第 7 章 Petri 网建模方法

一、复习题

1、Petri 网建模（应该包括变量设置、Petri 网模型、模型的解释等）

2、Petri 网的性能分析

3、可达树分析方法

4、状态方程及其应用

二、基本概念

1.发展历史

- 1962 年(联邦)德国的 Carl Adam Petri 博士在他的博士论"Communication with automata"(用自动机通信)中首次提出了一种网状结构的信息流模型（Petri 网）。
- Petri 网是一种系统的数学和图形描述与分析工具。对于具有并发、异步、分布、并行、不确定性和/或随机性的信息处理系统：
  - 构造出相应的 Petri 网模型；
  - 对 Petri 网模型进行分析（系统结构和动态行为）；
  - 对所研究的系统进行评价和改进。
- 经过 50 多年的发展，目前 Petri 网建模方法已在分布式软件系统、分布式数据库系统、离散事件系统、神经网络、决策模型、化学系统、法律系统、机械加工系统、计算机通讯系统等众多领域中得到广泛应用。
- **Petri 网发展过程：**
  - 第一阶段：20 世纪 60 年代，以孤立的网系统为对象，以寻求分析技术和应用方法为目标——"特殊"网论（与"一般"或"通用"比较而言）。
  - 第二阶段： 20 世纪 70 年代，是通用网论的研究，以网系统的全体为对象，研究其分类以及各类网之间的关系，发展了以并发论，同步论，网逻辑和网拓扑为主要内容的理论体系。
  - 第三阶段： 20 世纪 80 年代，是 Petri 网的综合发展阶段，以理论与应用的结合及计算机辅助工具的开发为主要内容。（Petri 网具有充分的模拟能力和丰富的分析方法）。
- **任何系统都由两类元素组成：**
  - *表示状态的元素*；
  - *表示状态变化的元素*。
- **在 Petri 网中，前者用库所（ place 或 site）表示，后者用变迁（transition）表示。**
  - 变迁的作用——改变状态（如离散事件系统中的事件）；
  - 库所的作用——决定变迁能否发生(如离散事件系统中的状态/活动)。
- *二者之间的这种依赖关系用弧（箭头）表示出来——一个 Petri 网*。

2.Petri 网数学定义

- 一个Petri网是一个三元组

$$N=(P,T,F)$$

- **P={p_1，p_2，…，p_m}为库所（place）的集合；**
- **T={t_1，t_2，…，t_n}为变迁（transition）的集合；**
- **F＝（P×T）∪（T×P）为输入函数和输出函数集，称为流关系。**

3.Petri 网的定义与图示方法

三元组 $N=(P,T;F)$ 称为 Petri 网的充要条件是：

(1) $P\cup T\neq\phi$； 表示网中至少有一个元素

(2) $P\cap T\neq\phi$； 规定了库所和变迁是两类不同的元素

(3) $F\subseteq(P\times T)\cup(T\times P)$； 建立了从库所到变迁、从变迁到库所的单方向联系，并且规定同类元素之间不能直接联系

(4) $dom(F)\cup cod(F)=P\cup T$。

其中：

$P=\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$ 是 N 的有穷库所集合；

$T=\{T_1,T_2,\cdots,T_m\}$ 是 N 的有穷变迁集合；

F 是由 N 中的一个 P 元素和一个 T 元素组成的有序偶的集合，称为 N 的流关系；

$dom(F)=\{x\mid\exists\ y:\ (x,y)\in F\}$ 为 F 所含有序偶的第一个元素的集合；

$cod(F)=\{x\mid\exists\ y:\ (y,x)\in F\}$ 为 F 所含有序偶的第二个元素的集合；

$\times$ 表示集合的直积运算（笛卡儿积），定义为：

假定 $A=\{x_h\mid h\in H\}$，$B=\{y_k\mid k\in K\}$，其中，H 和 K 为整数集，那么有序偶 $\{(x_h,y_h)\mid x_h\in A,y_k\in B\}$ 称为 A 和 B 的直积，记作 $A\times B$。

条件(1)和(2)表明，Petri 网由 P 和 T 两类元素组成；

条件(3)表明，F 是由一个 P 元素和一个 T 元素组成的有序偶的集合；

条件(4)表明，N 不能有孤立元素，从而 P、T 和 F 均不能为空集。Petri 网又称有向网，简称网。$X=P\cup T$ 称为 N 的元素集。

为方便起见，定义库所或变迁的前集和后集。设 $x\in X$ 为网 $N=(P,T;F)$ 的一个元素，令 ${}^{\bullet}x=\{y\mid(y,x)\in F\}$，$x^{\bullet}=\{y\mid(x,y)\in F\}$，则 ${}^{\bullet}x$ 称为 x 的前集或输入集；$x^{\bullet}$ 称为 x 的后集或输出集。

Petri 网的标准图形表示是用圆圈代表库所，用方框或竖线表示变迁，用从 x 到 y 的有向弧表示有序偶 (x,y)。如果 (x,y) 是从 x 到 y 的有向弧，就称 x 是 y 的输入，y 是 x 的输出。

三元组 $N=(P,T;F)$ 称为 Petri 网的充要条件是：

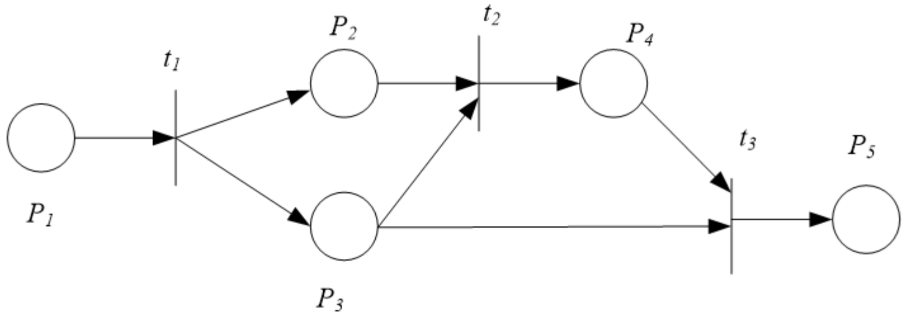
(1) $P\cup T\neq\phi$；

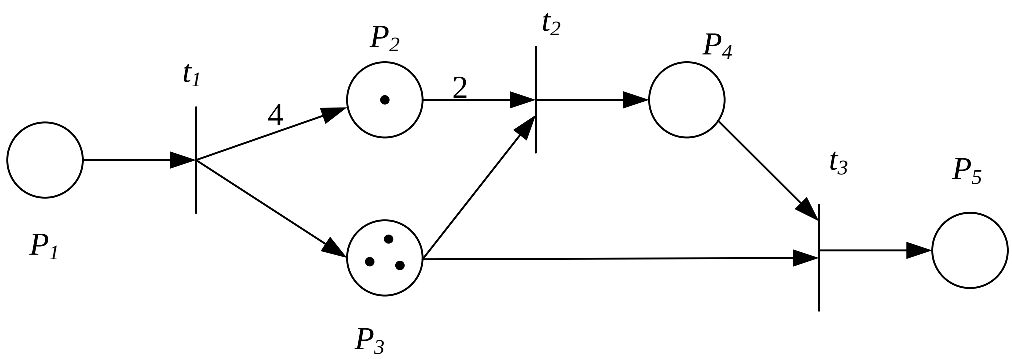
(2) $P\cap T\neq\phi$；

(3) $F\subseteq(P\times T)\cup(T\times P)$；

(4) $dom(F)\cup cod(F)=P\cup T$。

4.一个简单的 Petri 网





- **图形化表示：**
  - **以圆圈表示为库所**
  - **以粗实线表示变迁**
  - **以联结库所与变迁之间的有向弧表示输入输出函数**
  - **用令牌（token）表示库所中拥有的资源数量。**

