第 8 章　矢量代数与空间解析几何

在科学研究和实际应用中，许多量（例如力、速度和力矩等）皆需要用矢量来表示和计算，本章主要介绍三维欧氏空间 R^3 中的矢量（向量）及其运算，并在此基础上介绍平面、空间直线和一些常见曲面，特别是二次曲面的方程及其特性等内容.

§8.1　矢量概念及其线性运算

一、矢量的概念

定义 8.1.1　设 A，B 为 R^3 中的两个点，以 A 为始点，B 为终点所决定的既有大小（A 到 B 的距离）又有方向（从 A 指向 B 的方向）的几何量称为**矢量**，记为 $\boldsymbol{AB}$.矢量的大小又称为矢量的**模**，记为 $|\boldsymbol{AB}|$.

几何上用带箭头的线段表示矢量，线段的长度代表矢量的模，箭头所指的方向代表矢量的方向. 在记号上，也常用黑体字母 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 等表示矢量，但因黑体字在书写不方便，所以通常用带箭头的字母来表示，如 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 、$\vec{c}$ 等，如图 8.1，并用 $|\vec{a}|$ 表示矢量 $\vec{a}$ 的模.

决定一个矢量需要有两个因素，一是“大小”，即矢量的模，二是方向. 平行移动一矢量不会改变这两个属性，因此，若矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，经过平行移动可以使始点和终点分别重合，也就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 经平行移动后完全重合，则称矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ **相等**，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.这种经平行移动不改变其属性的矢量我们称为自由矢量，以下我们讨论的矢量皆为自由矢量. 如图 8.2

模为 1 的矢量称为**单位矢量**，模为 0 的矢量称为**零矢量**. 零矢量记为 $\boldsymbol{0}$，在不引起混淆的情况下也记为 0. 这里要特别指出，零矢量的方向可看作是任意的.

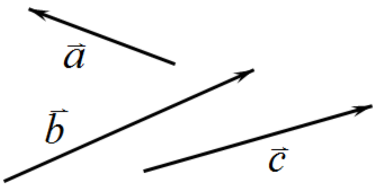


图 8.1

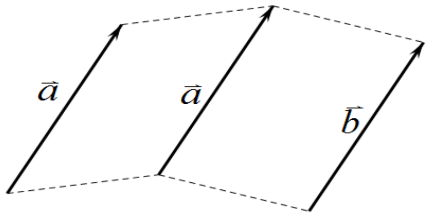


图 8.2

定义 8.1.2 将非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行移动，使之始点重合，它们之间不大于 π 的夹角称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**.当夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$ 时，称矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互**垂直**，记作 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$；当夹角为 0 或 π 时，称矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**（或**共线**），记作 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.如图 8.3

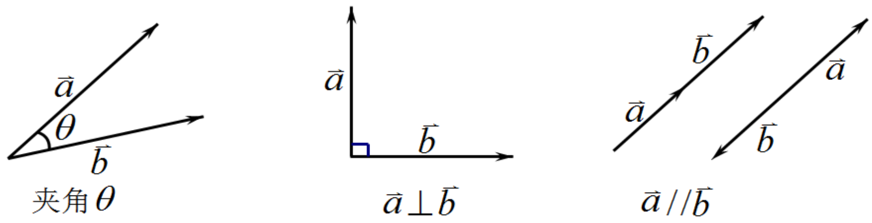


图 8.3

两个以上的矢量将它们的起点（经平行移动）移到同一点，如果这些矢量落在同一个平面内，则称这些矢量是**共面**的.

二、矢量的线性运算

（1）矢量的加减法

定义 8.1.3 将矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行移动使其始点重合，以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边得到一个平行四边形，以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的始点为始点的平行四边形的对角线矢量 $\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和矢量**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 或 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$． 如图 8.4.

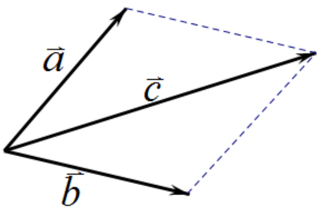


图 8.4

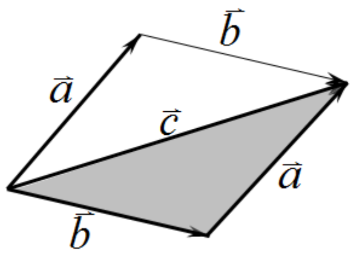


图 8.5

求和矢量的方法称为矢量的**加法**.

因矢量可以平行移动，所以，我们可以这样来得到$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$：平行移动$\boldsymbol{b}$将其始点与矢量$\boldsymbol{a}$的终点重合，以矢量$\boldsymbol{a}$的始点为始点，矢量$\boldsymbol{b}$的终点为终点的矢量$\boldsymbol{c}$即为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和矢量.当然也可以平行移动使$\boldsymbol{a}$的始点与$\boldsymbol{b}$的终点重来得到$\boldsymbol{c}$，如图 8.5 .图 8.4 中求和矢量的方法称为矢量加法的**平行四边形法则**，图 8.5 求和矢量的方法称为矢量加法的**三角形法则**.三角形法对多个矢量求和非常方便，只要将它们依次首尾相接，然后连接第一个矢量的始点和最后一个矢量的终点即为和矢量.如图 8.6.

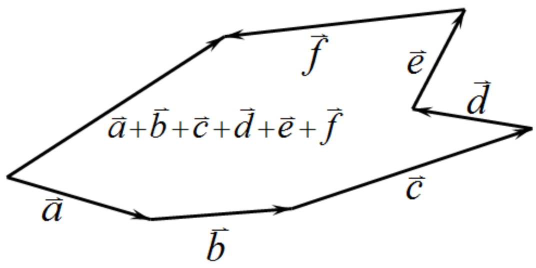


图 8.6

如果两个矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，它们的和矢量是何情形？（请读者自己完成）.

由矢量加法的平行四边形法则和三角形法则容易得到矢量的加法满足：

（ⅰ）$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

（ⅱ）**交换律**：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

（ⅲ）**结合律**：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

其中$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$为任意矢量.

定义 8.1.4 若矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，则称$\boldsymbol{a}$为$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{b}$的**差矢量**，记作$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$；或$\boldsymbol{b}$为$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}$的差矢量，记作$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$.

求差矢量的方法称为矢量的**减法**.

由加法的三角形法则我们不难得到减法$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的三角形法则：平行移动使$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的始点重合，从$\boldsymbol{b}$的终点到$\boldsymbol{a}$的终点的矢量即为$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.如图 8.7

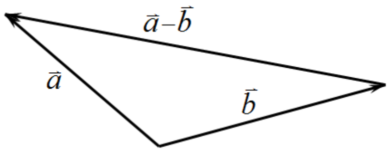


图 8.7

（2）矢量的数乘

定义 8.1.5 由矢量$\boldsymbol{a}$与实数 k 生成的矢量$\boldsymbol{d}$称为$\boldsymbol{a}$的一个**数乘**，记为 $\boldsymbol{d}=k\boldsymbol{a}$，

其中：

（1）$\boldsymbol{d}$ 的模$|\boldsymbol{d}|=|k|\cdot|\boldsymbol{a}|$；

（2）$\boldsymbol{d}$ 的方向为：当$k>0$时，$\boldsymbol{d}$ 与$\boldsymbol{a}$的方向相同，当$k<0$时，$\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{a}$的方向相反.

由定义 8.1.5 易得数乘满足：

（i）$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

（ii）分配律　$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$；　$(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$

（iii）结合律　$(kl)\boldsymbol{a}=k(l\boldsymbol{a})$

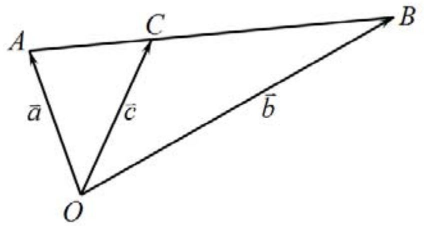
其中$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为任意矢量，k,l为任意实数.

对矢量$\boldsymbol{a}$我们有$(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$，称$-\boldsymbol{a}$为$\boldsymbol{a}$的**相反矢量**，它与$\boldsymbol{a}$模相同，方向相反.且有，对矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

当$\boldsymbol{a}$为非零矢量时，通常用$\boldsymbol{a}^0$表示方向与$\boldsymbol{a}$相同的单位矢量，由数乘运算知

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{a}^0.$$

例 8.1.6 已知矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，如图. $\boldsymbol{c}$的终点 C 在 A 与 B 的连线上，且 $\boldsymbol{AB}=3\boldsymbol{AC}$，求矢量$\boldsymbol{c}$.



解：由矢量的减法和数乘知 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=3(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$，所以，

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

由数乘及其几何特性可得到以下结论.

定理 8.1.7 矢量$\boldsymbol{b}$与非零矢量$\boldsymbol{a}$共线的充分必要条件是存在唯一的实数k, 使得$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$.

证明 充分性：若有实数k使$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$，由定义 8.1.5 知$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$必方向相同或方向相反，所以$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$共线.

必要性：若$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$共线，则$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的方向相同或相反. $\boldsymbol{b}=0$时取$k=0$即可，显然成立. 现设$\boldsymbol{b}\neq 0$.

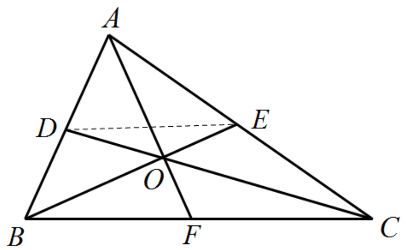
（i）如果$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$方向相同，令$k=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}>0$, 有：$|\boldsymbol{b}|=k|\boldsymbol{a}|=|k\boldsymbol{a}|$，从而有$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$；

（ii）如果$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$方向相反，令$k=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}<0$, $|\boldsymbol{b}|=-k|\boldsymbol{a}|=|k\boldsymbol{a}|$，从而$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$.

最后证明k的唯一性：若存在$k_1\neq k_2$，使$\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}=k_2\boldsymbol{a}$，则$(k_1-k_2)\boldsymbol{a}=0$，而$\boldsymbol{a}\neq 0$，所以$k_1-k_2=0$, 得$k_1=k_2$，与假设矛盾，因此，存在唯一的$k$, 使$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$.

例 8.1.8 证明三角形三条中线相交于一点.

证明 作△*ABC*，*D*、*E*、*F* 分别为三条边的中点，连接 *BE*、*CD* 交于 *O* 点，再连接 *AO* 及 *OF*，现只要证明矢量 ***AO*** 与 ***OF*** 共线.



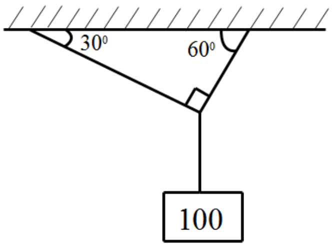
因为△DOE 与△COB 相似，且 $DE=\frac{1}{2}BC$

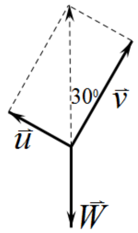
所以 $OD=\frac{1}{2}CO$，即 $\boldsymbol{DO}=\frac{1}{2}\boldsymbol{OC}$．于是：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AO}&=\boldsymbol{AD}+\boldsymbol{DO}=\boldsymbol{DB}+\frac{1}{2}\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{DO}+\boldsymbol{OB}+\frac{1}{2}\boldsymbol{OC}\\&=\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{CB}=2\boldsymbol{OC}+2\boldsymbol{CF}\\&=2(\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{CF})=2\boldsymbol{OF}\end{aligned}$$

由定理 8.1.7 知，$\boldsymbol{AO}$ 与 $\boldsymbol{OF}$ 共线，因此，三条中线 BE、CD 和 AF 相交于一点.

例 8.1.9　一重量为 100 牛顿的物体挂在横梁的绳子上，如图所示，求两条绳子所受的力.





解法 1：设物体重力为 $\boldsymbol{W}$，两条绳子受力为 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 如图. 则有

$$\begin{cases}|\boldsymbol{u}|\cos 30^\circ=|\boldsymbol{v}|\cos 60^\circ\\|\boldsymbol{u}|\sin 30^\circ+|\boldsymbol{v}|\sin 60^\circ=|\boldsymbol{w}|=100\end{cases}$$

解得：$|\boldsymbol{u}|=50$（牛顿），$|\boldsymbol{v}|=50\sqrt{3}$（牛顿）.因此，两条绳子所受的力分别为 50 牛顿和 $50\sqrt{3}$ 牛顿，方向沿绳子向上（如图所示）.

