1 极限

(i)全极限

(ii)路径极限

(iii)方向极限

(iv)累次极限

若$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$存在, $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$存在，则：

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

重要推论：

(I)若$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$存在，则：三者相等

(II)若$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$存在且不等，则：全极限不存在

重要反例：

(i)方向极限存在但全极限不存在

(ii)方向极限存在且皆相等但全极限不存在

(iii)累次极限存在但全极限不存在

2 连续性

(i)定义：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

(ii)闭域上的性质：

(i)最值性

(ii)介值性

(iii)康托定理

3 可导、可微

(i)可导定义：偏导数存在

(ii)可微定义：$\exists \boldsymbol{A} st:\forall$方向$\boldsymbol{\Delta x}, f(\boldsymbol{x_0+\Delta x}) = f(\boldsymbol{x_0}) + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\Delta x} + o(|\boldsymbol{\Delta x}|)$

(iii)可微说明：

(I)可微必可导，且：$\boldsymbol{A} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

(II)对于二元函数，从定义上证明可微：

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x\Delta x + f_y\Delta y + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$$

(iv)连续可微：

定义:偏导数全连续

性质:连续可微必可微

(v)方向导数：

定义:$\boldsymbol{h}$为单位方向向量，$f(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x_0}) + f_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x_0})t + o(t)$

性质：

(I)若f可微，则：$f_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{h}$

(II)若f方向导数皆存在，但是存在多个最大值（正大于负），则函数不可微

(vi)复合求导

记$\boldsymbol{F=f\circ g}$,则：$\boldsymbol{\nabla F} = \boldsymbol{\nabla f\cdot\nabla g}$

(vii)重要反例：

(i)连续但不可导

(ii)可导但不连续

(iii)可导但不可微

(iv)可微但不连续可微

(v)方向导数存在但不可微

(vi)方向导数存在且都相等但是不可微

4 高阶导数与泰勒展开

(i)高阶偏导交换次序条件：任意该阶偏导数连续

(ii)泰勒展开：

$$f(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x_0})+\sum_1^n\frac{1}{k!}(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\nabla})^kf(\boldsymbol{x_0})+o(|\boldsymbol{h}|^n)$$

$$f(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x_0})+\sum_1^n\frac{1}{k!}(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\nabla})^kf(\boldsymbol{x_0})+\frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\nabla})^kf(\boldsymbol{x_0}+\xi\boldsymbol{h})$$

注：拉格朗日余项一定要在凸域的前提下

重要推论：闭域上的可导函数，若满足$f_x,f_y\equiv 0$则：$f(x,y)\equiv Const$

(iii)泰勒展开的二元一阶形式：

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+f_x\Delta x+f_y\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$$

(iii)泰勒展开的二元二阶形式（黑塞阵)：

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+f_x\Delta x+f_y\Delta y+(\Delta x,\Delta y)\begin{pmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{yx}&f_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\\Delta y\end{pmatrix}+o()$$

记$H=\begin{pmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{yx}&f_{yy}\end{pmatrix}$

讨论：

$(I)H$正定，则极值点为极小值，要求：

$$f_{xx}>0,f_{xx}f_{yy}-f_{xy}f_{yx}=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$$

$(II)H$负定，则极值点为极大值，要求：

$$f_{xx}<0,f_{xx}f_{yy}-f_{xy}f_{yx}=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$$

$(III)H$半正定，半负定，不定无法判断是极大值还是极小值或者是拐点

(iv)多元函数极值

详见拉格朗日乘数法

5 隐函数唯一存在定理

(i)对函数$F(\boldsymbol{x},y)$在$(\boldsymbol{x_0},y_0)$若:

$(I)F(\boldsymbol{x_0},y_0)=0$

$(II)F,F_y$全连续

$(III)F_y(\boldsymbol{x_0},y_0)\neq 0$

则：$\exists$唯一$f(\boldsymbol{x})=y$.且：$\dfrac{\partial f}{\partial x_k}=-\dfrac{F_{x_k}}{F_y}$

(ii)对函数$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\boldsymbol{x}\in D_1\subset R^m,\boldsymbol{u}\in D_2\subset R^n,F:P\subset R^{m+n}\to Q\subset R^n$在$(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{u_0})$若:

$(I)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{u_0})=0$

$(II)\boldsymbol{F}$连续可微

$(III)\left|\dfrac{\partial\left(F_1\cdots F_n\right)}{\partial\left(u_1\cdots u_n\right)}\right|\neq 0$

则：$\exists$唯一$\boldsymbol{u(x)}=\boldsymbol{u}$.且：$\dfrac{\partial\left(u_1\cdots u_n\right)}{\partial\left(x_1\cdots x_m\right)}=-\left|\dfrac{\partial\left(F_1\cdots F_n\right)}{\partial\left(u_1\cdots u_n\right)}\right|^{-1}\dfrac{\partial\left(F_1\cdots F_n\right)}{\partial\left(x_1\cdots x_m\right)}$

(iii)推论：反函数存在定理（条件略）

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=E$$

6 条件极值——拉格朗日乘数法

(i)考察函数$F(x_1,\cdots,x_n)$,条件：$\varphi_1(\boldsymbol{x}),\cdots\varphi_m(\boldsymbol{x})=0(m<n)$

(ii)命$L(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=F(\boldsymbol{x})+\sum\limits_1^m\lambda_i\varphi_i(\boldsymbol{x})$

(iii)解$\dfrac{\partial}{\partial x_i}L=0(i=1\cdots n),\dfrac{\partial}{\partial\lambda_j}L=0(j=1\cdots m)$