

数字信号处理

Digital signal processing

第二章离散时间信号与系统

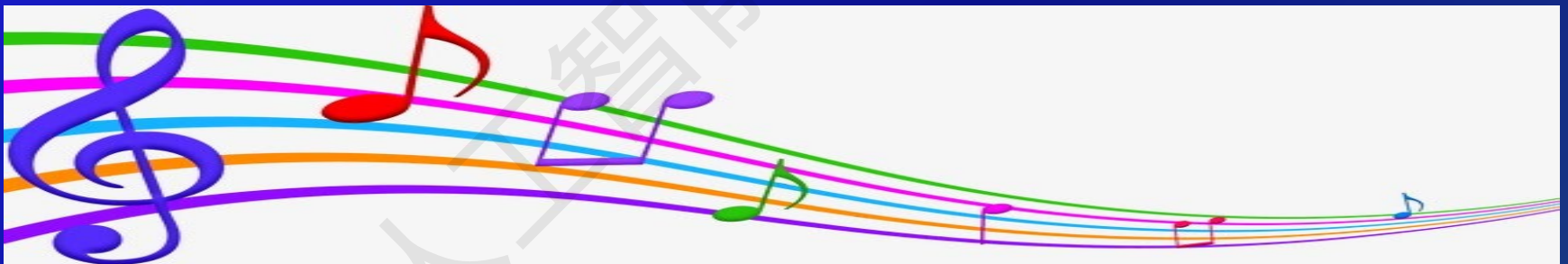
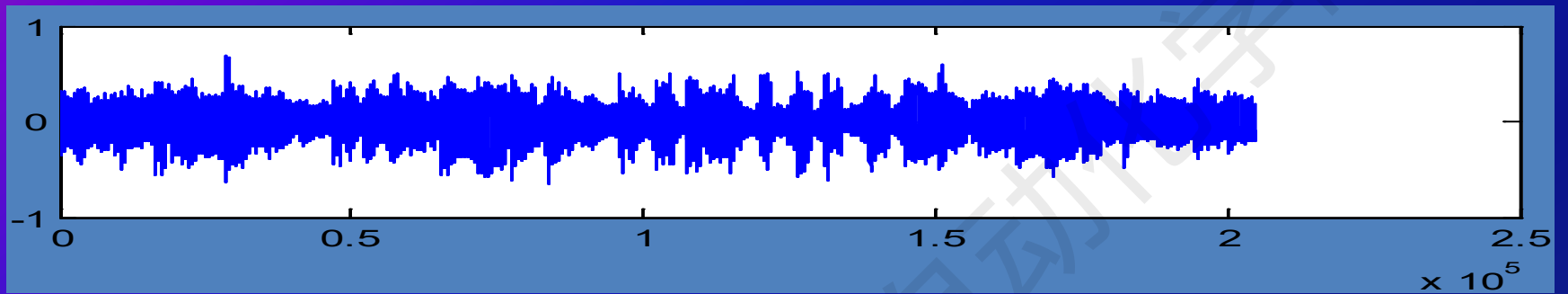
-2.4离散时间信号和系统的频域描述

华中科技大学 人工智能与自动化学院

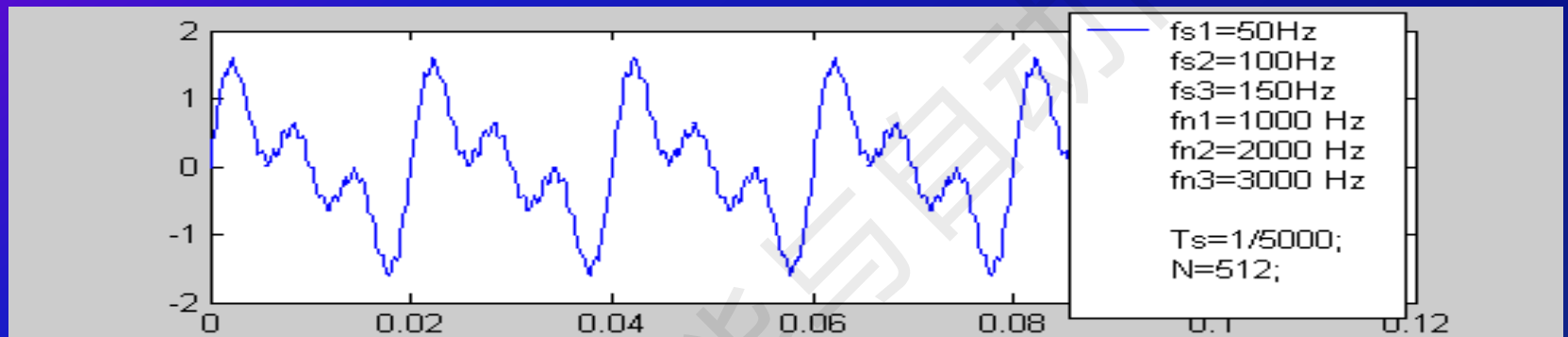
- School of AI&Automation.
- Huazhong University of Science and Technology

