第5章　目标规划

第1节　目标规划的数学模型

第2节　解目标规划的图解法

第3节　解目标规划的单纯形法

第4节　灵敏度分析

第5节　应用举例

第5章　目标规划

第1节　目标规划的数学模型

第2节　解目标规划的图解法

第3节　解目标规划的单纯形法

第4节　灵敏度分析

第5节　应用举例

第1节　目标规划的数学模型

从线性规划问题可看出：

•线性规划只研究在满足一定条件下，**单一目标函数取得最优解**，而在企业管理中，经常遇到**多目标决策问题**，如拟订生产计划时，不仅考虑总产值，同时要考虑利润，产品质量和设备利用率等。这些指标之间的重要程度（即优先顺序）也不相同，有些目标之间往往相互发生矛盾。

•线性规划致力于某个目标函数的最优解，这个最优解若是超过了实际的需要，很可能是以过分地消耗了约束条件中的某些资源作为代价。

•线性规划把各个约束条件的重要性都不分主次地等同看待，这也不符合实际情况。

•求解线性规划问题，首先要求约束条件必须相容，如果约束条件中，由于人力、设备等资源条件的限制，使约束条件之间出现了矛盾，就得不到问题的可行解，但生产还得继续进行，这将给人们进一步应用线性规划方法带来困难。

•为了弥补线性规划问题的局限性，解决有限资源和计划指标之间的矛盾，在线性规划基础上，建立目标规划方法，从而使一些线性规划无法解决的问题得到满意的解答。

同时考虑多个决策目标时，称为目标规划问题。

多目标优先级

先将目标等级化：将目标按重要性的程度不同依次分成一级目标、二级目标…..。次要的目标放在次要的等级中。

目标优先级作如下约定:

- 对同一个目标而言，若有几个决策方案都能使其达到，可认为这些方案就这个目标而言都是最优方案；若达不到，则与目标差距越小的越好。

- 不同级别的目标的重要性是不可比的。即较高级别的目标没有达到的损失，任何较低级别的目标上的收获都不可弥补。所以在判断最优方案时，首先从较高级别的目标达到的程度来决策，然后再做次级目标的判断。

