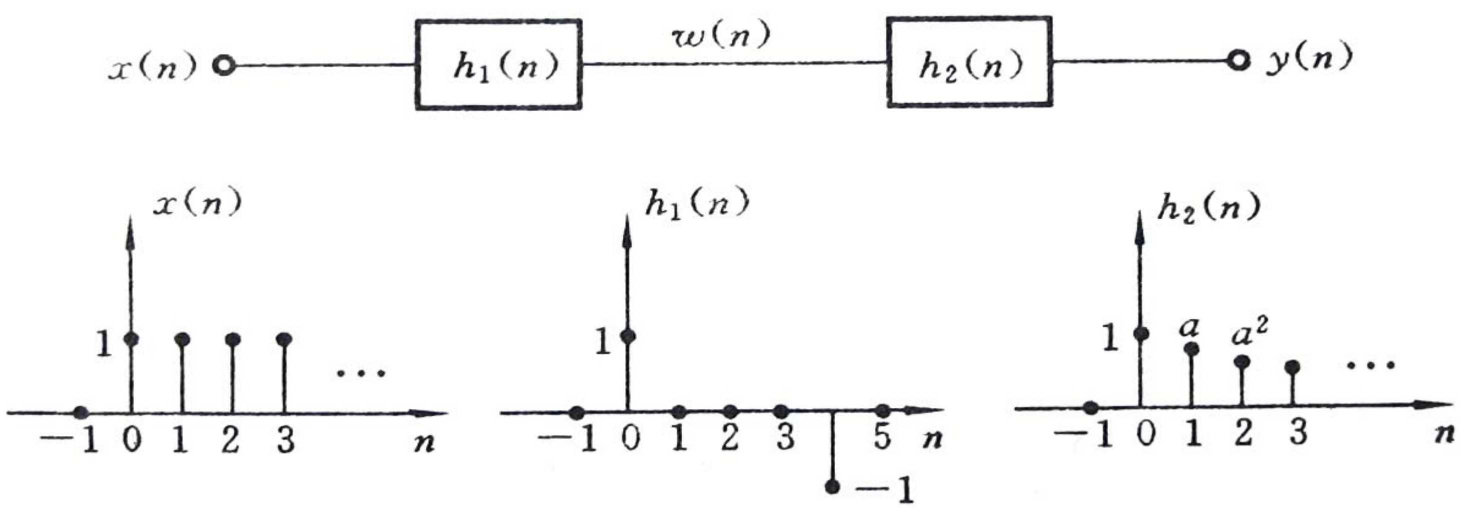
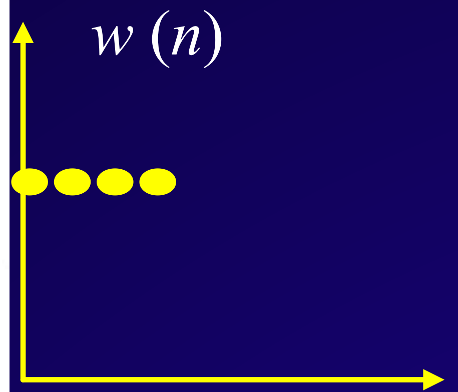
数字信号处理

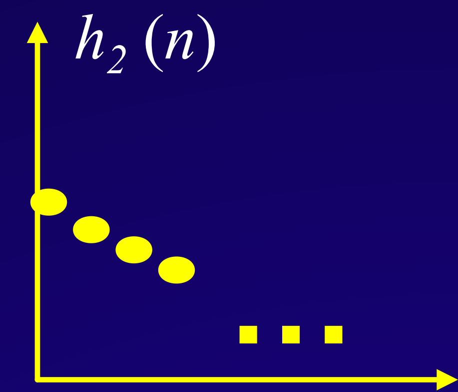
作业分析与讲解

蔡超

2.4 图P2.4所示的是单位取样响应分别为$h_1(n)$和$h_2(n)$的两个线性非移变系统的级联，已知$x(n)=u(n)$，$h_1(n)=\delta(n)-\delta(n-4)$，$h_2(n)=a^n u(n)$，$|a|<1$，求系统的输出$y(n)$.







