

第三讲 自然物理系统及其复杂性

从系统的层次来看，自然物理系统处于系统底层，可以看作是由非智能的机械物体构成的，满足特定的自然物理规律，其复杂性的根源在“非线性”。

在系统科学中，迄今真正成熟的主要是线性系统理论。系统科学重点研究的是非线性系统，是处理非线性问题的一种方法论。同时，相比于静态系统，动态系统是系统科学讨论的重点对象。

一、线性系统

1 线性特性和线性系统

一般地说，能够用线性数学模型描述的系统，称为线性系统。线性系统的基本特性，即输出响应特性、状态响应特性、状态转移特性等，都满足叠加原理。具体讲，令 f 代表某种数学操作，如关系、变换、运算、方程或其他， x 为数学操作的对象， $f(x)$ 表示对 x 施行操作 f 的结果。若 $f(x)$ 满足以下两个条件

$$(1) \text{ 加和性: } f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$$

$$(2) \text{ 齐次性: } f(kx)=kf(x)$$

即 $f(ax_1+bx_2)=af(x_1)+bf(x_2)$ ，就称操作 f 为线性的，满足叠加原理。

2、线性系统的动态行为描述

描述连续动态系统的数学模型是微分方程。如果状态变量只是时间

的函数，与空间分布无关，则称集中参数系统，用常微分方程描述；状态变量同时依赖于时间和空间分布的是分布参数系统，须用偏微分方程描述。

线性连续动态系统的数学模型为**线性常微分方程**，可以使用一元高阶方程，也可以使用多元一阶联立方程组，这两种形式是等价的。一般形式如下：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

记系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ，状态向量 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

则上述动态方程可表示为：

$$\dot{X} = AX$$

A 不随时间变化 \rightarrow 常系数方程 \rightarrow 时不变线性系统

A 随时间变化 \rightarrow 变系数方程 \rightarrow 时变线性系统

A 包含了线性系统一切行为特性的信息。

3、线性动态系统的求解

分析线性系统的常用方法是求它的**通解**：

$$X = \sum C_k e^{\lambda_k t} V_k$$

其中， λ_k 为特征方程 $|A - \lambda I| = 0$ 的特征根；

V_k 是一组线性无关的特征向量；

C_k 是由初值决定的常系数。

二、非线性系统

1、非线性特性和非线性系统

如果数学操作 f 不满足加和性和齐次性要求，则称 f 为非线性的，如非线性关系、非线性变换、非线性运算、非线性函数、非线性范函、非线性方程等。

用非线性数学模型描述的系统，称为非线性系统。其基本特征是不满足叠加原理，即系统的输出响应特性、状态响应特性、状态转移特性中至少有一个不满足叠加原理。更一般地说，一个系统若不能用线性模型描述，不论是否给出数学模型，实质上都是非线性系统。

2、非线性系统的动态行为描述

非线性连续系统的动力学方程一般形式化为以下方程组：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n; c_1, \dots, c_m) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n; c_1, \dots, c_m) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n; c_1, \dots, c_m) \end{aligned}$$

其中 f_1, \dots, f_n 中至少有一个非线性函数。

记 $C=(c_1, c_2, \dots, c_m)$ 为控制向量, $F=(f_1, f_2, \dots, f_n)$, 则上述动态方程可表示为:

$$\dot{X} = F(X, C)$$

上述方程通常称为系统的演化方程或发展方程。对于千差万别、形

态各异的非线性现象，可作如下粗略分类：

(1) 弱非线性和强非线性。强弱是相对的，没有精确的分界线。粗略地说，我们把可以忽略不计的非线性看作弱的，把不可忽略的非线性看作强的。弱非线性可以看作是对线性关系的偏离，允许忽略这种偏离，采用线性假设，用线性模型描述系统。

(2) 非本质非线性和本质非线性。如连续、光滑变化的非线性是非本质的，不连续、非光滑的非线性是本质的。本质非线性必定是强非线性，强非线性未必是本质非线性。

(3) 平庸非线性和非平庸非线性。能产生**奇异行为**的是非平庸非线性，否则为平庸非线性。

按照演化方程对系统的分类，除了线性与非线性系统、集中参数与分布参数系统外，还有如下两种分类

1) 自由系统与强迫系统

自由系统：演化方程只是状态变量的导数对状态变量的依赖关系，没有外作用项；

强迫系统：演化方程包含外来作用项，如以下方程描述的系统

$$X' = F(X, C) + \Psi(t)$$

如果令 $x'_{n+1} = \Psi(t)$ ，则上述强迫系统可以转化为 $n+1$ 维自由系统来处理。

2) 自治系统与非自治系统

自治系统：演化方程中不明显包含时间 t ；

非自治系统：演化方程中明显包含时间 t ，如以下方程描述的系

统：

$$\dot{X} = F(X, C, t)$$

非自治系统的特例：变系数系统和含时间函数的强迫系统。

如果将时间 t 作为新的状态变量 x_{n+1} ，则非自治系统可以变为 $n+1$ 维自治系统。

3、非线性动态系统的求解

1) 解析方法

只有在一些特殊情况下，非线性系统才能获得解析解。一般情况下，得不到解析解。

2) 几何方法

主要用于分析系统的定性性质。其特点是：避开解方程，从方程的结构和参数中直接提取系统的定性信息。

庞加莱开辟的微分方程定性理论及其后续发展为此提供了强有力的数学工具。

3) 数值计算方法

利用演化方程定量研究非线性系统普遍有效的方法是使用计算机进行数值计算，求得方程的近似解。

4) 近似求解

对于弱非线性，通常按照“非线性是对线性的偏离”的观点，用线性化方法研究系统的局部行为特性是非常有效的。例如，对于二维系统：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

