Exercises 1

1. If $x \in \{a,b\}^*$, $xa=ax$, for some n, show $x=a^n$, $n \in N$.
2. Show that there are not strings $x \in \{a,b\}^*$ which make $ax=xb$.
3. Show $\sqrt{2}$ is an irrational. (reduction to absurdity)
4. P.29: 1.5.6 ; P.47: 1.7.2, 1.7.4 ; P.51: 1.8.1, 1.8.2, 1.8.3 P.52: 1.8.5

1、If $x \in \{a,b\}^*$, $xa=ax$, for some n, show $x=a^n$, $n \in N$.

证明：

假设 $xa=ax$，而 x 含字母 b。可将 x 写成 $x=a^n bu$。则，

$a^n bua=aa^n bu=a^{n+1}bu$，于是 $bua=abu$，矛盾。

得证。

2、Show that there are not strings $x \in \{a,b\}^*$ which make $ax=xb$.

证明：

如果 $x \in \{a,b\}^*$，且$|x|=n$，则 $ax \neq xb$，需证明对于所有的 $n \in N$ 都是成立的。假设要证明对于所有的 $m<k$（k 是给定的）它都成立，并且证明对于 k 它成立。用反证法。

假设$|x|=k$ 且 $ax=xb$，该等式蕴涵 a 是 x 中的第一个符号，b 是 x 中的最后一个符号，所以，可以记成 $x=aub$。于是 $aaub=aubb$

即， $au=ub$ ； 但$|u|<|x|$，由归纳假设 $au \neq ub$。与假设矛盾。

得证。

3、Show $\sqrt{2}$ is an irrational. (reduction to absurdity).

证明：

每个自然数或是偶数（对于某个 $n \in N$，等于 $2n$）或是奇数（对于某个 $n \in N$，等于 $2n+1$）。因而，如果 m 是偶数，$m=2n$，则 $m^2=4n^2=2 \times 2n^2$ 是偶数。

而如果 $m=2n+1$，则 $m^2=4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1$ 是奇数。

现证明对于 m，$n \in N$，方程 $2=(m/n)^2$ 没有解（即，$\sqrt{2}$ 不是“有理”数）。

用反证法，假设方程 $2=(m/n)^2$ 有解，则它必有 m 和 n 不都是偶数的解，因为如果 m 和 n 都是偶数，可以重复地从分子和分母中“约去”2，直到至少其中之一为奇数。另一方面，如果证明该方程的每一个解，m 和 n 一定都是偶数，这个就矛盾表明了上面的假设是错误的，即方程 $2=(m/n)^2$ 没有解。剩下的问题是证明在方程的每个解中，m 和 n 都是偶数。将 $2=(m/n)^2$ 改写为 $m^2=2n^2$，表明 m^2 是偶数，故 m 是偶数。如 $m=2k$，这样 $m^2=4k^2=2n^2$，或 $n^2=2k^2$，于是 n^2 偶数，从而是 n 偶数。

得证。

1.5.6 ①:如果有 1 个人没有一个熟人，熟人个数情况有 0 ~ n-2 共 n-1 种

①:如果每个人至少有一个熟人，熟人个数情况有 1 ~ n-1 共 n-1 种

根据鸽巢原理，n 个人中必有两个人熟人个人情况是一样的

1.7.2：

a: ①: if $|w|=0$ then $w=e$, $(w^R)^R=(e^R)^R=e^R=e=w$

②: suppose $|w|<=n$ $(w^R)^R=w$

when $|w|=n+1$, suppose $w=ua$ then $|u|<=n$ get $(u^R)^R=u$

$(w^R)^R=((ua)^R)^R=(a^R u^R)^R=(u^R)^R(a^R)^R=ua=w$

b: suppose $w=xvy$ then

$w^R=(xvy)^R=(vy)^R x^R=y^R v^R x^R$

so v^R is the substring of w^R

c: ①: if $i=0$, $(w^i)^R=(w^R)^i=e$

②: suppose $l<=n$, $(w^n)^R = (w^R)^n$

when $l=n+1$ $(w^l)^R = (w^{n+1})^R = w^R (w^n)^R = w^R (w^R)^n = (w^R)^{n+1} = (w^R)^l$

1.7.4:

a: 任意个 e 的连接都是 e ,根据定义得 $\{e\}^*=\{e\}$

b: 显然 $L^* \subseteq (L^*)^*$

如果 字符串 $w \in (L^*)^*$ 根据定义 $w=w_1 w_2 w_3 w_4 \ldots\ldots w_k$ $w_i \in L^*$

同理 w_i 由 L*中的字符串链接而成，w 也可以写成 L*中的字符串链接而成

所以 $w \in L^*$ ，$(L^*)^* \subseteq L^*$

所以 $L^* =(L^*)^*$

c: 根据定义易的 $\{a\}^*(\{b\}\{a\}^*)^* \subseteq \{a,b\}^*$

$\{a,b\}^*=\{a\}^*\{b\}^*\{a\}^*\{b\}^*$

而$\{a\}^*(\{b\}\{a\}^*)^*= \{a\}^*(\{b\}\{a\}^*)^*(\{b\}\{a\}^*)^*(\{b\}\{a\}^*)^*$

$\{a\}^* \subseteq (\{b\}\{a\}^*)^*$, $\{b\}^* \subseteq (\{b\}\{a\}^*)^*$

所以 $\{a\}^*\{b\}^*\{a\}^*\{b\}^* \subseteq \{a\}^*(\{b\}\{a\}^*)^*(\{b\}\{a\}^*)^*(\{b\}\{a\}^*)^*$

