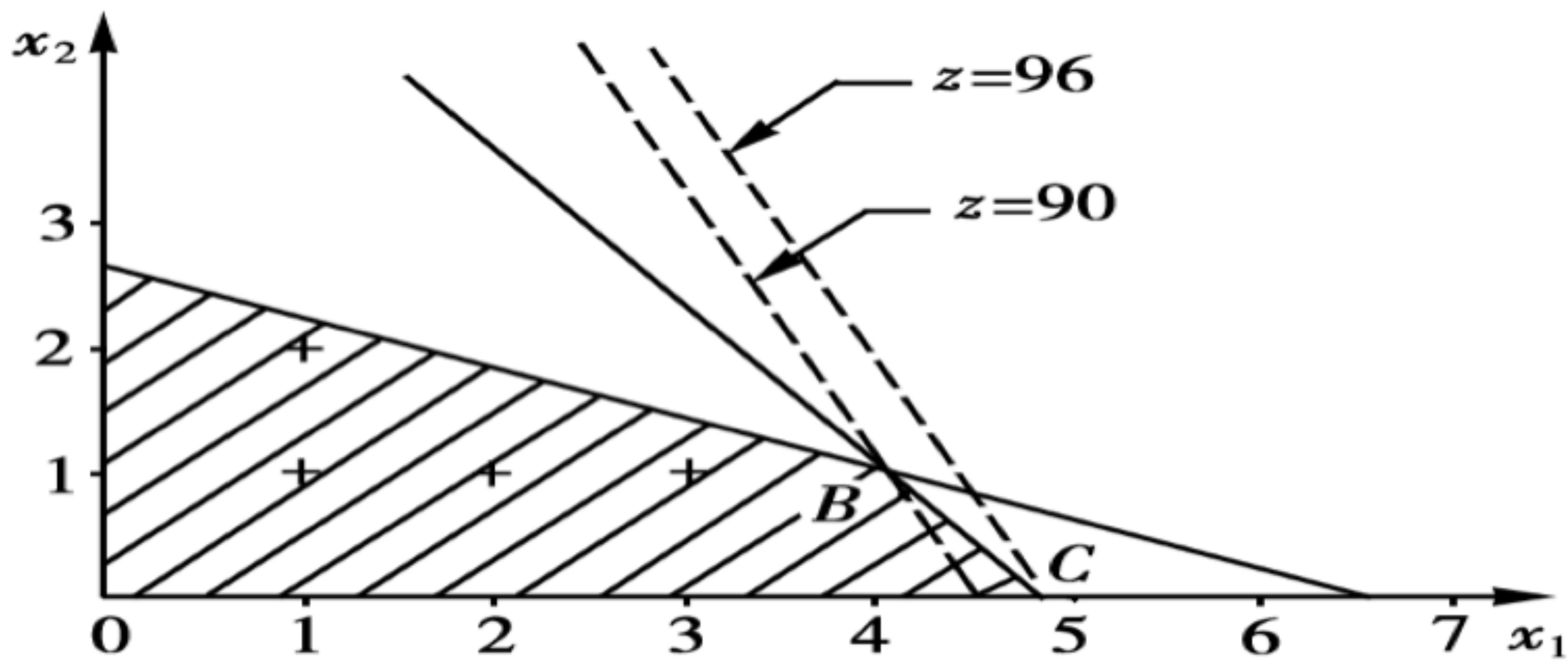
第6章　整数规划

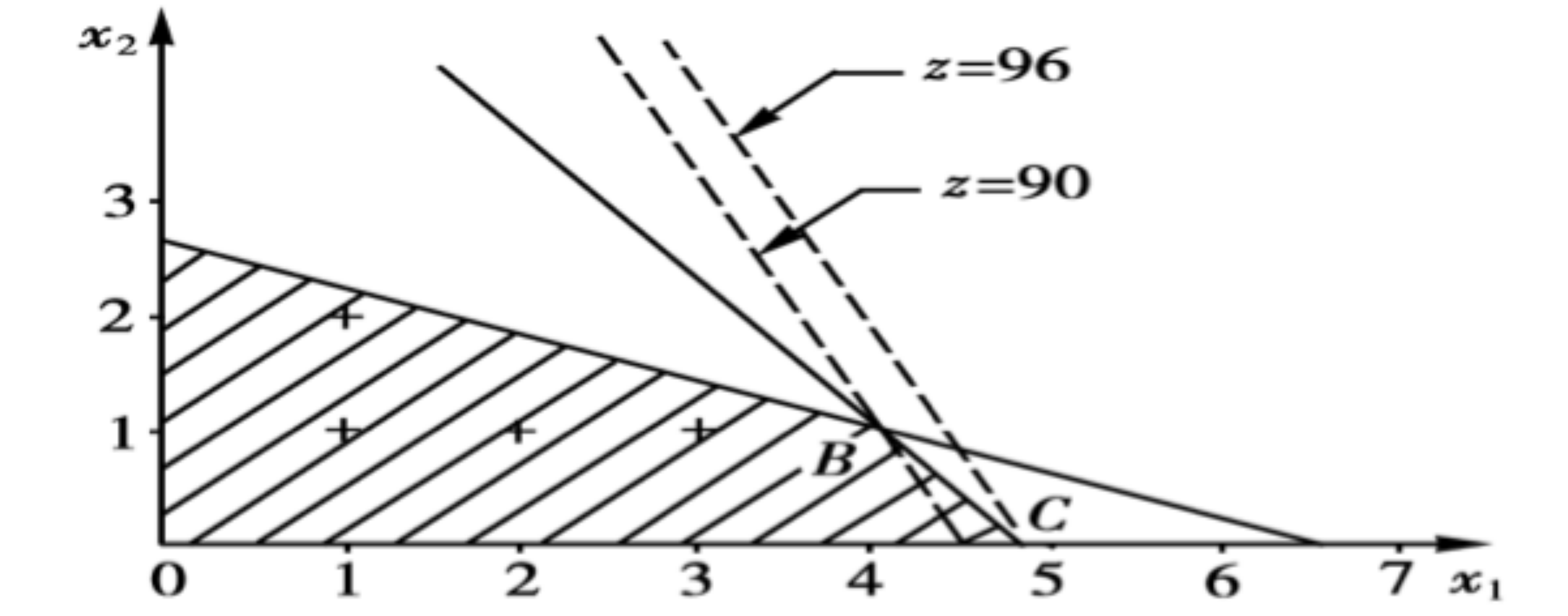
第5章　整数规划

第2节　分支定界解法

- 在求解整数线性规划时，如果可行域是有界的，首先容易想到的方法就是穷举变量的所有可行的整数组合，就像在下图中画出所有“+”号的点那样，然后比较它们的目标函数值以定出最优解



