第八讲 系统建模与仿真(1)

一、系统模型

1．系统模型的定义与特征

1）模型的定义

实际系统：实体（具体对象）、属性（实体特征）和行为（实体操作）。**(比如：教学系统)**

模型：实际系统的抽象或简化表示，即由反映系统的（物理）本质或（主要）特征的各种要素按一定规则组成的、用来描述系统结构和行为的文字、符号、数学方程、图形或实物，它是用来表述、实现和检验理论思维成果的主要工具。

同一个系统可以有多个模型（不同角度、不同方法），而同一个模型也可以表示多个不同系统（变量物理意义不同），如 $y=kx$（几何：直线；代数：比例）。

2）特征

- 实际系统的合理抽象和有效模仿（反映现实、高于现实）
- 由反映系统本质或特征的主要因素构成（现实性、易处理性）
- 表明了有关因素之间的逻辑关系或定量关系（整体性）

2. 建立系统模型的必要性

由于系统和环境的复杂性，无论从经济性（安全性、节省人力物力时间）还是有效性（主要因素、参数可调、方便实验优化）来考虑，都很难甚至不可能以实际系统进行试验，例如（天气预报）：

——恒星内部的物理过程，核爆炸

——研究的对象是人、人类社会、经济过程

——大型工程（电站、大坝、桥梁），飞机，洲际导弹

而模型作为现实系统的简化、抽象或模拟，是系统涉及的大量因素中的主要因素的映像，它能反映这些主要因素之间的逻辑关系，所以必须利用模型以便有效地对系统进行分析、评价、模拟、改进、完善。

3．模型分类

表达形式：概念模型（示意文字），数学模型（运筹学），实物模型（样机），图形模型（流程图），软件模型（计算机程序）……

用 途： 功能模型（计算），结构模型（分解），计划模型（预测），决策模型（综合），评价模型（打分）…

系统特性：静态与动态模型（时间变量），

确定性与不确定性模型（变量性质），

线性与非线性模型（变量关系），

连续与离散模型（变量取值），

微观与宏观模型（变量范围）……

4. 模型作用

利用模型可以：（室内装修、决策剧场）

- 对拟建系统或已有系统的未来进行预测；
- 确定和测量系统所涉及的因素、各种变量间的关系；
- 对假设进行检验；
- 指导数据的收集和整理；
- 促进人们进行创造性的实验、观察和选择；
- 作为学习的工具，减少决策的风险和损失

二、系统建模

系统分析的对象是复杂环境下的大而复杂的系统，为了对复杂系统进行深入的分析研究并得到直观而有说服力的结果，需要利用模型, 即建立系统的模型。

建模：构成模型的作业或活动

1. 建模**(Modeling)**

1）建模的目的：

- 深化对现象的认识，并指导实践
- 提高分析、决策和干预能力

2）建模的原则：

- 现实性 模型能在一定程度上反映系统的实际情况
- 简洁性 模型要简单明了，突出主要矛盾（所研究的方面）
- 适应性 对系统可能发生的（环境）变化有一定的适应能力
- 借鉴性 尽量采用标准化模型和借鉴已有成功经验的模型（节省时间、提高效率、安全可靠；与创新性并存）