  ——黑点或数字表示

Petri 网描述系统的最基本概念是库所和变迁

- 库所表示系统的状态。
- 变迁表示资源的消耗、使用及使系统状态产生的变化。
- 变迁的发生受到系统状态的控制（变迁发生的前置条件必须满足）;
- 变迁发生后，某些前置条件不再满足，而某些后置条件则得到满足。

5. Petri 网的定义与图示方法

例5.6.1 用螺钉将零件1、零件2和零件3连接起来得到零件4的Petri网的图形表示如图5.25所示。其中，库所p_1、p_2和p_3可以分别理解为处于就绪状态的零件1、零件2和零件3，p_4表示连接成功的零件4，变迁t_1表示三个零件之间的连接。

该网的数学表示为$N=(P,T;F)$，其中：

$$P=\{p_1,p_2,p_3,p_4\},T=\{t_1\},F=\{(p_1,t_1),(p_2,t_1),(p_3,t_1),(p_4,t_1)\}$$

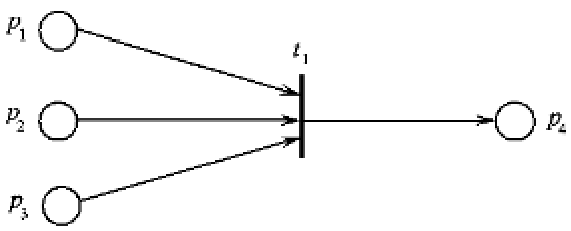


图 5.25 螺钉连接 Petri 网

6.网系统

- 网——系统静态结构的基本描述，要模拟系统的动态行为，需要定义网系统。
- 在定义网系统之前，先定义容量、标识和权函数。

1. 容量、标识、权函数的定义

设 $N=(P,T;F)$ 是有向图，则

(1) 映射 $K:P\to N^{+}\cup\{\omega\}$ 称为 N 上的一个容量函数，即库所 P 中所容纳的资源数量，其中 $N^{+}=\{1,2,3,\cdots\}$。$K(P)=\omega$ 表示 P 的容量为无穷，一般不标注，$K(P)=\{k(p_1),k(p_2),\cdots,k(p_n)\}$。

(2) 若 K 是 N 上的容量函数，映射 $M:P\to N^{+}\cup\{0\}$ 称为 N 的一个标识的充要条件是：$p\in P$ 均满足 $M(p)\leqslant K(p)$。标识为库所中实际资源数量。

(3) 映射 $W:F\to N^{+}$ 称为 N 的权函数。W 在弧 (x,y) 上的值用 $W(x,y)$ 表示，表示变迁对资源的消耗或产品的生产量。

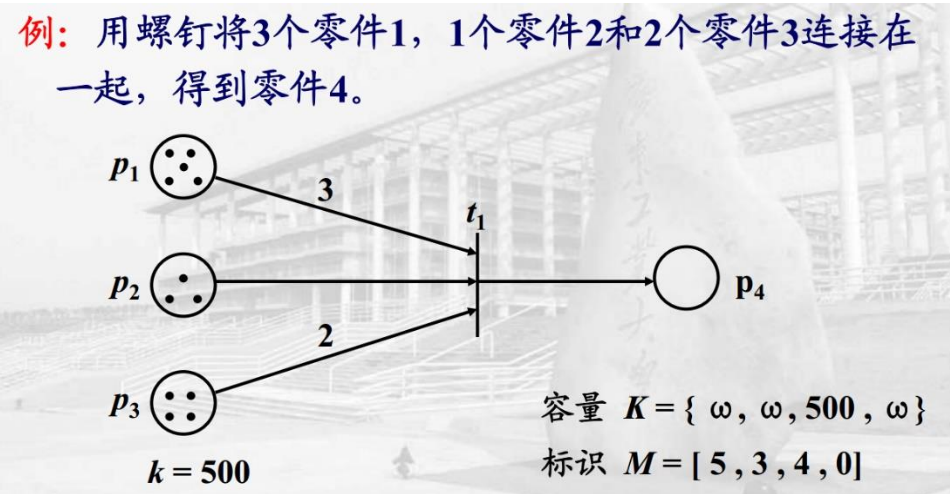
至此，可以得到如下关于容量、标识和权函数的更一般化的说明：

(1) 容量 $K(p)$ 表示库所 p 中允许存放令牌的最大数量，其值标在表示库所的圆圈旁；不标明时容量为 ω。

(2) 权 $W(x,y)$ 表示变迁发生时消耗或产出的令牌数量，其值标在弧 (x,y) 上；不标明时表示权为 1。

(3) 令牌表示原料、部件、产品、人员、工具、设备、数据和信息等组成系统的“资源”，标识 $M(p)$ 的值用令牌数表示，而令牌则表示为库所中的黑点。同一库所中的诸多令牌代表同一类完全等价的个体，缺省值为 0。

容量、权、标识也是系统静态结构描述的一部分。



2. 网系统的定义

六元组 $\sum=(P,T;F,K,W,M_0)$ 称为一个网系统，当且仅当

(1) $N=(P,T;F)$ 是 Petri 网，称为 $\sum$ 的基网；

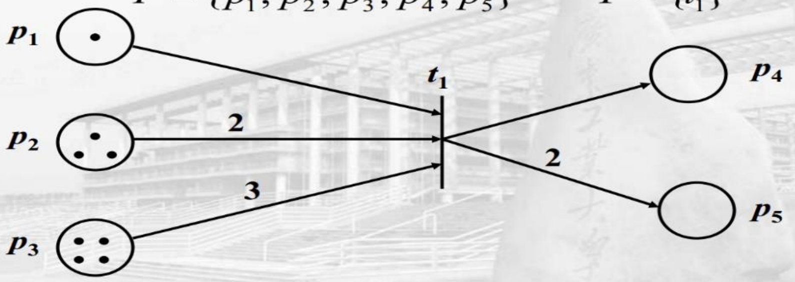
(2) K,W,M 分别是 N 上的容量函数、权函数和标识，M_0 是 $\sum$ 的初始标识。

