混合型战争微分方程模型研究

◎黑志华 （云南曲靖师范学院数学与信息科学学院 655011）

【摘要】本文讨论微分方程在混合型战争进程中的应用. 针对一个战争模型，求出关于每个部队战斗因素变化率的适当公式，然后分析相应微分方程（组）的解 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$，……从而确定谁将“赢得”战斗.

【关键词】混合型战争模型; 抛物率; 线性作战规律

一、引 言

第一次世界大战期间，F. W. Lanchester 提出了几个尚未成熟的关于空战战斗的尝试性数学模型. 如常规战模型、游击战模型、混合型常规—游击战模型，甚至还有更特殊的简化战斗模型（这里所做的理想假设是双方的自然损失率为零且双方都无增援），并且通过对微分模型进行分析和求解，进而判断出哪方将“赢得”战争. 从那以后，人们不断推广这些模型，用于描述各种竞争（从孤立的战斗直到整个战争）.

本文将概述并研究微分方程在混合型战争进程中的应用，并对两支孤立且均无增援，但自然损失率不为零的部队交战的情况作一定深度的研究.

二、模型及理论分析

设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别代表两个部队在 t 时刻的战斗力，其中 t 从战斗开始时计算. 为了数学讨论的方便，通常采取一种简化假设，即视战斗力仅仅依赖于士兵数量（并假设 $x(t)$ 与 $y(t)$ 连续，且为时间 t 的可导函数）.

关于双方战斗力的微分方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=f_1(x,t)+g_1(x,y,t)+h_1(t),\\[2mm] \dfrac{dy(t)}{dt}=f_2(x,t)+g_2(x,y,t)+h_2(t).\end{cases}$$

其中，$f_1(x,t)$，$f_2(x,t)$ 分别是 x，y 部队的自然损失率; $g_1(x,y,t)$，$g_2(x,y,t)$ 分别是 x，y 部队的战斗损失率; $h_1(t)$，$h_2(t)$ 分别是 x，y 部队的补充率.

1. 常规型战争

一支常规部队 x 的战斗损失率具有形式 $-by(t)$，其中 b 是 y 部队的战斗效果系数. 进一步，y 部队中每单个兵员所造成的 x 部队的战斗损失率为 $\dfrac{\frac{dx}{dt}}{y}=-b$. 因此，$b$ 就是 y 部队中每个成员在战斗中的平均效果的一个度量. 同样，关于 $-cx(t)$ 也可给出类似的解释.

另设 a，d 为自然损失率常数，由（*）式不难得到关于 $x(t)$，$y(t)$ 的微分方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=-ax(t)-by(t)+P(t),\\[2mm] \dfrac{dy(t)}{dt}=-dy(t)-cx(t)+Q(t),\end{cases}\quad (a,b,c,d>0).\quad (1)$$

（1）式叫做一般的常规战微分方程组.

2. 游击型战争

游击队的战斗损失率应与 R 内自己人员的数量 $x(t)$ 成正比; 且 $x(t)$ 越大，被敌人杀死的概率也就越大. 另外，游击队 x 的战斗损失率还与敌人的战斗力 $y(t)$ 成正比. 这样我们得到游击部队的战斗损失率为 $-gx(t)y(t)$，g 是游击队 x 的敌手 y 的战斗效果系数.

由此不难得到，游击战的一般模型是:

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=-ax(t)-gx(t)y(t)+P(t),\\[2mm] \dfrac{dy(t)}{dt}=-dy(t)-hx(t)y(t)+Q(t),\end{cases}\quad (a,d,g,h>0).\quad (2)$$

3. 混合型战争

一支常规部队与一支游击部队所做的战争就称之为混合型战争. 在这里设 x 为游击部队，y 为常规部队. 将（1）和（2）合并，就可得到混合型游击－常规战的一般模型:

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=-ax(t)-gx(t)y(t)+P(t),\\[2mm] \dfrac{dy(t)}{dt}=-cx(t)-dy(t)+Q(t),\end{cases}\quad (a,c,d,g>0).\quad (3)$$

同样，下面考虑的是两支自然损失率不为零的均无增援的部队交战时的情况.

在这样的条件下，（3）式转化成:

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=-ax(t)-gx(t)y(t),\\[2mm] \dfrac{dy(t)}{dt}=-cx(t)-dy(t),\end{cases}\quad (a,c,d,g>0).\quad (4)$$

令 $-ax(t)-gx(t)y(t)=M(x,y)$; $-cx(t)-dy(t)=N(x,y)$，联立方程组，可得方程组的奇点:（0，0），$\left(\dfrac{ad}{cg},-\dfrac{a}{g}\right)$（其中 $a,c,d,g>0$）.

下面讨论方程组驻定解的稳定性态.

特征方程是 $\lambda^2+(a+d+gy)\lambda+(ad+dgy-cgx)=0$.

当 $(x,y)=(0,0)$ 时，特征方程化为 $\lambda^2+(a+d)\lambda+ad=0$.

①若 $a=d$，那么 $(0,0)$ 为稳定的退化结点;

②若 $a\neq d$，那么 $(0,0)$ 为稳定结点.

