人工智能导论

主讲：王 博

人工智能与自动化学院

符号主义－目录

- 3.5 证据理论
- 3.6 模糊推理

D-S证据理论的发展历史

- Dempster在1967年的文献《多值映射导致的上下文概率》[1] 中提出上、下概率的概念。
- 在文献《贝叶斯推理的一般化》[2] 中进一步探讨了不满足可加性的概率问题以及统计推理的一般化问题。
- Shafer在Dempster研究的基础上提出了证据理论，把Dempster合成规则推广到更为一般的情况，并于1976年出版《证据的数学理论》[3]

主要参考文献

- [1] Dempster, A. P. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, 1967, 38(2): 325-339. 【提出证据理论的第一篇文献】
- [2] Dempster, A. P. Generalization of Bayesian Inference. *Journal of the Royal Statistical Society*. Series B 30, 1968:205-247.
- [3] Shafer, G. ***A Mathematical Theory of Evidence***. Princeton University Press, 1976. 【证据理论的第一本专著，标志其正式成为一门理论】
- [4] Barnett, J. A. Computational methods for a mathematical theory of evidence. In: *Proceedings of 7th International Joint Conference on Artificial Intelligence(IJCAI-81)*, Vancouver, B. C., Canada, Vol. II, 1981: 868-875. 【第一篇将证据理论引入AI领域的标志性论文】

为什么需要证据理论

- 应用：多分类器融合、不确定性推理、专家意见综合、多准则决策、模式识别、综合诊断等领域

- **各个领域遇到的不确定性证据和证据冲突问题**
  - 自动驾驶领域中，多传感器信息融合问题
  - 网络安全入侵检测领域中，多源日志和多源告警的融合决策问题
  - 数据分析中，不同的分类器的输出结果的综合决策问题
  - etc.

为什么需要证据理论

- 举例：发生抢劫案，警方判定罪犯肯定是嫌疑人A、B、C中的一个，但不知道是哪一个。
  - 两个证人张三、李四只是看到了部分过程，有不同的判断，用概率表示。
  - 共三种情况：A作案，B作案，C作案，具体如下：

假设	张三认为	李四认为
A作案	0.86	0.02
B作案	0.13	0.90
C作案	0.01	0.08

为什么需要证据理论

- **DS证据理论用途：根据不同证人提供的概率，给出每种假设的综合概率，起到了不同数据源数据融合的作用。**

- 比如通过DS理论综合得出结果如下（B的嫌疑更大）：

假设	综合概率
A作案	0.1274
B作案	0.8667
C作案	0.0059

证据理论基本概念

识别框架

- 状态集合X：例：$X = \{a, b, c\}$
  - X的幂集
    - 原集合中所有的子集（包括全集和空集）构成的集族
    - 记为：2^X：$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- 基本概率分配(Basic Probability Assignment, BPA)：
  - 给2^X的每一个元素（假设）分配一个概率（测度）
  - 称为mass函数，表示相信的程度(a degree of belief)
  - 满足：

$$m(\emptyset) = 0,$$

$$\sum_{A \subseteq X} m(A) = 1$$

使得m(A)>0的A称为**焦元** (Focal elements)

证据理论基本概念

- 例：探测信号灯，可能状态：X: {Green, Yellow, Red}
  - 假设：2^X: {Ø,{G},{Y},{R},{G,Y},{Y,R},{G,R},X}

Hypothesis	Mass
Null	0
Green	0.15
Yellow	0.25
Red	0.35
Green or Yellow	0.04
Yellow or Red	0.06
Green or Red	0.05
Any	0.1

证据理论基本概念

- 信任函数(Belief function)，常记为Bel()

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B), \qquad \forall A \subseteq X$$

  - 如何理解$B \subseteq A$：A是集合，B是A的所有子集，$B \in 2^X$
  - It is the amount of belief that directly supports either the given hypothesis (A) or a more specific one (B, subset of A)
  - 信任函数表达了客观概率的下限，下限函数

证据理论基本概念

- 似真(然)函数(Plausibility function)，常记为Pl()

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B)$$

$$= 1 - Bel(\neg A) \quad \forall A \subseteq X$$

交集：与集合A有公共元素

- 所有与假说A存在交集的mass函数之和
- 1减去所有与A不存在交集的mass函数之和
- 似真函数表示客观概率的上限，it “could possibly be the true state of the system” up to that value, because **there is only so much evidence** that contradicts that hypothesis.

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

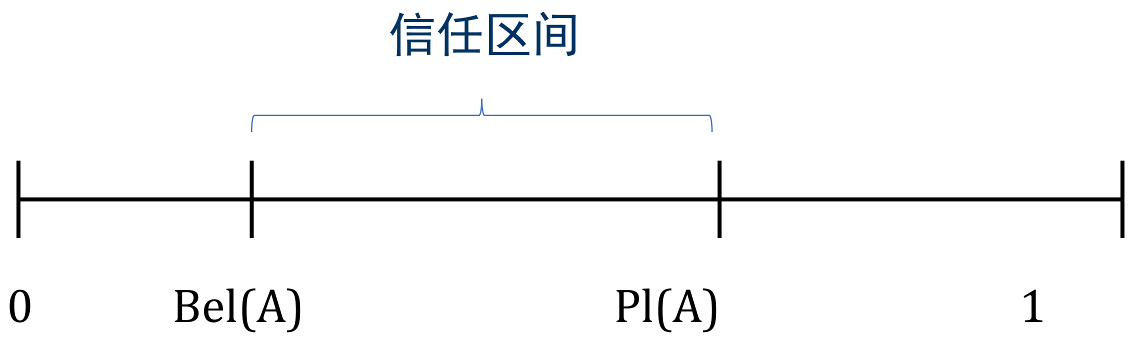
证据理论基本概念

- 例：探测信号灯，可能状态：X: {Green, Yellow, Red}
  - 假设：2^X: {∅,{G},{Y},{R},{G,Y},{Y,R},{G,R},X}

Hypothesis	Mass	Belief	Plausibility
Null	0	0	0
Green	0.15	0.15	0.34
Yellow	0.25	0.25	0.45
Red	0.35	0.35	0.56
Green or Yellow	0.04	0.44	0.65
Yellow or Red	0.06	0.66	0.85
Green or Red	0.05	0.55	0.75
Any	0.1	1.0	1.0

证据理论基本概念

- 信任区间：对假设A的信任区间$[Bel(A), Pl(A)]$



- 表示对某个假设的确认程度 (一种区间不确定)

以上概念了解即可！

Dempster合成规则

- 例子：共三种情况：A作案，B作案，C作案
  - 令m_1, m_2分别标记两组mass函数

假设	张三认为 m_1	李四认为 m_2
A作案	0.86	0.02
B作案	0.13	0.90
C作案	0.01	0.08

  - 如何得到：

假设	综合概率
A作案	0.1274
B作案	0.8667
C作案	0.0059

Dempster合成规则

- Dempster合成规则 (Dempster's combinational rule) 也称证据合成公式，其定义如下：
  - 对于$\forall A \subseteq X$上的两组mass函数m_1, m_2，其对应的Dempster合成规则为：

$$m_1 \oplus m_2(A) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C = A} m_1(B) \cdot m_2(C)$$

  - 其中，K为归一化常数

$$K = \sum_{B \cap C \neq \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C) = 1 - \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C)$$

Dempster合成规则

假设	张三认为 m_1	李四认为 m_2
Adam作案	0.86	0.02
Ben作案	0.13	0.90
Clark作案	0.01	0.08

- 解：首先计算归一化常数K

$$K = \sum_{B \cap C \neq \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C)$$
$$= m_1(Adam) \cdot m_2(Adam) + m_1(Ben) \cdot m_2(Ben) + m_1(Clark) \cdot m_2(Clark)$$
$$= 0.86 \times 0.02 + 0.13 \times 0.90 + 0.01 \times 0.08 = 0.135$$

思考：为什么不考虑如{Adam, Ben}这样的状态?

