



Leibniz
Universität
Hannover

Ladungsträger in Halbleitern

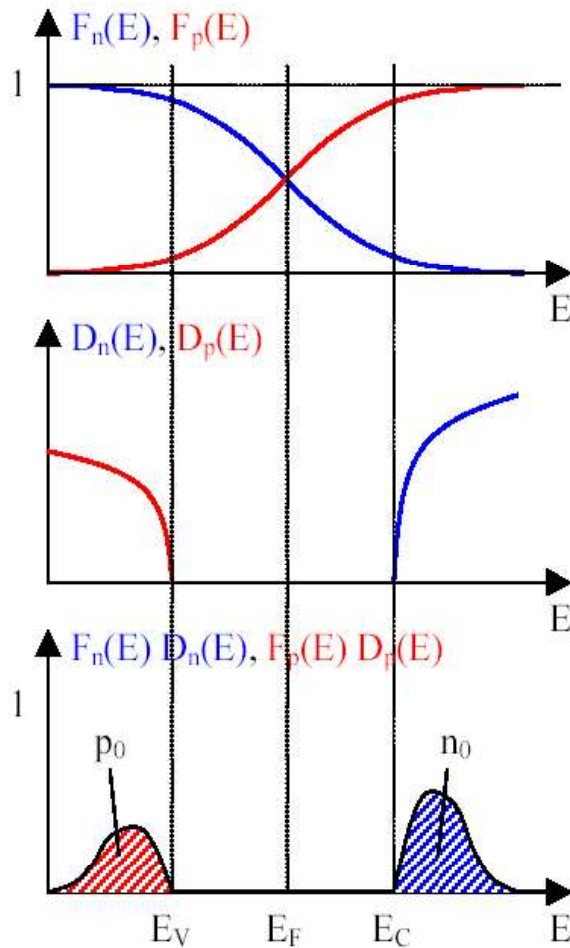
H. Jörg Osten

**Institut für Materialien und Bauelemente
der Elektronik**

- MBE -

**Leibniz Universität Hannover
Schneiderberg 32, 30167 Hannover**

nur für den LUH-internen Gebrauch



Besetzungswahrscheinlichkeit

Zustandsdichte $D_n(E)$ und $D_p(E)$

Konzentration der Elektronen und Löcher

$$F_n(E) \cdot D_n(E) \quad \text{bzw.} \quad F_p(E) \cdot D_p(E)$$

Verteilung der Elektronen über die Zustandsdichte

- Der Halbleiter ist in Kontakt mit der Umgebung und hat daher die Temperatur der Umgebung
- Die Temperatur des Halbleiters erzeugt Schwingungszustände des Atomgitters
- Die Elektronen im Halbleiter stoßen mit den Kristallatomen, d.h. auch die Elektronen erfahren thermische Anregungen, geben aber in gleicher Weise auch wieder Energie ab
- Auch die umgebende Temperatur-Strahlung regt die Elektronen thermisch an, die wiederum ebenfalls Energie durch Aussenden von Strahlung abgeben können

➔ **Ständige Anregung und Relaxation**

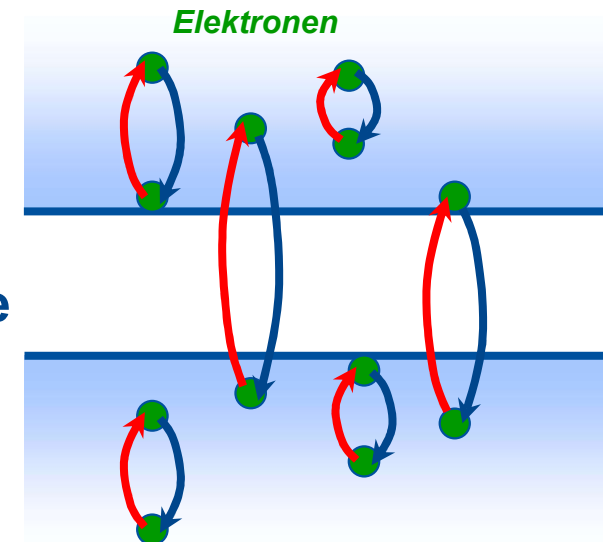
Verteilung der Elektronen über die Zustandsdichte

- Die ständige Anregung und Relaxation erzeugt eine dynamische Gleichgewichtsverteilung der Elektronen über die Zustandsdichte
- „Gleichgewichtsverteilung“ bedeutet, dass sich die statistische Verteilung der Elektronen über die Zustände zeitlich nicht verändert

➔ Im Gleichgewicht wird jeder Prozess ausgeglichen durch entsprechende Umkehrprozesse:

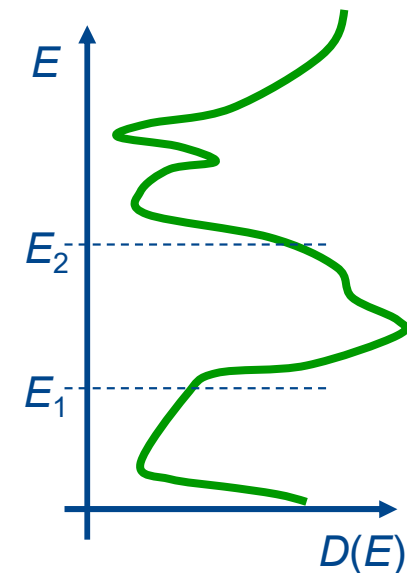
$$\text{Anregungsrate} = \text{Relaxationsrate}$$

➔ Nächster Schritt:
Errechnung der Besetzungswahrscheinlichkeiten
(Verteilungsfunktion)



Berechnung der Verteilungsfunktion

- Gleichgewichtsverteilung durch detaillierte Balance von Prozess (Anregung) und Umkehrprozess (Relaxation)
- Gilt für jeden Prozess, d.h. auch für den Übergang zwischen zwei beliebig ausgewählten Energie-Niveaus
 Betrachte Energieniveau E_1 und E_2 mit den Zustandsdichteverteilungen $D(E_1)$ und $D(E_2)$:
- $F(E)$ soll eine Funktion sein, die die *Besetzungswahrscheinlichkeit* von Zuständen mit der Energie E angibt



Berechnung der Verteilungsfunktion

- Anzahl N_x der Elektronen mit Energie E_x ist

$$N_x = F(E_x) D(E_x)$$

- Gesamt-Elektronenanzahl im System ist

$$N = \int F(E_x) D(E_x) dE$$

- Übergangsrate $E_1 \rightarrow E_2$ proportional zu:

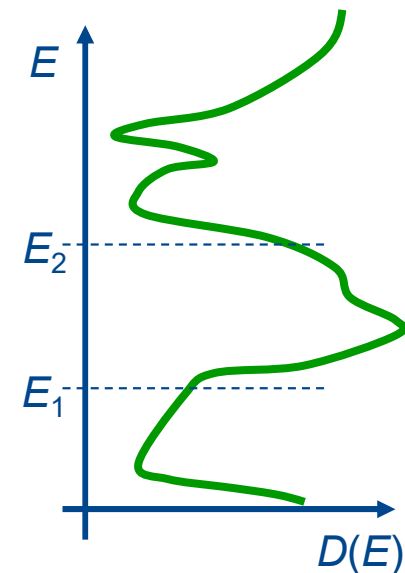
Elektronenanzahl im Ausgangs-Energieniveau:

$$F(E_1) D(E_1)$$

Anzahl freier Zustände im Ziel-Energieniveau:

$$(1 - F(E_2)) D(E_2)$$

- Thermische Anregungsrate von niedrigem Energieniveau E_1 zu höherem E_2 proportional zu $\exp[(E_1 - E_2)/kT]$



Berechnung der Verteilungsfunktion

Anregungsrate = **Relaxationsrate**

Anzahl der Elektronen im Ausgangsniveau Anzahl freier Zustände im Zielniveau Wahrscheinlichkeit für „Verfügbarkeit“ thermischer Energie für Anregung auf höheres Energieniveau

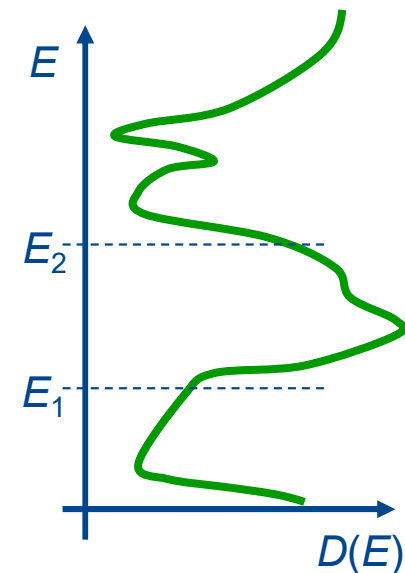
$$F(E_1) D(E_1) (1 - F(E_2)) D(E_2) \exp[(E_1 - E_2)/kT]$$

$$= F(E_2) D(E_2) (1 - F(E_1)) D(E_1)$$

Anzahl der Elektronen im Ausgangsniveau Anzahl freier Zustände im Zielniveau

$$\rightarrow F(E_1) (1 - F(E_2)) \exp[(E_1 - E_2)/kT] = F(E_2) (1 - F(E_1))$$

\rightarrow unabhängig von der Zustandsdichtefunktion



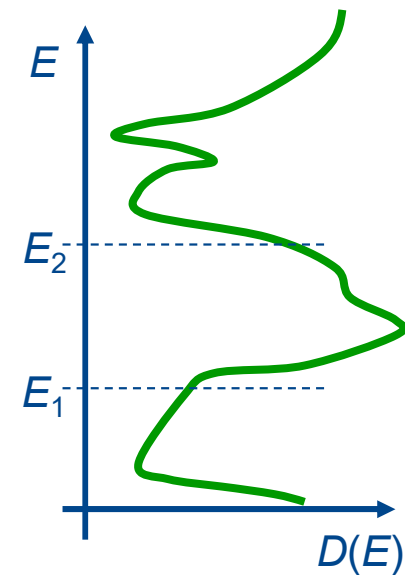
Berechnung der Verteilungsfunktion

$$F(E_1) (1 - F(E_2)) \exp[(E_1 - E_2)/kT] = F(E_2) (1 - F(E_1))$$

- Umstellung der Gleichung nach $F(E_1)$:

$$F(E_1) = \frac{1}{\left(\frac{1}{F(E_2)} - 1 \right) e^{\frac{E_1 - E_2}{kT}} + 1}$$

$$= \frac{1}{e^{\frac{E_1 - E_2 + kT \ln \left[\left(\frac{1}{F(E_2)} - 1 \right) \right]}{kT}} + 1}$$



Berechnung der Verteilungsfunktion

- Besetzungswahrscheinlichkeit $F(E_1)$ abhängig von $F(E_2)$:

$$F(E_1) = \frac{1}{e^{\frac{E_1 - E_2 + kT \ln \left[\left(\frac{1}{F(E_2)} - 1 \right) \right]}{kT}} + 1}$$

- Wahrscheinlichkeit $F(E_1)$ ist aber „physikalische Realität“
 ➔ kann nicht von der Wahl des Wertes E_2 abhängen!

$$\Rightarrow E_2 - kT \ln \left[\left(\frac{1}{F(E_2)} - 1 \right) \right] = \text{unabhängig von Energie } E_2 \equiv \mu$$

Berechnung der Verteilungsfunktion

- Besetzungswahrscheinlichkeit $F(E_1)$ ist gegeben durch die folgende **Verteilung**:

$$F(E_1) = \frac{1}{e^{\frac{E_1 - \mu}{kT}} + 1}$$

Berechnung der Verteilungsfunktion

- Index „1“ kann entfallen, da die Beziehung für alle Energie-Niveaus gelten muss:

$$F(E, \mu) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1}$$

- Konsistenz-Überprüfung durch:
Umstellen von

$$E_x - kT \ln \left[\left(\frac{1}{F(E_x)} - 1 \right) \right] = \mu$$

...ergibt:

$$F(E_x, \mu) = \frac{1}{e^{\frac{E_x - \mu}{kT}} + 1}$$

✓ o.k.



Enrico Fermi

* 1901 in Rom, Italien;
† 1954 in Chicago, USA
Physik-Nobelpreis 1938

$$F(E, \mu) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - \mu}{kT}}}$$

Diese Verteilungsfunktion wird als

Fermi-(Dirac)-Verteilung

bezeichnet



Paul Adrien Maurice Dirac

* 1902 in Bristol; † 1984 in Tallahassee
Physik-Nobelpreis 1933

Die Fermi-Verteilung (Fermi-Dirac-Funktion)

Beschreibt die Besetzungswahrscheinlichkeit von energetischen Zuständen durch **Elektronen** bzw. **Löcher**

Elektronen

$$F_n(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-\mu}{kT}}}$$

Löcher

$$F_p(E) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{E-\mu}{kT}}}$$

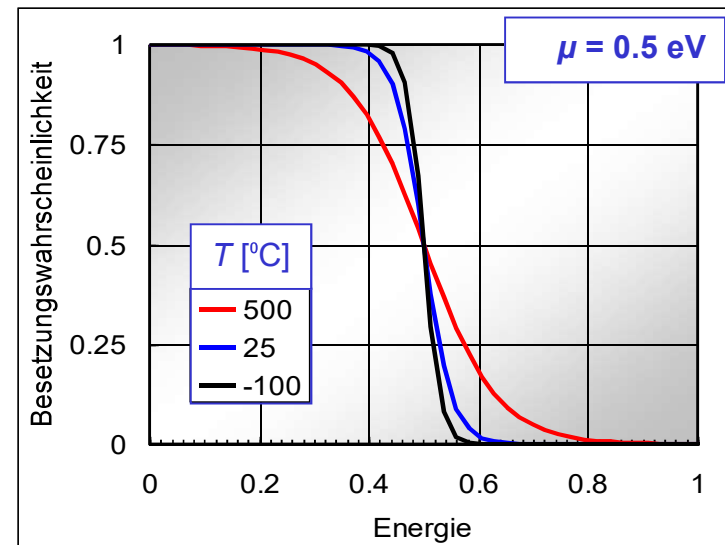
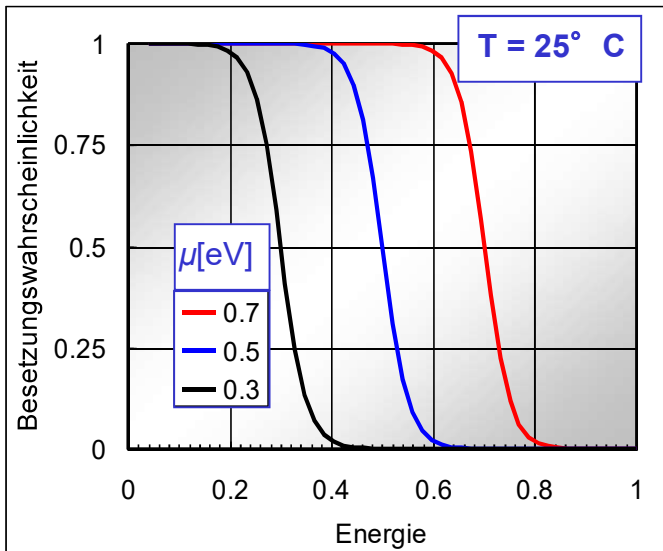
Im undotierten Halbleiter gilt immer: $F_n(E) + F_p(E) = 1$