3）模型有效性与建模形式化（符合程度由低到高）

复制有效：模型数据与实际数据相匹配。（行为水平）（黑盒：过去的输入输出数据）

预测有效：模型数据与未来实际数据相匹配。（状态结构水平）（粗粒度白盒）

结构有效：能真实反映实际系统的操作。（分解结构水平）（子系统达到状态结构水平）

4）模型确认

实际系统与模型间的相似程度。

- 从系统的解析水准来判断模型的有效性（白盒）
- 从系统的基本特性来判定模型的有效性（黑盒）

2．建模方法与步骤

建模的一般方法：

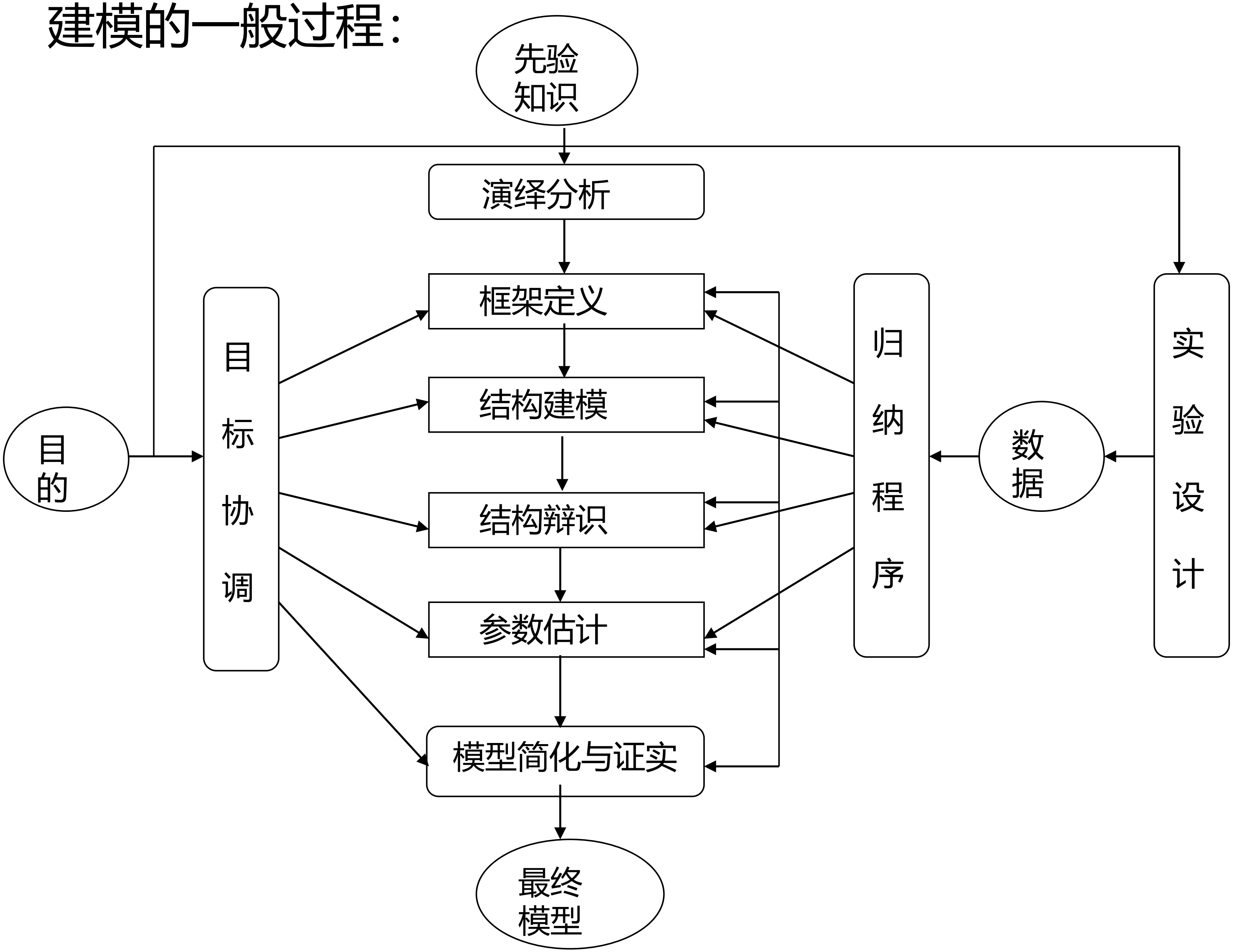
A. 演绎法（一般到特殊：先验信息到逻辑演绎），归纳法（特殊到一般：试验统计到规律分析）