Dempster合成规则

- 解：其次，关于Adam的组合mass函数：

$$m_1 \oplus m_2(\{Adam\}) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C = \{Adam\}} m_1(B) \cdot m_2(C)$$
$$= \frac{1}{K} \cdot m_1(\{Adam\}) \cdot m_2(\{Adam\})$$
$$= \frac{1}{0.135} \times 0.86 \times 0.02 = 0.1274$$

Dempster合成规则

- 解：关于Ben的组合mass函数：

$$m_1 \oplus m_2(\{\mathrm{Ben}\}) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C = \{Ben\}} m_1(B) \cdot m_2(C)$$

$$= \frac{1}{K} \cdot m_1(\{Ben\}) \cdot m_2(\{Ben\})$$

$$= \frac{1}{0.135} \times 0.13 \times 0.90 = 0.8667$$

Dempster合成规则

- 解：关于Clark的组合mass函数：

$$m_1 \oplus m_2(\{Clark\}) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C = \{Clark\}} m_1(B) \cdot m_2(C)$$

$$= \frac{1}{K} \cdot m_1(\{Clark\}) \cdot m_2(\{Clark\})$$

$$= \frac{1}{0.135} \times 0.08 \times 0.01 = 0.0059$$

Dempster合成规则

- 合成后的mass函数m_{12}

假设	综合概率 m_{12}
Adam作案	0.1274
Ben作案	0.8667
Clark作案	0.0059

- 对于这个简单的实例而言，对于Adam, Ben, Clark的组合mass函数，再求信任函数、似然函数：
  - Bel({Adam}) = 0.1274， Pl({Adam})= 0.1274
  - Bel({Ben}) =0.8667， Pl({Ben})= 0.8667
  - Bel({Clark}) = 0.0059，Pl({Clark})= 0.0059

思考：为什么Bel和Pl相同?

*广义贝叶斯理论的解释

- 当mass函数m中的所有焦元都是单点集（即单个假设集），且这些焦元都满足Bayes独立条件时，Dempster证据合成公式就退化为Bayes公式，所以，
  - ♦ Bayes公式是Dempster证据合成公式的特例。
- 反过来说，
  - ♦ Dempster证据合成公式是Bayes公式的广义化。

条件独立式多随机变量的重要概念。定义如下，若

$$p(a|b,c) = p(a|c). \quad (1)$$

我们就说，a 与 b 关于 c 条件独立。条件独立的符号表示如下：

$$a \perp\!\!\!\perp b \mid c$$

Dempster合成规则

n个mass函数的Dempster合成规则

- 对于∀A⊆Θ，识别框架Θ上的有限个mass函数$m_1, m_2, \ldots, m_n$的Dempster合成规则为：

$$(m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_n)(A) = \frac{1}{K} \sum_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = A} m_1(A_1) \cdot m_2(A_2) \cdots m_n(A_n)$$

- 其中

$$K = \sum_{A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset} m_1(A_1) \cdot m_2(A_2) \cdots m_n(A_n)$$

$$= 1 - \sum_{A_1 \cap \cdots \cap A_n = \emptyset} m_1(A_1) \cdot m_2(A_2) \cdots m_n(A_n)$$

证据理论的冲突：Zadeh悖论

- 如果证据相互矛盾：

假设	张三认为 m_1	李四认为 m_2	合成m_{12}
Adam作案	0.99	0	0.00
Ben作案	0.01	0.01	1.00
Clark作案	0	0.99	0.00

- 这显然违背人们的直觉！

证据理论的冲突：Zadeh悖论

- 增加数据，消解Zadeh悖论：

假设	张三认为 m_1	李四认为 m_2	合成m_{12}
{Adam}	0.98	0	0.49
{Ben}	0.01	0.01	0.015
{Clark}	0	0.98	0.49
Θ ={Adam, Ben, Clark}	0.01	0.01	0.005

- 大家可以自行套公式计算一下

为什么需要证据理论

特性：

- 证据理论基于人们对客观世界的认识，根据人们掌握的证据和知识，对不确定性事件给出不确定性度量。
  - 证据理论使得不确定性度量更切近人们的习惯，易于使用。
- 由于在证据理论中需要的先验数据比概率推理理论中的更为直观、更容易获得，再加上Dempster合成公式可以综合不同专家或数据源的知识或数据，这使得证据理论在专家系统、信息融合等领域中得到了广泛应用。

基于证据理论的推理过程

- 基于证据理论的不确定性推理的步骤：

  （1）建立问题的样本空间Θ

  （2）由经验给出，或者由随机性规则和事实的信度度量计算基本概率分配函数(mass函数)

  （3）将不同来源的mass函数进行组合

  （4）计算所关心子集的信任函数值Bel(A)或似然函数值Pl(A)

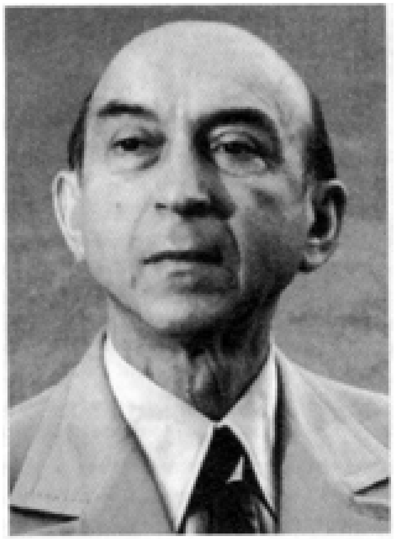
  （5）由信任函数值或似然函数值得出结论

符号主义－目录

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

模糊推理方法

- 1965年，美国学者L.A. Zadeh(UC Berkeley)发表了“fuzzy sets”的论文，首先提出了模糊理论
- 模糊控制以模糊数学为基础，运用语言规则知识表示和计算机技术，由模糊推理进行决策，是人工智能的一个重要分支