网系统的状态用令牌在库所中的分布来表示，系统状态变量 $\overline{M}=(m_1,m_2,\cdots,m_n)$，其中，$m_i=M(p_i)$，$p_i\in P$。

当变迁不断发生时，网系统的状态也不断发生变化，这一过程称为网系统的运行。

- Petri 网图是一个五元组：$PN = (P, T, I, O, M)$
- P是库所(*place*)节点的集合；
- T是变迁(*Transition*)节点的集合；
- I 是输入函数 $P \to T$的有向弧线的集合；
- O 是输出函数 $T \to P$ 的有向弧线的集合；
- M是标识，为一函数向量，$M(p_i)$表示库所p_i中所含令牌个数。

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \qquad T = \{t_1\}$$



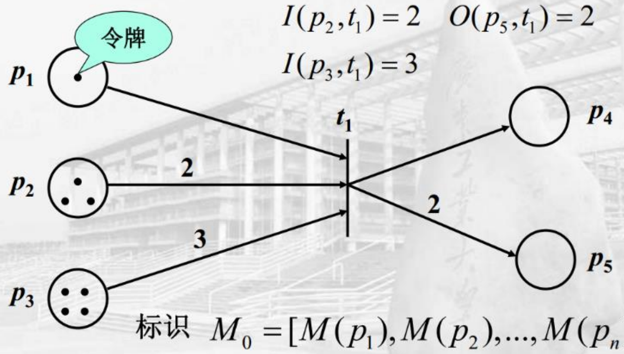
$$IP(t_j) = \{p \in P \mid I(p, t_j) \neq 0\} \qquad OP(t_j) = \{p \in P \mid O(p, t_j) \neq 0\}$$

➢Petri网基本概念

$I(p_1, t_1) = 1 \quad O(p_4, t_1) = 1$

$I(p_2, t_1) = 2 \quad O(p_5, t_1) = 2$

$I(p_3, t_1) = 3$



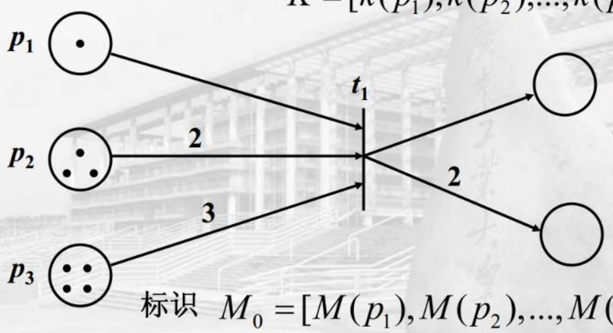
标识 $M_0 = [M(p_1), M(p_2), \ldots, M(p_n)]^T$

$= [1 \quad 3 \quad 4 \quad 0 \quad 0]^T$

➢Petri网基本概念

容量函数

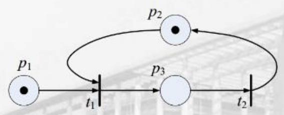
$K = [k(p_1), k(p_2), \ldots, k(p_n)]^T$



标识 $M_0 = [M(p_1), M(p_2), \ldots, M(p_n)]^T$

$= [1 \quad 3 \quad 4 \quad 0 \quad 0]^T$

Petri网的关联矩阵



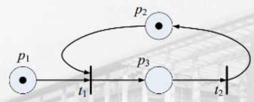
■ 输入、输出函数

$I(p_1,t_1)=1,\ I(p_1,t_2)=0 \qquad O(p_1,t_1)=0,\ O(p_1,t_2)=0$

$I(p_2,t_1)=1,\ I(p_2,t_2)=0 \qquad O(p_2,t_1)=0,\ O(p_2,t_2)=1$

$I(p_3,t_1)=0,\ I(p_3,t_2)=1 \qquad O(p_3,t_1)=1,\ O(p_3,t_2)=0$

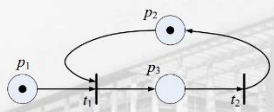
Petri网的关联矩阵



■ 输入、输出函数矩阵表示

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad O=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Petri网的关联矩阵



■ 关联矩阵

$$C=O-I=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

Petri网的变迁规则

变迁的发生表示系统状态的变化，可用变迁的发射（事件的发生）规则来定义。

变迁条件和发射规则：

对于 $t \in T$ 如果

$p \in IP(t_j),\ M(p_i) \geq I(p_i,t_j)$

$p \in OP(t_j),\ M(p_i) \leq K(p) - O(p_i,t_j)$

$p \in IP(t_j) \wedge p \in OP(t_j), I(p_i,t_j) \leq M(p_i) \leq K(p_i) + I(p_i,t_j) - O(p_i,t_j)$

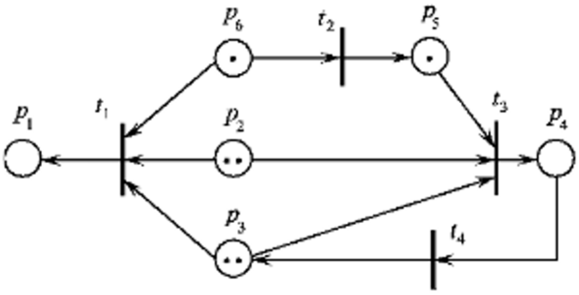
成立，则变迁是可能的

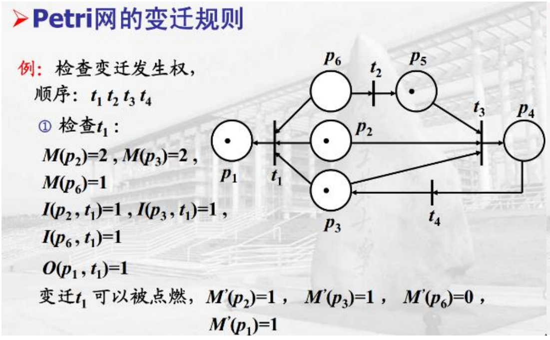
Petri网的变迁规则

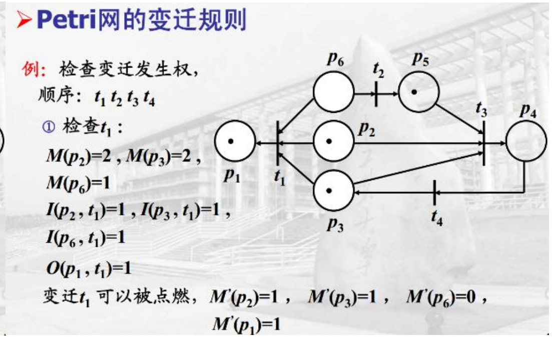
变迁后的结果是

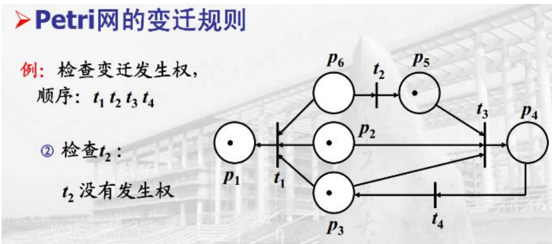
$$M'(p_i)=\begin{cases} M(p_i)-I(p_i,t_j), \forall p_i \in IP(t_j) \\ M(p_i)+O(p_i,t_j), \forall p_i \in OP(t_j) \\ M(p_i)+O(p_i,t_j)-I(p_i,t_j), \forall p_i \in IP(t_j) \wedge p_i \in OP(t_j) \end{cases}$$