所以 $\{a,b\}^* \subseteq \{a\}^*(\{b\}\{a\}^*)^*$

所以 $\{a,b\}^*=\{a\}^*(\{b\}\{a\}^*)^*$

d: 取 L1=e, L2=e 则 $(L1\Sigma^* L2)^*= (\Sigma^*)^* =\Sigma^*$ 所以 $\Sigma^* \subseteq (L1\Sigma^* L2)^*$

根据定义可得$(L1\Sigma^* L2)^* \subseteq \Sigma^*$ 所以 $(L1\Sigma^* L2)^* =\Sigma^*$

e: 题目有误

1.8.1：

b 只出现一次，并且出现在结尾的字符串 即 (a*) b

1.8.2: **(a):** **$(a \cup b)^\star$**

(b): $(a \cup b)^\star$

(c): $(a \cup b)^\star$

(d): $b^\star a(a \cup b)^\star$

1.8.3

(a) $b^*(a \cup b^*)b^*(a \cup b^*)b^*(a \cup b^*)b^*$

(b) $(b^*ab^*ab^*ab^*)^* \cup b^*$

(c) $((b^*ab)^* \cup (b^*aab)^*)^*aaa((b^*ab)^* \cup (b^*aab)^*)^*$

1.8.5 (a) true **(b) true** **(c) false** **(d) false**

Exercises 2

P.69 : 2.1.2, 2.1.3 P.73 : 2.2.1 P.74 : 2.2.2, 2.2.3 P.75 : 2.2.9

2.1.2

(a) : $a(ba)^*$

(b) : $a^* b$

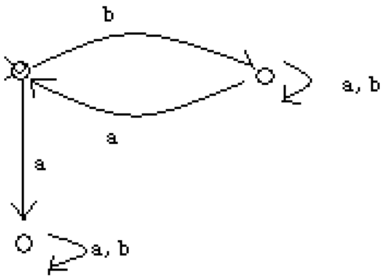
(c) : $a((ab)\cup(ba))^*b \cup e$

(d) : $((ba) \cup (ab))^*b$

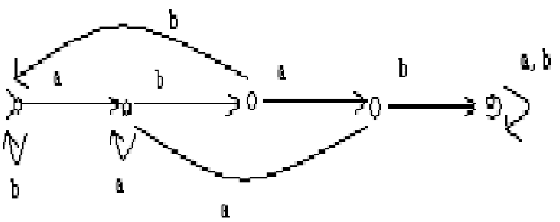
(e) $(a(ba)^*aa^*b \cup abbb^*a \cup b(ab)^*bb^*a \cup baaa^*b)\{a,b\}^*$

2.1.3

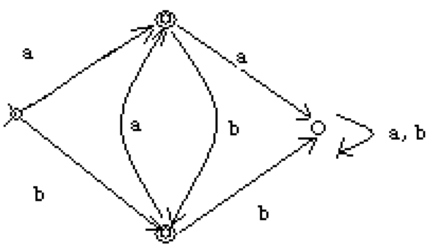
(a):



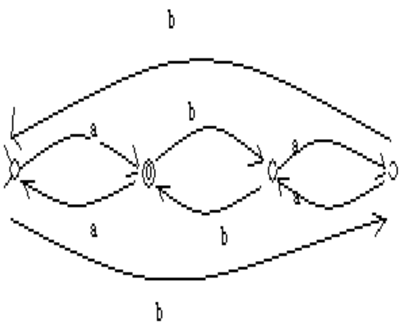
(b):



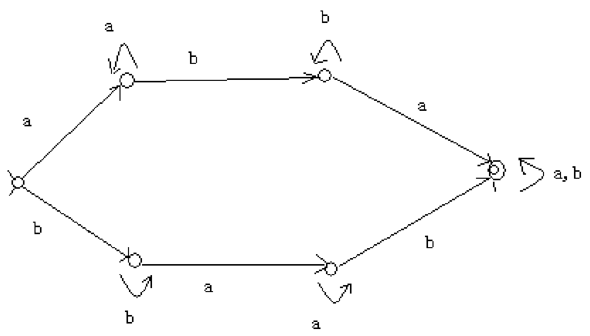
(c):



(d):



(f) :



