第6章　整数规划

第1节　整数线性规划问题的提出

第2节　分支定界解法

第3节　割平面解法

第4节　0-1型整数线性规划

第5节　指派问题

第5章　整数规划

第1节　整数线性规划问题的提出

第2节　分支定界解法

第3节　割平面解法

第4节　0-1型整数线性规划

第5节　指派问题

第1节　整数线性规划问题的提出

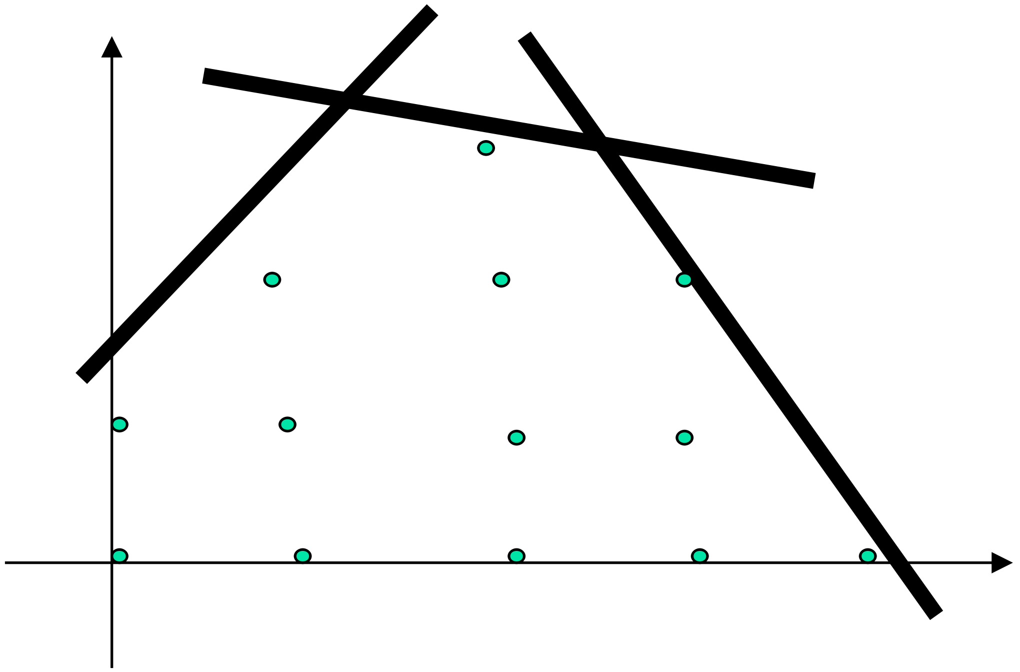
- 在前面讨论的线性规划问题中，有些最优解可能是分数或小数，但对于某些具体问题，常有要求解答必须是整数的情形(称为整数解)。
- 例如，所求解是机器的台数、完成工作的人数或装货的车数等，分数或小数的解答就不合要求。

- 我们称这样的问题为整数线性规划(integer linear programming)，简称IP.
- 整数线性规划是最近几十年来发展起来的规划论中的一个分支。

- **特征**—变量整数性要求
- **来源**

  问题本身的要求

  引入的逻辑变量的需要
- **性质**—可行域是离散集合



为了满足整数解的要求，初看起来，似乎只要把已得到的带有分数或小数的解经过“舍入化整”就可以了。

但这常常是不行的，因为化整后不见得是可行解；或虽是可行解，但不一定是最优解。

例1: 某集装箱运输公司，箱型标准体积$24m^3$，重量13T,现有两种货物可以装运，甲货物体积$5m^3$、重量2T、每件利润2000元；乙货物体积$4m^3$、重量5T、每件利润1000元，如何装运获利最多?

货物	体积（平方米/箱）	重量（百公斤/箱）	利润（百元/箱）
甲	5	2	20
乙	4	5	10
托运限制	24平方米	13百公斤	

$\max Z=2000x_1+1000x_2$

$5x_1+4x_2\le 24$ ①

$2x_1+5x_2\le 13$ ②

$x_1,x_2\ge 0$且为整数

- 为了满足整数解的要求，初看起来，似乎只要把已得到的带有分数或小数的解经过“舍入化整”就可以了。
- 但这常常是不行的，因为化整后不见得是可行解；或虽是可行解，但不一定是最优解。

- **例1:**某集装箱运输公司，箱型标准体积$24m^3$，重量13T,现有两种货物可以装运，甲货物体积$5m^3$、重量2T、每件利润2000元；乙货物体积$4m^3$、重量5T、每件利润1000元，如何装运获利最多?