解法 2：设 $\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 如上，由力学知识知必有：$-\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$，如图，所以

$$|\boldsymbol{u}|=|\boldsymbol{w}|\sin 30^\circ=\frac{100}{2}=50\text{（牛顿），}$$

$$|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{w}|\cos 30^\circ = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{（牛顿）},$$

即两条绳子所受的力分别为 50 牛顿和 $50\sqrt{3}$ 牛顿.方向沿绳子向上.

在例 8.1.9 中，其实就是要把力 $-\boldsymbol{w}$ 向 $\boldsymbol{u}^0$ 与 $\boldsymbol{v}^0$ 两个方向上“分解”，显然有：$-\boldsymbol{w} = 50\,\boldsymbol{u}^0 + 50\sqrt{3}\,\boldsymbol{v}^0$

事实上，对两个任意的不共线的矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 只要矢量 $\boldsymbol{c}$ 落在 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所决定的平面内，则必可向 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 两个方向上“分解”，也就是说，必存在常数 k_1, k_2, 使 $\boldsymbol{c} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b}$.我们有如下定理.

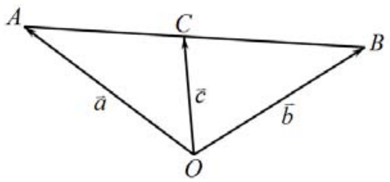
定理 8.1.10 设矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，则矢量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共面的充分必要条件是存在唯一确定的两个实数 k_1, k_2, 使得 $\boldsymbol{c} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b}$.

证明可从矢量加法与数乘的几何性质得出. 同理我们进一步有以下定理.

定理 8.1.11 若矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 不共面，则对任意矢量 $\boldsymbol{u}$，存在唯一确定的实数 k_1, k_2, k_3, 使得 $\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} + k_3\boldsymbol{c}$.

请读者自行完成定理 8.1.10 和定理 8.1.11 的证明.

例 8.1.12 设矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不共线，$\boldsymbol{c} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b}$，$k_1, k_2$ 为常数，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的始点重合，试证矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的终点在一条直线上的充分必要条件是 $k_1 + k_2 = 1$.



证明 如图. 必要性：若 A、B、C 共线，则由定理 8.1.7 知存在唯一的实数 k, 使 $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = k(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})$，将 $\boldsymbol{c} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b}$ 代入得：

$$(kk_1 - k + k_1)\boldsymbol{a} + (kk_2 - 1 + k_2)\boldsymbol{b} = 0$$

因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线，所以有：

$$\begin{cases} kk_1 - k + k_1 = 0 \\ kk_2 - 1 + k_2 = 0 \end{cases} \quad 即：k_1 = \frac{k}{k+1}, \quad k_2 = \frac{1}{k+1}$$

因此，$k_1 + k_2 = 1$

充分性：若 $k_1 + k_2 = 1$.即 $k_2 = 1 - k_1$，则有：

$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - k_1\boldsymbol{a} - (1 - k_1)\boldsymbol{b} = k_1(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$

所以，$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ 共线，因此 A、B、C 三点共线.

§8.2　矢量的乘法

一、矢量的点乘

在力学中，若一物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下从 A 点移到 B 点（如图 8.8），则力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为：

$$W=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{AB}|\cdot\cos\theta$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{AB}$ 的夹角.又例如要求矢量 $\boldsymbol{a}$ 在矢量 $\boldsymbol{b}$ 上的有向投影（长度）：

$$(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}^{\circ}|\cos\theta$$

如图 8.9 所示.

对于以上这种特殊形式的矢量运算，我们给出以下定义.

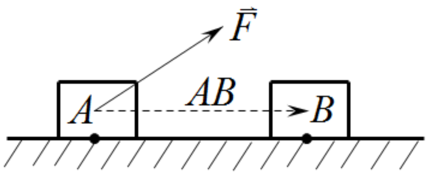


图 8.8

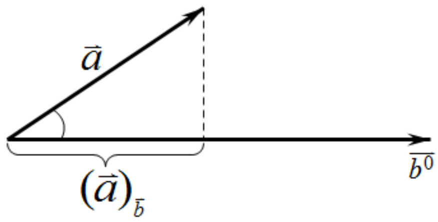


图 8.9

定义 8.2.1　矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的运算 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**点乘**，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$. 其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

矢量的点乘也称为矢量的**数量积**、**内积**或**点积**.

由定义 8.2.1 知，上述力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功可表示为 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{AB}$；矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的有向投影（长度）可表示为 $(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^0$.

特别地，由矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的点乘可得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

矢量的点乘满足以下运算规律：

（i）交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

（ii）结合律　$k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(k\boldsymbol{b})$

（iii）分配律　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意矢量，k 为任意实数.

在矢量点乘的定义中，若 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 反之，若

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，如果$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$均为非零矢量，那么必有$\theta=\dfrac{\pi}{2}$．考虑到零矢量方向的任意性，我们可得以下定理.

定理 8.2.2 矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$相互垂直的充分必要条件是它们的点乘等于零，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

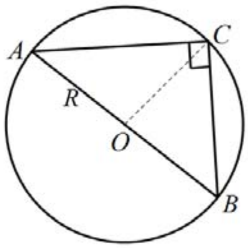
例 8.2.3 证明直径所对的圆周角为直角.

证明 如图所示，设圆半径为 R，要证明$\angle ACB$为直角，只要证明矢量$\boldsymbol{AC}\perp\boldsymbol{BC}$即可．因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AC}\cdot\boldsymbol{BC}&=(\boldsymbol{AO}+\boldsymbol{OC})\cdot(\boldsymbol{BO}+\boldsymbol{OC})\\&=\boldsymbol{AO}\cdot(-\boldsymbol{OB})+\boldsymbol{OC}\cdot(-\boldsymbol{OB})+\boldsymbol{AO}\cdot\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{OC}\cdot\boldsymbol{OC},\end{aligned}$$

又因为$\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{OB}$，且$\boldsymbol{AO}\cdot\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{OC}\cdot\boldsymbol{OC}=R^2$，

所以 $\boldsymbol{AC}\cdot\boldsymbol{BC}=-R^2+R^2=0$，即得 $\boldsymbol{AC}\perp\boldsymbol{BC}$.



二、矢量的叉乘

在图 8.10 中，木棒在力$\boldsymbol{F}$的作用下发生转动，是因为由$\boldsymbol{F}$对木棒产生了一个力矩，其大小为$|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{r}|\sin\theta$．而$\boldsymbol{F}$方向的改变可能引起转动方向相应的变化，当$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{r}$平行时（即$\theta=0$或$\pi$），木棒不会转动，因为此时力矩为 0.

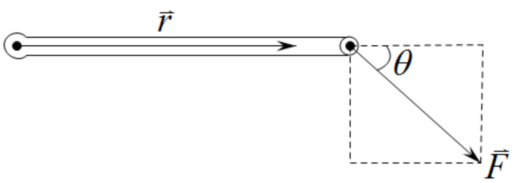


图 8.10

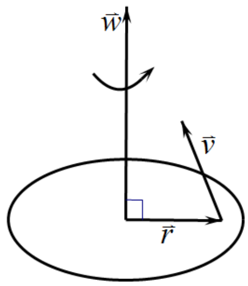


图 8.11

又如图 8.11 所示，角速度为 $\boldsymbol{w}$ 的圆盘，其上某点的速度为 $\boldsymbol{v}$，其大小为 $|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{w}|\cdot|\boldsymbol{r}|\cdot\sin\frac{\pi}{2}$，$\boldsymbol{v}$ 为一个矢量，其方向由右手法则确定，即矢量 $\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$ 符合**右手法则**：伸出右手四指，指向 $\boldsymbol{w}$ 方向，四指自然弯曲向 $\boldsymbol{r}$ 方向，大姆指所指方向即为 $\boldsymbol{v}$ 方向．$\boldsymbol{v}$ 可以看作是矢量 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 经过一种特殊的运算得到，这种运算具有普遍性，有广泛的应用，因此我们引入矢量的叉乘.

定义 8.2.4　矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 按以下方式确定的矢量 $\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**叉乘**，又称**矢量积**（**矢积**）、**外积**或**叉积**，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$：

（ⅰ）$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角；

（ⅱ）$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 符合右手法则，如图 8.12.

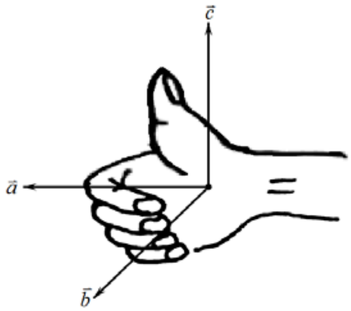


图 8.12

这样以上的力矩可表示为：$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$；速度可表示为：$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}$.

几何上，由定义 8.2.4，矢量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模即为以矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

要构造一个同时垂直两个矢量的矢量，利用叉乘是比较方便的.

叉乘运算满足（其中 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为任意矢量，k 为任意实数）：

（ⅰ）反交换律　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$

（ⅱ）结合律　$k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(k\boldsymbol{b})$

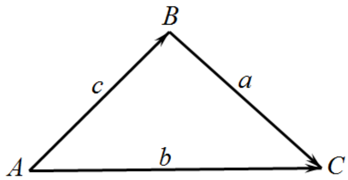
（ⅲ）分配律　$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}.$$

在矢量的叉乘定义中，若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角θ为 0 或π，即$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线（或$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$）时，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$；反之，当$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$时，若$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为非零矢量，则必有$\theta=0$或$\pi$，即$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线（平行）. 注意到零矢量方向的任意性，得以下定理.

定理 8.2.5　矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$平行（共线）的充分必要条件是它们的叉乘为零矢量，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$.

例 8.2.6　证明正弦定理 $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$，其中$a,b,c$为$\triangle ABC$的三条边，$A$，$B$，$C$为对应的三个角（如图）.



证明： 由矢量叉乘的几何意义，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\left|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}\right|=\dfrac{1}{2}bc\sin A$，

同理可得$S=\dfrac{1}{2}\left|\boldsymbol{AC}\times\boldsymbol{CB}\right|=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，$S=\dfrac{1}{2}\left|\boldsymbol{BA}\times\boldsymbol{BC}\right|=\dfrac{1}{2}ac\sin B$，所以，$bc\sin A=ab\sin C=ac\sin B$，于是有：$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$.

三、矢量的混合积

定义 8.2.7　设矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$，称运算 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$的**混合积**（或三重积）.

由矢量叉乘和点乘的定义知

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\alpha=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\alpha$$

其中θ为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角，α为$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的夹角.

混合积的几何意义：

因为$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$为以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形面积，$|\boldsymbol{c}|\cos\alpha$为以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$为相邻三条棱的平行六面体的高（如图 8.13）（若α为钝角，$-|\boldsymbol{c}|\cos\alpha$为其高）. 所以混合积的绝对值$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$在几何上表示以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$为相邻三条棱的平行六面体的体积.

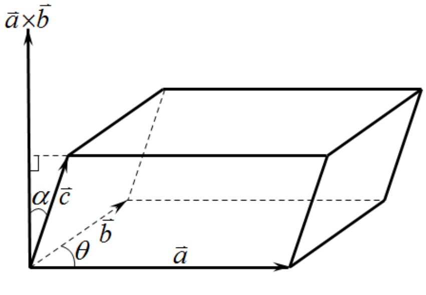


图 8.13

由混合积的这个几何意义及三个矢量的夹角情况不难得出混合积有以下性质，我们称之为**轮换性**，即对任意矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$$

由混合积的几何意义我们还可得到以下定理，并以此可方便地判断三个矢量是否共面.

定理 8.2.8 三个矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$共面的充分必要条件是它们的混合积为零，即 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$.

§8.3　空间直角坐标系中矢量（向量）的表示及运算

前面从几何上定义了矢量及其运算，但这样的矢量表示和运算并不方便，为此，我们引进空间直角坐标系，把矢量和坐标中的点联系起来，使得矢量的表示和运算方便、快捷.

一、空间直角坐标系

过空间一点 O 引三条相互垂直的数轴 ox, oy 和 oz，使其依次成右手法则，这样就建立了一个空间直角坐标系 $Oxyz$, 如图 8.14. 其中 O 称为**坐标原点**，三条数轴称为**坐标轴**（x 轴，y 轴和 z 轴），由任两条坐标轴确定的平面称为**坐标平面**（xoy 平面，yoz 平面和 zox 平面）. 三个坐标平面将空间分成八个部分，称为八个**卦限**，八个卦限编号如图 8.15.