B. 机理建模（白盒），经验建摸（黑盒）

C. 情景分析法（概念模型：由环境和状态的设想预测后果）

D. 德尔菲法（专家调查法）

建模的一般过程：



先验知识
演绎分析
框架定义
结构建模
结构辨识
参数估计
模型简化与证实
最终模型
目的
目标协调
归纳程序
数据
实验设计

（数学）模型的修正与简化方法：

A. 去除一些变量（抓主要矛盾）

B. 合并一些变量（性质类同，如投入产出表中的部门）

C. 改变变量性质（常数、范围、离散连续）

D. 改变变量之间的函数关系（非线性、概率相关）

E. 改变约束（增、删、改）

三、系统工程中常用的主要模型

1．结构模型

（建立复杂系统的数学模型，必先确定实体间的关系）

结构模型：确定系统要素、以及要素之间是否存在联结（因果、顺序、联系）和联结的相对重要性，而不是建立严格的数学关系以及精确的确定其系数。这样，在确定组成系统变量间的联结关系时，可使用预先选好的简单函数形式。

结构模型关心的是趋势及平衡状态下的辨识，而不是量的精确性。属于概念模型（有向图）、定性模型（关系分析）范畴。

优点：简单、易操作

缺点：关系的判断是主观的、凭经验的；反馈环节经常被忽视，而成为递阶关系

1）基本概念

结构：集合 $S=\{s1,s2,\ldots\ldots,sn\}$以及定义在其元素上的**关系**，即为该集合代表的系统的结构

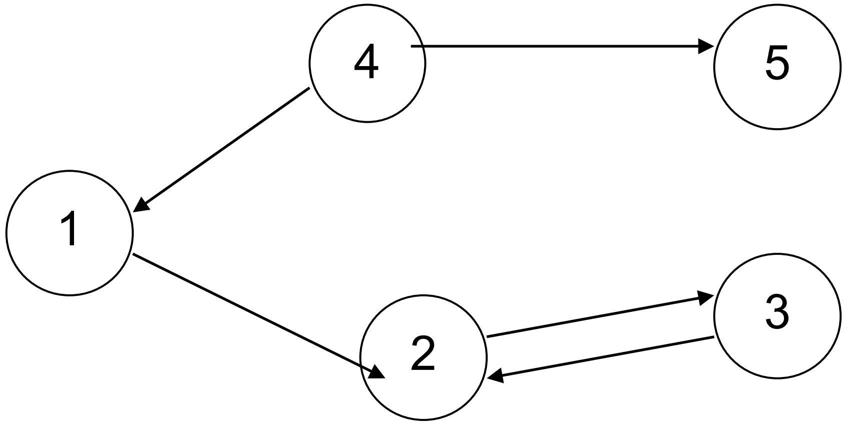
二元关系：$W=\{(x,y)/E(x,y)\}$

结构模型：$\{S,W\}$

结构模型的**表示形式包括图形法和矩阵法**。

结构图 G(有向图)：结点表示 S 中元素，有向弧线表示 W 中关系

邻接矩阵 A（行：出度；列：入度）



$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (s_i, s_j) \in W \\ 0 & (s_i, s_j) \notin W \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可达矩阵R（si到sj间至少有一条通路存在）

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & s_i\text{可达}s_j \\ 0 & s_i\text{不可达}s_j \end{cases}$$

如s_4可达s_1, s_2, s_3

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

几点说明：

- G是有向图
- A和R都是布尔矩阵，遵守**布尔运算**规则（加、乘）
- A中全为0的列为系统的源点，全为0的行为系统的汇点
- A, R实际上存在一个假定，即可达关系是传递的
- 如果A^k的$a_{ij}^k=1$, 则表示从s_i到s_j存在长度为k的通路
- A和R的关系: $R=(A\cup I)^n$
- A ($/A^{\mathrm{T}}$)和G($/G$的逆图)是一一对应的，而R和G不存在一一对应关系
- 回路：可达矩阵中行和列都相同的不同元素间构成回路