- $\max Z=2000x_1+1000x_2$

  $5x_1+4x_2\le 24$ ①

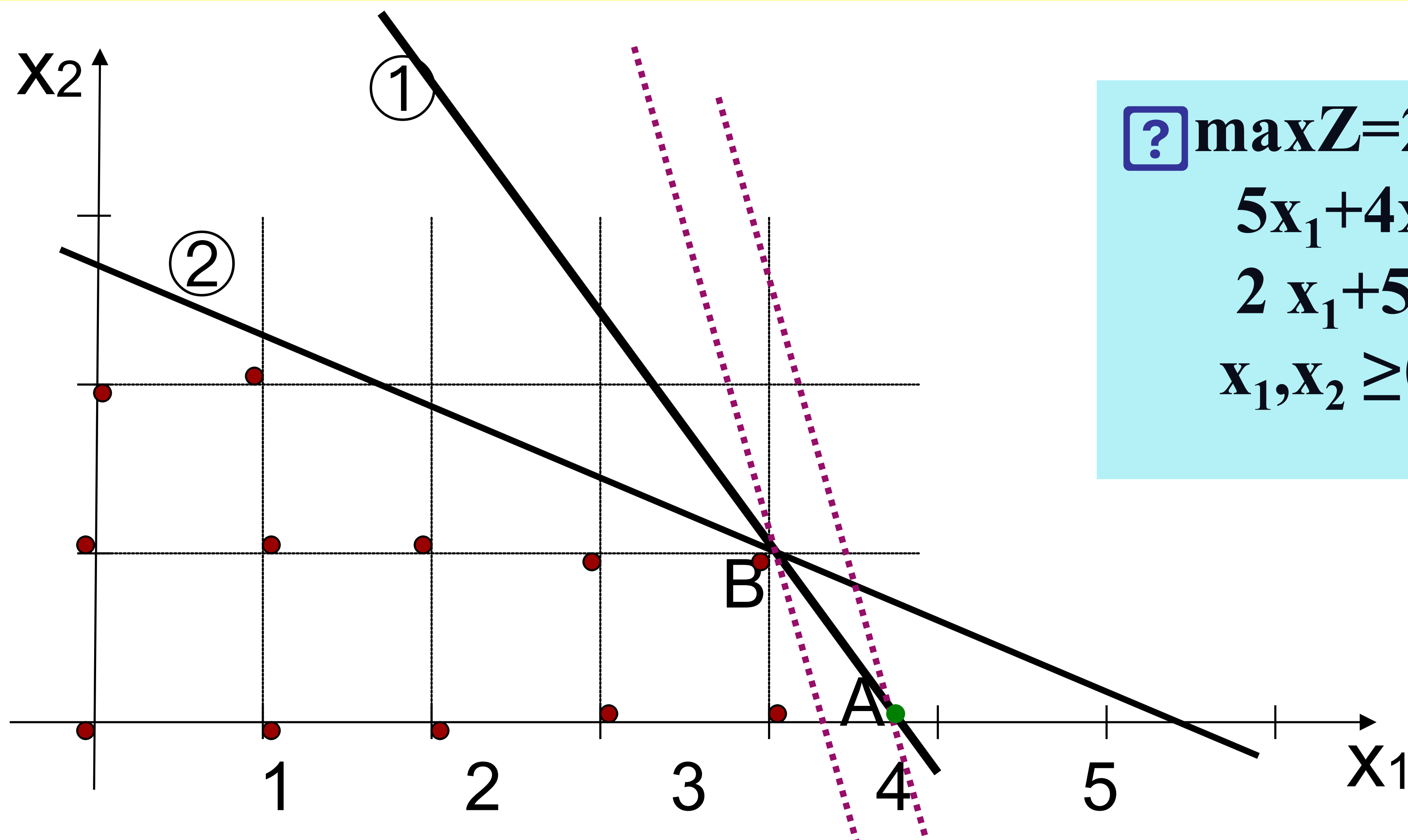
  $2x_1+5x_2\le 13$ ②

  $x_1,x_2\ge 0$且为整数

它和线性规划问题的区别仅在于最后的变量整数约束条件。现在我们暂不考虑这一条件，(以后我们称这样的问题为与**原问题相应的线性规划问题**)