- 对于小型的问题，变量数很少，可行的整数组合数也是很小时，这个方法是可行的，也是有效的。



- 在上一节的例子中，x_1所能取的整数值为0、1、2、3、4共5个；x_2所能取的整数值为0、1、2共3个，它的组合(不都是可行的)数是3×5=15个，穷举法还是勉强可用的。
- 对于大型的问题，可行的整数组合数是很大的。例如将n项任务指派n个人去完成，不同的指派方案共有n!种，当n =10，这个数就超过300万；当n=20，这个数就超过2×10^{18}，如果一一计算，就是用每秒百万次的计算机，也要几万年的功夫，很明显，解这样的题，穷举法是不可取的。
- 所以我们的方法一般应是仅检查可行的整数组合的一部分，就能定出最优的整数解。**分支定界解法**(branch and bound method)就是其中的一个.

分枝定界法是20世纪60年代由Land-Doig和Dakin等人提出的。这种方法既可用于纯整数规划问题，也可用于混合整数规划问题，而且便于用计算机求解，所以很快成为解整数规划的最主要的方法。

例 求下列问题：

Max $Z=3x_1+13x_2$

s.t. $2x_1+9x_2 \le 40$

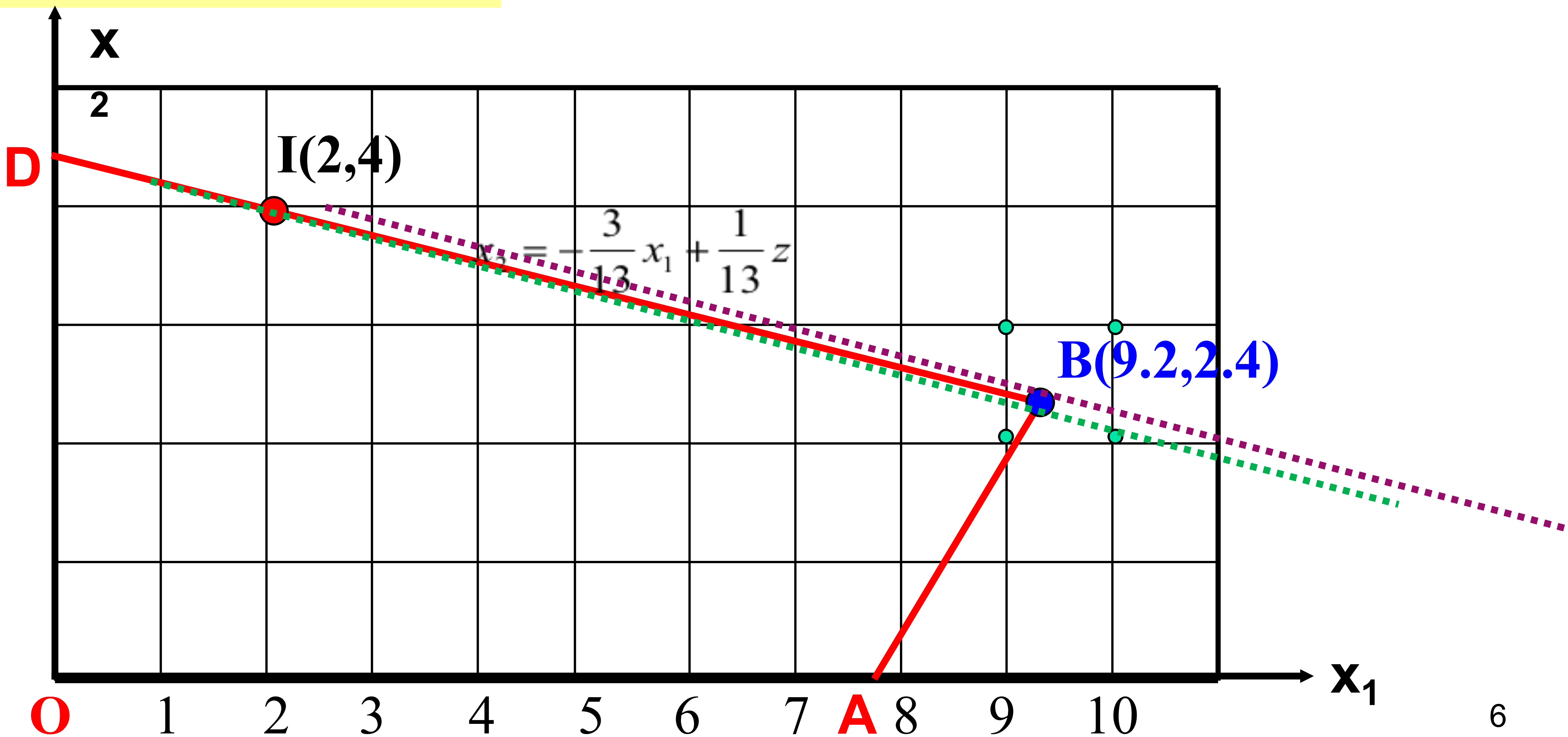
$11x_1-8x_2 \le 82$

$x_1,x_2 \ge 0$,且取整数值

可行域OABD内整数点，放弃整数要求后，最优解B(9.2， 2.4) $Z_0=58.8$

而原整数规划最优解I(2,4) $Z_0=58$

B附近四个整点(9,2)(10,2)(9,3)(10,3)都不是原规划最优解。



例 求下列问题：

$\text{Max } Z=3x_1+13x_2$

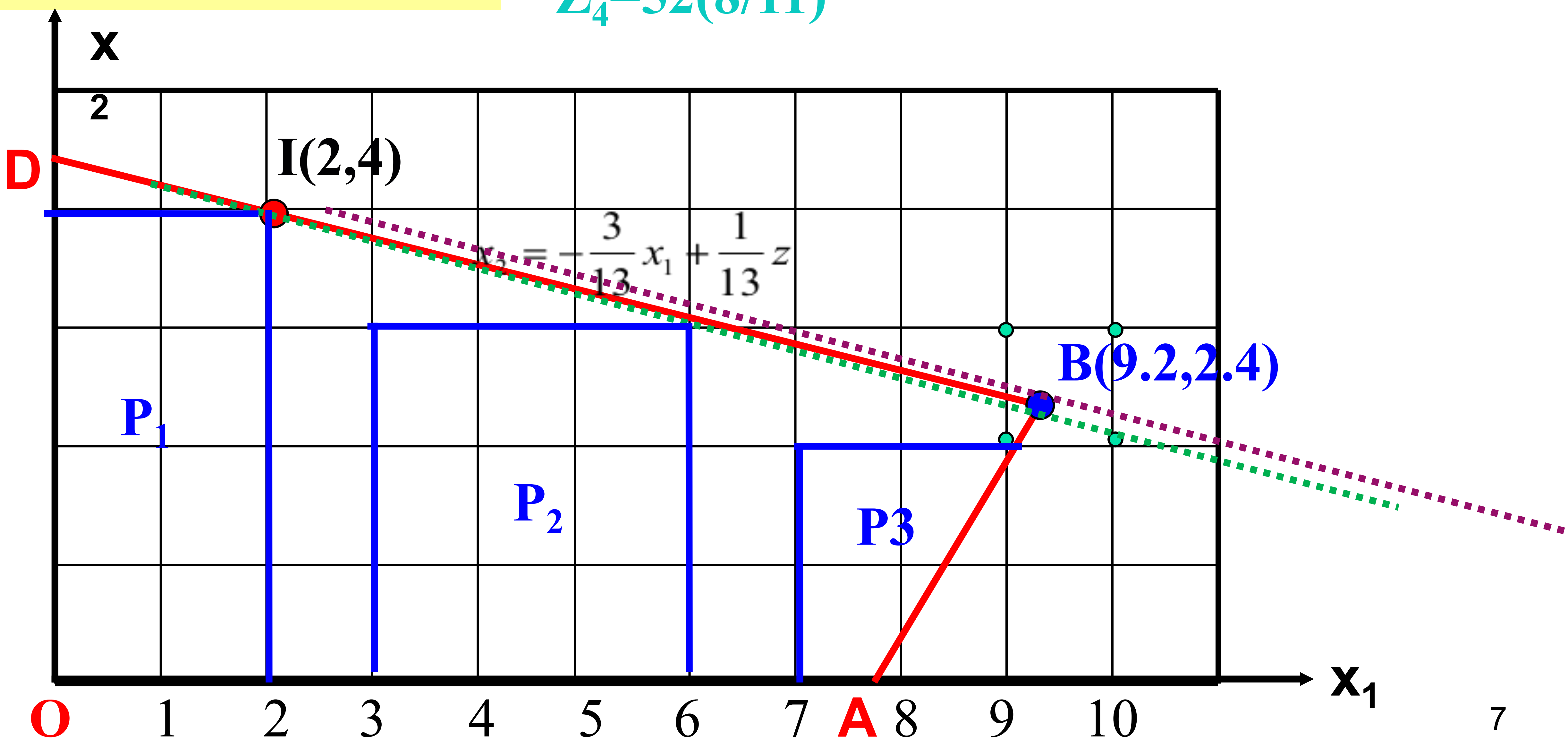
$\text{s.t.}\ 2x_1+9x_2 \le 40$

$11x_1-8x_2 \le 82$

$x_1,x_2 \ge 0$,且取整数值

※假如把可行域分解成三个互不相交的子问题P_1，P_2，P_3之和