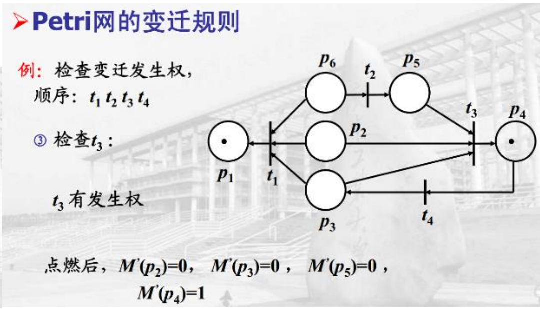
注意：网运行时一定要事先规定变迁的扫描顺序，不同的扫描顺序将导致不同的结果。

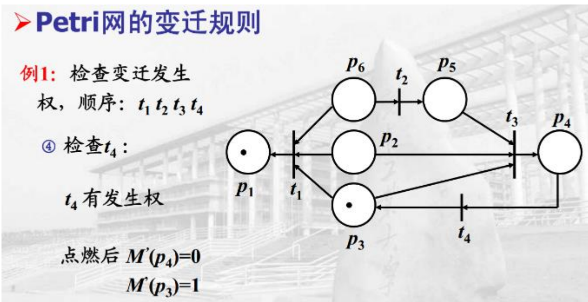




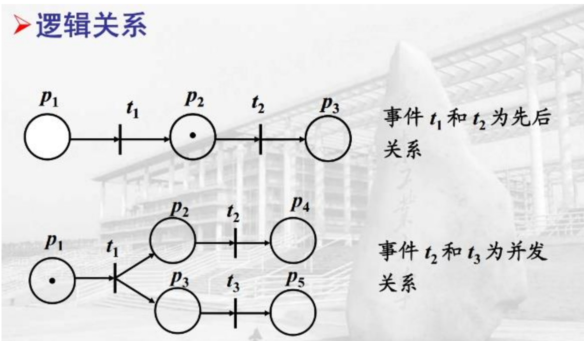


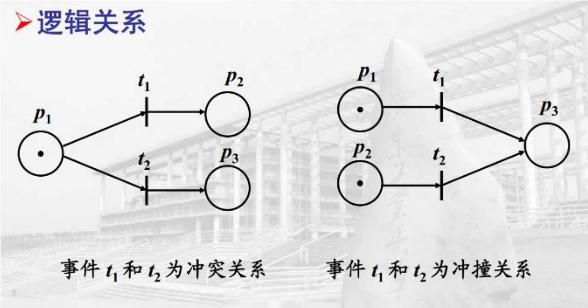






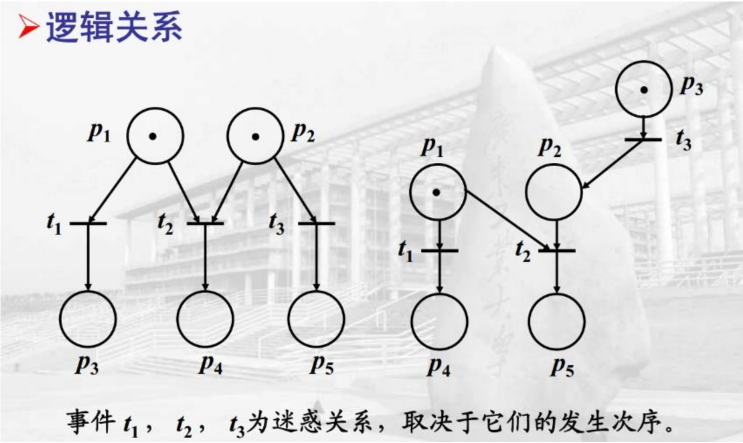
7.事件之间的关系



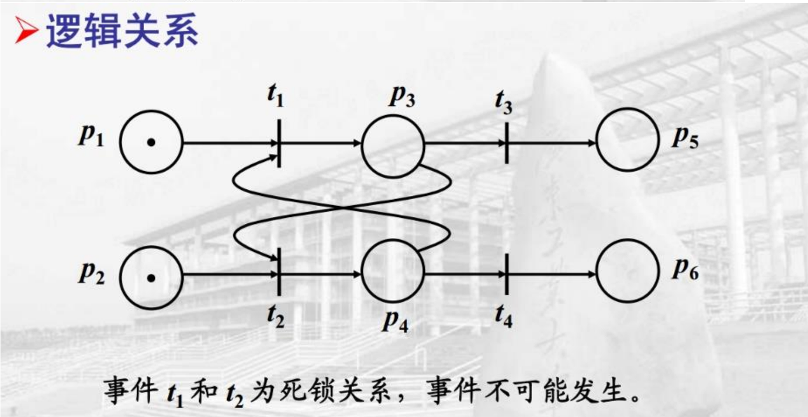


冲突关系： 如果两个变迁中的一个发生，则另一个必不能发生，*冲突是因共享资源不够所引起的。*

冲撞关系： 变迁 t1 和 t2 中只有一个发生，否则库所 p3 中的令牌大于 1。冲撞是由库所容量不够所引起的。



迷惑关系： 如果变迁 t2 先发生，则 t1、t3 不能发生，反之，如果 t1、t3 发生，则 t2 不能发生，变迁的发生取决于发生的次序。t1 和 t3 并发，t1 和 t2 冲突，t2 和 t3 冲突，**迷惑的表现形式为并发和冲突并存。**



死锁关系： 变迁 t1 发生的条件是库所 p4 中有一个令牌，而要 p4 中有一个令牌必须变迁 t2 发生，但 t2 发生必须要库所 p3 中有一个令牌，然而要 p3 中有一个令牌必须变迁 t1 发生。故 t1 和 t2 不可能发生。