- 为了满足整数解的要求，初看起来，似乎只要把已得到的带有分数或小数的解经过“舍入化整”就可以了。
- 但这常常是不行的，因为化整后不见得是可行解；或虽是可行解，但不一定是最优解。

例1: 某集装箱运输公司，箱型标准体积24m³，重量13T,现有两种货物可以装运，甲货物体积5m³、重量2T、每件利润2000元；乙货物体积4m³、重量5T、每件利润1000元，如何装运获利最多?



$$\max Z=2000x_1+1000x_2$$

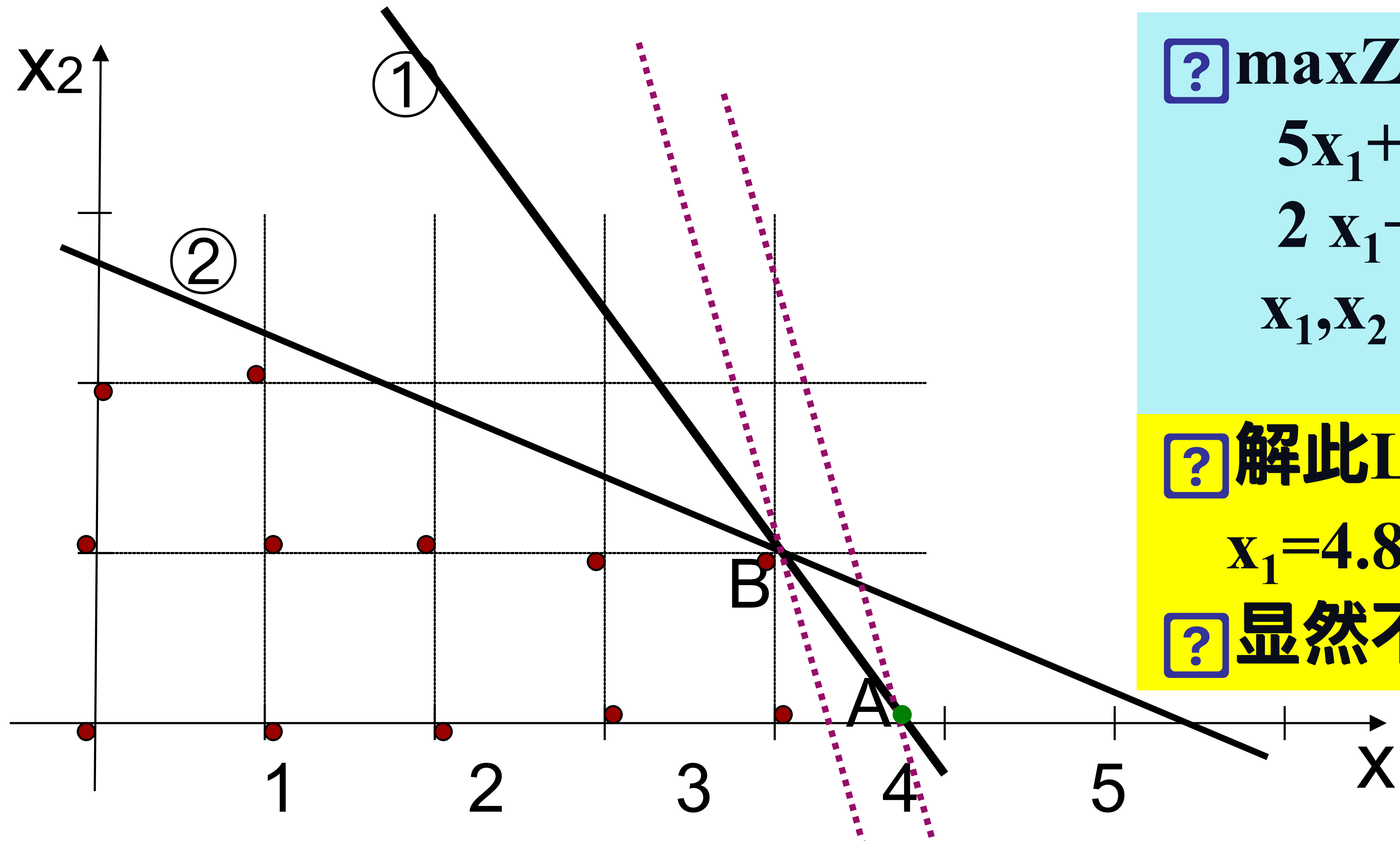
$$5x_1+4x_2\le 24 \quad ①$$

$$2x_1+5x_2\le 13 \quad ②$$

$x_1,x_2\ge 0$且为整数

- 为了满足整数解的要求，初看起来，似乎只要把已得到的带有分数或小数的解经过“舍入化整”就可以了。
- 但这常常是不行的，因为化整后不见得是可行解；或虽是可行解，但不一定是最优解。

- **例1:** 某集装箱运输公司，箱型标准体积24m³，重量13T,现有两种货物可以装运，甲货物体积5m³、重量2T、每件利润2000元；乙货物体积4m³、重量5T、每件利润1000元，如何装运获利最多?



