2015年-2016学年度第一学期
华中科技大学本科生课程考试试卷(A卷)

课程名称：**运筹学（一）**　　课程类别　□公共课 ■专业课　　考试形式　□开卷 ■闭卷

所在院系：自动化学院　专业及班级：________　考试日期：2015.11.20

学　号：________　姓名：________　任课教师：________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分数								

得分	评卷人

一、（10 分）某工厂每月生产 A、B、C 三种产品，单件产品的原材料消耗量、设备台时的消耗量、资源限量及单件产品利润如下图所示：

资源 \ 产品	A	B	C	资源限量
材料（kg）	1.5	1.2	4	2500
设备（台时）	3	1.6	1.2	1400
利润（元/件）	10	14	12	

根据市场需求，预测三种产品最低月需求量分别是 150、260、120，最高需求量是 250、310、130，试建立该问题数学模型，使每月利润最大。

请分别回答下列问题：

（1）求使该厂每月利润最大的生产计划数学模型；

（2）将此数学模型化为标准型。

解：（1）设每月生产 A、B、C 产品的数量分别为 x_1, x_2, x_3，则每月利润最大的生产计划数学模型为

$$
\begin{aligned}
\text{Max}\quad & z=10x_1+14x_2+12x_3\\
\text{s.t.}\quad & 1.5x_1+1.2x_2+4x_3\le 2500\\
& 3x_1+1.6x_2+1.2x_3\le 1400\\
& 150\le x_1\le 250\\
& 260\le x_2\le 310\\
& 120\le x_3\le 130\\
& x_1,x_2,x_3\ge 0
\end{aligned}
$$

（2）引入松弛变量$x_4,x_5,\dots,x_{11}$，化为标准型为：

$$
\begin{aligned}
\text{Max}\quad & z=10x_1+14x_2+12x_3\\
\text{s.t.}\quad & 1.5x_1+1.2x_2+4x_3+x_4=2500\\
& 3x_1+1.6x_2+1.2x_3+x_5=1400\\
& x_1-x_6=150\\
& x_1+x_7=250\\
& x_2-x_8=260\\
& x_2+x_9=310\\
& x_3-x_{10}=120\\
& x_3+x_{11}=130\\
& x_1,x_2,\dots,x_{11}\ge 0
\end{aligned}
$$

得分	评卷人

二、（25 分）用单纯形法求解线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\text{Max}\quad & z=-3x_1+x_3\\
\text{s.t.}\quad & x_1+x_2+x_3\le 6\\
& -2x_1+x_2-x_3\ge 1\\
& 3x_2+x_3=9\\
& x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0
\end{aligned}
$$

解：引入松弛变量x_4,x_5，化成标准形式为

$$
\begin{aligned}
\text{Max}\quad & z=-3x_1+x_3 \\
\text{s.t.}\quad & x_1+x_2+x_3+x_4=6 \\
& -2x_1+x_2-x_3-x_5=1 \\
& 3x_2+x_3=9 \\
& x_1,x_2,\ldots,x_5\ge 0
\end{aligned}
$$

引入人工变量 x_6,x_7 化为

$$
\begin{aligned}
\text{Max}\quad & z=-3x_1+x_3-Mx_6-Mx_7 \\
\text{s.t.}\quad & x_1+x_2+x_3+x_4=6 \\
& -2x_1+x_2-x_3-x_5+x_6=1 \\
& 3x_2+x_3+x_7=9 \\
& x_1,x_2,\ldots,x_7\ge 0
\end{aligned}
$$

列出初始单纯形表为：

C_j			-3	0	1	0	0	-M	-M	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	6	1	1	1	1	0	0	0	6
-M	x_6	1	-2	[1]	-1	0	-1	1	0	1
-M	x_7	9	0	3	1	0	0	0	1	3
-z		10M	-2M-3	4M	1	0	-M	0	0	

取 x_2 为换入变量， x_6 为换出变量，第一次迭代为：

C_j			-3	0	1	0	0	-M	-M	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	5	3	0	2	1	1	-1	0	5/3

0	x_2	1	-2	1	-1	0	-1	1	0	-
-M	x_7	6	[6]	0	4	0	3	-3	1	1
-z		6M	6M-3	0	4M+1	0	3M	-4M	0	

取x_1为换入变量，x_7为换出变量，第二次迭代为：

C_j			-3	0	1	0	0	-M	-M	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	2	0	0	0	1	-1/2	1/2	-1/2	-
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0	0	1/3	9
-3	x_1	1	1	0	[2/3]	0	1/2	-1/2	1/6	3/2
-z		3	0	0	3	0	3/2	-M-3/2	-M+1/2	

取x_3为换入变量，x_1为换出变量，第三次迭代为：

C_j			-3	0	1	0	0	-M	-M	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	2	0	0	0	1	-1/2	1/2	-1/2	
0	x_2	5/2	-1/2	1	0	0	-1/4	1/4	1/4	
1	x_3	3/2	3/2	0	1	0	3/4	-3/4	1/4	
-z		-3/2	-9/2	0	0	0	-3/4	-M+3/4	-M-1/4	

所有的检验数都非正，最优解为$x^* = (0,5/2,3/2,2,0,0,0)$，最优值$z^* = 3/2$。

得分	评卷人

三、（10 分）写出下述线性规划的对偶问题

$$
\begin{aligned}
\text{Max}\quad & z = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 2 \\
& 3x_1 - x_2 + 6x_3 \ge 1 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3\text{无约束}
\end{aligned}
$$

解：

$$
\begin{aligned}
\text{Min}\quad & w = 2y_1 + y_2 + 4y_3 \\
\text{s.t.}\quad & 2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 1 \\
& 3y_1 - y_2 + y_3 \le 4 \\
& -5y_1 + 6y_2 + y_3 = 3 \\
& y_1 \ge 0,\ \mathrm{y}_2 \le 0,\ \mathrm{y}_3\text{无约束}
\end{aligned}
$$

得分	评卷人

四（15）、对于下列线性规划问题，设基变量 x_2 的系数 c_2 变化 $\vartriangle c_2$ ，在原最优解不变的条件下，确定 c_2 的变化范围。

$$
\max\ z = 2x_1 + 3x_2
$$

$$
s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \qquad \le 16 \\ \qquad 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}
$$

该线性规划的最优解时的单纯型表为：

$c_j \to$			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1

3	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0
$c_j - z_j$			0	0	-3/2	-1/8	0

解：

由于x_2是基变量，因此，所有非基变量的检验数都有可能改变，由所有非基变量的检验数非负的要求，可得到：

$$\max_j\left\{\sigma_j \middle/ \bar{a}_{rj} \middle| \bar{a}_{rj} > 0\right\} \le \Delta c_2 \le \min_j\left\{\sigma_j \middle/ \bar{a}_{rj} \middle| \bar{a}_{rj} < 0\right\}$$

即：

$$\frac{-3/2}{1/2} \le \Delta c_2 \le \frac{-1/8}{-1/8}, \qquad -3 \le \Delta c_2 \le 1$$

可以得到c_2的变化范围：$0 \le c_2 \le 4$

得分	评卷人

五（15 分）设一个线性规划的原问题为：$\max z = CX \quad s.t.\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$，

试证明如下弱对偶性定理：若 $\bar{X}$ 是原问题的可行解，$\bar{Y}$ 是对偶问题的可行解，则存在$C\bar{X} \le \bar{Y}b$ 。

证明：原问题的对偶问题为：$\min \omega = Yb \quad s.t.\begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$

由于$\bar{X}$是原问题的可行解，则应该满足约束条件，即：$A\bar{X} \le b$ 。若$\bar{Y}$是对偶问题的可行解，则$\bar{Y} \ge 0$ ，将$\bar{Y}$乘以上述不等式，可得到：$\bar{Y}A\bar{X} \le \bar{Y}b$。

若 $\bar{Y}$ 是对偶问题的可行解，$\bar{Y}$ 应满足约束方程，即：$\bar{Y}A \geq C$ ，该式两端同时乘以 $\bar{X}$ ，可以得到：$\bar{Y}A\bar{X} \geq C\bar{X}$ ，于是又：$C\bar{X} \leq \bar{Y}A\bar{X} \leq \bar{Y}b$ ，证毕。

得分	评卷人

六（25 分）、求如下产销平衡表中运输问题的最优解与最优值。

产地＼销地	甲	乙	丙	丁	产量
1	2	9	10	7	9
2	1	3	4	2	5
3	8	4	2	5	7
销量	3	8	4	6	

解：利用 vogel 方法产生初始解

产地＼销地	甲	乙	丙	丁	行差
1	2	9	10	7	[5]
2	1	3	4	2	1
3	8	4	2	5	2
列差	1	1	2	3	

第一步分配：

产地＼销地	甲	乙	丙	丁	产量
1	3				9

2					5
3					7
销量	3	8	4	6	

产地 销地	甲	乙	丙	丁	行差
1	~~2~~	9	10	7	2
2	~~1~~	3	4	2	1
3	~~8~~	4	2	5	2
列差		1	2	[3]	

第二步分配：

产地 销地	甲	乙	丙	丁	产量
1	3				9
2				5	5
3					7
销量	3	8	4	6	

产地 销地	甲	乙	丙	丁	行差
1	~~2~~	9	10	7	2
~~2~~	~~1~~	~~3~~	~~4~~	~~2~~	
3	~~8~~	4	2	5	2
列差		5	[8]	2	

第三步分配：

产地 销地	甲	乙	丙	丁	产量
1	3				9
2				5	5
3			4		7
销量	3	8	4	6	

产地 销地	甲	乙	丙	丁	行差
1	~~2~~	9	~~10~~	7	2
~~2~~	~~1~~	~~3~~	~~4~~	~~2~~	
3	~~8~~	4	~~2~~	5	1
列差		[5]		2	

第四步分配：

产地 销地	甲	乙	丙	丁	产量
1	3				9
2				5	5
3		3	4		7
销量	3	8	4	6	

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	行差
1	2	9	10	7	2
~~2~~	~~1~~	~~3~~	~~4~~	~~2~~	
~~3~~	~~8~~	~~4~~	~~2~~	~~5~~	
列差		9		7	

初解：

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
1	3	5		1	9
2				5	5
3		3	4		7
销量	3	8	4	6	

位势法判断最优解：

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
1	2	9	3 10	7	0
2	4 1	-1 3	2 4	2	-5
3	11 8	4	2	5	-5
v_j	2	9	7	7	

位势法判断最优解：有一空格检验数小于 0，所以该解进行调整。

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
1	3	（-1）5		(+1)1	4
2		(+1)		(-1)5	9
3		3	4		4
销量	5	2	4	6	

调整量为 5，调整后为：

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
1	3			6	9
2		5		0	5
3		3	4		7
销量	3	8	4	6	

调整后检验：

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
1	2	1 9	4 10	7	0
2	4 1	3	3 4	2	-5
3	10 8	4	2	2 5	-4
v_j	2	8	6	7	

检验数都为正，所以为最优解。

最优解为： $a_{11}=3, a_{14}=6, a_{22}=5, a_{24}=0,\ a_{32}=3, a_{33}=4$

运费为：$z=3*2+6*7+5*3+0*2+3*4+4*2=83$

2016年-2017学年度第一学期
华中科技大学本科生课程考试试卷(A卷)

课程名称：运筹学（一）　　课程类别　□公共课 ■专业课　　考试形式　□开卷 ■闭卷

所在院系：自动化学院　　专业及班级：________　　考试日期：2016.11.26

学　　号：________________　姓名：______________　任课教师：______________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							

得分	评卷人

一、（**15**分）某公司生产的产品**A**，**B**，**C**和**D**都要经过下列工序：刨、立铣、钻孔和装配。已知每单位产品所需工时及本月四道工序可用生产时间如下表所示：

工序 产品	刨	立铣	钻孔	装配
A	**2**	**2**	**2**	**3**
B	**1**	**1**	**2**	**1**
C	**1**	**1**	**1**	**2**
D	**2**	**1**	**1**	**3**
可用生产时间（小时）	**1800**	**2800**	**3000**	**6000**

又知四种产品对利润贡献及本月最少销售需要单位如下：

产品	最少需要量	利润：元/单位
A	**100**	**2**
B	**600**	**3**
C	**500**	**1**
D	**400**	**4**

问该公司该如何安排生产使利润收入为最大？（只需建立模型）

请分别回答下列问题：

（**1**）该公司应如何安排生产使利润最大？（只需建立模型）

（**2**）将此数学模型化为标准型。

解：（1）设生产四种产品分别x_1,x_2,x_3,x_4单位，则使利润最大的生产计划数学模型为

$$
\begin{aligned}
\text{Max}\quad & 2x_1+3x_2+x_3+4x_4\\
\text{s.t.}\quad & 2x_1+x_2+x_3+2x_4\le 1800\\
& 2x_1+x_2+x_3+x_4\le 2800\\
& 2x_1+2x_2+x_3+x_4\le 3000\\
& 3x_1+x_2+2x_3+3x_4\le 6000\\
& x_1\ge 100\\
& x_2\ge 600\\
& x_3\ge 500\\
& x_4\ge 400
\end{aligned}
$$

