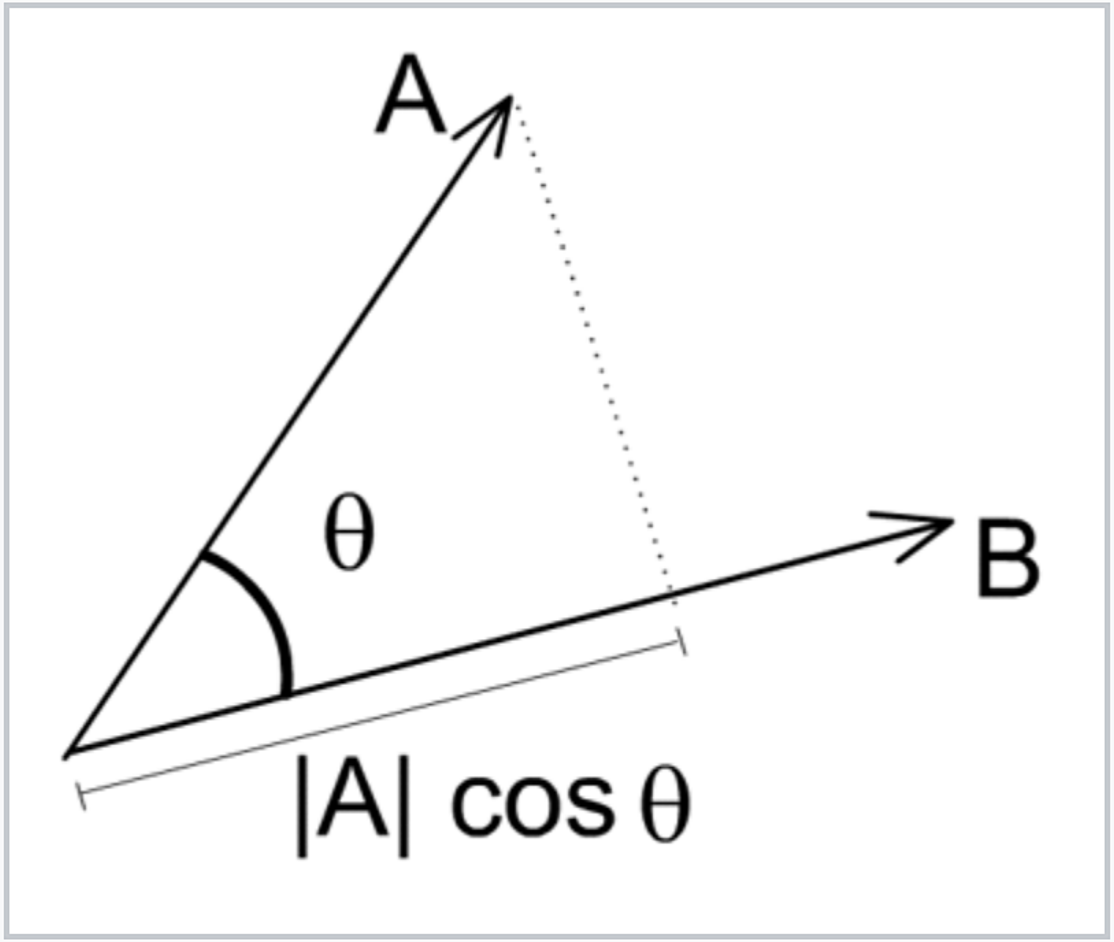
一维离散傅立叶变换与逆变换：

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)exp(-j2\pi ux/N), u = 0, 1, \cdots, N-1$$

一维离散傅立叶逆变换：

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u)exp(j2\pi ux/N), x = 0, 1, \cdots, N-1$$

傅里叶变换—— 一维傅里叶变换



$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}| \cos(\theta)$.

$|\mathbf{A}| \cos(\theta)$是**A**到**B**的投影。

傅里叶变换—— 二维傅里叶变换

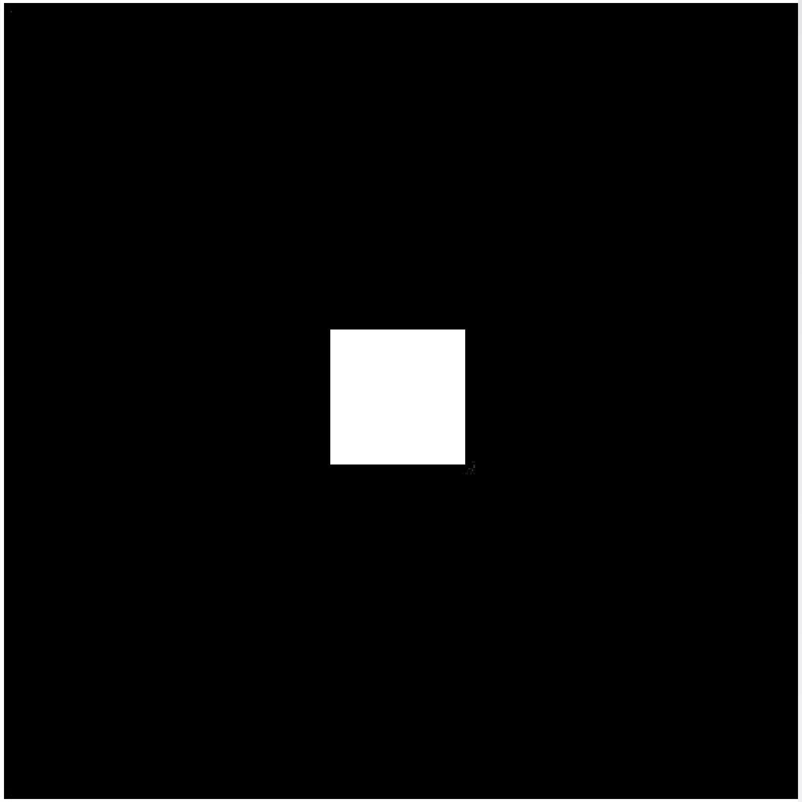
二维离散傅立叶变换：对于$N \times N$图像

$$F(u,v)=\frac{1}{NN}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)exp\left(-j2\pi\left(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{N}\right)\right)$$

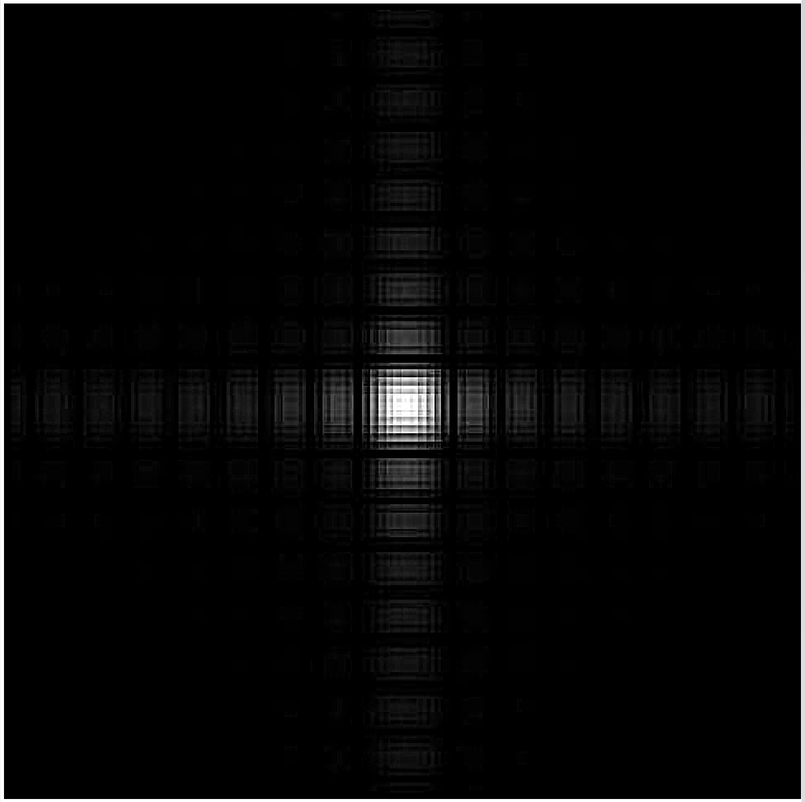
二维离散傅立叶逆变换：对于$N \times N$图像

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)exp\left(j2\pi\left(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{N}\right)\right)$$