8.网系统的分类

根据容量函数和权函数的特点，可将网系统分为三类。

1）条件/事件网系统或 C/E（Condition/Event）网系统（基本网系统）

$$K = 1, W = 1$$

- 库所称为条件，只有两种状态：有一个令牌或没有令牌，有令牌条件满足(取真值)，无令牌条件不满足(取假值)。
- 变迁称为事件。

2）库所/变迁网系统或 P/T 网系统

K,W 可以取任意有限值。

3）Petri 网系统

$$K = \omega, W = 1$$

- 以上三种 Petri 网称为基本 Petri 网。

高级 Petri 网：

- 在应用过程中，Petri 网得到不断的改进，产生了很多改进形式——高级 Petri 网。高级 Petri 网给令牌赋予某种属性，可以丰富 Petri 网的模型语义。
- 高级 Petri 网有:
- 谓词/变迁网(Predicate/Transition Net);
- 有色 Petri 网(Colored Petri Net, CPN);
- 时间 Petri 网(timed Petri Net)(包括随机 Petri 网(stochastic Petri Net，SPN))。

a)谓词/变迁网

- ——为变迁的发生规定了谓词条件。

b)有色网

- ——为网中每一库所定义了一个令牌色彩集，并且为网中的每一变迁定义一个动作色彩集。

c)时间 Petri 网(Timed Petri Net)

——考虑变迁(事件)发生到结束所需的时间。

- 将每一时间标在对应的库所旁，库所中的令牌要经过一段时间才能参与 Petri 网的运行;
- 将时间标在变迁上，授权发生的变迁需延迟一段时间后才能发生;
- 变迁发生后立即从输入库所移走相应数量的令牌，但要延迟一段时间才在输出库所产生令牌。
- 随机 Petri 网把变迁的发生看做是一个随机过程，其持续时间服从一定的概率分布。

9.Petri 网建模案例

例 5.6.7　图 5.43 为流水生产车间制造系统，该系统由两台机床 *mch*1 和 *mch*2 加工两种零件 *part*1 和 *part*2。所有零件按相同的顺序通过两台机床。每台机床的入口处有一个零件库，在系统的出口处也有一个零件库。系统作业进度计划要求两种零件交替加工。

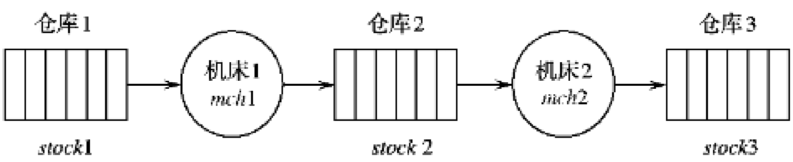


图 5.43　流水生产车间制造系统简图

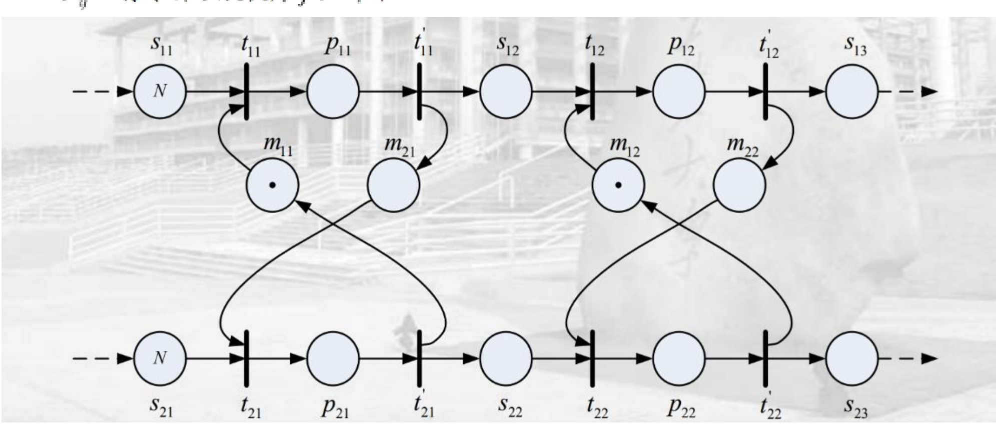
$stock_{ij}$ – 机床 j 的入口零件库中的零件 i ($j=1,2$)，$stock_{i3}$ – 零件库 3 中的零件 i；

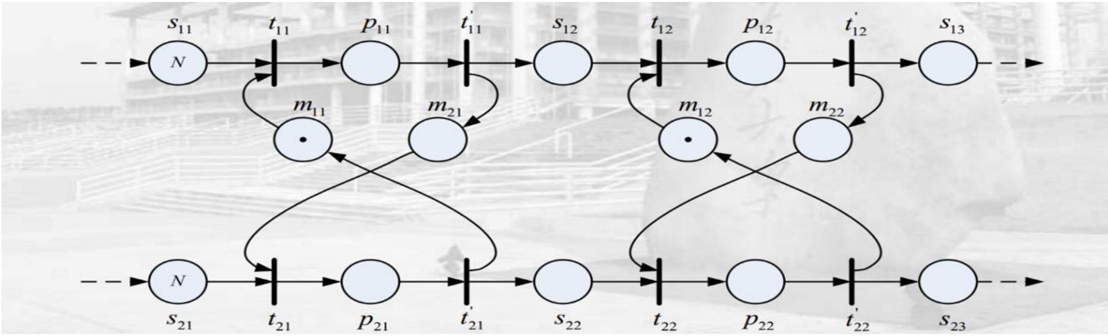
$part_{ij}$ – 机床 j 上的零件 i；

mch_{ij} – 机床 j 空闲，等待零件 i；

t_{ij} – 将零件 i 装到机床 j 上；

t'_{ij} – 将零件 i 从机床 j 上卸下。





关于图中所示标记的解释:标记(库所中有字母 N)表示有 N 个零件 *part*1 和 N 个零件 *part*2 在机床 *mch*1 的入口零件库 *stock*1，标记(库所中有一个黑点)表示机床 *mch*1 和 *mch*2 正等待 *part*1 类零件。变迁 t_{11} 启动使零件 $part_1$ (标为 $part_{11}$) 进入机床 *mch*1 加工。通过启动变迁 t'_{11}，将零件 *part*1 从机床 *mch*1 上卸下，空出机床 *mch*1，标记机床库所 mch_{21} 并将零件装入零件库 *stock*2。之后可能产生以下两个并行动作：

(1) 启动 t_{12} 将零件 *part*1 装上机床 *mch*2；

(2) 启动 t_{21} 将零件 *part*2 装上机床 *mch*1。

这两种变迁标记零件库所 $part_{12}$ 和 $part_{21}$。*part*1 加工完后，变迁 t'_{21} 启动，将零件装入输出零件库 *stock*3，空出机床 *mch*2，并标记机床库所 mch_{22}。变迁 t'_{21} 启动时，机床 *mch*1 卸料。当机床 *mch*2 空闲时，启动 t_{22} 可装上零件 *part*2，并在加工完成后启动 t'_{22} 卸下零件 *part*2。

