chap 1

否定 negation

合取 conjunction交

析取 disjunction并

兼或和异或 inclusion exclusion

条件语句p -> q 也称蕴含 implication

3) Some of the more common ways of expressing this implication are:

- ☐ if p then q
- ☐ p implies q
- ☐ if q whenever p
- ☐ p is sufficient for q
- ☐ q is necessary for p
- ☐ p only if q

biconditional 双条件 p<-> q

- A proposition is a **tautology**(永真式) if its truth table contains only true values for every case.

- A proposition is a **contradiction**(永假式) if its truth table contains only false values for every case.

- A proposition is neither a tautology nor a contradiction is called a **contingence**.

析取合取范式

In general, a formula in disjunctive normal form is

$$(A_{11} \wedge A_{12} \wedge \cdots A_{1n_1}) \vee \cdots \vee (A_{k1} \wedge A_{k2} \wedge \cdots A_{kn_k})$$

where A_{ij} are literals.

最小项？ 即包含所有变量的合取式。

Example: Convert formula $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$ into a full disjunctive form.

Solution: $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p \quad \Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \vee r) \rightarrow p$

$$\Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg r) \qquad \boxed{\text{Disjunctive Normal Form}}$$

$$\Leftrightarrow [(p \wedge (q \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg r)] \vee [(p \vee \neg p) \wedge (q \wedge \neg r)]$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$
$$\vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee [(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)]$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$
$$\vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

$$\Leftrightarrow m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

$$\Leftrightarrow \sum(2,4,5,6,7)$$

谓词量词

全称量词

存在量词

量词的转换公式

Some important Equivalent Predicates Formula

- De Morgan's laws for predicates:

$$\neg \forall x p(x) \Leftrightarrow \exists x \neg p(x)$$
$$\neg \exists x p(x) \Leftrightarrow \forall x \neg p(x)$$

- Quantifiers — handle with care!

$$\forall x(p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow (\forall x p(x)) \wedge (\forall x(q(x))$$
$$\exists x(p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow (\exists x p(x)) \vee (\exists x(q(x))$$

But

$$\forall x(p(x) \vee q(x)) \not\Leftrightarrow \forall x p(x) \vee \forall x q(x) \qquad (\text{“}\Leftarrow\text{” still holds})$$

$$\exists x(p(x) \wedge q(x)) \not\Leftrightarrow \exists x p(x) \wedge \exists x(q(x) \qquad (\text{“}\Rightarrow\text{” still holds})$$

- More logical equivalence:

1) $A \wedge \forall x q(x) \Leftrightarrow \forall x(A \wedge q(x))$, x is not occurring in A

$A \vee \forall x q(x) \Leftrightarrow \forall x(A \vee q(x))$, x is not occurring in A

$\forall x q(x) \rightarrow A \Leftrightarrow \exists x(q(x) \rightarrow A)$, x is not occurring in A

$A \rightarrow \forall x q(x) \Leftrightarrow \forall x(A \rightarrow q(x))$, x is not occurring in A

2) $A \wedge \exists x q(x) \Leftrightarrow \exists x(A \wedge q(x))$, x is not occurring in A

$A \vee \exists x q(x) \Leftrightarrow \exists x(A \vee q(x))$, x is not occurring in A

$\exists x q(x) \rightarrow A \Leftrightarrow \forall x(q(x) \rightarrow A)$, x is not occurring in A

$A \rightarrow \exists x q(x) \Leftrightarrow \exists x(A \rightarrow q(x))$, x is not occurring in A

chap 2

集合定义

韦恩图

子集定义，包含，被包含，相等证明

幂集（形似指数函数？），（集合的集合）

笛卡尔积，序偶

集合运算

交，并，补，差，

对称差

– *Symmetric Difference*

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

集合的大小（基数 Cardinality）

容斥原理

• **Principle of Inclusion-exclusion**: Let A and B are two finite sets, then

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

The principle of inclusion-exclusion can be extended to three or more sets.

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1} |\cap_{i=1}^{n} A_i|$$

可数

1个集合或者是有限集或者与自然数集具有相同的基数，这个集合就称为可数的 (countable) 。 一个集合不是 可数的，就称为不可数的(uncountable) 。
如 果 一个无限集 S 是 可数的， 我们用符号次。来表示集合 S 的基数（这里 次是 阿里夫， 希伯来语字母表的第 一个字母）。

无限集是可数的当且仅当可以把集合中的元素排列成序列（下标是正整数）

定义 1 集合 A 和集合 B 有相同的基数(cardinality)，当且仅当存在从 A 到 B 的一个一一对应。当 A 和 B 有相同的基数时，就写成 $|A| = |B|$。

