第5章　目标规划

第5章　目标规划

第2节　解目标规划的图解法

对只具有两个决策变量的目标规划的数学模型，可以用图解法来分析求解。

例：某工厂生产I、II两种产品，数据如下

	I	II	拥有量
原材料（kg）	2	1	11
设备	1	2	10
利润（元/件）	8	10	

决策者在原材料供应严格受限制的情况考虑：首先产品II 的产量不低于产品I的产量；其次充分利用设备有效台时，不加班；再次利润不低于56元。列出模型，并求解。

Min $Z=P_1d_1^{+}+P_2(d_2^{-}+d_2^{+})+P_3d_3^{-}$

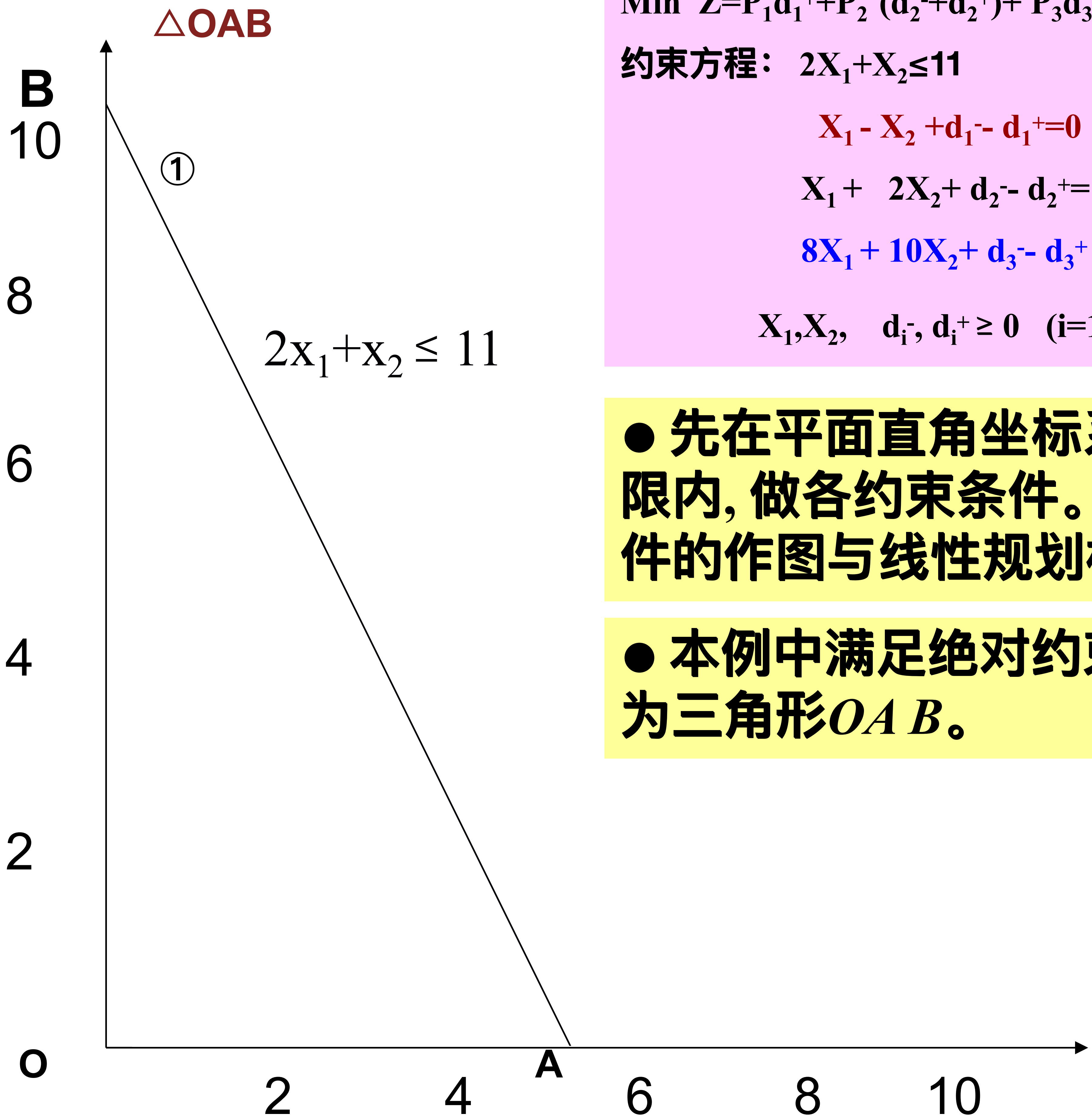
约束方程：$2X_1+X_2\le 11$　①

$X_1-X_2+d_1^{-}-d_1^{+}=0$　②

$X_1+2X_2+d_2^{-}-d_2^{+}=10$　③

$8X_1+10X_2+d_3^{-}-d_3^{+}=56$　④

$X_1,X_2,\quad d_i^{-},d_i^{+}\ge 0\quad (i=1,2,3)$



$\text{Min}\ \ Z=P_1d_1^{+}+P_2\ (d_2^{-}+d_2^{+})+P_3d_3^{-}$

约束方程： $2X_1+X_2\le 11$ ①

$X_1 - X_2 + d_1^{-} - d_1^{+}=0$ ②

$X_1 + 2X_2 + d_2^{-} - d_2^{+}=10$ ③