该模型清楚地表示了运行顺序 $t_{11}\to t'_{11}\to t_{12}\to t'_{12}$ 和 $t_{11}\to t'_{11}\to t_{12}\to t'_{12}$ 的并行性，以及共享资源(机床 *mch*1 和 *mch*2)的管理。

10. Petri 网的特点

(1)采用图形建模方法，使模型直观、易于理解;

(2) 清楚地描述系统内部的相互作用，如并发、冲突等。特别适用于异步、并发离散事件系统建模;

(3) 采用自顶向下的方法(递阶 Petri 网)来建立系统的模型，使所建模型层次分明;

(4)有良好的形式化描述方法，用 Petri 网建立的模型具有成熟的数学分析方法，如可达性、可逆性及死锁分析等，对 Petri 网的仿真也比较简单;

(5)用 Petri 网建立的模型，在一定条件下可以翻译为系统的控制代码。

- **Petri 网的特性分为两大类:**
  - 一类特性依赖于系统的初始状态，直接反映系统的实际行为——行为特性;
  - 另一类特性独立于 Petri 网的初始标识——结构特性。
- 这里仅讨论行为特性及其分析方法
- **Petri 网的行为特性（<u>依赖于系统的初始状态</u>）包括：**
  - **可达性；**
  - **有界性；**
  - **活性；**
  - **可逆性；**
  - **可覆盖性等。**

可达性

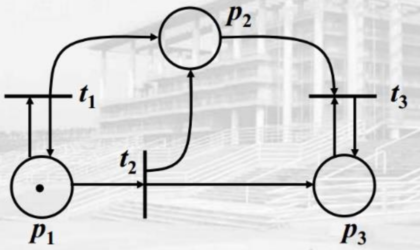
- **定义：** 若从初始标识M_0开始激发一个变迁序列产生标识M_r，则称M_r是从M_0可达的。若从M_0开始只激发一个变迁即可产生M_r，则称M_r是从M_0立即可达的。所有M_0可达的标识的集合称为可达标识集或可达集，记为$R(M_0)$。

可达性

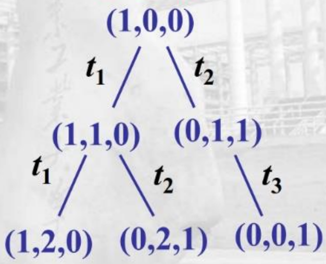
- 可达性用于描述制造系统的问题如下：
  - 系统按照一定的轨迹运行，系统是否能够实现一定的状态或者不期望的状态不出现。例如生产计划的验证。
  - 要求到达一定的状态，如何确定系统的轨迹。例如生产调度。

可达性

- 可达性举例：



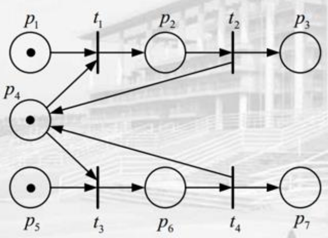
可达树：

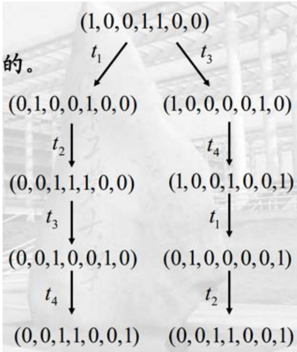


有界性与安全性

- **定义：** 给定$PN=(P, T, I, O, M_0)$以及可达集$R(M_0)$，对于库所$p\in P$，若任意给定$M\in R(M_0)$: $M(p)\leqslant k$，则称p是k有界的。若PN中所有库所都是k有界的，则称PN是k有界的。
- 特别地，k=1时，当库所所有PN是1有界的。我们称该库所或PN是安全的。若对于任意初始标识M_0，PN都是有界的，则PN是结构有界的。

- **例如：** 下面的PN是1有界的。 的。





■ 活性

■ **定义**：对于一变迁 $t \in T$，在任意标识$M \in R$下，若存在一个变迁序列s_r，该变迁序列的激发使得变迁t使能，则称该变迁是活的。若一个PN的所有变迁都是活的，则该PN是活的。

■ **活性等级**：设PN中从M_0出发的所有可能启动序列的集合为$L(M_0)$，所有从标识M_0可达的标识集合为$R(M_0)$，则一个变迁t被称作：

① L_0-活的（死的），仅当t在$L(M_0)$中的任何启动序列中都无法启动；

② L_1-活的，仅当t在$L(M_0)$中的一些序列中至少可以启动一次；

③ L_2-活的，仅当t在$L(M_0)$中的一些序列中至少可以启动k次；

④ L_3-活的，仅当t在$L(M_0)$中的一些序列中可以经常无限制地启动；

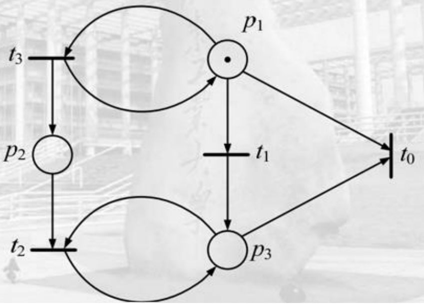
⑤ L_4-活的（活的），仅当t在$R(M_0)$中的每一个标识M是L_1-活的；

■ t_0: L_0-活的（死的）

■ t_1: L_1-活的

■ t_2: L_2-活的

■ t_3: L_3-活的



■ 可逆性

■ 一个PN，当对$R(M_0)$中的每一个标识M、M_0都是从M可达的，则称该PN可逆。具有可逆性的PN称为可逆网。

■ 一个可逆网可以返回到初始标识或初始状态。

■ 在许多实际应用中，往往只要求系统回到某个特定状态（主状态M'），而无需回到初始状态。

■ 对于$R(M_0)$中的每个标识M，主状态M'都是可达的。

■ 可覆盖性

■ 在一个PN中，一个标识M称作为可覆盖的，仅当$R(M_0)$中存在一个标识 M'，使得对于网中的每个库所p，有

$$M'(p) \geq M(p)$$

成立。

11. **Petri 网的行为特性分析**

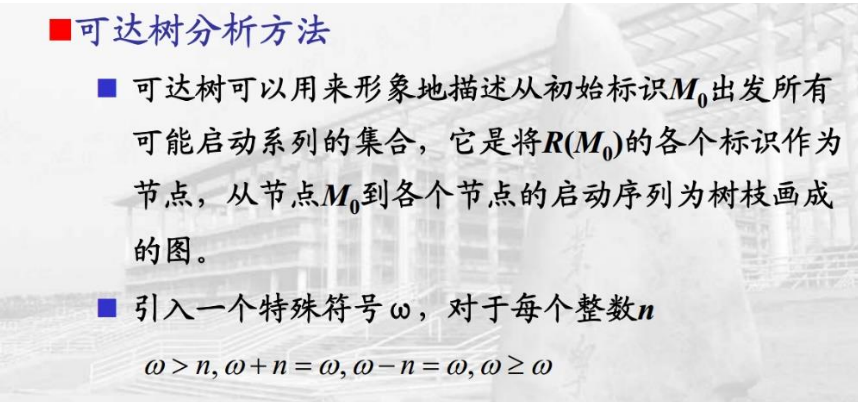
- 目前较成熟的分析方法只能对其中部分特性进行分析，对其他特性进行分析的方法仍在研究之中。
- **Petri 网的行为特性分析方法分为三类:**