2）结构模型的层次级别划分

可达集 $R(s_i)$：

有向图中元素 si 可到达的元素集合，也就是可达矩阵中 s_i 对应行中所有矩阵元素为 1 的列所对应的元素集合

前因集 $A(s_i)$：

有向图中所有可能到达 s_i的元素集合，也就是可达矩阵中 s_i对应列中所有矩阵元素为 1 的行所对应的元素集合

在多层结构中（如有回路，在可达矩阵中去掉其中一个素所对应的行和列），s_i为最高一级元素的充要条件是：

$$R(s_i) = R(s_i) \cap A(s_i)$$

得到最高一级的元素后，暂时划去可达矩阵中最高级元素的对应行和列，按上述方法继续寻找次高级的元素，直到找到各级的元素。

3）结构模型的建立

结构建模过程：

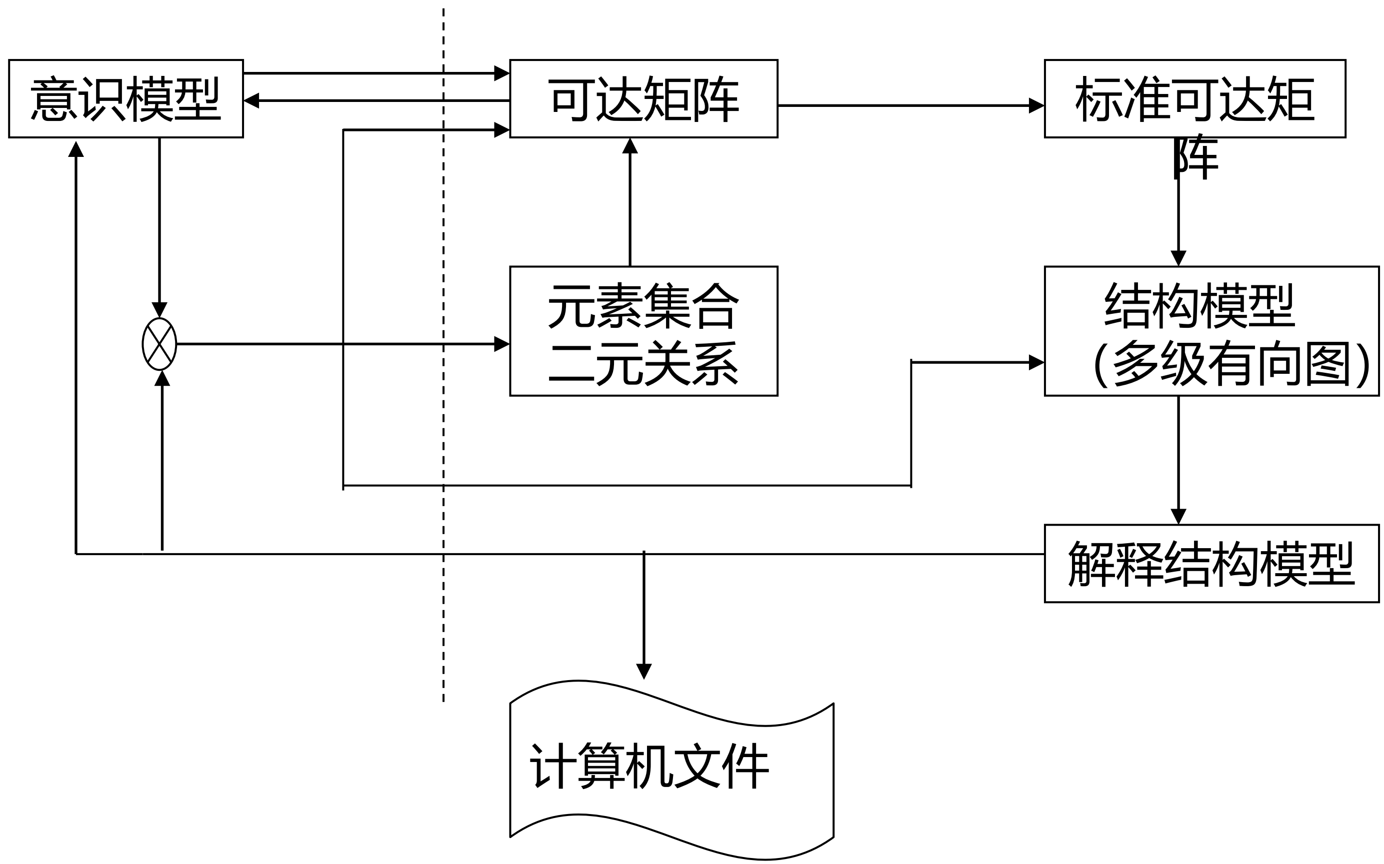
1）根据层次级别的划分结果，按照从高到低的顺序重新排列去除回路后的可达矩阵

2）按照从高到低的顺序绘制每一级别中的节点，相同级别中的节点位于同一水平线上

3）按照重新排列后标准可达矩阵，绘制相邻两级间从下级到上级的带箭头连线

4）对于跨级的连线，如果这条边可以根据已绘制的连线由传递性推出，则不必绘制

5）添加那些因为构成回路而去掉的元素，并同对应的保留元素节点相连


意识模型
可达矩阵
标准可达矩阵
元素集合
二元关系
结构模型
(多级有向图)
解释结构模型
计算机文件

以之前的五节点结构图 G 为例，*s2*和 *s3*构成回路，去掉 *s3*形成新的可达矩阵：