蔡超

caichao@hust.edu.cn

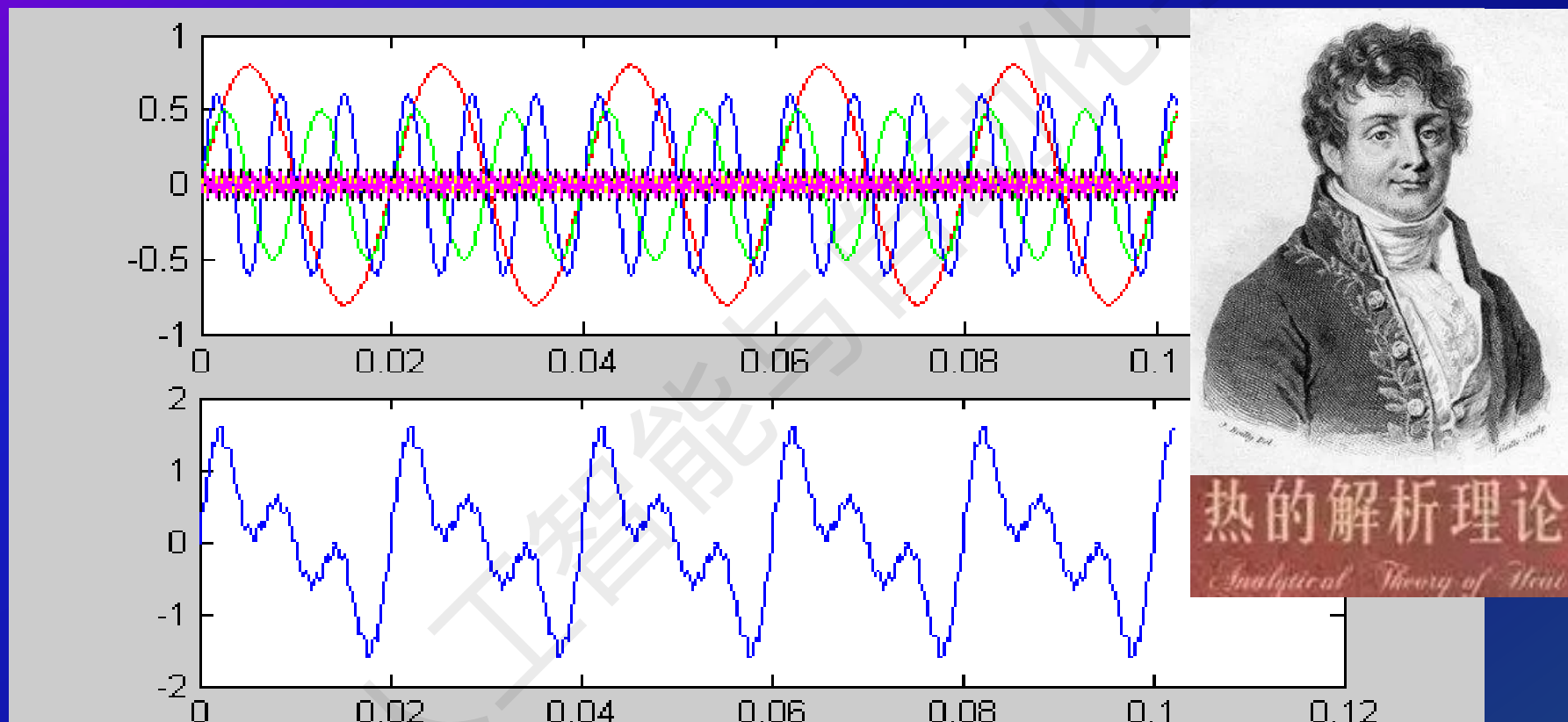


时域（空域）和频域



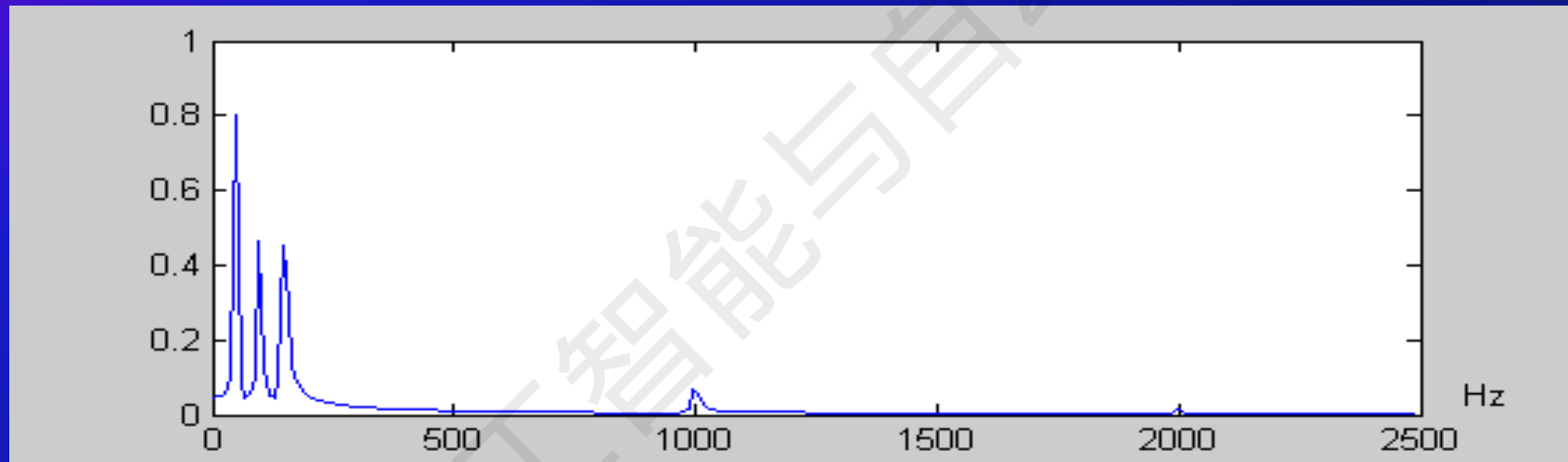
时域信号能直观地反映随时间变化信号的总体波动情况。
但是不能够反映各个子成分的信息。

1807年法国的热学工程师J.B.J.Fourier提出任一函数都能展开成三角函数的无穷级数的创新概念

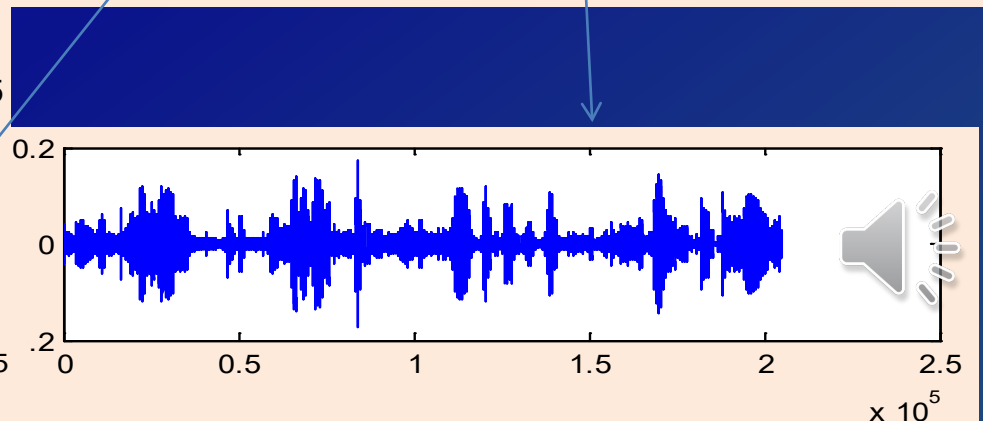
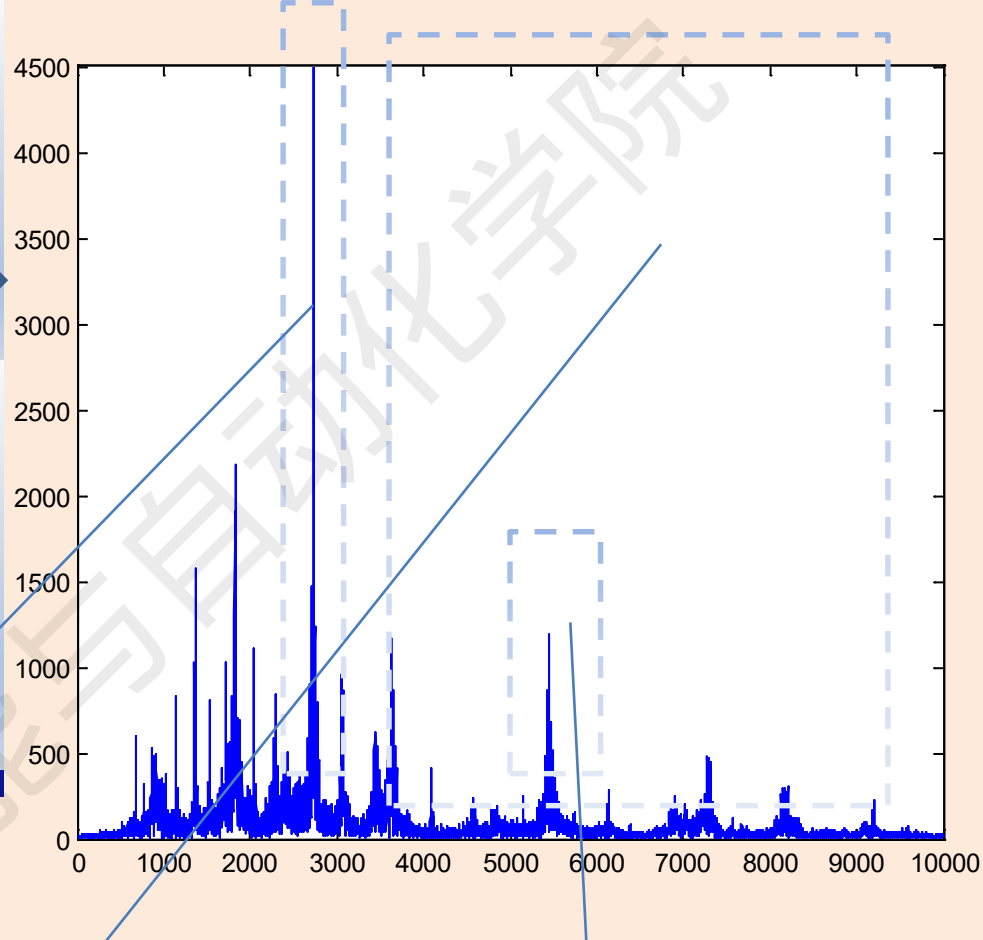
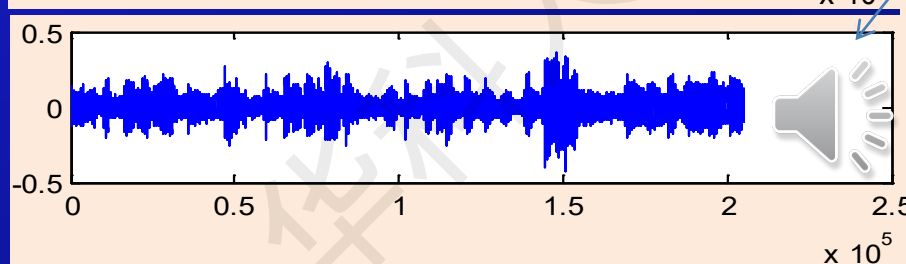
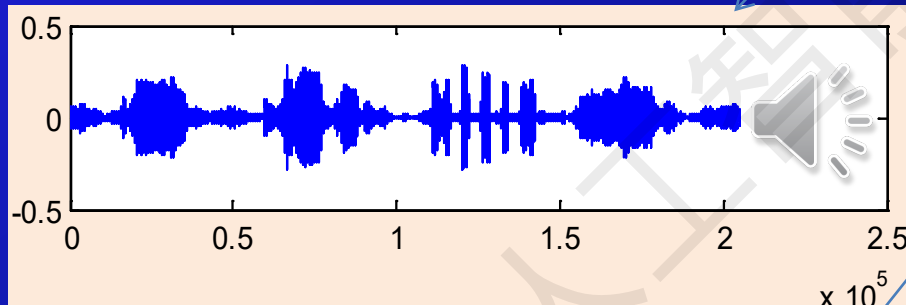
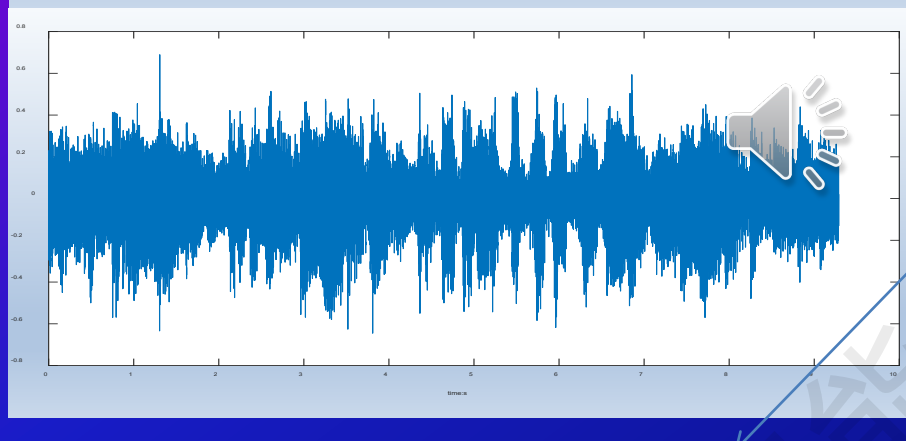
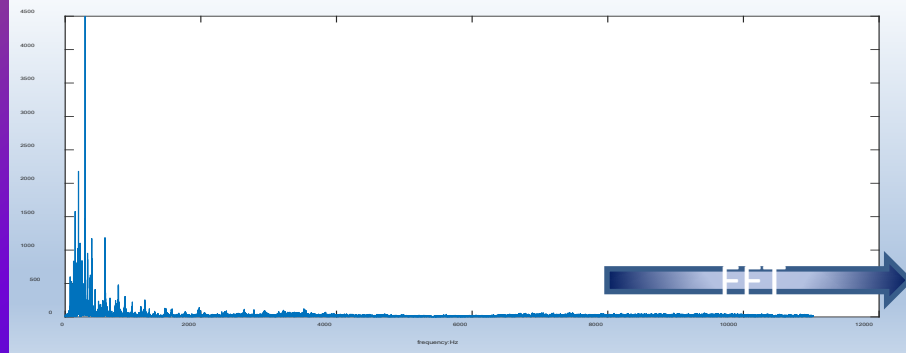


