使用递归方法求解以下式子：

$$T(\mathrm{n})=\begin{cases}O(1) & n=1\\ aT\left(\frac{n}{b}\right)+f(n) & n>1\end{cases} \qquad (1)$$

n是b的幂的情况

一．求取递归方程的解

假设n是b的幂， 即$n=b^k$，$k=log_b n$。则$n/b=b^{k-1}$。代入上式$n>1$情况中。

$$T(b^k)=aT(b^{k-1})+f(b^k) \qquad (2)$$

将$T(b^{k-1})=aT(b^{k-2})+f(b^{k-1})$代入上式中可得

$$T(b^k)=a\left(aT(b^{k-2})+f(b^{k-1})\right)+f(b^k)=a^2T(b^{k-2})+af(b^{k-1})+f(b^k) \qquad (3)$$

类似地依次将$T(b^{k-2})=aT(b^{k-3})+f(b^{k-2})$， ⋯ ，$T(b^1)=aT(1)+f(b^1)$代入式子中可得

$$T(b^k)=a^kT(1)+a^{k-1}f(b^1)+a^{k-2}f(b^2)+\cdots+af(b^{k-1})+f(b^k)$$

$$=a^kT(1)+\sum_{j=0}^{k-1}a^j f\left(b^{k-j}\right) \qquad (4)$$

将$T(1)=O(1),k=log_b n$代入上式得。

$$T(n)=a^{log_b n}O(1)+\sum_{j=0}^{log_b n-1}a^j f(n/b^j)$$

$$=n^{log_b a}+\sum_{j=0}^{log_b n-1}a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right) \qquad (5)$$

二. 考虑代入$f(n)$函数的形式。

若$f(n)=\mathrm{O}(n^d)$，$d\geq 0$表示为$f(n)=cn^d$， $\mathrm{c}\geq 0,d\geq 0$

1. 若$a=b^d$，代入式(5)中

$$T(n)=n^{log_b a}+\sum_{j=0}^{log_b n-1}b^{dj}c\left(\frac{n}{b^j}\right)^d$$

$$=n^{log_b a}+\sum_{j=0}^{log_b n-1}b^{dj}c\left(\frac{n}{b^j}\right)^d$$

$$=n^{log_b a}+\sum_{j=0}^{log_b n-1}cn^d$$

$$=n^{log_b a}+cn^d log_b n$$

$$=\mathrm{O}(n^d log_b n) \qquad (6)$$

2. 若$a > b^d$。

我们设$\varepsilon > 0$。$d = log_b a - \varepsilon$。则$f(n) = cn^{log_b a-\varepsilon}$。代入式(5)中得。

$$T(n) = n^{log_b a} + \sum_{j=0}^{log_b n-1} a^j c\left(\frac{n}{b^j}\right)^{log_b a-\varepsilon}$$

$$= n^{log_b a} + n^{log_b a-\varepsilon} \sum_{j=0}^{log_b n-1} \left(\frac{ab^\varepsilon}{b^{log_b a}}\right)^j = n^{log_b a} + n^{log_b a-\varepsilon} \sum_{j=0}^{log_b n-1} (b^\varepsilon)^j$$

$$= n^{log_b a} + n^{log_b a-\varepsilon}(\frac{b^{\varepsilon log_b n} - 1}{b^\varepsilon - 1}) = n^{log_b a} + n^{log_b a-\varepsilon}(\frac{n^\varepsilon - 1}{b^\varepsilon - 1})$$

因为b和ε都是常数，所以最后的表达式可以简化为

$$T(n) = O(n^{log_b a}) \qquad (7)$$

3. 若$a < b^d$。

令

$$g(n) = \sum_{j=0}^{log_b n-1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)$$

下面证明$g(n)$满足${}^{af(n/b)}\!\big/_{f(n)} < 1$。

因为$f(n) = cn^d$，所以${}^{af(n/b)}\!\big/_{f(n)} < {}^{b^d c(n^d/b^d)}\!\big/_{cn^d} = 1$, 证毕。

令常数$s < 1$, 则${}^{af(n/b)}\!\big/_{f(n)} < 1$ *等价于*$af(n/b) \le sf(n)$。

即$f(n/b) \le (s/a)f(n)$, j 次迭代后有$f(n/b^j) \le (s/a)^j f(n)$等价于$a^j f(n/b^j) \le s^j f(n)$

$$g(n) = \sum_{j=0}^{log_b n-1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right) \le \sum_{j=0}^{log_b n-1} s^j f(n) \le f(n)\sum_{j=0}^{\infty} s^j$$

$$= f(n)\left(\frac{1}{1-s}\right) = O(f(n))$$

$$= O(n^d)$$

$$T(n) = n^{log_b a} + g(n) = O(n^d) \qquad (8)$$

综上

$$T(\mathrm{n})=\begin{cases}O(n^d) & a<b^d\\ O(n^d log_b n) & a=b^d\\ O(n^{log_b a}) & a>b^d\end{cases}$$

特别的，当$d=0$, 即$f(n)=O(1)$时

$$T(\mathrm{n})=\begin{cases}O(log_b n) & a=1\\ O(n^{log_b a}) & a>1\end{cases}$$

当n不是b的幂时

总存在正整数k, 使得$b^k<n<b^{k+1}$。由于$T(\mathrm{n})$单调递增所以$\mathrm{T}(b^k)<T(n)<T(b^{k+1})$。

，$T(n)$介于下界$\mathrm{T}(b^k)$与上界$T(b^{k+1})$之间，证明方法与之前类似。