（2）引入松弛变量$x_5,x_6,\ldots,x_{12}$，化为标准型为：

$$
\begin{aligned}
\text{Max}\quad & 2x_1+3x_2+x_3+4x_4\\
\text{s.t.}\quad & 2x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=1800\\
& 2x_1+x_2+x_3+x_4+x_6=2800\\
& 2x_1+2x_2+x_3+x_4+x_7=3000\\
& 3x_1+x_2+2x_3+3x_4+x_8=6000\\
& x_1-x_9=100\\
& x_2-x_{10}=600\\
& x_3-x_{11}=500\\
& x_4-x_{12}=400\\
& x_1,x_2,\ldots,x_{12}\ge 0
\end{aligned}
$$

得分	评卷人

二、（20 分）用大 M 法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 1 \\ & 2x_1 + x_3 = 4 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

解：引入松弛变量 x_4, x_5，化成标准形式为

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ & 2x_1 + x_3 = 4 \\ & x_1, x_2, \ldots, x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

引入人工变量 x_6, x_7 化为

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = 2x_1 - x_2 - 2x_3 - Mx_6 - Mx_7 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ & 2x_1 + x_3 + x_7 = 4 \\ & x_1, x_2, \ldots, x_7 \ge 0 \end{aligned}$$

列出初始单纯形表为：

C_j			2	-1	-2	0	0	-M	-M	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	4	1	2	1	1	0	0	0	4
-M	x_6	1	[2]	-1	1	0	-1	1	0	1
-M	x_7	4	2	0	1	0	0	0	1	4
-z		5M	2+4M	-1-M	-2+2M	0	-M	0	0	

取 x_1 为换入变量， x_6 为换出变量，第一次迭代为：

C_j			2	-1	-2	0	0	-M	-M	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	7/2	0	5/2	1/2	1	1/2	-1/2	0	7
2	x_1	1/2	1	-1/2	1/2	0	-1/2	1/2	0	-
-M	x_7	3	0	1	0	0	[1]	-1	1	3
-z		3M-1	0	M	-3	0	1+M	-2M-1	0	

取 x_5 为换入变量， x_7 为换出变量，第二次迭代为：

C_j			2	-1	-2	0	0	-M	-M	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	2	0	2	1/2	1	0	0	-1/2	
2	x_1	2	1	0	1/2	0	0	0	1/2	
0	x_5	3	0	1	0	0	1	-1	1	
-z		-4	0	-1	-3	0	0	-M	-M-1	

所有的检验数都非正，最优解为 $x^* = (2,0,0,2,3,0,0)$，最优值 $z^* = 4$ 。

得分	评卷人

三、（15 分）下表中给出某一求极大化问题的单纯形表，请问表中a_1, a_2, c_1, c_2, d为何值时以及表中变量属于哪一种类型时有：

a） 表中解为唯一最优解；

b） 表中解为无穷多最优解之一；

c） 下一步迭代将以x_1替换基变量x_5；

d） 该线性规划问题具有无界解；

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	d	4	a_1	1	0	0
x_4	2	−1	−5	0	1	0
x_5	3	a_2	−3	0	0	1
$c_j - z_j$		c_1	c_2	0	0	0

答：

a） 表中解为唯一最优解：$\mathrm{d} \geq 0, c_1 < 0, c_2 < 0$；

b） 表中解为无穷多最优解之一：$\mathrm{d} \geq 0, c_1 \leq 0, c_2 \leq 0, c_1 * c_2 = 0$；

c） 下一步迭代将以x_1替换基变量x_5：$\mathrm{d} \geq 0, c_1 > 0, a_2 > 0, \frac{3}{a_2} < \frac{d}{4}$

d） 该线性规划问题具有无界解：$\mathrm{d} \geq 0, c_2 > 0, a_1 \leq 0$；

得分	评卷人

四、（10 分）已知线性规划的最优解为 ***x****=（0，0，4，4）^{T}。试利用互补松弛定理求对偶问题最优解。

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 20 & (1a) \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 20 & (1b) \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \le 1 & (1c) \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

解：对偶问题为：

$$\min \quad w = 20y_1 + 20y_2 + y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 1 & (2a) \\ 2y_1 + y_2 - y_3 \ge 2 & (2b) \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 3 & (2c) \\ 3y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 4 & (2d) \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

由于 x_3*=x_4*=4>0，是松约束，故（2c）与（2d）是紧约束，即对 *Y成立等式：**

$$\begin{cases} 2y_1^* + 3y_2^* + y_3^* = 3 \\ 3y_1^* + 2y_2^* - y_3^* = 4 \end{cases}$$

把 *x代入原问题三个约束中，可知(1c)是松的，故 y_3*=0，然后解方程组：**

$$\begin{cases} 2y_1^* + 3y_2^* = 3 \\ 3y_1^* + 2y_2^* = 4 \end{cases} \quad \text{得到：} \begin{cases} y_1^* = \dfrac{6}{5} \\ y_2^* = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

故对偶最优解为：Y*=（6/5，1/5，0）， z*=*w=28**

得分	评卷人

五、（20 分）某厂生产三种产品受到两种原材料的限制。为求最大利润，求得最终单纯形表如下表所示。其中 x_4，x_5 为松驰变量。

（1）利用最终单纯形表求各产品的单位销售价格 c_1，c_2，c_3。

（2）c_3 增加到多少，仍能使现行计划保持最优。

（3）计算这两种原料的影子价格，如果能以每单位 2 元的价格在市场上购入更多的原料 b_2，是否合算？又若 b_2 的价格为 5 元呢？

C_j			c_1	c_2	c_3	**0**	**0**
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
c_1	x_1	**1**	**1**	**0**	**1**	**3**	**-1**
c_2	x_2	**2**	**0**	**1**	**1**	**-1**	**2**
-z		**8**	**0**	**0**	**-4**	**-3**	**-4**

解（1）利用最终单纯形表 x_4, x_5 的检验数，

$0-3c_1+c_2=-3$ 及 $0+c_1-2c_2=-4$ 解得，$c_1=2$，$c_2=3$。

利用最终单纯形表 x_3 的检验数 $\sigma_3=c_3-c_1-c_2=-4$，$c_3=1$。

（2）c_3 为非基变量的目标函数系数，则 c_3 的改变只是影响 x_3 的检验数，

$\sigma_3=c_3-c_1-c_2=c_3-5\le 0$，$c_3\le 5$ 仍能使现行计划保持最优。

（3）两种原料影子价格分别为 3 和 4。若 b_2 的市场价格为 2，合算；为 5，则不合算。

得分	评卷人

六、（20 分）已知某种产品有产地 I,II,III,其每月产量分别为 50 吨、100 吨、150 吨，将其销往 A,B,C,D,E 五个产地，其每月需要的销量分别为 25 吨、115 吨、60 吨、30 吨、70 吨。其产销平衡表与单位运价表如下表所示。

销地 产地	A	B	C	D	E	产量
I	10	15	22	20	40	50
II	24	40	18	33	28	100
III	30	35	37	38	25	150
销量	25	115	60	30	70	

求：

（1） 试用最小元素法确定初始调拨方案；

（2） 求最优调拨方案。

解：用最小元素法确定初始解。

（1）用最小元素法确定初始解为：

销地 产地	A	B	C	D	E
I	25	25			
II		10	60	30	
III		80			70

（2）方法一：用位势法对最小元素法求得的初始解判断是否为最优解，

销地 产地	A	B	C	D	E	u_i
I	10	15	22 | 29	20 | 12	40 | 35	0
II	24 | −9	40	18	33	28 | −2	25
III	30 | 0	35	37 | 24	38 | 10	25	20
v_i	10	15	−7	8	5	

有检验数为负数，需要调整：

销地 产地	A	B	C	D	E
I	25(−1)	25(+1)			
II	+1	10(−1)	60	30	
III		80			70

调整为：

销地 产地	A	B	C	D	E
I	15	35			
II	10		60	30	
III		80			70

用位势法计算检验数

销地 产地	A	B	C	D	E	u_i
I	10	15	22 | 18	20 | 1	40 | 35	0
II	24	40 | 11	18	33	28 | 9	14
III	30 | 0	35	37 | 13	38 | −1	25	20
v_i	10	15	4	19	5	

还有检验数为负数，再进行一次调整，得到最优解。

销地 产地	A	B	C	D	E
I		50			
II	25		60	15	
III		65		15	70

（3） 方法二：可以用 vogel 法直接求出初始解，并经检验为最优解。

销地 产地	A	B	C	D	E
I		50			
II	25		60	15	
III		65		15	70

（4） 最优的运费为：

$$z = 50*15 + 25*24 + 60*18 + 33*15 + 65*35 + 15*38 + 25*70$$
$$= 7520$$

2017年-2018学年度第一学期
华中科技大学本科生课程考试试卷(A卷)

课程名称：运筹学（一）　课程类别　□公共课 ■专业课　考试形式　□开卷 ■闭卷

所在院系：自动化学院　专业及班级：________　考试日期：2017.11.18

学　　号：________________姓名：______________任课教师：______________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							

得分	评卷人

一、（20分）试求解如下线性规划问题

$$\max z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \le 8 \\ x_1 - 2x_3 \ge 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：将模型化为如下：

$$\max z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_5 = 8 \\ x_1 - 2x_3 - x_6 + x_7 = 1 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \cdots, 8 \end{cases}$$

列出初始单纯形表

			2	1	3	0	0	0	-M	
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
0	x_4	7	1	1	1	1	0	0	0	7
0	x_5	8	2	-3	5	0	1	0	0	4
-M	x_7	1	[1]	0	-2	0	0	-1	1	1
	$c_j - z_j$		2+M	1	3-2M	0	0	-M	0	

选择 x_1 为换入变量， x_7 为换出变量，进行迭代得到：

			2	1	3	0	0	0	-M	
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
0	x_4	6	0	1	3	1	0	1	-1	2
0	x_5	6	0	-3	[9]	0	1	2	-2	6/9
2	x_1	1	1	0	-2	0	0	-1	1	
	$c_j - z_j$		0	1	7	0	0	2	-M-2	

选择 x_3 为换入变量， x_5 为换出变量，进行迭代得到：

			2	1	3	0	0	0	-M	
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
0	x_4	4	0	[2]	0	1	-1/3	1/3	-1/3	
3	x_3	2/3	0	-1/3	1	0	1/9	2/9	-2/9	
2	x_1	7/3	1	-2/3	0	0	2/9	-5/9	5/9	

	$c_j - z_j$		0	10/3	0	0	-7/9	4/9	-M-4/9	

选择 x_2 为换入变量，x_4 为换出变量，进行迭代得到：

			2	1	3	0	0	0	-M	
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
1	x_2	2	0	1	0	1/2	-1/6	1/6	-1/6	
3	x_3	4/3	0	0	1	1/6	1/18	5/18	-5/18	
2	x_1	11/3	1	0	0	1/3	1/9	-4/9	4/9	
	$c_j - z_j$		0	0	0	-5/3	-2/9	-5/9	-M+5/9	

所有检验数都为复数，得到最优解为： x_1=11/3，$x_2 = 2, x_3 = 4/3$

最优值为： $z = 40/3$

得分	评卷人

二、（**15 分**）已知线性规划问题如下：

$$\max \quad z = x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \le 50 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

已知该问题的最优解为 $(2,4)$，利用对偶性质写出对偶问题的最优解。

解：该问题的对偶问题为：

$$\min \quad w = 50y_1 + y_2 + 4y_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 5y_1 + y_2 \ge 1 \\ 10y_1 + y_2 + y_3 \ge 3 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \le 0,\ y_3 \ge 0 \end{cases}$$

将 $x^* = (2,4)$ 代入原问题可知：$x_1 + x_2 > 1$ 为严格不等式，所以 $y_2^* = 0$。

由对偶问题性质可知：

$\begin{cases} 5y_1^* = 1 \\ 10y_1^* + y_3^* = 3 \end{cases}$（或者 $\begin{cases} 5y_1^* = 1 \\ 50y_1^* + 4y_3^* = 14 \end{cases}$，或者 $\begin{cases} 10y_1^* + y_3^* = 3 \\ 50y_1^* + 4y_3^* = 14 \end{cases}$）

解之得：$y_1^* = 1/5$，$y_3^* = 1$。

所以，对偶问题的最优解是 $y^* = (1/5, 0, 1)$，最优值 $\min \quad w = 14$。

得分	评卷人

三、（**15 分**）已知线性规划问题及其最优单纯形表（见表 1）

$$\max \quad z = -x_1 - x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

表 1

C_j			−1	−1	4	0	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
−1	x_1	1/3	1	−1/3	0	1/3	0	−2/3
0	x_5	6	0	2	0	0	1	1

