人工智能导论

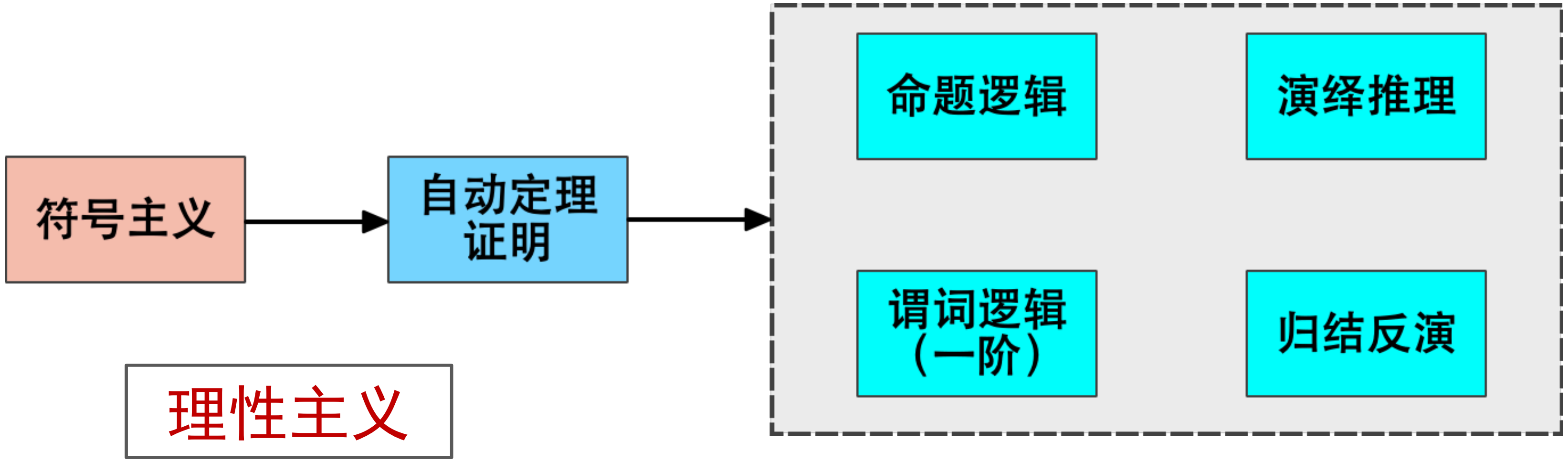
主讲：王 博

人工智能与自动化学院

符号主义 – 目录

逻辑与人工智能

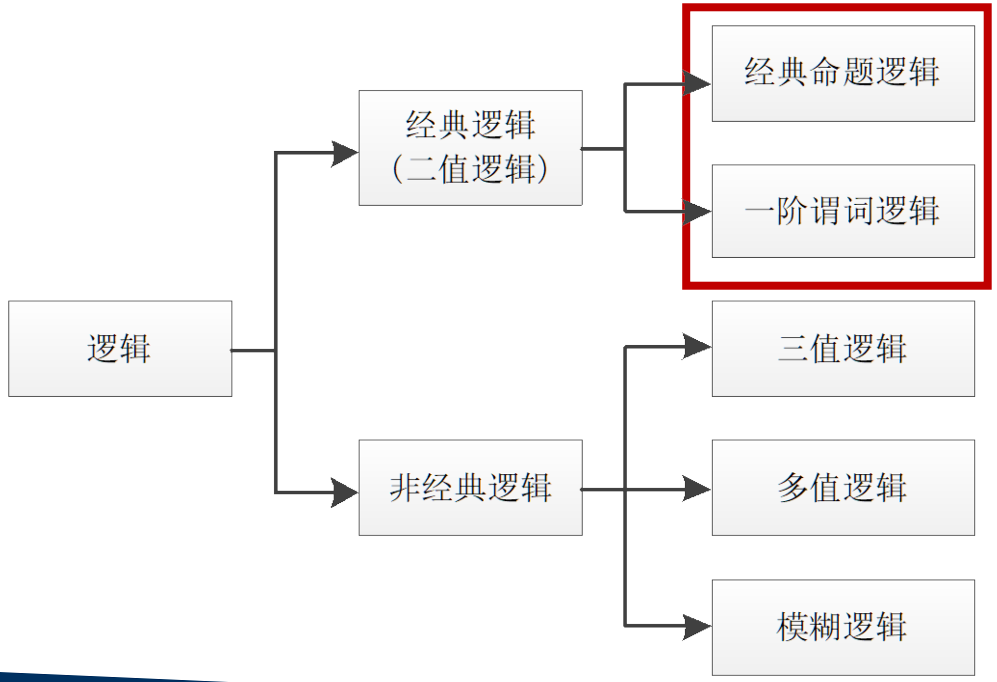
- “符号主义的思想源头和理论基础就是定理证明”