Fermi-Verteilung

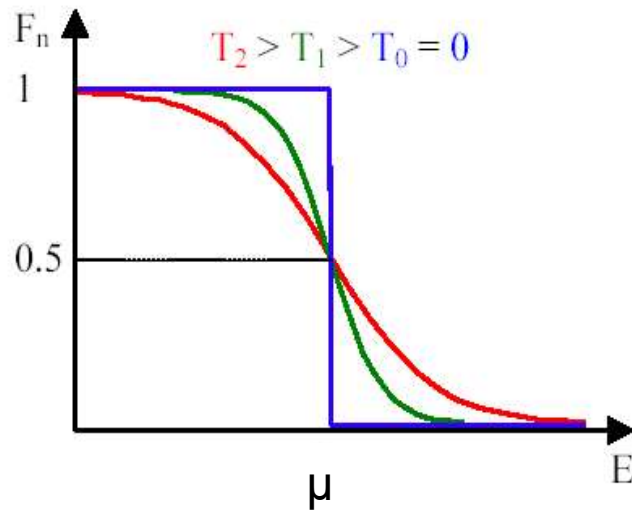
- Analytischer Ausdruck:

$$F(E, \mu) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1}$$

- Graphische Darstellung (schematisch):



Die Fermi-Verteilung (Fermi-Dirac-Funktion)



Beschreibt die
Besetzungswahrscheinlichkeit von
Zuständen durch Löcher bzw.
Elektronen

$$F_n = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-\mu}{kT}}}$$

$$F_p = \frac{1}{1 + e^{-\frac{E-\mu}{kT}}}$$

in nicht unmittelbarer Nähe von $E = \mu$

$$|E - \mu| \gg kT$$

$$F_n \approx e^{-\frac{E-\mu}{kT}}$$

$$F_p \approx e^{\frac{E-\mu}{kT}}$$

→ Boltzmannstatistik

Fermi-Verteilung

- Analytischer Ausdruck:

$$F(E, \mu) = \frac{1}{e^{\frac{E - \mu}{kT}} + 1}$$

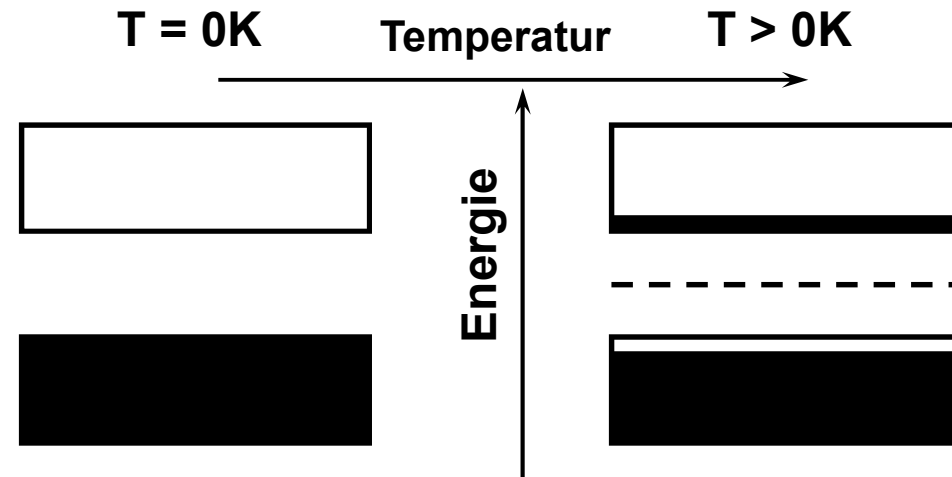
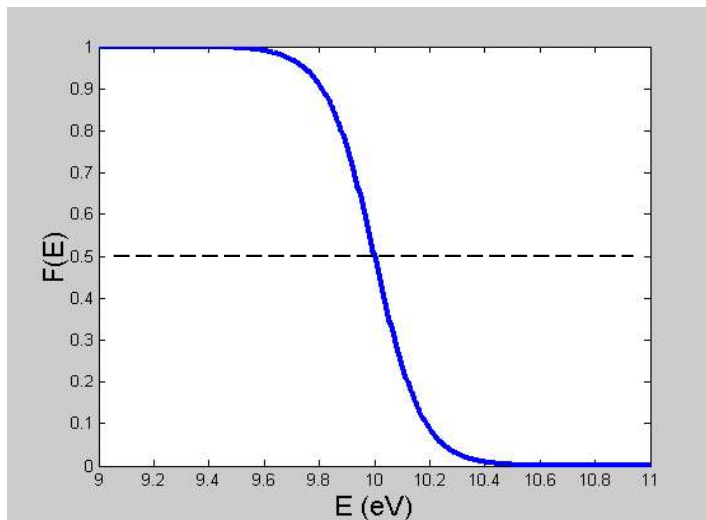
- μ wird als **Fermi-Energie** E_F bezeichnet

- für $E = E_F$
$$F(E) = \frac{1}{\exp\left[\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right)\right] + 1} \equiv \frac{1}{2}$$

Definition: Fermi-Energie: $F_n = F_p = 0.5$

Die Fermi-Energie in undotierten Halbleitern

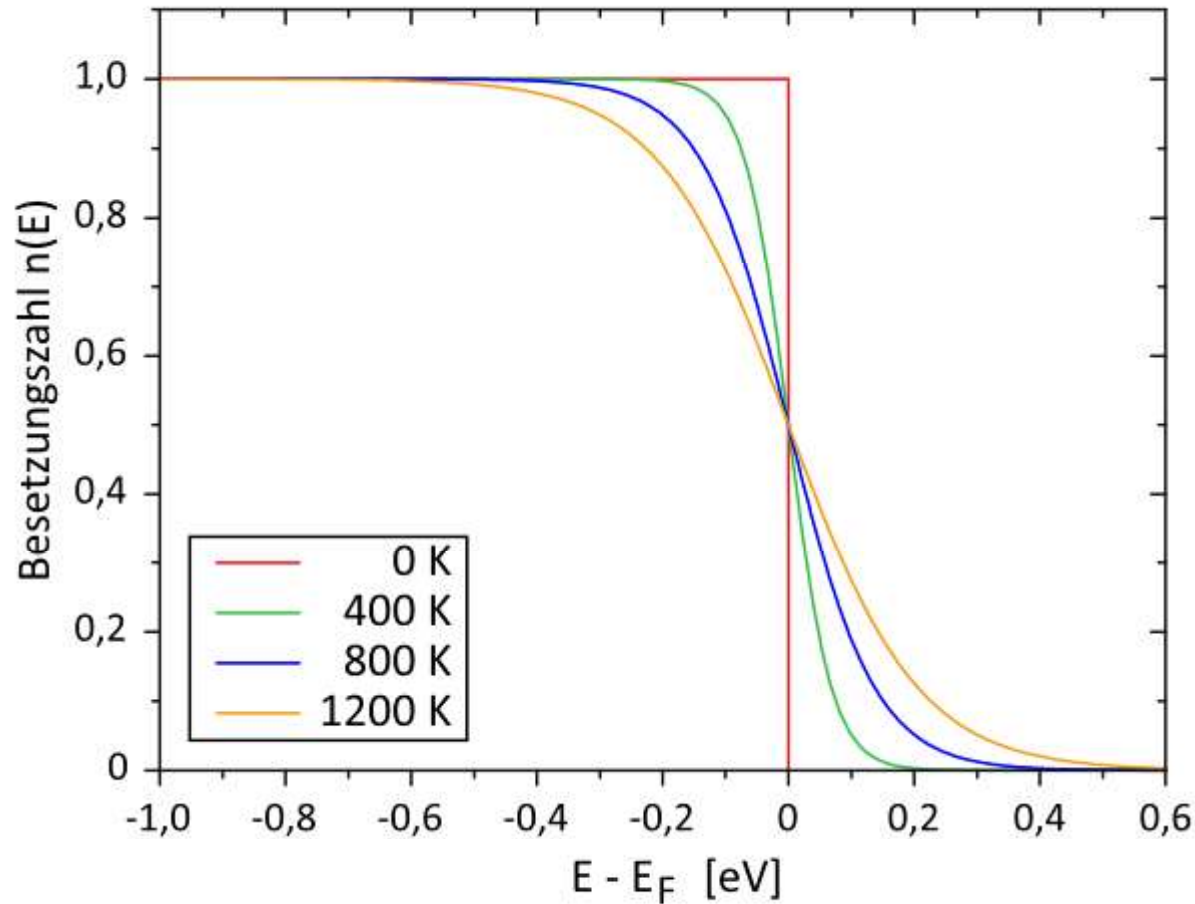
Fermi-Energie:



Die Fermi-Energie (in undotierten Halbleitern) liegt in der Mitte der verbotenen Energiezone (Bandlücke)

$$E_F(\text{intrinsisch}) = E_i = E_g / 2$$

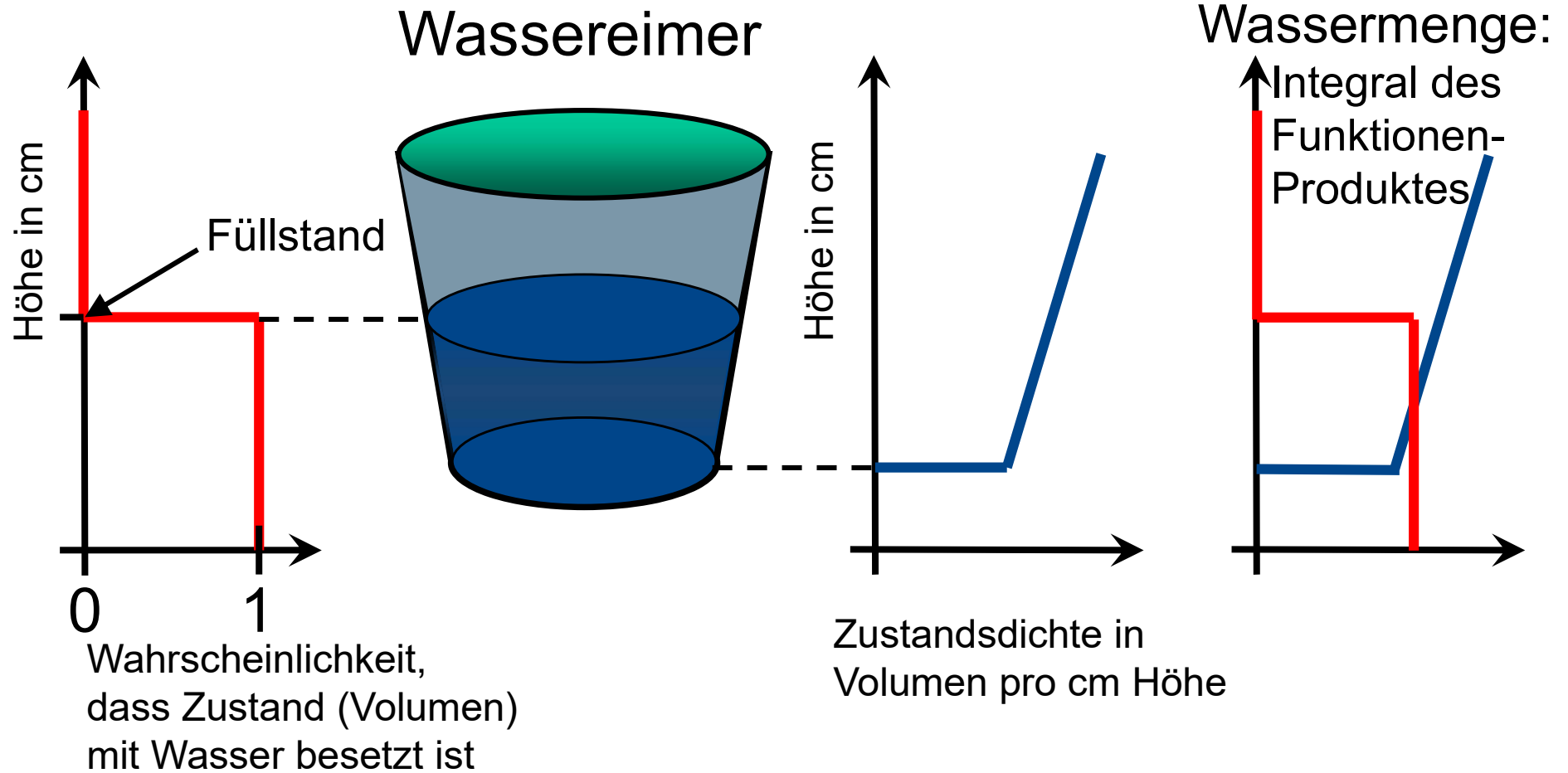
Die Fermi-Energie in undotierten Halbleitern