不失一般性，设 f_1 、 f_2 在 (x_{10}, x_{20}) 附近连续可微，则上式可用泰劳级数公式展开为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_{10}, x_{20}) \\ f_2(x_{10}, x_{20}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \end{pmatrix} + \text{高次项}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \text{高次项}$$

只要非线性系统在某一点附近满足连续性、光滑性要求，就可以在该点附近看作弱非线性系统，将演化方程展开为线性模型，利用线性系统理论来分析，以期获得对非线性系统局部行为特性的近似描述，这种方法叫做**非线性系统的局部线性化处理**。如果单纯靠线性模型尚不能满足要求，还可以把非线性项作为扰动因素，对线性化分析结果加以修正，这叫做**线性化加微扰方法**，是线性科学对付非线性的主要手段。

但是，线性化加微扰的方法本质上不是非线性系统理论的方法，而是线性系统理论的方法。它只限于处理非本质的非线性问题，不能用于处理有间断点、不光滑点的非线性问题。即使非本质的非线性，也只适用于分析局部特性，不能用于大范围问题。

系统观点和方法的优势是处理大范围的、全局的问题，线性化处理不能真正体现这种优点。**线性化处理的要害是忽略非线性因素，而非线性因素正是系统产生多样性、奇异性、复杂性的根源，线性化处理恰好简化掉了这个根源，因而不是处理非线性问题的根本方法。**非线性系统理论研究的基本对象是不能线性化的问题，即系统在大范围内的行为，

特别是本质非线性现象。

三、连续动态系统的若干复杂特征

状态量不随时间而改变的系統，称为静态系统或静力学系统。描述静态系统主要关心的，一是输入量 U 与输出量 Y 的对应关系 $Y=(U,C)$ ，二是性能指标 J 与输入量 U 的对应关系 $J=(U,C)$ 。静态系统概念基于这样一个假设：系统状态的转移可以在瞬间完成。

状态随时间而改变的系統，称为动态系统或动力学系统。一切实际存在的系統原则上都是动态系統，静态系統不过是动态系統的过渡过程短暂到可以忽略的极限情形而已。动态系統的数学模型通常为系统的动力学方程，或称为演化(发展)方程。

1、状态、状态变量、控制参量

系統连续运行中表现出来的状况或态势，称为系統状态，可用一组称为状态量的参量来表征。给定这些参量的一组数值，就是给定該系統的一个状态，这些量的不同取值代表不同的状态，称为状态变量。

一般系統須用多个状态变量刻画，称为多变量系統。設系統有 n 个状态变量 x_1, x_2, \dots, x_n ，定义以状态变量 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为分量的 n 维向量 X 为状态向量。同一系統的状态变量可以有不同的选择，但应当满足以下要求：

- (1) 客观性：具有现实意义，能反映系統的真实属性；
- (2) 完备性： n 足够大，能全面刻画系統的特性；

(3) 独立性：任一状态量都不是其他状态量的函数。

系统所有可能状态的集合，称为系统的**状态空间**。以状态变量 x_1, x_2, \dots, x_n 为坐标张成的空间就是状态空间，独立状态变量的个数 n 代表状态空间的维数。

真实系统往往把状态变量限制于一定范围，称为系统的**相空间**。在相空间之外取值的可能状态没有现实意义。为简化计，可把相空间与状态空间看作一个概念。维数 n 是独立决定系统状态的最小自由度。理论上允许 n 为无穷大，在无穷维空间中讨论问题。状态空间可根据系统的数学特性分类，如状态变量离散地取值时，称为**离散状态空间**；连续取值时，称为**连续状态空间**。

决定系统行为特性的还有另一类量，它反映环境对系统的制约，往往不直接由系统决定，称为**环境参量**。一般情形下这类量变化缓慢，与状态量显著不同，因而在一次观察或运行过程中可以看作常量。由于它们对系统行为特性有重要影响，有时可以改变系统的定性性质，又可在一定范围内调整控制，常称为**控制参量**。这两类系统量的划分是相对的：在一定条件下，为了降低相空间维数，把某些变化相对缓慢的量作为控制参量进行分析计算；但在另外的条件下，把其中一些量当作状态量可能更合理些。

控制参量一般不止一个。以 m 记控制参量的个数，设系统的控制参量为 c_1, c_2, \dots, c_m ，以它们为分量形成的 m 维向量 C 称为系统的**控制向量**。以控制参量为坐标张成的空间，称为**控制空间或参量空间**。系统的许多行为特性、特别是定性性质的改变，要在控制空间才能看清楚。