- $$s = A_1 \sin(2\pi f_{s1} t) + A_2 \sin(2\pi f_{s2} t) + A_3 \sin(2\pi f_{s3} t) + A_{n1} \sin(2\pi f_{n1} t) + A_{n2} \sin(2\pi f_{n2} t) + A_{n3} \sin(2\pi f_{n3} t);$$

- $s = A1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot fs1 \cdot t) + A2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot fs2 \cdot t) + A3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot fs3 \cdot t) + An1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot fn1 \cdot t) + An2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot fn2 \cdot t) + An3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot fn3 \cdot t);$



频域信号能够较好地反映构成时域信号的各个分量的组成情况



2.4.1 序列的傅里叶变换的定义及性质

- 序列傅里叶变换的定义

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

复习:

连续信号的傅里叶变换的定义是什么?

连续信号

$$\begin{cases} X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \end{cases}$$

为序列 $x(n)$ 的傅里叶变换, 用FT(Fourier Transform)表示。 **注意:**

① $X(e^{j\omega})$ 是以 2π 为周期的 ω 的连续函数。这是因为 $e^{j(\omega+2\pi)n} = e^{j\omega n}$, 所以由式(2.34a)可得出 $X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$ 。

② 当 $x(n)$ 为实序列时, $X(e^{j\omega})$ 的幅值 $|X(e^{j\omega})|$ 在 $0 \leq \omega \leq 2\pi$ 区间内是偶对称函数, 相位 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 是奇对称函数。

FT成立的充分必要条件是序列 $x(n)$ 绝对可和，即满足下式：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (2.2)$$

- FT反变换定义为：

$$\begin{aligned} x(n) &= \mathcal{F}^{-1} \left[X(e^{j\omega}) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \end{aligned} \quad (2.3)$$

【例1】 设 $x(n)=R_N(n)$ ，求 $x(n)$ 的傅里叶变换。

解

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega N/2}(e^{j\omega N/2}-e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2})} \\ &= e^{-j(N-1)\omega/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \end{aligned}$$

当 $N=4$ 时，其幅度与相位随频率 ω 的变化曲线如图1所示。

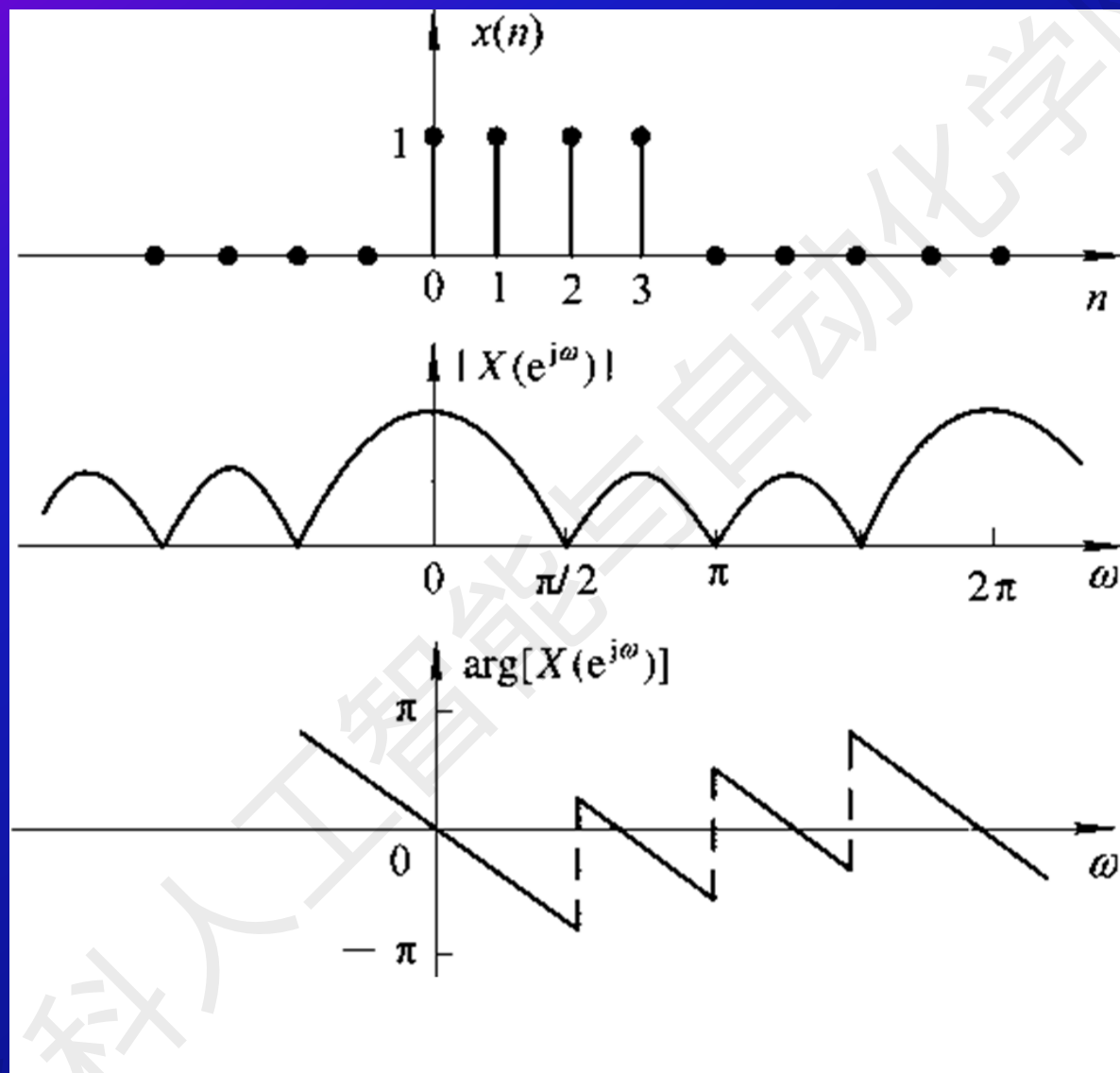


图1: $R_4(n)$ 的幅度与相位曲线

- 序列傅里叶变换的性质
- 1. FT的周期性

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi M)n}, \quad (2.4)$$

⇒ 序列的傅里叶变换是频率 ω 的周期函数，周期是 2π 。

由于FT的周期性，一般
只分析 $\pm\pi$ 或 $0\sim 2\pi$ 之间的FT

• 2. 线性

设 $X_1(e^{j\omega}) = FT[x_1(n)], X_2(e^{j\omega}) = FT[x_2(n)],$
则 $FT[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}) \quad (2.5)$

式中a, b为常数。

在时间轴上移动信号，相当于同时移动若干正弦信号，这些正弦信号的相位改变幅值不变，在频域的作用也就是傅里叶的模不变 相位改变。

• 3. 时移与频移

设： $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)],$ 则

$$FT[x(n - n_0)] = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega}) \quad (2.6)$$

$$FT[e^{j\omega_0 n} x(n)] = X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \quad (2.7)$$

8. 时域卷积定理

设 $y(n)=x(n)*h(n)$,

$$\text{则 } Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) \quad (2.25)$$

定理说明，两序列卷积的FT，服从相乘的关系。

对LTI系统，其输出的FT等于输入信号的FT乘以单位脉冲响应的FT。

因此求系统的输出信号，

(1)可以在时域用卷积公式；

(2)可以在频域求出输出的FT，再作逆FT求出输出信号。

9. 频域卷积定理

设 $y(n) = x(n) \cdot h(n)$ ，则：

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) H(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (2.26)$$