2.2.1

(a): a, aa , e 会被接受

(b): e, ab, abab, aba 会被接受

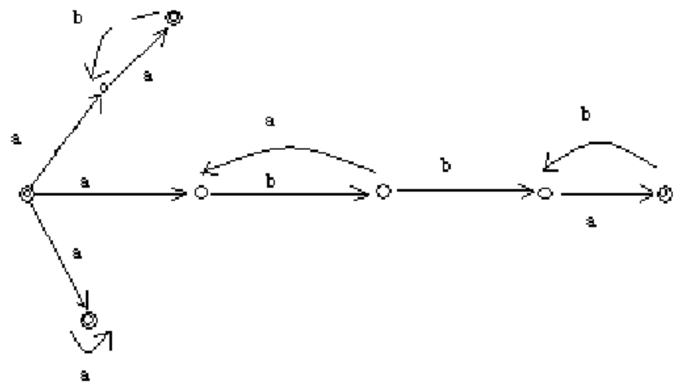
2.2.2

(a): a*

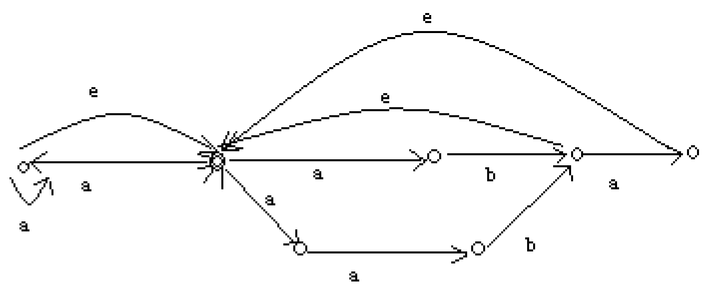
(b) (ab∪aba)*

2.2.3

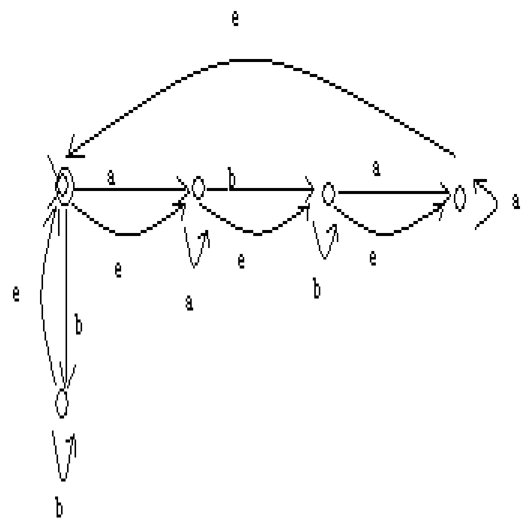
(a):



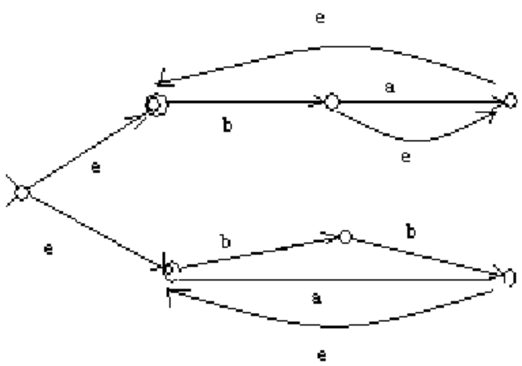
(b):



(c):

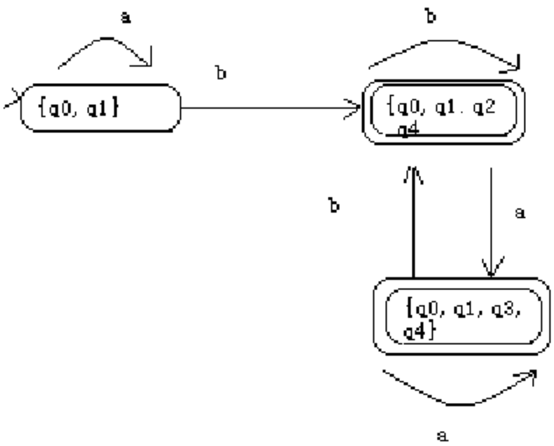

e
a
b
a
a
e
e
e
a
b
e
b
b
b

(d):

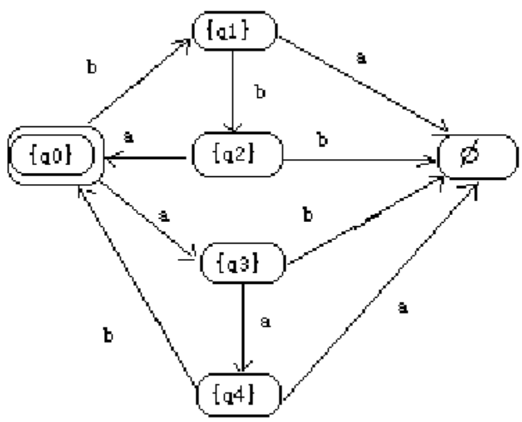

e
a
b
e
e
e
b
b
a
e

2.2.9:

(a):


a
b
b
{q0, q1}
{q0, q1. q2
q4
b
a
{q0, q1, q3,
q4}
a

(b):


{q1}
{q0}
{q2}
∅
{q3}
{q4}
a
b

Exercises 2

P.69 : 2.1.2, 2.1.3   P.73 : 2.2.1   P.74 : 2.2.2, 2.2.3   P.75 : 2.2.9

2.1.2

(a)   : $a(ba)^*$

(b)   : $a^* b$

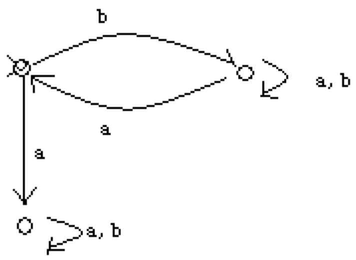
(c)   : $a((ab)\cup(ba))^*b \cup e$

(d)   : $((ba) \cup (ab))^*b$

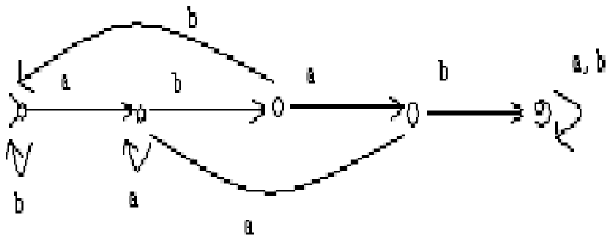
(e) $(a(ba)^*aa^*b \cup abbb^*a \cup b(ab)^*bb^*a \cup baaa^*b)\{a,b\}^*$

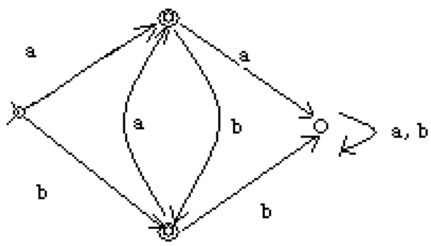
2.1.3

(a):