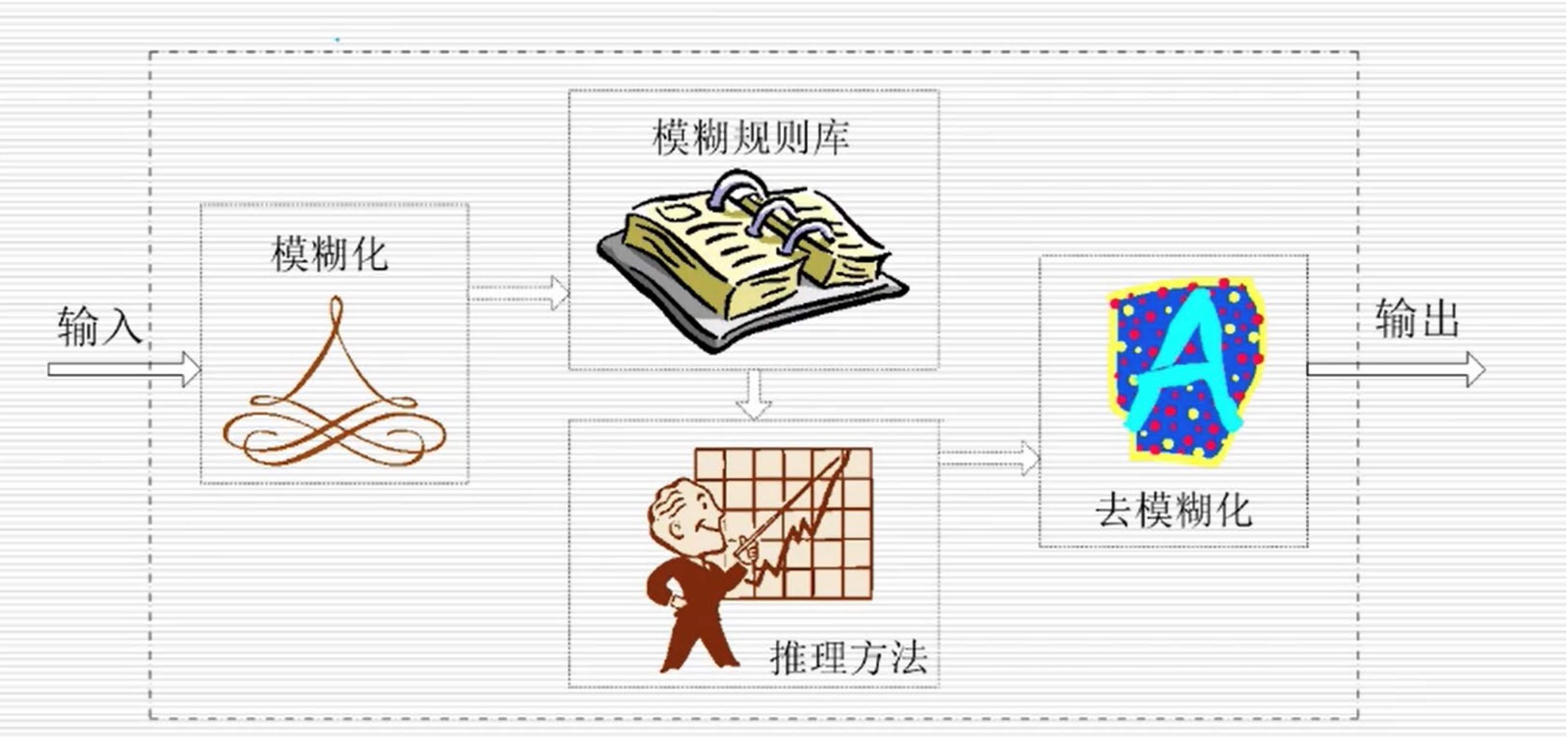
Lotfi A. Zadeh

https://www.sciencedirect.com › article › pii · 翻译此页 加入黑名单

Fuzzy sets - ScienceDirect

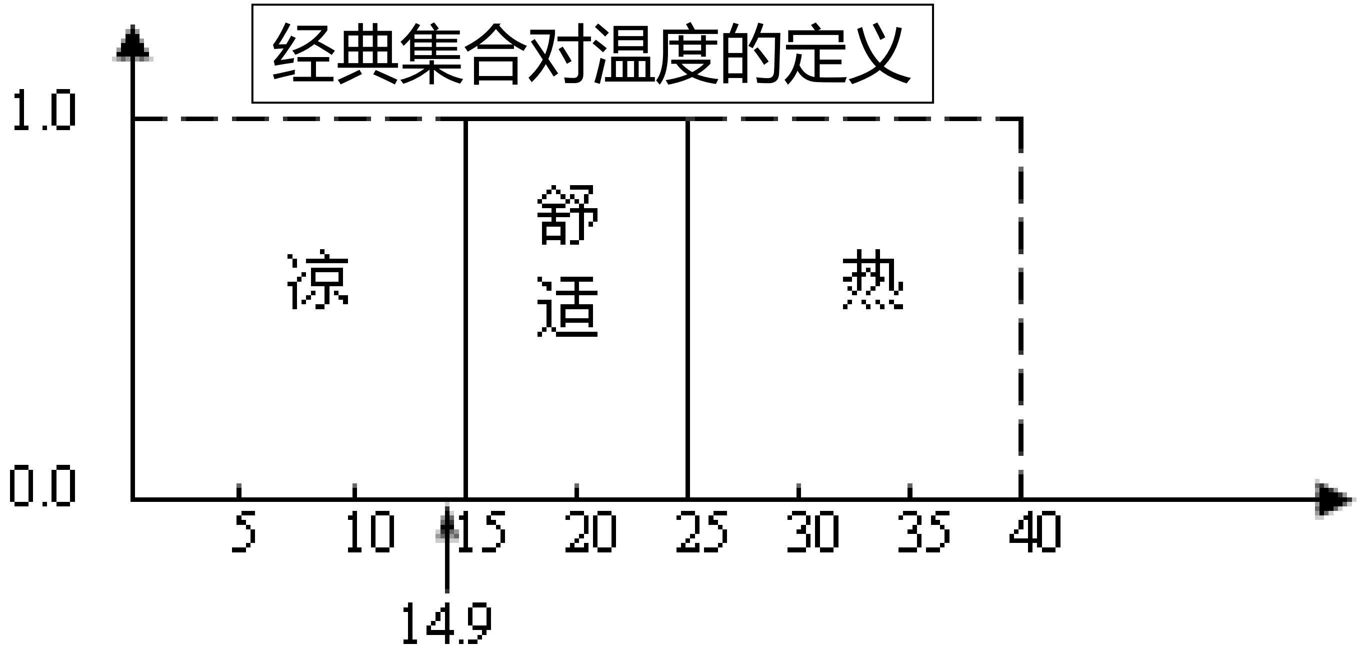
作者：LA Zadeh · 1965 · 被引用次数：106705 — A fuzzy set is a class of objects with a continuum of grades of membership. Such a set is characterized by a membership…