$$
\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_4 \\ s_5 \end{array}
\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_4 & s_5 \\ \end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & s_1 & s_2 & s_4 & s_5 \\
s_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
s_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
s_4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
s_5 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

计算所有元素的可达集和前因集，如下表所示，可知元素 *s2*和 *s5*是层次结构模型的最高级：

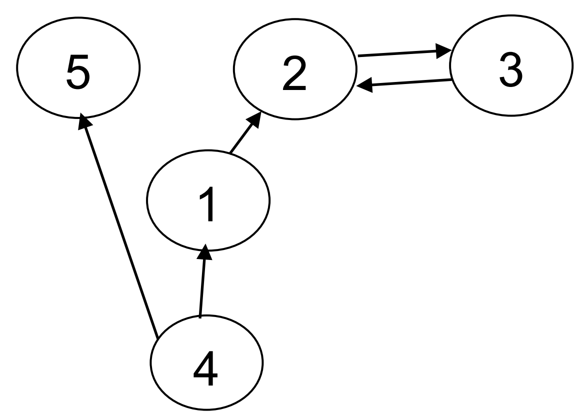
s_i	$R(s_i)$	$A(s_i)$	$R(s_i) \cap A(s_i)$
1	1，2	1，4	1
*2	2	1，2，4	2
4	1，2，4，5	4	4
*5	5	4，5	5

