P15

1.(2) $2^n\sin\frac{\pi}{3^n} < 2^n\cdot\frac{\pi}{3^n} = (\frac{2}{3})^n\cdot\pi$

显然 $\sum(\frac{2}{3})^n\cdot\pi$ 收敛于 $\pi[3-3(\frac{2}{3})^n]$

由比较原则 $\sum 2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ 收敛

(4) $n>e^2$ $\frac{1}{(\ln n)^n} < \frac{1}{2^n}$

$\sum(\frac{1}{2})^n$ 收敛，有限个项不会影响级数的敛散性.

由比较原则 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$ 收敛.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ $\therefore \exists N>0$ 使 $n>N$ 时有 $\sqrt[n]{n}<2$.

$\therefore$ 当 $n>N$ $\sum\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} > \sum\frac{1}{2n}$

$\sum\frac{1}{2n}$ 发散

$\therefore \sum\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 发散.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=1$, $\exists N>0$, 使 $n>N$ 时有 $n\sin\frac{1}{n} > \frac{3}{4}$

$\therefore \frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛

故由比较原则 $\sum\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$ 收敛.

(1) $u_n=\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{n!}$ $u_{n+1}=\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)\times(2n+1)}{(n+1)!}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=\cancel{\lim\limits_{n\to\infty}6}\ 2>1$

由比式判别法 原式发散.

(5) $u_n=\frac{n^2}{2^n}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}<1$

由根式判别法, 原式收敛.

5. 证明: $\because$ $\{na_n\}$有界 $\therefore$ $\exists M>0$ 使 $na_n<M$.

$a_n<\frac{M}{n}$ $a_n^2<\frac{M}{n^2}$

$\sum\frac{M}{n^2}=M\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛.

由比较原则 $\sum a_n^2$收敛.

6. 证明: $\frac{a_n}{n}\leq\frac{1}{2}(a_n^2+\frac{1}{n^2})$

$\because$ $\sum a_n^2$与$\sum\frac{1}{n^2}$都收敛

由比较原则 $\sum\frac{a_n}{n}(a_n>0)$也收敛.

9. (2) 令$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 易知$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减

$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\cancel{+\infty}\ \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx^2\overset{t=x^2}{=}\cancel{\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}}\ \frac{1}{2}\ln(1+t)\Big|_1^{+\infty}=+\infty$

由积分判别法 $\sum\frac{n}{n^2+1}$发散

11. 证明：不妨设 $f(x)$ 为一单调递减正函数 且 $f(n)=a_n$.

$$\cancel{\int_1^{+\infty} f(x)dx} \quad \int_1^{+\infty} 2^x f(2^x)dx = \frac{1}{\ln 2}\int_1^{+\infty} f(2^x)d2^x$$

$$\overset{t=2^x}{=} \frac{1}{\ln 2}\int_2^{+\infty} f(t)dt.$$

易知 $\int_1^{+\infty} 2^x f(2^x)dx$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 同敛态，

由积分判别法 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{}^{\infty} 2^m a_{2^m}$ 同时收敛.

设 $\sum a_n$ 部分和为 S_n，$\sum 2^m a_{2^m}$ 部分和为 T_n.

①若 $n<2^m$ $\quad S_n = a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6+a_7)+\cdots+a_n$

$\quad < a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^{m-1}a_{2^{m-1}} = T_{m-1}$

$\therefore$ $\sum a_n$ 发散 $\sum 2^m a_{2^m}$ 发散

② $n>2^m$ $\quad S_n = a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+a_n$

$\quad > \frac{1}{2}(a_1+2a_2+4a_4+\cdots+m\cdot 2^m) = \frac{1}{2}T_m.$

$\therefore$ $\sum 2^m a_{2^m}$ 发散，S_n 也发散

$\therefore$ $\sum a_n$ 与 $\sum 2^m a_{2^m}$ 同时发散

1.(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^n\frac{n}{n+1}\right|=1\neq0$，故 $\sum(-1)^n\frac{n}{n+1}$ 发散.

(5) $\sum\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)=\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\sum\frac{1}{n}$

$\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 由莱布尼茨判别法为收敛

$\sum\frac{1}{n}$ 发散

故 $\sum\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$ 发散

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n}=\frac{2}{3}<1$

故 $\sum(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ 绝对收敛.

(10) 原式 $=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots$

$>\sum\frac{1}{3n-2}>\sum\frac{1}{3n}$

$\sum\frac{1}{3n}$ 发散.

$\therefore 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$ 发散.

2.(1) ① $x>1$ $\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}}>\frac{x^n}{1+x^n}$ $\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$ 为单调递增数列

② $x<1$ $\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}}<\frac{x^n}{1+x^n}$ $\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$ 为单调减数列

③ $x=1$ $\frac{x^n}{1+x^n}=\frac{1}{2}$

且 $\frac{x^n}{1+x^n}<1$

$\sum\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛 由阿贝尔判别法

$\sum\frac{(-1)^n}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$ 收敛

(3) 令 $b_n=(-1)^n\cos^2 n$. $a_n=\frac{1}{n}$ $\sum b_n$ 的部分和为 S_n.

$$|S_n|=\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos^2 k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1+\cos 2k}{2}\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2}\right|+\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\cos 2k}{2}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}\cos(2k+k\pi)\right|$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{2+\pi}{2}}\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2+\pi}{2}\cos(2k+k\pi)\right|$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{\cos 1}\left|\frac{1}{2}\left(-\sin\frac{1}{2}(\pi+2)+\sin\frac{3}{2}(\pi+2)-\sin\frac{3}{2}(\pi+2)\cdots+\sin(n+\frac{1}{2})(\pi+2)\right)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cos 1}$$

即 $\sum(-1)^n\cos^2 n$ 部分和数列有界

由狄利克雷判别法 $\sum(-1)^n\frac{\cos^2 n}{n}$ 收敛.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$

$\therefore$ 由莱布尼茨判别法 原级数收敛.

6. 证明. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}\right|=\left|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}\right|=0<1$ 故由比式判别法 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ 绝对收敛

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}$ 同理.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\frac{b^{n-k}}{(n-k)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^kb^{n-k}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^kb^{n-k}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}$$