

正规战争的随机微分方程模型

刘 星, 田德生

(湖北工业大学 理学院, 湖北 武汉 430068)

摘 要: 分析了战争中双方战斗人数的不确定性因素, 论述了战争中战斗人数是一个随机过程, 从而建立了正规战的随机微分方程模型. 根据 Itô 微积分公式, 导出了这个随机微分方程的 Itô 解. 计算了战斗人数这一随机过程的期望, 给出了依据所建立的随机微分方程模型预测战争胜负的判据. 最后以硫磺岛战争为例, 给出了美、日双方胜负的可能性的分析和数据模拟计算.

关键词: 正规战争; Itô 微积分; 随机微分方程; Euler 法

1 引言

近年来, 随机微分方程的理论得到了迅速发展, 并累积了非常丰富的成果, 现在已经广泛地应用于生物学、物理学、机械、控制论、信号处理、生态学等各个方面, 所以对随机微分方程本身以及其解性态的研究就显得十分重要. 特别是随着金融市场的不断发展, 随机微分方程在金融经济学中的应用也越来越广泛, 如短期利率模型, 就是随机微分方程模型^[1]. 它对利率期限结构的研究也显得很重要, 并且取得了令人瞩目的成果. 这启发我们建立战争的随机微分方程模型.

早在第一次世界大战期间, F. W. Lanchester 就提出了几个预测战争结局的数学模型^[2], 这些模型只考虑了双发战斗人数的多少和战斗力的强弱. 后来人们对这些模型做了改进. 文献^[2]中给出的微分方程战争模型是比较常见的. 虽然仅靠战场上的战斗人数优劣很难估计战争的局势, 但是建模的思路和方法为我们讨论科学领域中的实际问题提供了方向.

显然, 在战争的交战过程中, 存在着许多难以预测的不确定性因素. 如交战双方的地势的不确定性, 自然环境的不确定性, 政治因素、经济因素的不确定的性, 正是这些条件的不确定性的影响, 导致了交战过程中战斗人数的随机性. 但是, 传统的战争微分方程模型没有考虑过程的随机性, 从而对双方战斗人数的预测和战争胜负的估计是不准确的. 如何更准确的描述实际双方战斗人数变化过程, 这就要考虑各种随机因素的影响. 因此研究战争的随机微分方程模型是很有意义的.

目前, 用随机微分方程研究战争预测模型常不多见. 本文建立了受到随机因素影响有非战斗减员的模型, 分析了随机因素对正规战争胜负的影响, 最后结合实际列子给出了战争随机微分方程数值解模拟计算.

2 几个引理

2.1 马尔可夫过程和维纳过程

马尔可夫过程^[3]是具有无后效性的随机过程. 所谓“无后效性”是指: 当过程在时刻 t_m 所处的状态为已知时, 过程在大于 t_m 时刻所处状态的概率特性只与过程在 t_m 时刻所处的状态有关, 而与过程在 t_m 时刻以前的状态无关.

在马尔可夫随机过程的研究中, 有一种特殊的马尔可夫过程, 它被称为基本维纳过程^[3], 它是一个 Gauss 过程, 且具有独立增量.

引理 2.1(重对数律^[4]) $W(t)$ 是一个维纳过程, 满足:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup \frac{W(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1, \text{ a.s.}$$

其中 a.s. 表示几乎必然.

2.2 Itô微积分

以日本数学家 Kiyoshi Itô命名的 Itô微积分, 提出了解决随机过程 (如维纳过程) 的微积分方法. 该理论的核心是引入了 Itô微积分的概念.

Itô微分公式由下面的规则来计算:

$$dt \cdot dt = dt \cdot dW(t) = dW(t) \cdot dt = 0, dW(t) \cdot dW(t) = dt.$$

设 $f(\cdot, \cdot), g(\cdot, \cdot)$ 是二元连续函数, $W(t)$ 是一维维纳过程, 一个 (一维的) Itô过程 (或随机积分) 是一个具有如下形式的随机过程 $X(t)$:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s) \quad (1)$$

或者写成微分形式:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t) \quad (2)$$

引理 2.2(Itô引理或公式^[5]) 设 $X(t)$ 是一个 Itô过程, $F(t, x) \in C^2([0, +\infty) \times \mathbb{R})$ (即 F 是 $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ 上的二阶连续可微的函数), 那么 $V(t) = F(t, X(t))$ 也是一个 Itô过程, 且满足:

$$dV(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X(t)) \cdot (dX(t))^2$$

这里 $(dX(t))^2 = dX(t) \cdot dX(t)$.

