图像变换

Image Transform

陶文兵

华中科技大学人工智能与自动化

一. 图像变换的作用

➢ 图像变换的定义

是将图像从空域变换到其它域（如频域）的数学变换

➢ 图像变换的作用

我们人类视觉所感受到的是在空间域和时间域的信号。但是，往往许多问题在频域中讨论时，有其非常方便分析的一面。

1. 方便处理
2. 便于抽取特性

常用的变换

1. 傅立叶变换Fourier Transform

2. 离散余弦变换Discrete Cosine Transform

图像处理中的正交变换

- 傅立叶变换
- 沃尔什变换
- 哈达玛变换
- 离散余弦变换
- 小波变换
- 离散K-L变换

第三章 图像变换

3.2 傅立叶变换

Fourier Transform

二. 傅立叶变换

➢ 傅立叶变换的作用

（1）可以得出信号在各个频率点上的强度。

（2）可以将卷积运算化为乘积运算。

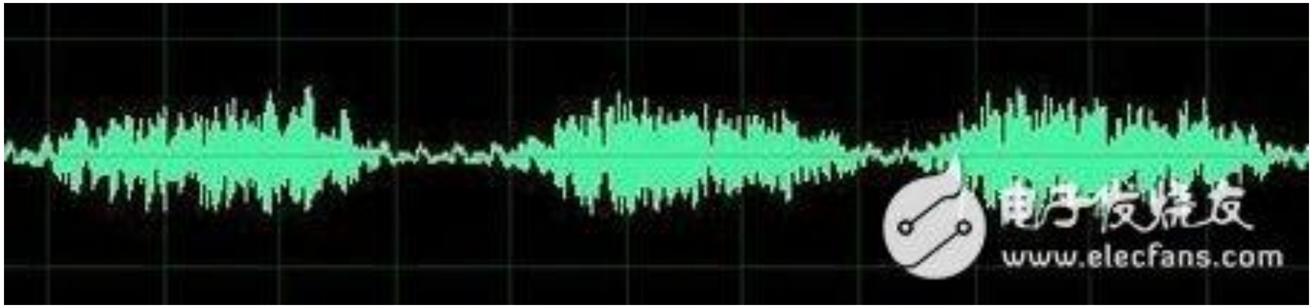
（3）傅氏变换和线性系统理论是进行图像恢复和重构的重要手段。

（4）傅立叶变换能使我们从空间域与频率域两个不同的角度来看待图像的问题，有时在空间域无法解决的问题在频域却是显而易见的。

二. 傅立叶变换

➢ 傅立叶变换的作用

在你的理解中，一段音乐是什么呢？



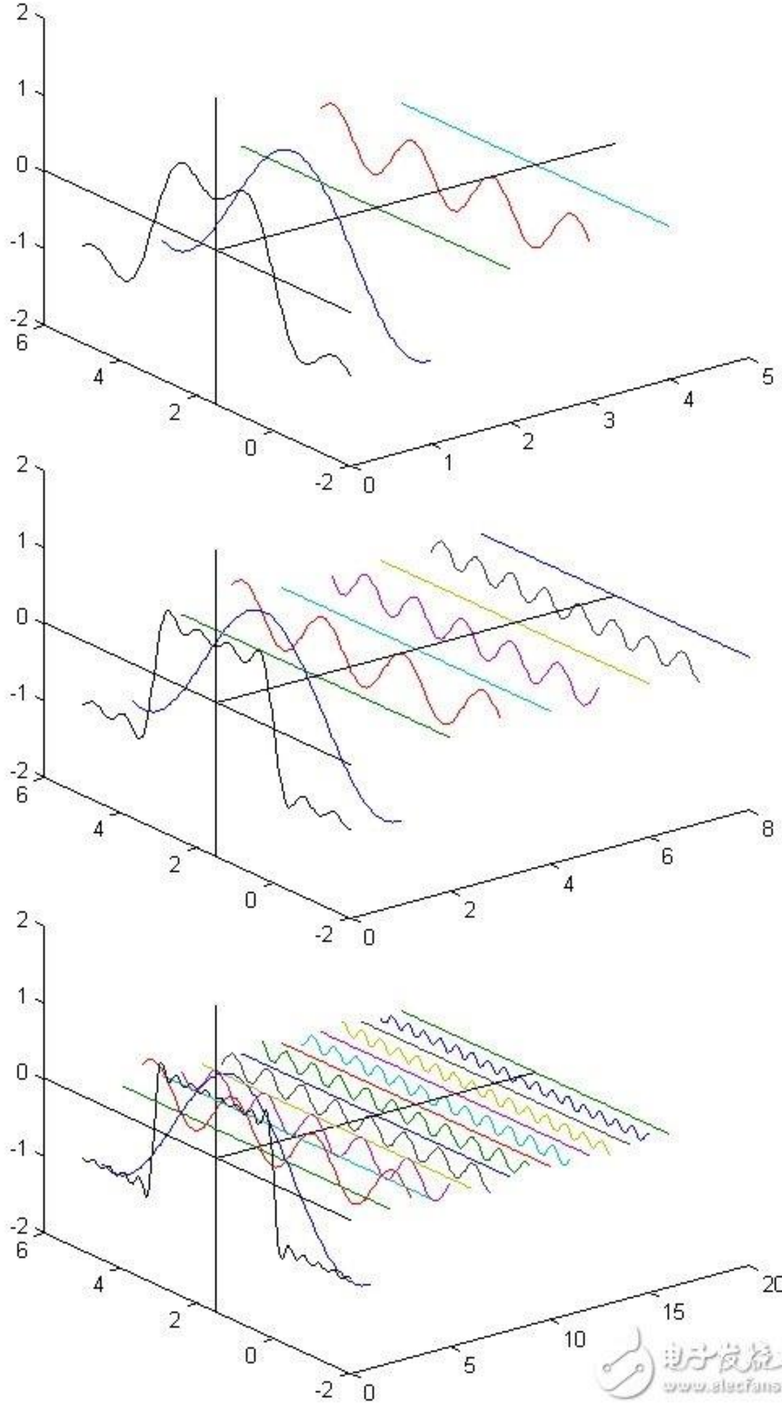
这是我们对音乐最普遍的理解，一个随着时间变化的震动。但我相信对于乐器小能手们来说，音乐更直观的理解是这样的：

二．傅立叶变换

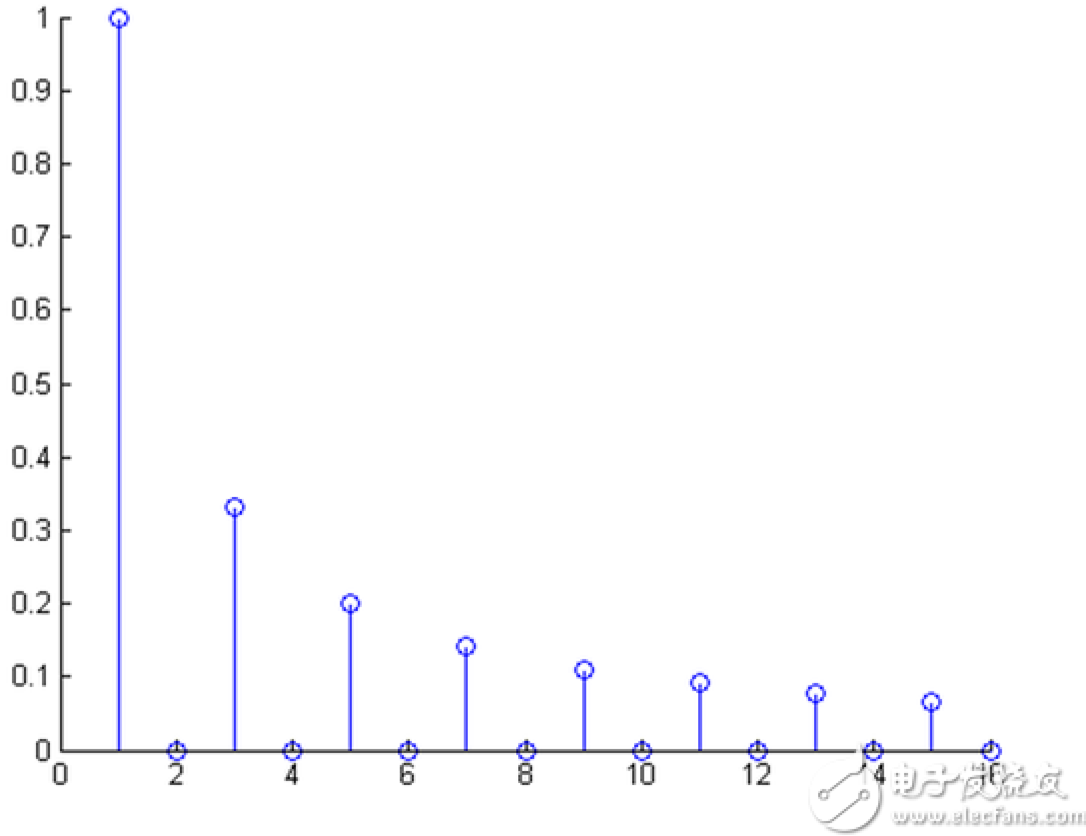
➢ **傅立叶变换的作用**

时域：

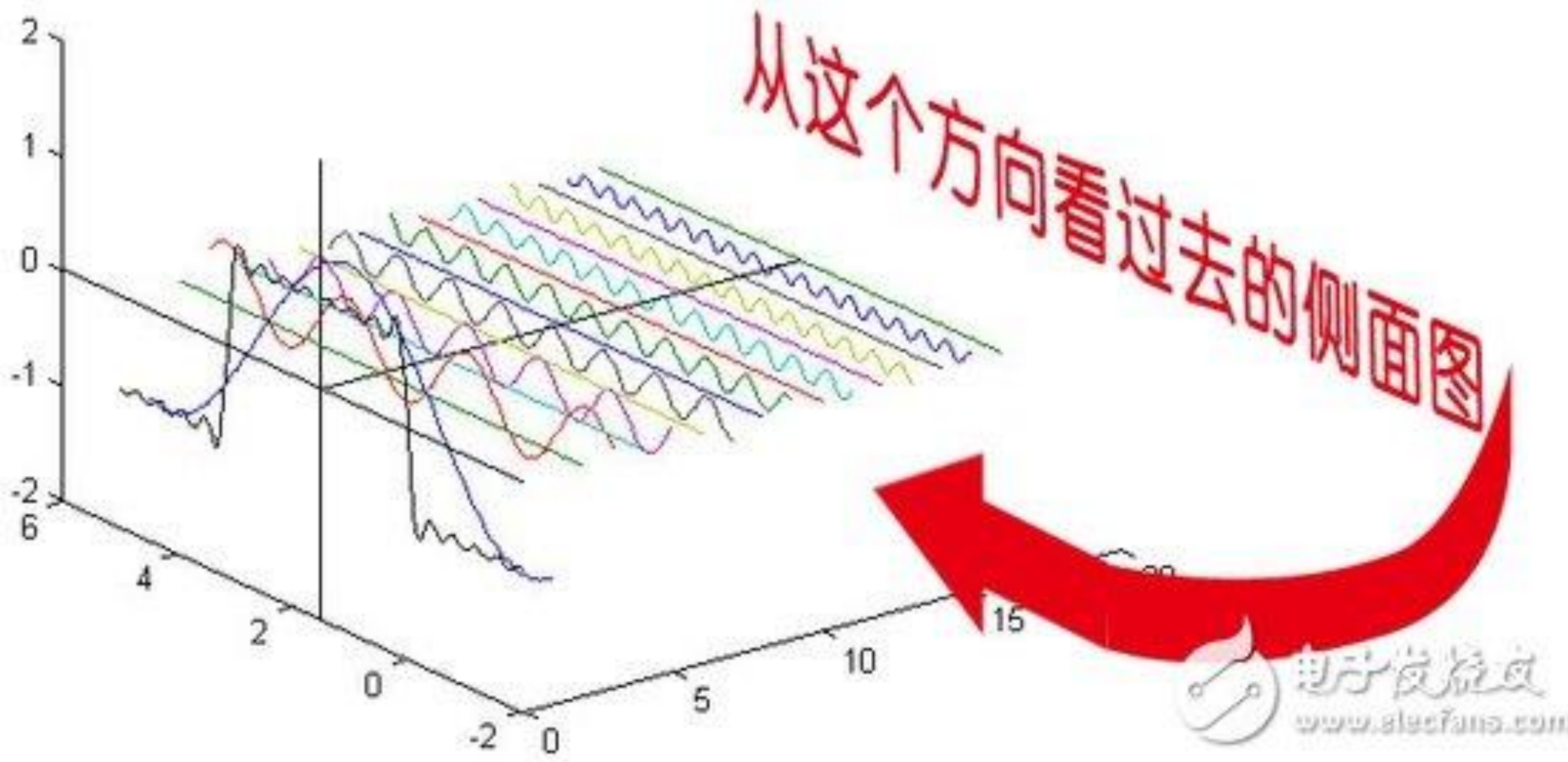
频域：


2
1
0
-1
-2
6
4
2
0
-2
0
1
2
3
4
5
2
1
0
-1
-2
6
4
2
0
-2
0
2
4
6
8
2
1
0
-1
-2
6
4
2
0
-2
0
5
10
15
20

