1 曲线切向

(1) $\left(\frac{dx}{du},\frac{dy}{du},\frac{dz}{du}\right)$

(2) $\vec{\eta}_1\times\vec{\eta}_2$ $\quad\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix}$

2 曲面法向

(1) $f(x,y,z)=0 \quad \nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$

(2) $\vec{r}=\vec{r}(u,v) \qquad \vec{r}_u\times\vec{r}_v=\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \vec{z} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_u & y_v & z_v \end{vmatrix}$

3 曲面面积

(1) $\iint_D |\vec{r}_u\times\vec{r}_v|\,dudv$

(2) $\iint_D \sqrt{z_x^2+z_y^2+1}dxdy$

(3) $\iint_D \frac{1}{|f_z|}\sqrt{f_z^2+f_y^2+f_z^2}dxdy$

4 曲线积分

(1) $\int_L f\left(x,y,z\right)ds=\int_L f(u)\sqrt{x_u^2+y_u^2+z_u^2}du$(参数u积分由小到大)

(2) $\int_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}=\int_L F\cos\varphi ds=\int_L Rdx+Pdy+Qdz$

5 曲面积分

(1) $\iint_D f\left(x,y,z\right)dS$

$$= \iint_D f(x,y,z)\left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right| dudv$$

$$= \iint_D f(x,y,z)\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}dxdy$$

$$= \iint_D f\left(x,y,z\right)\frac{1}{|F_z|}\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}dxdy(\text{各参数积分由小到大})$$

(2) $\iint_D \vec{F}\cdot\overrightarrow{dS}$

$$= \iint_D F\cos\varphi dS$$

$$= \iint_D Rcos<\eta,\hat{x}> +Pcos<\eta,\hat{y}> +Qcos<\eta,\hat{z}> dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} Rdxdy + \iint_{D_{yz}} Pdydz + \iint_{D_{xz}} Qdxdz$$

(曲面方向应与x、y、z轴成锐角，反之应该为负号，三项可以按不同的分段分开计算)

6 重积分

(i)可积理论补充：面积的约旦可测，略

(ii)计算：同累次积分，证明略

(iii)换元因子，略。注意：换元因子要保号，且不可为0，注意加绝对值，

积分上下限皆由小到大

7 幂级数

对于幂级数$S(x) = \sum a_n x^n$

(i)收敛半径存在，在$(-R, R)$内，级数内闭一致收敛且绝对收敛

(ii)连续、可积、可导性

(I)(-R,R)的内闭区间内，连续

(II)(-R,R)的内闭区间内，可积

(III)(-R,R)的内闭区间内，任意阶可导，且导后的收敛半径不变

仅仅改变端点的点态收敛性

(iii)函数的多项式展开

(I)若函数可展开为幂级数，必有：$a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ 且函数任意阶可导

(II)研究(-R,R)内闭区间内S(x)是否一致收敛于f(x)

方法一：放缩法判断拉格朗日余项$\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x)^{n+1}$是否一致趋于0

方法二：魏尔斯特拉斯法判断拉格朗日余项是否一致趋于0。即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, \forall x \in (-R, R) \quad st : \left| f^{(n)}(x) \right| < \varepsilon R^{-n} n!$$

8 Γ与B函数

$(i)\Gamma$函数

定义：$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t(x>0)$

变式：$\Gamma(x)=2\int_0^{+\infty} t^{2x-1}e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$

递推关系：$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\Gamma(n)=(n-1)!\Gamma(1)$

常用积分结果：$\Gamma(\frac{1}{2})=2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t=\sqrt{\pi},\Gamma(1)=1$

$(ii)\Gamma$函数

定义：$B(P,Q)=\int_0^1 x^{P-1}(1-x)^{Q-1}dx(P>0,Q>0)$

变式：

(1)命$x=\cos^2\varphi,B(P,Q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2Q-1}\varphi\cos^{2P-1}\varphi d\varphi$

(2)命$x=\dfrac{y}{1+y},B(P,Q)=\int_0^{+\infty}\dfrac{y^{P-1}}{(1+y)^{P+Q}}dy.$

(3)命$y=\dfrac{1}{t},B(P,Q)=\int_0^1\dfrac{y^{P-1}+y^{Q-1}}{(1+y)^{P+Q}}dy$

递推关系：

$(1)B(P,Q)=\dfrac{Q-1}{P+Q-1}B(P,Q-1),(P>0,Q>1);$

$(2)B(P,Q)=\dfrac{P-1}{P+Q-1}B(P-1,Q),(P>1,Q>0);$

性质：$B(P,Q)=B(Q,P)$

(iii)联系:$B(P,Q)=\dfrac{\Gamma(P)\Gamma(Q)}{\Gamma(P+Q)}$