模糊推理过程



从经典集合到模糊集合

- 经典集合对事物只用“1”和“0”作简单的表示“属于”和“不属于”的分类；而模糊集合则把它扩展成可用从0到1之间连续变化的值，来描述元素属于该集合的程度。



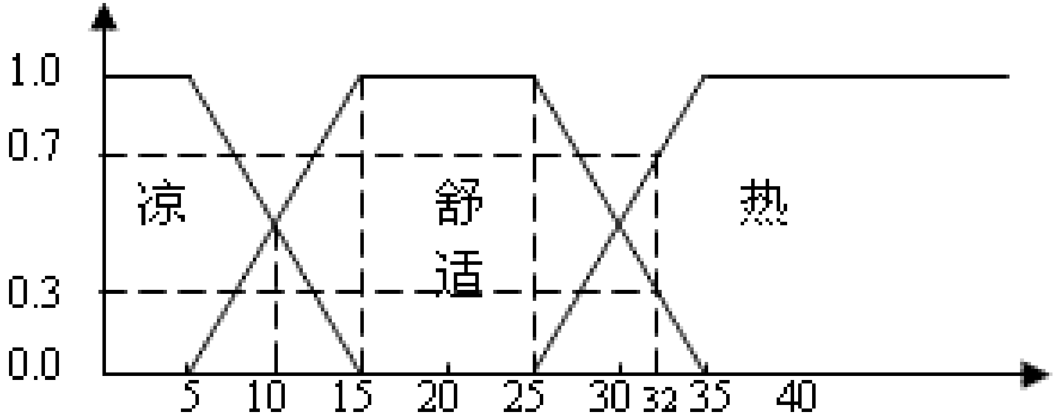
从经典集合到模糊集合

- 大部分人都把从“15℃—25 ℃的室温称作舒适的温度，小于15 ℃为凉，大于15 ℃为热”。

- 用经典集合来定义：
  - 把小于15 ℃的温度哪怕是14.9 ℃也看成是属于“凉”的温度，14.9 ℃与15 ℃只差0.1 ℃，就把15 ℃规为“舒适”，而把14.9 ℃规为“凉”，就人的感觉而言，显然是不恰当的。

从经典集合到模糊集合

- 模糊逻辑与人的感觉一致：
  - 小的温度变化只会引起系统性能的逐渐变化，14.9 ℃与15 ℃属于同一个集合的程度是很接近的。
  - 在这种情况下，32 ℃被认为属于“舒适”的程度是0.3，还同时属于“热”的程度是0.7。



模糊集合对温度的定义

模糊集合定义和隶属函数

模糊集合是经典集合的扩充

精确集合（非此即彼）： $A=\{X|X>6\}$

精确集合的隶属函数： $\mu_A=\begin{cases}1 & 如果X\in A\\ 0 & 如果X\notin A\end{cases}$

模糊集合：

如果X是对象x的集合，则X的模糊集合A：

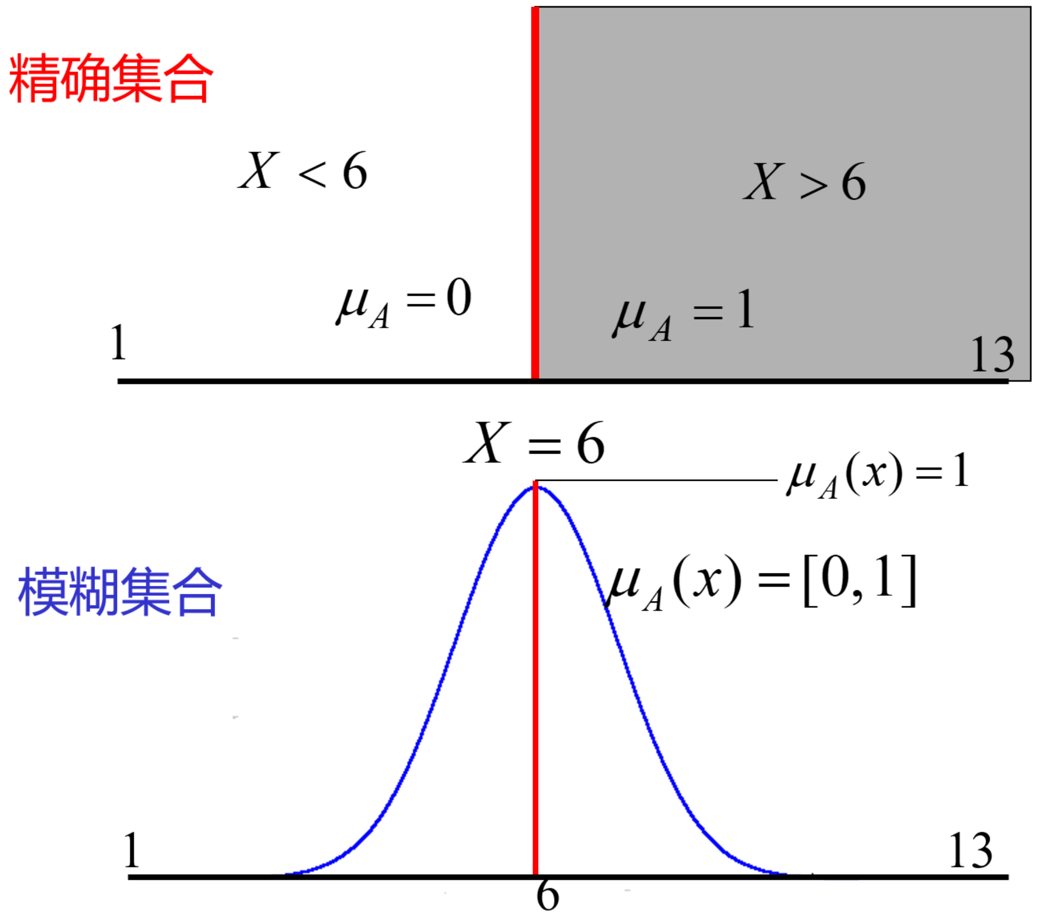
称为论域或域

$$A=\{(x,\mu_A(x))|x\in X\}$$

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ (0,1) & x属于A的程度\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

- 其中A称为模糊集合，由0，1及$\mu_A(x)$构成。
- $\mu_A(x)$表示元素x属于模糊集合A的程度取值范围为[0, 1]，称$\mu_A(x)$为x属于模糊集合A的隶属度。

模糊集合定义和隶属函数



模糊集合的表示

- 与经典集合不同，模糊集合不仅要列出属于集合的元素，还要注明元素属于集合的隶属度
- 当论域中元素数目有限时，模糊集合A的数学描述为：

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$$

其中，$\mu_A(x)$为元素属于模糊集A的隶属度，X是元素x的论域。

例： 设论域U={张三，李四，王五}，评语为“学习好”。设三个人学习成绩总评分是：张三95分，李四90分，王五85分，三人都学习好，但又有差异。

采用隶属函数$\mu_A(x) = x/100$，由三个人的成绩可知三人“学习好”的隶属度分别为：

$$\mu_A(\text{张三}) = 0.95，\mu_A(\text{李四}) = 0.90，\mu_A(\text{王五}) = 0.85$$

- 用“学习好”这一模糊子集A可以表示为：

$$A = \{0.95, 0.90, 0.85\}$$

模糊集合的表示方法

- 论域离散且元素数有限：Zadeh表示法

$$A = \{\mu_A(x_1)/x_1, \mu_A(x_2)/x_2, \cdots, \mu_A(x_n)/x_n\}$$

- 序偶（ordered pair）表示法

$$A = \{(x_1, \mu_A(x_1)), (x_2, \mu_A(x_2)), \cdots, (x_n, \mu_A(x_n))\}$$

- 向量表示法

$$A = \{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \cdots, \mu_A(x_n)\}$$