- $\max Z=2000x_1+1000x_2$

$5x_1+4x_2\le 24$ ①

$2x_1+5x_2\le 13$ ②

$x_1,x_2\ge 0$ 且为整数

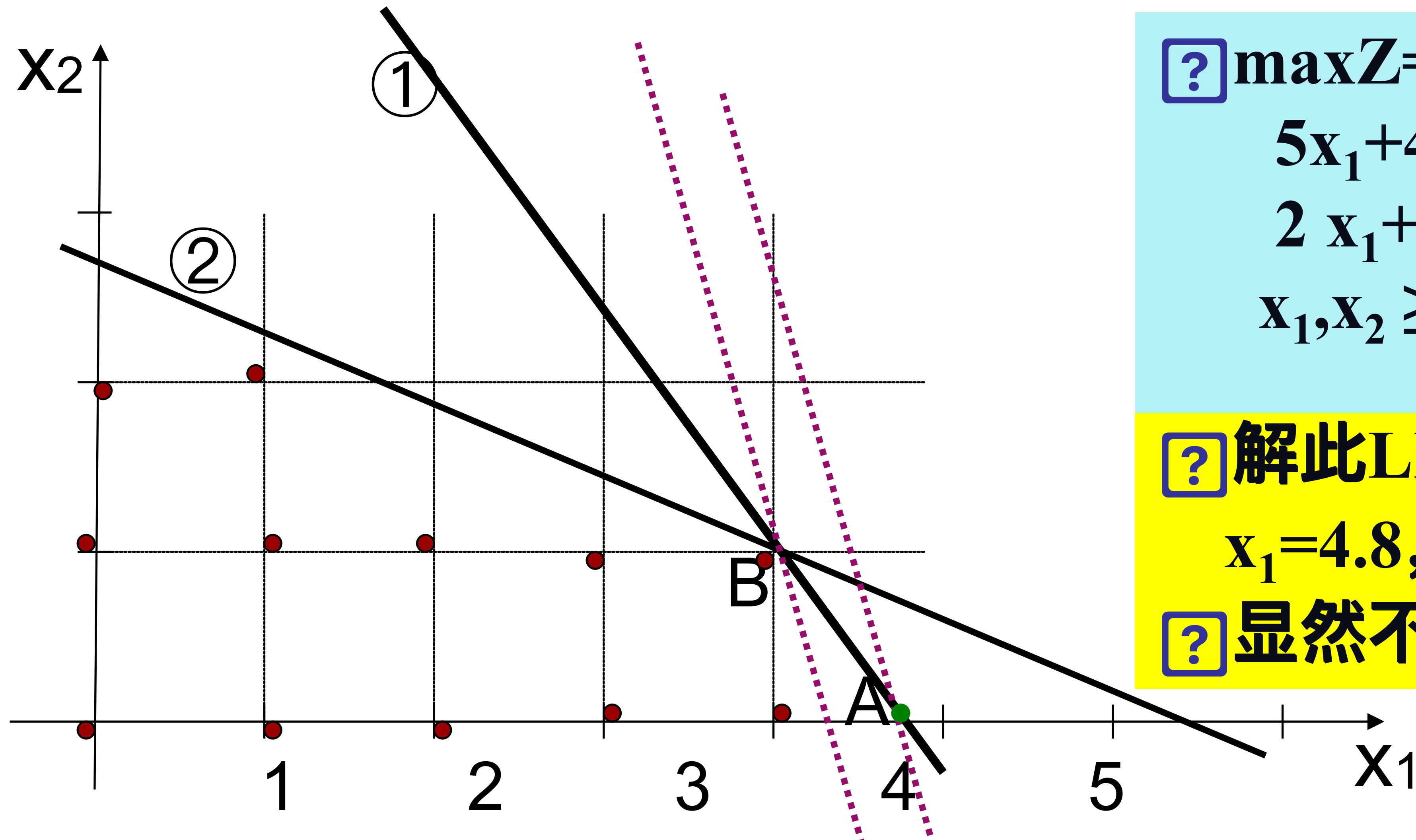
- 解此LP问题，得：

$x_1=4.8$， $x_2=0, z=96$

- 显然不是可行解

- $x_1=5$， $x_2=0$不是可行解,因为不满足$5x_1+4x_2\le 24$
- $x_1=4$， $x_2=0, z=80$
- $x_1=4$， $x_2=1$是可行解,$z=90$

例1:某集装箱运输公司，箱型标准体积24m^3，重量13T,现有两种货物可以装运，甲货物体积5m^3、重量2T、每件利润2000元；乙货物体积4m^3、重量5T、每件利润1000元，如何装运获利最多?