傅里叶变换—— 二维傅里叶变换



二维图像



二维离散傅里叶变换

傅里叶变换—— 二维傅里叶变换性质

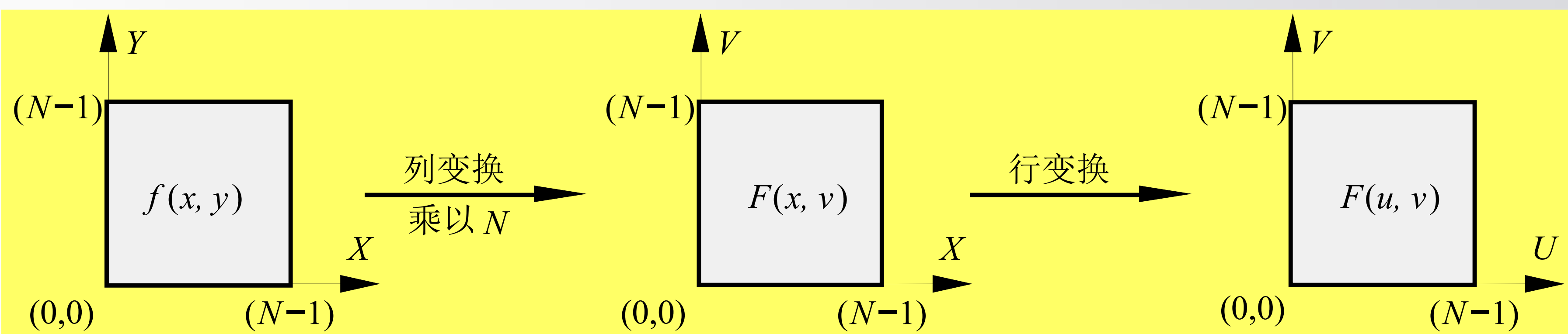
性质1：可分离性

$$F(x,v)=\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp[-\mathrm{j}2\pi vy/N]$$

$$F(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} F(x,v)\exp[-\mathrm{j}2\pi ux/N]$$

1次2-D $\Rightarrow$ 2次1-D

$O(N^4)$减为$O(N^2)$



傅里叶变换—— 二维傅里叶变换性质

性质2：平移性

空域平移：

$$f\left(x-x_0,y-y_0\right)\Leftrightarrow F\left(u,v\right)\exp\left[-j2\pi\left(ux_0+vy_0\right)/N\right]$$

频域平移：

$$f\left(x,y\right)\exp\left[j2\pi\left(u_0x+v_0y\right)/N\right]\Leftrightarrow F\left(u-u_0,v-v_0\right)$$

傅里叶变换— 二维傅里叶变换性质

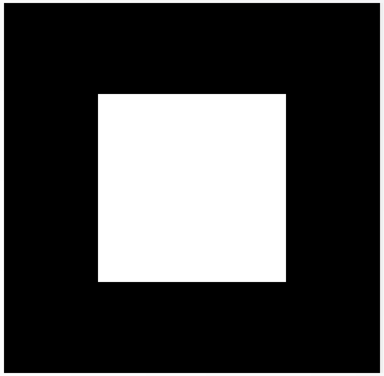
性质2：平移性

当$u_0 = v_0 = N/2$时有：

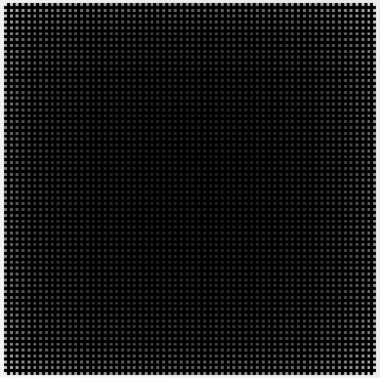
$$\exp\left[j2\pi\left(u_0x+v_0y\right)/N\right]=e^{j\pi(x+y)}=\left(-1\right)^{x+y}$$

$$f\left(x,y\right)\left(-1\right)^{x+y}\Leftrightarrow F\left(u-N/2,v-N/2\right)$$

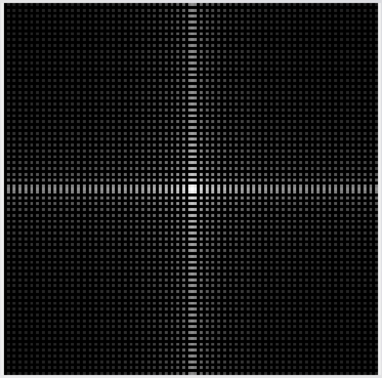
可以简单地用$(-1)^{x+y}$乘以$f(x,y)$,将其的傅里叶变换的原点移到相应$N\times N$频率方阵的中心。



简单图像



无平移的傅里叶谱



中心平移的傅里叶谱

傅里叶变换—— 二维傅里叶变换性质

性质3：周期性和共轭对称性

离散的傅里叶变换和它的反变换具有周期为N的周期性：

$$F(u,v)=F(u+N,v)=F(u,v+N)=F(u+N,v+N)$$

如果$f(x,y)$是实函数，则它的傅里叶变换具有共轭对称性：

$$F(u,v)=F^*(-u,-v)$$

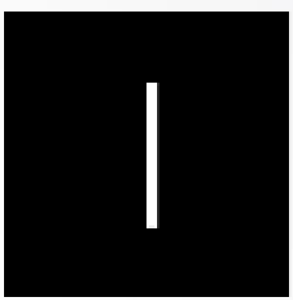
傅里叶变换— 二维傅里叶变换性质

性质4：旋转性质

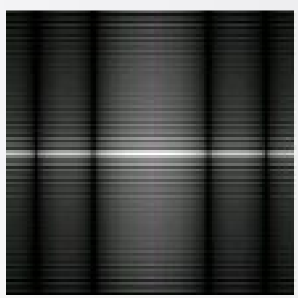
在极坐标系下有： $f(x,y)=f(r,\theta)\Leftrightarrow F(\omega,\varphi)$

如果$f(x,y)$被旋转θ_0，则$F(u,v)$被旋转同一角度：

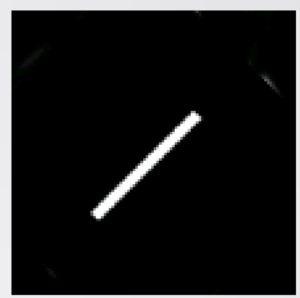
$$f(r,\theta+\theta_0)\Leftrightarrow F(\omega,\varphi+\theta_0)$$