解 $\omega(n)=x(n)*h_1(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u(k)[\delta(n-k)-\delta(n-k-4)]$

$=u(n)-u(n-4)$

$y(n)=w(n)*h_2(n)$

$y(n)=\omega(n)*h_2(n)$

$$y(n)=0, n<0;$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k u(k)[u(n-k)-u(n-k-4)]$$

$$y(0)=1;$$

$$y(1)=1+a;$$

$$y(2)=1+a+a^2;$$

$$=\sum_{k=n-3}^{n}a^k, n\geq 3$$

$$y(3)=1+a+a^2+a^3;$$

2.4 $w(n)=x(n)*h_1(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}u(k)\left(\delta(n-k)-\delta(n-k-4)\right)=u(n)-u(n-4)$

$y(n)=w(n)*h_2(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a^k u(k)\left(u(n-k)-u(n-k-4)\right)=\sum_{k=n-3}^{n}a^k,\ n\geqslant 3$

$n=2$时, $y(n)=a^2+a+1$; $n=1$时, $y(n)=a+1$; $n=0$时, $y(n)=1$; $n<0$时 $y(n)=0$

解 $\omega(n)=x(n)*h_1(n)$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u(k)\left[\delta(n-k)-\delta(n-k-4)\right]$$

$$=u(n)-u(n-4)$$

$$y(n)=\omega(n)*h_2(n)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k u(k)\left[u(n-k)-u(n-k-4)\right]$$

$$=\sum_{k=n-3}^{\infty}a^k,\ n\geqslant 3$$

2.5 已知一个线性非移变系统的单位取样响应为h(n)=a^{-n} u(-n),0<a<1 用直接计算线性卷积的方法，求系统的单位阶跃响。

解：
$$y(n)=h(n)*u(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)u(n-m)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}a^{-m}u(-m)u(n-m)\overset{令k=-m}{=}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a^{k}u(k)u(n+\mathrm{k})$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}a^{k}u(k)u(n+\mathrm{k})=\begin{cases}\sum_{k=0}^{+\infty}a^{k}u(k) & n\geq 0\\ \sum_{k=0}^{+\infty}a^{k}u(n+\mathrm{k}) & n<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-a} & n\geq 0\\ \dfrac{a^{-n}}{1-a} & n<0\end{cases}$$

习题：2.5 $h(n)=a^{-n}u(-n)\quad 0<a<1$

$$y(n)=u(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}u(k)h(n-k)=\sum_{k=0}^{+\infty}h(n-k)$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}a^{-n+k}u(k-n)$$

当 $n\leq 0$. $y(n)=\sum_{k=0}^{+\infty}a^{-n+k}=a^{-n}\sum_{k=0}^{+\infty}a^{k}=\dfrac{a^{-n}}{1-a}$

当 $n>0$ 时. $y(n)=\sum_{k=n}^{+\infty}a^{k-n}=\dfrac{1}{1-a}$

2.5 $y(n)=u(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u(k)h(n-k)=\sum_{k=0}^{\infty}a^{k-n}u(k-n)=\sum_{k=n}^{\infty}a^{k}\quad n\geq 0$

2.20 求下列序列的Z变换和收敛域

(1*) $\delta(n-m)$

(3) $a^n u(-n-1)$

解：(1) $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-m)z^{-n}=z^{-m}$

当 m>0 时，x(n)是因果序列，收敛域为 $0<|z|\le\infty$，无零点，极点为 0(m 阶)；当 m<0 时，x(n)是逆因果序列，收敛域为 $0\le|z|<\infty$，零点为 0(m 阶)，无极点；当 m=0, X(z)＝1，收敛域为 $0\le|z|\le\infty$，既无零点，也无极点

2.2 3 求下列 Z变换的逆变换

(2 *) $X(z)=\dfrac{z-5}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}$, $0.5<|z|<2$

(4) $X(z)=\dfrac{z(2z-a-b)}{(z-a)(z-b)}$, $|a|<|z|<|b|$

2.23 (2) $X(z)=\dfrac{z-5}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}$

$$x(n)=\sum_m Re[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m}=\sum_m Re\left[\frac{(z-5)z^{n-1}}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}\right]_{z=z_m}=\sum_m Re\left[\frac{(z-5)z^n}{(z-0.5)(1-0.5z)}\right]_{z=z_m}$$

① $n\geq 0$ 时

$$Re\left[\frac{(z-5)z^n}{(z-0.5)(1-0.5z)}\right]_{z=0.5}=\frac{(z-5)z^n}{1-0.5z}\bigg|_{z=0.5}=-6\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

② $n\leq -1$ 时

$$\sum_m Re\left[\frac{z-5}{(z-0.5)(1-0.5z)z^{-n}}\right]_{z=z_m}=-Re\left[\frac{(z-5)}{(z-0.5)(1-0.5z)z^{-n}}\right]_{z=\infty}-Re\left[\frac{(z-5)}{(z-0.5)(1-0.5z)z^{-n}}\right]_{z=2}=-\frac{(2-5)(-2)}{(2-0.5)2^{-n}}=-4\cdot 2^n$$

$$x(n)=\begin{cases}-6\left(\frac{1}{2}\right)^n & n\geq 0\\ -4\cdot 2^n & n<0\end{cases}$$