Itô随机积分是 Riemann-Stieltjes 积分的推广, 以解决随机过程的积分及不可微函数的积分 (如维纳过程). 类似 Riemann-Stieltjes 积分的定义, Itô积分在概率意义上被定义为 Riemann 和的极限, 而样本路径的 Riemann 和极限未必存在. $H(t)$ 是左连续的 (适应的) 局部有界过程. 令 $\Delta > 0, N = t/\Delta$, 且 $t_i = i\Delta, 0 \leq i \leq N$, 则到时间 t , H 关于 $W(t)$ 的 Itô积分是一个随机变量:

$$\int_0^t H(s)dW(s) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N H(t_{i-1})(W(t_i) - W(t_{i-1}))$$

可以证明该极限依概率收敛.

引理 2.3 随机积分具有性质^[6]:

$$E \left[\int_0^T H(s)dW(s) \right] = 0.$$

其中 E 表示期望.

2.3 随机微分方程数值计算的 Euler 法

考虑方程 (2) 的数值计算 [7], 首先对时间区间 $[t_0, T]$ 进行离散化:

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \cdots < \tau_n < \cdots < \tau_M = T.$$

采用类似于微分方程数值计算的 Euler 法, 构造方程 (2) 的连续解过程:

$$X = \{X(t), t_0 \leq t \leq T\}.$$

方程 (2) 的数值解的 Euler 法迭代公式:

$$X(\tau_{n+1}) = X(\tau_n) + f(\tau_n, X(\tau_n))(\tau_{n+1} - \tau_n) + g(\tau_n, X(\tau_n))(W(\tau_{n+1}) - W(\tau_n)) \quad (3)$$

如果方程 (2) 的扩散项系数 $g(t, X(t))$ 恒为零, 则方程 (2) 退化为一般的常微分方程, 公式 (3) 就是常微分方程的 Euler 法. 对于公式 (3), 有如下性质 [8]:

i) 对于一个最大步长为 φ 的离散逼近序列 X^φ , 它在 T 时刻强收敛于一个 Itô 过程 X , 如果它满足:

$$\lim_{\varphi \downarrow 0} E(|X(T) - X^\varphi(T)|) = 0.$$

ii) 对于一个最大步长为 φ 的离散逼近序列 X^φ , 它在 T 时刻以 $\gamma(>0)$ 阶强收敛于一个 Itô 过程 X , 如果存在一个不依赖于 φ 的正常数 C 及一个 $\varphi_0(>0)$, 使得下式成立:

$$E(|X(T) - X^\varphi(T)|) \leq C\varphi^\gamma, \forall \varphi \in (0, \varphi_0)$$

引理 2.4 如果方程 (2) 中的系数函数 $f(t, X(t))$ 和 $g(t, X(t))$ 满足 Lipschitz 条件和线性增长条件, 则迭代公式 (3) 为 $\gamma = 0.5$ 阶强收敛 [8].

3 假设条件与数学建模

分别用 $x(t)$ 和 $y(t)$ 表示甲乙交战双方时刻 t 时刻的战斗人数. 文 [2] 中经典的战争模型有如下假设:

1) 每一方的战斗减员率取决于双方的战斗人数和战斗力, 甲乙方的战斗减员率分别用 $p(x, y)$ 和 $q(x, y)$ 表示;

2) 甲乙双方的增员率是给定的函数, 分别用 $u(t)$ 和 $v(t)$ 表示.

由此得出关于 $x(t), y(t)$, 的微分方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = -p(x, y) + u(t), \\ \dot{y} = -q(x, y) + v(t). \end{cases}$$

3.1 战斗人数的随机特性分析

在实际战争中, 由于政治因素、经济因素和心理因素的不确定性, 导致了不同时刻战斗增员的随机变化. 地理环境、自然气候的不确定性, 也导致了不同时刻战斗减员率和非战斗减员率的随机变化. 不确定的因素意味着不利状态发生的可能性是存在的, 与之相对应, 有利状态发生的可能性也是存在的.