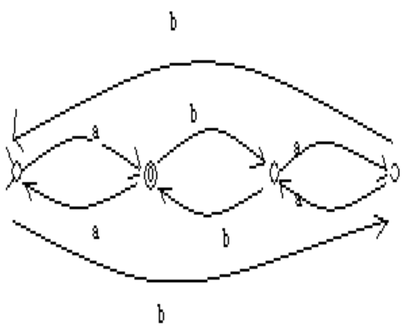
(b):

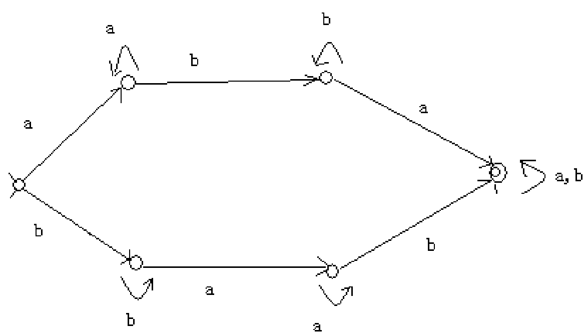




(c):

(d):





f:

2.2.1

(a):   a, aa , e 会被接受

(b):   e,   ab,   abab,   aba 会被接受

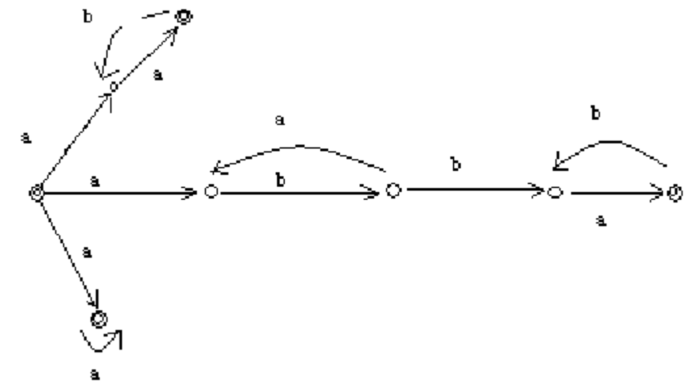
2.2.2

(a): a^*

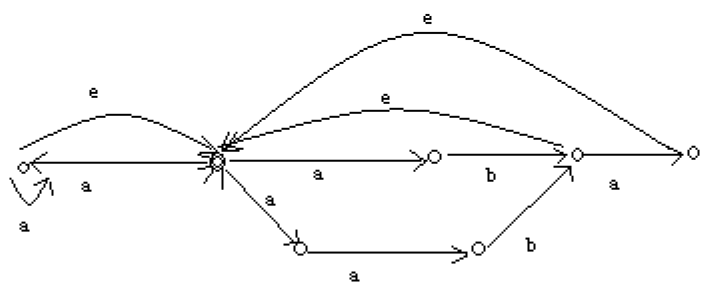
(b) $(ab\cup aba)^*$

2.2.3

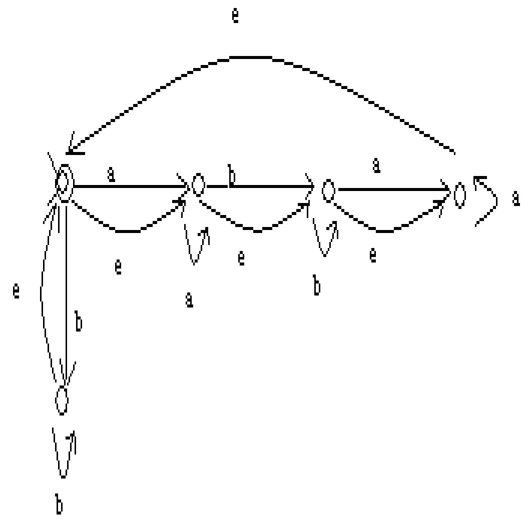
(a):

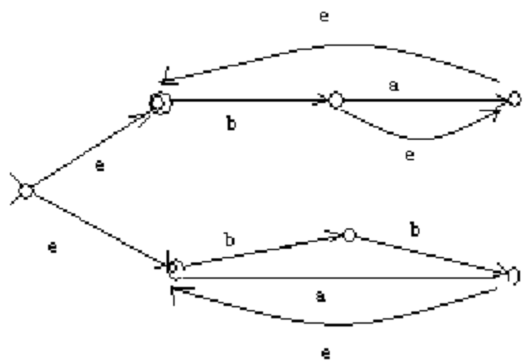


(b):



(c):

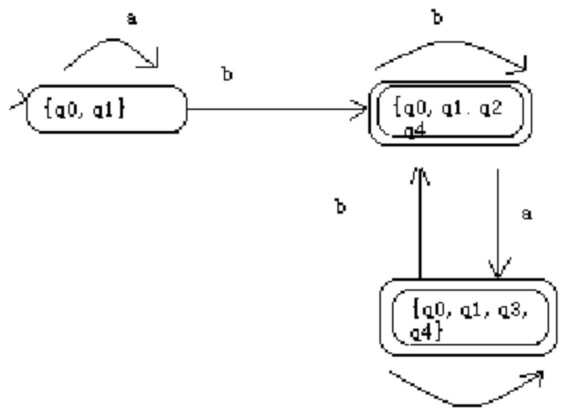


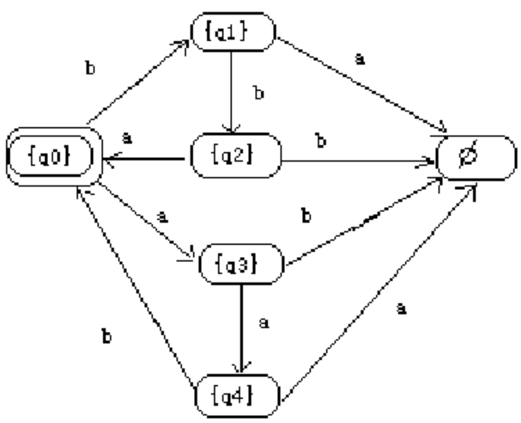


(d):