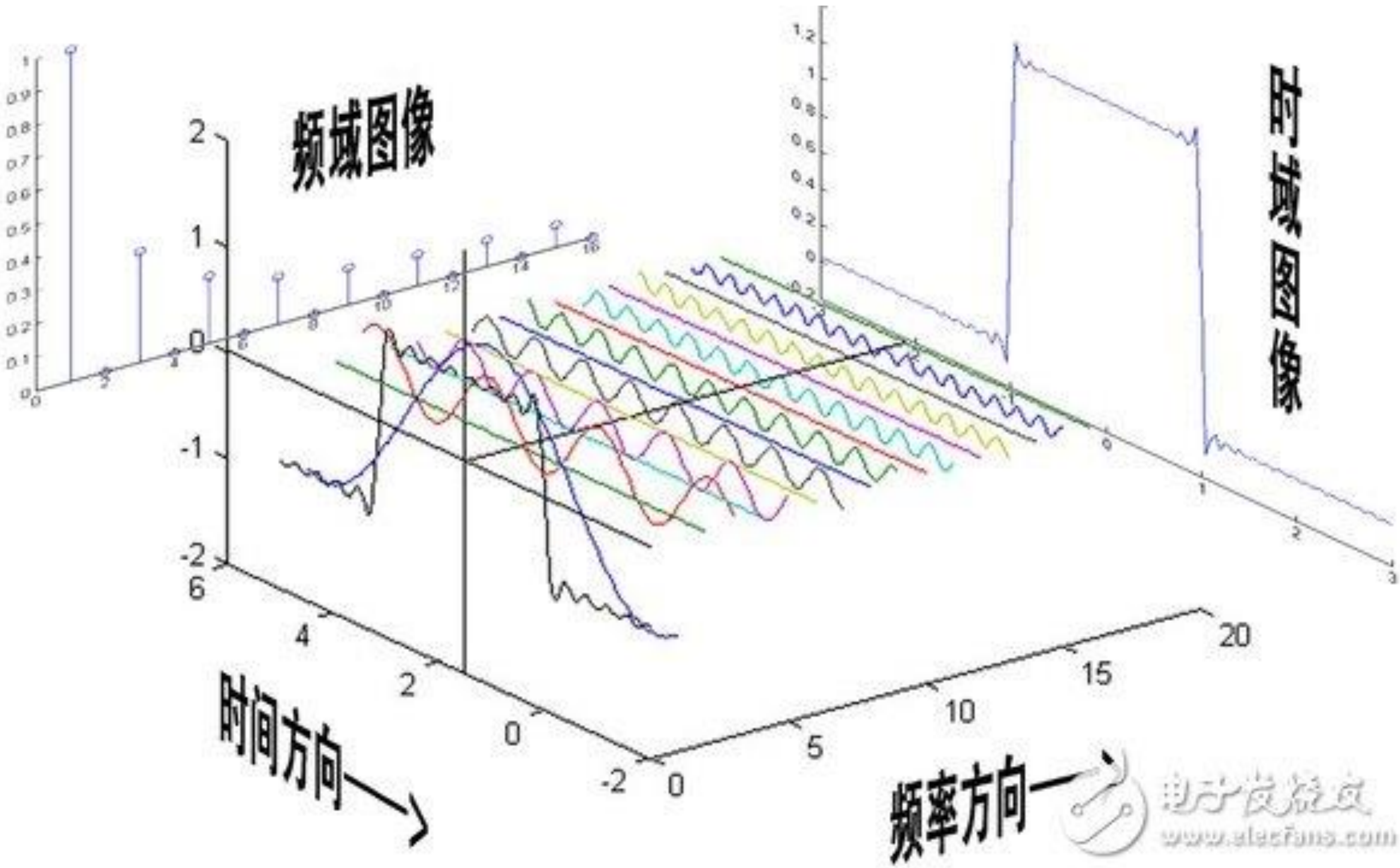
二. 傅立叶变换



二. 傅立叶变换



二. 傅立叶变换



3.2.1 一维傅立叶变换（One-Dimensional Fourier Transform）

1. 一维连续函数的傅立叶变换（FT）

定义：若函数f（x）满足狄里赫赖条件：

1）具有有限个间断点；

2）具有有限个极值点；

3）绝对可积，

则把变换称为：

傅立叶正变换：$$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp\left[-j2\pi ux\right]dx$$

傅立叶反变换：$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\exp\left[j2\pi ux\right]du$$

函数$f(x)$和$F(u)$被称为傅立叶变换对。即对于任一函数$f(x)$，其傅立叶变换$F(u)$是惟一的；

反之，对于任一函数$F(u)$，其傅立叶逆变换$f(x)$也是惟一的。

3.2.1 一维傅立叶变换

如果 $f(x)$ 为实函数，傅立叶变换用复数表示：

$$F(u)=R(u)+jI(u)$$

用指数形式表示：

$$F(u)=\left|F(u)\right|e^{j\varphi(u)}$$

傅立叶谱： $$\left|F(u)\right|=[R^2(u)+I^2(u)]^{\frac{1}{2}}$$

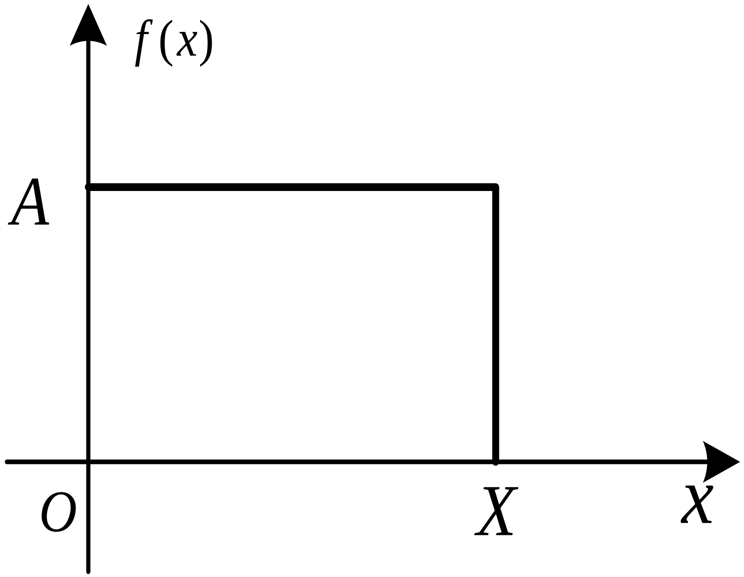
相角： $$\phi(u)=arctg[\frac{I(u)}{R(u)}]$$

能量谱： $$E(u)=\left|F(u)\right|^2=R^2(u)+I^2(u)$$

3.2.1 一维傅立叶变换

例**3.1 f(x)**是一门函数，如图所示，它表示为：

$$f(x)=\begin{cases} A(0\le x\le X) \\ 0 \quad (x>X) \end{cases}$$



求其傅立叶变换**F(u)**。

3.2.1 一维傅立叶变换

解： $$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp[-j2\pi ux]dx$$

$$=\int_0^X A\exp[-j2\pi ux]dx = \frac{-A}{j2\pi u}[e^{-j2\pi ux}]_0^X$$

$$=\frac{-A}{j2\pi u}[e^{-j2\pi uX}-1] = \frac{A}{j2\pi u}[e^{j\pi uX}-e^{-j\pi uX}]e^{-j\pi uX}$$

利用欧拉公式：

$$=\frac{A}{\pi u}\sin(\pi uX)e^{-j\pi uX}$$

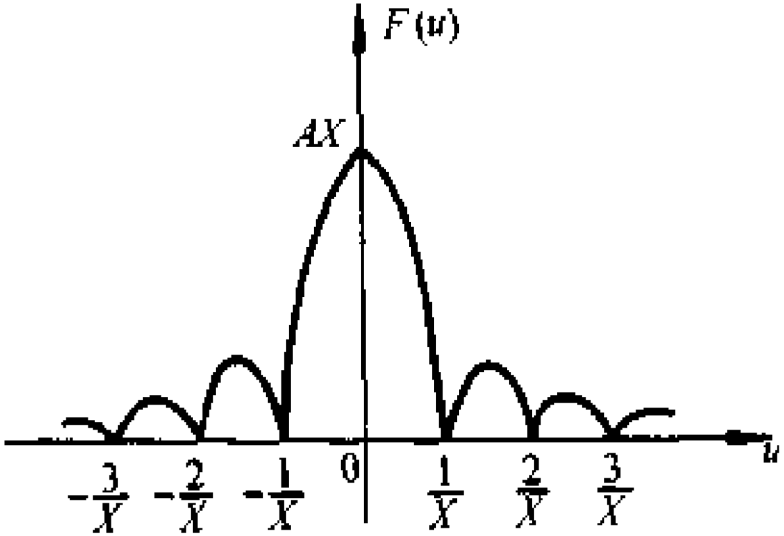
$$\exp[-j2\pi ux]=\cos 2\pi ux - j\sin 2\pi ux$$

3.2.1 一维傅立叶变换

对应的傅立叶谱为：

$$|F(u)| = \frac{A}{\pi u}|\sin(\pi u X)||e^{-j\pi u X}|$$

$$= AX\left|\frac{\sin(\pi u X)}{\pi u X}\right|$$



(b)

三. 离散傅立叶变换

➢ 离散傅立叶变换的定义

要在数字图像处理中应用傅立叶变换， 还需要解决两个问题：一是在数学中进行傅立叶变换的 $f(x)$ 为连续（模拟）信号， 而计算机处理的是数字信号（图像数据）；二是数学上采用无穷大概念，而计算机只能进行有限次计算。通常，将受这种限制的傅立叶变换称为离散傅立叶变换（Discrete Fourier Transform，DFT）。

3.2.1 一维傅立叶变换

2. 一维离散傅立叶变换（DFT）

傅立叶正变换：

$$F(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}ux\right]$$

$$u=0,1,\cdots,N-1$$

傅立叶反变换：

$$f(x)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1} F(u)\exp\left[j\frac{2\pi}{N}ux\right]$$

$$x=0,1,\cdots,N-1$$

3.2.1 一维傅立叶变换

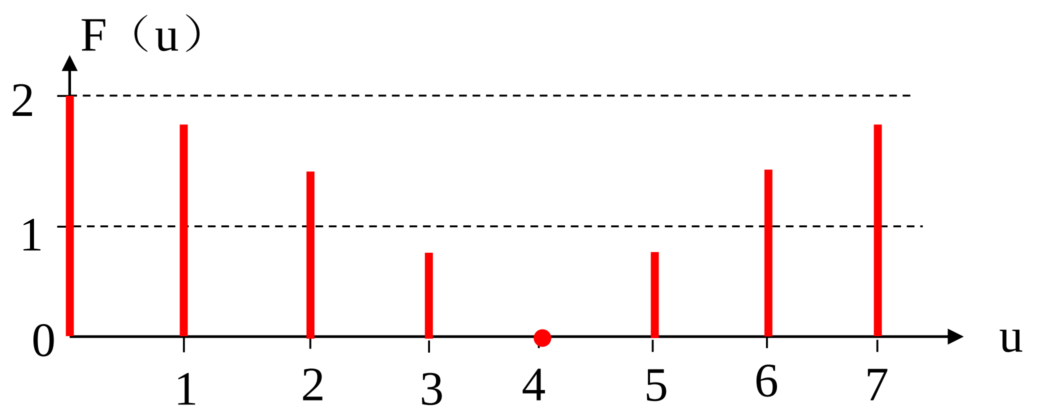
$$f(x)=[0\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0],\ \mathrm{N}=8,\ 求F（u）$$