4	x_3	13/3	0	2/3	1	1/3	0	1/3
σ_j			0	－4	0	－1	0	－2

若约束的右端列向量$b=\begin{bmatrix}9\\2\\4\end{bmatrix}$变成列向量$\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}$，在上述最优单纯形表的基础上求新问题的最优解。

解：先求解最优单纯形表中列向量b所对应的解变为

$$X_B=B^{-1}(b+\Delta b)=\begin{bmatrix}1/3&0&-2/3\\0&1&1\\1/3&0&1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\5\\2\end{bmatrix}$$

因为－1 小于 0，用对偶单纯形法继续迭代：

C_j			－1	－1	4	0	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
－1	x_1	－1	1	－1/3	0	1/3	0	[－2/3]
0	x_5	5	0	2	0	0	1	1
4	x_3	2	0	2/3	1	1/3	0	1/3
σ_j			0	－4	0	－1	0	－2

经过一次迭代得到最优单纯形表

C_j			－1	－1	4	0	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

0	x_6	3/2	$-3/2$	1/2	0	$-1/2$	0	1
0	x_5	7/2	3/2	3/2	0	1/2	1	0
4	x_3	3/2	1/2	1/2	1	1/2	0	0
σ_j			-3	-3	0	-2	0	0

因此，新问题的最优解为$x^* = (0,0,3/2)$，最优值$\max \quad z^* = 6$。

得分	评卷人

四．（20 分）已知某运输问题的产销平衡表和单位运价表如表 2 所示，试求最优的运输调拨方案。

表 2

销地 / 产地	B1	B2	B3	B4	B5	产量
A1	10	2	3	15	9	25
A2	5	10	15	2	4	30
A3	15	5	14	7	15	22
A4	20	15	13	M	8	28
销量	20	18	30	12	25	

解：

vogel 法确定初始解

销地 / 产地	B1	B2	B3	B4	B5	行差
A1	10	2	3	15	9	1
A2	5	10	15	2	4	2
A3	15	5	14	7	15	2
A4	20	15	13	M	8	5

列差	5	3	10	5	4	

第一步

销地 产地	B1	B2	B3	B4	B5	产量
A1			25			25
A2						30
A3						22
A4						28
销量	20	18	30	12	25	

调整行差、列差

销地 产地	B1	B2	B3	B4	B5	行差
A1	10	2	3	15	9	
A2	5	10	15	2	4	2
A3	15	5	14	7	15	2
A4	20	15	13	M	8	5
列差	10	5	1	5	4	

第二步：

销地 产地	B1	B2	B3	B4	B5	产量
A1			25			25
A2	20					30
A3						22
A4						28
销量	20	18	30	12	25	

调整行差、列差

销地 / 产地	B1	B2	B3	B4	B5	行差
A1	10	2	3	15	9	
A2	5	10	15	2	4	2
A3	15	5	14	7	15	2
A4	20	15	13	M	8	5
列差		5	1	5	4	

第三步：

销地 / 产地	B1	B2	B3	B4	B5	产量
A1			25			25
A2	20			10		30
A3						22
A4						30
销量	20	20	30	12	25	

调整行差、列差

销地 / 产地	B1	B2	B3	B4	B5	行差
A1	10	2	3	15	9	1
A2	5	10	15	2	4	
A3	15	5	14	7	15	2
A4	20	15	13	M	8	5
列差	10	10	1	M	7	

第三步：

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	B5	产量
A1			25			25
A2	20			10		30
A3				2		22
A4						28
销量	20	18	30	12	25	

调整行差、列差

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	B5	行差
A1	10	2	3	15	9	1
A2	5	10	15	2	4	2
A3	15	5	14	7	15	9
A4	20	15	13	M	8	5
列差	10	10	1		7	

第四步：

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	B5	产量
A1			25			25
A2	20			10		30
A3		18		2		22
A4						28
销量	20	18	30	12	25	

调整行差、列差

销地 产地	B1	B2	B3	B4	B5	行差
A1	10	2	3	15	9	1
A2	5	10	15	2	4	2
A3	15	5	14	7	15	1
A4	20	15	13	M	8	5
列差			1		7	

第五步，即为初始解：

销地 产地	B1	B2	B3	B4	B5	产量
A1			25			25
A2	20			10		30
A3		18	2	2		22
A4			3		25	28
销量	20	18	30	12	25	

判断解是不是最优解，用位势法。

销地 产地	B1	B2	B3	B4	B5	位势
A1	10， 11	2， 8	3	15， 19	9， 11	0
A2	5	10， 10	15， 6	2	4， 0	6
A3	15，	5	14	7	15，	11

	5				6	
A4	20，11	15，11	13	M，M	8	10
位势	-1	-6	3	-4	-2	

该解已是最优解。

最优值为：z=3*25+5*20+2*10+5*18+14*2+7*2+13*3+8*25=566

得分	评卷人

五、（15 分）试建立如下问题的目标规划模型（只建模不求解）。

某工厂生产 I,II 两种产品，已知相关数据见表 3，在工厂决策时，依次考虑如下的条件：

1) 根据市场信息，产品 I 的销售量有下降的趋势，故考虑产品 I 的产量不大于产品 II；

2) 超过计划供应的原材料时，需用高价采购，会使成本大幅度增加；

3) 应尽可能充分利用设备台时，但不希望加班；

4) 应尽可能达到并超过计划利润指标 56 元。

表 3

	I	**II**	**拥有量**
原材料（kg）	**2**	**1**	**11**
设备（hr）	**1**	**2**	**13**
利润（元/件）	**8**	**10**	

解：设 x_1, x_2 分别表示产品 I, II 的产量，其目标规划模型如下：

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3\left(d_3^- + d_3^+\right) + P_4 d_4^-$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ 2x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 11 \\ x_1 + 2x_2 + d_3^- - d_3^+ = 13 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_4^- - d_4^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

得分	评卷人

六、（15 分）有甲乙丙丁 4 个工人，要分别指派他们完成 ABCD 不同的 4 项工作，每人做各项工作所消耗的时间如表 4 所示。应如何指派工作，才能使总的消耗时间最少？

表 4

工人 \ 工作	**A**	**B**	**C**	**D**
甲	**4**	**10**	**6**	**7**
乙	**2**	**7**	**6**	**3**
丙	**3**	**3**	**4**	**4**
丁	**4**	**6**	**6**	**3**

解：

设 0-1 型决策变量为x_{ij}，其中，x_{ij}=1 表示指派第 i 个工人完成第 j 项工作，x_{ij}=0 表示不指派第 i 个工人完成第 j 项工作，i,j=1,2,3,4。第 1，2，3，4 个工人分别代表甲乙丙丁。第 1,2,3,4 项工作分别代表 ABCD 四项工作。记C_{ij}表示第 i 个工人完成第 j 项工作所消耗的时间,i,j=1,2,3,4。则指派问题的数学模型为：

$$\min_{x} Z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\ \ \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1, i = 1,2,3,4$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1, j = 1,2,3,4$$

$$x_{ij} = 0\ 或\ 1, i, j, = 1,2,3,4$$

采用匈牙利法求解，步骤入下所示。

（1） 将矩阵

$$\begin{vmatrix} 4 & 10 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

的每行元素都减去该行的最小值，得到

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{array}{|cccc|}
0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 0
\end{array}
$$

（2） 将（1）中的结果矩阵的每列都减去该列的最小值，得到

$$
\begin{array}{|cccc|}
0 & 6 & 1 & 3 \\
0 & 5 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 3 & 2 & 0
\end{array}
$$

（3） 在（2）中的结果矩阵的各行各列中寻找独立 0 元，并记以◎。◎所在行和列的其他 0 元素记为Ø。得到

$$
\begin{array}{|cccc|}
\circledcirc & 6 & 1 & 3 \\
\varnothing & 5 & 3 & 1 \\
\varnothing & \circledcirc & \varnothing & 1 \\
1 & 3 & 2 & \circledcirc
\end{array}
$$

（4） 独立 0 元的个数为 3<4，还未找到最优解，需要增加 0 元。将（3）中的结果矩阵中无◎的行，标记√。得到

$$
\begin{array}{|cccc|l}
\circledcirc & 6 & 1 & 3 & \\
\varnothing & 5 & 3 & 1 & \surd \\
\varnothing & \circledcirc & \varnothing & 1 & \\
1 & 3 & 2 & \circledcirc &
\end{array}
$$

（5） 在（4）中的结果矩阵中标记√的行中 0 元所在的列，标记为√。得到

$$
\begin{array}{|cccc|l}
\circledcirc & 6 & 1 & 3 & \\
\varnothing & 5 & 3 & 1 & \surd \\
\varnothing & \circledcirc & \varnothing & 1 & \\
1 & 3 & 2 & \circledcirc & \\
\surd & & & &
\end{array}
$$

（6） 在（5）的结果矩阵中，标记√的列中◎元所在的行，标记为√。得到

$$
\begin{array}{|cccc|l}
\circledcirc & 6 & 1 & 3 & \surd \\
\varnothing & 5 & 3 & 1 & \surd \\
\varnothing & \circledcirc & \varnothing & 1 & \\
1 & 3 & 2 & \circledcirc & \\
\surd & & & &
\end{array}
$$

（7） 标记为√的行中所有 0 元所在列都已被标记为√。在（6）中的结果矩阵中，将无√的行，以及标记为√的列划线，得到

$$
\begin{array}{|cccc|l}
\circledcirc & 6 & 1 & 3 & \surd \\
\varnothing & 5 & 3 & 1 & \surd
\end{array}
$$

$$\begin{array}{c} \left|\begin{matrix} Ø & ⓪ & Ø & 1 \\ 1 & 3 & 2 & ⓪ \end{matrix}\right| \\ \begin{matrix} \surd & & & \end{matrix} \end{array}$$

（8） 选取（7）中的结果矩阵中未被划线覆盖的元素中的最小元素，也就是 1。将标记√的行的所有元素都减去最小元素，再将标记为√的列的所有元素都加上最小元素。得到

$$\begin{array}{cc} \left|\begin{matrix} ⓪ & 5 & 0 & 2 \\ Ø & 4 & 2 & 0 \\ 1 & ⓪ & Ø & 1 \\ 2 & 3 & 2 & ⓪ \end{matrix}\right| & \begin{matrix} \surd \\ \surd \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \surd & & & \end{matrix} & \end{array}$$

（9） 重复（3）的处理。在（8）的结果矩阵中重新寻找独立 0 元。得到

$$\left|\begin{matrix} Ø & 5 & ⓪ & 2 \\ ⓪ & 4 & 2 & Ø \\ 1 & ⓪ & Ø & 1 \\ 2 & 3 & 2 & ⓪ \end{matrix}\right|$$

（10）独立 0 元的个数为 4 个，因此，找到最优解。

最优解为：$x_{13}=x_{21}=x_{32}=x_{44}=1$,其余$x_{ij}$都为 0。最优值 Z=$C_{13}+C_{21}+C_{32}+C_{44}$=14.