- 论域连续或元素数无限 $A = \int_{x \in U} \mu_A(x)/x$

模糊集合的表示方法

- 1）离散形式（有序或无序）
- 举例：X={上海 北京 天津 西安}为城市的集合。
- 模糊集合 C = “对城市的爱好” 可以表示为：
  - C = {(上海,0.8),(北京,0.9), (天津,0.7),(西安,0.6)}

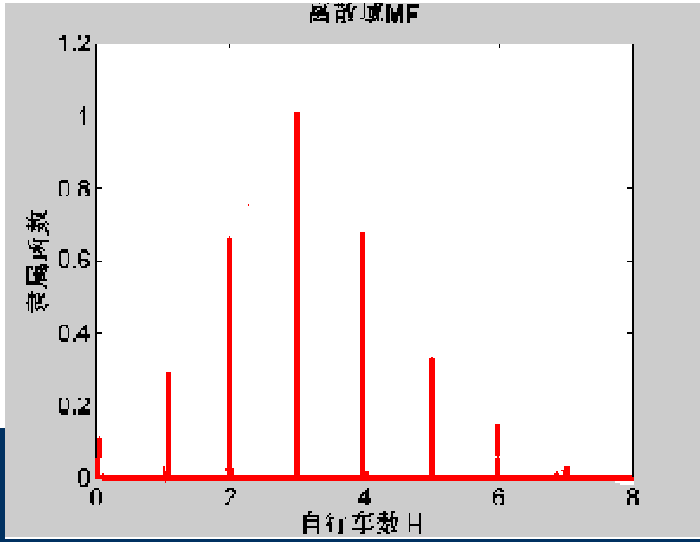
- 又：X = {0 1 2 3 4 5 6}为一个家庭可拥有自行车数目的集合
- 模糊集合 C = “合适的可拥有的自行车数目”
  - C = {(0,0.1),(1,0.3),(2,0.7),(3,1.0),(4,0.7),(5,0.3),(6,0.1)}

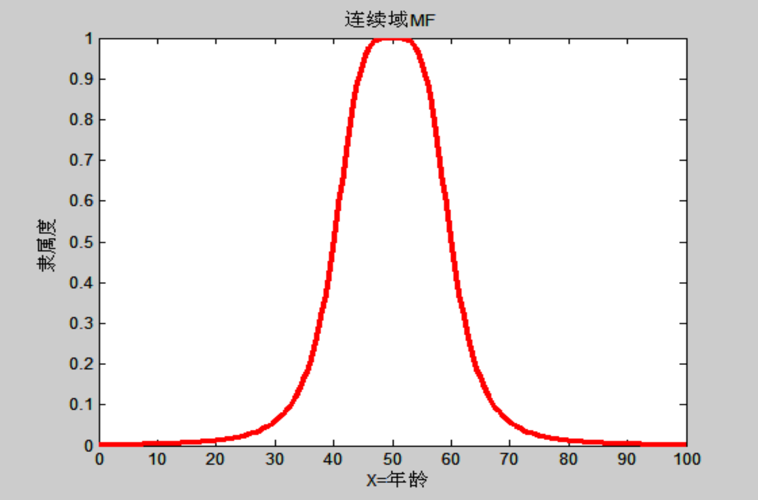
模糊集合的表示方法

- 2) 连续形式：令X = R^+ 为人类年龄的集合,
- 模糊集合 B = “年龄在50岁左右” 则表示为:

$$B = \{x, \mu_{B(x)} | x \in X\}$$

式中：
$$\mu_{B(x)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-50}{10}\right)^4}$$





模糊集合的表示方法

- 上述三个例子分别可写为：

$$C=\frac{0.8}{上海}+\frac{0.9}{南京}+\frac{0.7}{天津}+\frac{0.6}{北京}$$

$$C=\frac{0.1}{0}+\frac{0.3}{1}+\frac{0.7}{2}+\frac{1.0}{3}+\frac{0.7}{4}+\frac{0.3}{5}+\frac{0.1}{6}$$

$$B=\int_{R^{+}}\frac{1}{1+\left(\frac{x-50}{10}\right)^{4}}/x$$

模糊集合的运算

（1）模糊集合的包含关系

- 若 $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$，则 $A \supseteq B$

（2）模糊集合的相等关系

- 若 $\mu_A(x) = \mu_B(x)$，则$A = B$

（3）模糊集合的交并补运算

∨表示取大运算
∧表示取小运算

① 交运算(intersection) $A \cap B$

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

② 并运算(union) $A \cup B$

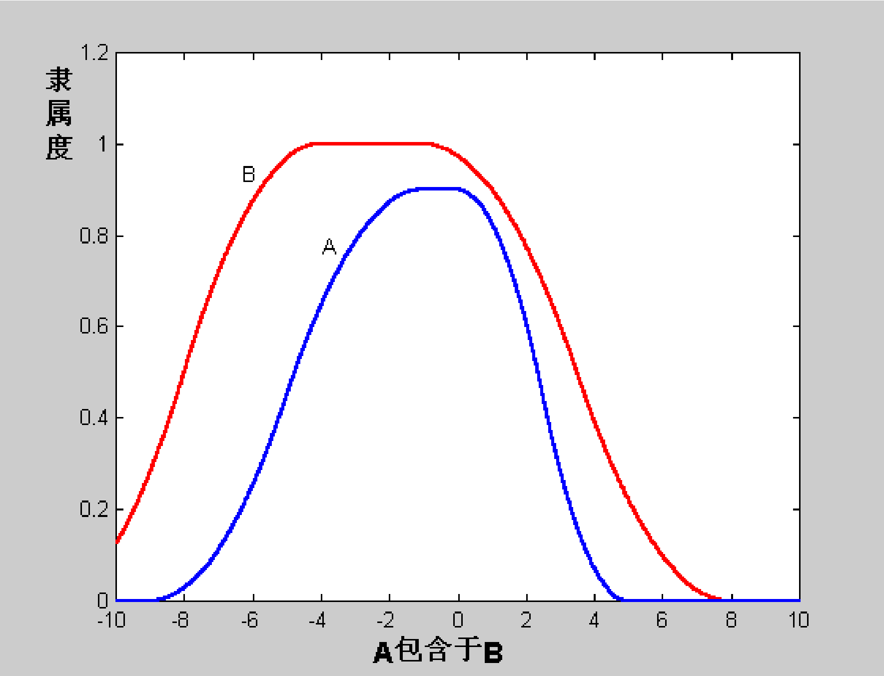
$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

③ 补运算(complement) $\bar{A}$ 或者 A^C

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

模糊集合的运算

（1）模糊集合的包含关系 $A \subseteq B \leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$