去掉元素 *s2*和 *s5*后，形成新的可达集和前因集，如下表所示，可知元素 *s1*是层次结构模型的第二级，依次类推，*s4*为第三级

s_i	$R(s_i)$	$A(s_i)$	$R(s_i) \cap A(s_i)$
*1	1	1，4	1
4	1，4	4	4

根据层次级别划分，重新排列可达矩阵，并依次建立结构模型，如下所示

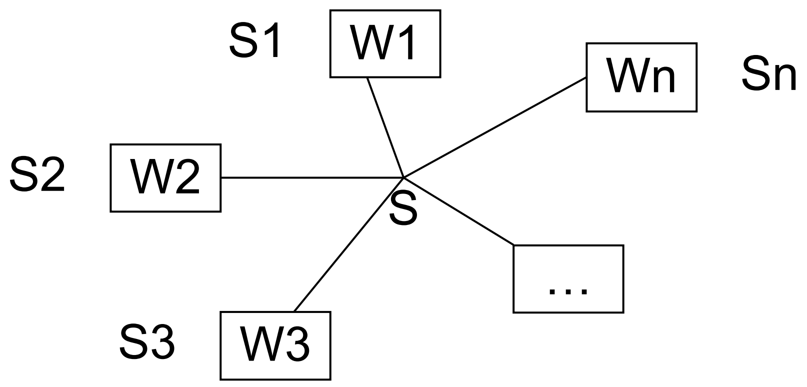
$$\begin{array}{c} \\ s_2 \\ s_5 \\ s_1 \\ s_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_2 & s_5 & s_1 & s_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

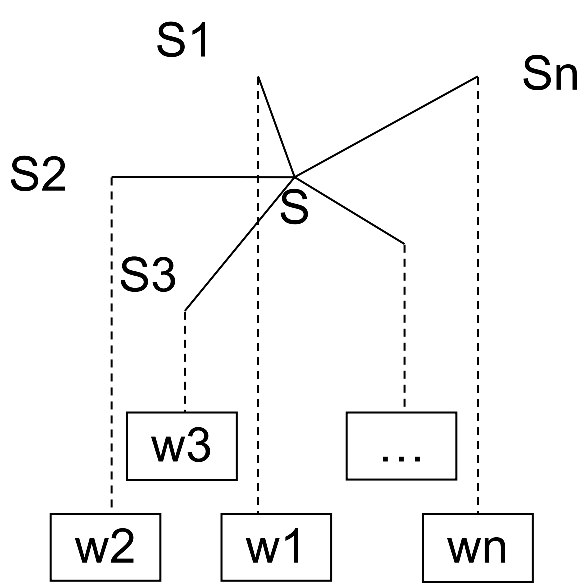


2．模拟模型

1）物理模拟模型

举例：某公司拥有几个加工厂，它们的位置如图所示。现在公司拟建造一个转运仓库，要使运输的总费用最小，这仓库应建在何处?





记各工厂的位置为 Si(*xi* ,*yi*)，各处需求的货物量为 W_i。假设吨公里运费为 1 元，则仓库 *S* 的位置(*x*,*y*)应使总费用 *C*(*x*,*y*)达到最小，即

$$C_{\min}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}W_i\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$$