- 机器定理证明的研究继承了数学上逻辑主义和形式主义的思想：用机器来证明和判定那些可以证明和判定的问题

逻辑与人工智能

- 逻辑（思维的规律和规则）
- 用谓词逻辑来理解语文/表示知识



任何一个命题的的真值必为

“真”或“假”其中之一

命题

- 命题逻辑是最基础的，是谓词逻辑的特殊形式
- 命题是一个非真即假的陈述句

> 若命题的意义为真，称它的真值为真，记为 T。
> 若命题的意义为假，称它的真值为假，记为 F。
> 一个命题可在一种条件下为真，在另一种条件下为假。

例如：3<5

例如：太阳从西边升起

例如：1+1=10

命题逻辑

- 命题逻辑：研究命题及命题之间关系的符号逻辑系统
  - 简单命题（原子命题）：简单陈述句表达的命题
  - 复合命题：通过否定、合取、析取、条件等连接词，将原子命题构成复合命题

$\neg P$

P：北京是中华人民共和国的首都

- 命题逻辑表示法的局限性：无法反映所描述事物的结构及逻辑特征，也不能将不同事物间的共同特征表述出来

A：老李是小李的父亲

P：李白是诗人
Q：杜甫也是诗人

用命题描述事物太粗糙了→谓词

词的分类

- “词”：语义的最小单位
- 词语的不同类型：
  - 语言学上的分类：
    - ➢ （词性）名词、动词、形容词、副词、介词等等
    - ➢ （句子中的成分）主、谓、宾、定、状、补等等
  - 谓词逻辑的构成：
    - ➢ 个体词、谓词、量词、逻辑连接词（连词）、标点符号、元语言词汇

词的意思 -> 词的关系 -> 句子的意思

个体词

- 一阶谓词逻辑中，将原子命题分成主语和谓语，于是有了个体词与谓词的概念
- 个体：独立存在的客体，具体事物，抽象事物（概念）
- 个体词≈给个体起的名字
  - 一般会用小写字母来指代确定的个体
    - 个体可以是常量、变元、函数
      - 常量：表示一个或一组指定的个体
      - 变元：不指定的一个或一组个体
      - 函数：一个个体到另一个个体的映射

符号主义 – 目录

谓词

- 谓词：描述个体性质或关系的词
- 谓词的一般形式： $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

个体 $x_1, x_2, \ldots, x_n$：某个独立存在的事物或者某个抽象的概念；

谓词名 P：刻画个体的性质、状态或个体间的关系。

"老张是一个教师"："老张"→ 个体词 z，"是一个教师"→谓词名 T
$T(z)$ 描述了个体老张是一个教师这种性质，是一个一元谓词，其中个体词是常量。

"$x>y$"：二元谓词 $Greater(x, y)$，其中个体词是变元。

谓词

“老张的儿子作为一个教师为华科工作”： *Work* (*son(z)*, *hust*, *teacher*)，是三元谓词，其中*son(z)*这个个体是一个函数。

谓词	函数
有真/假	无真/假，是个体域中一个个体到另一个个体的映射

知识，非结构化的文字表达的语句 -> 谓词（一定的定义和解释） -> 结构化的表达 -> 便于计算机进行判断和推理

- 一阶谓词：谓词 $P(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ 中，若x_i都是个体常量、变元或函数
- 二阶谓词： x_i 又是一个一阶谓词。我们只讨论一阶谓词

量词

- 刻画谓词与个体间的关系，引入量词
  - 全称量词$\forall x$ ： 对个体域中的所有（或任一个）个体 x；
  - 存在量词 $\exists x$ ： 在个体域中存在个体 x 。

All

Exist

($\forall x$) $A(x)$: 对于所有的x来说，都有性质A

($\exists x$) $A(x)$: 存在个体x，其有性质A。

- 量词非常重要，缺失了量词的句子，大多难判真假。

例如：把A解释为个头超过1米8， x变元在人群中选取个体，则：

($\forall x$) $A(x)$ 为假， ($\exists x$) $A(x)$为真。

量词

- 全称量词和存在量词出现在同一个命题中，量词的次序也很重要

“男人比女人高” → $H(man, woman)$ T/F？

给谓词逻辑前面加上量词：

1. $(\exists\ man)(\forall\ woman)$： 世界上最高的那个人是男人。
2. $(\exists\ man)(\exists\ woman)$： 世界上某一个男人比某一个女人要高。
3. $(\forall\ man)(\forall\ woman)$： 世界上最矮的那个男人比最高的女人还高。
4. $(\forall\ man)(\exists\ woman)$： 世界上最矮的那个人是女人。