定理说明，在时域两序列相乘，对应频域为卷积关系。

10. 帕斯维尔(Parseval)定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (2.27)$$

定理说明，信号时域的总能量等于频域的总能量。

这里频域总能量是指 $|X(e^{j\omega})|^2$ 在一个周期中的积分再乘以 $1/(2\pi)$ 。

2.4.3 离散时间系统的频率响应

系统函数（单位脉冲响应的傅立叶变换）

$$H(e^{j\omega}) = F[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

称为系统的频率响应，又称为系统的传输函数。

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \text{——频率响应 (frequency response)}$$

$$|H(e^{j\omega})| \text{——幅度响应 (magnitude response)}$$

$$\theta(\omega) = \arg\{H(e^{j\omega})\} \text{——相位响应 (phase response)}$$

$$g(\omega) = 20\log_{10}|H(e^{j\omega})| \text{——增益函数 (gain function)}$$

$$a(\omega) = -g(\omega) \text{——衰减函数 (attenuation function)}$$

或损失函数 (loss function)

物理
意义

2.4.3 离散时间系统的频率响应

频率响应 $H(e^{j\omega})$ 与冲激响 $h(n)$ 构成一对傅里叶变换.

$$H(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}$$
$$h(n) = \mathcal{F}^{-1}[H(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

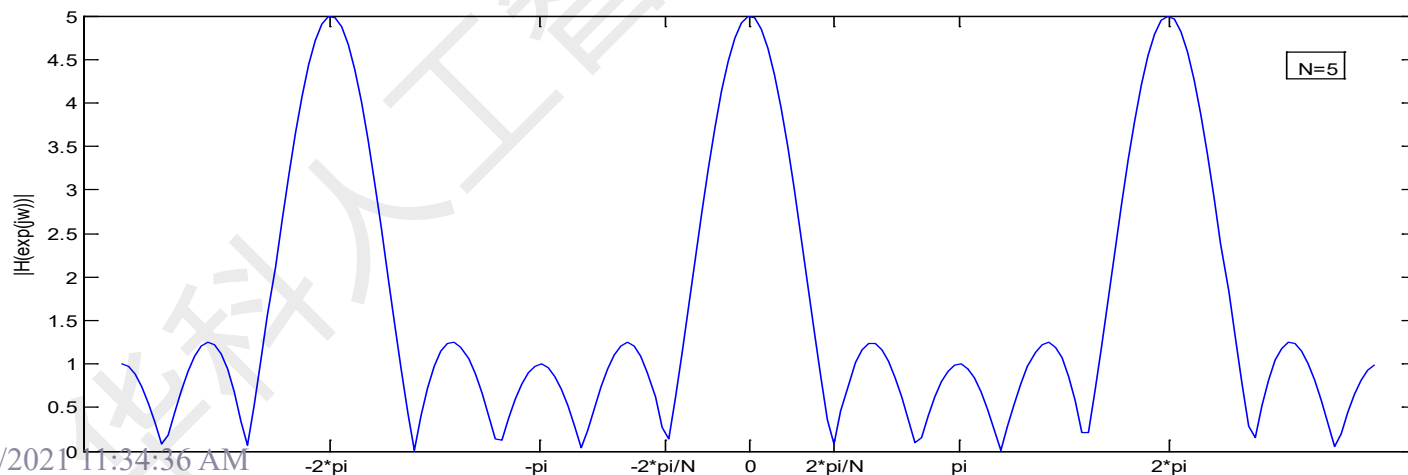
系统频率响应是以 2π 为周期的 ω 的连续函数。若 $h(n)$ 为实数, 则系统的幅度响应 $|H(e^{j\omega})|$ 在 $0 < \omega < 2\pi$ 内是偶对称的, 而相位响应 $\arg[H(e^{j\omega})]$ 是奇对称的。

例：求具有下列单位取样响应的系统频率响应

$$h(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$\text{解： } H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}$$

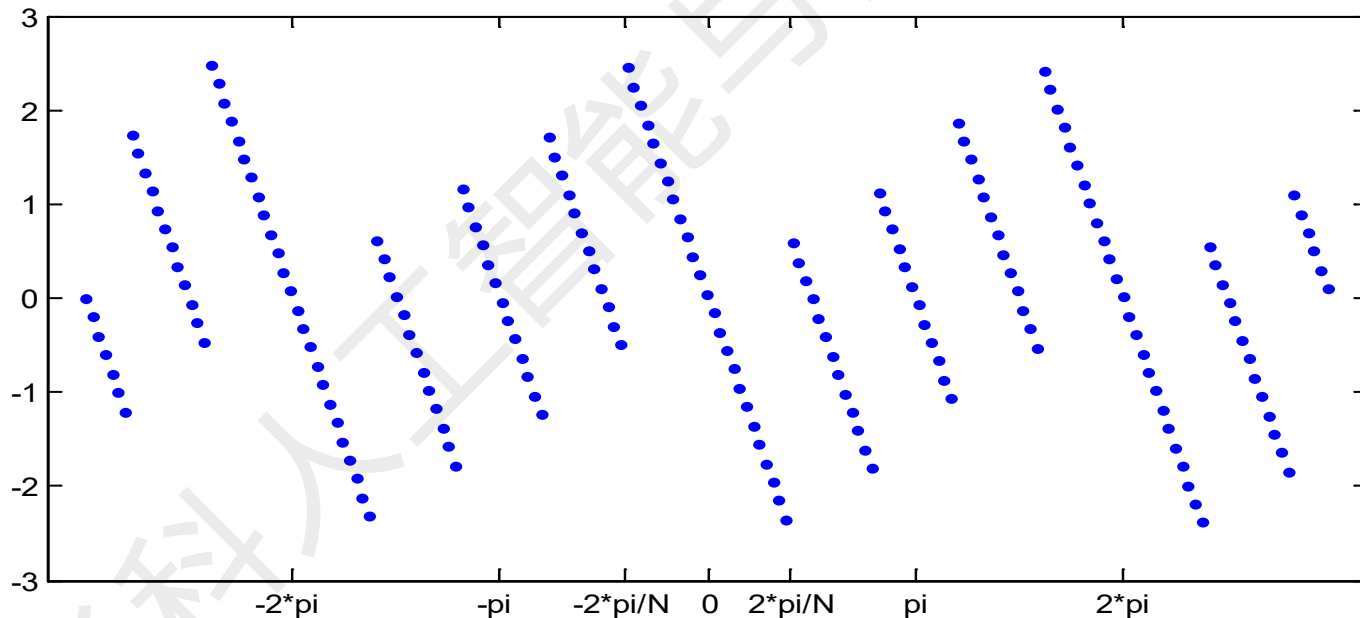
$$= \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2}$$



```

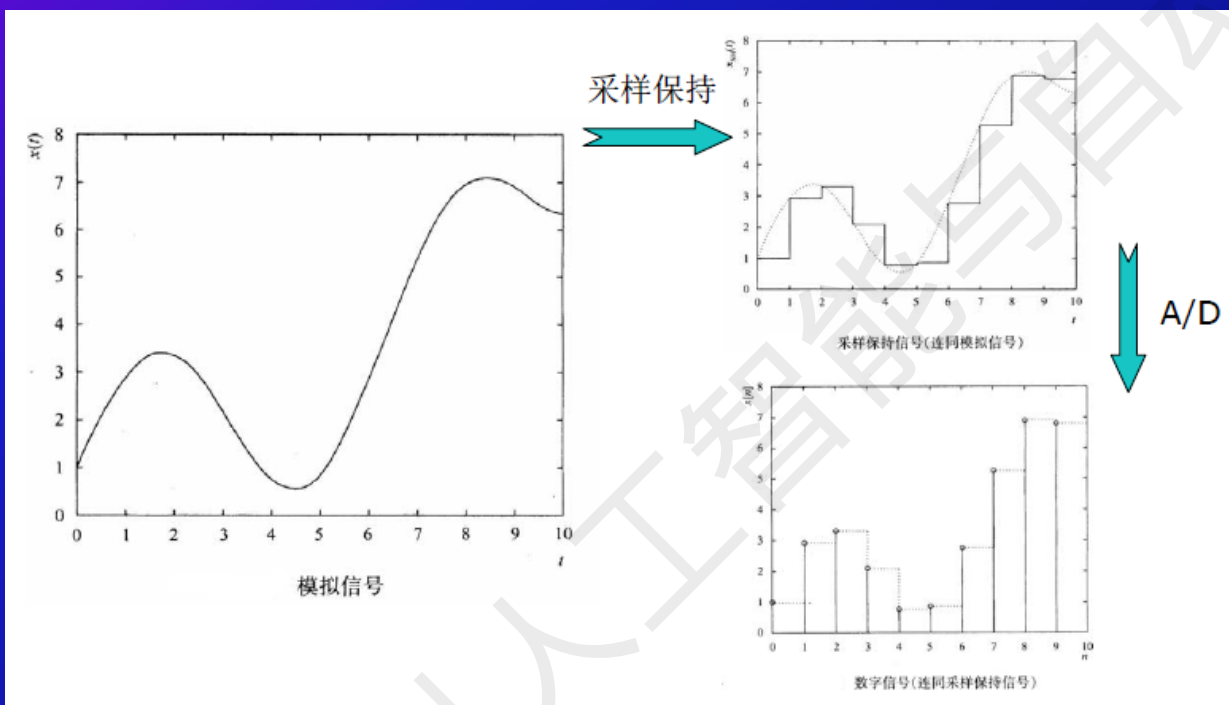
w=-3*pi:0.1:3*pi;
N=5;
Hw=sin(w*N/2)./sin(w/2).*exp(-j*(N-1)*w/2);
plot(w,abs(Hw))
set(gca,'XTick',[-2*pi,-pi,-2*pi/5,0,2*pi/5,pi,2*pi])
set(gca,'XTickLabel',{'-2*pi','-pi','-2*pi/N','0','2*pi/N','pi','2*pi'})
plot(w,angle(Hw),'.')
set(gca,'XTick',[-2*pi,-pi,-2*pi/5,0,2*pi/5,pi,2*pi])
set(gca,'XTickLabel',{'-2*pi','-pi','-2*pi/N','0','2*pi/N','pi','2*pi'})