有时还要在状态空间和控制空间构成的乘积空间 $V = \text{状态空间} \times \text{控制空间}$ 中研究系统。

输入量与输出量也是描述系统行为特性的重要变量。设系统有 k 个输入变量 u_1, u_2, \dots, u_k , l 个输出变量 y_1, y_2, \dots, y_l , 记**输入向量** $U = (u_1, u_2, \dots, u_k)$, 记**输出向量** $Y = (y_1, y_2, \dots, y_l)$ 。

2、轨道、初态与终态、暂态与定态

演化方程 $X' = F(X, C)$ 的每个解 $X(t)$ 代表系统的一个行为过程, 即状态随时间而变化的动态过程。**研究演化方程解的特性, 是动态系统理论的基本任务**。最理想的定量方法是求出方程的解析解, 用数学分析工具彻底把握系统的行为特性, 但能够得到解析解的方程是很少的。借助计算机求其数值解, 这种近似方法更有效。

定性方法基于相空间概念, 绕开求解方程的难关, 通过分析方程结构和参量变化去描述解的定性特征, 不仅直观形象, 而且能揭示解的一系列本质特性, 是动态系统理论的基本工具之一。

用几何方法描述系统, 可以借助时间域上的曲线表示其行为, 如图 3.2 所示。这是一个 2 维系统, 状态变量为 x, y , 每个解对应平面上的一条曲线, 叫做系统在时间域上的轨道。图 3.3 是在

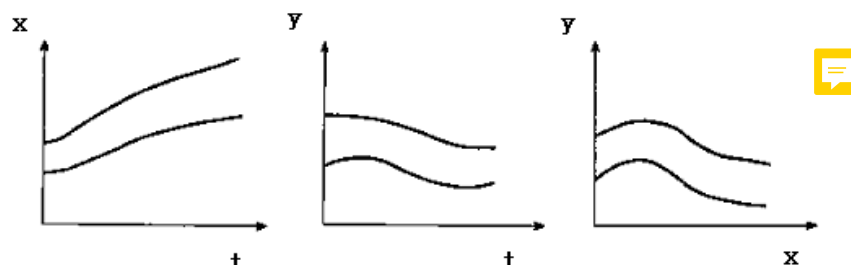


图 3.2

图 3.3

相平面中表示的系统行为, 时间 t 被隐去, 称为相轨道。相空间的点(状态)称为相点。系统演化表现为相点在轨道上的运动, 轨道又叫做流线。

一个动态过程开始时刻 t_0 (通常取 $t_0=0$) 的状态 X_0 , 称为系统的**初态** (初值, 初始条件)。相空间的每个点都有资格作为初态, 动力学认为初态的获得与系统的动力学规律无关, 是扰动因素独立作用的结果。

一旦系统在 t_0 时刻获得初态 $X_0=(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, 就会沿着通过 X_0 的那条轨道演化, 从而启动一个动态过程; 一个动态过程在终了时刻 $t=\infty$ 时趋向的有限状态, 称为系统的**终态**。一个动态过程可能没有终态, 即当 $t=\infty$ 时, $x(t)$ 没有有限极限。具有实际意义的是存在终态的过程。

动态系统理论关心的首要问题是系统的终态行为: **是否存在终态?**
终态类型?终态在相空间如何分布? 是动态系统理论研究的重要问题。

动态系统有两类可能的状态。系统可以在某个时刻到达但不借助外力就不能保持或者不能回归的状态, 称为**暂态或瞬态**。系统到达后若无外部作用将保持不变或可以回归的状态, 称为**定态**。图 3.4 示意一个小球在凹凸线上的运动, 代表一个有势系统, 线上的每个点都是一个可能状态。(a) 中凹线最低点为定态, 其余点均为暂态。(b) 中凸线最高点为定态, 其余点均为暂态。(c) 可看作两个(a)和一个(b)的复合系统, 有三个定态点。

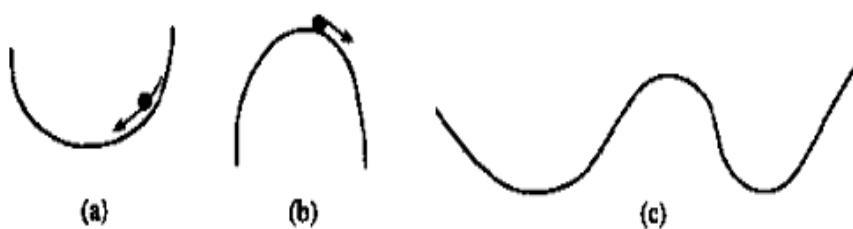


图 3.4

1)平衡态: 最简单一类定态是平衡态, 在数学上由不动点来刻画。

动态系统具有不同类型的定态。最简单的一类定态用数学中的奇点或不动点来表示。系统(3. 8)的**不动点定态**是满足以下条件的解

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \cdots = \dot{x}_n = 0 \quad (3.17)$$