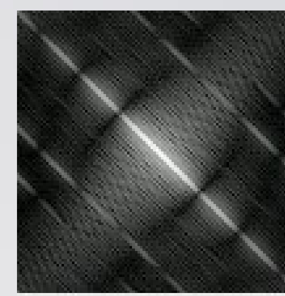
简单图像



傅里叶谱



旋转后图像



旋转后图像的傅里叶谱

傅里叶变换—— 二维傅里叶变换性质

性质5：分配率

$$af_1(x,y)+bf_2(x,y)\Leftrightarrow aF_1(u,v)+bF_2(u,v)$$

性质6：尺度缩放

$$af(x,y)\Leftrightarrow aF(u,v)$$

$$f(ax,by)\Leftrightarrow \frac{1}{|ab|}F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)$$

傅里叶变换—— 二维傅里叶变换性质

性质7：$F(0,0)$与图像均值的关系：

二维图像灰度均值定义： $\overline{f}(x,y)=\frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$

同时有： $F(0,0)=\frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$

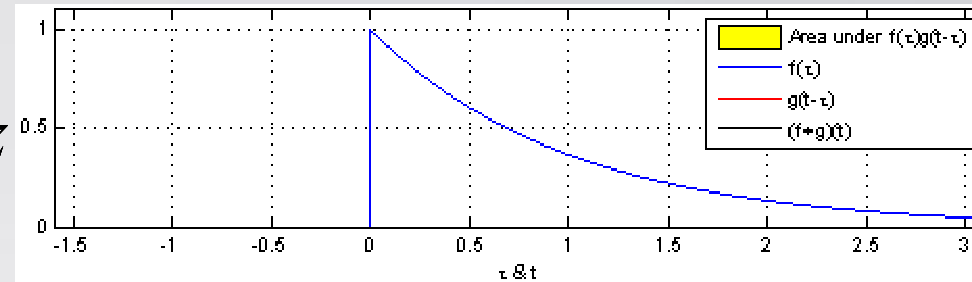
因此有： $\overline{f}(x,y)=F(0,0)$

即$F(0,0)$等于图像灰度均值。

傅里叶变换—— 二维傅里叶变换性质

性质8：卷积与相关定理：

$$f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(x-z)\,dz$$



$$f(x)*g(x)\Leftrightarrow F(u)G(u)$$

$$f(x)g(x)\Leftrightarrow F(u)*G(u)$$

对于二维有：

$$f(x,y)*g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(p,q)g(x-p,y-q)\mathrm{d}p\mathrm{d}q$$

$$f(x,y)*g(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)G(u,v)$$

$$f(x,y)g(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)*G(u,v)$$

傅里叶变换—— 快速傅里叶变换

由一维傅里叶变换入手，换一种表示方法：

$$F(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)W_N^{ux},\text{其中}W_N=\exp(-j2\pi/N)$$

将上式展开得到：

$$F(0)=f(0)W_N^{00}+f(1)W_N^{01}+\cdots f(N-1)W_N^{0(N-1)}$$

$$F(1)=f(0)W_N^{10}+f(1)W_N^{11}+\cdots f(N-1)W_N^{1(N-1)}$$

$$F(2)=f(0)W_N^{20}+f(1)W_N^{21}+\cdots f(N-1)W_N^{2(N-1)}$$

$$\cdots$$

$$F(N-1)=f(0)W_N^{(N-1)0}+f(1)W_N^{(N-1)1}+\cdots f(N-1)W_N^{(N-1)(N-1)}$$

傅里叶变换—— 快速傅里叶变换

从上式可以看出，要得到每一个频率分量，需要进行N次乘法和$N-1$次加法运算。**要完成整个变换需要N^2次乘法和$N(N-1)$次加法运算。**当序列较长时，必然要花费大量的时间。

1965年**库利-图基**提出原始的N 点序列依次分解成一系列短序列，然后，求出这些短序列的离散傅里叶变换，以此来减少乘法运算。

傅里叶变换—— 快速傅里叶变换

$$F(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)W_N^{ux}, \text{其中} W_N=\exp(-j2\pi/N)$$

假定$N=2^n$,则$N=2M$：

$$\boxed{W_{2M}^{2ux}=W_M^{ux}}$$

$$F(u)=\frac{1}{2M}\sum_{x=0}^{2M-1} f(x)W_{2M}^{ux}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(2x)W_{2M}^{u(2x)}+\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1)W_{2M}^{u(2x+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(2x)W_M^{ux}+\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1)W_M^{ux}W_{2M}^{u}\right]$$

傅里叶变换—— 快速傅里叶变换

现在定义：

$$F_{even}(u)=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}f(2x)W_M^{ux},\boxed{u=0,1,\cdots,M-1}$$

$$F_{odd}(u)=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}f(2x+1)W_M^{ux},\boxed{u=0,1,\cdots,M-1}$$

则： $$F(u)=\frac{1}{2}\left[F_{even}(u)+F_{odd}(u)W_{2M}^{u}\right]$$

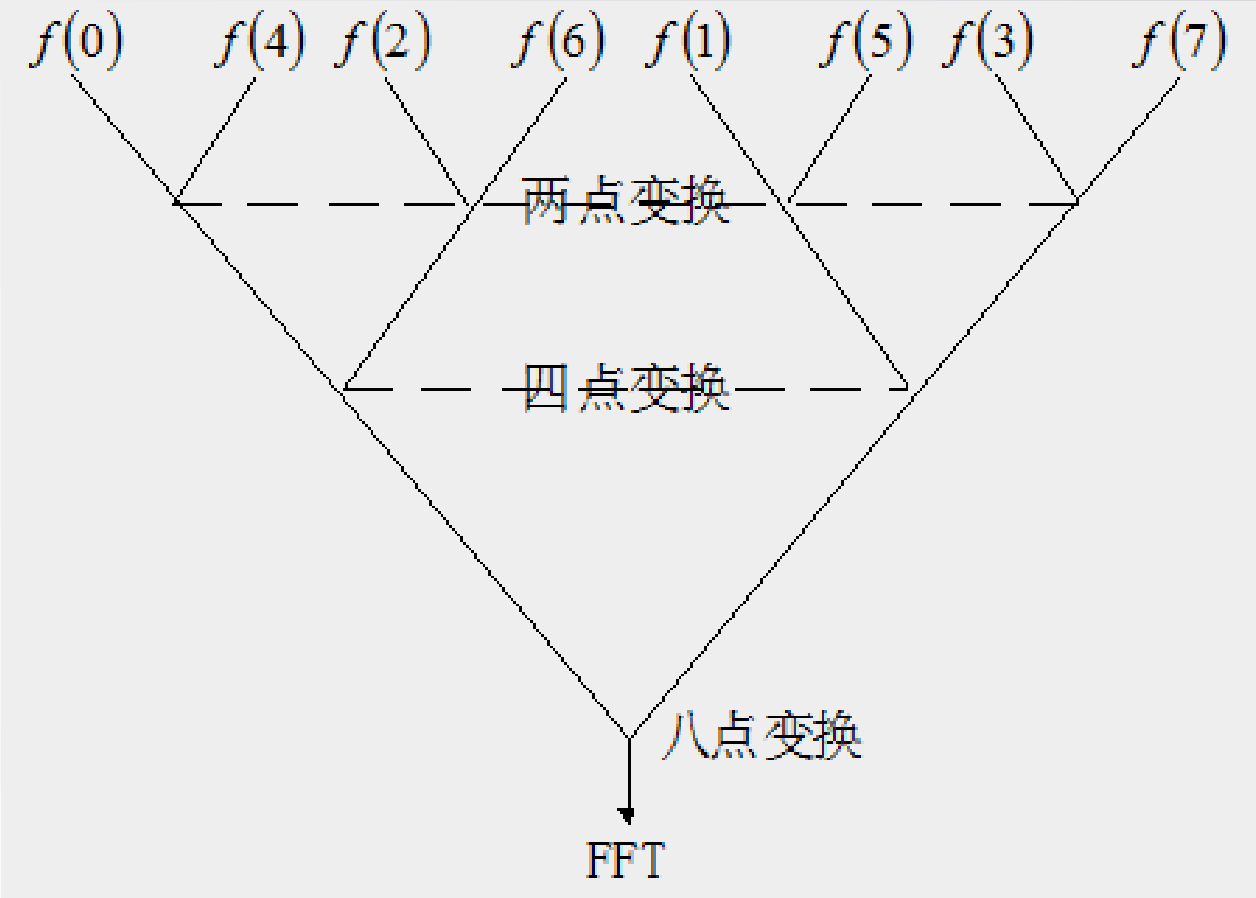
因为$W_M^{u+M}=W_M^u$和$W_{2M}^{u+M}=-W_{2M}^u$可得：