F（u）=[2，$-1+e^{-j\frac{3\pi}{4}}$，$1+j$，$-1+e^{-j\frac{\pi}{4}}$，0，$-1-e^{-j\frac{3\pi}{4}}$，$1-j$，$-1-e^{-j\frac{\pi}{4}}$]

幅度谱：

$$|F(u)|=\left[2,\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2},\ \sqrt{2-\sqrt{2}},\ 0,\ \sqrt{2-\sqrt{2}},\ \sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}}\right]$$

幅度谱图：



3.2.2 二维傅立叶变换（Two-Dimensional Fourier Transform）

1. 二维连续函数傅立叶变换（2D FT）

定义: 若f(x,y)是连续图像函数

正变换:

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\exp\left[-j2\pi(ux+vy)\right]dxdy$$

反变换:

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u,v)\exp\left[j2\pi(ux+vy)\right]dudv$$

变换对:

$$f(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)$$

3.2.2 二维傅立叶变换

2. 幅度谱、相位谱、能量谱

一般F(u,v)是复函数,即:

$$F(u,v)=R(u,v)+jI(u,v)=\left|F(u,v)\right|e^{j\phi(u,v)}$$

幅度谱:

$$\left|F(u,v)\right|=\sqrt{R^2(u,v)+I^2(u,v)}$$

相位谱:

$$\phi(u,v)=tg^{-1}\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$$

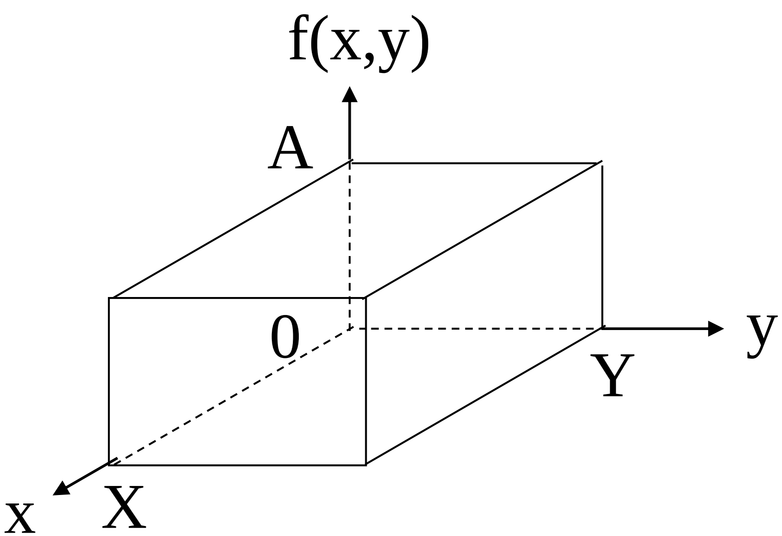
能量谱:

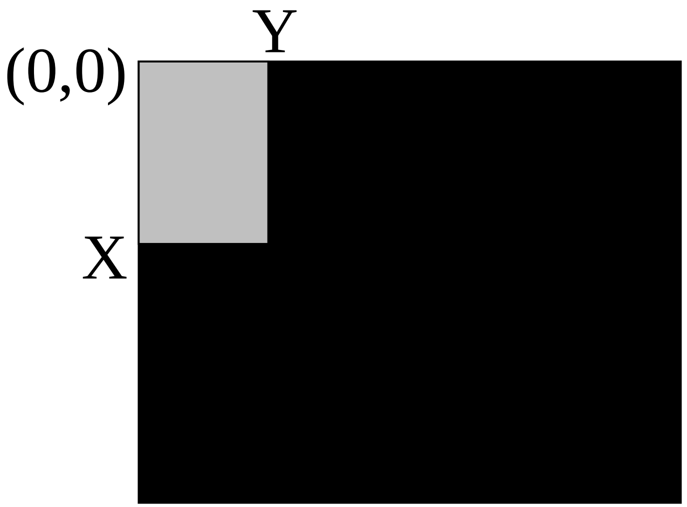
$$E(u,v)=R^2(u,v)+I^2(u,v)$$

3.2.2 二维傅立叶变换

二维连续傅立叶变换举例：

函数 $f(x,y)=\begin{cases} A, & 0 \le x \le X,\ 0 \le y \le Y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ **求F(u,v)。**





图像屏幕显示

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\exp[-j2\pi(ux+vy)]dxdy$$

$$=\int_0^X\int_0^Y A\exp[-j2\pi(ux+vy)]dxdy$$ ；代入函数

$$=A\int_0^X \exp[-j2\pi ux]dx\int_0^Y \exp[-j2\pi vy]dy$$ ；分离变量

$$=A\left[\frac{e^{-j2\pi uX}-1}{-j2\pi u}\right]\left[\frac{e^{-j2\pi vY}-1}{-j2\pi v}\right]$$ ；查积分表

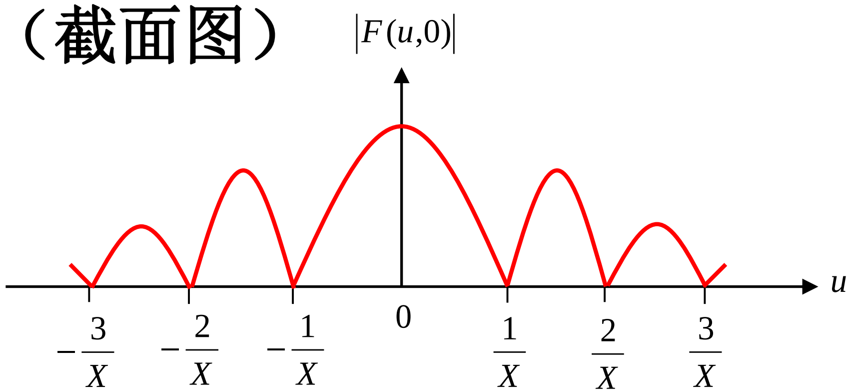
$$=AXY\left[\frac{\sin(\pi uX)e^{-j\pi uX}}{\pi uX}\right]\left[\frac{\sin(\pi vY)e^{-j\pi vY}}{\pi vY}\right]$$ ；欧拉公式

$$F(u,v)=AXY\left[\frac{\sin(\pi uX)e^{-j\pi uX}}{\pi uX}\right]\left[\frac{\sin(\pi vY)e^{-j\pi vY}}{\pi vY}\right]$$

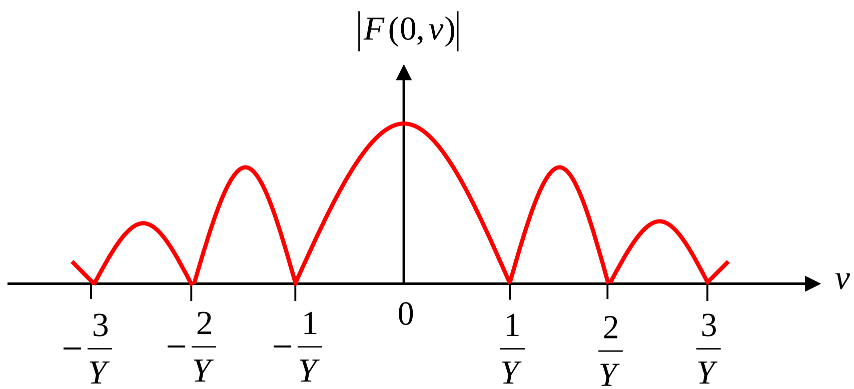
幅度谱：

$$\left|F(u,v)\right|=AXY\left[\frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX}\right]\left[\frac{\sin(\pi vY)}{\pi vY}\right]$$ ；**两个SIC函数的乘积**

谱图（截面图）



v=0，u方向



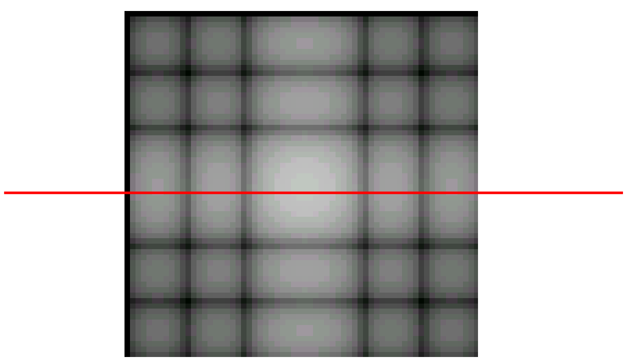
u=0，v方向

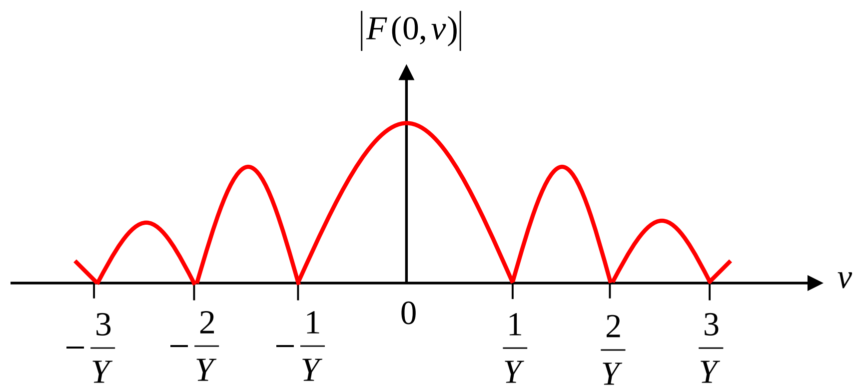
幅度谱：

$$\left|F(x,y)\right| = AXY\left[\frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX}\right]\left[\frac{\sin(\pi vY)}{\pi vY}\right]$$

