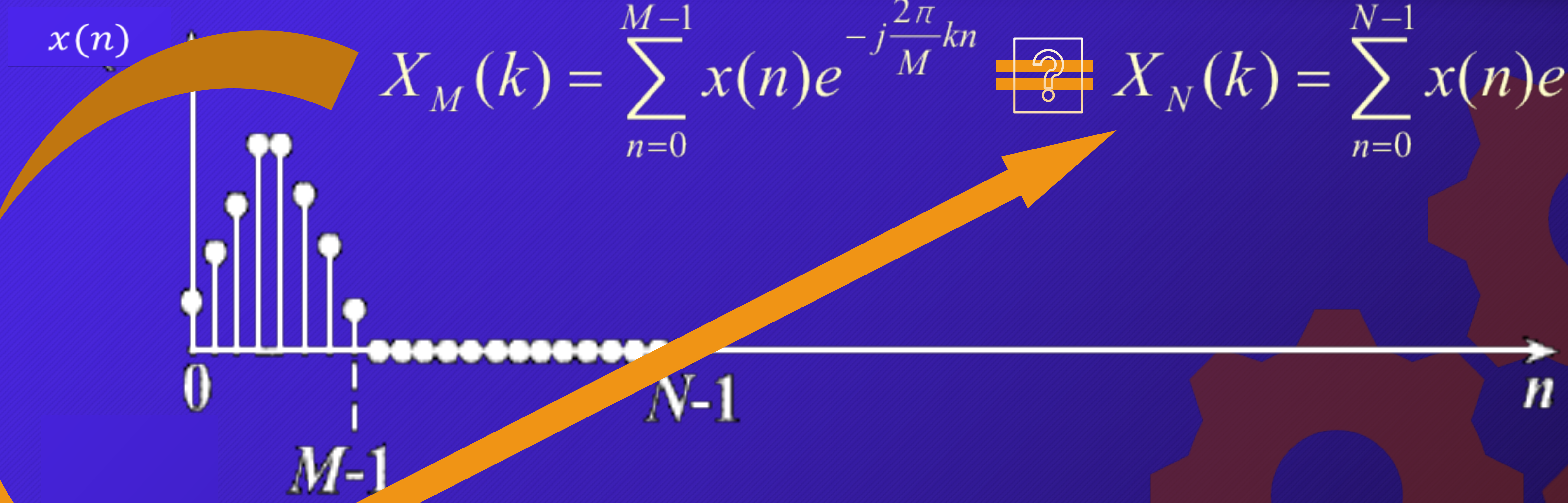
数字信号处理

知识强化与补充

蔡超

1、时域信号补零后DFT对应频域信号的插值

$$X_M(k)=\sum_{n=0}^{M-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} \overset{?}{=} X_N(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$



$$X_M(e^{jw})=\sum_{n=0}^{M-1}x(n)e^{-jwn} \overset{?}{=} X_N(e^{jw})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jwn}$$

用频域采样$X(k)$表示$X(z)$的内插公式

M点有限长序列$x(n)$，频域N点等间隔抽样，且

$$N \geq M$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{M-1} x(n) z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}\right] z^{-n}$$

$$=\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\left[\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-nk} z^{-n}\right]$$