(3. 17)称为不动点方程。所谓不动点，意即在这种点上，各状态量的变化速度均为0。

不动点代表系统的平衡态或均匀态，虽然只是相空间的孤立点，却是一定的相轨道，

代表系统的一类定态行为，即平衡态或近平衡态行为。形象地说，系统在这些点上的

行为特点是“坐着不动”。按其附近轨道的动态特性，不动点又细分为以下4种基本

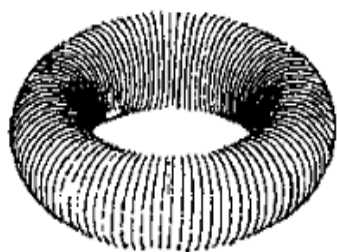
类型：

(1)中心点； (2)结点； (3)焦点； (4)鞍点。

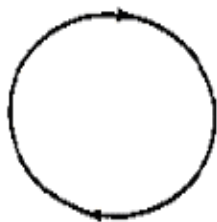
2)周期态：设 $\phi(t)$ 是演化方程的一个解，满足条件 $\phi(t+T) = \phi(t)$, T 为某个常数，则称 $\phi(t)$ 是方程的一个以 T 为周期的周期解。周期解由相空间的一条闭曲线表示，代表系统的一条周期轨道，数学上称为极限环 (Limit Cycle)，特点是当 t 趋向于正或负无穷时附近的相轨道以该闭曲线为极限。3 维以上的系统还可能出现更复杂的周期运动，用 2 维或多维环面表示。准确地说，环面代表的是由不同频率的周期运动合成的复杂周期运动，叫做准周期运动。

3)拟周期态：

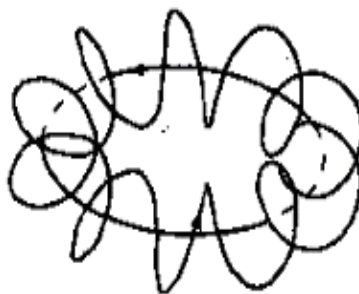
(3)拟周期态 众多不同周期且周期比为无理数的周期运动叠加在一起形成的复杂运动形式，称为拟周期运动，由 3 维或高维空间的环面(torus)描述。下图为一个 2 维环面，拟周期运动由环面上的一条非闭曲线表示。



环面



2维极限环



3维极限环

4)混沌态(分形) (略)

定态与空间维数有密切关系。1 维空间的状态只能在一條线上变换、转移，系统只有不动点表示的定态，即只有平衡运动一种行为方式。2 维系统的状态可以在平面上转移，系统的动力学特性比 1 维系统丰富得多，不仅有不动点，可以作平衡运动，还可能有极限环，作周期运动。但 2 维空间仍不够宽阔。3 维和高维空间给系统提供了充分的舞台，可以形成各种可能的定态，呈现出各种行为特性。

3、稳定性

系统是在充满各种扰动因素的环境中产生出来并存续运行的，受到

扰动后能否恢复和保持原来行为的恒定性，就是**稳定性问题**。稳定性是系统的重要维生机制，稳定性愈强，意味着系统维生能力愈强。从实用角度看，只有满足稳定性要求的系统，才能正常运转并发挥功能。

稳定性是一个复杂问题，在不同的系统现象和实际背景下需要不同的概念来描述。作为一种动力学特性，系统理论关心的首先是轨道的稳定性，亦即演化方程解 $X(t)$ 的稳定性，通常采用**李亚普诺夫**的**稳定性**定义。

定义 1: 设 $X = \phi(t)$ 是向量微分方程 $X' = F(X, C)$ 的解，定义在 (t_0, ∞) 上，初态为 $\phi(t_0)$ ，初值扰动 $X_0 = X(t_0)$ 对应的轨道为 $X(t; t_0, X_0)$ 。如果对于足够小的 $\varepsilon > 0$ ，总有 $\delta > 0$ 使得只要 $|X_0 - \phi(t_0)| < \delta$ 就有 $|X(t; t_0, X_0) - \phi(t)| < \varepsilon$ ，则称 $\phi(t)$ 是李亚普诺夫意义下稳定的，简称 $\phi(t)$ 是 L 稳定的。否则，称 $\phi(t)$ 是李亚普诺夫意义下不稳定的，简称 $\phi(t)$ 是 L 不稳定的。



定义 2: 设 $X' = F(X, C)$ 的解 $X = \phi(t)$ 是 L 稳定的。如果存在 $\eta > 0$ ，使得只要 $|X_0 - \phi(t_0)| < \eta$ 就有 $\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t; t_0, X_0) - \phi(t)| = 0$ ，则称 $\phi(t)$ 是李亚普诺夫意义下渐近稳定的，简称 $\phi(t)$ 是 L 渐近稳定的。

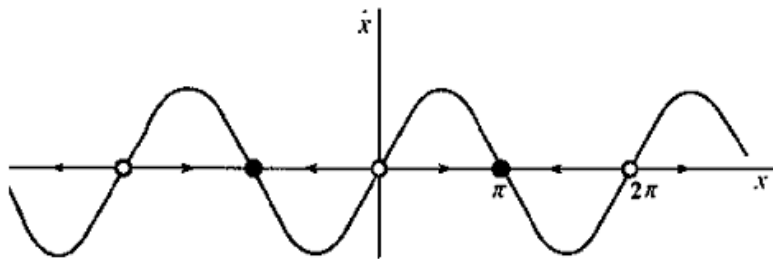
线性系统的轨道稳定性完全取决于控制参量或特征值，与初态无关，这是线性系统的重要特征。可以说**一个线性系统是否稳定，而不只讲某条轨道是否稳定**。非线性系统稳定性需针对具体轨道，常用李亚普诺夫给出的两个方法判别：

