

常微分方程在数学建模中的应用之战争模型

高瑜 高艺 王伟

本文详细介绍了以微分方程为基础的正规战争、游击战争、混合战争等三种战争模型的建立,求解,得出三种战争的胜负与初始兵力的关系。

1 引言

微分方程作为数学学科的一个中心学科,经过三百余年的不断发展,不论在求解方法上还是在定性理论分析方面日臻完善,使得微分方程模型具有极大的普遍性、有效性与非常丰富的数学内涵。在高等数学教学中,常微分方程也在不断的被研究与探索,并且融入数学建模思想提高学生的学习兴趣,在现实世界中,能够通过建立微分方程模型研究的实际问题非常之多。如物理学中的振动现象、化学中物质间反应的酶促作用、生态学中单种群的增长模型、多种群间相互作用的数学模型、经济学中研究经济规律的动态模型、艾滋病防治的数学模型、传染病模型与战争模型。本文以战争模型为例做简要研究。

第一次世界大战 Lanchester 提出预测战役结局的模型,战争分为正规战争,游击战争,混合战争三种类型。为了便于分析,本文只考虑双方兵力多少和战斗力强弱,并假设兵力因战斗及非战斗减员而减少,因增援而增加,战斗力与射击次数及命中率有关。

2 模型分析

设一场战争中有甲乙两方部队。甲方的兵力为 $x(t)$ (初始兵力 $x(0) = x_0$), 增援率为 $u(t)$, 乙方兵力为 $y(t)$ (初始兵力 $y(0) = y_0$), 增援率为 $v(t)$ 。假设每方战斗减员率取决于双方的兵力和战斗力,且每方非战斗减员率与本方兵力成正比。即有

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, y) - \alpha x + u(t), & \alpha > 0 \\ \dot{y}(t) = g(x, y) - \beta y + v(t), & \beta > 0 \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 f, g 取决于战争类型。下面具体分析三种:

2.1 正规战争

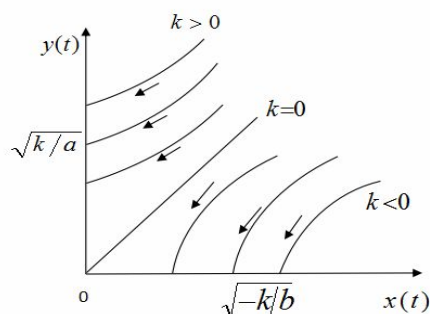
若双方均以正规部队作战,甲方战斗减员率只取决于乙方的兵力和战斗力,则 $f(x, y) = ay$ (其中 a 为乙方每个士兵的杀伤率), $a = r_y/p_y$, (r_y 为射击率, p_y 为命中率), $g(x, y) = -bx$, $b = r_x/p_x$, 代入 (1) 式得:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ay - \alpha x + u(t) \\ \dot{y}(t) = -bx - \beta y + v(t) \end{cases} \quad (2)$$

假设没有增援,忽略非战斗减员,则 (2) 式可简化为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ay \\ \dot{y}(t) = -bx \end{cases} \quad (3)$$

由方程 (3) 得: $ay^2 - bx^2 = k$, 代入初值得, $k = ay_0^2 - bx_0^2$, 此方程为双曲线, 如下图:



若 $k > 0$ 可得: 当 $x = 0$ 时 $y > 0$, 乙方胜利。同理 $k < 0$ 时甲方胜利, $k = 0$ 时平局。

2.2 游击战争模型

假设双方都用游击部队作战,甲方战斗减员率还随着甲方兵力的增加而增加,

则 $f(x, y) = cxy$, (c 为乙方每个士兵的杀伤率), $c = r_y/p_y$, (r_y 为射击率, p_y 为命中率), $p_y = s_{ry}/s_x$ (s_x 为甲方活动面积, s_{ry} 为乙方的射击有效面积)。

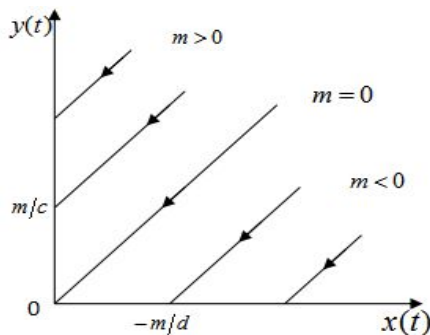
$g(x, y) = -dxy$, $d = r_x/p_x$, $p_x = s_{rx}/s_y$ 。

假设没有增援,忽略非战斗减员,则由 (1) 式可得

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -cxy \\ \dot{y}(t) = -dxy \end{cases} \quad (4)$$

由方程 (4) 可得: $cy - dx = m$, 代入初值得:

$m = cy_0 - dx_0$ 。此方程为直线, 如下图:



(下转第 86 页)