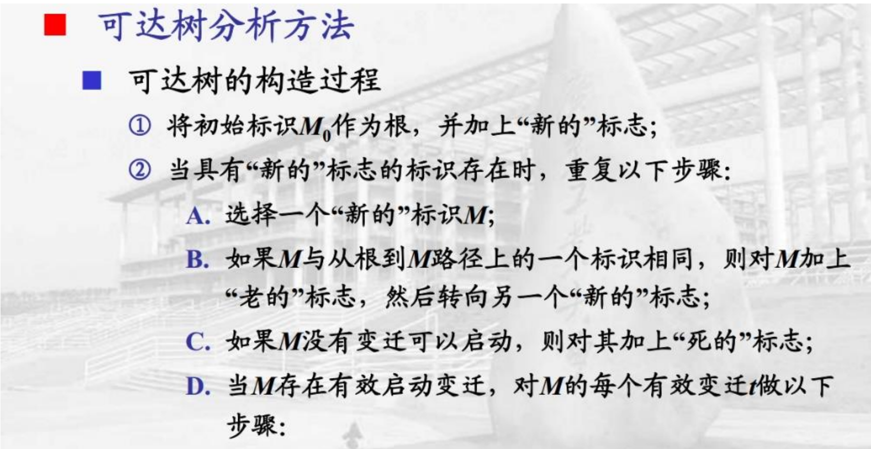
(1)分层或化简;

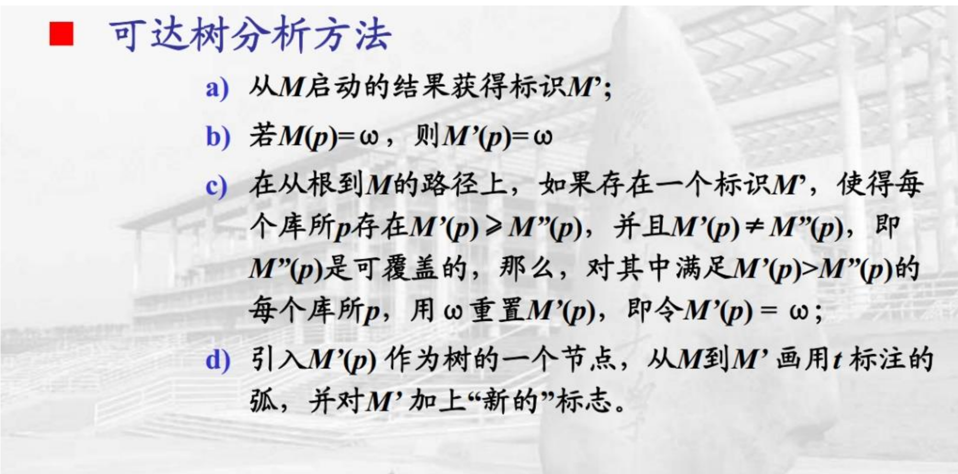
(2)可达性(可覆盖性)树;

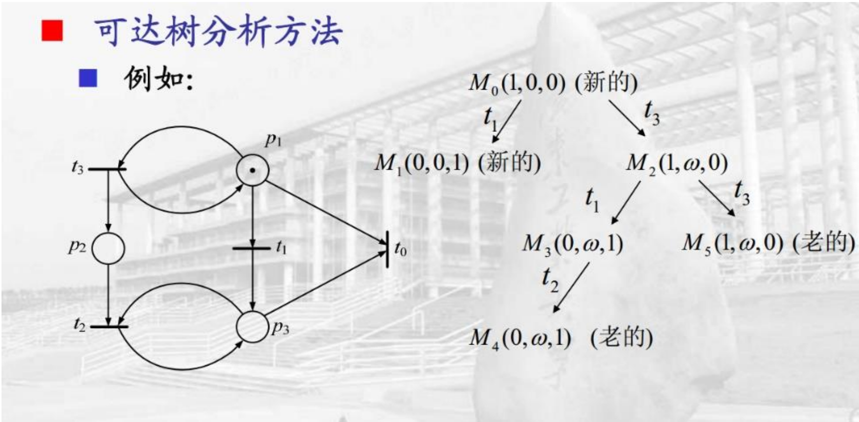
(3)矩阵方程求解。

- 第一种方法——在保证 Petri 网系统要分析的性质不变的情况下，对 Petri 网进行分层或化简，它涉及一些变换方法的研究，许多问题有待探讨。
- 第二种方法——实质上包含了所有可达标识或其可覆盖标识的枚举，适用于所有类型的 Petri 网。由于“状态空间爆炸”的问题，只局限于规模较小的 Petri 网。
- 第三种方法——求解能力强，仅适用于 Petri 网的一些特殊子类或特殊情况。









2. 状态方程分析法

(1) 关联矩阵　设 $N=(P,T;F)$ 是一个 Petri 网，$\sum=(P,T;F,K,W,M_0)$ 是以 N 为基网的网系统。$\boldsymbol{C}^+=W(T,P)$ 和 $\boldsymbol{C}^-=W(P,T)$ 分别为网系统的输出函数矩阵和输入函数矩阵，其矩阵元素为

$$\boldsymbol{C}_{ij}^+ = W(t_j,p_i)$$
$$\boldsymbol{C}_{ij}^- = W(p_i,t_j)$$

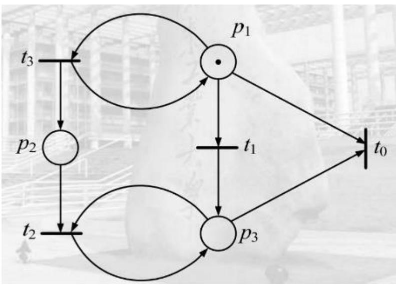
分别是变迁 j 至库所 i 的权值和库所 i 到变迁 j 的权值，$i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,m$。网系统的关联矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^+ - \boldsymbol{C}^-$$

$\boldsymbol{C}$ 是 $n\times m$ 的矩阵，其 i 行 j 列的元素为

$$\boldsymbol{C}_{ij} = \boldsymbol{C}_{ij}^+ - \boldsymbol{C}_{ij}^- = W(t_j,p_i) - W(p_i,t_j)$$

从变迁规则可以看出 $\boldsymbol{C}_{ij}^+$，$\boldsymbol{C}_{ij}^-$ 和 $\boldsymbol{C}_{ij}$ 分别表示变迁 j 一旦发生，库所 i 中的标记增加、减少和改变的数量。