当 $(x,y)=\left(\dfrac{ad}{cg},-\dfrac{a}{g}\right)$ 时，特征方程化为 $\lambda^2+d\lambda-ad=0$，$\left(\dfrac{ad}{cg},-\dfrac{a}{g}\right)$ 为鞍点.

如果我们给定一组 a,c,d,g 的值，例如，假设 $a=2$，$c=3$，$d=1$，$g=4$，那么利用 Maple 可以得到下面的方向场图.

（下转 94 页）

命题 2.1 若 $P(x_0,y_0)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 外一点(即该点与焦点在双曲线的异侧),过点 P 作双曲线的两条切线,切点为 A,B,则切点弦 AB 所在直线的方程为 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

推论 2.1 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,过双曲线准线上任一点 M,作双曲线的两条切线,则:两切点的连线经过双曲线的与准线相对应的焦点.

命题 2.2 若 $P(x_0,y_0)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 内一点(即该点与焦点在双曲线的同侧),过点 P 任作一条直线交双曲线于 A,B 两点,过 A,B 两点分别作双曲线的两条切线 l_1,l,则 l_1,l_2 的交点的轨迹方程为 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

推论 2.2 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,过双曲线的焦点 F 任作一条直线 l,与双曲线相交于 A,B 两点,过 A,B 两点分别作双曲线的切线 l_1,l_2,则两条切线 l_1,l_2 的交点在双曲线的与焦点相对应的准线上.

命题 3.1 若 $P(x_0,y_0)$ 是抛物线 $y^2=2px$ 外一点(即该点与焦点在抛物线的异侧),过点 P 作抛物线的两条切线,切点为 A,B,则切点弦 AB 所在直线的方程为 $y_0y=p(x+x_0)$.

推论 3.1 设抛物线 $y^2=2px$,过抛物线准线上任一点 M,作抛物线的两条切线,则过两切点的连线经过抛物线的焦点.

命题 3.2 若 $P(x_0,y_0)$ 是抛物线 $y^2=2px$ 内一点(即该点与焦点在抛物线的同侧),过点 P 任作一条直线交抛物线于 A,B 两点,过 A,B 两点分别作抛物线的两条切线 l_1,l_2,则 l_1,l_2 的交点的轨迹方程为 $y_0y=p(x+x_0)$.

推论 3.2 设抛物线 $y^2=2px$,过抛物线的焦点 F 任作直线 l,与抛物线相交于 A,B 两点,过 A,B 两点分别作抛物线的切线 l_1,l_2,则两条切线 l_1,l_2 的交点在抛物线的准线上.

三、两个重要结论

通过以上分析和证明我们可以得出以下结论:

定理 经过圆锥曲线(抛物线、椭圆、双曲线)的准线上任一点作它的两条切线,则两切点的连线一定经过圆锥曲线与准线相对应的焦点.

逆定理 经过圆锥曲线(抛物线、椭圆、双曲线)的焦点 F 任作一条直线 l,与圆锥曲线相交于 A,B 两点,过 A,B 两点分别作圆锥曲线的两条切线 l_1,l_2,则切线 l_1,l_2 的交点在圆锥曲线的与焦点相对应的准线上.

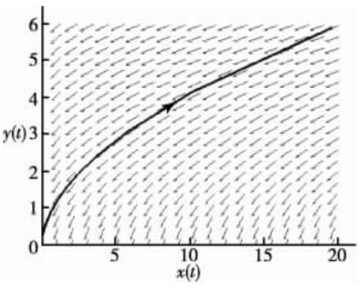
以上关于圆锥曲线的切线与准线和焦点的相互关系,揭示了圆锥曲线切线的本质,在研究二次曲线中有很好的应用价值.

【参考文献】

[1]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(实验).北京:人民教育出版社,2003.

[2]普通高中数学课程标准实验教科书.数学.北京:人民教育出版社,2007.

(上接 92 页)



方程组的一条轨线

在上图中,曲线代表在给定系数的情况下方程组过原点的一条轨线,箭头指向表示时间正向,从图上我们可以发现(0,0)是稳定结点.根据图形所反映的情况,第四象限应该还有一个鞍点,经计算此点坐标是 $\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{2}\right)$.

由于战争的实际意义,我们只需考虑第一象限内的方向场图.

在第一象限内,如果初值 $x(0)$,$y(0)$ 落在曲线上方,那么随着时间的推移,双方人数将趋于零,即双方将同归于尽;如果初值 $x(0)$,$y(0)$ 落在曲线下方,随着时间的推移,y 部队将全部被歼灭,x 部队必胜.

三、结 论

关于数学在战争研究中的应用,每个人使用的研究方法不尽相同,而且建立的模型也各不相同.不管这些标准怎样,每个人都必须知道数学将继续被用于战争领域.以上分析仅仅运用微分方程来分析混合型战争模型.真的要赢得战争,不仅要在理论上“赢”,还需要英明的指挥和将士的骁勇善战.

【参考文献】

[1]William F. Lucas. Differential Equation Modela Springer-Verlag[M]. New York Inc,1983.

[2]黄启昌.常微分方程[M].北京:高等教育出版社,1982.

[3]傅鹂.数学试验[M].北京:科学出版社,2001.