战局的多变性, 反映了战争胜负的难料性. 比方说, 心理因素就对战争的胜负有很大的影响. 在战争中士兵的心理因素的不稳定可能会引起一些难以预料的结果. 甲乙双方交战中, 处于优势的一方士兵可能信心倍增, 越战越勇, 也可能轻视对方, 懈怠作战. 处于弱势的一方士兵可能有畏惧的心理, 消极作战甚至逃跑, 也可能带着不怕牺牲的决心去战斗, 不同的心理

因素不同的战法可以导致不同胜负结果. 因此, 心理因素会导致了每个时段战争战斗人数的随机波动. 假定在甲乙双方的交战中, 长时段甲方一直是以绝对优势, 乙方仅能退防, 人们一般会认为甲方最终会取得胜利. 而实际中是可能发生逆转的, 在国内外就有很多的例子可以证明这点, 例如, 中国历史上著名的楚汉之争. 最初楚军有 40 万, 而汉军不足 10 万, 双方经过 5 年的战斗, 楚军由强变弱, 汉军由弱变强, 最终汉军获胜. 这说明战争中战斗人数的变化具有随机性, 它是一个随机过程.

3.2 正规战争的随机微分方程模型

文 [2] 中经典的正规战争模型

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ay(t) + u(t), \\ \frac{dy}{dt} = -bx(t) + v(t), \end{cases} \quad (4)$$

其中 $a > 0$, 是乙方每个士兵对甲方士兵的平均杀伤率, $b > 0$, 是甲方每个士兵对乙方士兵的平均杀伤率; $u(t)$ 和 $v(t)$ 表增员率, 意义同前.

在战争中, 参战士兵往往不能纵观全局, 只是根据当前的战局确定下一步的行动, 因此战斗人数的当前值确定下一时段人数的变化, 或者说战斗人数当前值的变化由前一时段的人数确定, 而受以往时段战斗人数的多寡影响不大. 从数学上来说, 战争局势变化的这种性质是马尔可夫过程所具有的性质. 因此, 我们假设: 战斗人数的变化遵循马尔可夫过程.

设交战双方的随机因素相互独立, 在交战过程中, 记 x_i 表示第 i 天甲方的战斗人数, Δx_i 表示该方日增量人数: $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. 根据以上假设, 可得出

$$\Delta x_i = \mu_i + \theta_1 x_i \cdot \varepsilon \sqrt{\Delta t} + u_i \cdot \Delta t.$$

其中 ε 是一个标准正态分布变量, μ_i 是变化量的均值, θ_1 表示为战场上甲方士兵的受到随机因素影响而产生非战斗减员的比例 ($\theta_1 \geq 0$), $\theta_1 x_i \cdot \varepsilon \sqrt{\Delta t}$ 是引起波动的随机变化量, u_i 为第 i 天甲方的增员率. 考虑时间的连续性, 取时间步长为 Δt , 可推得 $\mu_i = -ay_i \Delta t$, 其中 a 是敌对方每个士兵对本方士兵的平均杀伤率, 这样就有

$$\Delta x_i = -ay_i \Delta t + \theta_1 x_i \cdot \varepsilon \sqrt{\Delta t} + u_i \cdot \Delta t.$$

那么, 在连续意义下可得:

$$dx(t) = [-ay(t) + u(t)]dt + \theta_1 x(t) \cdot dW_1(t), t \geq 0. \quad (5)$$

结合 (4) 式与 (5) 式可得随机微分方程模型:

$$\begin{cases} dx(t) = [-ay(t) + u(t)]dt + \theta_1 x(t) \cdot dW_1(t), \\ dy(t) = [-bx(t) + v(t)]dt + \theta_2 y(t) \cdot dW_2(t). \end{cases} \quad (6)$$

其中 $W_1(t), W_2(t)$ 都是一维的维纳过程, 它们的方差都为 t , 而且

$$x(t) \geq 0, y(t) \geq 0, u(t) \geq 0, v(t) \geq 0, x(0) = x_0, y(0) = y_0, t \geq 0. \quad (7)$$

记 $S(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, $G_1 = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix}$, 则 (6) 式可写为向量形式:

$$dS(t) = (AS(t) + U(t))dt + G_1 S(t) dW_1(t) + G_2 S(t) dW_2(t) \quad (8)$$

当 $(u(t), v(t)) = (0, 0)$ 时, (8) 式可写为

$$dS(t) = AS(t)dt + G_1S(t)dW_1(t) + G_2S(t)dW_2(t) \quad (9)$$

4 模型分析

在这一节, 我们讨论双方胜负的判定情况.