3 基于 FiF 口语训练系统的口语模仿学习策略

根据学生在口语模仿学习中遇到的问题,并利用 FiF 在口语学习中的优势,笔者初步探索出基于 FiF 口语训练系统的口语模仿学习策略。

3.1 明确口语模仿练习的目的。由于不同学生的口语能力存在较大差异,因此在学生运用 FiF 进行口语模仿练习前,老师要通过模拟测试等方式来让学生明确自己在不同阶段进行口语练习的目的。主要的目的包括:1)掌握音标的读法,区别不同音素的发音,并能用音标正确拼读单词;2)掌握在朗读句子中的连读、重读、弱读、爆破和省音等朗读技巧;3)在不同场景的对话中,能使用恰当的语调和节奏。明确了自己的学习目的,学生才能有针对性的进行练习。

3.2 根据学习者的学习目的,FiF 提供了体系完整的口语模仿学习内容和方法。学生可以根据自己目前的口语水平选择适合自己的学习内容,并依照相应的方法进行练习。针对发音不好的学生,FiF 提供了最基础的语音训练,包括“音标训练”和“中式发音之鉴”(即把英语发音同与其相近的中文发音作区分)。这一阶段,学生主要通过观看讲解视频和重复模仿的方法达到提高发音准确度的目的。在掌握了单词的基本发音之后,就能进一步训练句子的朗读技巧。学生可以选择 FiF 口语训练系统中的“朗读技巧训练”进行练习。这一阶段主要通过连读、重读、弱读、爆破和省音等技巧的训练达到提升朗读流利度的目的,训练的方法主要是跟读。在学生掌握了一些句子发音的技巧后,就可以选择一个主题对话(如“生活类”口语练习),进行跟读练习或角色扮演

的练习。学生在这一阶段主要通过在真实场景中的口语对话练习,熟练和学习发音技巧的实际运用,同时也能学习地道的语言表达,提升交际的灵活、适切性。

3.3 基于科大讯飞的智能语音技术,FiF 能够为学生的口语练习提供较准确和具有针对性的智能即时评测反馈和语音、语义、能力全面诊断。在学生进行单词和句子朗读练习时,智能打分系统会从准确度、流利度和完整度这几个方面进行诊断和评价,并在练习结束时立即给予学生练习的分数,包括总体得分和每个方面的得分。不同的发音问题会用不同的颜色进行标示:单词标绿色表示读得很棒;橙色表示还可以;红色表示发音有误或者不清楚;黑色表示漏读。老师在布置练习的时候可以规定每句话(或每个练习)的总得分不得低于某规定分数(如 80 分),学生在练习时,如果单句的得分低于规定分数(如只得了 75 分),就可以参考准确度、流利度和完整度这三个维度的具体分数,从而进行有针对的训练和纠正。

4 结语

综上所述,基于 FiF 口语训练系统的口语模仿学习策略能有效地帮助学生进行有目标性、针对性的训练,并提高学生的英语口语水平。然而在目前实际教学中,还存在一些亟待解决的问题。但我们相信,随着科技的日益进步以及老师和学生的共同努力,基于 FiF 的学习策略一定能在英语口语教学中发挥更大的作用。

(作者单位:乐山师范学院)

(上接第 84 页)

若 $m > 0$ 可得:当 $x = 0$ 时 $y > 0$, 乙方胜利。同理 $m < 0$ 时甲方胜利, $m = 0$ 时平局。

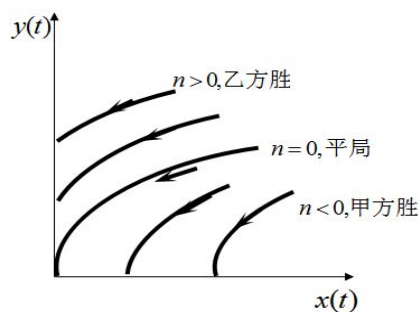
2.3 混合战争模型

假设甲方为游击部队,乙方为正规部队,则 $f(x, y) = cxy$, (c 为乙方每个士兵的杀伤率), $c = r_y / p_y$, (r_y 为射击率, p_y 为命中率), $p_y = s_{ry} / s_x$ (s_x 为甲方活动面积, s_{ry} 为乙方的射击有效面积), $g = -bx$, $b = r_x / p_x$, 假设没有增援,忽略非战斗减员,则

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -cxy \\ \dot{y}(t) = -bx \end{cases} \quad (5)$$

由方程(5)可得: $cy^2 - 2bx = n$, 代入初值得:

$n = cy_0^2 - 2bx_0$ 。此方程为抛物线,如下图:



若 $n > 0$ 可得:当 $x = 0$ 时 $y > 0$, 乙方胜利。同理 $n < 0$ 时, 甲方胜利, $n = 0$ 时平局。

3 小结

常微分方程在数学建模中有广泛应用,本文对战争模型作了简单研究,得到三种战争模型的特点,模型没有研究兵力的自身减员和自然因素,还可以做进一步研究。数学建模是为了解决生活中的实际问题,常微分方程的出现,让很多模型的到行之有效的解法,从而解决了很多问题,也使得数学研究从理论转向实践。

基金项目:陕西铁路工程职业技术学院教改基金(17GY021),陕西省教育厅科学研究项目(17JK0170)。

(作者单位:陕西铁路工程职业技术学院)