因此，应指派甲完成工作 C，乙完成工作 A，丙完成工作 B，丁完成工作 D。此时总耗时最少，为 Z=14。

2017 年-2018 学年度第一学期
华中科技大学本科生课程考试补考试卷

课程名称：运筹学（一）　课程类别 □公共课 ■专业课　考试形式 □开卷 ■闭卷

所在院系：自动化学院　专业及班级：________　考试日期：________

学　号：________　姓名：________　任课教师：________

题号	一	二	三	四	五	总分
分数						

得分	评卷人

一、（**20** 分）试求解如下线性规划问题

$$\max z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \le 8 \\ x_1 - 2x_3 \ge 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：将模型化为如下：

$$\max z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_5 = 8 \\ x_1 - 2x_3 - x_6 + x_7 = 1 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \cdots, 8 \end{cases}$$

列出初始单纯形表

			2	1	3	0	0	0	-M	
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
0	x_4	7	1	1	1	1	0	0	0	7
0	x_5	8	2	-3	5	0	1	0	0	4
-M	x_7	1	[1]	0	-2	0	0	-1	1	1
	$c_j - z_j$		2+M	1	3-2M	0	0	-M	0	

选择x_1为换入变量，x_7为换出变量，进行迭代得到：

			2	1	3	0	0	0	-M	
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
0	x_4	6	0	1	3	1	0	1	-1	2
0	x_5	6	0	-3	[9]	0	1	2	-2	6/9
2	x_1	1	1	0	-2	0	0	-1	1	
	$c_j - z_j$		0	1	7	0	0	2	-M-2	

选择x_3为换入变量，x_5为换出变量，进行迭代得到：

			2	1	3	0	0	0	-M	
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
0	x_4	4	0	[2]	0	1	-1/3	1/3	-1/3	
3	x_3	2/3	0	-1/3	1	0	1/9	2/9	-2/9	
2	x_1	7/3	1	-2/3	0	0	2/9	-5/9	5/9	

	$c_j - z_j$		0	10/3	0	0	-7/9	4/9	-M-4/9	

选择 x_2 为换入变量，x_4 为换出变量，进行迭代得到：

			2	1	3	0	0	0	-M	
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
1	x_2	2	0	1	0	1/2	-1/6	1/6	-1/6	
3	x_3	4/3	0	0	1	1/6	1/18	5/18	-5/18	
2	x_1	11/3	1	0	0	1/3	1/9	-4/9	4/9	
	$c_j - z_j$		0	0	0	-5/3	-2/9	-5/9	-M+5/9	

所有检验数都为复数，得到最优解为： x_1=11/3，$x_2 = 2, x_3 = 4/3$

最优值为： $z = 40/3$

得分	评卷人

二、（15 分）已知线性规划的最优解为 *x=（0，0，4，4）^{T}。试利用互补松弛定理求对偶问题最优解。**

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 20 & (1a) \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 20 & (1b) \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \le 1 & (1c) \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

解：对偶问题为：

$$\min \quad w = 20y_1 + 20y_2 + y_3$$
$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 & (2a) \\ 2y_1 + y_2 - y_3 \geq 2 & (2b) \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3 & (2c) \\ 3y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 4 & (2d) \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

由于 $x_3^*=x_4^*=4>0$，是松约束，故（2c）与（2d）是紧约束，即对 Y^*成立等式：

$$\begin{cases} 2y_1^* + 3y_2^* + y_3^* = 3 \\ 3y_1^* + 2y_2^* - y_3^* = 4 \end{cases}$$

把 x^*代入原问题三个约束中，可知(1c)是松的，故 $y_3^*=0$，然后解方程组：

$$\begin{cases} 2y_1^* + 3y_2^* = 3 \\ 3y_1^* + 2y_2^* = 4 \end{cases}$$ **得到：** $$\begin{cases} y_1^* = \dfrac{6}{5} \\ y_2^* = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

故对偶最优解为：Y*=（6/5，1/5，0）， z*=w*=28

得分	评卷人

三、（15 分）某厂生产三种产品受到两种原材料的限制。为求最大利润，求得最终单纯形表如下表所示。其中 x_4，x_5为松驰变量。

（1）利用最终单纯形表求各产品的单位销售价格 c_1，c_2，c_3。

（2）c_3增加到多少，仍能使现行计划保持最优。

（3）计算这两种原料的影子价格，如果能以每单位 2 元的价格在市场上购入更多的原料 b_2，是否合算？又若 b_2的价格为 5 元呢？

C_j			c_1	c_2	c_3	**0**	**0**
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
c_1	x_1	**1**	**1**	**0**	**1**	**3**	**-1**
c_2	x_2	**2**	**0**	**1**	**1**	**-1**	**2**
-z		**8**	**0**	**0**	**-4**	**-3**	**-4**

解（1）利用最终单纯形表 x_4, x_5 的检验数，

$0-3c_1+c_2=-3$ 及 $0+c_1-2c_2=-4$ 解得，$c_1=2$，$c_2=3$。

利用最终单纯形表 x_3 的检验数 $\sigma_3=c_3-c_1-c_2=-4$，$c_3=1$。

（2）c_3 为非基变量的目标函数系数，则 c_3 的改变只是影响 x_3 的检验数，

$\sigma_3=c_3-c_1-c_2=c_3-5\leq 0$，$c_3\leq 5$ 仍能使现行计划保持最优。

（3）两种原料影子价格分别为 3 和 4。若 b_2 的市场价格为 2，合算；为 5，则不合算。

得分	评卷人

四．（20 分）已知某运输问题的产销平衡表和单位运价表如表 2 所示，试求最优的运输调拨方案。

表 2

销地 \ 产地	B1	B2	B3	B4	B5	产量
A1	10	2	3	15	9	25
A2	5	10	15	2	4	30
A3	15	5	14	7	15	22
A4	20	15	13	M	8	28
销量	20	18	30	12	25	

解：

vogel 法确定初始解

销地 产地	B1	B2	B3	B4	B5	行差
A1	10	2	3	15	9	1
A2	5	10	15	2	4	2
A3	15	5	14	7	15	2
A4	20	15	13	M	8	5
列差	5	3	10	5	4	

第一步

销地 产地	B1	B2	B3	B4	B5	产量
~~A1~~			~~25~~			~~25~~
A2						30
A3						22
A4						28
销量	20	18	30	12	25	

调整行差、列差

销地 产地	B1	B2	B3	B4	B5	行差
A1	10	2	3	15	9	
A2	5	10	15	2	4	2
A3	15	5	14	7	15	2
A4	20	15	13	M	8	5
列差	10	5	1	5	4	

第二步：

销地＼产地	B1	B2	B3	B4	B5	产量
A1			25			25
A2	20					30
A3						22
A4						28
销量	20	18	30	12	25	

调整行差、列差

销地＼产地	B1	B2	B3	B4	B5	行差
A1	10	2	3	15	9	
A2	5	10	15	2	4	2
A3	15	5	14	7	15	2
A4	20	15	13	M	8	5
列差		5	1	5	4	

第三步：

销地＼产地	B1	B2	B3	B4	B5	产量
A1			25			25
A2	20			10		30
A3						22
A4						30
销量	20	20	30	12	25	

调整行差、列差

销地 产地	B1	B2	B3	B4	B5	行差
A1	10	2	3	15	9	1
A2	5	10	15	2	4	
A3	15	5	14	7	15	2
A4	20	15	13	M	8	5
列差	10	10	1	M	7	

第三步：

销地 产地	B1	B2	B3	B4	B5	产量
A1			25			25
A2	20			10		30
A3				2		22
A4						28
销量	20	18	30	12	25	

调整行差、列差

销地 产地	B1	B2	B3	B4	B5	行差
A1	10	2	3	15	9	1
A2	5	10	15	2	4	2
A3	15	5	14	7	15	9
A4	20	15	13	M	8	5
列差	10	10	1		7	

第四步：

销地 产地	B1	B2	B3	B4	B5	产量
A1			25			25
A2	20			10		30
A3		18		2		22
A4						28
销量	20	18	30	12	25	

调整行差、列差

销地 产地	B1	B2	B3	B4	B5	行差
A1	10	2	3	15	9	1
A2	5	10	15	2	4	2
A3	15	5	14	7	15	1
A4	20	15	13	M	8	5
列差			1		7	

第五步，即为初始解：

销地 产地	B1	B2	B3	B4	B5	产量
A1			25			25
A2	20			10		30
A3		18	2	2		22
A4			3		25	28
销量	20	18	30	12	25	

判断解是不是最优解，用位势法。

销地 产地	B1	B2	B3	B4	B5	位势
A1	10， 11	2， 8	3	15， 19	9， 11	0
A2	5	10， 10	15， 6	2	4， 0	6
A3	15， 5	5	14	7	15， 6	11
A4	20， 11	15， 11	13	M， M	8	10
位势	-1	-6	3	-4	-2	

该解已是最优解。

最优值为：z=3*25+5*20+2*10+5*18+14*2+7*2+13*3+8*25=566

得分	评卷人

五、（15 分）有甲乙丙丁 4 个工人，要分别指派他们完成 ABCD 不同的 4 项工作，每人做各项工作所消耗的时间如表 4 所示。应如何指派工作，才能使总的消耗时间最少？

表 4

工作 工人	A	B	C	D
甲	4	10	6	7
乙	2	7	6	3
丙	3	3	4	4
丁	4	6	6	3

解：

设 0-1 型决策变量为x_{ij}，其中，x_{ij}=1 表示指派第 i 个工人完成第 j 项工作，x_{ij}=0 表示不指派第 i 个工人完成第 j 项工作，i,j=1,2,3,4。第 1，2，3，4 个工人分别代表甲乙丙丁。第 1,2,3,4 项工作分别代表 ABCD 四项工作。记C_{ij}表示第 i 个工人完成第 j 项工作所消耗的时间,i,j=1,2,3,4。则指派问题的数学模型为：

$$\min_{x} Z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\ \ \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1, i = 1,2,3,4$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1, j = 1,2,3,4$$

$$x_{ij} = 0\ 或\ 1, i, j, = 1,2,3,4$$

采用匈牙利法求解，步骤入下所示。

（1） 将矩阵

$$\begin{vmatrix} 4 & 10 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

的每行元素都减去该行的最小值，得到

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

（2） 将（1）中的结果矩阵的每列都减去该列的最小值，得到

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

（3） 在（2）中的结果矩阵的各行各列中寻找独立 0 元，并记以⓪。⓪所在行和列的其他 0 元素记为∅。得到

$$\begin{vmatrix} ⓪ & 6 & 1 & 3 \\ \emptyset & 5 & 3 & 1 \\ \emptyset & ⓪ & \emptyset & 1 \\ 1 & 3 & 2 & ⓪ \end{vmatrix}$$

（4） 独立 0 元的个数为 3<4，还未找到最优解，需要增加 0 元。将（3）中的结果矩阵中无⓪的行，标记√。得到

$$\begin{vmatrix} ⓪ & 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\left|\begin{array}{cccc}\emptyset & 5 & 3 & 1\\ \emptyset & ⓪ & \emptyset & 1\\ 1 & 3 & 2 & ⓪\end{array}\right| \begin{array}{c}\surd\\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

（5） 在（4）中的结果矩阵中标记√的行中 0 元所在的列，标记为√。得到

$$\begin{array}{cc}\left|\begin{array}{cccc}⓪ & 6 & 1 & 3\\ \emptyset & 5 & 3 & 1\\ \emptyset & ⓪ & \emptyset & 1\\ 1 & 3 & 2 & ⓪\end{array}\right| & \begin{array}{c} \\ \surd\\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{cccc}\surd & & & \end{array} & \end{array}$$

（6） 在（5）的结果矩阵中，标记√的列中⓪元所在的行，标记为√。得到

$$\begin{array}{cc}\left|\begin{array}{cccc}⓪ & 6 & 1 & 3\\ \emptyset & 5 & 3 & 1\\ \emptyset & ⓪ & \emptyset & 1\\ 1 & 3 & 2 & ⓪\end{array}\right| & \begin{array}{c}\surd\\ \surd\\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{cccc}\surd & & & \end{array} & \end{array}$$

（7） 标记为√的行中所有 0 元所在列都已被标记为√。在（6）中的结果矩阵中，将无√的行，以及标记为√的列划线，得到

$$\begin{array}{cc}\left|\begin{array}{cccc}⓪ & 6 & 1 & 3\\ \emptyset & 5 & 3 & 1\\ \emptyset & ⓪ & \emptyset & 1\\ 1 & 3 & 2 & ⓪\end{array}\right| & \begin{array}{c}\surd\\ \surd\\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{cccc}\surd & & & \end{array} & \end{array}$$

（8） 选取（7）中的结果矩阵中未被划线覆盖的元素中的最小元素，也就是 1。将标记√的行的所有元素都减去最小元素，再将标记为√的列的所有元素都加上最小元素。得到

$$\begin{array}{cc}\left|\begin{array}{cccc}⓪ & 5 & 0 & 2\\ \emptyset & 4 & 2 & 0\\ 1 & ⓪ & \emptyset & 1\\ 2 & 3 & 2 & ⓪\end{array}\right| & \begin{array}{c}\surd\\ \surd\\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{cccc}\surd & & & \end{array} & \end{array}$$

（9） 重复（3）的处理。在（8）的结果矩阵中重新寻找独立 0 元。得到

$$\left|\begin{array}{cccc}\emptyset & 5 & ⓪ & 2\\ ⓪ & 4 & 2 & \emptyset\\ 1 & ⓪ & \emptyset & 1\\ 2 & 3 & 2 & ⓪\end{array}\right|$$

（10）独立 0 元的个数为 4 个，因此，找到最优解。

最优解为：$x_{13}=x_{21}=x_{32}=x_{44}=1$,其余$x_{ij}$都为 0。最优值 Z=$C_{13}+C_{21}+C_{32}+C_{44}$=14.