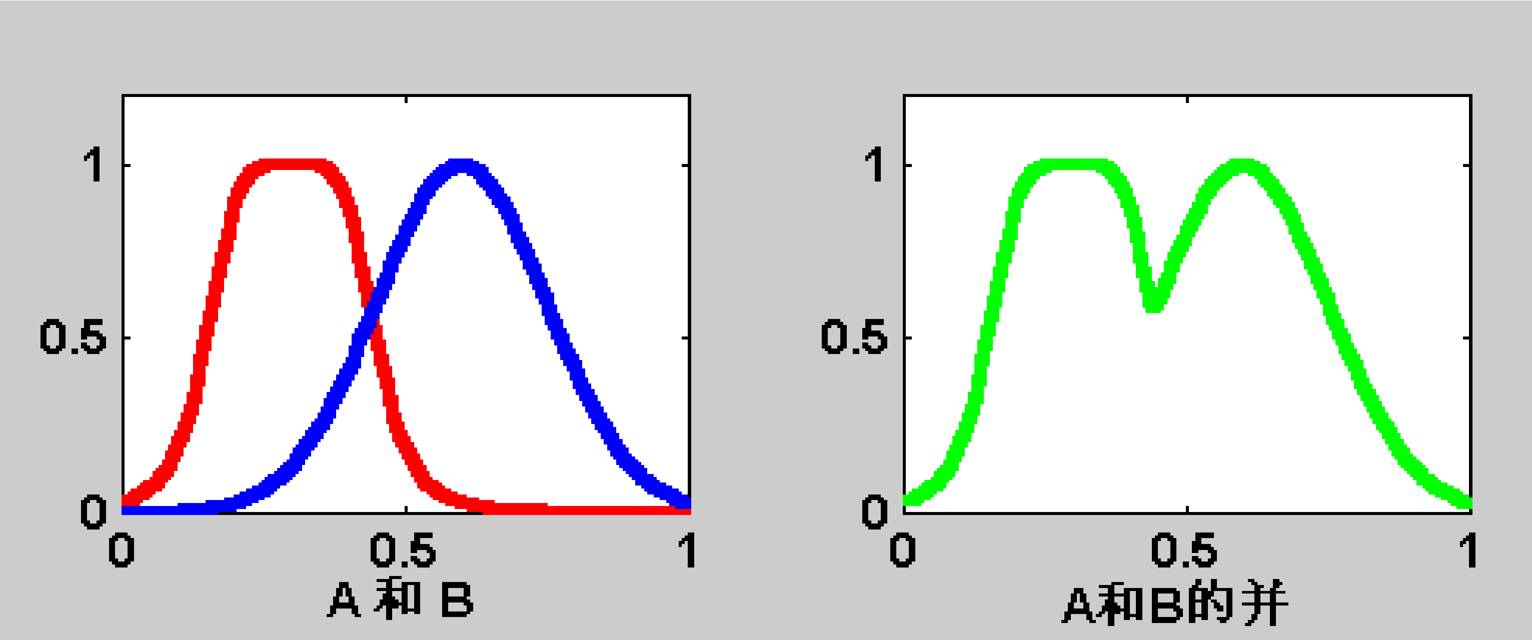


模糊集合的运算

（2）并（析取）

$$C = A \cup B$$

$$\mu_C = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

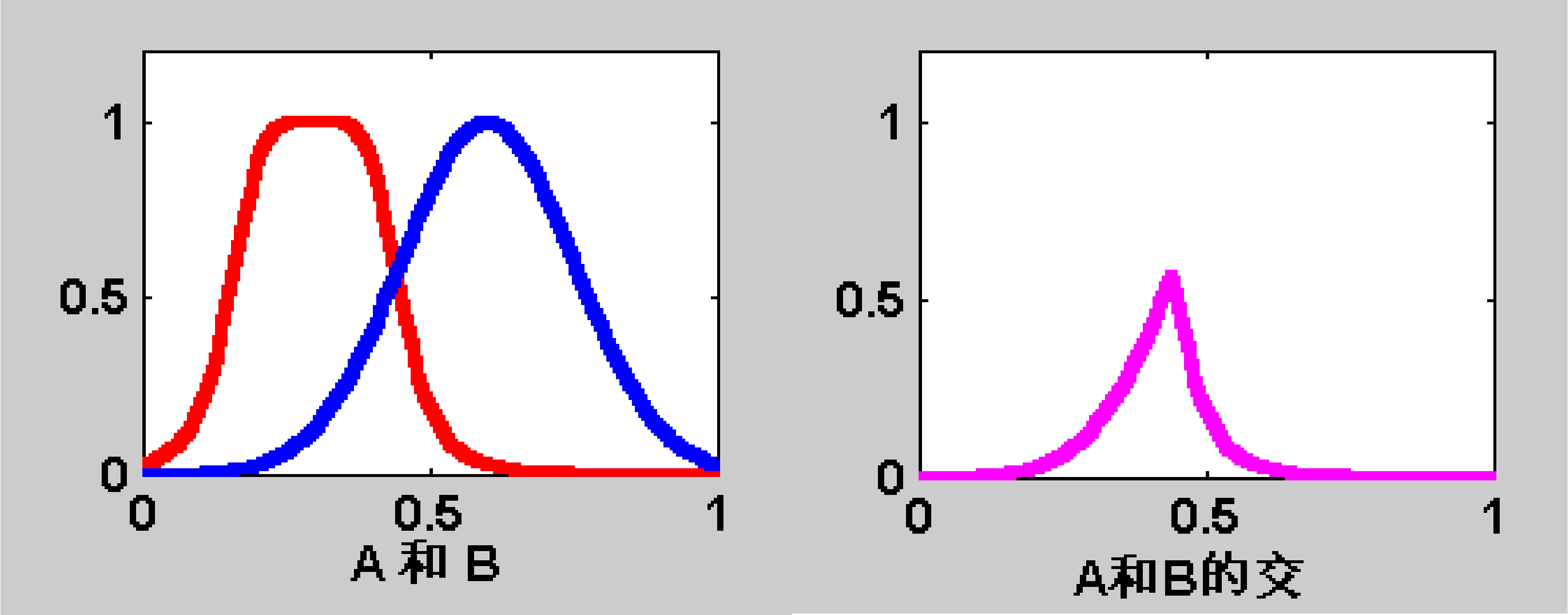


模糊集合的运算

（3）交（合取）

$$C = A \cap B$$

$$\mu_C = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A \wedge \mu_B$$

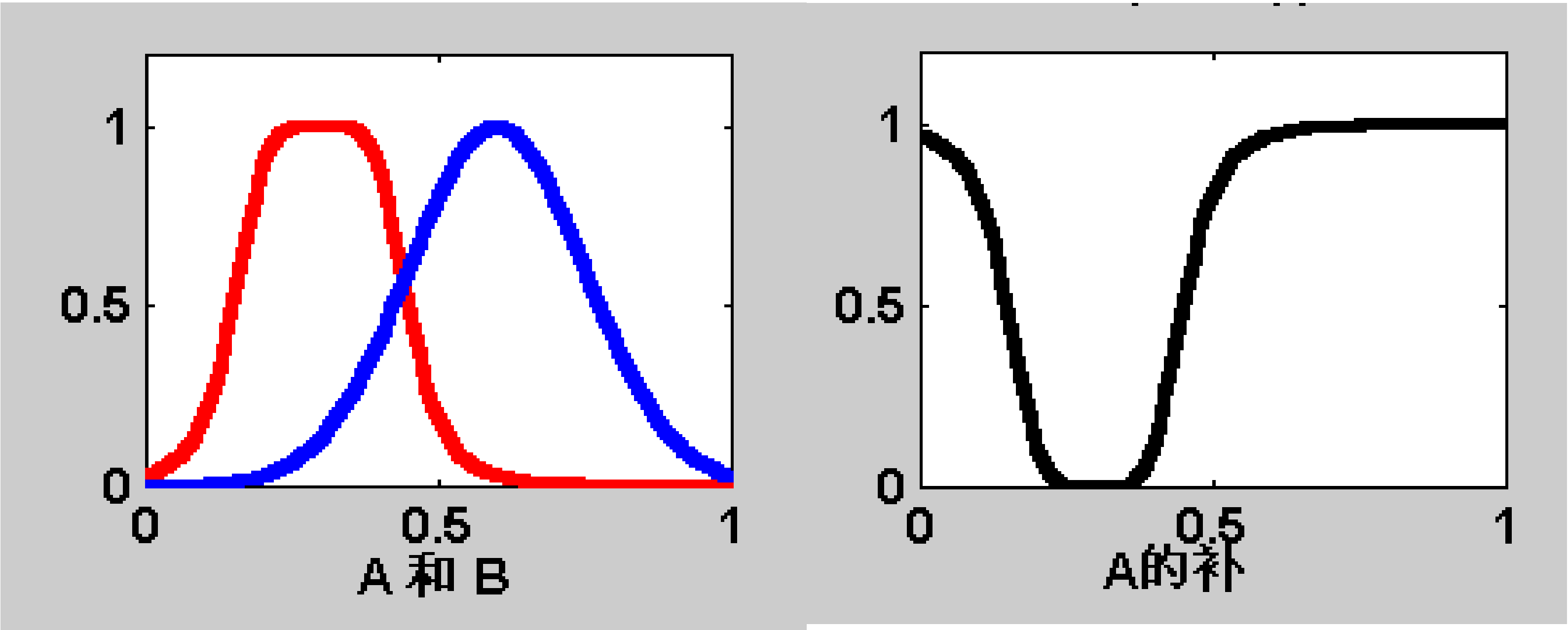


模糊集合的运算

- 补（负）

$$\bar{A}, -A\text{或非}A$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$



课堂练习

- 例题： 设论域X={x1,x2,x3,x4} 以及模糊集合

$$A=\frac{1}{x_1}+\frac{0.8}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.5}{x_4}$$

$$B=\frac{0.9}{x_1}+\frac{0.4}{x_2}+\frac{0.7}{x_4}$$

- 求

$$A\cup B, A\cap B, \bar{A}, \bar{B}$$

课堂练习

$$A=\frac{1}{x_1}+\frac{0.8}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.5}{x_4}\quad B=\frac{0.9}{x_1}+\frac{0.4}{x_2}+\frac{0.7}{x_4}\rightarrow\ A\cup B, A\cap B, \bar{A}, \bar{B}$$

解：

$$A\cup B=\frac{1\vee 0.9}{x_1}+\frac{0.8\vee 0.4}{x_2}+\frac{0.4\vee 0}{x_3}+\frac{0.5\vee 0.7}{x_4}=\frac{1}{x_1}+\frac{0.8}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.7}{x_4}$$

$$A\cap B=\frac{1\wedge 0.9}{x_1}+\frac{0.8\wedge 0.4}{x_2}+\frac{0.4\wedge 0}{x_3}+\frac{0.5\wedge 0.7}{x_4}=\frac{0.9}{x_1}+\frac{0.4}{x_2}+\frac{0.5}{x_4}$$

$$\bar{A}=\frac{1-1}{x_1}+\frac{1-0.8}{x_2}+\frac{1-0.4}{x_3}+\frac{1-0.5}{x_4}=\frac{0.2}{x_2}+\frac{0.6}{x_3}+\frac{0.5}{x_4}$$

$$\bar{B}=\frac{1-0.9}{x_1}+\frac{1-0.4}{x_2}+\frac{1-0}{x_3}+\frac{1-0.7}{x_4}=\frac{0.1}{x_1}+\frac{0.6}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{0.3}{x_4}$$

模糊集合的运算

（4）模糊集合的代数运算

① 代数积： $\mu_{AB}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x)$

② 代数和： $\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{AB}(x)$

③ 有界和： $\mu_{A\oplus B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\} = 1 \wedge [\mu_A(x) + \mu_B(x)]$