对于无限集，基数的定义提供了一个衡量两个集合相对大小的方法，而不是衡量一个集合大小的方法。我们还可以定义什么叫做一个集合的基数小于另一个集合的基数。

定义 2 如果存在一个从 A 到 B 的一对一函数，则 A 的基数小于或等于 B 的基数，并写成 $|A| \leqslant |B|$。再者，当 $|A| \leqslant |B|$ 并且 A 和 B 有不同的基数时，我们说 A 的基数小于 B 的基数，并写成 $|A| < |B|$。

2.5.2 可数集

现在把无限集分为两组，一组是与自然数集合有相同的基数，另一组是具有不同的基数。

定义 3 一个集合或者是有限集或者与自然数集具有相同的基数，这个集合就称为可数的(countable)。一个集合不是可数的，就称为不可数的(uncountable)。如果一个无限集 S 是可数的，我们用符号 $\aleph_0$ 来表示集合 S 的基数(这里 $\aleph$ 是阿里夫，希伯来语字母表的第一个字母)。写作 $|S| = \aleph_0$，并说 S 有基数"阿里夫零"。

Chap 5 计数（组合数，定理）

乘法法则（可同时进行）

求和法则（不可同时进行）

减法法则（容斥原理，求和法则计算所有种类方法数，减去同属于两种及以上的种类的方法数）

除法法则（）

鸽洞原理

推论1：从n元素集合到k元素集合的函数（n!=k）不是一对一函数

广义鸽洞原理：如 果 N 个物体放入 k 个盒子，那 么 至 少有一个盒子 包含 了 至 少 取整(N/ k) 个物体。

排列组合

具有 n 个不同元素的集合的 r 排列数是

$$P(n, r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

如果 n 和 r 都是整数，且 $0\leqslant r\leqslant n$，则

$$P(n, r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

具有 n 个不同元素的集合的 r 组合数记为 $C(n, r)$。注意 $C(n, r)$ 也记作 $\binom{n}{r}$，并且称为**二项式系数**。在 6.4 节我们将学习这个记号。

设 n 是正整数，r 是满足 $0\leqslant r\leqslant n$ 的整数，n 元素的集合的 r 组合数等于

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

定理 1　二项式定理　设 x 和 y 是变量，n 是非负整数，那么

$$(x+y)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\cdots+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+\binom{n}{n}y^n$$

定理 2　帕斯卡恒等式　设 n 和 k 是满足 $n\geqslant k$ 的正整数，那么有

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$$

应用推广

定理 1　具有 n 个对象的集合允许重复的 r 排列数是 n^r。

定理 2　n 个元素的集合中允许重复的 r 组合有 $C(n+r-1, r)=C(n+r-1, n-1)$ 个。

表 1　允许和不允许重复的组合与排列

类　型	是否允许重复	公　　式
r 排列	否	$\frac{n!}{(n-r)!}$
r 组合	否	$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$
r 排列	是	n^r
r 组合	是	$\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$

定理 3 设类型 1 的相同的物体有 n_1 个，类型 2 的相同的物体有 n_2 个，…，类型 k 的相同的物体有 n_k 个，那么 n 个物体的不同排列数是

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

定理 4 把 n 个不同的物体分配到 k 个不同的盒子使得 n_i 个物体放入盒子 $i(i=1, 2, \cdots, k)$ 的方式数等于

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

关系相关

定义 6 设 R 是从集合 A 到集合 B 的关系，S 是从集合 B 到集合 C 的关系。R 与 S 的合成是由有序对 (a, c) 的集合构成的关系，其中 $a\in A$，$c\in C$，并且存在一个 $b\in B$ 的元素，使得 $(a, b)\in R$ 且 $(b, c)\in S$。我们用 $S\circ R$ 表示 R 与 S 的合成。

注意S与R的顺序

定义 7 设 R 是集合 A 上的关系。R 的 n 次幂 $R^n(n=1, 2, 3, \cdots)$ 递归地定义为

$$R^1=R \text{ 和 } R^{n+1}=R^n\circ R$$

定理 1 集合 A 上的关系 R 是传递的，当且仅当对 $n=1, 2, 3, \cdots$ 有 $R^n\subseteq R$。

1

求解递推关系

特征方程

解（相同根和不同根**p437**）

定理 1 设 c_1 和 c_2 是实数。假设 $r^2-c_1r-c_2=0$ 有两个不相等的根 r_1 和 r_2，那么序列 $\{a_n\}$ 是递推关系 $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$ 的解，当且仅当 $a_n=\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n$，$n=0, 1, 2, \cdots$，其中 α_1 和 α_2 是常数。

定理 2 设 c_1 和 c_2 是实数，$c_2\neq 0$。假设 $r^2-c_1r-c_2=0$ 只有一个根 r_0。序列 $\{a_n\}$ 是递推关系 $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$ 的解，当且仅当 $a_n=\alpha_1r_0^n+\alpha_2nr_0^n$，$n=0, 1, 2, \cdots$，其中 α_1 和 α_2 是常数。