定理 4.1 方程 (8) 的 Itô 解为

$$S(t) = \Phi(t)\{S(0) + \int_0^t \Phi^{-1}(s)U(s)ds\} \quad (10)$$

其中 $\Phi(t) = \exp[(A - \frac{1}{2}G^2)t + G_1W_1(t) + G_2W_2(t)]$.

证明 : 先求出方程 (9) 的解. 设

$$P(t) = \exp[(-A + \frac{1}{2}G^2)t - G_1W_1(t) - G_2W_2(t)]$$

应用引理 2.2(Itô公式), 得

$$\begin{aligned} dP(t) &= d\exp[(-A + \frac{1}{2}G^2)t - G_1W_1(t) - G_2W_2(t)] \\ &= P(t) \cdot \left[-A + \frac{1}{2}G^2\right]dt - P(t)(G_1W_1(t) + G_2W_2(t)) + \frac{1}{2}P(t)G^2dt \end{aligned} \quad (11)$$

和

$$d[P(t) \cdot S(t)] = dP(t) \cdot S(t) + P(t) \cdot dS(t) + dP(t) \cdot dS(t) \quad (12)$$

结合 (9)、(11) 和 (12) 式, 解得

$$d[P(t) \cdot S(t)] = 0.$$

将上式在积分, 得 $P(t) \cdot S(t) = C$, 即

$$\{\exp[(-A + \frac{1}{2}G^2)t - G_1W_1(t) - G_2W_2(t)]\} \cdot S(t) = C$$

其中 C 为任意的二维常向量. 所以

$$S(t) = \{\exp[(A - \frac{1}{2}G^2)t + G_1W_1(t) + G_2W_2(t)]\} \cdot C = \Phi(t) \cdot C$$

显然 $\Phi(t)$ 为方程 (9) 的解矩阵. 设方程 (8) 的解是

$$S(t) = \Phi(t) \cdot C(t), \quad (13)$$

又设 $dC = Fdt$, 于是有

$$\begin{aligned} d[S(t)] &= d[\Phi(t)C] = (d\Phi(t)) \cdot C + \Phi(t) \cdot dC + (d\Phi(t)) \cdot dC \\ &= A\Phi(t)Cdt + G\Phi(t)CdW(t) + \Phi(t)Fdt \end{aligned}$$

代入方程 (8) 得

$$(AS(t) + U(t))dt + GS(t)dW(t) = AS(t)dt + GS(t)dW(t) + \Phi(t)Fdt.$$

化简得 $\Phi(t)F = U(t)$, 因此 $F = \Phi^{-1}(t)U(t)$, 积分得

$$C(t) = S(0) + \int_0^t \Phi^{-1}(s)U(s)ds.$$

上式代入 (13), 得到方程 (8) 的解为

$$S(t) = \Phi(t)\{S(0) + \int_0^t \Phi^{-1}(s)U(s)ds\}.$$

证毕.

定理 4.2 在方程 (9) 中, $E[S(t)] = \begin{pmatrix} E[x(t)] \\ E[y(t)] \end{pmatrix} = \exp(At) \cdot E[S(0)]$.

证明 方程 (9) 的两边同乘以 $\exp(-At)$ 得

$$\exp(-At)dS(t) = \exp(-At)[AS(t)dt + G_1S(t)dW_1(t) + G_2S(t)dW_2(t)]. \quad (14)$$

利用引理 2.2(Itô引理), 直接计算得

$$d[\exp(-At)S(t)] = \exp(-At)dS(t) - \exp(-At)AS(t)dt.$$

代入 (14) 式得

$$\exp(-At)S(t) - S(0) = \int_0^t \exp(-As)G_1S(s)dW_1(s) + \int_0^t \exp(-As)G_2S(s)dW_2(s), \quad (15)$$

又由引理 2.3, 有

$$E \int_0^t \exp(-As)G_1S(s)dW_1(s) = 0, E \int_0^t \exp(-As)G_2S(s)dW_2(s) = 0,$$

因此对 (15) 式两边取期望, 得

$$\exp(-At)E[S(t)] = E[S(0)]$$

即

$$E[S(t)] = \exp(At)E[S(0)]$$

证毕.