- 同一级别的目标可以是多个。各自之间的重要程度可用数量（权数）来描述。因此，同一级别目标的其中一个的损失，可由其余目标的适当收获来弥补。

为了具体说明目标规划与线性规划在处理问题方法上的区别，先通过例子来介绍目标规划的有关概念及数学模型。

例1 某工厂生产I，II两种产品，已知有关数据见下表。试求获利最大的生产方案。

	I	II	拥有量
原材料(kg)	2	1	11
设备(hr)	1	2	10
利润(元/件)	8	10	

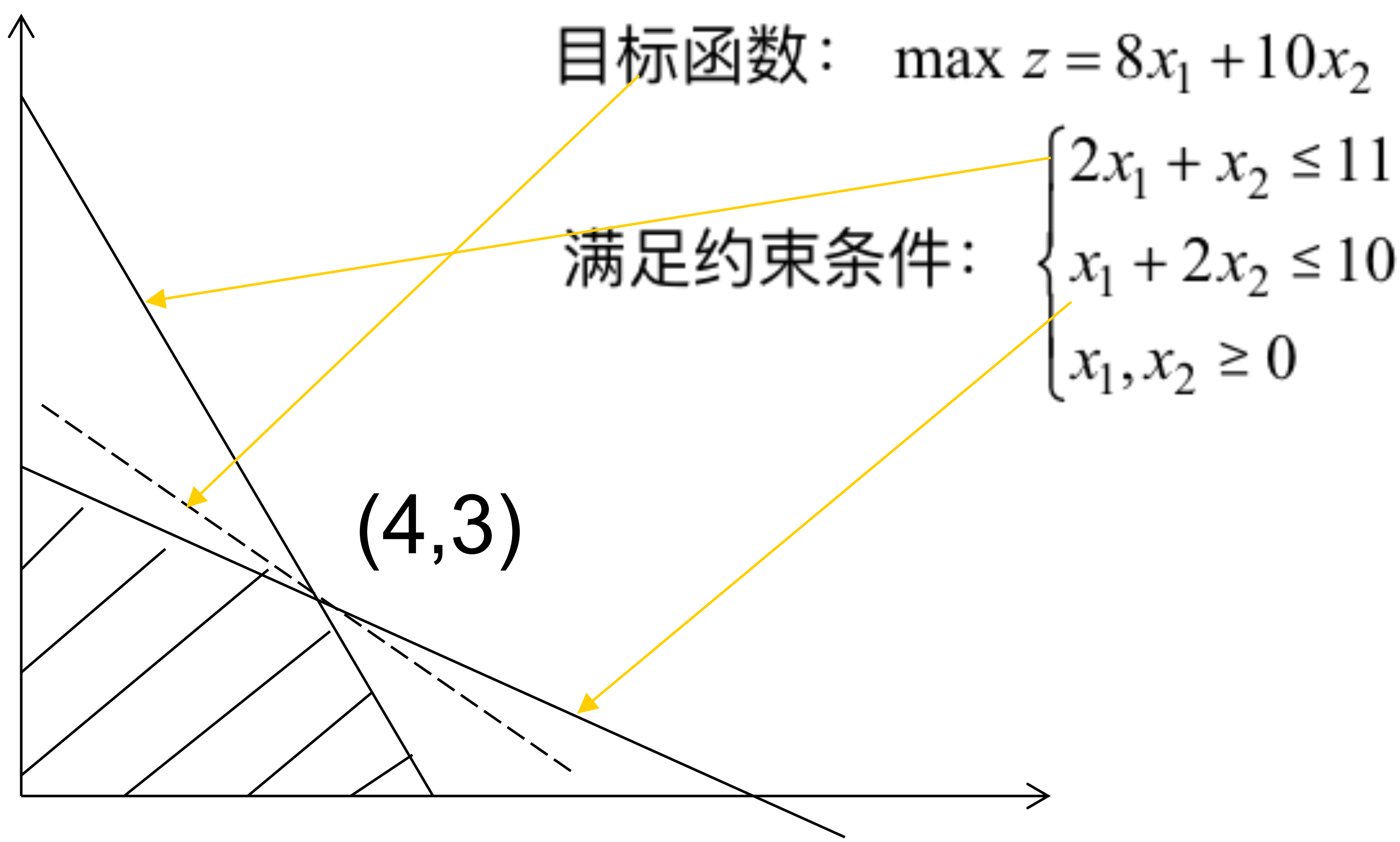
解： 这是求获利最大的单目标的规划问题，用x_1，x_2分别表示I，II产品的产量，其线性规划模型表述为：

目标函数： $\max z = 8x_1 + 10x_2$

满足约束条件：
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

目标函数： $\max z = 8x_1 + 10x_2$

满足约束条件： $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$



用图解法求得最优决策方案为： $x_1^*=4$，$x_2^*=3$，$z^*=62$(元)。

实际上工厂在作决策时，要考虑市场等一系列其他条件

(1) 根据市场信息，产品I的销售量有下降的趋势，故考虑产品I的产量不大于产品II。

(2) 超过计划供应的原材料时，需用高价采购，会使成本大幅度增加。

(3) 应尽可能充分利用设备台时，但不希望加班。

(4) 应尽可能达到并超过计划利润指标56元。

这样在考虑产品决策时，便为多目标决策问题。目标规划方法是解这类决策问题的方法之一。
下面引入与建立目标规划数学模型有关的概念。

1.设x_1，x_2为决策变量，此外，引进正、负偏差变量d^+，d^-

正偏差变量d^+表示决策值超过目标值的部分；

负偏差变量d^-表示决策值未达到目标值的部分。

因决策值不可能既超过目标值同时又未达到目标值，即恒有$d^+ \times d^- = 0$。

2.绝对约束和目标约束

- 绝对约束是指必须严格满足的等式约束和不等式约束；如线性规划问题的所有约束条件，不能满足这些约束条件的解称为非可行解，所以它们是硬约束/刚性约束。

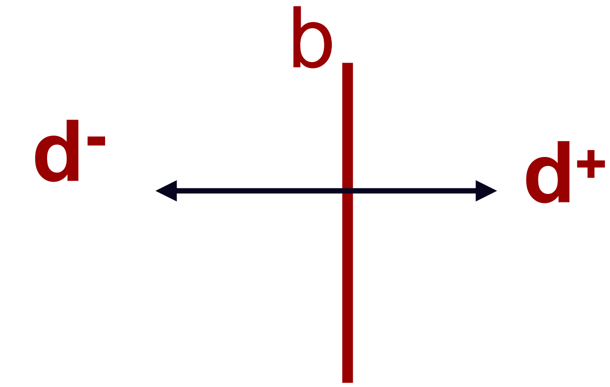
- 目标约束是目标规划特有的，可把约束右端项看作要追求的目标值。在达到此目标值时允许发生正或负偏差，因此在这些约束中加入正、负偏差变量，它们是软约束。