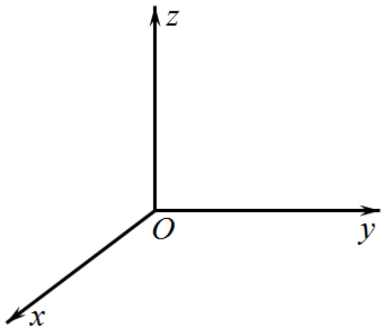


图 8.14

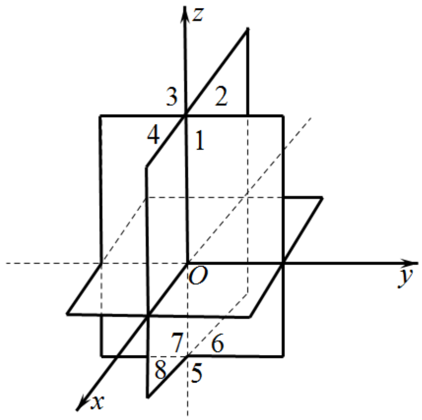


图 8.15

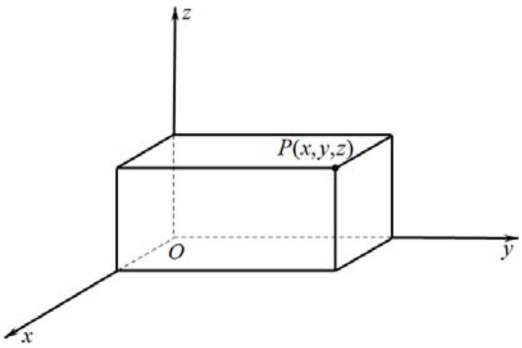


图 8.16

在空间直角坐标系中，我们用一组有序数 (x,y,z) 与空间的一点作对应.

对空间任一点 P，通过 P 分别作平行于三个坐标平面的平面，这三个平面与 x 轴，y 轴，z 轴的交点的读数 x,y,z 组成的有序数组 (x,y,z) 与 P 点相对应．反之，对任一有序数 (x,y,z)，过 x 轴上的 x 点，y 轴上的 y 点及 z 轴上的 z 点分别作平行于 yoz 平面，zox 平面及 xoy 平面的平面，此三个平面相交于一点 P．因此，空间的点 P 与有序数组 (x,y,z) 构成一一对应关系，我们称有序数组 (x,y,z) 为空间的点 P 的**坐标**，并称 x 为 P 的**横坐标**，y 为 P 的**纵坐标**，z 为 P 的**竖坐标**．如图 8.16.

例如点 P_1 的坐标为（-2，1，1），在第二卦限，点 P_2 的坐标为（2，-1，-2），在第七卦限．如图 8.17.

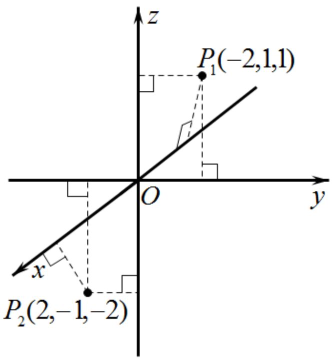


图 8.17

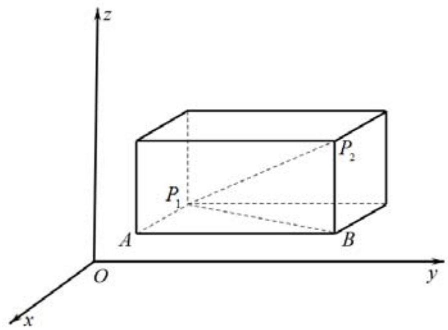


图 8.18

有了坐标表示，我们可以较容易地得到空间两点 P_1,P_2 之间的距离．如图 8.18 所示.

设 P_1 的坐标为 (x_1,y_1,z_1) P_2 的坐标为 (x_2,y_2,z_2)，则有：

$$P_1A=|x_2-x_1|，\quad AB=|y_2-y_1|，\quad BP_2=|z_2-z_1|$$

所以 P_1 与 P_2 之间的距离为

$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

特别，空间任一点(x,y,z)与原点（0,0,0）之间的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ .$$

二、矢量及其运算的坐标表示

由定理 8.1.11 知，空间任一矢量可由三个不共面的矢量表示出来．现在我们引入三个方向分别为三个坐标轴正向的单位矢量，记为$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{i}$的方向与$x$轴正向一致，$\boldsymbol{j}$的方向与$y$轴正向一致，$\boldsymbol{k}$的方向与$z$轴正向一致．$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$三个矢量两两垂直．如图 8.19 所示．因此，空间任一矢量$\boldsymbol{a}$可由$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{k}$表示．

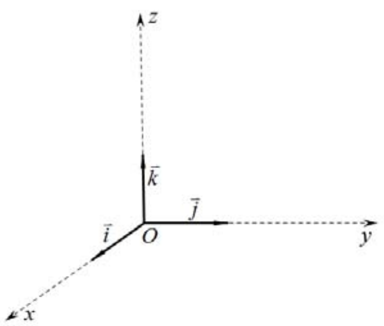


图 8.19

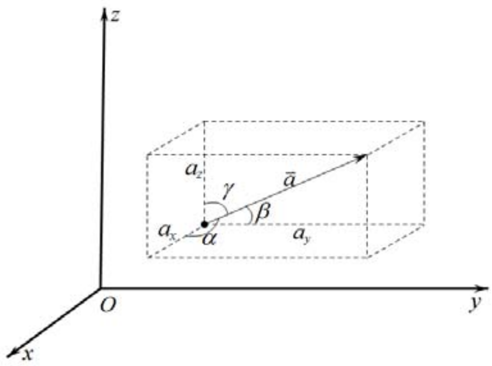


图 8.20

事实上，对任一矢量$\boldsymbol{a}$，假设它在x轴，y轴和z轴上的有向投影分别为a_x,a_y和a_z，由矢量的加法和数乘知

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{8.1}$$

（8.1）式称为矢量$\boldsymbol{a}$的坐标表达式，即矢量$\boldsymbol{a}$沿三个坐标的矢量分解式．如图 8.20．a_x,a_y,a_z分别称为$\boldsymbol{a}$在x轴，y轴，z轴上的**坐标分量**．

当矢量的始点为坐标原点时，则矢量的终点坐标$P(x,y,z)$的三个值x,y,z即为矢量$\boldsymbol{OP}$在三个坐标轴上的分量，即$\boldsymbol{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$．始点在原点的矢量也称为**向量**．因为我们讨论的是自由矢量，因此矢量的表示和运算也就为向量的表示和运算．显然，向量由其终点的坐标所决定，为方便起见，在和坐标点不引起混淆的情况下，通常我们把终点为$P(x,y,z)$的向量直接表示为

$$\boldsymbol{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=(x,y,z).$$

设向量$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$，由图 8.20 易知在直角坐标系中，向量的模与方向可由下列表达式给出：

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

$\boldsymbol{a}$的方向由$\boldsymbol{a}$分别与三个坐标轴正向的夹角α,β和γ来确定，称α、β和γ为向量$\boldsymbol{a}$的**方向角**．显然，当$\boldsymbol{a}\neq 0$时，有

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}.$$

这里，$\cos\alpha,\cos\beta$和$\cos\gamma$称之为向量$\boldsymbol{a}$的**方向余弦**．通过方向余弦的计算可以确定方向角($\alpha,\beta,\gamma\in[0,\pi]$)．由方向余弦的表达式可得关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\cos\alpha\cdot\boldsymbol{i}+\cos\beta\cdot\boldsymbol{j}+\cos\gamma\cdot\boldsymbol{k}$$

有了向量的坐标表达式，在直角坐标系中，向量运算可归结为向量对应的“坐标”运算．

（i）向量的加减法与数乘的坐标运算

设$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则由向量加减法与数乘的

运算规律得：

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x)\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\boldsymbol{k}$$

$$k\boldsymbol{a} = (ka_x)\boldsymbol{i} + (ka_y)\boldsymbol{j} + (ka_z)\boldsymbol{k}.\text{（}k\text{ 为常数）}$$

即两个向量相加（减）即为对应的坐标分量相加（减）. 一个数乘向量即为此数乘到向量的各坐标分量上.

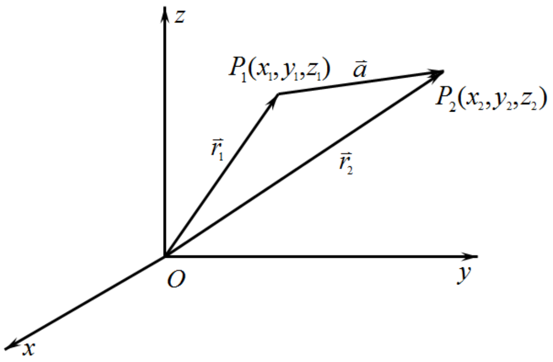


图 8.21

如图 8.21，若某矢量 $\boldsymbol{a}$ 的始点坐标为 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 终点坐标为 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 设始点和终点对应的向量分别为 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$，则 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

在直角坐标系下，定理 8.1.7 可描述为：**两个向量共线（平行）的充分必要条件是它们对应的坐标分量成比例.**

例 8.3.1 设空间三个点 $A(1,0,-1), B(2,3,1)$和$C(0,-1,3)$，在 ΔABC 中 D 为 BC 的中点，求向量 $\boldsymbol{AD}$ 的模与方向余弦.

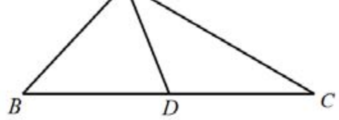


图 8.22

解：如图 8.22， $\boldsymbol{AD} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BD}$，即： $\boldsymbol{AD} = \boldsymbol{AB} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{BC}$

而 $\boldsymbol{AB} = (2-1)\boldsymbol{i} + (3-0)\boldsymbol{j} + (1+1)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{BC}=-2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},\quad \frac{1}{2}\boldsymbol{BC}=-i-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

因此，$\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$|\boldsymbol{AD}|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

$$\cos\alpha=0,\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{10}},\quad \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

（ii）向量点乘的坐标运算

设$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则由点乘的运算规律得：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_xb_x)(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+(b_xa_y+a_xb_y)(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})+(a_zb_x+a_xb_z)(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k})+(a_yb_y)(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})$$

$$+(a_zb_y+a_yb_z)(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})$$

因为$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{k}$是两两垂直的单位向量，所以$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$，于是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \tag{8.2}$$

即两个向量的点乘等于它们对应的坐标分量乘积之和.

由公式（8.2），在直角坐标系中可容易地求出两向量的夹角.

设$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$.（$\theta$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角），有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

例 8.3.2 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，求$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的有向投影及$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta$.

解： $\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的有向投影$(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^0$

而
$$\boldsymbol{b}^0=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{1+16+64}}(\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})=\frac{1}{9}\boldsymbol{i}-\frac{4}{9}\boldsymbol{j}+\frac{8}{9}\boldsymbol{k}$$

所以$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的有向投影

$$(\boldsymbol{a})_b=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}=\frac{7}{3}$$

又 $$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1+4+16}{\sqrt{1+1+4}\cdot 9}=\frac{7\sqrt{6}}{18}.$$

因此 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta=\arccos\dfrac{7\sqrt{6}}{18}$.

例 8.3.3 设力 $\boldsymbol{F}$ 将质点 M 从原点移到 $A(0,1,2)$ 所作功为 11，又从 A 移到 $B(-2,2,5)$ 所作功为 28，已知 $\boldsymbol{F}$ 落在 A，B 与原点三点确定的平面内，试求 $\boldsymbol{F}$.