$8X_1 + 10X_2 + d_3^{-} - d_3^{+}=56$ ④

$X_1, X_2,\ \ d_i^{-}, d_i^{+}\ge 0\ \ (i=1,2,3)$

- 先在平面直角坐标系的第一象限内，做各约束条件。绝对约束条件的作图与线性规划相同。
- 本例中满足绝对约束的可行域为三角形*OA B*。

Min $Z=P_1d_1^{+}+P_2(d_2^{-}+d_2^{+})+P_3d_3^{-}$

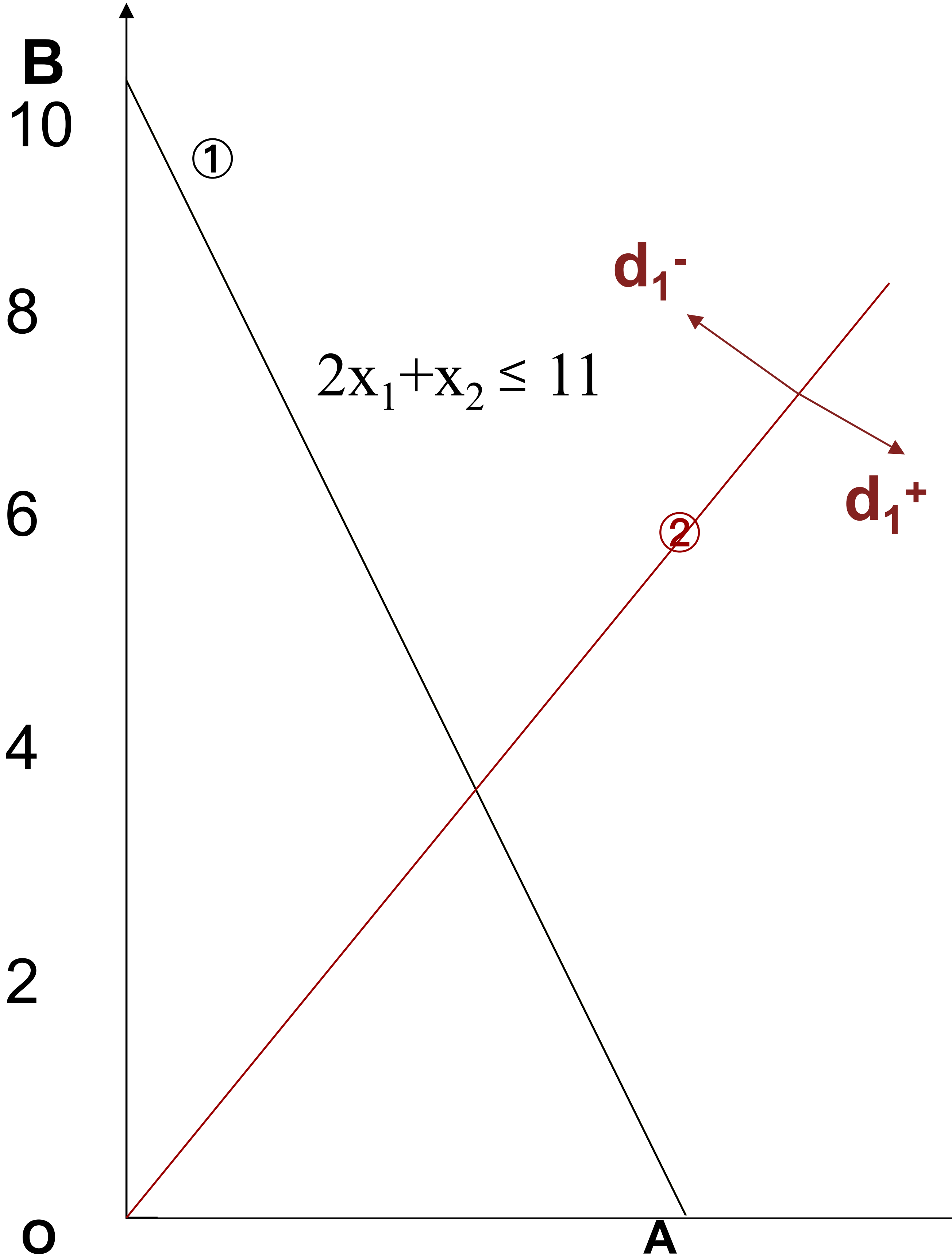
约束方程： $2X_1+X_2\le 11$ ①

$X_1-X_2+d_1^{-}-d_1^{+}=0$ ②

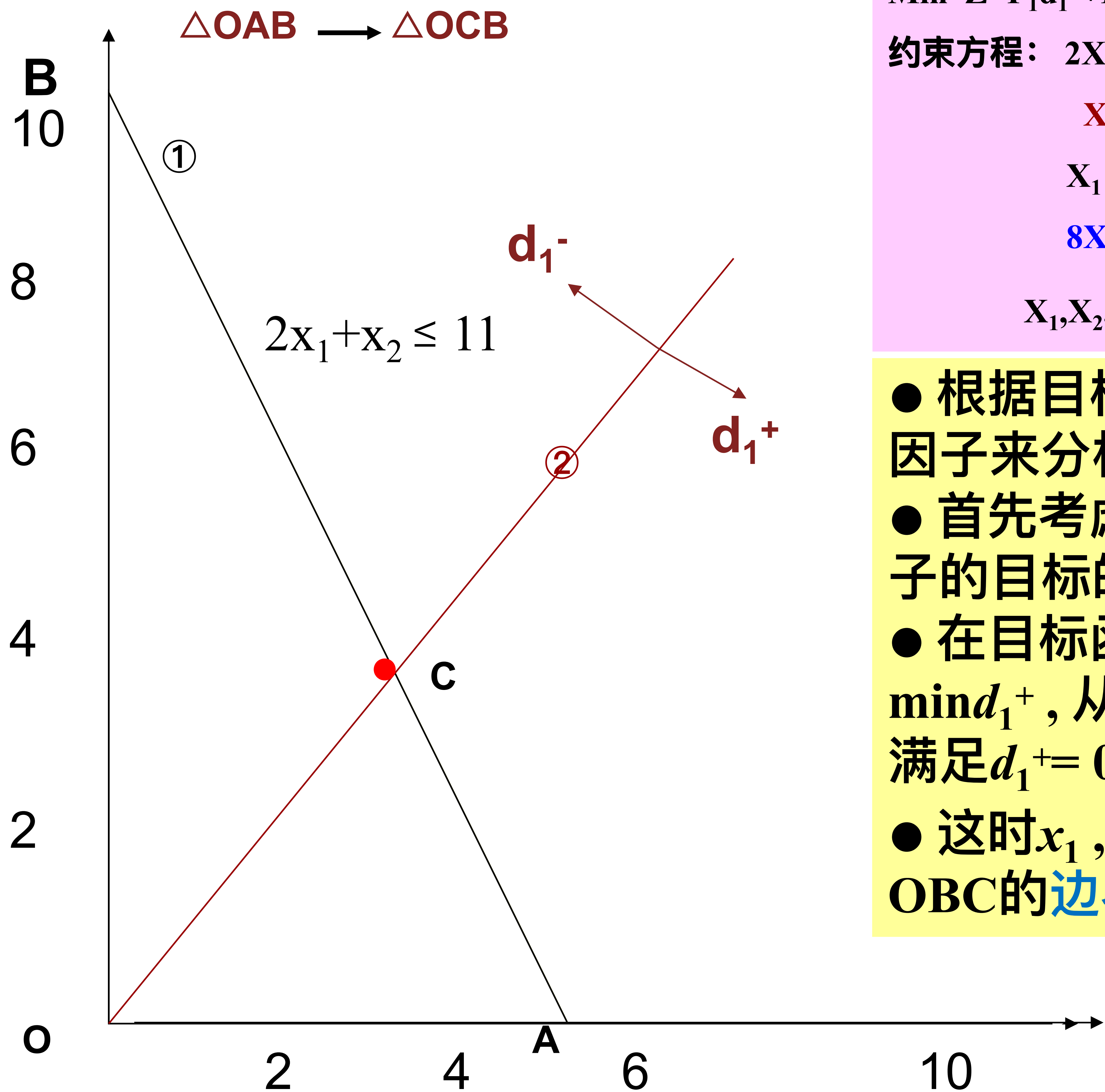
$X_1+2X_2+d_2^{-}-d_2^{+}=10$ ③

$8X_1+10X_2+d_3^{-}-d_3^{+}=56$ ④

$X_1, X_2, \quad d_i^{-}, d_i^{+}\ge 0 \quad (i=1,2,3)$



- 先在平面直角坐标系的第一象限内，做各约束条件。绝对约束条件的作图与线性规划相同。
- 本例中满足绝对约束的可行域为三角形OAB。
- 做目标约束时，先令$d_i^{-}, d_i^{+}=0$，做相应的直线，然后在这直线旁标上d_i^{-}，d_i^{+}，如图所示。这表明目标约束可以沿d_i^{-}，d_i^{+}所示方向平移。



