数分复习

CC98　我记得密码

2020 年 8 月

第一部分　数分二教材

1. 讨论收敛性：分类讨论，绝对收敛和条件收敛，还要说出绝对收敛不成立的原因。
2. 收敛的判定方法：比较原则，乘上一个 x^p，或者 $(x-a)^p$, 狄利克雷判别法，阿贝判别法。
3. 反常积分较为复杂的有首先分开区间，既有瑕积分又有无穷积分，然后分别判断整合
4. 反常积分一般在写的时候写 u.u 趋近于某个值
5. $\lim\limits_{n\to\infty} x^p f(x)$ 判定中有参数，p 可以取某个特定的值，或者是与参数相关的值（一般涉及分类讨论）
6. 级数收敛的柯西准则
7. 当一个级数的一般项 u_n 不收敛于 0 时，由推论可知级数发散
8. 对任意的正数 ϵ, 取 N= 某某，使当 m>M 和任意正整数 p 就有……<ϵ，由定理可知级数收敛
9. 判定级数收敛：比式判别法（极限形式）、根式判别法（极限形式），拉贝判别法（极限形式）。用上极限判断收敛，下极限判断发散（比式判别法）
10. 交错级数收敛：u_n 单调递减趋于零
11. 收敛半径求法：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$　　$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$　　$R = \frac{1}{\rho}$　　也可以用上极限
12. 写和函数时，要写收敛域
13. 求和函数的方法：1. 收敛域　　2. 求积分求导逆运算等
14. 求函数的泰勒展开式：1 函数的 n 阶导的通式　　2.R_n 余项是不是趋近于 0 3. 展开写出来 4. 给出收敛域
15. 求幂级数的展开式，要记住一些常见的展开式再进行推理

16. 傅里叶级数 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx+b_n sinnx)$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosnxdxn=0,1,2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sinnxdxn=1,2$$

17. 傅里叶级数展开式求法：1. 周期延拓，按段光滑，可以展开。2. 求出 a_0,a_n,b_n，然后套公式即可

$$\text{奇函数只有 sinnx 项，偶函数只有 cosnx 项，同时不要忘记了}\frac{a_0}{2}$$

18. 以 2l 为周期的傅里叶级数 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\frac{n\pi x}{l}+b_n sin\frac{n\pi x}{l})$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)cos\frac{n\pi x}{l}dxn=0,1,2$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)sin\frac{n\pi x}{l}dxn=1,2$$

19. 求积函数如果遇到 $\int_{-\pi}sinxcosnxdx$，用积化和差的公式

20. Bessel 不等式：若函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，则

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}(a_n^2+b_n^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

21. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=c$

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\text{经过某些处理}\leq\epsilon$$

此时 x,y 的 σ 有取值范围把定义再说一遍

22. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 极限是否存在，y=kx 或者 y=kx^2, 得到极限值与 k 取值有关，或者不同的逼近极限值不一样，则极限不存在。一般都是证明极限不存在。

23. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\infty$ 取 δ 然后变形处理，大于某 m，而 m 是正无穷，所以极限是无穷

24. **重极限和累次极限的关系**：若重极限和累次极限都存在那么他们必相等

25. 两个累次极限存在且不相等，则重极限必不存在

26. **讨论二元函数的连续性**：换元或者 y=mx 等，趋近于 P_0 时，判断是否与函数值相同，相同则连续。注意可能有分类讨论的情况

27. 考察函数在某点的可微性判断 $o(\rho)$ 是否为较 ρ 的高阶无穷小量，即
$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta z - dz}{\rho} = \frac{\Delta f - f_x \Delta x - f_y \Delta y}{\rho} = 0$$
则可微

28. **可微的充分条件**偏导数在领域存在，且连续，则可微。但是偏导数连续并不是必要条件

29. 二元函数的中值定理 P120

30. **切平面方程** $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

31. **法线的方向数** $(f_x(x_0), f_y(x_0, y_0), -1)$ 过切点的法线方程

32. **求** $1.08^3.96$ **的近似值**用求偏导的方法来求 $f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x \Delta x + f_y \Delta y$

33. 绝对误差和相对误差

34. 实用复合函数求导公式时，必须注意外函数可微这一重要条件

35. **方向导数** f 在点 P_0 沿任意方向 l 方向导数为
$$f_l(P_0) = f_x(P_0)cos\alpha + f_y cos\beta + f_z cos\gamma$$
$\aleph, \beta, \gamma$ 为方向 l 的方向余弦

36. **梯度** $gradf = (f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0))$

37. **二阶混合偏导数与求导顺序有关吗**有关，当两者累次极限相等时，顺序不同而值相等。这要求二阶混合偏导数在 (x_0, y_o) 连续。今后除特别指出外，都假设相应阶数的混合偏导数连续。