解：由题设知 $\boldsymbol{F}$ 与向量 $\boldsymbol{OA},\boldsymbol{AB}$ 共面． $\boldsymbol{OA}=(0,1,2)$, $\boldsymbol{AB}=(-2,1,3)$，所以有 $\boldsymbol{F}=k_1\boldsymbol{OA}+k_2\boldsymbol{AB}$，（其中 k_1,k_2 为常数）

又因为 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{OA}=11,\ \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{AB}=28$，有

$$\begin{cases}k_1|\boldsymbol{OA}|^2+k_2\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{AB}=11\\ k_1\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{AB}+k_2|\boldsymbol{AB}|^2=28\end{cases}$$

即：$\begin{cases}5k_1+7k_2=11\\ 7k_1+14k_2=28\end{cases}$ 解得：$k_1=-2,\quad k_2=3$．因此：

$$\boldsymbol{F}=-2\boldsymbol{OA}+3\boldsymbol{AB}=-6\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}.$$

（iii）向量叉乘的坐标运算.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则由叉乘的运算规律得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\ &=a_xb_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_yb_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_zb_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_yb_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+a_zb_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}\\ &\quad+a_xb_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+a_yb_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+a_zb_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$，因此

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k} \tag{8.3}$$

为了记忆方便，我们形式上用三阶行列式来表示向量叉乘的坐标运算表达式

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

例 8.3.4 设 $\boldsymbol{a}=(2,1,-1),\ \ \boldsymbol{b}=(1,0,-2)$，求

（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ （2）$(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

解:（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}+4\boldsymbol{j}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$

（2）$(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$

$=-5\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-5(-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})\ =10\boldsymbol{i}-15\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$.

例 8.3.5 求以 $A(3,0,-2),\ B(0,1,2),\ C(5,-1,0)$ 为顶点的三角形的面积.

解: $\boldsymbol{AB}=(-3,1,4),\quad \boldsymbol{AC}=(2,-1,2)$，所以 ΔABC 的面积

$$S=\frac{1}{2}\left|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}\right|,$$

而 $\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}-2\boldsymbol{k}+6\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{i}\ =6\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，于是所求三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{36+196+1}=\frac{\sqrt{233}}{2}.$$

（iv）向量的混合积的坐标运算

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$， $\boldsymbol{c}=c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k}$，则由叉乘和点乘的坐标运算公式（8.2）式，（8.3）式得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k}\right)\cdot(c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k})$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z$$

$$=\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{8.4}$$

根据行列式“交换两行，行列式的值改变符号”的性质可得混合积的轮换性：

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}\ .$$

例 8.3.6 设五点 $A(0,1,0),\ B(1,0,1),\ C(4,4,6),\ D(2,2,3),\ E(10,14,17)$.

（1） 试求以 A，B，C，D 为顶点的四面体体积 V;

（2）证明 B，C，D，E 四点共面.

（1）**解：** $\boldsymbol{AB}=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{AC}=(4,3,6)$，$\boldsymbol{AD}=(2,1,3)$，所以

$$V=\frac{1}{6}\left|(\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC})\cdot\boldsymbol{AD}\right|$$

而 $$(\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC})\cdot\boldsymbol{AD}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=9-12+4-6+12-6=1$$

因此 $V=\dfrac{1}{6}$.

（2）**证明：**因为 $\boldsymbol{BC}=(3,4,5),\ \boldsymbol{BD}=(1,2,2),\ \boldsymbol{BE}=(9,14,16)$.

于是

$$(\boldsymbol{BC}\times\boldsymbol{BD})\cdot\boldsymbol{BE}=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix}=96+72+70-90-84-64=0$$

因此向量 $\boldsymbol{BC},\boldsymbol{BD},\boldsymbol{BE}$ 共面，即有 B,C,D,E 四点共面.

§8.4　平面与空间直线

在三维空间中，我们不难想象一张无限伸展的平面或一条无限伸展的直线是一个什么样的情形．但在空间直角坐标系中，我们如何来表示它们呢？以下介绍平面与空间直线方程．

我们用代数方程表示平面或直线，那么何为某平面（直线）的方程呢？我们有以下定义：若满足某方程的点皆落在某平面（直线）上，且此平面（直线）上的点皆满足该方程，则称该方程为此**平面（直线）的方程**．

例如若满足 $f(x,y,z)=0$ 的点 (x,y,z) 皆落在平面 π 上，且平面 π 上的点 (x,y,z) 皆满足方程 $f(x,y,z)=0$，则 $f(x,y,z)=0$ 即为平面 π 的方程．

一、平面方程

我们知道，要确定一个平面，可以有多种条件，例如已知以下条件之一即可确定一个平面：

（ i ）平面上一点和一个与平面垂直的矢量；

（ ii ）平面上三个不共线的点；

（iii）平面上一点和两个不平行的且与平面皆平行的矢量．

等等．

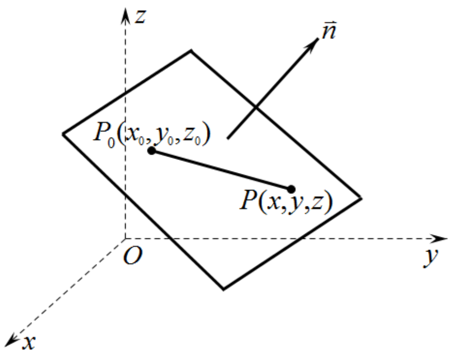


图 8.23

现在，对条件（ i ），来求所确定平面的方程．假设平面 π 通过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 且与非零矢量 $\boldsymbol{n}=(A,\ B,\ C)$ 垂直．（如图 8.23），对 π 上任意

一点 $P(x,y,z)$，有 $\boldsymbol{P_0P}\perp\boldsymbol{n}$，即：

$$\boldsymbol{P_0P}\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

因为 $\boldsymbol{P_0P}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，所以

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{8.5}$$

也就是说，平面 π 上的点 (x,y,z) 皆满足方程（8.5）；反之，若点 (x,y,z) 满足(8.5)式，则有 $(A,B,C)\perp(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，于是 (x,y,z) 必落在平面 π 上，因此，方程（8.5）即为所确定平面的方程，我们称方程（8.5）为平面的**点法式方程**，矢量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 称为平面的**法矢量**（或**法向**）.

将方程（8.5）改写得（其中 $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$）：

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{8.6}$$

为一个关于 x,y,z 的三元一次方程．因此，平面方程是一个三元一次方程．事实上，反之亦然，三元一次方程必表示一个平面：设任一三元一次方程 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，(其中 A_1,B_1,C_1 不全为零)，此方程必有解，不妨设 $A_1\neq 0$，则 $x=-\dfrac{D_1}{A_1}$，$y=0,z=0$ 即为其解，也就是说点 $(-\dfrac{D_1}{A_1},0,0)$ 满足三元一次方程 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，方程可改写为：$A_1(x_1+\dfrac{D_1}{A_1})+B_1(y-0)+C_1(z-0)=0$，此方程即表示一个通过点 $(-\dfrac{D_1}{A_1},0,0)$ 且与矢量 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 垂直的平面.

方程（8.6）称为平面的**一般式方程**．显然，平面的点法式方程和一般式方程是等价的，可以互相转化.

特别，利用平面的点法式或一般式方程皆能容易地得到三个坐标平面的方程为：

xoy 平面：$z=0$

yoz 平面：$x=0$

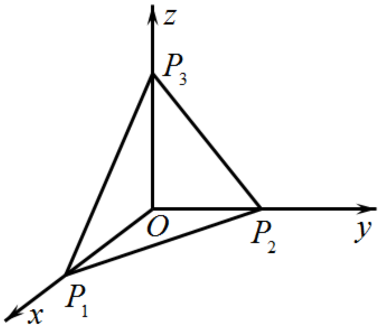
zox 平面：$y=0$

另外，平面一般式方程中各系数满足特殊条件时，平面就有特殊的几何位置和性质，例如若平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中 $D=0$ 时，即可知道此平面必通过原点，反之亦然.（8.6）式方程中若 A，B，C 中恰有一个为零或恰有二个为零，这时平面又分别有什么特性呢，请读者自行分析.

例 8.4.1 求过三点 $P_1(a,0,0),P_2(0,b,0),P_3(0,0,c)$ 的平面方程，其中 a、b、c 皆为非零常数.

解法 1 设所求平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，将 P_1,P_2,P_3 点的坐标代入得

$$\begin{cases} Aa+D=0 \\ Bb+D=0 \\ Cc+D=0 \end{cases} \qquad \text{解得} \qquad A=-\frac{D}{a},\ B=-\frac{D}{b},\ C=-\frac{D}{c}$$



所以所求平面方程为：

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{8.7}$$

因为这里的 a,b,c 其实就是平面在三个坐标轴上的截距，所以，（8.7）式的方程称为平面的**截距式方程**. 注意，只有平面在三个坐标轴的截距都不为零时，才具有形如（8.7）式的截距式方程.

解法 2 利用平面的点法式方程. $\boldsymbol{P_1P_2}=-a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{P_1P_3}=-a\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{k}$

所以所求平面的法矢量可取为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{P_1P_2}\times\boldsymbol{P_1P_3}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=bc\boldsymbol{i}+ac\boldsymbol{j}+ab\boldsymbol{k}$

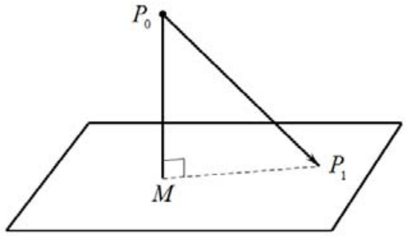
任取P_1, P_2, P_3中的一点，如取$P_1(a,0,0)$得平面方程为

$$bc(x-a)+ac(y-0)+ab(z-0)=0,$$

化简为：

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

例 8.4.2 求点$P_0(x_0, y_0, z_0)$到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离.



解：如图，过P_0作平面的垂线P_0M，交平面于M点，则矢量$\boldsymbol{P_0M}$与平面的法矢量$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$平行，再在平面内任取一点$P_1(x_1, y_1, z_1)$，可知所求距离$d=\left|\boldsymbol{P_0M}\right|$即为矢量$\boldsymbol{P_0P_1}=(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$在单位法矢量$\boldsymbol{n}^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot(A,B,C)$上的投影长度. 所以

$$d=\left|\boldsymbol{P_0P_1}\cdot\boldsymbol{n}^\circ\right|=\frac{\left|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{\left|Ax_1+By_1+Cz_1-Ax_0-By_0-Cz_0\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

因为P_1在平面上，所以$Ax_1+By_1+Cz_1=-D$，于是

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (8.8)$$

（8.8）式即为点到平面的距离公式.

二、直线方程

与平面一样，要确定一条空间直线，也可有多种条件，例如只要已知以下任一条件皆可确定一条直线：

（ⅰ）直线上的一点和一个与直线平行的矢量；

（ⅱ）直线上两个点；

（ⅲ）给定两个通过直线的不同平面（交线）.

等等.

若已知直线 L 上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 和与直线平行的矢量 $\boldsymbol{u}=\left(u_x,u_y,u_z\right)$，如图 8.24．在 L 上任取一点 $P(x,y,z)$.

$$\boldsymbol{P_0P}=\left(x-x_0,y-y_0,z-z_0\right)$$

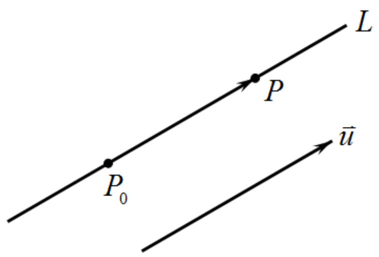


图 8.24

则有：$\boldsymbol{P_0P}\ /\!/\ \boldsymbol{u}$，由两个矢量平行的充分必要条件知：

$$\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z} \tag{8.9}$$

即直线 L 上的点皆满足（8.9）式，反之，满足（8.9）式的点 (x,y,z) 必在直线 L 上．因此，（8.9）式的方程即为所求直线方程．事实上（8.9）式又可改写为 $\left(x,y,z\right)=\left(x_0,y_0,z_0\right)+k\left(u_x,u_y,u_z\right)$，即直线上的任一点可由点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 和方向 $\boldsymbol{u}=\left(u_x,u_y,u_z\right)$ 唯一确定（唯一的 k），因此，（8.9）式称之为直线的**点向式方程**，也称为直线的**对称式方程**.