由定理 4.2 可知,

$$E[x(t)] = \frac{1}{2\sqrt{b}} \left[\left(\sqrt{b}E(x(0)) + \sqrt{a}E(y(0)) \right) e^{-\sqrt{ab}t} + \left(\sqrt{b}E(x(0)) - \sqrt{a}E(y(0)) \right) e^{\sqrt{ab}t} \right],$$

$$E[y(t)] = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left[\left(\sqrt{b}E(x(0)) + \sqrt{a}E(y(0)) \right) e^{-\sqrt{ab}t} + \left(\sqrt{a}E(y(0)) - \sqrt{b}E(x(0)) \right) e^{\sqrt{ab}t} \right].$$

由上式可知, 随机过程 $x(t), y(t)$ 在 t 时刻的均值由交战双方初值的均值和平均杀伤率确定的. 而且当 $\sqrt{b}E(x(0)) - \sqrt{a}E(y(0)) > 0$ 和 $t \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$E[x(t)] \rightarrow +\infty$$

习惯上判断甲方胜; 当 $\sqrt{a}E(y(0)) - \sqrt{b}E(x(0)) > 0$ 和 $t \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$E[y(t)] \rightarrow +\infty$$

习惯上判断乙方胜. 这种判断往往是不准确的, 因为这没有考虑到战争过程中的随机因素.

定理 4.3 在方程 (9) 中, 设 $4ab > \theta_1^2\theta_2^2$, 则

- i) 若 $\frac{\sqrt{(\theta_1^2 - \theta_2^2)^2 + 16ab - \theta_1^2 + \theta_2^2}}{4a} > \frac{y_0}{x_0}$, 则甲方胜, a.s.;
- ii) 若 $\frac{\sqrt{(\theta_1^2 - \theta_2^2)^2 + 16ab - \theta_1^2 + \theta_2^2}}{4a} = \frac{y_0}{x_0}$, 则双方胜、负的机率均等, a.s.;
- iii) 若 $\frac{\sqrt{(\theta_1^2 - \theta_2^2)^2 + 16ab - \theta_1^2 + \theta_2^2}}{4a} < \frac{y_0}{x_0}$, 则甲方输, a.s.

证明 由定理 4.1 及其证明可知, 方程 (9) 的 Itô 解为

$$S(t) = \exp \left[\left(A - \frac{1}{2}G^2 + \frac{G_1W_1(t) + G_2W_2(t)}{t} \right) t \right] \cdot S(0)$$

矩阵 $\left(A - \frac{1}{2}G^2 + \frac{G_1W_1(t) + G_2W_2(t)}{t} \right)$ 的特征根为 λ_1, λ_2 , 计算得

$$\lambda_1 = \frac{\frac{2\theta_1W_1(t) + 2\theta_2W_2(t)}{t} - \sqrt{\left(\frac{2\theta_1W_1(t) - 2\theta_2W_2(t)}{t} - \theta_1^2 + \theta_2^2 \right)^2 + 16ab - \theta_1^2 - \theta_2^2}}{4}$$

$$\lambda_2 = \frac{\frac{2\theta_1 W_1(t) + 2\theta_2 W_2(t)}{t} + \sqrt{\left(\frac{2\theta_1 W_1(t) - 2\theta_2 W_2(t)}{t} - \theta_1^2 + \theta_2^2\right)^2 + 16ab - \theta_1^2 - \theta_2^2}}{4}.$$

因此可计算出甲乙双方战斗人数变化规律为:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\left(\lambda_2 + \frac{\theta_2^2}{2} - \frac{\theta_1 W_1(t)}{t}\right) x_0 + ay_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{\left(\lambda_1 + \frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_2 W_2(t)}{t}\right) x_0 + ay_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}, \\ y(t) &= \frac{bx_0 + \left(\lambda_2 + \frac{\theta_2^2}{2} - \frac{\theta_2 W_2(t)}{t}\right) y_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{bx_0 + \left(\lambda_1 + \frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_1 W_1(t)}{t}\right) y_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}. \end{aligned} \quad (16)$$

下面来计算 $x(t), y(t)$ 的极限. 根据引理 2.1(重对数律), 得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\theta_1 W_1(t)}{t} = 0, \text{ a.s.}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\theta_2 W_2(t)}{t} = 0, \text{ a.s.}$$

因此

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda_1 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2\theta_1 W_1(t) + 2\theta_2 W_2(t)}{t} - \sqrt{\left(\frac{2\theta_1 W_1(t) - 2\theta_2 W_2(t)}{t} - \theta_1^2 + \theta_2^2\right)^2 + 16ab - \theta_1^2 - \theta_2^2}}{4} \\ &= \frac{-\sqrt{(\theta_1^2 - \theta_2^2)^2 + 16ab - \theta_1^2 - \theta_2^2}}{4} = \frac{-L - \theta_1^2 - \theta_2^2}{4}, \text{ a.s.} \end{aligned}$$