38. 二元函数中的中值定理

39. **求二元函数的极值** P_0 是 f 的稳定点，则有 f 在 P_0 取极小值
$$f_{xx}(P_0) > 0, (H_f) > 0$$
f 在 P_0 取极大值
$$f_{xx}(P_0) < 0, (H_f) > 0$$

40. $\frac{dy}{dx} = \frac{-F_x}{F_y}$

41. **隐函数存在唯一性定理**若 F(x,y) 满足下列条件 1.F 在 P_0 为内点的某一区域连续 2. $F(P_0) = 0$ 3.F 在 D 内存在连续的偏导数 $F_y(x, y)$ 4. $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ 则 f(x) 在 x_0 连续。存在隐函数 y=f(x)

42. **隐函数可微性定理……**$f'(x) = \frac{-F_x}{F_y}$ 同时可以得到
$$y" = -\frac{1}{F_y}(F_x x + 2F_{xy}y' + F_{yy}y'^2)$$

43. $F'(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x,y)dy + f(x,d(x))d'(x) - f(x,c(x))c'(x)$

44. 验证函数的 n 阶导数存在，

45. 含参量积分 $\int_c^{\infty} f(x,y)dy$ 在 I 上一致收敛的充要条件是

$$\lim_{A\to\infty} F(A) = 0$$

其中 $F(A) = \sup |\int_A^{\infty} f(x,y)dy|$

46. **证明含参量反常积分一致收敛** 变量替换或者某些方式直接计算出积分结果得到收敛。证明不一致收敛就是

$$\lim_{A\to\infty} F(A) = 0$$

其中 $F(A) = \sup |\int_A^{\infty} f(x,y)dy| \neq 0$

47. 有些空间图形虽然你想象不出来样子，但是可以按照套路去试着积分

48. 格林公式在使用时要注意正负

49. 在格林公式中，令 P=-y，Q=x, 可以得到计算平面区域的面积公式

50. **证明积分与路径无关** $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 这样也可以之后选择一个路径求全微分后的原函数

51. **求四条线相交得到的面积**注意四条线的相关性，然后通过正确的换元，利用雅戈比行列式

52. **二重积分的变量替换**注意要乘上一个雅戈比行列式，极坐标 $rdrd\theta \quad abrdrd\theta$

53. 图像画不出来可能和坐标轴有关，换一个方向看的更清楚，也画的比较好

54. **三重积分的计算**可以先求二重再一重，也可以先一重再二重，根据方便程度

55. **三重积分中的坐标变换**柱面坐标 $rdrd\theta dz$ 球坐标变换 $r^2 sin\varphi drd\varphi d\theta$

56. **曲面的面积公式 旋转曲面的面积公式 含参量的曲面面积公式**

57. **质心坐标公式**

58. 椭圆的面积 椭球体的体积公式

59. 求引力的公式

60. **第一型曲面积分 第二型曲面积分**区别以及注意第二型曲面积分的积分面积的正负以及含参量的公式 $\sqrt{EG-F^2}$ 按照 xyz 的顺序的雅戈比行列式 两类区面积分的联系

61. **Gauss 公式**可以利用求体积 P=x，Q=y，R=z

62. **空集曲线积分与路线无关的条件** $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$ 即上述全都相等

63. 利用空集曲线积分与路线无关的条件，还可以求原函数。注意不知道原函数通过哪个点那么就设为 (x_0, y_0, z_0) ，不要乱搞各个数字带进去

第二部分　数分练习

1. 有 x,y 求极限时，如果算不出来了，可以考虑代入两个值，也许这两个值不一样，那么就可以说明极限不存在了
2. **以 u,v 为新变量变换方程的方法**　首先求新变量的偏导，计算雅戈比行列式。然后 du,dv,dz 表示出来得到 z_x, z_y 与 u,v 的关系然后带入求解
3. 格林公式应用在乱七八糟写不出来的曲线上积分 (或者是一些有点复杂的), 连接搞成闭合的，然后有时候得到的格林公式解答是面积。那么用这个值减去容易算简单的曲线积分，即可算出复杂的曲线积分了
4. **收敛和发散证明的反证法**
5. **构造幂级数求级数的和**
6. 积分上下限一定要搞清楚，不要无中生有，是椭圆，圆，还是双曲抛物面看清清楚，别瞎搞
7. 一般有 x^2, y^2, 一定要记住极坐标换元
8. 拉格朗日方程一定要注意等于 0 的多解性，因为最后有可能要在剩下的几个当中选出最大值或者最小值。同时这种题型，有时候会用到 hessen 阵，判断是最大值还是最小值
9. 求最大值还可以用求导的方式
10. 看起来很显然的东西用反证法