$$F(u+M)=\frac{1}{2}\left[F_{even}(u)-F_{odd}(u)W_{2M}^{u}\right]$$

傅里叶变换—— 快速傅里叶变换

由上面的分析可见，一个N 点的离散傅里叶变换可由两个$N/2$ 点的傅里叶变换得到，当N 为2的整数幂时，则$F_{even}(u)$和$F_{\mathrm{odd}}(u)$还可以再分成两个更短的序列，因此计算时间会更短。

傅里叶变换—— 快速傅里叶变换

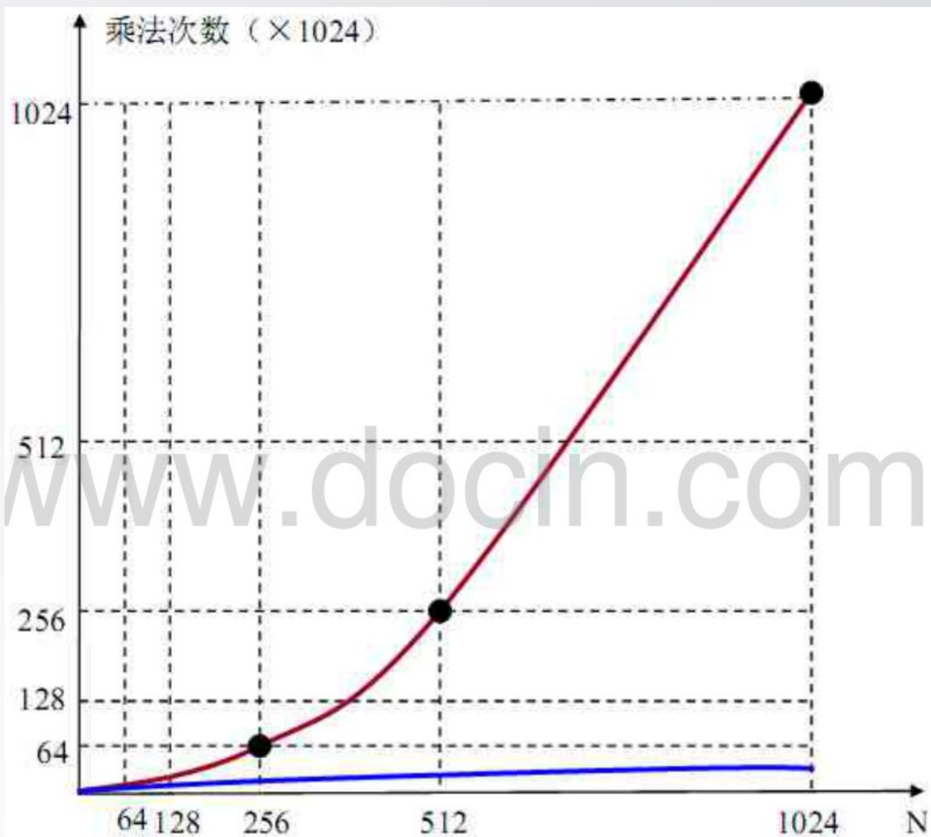


快速傅里叶变换示意图

傅里叶变换—— 快速傅里叶变换

原始傅里叶变换需要N^2次乘法和$N(N-1)$次加法运算；

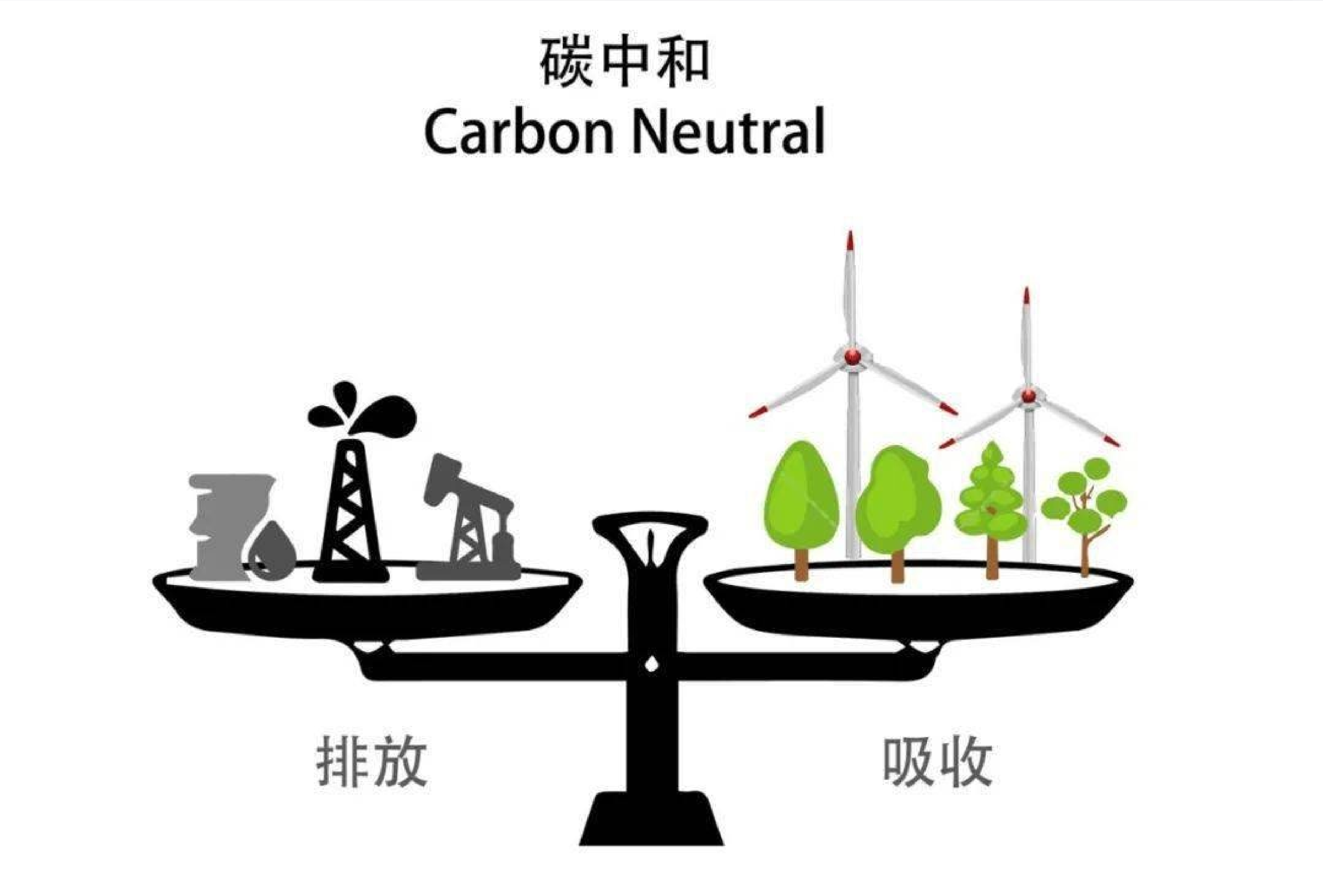
快速傅立叶变换需要$\frac{1}{2}Nlog_2^N$次乘法和$Nlog_2^N$次加法运算。