2.2.9:

(a):



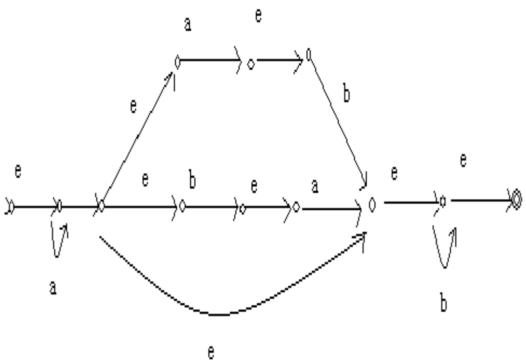


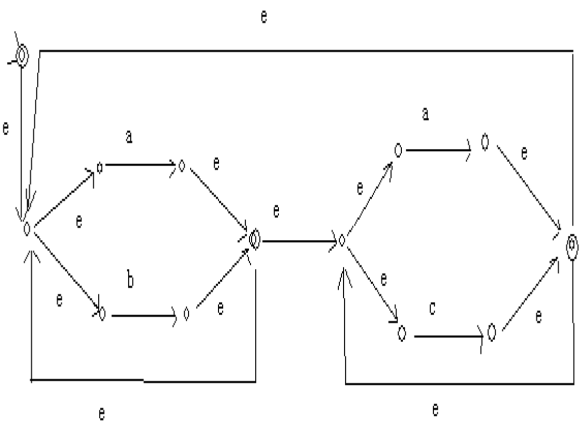
(b):

Exercises 3 P.83 : 2.3.4 2.3.5 P.84 : 2.3.7

2.3.4:

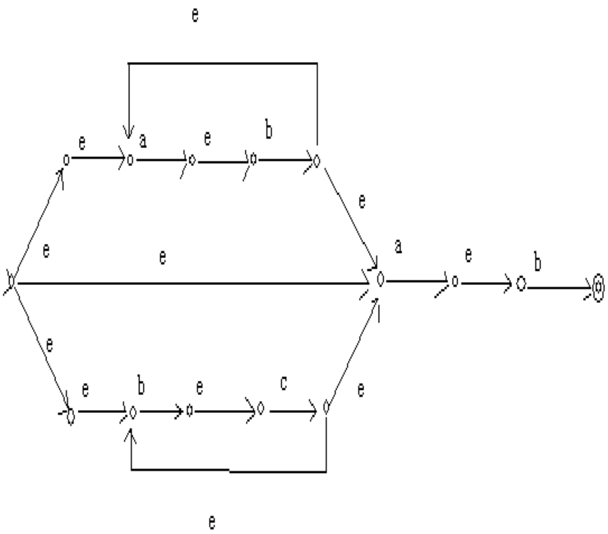
(a):





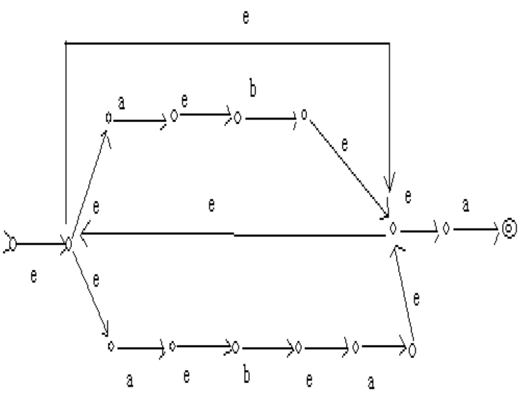
(b):

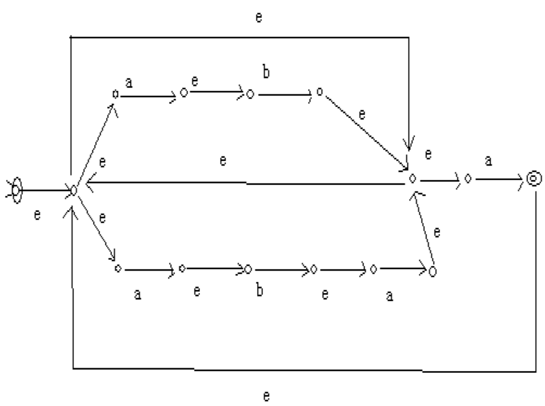
(C):



2.3.5:

(a):





(b):

2.3.7 :

(a) : a*b(a∪ba*b)*

(b) : (a(b∪a) ∪b(a∪b))*

(c) : b*aa*b(bb*aa*∪ab) *aa(a∪b)*

(d) : (a∪ba*a)(ba*a)*b(a∪b)*

P.90

2.4.4

2.4.5

2.4.4　假设 $L=\{a^n b a^m b a^{m+n} : n,m\geq 1\}$是正则的，对整数 n 考虑字符串 $w= a^n b a^m b a^{m+n}$
根据定理，可以重写成 w=xyz 使得|xy|≤n 且 y≠e,得 $y=a^i$ 〉0，得 $xz= a^{n-i} b a^m b a^{m+n}$ 不是 L 中的字符串，与定理矛盾，所以 L 不是正则的