※而放弃整数要求后P_1最优解$I(2,4)$, $Z_1=58$, P_2最优解$(6,3)$, $Z_2=57$， P_3最优解$(98/11,2)$, $Z_4=52(8/11)$



分支定界法思路

- 设有最大化的整数线性规划问题A，与它相应的线性规划为问题B，从解问题B开始，若其最优解不符合A的整数条件，那么B的最优目标函数必是A的最优目标函数z^*的上界，记作 $\bar{z}$；

- 而A的任意可行解的目标函数值将是z^*的一个下界 $\underline{z}$。

- 分支定界法就是将B的可行域**分成子区域**(称为分支)的方法，逐步减小 $\bar{z}$ 和增大 $\underline{z}$，最终求到z^*。

原问题的松弛问题：任何整数规划（IP），凡放弃某些约束条件（如整数要求）后，所得到的问题（P） 都称为（IP）的松弛问题。

最通常的松弛问题是放弃变量的整数性要求, (IP)为线性规划问题。

*整数规划的解集是其对应的线性规划解集的子集。

*整数规划求最大化时，线性规划的最优解是其解的上界。

*整数规划求最小化时，线性规划的最优解是其解的下界。

一般求解对应的松弛问题，可能会出现下面几种情况：

- 若所得的最优解的各分量恰好是整数，则这个解也是原整数规划的最优解，计算结束。
- 若松弛问题无可行解，则原整数规划问题也无可行解，计算结束。
- 若松弛问题有最优解，但其各分量不全是整数，则这个解不是原整数规划的最优解。

分支的方法

任选一不符合整数条件的变量x_r，其值为b_r，构造两个约束条件 $x_r \le \lfloor \bar{b}_r \rfloor$ **和** $x_r \ge \lfloor \bar{b}_r \rfloor + 1$

$$
\max \ c^{\top} x
$$

$$
s.t.\begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0, x\text{为整数} \end{cases}
$$