逻辑连接词（连词）

- 无论命题逻辑还是谓词逻辑，均可用连接词把简单命题连接起来构成复合命题，表示更复杂的含义。
- 连词表示某种运算过程，所以又叫作逻辑运算符

（1）$\neg$： “否定” （ negation ）或“非”。

（2）$\vee$： “析取” （disjunction）—— “或”。

（3）$\wedge$： “合取” （conjunction）—— “与”。

（4）$\rightarrow$： “蕴含”（implication）或“条件”（condition）。

（5）$\leftrightarrow$： “等价” （equivalence）或“双条件” （bicondition）

逻辑连接词（连词）

（1）¬：“否定”（ negation ）/ “非”

- 否定位于它后面的命题。P为真， ¬P为假； P为假， ¬P为真。

“机器人不在2号房间”： ¬ *Inroom* (*robot*, *r*2)

（2）∨： “析取”（disjunction）—— “或”。

- 表示连接的两个命题具有“或”的关系。两个命题只要有一个为真，析取的结果就为真，两个命题同为假时，结果才为假。

“李明打篮球或踢足球”：

Plays (*liming*, *basketball*) ∨ *Plays* (*liming*, *football*)

逻辑连接词（连词）

（3）∧： “**合取**”（conjunction）——“**与**”。

- 表示连接的两个命题具有“与”的关系
- 两个命题只要有一个为假，合取的结果就为假，两个命题同为真时，结果才为真。

“我喜欢音乐和绘画”：

$Like\ (I, music) \wedge Like\ (I, painting)$

“小李住在一栋黄色的房子里”：

$Live\ (li, house) \wedge Color\ (house, yellow)$

逻辑连接词（连词）

（4）→：“**蕴含**”(implication) 或“**条件**”(condition)。

- P→Q: 如果P，则Q。P称为条件的前件，Q称为条件的后件。

“如果刘华跑得最快，那么他取得冠军。”：

RUNS (*liuhua*，*faster*)→*WINS* (*liuhua*，*champion*)

蕴含和汉语中的“如果……则……”有区别！→前后的命题可以没有意思上的关联。

太阳从西边出来→雪是白的：

Rise (*sun*，*west*) → *Color* (*snow*，*white*)　　T / F ?

- 只有前件为真、后件为假时，蕴含的结果才为假，其余均为真。

逻辑连接词（连词）

- **只有前件为真、后件为假时，蕴含的结果才为假，其余均为真。**

（1）我考上了清华（A真），爸爸也给我买了新手机（B真），A→B为真，皆大欢喜。
（2）我考上了清华（A真），爸爸耍赖不给买（B假），A→B为假，因为这个真的接受不了！
（3）我没考上清华（A假），爸爸给买当然好，不给买也没话说，都行吧。A→B都是真。

T→ T	T
→ F	F
→ T	T
F→ F	T

果的： $A \to B \leftrightarrow \neg A \vee B$

吹牛例 ：如果你能赢我，我就跟你姓。

不接受例子：如果你考上清华，就给你买最新手机。

逻辑连接词（连词）

（5）↔：“**等价**”(equivalence)或“**双条件**”(bicondition)

- P↔Q表示：P当且仅当Q

谓词逻辑真值表

P　Q	¬P	P∨Q	P∧Q	P→Q	P↔Q
T　T	F	T	T	T	T
T　F	F	T	F	F	F
F　T	T	T	F	T	F
F　F	T	F	F	T	T
	否定	析取	合取	蕴含	等价

谓词公式

- 可按下述规则得到谓词演算的谓词公式

(1) 单个谓词是谓词公式，称为原子谓词公式。

(2) 若A是谓词公式，则 $\neg$A也是谓词公式。

(3) 若A, B都是谓词公式，则A∧B，A∨B，A→B，A↔B也都是谓词公式。

(4) 若A是谓词公式，则 $(\forall x)A$ ，$(\exists x)A$ 也是谓词公式。

(5) 有限步应用(1)-(4)生成的公式也是谓词公式。

连接词的优先级别从高到低排列：

$\neg$， ∧， ∨， →， ↔

谓词公式

- 量词的辖域
  - 量词的辖域：位于量词后面的单个谓词或者用括号括起来的谓词公式。
  - 约束变元与自由变元：辖域内与量词中同名的变元称为约束变元，不同名的变元称为自由变元。