④ 有界积：

$$\mu_{A\otimes B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\} = 0 \vee [\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1]$$

模糊关系

- 直积(笛卡尔集)

- 设有两个集合A和B，A和B 的直积定义为：

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

- 它是由序偶（a，b）的全体所构成的二维论域上的集合。一般来说，$A \times B \neq B \times A$
  - 即A和B的次序是不可颠倒的。

两个集合的元素间所有可能配对。

模糊关系

经典关系

- 举例：有两组人，一组为男生 $M = \{m_1, m_2, m_3\}$，一组为女生 $W = \{w_1, w_2\}$。则其笛卡尔乘积M×W结果为何？若其中有两对有婚姻关系，即 $R(M, W) = \{(m_1, w_2), (m_3, w_1)\}$，则二元关系如何表示？二元关系矩阵如何表示？

解：(1). $M \times W =$

$$\{(m_1, w_1), (m_1, w_2), (m_2, w_1), (m_2, w_2), (m_3, w_1), (m_3, w_2)\}.$$

(2). $R(M, W) = \{0, 1, 0, 0, 1, 0\}.$

二元关系矩阵：
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} w_1 & w_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

模糊关系

- 经典关系描述两个集合中的元素之间是否存在关联
- 模糊关系描述两个模糊集合中的元素之间的关联程度

A、B 为两个模糊集合，模糊关系用直积(cartesian product)表示：

$$R: A \times B \to [0,1]$$

直积常用最小算子运算：

$$\mu_{A\times B}(a,b) = \min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\}$$

若A、B 为离散模糊集，其隶属函数分别为：

$$\mu_A = [\mu_A(a_1), \mu_A(a_2), \cdots, \mu_A(a_n)], \quad \mu_B = [\mu_B(b_1), \mu_B(b_2), \cdots, \mu_B(b_n)]$$

则其直积运算：

$$\mu_{A\times B}(a,b) = \mu_A^T \circ \mu_B$$

两个集合的元素间所有可能配对。

两个模糊向量的直积类似于向量乘积，只是乘法运算用取小运算代替

模糊关系

- 当论域为有限时，可以用模糊矩阵来表示模糊关系

例：某地区人的身高论域X={140,150,160,170,180}（单位：cm），体重论域Y={40,50,60,70,80}（单位：kg）。

身高与体重的模糊关系表

R (X \ Y)	40	50	60	70	80
140	1	0.8	0.2	0.1	0
150	0.8	1	0.8	0.2	0.1
160	0.2	0.8	1	0.8	0.2
170	0.1	0.2	0.8	1	0.8
180	0	0.1	0.2	0.8	1

从X到Y的一个模糊关系R，用模糊矩阵表示：

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

模糊关系的合成

- 设模糊关系 $Q \in X \times Y, R \in Y \times Z$ ，则模糊关系 $S \in X \times Z$ 称为Q与R的合成。
- S等于模糊矩阵Q与R的合成
- 模糊矩阵的合成常用计算方法：
  - 最大-最小合成法：写出矩阵乘积QR中的每个元素，然后将其中的乘积运算用取小运算代替，求和用最大运算代替
  - 最大-代数积合成法：写出矩阵乘积QR中的每个元素，然后将其中的求和运算用取大运算代替，乘积运算不变