其中 $L = \sqrt{(\theta_1^2 - \theta_2^2)^2 + 16ab}$. 进一步可得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_1 t} = 0, \text{ a.s.} \quad (17)$$

注意到定理 4.3 的假设条件: $4ab > \theta_1^2 \theta_2^2$, 故类似地, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda_2 = \frac{L - \theta_1^2 - \theta_2^2}{4} > 0, \text{ a.s.}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_2 t} = +\infty, \text{ a.s.} \quad (18)$$

和

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\left(\lambda_2 + \frac{\theta_2^2}{2} - \frac{\theta_1 W_1(t)}{t}\right) x_0 + ay_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{(\theta_1^2 - \theta_2^2 + L)x_0 + 4ay_0}{2L}, \text{ a.s.} \quad (19)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\left(\lambda_1 + \frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_2 W_2(t)}{t}\right) x_0 + ay_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{(\theta_1^2 - \theta_2^2 - L)x_0 + 4ay_0}{2L}, \text{ a.s.} \quad (20)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\left(\lambda_2 + \frac{\theta_2^2}{2} - \frac{\theta_2 W_2(t)}{t}\right) y_0 + bx_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{(\theta_2^2 - \theta_1^2 + L)y_0 + 4bx_0}{2L}, \text{ a.s.} \quad (21)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\left(\lambda_1 + \frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_1 W_1(t)}{t}\right) y_0 + bx_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{(\theta_2^2 - \theta_1^2 - L)y_0 + 4bx_0}{2L}, \text{ a.s.} \quad (22)$$

将 (17)-(22) 式代入 (16) 式, 并结合 (7) 式有如下情形:

i) 当 $\frac{\sqrt{(\theta_1^2 - \theta_2^2)^2 + 16ab - \theta_1^2 + \theta_2^2}}{4a} > \frac{y_0}{x_0}$ 和 $t \rightarrow +\infty$ 时, 则 $x(t) > 0, \text{ a.s.}$ $y(t) = 0, \text{ a.s.}$, 故甲方胜,

a.s.;

ii) 当 $\frac{\sqrt{(\theta_1^2 - \theta_2^2)^2 + 16ab - \theta_1^2 + \theta_2^2}}{4a} = \frac{y_0}{x_0}$ 和 $t \rightarrow +\infty$ 时, 则 $x(t) = 0, \text{ a.s.}$ $y(t) = 0, \text{ a.s.}$, 故双方胜、负的机率均等, a.s.;

iii) 当 $\frac{\sqrt{(\theta_1^2 - \theta_2^2)^2 + 16ab - \theta_1^2 + \theta_2^2}}{4a} < \frac{y_0}{x_0}$ 和 $t \rightarrow +\infty$ 时, 则 $x(t) = 0, \text{ a.s.}$ $y(t) > 0, \text{ a.s.}$, 故甲方输, a.s.

证毕.

在传统的微分方程中,战争的胜负只与 x_0, y_0, a, b 有关;而在随机微分方程中,由定理 4.3 知战争的胜负还与 θ_1, θ_2 有关. 这就是反败为胜,以少胜多的道理. 由于战争的随机因素很多且局势变化无常,因此,用随机微分方程来分析战争更为合理.

5 实例分析与模拟计算

以硫磺岛战役为例,首先应用定理 4.2 分析战争的胜负情况,进一步对建立的战争随机微分方程进行数值模拟计算. 由文 [2] 可知 $a = 0.0544, b = 0.0106$.

5.1 实例分析

美军在第 7 天停止增兵,日军无增兵,因此以第 7 天双方的战斗人数为 x_0, y_0 , 即 $x_0 = 66644, y_0 = 17916$. 应用定理 4.3, 分析在以下三种情况下双方的胜负.

i) 双方都无非战斗减员的情况

图 1 为 $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0$ 时 (模型退化为微分方程), 双方战斗人数的数值计算结果. 因此,当不考虑随机因素影响时,美军胜.

ii) 日方无非战斗减员的情况

当 $\theta_2 = 0$ 时, 根据定理 4.3, 可知:

- a. 如果 $\theta_1 < 0.22274$, 则 $\frac{\sqrt{\theta_1^4 + 16ab} - \theta_1^2}{4a} > \frac{y_0}{x_0}$, 美军胜, a.s.;
- b. 如果 $\theta_1 = 0.22274$, 则 $\frac{\sqrt{\theta_1^4 + 16ab} - \theta_1^2}{4a} = \frac{y_0}{x_0}$, 双方胜、负的机率均等, a.s.;
- c. 如果 $\theta_1 > 0.22274$, 则 $\frac{\sqrt{\theta_1^4 + 16ab} - \theta_1^2}{4a} < \frac{y_0}{x_0}$, 日军胜, a.s.