傅里叶变换—— 快速傅里叶变换

- 离散傅里叶变换已成为数字信号处理的重要工具，然而，它的**计算量大**，运算时间长，在某种程度上限制了它的使用范围；
- 快速傅里叶变换大大提高了运算速度，在某些应用场合已能做**实时处理**，并且应用在控制系统中；
- 快速傅里叶变换不是一种新的变换，它是离散傅里叶变换的一种计算方法，它是在分析离散傅里叶变换中的多余运算的基础上，进而**消除这些重复工作**的思想指导下得到的。

傅里叶变换—— 快速傅里叶变换



傅里叶变换—— 快速傅里叶变换

在MATLAB中，

- 函数fft：用于进行一维离散傅里叶变换（DFT）
- 函数fft2：用于进行二维DFT
- 函数fftn：用于进行N维DFT

另外

- 函数ifft：用于进行一维DFT的快速傅里叶反变换
- 函数ifft2：用于进行二维DFT的快速傅里叶反变换
- 函数ifftn：用于进行N维DFT的快速傅里叶反变换

可分离变换

1-D可分离变换

正变换

正向变换核

$$T(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) g(x,u) \qquad u = 0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$$

反变换

反向变换核

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} T(u) h(x,u) \qquad x = 0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$$

可分离变换

2-D可分离变换 （傅里叶变换是一个例子）

正变换

正向变换核

$$T(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)g(x,y,u,v)$$

变换核与
原始函数及
变换后函数无关

反变换

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}T(u,v)h(x,y,u,v)$$

反向变换核

可分离变换

可分离 $$g(x,y,u,v)=g_1(x,u)g_2(y,v)$$

1个2-D变换分成2个1-D变换

$$T(x,v)=\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)g_2(y,v) \qquad T(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}T(x,v)g_1(x,u)$$

对称 $$g(x,y,u,v)=g_1(x,u)g_1(y,v)$$

g_1与g_2的函数形式一样

可分离变换

$$a_{ij} = g_1(i, j)$$

可分离且对称

$N \times N$对称变换矩阵

$$\mathrm{T} = \mathrm{AFA}$$

$N \times N$变换结果

$N \times N$图象矩阵

反变换

$$\mathrm{BTB} = \mathrm{BAFAB}$$

反变换矩阵

$$\mathrm{F} = \mathrm{BTB} \qquad \mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$$

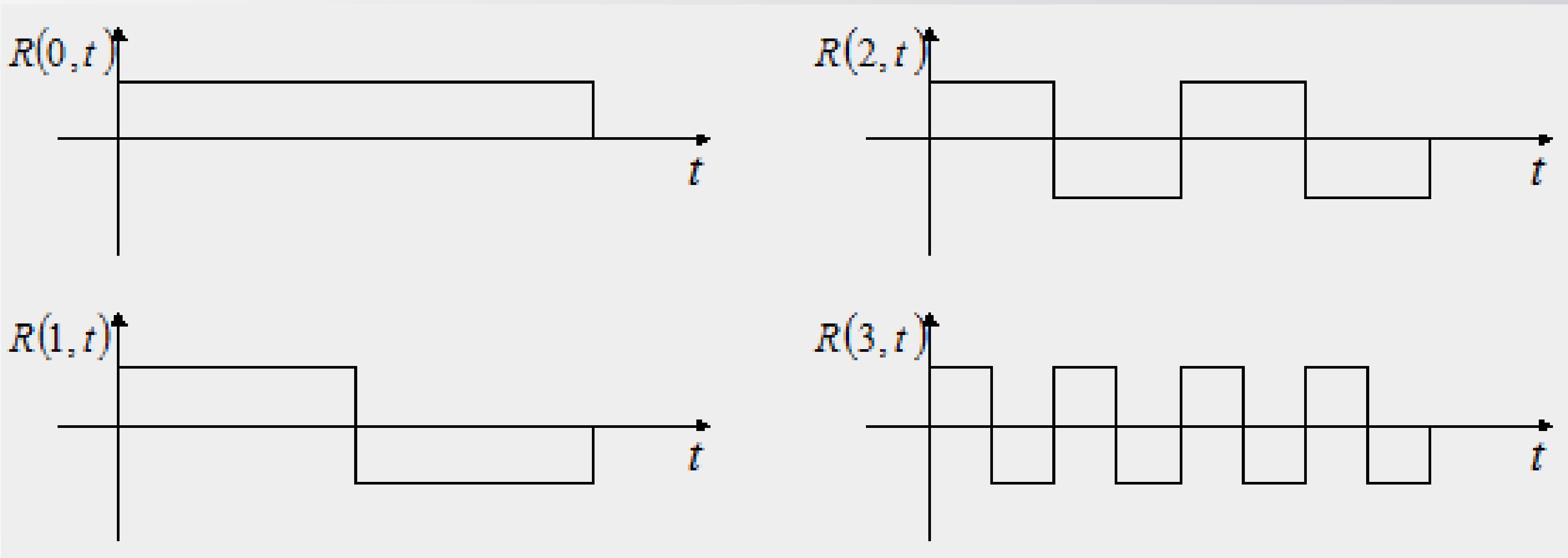
$$\hat{\mathrm{F}} = \mathrm{BAFAB} \qquad \mathrm{B} \neq \mathrm{A}^{-1}$$

沃尔什变换

沃尔什变换的变换核是一类非正弦的正交函数（Walse函数），例如方波或矩形波。与正弦波频率相对应，这种非正弦波形可用“列率”（单位时间内波形通过零点数平均值的一半）描述。沃尔什函数可以由Rademacher函数构成，Rademacher函数集是一个不完备的正交函数集，Rademacher函数有两个自变量u和x，用$R(u,x)$表示。

$$R(u,x) = Sgn\left(\cos 2^{u} \pi x\right)$$

沃尔什变换



Rademacher函数

沃尔什变换

正变换核

$$\boxed{N = 2^n} \qquad h(x,u) = \frac{1}{N}\prod_{i=0}^{n-1}(-1)^{b_i(x)\, b_{n-1-i}(u)}$$

$b_k(z)$： z 的二进制表达中的第 k 位

如 $n = 3$

对 $z = 6$（110_2）

有 $b_0(z) = 0$，$b_1(z) = 1$，$b_2(z) = 1$

沃尔什变换

正变换 $$W(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)\prod_{i=0}^{n-1}(-1)^{b_i(x)\,b_{n-1-i}(u)}$$

变换核组成的矩阵是一个对称矩阵并且其行和列正交
(反变换核与正变换核只差1个常数1/*N*)