Min $Z=P_1d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3d_3^-$

约束方程： $2X_1+X_2 \le 11$ ①

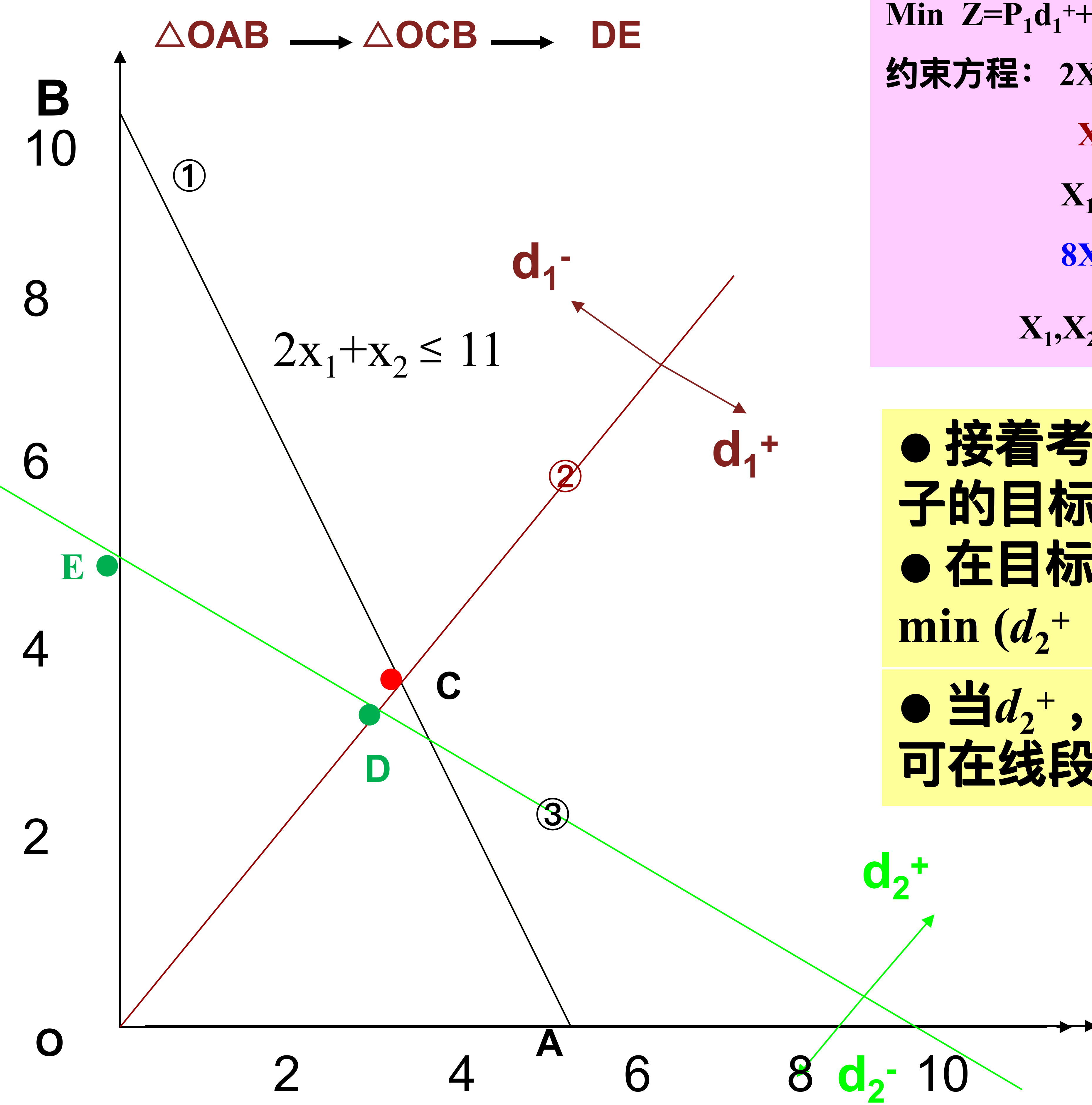
$X_1 - X_2 + d_1^- - d_1^+ = 0$ ②

$X_1 + 2X_2 + d_2^- - d_2^+ = 10$ ③

$8X_1 + 10X_2 + d_3^- - d_3^+ = 56$ ④

$X_1, X_2, \quad d_i^-, d_i^+ \ge 0 \quad (i=1,2,3)$

- 根据目标函数中的优先因子来分析求解。
- 首先考虑具有P_1 优先因子的目标的实现,
- 在目标函数中要求实现$\min d_1^+$，从图中可见，可以满足$d_1^+ = 0$。
- 这时x_1，x_2 只能在三角形OBC的边界和其中取值



