Corrigé Risques Multiples 2

Exercice 5.1 *Sous les hypothèses classiques de la théorie des options dans le cadre de Black et Scholes, écrire D_t sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, en notant P_t (respectivement C_t) le prix du put (call) sur la valeur de la firme V_t de prix d'exercice D et de maturité T.*
Indication : utiliser la formule de parité call-put $C_t - P_t = V_t - De^{-r(T-t)}$ et $D_T = D - \max(D - V_T, 0)$.

$$\begin{aligned}
D_t &= e^{-r(T-t)}D - e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(D-V_T)^+|\mathcal{F}_t] \\
&= e^{-r(T-t)}D - P_t \\
&= V_t - C_t \\
&= V_t - V_t\Phi(d_1) + De^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \\
&= V_t(1-\Phi(d_1)) + De^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \\
&= V_t\Phi(-d_1) + De^{-r(T-t)}\Phi(d_2)
\end{aligned}$$

avec $\Phi(.)$ la fonction de répartition de la loi Normale centrée et réduite, $d_1 = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\left(r+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \ln\dfrac{V_t}{D}\right]$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$.

Exercice 5.2 *La probabilité de défaut, notée PD, est définie de la manière suivante sous la probabilité risque-neutre $PD = \mathbb{Q}[V_T \leq D]$. Calculer cette probabilité de défaut PD en t.*

$$\begin{aligned}
PD &= \mathbb{Q}[V_T \leq D] \\
&= \mathbb{Q}\left[V_t \exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\bar{W}_{T-t}\right) \leq D\right] \\
&= \mathbb{Q}\left[\bar{W}_{T-t} \leq \frac{1}{\sigma}\left(\ln\frac{D}{V_t} - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)\right] \\
&= \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\frac{D}{V_t} - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]\right) \\
&= \Phi(-d_2)
\end{aligned}$$

Car $\bar{W}_{T-t} \sim \mathcal{N}\left(0, \sqrt{T-t}\right)$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{T-t}}\bar{W}_{T-t} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
On peut aussi déterminer la PD à partir de la dynamique non plus risque-neutre mais historique de la valeur de la firme (avec μ et non plus r). Elle est alors égale à :

$$PD^H = \Phi(-DD)$$

avec la *distance au défaut* $DD = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\left(\mu-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \ln\dfrac{V_t}{D}\right]$. Etant donné que généralement $\mu > r$, la PD historique sera supérieure à la PD risque-neutre. Ces PD ont besoin pour être estimées des cotations boursières des entreprises. Elles peuvent s'avérer faibles relativement aux taux de défaut observés mais elles vont permettre de hiérarchiser et noter les entreprises suivant leur risque de crédit.

Exercice 5.3 *Déterminer la volatilité σ_E du processus E_t en fonction de la volatilité du processus de la valeur de l'entreprise V_t.*
Indication : utiliser le lemme d'Itô.

A partir du lemme d'Itô et de l'équation suivante :

$$E_t = f(t, V_t) = V_t \Phi(d_1) - De^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \tag{1}$$

nous avons :

$$\begin{aligned} dE_t = df(t, V_t) &= \frac{\partial}{\partial t} f(t, V_t) dt + \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dV_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, x) V_t^2 \sigma^2 dt \\ &= \left(-rDe^{-r(T-t)} \Phi(d_2) + rV_t \Phi(d_1) \right) dt + V_t \sigma \Phi(d_1) d\bar{W}_t \end{aligned}$$

La volatilité σ_E du processus E_t vaut ainsi :

$$\sigma_E = \sigma \frac{V_t}{E_t} \Phi(d_1) \tag{2}$$

Il reste à résoudre en V_t et σ le système composé des 2 équations (1) et (2). Ceci peut être fait par exemple à l'aide du *Solver* de Excel (cf. exemple du cours).

Exercice 5.4 *Déterminer l'expression de la probabilité de défaut en fonction de l'intensité de défaut.*

La probabilité de défaut est la probabilité qu'il y ait au moins un saut :

$$PD = \mathbb{P}[N_T \geq 1] = 1 - \mathbb{P}[N_T = 0] = 1 - e^{-\lambda T}$$

Exercice 5.5 *Donner la valorisation d'une obligation risquée en 0, en notant $\bar{\lambda}$ l'intensité de défaut sous la probabilité risque-neutre.*

En $t = 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} D_0 &= e^{-rT} \mathbb{Q}[T < \tau] \\ &= e^{-rT} \mathbb{Q}[N_T = 0] \\ &= e^{-rT} e^{-\bar{\lambda} T} \\ &= e^{-(r+\bar{\lambda})T} \end{aligned}$$

Exercice 5.6 *Donner la valorisation d'une obligation risquée en 0 avec un taux de recouvrement δ.*

Soit à la date $t = 0$:

$$\begin{aligned} D_0^\delta &= e^{-(r+\bar{\lambda})T} + \delta e^{-rT} \left(1 - \mathbb{Q}[T < \tau] \right) \\ &= e^{-(r+\bar{\lambda})T} + \delta e^{-rT} \left(1 - e^{-\bar{\lambda} T} \right) \\ &= \delta B_0 + (1 - \delta) D_0 \end{aligned}$$

avec B_0 un zéro-coupon sans risque.
Le détenteur de l'obligation reçoit la fraction δ du nominal quoiqu'il arrive, plus le reste $1 - \delta$ en cas de non-défaut.