（8.9）式也可分开写成

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{u_x}=\dfrac{y-y_0}{u_y}\\[2ex] \dfrac{x-x_0}{u_x}=\dfrac{z-z_0}{u_z}\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}\dfrac{x-x_0}{u_x}=\dfrac{y-y_0}{u_y}\\[2ex] \dfrac{y-y_0}{u_y}=\dfrac{z-z_0}{u_z}\end{cases}$$

容易看出，这是两个方程联立，每个方程代表一个平面，因此，直

线可以看成是两个平面的交线．当然，任一条直线看成为两个平面的交线时，这两个平面的选取是不唯一的，且可有无限多种取法．

在（8.9）式中，若u_x,u_y,u_z中有一个为零，譬如$u_x=0$，则方程可写为

$$\begin{cases} x=x_0 \\ \dfrac{y-y_0}{u_y}=\dfrac{z-z_0}{u_z} \end{cases}$$

若u_x,u_y,u_z中有二个为零，例如$u_x=u_y=0$，则直线方程即为：

$$\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$$

从上可知，若已知过直线的两个不同的平面$A_1x+B_1y+C_z+D_1=0$和$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.（此时$\boldsymbol{n}_1=\left(A_1,B_1,C_1\right)$与$\boldsymbol{n}_2=\left(A_2,B_2,C_2\right)$必不平行），则直线方程可表示为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{8.10}$$

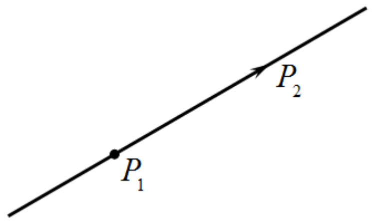
（8.10）式称为直线的**一般式方程**.

若在（8.9）式中引入参数t，令$\dfrac{x-x_0}{u_x}=\dfrac{y-y_0}{u_y}=\dfrac{z-z_0}{u_t}=t$，则

$$\begin{cases} x=x_0+u_xt \\ y=y_0+u_yt \quad , \qquad t\in(-\infty,+\infty) \\ z=z_0+u_zt \end{cases} \tag{8.11}$$

（8.11）式称为直线的**参数式方程**，t为参数.

例 8.4.3　求过$P_1(x_1,y_1,z_1)$和$P_2(x_2,y_2,z_2)$的直线方程.



解：由直线的点向式方程，可取

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\left(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\right)$$

再取 P_1 点，因此得所求直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{8.12}$$

（8.12）式称为直线的**两点式方程**.

例 8.4.4 将直线的一般式方程 $\begin{cases}x+y+z+1=0\\2x-y+z-7=0\end{cases}$ 化为直线的点向式方程.

解: 设直线的方向为 $\boldsymbol{u}$，知 $\boldsymbol{u}$ 必与平面 $x+y+z+1=0$ 与 $2x-y+z-7=0$ 的法向 $\boldsymbol{n}_1=\left(1,1,1\right)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=\left(2,-1,1\right)$ 皆垂直，所以可取：

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\1 & 1 & 1\\2 & -1 & -1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}\text{，}$$

现再取直线上一点：令 $z=0$，代入直线方程得：$\begin{cases}x+y+1=0\\2x-y-7=0\end{cases}$，解得：

$\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$ 于是得直线上一点为 $(2,-3,0)$，因此直线的点向式方程为

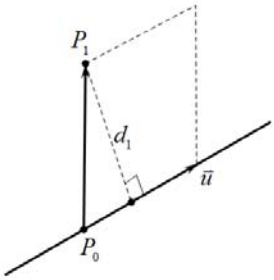
$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-3}.$$

例 8.4.5 求点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 到直线 $\dfrac{x-x_0}{u_x}=\dfrac{y-y_0}{u_y}=\dfrac{z-z_0}{u_z}$ 的距离 d_1.

解：如图，在直线上取一点 $P_0\ (x_0,y_0,z_0)$，则所求距离 d_1 即为由 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1$ 与直线方向 $\boldsymbol{u}=\left(u_x,u_y,u_z\right)$ 所组成的平行四边形的高．设平行四边形面积为 S，则有：

$S=\left|\boldsymbol{u}\right|\cdot d_1$．又有 $S=\left|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\right|$， 所以

$$d_1=\frac{|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{P_0P_1}|}{|\boldsymbol{u}|} \tag{8.13}$$



计算得：

$$d_1=\frac{\sqrt{[u_y(z_1-z_0)-u_z(y_1-y_0)]^2+[u_x(z_1-z_0)-u_z(x_1-x_0)]^2+[u_y(x_1-x_0)-u_x(y_1-y_0)]^2}}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}}.$$

(8.13)式即为点到直线的距离公式.

三、平面束方程

我们知道，通过一条定直线的平面可有无限多个，若已知定直线 L 的方程，如何来表示通过 L 的这无限多个平面呢？

假设直线 L 的方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases},$$

记 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$．我们考察如下方程

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{8.14}$$

其中 λ,μ 为任意实数，且不同时为零.

因为 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 不平行，因此（8.14）式必是一个三元一次方程，即为一个平面方程．又因为满足直线 L 的方程的点必满足（8.14）式，所以，（8.14）式表示的平面过直线 L.

反之，任一通过 L 的平面皆可表示成（8.14）式的形式：

（1）当 $\lambda\neq0,\mu=0$ 时，(8.14)式即为平面 π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$；

（2）当 $\lambda=0,\mu\neq0$ 时，（8.14）式为平面 $\pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$；

（3）对 π_1,π_2 以外的通过直线 L 的平面 π，我们也必可用（8.14）式来表示：设 π 通过直线 L 外一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，则 $P_0\notin\pi_1, P_0\notin\pi_2$，即有

$$t_1=A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1\neq 0,\quad t_2=A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2\neq 0,$$

代入(8.14)式得 $\lambda t_1+\mu t_2=0$．所以，只要取 $\lambda=-\dfrac{t_2}{t_1}\mu$，所得方程

$$-\frac{t_2}{t_1}(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

即为平面 π 的方程（因为过一条直线和直线外一点的平面是唯一确定的）.

因此，（8.14）式表示所有通过直线 L 的平面．我们称之为**通过直线 L 的平面束方程**．如图 8.25．

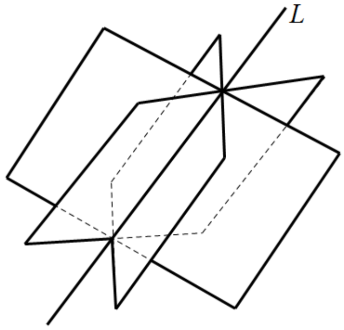


图 8.25

有时，为方便起见，平面束方程（8.14）式可以改写为只有一个参数的方程 $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

或 $$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

但须注意，以上两个平面束方程分别不含平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

在解决有关求平面的方程等问题时，利用平面束方程会带来很大的方便.

例 8.4.6 求过直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-2}$ 且与平面 $x-2y+z-3=0$ 垂直的平面方程.

解法 1：利用平面的点法式方程．所求平面通过点$(1,-1,0)$．已知直线的方向矢量为$\boldsymbol{u}=\left(2,1,-2\right)$，已知平面的法向为$\boldsymbol{n}=\left(1,-2,1\right)$，于是所求平面的法向矢量可取为

$$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}\text{，}$$

因此，所求平面方程为 $-3(x-1)-4(y+1)-5(z-0)=0$，即：

$$3x+4y+5z+1=0\text{．}$$

解法 2：利用平面束方程．将已知直线方程写为

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}\\ \dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-2}\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}x-2y-3=0\\ 2y+z+2=0\end{cases}\text{，从而设所求平面方程为}$$

$\lambda(x-2y-3)+\mu(2y+z+2)=0$，即：$\lambda x+(2\mu-2\lambda)y+\mu z+2\mu-3\lambda=0$，

其法向 $\boldsymbol{n}_1=\left(\lambda,2\mu-2\lambda,\mu\right)$与已知平面法向 $\boldsymbol{n}=\left(1,-2,1\right)$垂直，于是有：

$$\lambda-2(2\mu-2\lambda)+\mu=0\text{，}$$

得：$\lambda=\dfrac{3}{5}\mu$，于是所求平面方程为：$\dfrac{3}{5}\mu x+\dfrac{4}{5}\mu y+\mu z+\dfrac{1}{5}\mu=0$，即：

$$3x+4y+5z+1=0\text{．}$$

四、平面、直线的位置关系

（1）平面与平面

两个平面$\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$与$\pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$的位置关系有平行与相交两种．记 $\boldsymbol{n}_1=\left(A_1,B_1,C_1\right)$，$\boldsymbol{n}_2=\left(A_2,B_2,C_2\right)$，有

（ⅰ）$\pi_1 /\!/ \pi_2$的充分必要条件是$\boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2$，即：$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$．

两个平面重合可看成是两个平面平行的特殊情况，易知，π_1与π_2重

合的充分必要条件是$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$.

（ii）当π_1与π_2相交时，其夹角（二面角）即为$\boldsymbol{n}_1$与$\boldsymbol{n}_2$的夹角θ（当$\theta\le\frac{\pi}{2}$时）或$\pi-\theta$（当$\theta>\frac{\pi}{2}$时）.

特别当$\theta=0$或π时，即为$\pi_1 /\!/ \pi_2$. 当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$\pi_1\perp\pi_2$，因此$\pi_1\perp\pi_2$的充分必要条件是$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

（2）平面与直线

设平面$\pi: Ax+By+Cz+D=0$，直线$L:\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_1}{u_z}$，它们之间的位置关系有平行与相交两种.

（i）直线L与平面π平行的充分必要条件$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{u}$，其中$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，$\boldsymbol{u}=(u_x,u_y,u_z)$，即$Au_x+Bu_y+Cu_z=0$.

直线L落在平面π内可以看成为直线L平行于平面π的特殊情况，显然，直线L落在平面π内的充分必要条件是“$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{u}$且直线$L$与平面$\pi$有一交点”或“直线$L$与平面$\pi$有两个不同的交点”.

（ii）当直线L与平面π相交时（唯一交点），它们之间的交角α是$\frac{\pi}{2}-\theta$（当$\theta<\frac{\pi}{2}$时）或$\theta-\frac{\pi}{2}$（当$\theta>\frac{\pi}{2}$时），其中θ为$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{u}$的夹角，如图 8.26．特别，当$\theta=0$或π时，直线L与平面π垂直．当$\theta\ne\frac{\pi}{2}$时，直线L与平面π有唯一交点.

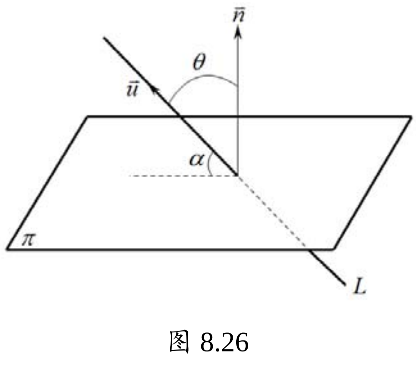


图 8.26

（3）直线与直线

设两条直线方程为：

$$L_1:\frac{x-x_1}{u_x}=\frac{y-y_1}{u_y}=\frac{z-z_1}{u_z},\qquad L_2:\frac{x-x_2}{v_x}=\frac{y-y_2}{v_y}=\frac{z-z_2}{v_z},$$

它们的方向矢量分别为$\boldsymbol{u}=\left(u_x,u_y,u_z\right)$和$\boldsymbol{v}=\left(v_x,v_y,v_z\right)$. 则它们的位置关系有平行、相交和异面三种.

（ⅰ）L_1与L_2平行的充分必要条件是$\boldsymbol{u}\,/\!/\,\boldsymbol{v}$. 两条直线重合可看成是两条直线平行的特殊情况. 显然，L_1与L_2重合的充分必要条件是“$\boldsymbol{u}\,/\!/\,\boldsymbol{v}$且$L_1$与$L_2$有一个交点”或“$L_1$与$L_2$有两个交点”.

当L_1与L_2不平行时，其夹角为θ（当$\theta\le\frac{\pi}{2}$时）或$\pi-\theta$（当$\theta>\frac{\pi}{2}$时），其中θ为$\boldsymbol{u}$与$\boldsymbol{v}$的夹角. 特别当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$L_1\perp L_2$.

（ⅱ）L_1与L_2有唯一交点的充分必要条件是存在唯一确定的实数t_1和t_2，使

$$\begin{cases}x_1+t_1u_x=x_2+t_2v_x\\ y_1+t_1u_y=y_2+t_2v_y\\ z_1+t_1u_z=z_2+t_2v_z\end{cases}$$

或以下方程组（其实可写成四个方程）

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{u_x}=\dfrac{y-y_1}{u_y}=\dfrac{z-z_1}{u_z}\\[2ex] \dfrac{x-x_2}{V_x}=\dfrac{y-y_2}{V_y}=\dfrac{z-z_2}{V_z}\end{cases}$$

有唯一解(x_0,y_0,z_0)，此解即为交点.