Min $Z=P_1d_1^{+}+P_2(d_2^{-}+d_2^{+})+P_3d_3^{-}$

约束方程： $2X_1+X_2\le 11$ ①

$X_1-X_2+d_1^{-}-d_1^{+}=0$ ②

$X_1+2X_2+d_2^{-}-d_2^{+}=10$ ③

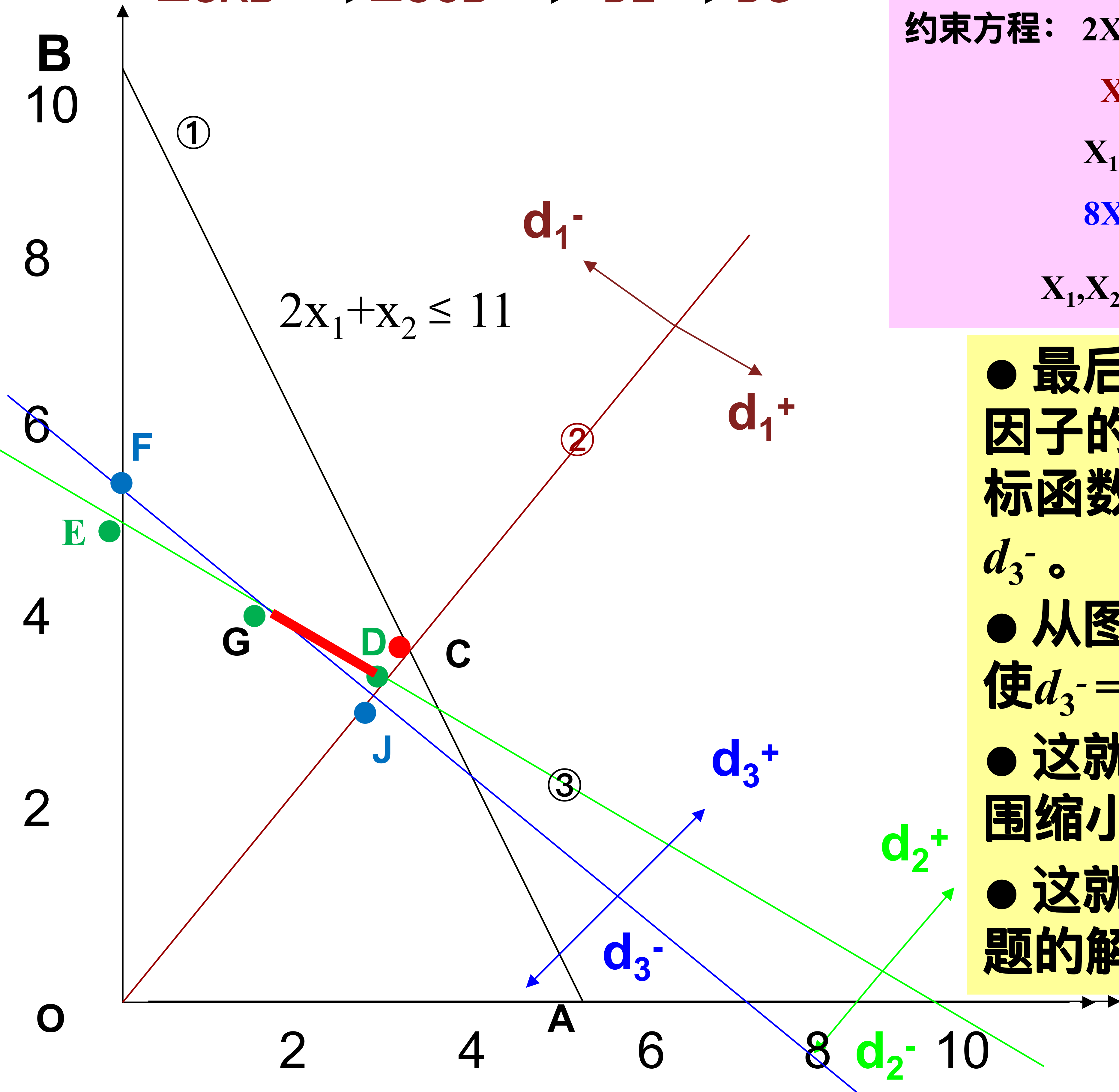
$8X_1+10X_2+d_3^{-}-d_3^{+}=56$ ④

$X_1,X_2,\ d_i^{-},d_i^{+}\ge 0\quad (i=1,2,3)$

- 接着考虑具有P_2优先因子的目标的实现。
- 在目标函数中要求实现 $\min(d_2^{+}+d_2^{-})$

- 当d_2^{+}，$d_2^{-}=0$时，x_1、x_2可在线段ED上取值。

△OAB → △OCB → DE → DG



Min $Z=P_1d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3d_3^-$

约束方程： $2X_1+X_2 \le 11$ ①

$X_1 - X_2 + d_1^- - d_1^+ = 0$ ②

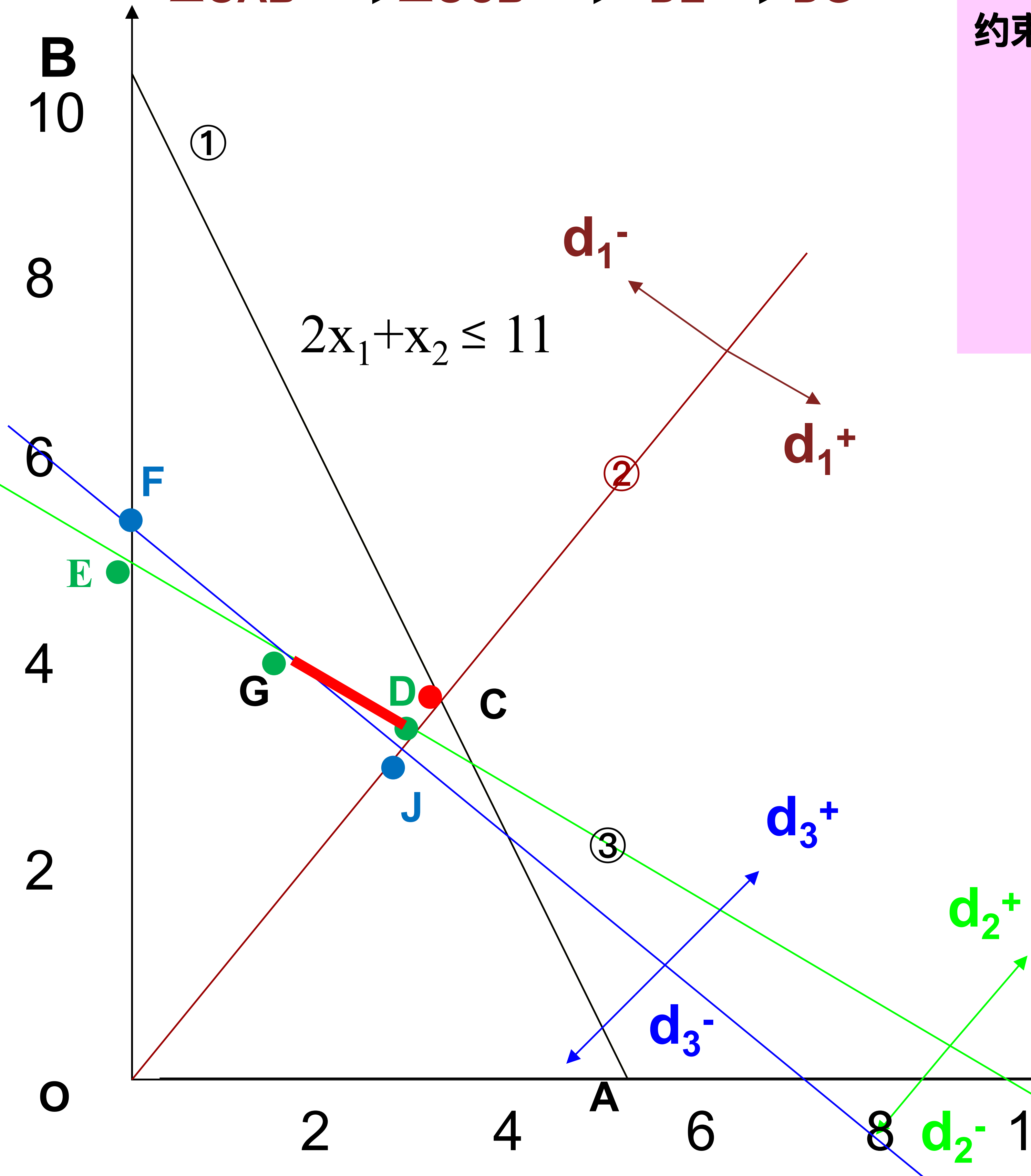
$X_1 + 2X_2 + d_2^- - d_2^+ = 10$ ③

$8X_1 + 10X_2 + d_3^- - d_3^+ = 56$ ④

$X_1, X_2, \quad d_i^-, d_i^+ \ge 0 \quad (i=1,2,3)$

- 最后考虑具有P_3优先因子的目标的实现，在目标函数中要求实现min d_3^-。
- 从图中可以判断可以使$d_3^- = 0$
- 这就使x_1 、x_2取值范围缩小到线段GD 上
- 这就是该目标规划问题的解。

△OAB → △OCB → DE → DG



Min $Z=P_1d_1^{+}+P_2\ (d_2^{-}+d_2^{+})+P_3d_3^{-}$

约束方程： $2X_1+X_2\le 11$ ①

$X_1-X_2+d_1^{-}-d_1^{+}=0$ ②

$X_1+2X_2+d_2^{-}-d_2^{+}=10$ ③

$8X_1+10X_2+d_3^{-}-d_3^{+}=56$ ④

$X_1,X_2,\ d_i^{-},d_i^{+}\ge 0\ \ (i=1,2,3)$

注意目标规划问题求解时，把绝对约束作最高优先级考虑。在本例中能依先后次序都满足$d_1^{+}=0$，$d_2^{+}+d_2^{-}=0$，$d_3^{-}=0$，因而$z^*=0$但在大多数问题中并非如此，会出现某些约束得不到满足，故将目标规划问题的最优解称为满意解。

例：某工厂生产彩电、黑白两种电视机，数据如下

	彩电	黑白	拥有量
装配线（小时）	1	1	40
销量	24	30	
利润（元/件）	80	40	

该厂确定的目标为：

- **第一优先级**：充分利用装配线每周计划开动40小时；
- **第二优先级**：允许装配线加班；但加班时间每周尽量不超过10小时；
- **第三优先级**：装配电视机的数量尽量满足市场需要。因彩色电视机的利润高，取其权系数为2。

试建立这问题的目标规划模型，并求解黑白和彩色电视机的产量。

	彩电	黑白	拥有量
装配线（小时）	1	1	40
销量	24	30	
利润（元/件）	80	40	

解：设X_1，X_2分别表示彩色和黑白电视机的产量。

P_1：充分利用装配线每周计划开动40小时；

$$X_1+X_2+d_1^- - d_1^+ =40$$

P_2：允许装配线加班；但加班时间每周尽量不 超过10小时；

$$X_1+X_2+d_2^- - d_2^+ =50$$

P_3：电视机的数量尽量满足市场要求，权系数为利润比。

$$X_1+d_3^- - d_3^+ =24 \;； \qquad X_2+d_4^- - d_4^+ =30$$

目标函数：$\text{Min } S=P_1d_1^- + P_2d_2^+ + P_3(2d_3^- + d_4^-)$

目标函数： $\min z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3(2d_3^- + d_4^-)$

满足约束条件： $$\begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40 \\ x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 50 \\ x_1 \qquad + d_3^- - d_3^+ = 24 \\ \qquad x_2 + d_4^- - d_4^+ = 30 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