上式不容易求解，一般可用迭代法（搜索）求其近似解。另一思路是采用比拟思考法，可以考虑力矩平衡模型（力学系统模拟数学模型）。

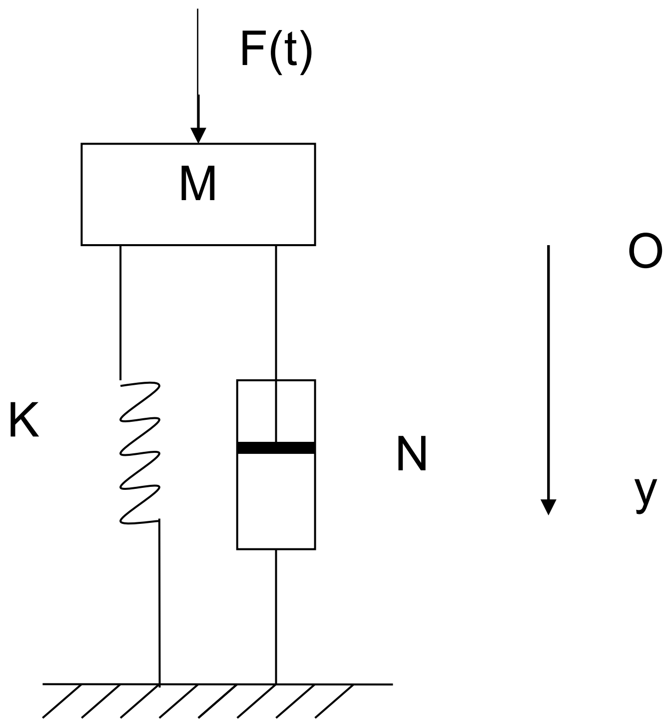
当力矩平衡时，总力矩和最小，对应于费用和最小，如上图所示。

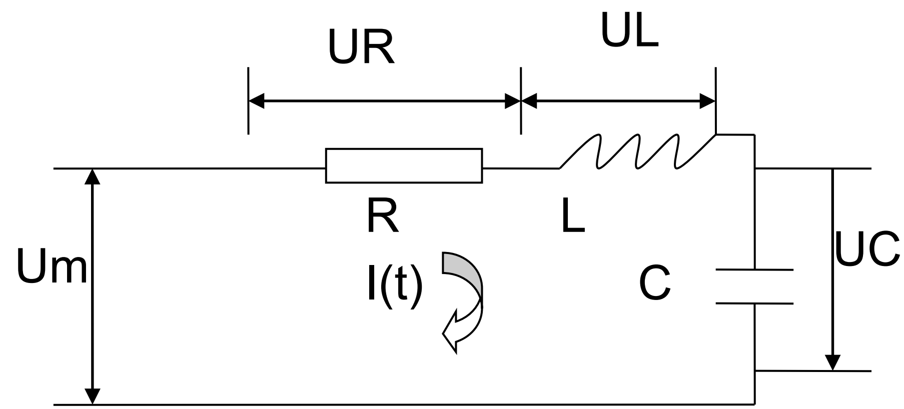
2）电路系统与机械系统的相似性

举例：

I.　设有质量-阻尼-弹簧系统（MNK）如图所示，试建立其微分方程与状态方程。

II.　另设有一由电感、电阻与电容组成的电路（LRC）如图所示。





(1) 由牛顿力学：$M\ddot{y} = F(t) - Ky - N\dot{y}$

即：$M\ddot{y} + N\dot{y} + Ky = F(t)$

写成状态方程：$x_1 \to y, x_2 \to \dot{y}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{N}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} \cdot F \quad \Rightarrow \quad \dot{X} = AX + BF$$

(2) 根据克希霍夫电压定律，有

$$U_m(t) - U_L(t) - U_C(t) - U_R(t) = 0$$

即：$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \dfrac{1}{C}Q = U_m(t)$

其中：

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

写成状态方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot U_m \Rightarrow \dot{X} = AX + BF$$

(3) 对应关系

力 F ∽源电压 U_m；速度 $\frac{dy}{dt}$∽ 电流 I；位移 y ∽ 电量 Q

质量 M ∽ 电感 L； 阻尼系数 N ∽ 电阻 R；弹簧刚度 K ∽ 电容 C 的倒数 $\frac{1}{C}$

3．运筹学模型

1）线性规划

线性规划就是求取线性函数在线性等式或不等式约束下达到最小或最大值的问题。

举例：某工厂有三种原料 B1、B2和 B3，贮量分别为 170*kg*、100*kg* 和 150*kg*。现用此三种原料生产两种产品 A1和 A2。已知每生产 1*kg* A1需要原料 5*kg* B1、2*kg* B2和 1*kg* B3；每生产 1*kg* A2需要原料 2*kg* B1、3*kg* B2和 5*kg* B3。又知每千克 A1 产品利润 10 元，每千克 A2产品利润 18 元。问在工厂现有资源条件下，应如何安排生产才使工厂获得最大利润。

设 A_1、A_2产品的产量分别为 x_1kg 和 x_2kg。则上述问题可描述为下列方程

$$
\begin{aligned}
Max \quad & 10x_1 + 18x_2 \\
s.t. \quad & 5x_1 + 2x_2 \le 170 \\
& 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\
& x_1 + 5x_2 \le 150 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