由上述分析可知,在硫磺岛战役中日军在理论上也有取胜的可能性,只要美军受到随机因素影响而出现非战斗减员人数比例超过 22.274%, 则日军胜, a.s. 因此,随机因素影响是能够影响双方的胜负. 图 2 和图 3 为 $\theta_1 = 0.22274, \theta_2 = 0$ 时, 双方战斗人数的轨线图.

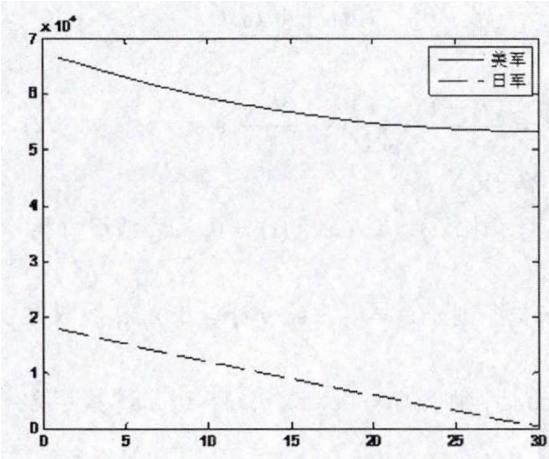


图 1 无随机因素数值模拟结果

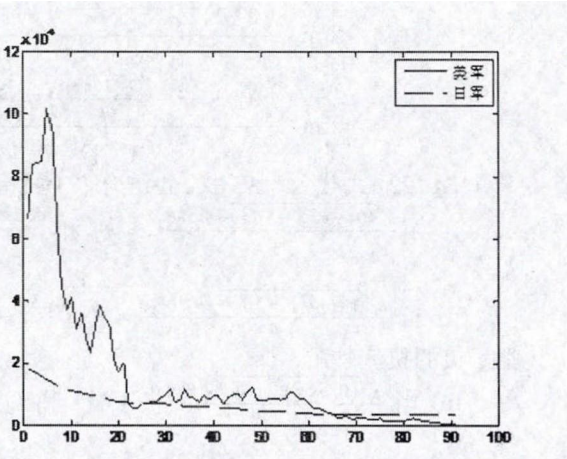


图 2 双方战斗人数轨线

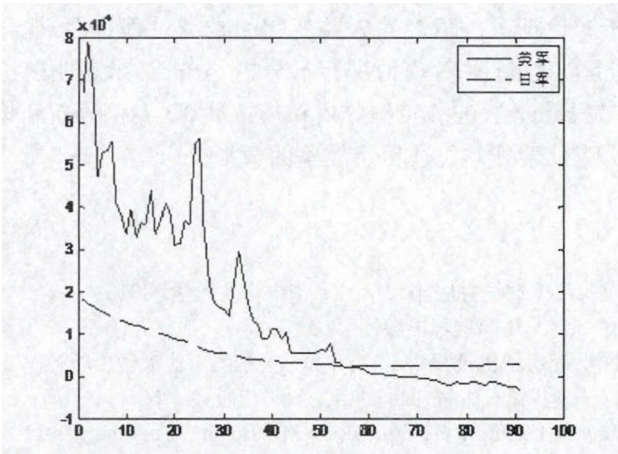


图 3 双方战斗人数轨线

iii) 美军无非战斗减员的情况
当 $\theta_1 = 0$ 时, 总有 $\frac{\sqrt{\theta_2^2+16ab+\theta_2^2}}{4a} > \frac{y_0}{x_0}$, 因此由定理 4.3 可得, 美军胜, a.s.

5.2 模拟计算

在这里取 $\theta_1 = 0.003, \theta_2 = 0.001$. 可知式 (8) 满足 Lipschitz 条件和线性增长条件, 因此它为 $\gamma = 0.5$ 阶强收敛 [5].