将两个约束条件分别加入原问题，得两个后继规划问题。

$$
\max \ c^{\top} x
$$

$$
s.t.\begin{cases} Ax = b \\ x_r \ge \lfloor \bar{b} \rfloor_r + 1 \\ x \ge 0, x\text{为整数} \end{cases}
$$

$$
\max \ c^{\top} x
$$

$$
s.t.\begin{cases} Ax = b \\ x_r \le \lfloor \bar{b}_r \rfloor \\ x \ge 0, x\text{为整数} \end{cases}
$$

定　界

➤ **定界：把满足整数条件各分枝的最优目标函数值作为上（下）界，用它来判断分枝是保留还是剪枝。**

剪　枝

➤ **剪枝：把那些子问题的最优值与界值比较，凡不优或不能更优的分枝全剪掉，直到每个分枝都查清为止。**

可见它不符合整数条件⑤。这时z_0是问题A的最优目标函数值z^*的上界。而$x_1=0$，$x_2=0$，是问题A的一个整数可行解，这时$z=0$，是z^*的一个下界，即$0 \le z^* \le 356$

例 求解A

$$\max z=40x_1+90x_2 \qquad ①$$

$$9x_1+7x_2 \le 56 \qquad ②$$

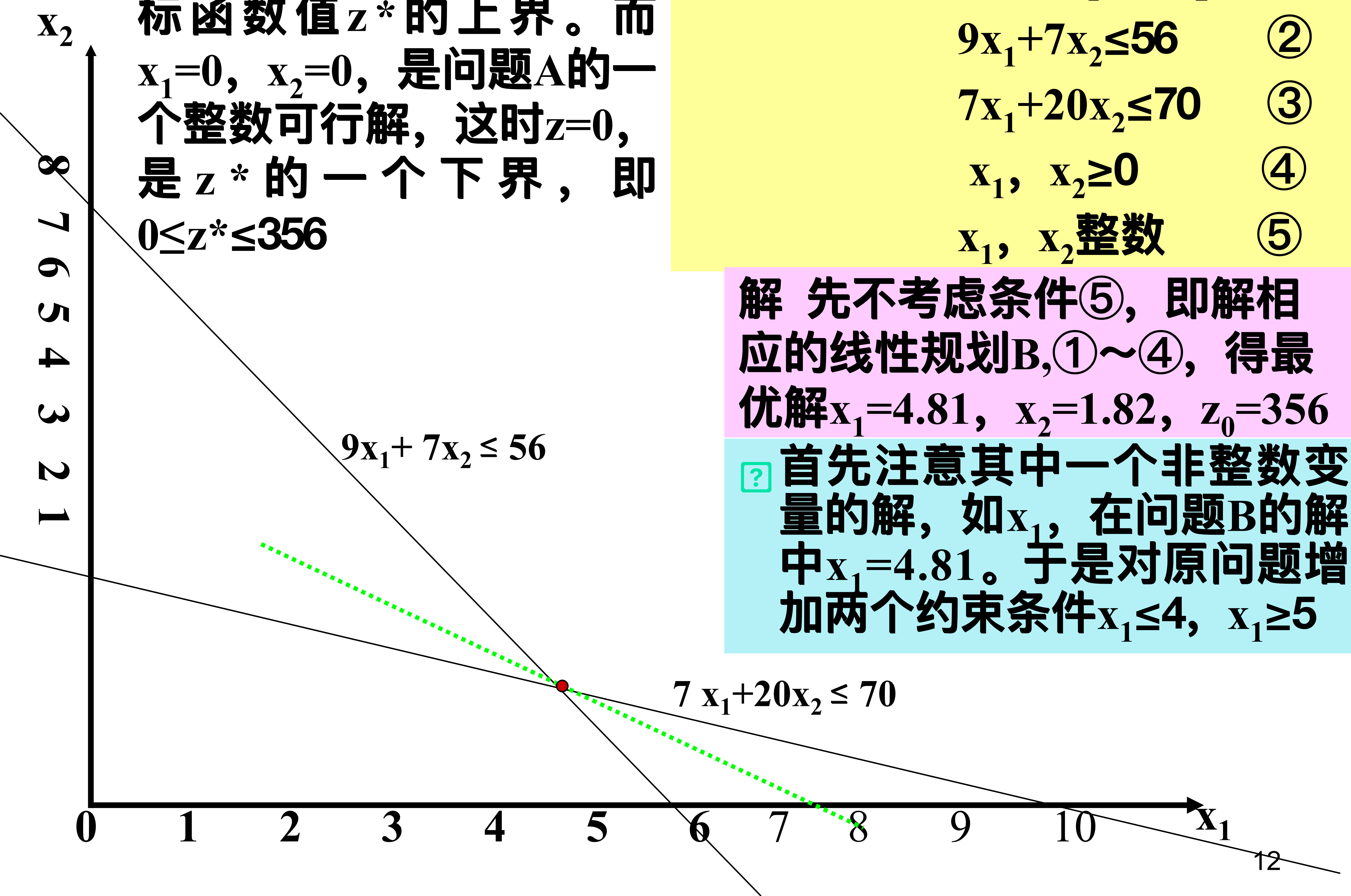
$$7x_1+20x_2 \le 70 \qquad ③$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0 \qquad ④$$