定理 3 设 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 是实数。假设特征方程

$$r^k-c_1r^{k-1}-\cdots-c_k=0$$

有 k 个不相等的根 $r_1, r_2, \cdots, r_k$。那么序列 $\{a_n\}$ 是递推关系

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_ka_{n-k}$$

的解，当且仅当

$$a_n=\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n+\cdots+\alpha_kr_k^n$$

$n=0, 1, 2, \cdots$，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 是常数。

定理 4 设 c_1，c_2，…，c_k 是实数，假设特征方程

$$r_k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$$

有 t 个不相等的根 r_1，r_2，…，r_t，其重数分别为 m_1，m_2，…，m_t，满足 $m_i \geqslant 1$，$i=1$，2，…，t，且 $m_1+m_2+\cdots+m_t=k$。那么序列 $\{a_n\}$ 是递推关系

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

的解，当且仅当

$$\begin{aligned} a_n = &(\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \cdots + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}) r_1^n \\ &+ (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + \cdots + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}) r_2^n \\ &+ \cdots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \cdots + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}) r_t^n \end{aligned}$$

$n=0$，1，2，…，其中 $\alpha_{i,j}$ 是常数，$1 \leqslant i \leqslant t$ 且 $0 \leqslant j \leqslant m_i - 1$。

带入递推式

多次方程组的求解，重根的解决

Table 1 Useful Generating Functions.

$G(x)$	a_k
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k$	$C(n,k)$
$(1+ax)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^k x^k$	$C(n,k)a^k$
$(1+x^r)^n$	$C(n,k/r)$ if $r \mid k$; 0 otherwise
$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k$	1 if $k \le n$; 0 otherwise
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$	1
$\frac{1}{1-ax} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k$	a^k
$\frac{1}{1-x^r} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{rk}$	1 if $r \mid k$; 0 otherwise
$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$	$k+1$
$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k$	$C(n+k+1,k)$
$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)(-x)^k$	$(-1)^k C(n+k+1,k)$
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$1/k!$

关系

复合关系（空心圆点乘，，传递）

关系矩阵

闭包

算法一：R*=所有R的并集

warshall 算法求解R*

（W1,W2……,代表了以v1，{v1,v2},{v1,v2,v3}为**中间节点**的路径矩阵）

等价关系（自反、对称、传递）

等价类

分区（即元素分组）依靠等价类

偏序（自反、反对称、传递）

可比/不可比（是否有关系?）

词典序

哈塞图（去除依靠传递性导致的边与环）

极大元极小元，最大元，最小元，格（存在最小上界和最大下界（上下界是否可比？））

图

邻接（adjacent）

v的所有邻接点N(v)

v的度deg（v）(环贡献两度)

孤立点（isolated）（度为0的点）

悬挂点（pendant）（度为1的点）

定理 1 **握手定理** 设 $G=(V, E)$ 是有 m 条边的无向图，则

$$2m=\sum_{v\in V}\deg(v)$$

（注意即使出现多重边和环，这个式子也仍然成立。）

有向图的基本无向图（underlying undirected graph）

comlete graph　　cycles　　wheels　　n-Cubes

例 5　完全图　***n* 个顶点的完全图**记作 K_n，是在每对不同顶点之间都恰有一条边的简单图。图 3显示了 $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ 的图 K_n。至少有一对不同的顶点不存在边相连的简单图称为**非完全图**。◀

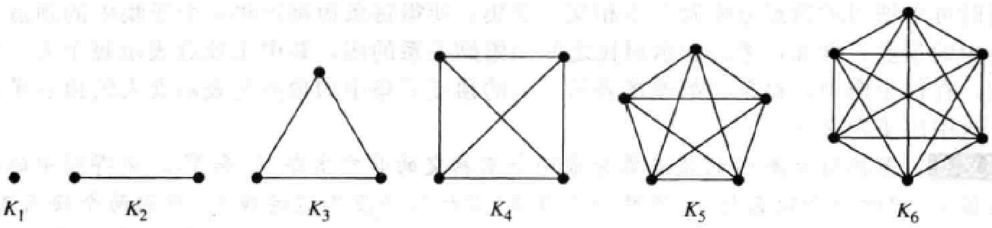


图 3　图 K_n，其中 $1\leqslant n\leqslant 6$

例 6　圈图　**圈图 C_n**（$n\geqslant 3$）是由 n 个顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 以及边 $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \cdots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$ 组成的。图 4 显示圈图 C_3、C_4、C_5 和 C_6。◀