2.4.5

(a) 如果 $L=\{ww^R :w\in\{a,b\}^*\}$是正则的，$L\cap a^*b^* a^*=\{ a^n b^{2m} a^n \ \ n,m\geq 0\}$是正则的，由泵定理可知它不是正则的

(b) 如果 $L=\{ww :w\in\{a,b\}^*\}$是正则的，$L\cap a^*b^* a^*b^* =\{ a^n b^m a^n b^m \ \ n,m\geq 0\}$是正则的，由泵定理可知它不是正则的

(c)如果 $L=\{ww :w\in\{a,b\}^*\}$是正则的，$L\cap a^*b^* a^* =\{ a^n b^m b^n a^m \ \ n,m\geq 0\}$是正则的，由泵定理可知它不是正则的

Exercises 5

P.100: 2.5.1 (a): (i)(ii)(iii)(iv)(v)
P.101: 2.5.3 (2.1.2 (a)(b)(c))
2.5.1(a)

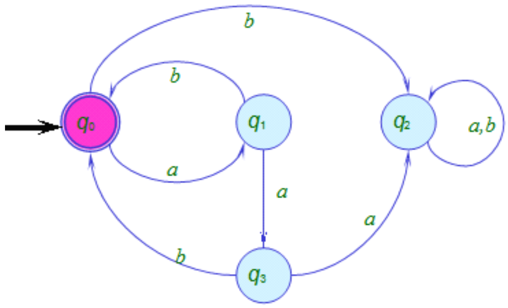
(i) $\boldsymbol{L}=(aab\cup ab)^*$

$[e] = \boldsymbol{L}$;

$[a] = \boldsymbol{L}a$; ($[a]ab\boldsymbol{L}\in\boldsymbol{L}$)

$[b]=\boldsymbol{L}(b\cup aaa)\Sigma^*$; ($\boldsymbol{L}(b\cup aaa)\Sigma^*\notin\boldsymbol{L}$)

$[aa] = \boldsymbol{L}aa$ ($[aa]b\boldsymbol{L}\in\boldsymbol{L}$)



(ii) $\boldsymbol{L}=\{x\in\{a, b\}^* : x$ contains an occurrence of $aababa\}$

$[e] = (b\cup ab\cup aa(a\cup (baa))^*bb\cup aa(a\cup (baa)^*babb)^*=\boldsymbol{S}$

$[a] = \boldsymbol{S}a$

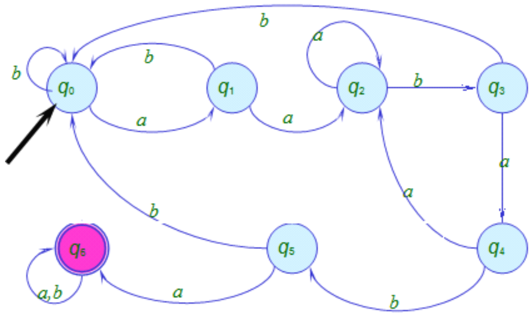
$[aa] = \boldsymbol{S}aa(a\cup baa)^*$

$[aab] = \boldsymbol{S}aa(a\cup baa)^*b$

$[aaba] = \boldsymbol{S}aa(a\cup baa)^*ba$

$[aabab] = \boldsymbol{S}aa(a\cup baa)^*bab$

$[aababa] = \boldsymbol{L}$



(iii) $\boldsymbol{L}=\{ww^R: x\in\{a, b\}^*\}$

$\boldsymbol{L}$ is not regular, all x, $x\in\{a, b\}^*$, are the equivalence classes of $\boldsymbol{L}$.

(iv) $\boldsymbol{L}=\{ww: x\in\{a, b\}^*\}$

$\boldsymbol{L}$ is not regular, all x, $x\in\{a, b\}^*$, are the equivalence classes of $\boldsymbol{L}$.

(v) $\boldsymbol{L}_n=\{a, b\}a\{a, b\}^n$, where $n>0$ is a fixed integer.

$[e] = e$

$[a] = a\cup b$

$[aa] = (a\cup b)a$

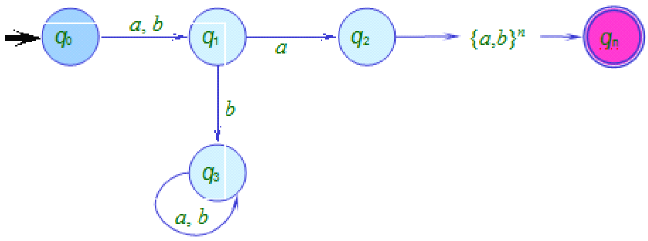
$[ab] = (ab\cup bb)\{a, b\}^*$

$[k=1] = \{a, b\}\ a\ \{a, b\}^1$

$[k=2] = \{a, b\}\ a\ \{a, b\}^2$

……

$[k = n] = \{a, b\}\ a\ \{a, b\}^n \quad (n > 0)$

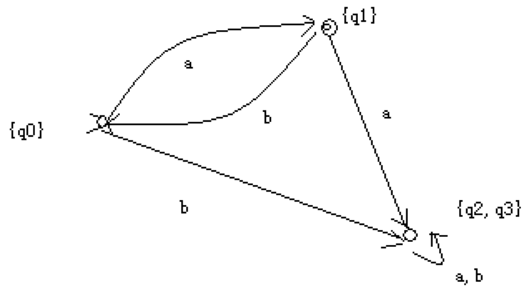


2.5.3 (from 2.1.2)

说明： 初始状态为 q0 ，按顺时针状态分别为 q0,q1,q2 ……..