例如：

$$\exists x\,(P(x, y) \rightarrow Q\,(x, y)) \vee R(x, y)$$

$(P(x, y) \rightarrow Q\,(x, \mathrm{y}))$ ：$\exists x$ 的辖域，辖域内的变元 x 是受$(\exists\ x)$约束的变元，

$R(x, y)$中的 x 是自由变元。

公式中的所有 y 都是自由变元。

谓词公式的性质

1. 谓词公式的解释

- 谓词公式在个体域上的解释：个体域中的实体对谓词演算表达式的每个常量、变量、谓词和函数符号的指派。
- 对于每一个解释，谓词公式都可求出一个真值（T或F）。

命题逻辑：各个命题变元指派真值（解释），然后通过逻辑运算可求命题公式的真值。

谓词逻辑：含有个体变元和函数，因此首先要考虑它们在个体域中的取值，然后才能对谓词指派真值。

谓词公式的性质

2. 谓词公式的永真性、可满足性、不可满足性

- 定义1：如果谓词公式 P 对个体域 D
值T，则称 P 在 D 上是永真的；如果
则称 P 永真。

- 定义2：如果谓词公式 P 对个体域 真
值F，则称 P 在 D 上是永假的；如果 P 在 上均永假，
则称P永假。

判断永真永假，必须对每个个体域上的所有解释逐一判定，当解释的个数无限时，公式的永真永假性就很难判定了。

- 定义3：对于谓词公式 P，如果至少存在一个解释使得 P 在此解释下的真值为T，则称 P 是可满足的，否则，则称 P 是不可满足的。

谓词公式的性质

3. 谓词公式的等价性

- 定义4：设P与Q是两个谓词公式，D是它们共同的个体域，若对D上的任何一个解释，P与Q都有相同的真值，则称公式P和Q在D上是等价的。如果D是任意个体域，则称P和Q是等价的，记为$P \leftrightarrow Q$ 。

（1）交换律： $P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$　　$P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$

（2）结合律： $(P \vee Q) \vee R \leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$　　$(P \wedge Q) \wedge R \leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

（3）分配律： $P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

谓词公式的性质

非(P且Q) = (非P)或(非Q)
非(P或Q) = (非P)且(非Q)

（4）德·摩根(De Morgen)定律： $\neg(P\vee Q)\leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$

$\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$

（5）双重否定律（对合律）：

否定符移到量词后面时，全称量词变为存在量词，存在量词变为全称量词。
例： P：个头超过1米8.
$(\exists x)$ P：存在一个人个头超过1米8。
$\neg(\exists x)P\leftrightarrow(\forall x)(\neg P)$：
所有人个头都不超过1米8.

（6）吸收律： $P\vee(P\wedge$

（7）补余律（否定律）： P

（8）连接词化规律（蕴含、等价

（9）逆否律： $P\rightarrow Q\leftrightarrow\neg Q\rightarrow\neg P$

（10）量词转换律： $\neg(\exists x)P\leftrightarrow(\forall x)(\neg P)$ $\neg(\forall x)P\leftrightarrow(\exists x)(\neg P)$

（11）量词分配律： $(\forall x)(P\wedge Q)\leftrightarrow(\forall x)P\wedge(\forall x)Q$ 全称对应与，存在对应或

$(\exists x)(P\vee Q)\leftrightarrow(\exists x)P\vee(\exists x)Q$

谓词公式的性质

- 4. 谓词公式的永真蕴含

▪定义5：对于谓词公式P与Q，如果P→Q永真，则称公式P永真蕴含Q，记作P ⇒ Q，且称Q为P的逻辑结论，称P为Q的前提。

一些永真蕴含式是进行演绎推理的重要规则

➢ **假言推理**　P, P→Q ⇒ Q　如果P为真以及P→Q为真，则可推出Q为真。

例如：

P：今天下雨了。Q：地面湿了。如果今天确实下雨了，并且因为下雨地面会湿，所以可推出地面湿了。

谓词公式的性质

- **拒取式推理** $\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$ 如果Q为假以及P→Q为真，则可推出P为假。

例如：

P：今天下雨了。Q：地面湿了。地面没湿，因为下雨地面会湿，所以可推出今天没下雨。

- **假言三段论** $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ 如果P→Q及Q→R为真，则可推出P→R为真。