- 故E点为满意解。其坐标为(24，26)，即该厂每周应装配彩色电视机24台，黑白电视机26台。

Min $Z=P_1d_1^-+P_2 d_2^+ + P_3(2 d_3^- + d_4^-)$

约束方程：

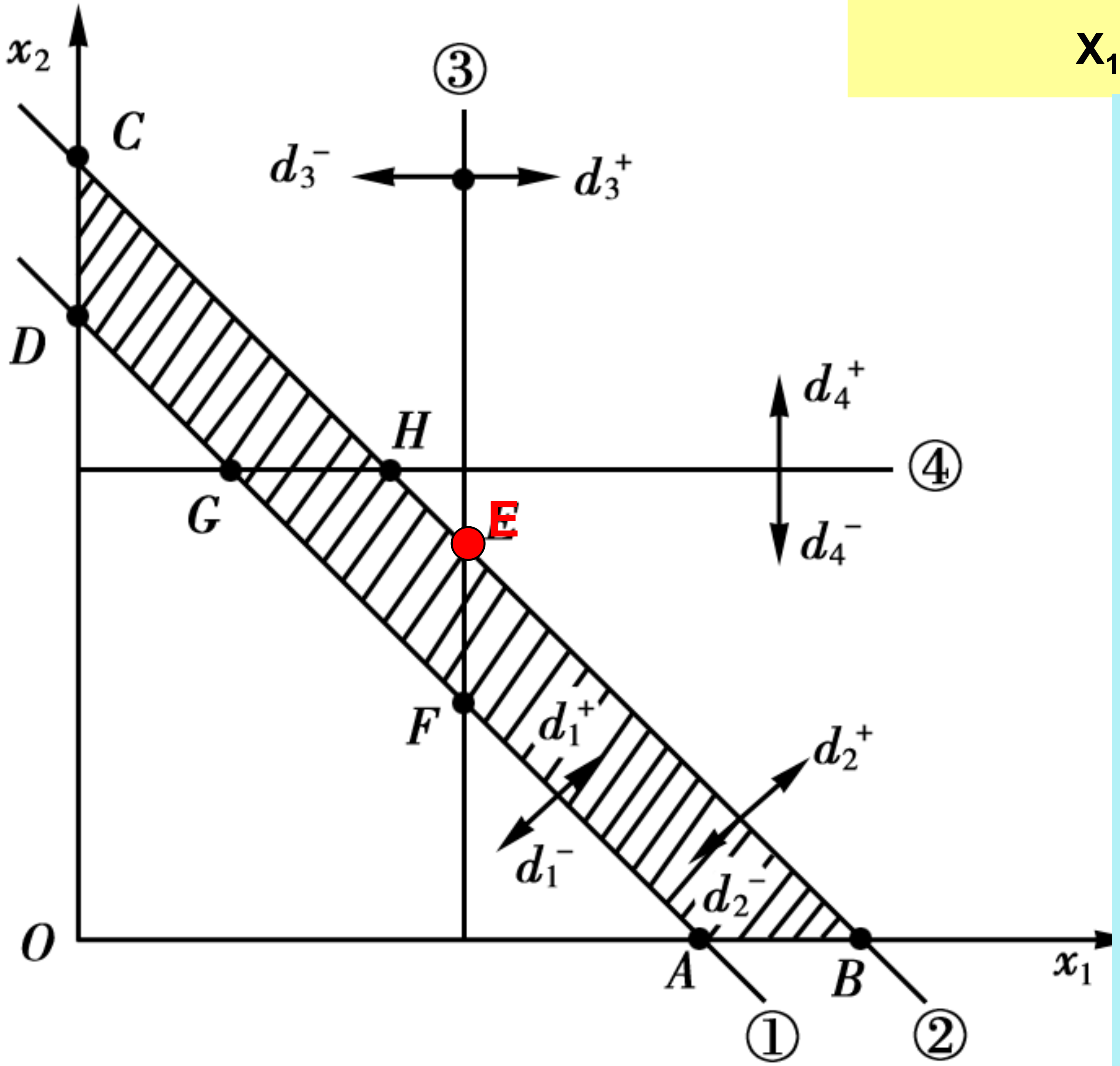
$X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 40$ ①

$X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ = 50$ ②

$X_1 + d_3^- - d_3^+ = 24$ ③

$X_2 + d_4^- - d_4^+ = 30$ ④

$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 (i=1,2,3,4)$



- 在考虑具有P_1、P_2的目标实现后，x_1、x_2的取值范围为$ABCD$。
- 考虑P_3的目标要求时，因d_3^-的权系数大于d_4^-，故先考虑$\min d_3^-$；这时x_1、x_2的取值范围缩小为$ABEF$区域。
- 然后考虑d_4^-。在$ABEF$中无法满足$d_4^-=0$，因此只能在$ABEF$中取一点，使d_4^-尽可能小，这就是E点。

例

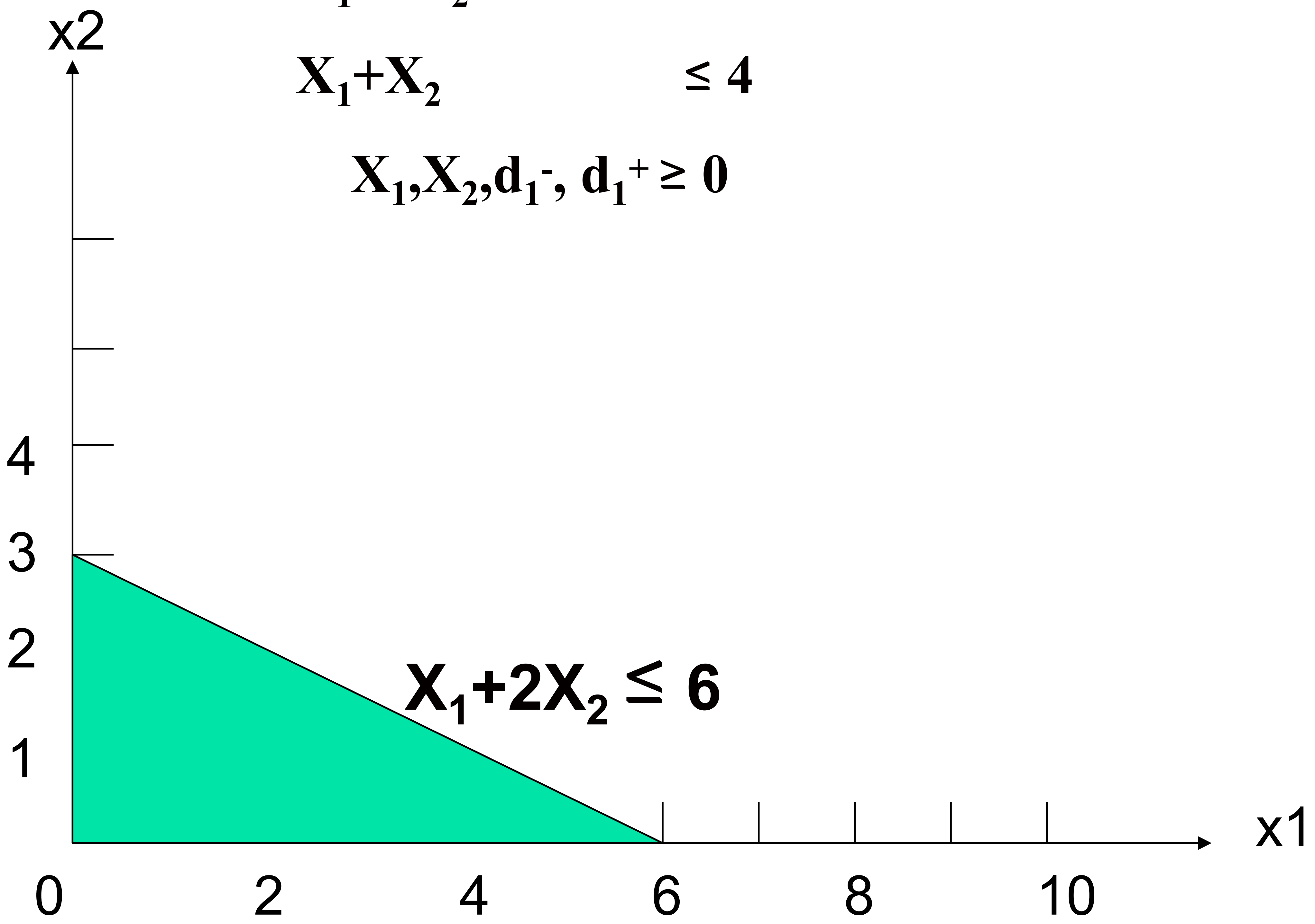
$$\text{Min } S = d_1^-$$

$$X_1+2X_2+d_1^- - d_1^+ = 10$$

$$X_1+2X_2 \leq 6$$

$$X_1+X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2, d_1^-, d_1^+ \geq 0$$



