(1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=|x|$ $f(x)=|x|, x\in D.$

$$|f_n(x)-f(x)| = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x| = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|} \le \frac{1}{n}$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in D} |f_n(x)-f(x)|=0$

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)=|x|, x\in D\ (n\to\infty)$

(3) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & 0<x<1 \end{cases}$ $\sup\limits_{0\le x<1} |f_n(x)-f(x)|=1\ (n=1,2,\cdots)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{0\le x<1} |f_n(x)-f(x)| \ne 0$ $f_n(x)$在$[0,1)$不一致收敛

(5) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0, x\in(-\infty,+\infty)$

$D=(-\infty,+\infty)$ $\sup\limits_{x\in D} |f_n(x)-f(x)| \ge |f_n(\frac{\pi}{2}n)-f(\frac{\pi}{2}n)|=1$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in D} |f_n(x)-f(x)| \ne 0$

而对 $\forall [a,b]\in(-\infty,+\infty)$，取$M=\{|a|,|b|\}_{max}$

$|f_n(x)-f(x)|=|\sin\frac{x}{n}| \le \frac{M}{n}$

$\therefore \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x_n)-f(x_n)| \le \frac{M}{n} \to 0\ (n\to\infty)$

$\therefore f_n$在D上内闭一致收敛于f.

2、证明：∵ $a_n \to 0 (n\to\infty)$ ∴ 对 $\forall \varepsilon$，$\exists N>0$ 使 $n>N$ 时 $|a_n|<\varepsilon$.

∴ $|f_n(x)-f(x)| \le a_n \le |a_n| < \varepsilon$.

∴ $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f.

3.(2) 解、令 $u_n(x)=(-1)^{n-1}$ $\quad v_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

显然对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \le 1 \ (n=1,2\cdots)$

$$v_n(x)-v_{n+1}(x)=\frac{x^4}{(1+x^2)^{1+n}}>0$$ 即 $v_n(x)$ 为递减函数列.

$$(1+x^2)^n=1+nx^2+\cdots+x^{2n}>nx^2.$$

$$\therefore 0\le\frac{x^2}{(1+x^2)^n}<\frac{1}{n}\to 0 \ (n\to\infty)$$

$$\therefore v_n(x) \rightrightarrows 0 \ (n\to\infty),\ x\in(-\infty,+\infty)$$

由狄利克雷判别法 $\sum\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(5) 设 $u_n(x)=\frac{1}{x^2+n}$. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)=0$ $\quad u_n(x)-u_{n+1}(x)=\frac{1}{(x^2+n)(x^2+n+1)}>0$, $n=1,2\cdots$

由莱布尼茨判别法，对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ 收敛.

$$R_n(x)\le|u_{n+1}(x)|=\frac{1}{x^2+n+1}\le\frac{1}{n+1} \qquad \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|R_n(x)|=0$$

$\therefore \sum\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛

5. 证明：$\because \sum v_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

$\therefore$ 对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in N_+$ 使当 $n>N$ 时 对 $\forall x\in I$ 与 $p\in N^+$ 有

$$\left|\sum_{k=1}^{p} v_{n+k}(x)\right|<\varepsilon$$

故 $\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x)\right| \le \sum_{k=1}^{p}|u_{n+k}(x)| \le \sum_{k=1}^{p} v_{n+k}(x)<\varepsilon$.

6、证明：$\because u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上为单调函数. $|u_n(x)| \le |u_n(a)|+|u_n(b)|$

又 $\because \sum u_n(a)$ 和 $\sum u_n(b)$ 都绝对收敛，即 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，

当 $n>N$ 时，对一切自然数 p，有

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(a)\right|<\varepsilon/2, \quad \left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(b)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore \left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x)\right|<\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(a)\right|+\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(b)\right|<\varepsilon.$$

由柯西准则知 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对且一致收敛。

9.(2) 解：$2^n\sin\frac{x}{3^n}<2^n\cdot\frac{x}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n x$

对给定 x $\sum\left(\frac{2}{3}\right)^n x$ 收敛，故 $\sum 2^n\sin\frac{x}{3^n}$ 收敛.

但对 $\forall N$，$\exists \varepsilon=1$，$x=\frac{\pi}{2}\cdot 3^{N+1}$，$n=N+1$，使

~~对 $f_n(x)=2^{N+1}>1$~~

$$f_n(x)=2^n\to\infty\ (n\to\infty)$$

$\sum 2^n\sin\frac{x}{3^n}$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛.