- **李亚普诺夫第一方法**，又叫做线性近似法，是把非线性系统作线性化处理，判别所得线性系统的稳定性。由于稳定与否一般是系统的局部特性，这种判别法是有效的。只要变量变化足够小，这种分析

技术被称为线性稳定性分析。

- **李亚普诺夫第二方法**，又称直接方法。思路是：不从解方程入手，而是研究方程的结构和参数，构造所谓李亚普诺夫函数 $V(x)$ ，按 $V(x)$ 性质可以对稳定性做出判断。直接方法的关键是构造函数 $V(x)$ ，但至今尚无通用的构造方法。

考虑一维系统 $\dot{x} = \sin x$ 不动点方程为 $\sin x = 0$ 。对任何整数 k ， $x = k\pi$ 均为不动点。凡 $x = (2k+1)\pi$ 的点代表稳定平衡态， $x = 2k\pi$ 的点为不稳定平衡态。



这个例子表明，与线性系统不同，非线性系统的基本特征是轨道稳定性的非划一性，除少数情形外，一般非线性系统同时存在稳定轨道与不稳定轨道，判明某些轨道稳定与否，不能把结论推广到其他轨道。线性系统可以谈论系统是否稳定，在非线性情形下，一般地谈系统稳定性是没有意义的，只能谈某条轨道(解)的稳定性。

轨道稳定性，是系统的内部稳定性。许多情形下还要考察系统的外部稳定性，即输入—输出稳定性(I/O 稳定)。简单地说，如果对于一个有界输入 $|u(t)| < k_1$ ，存在有限时刻 T ，在 $-\infty < T < \infty$ 内只能产生一个有界输出 $|y(t)| < k_2$ ，就说系统是 I/O 稳定的，其中 k_1 、 k_2 都是有限数。简言之，有界输入必定产生有界输出的系统是 I/O 稳定的。

4、目的性与吸引子

相空间中满足以下 3 个条件的点集合 A（可能包含 1 个点、有限个点或无限个点），称为动力学系统的吸引子。

- 终极性：处于非目的态的系统“不安于现状”，力求离之远去；处

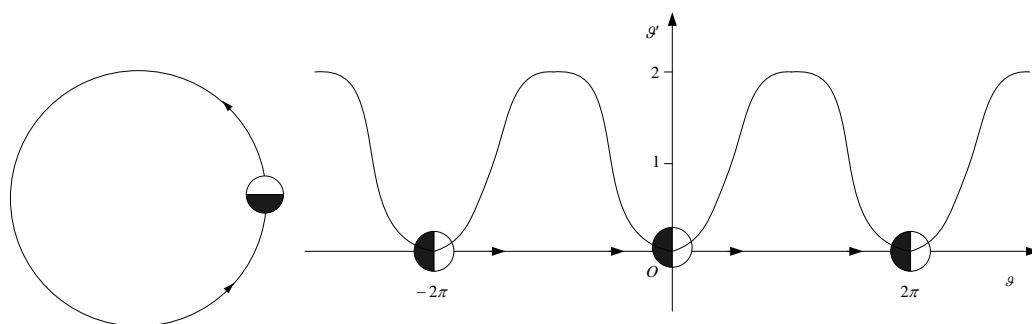
于目的态的系统“安于现状”，自身不再愿意或无力改变这种状态。

- 稳定性：目的态是系统自身质的规定性的体现，这种规定性只有在稳定状态中才能确立并得到保持，不稳定状态不可能成为目的态；
- 吸引性：吸引性是目的性的根本要素，没有吸引力的状态不能成为系统演化所追求的目标。只要系统尚未到达目的态，现实状态与目的态之间必定存在非 0 的吸引力，牵引着系统向目的态运动。

1) 乍看起来稳定性与吸引性是一致的。这是一种假象，不仅存在满足李雅普诺夫要求但没有吸引性的定态，也存在有吸引性而不满足李雅普诺夫稳定性要求的定态。例如以下系统

$$\mathcal{G}' = 1 - \cos \mathcal{G}$$

$\mathcal{G}_e = 0$ 为不动点，对 $t \rightarrow \infty$ 时的所有轨道都有吸引力，但不是李雅普诺夫稳定的；存在这样的轨道，它们从无限接近 \mathcal{G}_e 点开始，但要经历很长的旅程才能回到 \mathcal{G}_e ，如图在 \mathcal{G} 轴（相空间）上标明流线的走向。这表明稳定性与吸引性是相互独立的，互不包含。