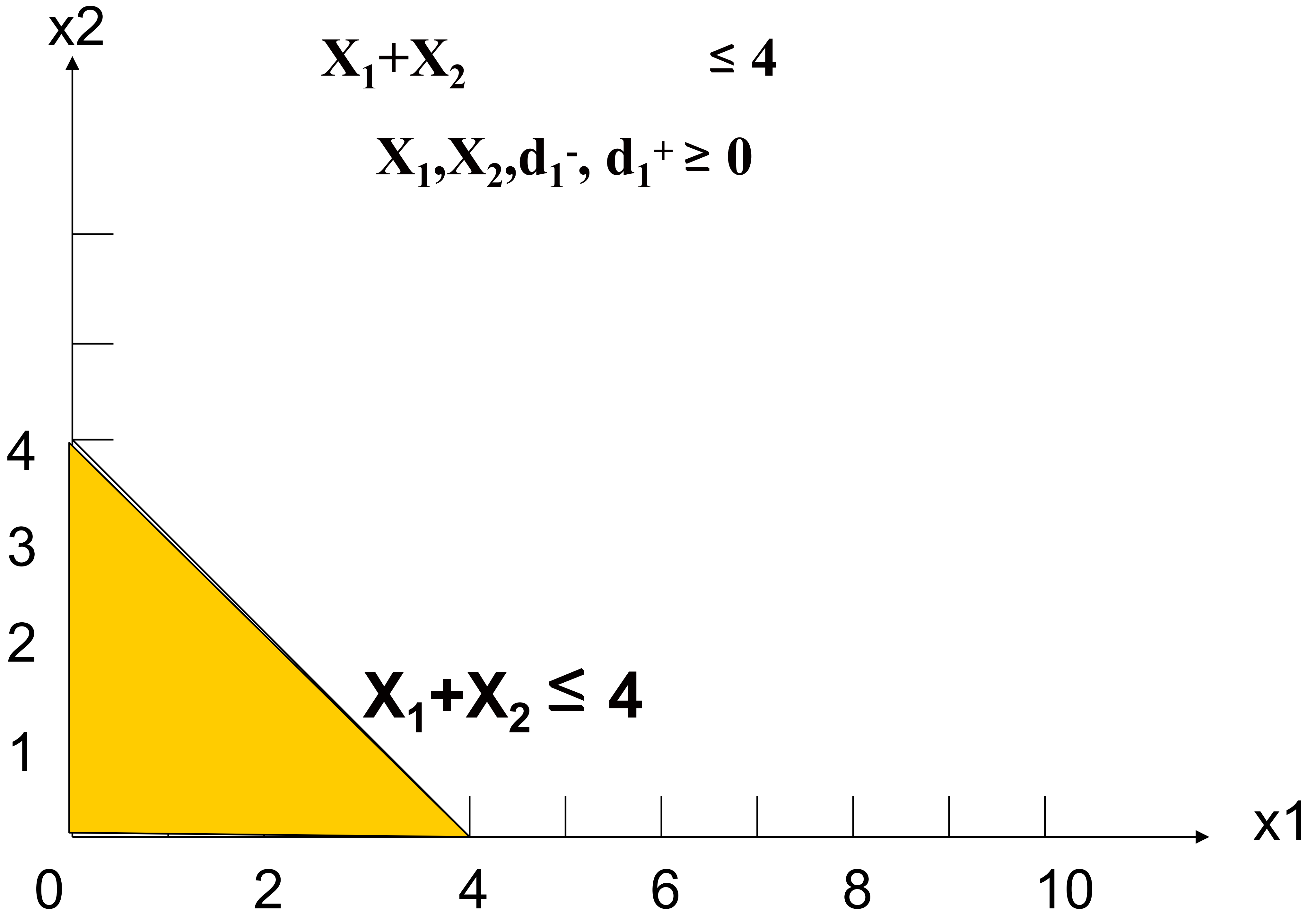
例　　$\text{Min } S = d_1^-$

$$X_1+2X_2+d_1^- - d_1^+ = 10$$

$$X_1+2X_2 \le 6$$

$$X_1+X_2 \le 4$$

$$X_1, X_2, d_1^-, d_1^+ \ge 0$$



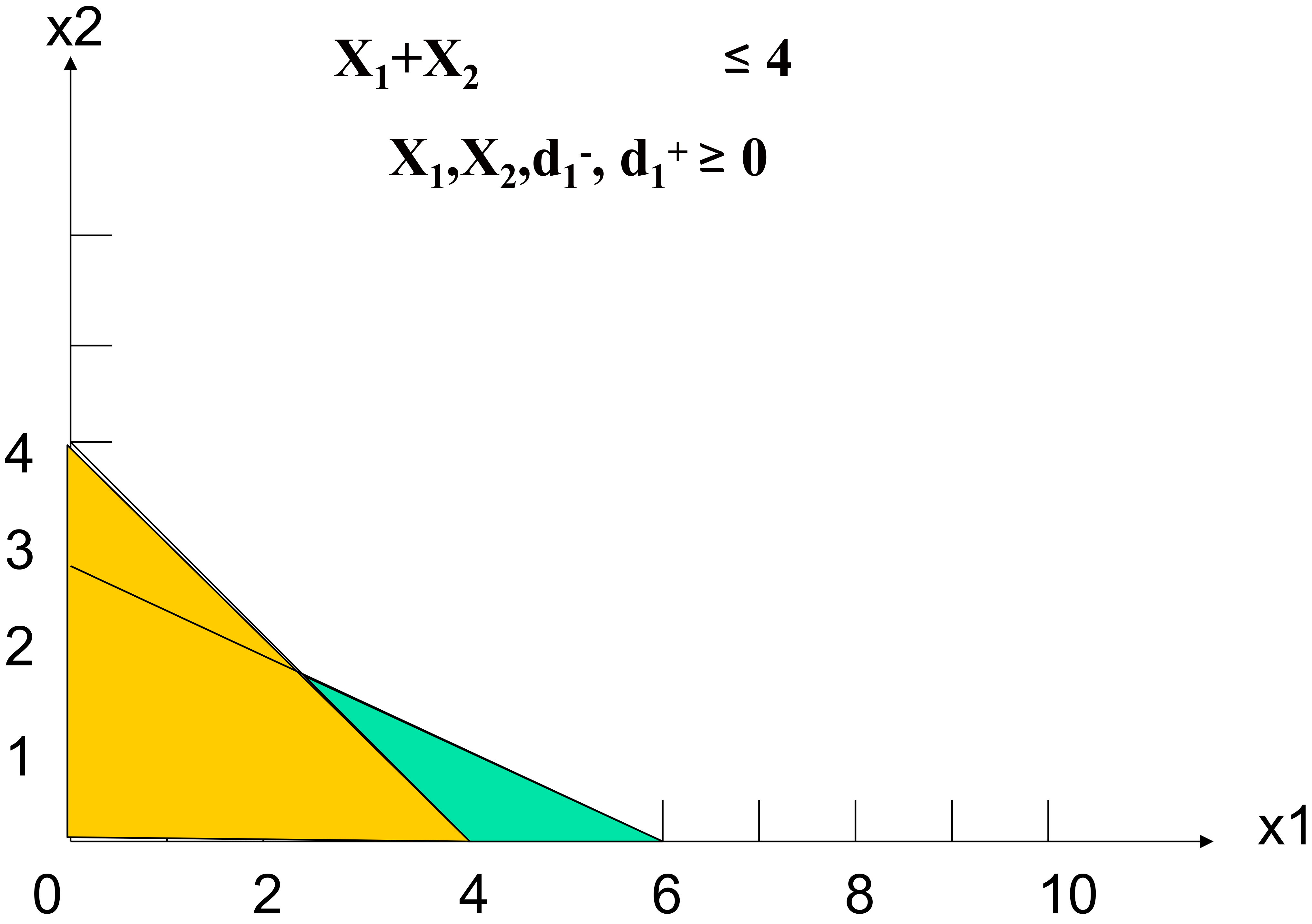
例 $\min S = d_1^-$

$$X_1+2X_2+d_1^- - d_1^+ = 10$$

$$X_1+2X_2 \le 6$$

$$X_1+X_2 \le 4$$

$$X_1, X_2, d_1^-, d_1^+ \ge 0$$



例

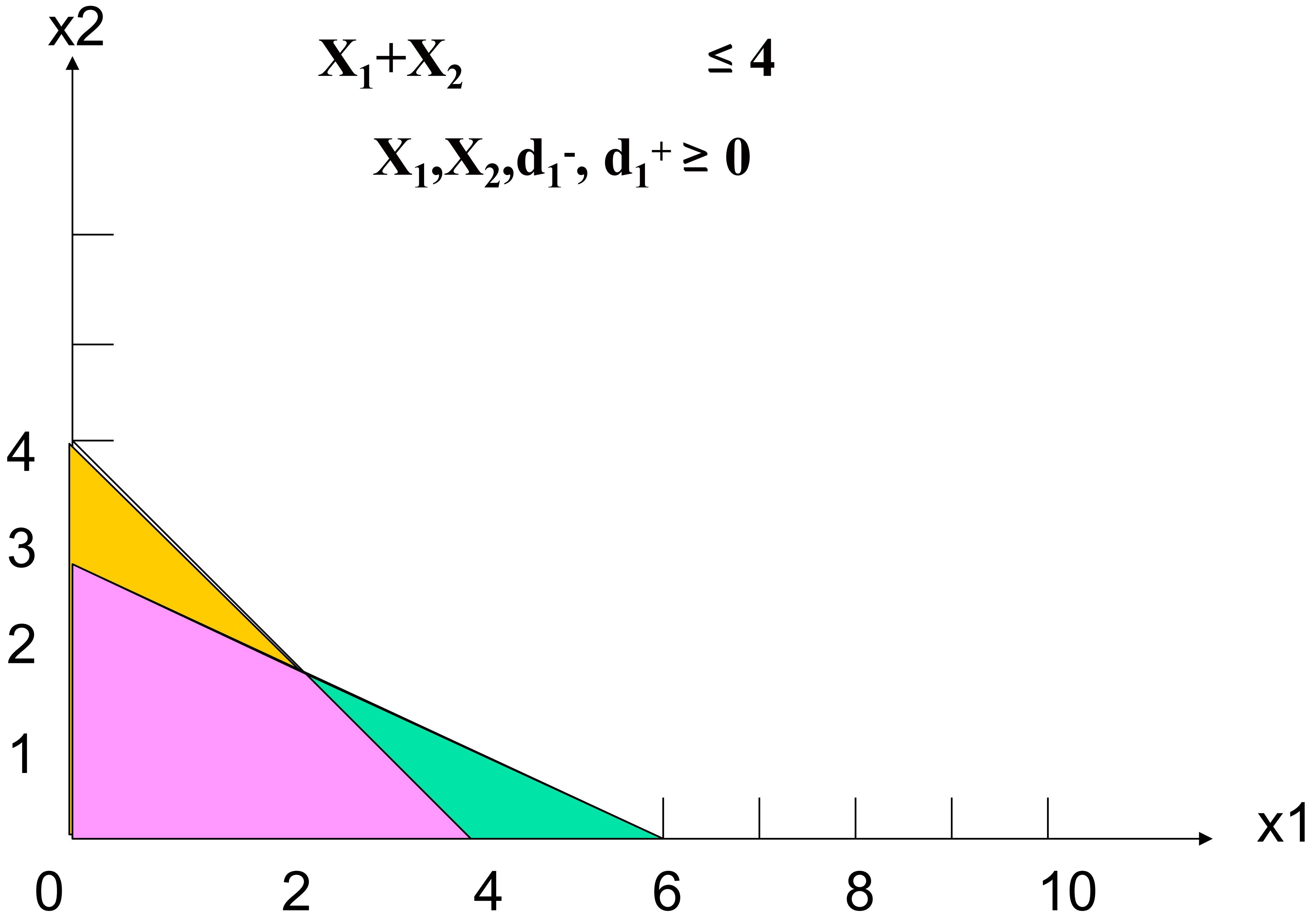
$$\text{Min } S = d_1^-$$

$$X_1+2X_2+d_1^- - d_1^+ = 10$$

$$X_1+2X_2 \leq 6$$

$$X_1+X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2, d_1^-, d_1^+ \geq 0$$



