例说数学建模在战争定量评估中的应用

陈庆文　装甲兵技术学院基础部数学教研室

摘要：本文以局部歼灭战为例，采用数学建模的方法，探讨了可分离变量微分方程模型在战争定量评估中的应用。

关键词：微分方程；兰彻斯特战争理论；数学建模；应用

数学与战争的关系源远流长，可以追溯到古希腊时期。在第二次布匿战争中，为了抵御罗马帝国的入侵，伟大的数学家阿基米德制造了一批特殊机械，能向敌人投射滚滚巨石；设计了一种起重机，能把敌人的战舰掀翻；架设了一种大型抛物面镜，用日光烧毁敌人战船。敌军统帅马塞拉斯惊呼："我们在同数学家打仗，他比神话中的百手巨人还厉害！"从此，开启了数学在战争中应用的先河。

本文以局部歼灭战为例，按照兰彻斯特战斗动态理论，以建立数学模型的方式，探讨可分离变量的微分方程模型在战争定量评估中的应用。

一、可分离变量的微分方程

（一）定义

可分离变量的微分方程就是指在一个微分方程中，其所含有的变量是可以实现彻底分离的，这样的微分方程就称为可分离变量的微分方程。

（二）计算方法

求解方程先判断，变量分离是关键。其次两端来积分，最后求解并化简。

二、在战争定量评估中的应用

兵者，国之大事，生死之地，存亡之道，不可不察也。作为军人，我们要精准描述战争，定量预测战争，最后旨在打赢战争。

（一）问题提出

在某次局部歼灭战当中，参战的甲乙双方兵力分别为100人和400人，战斗力（平均每一个战士给对手的杀伤率）分别为0.8和0.2，假设没有增援，没有非战斗减员，请定量的说明战争的胜负情况。

（二）问题分析

决定一场战争胜负的因素有很多，比如：兵员数量、战斗力的强弱、武器性能、指挥艺术、后勤保障、地理位置、气候条件、经济条件、政治形势、社会制度等等。但所有这些都是以损耗对方的兵力为目的的。战争的最后都是剩余兵力的较量。

兵力的变化由三部分组成：兵力增援、战斗减员和非战斗减员。我们设兵力增援为Δz，战斗减员为Δp，非战斗减员为Δq。于是兵力变化量$\Delta\omega=\Delta z-\Delta p-\Delta q$，兵力变化率$\frac{d\omega}{dt}=\frac{dz}{dt}-\frac{dp}{dt}-\frac{dq}{dt}$

即兵力变化率＝兵力增援率－战斗减员率－非战斗减员率。

（三）建立模型

设 时刻甲乙双方的兵力分别为$x(t)$ $y(t)$，每个士兵的战斗力分别为a,b，增援率为$u(t)$ $v(t)$，战斗减员率为$f(x,y)$ $g(x,y)$，非战斗减员率为$\alpha(x)$ $\beta(y)$，初始兵力x_0,y_0。

一般战争模型为

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=u(t)-f(x,y)-\alpha(x)\\ \frac{dy}{dt}=v(t)-g(x,y)-\beta(y)\\ x(0)=x_0,y(0)=y_0\end{cases}$$

由于问题中假设没有增援，没有非战斗减员，而且，甲乙双方的战斗减员是由对方杀伤造成的，因此增援率$u(t)=0,v(t)=0$，非战斗减员率$\alpha(x)=0,\beta(y)=0$，战斗减员率$f(x,y)=f(y)$ $g(x,y)=g(x)$。于是一般战争模型变为兰彻斯特模型

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-f(y)\\ \frac{dy}{dt}=-g(x)\\ x(0)=x_0,y(0)=y_0\end{cases}$$

甲方的战斗减员率是由乙方每个士兵的战斗力和乙方的人数决定的。

即$f(y)=by(t)$，$g(x)=ax(t)$代入模型得$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-by\\ \frac{dy}{dt}=-ax\\ x(0)=x_0,y(0)=y_0\end{cases}$

将模型中第二个式子除以第一个式子，得到一个可分离变量的微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{ax}{by}$，初始条件为$x(0)=x_0,y(0)=y_0$。

（四）模型求解

根据计算步骤，第一步变量分离：$bydy=axdx$

第二步两端积分：$\int bydy=\int axdx$

第三步求解并进行化简整理：$by^2-ax^2=by_0^2-ax_0^2=K$

（五）战局分析

根据函数的图像可以看出，$K>0$时，乙方获胜；$K<0$时甲方获胜；$K=0$时参战双方平局。

根据问题所给出的数据：$x_0=100$人，$y_0=400$人，$a=0.8,b=0.2$，可知$K=24000>0$，所以看似平局的战争，结局是人多的乙方获胜。这正是"集中优势兵力打局部歼灭战的数学依据"。解放军从弱到强的过程，对兰切斯特模型作了完美诠释，对人海战术的高明使用，并没有使弱势的土八路被消灭掉，而是越战越强。在面对面的战斗中，如果一方的战斗力一定，数量增加一倍，另一方要想吃掉此方，需要增加四倍的战斗力。

（六）模型评价

决定战争的因素很多，而且这个模型限制了许多条件，如果考虑增援、考虑非战斗减员、考虑武器装备效能等等，这个模型还有很大的改进空间。

实际上，在战争发生的过程中，没有时间也没有可能这样"精打细算"，我们旨在战争的谋划过程当中，在平时的教学实践当中，发挥数学的微薄之力。