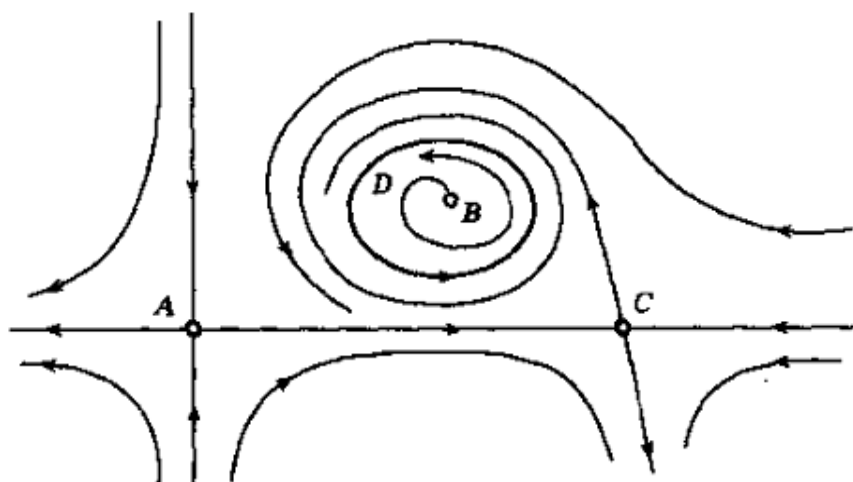
2) 凡存在吸引子的系统，均为有目的的系统。从暂态向渐近稳定定态的运动过程，就是系统寻找目的的过程。所谓目的，就是在给定的环境中，系统只有在目的点或目的环上才是稳定的，离开了就不稳定，

系统自己要拖到点或环上才能罢休。

3) 一个系统可能没有吸引子, 也可能同时存在多个吸引子。不同吸引子可能属于同一类型, 也可能属于不同类型。原则上讲, 几类吸引子的各种组合都可能出现。

非线性系统可能有各种形式的吸引子, 如点吸引子, 环吸引子, 奇怪吸引子等,

下图描述的系统, 具有一个稳定极限环 D , 两个鞍点 A 和 C , 一个不稳定结点 B 。



4) 当相空间同时存在几个吸引子时, 整个相空间将以它们为中心划分为几个区域, 每个区域内的轨道都以该吸引子为归宿, 称为该吸引子的吸引域或流域。

系统向哪个吸引子演化，取决于初态落在哪个吸引域，初态决定系统行为的长期走向。对于同一流域中的不同初态，系统具有“遗忘”机制，演化行为的最终走向与初态的选择无关，从不同初态开始的演化过程最终达到同一结果。图 3. 17 示意了吸引子与吸引域的关系。

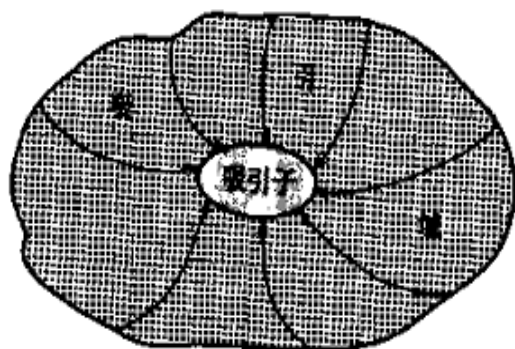


图 3. 17

5) 线性系统可能没有吸引子，至多存在一个吸引子，或为稳定结点，或为稳定焦点。只要有吸引子，整个相空间都是它的吸引域，定态对相空间所有轨道都有吸引作用。

建立了系统演化方程后，可以用数学语言回答下列问题：系统有无吸引子？有几个吸引子？有哪些类型的吸引子？吸引子在相空间如何分布？如何划分吸引域(即确定吸引域的边界)？等等。关于这些问题的一般结论，构成所谓**吸引子理论**。

5、周期运动与自激振荡

在物理现象、化学现象、生命现象、社会现象和心理现象中，经常可以发现系统状态在不断作时起时伏、或升或降的运动，这种现象称为振荡。一种简单而常见的情形是有固定周期的振荡，称为**周期运动**。

非线性系统只要有极限环，系统就可能在没有外部周期力驱动下由

于本身的非线性效应而自发出现周期运动，称**自激振荡**；系统如果在有外部周期力驱动下而出现周期运动，就称**他激振荡**。非线性系统在经过线性化处理后，产生自激振荡的根源就被当作次要因素忽略掉，当问题涉及系统的振荡现象时，不可使用线性化方法。

线性系统不存在极限环，表明它不可能自发产生周期运动，即自激振荡。线性系统只有当外部输入周期性强迫作用时，才会产生周期运动。

由于极限环有稳定与不稳定之分，非线性系统的自激振荡也有稳定与不稳定之分。稳定的自激振荡是可自行维持的，称为**自持振荡**；不稳定极限环对应的是**非自持振荡**。

例如在非线性动力学发展史上起过重大作用的范德波尔方程

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0$$

此处参量 $\mu \geq 0$ ， $\mu(x^2 - 1)x'$ 为非线性阻尼项：当 $|x| > 1$ 时类似于正阻尼，当 $|x| < 1$ 时类似于负阻尼。 $x_e \equiv 0$ 为不稳定焦点； $\mu > 0$ 时，系统存在一个稳定的极限环，如下图左边所示，一条非圆的闭轨道；右图为时间域上的行为，一种非正弦波的周期运动。因此这个方程描述的系统可以出现稳定的自激振荡。