~~对于 $[a,b]\in(0,+\infty)$，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>$ [illegible]，使当 $n>N$~~

(4) 解：设$u_n(x)=(-1)^n$，$v_n(x)=\frac{(-x)^n}{\sqrt{n}}$，则$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|\leq 1$，$x\in[-1,0]$，

对$\forall x\in[-1,0]$，$v_n(x)$单调递减，

$$|v_n(x)|=\left|\frac{(-x)^n}{\sqrt{n}}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0\ (n\to\infty)$$

即 $v_n(x)\rightrightarrows 0\ (n\to\infty)$，$x\in[-1,0]$，

由狄利克雷判别法知$\sum\frac{x^n}{\sqrt{n}}$在$[-1,0]$上一致收敛.

10、证明：$a_n=x^n(1-x)$对$\forall x\in[0,1]$上 $a_n-a_{n+1}>0$ a_n单调递减

$$|R_n(x)|\leq(1-x)x^{n+1}.$$

对$u_{n+1}(x)=(1-x)x^{n+1}$求导知 $u_{n+1}(x)$在$x=\frac{n+1}{n+2}$时取最大值

$$|R_n(x)|\leq\frac{1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}<\frac{1}{n+2}\to 0\ (n\to\infty)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq 1}|R_n(x)|=0$$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$在$[0,1]$上一致收敛

而对$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$的各项绝对值组成的级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)$

$$S_n(x)=1-x^n.$$

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq 1}|S_n(x)-s(x)|=1\neq 0$$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$各项绝对值组成级数在$[0,1]$上不一致收敛

解：$\because \left|\frac{x^{n-1}}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$，$x\in[-1,1]$，且 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2}$ 在 $[-1,1]$ 一致收敛；

故 $\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n^2}dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{n^2}dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$

解：$\left|\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}\right| \leq \left|\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right|$，$\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛

故 $\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1} \frac{\cos nt}{n\sqrt{n}}dt = \sum_{n=1} \int_0^x \frac{\cos nt}{n\sqrt{n}}dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2\sqrt{n}}$

7.证明：$\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$　$\sum \frac{1}{n^3}$ 收敛　故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛

$\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)' = \frac{\cos nx}{n^2}$　$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$　$\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛　故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 一致收敛

且 $\frac{\cos nx}{n^2}$ 连续　$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum \frac{\sin nx}{n^3}\right) = \sum \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right) = \sum \frac{\cos nx}{n^2}$

由~~求~~导性、故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续且有~~连~~连续导函数

10，证明：$\because f$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有任意阶导数，由 $f_n = f^{(n)} \rightrightarrows \varphi\ (n\to\infty)$

$f^{(n+1)} \rightrightarrows \varphi\ (n\to\infty)$

$\varphi'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f^{(n)}\right)' = \lim_{n\to\infty} f^{(n+1)} = \varphi(x)$

$\therefore \varphi(x) - \varphi'(x) = 0$　$\therefore \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = 1$　$\therefore (\ln \varphi(x))' = 1$

$\therefore \ln \varphi(x) = x + C$　$\therefore \varphi(x) = C' \cdot e^x$

即 $\varphi(x) = ce^x$（c 为常数）

1.(2) $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2 2^n}}=\frac{1}{2}$ ∴收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=2$

~~x=±2~~ $x=\pm2$ 时 $\sum\frac{(\pm2)^n}{n^2 2^n}$ 显然也是收敛的，∴ $\sum\frac{x^n}{n^2 2^n}$ 的收敛区域为 $[-2,+2]$.

(4) $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{r^{n^2}}=0$ ∴级数 $\sum r^{n^2}x^n$ 的收敛半径为 $+\infty$，

收敛区域为 $(-\infty,+\infty)$.

原式 $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{y^{2n-1}}{(2n-1)!}$

(5) 对原式作变换 $y=x-2$，∴ $\sum u_n=\sum\frac{1\,\cancel{y^{2n-1}}}{(2n-1)!}$

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}=0$

∴原级数收敛半径为 $+\infty$，收敛区域 $(-\infty,+\infty)$.

(7) $u_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$

∴级数收敛半径为1，~~收~~ 而 $x=\pm1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\pm(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$ 发散，

故级数收敛区域为 $(-1,1)$.