；两个SIC函数的乘积

幅度谱的屏幕显示：





u=0，v方向

3.2.2 二维傅立叶变换

2. 二维离散傅立叶变换（2D DFT）

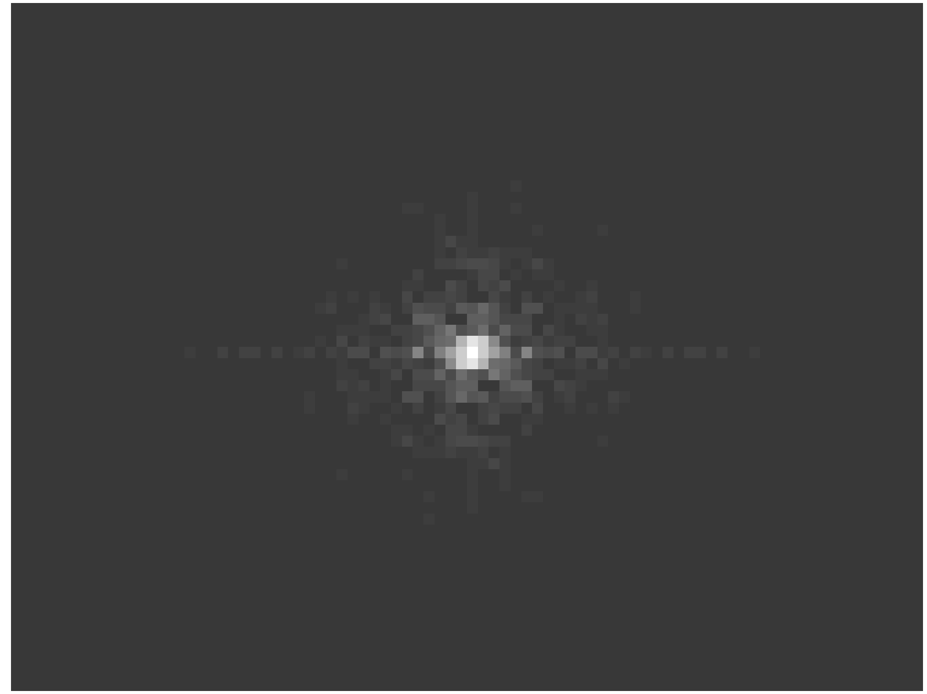
定义: 若f(x,y)是离散图像函数

正变换: $$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(ux+vy)\right]$$

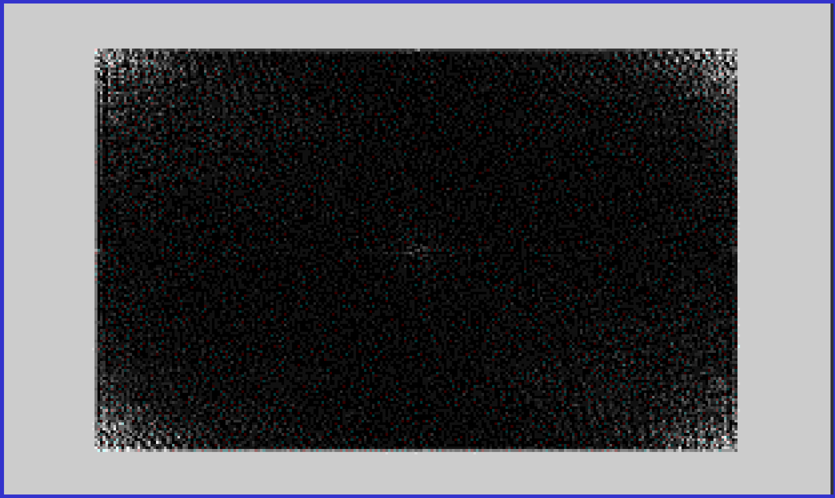
$$u,v=0,1,\cdots,N-1$$

反变换: $$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp\left[j\frac{2\pi}{N}(ux+vy)\right]$$

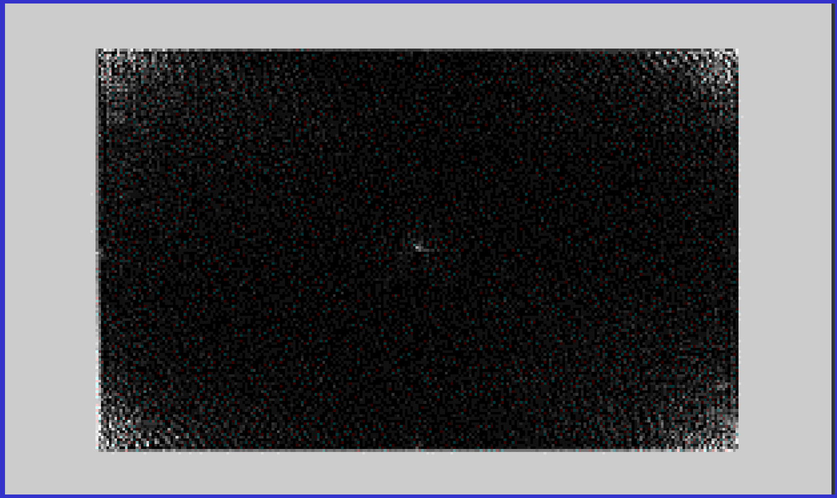
$$x,y=0,1,\cdots,N-1$$



原始图像

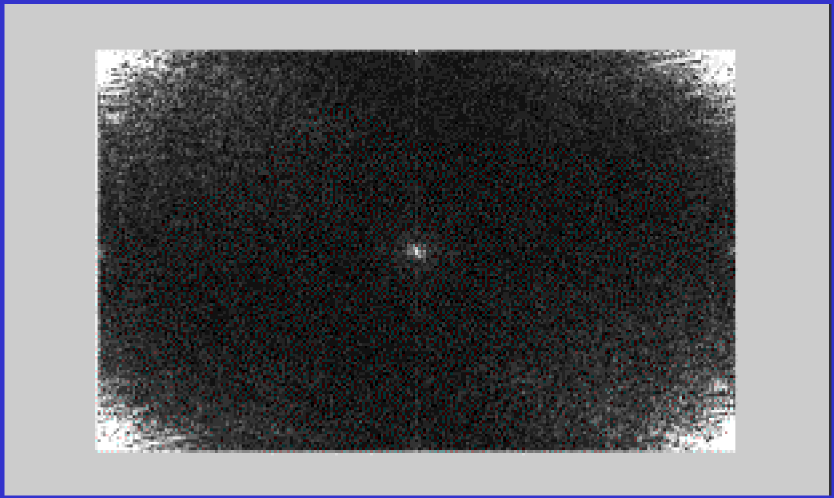


实部频谱

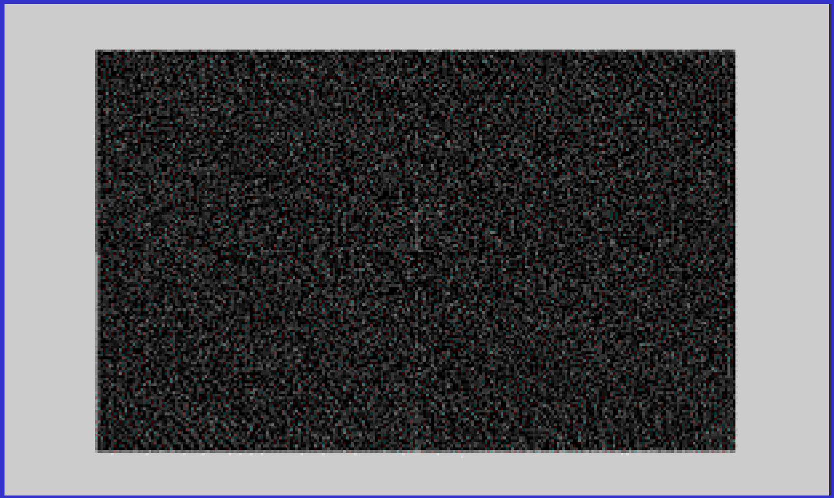


虚部频谱

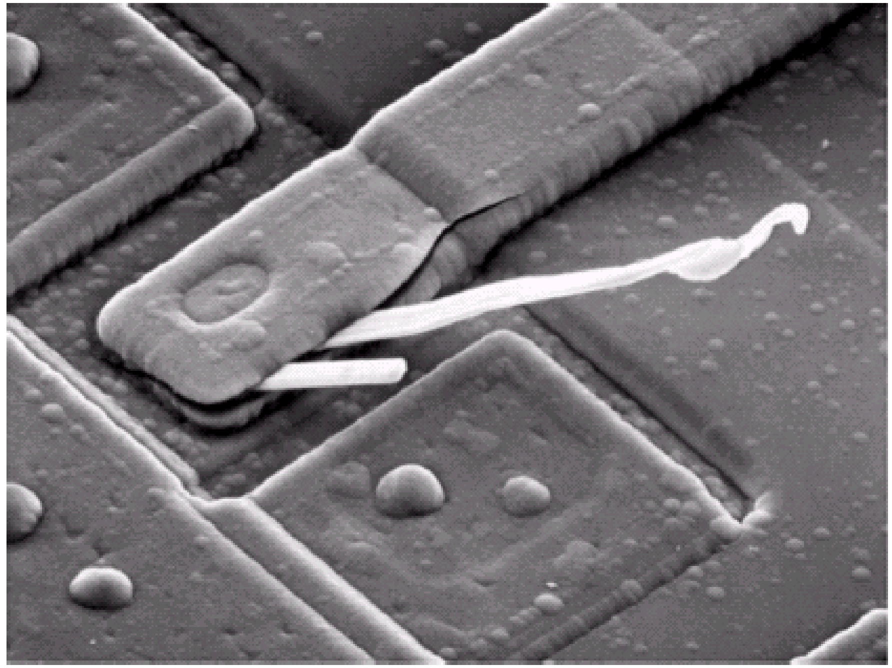
原始图像

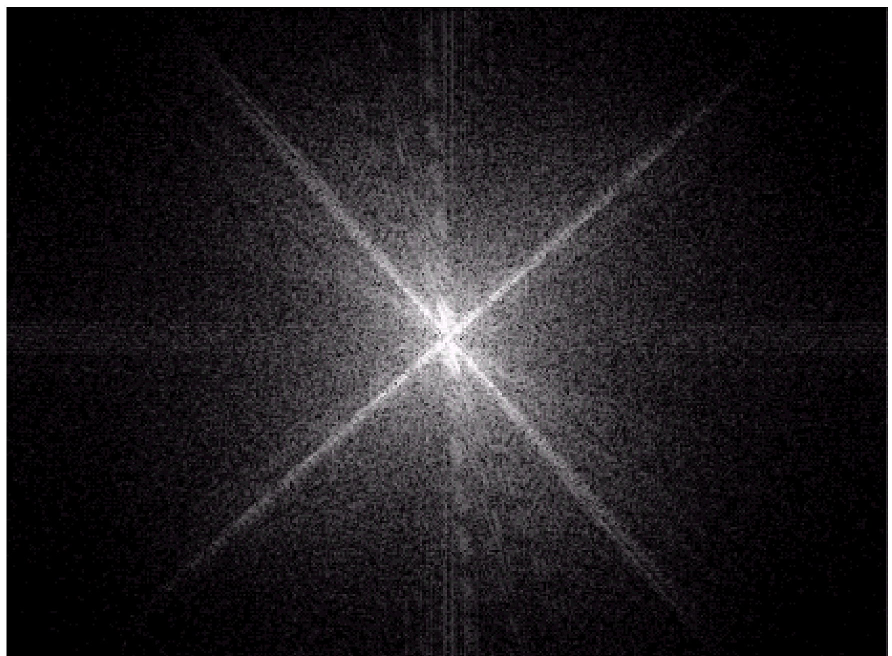


幅度频谱



相位频谱





3.2.3 二维傅立叶变换的性质（The Properties of 2-D Fourier Transform）

1. 可分离性

正变换

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(ux+vy)\right]$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}ux\right]\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}vy\right]$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}vy\right]\sum_{x=0}^{N-1}f(x,y)\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}ux\right]$$

$$u,v=0,1,\cdots,N-1$$

3.2.3 二维傅立叶变换的性质

1. 可分离性

同样，反变换也具有可分离性

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp\left[j\frac{2\pi}{N}(ux+vy)\right]$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\exp\left[j\frac{2\pi}{N}ux\right]\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp\left[j\frac{2\pi}{N}vy\right]$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{v=0}^{N-1}\exp\left[j\frac{2\pi}{N}vy\right]\sum_{u=0}^{N-1}F(u,v)\exp\left[j\frac{2\pi}{N}ux\right]$$

$$x,y=0,1,\cdots,N-1$$

3.2.3 二维傅立叶变换的性质

1. 可分离性

利用二维傅立叶变换的可分离性，可将二维DFT转化成一维DFT计算。即，先在x（或y）方向进行一维DFT，再在y（或x）方向进行一维DFT：

第一步：

$$F(u,y)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x,y)\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}ux\right]$$