x_1，x_2整数 ⑤

解 先不考虑条件⑤，即解相应的线性规划B,①~④，得最优解$x_1=4.81$，$x_2=1.82$，$z_0=356$

首先注意其中一个非整数变量的解，如x_1，在问题B的解中$x_1=4.81$。于是对原问题增加两个约束条件$x_1 \le 4$，$x_1 \ge 5$



- 显然没有得到全部变量是整数的解。因$z_1>z_2$，故将上界改为349，那么必存在最优整数解z^*，并且$0 \le z^* \le 349$

问题（B）

$x_1=4.81$， $x_2=1.82$

$z=356$

$x_1 \le 4$ $\quad$ $x_1 \ge 5$

问题（B_1）

$x_1=4, x_2=2.1$

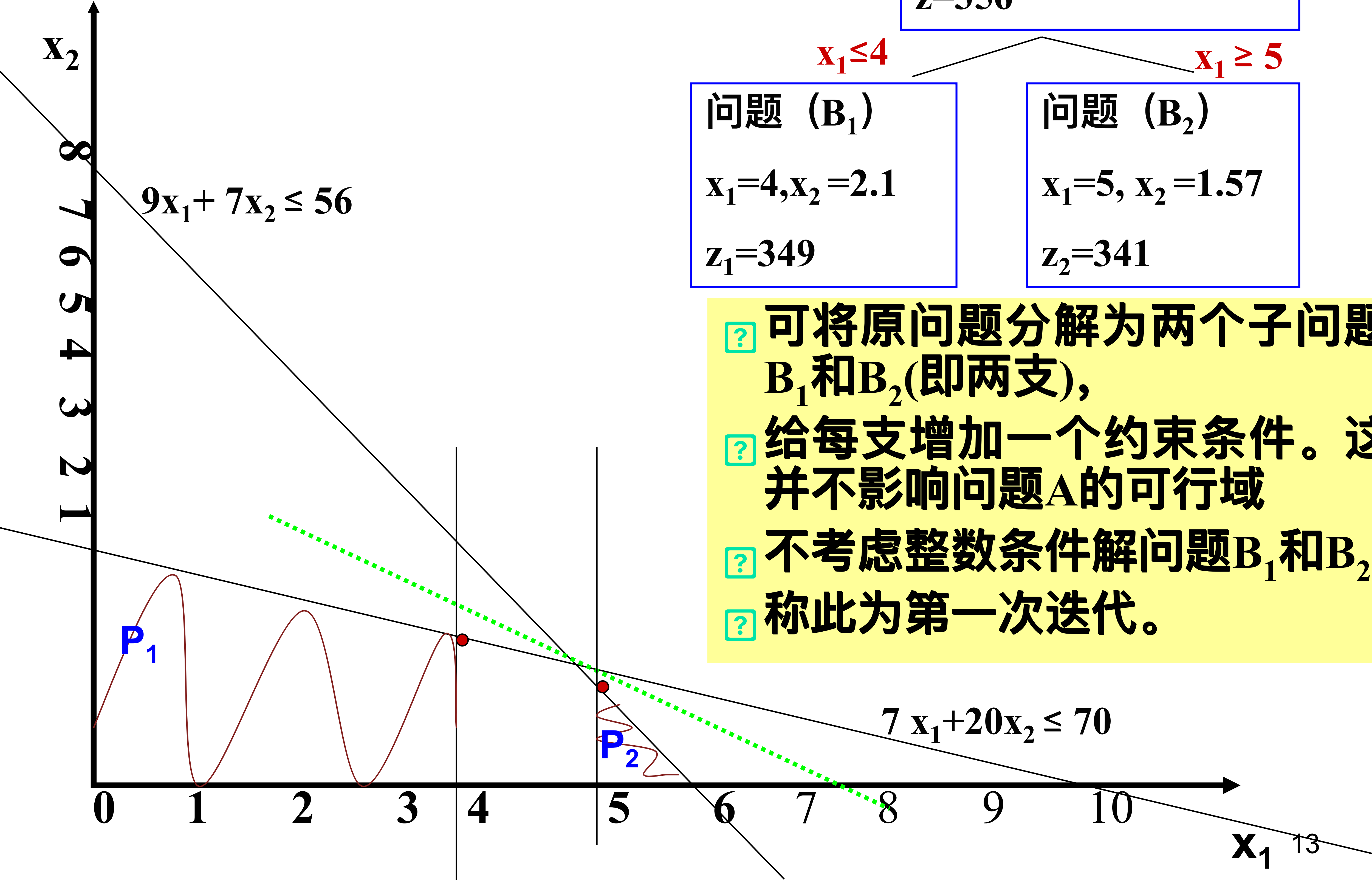
$z_1=349$

问题（B_2）

$x_1=5, x_2=1.57$

$z_2=341$

- 可将原问题分解为两个子问题B_1和B_2(即两支)，
- 给每支增加一个约束条件。这并不影响问题A的可行域
- 不考虑整数条件解问题B_1和B_2
- 称此为第一次迭代。