（ⅲ）若L_1与L_2既不平行又不相交（无交点），则我们称两条直线为异面直线. 如图（8.27）.

记$P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2)$，那么$\boldsymbol{P_1P_2}=\left(x_2-x_2,y_2-y_1,z_2-z_1\right)$，根据混合积的几何意义，易知$L_1$与$L_2$异面的充分必要条件为

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{P_1P_2}\ne0.$$

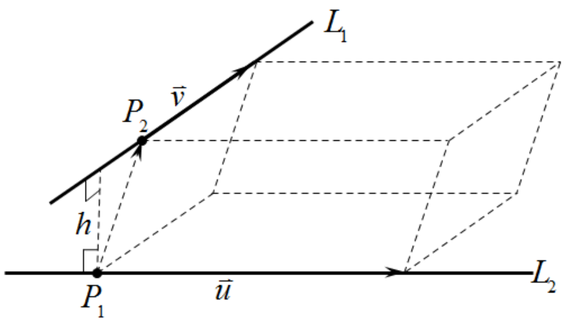


图 8.27

设 M，N 为 L_1 与 L_2 上的点，若 M，N 所在的直线和 L_1 与 L_2 皆垂直，则称线段 MN 的长为异面直线 L_1 与 L_2 的距离.

过 L_1 作平行于 L_2 的平面，则从 L_2 上任一点到此平面的距离即为异面直线 L_1 与 L_2 的距离．如图 8.27 中的 h 即为 L_1 与 L_2 的距离，并有：

$$h=\frac{\left|(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{P_1P_2}\right|}{\left|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\right|}$$

请读者自己推导此公式.

§8.5　曲面与空间曲线

一、曲面方程

我们知道，在三维空间中，与某定点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的距离为常数 R 的所有点的轨迹（图象）是一个球心为 P_0，半径为 R 的球面，如图 8.28，且由距离公式知此球面的方程可写为：

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2,$$

且任意满足此方程的点 $P(x,y,z)$ 必在球面上，所以 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ 即为球心为 P_0，半径为 R 的球面方程.

一般，在空间直角坐标系中，一张曲面可由方程 $F(x,y,z)=0$ 来表示．例如平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 可以说是曲面最简单的情形.

曲面方程还可以用含有两个独立参变量的参数方程

$$\begin{cases} x=x(u.v) \\ y=y(u.v) \\ z=z(u.v) \end{cases} \qquad \text{（其中 } u,v \text{ 为参数）}$$

来表示．例如球面方程 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 可用参数方程

$$\begin{cases} x=R\sin\varphi\cos\theta \\ y=R\sin\varphi\sin\theta \\ z=R\cos\varphi \end{cases} \qquad (0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta<2\pi)$$

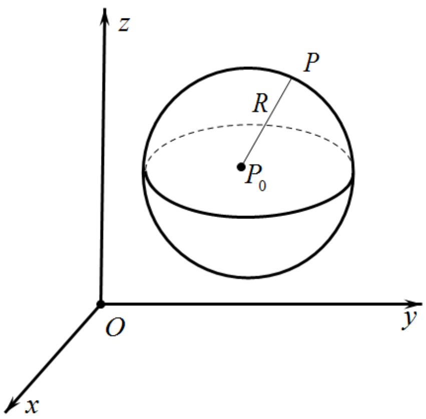


图 8.28

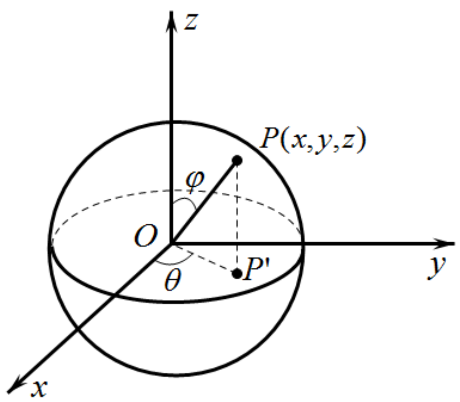


图 8.29

其中φ,θ为参数，φ为z轴正向到$\boldsymbol{OP}$的夹角，θ为x轴正向到$\boldsymbol{OP'}$的夹角．P'为P在xoy平面上的投影点．如图 8.29．

同理，球面方程$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$可用参数方程

$$\begin{cases} x = x_0 + R\sin\varphi\cos\theta \\ y = y_0 + R\sin\varphi\sin\theta \\ z = z_0 + R\cos\varphi \end{cases} \qquad (\varphi,\theta\text{为参数})$$

来表示.

二、曲线方程

直线可以表示成两个平面的交线（直线的一般式方程），一般，空间曲线可以看成两张曲面的交线，因此，空间曲线的方程可写为：

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} . \tag{8.15}$$

例如方程

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=1 \end{cases} \tag{8.16}$$

表示一个球面与一个平面的交线，为一个圆，如图 8.30.

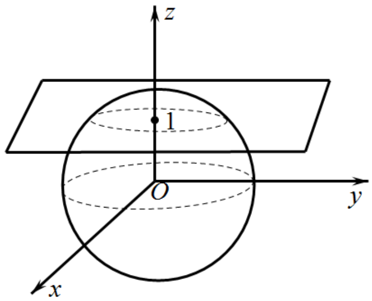


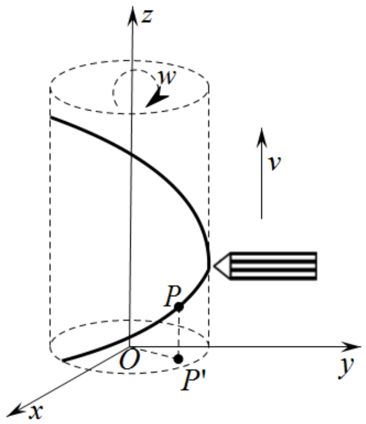
图 8.30

当然，与直线的一般式方程一样，空间曲线的方程（8.15）式也不是唯一的．例如（8.16）式的圆也可用方程$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2+(z-1)^2=3 \end{cases}$来表示，即用两个球面的交线来表示等等.

和曲面一样，空间曲线的方程也可用参数方程来表示，但此时参数的个数只有一个．一般，空间曲线的参数方程为：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad （t \text{为参数}）.$$

例 8.5.1 有一无限长的圆木，横截面半径为a，现将其绕中心轴以角速度w旋转，今有一铅笔从侧面底部沿圆木以速度v匀速向上运动，求铅笔在圆木上画出的曲线的方程.



解：如图所示，设圆木底部落在xoy平面，z轴为其中心轴．对所画曲线上任一点$P(x,y,z)$，P在xoy平面的投影点为P'， x轴正向和$\boldsymbol{OP'}$的夹角为θ，则 $\theta = wt$，（t为时间），由题设知

$$x = |\boldsymbol{OP'}|\cos\theta,\ \ y = |\boldsymbol{OP'}|\sin\theta,\ \ z = vt \text{，}$$

即所求曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos wt \\ y = a\sin wt \quad (0 \le t < +\infty) \\ z = vt \end{cases} \text{，}$$

此曲线称为**圆柱螺线**.

求某曲面或空间曲线的方程和给出曲面或空间曲线的方程来画出其图形都不是一件简单的事，本节仅介绍一些特殊的、形式简单的曲面与空间曲线.

三、旋转曲面、柱面和锥面

定义 8.5.2 某曲线绕直线（旋转轴）旋转一周而生成的曲面称为**旋转曲面**.

为方便起见，我们先取曲线为坐标平面上的曲线，旋转轴为坐标轴来写出旋转曲面的方程.

假设曲线$\Gamma:\begin{cases} f(y.z)=0 \\ x=0 \end{cases}$，此曲线落在 yoz 平面上，它绕 y 轴旋转得到的旋转曲面方程可如下求得：对曲面上任意一点 $P(x,y,z)$，此点必为Γ上某点 $P_0(0,y_0,z_0)$ 旋转所得，如图 8.31，所以 $MP_0=MP$，

即 $\begin{cases} y=y_0 \\ x^2+z^2=z_0^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y_0=y \\ z_0=\pm\sqrt{x^2+z^2} \end{cases}$

将其代入 $f(y,z)=0$ 中得所求曲面方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

同理，可以得到曲线$\begin{cases} f(y.z)=0 \\ x=0 \end{cases}$，绕 z 轴旋转所得的旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

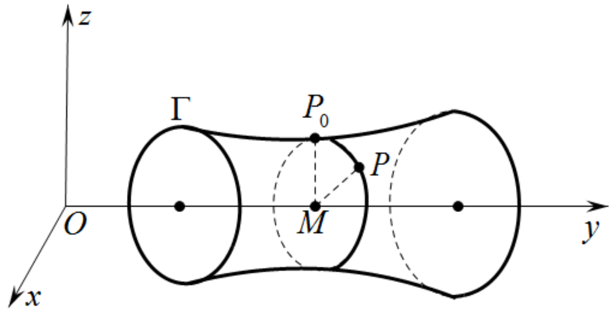


图 8.31

例如曲线$\begin{cases} z=2y^2 \\ x=0 \end{cases}$绕 z 轴旋转所得的旋转曲面方程为 $z=2(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2$，即：$z=2(x^2+y^2)$.

读者可以自己分别求得曲线$\begin{cases} g(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$绕 x 轴或 z 轴、曲线$\begin{cases} h(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$绕 x 轴或 y 轴旋转所生成的旋转曲面方程.

例 8.5.3 求过 $P_1(1,2,0)$ 和 $P_2(0,1,2)$ 的直线绕 z 轴旋转生成的旋转曲面方程.

解：如图 8.32，直线方程为：$\begin{cases} x=1-t \\ y=2-t \\ z=2t \end{cases}$，曲面上任一点 $M(x,y,z)$ 为直线上某点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 旋转所得，所以有 $\begin{cases} z_0=z \\ x^2+y^2=x_0^2+y_0^2 \end{cases}$，因为有 t_0 使 $\begin{cases} x_0=1-t_0 \\ y_0=2-t_0 \\ z_0=2t_0 \end{cases}$，所以 $t_0=\dfrac{z_0}{2}=\dfrac{z}{2}$，$x_0=1-\dfrac{z}{2}$，$y_0=2-\dfrac{z}{2}$，代入 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$ 得所求曲面方程为

$$x^2+y^2=(1-\frac{z}{2})^2+(2-\frac{z}{2})^2.$$

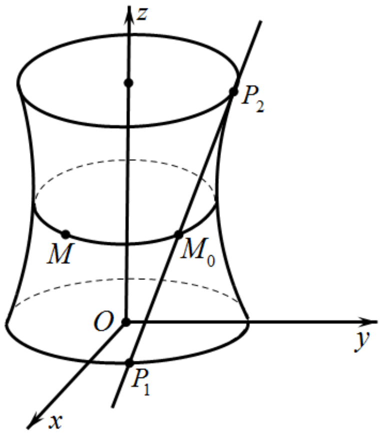


图 8.32

特别，我们容易求得直线 $\begin{cases} y=a \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得的曲面方程为 $x^2+y^2=a^2$. 这是一个圆柱. 注意不要与二维平面上圆的方程相混淆. 如图 8.33，它是旋转曲面的特例，也是柱面的一个特例. 以下我们就给出柱面更一般的定义.

定义 8.5.4 由一条直线沿一条曲线平行移动所生成的曲面称为**柱面**，并称此直线为柱面的**母线**，所沿曲线为柱面的**准线**. 如图 8.34.

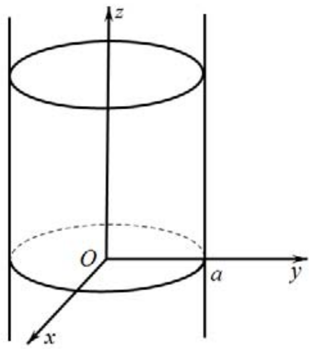


图 8.33

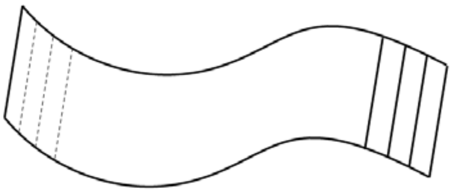
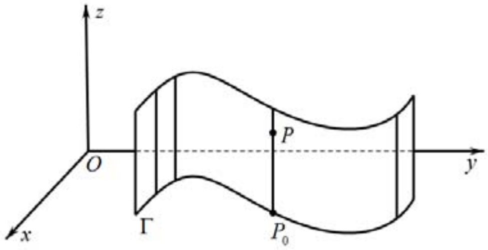


图 8.34

由定义 8.5.4，圆柱面方程 $x^2+y^2=a^2$ 可以看成是直线 $\begin{cases} y=a \\ x=0 \end{cases}$ 沿曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=0 \end{cases}$ 平行移动所得的柱面.