第二步：

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1} F(u,y)\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}vy\right]$$

$$u,v=0,1,\cdots,N-1$$

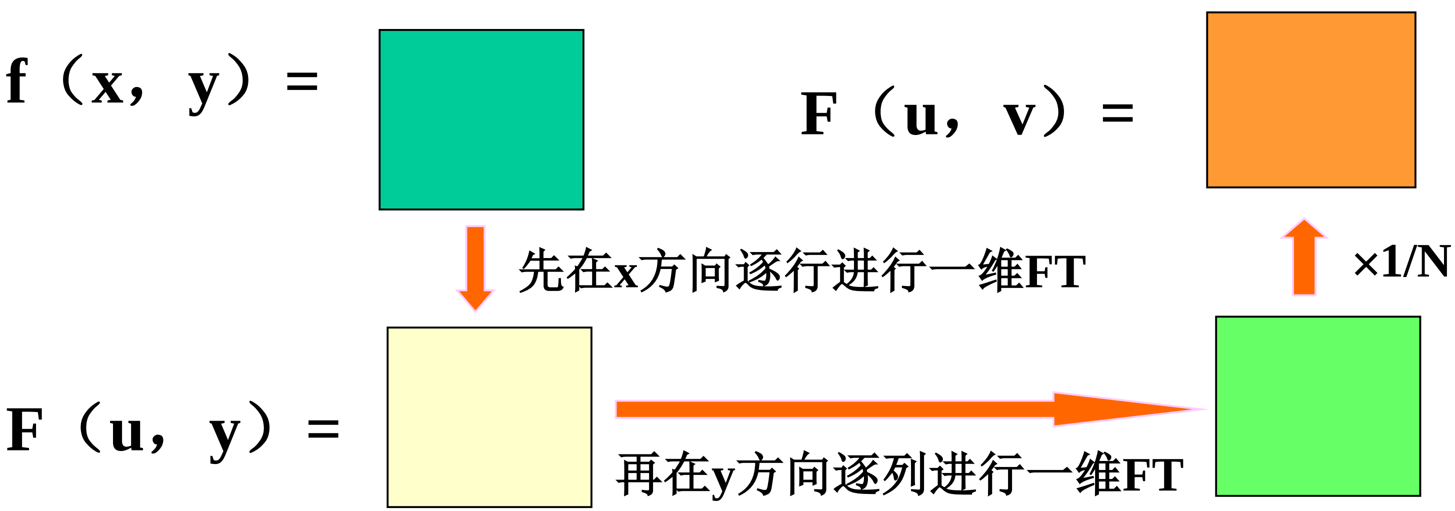
1. 可分离性

第一步：
$$F(u,y)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x,y)\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}ux\right]$$

第二步：
$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1} F(u,y)\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}vy\right]$$

$$u,v=0,1,\cdots,N-1$$

二维离散傅立叶变换过程图示：



二维离散傅立叶变换举例

例1：

$$f(x,y)=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Big\downarrow \text{ x方向FFT}$$

$$F(u,y)=\begin{bmatrix}2&2&0&0\\1-j&1-j&0&0\\0&0&0&0\\1+j&1+j&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{y方向FFT}}\begin{bmatrix}4&2-2j&0&2+2j\\2-2j&-2j&0&2\\0&0&0&0\\2+2j&2&0&2j\end{bmatrix}$$

$$\Big\uparrow \times 1/4$$

$$F(u,v)=\begin{bmatrix}1&0.5-0.5j&0&0.5+0.5j\\0.5-0.5j&-0.5j&0&0.5\\0&0&0&0\\0.5+0.5j&0.5&0&0.5j\end{bmatrix}$$

3.2.5二维离散傅立叶变换的矩阵表示

目的:（1）用矩阵乘法的程序进行FT；（2）理论推导用。

1. 一维DFT的矩阵表示

根据定义: $$F(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}ux\right]$$

令: $w=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 则: $$F(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)w^{ux}$$

展开:

$$F(0)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)w^{0} = f(0)w^{0}+f(1)w^{0}+\cdots+f(N-1)w^{0}$$

$$F(1)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)w^{x} = f(0)w^{0}+f(1)w^{1}+\cdots+f(N-1)w^{N-1}$$

$$F(N-1)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)w^{(N-1)x} = f(0)w^{0}+f(1)w^{N-1}+\cdots+f(N-1)w^{(N-1)(N-1)}$$

3.2.5二维离散傅立叶变换的矩阵表示

$$F(0)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)w^0 = f(0)w^0 + f(1)w^0 + \cdots + f(N-1)w^0$$

$$F(1)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)w^x = f(0)w^0 + f(1)w^1 + \cdots + f(N-1)w^{N-1}$$

$$F(N-1)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)w^{(N-1)x} = f(0)w^0 + f(1)w^{N-1} + \cdots + f(N-1)w^{(N-1)(N-1)}$$

令: $F=\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{bmatrix}$ $f=\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix}$ $W=\begin{bmatrix} w^0 & w^0 & \cdots & w^0 \\ w^0 & w^1 & \cdots & w^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w^0 & w^{N-1} & \cdots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$

正变换: $F=Wf$ 反变换: $f=W^{-1}F$

(忽略1/N)

2. 二维DFT的矩阵表示

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(ux+vy)\right]$$

根据可分离性：

$$F(u,y)=\sum_{x=0}^{N-1}f(x,y)\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}ux\right]$$

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}F(u,y)\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}vy\right]$$

忽略1/N 令: $w=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

$$W=\begin{bmatrix} w^0 & w^0 & \cdots & w^0 \\ w^0 & w^1 & \cdots & w^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w^0 & w^{N-1} & \cdots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

2. 二维DFT的矩阵表示

$$F=\begin{bmatrix} F(0,0) & F(0,1) & \cdots & F(0,N-1) \\ F(1,0) & F(1,1) & \cdots & F(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F(N-1,0) & F(N-1,1) & \cdots & F(N-1,N-1) \end{bmatrix}$$

$$f=\begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \cdots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \cdots & f(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(N-1,0) & f(N-1,1) & \cdots & f(N-1,N-1) \end{bmatrix}$$

FT： $F=WfW$ IFT： $f=W^{-1}FW^{-1}$

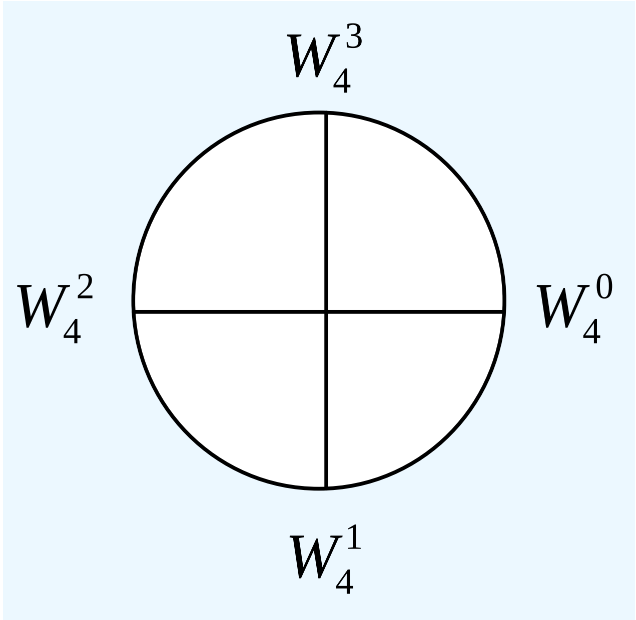
（忽略1/N）

二维离散傅立叶变换举例

方法二

利用核矩阵求DFT

$$F = WfW$$



$$W = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^0 & W^2 \\ W^0 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

$$f(x,y)=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$F = WfW$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-j&-1&j\\1&-1&1&-1\\1&j&-1&-j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-j&-1&j\\1&-1&1&-1\\1&j&-1&-j\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4&2-2j&0&2+2j\\2-2j&-2j&0&2\\0&0&0&0\\2+2j&2&0&2j\end{bmatrix}$$

3.2.3 二维傅立叶变换的性质
（The Properties of 2-D Fourier Transform）

2. 平移性

若$f(x, y) \overset{FT}{\Leftrightarrow} F(u, v)$

则：$f(x,y)\exp\left[j\frac{2\pi}{N}(u_0x+v_0y)\right] \Leftrightarrow \underline{F(u-u_0, v-v_0)}$

相当于F（u，v）的坐标原点移到（u_0，v_0）点

u_0, v_0 为常数，其值范围为 $0,1,\cdots,N-1$

$$f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(ux_0+vy_0)\right]$$

$$x_0, y_0 = 0,1,\cdots,N-1$$

2. 平移性

$$f(x,y)\exp\left[j\frac{2\pi}{N}(u_0x+v_0y)\right]\Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$$

当$u_0=v_0=\dfrac{N}{2}$时， $\exp\left[j\dfrac{2\pi}{N}(u_0x+v_0y)\right]=e^{j\pi(x+y)}=(-1)^{(x+y)}$

即：

$$f(x,y)(-1)^{(x+y)}\Leftrightarrow F(u-\frac{N}{2},v-\frac{N}{2})$$

移中性

同理： $f(x-\dfrac{N}{2},y-\dfrac{N}{2})\Leftrightarrow F(u,v)(-1)^{(u+v)}$

移中性 $$f(x,y)(-1)^{(x+y)} \Leftrightarrow F(u-\frac{N}{2}, v-\frac{N}{2})$$

移中性的用途：

图像作傅立叶变换时，若采用以下公式变换，则变换后主要能量（低频分量）集中在频率平面的中心。

$$F'(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[f(x,y)(-1)^{(x+y)}\right]\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(ux+vy)\right]$$