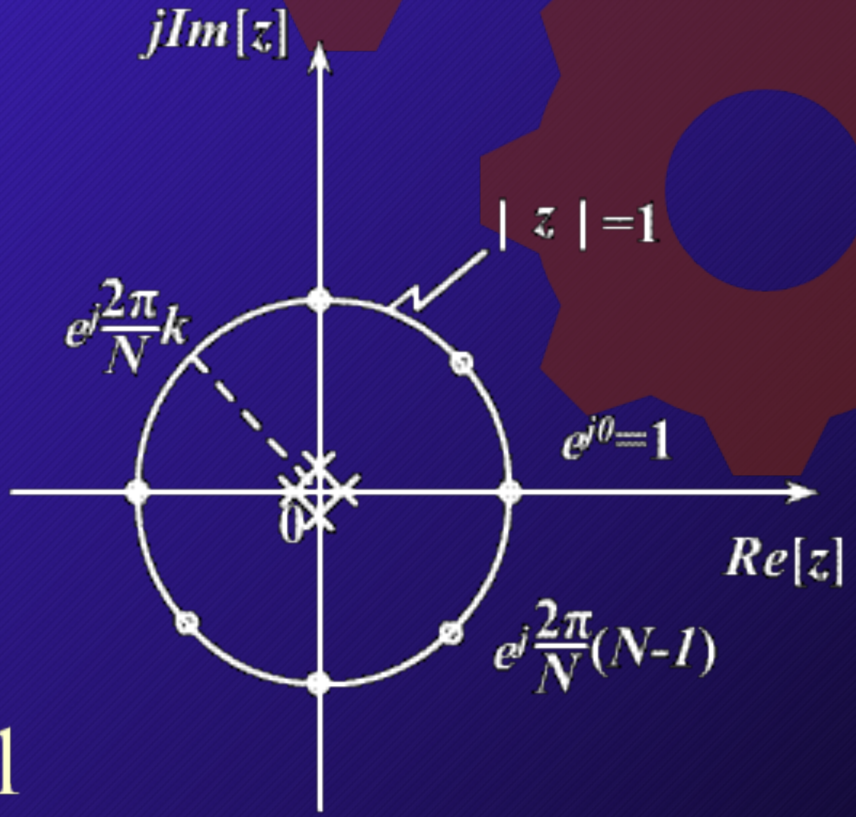
$$=\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1-W_N^{-Nk} z^{-N}}{1-W_N^{-k} z^{-1}}=\frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1-W_N^{-k} z^{-1}}$$

内插公式：$X(z)=\dfrac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\dfrac{X(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$

内插函数：$\Phi_k(z)=\dfrac{1}{N}\cdot\dfrac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$

则内插公式简化为：

$$X(z)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi_k(z)$$



零点：$z=e^{j\frac{2\pi}{N}r}$，$r=0,1,\ldots,N-1$

极点：$z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}$

用频域采样 $X(k)$ 表示 $X(e^{j\omega})$ 的内插公式

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\Phi_k(e^{j\omega})$$

$$\Phi_k(e^{j\omega}) = \Phi_k(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\left[N\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)} e^{j\frac{k\pi}{N}(N-1)} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

