1 收敛定义

$$(i)\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in U_+^0(a,\delta)\quad st:\left|\int_a^{a+x}f(x)dx\right|<\varepsilon$$

$$(ii)\forall\varepsilon>0,\exists A>0,\forall x>A\quad st:\left|\int_A^{+\infty}f(x)dx\right|<\varepsilon$$

$$(iii)\forall\varepsilon>0\ ,N>0,\forall n>N\quad st:\left|\sum_n^{\infty}a_n\right|<\varepsilon$$

2 柯西等价

$$(i)\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_1,x_2\in U_+^0(a,\delta)\quad st:\left|\int_{x_1}^{x_2}F(x)dx\right|<\varepsilon$$

$$(ii)\forall\varepsilon>0,\exists A>0,\forall x_1,x_2>A\quad st:\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx\right|<\varepsilon$$

$$(iii)\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall m,n>N\quad st:\left|\sum_m^{n}a_i\right|<\varepsilon$$

3 比较原则（对于正项级数适用）

$$(i)\text{若}0\leqslant f(x)\leqslant g(x),\int_a^b g(x)dx\text{收敛，则：}\int_a^b g(x)dx\text{收敛}$$

$$(ii)\text{若}0\leqslant f(x)\leqslant g(x),\int_a^{+\infty} g(x)dx\text{收敛，则：}\int_a^{+\infty} g(x)dx\text{收敛}$$

$$(iii)\text{若}0\leqslant u_n\leqslant v_n,\sum_1^{+\infty}v_n\text{收敛则：}\sum_1^{+\infty}u_n\text{收敛}$$

4 绝对收敛

$$(i)\text{若}\int_a^b|f(x)|dx\text{收敛，则：}\int_a^b f(x)dx\text{收敛}$$

$$(ii)\text{若}\int_a^{+\infty}|f(x)|dx\text{收敛，则：}\int_a^{+\infty} f(x)dx\text{收敛}$$

$$(iii)\text{若}\sum_1^{+\infty}|u_n|\text{收敛则：}\sum_1^{+\infty}u_n\text{收敛}$$

5 A-D判则

(i)若$g(x)$单调有界,$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$收敛，则：$\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$收敛

若$g(x)$单调趋于0,$F(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)dt \quad (x \in (a,b])$有界，则：$\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)$收敛

(ii)若$g(x)$单调有界,$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，则：$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛

若$g(x)$单调趋于0,$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt \quad (x \in (a,+\infty])$有界，则：$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛

(iii)若u_n单调有界,$\displaystyle\sum_1^{+\infty} v_n$收敛，则：$\displaystyle\sum_1^{+\infty} u_n v_n$收敛

若u_n单调趋于0,$S_n = \displaystyle\sum_1^n v_i$有界，则：$\displaystyle\sum_1^{+\infty} u_n v_n$收敛

6 级数特殊审敛法

(i)交错级数

若u_n单调趋于0,则：$\sum\limits_{1}^{+\infty}(-1)^n u_n$收敛

(ii)达朗贝尔判别法（**正项级数！**）

$$\text{若} \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho \begin{cases} \text{(i) } \rho<1,\text{收敛} \\ \text{(ii) } \rho>1\text{发散} \\ \text{(iii) } \rho=1\text{无法判断} \end{cases}$$

(iii)柯西判别法(**正项级数！**)

$$\text{若} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho \begin{cases} \text{(i) } \rho<1,\text{收敛} \\ \text{(ii) } \rho>1\text{发散} \\ \text{(iii) } \rho=1\text{无法判断} \end{cases}$$

(iv)函数判别法（**正项级数！**）

若$\exists f(x) st$：

(i) $f(x)$单调递减

(ii) $f(n)=u_n$

(iii) $\int_1^{+\infty} f(x)dx$收敛

则：$\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$收敛

(v)交换律、结合律

(i) 若$\sum\limits_{1}^{\infty}|u_n|$收敛，则任意重排后仍然绝对收敛

(ii) 若$\sum\limits_{1}^{\infty}u_n$收敛，则$u_n$的任意结合收敛

(iii) 若$|U|=\sum\limits_{1}^{\infty}|u_n|, |V|=\sum\limits_{1}^{\infty}|v_n|$收敛,则$|UV|=\sum u_i v_j$绝对收敛