1、证明：显然 $f(x,y)=xy$ 在有界闭区域 $D$ 上连续，所以 $\iint_D xy\,d\sigma$ 存在。

直线网 $x=\frac{i}{n}$，$y=\frac{j}{n}$ $(i,j=1,2,\cdots,n-1)$。

将 $D$ 分割为 $n^2$ 个小正方形区域，面积均为 $\frac{1}{n^2}$。

小正方形 $\Delta\sigma_{ij}=[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]\times[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}]$，取 $(\frac{i}{n},\frac{j}{n})$ 为计算该区域的 $(x_i,y_j)$

$\because$ 对于上述分割，可得其积分和为

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i,y_j)\Delta\sigma_{ij}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{ij}{n^4}=\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i\cdot\sum_{j=1}^{n}j=\frac{(1+n)^2}{4n^2}$$

$$\therefore \iint_D xy\,d\sigma=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i,y_j)\Delta\sigma_{ij}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)^2}{4n^2}=\frac{1}{4}$$

2、证明：不妨假设 $f(x,y)$ 在 $D$ 上无界，

即将 $D$ 任意分割为 $n$ 块区域 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$，
其面积为

一定存在 $\sigma_i$ 使 $f(x,y)$ 在 $\sigma_i$ 上无界，即对 $\forall M>0$，$\exists(x_i,y_i)\in\sigma_i$ 使

$$|f(x_i,y_i)|>\frac{M+\left|\sum_{j=1,j\neq i} f(x_j,y_j)\cdot\Delta\sigma_j\right|}{\Delta\sigma_i}$$

$$\therefore\left|\sum_{j=1}^{n} f(x_j,y_j)\Delta\sigma_j\right|=\left|f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} f(x_j,y_j)\Delta\sigma_j\right|$$

$$\geq\left|f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i\right|-\left|\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} f(x_j,y_j)\Delta\sigma_j\right|$$

$$>M$$

即无论怎样分割 $D$，总能使积分和大于任意的正数 $M$，这与 $f$ 在 $D$ 上可积矛盾，故假设错误，$f$ 在 $D$ 上有界

4、证明：由题意，$\exists (x_0,y_0)\in D$ 且 $f(x_0,y_0)>0$.

$\because$ $f$在$D$上连续，即$f$在$(x_0,y_0)$连续，$\therefore \exists \delta>0$，对

$\forall (x,y)\in U((x_0,y_0);\delta)\subset D$，有 $f(x,y)>0$

$\not D_1$

$f$在$D$上可积，故 $f$在$D_1$上也可积，

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,d\sigma \geq \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,d\sigma > 0$$

6、证明：对$D$作任意分割$T$：$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\cdots,\sigma_n$，对任意小区域都存在有理数、无理数。

$$\overline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\sigma_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i=S_D,$$

$$\underline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\sigma_i=0$$

故 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\overline{S}(T)\neq\lim\limits_{\|T\|\to 0}\underline{S}(T)$，$f$在$D$上不可积

3. 证明 $f(x,y)$ 在 D 上 ...

1、(1) D 分别表示为 X型区域 $\{(x,y)\mid a\le y\le x, a\le x\le b\}$.

Y型区域 $\{(x,y)\mid y\le x\le b, a\le y\le b\}$,

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)dx.$$

(4) D 表示为 X型区域 $\{(x,y)\mid -1-x\le y\le 1+x, -1\le x\le 0\}$

Y型区域 $\{(x,y)\mid 1-y\le x\le \sqrt{1-y^2}, 0\le y\le 1\}$.

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_{-1}^0 dx\int_{-1-x}^{1+x} f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_{x-1}^{1-x} f(x,y)dy.$$

$$=\int_{-1}^0 dy\int_{-1-y}^{1+y} f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_{y-1}^{1-y} f(x,y)dy.$$

2、(2) 表示为 Y型区域 $\{(x,y)\mid -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}, -1\le y\le 0\}\cup$

$\{(x,y)\mid -\sqrt{1-y}\le x\le\sqrt{1-y}, 0\le y\le 1\}$.

$$原式=\int_{-1}^0 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx.$$

(4) 表示为 y型区域 $D=\{(x,y)\mid \sqrt{y}\le x\le 3-2y, 0\le y\le 1\}$.

$$原式=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx.$$

3(1) $D$可表示为$X$型区域，$D=\{(x,y) \mid -\sqrt{2px}\le y\le \sqrt{2px},\ 0\le x\le \frac{p}{2}\}$.

$$\iint_D xy^2 d\sigma = \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} xy^2 dy = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{4\sqrt{2}}{3} p^{\frac{3}{2}} x^{\frac{5}{2}} dx$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} p^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{p}{2}} x^{\frac{5}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{21} p^5$$

补充：证明：由题意，当$x$取定，$f(x,y)$值就定下来了，

即对$\forall y\in[0,1]$，在$x\in[0,1]$上~~有~~$g(x)$有相同的取值，

只需考虑沿$x$轴方向的可积性.

下证明$y=0$时$y=g(x)=f(x,0)$可积且为0.

由实数的稠密性，任意两实数间有无穷多实数.

对$\forall x_0$为无理数，$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$使当$x_k\in U(x_0;\delta)$时 $k>[\frac{1}{\varepsilon}]+1$

故 $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$

$\therefore g(x)$在~~$x_0$处连续~~无理数处连续。

而对于有理数$x_{k_0}$，只要取$\varepsilon<\frac{1}{k_0}$与$x$为无理数，有$|g(x)-g(x_{k_0})|>\varepsilon$

$g(x)$在有理数处间断，

函数$g(x)$与黎曼函数类似，可进行证明.

$\forall \varepsilon>0$，在$[0,1]$内使$g(x)>\frac{\varepsilon}{2}$的有理数至多有$[\frac{2}{\varepsilon}]+1$，令$K=[\frac{2}{\varepsilon}]+1$，

设有理数为$r_1, r_2, \cdots, r_K$.

还差

对$[0,1]$分割 $T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$. $\|T\|<\frac{\varepsilon}{4k}$.

将$T$中小区间分为包含大于$\frac{\varepsilon}{2}$的有理点的区域

$T'=\{\Delta_1',\Delta_2',\cdots,\Delta_m'\}$(至多有$2k$个点,即 $m\leq 2k$)

与不包含此类有理点的区域

$T''=\{\Delta_1'',\Delta_2'',\cdots,\Delta_{n-m}''\}$

又于$T'$中区域,其振幅 $w_i'<1$,

$$\sum_{i=1}^{m} w_i'\Delta x_i' \leq 1\cdot\sum_{i=1}^{m}\Delta x_i' \leq 1\times 2k\times\|T\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

又于$T''$中区域,其振幅 $w_i''\leq\frac{\varepsilon}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n-m} w_i''\Delta x_i'' \leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{n-m}\Delta x_i''<\frac{\varepsilon}{2}$$

$\therefore$ 又于$T$ $\sum_{i=1}^{n} w_i\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} w_i'\Delta x_i'+\sum_{i=1}^{n-m} w_i''\Delta x_i''<\varepsilon$

故. $g(x)$在$[0,1]$上可积. $f(x,y)$在$[0,1]\times[0,1]$上可积.

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_0^1 dy\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 dy\left(\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i\right)=0$$

取$x_i$全为无理数

即 $f(x,y)$在$D$上可积,且 $\iint_D f(x,y)d\sigma=0$