因此，应指派甲完成工作 C，乙完成工作 A，丙完成工作 B，丁完成工作 D。此时总耗时最少，为 Z=14。

2018年-2019学年度第一学期
华中科技大学本科生课程考试试卷(A卷)

课程名称：运筹学（一）　课程类别 □公共课 ■专业课　考试形式 □开卷 ■闭卷

所在院系：自动化学院　专业及班级：________　考试日期：2019.1.6

学　号：________________　姓名：______________　任课教师：______________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							

得分	评卷人

一、（20分）试求解如下线性规划问题。

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 10 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：（4分）引入松弛变量 x_4，引入人工变量 x_5,x_6。将约束条件化为标准形式；在最大化目标函数中人工变量的系数是-M，M 是任意大的正数。化为标准型：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 0x_4 - Mx_5 - Mx_6$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 10 \\ x_j \ge 0, j = 1,\cdots,6 \end{cases}$$

建立初始单纯形表，计算检验数，（6分）

c_j			2	3	-5	0	-M	-M	$\theta_i =$
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i / a_{ik}

-M	x_5	**7**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**7/1**
-M	x_6	**10**	**[2]**	**-5**	**1**	**-1**	**0**	**1**	**10/2**$\rightarrow$
$c_j - z_j$			**2+3M** $\uparrow$	**3-4M**	**-5+2M**	**-M**	**0**	**0**	

（3 分）

c_j			**2**	**3**	**-5**	**0**	**-M**	**-M**	$\theta_i =$ b_i / a_{ik}
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-M	x_5	**2**	**0**	**[7/2]**	**1/2**	**1/2**	**1**	**-1/2**	$2/\frac{7}{2}\rightarrow$
2	x_1	**5**	**1**	**-5/2**	**1/2**	**-1/2**	**0**	**1/2**	**-**
$c_j - z_j$			**0**	$8+\frac{7}{2}M\uparrow$	$-6+\frac{1}{2}M$	**0**	$-1-\frac{1}{2}M$	$-1-\frac{3}{2}M$	

（3 分）

c_j			**2**	**3**	**-5**	**0**	**-M**	**-M**	$\theta_i =$ b_i / a_{ik}
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
3	x_2	**4/7**	**0**	**1**	**1/7**	**1/7**	**2/7**	**-1/7**	
2	x_1	**45/7**	**1**	**0**	**6/7**	**-1/7**	**5/7**	**1/7**	
$c_j - z_j$			**0**	**0**	**-50/7**	**-1/7**	$-M-\frac{16}{7}$	$-M+\frac{1}{7}$	

表中的基变量已不含人工变量，且检验数全为非正。 $X^* = \left(\frac{45}{7},\frac{4}{7},0\right)^T$ **即是**

最优解（2 分），对应的$z^*=102/7$（2 分）　。

得分	评卷人

二、(10 分)表 1 中给出某一求极大化问题的单纯形表，表中无人工变量，a_1,a_2,c_1,c_2,d为待定常数，试说明a_1,a_2,c_1,c_2,d分别取何值时，以下结论成立：

a） **表中解为唯一最优解；**

b） **表中解为无穷多最优解之一；**

c） **下一步迭代将以x_1替换基变量x_5；**

d） **该线性规划问题具有无界解；**

表 1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	d	4	a_1	1	0	0
x_4	2	−1	−5	0	1	0
x_5	3	a_2	−3	0	0	1
c_j-z_j		c_1	c_2	0	0	0

答：

a） 表中解为唯一最优解: $\mathrm{d}\geq 0, c_1<0, c_2<0$；

b） 表中解为无穷多最优解之一： $\mathrm{d}\geq 0, c_1\leq 0, c_2\leq 0, c_1 * c_2=0$ ；

c） 下一步迭代将以x_1替换基变量x_5: $\mathrm{d}\geq 0, c_1>0, a_2>0, \frac{3}{a_2}<\frac{d}{4}$

d） 该线性规划问题具有无界解: $\mathrm{d}\geq 0, c_2>0, a_1\ \leq 0$；

得分	评卷人

三、（20 分）已知如下线性规划问题，其对偶问题的最优解为 y*=（6/5，1/5，0）。试进行如下分析：

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 20 & (1a) \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 20 & (1b) \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \le 1 & (1c) \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

（一）请写出该线性规划问题的对偶问题；

（二）试利用互补松弛定理求原问题最优解。

（三）假设该问题描述了一个生产计划，（1a）（1b）分别为原料 I 和 II 的供应约束。现有人提议以每单位 1 元的价格在市场上采购原料 I 和 II，是否合算，为什么？

解：（一） 对偶问题为：

$$\min \quad w = 20y_1 + 20y_2 + y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 1 & (2a) \\ 2y_1 + y_2 - y_3 \ge 2 & (2b) \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 3 & (2c) \\ 3y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 4 & (2d) \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

（二） 由于 **y_1*=6/5, y_2*=1/5, y_3*=0**，可以验证，（**2a**）（**2b**）是松约束，（**2c**）（**2d**）是紧约束，由互补松弛性可知，**x_1*= x_2*=0**。**y_1*>0**，**y_2*>0**，可知（**1a**）（**1b**）是紧约束，**y_3*=0**，（**1c**）是松约束。由此可得如下方程组：

$$\begin{cases} 2x_3^* + 3x_4^* = 20 \\ 3x_3^* + 2x_4^* = 20 \end{cases}$$

解得 $x_3^*=x_4^*=4$。将 x^*代入原问题三个约束中，可验证(1c)是松约束。
故原最优解为：$x^* = (0,0,4,4)^T$， $z^*=w^*=28$。

（三）y_1^*和 y_2^*分别是原料 I 和 II 的影子价格。由上可知原料 I 的影子价格是 6/5 元，以 1 元采购合算；原料 II 的影子价格是 1/5 元，以 1 元采购不合算。

得分	评卷人

四、（20 分）某公司下属有 3 个工厂甲、乙、丙，分别向 4 个销售地 A、B、C、D 提供产品，产量、需求量及工厂到销售地的运价如下表 2：

表 2

销地 产地	A	B	C	D	产量
甲	16	14	18	7	27
乙	10	8	12	11	24
丙	11	14	15	9	36
销地	30	15	21	21	

（1）求出费用最小的最佳运输方案和最小运费；
（2）写出上述问题的数学模型；
（3）若所有运价都翻一倍，最优解是否改变？若所有运价都加上 10，最优运输方案是否改变？（不必重新求解）

解：（1）此问题为产销平衡问题，用伏格尔法进行求解：

销地 产地	A	B	C	D	行差额
甲	16	14	18	7	7
乙	10	8	12	11	2
丙	11	14	15	9	2
列差额	1	6	3	2	

第一步：

销地 产地	A	B	C	D	产量
甲				21	27
乙					24
丙					36
销地	30	15	21	21	

调整差额表：

销地 产地	A	B	C	D	行差额
甲	16	14	18	7	2
乙	10	8	12	11	2
丙	11	14	15	9	3
列差额	1	6	3		

第二步：

销地 产地	A	B	C	D	产量
甲				21	27
乙		15			24
丙					36
销地	30	15	21	21	

调整差额表：

销地 产地	A	B	C	D	行差额
甲	16	14	18	7	2
乙	10	8	12	11	2
丙	11	14	15	9	4
列差额	1		3		

第三步：

销地 产地	A	B	C	D	产量
甲				21	27
乙		15			24
丙	30				36
销地	30	15	21	21	

调整差额表：

销地 产地	A	B	C	D	行差额
甲	16	14	18	7	
乙	10	8	12	11	
丙	11	14	15	9	
列差额			3		

第四步：

销地 产地	A	B	C	D	产量
甲			6	21	27
乙		15	9		24
丙	30		6		36
销地	30	15	21	21	

位势法求解检验数：

销地 产地	A	B	C	D	u_i
甲			18	7	u_1
乙		8	12		u_2
丙	11		15		u_3
v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	

$$\begin{cases} u_1+v_3=18 \\ u_1+v_4=7 \\ u_2+v_2=8 \\ u_2+v_3=12 \\ u_3+v_1=11 \\ u_3+v_3=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1=0 \\ u_2=-6 \\ u_3=-3 \\ v_1=14 \\ v_2=14 \\ v_3=18 \\ v_4=7 \end{cases}$$

检验数表：

销地 产地	A	B	C	D	u_i
甲	2	0			0

乙	2			10	-6
丙		3		5	-3
v_i	14	14	18	7	

非基变量检验数全部大于等于 0，因此最优解如上表所示。

最小运费：$6*18+21*7+15*8+9*12+30*11+6*15=903$。

（2） 设X_{ij}为从产地 i 运到销地 j 的运量，则：

$$\min z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}X_{ij}$$

$$\begin{cases}X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}=27\\X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}=24\\X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}=36\\X_{11}+X_{21}+X_{31}=30\\X_{12}+X_{22}+X_{32}=15\\X_{13}+X_{23}+X_{33}=21\\X_{14}+X_{24}+X_{34}=21\\X_{ij}\ge 0, i=1,2,3; j=1,2,3,4\end{cases}$$

(3)所有运价都翻一倍，不会改变检验数的正负性，故最优运输方案不改变；

所有运价都加 10，不会改变检验数，故最优运输方案不改变。

得分	评卷人

五（15 分）. 某彩色电视机组装工厂，生产 A,B,C 三种规格电视机。装配工作在同一生产线上完成，三种产品装配时的工时消耗分别为 6,8 和 10h。生产线每月正常工作时间为 200h；三种规格电视机销售后，每台可获利分别为 500 元、650 元和 800 元。每月销量预计为 12 台、10 台、6 台。该厂经营目标如下：

P1:利润指标定为每月不低于1.6×10^4元；

P2：充分利用生产能力；

P3：加班时间不超过 24h；

P4：产量以预计销量为标准，即：产量既不低于也不超过预计销量。

为确定生产计划，试建立该问题的目标规划模型。（只建模不求解）

解：设 A,B,C 三种规格电视机各生产x_1, x_2, x_3台，则目标规划模型为：

$$\min z = p_1 d_1^- + p_2 d_2^- + p_3 d_3^+ + p_4(d_4^- + d_4^+ + d_5^- + d_5^+ + d_6^- + d_6^+)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 500x_1 + 650x_2 + 800x_3 + d_1^- - d_1^+ = 1.6\times 10^4 \\ 6x_1 + 8x_2 + 10x_3 + d_2^- - d_2^+ = 200 \\ d_2^+ + d_3^- - d_3^+ = 24 \text{ 或 } 6x_1 + 8x_2 + 10x_3 + d_3^- - d_3^+ = 224 \\ x_1 + d_4^- - d_4^+ = 12 \\ x_2 + d_5^- - d_5^+ = 10 \\ x_3 + d_6^- - d_6^+ = 6 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0, d_i^-, d_i^+ \ge 0\ (i = 1, \cdots, 6) \end{cases}$$

得分	评卷人

六、**（15 分）**有甲乙丙丁 4 个工人，要分别指派他们完成 ABCD 不同的 4 项工作。每人只能完成 1 项工作，每项工作只能由 1 个工人完成。每人做各项工作所消耗的时间（小时）如表 3 所示。应如何指派工作，才能使总的消耗时间最少？

表 3

工作 / 工人	**A**	**B**	**C**	**D**
甲	**4**	**10**	**6**	**7**
乙	**12**	**7**	**6**	**3**
丙	**3**	**5**	**4**	**4**
丁	**4**	**6**	**6**	**3**

解：

设 0-1 型决策变量为x_{ij}，其中，x_{ij}=1 表示指派第 i 个工人完成第 j 项工作，x_{ij}=0 表示不指派第 i 个工人完成第 j 项工作，i,j=1,2,3,4。第 1，2，3，4 个工人分别代表甲乙丙丁。第 1,2,3,4 项工作分别代表 ABCD 四项工作。记C_{ij}表示第 i 个工人完成第 j 项工作所消耗的时间,i,j=1,2,3,4。则指派问题的数学模型为：

$$\min_x Z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\ \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1, i = 1,2,3,4$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1, j = 1,2,3,4$$

$$x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, i, j, = 1,2,3,4$$

采用匈牙利法求解，步骤如下所示。

（1） 将矩阵

$$\begin{vmatrix} 4 & 10 & 6 & 7 \\ 12 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

的每行元素都减去该行的最小值，得到

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

（2） 将（1）中的结果矩阵的每列都减去该列的最小值，得到

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

（3） 在（2）中的结果矩阵的各行各列中寻找独立 0 元，并记以⓪。⓪所在行和列的其他 0 元素记为∅。得到

$$\begin{vmatrix} ⓪ & 4 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 2 & ⓪ \\ \emptyset & \emptyset & ⓪ & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \emptyset \end{vmatrix}$$

（4） 独立 0 元的个数为 3<4，还未找到最优解，需要增加 0 元。将（3）中的结果矩阵中无⓪的行，标记√。得到

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} ⓪ & 4 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 2 & ⓪ \\ \emptyset & \emptyset & ⓪ & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \emptyset \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \surd \end{array}$$

（5） 在（4）中的结果矩阵中标记√的行中 0 元所在的列，标记为√。得到

$$\begin{vmatrix} ⓪ & 4 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 2 & ⓪ \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|c} \emptyset & \emptyset & \circledcirc & 1 & \\ 1 & 1 & 2 & \emptyset & \surd \\ & & & \surd & \end{array}$$