思考题：

采用上述公式变换，变换后主要能量（低频分量）集中在频率平面的中心。为什么？

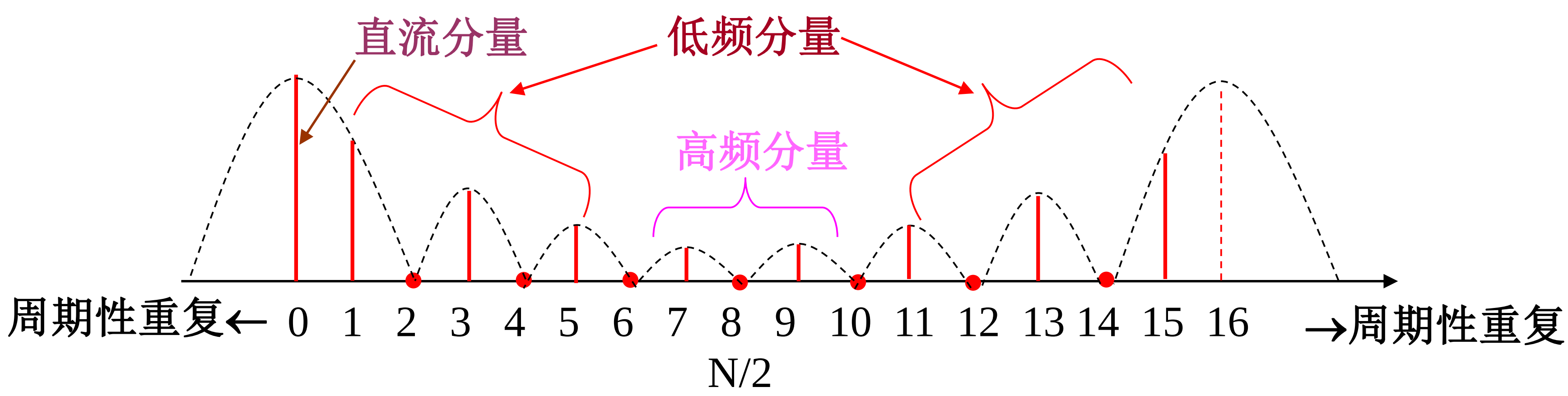
F（u，v）的主要能量分布在频率平面的什么位置？

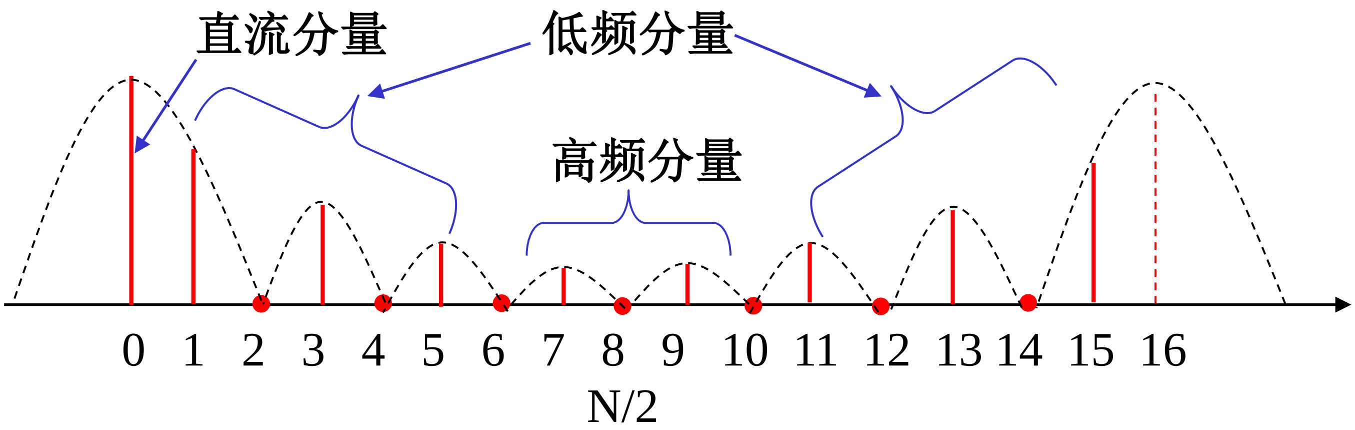
移中性

$$f(x,y)(-1)^{(x+y)} \Leftrightarrow F(u-\frac{N}{2}, v-\frac{N}{2})$$

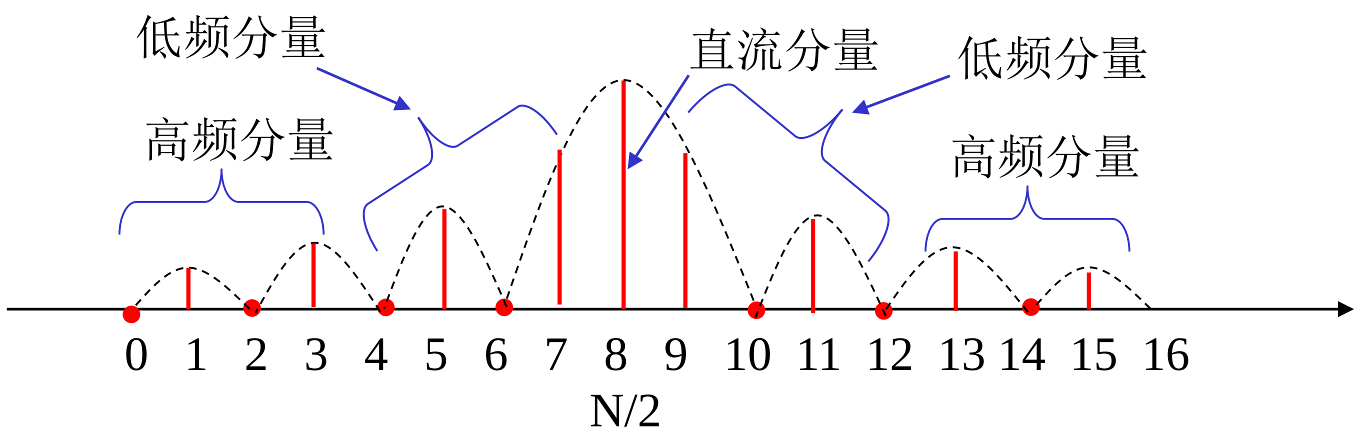
先以一维为例：

f（x）=[1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0]，N=16。求| F（u）|





$f'(x)=f(x)(-1)^{x}=[1\ -1\ 1\ -1\ \ 1\ -1\ 1\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ ]$，求$|F'(u)|$

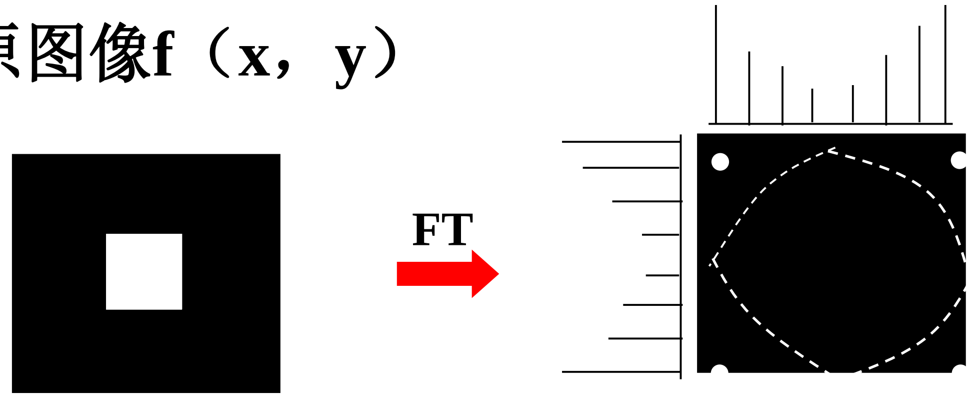


移中性

$$f(x,y)(-1)^{(x+y)} \Leftrightarrow F\left(u-\frac{N}{2}, v-\frac{N}{2}\right)$$

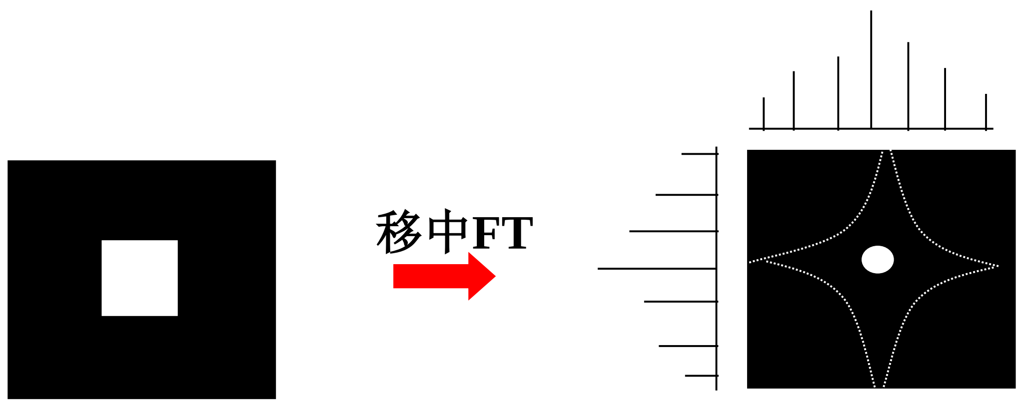
原图像f（x，y）

未移中的变换：



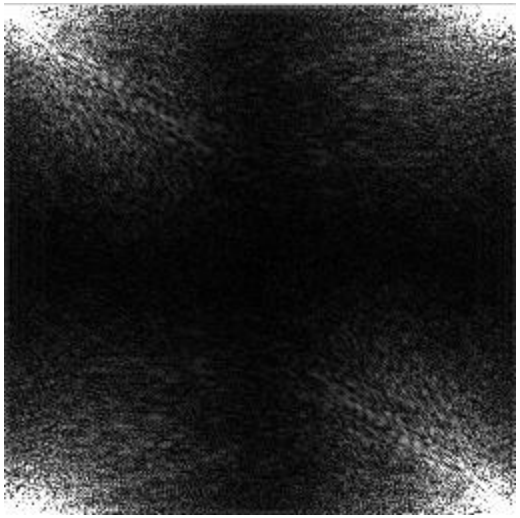
能量分布于四角（示意图，非实际的FT变换）

移中的变换：



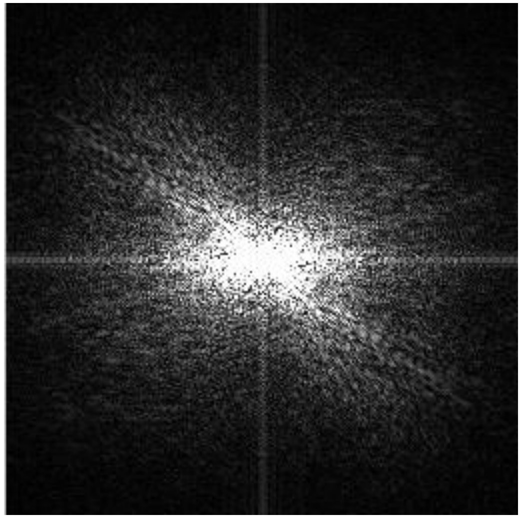
能量集中于中心（示意图，非实际的FT变换）

FFT



```
I=imread('e:\myimage\lena.bmp');
I=double(I)/255;
F_I=fft2(I);
imshow(abs(F_I)/64);
```

移中FT



```
G_I=fftshift(F_I);
imshow(abs(G_I)/64);
```

$$f(x,y)(-1)^{(x+y)} \Leftrightarrow F\left(u-\frac{N}{2}, v-\frac{N}{2}\right)$$

移中性计算举例

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{FT}} \begin{bmatrix} 4 & 2-2j & 0 & 2+2j \\ 2-2j & -2j & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2+2j & 2 & 0 & 2j \end{bmatrix} \xrightarrow{\times 1/4} \left| \; \right| \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

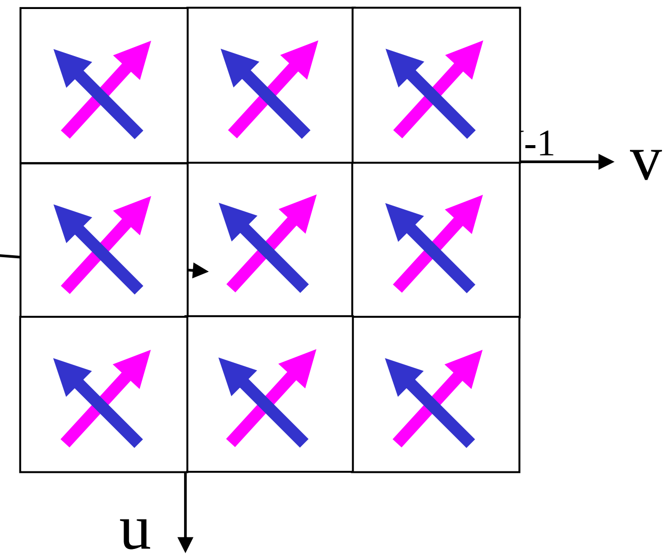
$$\Big\downarrow \times(-1)^{(x+y)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{FT}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2j & 2+2j & 2 \\ 0 & 2+2j & 4 & 2-2j \\ 0 & 2 & 2-2j & -2j \end{bmatrix} \xrightarrow{\times 1/4} \left| \; \right| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3.2.3 二维傅立叶变换的性质

3. 周期性

F(u,v)



$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= F(u+N,v) \\
&= F(u,v+N) \\
&= F(u+N,v+N) \\
&= F(u \pm \gamma N, v \pm \gamma N), \quad \gamma\text{为正整数}
\end{aligned}
$$

非周期性离散函数的FT

是离散的周期性函数

3. 周期性（周期延拓）

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{FT}}
\begin{bmatrix} 4 & 2-2j & 0 & 2+2j \\ 2-2j & -2j & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2+2j & 2 & 0 & 2j \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 4 & 2-2j & 0 & 2+2j \\ 2-2j & -2j & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2+2j & 2 & 0 & 2j \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 4 & 2-2j & 0 & 2+2j \\ 2-2j & -2j & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2+2j & 2 & 0 & 2j \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 4 & 2-2j & 0 & 2+2j \\ 2-2j & -2j & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2+2j & 2 & 0 & 2j \end{bmatrix}
$$

$$\Big\downarrow \times(-1)^{(x+y)}$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{FT}}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2j & 2+2j & 2 \\ 0 & 2+2j & 4 & 2-2j \\ 0 & 2 & 2-2j & -2j \end{bmatrix}
$$