$$\max Z=2000x_1+1000x_2$$

$$5x_1+4x_2\le 24 \quad ①$$

$$2x_1+5x_2\le 13 \quad ②$$

$x_1,x_2\ge 0$且为整数

解此LP问题，得：

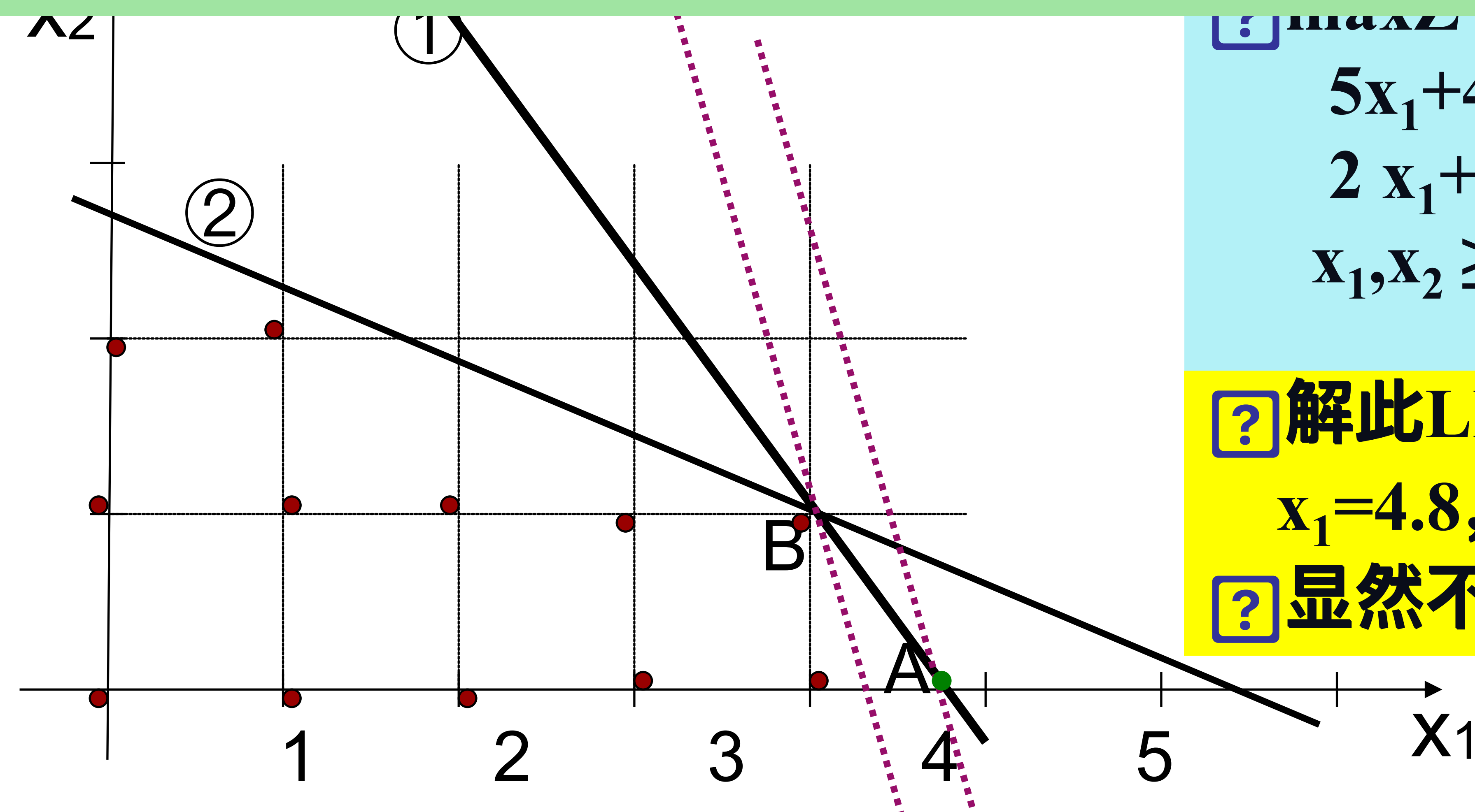
$x_1=4.8$， $x_2=0, z=96$

显然不是可行解

- $x_1=5$， $x_2=0$不是可行解,因为不满足$5x_1+4x_2≤24$
- $x_1=4$， $x_2=0, z=80$
- $x_1=4$， $x_2=1$是可行解,$z=90$

? 将相应的线性规划的最优解“化整”来解原整数线性规划，虽是最容易想到的，但常常得不到整数线性规划的最优解，甚至根本不是可行解。

? 因此有必要对整数线性规划的解法进行专门研究。



? $\max Z = 2000x_1+1000x_2$

$5x_1+4x_2≤24$ ①

$2x_1+5x_2≤13$ ②

$x_1,x_2≥0$且为整数

? 解此LP问题，得：

$x_1=4.8$， $x_2=0, z=96$

? 显然不是可行解

整数线性规划中如果所有的变数都限制为(非负)整数，就称为**纯整数线性规划**(pure integer linear programming)或称为**全整数线性规划**(all integer linear programming)；

$$\min c^{\top} x$$

$$s.t.\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0, \boxed{x\text{为整数}} \end{cases}$$

- 整数线性规划中如果所有的变数都限制为(非负)整数，就称为**纯整数线性规划**(pure integer linear programming)或称为**全整数线性规划**(all integer linear programming)；
- 如果仅一部分变数限制为整数，则称为混合整数计划(mixed integer linear programming)。

$$\min c^T x$$

$$s.t.\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ \boxed{x_i 为整数, i = 1,2,\ldots,p} \end{cases}$$