例如：

P→Q 燕子是一种鸟　　Q→R 鸟都有羽毛

P→R 所以燕子是有羽毛的

谓词公式的性质

- **全称固化** $(\forall x)P(x) \Rightarrow P(y)$ y为个体域中的任一个体。

例如：

$(\forall x)P(x)$：所有人都会die… y当然也会die …

- **存在固化** $(\exists x)P(x) \Rightarrow P(y)$ y为个体域中某一个可使$P(y)$为真的个体。

例如：

$(\exists x)P(x)$：有人长得很好看… y代表刘亦菲长得很好看…

谓词公式的性质

➢**反证法**： $P \Rightarrow Q$，当且仅当 $P \wedge \neg Q \leftrightarrow \boldsymbol{F}$。

- 即Q为P的逻辑结论，当且仅当 $P \wedge \neg Q$是不可满足的。

例如： P：路边树上有果子　　Q：果子难吃

（果子好吃早被摘光了）$P \wedge \neg Q$：树上有果子且果子好吃 不可能 $\boldsymbol{F}$

$P \Rightarrow Q$：所以果子难吃。

定理：

Q为P_1，P_2，…，P_n的逻辑结论，当且仅当$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \wedge \neg Q$是不可满足的。

一阶谓词逻辑知识表示方法

谓词公式表示知识的步骤：

（1）定义谓词及个体；

（2）变元赋值；

（3）用连接词连接各个谓词，形成谓词公式。

一阶谓词表示方法并不唯一：

（1）定义个体 x 表示人，y 表示钱，$S(x,y)$表示 x 存了 y 钱，$I(u)$表示 u 是利息，$O(x,u)$表示 x 获得了u 钱

$$(\forall x)((\exists y)(S(x,y)) \rightarrow (\exists u)(I(u) \wedge O(x,u)))$$

一阶谓词逻辑知识表示方法

- 将自然语言翻译为谓词逻辑语言：

➢ 本课程的所有学生都很聪明。

$(\forall x)(C(x)\rightarrow S(x))$。对所有x来说，如果x是本课程学生，x就很聪明。

➢ 本课程的有些学生是女生。

$(\exists x)(C(x)\wedge G(x))$。存在个体x，x是本课程学生，且是女生。

➢ 这个世界上不存在龙。

$\neg(\exists x)L(x)$，不存在个体x，x是龙。

➢ 所有的父母生气时就会发脾气。

$(\forall x)(P(x)\wedge A(x)\rightarrow T(x))$。对于所有的x来说，如果x是父母并且生气，那么x就会发脾气。

一阶谓词逻辑知识表示方法

- 将自然语言翻译为谓词逻辑语言：

➢ 有些泳池要么就是不干净，要么就是很拥挤。

➢ 玫瑰花和梅花都是花。

➢ 有一些老师会很高兴，当且仅当有一些同学学习很好。

一阶谓词逻辑知识表示方法

- 将自然语言翻译为谓词逻辑语言：

➢ 有些泳池要么就是不干净，要么就是很拥挤。

$(\exists x)(P(x) \land (\neg C(x) \lor C(x)))$。存在一些x，x是泳池，并且，x或者是不干净的或者是拥挤的。

➢ 玫瑰花和菊花都是花。

$(\forall x)(M(x) \lor J(x) \rightarrow H(x))$。对于所有的x来说，如果x是玫瑰或者x是菊花，那么x就是花。

➢ 有一些老师会很高兴，当且仅当有一些同学学习很好。

$(\exists x)(T(x) \land H(x)) \leftrightarrow (\exists y)(S(y) \land G(y))$。存在一些x，x是老师并且x很高兴，当且仅当，存在一些y，y是学生并且y学习好。

华中科技大学 HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

一阶谓词逻辑知识表示的特点

优点：

① 自然性
② 精确性
③ 严密性
④ 容易实现

局限性：

① 不能表示不确定的知识
② 组合爆炸
③ 效率低

应用：

- 自动问答系统（Green等人研制的QA3系统）
- 机器人行动规划系统（Fikes等人研制的STRIPS系统）
- 机器博弈系统（Filman等人研制的FOL系统）
- 问题求解系统（Kowalski等设计的PS系统）

符号主义－目录

- 3.1 简介与基本概念
- 3.2 命题逻辑
- 3.3 一阶谓词逻辑
- 3.4 一阶逻辑推理
    - ➢ 自然演绎推理
    - ➢ 归结演绎推理

自然演绎推理

- 自然演绎推理：从一组已知为真的事实出发，运用经典逻辑的推理规则推出结论的过程。
- 推理规则：P规则、T规则、假言推理、拒取式推理
  - P规则（前提引入）：在推导的任何步骤上都可以引入前提。
  - T规则（结论引用）：在推导的任何步骤上所得结论都可以作为后继证明的前提。
  - 假言推理：具有两个前提，其中一个前提是假言判断，另一个是此假言判断的前件或后件。假言判断反映了事物情况之间的条件关系，应用假言推理使我们能由某个事物情况是否存在，推出另一事物情况是否存在。
  - 拒取式推理：是在蕴含表达式中，否定后件，得出否定前件的结论。