3.2.3 二维傅立叶变换的性质

4. 旋转性

当变量x，y，u，v都用极坐标表示时，即：

$$\begin{cases} x = \gamma\cos\theta \\ y = \gamma\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \omega\cos\phi \\ v = \omega\sin\phi \end{cases}$$

$$f(x,y) \rightarrow f(\gamma,\theta)$$

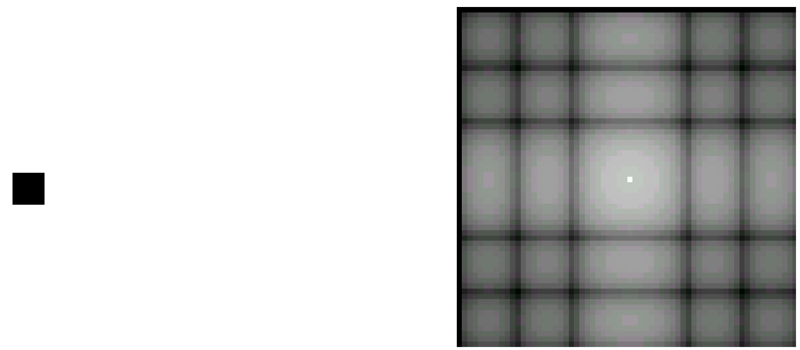
$$F(u,v) \rightarrow F(\omega,\phi)$$

若： $$f(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)$$

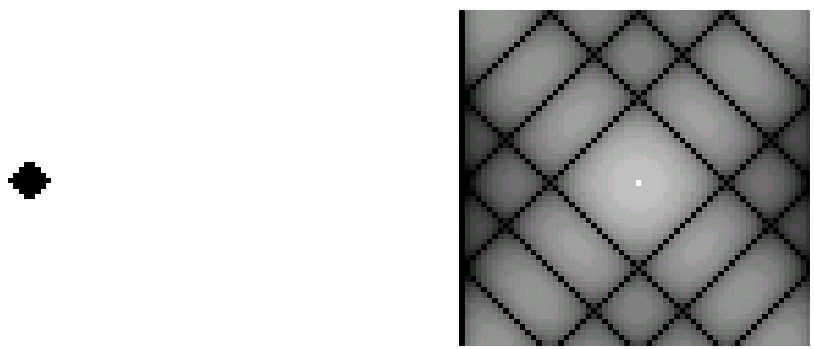
则： $$f(\gamma,\theta+\theta_0) \Leftrightarrow F(\omega,\phi+\theta_0)$$

此式含义是：当原图像旋转某一角度时，FT后的图像也旋转同一角度。

旋转性举例：



原图像及其傅立叶幅度谱图像



原图像旋转45°，其幅度谱图像也旋转45 °

3.2.3 二维傅立叶变换的性质

5. 卷积定理

若：

$$f(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)$$

$$g(x,y) \Leftrightarrow G(u,v)$$

则：

$$f(x,y) * g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) \cdot G(u,v)$$

$$f(x,y) \cdot g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) * G(u,v)$$

空域 **频域**

***卷积** **• 乘积**

3.2.3 二维傅立叶变换的性质

6. 相关定理

若：
$$f(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)$$
$$g(x,y) \Leftrightarrow G(u,v)$$

则：
$$f(x,y) \circ g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) \cdot G^*(u,v)$$

$$f(x,y) \cdot g^*(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) \circ G(u,v)$$

空域 **频域**

$\circ$ 相关 *共轭 $\bullet$ 乘积

3.2.3 二维傅立叶变换的性质

7. 共轭对称性

$$F(u,v) = F^*(-u,-v)$$

$$\left|F(u,v)\right| = \left|F^*(-u,-v)\right|$$

8. 比例性

$$af(x,y) \Leftrightarrow aF(u,v)$$

$$f(ax,by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|}F(\frac{u}{a},\frac{v}{b})$$

3.2.3 二维傅立叶变换的性质

9. 平均值

$$\overline{f(x,y)} = \frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) = F(0,0)$$

说明：$f(x,y)$ 的平均值＝其傅立叶变换在频率原点的 $F(0,0)$ 值

物理意义：图像的零频分量或直流分量，反映了原始图像的平均亮度。

3.2.3 二维傅立叶变换的性质

10. 微分性质

$$\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n} \Leftrightarrow (j2\pi u)^n F(u,v) \quad \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n} \Leftrightarrow (j2\pi v)^n F(u,v)$$

特例：Laplacian 算式：

$$\Delta f(x,y) = \nabla f^2(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

Laplacian算子的FT变换对为：

$$\Delta f(x,y) \Leftrightarrow -4\pi^2(u^2+v^2)F(u,v)$$

Laplacian 算子常用于图像的边缘检测和图像模式识别等领域。

3.2.4 二维傅立叶幅度谱的显示

步骤:

1. 求移中的傅立叶变换:

$$F'(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[f(x,y)(-1)^{(x+y)}\right]\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(ux+vy)\right]$$

2. 求幅度谱:

$$\left|F'(u,v)\right|=\sqrt{R^2(u,v)+I^2(u,v)}$$

3. 求幅度谱的对数函数:

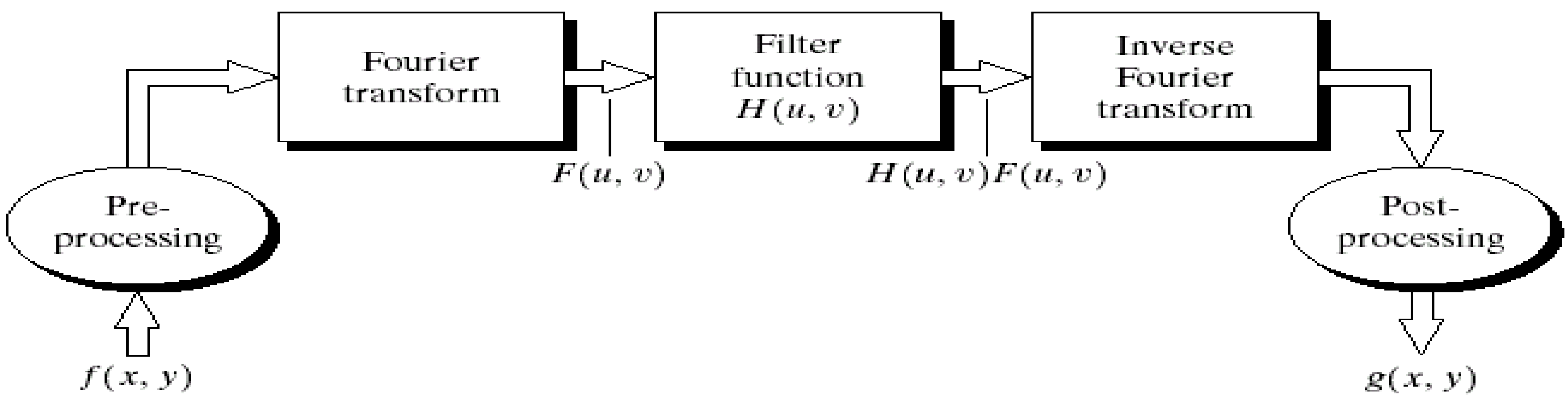
$$D(u,v)=\log(1+\left|F'(u,v)\right|)$$

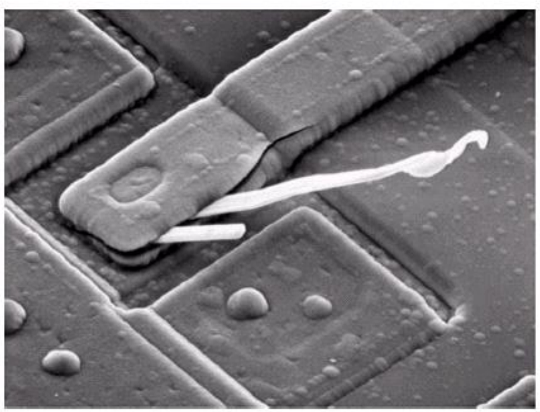
4. 显示D(u,v)

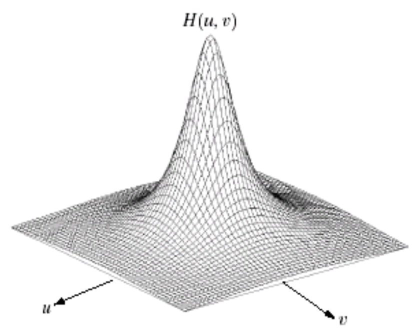
若D(u,v)很小或很大，则将其线形扩展或压缩到0-255

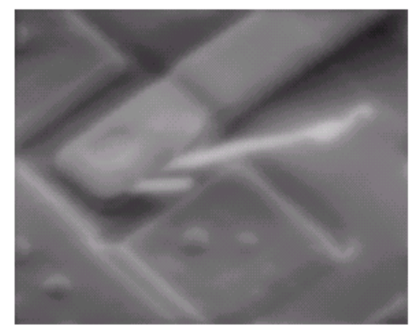
线性系统与傅立叶变换

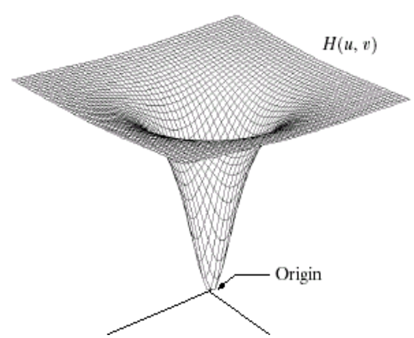
Frequency domain filtering operation

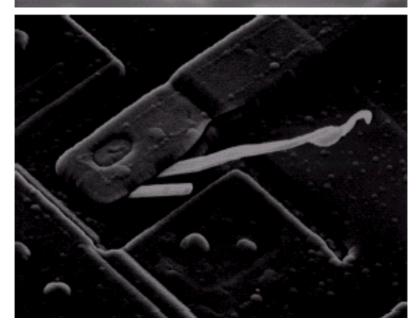




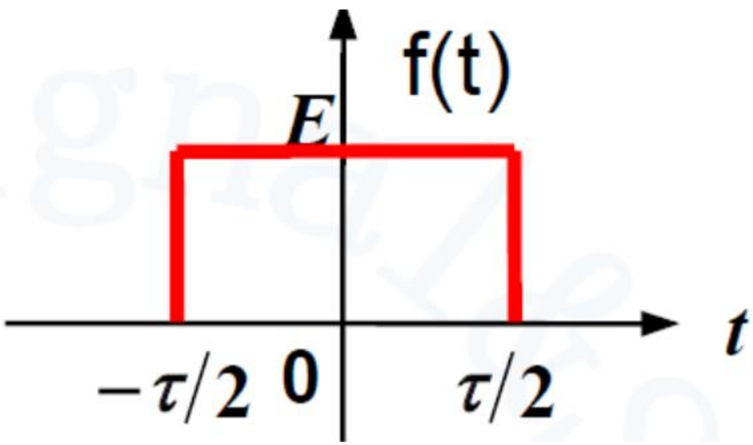


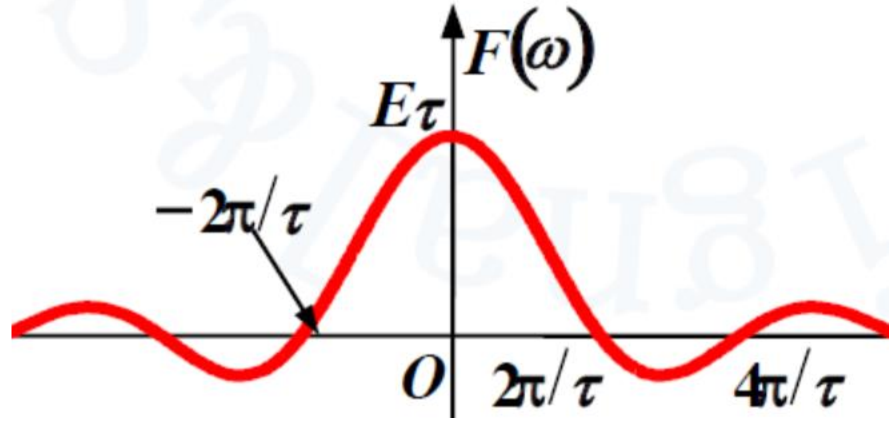






$$f(t)=E\left[\varepsilon\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$





则$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}E\,e^{-j\omega t}\,dt=\frac{2E}{\omega}sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)=\boxed{E\tau\cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}$