例

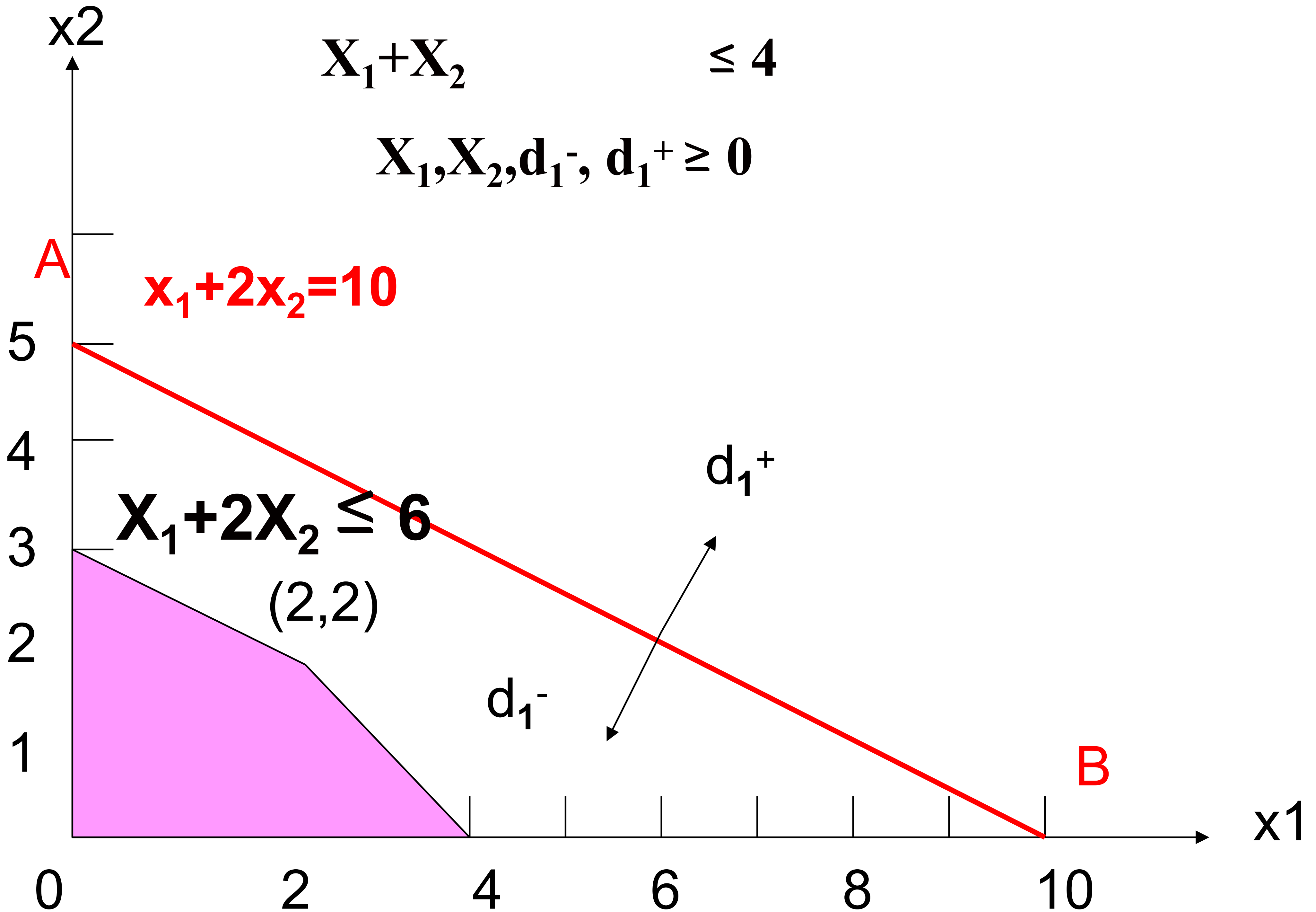
$$\text{Min } S = d_1^-$$

$$X_1+2X_2+d_1^- - d_1^+ = 10$$

$$X_1+2X_2 \le 6$$

$$X_1+X_2 \le 4$$

$$X_1, X_2, d_1^-, d_1^+ \ge 0$$



例

$$\text{Min } S = d_1^-$$

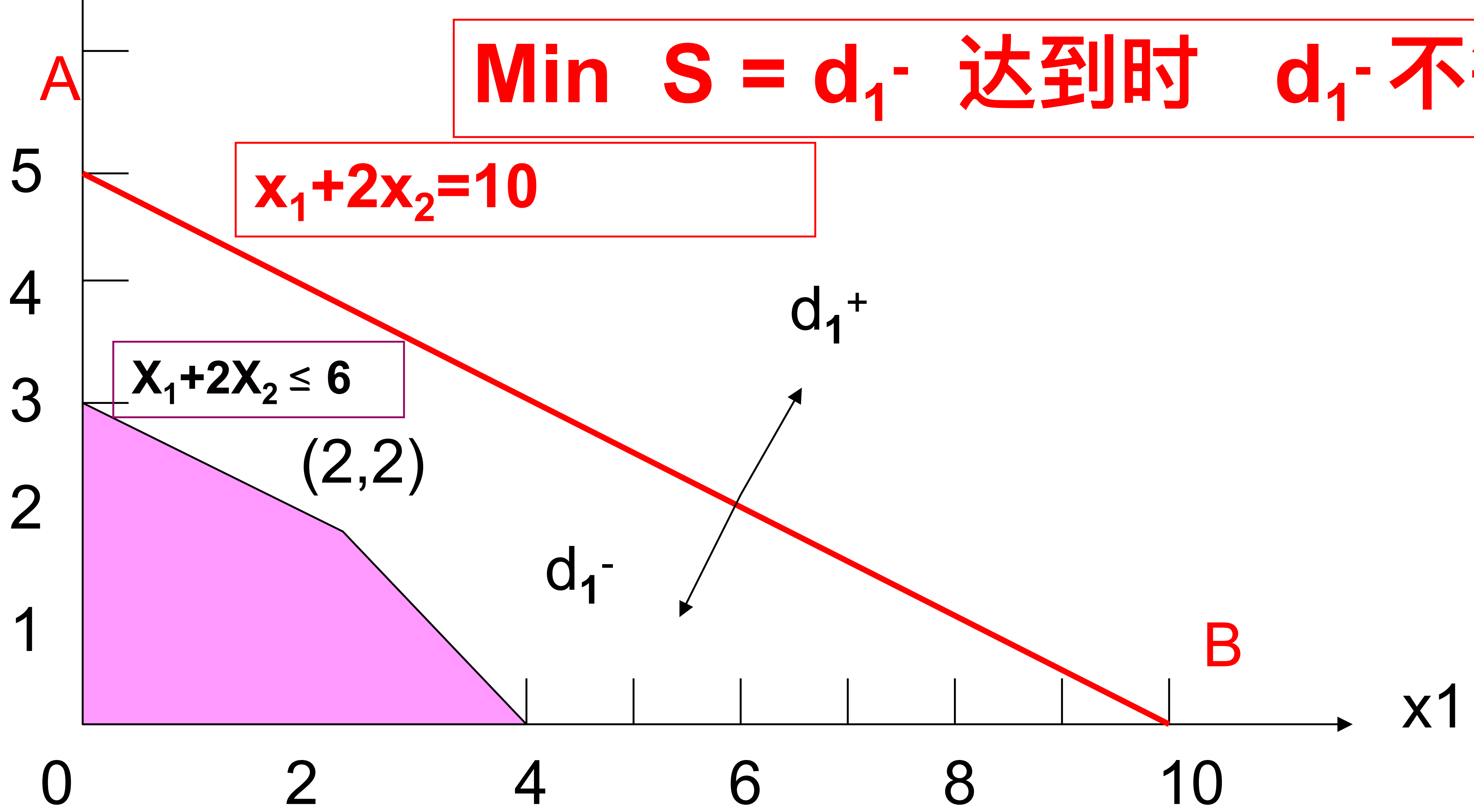
$$X_1+2X_2+d_1^- - d_1^+ = 10$$

$$X_1+2X_2 \le 6$$