①代数积：$\mu_{AB}(x) = \mu_A(x)\,\mu_B(x)$

模糊关系的合成

- **例：** $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\quad Y=\{y_1,y_2,y_3\},\quad Z=\{z_1,z_2\}$

  $Q\in X\times Y,\quad R\in Y\times Z,\quad S\in X\times Z,$　求S。

$$Q=\begin{bmatrix}0.5 & 0.6 & 0.3\\0.7 & 0.4 & 1\\0 & 0.8 & 0\\1 & 0.2 & 0.9\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}0.2 & 1\\0.8 & 0.4\\0.5 & 0.3\end{bmatrix}$$

$$S=Q\circ R=\begin{bmatrix}0.5 & 0.6 & 0.3\\0.7 & 0.4 & 1\\0 & 0.8 & 0\\1 & 0.2 & 0.9\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.2 & 1\\0.8 & 0.4\\0.5 & 0.3\end{bmatrix}$$

$$\rightleftarrows$$

$$=\begin{bmatrix}(0.5\wedge 0.2)\vee(0.6\wedge 0.8)\vee(0.3\wedge 0.5) & (0.5\wedge 1)\vee(0.6\wedge 0.4)\vee(0.3\wedge 0.3)\\(0.7\wedge 0.2)\vee(0.4\wedge 0.8)\vee(1\wedge 0.5) & (0.7\wedge 1)\vee(0.4\wedge 0.4)\vee(1\wedge 0.3)\\(0\wedge 0.2)\vee(0.8\wedge 0.8)\vee(0\wedge 0.5) & (0\wedge 1)\vee(0.8\wedge 0.4)\vee(0\wedge 0.3)\\(1\wedge 0.2)\vee(0.2\wedge 0.8)\vee(0.9\wedge 0.5) & (1\wedge 1)\vee(0.2\wedge 0.4)\vee(0.9\wedge 0.3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.6 & 0.5\\0.5 & 0.7\\0.8 & 0.4\\0.5 & 1\end{bmatrix}$$

最大-最小合成法：
其中的乘积运算用取小运算代替，求和用最大运算代替

模糊推理

- 模糊知识表示

  （<对象>，<属性>，（<属性值>，<隶属度>））

  - 例：张三比较胖：（张三，体型，（胖，0.9））

- 扩充到产生式规则、谓词逻辑、框架、语义网络等中

  - 例：如果患者有些头疼并且发高烧 则 他患了重感冒

（患者，症状，（头疼，0.3））∧（患者，症状，（发烧，0.9））→（患者，疾病，（感冒，0.9））

许多模糊规则可以表示为从条件论域到结论论域的模糊关系矩阵R。通过条件模糊向量与模糊关系 R 的合成进行模糊推理，得到结论的模糊向量，然后采用“清晰化”方法将模糊结论转换为精确量。

对 IF A THEN B类型的模糊规则的推理

- 若已知输入为A，则输出为B；若现在已知输入为A'，则输出B'

用合成规则求取为：$B' = A' \circ R$

其中A 到B模糊的关系R: $\mu_R(x,y) = min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

- 控制规则库的N条规则有N个模糊关系：$R_1, R_2, \cdots, R_n$

对于整个系统的全部控制规则所对应的模糊关系R：

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$$

- 例：已知输入的模糊集合A和输出的模糊集合B：

$$A = \frac{1.0}{a_1} + \frac{0.8}{a_2} + \frac{0.5}{a_3} + \frac{0.2}{a_4} + \frac{0.0}{a_5} \qquad B = \frac{0.7}{b_1} + \frac{1.0}{b_2} + \frac{0.6}{b_3} + \frac{0.0}{b_4}$$

当输入为：

$$A' = \frac{0.4}{a_1} + \frac{0.7}{a_2} + \frac{1.0}{a_3} + \frac{0.6}{a_4} + \frac{0.0}{a_5}$$

求输出B'

解： 先求A到B的模糊关系R

$$R = A \times B = \mu_A^{\mathrm{T}} \circ \mu_B = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.8 \\ 0.5 \\ 0.2 \\ 0.0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 1.0 & 0.6 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 1.0 \wedge 0.7 & 1.0 \wedge 1.0 & 1.0 \wedge 0.6 & 1.0 \wedge 0.0 \\ 0.8 \wedge 0.7 & 0.8 \wedge 1.0 & 0.8 \wedge 0.6 & 0.8 \wedge 0.0 \\ 0.5 \wedge 0.7 & 0.5 \wedge 1.0 & 0.5 \wedge 0.6 & 0.5 \wedge 0.0 \\ 0.2 \wedge 0.7 & 0.2 \wedge 1.0 & 0.2 \wedge 0.6 & 0.2 \wedge 0.0 \\ 0.0 \wedge 0.7 & 0.0 \wedge 1.0 & 0.0 \wedge 0.6 & 0.0 \wedge 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 1.0 & 0.6 & 0.0 \\ 0.7 & 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}
$$

$$
B' = A' \circ R = [0.4 \quad 0.7 \quad 1.0 \quad 0.6 \quad 0.0] \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 1.0 & 0.6 & 0.0 \\ 0.7 & 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}
$$

$$
= (0.7, 0.7, 0.6, 0.0)
$$

$$
\boxed{(0.4 \wedge 0.7) \vee (0.7 \wedge 0.7) \vee (1.0 \wedge 0.5) \vee (0.6 \wedge 0.2) \vee (0.0 \wedge 0.0)}
$$

∨表示取大运算
∧表示取小运算

模糊决策

- 模糊决策（模糊判决/解模糊/清晰化）：由模糊推理得到的结论或者操作是一个模糊向量，需要转化为确定值
  - 最大隶属度法：取隶属度最大的量作为推理结果
  - 加权平均判决法：将各隶属度作为权值进行加权平均
  - 中位数法：论域上把隶属函数曲线与横坐标转成的面积平分为两部分的元素称为模糊集的中位数

模糊决策

- 例： 设有模糊控制规则：“如果温度低，则将风门开大”。

设温度和风门开度的论域为{1，2，3，4，5}。

“温度低”和“风门大”的模糊量：

“温度低”= 1/1+0.6/2+0.3/3+0.0/4+0/5

“风门大”= 0/1+0.0/2+0.3/3+0.6/4+1/5

已知事实“温度较低”，可以表示为

“温度较低”= 0.8/1+1/2+0.6/3+0.3/4+0/5

试用模糊推理确定风门开度。

模糊决策

解：（1）确定模糊关系 R

$$R=\begin{bmatrix}1.0\\0.6\\0.3\\0.0\\0.0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 1.0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 1.0\\0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 0.6\\0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.3 & 0.3\\0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\\0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\end{bmatrix}$$

模糊决策

（2）模糊推理

$$B' = A' \circ R$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & 1.0 & 0.6 & 0.3 & 0.0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 0.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

（3）模糊决策

- 用最大隶属度法：风门开度为5
- 用加权平均法：(0.3*3+0.6*4+0.8*5)/(0.3+0.6+0.8)=4.29 风门开度为4