主要能量集中在$\omega=0\sim\frac{2\pi}{\tau}$,即$f=0\sim\frac{1}{\tau}$上，常认为

这种信号占有频率范围（频带）$B\approx\frac{1}{\tau}$。

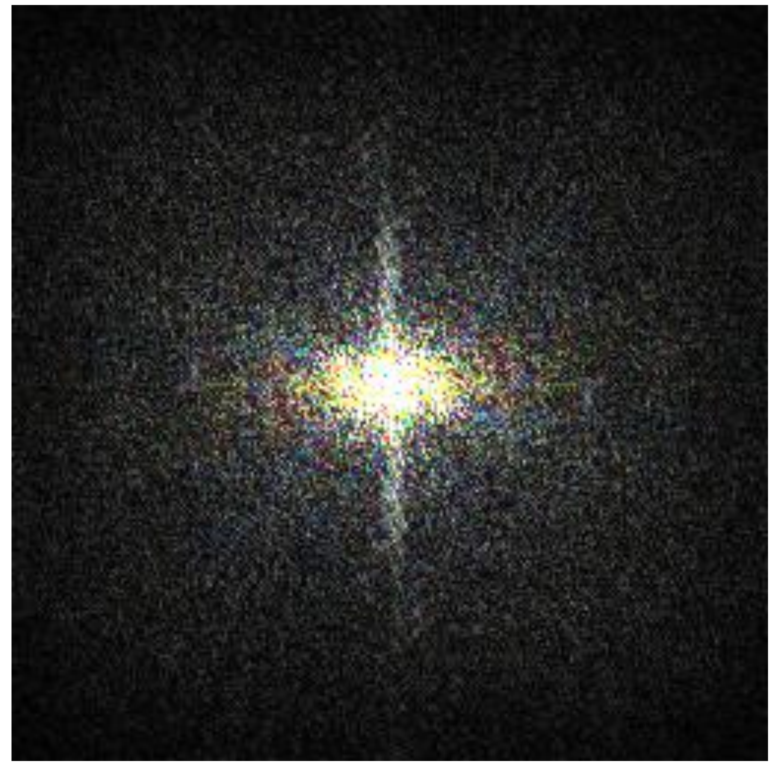
傅立叶变换在图像滤波中的应用

首先，我们来看Fourier变换后的图像，中间部分为低频部分，越靠外边频率越高。

因此，我们可以在Fourier变换图中，选择所需要的高频或是低频滤波。

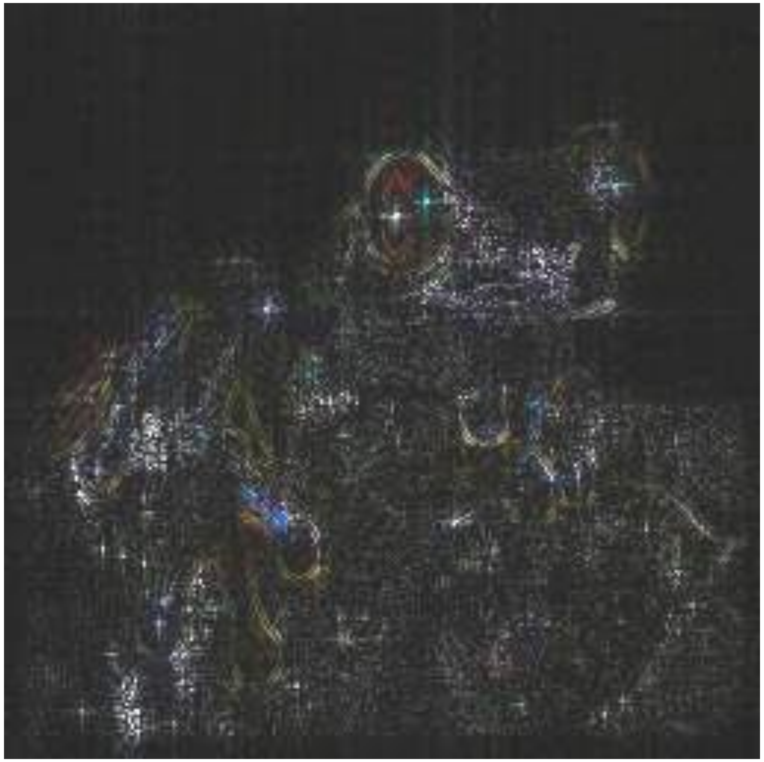
傅立叶变换在图像压缩中的应用

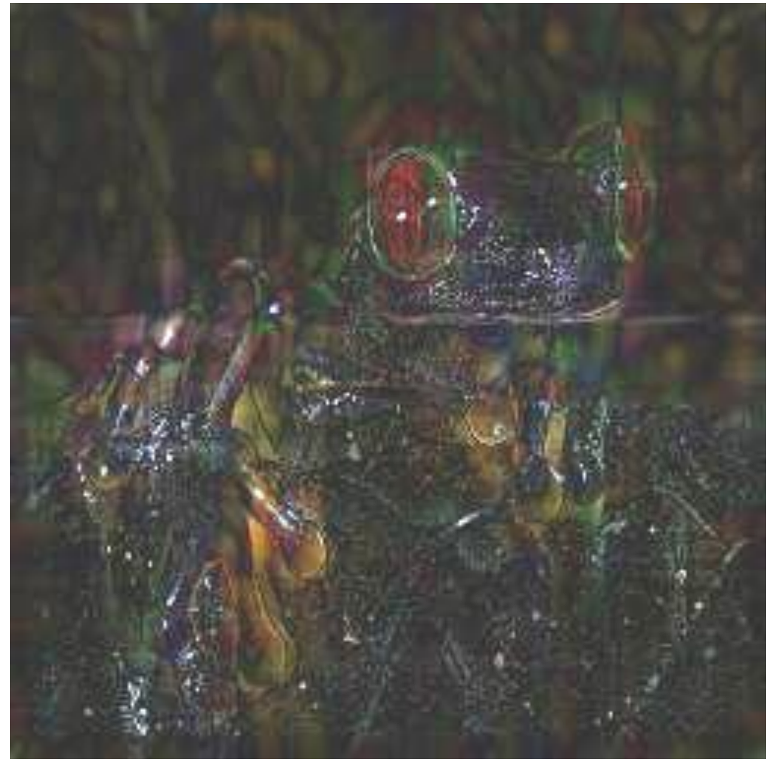
变换系数刚好表现的是各个频率点上的幅值。在小波变换没有提出时，用来进行压缩编码。考虑到高频反映细节、低频反映景物概貌的特性。往往认为可将高频系数置为0，骗过人眼。



返回

Fourier变换的高通滤波





返回

压缩率为：3.3：1

另一幅图像效果

压缩率为：16.1：1

返回

Fourier变换的低通滤波

返回

第三章 图像变换

3.3 离散余弦变换

Discrete Cosine Transform

问题的提出：

Fourier变换的一个最大的问题是：它的参数都是复数，在数据的描述上相当于实数的两倍。为此，我们希望有一种能够达到相同功能但数据量又不大的变换。

在此期望下，产生了DCT变换。

DCT变换的应用：

余弦变换实际上是傅立叶变换的实数部分。余弦变换主要用于图像的压缩，如目前的国际压缩标准的JPEG格式中就用到了DCT变换。具体的做法与DFT 相似。给高频系数大间隔量化，低频部分小间隔量化。

3.3.1 一维离散余弦变换

正变换： $f(x)$为一维离散函数， $x = 0,1,\cdots,\ N-1$

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x), \qquad u = 0$$

$$F(u) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos\left[\frac{\pi}{2N}(2x+1)u\right], \quad u = 1,2,\cdots,N-1$$

反变换：

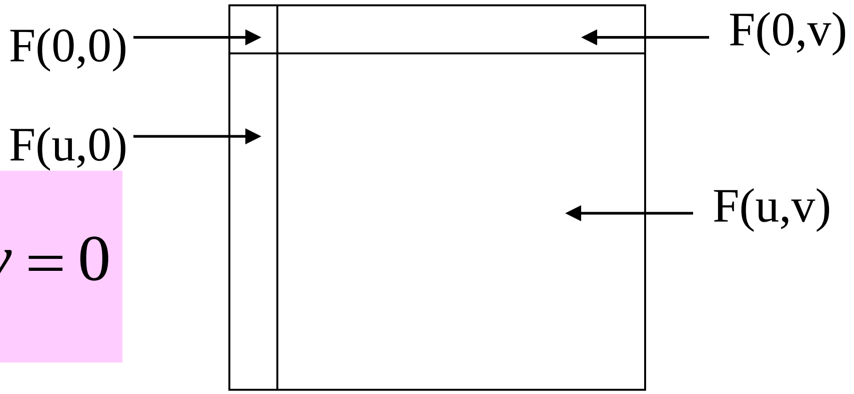
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} F(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{u=1}^{N-1} F(u) \cos\left[\frac{\pi}{2N}(2x+1)u\right], \quad x = 0,1,\cdots,N-1$$

特点：（1）无虚数部分

（2）正变换核与反变换核一样

3.3.2 二维离散余弦变换

1. 正变换



$$F(0,0)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y),\qquad u=0,v=0$$

$$F(u,0)=\frac{2}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\left[\frac{\pi}{2N}(2x+1)u\right],\quad v=0,\ u=1,2,\cdots,N-1$$

$$F(0,v)=\frac{2}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\left[\frac{\pi}{2N}(2y+1)v\right],\quad u=0,\ v=1,2,\cdots,N-1$$

$$F(u,v)=\frac{2}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\left[\frac{\pi}{2N}(2x+1)u\right]\cos\left[\frac{\pi}{2N}(2y+1)v\right]$$

$$u,v=1,2,\cdots,N-1$$

3.3.2 二维离散余弦变换

2. 反变换

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = {} & \frac{1}{N}F(0,0) \\
& + \frac{2}{\sqrt{N}}\sum_{u=1}^{N-1}F(u,0)\cos\left[\frac{\pi}{2N}(2x+1)u\right] \\
& + \frac{2}{\sqrt{N}}\sum_{v=1}^{N-1}F(0,v)\cos\left[\frac{\pi}{2N}(2y+1)v\right] \\
& + \frac{2}{N}\sum_{u=1}^{N-1}\sum_{v=1}^{N-1}F(u,v)\cos\left[\frac{\pi}{2N}(2x+1)u\right]\cos\left[\frac{\pi}{2N}(2y+1)v\right]
\end{aligned}
$$

3.3.2 二维离散余弦变换

3. 举例

DCT

```
I=imread('e:\myimage\lena.bmp');
I=double(I)/255;
G=dct2(I);
imshow(G);
```

图像经**DCT**后，能量集中于频率平面的左上角。

DCT用于图像数据压缩。

3.3.3 离散余弦变换的矩阵算法

一维离散余弦变换：

正变换： $$F = Cf$$

反变换： $$f = C^T F$$

二维离散余弦变换：

正变换： $$F = CfC^T$$

反变换： $$f = C^T FC$$

C为离散余弦变换矩阵，C^T为C的转置矩阵

3.3.3 离散余弦变换的矩阵算法

变换矩阵C为:

$$C=\sqrt{\frac{2}{N}}\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \cdots & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \cos\frac{\pi}{2N} & \cos\frac{3\pi}{2N} & \cdots & \cos\frac{(2N-1)\pi}{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos\frac{(N-1)\pi}{2N} & \cos\frac{3(N-1)\pi}{2N} & \cdots & \cos\frac{(2N-1)(2N-1)\pi}{2N} \end{bmatrix}_{N\times N}$$

当N=2时，变换矩阵C为:

$$C=\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \cos\frac{\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{4} \end{bmatrix}$$

当N=4时，变换矩阵C为:

$$C=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \cos\frac{\pi}{8} & \cos\frac{3\pi}{8} & \cos\frac{5\pi}{8} & \cos\frac{7\pi}{8} \\ \cos\frac{\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{4} & \cos\frac{5\pi}{4} & \cos\frac{7\pi}{4} \\ \cos\frac{3\pi}{8} & \cos\frac{9\pi}{8} & \cos\frac{15\pi}{8} & \cos\frac{21\pi}{8} \end{bmatrix}$$

离散余弦变换的矩阵算法举例：

已知： $f(x,y)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 用矩阵算法求其DCT。

$$F(u,v)=CfC^T$$

$$=\begin{bmatrix}0.5&0.5&0.5&0.5\\0.65&0.27&-0.27&-0.65\\0.5&-0.5&-0.5&0.5\\0.27&-0.65&0.65&-0.27\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5&0.65&0.5&0.27\\0.5&0.27&-0.5&-0.65\\0.5&-0.27&-0.5&0.65\\0.5&-0.65&0.5&-0.27\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1.32&-0.26&-0.88&-0.17\\-0.26&0.05&0.18&0.03\\-0.88&0.18&0.59&0.12\\-0.17&0.03&0.12&0.02\end{bmatrix}$$

由此例可看出：DCT将能量集中于频率平面的左上角。