反变换核 $$k(x,u)=\prod_{i=0}^{n-1}(-1)^{b_i(x)\,b_{n-1-i}(u)}$$

反变换 $$f(x)=\sum_{u=0}^{N-1}W(u)\prod_{i=0}^{n-1}(-1)^{b_i(x)\,b_{n-1-i}(u)}$$

沃尔什变换

u \ x	0	1	2	3	4	5	6	7
0	+	+	+	+	+	+	+	+
1	+	+	+	+	−	−	−	−
2	+	+	−	−	+	+	−	−
3	+	+	−	−	−	−	+	+
4	+	−	+	−	+	−	+	−
5	+	−	+	−	−	+	−	+
6	+	−	−	+	+	−	−	+
7	+	−	−	+	−	+	+	−

$N = 8$时1-D沃尔什变换核的值

沃尔什变换

2-D沃尔什变换

正

$$h(x,y,u,v)=\frac{1}{N}\prod_{i=0}^{n-1}(-1)^{\left[b_i(x)\,b_{n-1-i}(u)+b_i(y)\,b_{n-1-i}(v)\right]}$$

$$W(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\prod_{i=0}^{n-1}(-1)^{\left[b_i(x)\,b_{n-1-i}(u)+b_i(y)\,b_{n-1-i}(v)\right]}$$

反

$$k(x,y,u,v)=\frac{1}{N}\prod_{i=0}^{n-1}(-1)^{\left[b_i(x)\,b_{n-1-i}(u)+b_i(y)\,b_{n-1-i}(v)\right]}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}W(u,v)\prod_{i=0}^{n-1}(-1)^{\left[b_i(x)\,b_{n-1-i}(u)+b_i(y)\,b_{n-1-i}(v)\right]}$$

沃尔什变换

2-D沃尔什变换核：可分离且对称

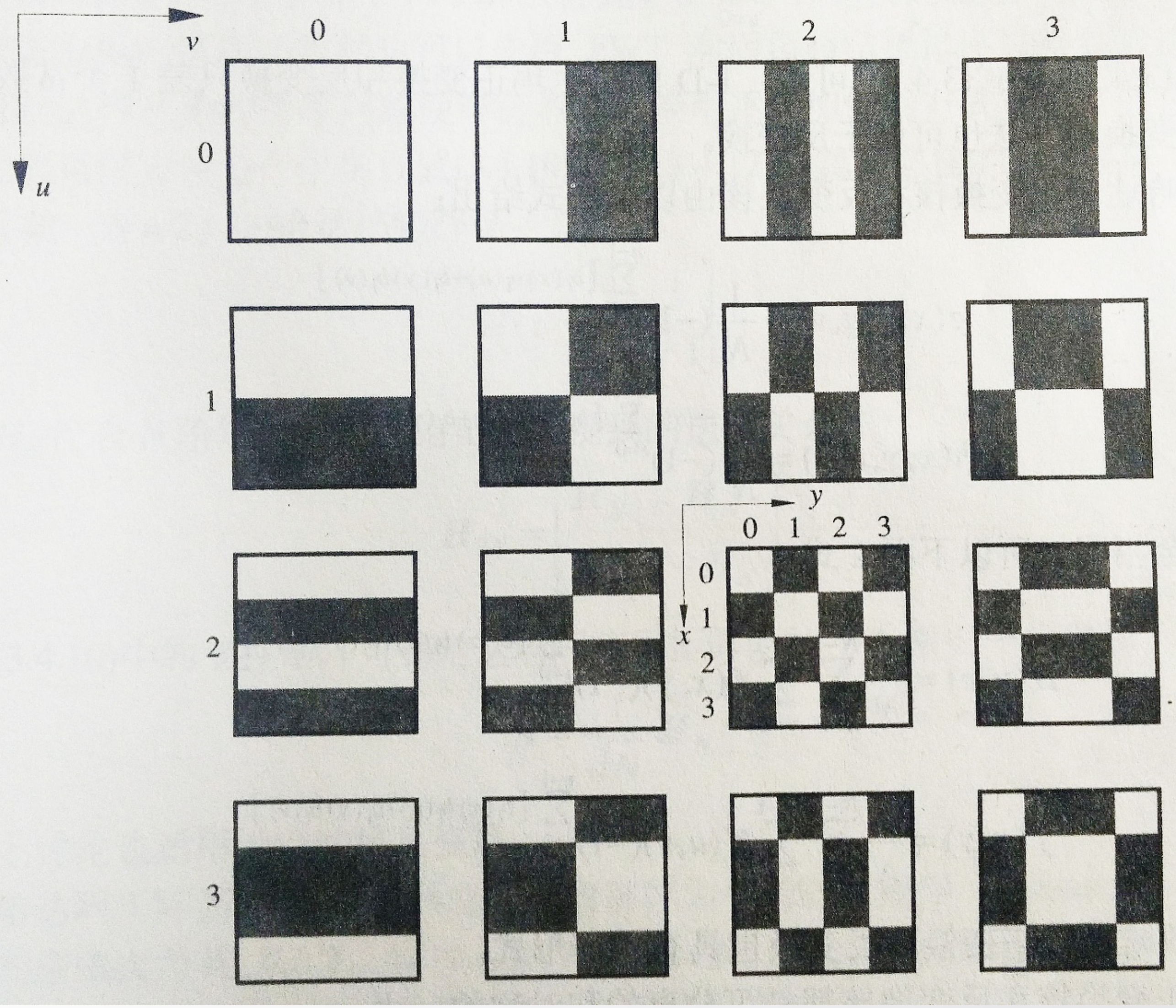
$$h(x,y,u,v)=h_1(x,u)h_1(y,v)$$
$$=k_1(x,u)k_1(y,v)$$
$$=\left[\frac{1}{\sqrt{N}}\prod_{i=0}^{n-1}(-1)^{b_i(x)\,b_{n-1-i}(u)}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{N}}\prod_{i=0}^{n-1}(-1)^{b_i(y)\,b_{n-1-i}(v)}\right]$$

沃尔什变换快速算法

$$W(u)=\frac{1}{2}\left[W_{even}(u)+W_{odd}(u)\right]$$

$$W(u+M)=\frac{1}{2}\left[W_{even}(u)-W_{odd}(u)\right]$$

沃尔什变换



$N = 4$时沃尔什变换基本函数

沃尔什变换

为什么要做沃尔什变换?

傅里叶变换

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)exp(-j2\pi ux/N)$$

沃尔什变换

$$W(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)\, b_{n-1-i}(u)}$$

沃尔什变换

- 沃尔什变换是实现图像变换的重要方法之一。它是一种对应二维离散的数字变换，大大提高运算速度；
- 变换核是值为+1或-1的有序序列。这种变换只需要做加法或者减法运算，不需要向傅里叶变换那样做复数乘法运算，所以能提高计算机的运算速度，减少存储容量。这种变换同时有快速算法，能进一步提高运算速度。

哈达玛变换

正变换核：

$$h(x,u)=\frac{1}{N}(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x)\, b_i(u)}$$

$\boldsymbol{b_k(z)}$：$\boldsymbol{z}$ **的二进制表达中的第** $\boldsymbol{k}$ **位**

正变换：

$$H(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) b_i(u)}$$

哈达玛变换

反变换核：

$$k(x,u) = (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x)\, b_i(u)}$$

反变换核与正变换核只差1个常数1/*N*

反变换：

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} H(u)(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x)\, b_i(u)}$$

用于正变换的算法也可用于反变换

哈达玛变换

2-D变换核：

$$h(x,y,u,v)=\frac{1}{N}(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1}\left[\,b_i(x)\,b_i(u)+b_i(y)\,b_i(v)\,\right]}$$

$$k(x,y,u,v)=\frac{1}{N}(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1}\left[\,b_i(x)\,b_i(u)+b_i(y)\,b_i(v)\,\right]}$$