问题（B）

$x_1=4.81, x_2=1.82$

$z=356$

$x_1 \le 4$　　$x_1 \ge 5$

问题（B_1）

$x_1=4$，$x_2=2.1$　　P_1

$z_1=349$

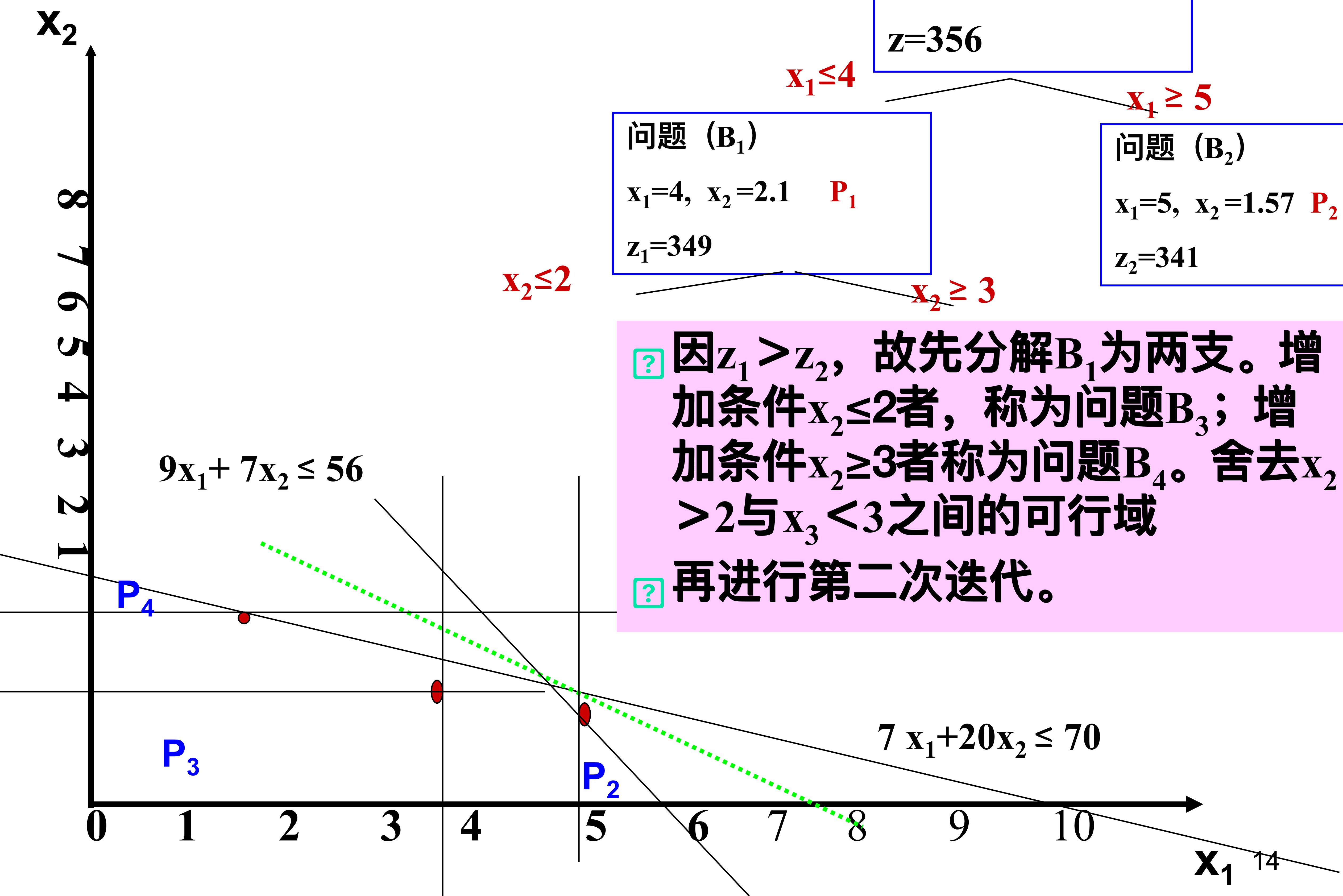
问题（B_2）

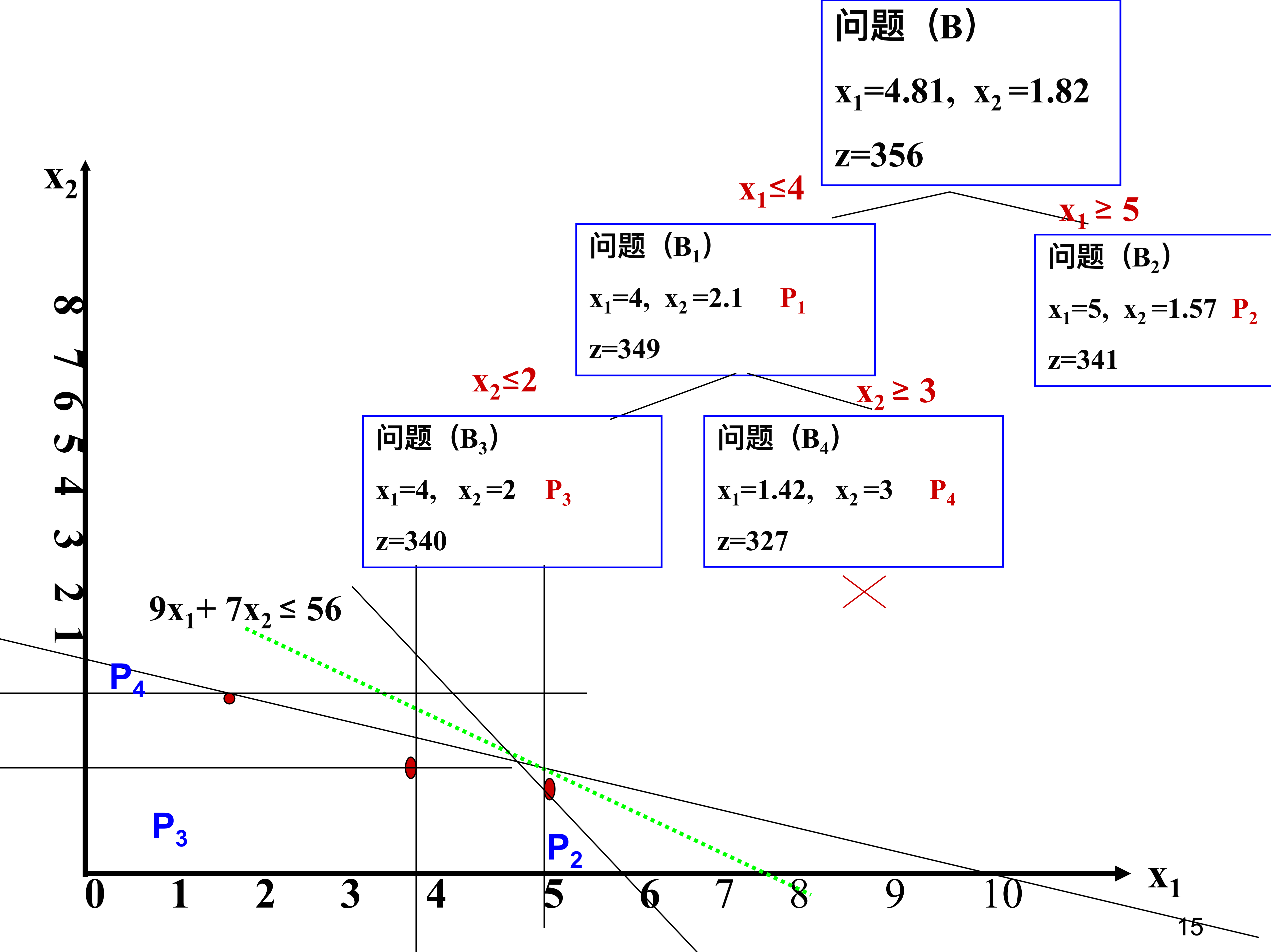
$x_1=5$，$x_2=1.57$　P_2

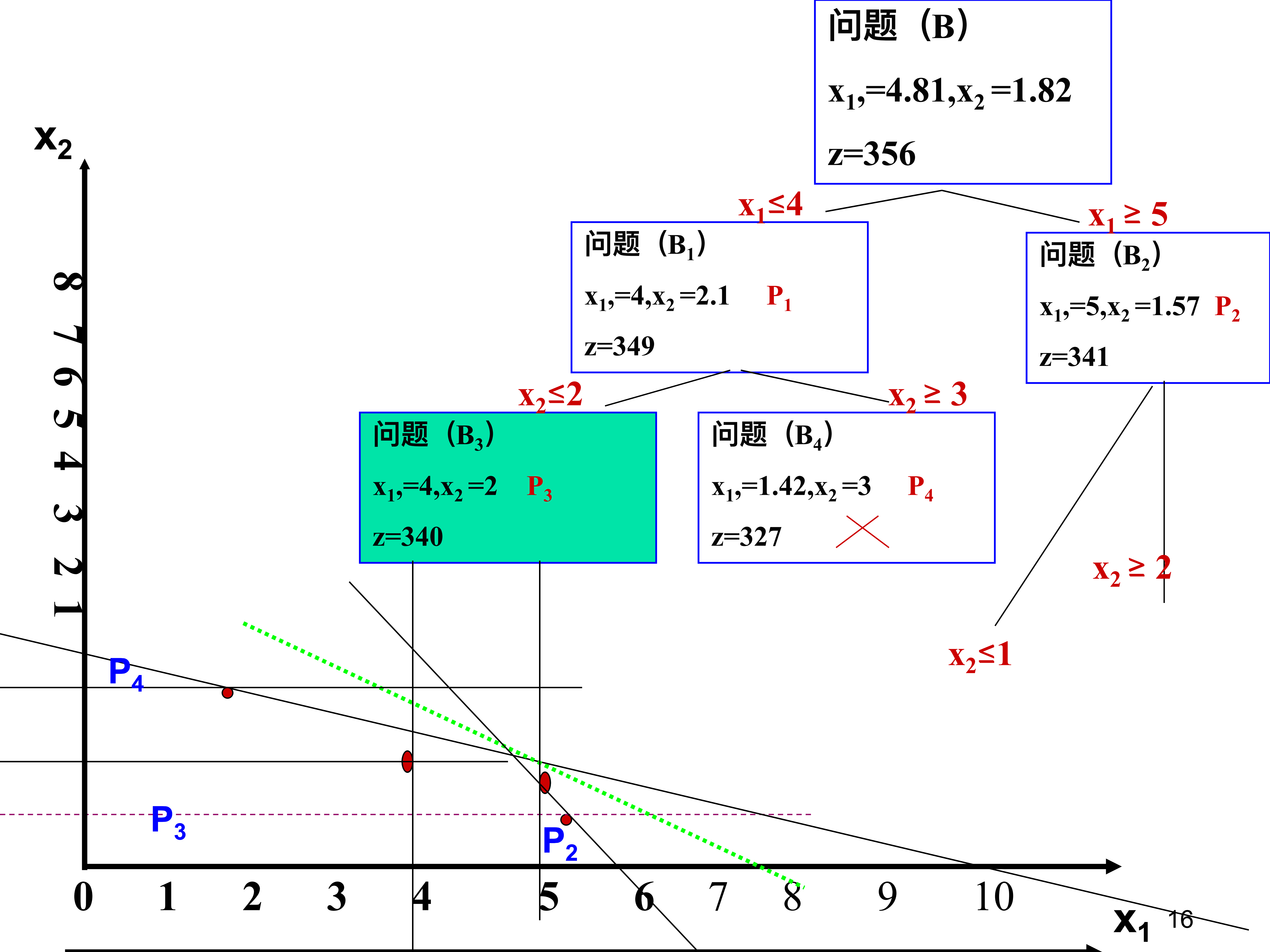
$z_2=341$

$x_2 \le 2$　　$x_2 \ge 3$

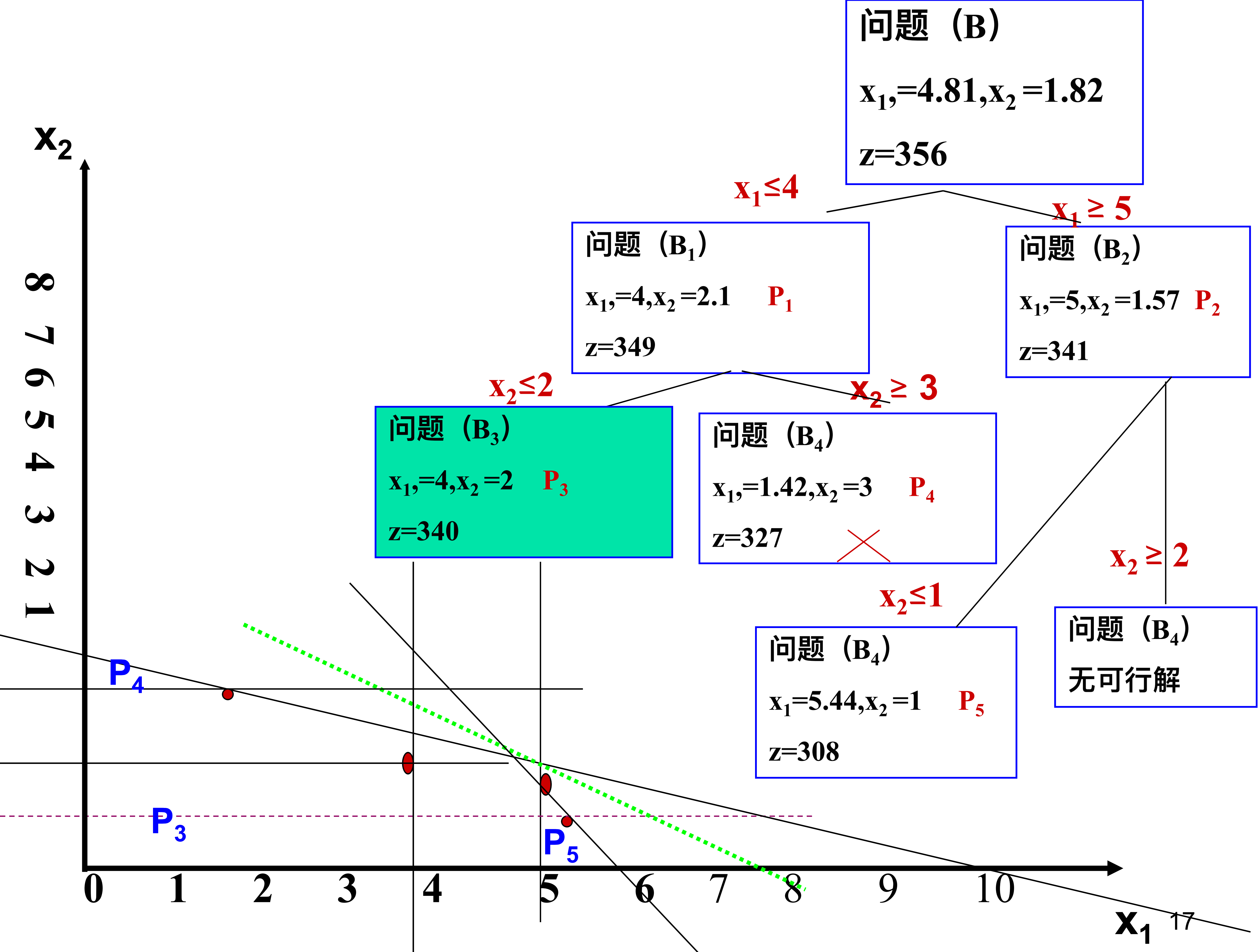
- 因$z_1 > z_2$，故先分解B_1为两支。增加条件$x_2 \le 2$者，称为问题B_3；增加条件$x_2 \ge 3$者称为问题B_4。舍去$x_2 > 2$与$x_3 < 3$之间的可行域
- 再进行第二次迭代。




问题（B）
x1=4.81，x2 =1.82
z=356
x1≤4
x1 ≥ 5
问题（B1）
x1=4，x2 =2.1 P1
z=349
问题（B2）
x1=5，x2 =1.57 P2
z=341
x2≤2
x2 ≥ 3
问题（B3）
x1=4， x2 =2 P3
z=340
问题（B4）
x1=1.42， x2 =3 P4
z=327
9x1+ 7x2 ≤ 56
x2
x1
P4
P3
P2
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1 2 3 4 5 6 7 8



问题（B）