- 线性规划问题的目标函数，在给定目标值和加入正、负偏差变量后可变换为目标约束。也可根据问题的需要将绝对约束变换为目标约束。如：例1的目标函数$z=8x_1+10x_2$可变换为目标约束$8x_1+10x_2+d_1^- - d_1^+=56$。约束条件$2x_1+x_2\leq 11$可变换为目标约束$2x_1+x_2+d_2^- - d_2^+=11$。

3.优先因子(优先等级)与权系数

- 一个规划问题常常有若干目标。但决策者在要求达到这些目标时，是有主次或轻重缓急的不同。
- 要求第一位达到的目标赋予优先因子P_1，次位的目标赋予优先因子P_2，…，并规定$P_k >> P_{k+1}, k=1,2,\ldots,K$。表示$P_k$比$P_{k+1}$有更大的优先权。
- 即首先保证P_1级目标的实现，这时可不考虑次级目标；而P_2级目标是在实现P_1级目标的基础上考虑的；依此类推。
- 若要区别具有相同优先因子的两个目标的差别，这时可分别赋予它们不同的权系数ω_j，这些都由决策者按具体情况而定。

约束方程的处理



差异变量：

决策变量x超过目标值b的部分记d^+

为正偏差；决策变量x不足目标值b的

部分记d^-为负偏差，$d^+ \geq 0$,　$d^- \geq 0$　且　$x + d^- - d^+ = b$

同一个目标约束中$d^- \times d^+ = 0$。

多目标的综合

$$x + d^- - d^+ = b$$

- 若决策目标中规定 $x \leq b$, 故 d^+取最小。
- 若决策目标中规定 $x \geq b$, d^-取最小。
- 若决策目标中规定 $x = b$, 故 $d^- + d^+$取最小。
- 绝对约束（硬约束）：必须严格满足的等式约束和不等式约束。
- 目标约束（软约束）：含正负偏差的约束。

4.目标规划的目标函数

- **目标规划的目标函数(准则函数)是按各目标约束的正、负偏差变量和赋予相应的优先因子及权系数而构造的。当每一目标值确定后，决策者的要求是尽可能缩小偏离目标值。**
- **因此目标规划的目标函数只能是 $\min z=f(d^+,d^-)$。**

其基本形式有三种：

(1) 要求恰好达到目标值，即正、负偏差变量都要尽可能地小，这时

$$\min z=f(d^+ + d^-)$$

(2) 要求不超过目标值，即允许达不到目标值，就是正偏差变量要尽可能地小。这时

$$\min z=f(d^+)$$

(3) 要求超过目标值，即超过量不限，因此负偏差变量要尽可能地小，这时

$$\min z=f(d^-)$$

对每一个具体目标规划问题，可根据决策者的要求和赋予各目标的优先因子来构造目标函数。

例2　例1的决策者在原材料供应受严格限制的基础上考虑：首先是产品II的产量不低于产品I的产量；其次是充分利用设备有效台时，不加班；再次是利润额不小于56元。求决策方案 。

解　按决策者所要求的，分别赋予这三个目标P_1，P_2，P_3优先因子。这问题的数学模型是：

目标函数：　$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$

满足约束条件：
$$
\begin{cases}
2x_1 + x_2 \le 11 \\
x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\
x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\
8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\
x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, \quad i = 1,2,3
\end{cases}
$$

例 某电器公司经营的唱机和录音机均有车间A、B流水作业组装。数据见下表。

项目品种	工时消耗（时/台）		库存费用（元/台月）	利润（元/台）
	A	B		
唱机	2	1	50	250
录音机	1	3	30	150
总工时/月	180	200		
生产费用/时	100	50		