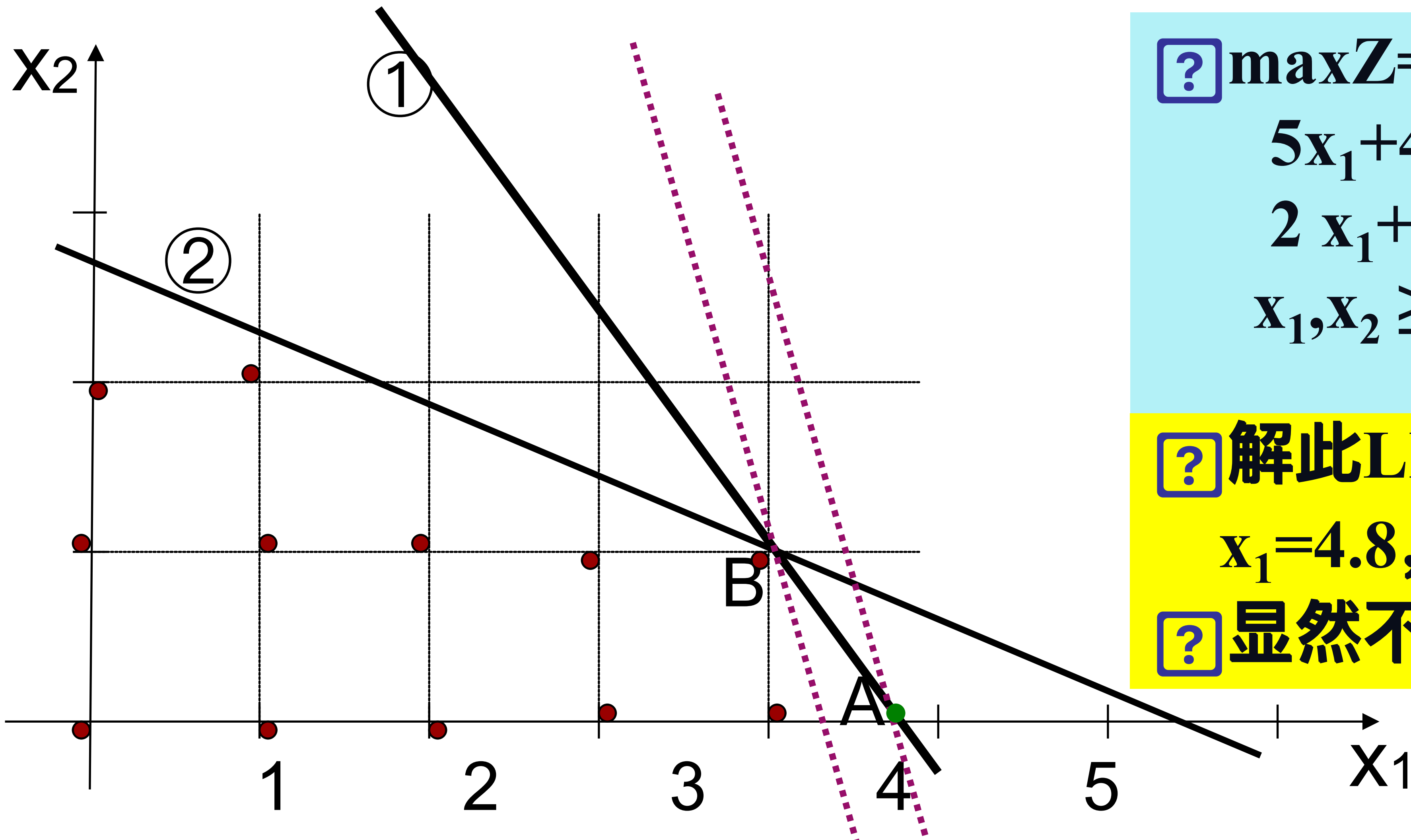
- 整数线性规划中如果所有的变数都限制为(非负)整数，就称为**纯整数线性规划**(pure integer linear programming)或称为**全整数线性规划**(all integer linear programming)；
- 如果仅一部分变数限制为整数，则称为混合整数计划(mixed integer linear programming)。
- 整数线性规划的一种特殊情形是0-1规划，它的变数取值仅限于0或1。

$$\min c^{\top} x$$

$$s.t.\begin{cases} Ax \geq b \\ \boxed{x_i = 0,1}; i = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

图解法的启示

- A（4.8，0）点是LP问题的可行解，不是IP问题的可行解，B（4，1）才是IP的最优解
- 纯整数规划的可行解就是可行域中的整数点
- 非整数点不是可行解，对于求解没有意义，故切割掉可行域中的非可行解，不妨碍整数规划问题的优化
- IP问题的最优解不优于LP问题的最优解



- $\max Z=2000x_1+1000x_2$

$5x_1+4x_2\le 24$ ①

$2x_1+5x_2\le 13$ ②

$x_1,x_2\ge 0$且为整数

- 解此LP问题，得：

$x_1=4.8$， $x_2=0, z=96$

- 显然不是可行解