2-D变换对：

$$H(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1}\left[\,b_i(x)\,b_i(u)+b_i(y)\,b_i(v)\,\right]}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}H(u,v)(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1}\left[\,b_i(x)\,b_i(u)+b_i(y)\,b_i(v)\,\right]}$$

哈达玛变换

最小阶（$N=2$）的哈达玛矩阵是：

$$H_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

如用H_N代表N阶矩阵，则有：

$$H_{2N}=\begin{bmatrix}H_N & H_N\\ H_N & -H_N\end{bmatrix}$$

沃尔什与哈达玛变换

沃尔什变换和哈达玛变换比较

- 可分离且对称，正反变换核相同
- 行列正交（即各行向量与各列向量的内积为0）

沃尔什变换特点

有快速算法（类似快速傅里叶变换）

哈达玛变换特点

有迭代性质（可通过迭代的方式方便地获得矩阵）

离散余弦变换

离散余弦变换（Discrete Cosine Transform - DCT）是傅里叶变换的一种特殊情况。在傅里叶级数展开式中，被展开的函数是实偶函数时，其傅里叶级数中只包含余弦项，称之为余弦变换。

1-D离散余弦变换及其反变换：

$$a(u)=\begin{cases}\sqrt{1/N} & \text{当}u=0\\ \sqrt{2/N} & \text{当}u=1,2,\cdots,N-1\end{cases}$$

$$C(u)=a(u)\sum_{x=0}^{N-1}f(x)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right],u=0,1,\cdots,N-1$$

$$f(x)=\sum_{u=0}^{N-1}a(u)C(u)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right],x=0,1,\cdots,N-1$$

离散余弦变换

2-D离散余弦变换及其反变换：

$$C(u,v)=a(u)a(v)\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]\cos\left[\frac{(2x+1)v\pi}{2N}\right]$$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}a(u)a(v)C(u,v)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]\cos\left[\frac{(2x+1)v\pi}{2N}\right]$$

$$C(0,0)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$$

$$C(0,v)=\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right]$$

$$C(u,0)=\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\left[\frac{(2y+1)u\pi}{2N}\right]$$

$$C(u,v)=\frac{2}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]\cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right]$$

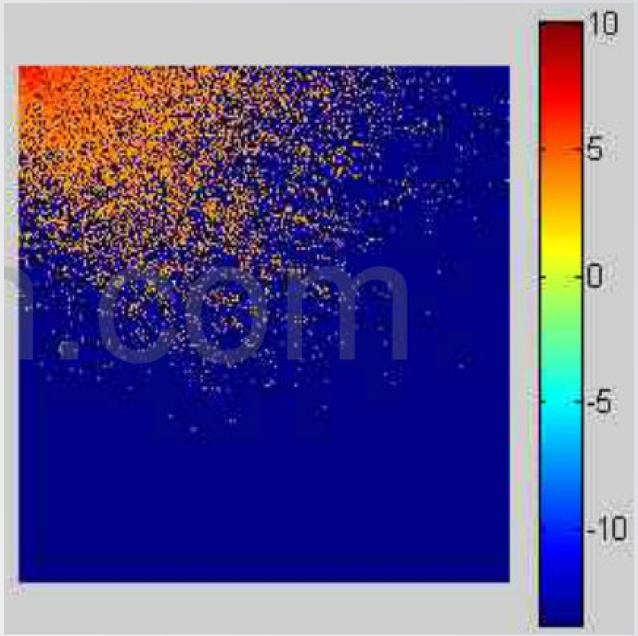
离散余弦变换

- 傅里叶变换需要复数的乘法和加法运算，而复数运算比实数运算要费时得多；
- 离散余弦变换是实值变换，计算复杂度适中，又具有可分离性，还有快速算法，变换后有很少的非零元素，所以被广泛地用在图像数据压缩编码算法中，如JPEG、MPEG-1、MEPG-2、和H.261等压缩编码国际标准都采用了离散余弦变换编码算法；
- 其变换核为实数的余弦函数，因而DCT的计算速度比DFT快得多。

离散余弦变换

- DCT矩阵的**左上角**代表低频分量，**右下角**代表高频分量；
- 由DCT域图像我们能够了解图像主要包含低频成份。
- MATLAB提供了**dct2**函数和**idct2**函数进行二维DCT变换和逆变换计算。

空间域图像



DCT域图像


ICIP 2015
IEEE
Best Student
Paper Award
(2nd place)
Awarded to:
Vincent DROUARD
Silèye BA
Georgios EVANGELIDIS
Antoine DELEFORGE
Radu HORAUD
For the paper ARS-O16.6 entitled:
HEAD POSE ESTIMATION VIA PROBABILISTIC HIGH-DIMENSIONAL REGRESSION
Philip CHOU

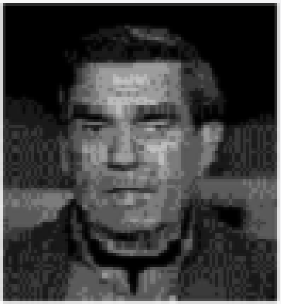
霍特林变换

- 霍特林变换与之前讨论的各种变换不同，它是一种基于**图像统计**的变换；

- 霍特林变换在连续域对应的变换是KL(Karhunen-Loeve)变换。霍特林变换也常称为特征值变换、**主成分分析**或离散KL变换；

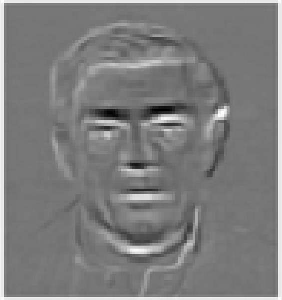
- 当变量之间存在一定的相关关系时，可以通过原始变量的线性组合，构成为数较少的不相关的**新变量**代替原始变量，而每个新变量都含有**尽量多**的原始变量信息。这种处理问题的方法叫做主成分分析，新变量叫做原始变量的**主成分**。