```



9/26/2014 The angle function can be expressed as $\text{angle}(z) = \text{atan2}(\text{imag}(z), \text{real}(z))$

2.5 信号的取样

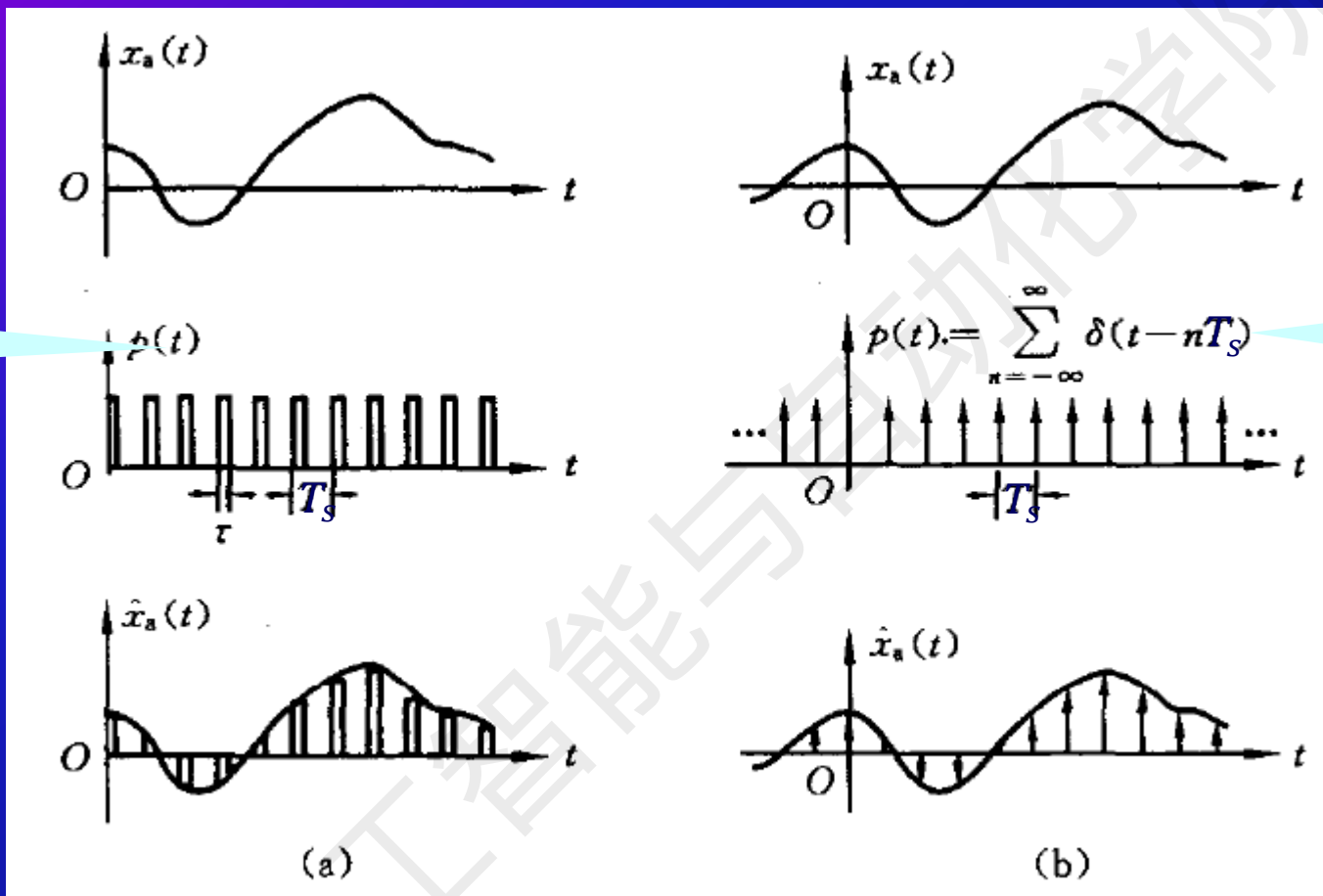


采样过程

1. 模拟信号经取样变为离散时间信号后，是否会丢失一些信息呢？不丢失信息应满足什么条件？
2. 信号的频谱会发生怎样的变化？

取样脉冲
序列

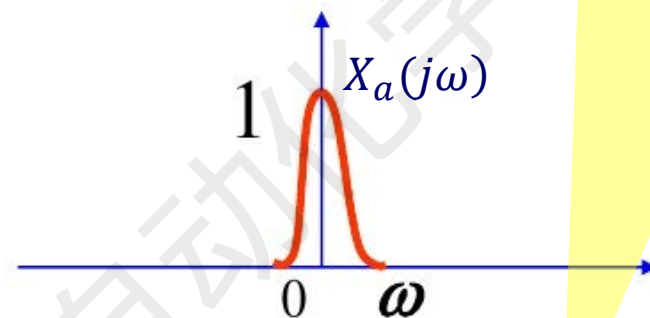
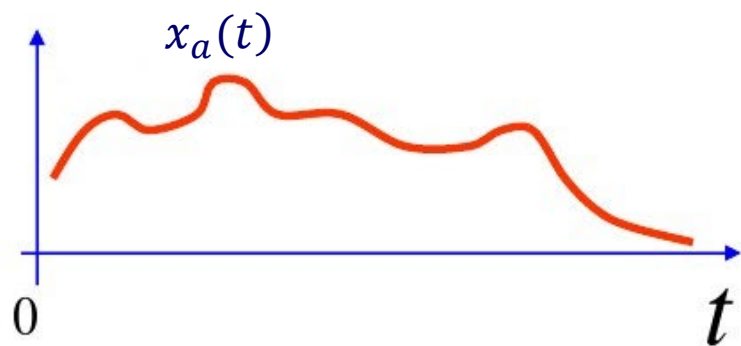
冲激函数
序列



连续时间信号的取样
(a) 实际取样; (b) 理想取样

二 理想抽样的傅立叶变换

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(j\omega - nj\Omega_s)$$



1、理想抽样 $\tau \rightarrow 0$

冲激函数序列: $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$

理想抽样输出:

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

求理想抽样的频谱 $\hat{X}_a(j\omega)$

2. 频谱延拓

取样信号与模拟信号的频谱之间的关系：

$$X_a(j\omega) = FT[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned}\hat{X}_a(j\omega) &= FT[\hat{x}_a(t)] = FT[x_a(t) \cdot p(t)] \\ &= FT[x_a(t)] * FT[p(t)] = X_a(j\omega) * P(j\omega)\end{aligned}$$

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(j\omega - nj\omega_s)$$

$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}$ 称为基波频率或取样角频率

所以：

$$\begin{aligned} \hat{X}_a(j\omega) &= FT[\hat{x}_a(t)] = FT[x_a(t) \cdot p(t)] \\ &= FT[x_a(t)] * FT[p(t)] = \frac{1}{2\pi} X_a(j\omega) * P(j\omega) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) * \delta(j\omega - jn\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(j\omega - jn\omega_s)$$

见教材43页由p(t)的傅里叶基数展开后傅里叶变换得到

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_s t} = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t}$$

可以看出，取样信号的频谱 $\hat{X}_a(j\omega)$ 是模拟信号频谱 $X_a(j\omega)$ 的周期延拓，周期为取样角频率 ω_s 。也就是说，取样信号的频谱包括原信号频谱和无限个经过平移的原信号频谱，这些频谱都要乘以系数 $\frac{1}{T_s}$

信号的频谱

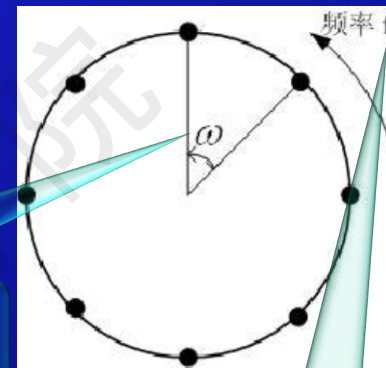
香农抽样定理

在信号 x_a 的频带受限的情况下，取样频率应等于或大于信号最高频率的两倍，即

$$\omega_s \geq 2\omega_0$$

取样频率的一半，即 $\omega_s/2$ 称为折叠频率。等于信号最高频率两倍的取样频率称为奈奎斯特频率。

频率归一化



离散时间信号的傅里叶变换:

数字频率单位为弧度(rad)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \Rightarrow X(e^{j2\pi f T_s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi f n T_s}$$

数字频率 ω (每个采样点间隔的弧度(rad))

物理频率单位为赫兹(Hz)

物理频率 $f = \frac{\omega}{2\pi} f_s$ (模拟频率, 单位为赫兹(Hz))

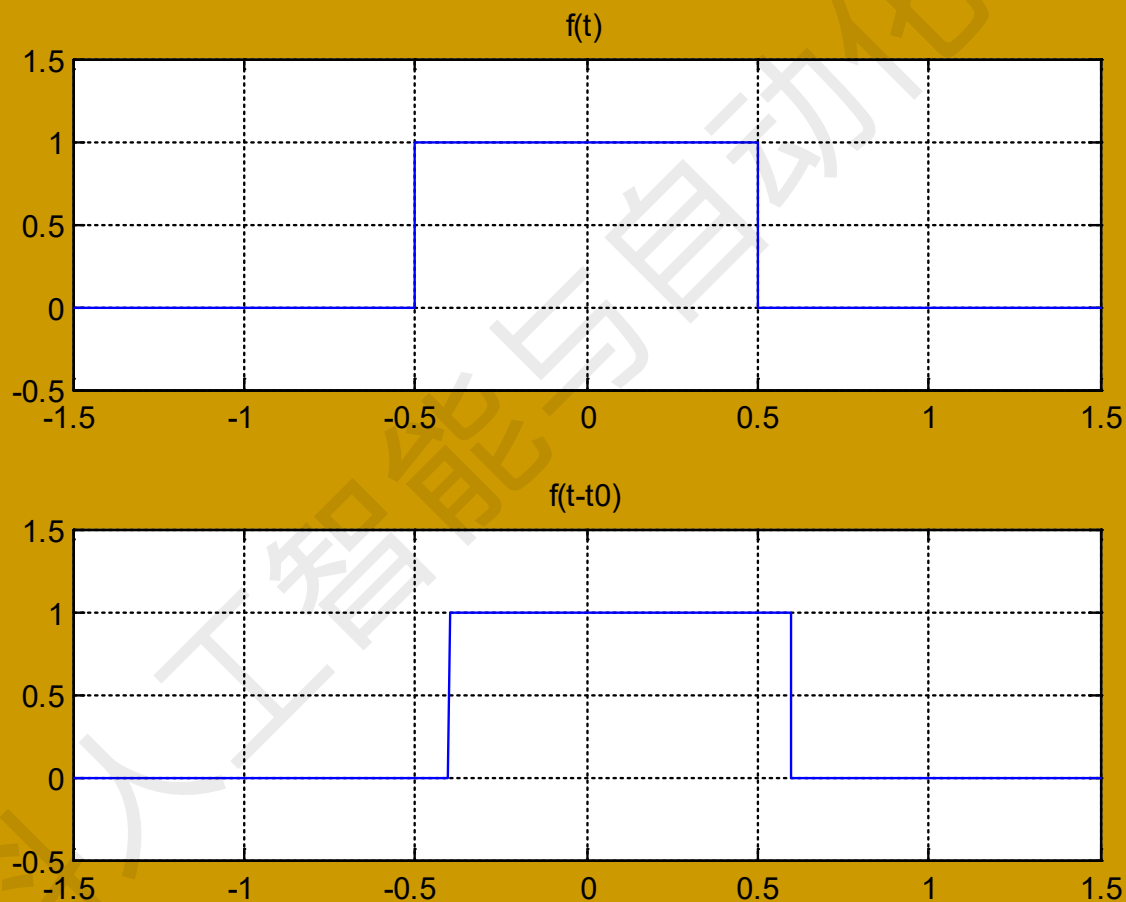
模拟角频率 $\Omega = 2\pi f$ (单位为弧度/秒(rad/s))

因为: $\omega = \frac{2\pi f}{f_s}$ (归一化数字角频率, 单位为弧度(rad))

有时频率的范围会非常的大, 使用时会很不方便, 将之归一化后就转换到 [0,1]之间了。把采样频率设为1, 其它的频率按它的百分比表示。

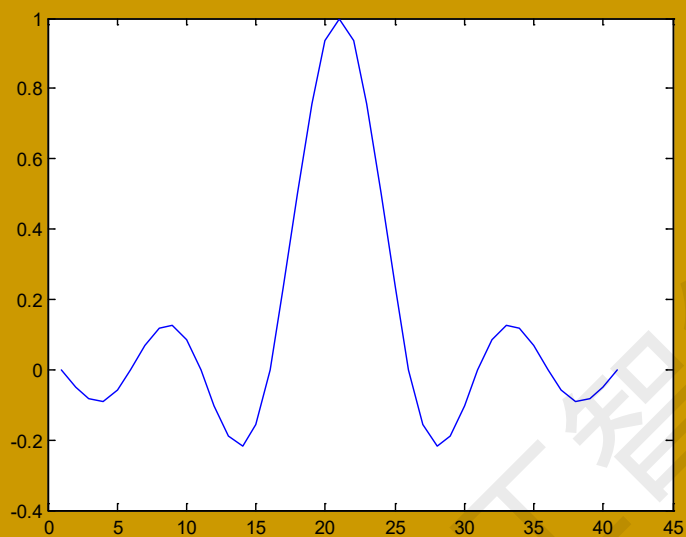
作业：
P89 2.14, 2.15,

例如：原信号为宽度为1，幅度为1的矩形窗函数，经过0.1s的时移后。

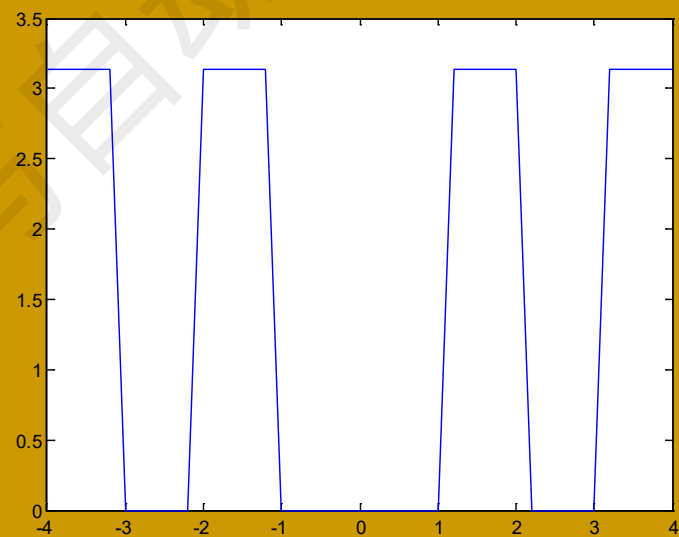


上图为 $f(t)$ ，下图为 $f(t-t_0)$

得到 $f(t)$ 的傅里叶变换的幅值与相位:

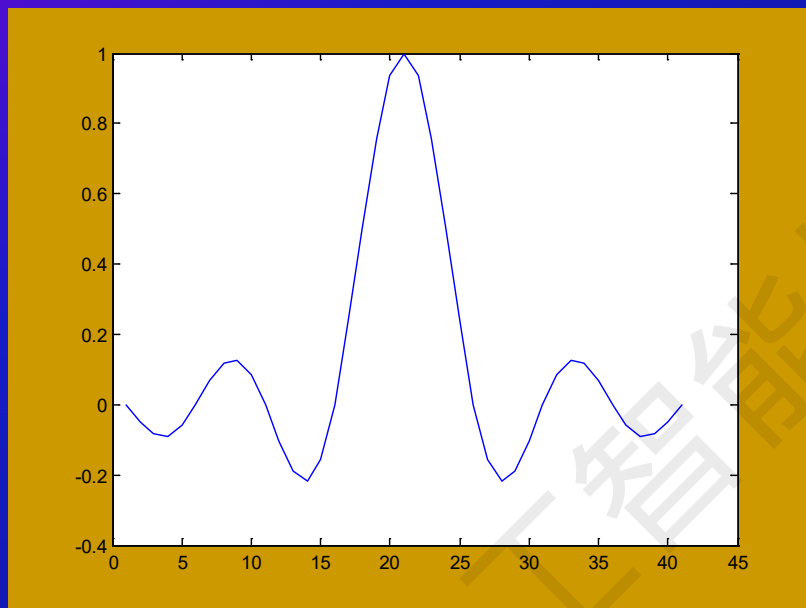


幅度谱

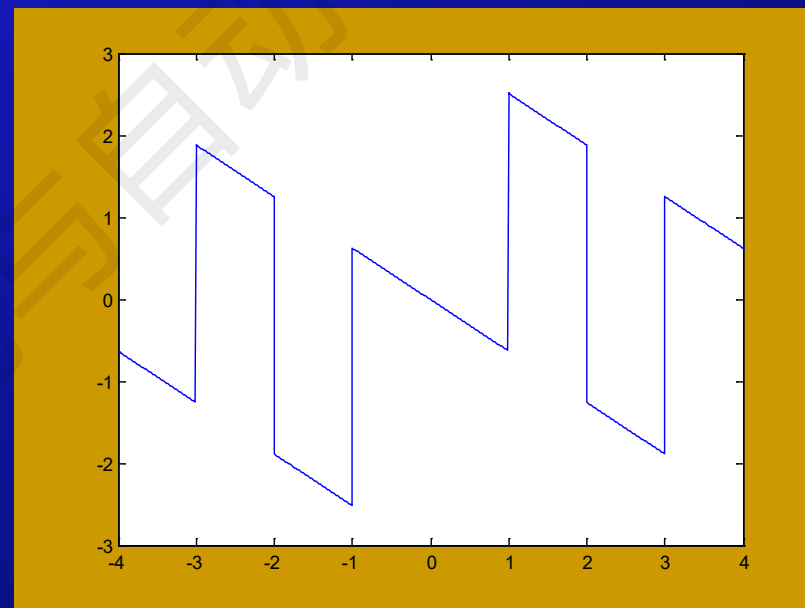


相位谱

得到 $f(t-t_0)$ 的傅里叶变换的幅值与相位:



幅度谱



相位谱

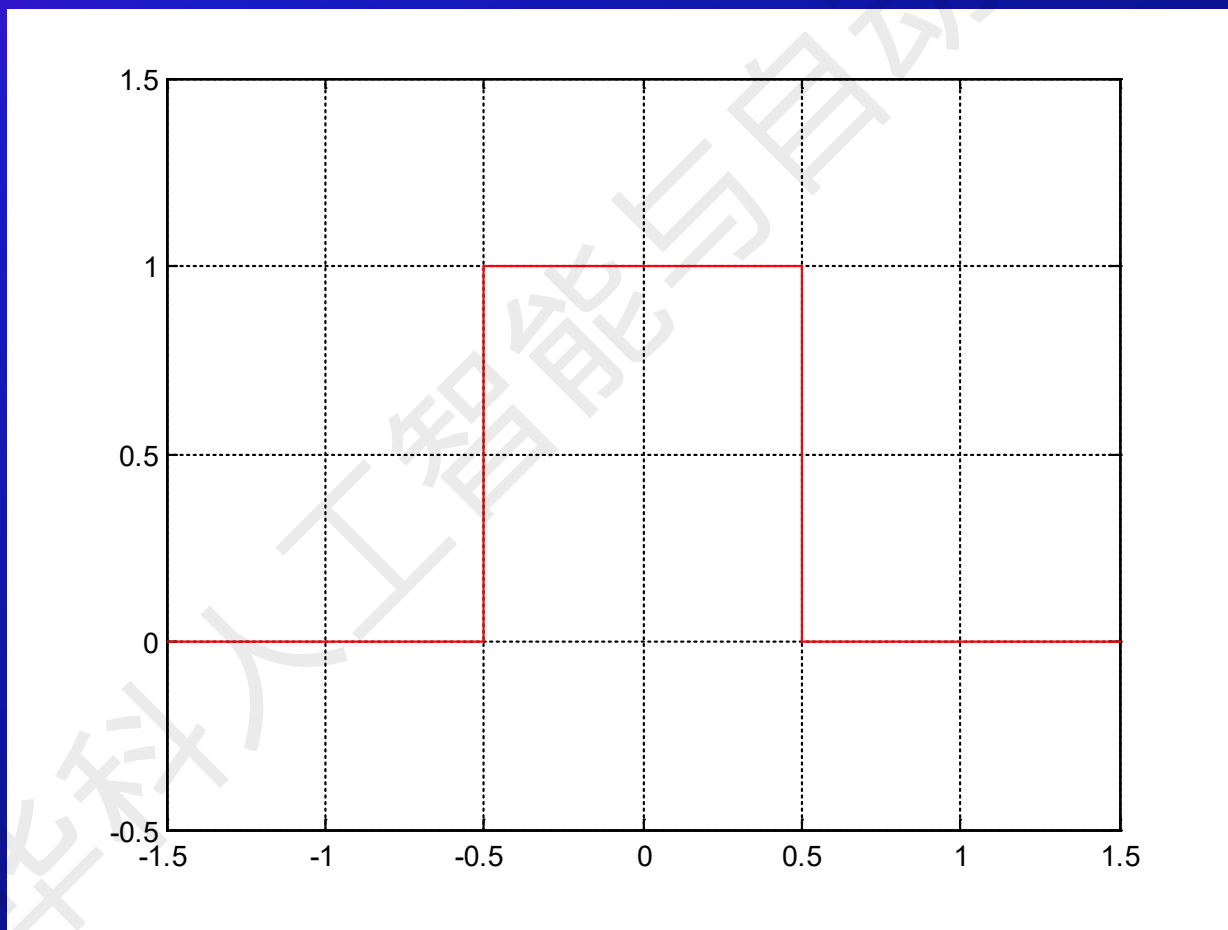
频移特性

某信号在时域中乘以 $e^{j\omega_0 t}$ ，相当于频域中频谱右移 ω_0 ；
某信号在时域中乘以 $e^{-j\omega_0 t}$ ，相当于频域中频谱左移 ω_0 ；
也就是：

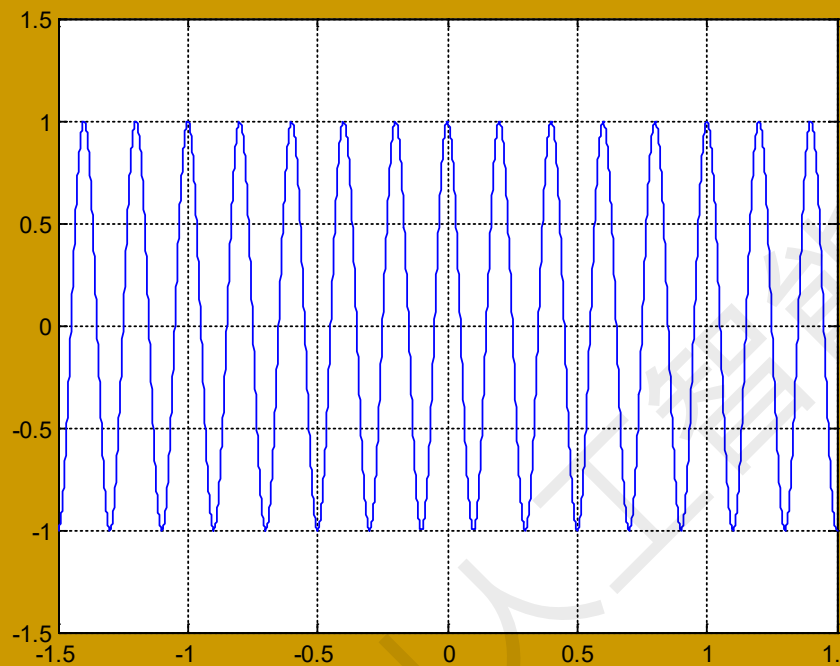
时域↔	频域↔
$x(t)$ ↔	$X(\omega)$ ↔
$x(t)e^{j\omega_0 t}$ ↔	$X(\omega - \omega_0)$ ↔
$x(t)e^{-j\omega_0 t}$ ↔	$X(\omega + \omega_0)$ ↔