自然演绎推理

P(x)：x是金属
Q(x)：x能导电

- **假言推理**： $P,\ P \to Q \Rightarrow Q$

铜是金属，如果是金属则能导电，推出铜能导电

- **拒取式推理**： $P \to Q,\ \neg Q \Rightarrow \neg P$

"如果是金属则能导电"，"塑料不能导电"推出"塑料不是金属"

自然演绎推理

- 充分条件
  - 如果它是金属，则它能导电；铜是金属，所以铜能导电；塑料不能导电，则塑料不是金属。
  - 如果承认前件就承认后件；如果否认后件就否认前件。
- 必要条件
  - 只有结婚了的人，才有结婚证；小张没有结婚证，所以小张没有结婚；有结婚证的人，肯定已经结婚了。
  - 否认前件就否认后件；承认后件就承认前件
- 充要条件
  - 当且仅当一个数能被2整除，这个数才是偶数；3不能被2整除，所以3不是偶数；3不是偶数，所以3不能被2整除。
  - 承认其中的一个，就必须承认其中的另一个；否认其中的一个，就必须否认其中的另一个

自然演绎推理

- 例： 已知事实：

（1）凡是容易的课程小王(wang)都喜欢；

（2）C 班的课程都是容易的；

（3）ai 是 C 班的一门课程。

求证：小王喜欢 ai 这门课程。

定义谓词：

EASY(x)：x 是容易的

LIKE(y, x)：y喜欢 x

C(x)：x 是 C 班的一门课程

已知事实和结论用谓词公式表示：

$(\forall x)(EASY(x) \rightarrow LIKE(wang, x))$

$(\forall x)(C(x) \rightarrow EASY(x))$

$C(ai)$

$LIKE(wang, ai)$

自然演绎推理

已知事实和结论用谓词公式表示：

$(\forall x)(EASY(x) \rightarrow LIKE(wang, x))$

$(\forall x)(C(x) \rightarrow EASY(x))$

$C(ai)$

$LIKE(wang, ai)$

- 应用推理规则进行推理：

$(\forall x)(EASY(x) \rightarrow LIKE(wang, x))$

$EASY(z) \rightarrow LIKE(wang, z)$　　全称固化

> ➢ **全称固化**　$(\forall x)P(x) \Rightarrow P(y)$　　y为个体域中的任一个体。
>
> 例如：
>
> $(\forall x)P(x)$：所有人都会die…　　y当然也会die …

$(\forall x)(C(x) \rightarrow EASY(x))$

$C(y) \rightarrow EASY(y)$

所以 $C(ai), C(y) \rightarrow EASY(y)$

$\Rightarrow EASY(ai)$　　P规则及假言推理，充分条件假言推理

如肯定前件，则肯定后件

所以 $EASY(ai), EASY(z) \rightarrow LIKE(wang, z)$

$\Rightarrow LIKE(wang, ai)$　　T规则及假言推理

自然演绎推理

优点：

- 表达定理证明过程自然，易理解
- 拥有丰富的推理规则，推理过程灵活
- 便于嵌入领域启发式知识

- 缺点：
  - 易产生组合爆炸，得到的中间结论一般呈指数形式递增
  - 对大的推理问题不利

符号主义－目录

归结演绎推理

- 归结证明过程是一种反驳方法，即不是证明一个公式是有效的，而是证明公式之非是不可满足的
- Herbrand为其奠定了理论基础，Robinson原理使定理证明的机械化变为现实

Robinson

➢**反证法**： $P \Rightarrow Q$，当且仅当 $P \wedge \neg Q \leftrightarrow \boldsymbol{F}$。

- 即Q为P的逻辑结论，当且仅当 $P \wedge \neg Q$是不可满足的。

> 定理：
>
> Q为P_1，P_2，…，P_n的逻辑结论，当且仅当 $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \wedge \neg Q$ 是不可满足的。

谓词公式化为子句集

- 同一个命题或谓词公式可以用不同的形式来表达，它们之间是相互等值的
- 将谓词公式转化为与其等价的标准形式，方便做推理
- 一些定义：
  - 原子谓词：不能再分解的命题
  - 文字：原子谓词公式及其否定
  - 子句：任何文字本身及其析取式
  - 空子句：不包含任何文字的子句。空子句不能被任何解释满足，所以它是永假的、不可满足的。
  - 子句集：由子句构成的集合（各子句是合取关系）。