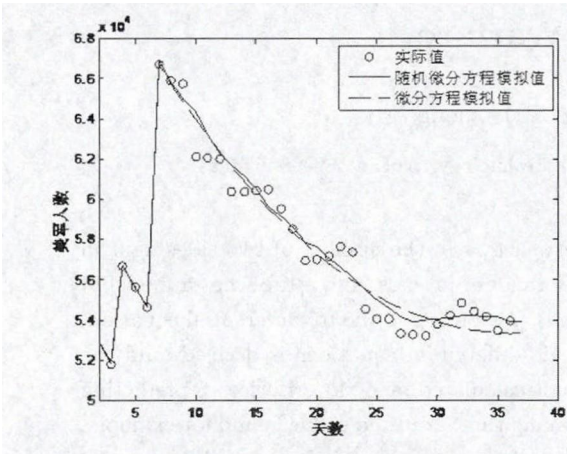


图 4 美军实际数据与模拟结果

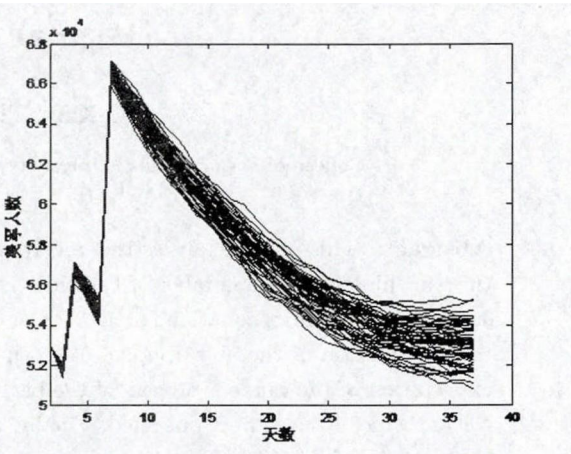


图 5 美军战斗人数随机分布

图 4 给出了美军实际人数、微分方程模拟的美军战斗人数和轨道为 2 时随机微分方程模拟的美军战斗人数. 由图 4 可知, 两种方法的模拟结果与实际值基本相近. 但根据实际情况可知, 战争战斗人数过程不可能是一条确定的轨线, 而是随机的落在区间的某一点上. 如图 5 所示, 轨道 1 到 150 时, 美军战斗人数的随机分布. 因此, 采用随机微分方程的方法来分析战争战斗人数过程, 得到的信息将会更全面.

6 结论

战争战斗人数变化过程中, 存在着许许多多难以预料的因素. 本文以非战斗减员的不确

定性为视角,系统分析和论证了战争战斗人数变化的维纳过程特性;推导的带有随机作用项的战斗人数预测方程是合理的;并对模型进行了分析,分析结果表明随机因素能够影响战争的胜负.最后,运用向前 Euler 法进行了实例分析和模拟计算.实例分析和模拟计算的结果符合理论分析的结果,表明随机微分方程适用于战争的模拟分析.

参考文献

- [1] 郭真真. 随机微分方程的几类数值方法 [D]. 武汉: 华中科技大学, 2013.
- [2] 姜启源. 数学建模 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.
- [3] 田波平, 吴玉东, 张兴华. 应用随机过程 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2012.
- [4] 胡适耕, 黄乘明, 吴付科. 随机微分方程 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [5] Berntksendal. Stochastic Differential Equations[M]. Berlin: Springer, 2011.
- [6] 王鹏飞, 郭忠海, 殷凤王, 娜薇, 小林. 线性随机微分方程多步法的稳定性 [J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(1): 269-272.
- [7] 徐敏, 胡良剑, 丁永生, 胡盈, 周林峰. 随机微分方程数值解在泄洪风险分析中的应用 [J]. 数学的实践与认识, 2006, 36(9): 153-157.
- [8] Kloeden P E. Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

A model of Stochastic Differential Equations for the Regular Warfare

LIU Xing, TIAN De-sheng

(College of Science, Hubei University of Technology, Wuhan 430068, China)

Abstract: This paper analyzes the uncertainty factors in the number of two sides fight in the war, illustrates the number of two sides is a random process, and establishes a model of stochastic differential equation for the regular war. According to the Itô differential equation, the Itô solution of the above model of stochastic differential equations is derived, and the expectation of the random process of the battle is calculated, and the criterion of predicting the outcome of the war are obtained. Finally, taking the war in the sulfur Island for example, the analysis of the probability of the victory or defeat of the United States and Japan and the numerical simulation are given.

Keywords: regular warfare; Itô calculus; stochastic differential equations; Euler method