内插函数：

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$$

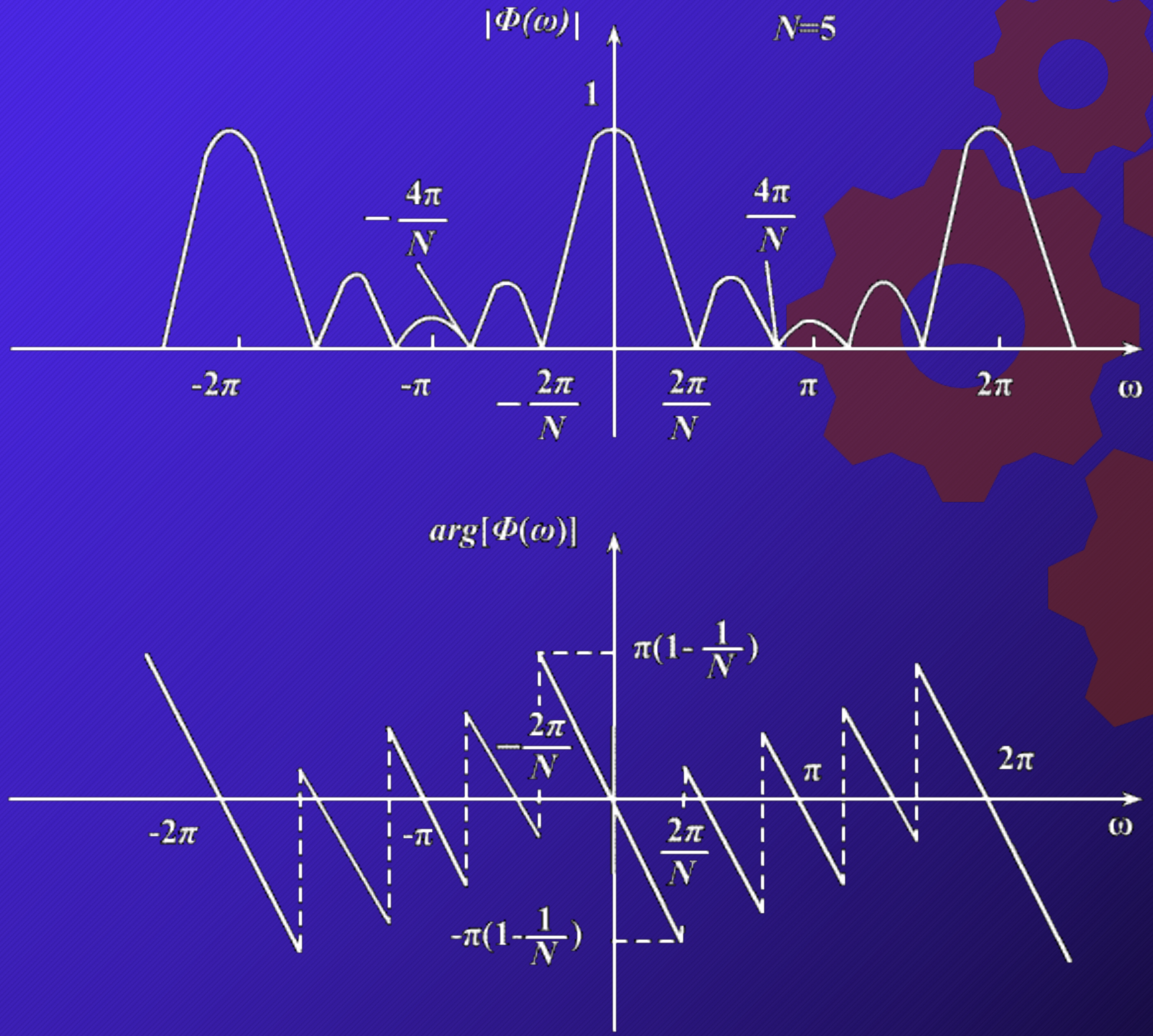
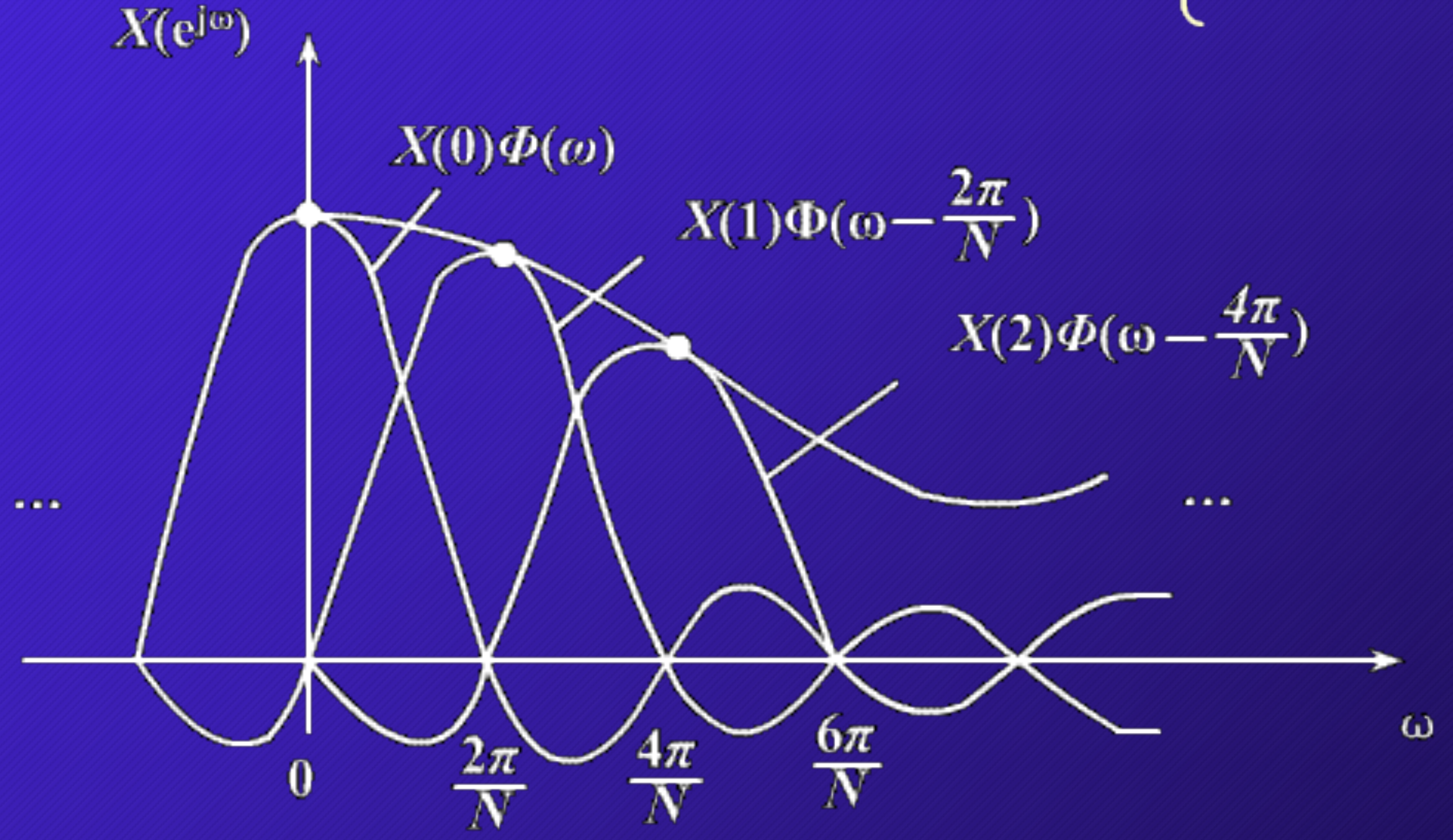