x1,=4.81,x2 =1.82
z=356
x1≤4
x1 ≥ 5
问题（B1）
x1,=4,x2 =2.1 P1
z=349
问题（B2）
x1,=5,x2 =1.57 P2
z=341
x2≤2
x2 ≥ 3
问题（B3）
x1,=4,x2 =2 P3
z=340
问题（B4）
x1,=1.42,x2 =3 P4
z=327
x2 ≥ 2
x2≤1
x2
8 7 6 5 4 3 2 1
P4
P3
P2
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
x1


问题（B）
x1,=4.81,x2 =1.82
z=356
x1≤4
x1 ≥ 5
问题（B1）
x1,=4,x2 =2.1 P1
z=349
问题（B2）
x1,=5,x2 =1.57 P2
z=341
x2≤2
x2 ≥ 3
问题（B3）
x1,=4,x2 =2 P3
z=340
问题（B4）
x1,=1.42,x2 =3 P4
z=327
x2 ≥ 2
x2≤1
问题（B4）
x1=5.44,x2 =1 P5
z=308
问题（B4）
无可行解
x2
8 7 6 5 4 3 2 1
P4
P3
P5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
x1

从以上解题过程可得到，用分支定界法求解整数线性规划(最大化)问题的步骤为：

- 将要求解的整数线性规划问题称为问题A，
- 将与它相应的线性规划问题称为问题B。

(1) 解问题B，可能得到以下情况之一。

①B没有可行解，这时A也没有可行解，则停止。

②B有最优解，并符合问题A的整数条件，B的最优解即为A的最优解，则停止。