（6） 在（5）的结果矩阵中，标记√的列中◎元所在的行，标记为√。得到

$$\begin{array}{cccc|c} \circledcirc & 4 & 1 & 3 & \\ 9 & 2 & 2 & \circledcirc & \surd \\ \emptyset & \emptyset & \circledcirc & 1 & \\ 1 & 1 & 2 & \emptyset & \surd \\ & & & \surd & \end{array}$$

（7） 标记为√的行中所有 0 元所在列都已被标记为√。在（6）中的结果矩阵中，将无√的行，以及标记为√的列划线（标黄），得到

$$\begin{array}{cccc|c} \circledcirc & 4 & 1 & 3 & \\ 9 & 2 & 2 & \circledcirc & \surd \\ \emptyset & \emptyset & \circledcirc & 1 & \\ 1 & 1 & 2 & \emptyset & \surd \\ & & & \surd & \end{array}$$

（8） 选取（7）中的结果矩阵中未被划线（标黄）覆盖的元素中的最小元素，也就是 1。将标记√的行的所有元素都减去最小元素，再将标记为√的列的所有元素都加上最小元素。得到

$$\begin{array}{cccc|c} \circledcirc & 4 & 1 & 4 & \\ 8 & 1 & 1 & \circledcirc & \surd \\ \emptyset & \emptyset & \circledcirc & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & \emptyset & \surd \\ & & & \surd & \end{array}$$

（9） 重复（3）的处理。在（8）的结果矩阵中重新寻找独立 0 元。得到

$$\left|\begin{array}{cccc} \circledcirc & 4 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & 1 & \circledcirc \\ \emptyset & \emptyset & \circledcirc & 2 \\ \emptyset & \circledcirc & 1 & \emptyset \end{array}\right|$$

（10）独立 0 元的个数为 4 个，因此，找到最优解。

最优解为：$x_{11} = x_{24} = x_{33} = x_{42} = 1$,其余$x_{ij}$都为 0。最优值 Z=$C_{11} + C_{24} + C_{33} + C_{42}$=17.

因此，应指派甲完成工作 A，乙完成工作 D，丙完成工作 C，丁完成工作 B。此时总耗时最少，为 Z=17（小时）。

2018年-2019学年度第一学期
华中科技大学本科生课程考试试卷(B卷)

课程名称：运筹学（一）　课程类别 □公共课 ■专业课　考试形式 □开卷 ■闭卷

所在院系：自动化学院　专业及班级：　考试日期：2019.1.6

学　号：　姓名：　任课教师：

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							

得分	评卷人

一、（20分）试用大M法求解以下线性规划问题，并指出解属于哪一类解，为什么？

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：将上述问题化为标准型：

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + Mx_5 + Mx_7$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_6 + x_7 = 6 \\ x_1, \cdots, x_7 \ge 0 \end{cases}$$

初始单纯形表为：

c_j	2	3	1	0	M	0	M	θ

C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
M	x_5	8	1	[4]	2	-1	1	0	0	8/4
M	x_7	6	3	2	0	0	0	-1	1	6/2
σ_j			2-4M	3-6M	1-2M	M		M		

选取 x_2 为换入变量，x_5 为换出变量，进行第一次迭代。

第一次迭代后的表格：

c_j			2	3	1	0	M	0	M	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
3	x_2	2	1/4	1	1/2	-1/4	1/4	0	0	8
M	x_7	2	[5/2]	0	-1	1/2	-1/2	-1	1	4/5
σ_j			5/4-5/2M	0	-1/2+M	3/4-M/2	3/2M-3/4	M	0	

选取 x_1 为换入变量，x_7 为换出变量，进行第二次迭代。

第二次迭代后的表格：

c_j	2	3	1	0	M	0	M	θ

C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
3	x_2	9/5	0	1	3/5	-3/10	3/10	1/10	-1/10	
2	x_1	4/5	1	0	-2/5	1/5	-1/5	-2/5	2/5	
σ_j			0	0	0	1/2	M-1/2	1/2	M-1/2	

所有非基变量的检验数都是$\sigma_j \geq 0$ ，该解为最优解，最优解为：

$[x_1, x_2, x_3] = [4/5, 9/5, 0]$ ，最优值为：$z^* = 3*9/5 + 2*4/5 = 7$ 。

由于非基变量x_3 的检验数为 0，所以该解为无穷多最优解。

得分	评卷人

二、（10 分）表 1 是某一求极大化问题的单纯形表，表中无人工变量，a_1, a_2, c_1, c_2, d为待定常数，试说明a_1, a_2, c_1, c_2, d分别取何值时，以下结论成立：

a) **表中解为唯一最优解；**

b) **表中解为无穷多最优解之一；**

c) **下一步迭代将以x_1替换基变量x_5；**

d) **该线性规划问题具有无界解；**

表 1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	d	4	a_1	1	0	0
x_4	2	−1	−5	0	1	0

x_5	3	a_2	−3	0	0	1
$c_j - z_j$		c_1	c_2	0	0	0

答：

a） 表中解为唯一最优解: $d \geq 0, c_1 < 0, c_2 < 0$；

b） 表中解为无穷多最优解之一： $d \geq 0, c_1 \leq 0, c_2 \leq 0, c_1 * c_2 = 0$；

c） 下一步迭代将以x_1替换基变量x_5: $d \geq 0, c_1 > 0, a_2 > 0, \frac{3}{a_2} < \frac{d}{4}$

d） 该线性规划问题具有无界解: $d \geq 0, c_2 > 0, a_1 \leq 0$；

得分	评卷人

三（**20** 分）、已知线性规划问题：

$$\max z = -5x_1 + 5x_2 + 13x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20 & ① \\ 12x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 90 & ② \\ x_1，x_2，x_3 \geq 0 \end{cases}$$

假设在上述线性规划问题的第①个约束条件中加入松弛变量x_4，第②个约束条件中加入松弛变量x_5（这里$\mathbf{x_4, x_5 \geq 0}$），用单纯形法求解，初表和终表如表 2 和表 3 所示。

（1）填完初表和终表的空白处。

（2）求使最优基变量不改变的$\boldsymbol{b_2}$（即约束条件②的右端常数项）的取值范围。

(3)求使最优解不发生变化的$\boldsymbol{c_3}$(即目标函数中$\mathbf{x_3}$的价值系数)的取值范围。

（4）根据终表，求对偶问题的最优解。

表 2 初表

c_j			-5	5	13	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			-1	1	3	1	0
			12	4	10	0	1
σ_j							

表 3 终表

c_j			-5	5	13	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			-1	1		1	0
			16	0		-4	1
σ_j							

解：（1）

初表

c_j			-5	5	13	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	20	-1	1	3	1	0
0	x_5	90	12	4	10	0	1
σ_j			-5	5	13	0	0

终表

c_j			-5	5	13	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	x_2	20	-1	1	3	1	0
0	x_5	10	16	0	-2	-4	1
σ_j			0	0	-2	-5	0

（2）b_2变化，会影响 b 列取值，为保证最优基变量不变，则有：

$$B^{-1}\begin{bmatrix}20\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\ -80+b_2\end{bmatrix}\geq 0$$

得出：$b_2 \geq 80$

（3）c_3变化，只会影响x_3的检验数，若最优解不发生变化，则：

$$\sigma_3=c_3-15\geq 0 \Rightarrow c_3\geq 15。$$

（4）对偶问题的最优解：

解法 1：对偶问题的最优解等于原问题松弛变量所对应检验数的相反数，故对偶问题最优解：$Y=[5\ 0]$。

解法 2：$Y=C_BB^{-1}=[5\quad 0]\begin{bmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{bmatrix}=[5\quad 0]$。

得分	评卷人

四、（20 分）已知某运输问题的产量、销量、及产地到销地的单位运价表如表 4 所示，试求最优的运输调拨方案。

表 4

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	产量
1	**10**	**20**	**5**	**9**	**10**	**5**
2	**2**	**10**	**8**	**30**	**6**	**6**
3	**1**	**20**	**7**	**10**	**4**	**2**
4	**8**	**6**	**3**	**7**	**5**	**9**
销售	**4**	**4**	**6**	**2**	**4**	

解：先将不平衡运输问题转化为平衡运输问题，因为是产大于销，所以增加一列，即虚拟一个销地，其单位运价为 0，销量为产量与销量的差额，即 22-20=2.如下表

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1	**10**	**20**	**5**	**9**	**10**	**0**	**5**
2	**2**	**10**	**8**	**30**	**6**	**0**	**6**
3	**1**	**20**	**7**	**10**	**4**	**0**	**2**
4	**8**	**6**	**3**	**7**	**5**	**0**	**9**
销售	**4**	**4**	**6**	**2**	**4**	**2**	

（3 分）

用最小元素法，求得初始可行方案，如下表。初始解（3 分）

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1		**1**		**2**		**2**	**5**
2	**2**	**3**			**1**		**6**
3	**2**						**2**
4			**6**		**3**		**9**
销售	**4**	**4**	**6**	**2**	**4**	**2**	

计算检验数　第一次迭代（检验数的计算 4 分，调整运量 4 分）

产地＼销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	$\boxed{10}$ -2	$\boxed{20}$ 0	$\boxed{5}$ -9	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{10}$ -6	$\boxed{0}$ 0	0
2	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{10}$ 0	$\boxed{8}$ 4	$\boxed{30}$ 31	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{0}$ 10	-10
3	$\boxed{1}$ 0	$\boxed{20}$ 11	$\boxed{7}$ 4	$\boxed{10}$ 12	$\boxed{4}$ -1	$\boxed{0}$ 11	-11
4	$\boxed{8}$ 7	$\boxed{6}$ -3	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{7}$ 9	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 11	-11
v_j	12	20	14	9	16	0	

调整运量，得到新的调运方案

产地＼销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1		1		2		2	5
2	2	3			1		6
3	2						2
4			6		3		9
销售	4	4	6	2	4	2	

调整运量

产地＼销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1		0	1	2		2	5
2	2	4					6
3	2						2

4			5		4		9
销售	4	4	6	2	4	2	

再计算检验数

计算检验数 第二次迭代（2 次-6 次迭代 5 分）

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	$\boxed{10}$ -2	$\boxed{20}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{10}$ 3	$\boxed{0}$ 0	0
2	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{10}$ 0	$\boxed{8}$ 13	$\boxed{30}$ 31	$\boxed{6}$ 9	$\boxed{0}$ 10	-10
3	$\boxed{1}$ 0	$\boxed{20}$ 11	$\boxed{7}$ 13	$\boxed{10}$ 12	$\boxed{4}$ 8	$\boxed{0}$ 11	-11
4	$\boxed{8}$ -2	$\boxed{6}$ -12	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{7}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 2	-2
v_j	12	20	5	9	7	0	

调整运费

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1			1	2		2	5
2	2	4					6
3	2						2
4		0	5		4		9
销售	4	4	6	2	4	2	

计算检验数 第三次迭代

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i

1	$\boxed{10}$ 10	$\boxed{20}$ 12	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{10}$ 3	$\boxed{0}$ 0	0
2	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{10}$ 0	$\boxed{8}$ 1	$\boxed{30}$ 19	$\boxed{6}$ -3	$\boxed{0}$ -2	2
3	$\boxed{1}$ 0	$\boxed{20}$ 11	$\boxed{7}$ 1	$\boxed{10}$ 0	$\boxed{4}$ -4	$\boxed{0}$ -1	1
4	$\boxed{8}$ 10	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{7}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 2	-2
v_j	0	8	5	9	7	0	

调整运费

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1			1	2		2	5
2	4	2					6
3					2		2
4		2	5		2		9
销售	4	4	6	2	4	2	

计算检验数 第四次迭代

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	$\boxed{10}$ 10	$\boxed{20}$ 12	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{10}$ 3	$\boxed{0}$ 0	0
2	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{10}$ 0	$\boxed{8}$ 1	$\boxed{30}$ 19	$\boxed{6}$ -3	$\boxed{0}$ -2	2
3	$\boxed{1}$ 4	$\boxed{20}$ 15	$\boxed{7}$ 5	$\boxed{10}$ 4	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{0}$ 3	-3

4	$\boxed{8}$ 10	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{7}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 2	-2
v_j	0	8	5	9	7	0	

调整运费

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1			1	2		2	5
2	4	0			2		6
3					2		2
4		4	5				9
销售	4	4	6	2	4	2	

第五次迭代

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	$\boxed{10}$ 10	$\boxed{20}$ 12	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{10}$ 6	$\boxed{0}$ 0	0
2	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{10}$ 0	$\boxed{8}$ 1	$\boxed{30}$ 19	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{0}$ -2	2
3	$\boxed{1}$ 1	$\boxed{20}$ 12	$\boxed{7}$ 2	$\boxed{10}$ 1	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{0}$ 0	0
4	$\boxed{8}$ 10	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{7}$ 0	$\boxed{5}$ 3	$\boxed{0}$ 2	-2
v_j	0	8	5	9	4	0	