目标级为：

(1) 库存费用不超过4600元；

(2) 每月销售唱机不少于80台；

(3) 不使A、B车间停工（权数由生产费用确定）；

(4) A车间加班时间限制在20小时内；

(5) 每月销售录音机至少为100台；

(6) 两车间加班时数总和要尽可能小（权数由生产费用确定）；

项目品种	工时消耗（时/台）		库存费用（元/台月）	利润（元/台）
	A	B		
唱机	2	1	50	250
录音机	1	3	30	150
总工时/月	180	200		
生产费用/时	100	50		

解：设每月生产唱机、录音机X_1，X_2台。

且A、B的生产费用之比为100：50=2：1

P$_1$：库存费用不超过4600元，$P_1d_1^+$

$$50X_1+30X_2+d_1^- - d_1^+=4600$$

P$_2$：每月销售唱机不少于80台，$P_2d_2^-$

$$X_1 \qquad + d_2^- - d_2^+=80$$

项目品种	工时消耗（时/台）		库存费用（元/台月）	利润（元/台）
	A	B		
唱机	2	1	50	250

P_3： 不使A车间停工,不使B车间停工，$2P_3d_3^- + P_3d_4^-$

A车间: $2X_1 + X_2 + d_3^- - d_3^+ = 180$

B车间: $X_1 + 3X_2 + d_4^- - d_4^+ = 200$

P_4： A车间加班时间限制在20小时内； $P_4d_5^+$

$2X_1 + X_2 + d_5^- - d_5^+ = 200$

P_5： 每月销售录音机至少为100台； $P_5d_6^-$

$X_2 + d_6^- - d_6^+ = 100$

P_6： 两车间加班时数总和要尽可能小（权数由生产费用确定），

$2P_6d_3^+ + P_6d_4^+$

$X_1, X_2, \quad d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad (i=1,2,3,4,5,6)$

P_1：费用不超过4600元， $P_1d_1^+$

$50X_1+30X_2+d_1^- - d_1^+=4600$

P_2：每月销售唱机不少于80台， $P_2d_2^-$

$X_1 + d_2^- - d_2^+=80$

P_3：不使A车间停工,不使B车间停工， $2P_3d_3^- + P_3d_4^-$

A车间： $2X_1 + X_2 + d_3^- - d_3^+=180$

B车间： $X_1 + 3X_2 + d_4^- - d_4^+=200$

P_4：A车间加班时间限制在20小时内； $P_4d_5^+$

$2X_1 + X_2 + d_5^- - d_5^+=200$

P_5：每月销售录音机至少为100台； $P_5d_6^-$

$X_2 + d_6^- - d_6^+=100$

P_6：两车间加班时数总和要尽可能小（权数由生产费用确定），

$2P_6d_3^+ + P_6d_4^+$

$X_1, X_2, \quad d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad (i=1,2,3,4,5,6)$

$$\text{Min } S=P_1d_1^+ + P_2d_2^- + 2P_3d_3^- + P_3d_4^- + P_4d_5^+ + P_5d_6^- + 2P_6d_3^+ + P_6d_4^+$$

约束方程：

$$50X_1+30X_2+d_1^- - d_1^+ = 4600$$

$$X_1 + d_2^- - d_2^+ = 80$$

$$2X_1 + X_2 + d_3^- - d_3^+ = 180$$

$$X_1 + 3X_2 + d_4^- - d_4^+ = 200$$

$$2X_1 + X_2 + d_5^- - d_5^+ = 200$$

$$X_2 + d_6^- - d_6^+ = 100$$

$$X_1, X_2, \quad d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad (i=1,2,3,4,5,6)$$

目标规划的一般数学模型为

目标函数： $$\min z=\sum_{l=1}^{L}P_l\sum_{k=1}^{K}(\omega_{lk}^{-}d_k^{-}+\omega_{lk}^{+}d_k^{+}) \qquad (5-1)$$

满足约束条件：
$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}c_{kj}x_j+d_k^{-}-d_k^{+}=g_k, \quad k=1,\cdots,K & (5-2)\\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le(=,\ge)b_i, \quad i=1,\cdots,m & (5-3)\\ x_j\ge 0, \quad j=1,\cdots,n & (5-4)\\ d_k^{-},d_k^{+}\ge 0, \quad k=1,2,\cdots,K & (5-5)\end{cases}$$

$\omega_{lk}^{-},\omega_{lk}^{+}$ 为权系数。

建立目标规划的数学模型时，需要确定目标值、优先等级、权系数等，它都具有一定的主观性和模糊性，可以用专家评定法给以量化。