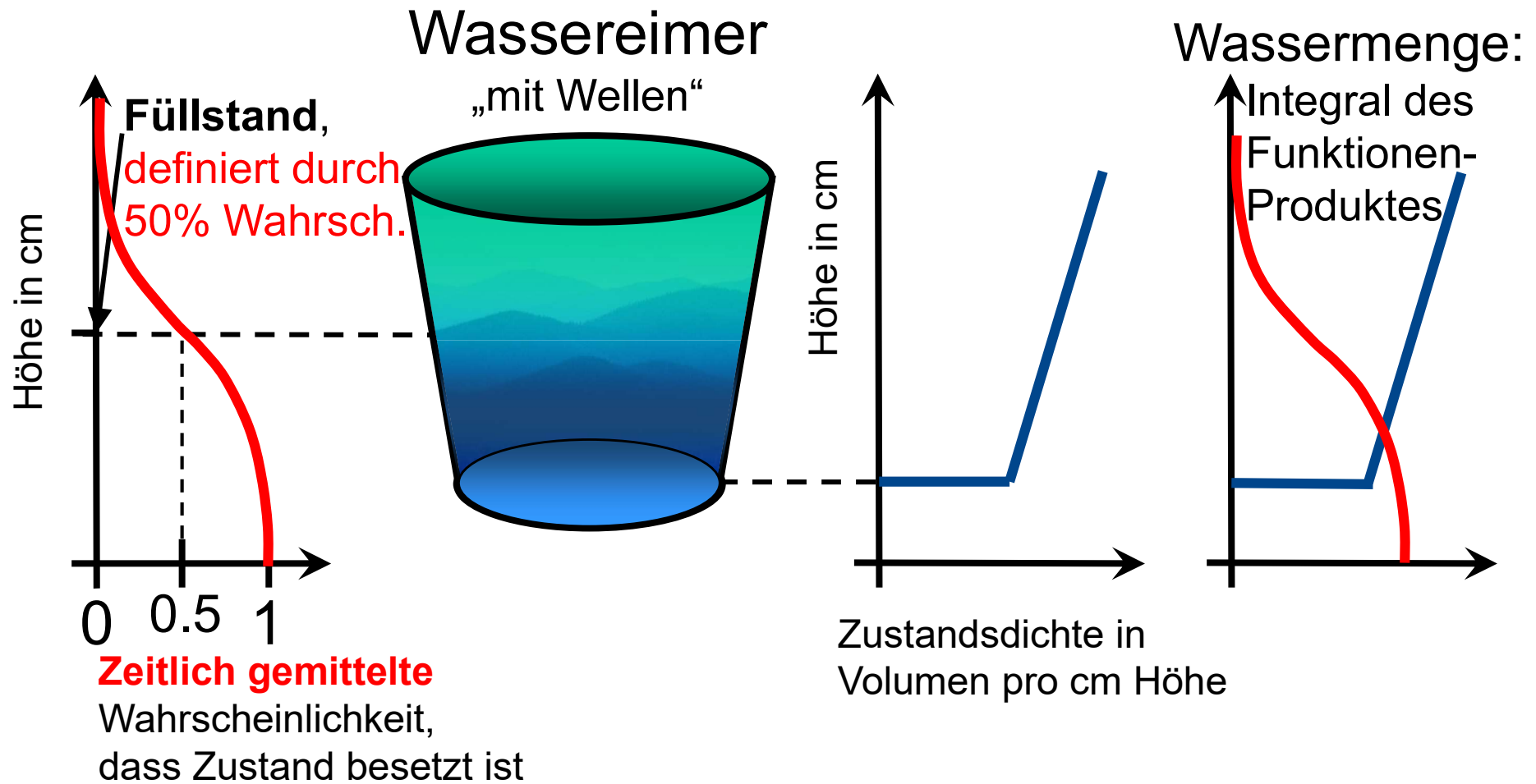




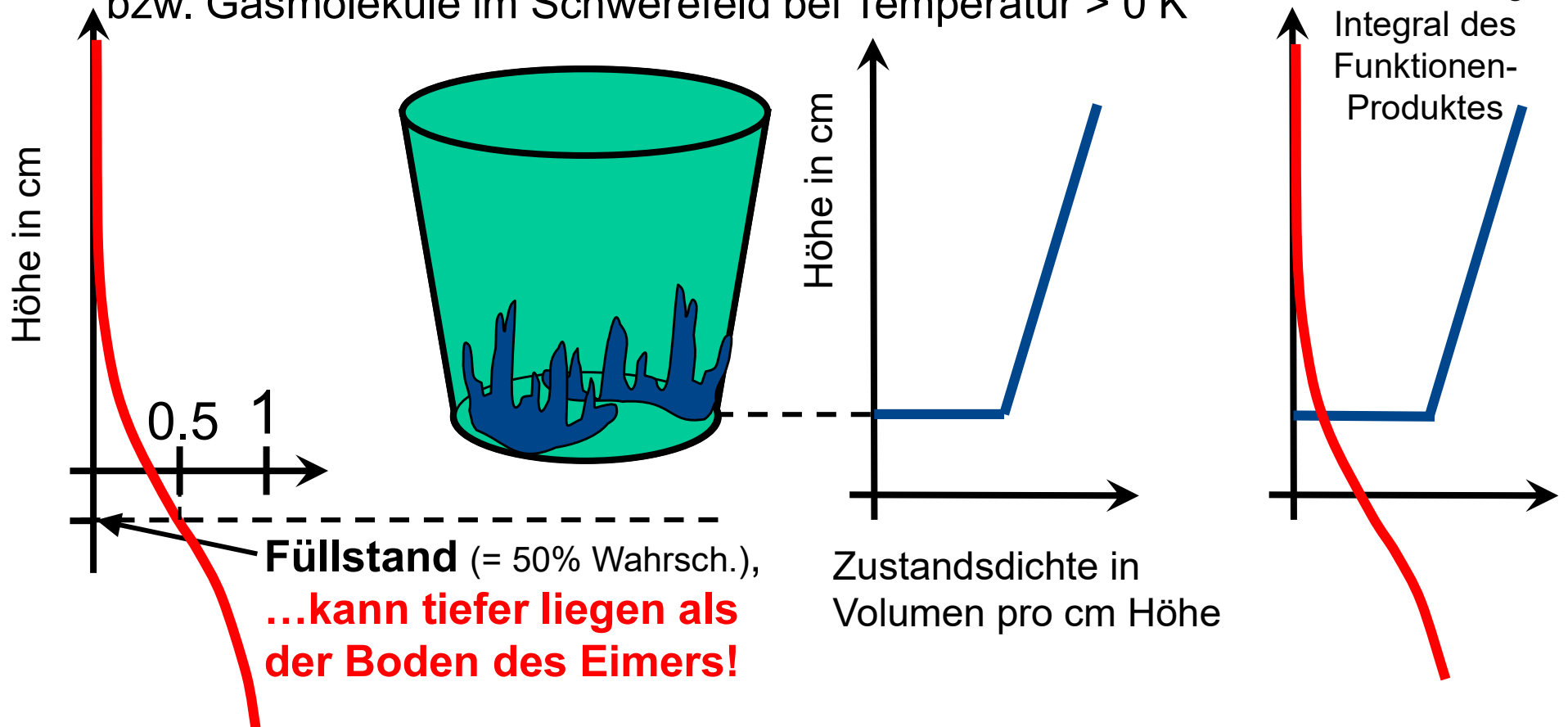
Konzentration der Ladungsträger: $n(E) = F(E) \cdot D(E)$

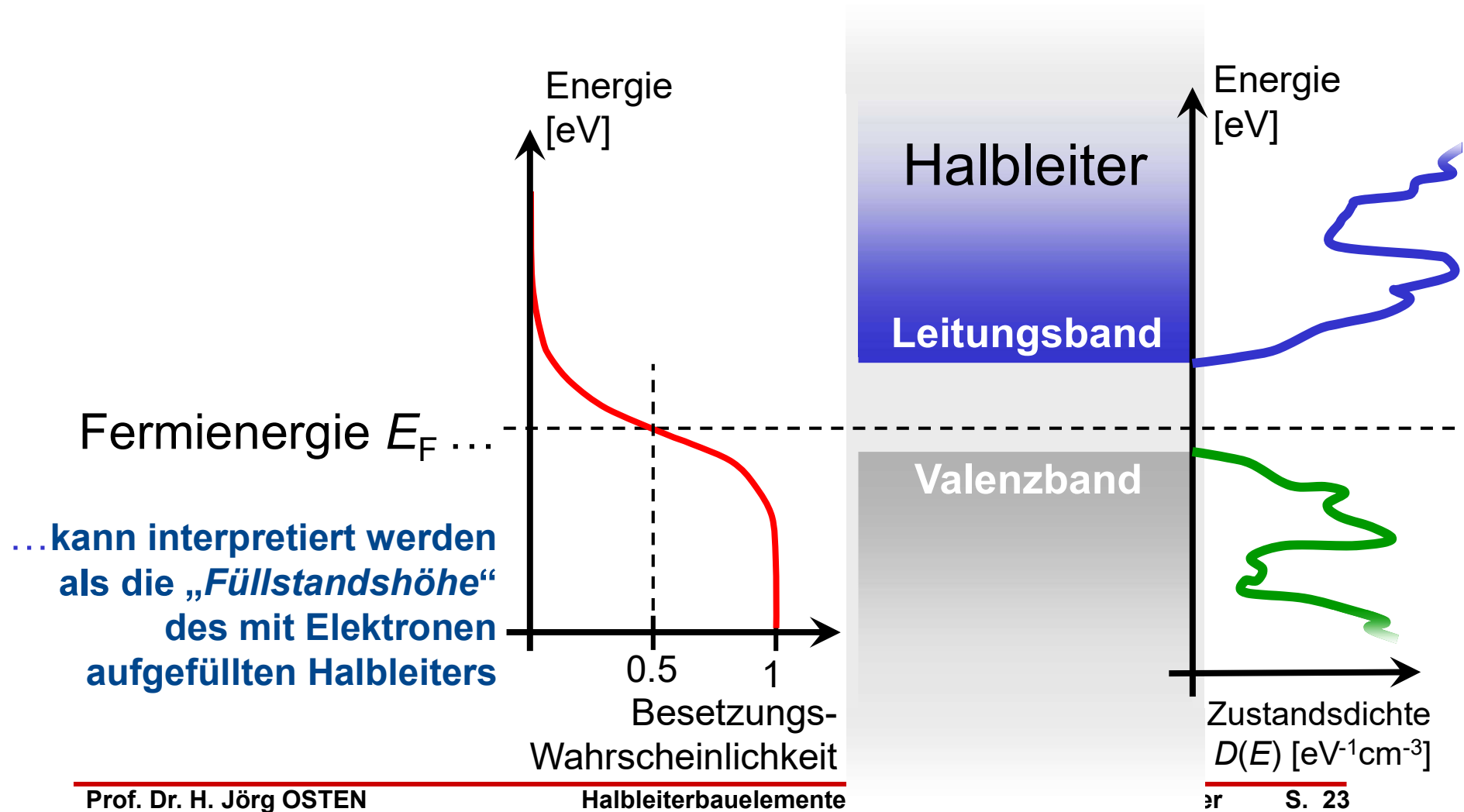
Gesamtanzahl im System: $N = \int F(E) D(E) dE$

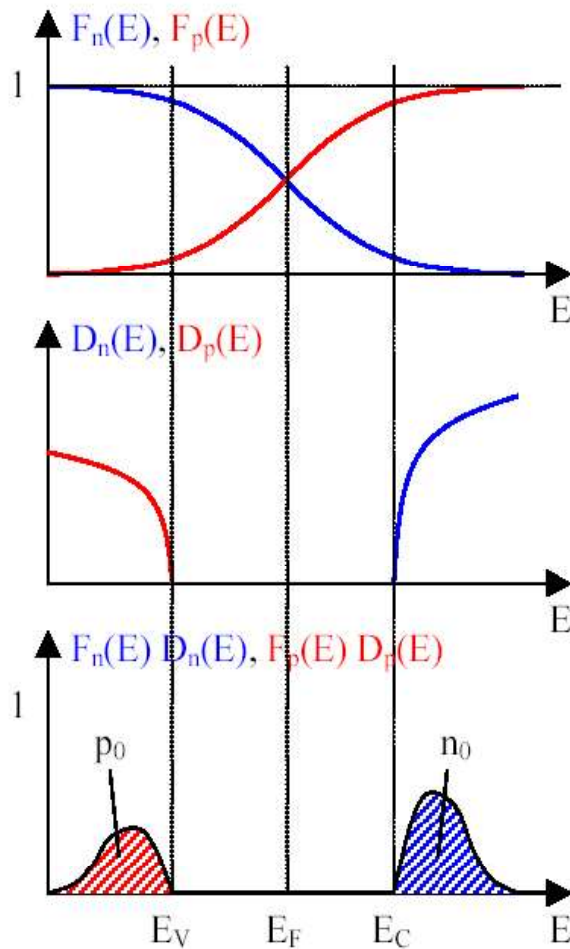




„fast leerer“ Wassereimer mit sehr starken Wellen
bzw. Gasmoleküle im Schwerfeld bei Temperatur $> 0\text{ K}$







Besetzungswahrscheinlichkeit

→ Fermi-Dirac-Funktion

Zustandsdichte $D_n(E)$ und $D_p(E)$

Konzentration der Elektronen und Löcher

$$F_n(E) \cdot D_n(E) \quad \text{bzw.} \quad F_p(E) \cdot D_p(E)$$

Die **Zustandsdichte** (*density of states* - DOS) beinhaltet die Information über die Anzahl der Zustände, die im LB und VB besetzt werden können. Die konkrete Herleitung dieser Funktionen übersteigt den Rahmen dieser Vorlesung. In der Nähe der Bandkanten gilt:

$$D_n(E) = \frac{m_n^* \sqrt{2m_n^*(E - E_{LB})}}{\pi^2 \hbar^3} \quad E \geq E_{LB}$$

$$D_p(E) = \frac{m_p^* \sqrt{2m_p^*(E_{VB} - E)}}{\pi^2 \hbar^3} \quad E \leq E_{VB}$$

E_{LB}/E_{VB} - Energien der Leitungsbandkante/Valenzbandkante

$m_{n/p}^*$ - die effektiven Massen der Elektronen und Löcher im Kristall

Die Anzahl der Elektronen und Löcher pro Volumeneinheit im LB/VB ist gegeben durch:

Elektronen im Leitungsband $D_n(E) \cdot F_n(E) \cdot dE$

Löcher im Valenzband

$$D_p(E) \cdot F_p(E) = D_p(E) \cdot (1 - F_n(E)) \cdot dE$$

Zur weiteren Berechnung müssen die Funktionen mit Hilfe eines Integrals aufsummiert werden:

$$n = \int_{E_{LB}}^{E_{Ende}} D_n(E) \cdot F_n(E) dE \quad p = \int_{E_{Ende}}^{E_{VB}} D_p(E) \cdot (1 - F_n(E)) dE$$

Ohne großen Fehler kann man jetzt folgende Näherungen machen:

$$E_{Ende} \rightarrow \infty \quad (\text{LB})$$

$$E_{Ende} \rightarrow -\infty \quad (\text{VB})$$

Warum? Weil die Fermi-Verteilung exponentiell für große Energien gegen Null strebt.

$$F(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)}$$

Eine Berechnung des Integrals würde jetzt auf das nicht elementar lösbare Fermi-Dirac-Integral führen, bei nicht degenerierten HL befindet sich jedoch das Fermi-niveau mindestens $3kT$ von den Bandkanten entfernt und es gilt die Boltzmann Näherung für die Besetzung des LB/VB.

Die Berechnung der Integrale führt nun auf folgende Elektronen- und Löcherkonzentration in der Boltzmann-Näherung:

$$n = N_{LB} \cdot \exp\left(\frac{E_F - E_{LB}}{kT}\right)$$

$$p = N_{VB} \cdot \exp\left(\frac{E_{VB} - E_F}{kT}\right)$$

$$N_{LB} = 2 \cdot \left[\frac{2\pi m_n^* kT}{h^2} \right]^{\frac{3}{2}}$$

$$N_{VB} = 2 \cdot \left[\frac{2\pi m_p^* kT}{h^2} \right]^{\frac{3}{2}}$$

N_{VB} und N_{LB} werden als **effektive Zustandsdichten** bezeichnet.

In Silizium bei 300 K beträgt $N_{VB} = 1,81 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3}$ und $N_{LB} = 3,23 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3}$.

Die **intrinsische Ladungsträgerkonzentration** n_i beschreibt wie viele Ladungsträger sich in einem intrinsischen HL im LB bzw. VB befinden.

Elektronen und Löcher sind in gleicher Anzahl vorhanden: $n = p = n_i$

$$n_i = N_{LB} \cdot \exp\left(\frac{E_i - E_{LB}}{kT}\right) = N_{VB} \cdot \exp\left(\frac{E_{VB} - E_i}{kT}\right)$$

E_i bezeichnet hier die Lage des Fermi-Niveaus im intrinsischen Halbleiter

Damit folgt für die effektiven Zustandsdichten:

$$N_{LB} = n_i \cdot \exp\left(-\frac{E_i - E_{LB}}{kT}\right)$$

$$N_{VB} = n_i \cdot \exp\left(-\frac{E_{VB} - E_i}{kT}\right)$$

$$n = N_{LB} \cdot \exp\left(\frac{E_F - E_{LB}}{kT}\right)$$

$$p = N_{VB} \cdot \exp\left(\frac{E_{VB} - E_F}{kT}\right)$$

$$N_{LB} = n_i \cdot \exp\left(-\frac{E_i - E_{LB}}{kT}\right)$$

$$N_{VB} = n_i \cdot \exp\left(-\frac{E_{VB} - E_i}{kT}\right)$$



$$n = n_i \cdot \exp\left(\frac{E_F - E_i}{kT}\right)$$

$$p = n_i \cdot \exp\left(\frac{E_i - E_F}{kT}\right)$$

Massenwirkungsgesetz

Damit ist es möglich im Rahmen der Boltzmann-Näherung, n und p allgemein als Funktion der intrinsischen Ladungsträgerkonzentration n_i und der Fermienergien E_F und E_i symmetrisch darzustellen:

$$n = n_i \cdot \exp\left(\frac{E_F - E_i}{kT}\right)$$

$$p = n_i \cdot \exp\left(\frac{E_i - E_F}{kT}\right)$$

Durch Multiplikation von n und p erhält man das **Massenwirkungsgesetz**:

$$n \cdot p = n_i^2$$

Das intrinsische Ladungsträger-Produkt

$$n_i^2 = n p = N_{LB}(T) e^{\frac{E_F - E_{LB}}{kT}} N_{VB}(T) e^{\frac{E_{VB} - E_F}{kT}}$$

$$n_i^2 = n p = N_{LB}(T) N_{VB}(T) e^{\frac{E_{VB} - E_{LB}}{kT}}$$

$$n_i^2 = N_{LB}(T) N_{VB}(T) e^{\frac{-E_g}{kT}} = \left(\frac{\sqrt{2m_n^* m_p^*}}{\pi \hbar^2} \right)^3 (kT)^3 e^{\frac{-E_g}{kT}}$$

- ist unabhängig vom Wert der Fermi-Energie
d.h. z.B. unabhängig von der Dotierung
- ist nur eine Funktion der (effektiven) Zustandsdichte
d.h. nur abhängig von Bandlücke E_g , Temperatur T
und effektiven Massen m_n^* , m_p^*

Wichtige Zusammenhänge

Massenwirkungsgesetz:

$$n \cdot p = n_i^2$$

→ Dieses Gesetz bestimmt das Verhältnis zwischen Elektronen- und Löcheranzahl

→ gilt auch in dotierten Halbleitern

Intrinsische Ladungsträgerkonzentration:

$$n_i^2 = N_{VB} N_{LB} \exp\left[-\frac{E_g}{kT}\right]$$

$$n_i = \sqrt{N_{VB} N_{LB}} \exp\left[-\frac{E_g}{2kT}\right]$$

E_g ist die Bandlücke: Abstand zwischen E_{VB} und E_{LB}

Fermienergie: intrinsischer Halbleiter

Die Fermienergie im intrinsischen HL wird mit E_i bezeichnet.