显然，平面也是柱面的特殊情况.

例 8.5.5 求平行于矢量 $\boldsymbol{u}=(0,0,1)$ 的直线沿曲线 $\Gamma:\begin{cases} f(x.y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 平行移动所得的柱面方程.

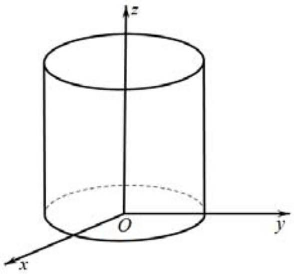


解: 对曲面上任意一点 $P(x,y,z)$，必有 Γ 上的点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，使 $\boldsymbol{P_0P} \parallel \boldsymbol{u}$，而 $\boldsymbol{P_0P}=(x-x_0,y-y_0,z)$，因此，由矢量平行条件有： $x=x_0$， $y=y_0$，代入 Γ 的方程得柱面方程为：

$$f(x,y)=0.$$

事实上，任一不含变量 z 的方程 $f(x,y)=0$ 必为母线平行于 z 轴的柱面. 因为它可以看成是平行于矢量 $(0,0,1)$ 沿曲线 $\begin{cases} f(x.y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 平行移动所得的柱面方程.

例如，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$、$y=x^2$ 分别为母线平行于 z 轴的椭圆柱面和抛物柱面，如图 8.35.



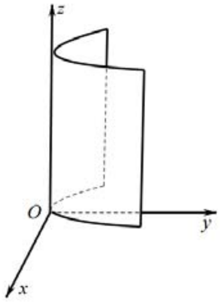


图 8.35

同理，$g(x,z)=0$ 与 $h(y,z)=0$ 分别表示母线平行于 y 轴与 x 轴的柱面.

对空间曲线 Γ: $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$，若将 z 消去得方程 $F(x,y)=0$，此为母线平行于 z 轴的柱面，且此柱面必通过 Γ．我们称柱面

$$F(x,y)=0$$

为曲线 Γ 投影到 xoy 平面的**投影柱面**，而称曲线 $\Gamma_1\begin{cases} F(x.y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 为 Γ 在 xoy 平面上的**投影曲线**．如图 8.36 所示.

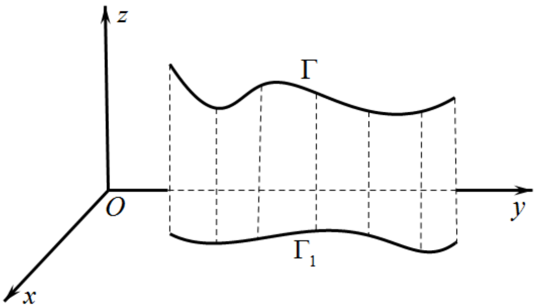


图 8.36

同理，在 Γ 的两个方程中消去 x 或 y 所得的方程 $G(y,z)=0$ 或 $H(x,z)=0$ 称为空间曲线 Γ 投影到 yoz 平面或 zox 平面上的投影柱面．而曲线 $\Gamma_2:\begin{cases} G(y.z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 和 $\Gamma_3:\begin{cases} H(x.z)=0 \\ y=0 \end{cases}$ 分别为 Γ 在 yoz 平面和 zox 平面的投影曲线.

例如 $\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ x^2+y^2+(z-1)^2=6 \end{cases}$ 投影到 xoy 平面上的投影柱面为 $x^2+y^2=5$，Γ 在 xoy 平面上的投影曲线为 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ z=0 \end{cases}$.

例 8.5.6 求以曲线$\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$为准线，母线平行于平面$x+2y+3z=6$的法矢量的柱面方程，并写出此柱面方程与已知平面的交线C的方程.（所求柱面也称为曲线Γ投影到平面$x+2y+3z=6$的投影柱面方程，曲线C即为Γ在已知平面上的投影曲线.）

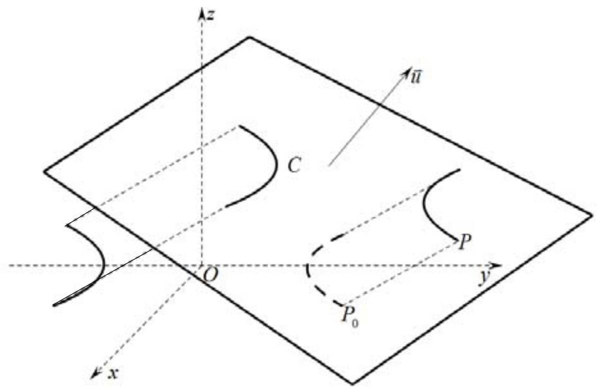


图 8.37

解：设柱面上任一点$P(x,y,z)$，过P的母线交准线于$P_0(x_0,y_0,0)$，如图 8.37，且有$\boldsymbol{P_0P}\parallel\boldsymbol{u}$，其中$\boldsymbol{P_0P}=(x-x_0,y-y_0,z)$，$\boldsymbol{u}=(1,2,3)$，所以：

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{2}=\frac{z}{3}$$

得：$x_0=x-\dfrac{z}{3}$，$y_0=y-\dfrac{2}{3}z$，代入到方程$\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$得所求柱面方程为

$$\frac{1}{a^2}(x-\frac{z}{3})^2-\frac{1}{b^2}(y-\frac{2}{3}z)^2=1,$$

于是交线C的方程为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}(x+\dfrac{z}{3})^2-\dfrac{1}{b^2}(y-\dfrac{2}{3}z)^2=1\\ x+2y+3z=6\end{cases}.$$

如果将一条通过原点的直线，如$\begin{cases}z=y\\ x=0\end{cases}$绕$z$轴旋转，易知其方程为$z^2=x^2+y^2$，其图形为一个圆锥面，如图 8.38，因此，圆锥面是一种旋转曲面．下面给出一般锥面的定义.

定义 8.5.7　一条直线过一定点，沿不过此定点的一条曲线移动所生成的曲面称为**锥面**．此直线称为锥面的**母线**，此定点称为锥面的**顶点**，所沿曲线称为锥面的**准线**．

例如曲面 $z^2 = 4x^2 + 9y^2$ 即为一个以原点为顶点的椭圆锥面，它可以看成是直线过原点，沿着准线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ z = 6 \end{cases}$ 移动所生成的锥面．如图 8.39．

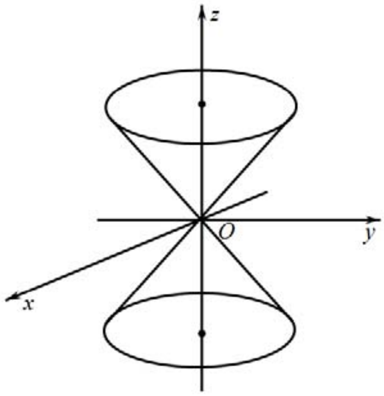


图 8.38

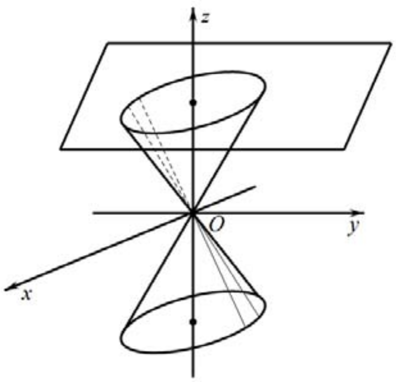


图 8.39

例 8.5.8 求以 $A(1,1,0)$ 为顶点，以 $\Gamma: \begin{cases} y = x^2 \\ z = 3 \end{cases}$ 为准线的锥面方程．

解：对锥面上任意一点 $P(x,y,z)$，必有 Γ 上一点 $P_0(x_0, y_0, 3)$ 点，使 $\boldsymbol{AP} \,/\!/\, \boldsymbol{AP_0}$，所以 $\dfrac{x-1}{x_0-1} = \dfrac{y-1}{y_0-1} = \dfrac{z-0}{3-0}$，有：

当 $z = 0$ 时，$x = 1, y = 1$；

当 $z \neq 0$ 时，$x_0 = 1 + \dfrac{3}{z}(x-1), \quad y_0 = 1 + \dfrac{3}{z}(y-1)$，代入方程 $y_0 = x_0^2$ 得所求锥面方程为：

$$1 + \frac{3}{z}(y-1) = [1 + \frac{3}{z}(x-1)]^2,$$

即：
$$3(x-1)^2 + 2z(x-1) - z(y-1) = 0.$$

图 8.40 是所求锥面的 xoy 平面以上的一部分．

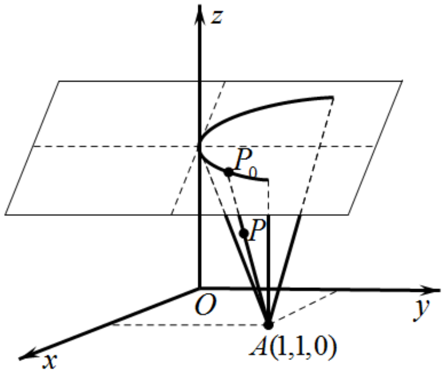


图 8.40

四、二次曲面

我们称方程

$$a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+b_1xy+b_2yz+b_3zx+c_1x+c_2y+c_3z+d=0$$

表示的曲面为**二次曲面**．其中 $a_i,b_i,c_i,(i=1,2,3),d$ 为常数且 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 不全为零．二次曲面是常见的较简单的曲面，如前面碰到的球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和圆锥面 $z^2=x^2+y^2$ 都是典型的二次曲面，以下我们介绍几种常见二次曲面的标准方程（曲面方程的最简单形式）及其图形．

根据方程画出曲面的图形往往比较困难，但我们可以通过这些曲面与平行于坐标平面的一系列平面的交线的图形来分析画出曲面的大致形状，这个方法我们称之为**截痕法**．

（1）**椭球面**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,b>0,c>0) \tag{8.17}$$

（8.17）式表示的曲面称为**椭球面**．

用平面 $z=m\ \ (|m|\le c)$ 去截椭球面，其交线（截痕）$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{m^2}{c^2}\\ z=m\end{cases}$

为一个椭圆，$|m|$越大，这个椭圆的两个半轴越小，当$|m|=c$时，交线收缩为一点．当$|m|>c$时，$z=m$与椭球面不相交．同样可用$x=n(|n|\le a)$和$y=l\ \ (|l|\le b)$去截椭球面，所得交线也为类似的椭圆．由此可知，(8.17)式表示的椭球面图形为如图 8.41 所示．

特别，当$a=b=c$时，（8.17）式表示一球面．

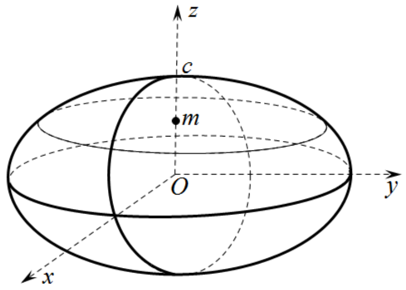


图 8.41

（2）椭圆抛物面

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ \ (a>0,b>0) \tag{8.18}$$

（8.18）式表示的曲面称为**椭圆抛物面**．

用$z=k\ (k\ge 0)$去截椭圆抛物面，其截痕$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=k\\ z=k\end{cases}$为一椭圆，且当$k$越大，椭圆的两个半轴也越大．当$k=0$时缩为一点（原点）．在$xoy$平面下方无图形．

用$y=h$去截椭圆抛物面，其截痕$\begin{cases}z-\dfrac{h^2}{b^2}=\dfrac{x^2}{a^2}\\ y=h\end{cases}$为一抛物线，且$|h|$越大，抛物线的顶点越高（顶点$z$轴分量坐标值越大）．用$x=j$去截椭圆抛物面所得的交线也为类似的抛物线．于是可知（8.18）式表示的椭圆抛物面的大致图形如图 8.42 所示．

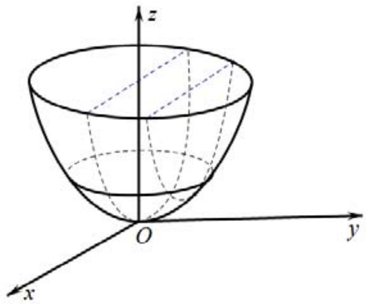


图 8.42

同理可画出椭圆抛物面 $x=\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ 和 $y=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ 的图形.