谓词公式 $\xleftrightarrow{\text{容易判定其不可满足性}}$ **子句集**

谓词公式化为子句集

- 合取范式：公式G称为合取范式，当且仅当G有形式$G_1 \wedge G_2 \wedge \ldots G_n$ (n>=1) 其中每个G_i都是文字的析取式
- 析取范式：公式G称为析取范式，当且仅当G有形式$G_1 \vee G_2 \vee \ldots G_n$ (n>=1) 其中每个G_i都是文字的合取式

- 例如：P Q R是原子，则 P Q R ¬P ¬Q ¬R都是文字
  - $(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q)$ 是合取范式
  - $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$ 是析取范式

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谓词公式化为子句集

- 定理：对任意公式，都有与之等值的合取范式和析取范式

子句集

$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q)$　是合取范式

$\{P \vee \neg Q \vee R,\ \neg P \vee Q\}$　子句集

- 使用等价式中的连接词化规律消去公式中的连接词
- 反复使用双重否定律和德·摩根律将否定符号移到原子之前
- 反复使用分配律和其他定律得出标准型

鲁滨逊归结原理

- 消解原理，是机器定理证明的基础
- 通过子句集中子句的不可满足性分析，证明谓词公式的不可满足性
- 子句集中的子句是合取关系（与），其中只要有一个子句不可满足，子句集就一定不可满足
- 空子句不可满足
- 子句集中只要有一个子句是空子句，则子句集一定是不可满足的

鲁滨逊归结原理

谓词公式 不可满足性	⟷	子句集 不可满足性

定理:

谓词公式不可满足的充要条件是其子句集不可满足。

命题逻辑消解推理规则

什么是消解？

例1：小王说他下午或者去图书馆或者在家休息

小王没去图书馆

R：小王下午去图书馆

S：小王下午在家休息

$$\left.\begin{array}{l} R \vee S \\ \neg R \end{array}\right\} \Rightarrow S$$

例2： 如果今天不下雨，我就去你家

今天没有下雨

P：今天下雨

Q：我去你家

$$\neg P \rightarrow Q \leftrightarrow P \vee Q$$

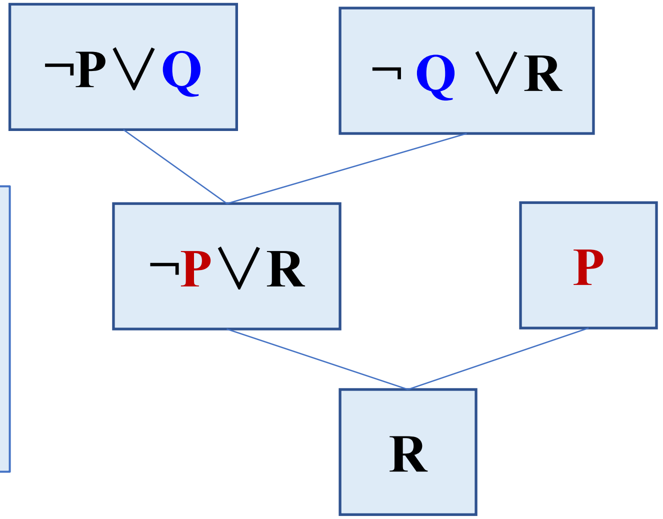
$$\neg P$$

$$\Rightarrow Q$$

命题逻辑消解推理规则

1. 命题逻辑中的归结原理

定义（归结）：设C_1与C_2是子句集中的任意两个子句，如果C_1中的文字L_1 与 C_2中的文字L_2 互补，那么从C_1和 C_2中分别消去L_1和L_2，并将二个子句中余下的部分析取，构成一个新子句C_{12} 。



定理：归结式C_{12}是其亲本子句C_1与C_2的逻辑结论。即如果 C_1与C_2为真，则C_{12}为真。

命题逻辑消解推理规则

- 推论1：设C_1与C_2是子句集S中的两个子句，C_{12}是它们的归结式，若用C_{12}代替C_1与C_2后得到新子句集S_1，则由S_1不可满足性可推出原子句集S的不可满足性，即：

$$\mathrm{S}_1\text{的不可满足性} \Rightarrow S\text{ 的不可满足性}$$

- 推论2：设C_1与C_2是子句集S中的两个子句，C_{12}是它们的归结式，若C_{12}加入原子句集S，得到新子句集S_1，则S与S_1在不可满足的意义上是等价的，即：

