P274 22.3

1.(1) 解：$P=yz$，$Q=zx$，$R=xy$. 由高斯公式

$$\oiint yz\,dydz+zx\,dzdx+xy\,dxdy$$

$$=\iiint_V\left(\frac{\partial yz}{\partial x}+\frac{\partial zx}{\partial y}+\frac{\partial xy}{\partial z}\right)dV$$

$$=\iiint_V 0\,dV=0$$

(3) 解：$P=x^2$，$Q=y^2$，$R=z^2$ 对 x,y 作变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$

$$原式=\iiint_V\left(\frac{\partial x^2}{\partial x}+\frac{\partial y^2}{\partial y}+\frac{\partial z^2}{\partial z}\right)dV$$

$$=2\iiint_V(r\cos\theta+r\sin\theta+z)dV$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^h dr\int_r^h r[r\cos\theta+r\sin\theta+z]dz$$

$$=2\int_0^{2\pi}(\sin\theta+\cos\theta)d\theta\int_0^h r^2dr\int_r^h dz+2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h dr\int_r^h rz\,dz$$

$$=0+4\pi\int_0^h\frac{1}{2}r(h^2-r^2)dr$$

$$=\frac{\pi}{2}h^4$$

(5) 解：由于S不是封闭曲面，需要添加 S'：$x^2+y^2\le a^2$，$z=0$，取下侧为正方向。

$$\iint_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy$$

$$=\oiint_{S+S'} x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy-\iint_{S_1} x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy$$

$$=\iiint_V 3\,dV-0=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a dr\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r\,dz=2\pi a^3$$

2、解：记空间区域各侧面 S_1：$x=0$，$0\le y,z\le1$（后侧为正方向）

S_2：$y=0$，$0\le x,z\le1$（左侧为正方向），S_3：$z=0$，$x\ge0$，$y\ge0$，$x^2+y^2\le1$（下侧为正方向）。

S_4：$z=1$，$x\ge0$，$y\ge0$，$x^2+y^2\le1$（上侧为正方向）

S_5：$x^2+y^2=1$，$0\le z\le1$（外侧为正方向）

$$\iiint_V (xy+yz+zx)\,dxdydz=\oiint_{\substack{S_1+S_2+S_3+\\S_4+S_5}} xyz\,dydz+xyz\,dzdx+xyz\,dxdy$$

$$=\sum_{i=1}^{5}\iint_{S_i} xyz\,dydz+xyz\,dzdx+xyz\,dxdy$$

$$=0+0+0+\Big(\iint_{\substack{x^2+y^2\le1\\x\ge0,y\ge0}} xy\,dxdy\Big)+\Big(\iint_{\substack{0\le y\le1\\0\le z\le1}} yz\sqrt{1-y^2}\,dydz+\iint_{\substack{0\le z\le1\\0\le x\le1}} xz\sqrt{1-x^2}\,dzdx\Big)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^3\cos\theta\sin\theta\,dr+2\int_0^1 z\,dz\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$=\frac{11}{24}$$

3.(1) $P=y^2+z^2$， $Q=x^2+z^2$， $R=x^2+y^2$

原式 $=\iint\limits_S (2y-2z)dydz+(2z-2x)dzdx+(2x-2y)dxdy$

$=2\iint\limits_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$

添加曲面 S_1：$z=0$， $x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0$（下侧为正向）

S_2：$y=0$， $x+z\le 1$， $x\ge 0$， $z\ge 0$（左侧为正向）.

S_3 $x=0$， $y+z\le 1$， $y\ge 0$， $z\ge 0$（后侧为正向）

形成封闭曲面，

$I=2\oint\!\!\!\oint\limits_{S+S_1+S_2+S_3} (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy-$

$2\sum\limits_{i=1}^{3}\iint\limits_{S_i}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy.$

$=\iiint\limits_V 0\,dV-\Big(2\iint\limits_{\substack{x+y\le 1\\ x\ge 0,y\ge 0}}(x-y)dxdy+2\iint\limits_{\substack{x+z\le 1\\ x\ge 0,z\ge 0}}(z-x)dzdx+2\iint\limits_{\substack{y+z\le 1\\ y\ge 0,z\ge 0}}(z-y)dydz.$

$=6\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(y-x)dy$

$=0$

P习题275.