图3-13 插值函数 $\Phi(\omega)$的幅度特性与相位特性(N=5)

内插公式：

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

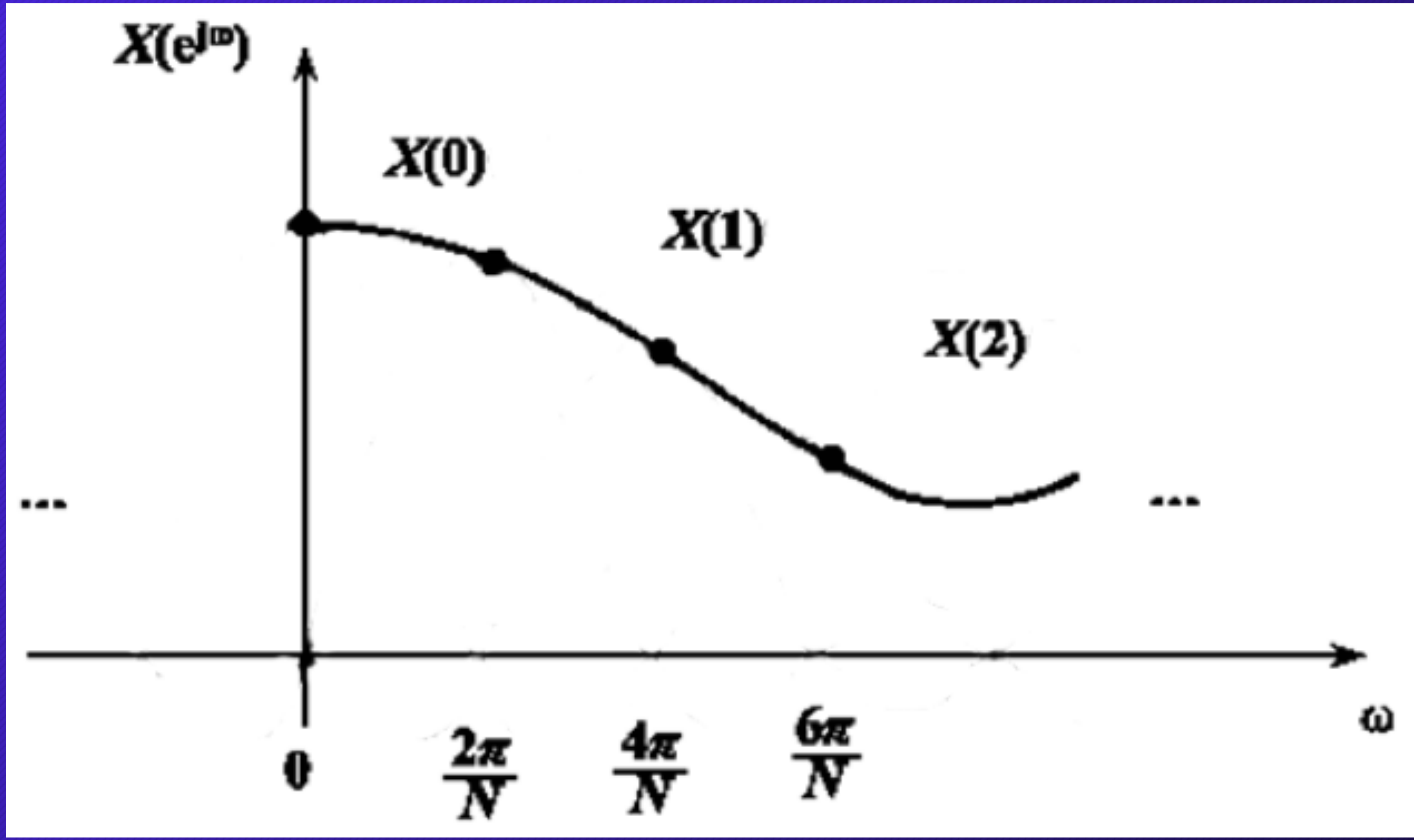
$$\Phi(\omega-\frac{2\pi}{N}k)=\begin{cases}1 & \omega=\frac{2\pi}{N}k=\omega_k\\ 0 & \omega=\frac{2\pi}{N}i=\omega_i \quad i\neq k\end{cases}$$



内插公式：

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M-1} X(k)\Phi(\omega - \frac{2\pi}{M}k)$$

$$X_N(n) = X_M(e^{jw})\Big|_{w=-2\pi n/N}$$



2、共轭对称性

- 复数共轭

设：$X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$，则

$$FT[x^*(n)] = X^*(e^{-j\omega})$$

$$FT[x^*(-n)] = X^*(e^{j\omega})$$

两个实部相等，虚部互为相反数的复数互为共轭复数(conjugatecomplexnumber)

两头牛背上的架子称为轭，轭使两头牛同步行走。共轭即为按一定的规律相配的一对

2022 2:59:43 PM

任意序列可表示成 $x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ 之和:

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

其中：$x_e(n) = x_e^*(-n) = 1/2[x(n) + x^*(-n)]$

$$x_o(n) = -x_o^*(-n) = 1/2[x(n) - x^*(-n)]$$

定义：

圆周共轭对称序列：

$$x_{ep}(n) = \tilde{x}_e(n)R_N(n)$$

$$= 1/2[x((n))_N + x^*((N-n))_N]R_N(n)$$

圆周共轭反对称序列：

$$x_{op}(n) = \tilde{x}_o(n)R_N(n)$$

$$= 1/2[x((n))_N - x^*((N-n))_N]R_N(n)$$

则任意有限长序列：

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$$

同理： $X(k)=X_{ep}(k)+X_{op}(k)$

其中： $X_{ep}(k)=X_{ep}^{*}((N-k))_N R_N(k)$

$$=1/2[X((k))_N+X^{*}((N-k))_N]R_N(k)$$

$$X_{op}(k)=-X_{op}^{*}((N-k))_N R_N(k)$$

$$=1/2[X((k))_N-X^{*}((N-k))_N]R_N(k)$$

纯实序列的共轭对称性

序列		DFT
$x(n)=\mathrm{Re}[x(n)]$	$\Leftrightarrow$	$X_{ep}(k)=X(k)$
$j\,\mathrm{Im}[x(n)]=0$	$\Leftrightarrow$	$X_{op}(k)=0$
$x_{ep}(n)$	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Re}[X(k)]$
$x_{op}(n)$	$\Leftrightarrow$	$j\,\mathrm{Im}[X(k)]$

圆周共轭对称序列：

$$x_{ep}(n)=\tilde{x}_e(n)R_N(n)$$

$$=1/2[x((n))_N+x^*((N-n))_N]R_N(n)$$

频率域： $X(k)=X_{ep}(k)+X_{op}(k)$

纯虚序列的共轭对称性

序列		DFT
$\mathrm{Re}[x(n)]=0$	$\Longleftrightarrow$	$X_{ep}(k)=0$
$x(n)=j\,\mathrm{Im}[x(n)]$	$\Longleftrightarrow$	$X_{op}(k)=X(k)$
$x_{ep}(n)$	$\Longleftrightarrow$	$\mathrm{Re}[X(k)]$
$x_{op}(n)$	$\Longleftrightarrow$	$j\,\mathrm{Im}[X(k)]$

例：设$x_1(n)$和$x_2(n)$都是N点的实数序列，试用一次N点DFT运算来计算它们各自的DFT:

$$DFT[x_1(n)] = X_1(k) \qquad DFT[x_2(n)] = X_2(k)$$

解：利用两序列构成一个复序列

$$w(n) = x_1(n) + jx_2(n)$$

则

$$W(k) = DFT[w(n)] = DFT[x_1(n) + jx_2(n)]$$

$$= DFT[x_1(n)] + jDFT[x_2(n)]$$

$$= X_1(k) + jX_2(k)$$

由$x_1(n)=\mathrm{Re}[w(n)]$得

$$X_1(k)=DFT[x_1(n)]=DFT\{\mathrm{Re}[w(n)]\}=W_{ep}(k)$$
$$=\frac{1}{2}[W((k))_N+W^*((N-k))_N]R_N(k)$$

由$x_2(n)=\mathrm{Im}[w(n)]$得

$$X_2(k)=DFT[x_2(n)]=DFT\{\mathrm{Im}[w(n)]\}=\frac{1}{j}W_{op}(k)$$

$$=\frac{1}{2j}[W((k))_N-W^*((N-k))_N]R_N(k)$$

3、因果系统与系统行数极点零点分布

例 2.26 设一个线性非移变系统的系统函数为

$$H(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$

试画出极-零点分布图，并确定 $H(z)$ 的收敛域和稳定性。

因果稳定系统

我们知道,一线性移不变系统稳定的充要条件是h(n)必须满足绝对可和：$\sum|h(n)|<\infty$。

z变换H(z)的收敛域由满足$\sum|h(n)z^{-n}|<\infty$的那些z值确定。如单位圆上收敛，此时则有$\sum|h(n)|<\infty$ ，即系统稳定；也就是说，收敛域包括单位圆的系统是稳定的。