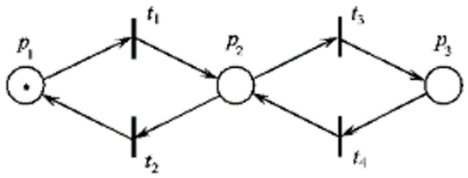


$$\boldsymbol{C}^- = \begin{array}{c} p1 \\ p2 \\ p3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C}^+ = \begin{array}{c} p1 \\ p2 \\ p3 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 不变量　Petri 网系统中有 S 不变量和 T 不变量。

① S 不变量　如果网系统中一些库所包含的资源(标记)的总和在任何可达标识下均保持不变，则这些库所就是系统的 S 不变量。

② T 不变量　如果网系统中一些变迁的发生会使系统的标识恢复到初始标识，则这些变迁就是系统的 T 不变量。



S 不变量和 T 不变量一般用列向量表示，即以库所为序标的列向量表示 S 不变量，以变迁为序标的列向量表示 T 不变量。上例中，用矢量 $\boldsymbol{I}$ 表示 S 不变量，则有 $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}(\boldsymbol{I}(p_1),\boldsymbol{I}(p_2),\boldsymbol{I}(p_3))^{\mathrm{T}}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$；用矢量 $\boldsymbol{J}$ 表示 T 不变量，则有 $\boldsymbol{J}=(\boldsymbol{J}(t_1),\boldsymbol{J}(t_2),\boldsymbol{J}(t_3),\boldsymbol{J}(t_4))^{\mathrm{T}}=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，另两个 T 不变量分别为 $\boldsymbol{J}_2=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{J}_3=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$。

利用关联矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可以证明：

(a) 矢量 $\boldsymbol{I}$ 是网系统的 S 不变量的充分必要条件是

$$\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{C}=0$$

(b) 矢量 $\boldsymbol{J}$ 是网系统的 T 不变量的充分必要条件是

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{J}=0$$

所以，网系统中 S 不变量表明了网系统中标记数加权和的守恒性。S 不变量中各个分量的值就是其所对应库所的权值，当变迁发生后，库所中的标记数乘以其权值之和保持不变。T 不变量表示网系统中标记的复制能力。因为 $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{J}=0$，所以必然存在一个初始标识 M_0，经过若干变迁后，网系统的标识回复到初始标识 M_0。其中，T 不变量的各个分量决定相应变迁的发生次数。

(3) 状态方程

网系统中变迁 t_j 的发生可以用 m 维列向量 $\boldsymbol{u}[j]$ 表示，$\boldsymbol{u}[j]$ 的第 j 个元素为 1，其余均为 0。这样，由 $M[t_j>M'$ 知

$$M'=M+C^{+}\cdot u[j]-C^{-}\cdot u[j]=M+(C^{+}-C^{-})\cdot u[j]=M+C\cdot u[j]$$

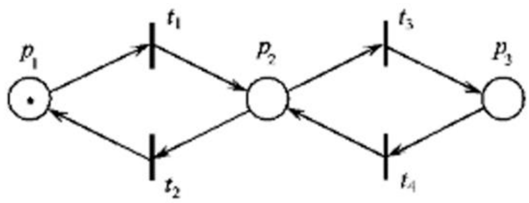
设 M 是应用启动序列 $\boldsymbol{\sigma}=t_{j_1}t_{j_2}\cdots t_{j_k}$ 从 M_0 得到的标识，即 $M_0[\boldsymbol{\sigma}>M$，则经 k 次启动之后得到的后继标识

$$M=M_0+C\cdot u[j_1]+C\cdot u[j_2]+\cdots+C\cdot u[j_k]=M_0+C\cdot U$$

向量 $\boldsymbol{U}$ 的第 j 个元素表示变迁 t_j 在启动序列 $\boldsymbol{\sigma}$ 中的发生次数。$\boldsymbol{U}$ 称为启动序列 $\boldsymbol{\sigma}$ 的特征向量（启动计数向量）。

状态方程为

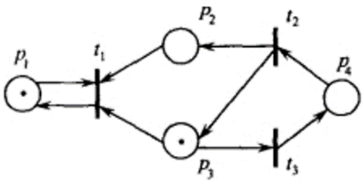
$$M=M_0+\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{U}$$



启动序列 $\boldsymbol{\sigma}=t_1t_2t_1t_3$ 的特征向量 $\boldsymbol{U}=[2\quad 1\quad 1\quad 0]^{\mathrm{T}}$。

(4) 状态方程在可达性分析中的应用

状态方程 $M=M_0+\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{U}$ 为部分解决可达性问题提供了一个依据。若 $\boldsymbol{M}$ 从 $\boldsymbol{M}_0$ 可达，则方程 $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{U}=M-M_0=\Delta M$ 必然存在一个非负整数解，该解即为启动计数向量 $\boldsymbol{U}$。若无这样的解，M 就不能从 M_0 可达。



$$M_0=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\quad C^-=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\quad C^+=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&2&0\\-1&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

启动序列 $\sigma=t_2t_3t_2t_3t_1$，其特征向量 $U=[1\quad 2\quad 2]^{\mathrm T}$，于是有新标识

$$M=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&2&0\\-1&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\\0\end{bmatrix}(=M_0+C\cdot U)$$

考察标识 $[1\quad 8\quad 0\quad 1]^{\mathrm T}$ 是否可从标识 M_0 可达。状态方程为

$$\begin{bmatrix}1\\8\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&2&0\\-1&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\cdot U$$

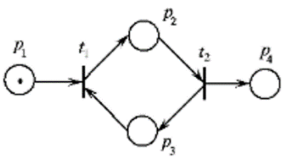
有解 $U=[0\quad 4\quad 5]^{\mathrm T}$，它对应于启动序列 $\sigma=t_3t_2t_3t_2t_3t_2t_3t_2t_3$。

再考察标识 $[1\quad 7\quad 0\quad 1]^{\mathrm T}$，状态方程

$$\begin{bmatrix}1\\7\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&2&0\\-1&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\cdot U$$

无解，所以标识 $[1\quad 7\quad 0\quad 1]^{\mathrm T}$ 为不可达标识。

注意，状态方程有解只是可达性的必要条件，而不是充分条件，这是由于 ΔM 缺少初始标识信息所致。例如，图 5.53 中



$$M_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}-1&0\\1&-1\\-1&1\\0&1\end{bmatrix}\quad M=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

由状态方程解得启动计数向量 $U=[1\quad 1]^{\mathrm T}$。这个解对应的两个可能的启动序列为 $\sigma_1=t_1t_2$ 或 $\sigma_2=t_2t_1$。然而这两个序列都不是有效的启动序列，因为在 M_0 下，t_1t_2 都不能启动。