3.(3) 解 $P=z-y$，$Q=x-z$，$R=y-x$ S在各平面投影大小相同且面积为 $\frac{1}{2}a^2$.

原式 $=2\iint\limits_S dydz+dzdx+dxdy$

$=2\cdot(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2)$

$=3a^2$

5.(1) 解：$P=x$，$Q=y^2$，$R=-z^3$.

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=0$，$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=0$，$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=0$ 在全空间成立.

∴ 该线积分与路线无关，

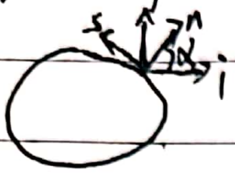
现取路线为A到B的直线.

$$AB:\begin{cases}x=1+t\\ y=1+2t\quad,0\le t\le 1\\ z=1-5t\end{cases}$$

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}xdx+y^2dy-z^3dz=\int_0^1[(1+t)+2(1+2t)^2+5(1-5t)^3]dt$$

$$=-53\frac{7}{12}$$

4.解. 设 $n = i\cos\alpha + j\sin\alpha$. ~ n为曲线L的外法线方向



$\therefore \cos(\widehat{n,x})ds = \cos(\widehat{n,i})ds = \cos\alpha\, ds = dy$

$\cos(\widehat{n,y})ds = \cos(\widehat{n,j})ds = \sin\alpha\, ds = -dx$

$$I = \oint_L x\cos(\widehat{n,x})ds + y\cos(\widehat{n,y})ds = \oint_L x\,dy - y\,dx = 2\iint_D d\sigma = 2S_D$$

S_D即L包围的有界区域的面积.

5.(2) $P = 2x\cos y - y^2\sin x \quad Q = 2y\cos x - x^2\sin y$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y\sin x - 2x\sin y = \frac{\partial P}{\partial y}$$ 在全平面上

曲线积分在整个平面上与路线无关, 取折线 $O(0,0) \to A(0,y) \to B(x,y)$ 积分

$$原式 = \int_0^y 2y\,dy + \int_0^x (2x\cos y - y^2\sin x)dx$$

$$= y^2 + x^2\cos y + (y^2\cos x)\Big|_0^x$$

$$= x^2\cos y + y^2\cos x$$

(4)解 $P = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad Q = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$\therefore$曲线积分在任何不包含原点的区域内与路线无关,

取折线 $A(1,0) \to B(1,8) \to C(6,8)$.

$$原式 = \int_0^8 \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy + \int_1^6 \frac{x}{\sqrt{64+x^2}}dx$$

$$= 9$$

6.(2) 解：$P=e^x[e^y(x-y+2+y]$，$Q=e^x[e^y(x-y)+1]$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x[e^y(x-y)+1]+e^{x+y}.=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

$\therefore$ ~~B~~ 而 $e^x[e^y(x-y+2)+y]dx+e^x[e^y(x-y)+1]dy$ 在整个平面上为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} e^x[e^y(x-y+2)+y]dx+e^x[e^y(x-y)+1]dy$$

$$=\int_0^y(1-ye^y)dy+\int_0^x e^x[e^y(x-y+2)+y]dx+C$$

$$=(y-ye^y+e^y)\Big|_0^y+[ye^x+e^{x+y}(x-y+2)-e^{x+y}]\Big|_0^x+C$$

$$=e^{x+y}(x-y+1)+ye^x+C$$

8.解：AMB与BA围成区域D，正方向，则由格林公式，$P=\varphi(y)e^x-my$

$Q=\varphi'(y)e^x-m$

$$\text{原式}=\oint_{AMB+BA}Pdx+Qdy+\int_{AB}Pdx+Qdy$$

直线AB，$(y-y_2)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma+\int_{AB}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy.$$

$$=\iint_D md\sigma+\int_{AB}[(\varphi(y)e^x-my)dx+(\varphi'(y)e^x-mx)dy]+(mx-m)dy$$

$$=\iint_D md\sigma+\int_{AB}d[\varphi(y)e^x-mxy]+\int_{x_1}^{x_2}m\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-1)dx$$

$$=mS+\varphi(y_2)e^{x_2}-mx_2y_2-\varphi(y_1)e^{x_1}+mx_1y_1+\frac{m}{2}(y_2-y_1)(x_2+x_1-2)$$