2.35 一个线性非移变离散时间系统的输入 $x(n)$ 和输出 $y(n)$ 满足差分方程

$$y(n-1)-\frac{5}{2}y(n)+y(n+1)=x(n)$$

(1) 试问该系统是否稳定，是否因果没有限制；

(2) 研究这个差分方程的极-零点分布图，求系统单位取样响应的 3 种可能选择方案，验证每一种方案都满足差分方程。

解：(1)求差分方程两边的 Z 变换

$$z^{-1}Y(z)-\frac{5}{2}Y(z)+zY(z)=X(z)$$

由上式得到系统函数

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{z^{-1}-\frac{5}{2}+z}=\frac{z}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}$$

系统函数的零点：$z=0$；极点：$\beta_1=2$，$\beta_2=\frac{1}{2}$。

系统单位取样响应的 3 种可能选择方案如下：

$$\lim_{z\to\infty} H(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^{-1} - \frac{5}{2} + z} = 0$$

(1) 收敛域取为 $2 < |z| \le \infty$，系统是因果的，但不是稳定的。得到系统的单位取样响应为

$$h(n) = \frac{2^n - 2^{-n}}{2 - \frac{1}{2}} u(n) = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} [2^n - (\frac{1}{2})^n] u(n) = \frac{2}{3}(2^n - 2^{-n}) u(n)$$

(2) 收敛域为 $\frac{1}{2} < |z| < 2$，系统是稳定的，但不是因果的。得到系统的单位取样响应为

可以用留数定理等方法求出$h(n)$再判定因果性

$$h(n) = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} [2^n u(-n-1) + 2^{-n} u(n)] = -\frac{2}{3} [2^n u(-n-1) + (\frac{1}{2})^n u(n)]$$

$$H(z) z^{n-1} = \frac{z^n}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}, \therefore h(n) = \begin{cases} \operatorname{Res}\left[\frac{z^n}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}, \frac{1}{2}\right] & n \ge 0 \\ -\operatorname{Res}\left[\frac{z^n}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}, 2\right] - \operatorname{Res}\left[\frac{z^n}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}, \infty\right] & n < 0 \end{cases}, \therefore h(n) = \begin{cases} -\frac{2 * 2^{-n}}{3} & n \ge 0 \\ -\frac{2 * 2^n}{3} & n < 0 \end{cases}$$

(3) 收敛域取为$|z|<\frac{1}{2}$，系统既不是稳定的。

因收敛域为$|z|<\frac{1}{2}$，故$h(n)$为左边序列，又因$\lim\limits_{z\to\infty}H(z)=0$为有限值，

故$h_2(n)$还是逆因果序列。采用留数定理法，被积函数

$$H(z)z^{n-1}=\frac{z^n}{(z-2)(z-\frac{1}{2})},$$

当 n<0 时极点$\frac{1}{2}$和 2 都在积分围线外，且被积函数的分母与分子

多项式阶数之差为 2-n>2(因 n<0)，因此有

$$h(n)=\frac{1}{2-\frac{1}{2}}(-2^n+2^{-n})u(-n-1)=\frac{2}{3}(2^{-n}-2^n)u(-n-1)$$

验证每一种方案都满足差分方程：

前面已经由差分方程求得系统函数 $H(z)=\dfrac{1}{z^{-1}-\dfrac{5}{2}+z}$，故只要验证每一种方案的系统函数即可。

(1)

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{3}(2^{n}-2^{-n})u(n)z^{-n}=\frac{2}{3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[(2z^{-1})^{n}-(2^{-1}z^{-1})^{n}]=\frac{2}{3}(\frac{1}{1-2z^{-1}}-\frac{1}{1-2^{-1}z^{-1}})$$

$$=\frac{2}{3}(\frac{1}{1-2z^{-1}}-\frac{z}{z-2^{-1}})=\frac{1}{z^{-1}-\dfrac{5}{2}+z}$$

(2)

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}-\frac{2}{3}[(2^{n}u(-n-1)-2^{-n}u(n))]z^{-n}=-\frac{2}{3}[\sum_{n=-\infty}^{-1}(2z^{-1})^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-1}z^{-1})^{n}]$$

$$=-\frac{2}{3}[\sum_{n=1}^{\infty}(2^{-1}z)^{n}+\frac{1}{1-2^{-1}z^{-1}}]=-\frac{2}{3}(\frac{2^{-1}z}{1-2z^{-1}}+\frac{1}{1-2z^{-1}})=\frac{1}{z^{-1}-\dfrac{5}{2}+z}$$

(3)

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}-\frac{2}{3}(2^{n}-2^{-n})u(-n-1)z^{-n}=\frac{2}{3}[\sum_{n=-\infty}^{-1}(2z^{-1})^{n}-\sum_{n=-\infty}^{-1}(2^{-1}z^{-1})^{n}]$$

$$=\frac{2}{3}[\sum_{n=1}^{\infty}(2z^{-1})^{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(2z)^{n}]=\frac{2}{3}(\frac{2^{-1}z}{1-2z^{-1}}-\frac{2z}{1-2z})=\frac{1}{z^{-1}-\dfrac{5}{2}+z}$$