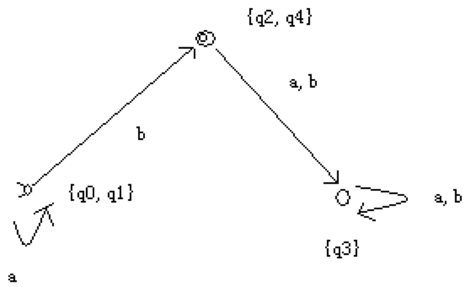
(a) $\equiv_0$ 的等价类 { q0} , {q1,q2,q3}

$\equiv_1$ 的等价类 { q0} , {q1},{q2,q3}



(b) $\equiv_0$ 的等价类 {q2,q4}, { q0,q1,q3}

$\equiv_1$ 的等价类 {q2,q4}, { q0, q1} ,{q3}



(c) $\equiv_0$ 的等价类 {q0}, {q1, q2, q3}

$\equiv_1$ 的等价类 {q0}, {q1},{q2, q3}

$\equiv_2$ 的等价类 {q0}, {q1},{q2},{q3}

状态机就是原图

Exercises 6

P.120: 3.1.1

P.129: 3.2.3   3.2.4

3.1.1

(a) S ->AA ->aA ->aa

S ->AA ->bAA ->baA->baa

S ->AA ->AbA ->abA->aba

S ->AA ->AAb ->aAb->aab

(b) 1: S ->AA ->bAbA ->bAbbAb ->babbab

2: S ->AA->bAA->bAAb->bAbbAb->babbab

3: S->AA ->bAA->baA->babA->babbA->babbAb->babbab

4: S->AA->baA->babA->babbA->babbAb->babbab

(c) S->AA->bAA->bbAA 。。。。 ->b^mAA-> b^maA-> b^mabA-> b^mabbA 。。。。 ->
b^mab^{n}A -> b^mab^{n}Ab-> b^mab^{n}Abb。。。。 -> b^mab^{n}Ab^p -> b^mab^{n}ab^p

3.1.2

S->bAb->bSSb ->b aAaSb-> baSSaSb-> baSaSb-> baaSb->baabAbb->
baabSSbb -> baabSbb->baabbb

3.2.3

最左推倒：

E->E+F->T+T ->T*F+T->F*F+T-> id*F+T-> id*id+T->id*id+F->
Id*id+id

最右推倒：

E->E+T->E+F ->E+id->T+id->T*F+id-> T*id+id->F*id+id->id*id+id

3.2.4 略

Exercises 7

P.135 3.3.1; 3.3.2

3.3.1

(a) 题目有误

(b) 题目有误 aba,aa,abb 不属于 L(M), baa,bab,baaaa 属于 L(M)，证明省略

(c) L(M)接受所有{a,b}*中长度为奇数，中间字母为 a 的语言。

3.3.2

(a) M=(K, Σ,Γ,△,s,Ｆ)

K={s,p,f}

Σ={(,[,],)}

Γ={}

F={f}

△ = {

((s,e,e), (f,e))

((s,(,e), (p,())

((s,[,e), (p,)))

((p,),e), (f,e))

((p,),e), (f,e))

}

(b) M=(K, Σ,Γ,△,s,Ｆ)

K={s,p,f}

Σ={a,b}

Γ={a}

F={f}

△ = {

((s,e,e), (f,e))

((s,a,e), (s,aa))

((s,b,a), (p,e)))

((s,b,aa), (p,e)))

((p,b,a), (f,e)

((p,b,aa), (f,e)))

(c)

M=(K, Σ,Γ,△,s,Ｆ)

K={s,p,f}

Σ={a,b}

Γ={a,b}

F={f}

△= {

((s,e,e), (f,e))

((p,a,e), (p,a))

((p,b,e), (p,b))

((p,a,e), (f,e))

((p,b,e), (f,e))

((p,e,e), (f,e))

((f,a,a), (f,e))
((f,b,b), (f,e))
}

(d):

M=(K, Σ,Γ,△,s,F)
K={s}
Σ={a,b}
Γ={a,b}

△= {
((s,a,e), (s,aa))
((s,b,e), (s,b))
((s,a,b), (s,a))
((s,b,a), (s,e))
((s,b,b), (s,bb))
}

Exercises 8

P.149　3.5.8

(P.149)　3.5.8

Show that the language $\{ww : w \in \{a, b\}^*\}$ is not context-free.

Proof :

Let $\boldsymbol{L}=\{ww : w \in \{a, b\}^*\}$, and $s= a^p b^p a^p b^p$, $s \in \boldsymbol{L}$. p is the pumping length.

Use the Pumping Theorem to prove that.

If $\boldsymbol{L}$ is CFL, such that $s=uvxyz$, $|vxy| \le p$.

(1) Consider that the substring vxy of s is over the midpoint of s. Pump the s as uxz, the string s is as $a^p b^i a^j b^p$ form, where i and j are not equal to p at the same time. Such that the s is not the form ww.

(2) If vxy is placed before the midpoint of s, by the Pumping Theorem, when $s=uv^2xy^2z$, the b has to be put the first place of the last part of s after the midpoint, such that the s is not the form ww. Similarly, if vxy is placed after the midpoint of s, when $s=uv^2xy^2z$, the a has to be moved to the last place of the first part of s before the midpoint, also the s is not the form ww.