调整运费

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量

1			1	2		2	5
2	4				2	0	6
3					2		2
4		4	5				9
销售	4	4	6	2	4	2	

第 6 次迭代

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	$\boxed{10}$ 8	$\boxed{20}$ 12	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{10}$ 4	$\boxed{0}$ 0	0
2	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{10}$ 2	$\boxed{8}$ 3	$\boxed{30}$ 21	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{0}$ 0	0
3	$\boxed{1}$ 1	$\boxed{20}$ 14	$\boxed{7}$ 4	$\boxed{10}$ 3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{0}$ 2	-2
4	$\boxed{8}$ 5	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{7}$ 0	$\boxed{5}$ 1	$\boxed{0}$ 2	-2
v_j	2	8	5	9	6	0	

由上表可知，调运方案为最优方案 运费为
Min z=90. (6 分　结果正确)

得分	评卷人

五（15 分）试建立如下问题的目标规划模型（只建模不求解）。某工厂生产 I,II 两种产品，已知相关数据见表 5，在工厂决策时，依次考虑如下的条件：

1) 根据市场信息，产品 I 的销售量有下降的趋势，故考虑产品 I 的产量不大于产品 II；
2) 应尽可能充分利用设备台时，但不希望加班；
3) 应尽可能达到并超过计划利润指标 56 元。

表 5

	I	II	拥有量
原材料（kg）	3	2	10
设备（hr）	1	2	12
利润（元/件）	8	10	

解：设 x_1, x_2 分别表示产品 I, II 的产量，其目标规划模型如下：

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2\left(d_2^- + d_2^+\right) + P_3 d_3^-$$

$$s.t.\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 12 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

得分	评卷人

六、（**15 分**）有甲乙丙丁 4 个工人，要分别指派他们完成 ABCD 不同的 4 项工作，每人做各项工作所消耗的时间如表 6 所示。应如何指派工作，才能使总的消耗时间最少？

表 6

工作 / 工人	A	B	C	D
甲	5	10	7	4
乙	2	5	6	7
丙	3	13	11	7
丁	11	8	10	9

解：

设 0-1 型决策变量为x_{ij}，其中，x_{ij}=1 表示指派第 i 个工人完成第 j 项工作，x_{ij}=0 表示不指派第 i 个工人完成第 j 项工作，i,j=1,2,3,4。第 1，2，3，4 个工人分别代表甲乙丙丁。第 1,2,3,4 项工作分别代表 ABCD 四项工作。记C_{ij}表示第 i 个工人完成第 j 项工作所消耗的时间,i,j=1,2,3,4。则指派问题的数学模型为：

$$\min_{x} Z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij}$$

$$s.t. \ \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1, i = 1,2,3,4$$

$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1, j = 1,2,3,4$，$x_{ij} = 0$ 或 $1, i, j, = 1,2,3,4$

采用匈牙利法求解，步骤入下所示。

（1） 将矩阵

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 13 & 11 & 7 \\ 11 & 8 & 10 & 9 \end{vmatrix}$$

的每行元素都减去该行的最小值，得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 10 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

（2） 将（1）中的结果矩阵的每列都减去该列的最小值，得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 10 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

（3） 在（2）中的结果矩阵的各行各列中寻找独立 0 元，并记以⓪。⓪所在行和列的其他 0 元素记为Ø。得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & ⓪ \\ ⓪ & 3 & 2 & 5 \\ Ø & 10 & 6 & 4 \\ 3 & Ø & ⓪ & 1 \end{vmatrix}$$

（4） 独立 0 元的个数为 3<4，还未找到最优解，需要增加 0 元。将（3）中的结果矩阵中无⓪的行，标记√。得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & ⓪ \\ ⓪ & 3 & 2 & 5 \\ Ø & 10 & 6 & 4 \\ 3 & Ø & ⓪ & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \surd \\ \\ \end{matrix}$$

（5） 在（4）中的结果矩阵中标记√的行中 0 元所在的列，标记为√。得到

$$\begin{array}{cc}\left|\begin{array}{cccc}1&6&1&\textcircled{0}\\ \textcircled{0}&3&2&5\\ \varnothing&10&6&4\\ 3&\varnothing&\textcircled{0}&1\end{array}\right| & \begin{array}{c}\\ \\ \surd\\ \end{array}\\ \begin{array}{cccc}\surd&&&\end{array} & \end{array}$$

（6） 在（5）的结果矩阵中，标记√的列中⓪元所在的行，标记为√。得到

$$\begin{array}{cc}\left|\begin{array}{cccc}1&6&1&\textcircled{0}\\ \textcircled{0}&3&2&5\\ \varnothing&10&6&4\\ 3&\varnothing&\textcircled{0}&1\end{array}\right| & \begin{array}{c}\\ \surd\\ \surd\\ \end{array}\\ \begin{array}{cccc}\surd&&&\end{array} & \end{array}$$

（7） 标记为√的行中所有 0 元所在列都已被标记为√。在（6）中的结果矩阵中，将无√的行，以及标记为√的列划线，得到

$$\begin{array}{cc}\left|\begin{array}{cccc}1&6&1&\textcircled{0}\\ \textcircled{0}&3&2&5\\ \varnothing&10&6&4\\ 3&\varnothing&\textcircled{0}&1\end{array}\right| & \begin{array}{c}\\ \surd\\ \surd\\ \end{array}\\ \begin{array}{cccc}\surd&&&\end{array} & \end{array}$$

（8） 选取（7）中的结果矩阵中未被划线覆盖的元素中的最小元素，也就是 2。将标记√的行的所有元素都减去最小元素，再将标记为√的列的所有元素都加上最小元素。得到

$$\begin{array}{cc}\left|\begin{array}{cccc}3&6&1&0\\ 0&1&0&3\\ 0&8&4&2\\ 5&0&0&1\end{array}\right| & \begin{array}{c}\\ \surd\\ \surd\\ \end{array}\\ \begin{array}{cccc}\surd&&&\end{array} & \end{array}$$

（9） 重复（3）的处理。在（8）的结果矩阵中重新寻找独立 0 元。得到

$$\left|\begin{array}{cccc}3&6&1&\textcircled{0}\\ \varnothing&1&\textcircled{0}&3\\ \textcircled{0}&8&4&2\\ 5&\textcircled{0}&\varnothing&1\end{array}\right|$$

（10）独立 0 元的个数为 4 个，因此，找到最优解。

最优解为：$x_{14}=x_{23}=x_{31}=x_{42}=1$,其余$x_{ij}$都为 0。最优值 Z=$C_{14}+C_{23}+C_{31}+C_{42}$=21.

因此，应指派甲完成工作 D，乙完成工作 C，丙完成工作 A，丁完成工作 B。此时总耗时最少，为 Z=21。

2020 年-2021 学年度第一学期
华中科技大学本科生课程考试试卷(B 卷)

课程名称：运筹学（一） 课程类别 ☐公共课 ■专业课 考试形式 ☐开卷 ■闭卷

所在院系：人工智能与自动化学院专业及班级：物流 考试日期：2020.12.5

学 号：________ 姓名：________ 任课教师：张钧

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							

得分	评卷人

一、（25 分）试求解如下线性规划问题：

$$\max z = 3x_1 - x_2 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ 2x_1 \qquad + x_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

得分	评卷人

二、(20 分)若题一中再添加x_1，x_2，x_3均为整数的约束，请用割平面法进行求解。

得分	评卷人

三、（**20** 分）若问题：

$$\min z = -x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ 2x_1 \qquad\quad \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

的最优解为 x_1=0.5， x_2=1.75。试进行如下分析：

（1）请利用互补松弛性求其对偶问题的最优解。

（2）假设问题描述了一个生产计划，问题的第 2 个约束为某设备的加工台时约束。若可以在市场上以每单位台时 2 个利润单位的价格出租该设备，则是否应该出租，为什么？

得分	评卷人

四、（25 分）某公司的甲、乙两个产地，分别向 A、B、C 三个销地提供产品，请给出总运费最小的运输方案。

其中，产量、销量及产地到销地的单位运价如下表所示：

销地 / 产地	A	B	C	产量
甲	6	4	5	7
乙	1	9	2	4
销量	2	5	4	

得分	评卷人

五（10 分）. 某厂生产 A,B 两种产品。两种产品的单位工时消耗分别为 4 小时和 5 小时。每天的总工时为 20 小时。两种产品的单位利润分别为 70 元和 80 元。该厂经营目标如下：

P1: 利润指标定为每天不低于3000元；

P2：充分利用生产工时。

为确定生产计划，试建立该问题的目标规划模型（只建模不求解）。

2020 年-2021 学年度第一学期
华中科技大学本科生课程考试试卷(A 卷)

课程名称：运筹学（一）　课程类别　☐公共课 ■专业课　考试形式　☐开卷 ■闭卷

所在院系：人工智能与自动化学院　专业及班级：物流 2019　考试日期：2020.12.5

学　号：＿＿＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿＿＿　任课教师：张钧

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							

得分	评卷人

一、（25 分）试求解如下线性规划问题：

$$\max z = 3x_1 - x_2 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 1 \\ 2x_1 \qquad + x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解答：

（1）　标准化

$$\max z = 3x_1 - x_2 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4 \qquad = \frac{1}{2} \\ 2x_1 \qquad + x_3 \qquad + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

。。。（4 分）

（2） 构建初始单纯形表并用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			3	−1	1	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
−1	x_2	1/2	1/2	1	1/2	−1	0	1
0	x_5	1	(2)	0	1	0	1	1/2
$c_j - z_j$			(7/2)	0	3/2	−1	0	
−1	x_2	1/4	0	1	1/4	−1	−1/4	
3	x_1	1/2	1	0	1/2	0	1/2	
$c_j - z_j$			0	0	−1/4	−1	−7/4	

初始单纯形表。。。（10 分）

调整。。。（8 分）

（3） 得最优解

由于最后一个单纯形表中所有的检验数均已非正，得到原问题最优解，x_1=1/2, x_2=1/4, x_3=0。最优值为 max Z = 5/4。

。。。（3 分）

大 M 方法解答

（1） 标准化

$$\max z = 3x_1 - x_2 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_3 + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

。。。（2 分）

用大 M 方法化为

$$\max z = 3x_1 - x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \qquad + x_6 = 1 \\ 2x_1 \qquad + x_3 \qquad + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, \ldots, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

。。。（1 分）

（2） 构建初始单纯形表并用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			3	-1	1	0	0	-M	**θ**
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-M	x_6	1	1	(2)	1	-1	0	1	
0	x_5	1	2	0	1	0	1	0	
$c_j - z_j$			3+M	(-1+2M)	1+M	-M	0	0	
-1	x_2	1/2	1/2	1	1/2	-1/2	0	1/2	1
0	x_5	1	(2)	0	1	0	1	0	1/2
$c_j - z_j$			(7/2)	0	3/2	-1/2	0	1/2-M	
-1	x_2	1/4	0	1	1/4	-1/2	-1/4	1/2	1
3	x_1	1/2	1	0	1/2	0	1/2	0	1/2
$c_j - z_j$			0	0	-1/4	-1/2	-7/4	1/2-M	

初始单纯形表。。。（10 分）

调整。。。（9 分）

（3） 得最优解

由于最后一个单纯形表中所有的检验数均已非正，得到原问题最优解，x_1=1/2, x_2=1/4, x_3=0。最优值为 max Z = 5/4。

。。。（3 分）

得分	评卷人

二、(20 分)若题一中再添加x_1，x_2，x_3均为整数的约束，请用割平面法进行求解。

解答：

（1） 构建割平面

由题一中的最后一个单纯形表的第 2 行构建割平面。

$1/2 = x_1 + x_3/2 + x_5/2$

$1/2 - x_3/2 - x_5/2 \leq 0$

$- x_3 - x_5 \leq -1$

。。。（10 分）

（2） 用对偶单纯形法求解

将$- x_3 - x_5 \leq -1$ 化为等式并添加到最后一个单纯表中。

$c_j \rightarrow$			3	−1	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
−1	x_2	1/4	0	1	1/4	−1	−1/4	0
3	x_1	1/2	1	0	1/2	0	1/2	0
0	x_6	(−1)	0	0	(−1)	0	−1	1
$c_j - z_j$			0	0	−1/4	−1	−7/4	0
θ					1/4	-	7/4	
−1	x_2	0	0	1	0	−1	−1/2	1/4
3	x_1	0	1	0	0	0	0	1/2
1	x_3	1	0	0	1	0	1	−1
$c_j - z_j$			0	0	0	−1	−3/2	−1/4