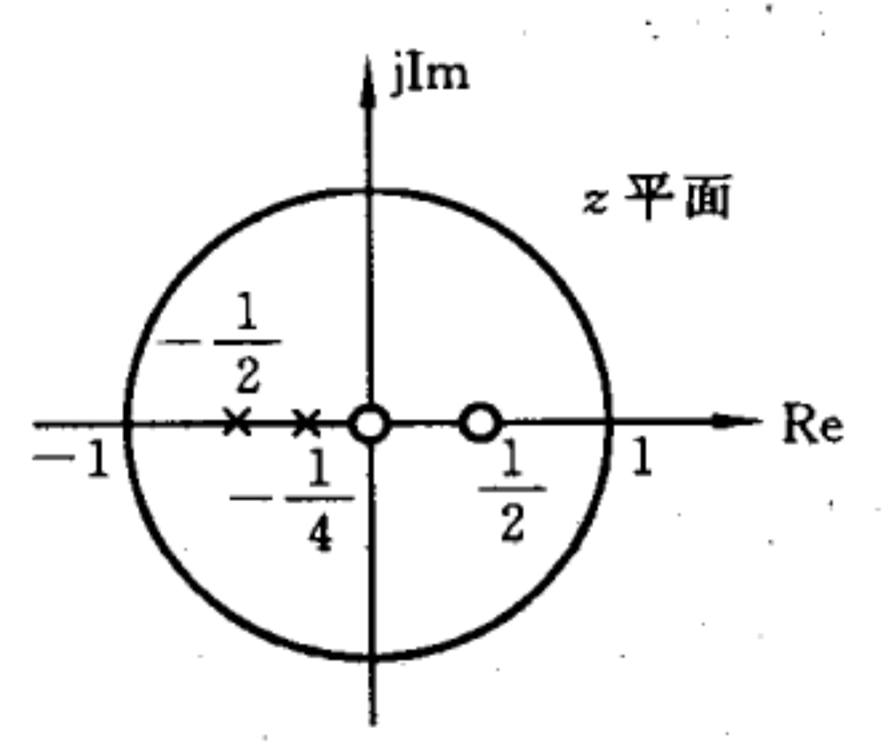
因果系统的单位抽 $\lim\limits_{z\to\infty} H(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}+\cancel{\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} h(n)z^{-n}}$

R+<|z|≤∞；而因果稳定系统的系统函数收敛域包含1≤|z|≤∞，也就是说,其全部极点必须在单位圆内。

理解教材p74例2.26

解　对 $H(z)$ 的分母进行因式分解得

$$H(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}=\frac{z\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\left(z+\frac{1}{4}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$



极点为 $z_1=-\frac{1}{4}$，$z_2=-\frac{1}{2}$；零点为 $z_1=0$，$z_2=\frac{1}{2}$，如图 2.54 所示。

(1) 若收敛域是极点 $z_2=-\frac{1}{2}$ 所在的圆的外部区域，且 $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=1$，那么系统是因果的，

系统函数的收敛域为

$$\left|-\frac{1}{2}\right|<|z|\leqslant\infty$$

因为该收敛域包含了单位圆，所以系统是稳定的。

$z\to\infty$, $H(z)$ 的极限存在说明收敛到 $H(z)$ 的级数不含有正幂项，所以H(z)是因果的。

(2) 若收敛域选的是极点 $z_1=-\frac{1}{4}$ 所在的圆的内部区域，且 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\left(z+\frac{1}{4}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)}=0$，那么系统是逆因果的，系统函数的收敛域为

$$0\leqslant|z|<\left|-\frac{1}{4}\right|$$

因为收敛域没有包含单位圆，所以系统是不稳定的。

(3) 若收敛域是极点 $z_1=-\frac{1}{4}$ 与 $z_2=-\frac{1}{2}$ 所在的两个圆之间的环域，即

$$\left|-\frac{1}{4}\right|<|z|<\left|-\frac{1}{2}\right|$$

则因为单位圆没有包含在收敛域中，所以系统是不稳定的。

$z\to 0$, $H(z)$的极限存在说明收敛到$H(z)$的级数不含有负幂项，所以H(z)是逆因果的。

这里只有求出$h(n)$才可判定因果性