$$X_1+X_2 \le 4$$

$$X_1, X_2, d_1^-, d_1^+ \ge 0$$

Min $S = d_1^-$ 达到时 d_1^- 不等于 0



例

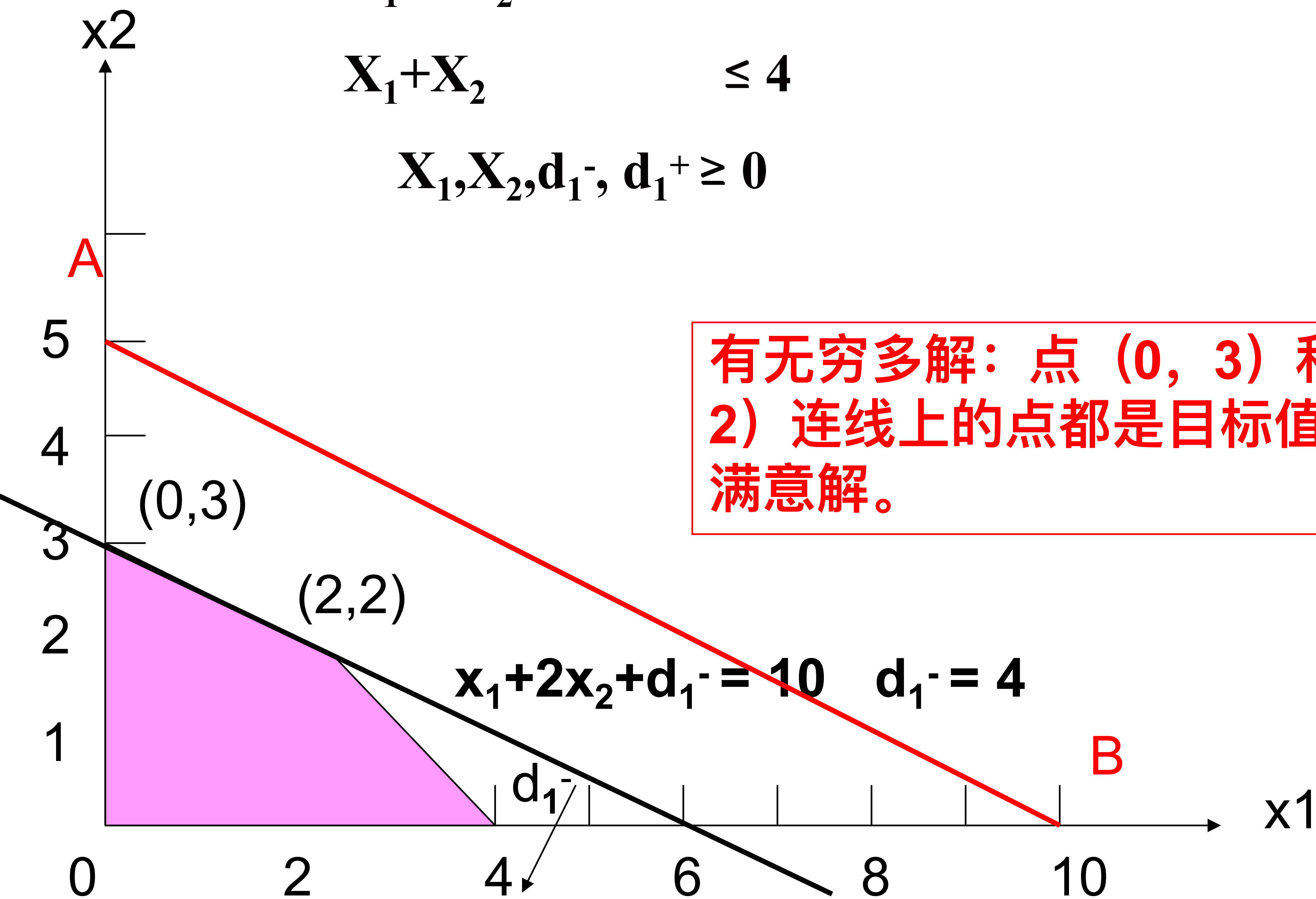
$$\text{Min} \quad S = d_1^-$$

$$X_1+2X_2+ d_1^- - d_1^+ = 10$$

$$X_1+2X_2 \qquad \le 6$$

$$X_1+X_2 \qquad \le 4$$

$$X_1,X_2,d_1^-, d_1^+ \ge 0$$



有无穷多解：点（0，3）和点（2，2）连线上的点都是目标值相同的满意解。