（3）单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ (a>0,b>0,c>0) \tag{8.19}$$

（8.19）式表示的曲面称为**单叶双曲面**. 可得其图形如图 8.43 所示.

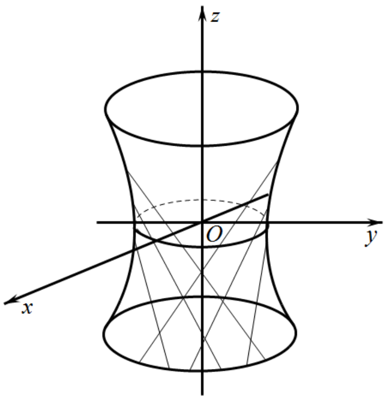


图 8.43

（8.19）式方程可改写为 $\left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)=\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\left(1+\dfrac{x}{a}\right)$,

此方程可看作方程组

$$\begin{cases}\left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}\right)k_1=\left(1-\dfrac{x}{a}\right)k_2\\ \left(\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)k_2=\left(1+\dfrac{x}{a}\right)k_1\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}\left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}\right)k_1=\left(1+\dfrac{x}{a}\right)k_2\\ \left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}\right)k_2=\left(1-\dfrac{x}{a}\right)k_1\end{cases},$$

其中 k_1和k_2 为任意常数．这两个方程组皆表示直线，因此，单叶双曲面可看成是两族直线“编织”而成的曲面，这类可由直线构成的曲面称为**直纹面**. 例 8.5.3 所求的曲面也为一个直纹面,它是由一条直线旋转而成.

（4）双叶双曲面

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,b>0,c>0) \tag{8.20}$$

（8.20）式表示的曲面称为**双叶双曲面**，读者可自行分析其图形特点，大致图形如图 8.44 所示.

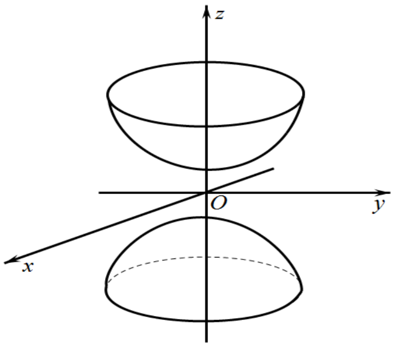


图 8.44

（5）双曲抛物面

$$z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \quad (a>0,b>0) \tag{8.21}$$

（8.21）表示的曲面称为**双曲抛物面**，如图 8.45 所示．因其形状酷似马鞍，所以双曲抛物面亦称**马鞍面**．从（8.21）式方程可得出马鞍面也是一个直纹面，可分别由通过原点的两族直线构成.

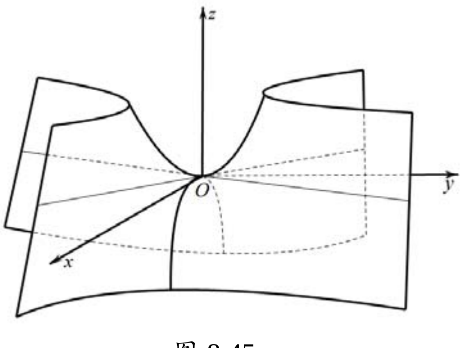
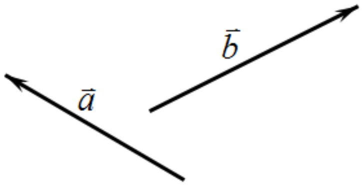


图 8.45

习题 8.1

1. 已知矢量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$如图，请画出矢量$2\boldsymbol{a}$，$-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.



2. 画图说明以下情形：

（1）两个单位矢量相加等于一个单位矢量；

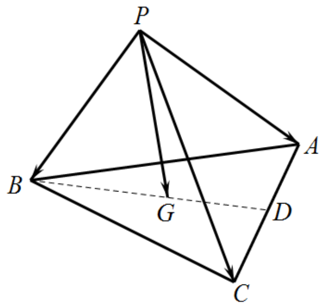
（2）两个单位矢量相减等于一个单位矢量；

（3）两个矢量相加的模等于两个矢量相减的模.

3. 用矢量方法证明对角线相互平分的四边形是平行四边形.

4. 设ΔABC的上方一点P，如图，G为ΔABC的重心，试证

$$\boldsymbol{PG}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{PB}+\boldsymbol{PC})$$

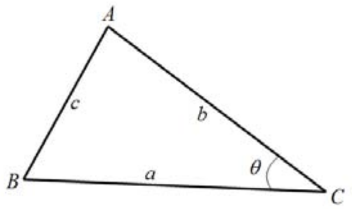


5. 设矢量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$不共面，试证三个矢量$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，$4\boldsymbol{a}+7\boldsymbol{b}$必共面.

习题 8.2

6. 用矢量方法证明三角形的三条高交于一点.

7. 用矢量方法证明余弦定理　$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$.



8. 已知$|\boldsymbol{a}| = 2, |\boldsymbol{b}| = 3, |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = 19$，求$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

9. 设$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot c = 3$，求$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$的值.

10. 已知$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = 0,\quad |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}| = 1$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$的值.

11. 设矢量$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$与$7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$垂直，$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$与$7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$垂直，求$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta$.

习题 8.3

12. 设有两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, M 为 M_1 与 M_2 的连线上一点，且 $M_1M=\dfrac{1}{5}MM_2$，求 M 的坐标.

13. 写出点 $A(1,-1,2)$ 关于三个坐标平面 xoy 平面，yoz 平面和 zox 平面的对称点 B、C 和 D 的坐标，并分别求向量 $\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{AC}$、$\boldsymbol{AD}$ 的模与方向余弦.

14. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,1,2)$, $\boldsymbol{b}=(1,3,5)$，向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，求 $\boldsymbol{c}$.

15. 设有一力 $\boldsymbol{F}=(3,1,-2)$ 作用在一质点上，使质点从 $A(-1,0,1)$ 沿直线移动到 $B(2,-1,3)$，求 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W_0（力的单位为牛顿，位移单位为米）.

16. 设有三点 $A(1,1,1)$, $B(3,2,0)$, $C(2,4,1)$ 求

（1）三角形△ABC 各边的长;

（2）三角形△ABC 的面积;

（3）垂直于△ABC 所在平面的单位向量;

（4）若 $D(1,2,k)$ 与 A，B，C 共面，求 k 的值.

17. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,-1,0)$, $\boldsymbol{b}=(0,1,2)$.

（1）若 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，求 $\tan\theta$;

（2）证明以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的邻边的平地四边形为菱形，并求此菱形的高.

18. 证明 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$.

19. 证明 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$

习题 8.4

20. 求满足下列给定条件的平面方程：

（1）过点（1，0，-2），法向为{3，-2，1}；

（2）过点（2，-1，3），且平行于平面 $x-y+2z+1=0$；

（3）过（4，2，1），（-1，-2，2），（0，4，-5）三点；

（4）过（3，4，5）且平行于 yoz 平面；

（5）过（1，2，3）和（-1，-2，-3）且与平面 $2x+3z=5$ 垂直；

（6）过（5，-7，4）且在三个坐标轴上的截距相等（截距不为零）.

21. 求点 $P(1,-1,-2)$ 到通过原点且与两平面 $x-y+z-7=0$ 和 $3x+2y-12z+5=0$ 皆垂直的平面的距离.

22. 求两平行平面 $Ax+By+Cz+D_1=0$ 和 $Ax+By+Cz+D_2=0$ 之间的距离.

23. 设点 $M(2,1,-1)$ 是原点到平面 π 所引垂线的垂足，求平面 π 的方程.

24. 求满足下列给定条件的直线方程：

（1）过点（-2，1，-1）且与向量（1，-2，3）平行；

（2）过两点：（3，-2，-1）与（5，3，2）；

（3）过原点且与平面 $x+y+2z+2=0$ 垂直；

（4）过点（2，0，1）且与平面 $x-y+z+3=0$ 和 $x+y-z+5=0$ 皆平行；

（5）过点（-1，-2，0）且落在平面 $2x+3y-z+8=0$ 内又与直线 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-5}{2}$ 相交.

25. 将直线方程$\begin{cases}5x+y+z=0\\2x+3y-2z+5=0\end{cases}$化为点向式方程（对称式方程）和参数式方程.

26. 求原点到直线$\begin{cases}x=2+t\\y=-1+3t\\z=3-2t\end{cases}$的距离.

27. 求直线$\begin{cases}3x+z=6\\y+2z=0\end{cases}$与 z 轴之间的距离.

28. 求过两平行直线$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$和$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$的平面方程.

29. 求经过直线$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$且在 x 轴上的截距为 1 的平面方程.

30. 求过直线$\begin{cases}x+2y-2z=5\\5x-2y-z=0\end{cases}$且与 zox 平面垂直的平面方程.

31. 求过 y 轴且与平面 $x-z+4=0$ 成二面角为$\dfrac{\pi}{4}$的平面方程.

32. 求两直线 $L_1:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x=1+t\\y=2\\z=3-t\end{cases}$ 的公垂线（与 L_1 与 L_2 皆垂直相交的直线）方程.

33. 在平面 $x+y+z+1=0$ 内求垂直于直线$\begin{cases}y-z+1=0\\x+3z=0\end{cases}$的直线方程.

34. 分别判断过下列给定的两条直线是否可以作一平面？若可以，求出此平面；若不可以，说明理由：

（1）$\begin{cases} x+2y-2z=5 \\ 5x-2y-z=0 \end{cases}$ 和 $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{4}$；

（2）$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{1}$ 和 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-4}{2}$；

（3）$\begin{cases} x=1+3t \\ y=0 \\ z=2-2t \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=3t \end{cases}$.

35. 求过两点（0，0，5）与（5，0，0）且与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切的平面方程.

习题 8.5

36. 写出曲线 $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ 分别绕 z 轴和 y 轴旋转所成的旋转曲面方程.

37. 求直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$ 绕 y 轴旋转所生成的旋转曲面方程.

38. 求下列曲线绕相应的轴旋转而成的旋转曲面方程：

（1）$\begin{cases} 4z=y^2 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴；　　（2）$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴.

39. 求曲线 $\begin{cases} x^2+z^2=3 \\ y=1 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程.

40. 求母线平行于 y 轴，准线为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 的柱面方程.

41. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ 在 xoy 平面和 yoz 平面上的投影曲线方程.

42. 求准线为 $\begin{cases} x^2+y^2-x=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=0 \end{cases}$，母线平行于向量 $\vec{u}=(0,1,1)$ 的柱面方程.

43. 求以原点为顶点，以 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=c \end{cases}$ $(c\neq 0)$ 为准线的锥面方程.

44. 求准线为$\Gamma:\begin{cases}F(x,y)=0\\z=h\end{cases}\quad(h\neq 0)$，顶点为原点的锥面方程.

45. 求顶点为（1，2，3），母线与直线$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$的夹角为$\dfrac{\pi}{6}$的正圆锥面的方程.

46. 请在空间直角坐标系中画出下列曲面的图形：

（1）$x^2+y^2+z^2=2z$；（2）$9x^2+4y^2+36z^2=36$；

（3）$2-z=x^2+y^2$；（4）$x^2+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=0$；

（5）$z=\sqrt{4x^2+25y^2}$；（6）$x^2+y^2=2x$.

47. 请在空间直角坐标系中画出以下曲线：

（1）$\begin{cases}z=\sqrt{4-x^2-y^2}\\z=x^2+y^2\end{cases}$；（2）$\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\x^2+y^2=2x\end{cases}$；

（3）$\begin{cases}x^2+y^2=1\\x+y+z=1\end{cases}$.

48. 写出椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\quad(a>0,b>0,c>0)$的一个参数方程.

49. 写出曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x+y+z=0\end{cases}$的一个参数方程.

50. 证明一条直线L_1绕另一条与L_1不垂直的异面直线L_2旋转所成的旋转曲面是单叶双曲面.

51. 设抛物线$\begin{cases}x^2=4(z-1)\\y=5\end{cases}$平行移动且其顶点在抛物线$\begin{cases}(y-2)^2=9z\\x=0\end{cases}$上，试求其轨迹方程.