线性规划问题的一般（标准）形式：

$$Min\ \ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

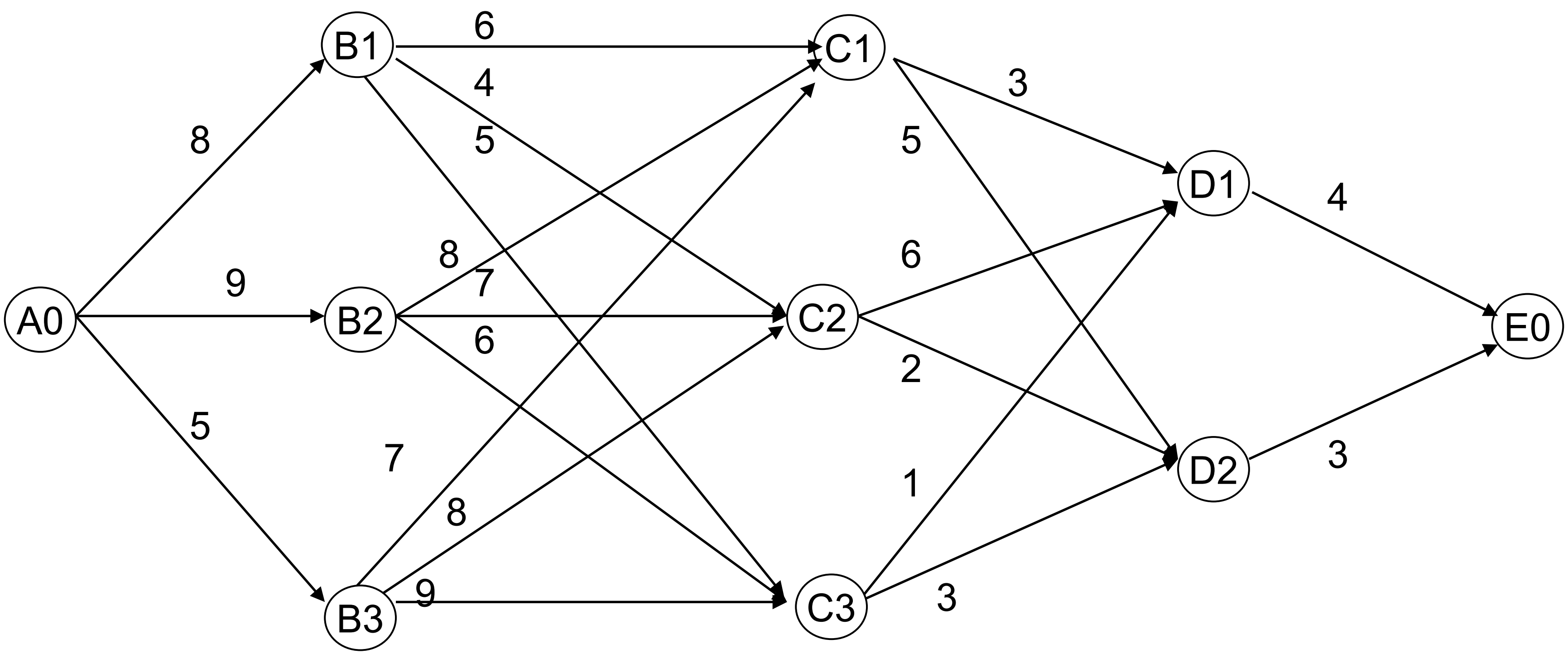
$$\begin{aligned} s.\text{t.}\ \ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \\ & x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

即：$Min\ \ C^T X$

$s.t.\ \ AX = b \qquad X \geq 0$

对于线性规划问题一般可用单纯形法求解，对于低维问题也可用图解法求解。（略）

2）动态规划



- 与时间有关，具有多阶段决策过程的特点；
- 无固定算法。

最优性原理：作为整个动态规划的最优策略均具有这样的性质：即无论过去的状态和决策如何，对前面的决策所形成的状态而言，余下的诸决策必须构成最优策略。简言之，一个最优策略的子策略总是最优的。