。。。（8 分）

所有变量取值均为整数，所有检验数均非正。得原整数规划最优解，x_1=0, x_2=0,x_3=1。最优值为 max Z = 1。

。。。（2 分）

得分	评卷人

三、（20分）若问题：

$$\min z=-x_1+x_2$$

$$s.t.\begin{cases}-x_1+2x_2\geq 3\\ 2x_1\qquad\quad\leq 1\\ -x_1+x_2\geq 1\\ x_1,x_2\geq 0\end{cases}$$

的最优解为x_1=0.5，x_2=1.75。试进行如下分析：

（1）请利用互补松弛性求其对偶问题的最优解。

（2）假设问题描述了一个生产计划，问题的第2个约束为某设备的加工台时约束。若可以在市场上以每单位台时 2 个利润单位的价格出租该设备，则是否应该出租，为什么？

解答：

（1） 原问题标准化

$$\min z=-x_1+x_2$$

$$s.t.\begin{cases}-x_1+2x_2\geq 3\\ -2x_1\qquad\quad\geq -1\\ -x_1+x_2\ \geq 1\\ x_1,x_2\geq 0\end{cases}$$

原问题的对偶问题为

$$\max \omega=3y_1-y_2+y_3$$

$$s.t.\begin{cases}-y_1-2y_2-y_3\leq -1\\ 2y_1\qquad\quad+y_3\leq 1\\ y_1,y_2,y_3\geq 0\end{cases}$$

。。。（5分）

（2） 互补松弛性

由原问题的最优解x_1=0.5，x_2=1.75 以及对偶问题的互补松弛性知，对偶问题在最优解处，2 个约束均为等式约束。

将x_1=0.5，x_2=1.75 带入标准化后的原问题知，原问题在最优解处使得第 1 和第 2 个约束均为等式约束，第 3 个约束为不等式约束。因此，原问题在最优解处只有第 3 个松弛变量非零。由对偶问题的互补松弛性知，对偶问题的最优解的第 3 个变量为 0，也即y_3=0.

于是，有，

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 = -1 \\ 2y_1 \qquad\quad = 1 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

解得，对偶问题的最优解为$y_1 = \dfrac{1}{2}, y_2 = \dfrac{1}{4}, y_3 = 0$。对偶问题的最优值为 max ω = 5/4。

。。。（10 分）

（3） 影子价格

对偶问题的最优解中，$y_2 = \dfrac{1}{4}$为原问题第 2 个约束所对应的影子价格。$y_2 = \dfrac{1}{4}$ ＜2，因此，应该以 2 个利润单位的价格出租设备台时。

。。。（5 分）

得分	评卷人

四、（25 分）某公司的甲、乙两个产地，分别向 A、B、C 三个销地提供产品，请给出总运费最小的运输方案。

其中，产量、销量及产地到销地的单位运价如下表所示：

销地 产地	A	B	C	产量
甲	6	4	5	7
乙	1	9	2	4
销量	2	5	4	

解答：

是产销平衡的运输问题。

。。。（3 分）

（1） 伏格尔法求出初始解

	(1) A	(3) B	C	行差	
	6	（4）	~~(5)~~ (4)	1	
	(1)	~~9~~	~~（2）~~ (2)	1	7
列差	(5)	(5)	（3）		

6	4 5	5 2	7
1 2	9	2 2	4
2	5	4	

得初始解：$\boldsymbol{x_{12}=5, x_{13}=2, x_{21}=2, x_{23}=2, x_{11}=0, x_{22}=0}$。

。。。（9 分）

（2） 用位势法求检验数

	6	4	5	ui
	(+2)	5	2	0
	1	9	2	−3
	2	(+8)	2	
vi	4	4	5	

。。。（10 分）

因所有检验数均已非负，因此由伏格尔法得到的初始解即为最优解。

最优解为：$\boldsymbol{x_{12}=5, x_{13}=2, x_{21}=2, x_{23}=2, x_{11}=0, x_{22}=0}$。最小运费为：5×4+2×5+2× 1+2× 2=36（运价单位）。

最优运输方案为，分别由甲地给 B，C 三个销地运送 5，2 个单位的产品；由乙地给销地 A, C 运送 2, 2 个单位的产品。 。。。（3 分）

得分	评卷人

五（10 分）．某厂生产 A,B 两种产品。产品 A，B 的每件工时消耗分别为 4 小时和 5 小时。每天的总工时为 20 小时。每件产品 A，B 的利润分别为 70 元和 80 元。该厂经营目标如下：

$\mathbf{P_1}$：每天的利润不低于3000元；

$\mathbf{P_2}$： 充分利用生产工时,但不加班。

试建立该厂经营的目标规划模型（只建模不求解)。

解答：

设$\boldsymbol{x_1}$，$\boldsymbol{x_2}$分别为产品 A, B 的每天的产量，$\boldsymbol{d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^-}$分别为目标$\mathbf{P_1}$和$\mathbf{P_2}$的正负偏差量。该问题的目标规划模型为，

$$\min P_1(d_1^-) + P_2\,(d_2^- + d_2^+)$$

$$\begin{cases} 70x_1 + 80x_2 + d_1^- - d_1^+ = 3000 \\ 4x_1 + 5x_2 + d_2^- - d_2^+ = 20 \\ x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \geq 0 \end{cases}$$

。。。（10 分）

2020 年-2021 学年度第一学期
华中科技大学本科生课程考试试卷(B 卷)

课程名称： 运筹学（一）　　课程类别　☐公共课 ■专业课　　考试形式　☐开卷 ■闭卷

所在院系：人工智能与自动化学院　专业及班级：________考试日期： 2020.12.5

学　　号：__________________姓名：______________任课教师： 张钧

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							

得分	评卷人

一、（25 分）试求解如下线性规划问题：

$$\max z = x_1 - x_2 + 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 1 \\ x_1 \qquad + 2x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解答：

（1） 标准化

$$\max z = x_1 - x_2 + 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4 = \frac{1}{2} \\ x_1 \qquad + 2x_3 \qquad + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

。。。（4 分）

（2） 构建初始单纯形表并用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			1	-1	3	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1	x_2	1/2	1/2	1	1/2	-1	0	1
0	x_5	1	1	0	(2)	0	1	1/2
$c_j - z_j$			3/2	0	(7/2)	-1	0	
-1	x_2	1/4	1/4	1	0	-1	-1/4	
3	x_3	1/2	1/2	0	1	0	1/2	
$c_j - z_j$			-1/4	0	0	-1	-7/4	

初始单纯形表。。。（10 分）

调整。。。（8 分）

（3） 得最优解

由于最后一个单纯形表中所有的检验数均已非正，得到原问题最优解，x_1=0，x_2=1/4，x_3=1/2。最优值为 max Z = 5/4。

。。。（3 分）

得分	评卷人

二、(20 分)若题一中再添加x_1，x_2，x_3均为整数的约束，请用割平面法进行求解。

解答：

（1） 构建割平面

由题一中的最后一个单纯形表的第 2 行构建割平面。

$1/2 = x_1/2 + x_3 + x_5/2$

$1/2 - x_1/2 - x_5/2 \le 0$

$- x_1 - x_5 \le -1$

。。。（10 分）

（2） 用对偶单纯形法求解

将$- x_1 - x_5 \le -1$ 化为等式并添加到最后一个单纯表中。

$c_j \rightarrow$			1	−1	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
−1	x_2	1/4	1/4	1	0	−1	−1/4	0
3	x_3	1/2	1/2	0	1	0	1/2	0
0	x_6	(−1)	(−1)	0	0	0	−1	1
$c_j - z_j$			−1/4	0	0	−1	−7/4	0
θ			1/4			-	7/4	
−1	x_2	0	0	1	0	−1	−1/2	1/4
3	x_3	0	0	0	1	0	0	1/2
1	x_1	1	1	0	0	0	1	−1
$c_j - z_j$			0	0	0	−1	−3/2	−1/4

。。。（**8 分**）

所有变量取值均为整数，所有检验数均非正。得原整数规划最优解，x_1=1，x_2=0,x_3=0。最优值为 max Z = 1。

。。。（**2 分**）

得分	评卷人

三、（**20 分**）若问题：

$$\min z = -x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ 3x_1 \quad\quad \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

的最优解为x_1=1/3，x_2=5/3。试进行如下分析：

（1）请利用互补松弛性求其对偶问题的最优解。

（2）假设问题描述了一个生产计划，问题的第 2 个约束为某设备的加工台

时约束。若可以在市场上以每单位台时 2 个利润单位的价格出租该设备，则是否应该出租，为什么？

解答：

（1） 原问题标准化

$$\min z = -x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ -3x_1 \qquad \geq -1 \\ -x_1 + x_2 \ \ \geq 1 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

原问题的对偶问题为

$$\max \omega = 3y_1 - y_2 + y_3$$

$$s.t.\begin{cases} -y_1 - 3y_2 - y_3 \leq -1 \\ 2y_1 \qquad\quad + y_3 \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

。。。（5 分）

（2） 互补松弛性

由原问题的最优解 x_1=1/3， x_2=5/3 以及对偶问题的互补松弛性知，对偶问题在最优解处，2 个约束均为等式约束。

将 x_1=1/3，x_2=5/3 带入标准化后的原问题知，原问题在最优解处使得第 1 和第 2 个约束均为等式约束，第 3 个约束为不等式约束。因此，原问题在最优解处只有第 3 个松弛变量非零。由对偶问题的互补松弛性知，对偶问题的最优解的第 3 个变量为 0，也即 y_3=0.

于是，有，

$$\begin{cases} -y_1 - 3y_2 = -1 \\ 2y_1 \qquad\quad = 1 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

解得，对偶问题的最优解为 $y_1 = \dfrac{1}{2}$，$y_2 = \dfrac{1}{6}$，$y_3 = 0$。对偶问题的最优值为 max ω = 4/3。

。。。（10 分）

（3） **影子价格**

对偶问题的最优解中， $y_2 = \dfrac{1}{6}$ 为原问题第 2 个约束所对应的影子价格。$y_2 = \dfrac{1}{6}$ ＜2，因此，应该以 2 个利润单位的价格出租设备台时。

。。。（5 分）

得分	评卷人

四、（25 分）某公司的甲、乙两个产地，分别向 A、B、C 三个销地提供产品，请给出总运费最小的运输方案。其中，产量、销量及产地到销地的单位运价如下表所示：

销地 产地	A	B	C	产量
甲	6	4	9	7
乙	1	10	2	4
销量	2	5	4	

解答：

是产销平衡的运输问题。

。。。（3 分）

（1） 伏格尔法求出初始解

	A	B	C (1)	行差
	~~(6)~~ (3)	(2) (4)	9	2
	(1)	10	(2) (1)	1
列差	5	6	(7)	

6 2	4 5	9	7
1 0	10	2 4	4
2	5	4	

得初始解：$\boldsymbol{x_{11}=2, x_{12}=5, x_{21}=0, x_{23}=4, x_{13}=0, x_{22}=0}$。

。。。（9 分）

（2） 用位势法求检验数

	6 2	4 5	9 （+2）	ui 0
	1 0	10 (+11)	2 4	-5
vi	6	4	7	

。。。（10 分）

因所有检验数均已非负，因此由伏格尔法得到的初始解即为最优解。

最优解为：$\boldsymbol{x_{11}=2, x_{12}=5, x_{21}=0, x_{23}=4, x_{13}=0, x_{22}=0}$。最小运费为： 2×6+5×4+4× 2=40（运价单位）。

最优运输方案为，分别由甲地给 A，B 两个销地运送 2，5 个单位的产品；由乙地给销地 C 运送 4 个单位的产品。

[由于基变量$\boldsymbol{x_{21}=0}$，**因此该运输问题有无穷多组最优解。**]

。。。（3 分）

得分	评卷人

五（10 分）．某厂生产 A,B 两种产品。产品 A，B 的每件工时消耗分别为 4 小时和 6 小时。每天的总工时为 24 小时。每件产品 A，B 的利润分别为 50 元和 70 元。该厂经营目标如下：

$\mathbf{P_1}$: 利润指标定为每天不低于2800元；

$\mathbf{P_2}$：产品 A 的产量多于产品 B 的产量。

试建立该厂经营的目标规划模型（只建模不求解）。

解答：

设$\boldsymbol{x_1}$，$\boldsymbol{x_2}$**分别为产品 A，B 的每天产量，**$\boldsymbol{d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^-}$**分别为目标**$\mathbf{P_1}$和$\mathbf{P_2}$的正负偏差量。该问题的目标规划模型为，

$$\min P_1(d_1^-) + P_2\,(d_2^-)$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 70x_2 + d_1^- - d_1^+ = 2800 \\ 4x_1 + 6x_2 \le 24 \\ x_1 - x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0 \\ x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \ge 0 \end{cases}$$

。。。（10 分）