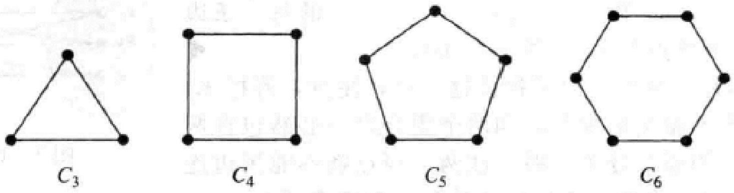


图 4　圈图 C_3、C_4、C_5 和 C_6

例 7　轮图　当给圈图 C_n，$n\geqslant 3$，添加另一个顶点，并把这个新顶点与 C_n 中的 n 个顶点逐个连接时，就得到**轮图 W_n**。图 5 显示了轮图 W_3、W_4、W_5 和 W_6。◀

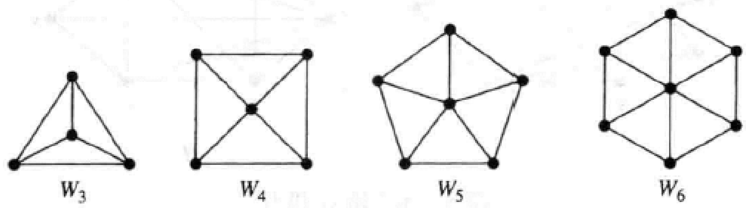
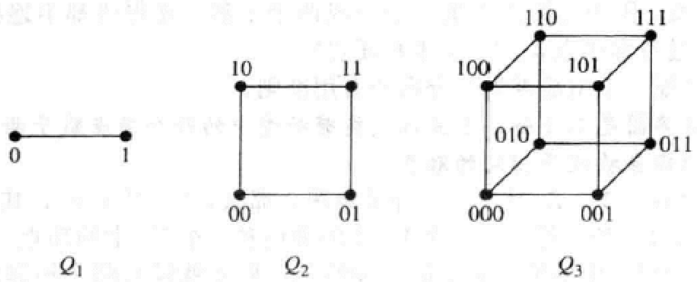


图 5　轮图 W_3、W_4、W_5 和 W_6

例 8　*n* 立方体图　***n* 立方体图**记作 Q_n，是用顶点表示 2^n 个长度为 n 的位串的图。两个顶点相邻，当且仅当它们所表示的位串恰恰有一位不同。图 6 显示了图 Q_1、Q_2 和 Q_3。



二分图（bipartite graph）

定理 4　一个简单图是二分图，当且仅当能够对图中的每个顶点赋予两种不同的颜色，并使得没有两个相邻的顶点被赋予相同的颜色。

例 13　完全二分图　**完全二分图 $K_{m,n}$** 是顶点集划分成分别含有 m 和 n 个顶点的两个子集的图，并且两个顶点之间有边当且仅当一个顶点属于第一个子集而另一个顶点属于第二个子集。图 9 显示了完全二分图 $K_{2,3}$、$K_{3,3}$、$K_{3,5}$ 和 $K_{2,6}$。◀

图的同构

伪图的邻接矩阵，矩阵的原素为度

关联矩阵（有度即为1）

连通性（通路无重复节点）

关键点，割点

割边，桥

不含割点称为不可分割图

有向图的连通性

- An directed graph is **strongly connected** if there is a path from a to b and from b to a when ever a and b are vertices in the graph.
- An directed graph is **weakly connected** if there is a path between any two vertices in the underlying undirected graph.

同构不能仅看度，还需要看同度连接的节点的度，即判断通路，回路

欧拉回路（包含每一条边）

定理 1 含有至少 2 个顶点的连通多重图具有欧拉回路当且仅当它的每个顶点的度都为偶数。

定理 2 连通多重图具有欧拉通路但无欧拉回路当且仅当它恰有 2 个度为奇数的顶点。

哈密顿回路（包含每一个点）

定理 3 **狄拉克定理** 如果 G 是有 n 个顶点的简单图，其中 $n\geqslant 3$，并且 G 中每个顶点的度都至少为 $n/2$，则 G 有哈密顿回路。

定理 4 **欧尔定理** 如果 G 是有 n 个顶点的简单图，其中 $n\geqslant 3$，并且对于 G 中每一对不相邻的顶点 u 和 v 来说，都有 $\deg(u)+\deg(v)\geqslant n$，则 G 有哈密顿回路。

定理 1 **欧拉公式** 设 G 是带 e 条边和 v 个顶点的连通平面简单图。设 r 是 G 的平面图表示中的面数。则 $r=e-v+2$。

推论 1 若 G 是 e 条边和 v 个顶点的连通平面简单图，其中 $v\geqslant3$，则 $e\leqslant3v-6$。

图着色

赋颜色（相邻不相同）

树

Theorem: A full m-ary tree with i internal vertices contains $n = mi + 1$ vertices.

Theorem: There are at most m^h leaves in m-ary tree of height h.