Mit der Bedingung, dass Löcher und Elektronen im intrinsischen HL in gleicher Konzentration vorhanden sind, berechnet sich E_i zu:

$$n = N_{LB} \cdot \exp\left(\frac{E_i - E_{LB}}{kT}\right) \quad p = N_{VB} \cdot \exp\left(\frac{E_{VB} - E_i}{kT}\right)$$

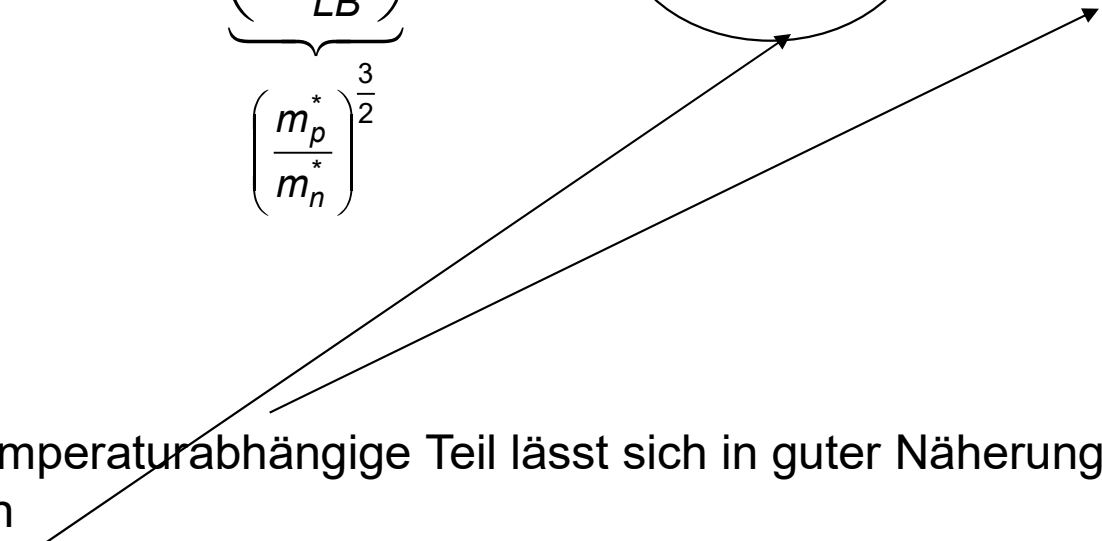
Definition Fermienergie: $n = p$

$$E_i = \frac{E_{LB} - E_{VB}}{2} + \frac{kT}{2} \cdot \ln\left(\frac{N_{VB}}{N_{LB}}\right)$$

Fermienergie für den intrinsischen Halbleiter

$$E_i = \frac{E_{LB} - E_{VB}}{2} + \frac{kT}{2} \cdot \ln \left(\frac{N_{VB}}{N_{LB}} \right) \Rightarrow E_i = \frac{E_{LB} - E_{VB}}{2} + \frac{3kT}{4} \cdot \ln \left(\frac{m_p^*}{m_n^*} \right)$$

$\underbrace{\left(\frac{N_{VB}}{N_{LB}} \right)}_{\left(\frac{m_p^*}{m_n^*} \right)^{\frac{3}{2}}}$



Der gesamte temperaturabhängige Teil lässt sich in guter Näherung vernachlässigen

➔ das Fermi-niveau befindet sich für einen intrinsischen Halbleiter in **der Mitte der Bandlücke**

Fermienergie für den dotierten Halbleiter

Vereinfachung:

- ein Dotierstoff ist in sehr viel höherer Konzentration (z.B. $N_D \gg N_A$) vorhanden
- seine Konzentration ist groß gegenüber der intrinsischen Ladungsträgerkonzentration ($N_D \gg n_i$)

$$n = n_i \cdot \exp\left(\frac{E_F - E_i}{kT}\right) \quad p = n_i \cdot \exp\left(\frac{E_i - E_F}{kT}\right)$$

Somit ergibt sich das Fermi-Niveau in Bezug auf das intrinsische Niveau:

$$E_F - E_i = kT \cdot \ln\left(\frac{n}{n_i}\right) = -kT \cdot \ln\left(\frac{p}{n_i}\right)$$

Fermienergie für den dotierten Halbleiter

$$E_F - E_i = kT \cdot \ln\left(\frac{n}{n_i}\right) = -kT \cdot \ln\left(\frac{p}{n_i}\right)$$

für n-Dotierung: $n = N_D \gg N_A, n_i$

$$E_F - E_i = kT \cdot \ln\left(\frac{N_D}{n_i}\right)$$

für p-Dotierung: $p = N_A \gg N_D, n_i$

$$E_i - E_F = kT \cdot \ln\left(\frac{N_A}{n_i}\right)$$

Fermienergie für den dotierten Halbleiter

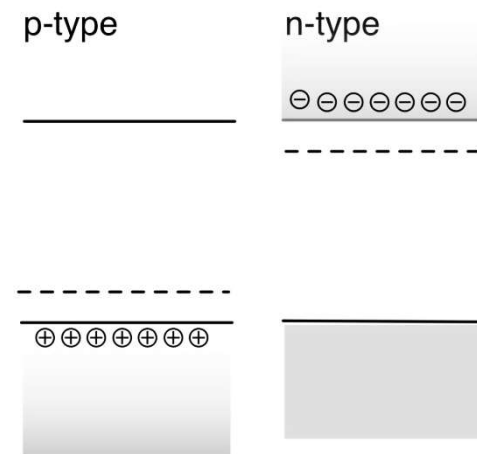
- Für n-dotierte Halbleiter liegt das Fermi-niveau oberhalb des intrinsischen Niveaus

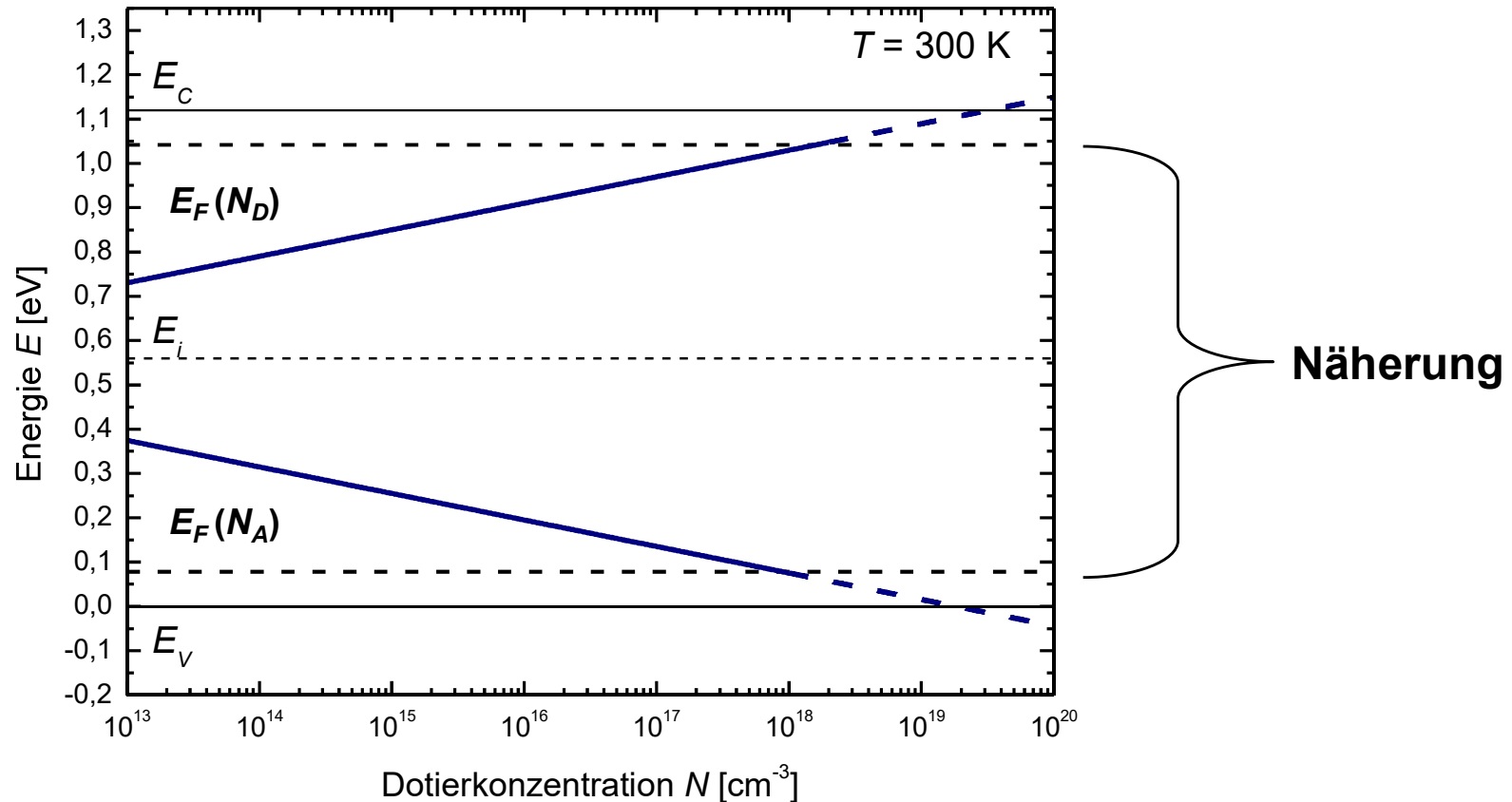
$$E_F - E_i = kT \cdot \ln\left(\frac{N_D}{n_i}\right)$$

- Für p-dotierte Halbleiter liegt das Fermi-niveau unterhalb des intrinsischen Niveaus

$$E_i - E_F = kT \cdot \ln\left(\frac{N_A}{n_i}\right)$$

- Die konkrete Lage hängt ab von:
der Höhe der Dotierung
der Temperatur



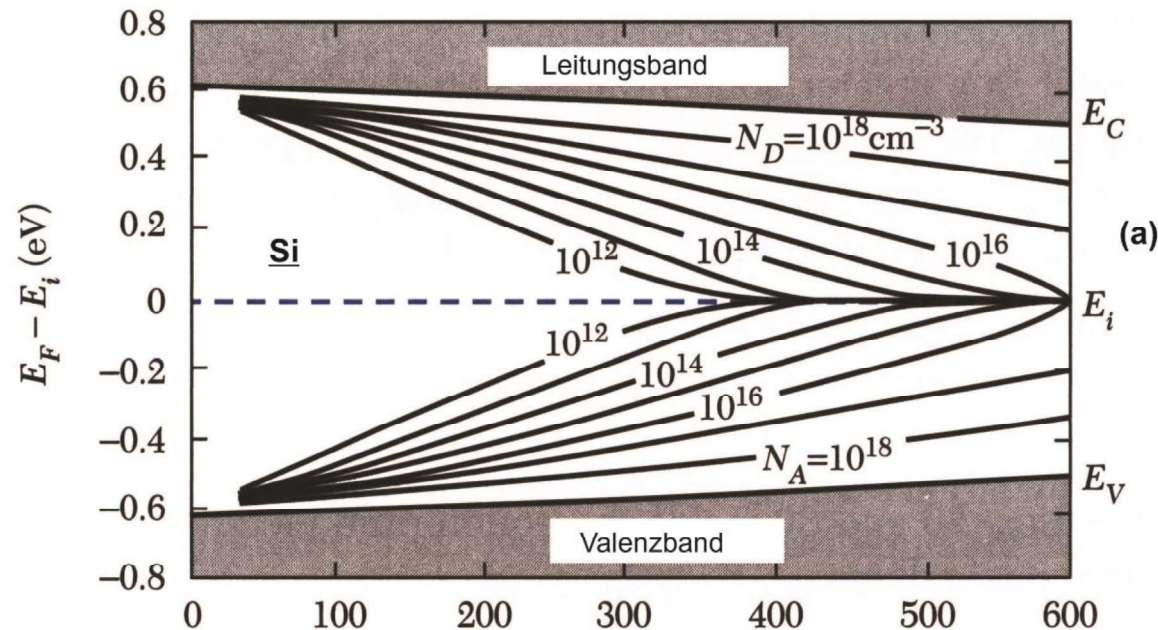


Gültigkeitsbereich der Boltzmann-Näherung:

$$N_A^- - N_D^+ \leq 0,05 N_{VB} = 9 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$$

$$N_D^+ - N_A^- \leq 0,05 N_{LB} = 1,6 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$$

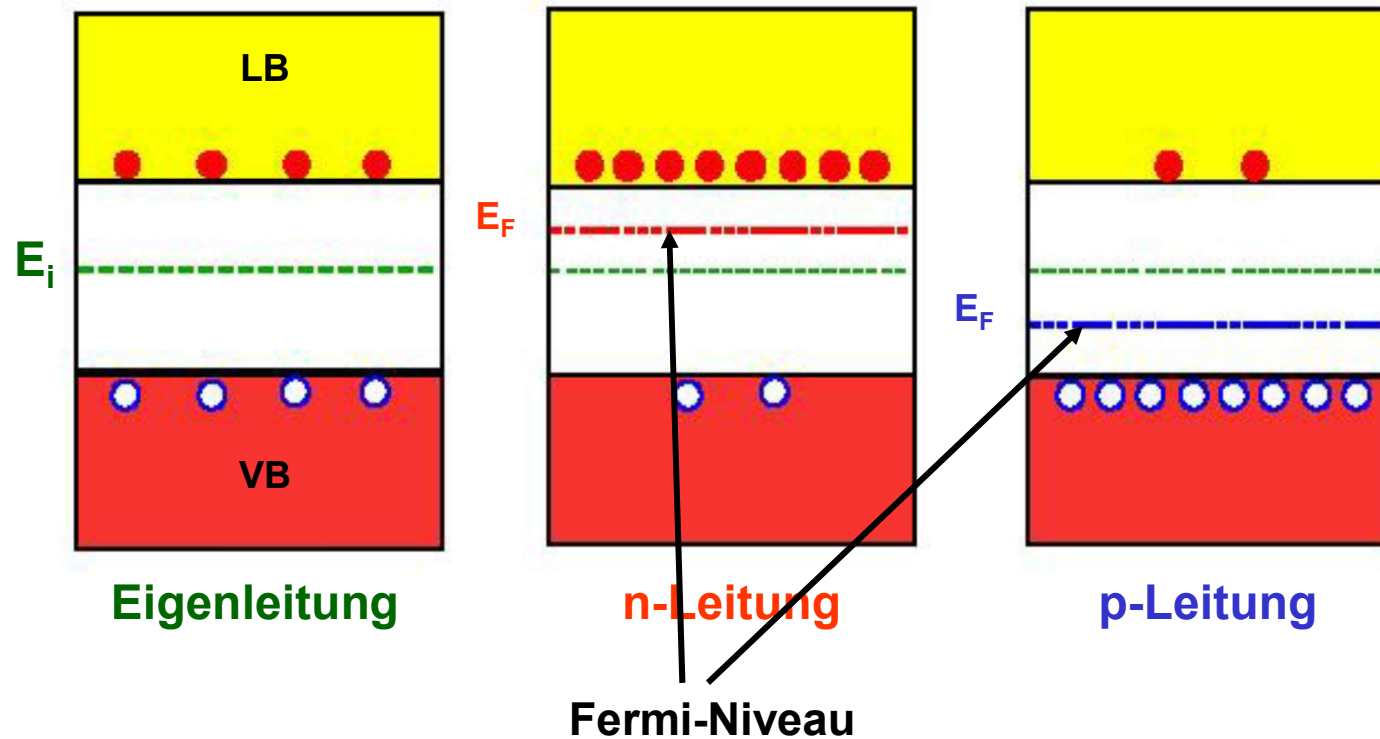
Temperaturabhängigkeit des Fermi-Niveaus