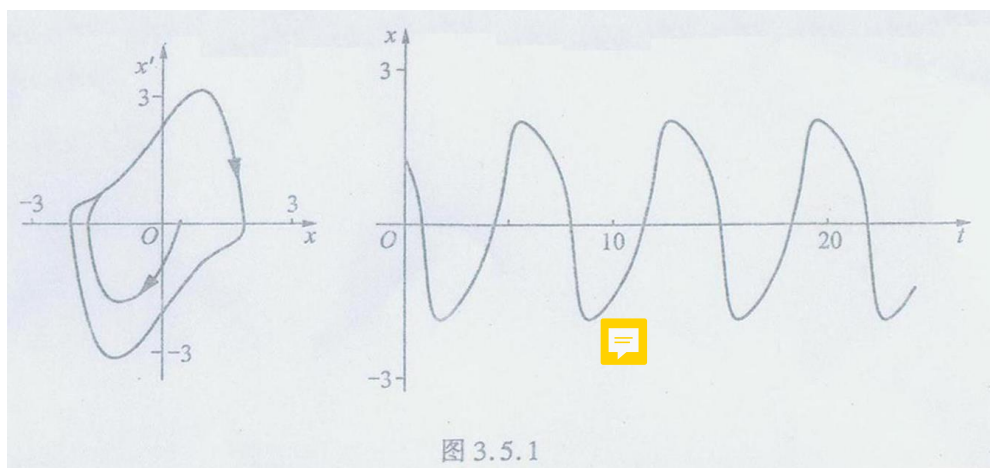


图 3.5.1

判断一个非线性系统有无极限环，进而了解是否可能发生自激振

荡，是非线性系统研究中的重要理论和实际意义的问题。

6、回归性与非游荡集

人们总是希望根据以往的事件预见未来，前提是系统行为具有**回归性（回复性）**。静止的平衡态具有最平庸的回归性：不动也是回归。周期运动具有最典型的回归性，轨道上的每个状态经过确定的周期后必定严格地再次出现，只要没有外部扰动，每个状态都会无数次的重复出现。一般情形下，回归性并不要求严格地回到原有状态，也不要求按确定的周期回归，只要在 $t \rightarrow \infty$ 过程中能够反复回到其任意近的地方。注意：有限次的回归后逃逸掉的状态不算具有回归性的状态。具体地，数学上的严格定义如下：

系统的演化方程或其描述的动力学规律记作 φ ，可以视作以相空间的点（系统的可能状态）为对象的操作变换。将 φ 施加于初态 $x_0(t=t_0)$ ，在 $t \rightarrow \infty$ 过程中可以得到从 x_0 出发的那条轨道 $\varphi(t; t_0, x_0)$ 上的所有的点；把 φ 施加于不同的初态，可以得到相空间的所有点。这样，相空间的点可以分为两类：在变换 φ 作用下具有回归性的相点称为**非游荡的**（Nonwandering），在有限次回归后逃逸掉的相点称为**游荡的**（Wandering）。定义如下概念：令 V_x 记相点 x 的一个邻域，若存在实数 $\tau > 0$ ，当时间 $t > \tau$ 时， $\varphi(x)$ 与 V_x 不相交，即 $\varphi(x) \cap V_x = \emptyset$ （空集），则称 x 为 φ 的一个游荡点；否则，称 x 为 φ 的一个非游荡点。

7、结构稳定性与分岔

前面讨论的都是在给定控制参量条件下在相空间研究系统的状态

转移，下面的讨论是建立在控制参量变化基础上的。

1) 结构稳定性

状态空间是在给定控制参量的前提下建立的，在状态空间中研究的是给定控制参量的特定系统。参量空间研究的是具有相同数学结构的演化方程描述的系统族，而不是单个系统，更不是系统的某条轨道。控制参量的变化不改变系统演化方程的数学结构，但可能改变系统的动力学特性，包括定性性质的改变，即系统相图结构的改变。

控制参量的小扰动不会引起系统相图定性特征的变化，就说系统是**结构稳定**的（Structure Stable）；如果控制参量的小扰动引起系统相图发生定性性质的改变，就说系统是**结构不稳定**的。注意：

（1）应区分运动稳定与结构稳定，运动稳定是在状态空间中研究系统的概念，反映的是系统的运动或行为具有稳定性；结构稳定性是在参量空间研究系统的概念，反映的是系统动力学规律的稳定性。

（2）结构稳定性不是指系统组分之间关联方式的稳定性，而是指系统相图结构的稳定性。但两者有内在联系，如果系统在参量空间表现出相图的稳定性，系统组分之间的关联方式即结构也是稳定性的；反之，如果相图结构发生定性性质变化，组分之间关联方式必定出现定性性质的变化。结构稳定性也是作为参量空间的局部特性来定义的，所以某些判别方法与运动稳定性相同。