③B有最优解，但不符合问题A的整数条件，记它的目标函数值为 $\overline{z}$

(2) 用观察法找问题A的一个整数可行解，一般可取$x_j=0$，$j=1,\ldots,n$ 试探，求得其目标函数值，并记作 $\underline{z}$ 。

以z^*表示问题A的最优目标函数值；这时有

$$\underline{z} \leq z^* \leq \overline{z}$$

进行迭代

- 第一步：分支，在B的最优解中任选一个不符合整数条件的变量x_j，其值为b_j，以［b_j］表示小于b_j的最大整数。
- 构造两个约束条件$x_j \le$［b_j］和$x_j \ge$［b_j］+1
- 将这两个约束条件，分别加入问题B，得两个后继规划问题B_1和B_2。不考虑整数条件求解这两个后继问题。
- 定界，以每个后继问题为一分支，标明求解的结果，与其他问题的解的结果中，找出最优目标函数值最大者作为新的上界 $\bar{z}$。从已符合整数条件的各分支中，找出目标函数值为最大者作为新的下界$\underline{z}$，若无可行解，仍令 $\underline{z}=0$

第二步：比较与剪支

- 各分支的最优目标函数中若有小于$\underline{z}$者，则剪掉这支(用×表示)即以后不再考虑了。若大于 $\underline{z}$且不符合整数条件，则重复第一步。一直到最后得到z^*为止，得最优整数解x_j^*，j=1，…，n

用分支定界法可解纯整数线性规划问题和混合整数线性规划问题。它比穷举法优越。因为它仅在一部分可行解的整数解中寻求最优解，计算量比穷举法小。若变量数目很大，其计算工作量也是相当可观的。