假定我们用一个矩形脉冲信号去调制余弦载波，我们看一下调制前后信号在时域和频域各发生了哪些变化。

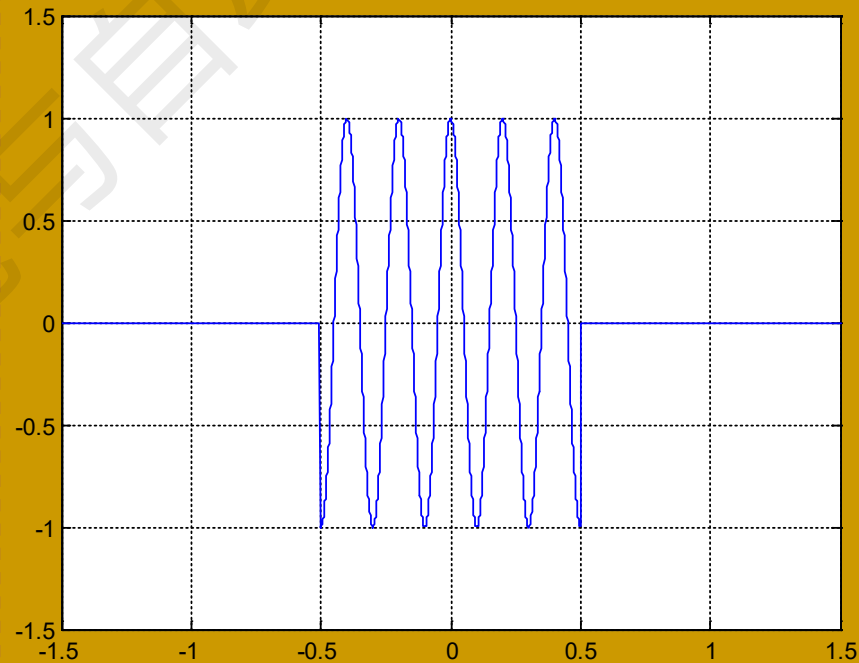
矩形脉冲信号，时域：



余弦载波信号，
为了看得清楚，频率
只取了5Hz



调制后的信号
，时域：



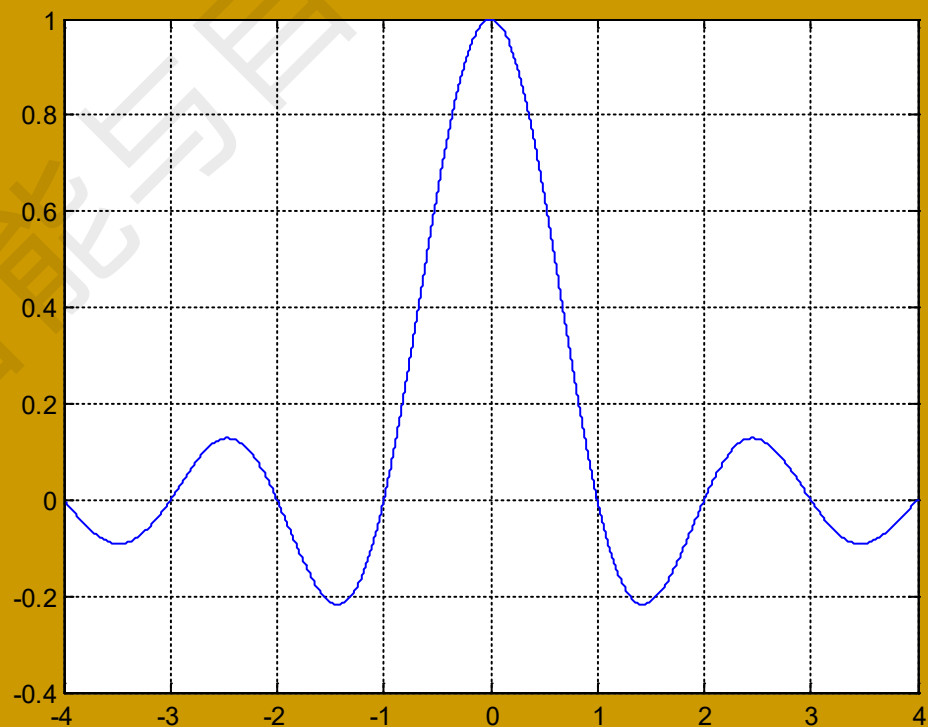
下面再来看看矩形脉冲信号调制前后的频谱。

矩形脉冲信号的频谱：

宽度为 τ 的矩形脉冲信号的频谱为：

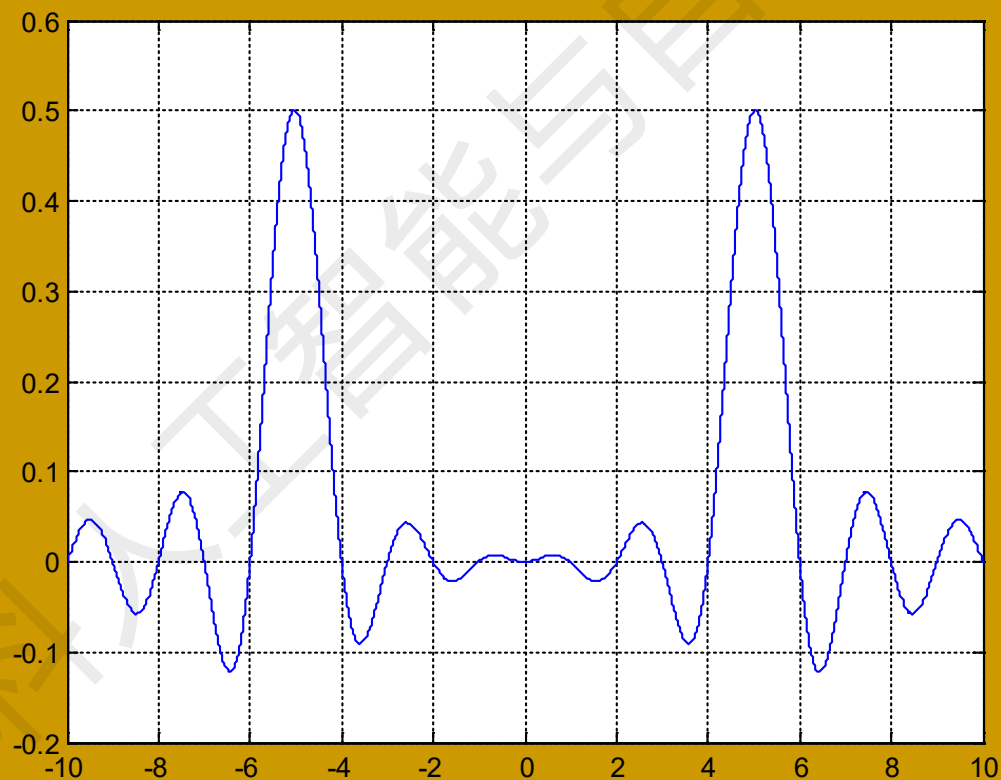
$$X(f) = \tau \operatorname{sinc}(\tau f)$$

$\tau = 1$ 情况下 $X(f) = \operatorname{sinc}(f)$

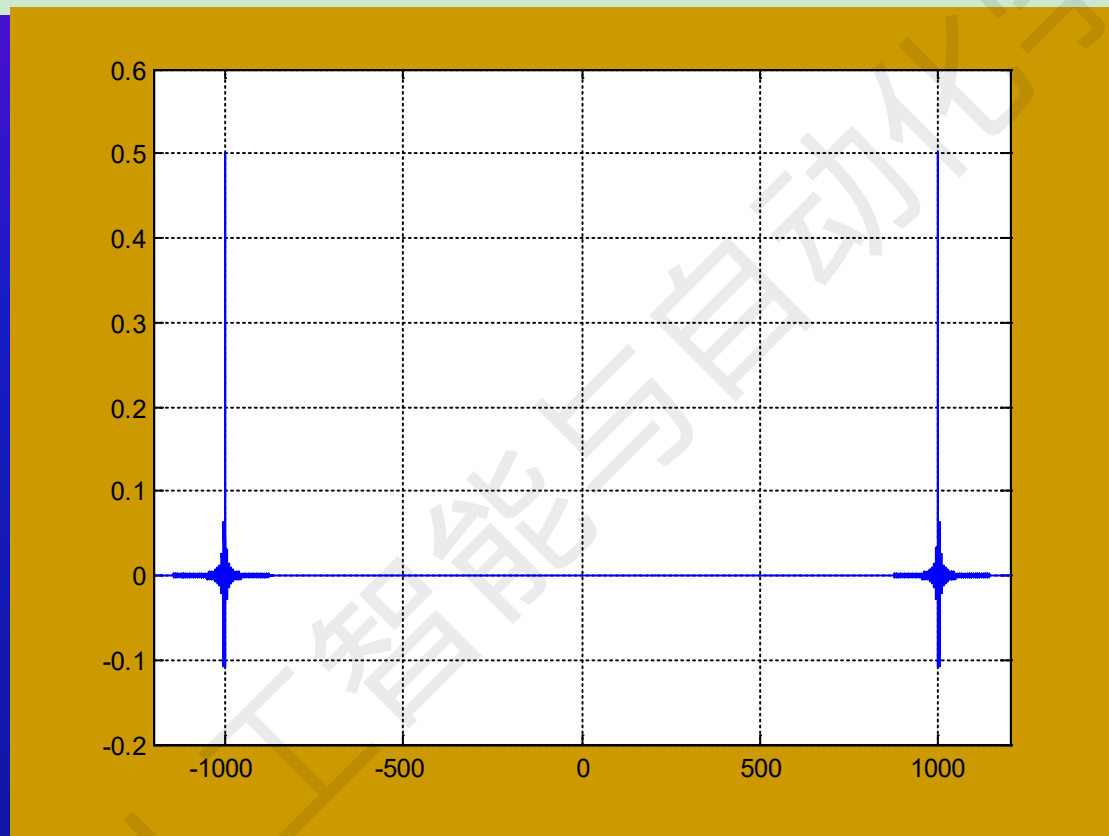


前面得出的结论：使用信号 $x(t)$ 调制载波 $\cos \omega_0 t$ 的过程，就是将信号的频谱 $X(\omega)$ 一分为二沿频率轴向左、向右各平移 ω_0 的过程。

据此我们可以画出矩形脉冲信号调制余弦载波信号后得信号频谱：



上面余弦载波的频率是 5Hz，如果改为 1000Hz：



事实上，上面这个矩形脉冲的调制过程就是无线数字通信中最基本的一个调制过程。

[返回时移频移特性](#)