$$\mathrm{S}_1\text{的不可满足性} \leftrightarrow S\text{ 的不可满足性}$$

如果经过归结能得到空子句，则立即可得到原子句集S是不可满足的结论。

谓词逻辑消解推理规则

2. 谓词逻辑中的归结原理

子句中含有变元，不能直接消去互补文字，需要先用最一般合一对变元进行代换，然后才能进行归结。

$$C_1 = P(x) \vee Q(x)$$

$$C_2 = \neg P(a) \vee R(y)$$

最一般合一

$$\sigma = \{a/x\}$$

$$C_1\sigma = P(a) \vee Q(a)$$

$$C_2\sigma = \neg P(a) \vee R(y)$$

$$C_{12} = Q(a) \vee R(y)$$

如果能找到一个公式集的合一，特别是最一般合一，则可使互否的文字形式结构完全一致起来，进而达到消解的目的。

谓词逻辑消解推理规则

2. 谓词逻辑中的归结原理

子句中含有变元，不能直接消去互补文字，需要先用最一般合一对变元进行代换，然后才能进行归结。

$C_1 = P(x) \vee Q(x)$

$C_2 = \neg P(a) \vee R(y)$

最一般合一

$\sigma = \{a/x\}$

$C_1\sigma = P(a) \vee Q(a)$

$C_2\sigma = \neg P(a) \vee R(y)$

$C_{12} = Q(a) \vee R(y)$

定义：设是C_1和C_2是两个没有相同变元的子句，L_1和L_2分别是C_1和C_2中的文字，若σ是L_1和$\neg L_2$的最一般合一，则称

为C_1和C_2的二元归结式。

谓词逻辑消解推理规则

- 对于谓词逻辑，归结式是其亲本子句的逻辑结论。
- 对于一阶谓词逻辑，即若子句集是不可满足的，则必存在一个从该子句集到空子句的归结演绎；若子句集存在一个到空子句的演绎，则该子句集是不可满足的。
- 如果没有归结出空子句，则既不能说S不可满足，也不能说S是可满足的。

归结反演

定理：

Q为P_1，P_2，…，P_n的逻辑结论，当且仅当$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \wedge \neg Q$是不可满足的。

- 应用归结原理证明定理的过程称为**归结反演**。
- 用归结反演证明的步骤是：

（1）将已知前提表示为谓词公式P。

（2）将待证明的结论表示为谓词公式Q，并否定得到$\neg Q$。

（3）把谓词公式集$\{P, \neg Q\}$化为子句集S。

（4）应用归结原理对子句集S中的子句进行归结，并把每次归结得到的归结式都并入到S中。如此反复进行，若出现了空子句，则停止归结，此时就证明了Q为真。

归结反演

Q为P_1，P_2，…，P_n 的逻辑结论，当且仅当 $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \wedge \neg Q$ 是不可满足的。

- 例：某公司招聘工作人员，A，B，C三人应试，经面试后公司表示如下想法：

（1） 三人中至少录取一人。 $P(A) \vee P(B) \vee P(C)$

（2） 如果录取 A 而不录取 B，则一定录取 C。 $P(A) \wedge \neg P(B) \rightarrow P(C)$

（3） 如果录取 B，则一定录取 C 。 $P(B) \rightarrow P(C)$

求证：公司一定录取 C。

证明：公司的想法用谓词公式表示——P(*x*): 录取 *x*

将待证明的结论表示为谓词公式，并否定：$\neg P(C)$

把上述公式化为子句集：

$P(A) \vee P(B) \vee P(C)$

$\neg P(A) \vee P(B) \vee P(C)$

$\neg P(B) \vee P(C)$

$\neg P(C)$

德・摩根(De Morgen)定律：

$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

连接词化规律（蕴含、等价等值式）：$P \rightarrow Q \leftrightarrow \neg P \vee Q$

归结反演

- 例：某公司招聘工作人员，A，B，C三人应试，经面试后公司表示如下想法：

（1） 三人中至少录取一人。

（2） 如果录取 A 而不录取 B，则一定录取 C。

（3） 如果录取 B，则一定录取 C 。

求证：公司一定录取 C。

子句集：	(1) $P(A) \vee P(B) \vee P(C)$	(5) $P(B) \vee P(C)$	由 (1) (2) 归结
	(2) $\neg P(A) \vee P(B) \vee P(C)$	(6) $P(C)$	由 (3) (5) 归结
	(3) $\neg P(B) \vee P(C)$	(7) 空	由 (4) (6) 归结
	(4) $\neg P(C)$	∴结论成立	