霍特林变换



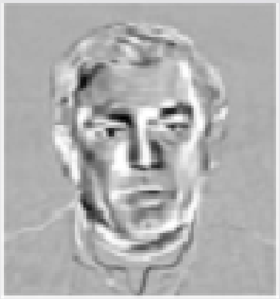
人脸图像

$$= y_1 \times$$



主成分1

$$+ y_2 \times$$



主成分2

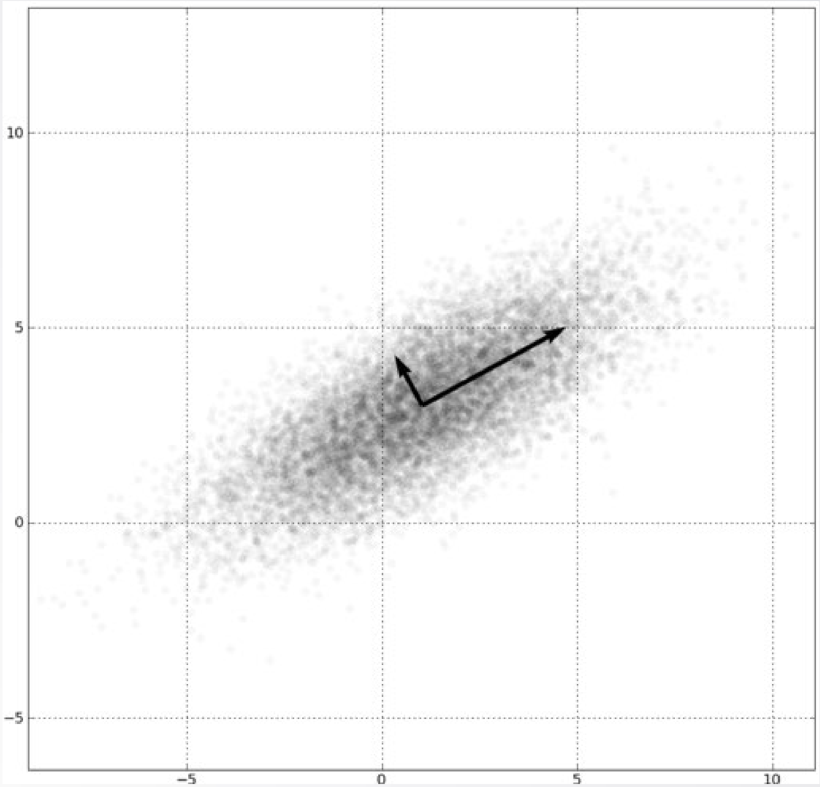
$$+ y_3 \times$$

主成分3

$$+ \cdots$$

霍特林变换

- 主成分的基本思想是，先对 N 个数据点求出第一条“最佳”拟合直线，使得这N个点到该直线的垂直距离的平方和**最小**，并称此直线为第一主成分。然后再求与第一主成分相互**独立**（或者说垂直）的，且与N个点的垂直距离平方和最小的第二主成分。



霍特林变换

- 有M幅大小为$N \times N$的图像$\{f_1(x,y), f_2(x,y), \dots f_M(x,y)\}$。将每幅图像表示成向量形式：

$$x_i = \{f_i(0,0), f_i(0,1), \cdots f_i(N-1, N-1)\}^t$$

- 这组随机向量的均值向量为：

$$m_x = E\{x\}$$

- 这组随机向量的**协方差矩阵**可定义为：

$$C_x = E\{(x - m_x)(x - m_x)^t\}$$

- 令$\emptyset_i$和$\lambda_i, i = 1, 2, \cdots N^2$是$C_x$的特征向量和对应的特征值，其中特征值按降序排列，$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots \lambda_{N^2}$，则霍特林变换矩阵的行为$C_x$的特征向量，具体定义为：

$$A = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N^2} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N^2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_{N^2 1} & \phi_{N^2 2} & \cdots & \phi_{N^2 N^2} \end{bmatrix}$$

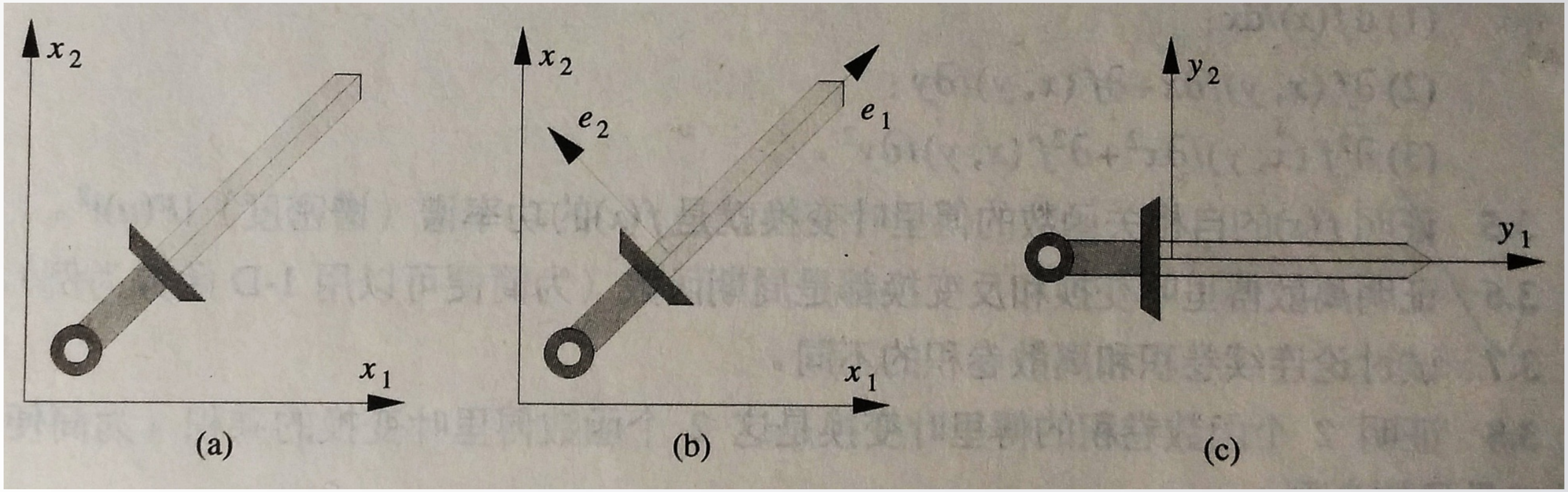
$\emptyset_{ij}$对应第i个特征向量的第j个分量

霍特林变换

- 基于变换矩阵A，霍特林变换可以表示为：

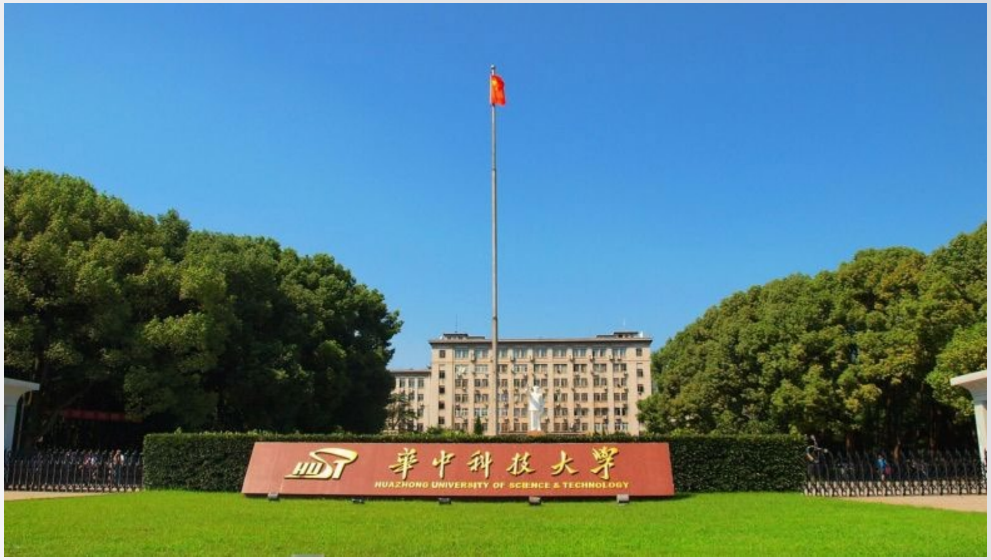
$$y = A(x - m_x)$$

- 用霍特林变换将x映射到y实际上是建立了1个新的坐标系，其坐标轴在C_x的特征矢量方向上



课后习题

- 结合授课内容和自身的理解，请尝试阐述傅里叶变换与傅里叶系数的物理含义，可以上网查阅相关的资料。



- 编写程序（建议Matlab）对以上图像（自行转换为灰度图）展开傅里叶变换，提取傅里叶变换图像（将频率原点移至图像中心），并形成实验报告。

- 上述作业请在2021年9月26日前，将电子档（附电子签名）以班级的形式发送至27191420@qq.com

谢谢各位同学！