- das Fermi-Niveau für HL, bei denen die Löcher-/Elektronenkonzentration (p/n-dotiert) überwiegt, liegt unterhalb/oberhalb des intrinsischen Fermi-Niveaus (E_i)
- Mit steigender Temperatur nähert es sich dem intrinsischen Niveau

Fermienergie im Eigen-, n-, und p-Halbleiter

Fermi-Energie: $F_n = F_p = 0.5$ (gleiche Besetzungswahrscheinlichkeiten)



Ladungsträgerdichten in dotierten Halbleitern

Da er nur neutrale Bausteine beinhaltet, ist er in seiner Gesamtheit elektrisch neutral. Es können folgende geladene Teilchen existieren:

- Freie Elektronen (n)
- Freie Löcher (p)
- Ionisierte Donatoren (N_D^+)
- Ionisierte Akzeptoren (N_A^-)

Neutralitätsbedingung für den dotierten Halbleiter:

$$\rho = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}} = 0 = q \cdot (p - n + N_D^+ - N_A^-)$$

$$p + N_D^+ = n + N_A^-$$

Neutralitätsbedingung

Bei Eigenleitung galt: Anzahl Elektronen = Anzahl Löcher

$$n_0 = p_0 = \sqrt{n_i^2}$$

Dotierte Halbleiter: Da der Kristall als ganzes neutral ist, gilt auch hier die Neutralitätsbedingung:

$$n + N_A^- = p + N_D^+$$

Bei vollständiger Ionisation (Störstellenerschöpfung):

$$n = N_D \quad p = N_A \quad N_A^- = N_A \quad N_D^+ = N_D$$

$$n + N_A^- = p + N_D^+ = N_D + N_A$$

Was passiert, wenn **beide Arten** von Dotierstoffen im Halbleiter vorhanden sind?

$$q \cdot (p - n + N_D^+ - N_A^-) = 0 \quad \text{Annahme: Störstellenerschöpfung}$$

Wir setzen das Massenwirkungsgesetz in die Neutralitätsbedingung ein und eliminieren p:

$$n^2 - n \cdot (N_D - N_A) - n_i^2 = 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$n = \frac{N_D - N_A}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_D - N_A}{2}\right)^2 + n_i^2}$$

$$p = -\frac{N_D - N_A}{2} + \sqrt{\left(-\frac{N_D - N_A}{2}\right)^2 + n_i^2}$$

Ladungsträgerdichten in dotierten Halbleitern

$$n = \frac{N_D - N_A}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_D - N_A}{2}\right)^2 + n_i^2}$$

Vereinfachung:

- ein Dotierstoff ist in sehr viel höherer Konzentration (z.B. $N_D \gg N_A$) vorhanden
- seine Konzentration ist groß gegenüber der intrinsischen Ladungsträgerkonzentration ($N_D \gg n_i$)

Die Lösungen der quadratischen Gleichung vereinfachen sich dann zu:

$$n = N_D$$

$$p = \frac{n_i^2}{N_D}$$

Analog sehen die Gleichungen aus, wenn p-Dotierung erfolgt, d.h. $N_A \gg N_D$, n_i .

$$p = N_A$$

$$n = \frac{n_i^2}{N_A}$$

n-dotierter Halbleiter

- Durch die Dotierung mit Donatoren (As, Sb, P) gibt es viel mehr freie Elektronen als Löcher.
- Die Elektronen werden als **Majoritätsträger**, die Löcher als **Minoritätsträger** bezeichnet.

Bei Störstellenerschöpfung gilt:

Majoritätskonzentration

$$n = N_D$$

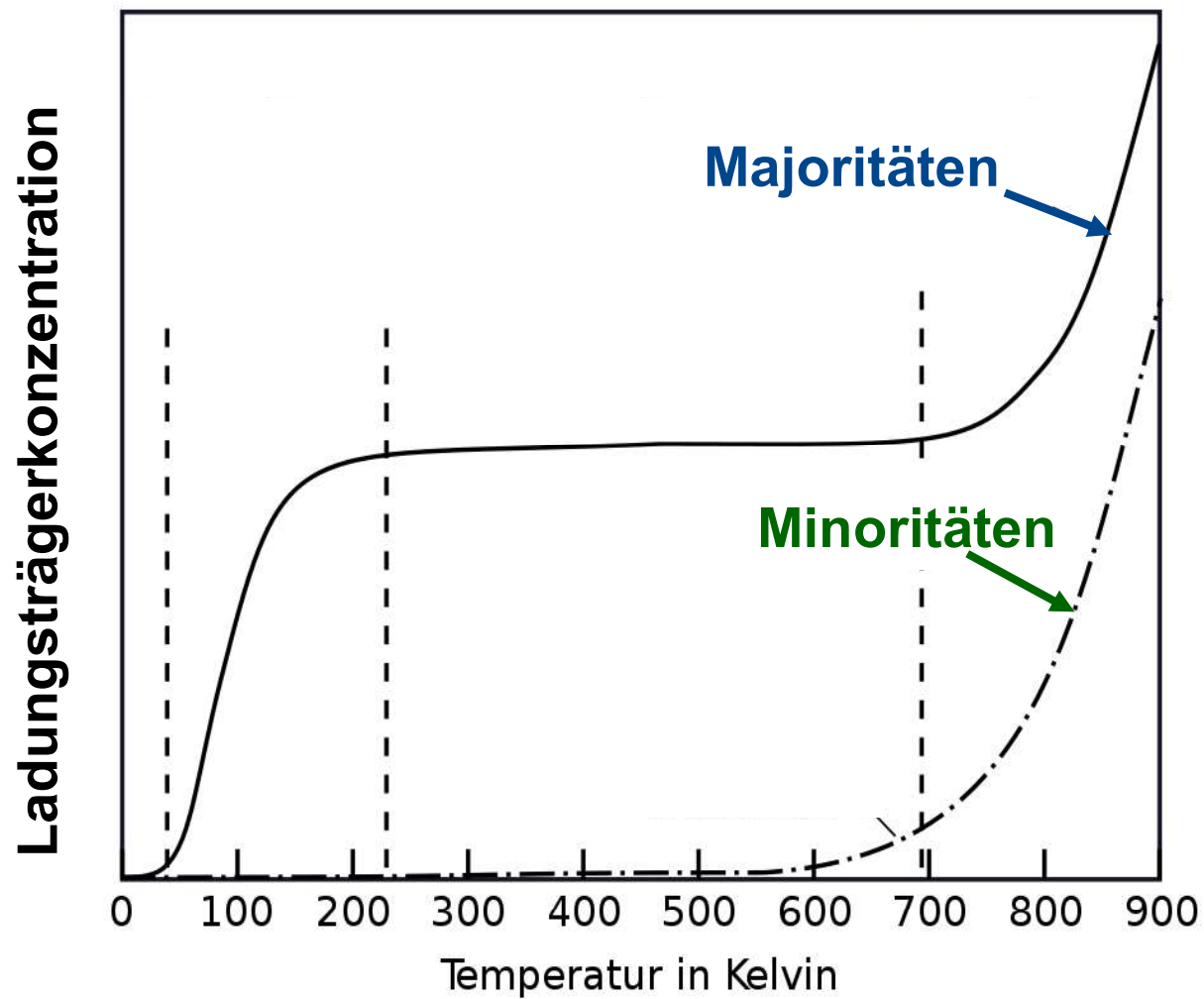
← temperaturunabhängig

Minoritätskonzentration

$$p = \frac{n_i^2}{N_D}$$

← temperaturabhängig

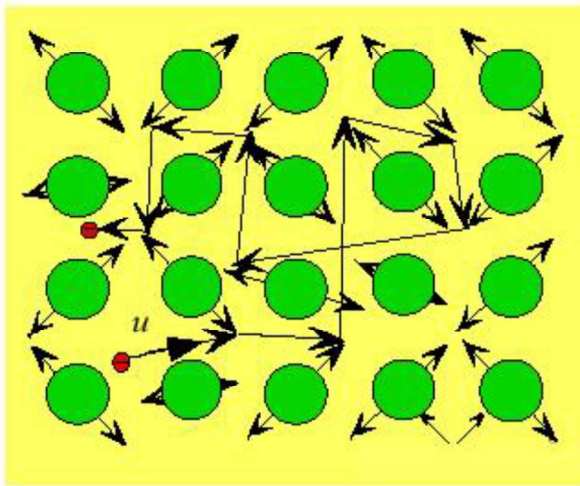
$$n_i = \sqrt{N_{VB} N_{LB}} \exp\left[-\frac{E_g}{2kT}\right]$$



Ladungsträgerdynamik

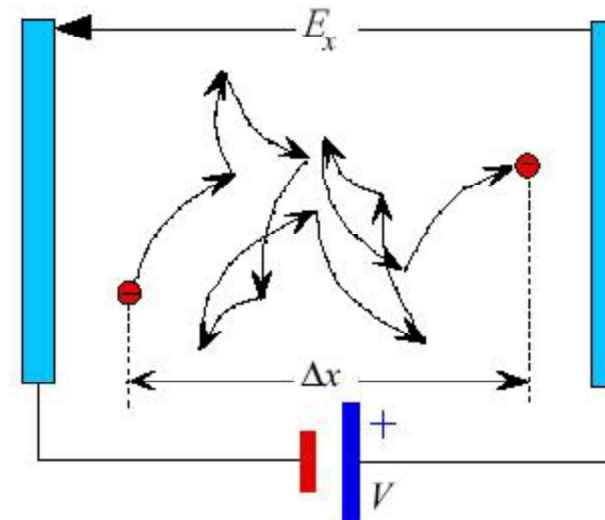
Bewegung der Elektronen

Thermische Bewegung



- Das Elektron bewegt sich mit der thermischen Geschwindigkeit v
- Durch Stöße wird die Richtung zufällig verändert
- Nach vielen Stößen hat das Elektron **keinen resultierenden Weg in x-Richtung** zurückgelegt

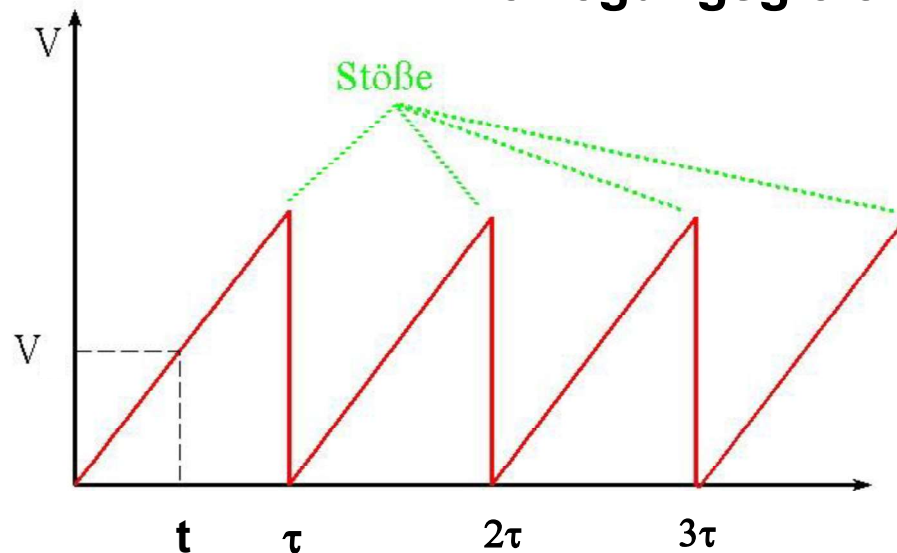
Mit elektrischem Feld



- Das Elektron bewegt sich mit der thermischen Geschwindigkeit v
- Durch Stöße wird die Richtung zufällig verändert
- Durch das **elektrische Feld** wird eine **gerichtete Bewegung in x-Richtung** erzeugt

Analogie: Drude Modell für Metalle

Bewegungsgleichung: $F = m_e^* \cdot \frac{dV}{dt} = -e \cdot E$



$$\int_0^V dV' = -\frac{e \cdot E}{m_e^*} \int_0^\tau dt'$$

für $0 \leq t \leq \tau$

Mittlere Geschwindigkeit (Driftgeschwindigkeit): $v_d = -\frac{e \cdot \tau}{m_e^*} \cdot E$

Driftstrom

- Die Ladungsträger verlieren im Kristall immer wieder durch Stöße Energie (thermalisieren)
 - Es kommt (im Gegensatz zum Vakuum) nicht zur unbegrenzten Geschwindigkeitszunahme
- Die Ladungsträger im Kristall erreichen eine mittlere endliche Geschwindigkeit, die Driftgeschwindigkeit v_d genannt wird.
- Weiterhin definiert man noch eine Zeit τ , die die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen angibt (Stoßzeit).
- Somit kann die Driftgeschwindigkeit berechnet werden aus:

$$\vec{v}_d = \pm \frac{q \cdot \tau}{m^*} \vec{E}_{el}$$

Geschwindigkeit der Ladungsträger ist proportional zur elektrischen Feldstärke

$$v_n = -\mu_n E \quad v_p = \mu_p E$$

Proportionalitätskonstante wird als **Beweglichkeit** bezeichnet

$$\mu_n = \frac{q\tau_n}{2m_n^*}$$

$$\mu_p = \frac{q\tau_p}{2m_p^*}$$

m^* - effektive Masse (unterschiedliche für Elektronen und Löcher)

τ - Relaxationszeit (mittlere Flugzeit)

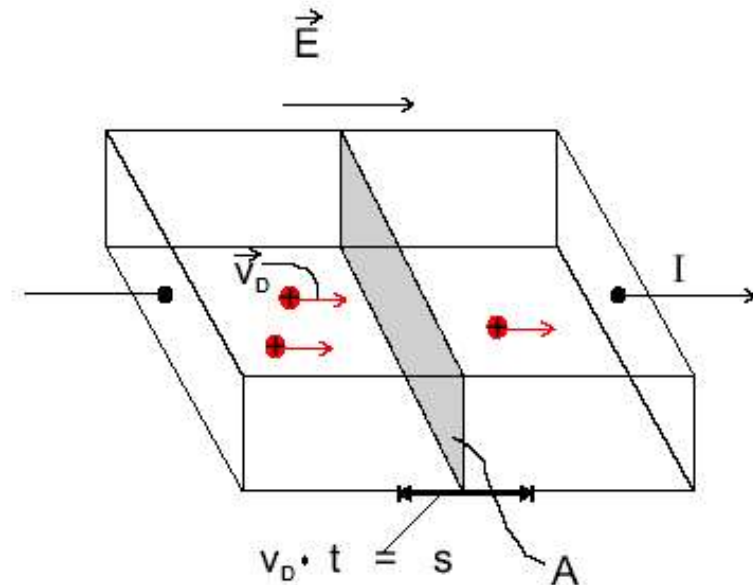
➔ Die Beweglichkeit von Löchern und Elektronen ist unterschiedlich

$$\vec{v}_d = \pm \frac{q \cdot \tau}{m^*} \vec{E}_{el}$$

Betrachtet man einen p-dotierten Halbleiterquader, an dem eine Spannung anliegt, so bewegen sich die Löcher in Richtung des elektrischen Feldes.