So, $\boldsymbol{L}$ is CFL .　　○

Exercises 9

P.157　3.6.1

3.6.1

a: 去长规则

E —>E+T　　转化为　　　E —>EA，A —>+T

T —>T*F　　转化为　　　T —>TB，B —>*F

F —>（E）　转化为　　　F —>（C，C —>E）

b: 无 e 规则需要去除

c: 去短规则

D(E)={E,T,F,id} , D(T)={T,F,id} , D(F)={F,id} ;

最后得到：

E —>EA;

E —>TA;

E —>FA;

E —>idA;

A —>+T;

A —>+F;

A —>+id;

T —>TB;

T —>FB;

T —>idB;

B —>*F;

B —>*id;

F —>(C;

C —>E);

C —>T);

C —>F);

C —>id)

								)
							id	C
						(	Ø	F
					*	Ø	Ø	B
				)	Ø	Ø	Ø	Ø
			id	C	Ø	Ø	Ø	Ø
		+	A	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
	id	Ø	E	C	Ø	Ø	Ø	Ø
(	Ø	Ø	Ø	F	Ø	Ø	Ø	T

(id+id)*(id) ∈ L(G)

Exercises 10

P.191:　4.1.1; 4.1.6; 4.1.7

Addition: (1)给出下面图灵机对输入(q_1,◆0000)后的格局序列；(2)该图灵机识别的语言是什么？

M_1=(K, Γ,　　Σ, δ, s, {h})

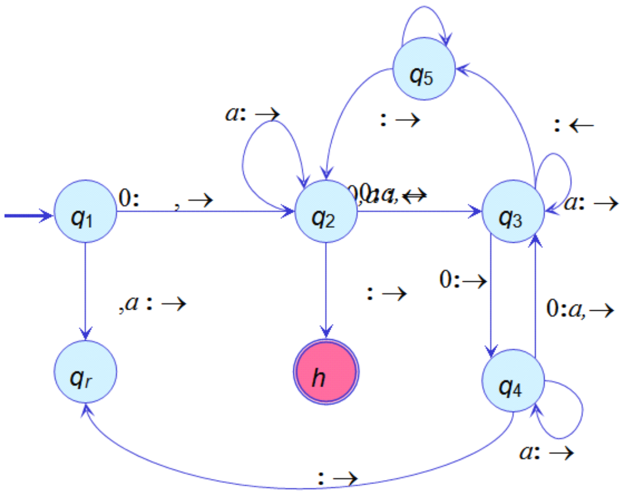
K={q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_r, h}

Γ={0, a, ờ , ◆}

Σ={0}

s=q_1,

δ:



Exercises 11

P.242: 4.7.2: (a),(c),(d)

附加题：

1、 设当 x 是完全平方时 $f(x)=2x$，否则 $f(x)=2x+1$。试证明 f 是原始递归的。

2、 设当 $x\neq 0$ 时 $\sigma(x)$ 是 x 的所有因子之和；$\sigma(0)=0$。试证明 $\sigma(x)$ 是原始递归的。

3、 设 $\pi(x)$ 是小于等于 x 的素数的个数。试证明 $\pi(x)$ 是原始递归的。

Exercises 11

P.242: 4.7.2: (a),(c),(d)

附加题：

1、 设当 x 是完全平方时 $f(x)=2x$，否则 $f(x)=2x+1$。试证明 f 是原始递归的。

2、 设当 $x\neq 0$ 时 $\sigma(x)$ 是 x 的所有因子之和；$\sigma(0)=0$。试证明 $\sigma(x)$ 是原始递归的。

3、 设 $\pi(x)$ 是小于等于 x 的素数的个数。试证明 $\pi(x)$ 是原始递归的。

4.7.2: (a) *factorial*(n)=n!

the recursive equations:

$0!=1$

$(n+1)!=n!\cdot succ(n)$

4.7.2: (c) *prime*(n), the predicate that that is 1 if n is a prime number.

$$prime(n) \Leftrightarrow x>1 \,\&\, (\forall t)_{\le t}\{t=1 \cup t=n \cup \sim(t\,|\,n)\}$$

where, predicate: $y|x$ (x is divided exactly by y)

4.7.2: (c) p_n, the nth prime number, where $p_0=0$, $p_1=2$, $p_2=3$, and so on.

For $0<i\le n$, $\frac{(p_n)!+1}{p_i}=K+\frac{1}{p_i}$, where K is an integer. i.e. there must be a prime between p_n and $(p_n)!+1$.

Such that we have： $p_n \le (p_n)!+1$

So, the recursive equations: $p(0)=2$ $\quad p_{n+1}=\min_{t\le p_n!+1} t\,[prime(t) \,\&\, t>p_n]$

附加题：

1、设当 x 是完全平方时 $f(x)=2x$，否则 $f(x)=2x+1$。试证明 f 是原始递归的。

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{if } (\exists t)_{t\le x}(t\ t=x)\\ 2x+1 & \text{else}\end{cases}$$

2、设当 $x\neq 0$ 时 $\sigma(x)$ 是 x 的所有因子之和；$\sigma(0)=0$。试证明 $\sigma(x)$ 是原始递归的。

$$\sigma(x)=\begin{cases}\sum_{t=0}^{y}(t\ g(x,t)) & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

where,

$$g(x_1,x_2)=\begin{cases}1, & \text{if } x_2\,|\,x_1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

3、设 $\pi(x)$ 是小于等于 x 的素数的个数。试证明 $\pi(x)$ 是原始递归的。

$$\pi(x)=\sum_{t=0}^{x} g(t,x)$$

$$g(x_1,x_2)=\begin{cases}1, & \text{if } x_1\le x_2 \,\&\, prime(x_1)\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$