2) 分岔

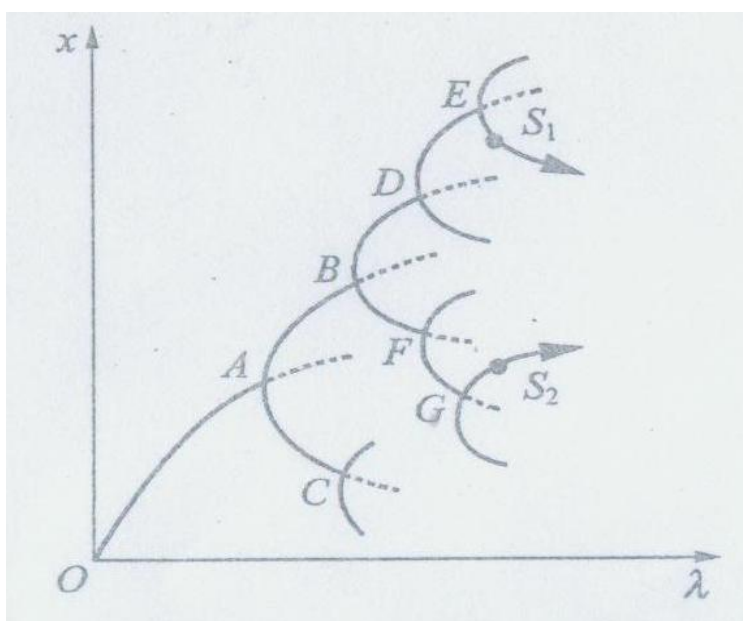
控制参量变化所引起的系统定性性质的改变，叫做**分岔**。分岔现象要在控制空间中考察。控制空间中引起分岔现象的临界点，叫做**分岔点**。

研究分岔的定义、分岔发生的条件、分岔的类型、如何求分岔解、解的稳定性、解的对称破缺等，构成所谓分岔理论。

[例] 几种一维系统的分岔：

- 鞍结分岔： $x' = a + x^2$
- 跨临界分岔： $x' = ax - x^2$
- 叉式分岔： $x' = ax - x^3$

[例] 逐级分岔



分岔是系统演化过程中广泛存在的一种动力学机制。系统演化之所以从单一到多样、从简单到复杂，分岔机制是重要根源。分岔把历史性赋予演化系统。系统后续演化所建立的定态，与它先前经历的分岔路线有关。分岔理论第一次揭示出物理系统也有历史性。

当分岔点上存在不止一个新的稳定分支解时，系统面临如何选择的问题。在一般情形下，几个新定态是对称的，有相同的机会接受选择。存在两种基本选择(对称破缺) 方式：一是诱导破缺选择，环境中存在某种诱导力量，迫使系统对某个新态有所偏爱；二是自发破缺选择，几种

新态被选择的可能性相同，完全由偶然因素决定。

8、突变

分岔点上发生的系统定性性质改变，就是一种**突变**。突发性原因导致突发性结果是一种平庸情形，渐变的原因导致突变的结果是一种非平庸情形，蕴藏着丰富的动力学内容。从这种科学和哲学的认识出发，突变理论明确规定它不研究一切突变现象，只研究在控制参量的缓慢变化中可能出现的系统定性性质的突变。

突变理论关心的是兼具结构稳定与结构不稳定的系统。更准确地说，这类系统在相空间几乎处处结构稳定，但在某些 0 测度的点集上存在结构不稳定性。这类系统具有丰富的动力学特性，可以发生渐变与突变的相互转化。在控制空间的结构稳定性区域中系统只有渐变，一旦走向边界就要出现从一种定态到另一种定态的突变。这就是突变理论研究的現象。

尖顶突变（势函数为 $a_1x+a_2x_2x_4$ ）是仅次于折叠突变的另一种最简单的突变形式，又几乎具备了突变的所有基本特征：

- ✓ **多稳态**：突变系统均具有两个以上的稳定定态，尖顶突变是双稳态。
- ✓ **不可达性**：在不同的稳定定态(极小点)之间存在不稳定定态，即极大点，它们是不可实现的定态，或者说是实际上不可能达到的定态。
- ✓ **突跳**：在分岔曲线上，系统从一个极小点到另一个极小点的转变是突然完成的。在尖顶突变中，从上(下)叶到下(上)叶的过渡采

取突跳形式。

- ✓ **滞后**：在尖顶突变中，当控制参量沿路径 1 变化时首先碰上分岔曲线右支，但不发生突变，要到分岔曲线的左支的 α 点时，系统才发生突跳；沿路径 2 变化时，首先碰到的是左支，但要到达右支的 β 点时，才会发生突跳。这种现象称为滞后，反映突变的发生与控制参量变化的方向有关。

从严格的意义看，线性系统不存在分岔与突变这种非平庸行为。

四、小结

线性系统不可能出现严格意义上的分岔、突变。分岔、突变、滞后、多重吸引子共存等是非线性系统的本质特征。**非线性系统不仅可能产生自激振荡，而且能产生自组织运动、混沌等更不平庸的行为。**

系统科学的主题不是线性系统的平庸行为，而是非线性系统的各种非平庸的特征和行为。系统技术科学和系统工程的发展要解决的前沿课题，也是这些非线性问题。可以说，**系统科学实质上是关于非线性系统的科学。**

何谓复杂系统？？