Wie groß ist der Strom?

Um diese Frage beantworten zu können, muss zunächst der Strom I definiert werden:



$$I_{p/drift} = qp v_d A$$

Driftstrom (Feld)

Stromdichte: $\vec{J}_p = qp\vec{v}_p$ $\vec{J}_n = qn\vec{v}_n$

Beweglichkeit $\mu_{n/p}$: $\vec{v}_p = \mu_p \vec{E}_{el}$

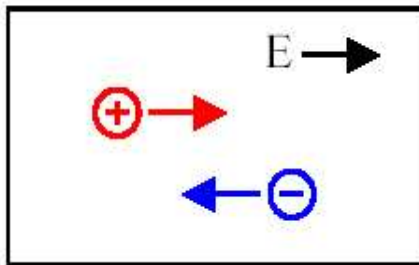
$\vec{v}_n = -\mu_n \vec{E}_{el}$

Die Beweglichkeit ist für kleine Felder eine einfache Proportionalitätskonstante, die für Elektronen und Löcher unterschiedlich ist, daraus ergibt sich für den Elektronen und Löcherstrom

$$\vec{J}_{p / drift} = q\mu_p p \vec{E}_{el}$$

$$\vec{J}_{n / drift} = -q\mu_n n \vec{E}_{el}$$

Löcher und Elektronen tragen zum Ladungstransport bei



Unter dem Einfluss eines E-Feldes (Spannung) bewegen sich Löcher und Elektronen.

→ **Driftstrom**

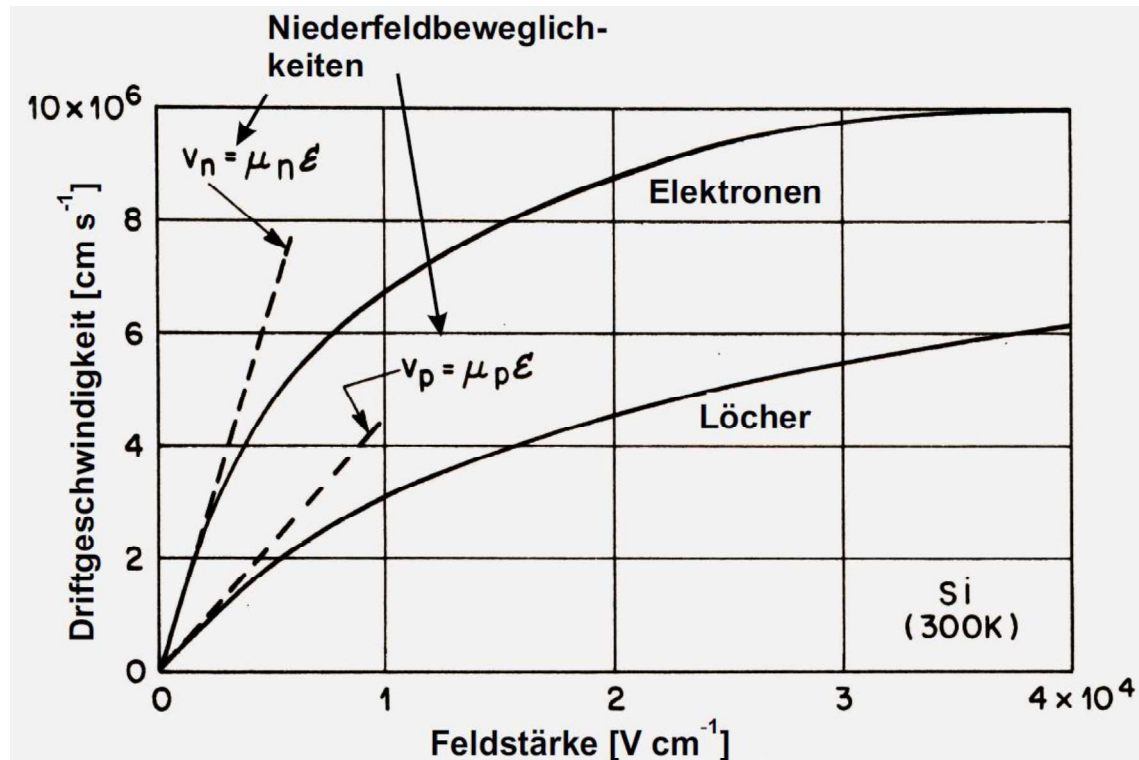
$$\vec{J} = \vec{J}_n + \vec{J}_p = q\mu_n n \vec{E} + q\mu_p p \vec{E} = q\vec{E}(\mu_n n + \mu_p p)$$

$$\mu_{n,p} = \frac{q\tau_{n,p}}{2m_{n,p}^*}$$

Beweglichkeit

n, p – Anzahl der Ladungsträger

Die Driftgeschwindigkeit



- die Geschwindigkeit nimmt mit wachsendem Feld nicht stetig zu
- es tritt eine Sättigung ein

Driftgeschwindigkeit und Sättigung

- Die Beweglichkeit ist nur für kleine Feldstärken eine Konstante
- Für größere Feldstärken nimmt die Beweglichkeit ab und erreicht einen Sättigungswert
- Damit ergibt sich für die Driftgeschwindigkeit folgender Ausdruck:

$$v_d = \frac{\mu_0 E}{\left[1 + \left(\frac{\mu_0 E}{v_{sat}} \right)^\beta \right]^{1/\beta}}$$

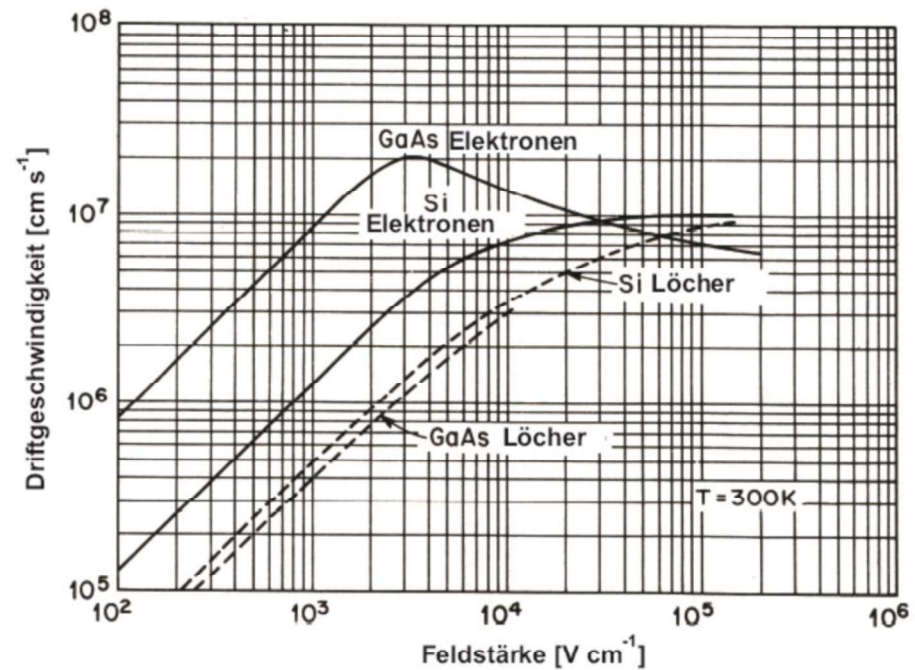
μ_0 – Niederfeldbeweglichkeit

v_{sat} – Sättigungsdriftgeschwindigkeit

$\beta = 1$ (für Elektronen)

2 (Löcher)

$$v_d = \frac{\mu_0 E}{\left[1 + \left(\frac{\mu_0 E}{v_{sat}} \right)^\beta \right]^{1/\beta}}$$



Spezifische Leitfähigkeit und Widerstand

Zusammenhang zwischen Strom und Feld wird über den spezifischen Widerstand ρ oder die spezifische Leitfähigkeit σ ausgedrückt:

$$\vec{E}_{el} = \rho \cdot \vec{J}_{drift} = \frac{1}{\sigma} \vec{J}_{drift}$$

In einem homogenen Material, in dem Elektronen und Löcher vorhanden sind, kann für die Driftstromdichte geschrieben werden:

$$\vec{J}_{drift} = \vec{J}_{n / drift} + \vec{J}_{p / drift} = \underbrace{q \cdot (\mu_n n + \mu_p p)}_{\sigma} \cdot \vec{E}_{el}$$

$$\text{mit } \rho = \frac{1}{q \cdot (\mu_n n + \mu_p p)} = \frac{1}{\sigma}$$

Vereinfachung:

- ein Dotierstoff ist in sehr viel höherer Konzentration (z.B. $N_A \gg N_D$) vorhanden
- seine Konzentration ist groß gegenüber der intrinsischen Ladungsträgerkonzentration ($N_A \gg n_i$)

$$\sigma = q\mu_p N_A \quad \rho = \frac{1}{q\mu_p N_A}$$

Analog erhält man die Ausdrücke für den n-dotierten Fall ($N_D \gg N_A, n_i$):

$$\sigma = q\mu_n N_D \quad \rho = \frac{1}{q\mu_n N_D}$$

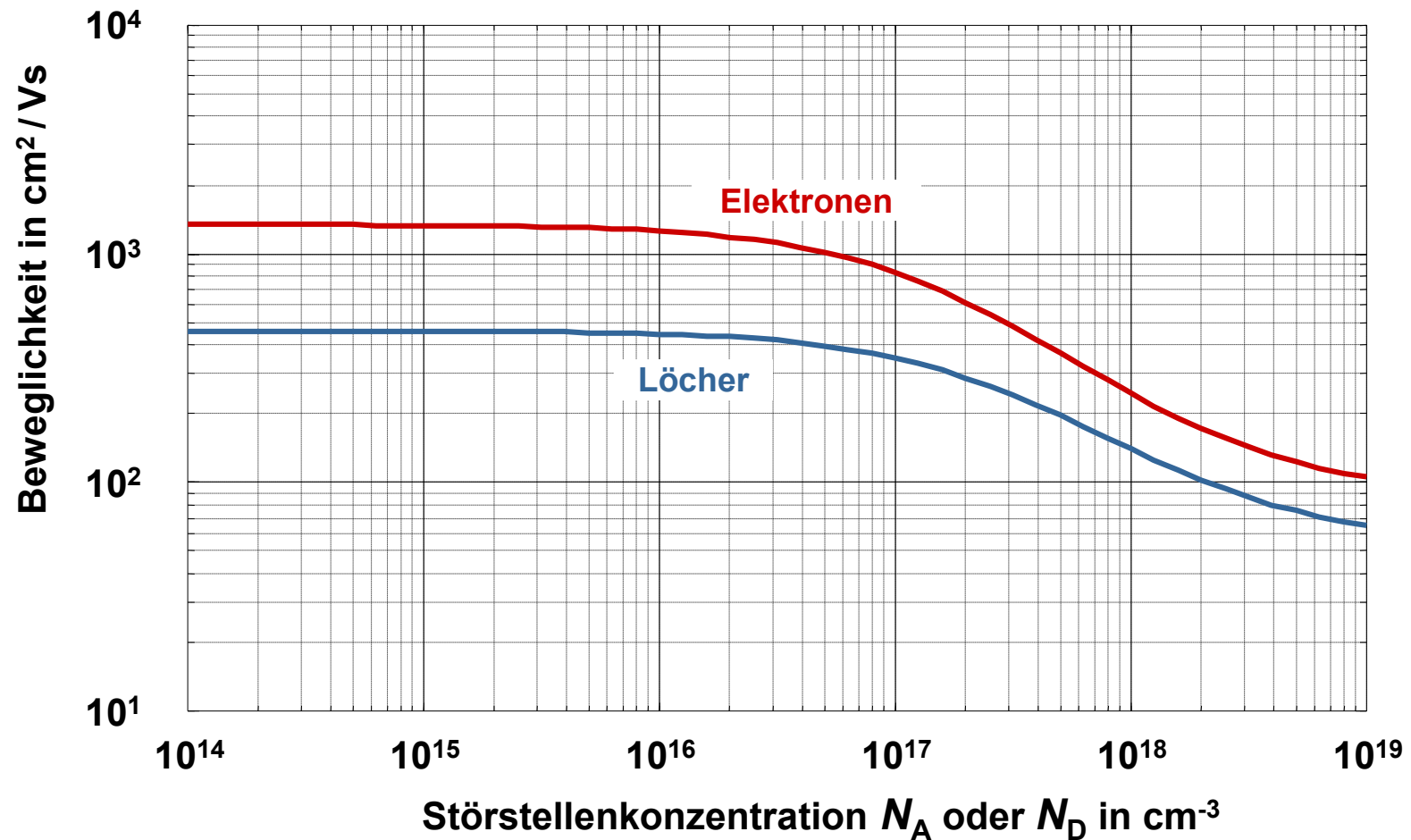
➔ Widerstand hängt von μ ab!

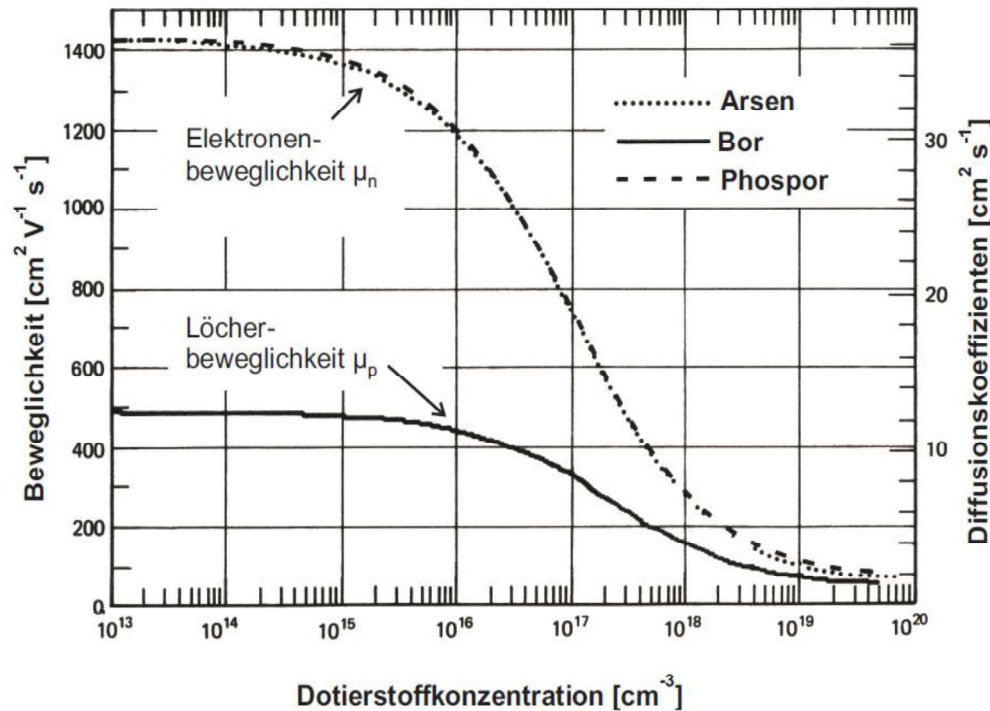
Vergleich der Materialparameter:

	μ_n [cm ² /Vs]	μ_p [cm ² /Vs]
Si	1430	505
Ge	3900	1900
GaAs	8000	400

- unterschiedliche Beweglichkeiten von Löchern und Elektronen
- bessere Beweglichkeiten in Ge im Vergleich zu Si

Löcher und Elektronen in Silizium

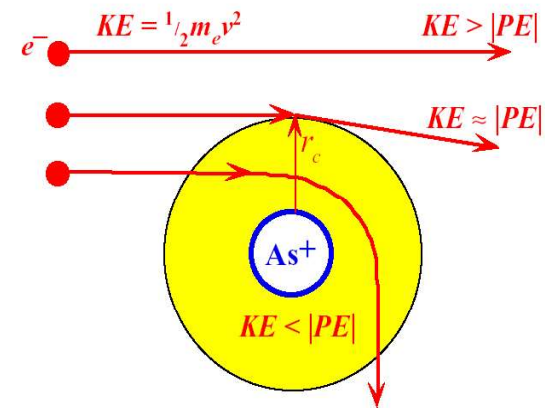




$$\mu_{n,p} = \frac{q\tau_{n,p}}{m_{n,p}^*}$$

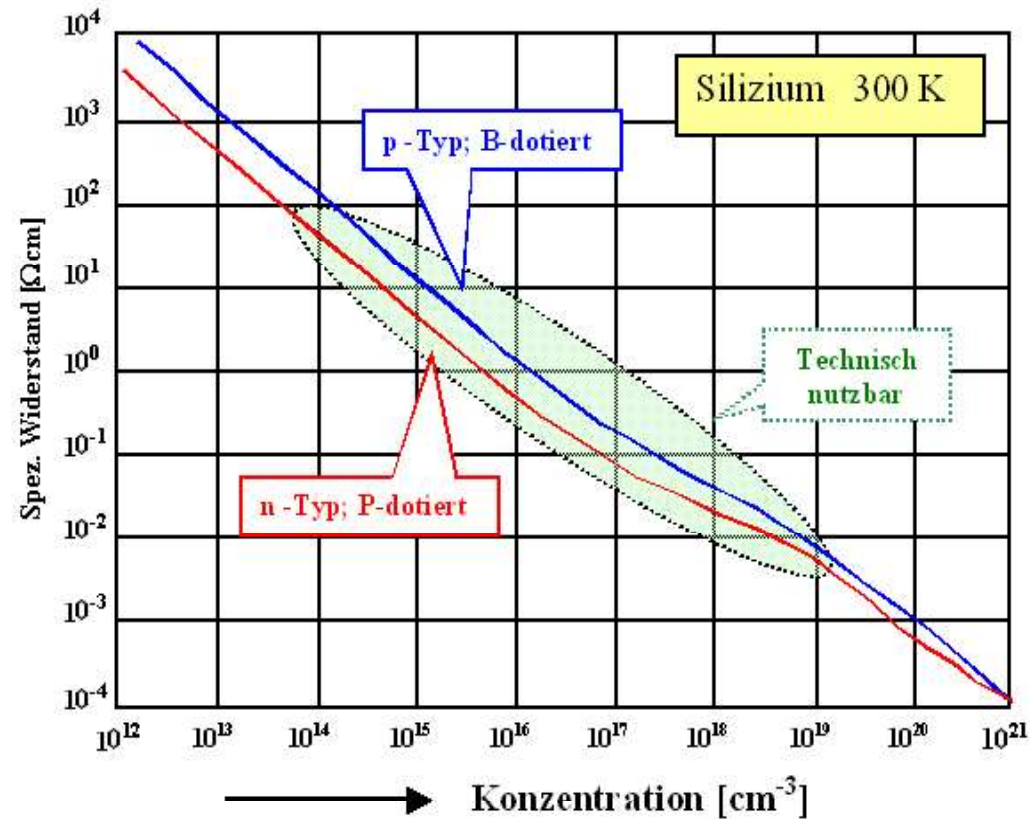
$$m_p^* = 0.69m_0$$

$$m_n^* = 0.32m_0$$



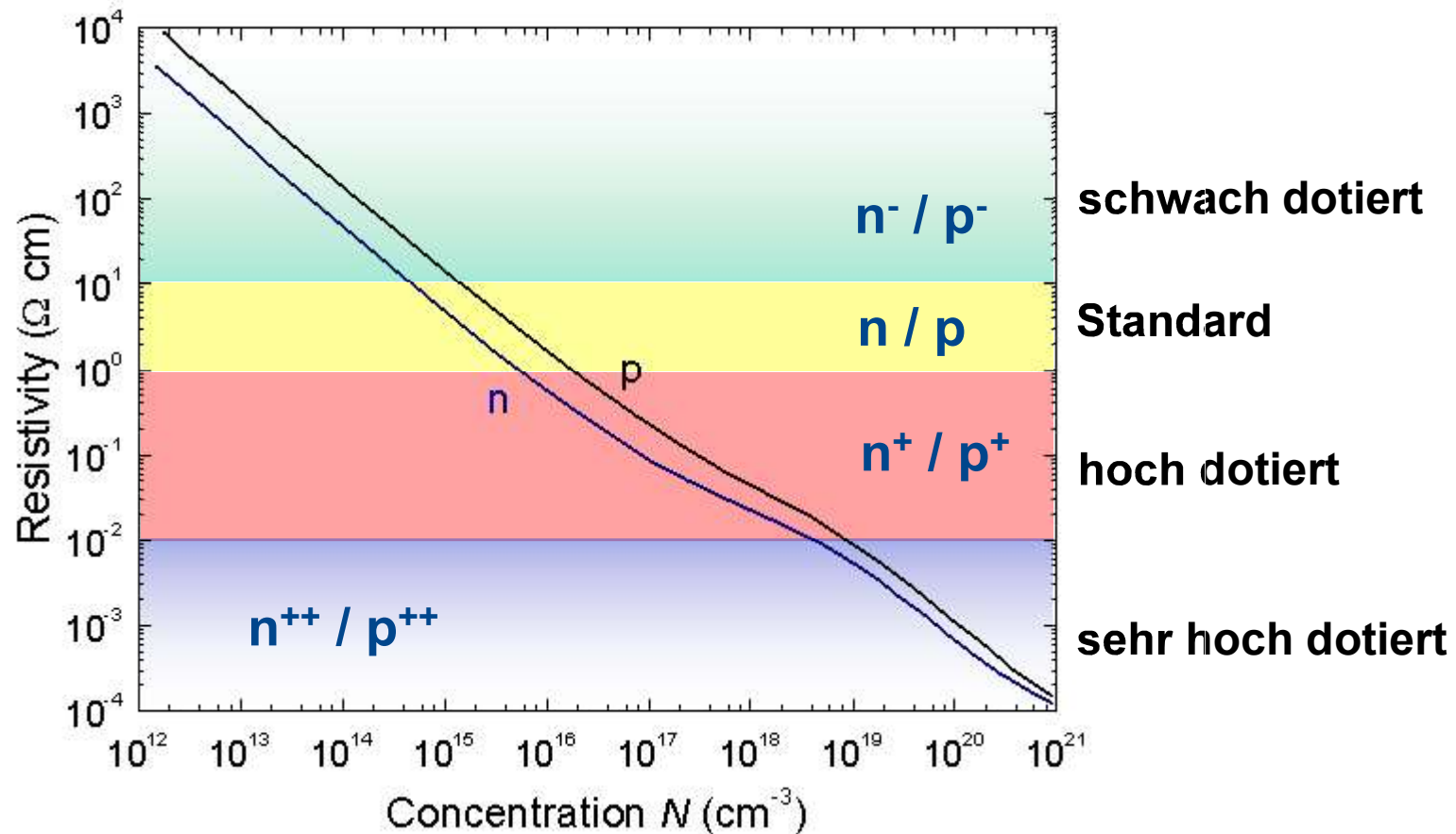
- Streuung an Dotierionen reduziert die mittlere Flugzeit τ und damit die Beweglichkeit
- Beweglichkeit nimmt mit steigendem Dotierniveau ab

Spezifischer Widerstand und Dotierung



➔ unterschiedliche Widerstände bei gleichen Dotierniveaus für n- und p-Silizium

Bezeichnungen für Dotierungen



Dotierung	Name	Widerstand in Ωcm	Anzahl Dotieratome pro cm^3	Verhältnis zu Si- Atomen
schwach	n^-	> 10	$< 5 \cdot 10^{14}$	$< 1 : 10^8$
	p^-		$< 1 \cdot 10^{15}$	$< 5 : 10^7$
Standard	n	$1 - 10$	$< 5 \cdot 10^{15}$	$< 1 : 10^7$
	p		$< 5 \cdot 10^{16}$	$< 1 : 10^6$
hoch	n^+	$0.01 - 1$	$< 5 \cdot 10^{18}$	$< 1 : 10^4$
	p^+		$< 1 \cdot 10^{19}$	$< 5 : 10^3$
sehr hoch	n^{++}	< 0.01		
	p^{++}			

Die Ladungsträgerbeweglichkeit

- Die Relaxationszeit kann durch verschiedene Effekte reduziert werden

$$\mu = \frac{q\tau}{2m^*}$$

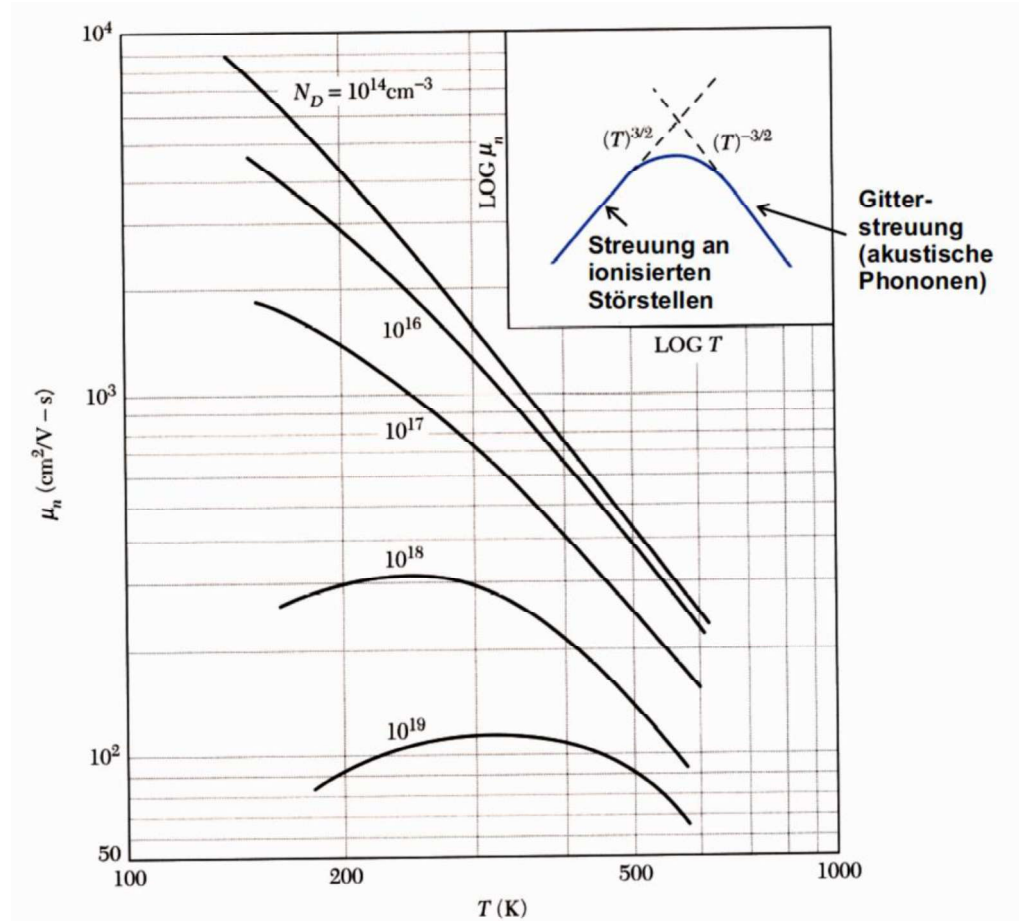
$$\frac{1}{\tau} = \sum \frac{1}{\tau_i}$$

- Bei geringen Dotierstoffkonzentrationen dominiert die Streuung an den Gitterschwingungen (Phononen)

Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit in reinen Kristallen (Streuung an Gitterschwingungen) kann durch ein Potenzgesetz dargestellt werden: $\mu \sim T^{-3/2}$

- Beweglichkeit hängt von der Dotierstoffkonzentration ab
Ab einer Dotierstoffkonzentration von mehr als 10^{15} cm^{-3} nimmt die Beweglichkeit stetig ab
ab dieser Konzentration dominiert die Coulombstreuung an den Ionen der Dotieratomen

Dieser Effekt ist besonders stark bei tiefen Temperaturen: $\mu \sim T^{3/2}$

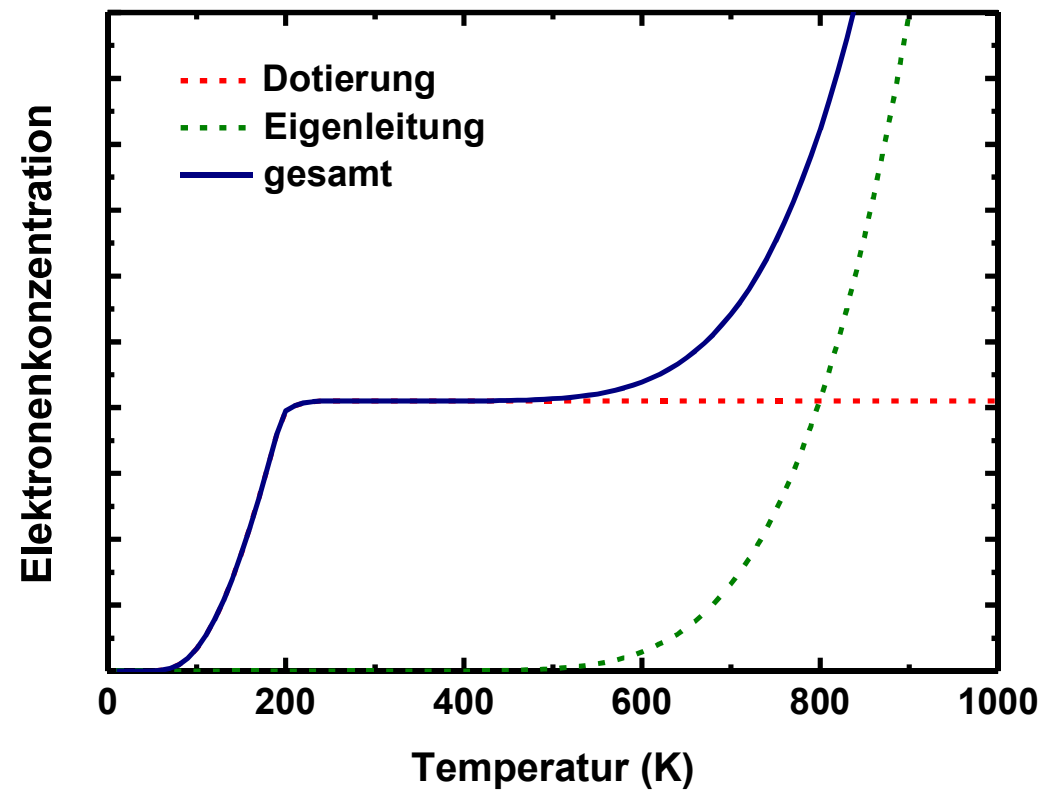


Bei hohen Temperaturen dominiert Streuung an Phononen:

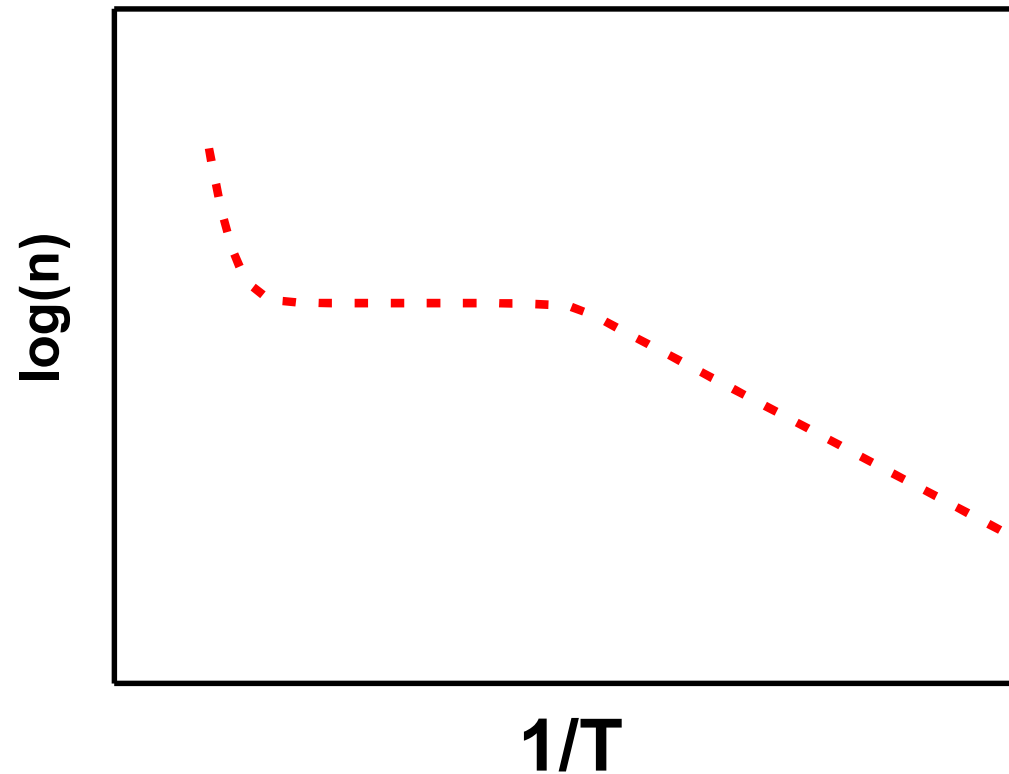
$$\mu \sim T^{-3/2}$$

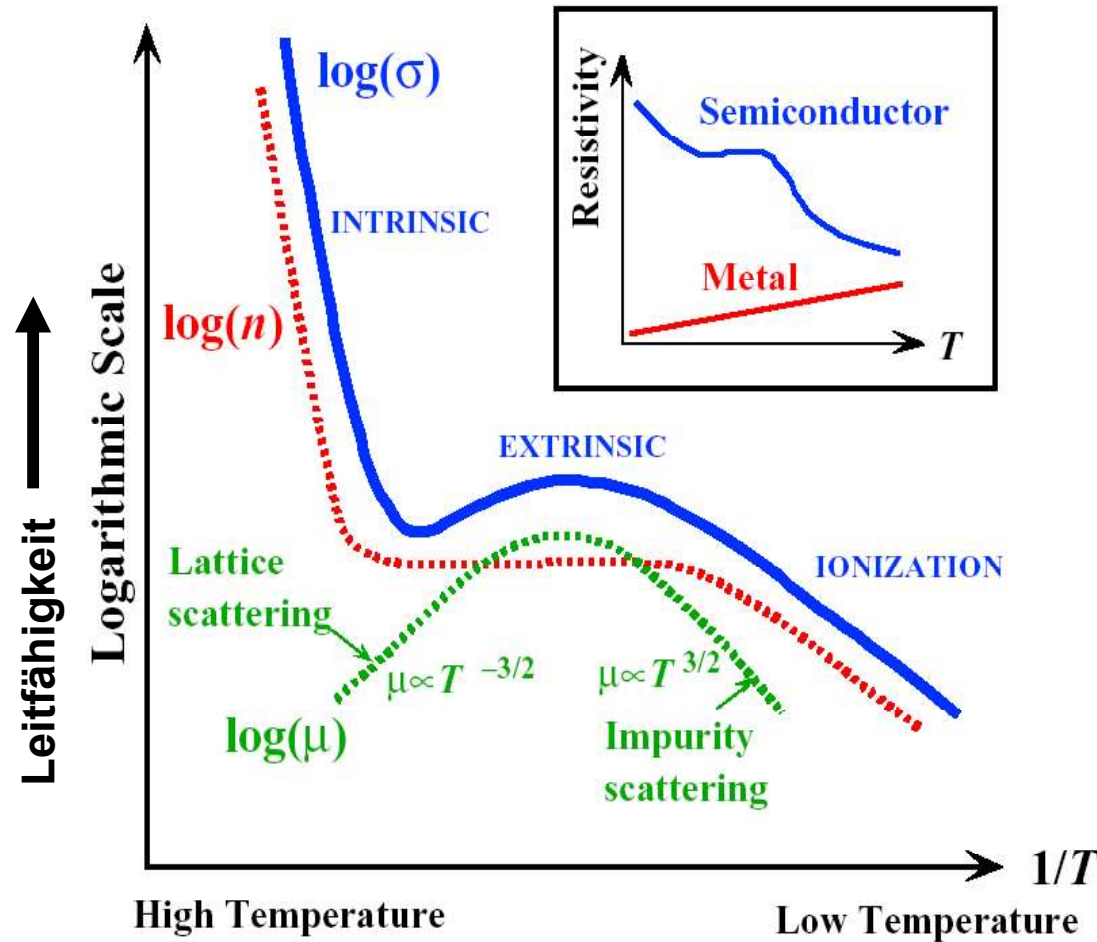
Bei tiefen Temperaturen dominiert Streuung an Störstellen:

$$\mu \sim T^{3/2}$$



n-dotierter Halbleiter



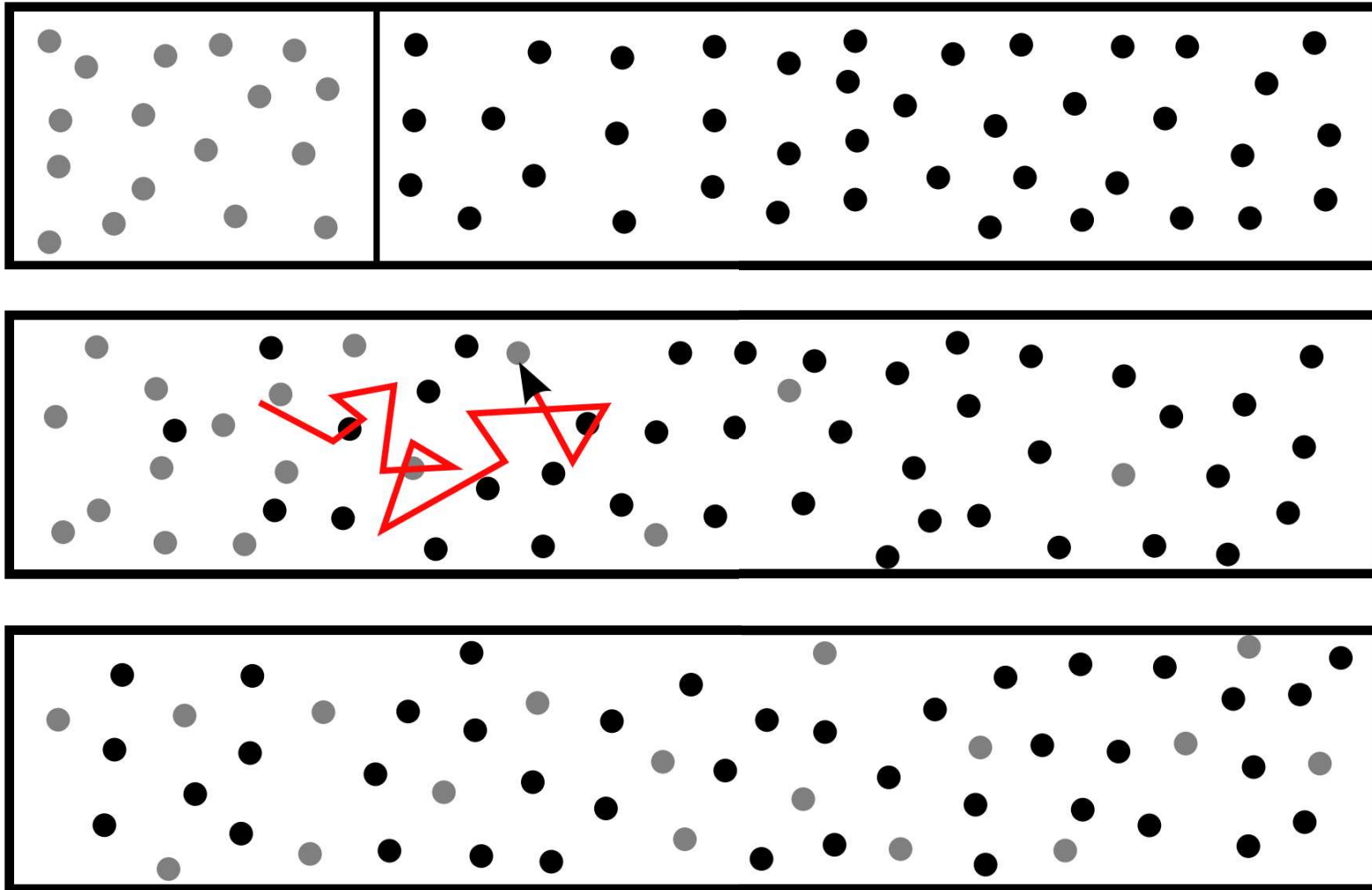


Leitfähigkeit:

$$\sigma = q (\mu_p p + \mu_n n)$$

Widerstand:

$$\rho = 1/\sigma$$



- **Diffusion: Bewegungen von Atomen im Verbund**
- **Diffusion findet immer statt, wenn die Konzentration eines Stoffes von Ort zu Ort verschieden ist.**
- **Beendet wird der Prozess erst durch völligen Ausgleich aller Konzentrationen (falls keine Quellen vorhanden sind, die auch ein stationäres Konzentrationsgefälle aufrechterhalten können)**
- **Der Teilchentransport wird durch den Gradienten der Teilchenzahl (Konzentration) angetrieben**
- **Die Teilchenstromdichte J (ein Vektor), dessen Betrag die Anzahl der Teilchen darstellt, die in der Sekunde durch die Flächeneinheit treten, ist proportional dem Konzentrationsgefälle**

Ficksches Gesetz der Diffusion

$$\vec{J} = -D \cdot \text{grad}(C)$$

$$\frac{dC}{dt} = D \cdot \text{div}(\vec{J})$$

D – Diffusionskoeffizient

C – Konzentration

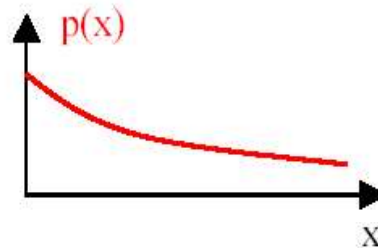
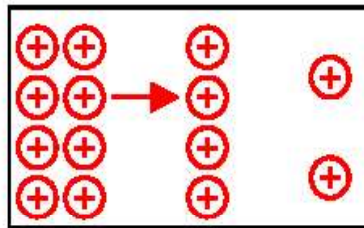
Eindimensionaler Fall:

$$J = -D \frac{\partial C(x,t)}{\partial x}$$

Zeitabhängigkeit:

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right)$$

Konzentrationsunterschiede der Ladungsträger verursachen eine gerichtete Bewegung



→ Diffusionsstrom

$$\vec{J} = \vec{J}_n + \vec{J}_p = qD_n \text{grad}(n) - qD_p \text{grad}(p)$$

D_n und D_p sind die Diffusionskoeffizienten der Elektronen und Löcher

Diffusion und Beweglichkeit

- Diffusion und Beweglichkeit sind proportional zueinander

$$D_p \sim \mu_p \quad \text{und} \quad D_n \sim \mu_n$$

- Der Quotient ist für Löcher und Elektronen in einem Material gleich (Einstein-Beziehung)

$$\frac{D_p}{\mu_p} = \frac{D_n}{\mu_n} = \frac{kT}{q}$$

- Temperaturspannung:

$$\frac{D_p}{\mu_p} = \frac{D_n}{\mu_n} = \frac{kT}{q} = U_T$$

U_T – **Temperaturspannung**
(Si: 26mV bei RT)

Fassen wir Drift und Diffusion zusammen erhalten wir im eindimensionalen Fall (x-Richtung):

$$J_n = q \left(\mu_n n E_x + D_n \frac{dn}{dx} \right) = q \mu_n \left(n E_x + U_T \frac{dn}{dx} \right)$$

$$J_p = q \left(\mu_p p E_x - D_p \frac{dp}{dx} \right) = q \mu_p \left(p E_x - U_T \frac{dp}{dx} \right)$$

Der Gesamtstrom hängt linear ab von:

- der Beweglichkeit der Ladungsträger
- der Feldstärke (angelegten Spannung)
- dem Gradienten der Ladungsträgerkonzentration
- der Temperatur

$$\mu_{p,n} = \frac{q \tau_{p,n}}{2 m_{p,n}^*}$$

Diffusion und Drift (Beispiel Elektronen)

- **Nettostrom gleich Null**

Driftstrom und Diffusionsstrom kompensieren sich

$$J = q \left(\mu n(x) E(x) + D \frac{dn(x)}{dx} \right) = 0 \quad \boxed{\mu n(x) E(x) = -D \frac{dn(x)}{dx}}$$

- **weitere bekannte Beziehungen**

$$n(x) = n_i \exp\left(\frac{qV(x)}{kT}\right) \quad \frac{dn(x)}{dx} = n_i \left(\frac{q}{kT}\right) \left(\frac{dV(x)}{dx}\right) \exp\left(\frac{qV(x)}{kT}\right)$$

$$\boxed{\frac{dn(x)}{dx} = n(x) \cdot \left(\frac{q}{kT}\right) \cdot \frac{dV(x)}{dx}}$$

$$\boxed{E(x) = -\frac{dV(x)}{dx}}$$

Diffusion und Drift (Beispiel Elektronen)

- Nettostrom gleich Null

Driftstrom und Diffusionsstrom kompensieren sich

$$\mu n(x)E(x) = -D \frac{dn(x)}{dx}$$

- bei Berücksichtigung von

$$\frac{dn(x)}{dx} = n(x) \cdot \left(\frac{q}{kT} \right) \cdot \frac{dV(x)}{dx} \quad E(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

- ergibt sich

$$D = \frac{\mu \cdot kT}{q}$$

→ die Einstein-Beziehung:

$$\boxed{\frac{D}{\mu} = \frac{kT}{q} = U_T}$$

Wichtige Begriffe

- **Verteilungsfunktion**
 - Fermiverteilung
 - Definition der Fermi-Energie
 - Lage des Fermi-Niveaus (intrinsisch vs. dotiert)
 - Effektive Zustandsdichten
- **Ladungsträger im Halbleiter**
 - Massenwirkungsgesetz
 - Neutralitätsbedingung
 - Intrinsische Ladungsträgerkonzentration
 - Bezeichnung von dotierten Halbleitern
 - Majoritäten und Minoritäten
- **Ladungsträgerbewegung**
 - Driftstrom, Sättigung usw.
 - Diffusionsstrom
 - Temperaturspannung
- **Leitfähigkeit von Halbleitern**
 - p- und n-Typ, Temperaturabhängigkeit usw.
 - Definitionen von Dotierniveaus