7、

(2) 解：$f(1,\frac{y}{x})=\frac{2\times1\times\frac{y}{x}}{1^2+(\frac{y}{x})^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}=f(x,y)$.

(3) 解：$f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-(tx)(ty)\tan\frac{tx}{ty}$.

$=t^2(x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y})$:

$=t^2f(x,y)$.

14. 证明：充分性，$\exists\{P_k\}\subset D$，使 $\lim\limits_{k\to\infty}f(P_k)=\infty$

说明对于 $\forall M>0$，$\exists N>0$ 使当 $k>N$ 时有 $|f(P_k)|>M$

即 $f(x)$ 在 D 上无界

必要性 f 在 D 上无界，故，对 $\forall M_k>0$，$\exists P_k\in D$ 使 $|f(P_k)|>M_k$，

取 $M=1$ $\exists P_1\in D$，有 $|f(P_1)|>1$；

类推 $M=2,3,4\cdots n,\cdots$，有 $P_2,P_3,P_4,\cdots P_n\cdots\in D$ 使 $|f(P_n)|>n$，

即 $\lim\limits_{k\to\infty}f(P_k)=\infty$.

1、(1) $0\le\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\le\frac{x^2y^2}{2|x||y|}=\frac{1}{2}|x||y|\to0\ ((x,y)\to(0,0))$

$\therefore\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$

(3) 令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ $(x,y)\to(0,0)$ $r\to0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}=\lim\limits_{r\to0}\frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}-1}=\lim\limits_{r\to0}(1+\sqrt{1+r^2})=2$.

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(2x-y)=0$ $\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\frac{1}{2x-y}=\infty$

2.(1) 令 $y=kx$，$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=kx}}\frac{y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{k^2}{1+k^2}=\frac{k^2}{1+k^2}$

对于不同k，有不同的极限值。故重极限不存在。

累次极限 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\frac{y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to0}0=0$

$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\frac{y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{y\to0}1=1$

(4) 令 $y=x^2$ 则 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x^2}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x^2}}\frac{x^3+x^6}{2x^2}=\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x^2}}\frac{x+x^4}{2}=0$

令 $y=x^3-x^2$。$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x^3-x^2}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+x^9-3x^8+3x^7-x^6}{x^3}=1$

重极限不存在.

累次极限. $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim\limits_{x\to0}x=0$

$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim\limits_{y\to0}y^2=0$

(6) 令$y=x$ $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^3} = 0$

令$y=x^2-x$，则 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2-x}} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{x^2(x^4-2x^3+x^2)}{x^3+(x^6-3x^5+3x^4-x^3)} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ 重极限不存在

累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$

3、证明 $\because \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_2>0$，当 $0<|x-a|<\delta_2$，$0<|y-b|<\delta_2$ 时，

$|f(x,y)-A|<\varepsilon$

$\because \lim\limits_{x\to a} f(x,y)=\varphi(y)$，$y\in \mathring{U}(b;\delta_1)$.

$\exists\ \delta_3>0$，当 $0<|x-a|<\delta_3$，$|y-b|<\delta_1$ 时，有

$|f(x,y)-\varphi(y)|<\varepsilon$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$，对 $\varepsilon>0$，当 $0<|x-a|<\delta$，$0<|y-b|<\delta$ 时

$|\varphi(y)-A| \le |\varphi(y)-f(x,y)|+|f(x,y)-A|<2\varepsilon$.

$\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)=A$.

4.解 因为对 $\forall x,y\in R$，有 $x^2+y^2\geq 2|x|\cdot|y|$，因此

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\frac{x^2|y|}{x^2+y^2}\leq\frac{1}{2}|x|,$$

对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$，则当 $0<|x|<\delta$，$0<|y|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$$

6、(1) 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，使当 $x>M$，$y>M$ 时，有，

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

则称 $(x,y)\to(+\infty,+\infty)$ 时，$f(x,y)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}f(x,y)=A$$

7.(1) 令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，当 $(x,y)\to(+\infty,+\infty)$ 时，$r\to+\infty$，

$$0\leq\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=\frac{r^2}{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}=\frac{1}{r^2}\cdot\frac{4}{3+\cos4\theta}\leq\frac{2}{r^2}\to 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0$$

(3) $$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{x\sin y}=\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left[\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{xy}\right]^{\frac{\sin y}{y}}=\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}e^{\frac{\sin y}{y}}=e^{0}$$

$$=1$$

1.(2) 当$x+y$为整数时 f间断，间断处曲线方程即 $x+y=n$，$z=n$，n为整数.

(4) 当$x^2+y^2\neq 0$时，f为初等函数经过运算得到，一定连续.

$x^2+y^2=0$时，即$(x,y)=(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin xy}{xy}\cdot\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=1\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{2xy}}=0$$

故 $f(x,y)$在全平面连续

(5) 对于平面内任意点$(x_0,y_0)\in R^2$，$y_0\neq 0$，

当x_0为无理数时 取有理数点列$\{x_n\}$，使$x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$，

$$\lim_{\substack{x_n\to x_0\\ y=y_0}}f(x,y)=\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_0)=\lim_{n\to\infty}y_0=y_0\neq 0=f(x_0,y_0)$$

x_0为~~无理~~有理数时，取无理点列$\{x_n\}$使$x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$，

$$\lim_{\substack{x_n\to x_0\\ y=y_0}}f(x,y)=\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_0)=\lim_{n\to\infty}0=0\neq y_0=f(x_0,y_0)$$

对$\forall(x_0,0)\in R^2$，有$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)}f(x,y)=0=f(x_0,y_0)$

$f(x,y)$在直线$y=0$处连续 在其余各处均间断

3.~~解~~证明：令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$\because (x,y)\to(0,0) \Rightarrow r\to 0$，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} r^{1-2p}\cos\theta$$

当 $0<p<\frac{1}{2}$ 时 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处连续。

$p\geq\frac{1}{2}$ 时，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处不连续。无极限存在。

4.~~解~~证：$\because f(x,y)$ 对 y 在 $[c,d]$ 上处处连续，对 $\forall P_0(x_0,y_0)\in S$。

$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta_1>0$，当 $c\leq y\leq d$ 且 $|y-y_0|<\delta_1$ 时有

$$|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又 $\because f(x,y)$ 对 x 在 $[a,b]$ 上且关 y 一致连续，因而对 $\varepsilon>0$。

$\exists \delta_2>0$ 当 $x_1,x_2\in[a,b]$ 时 对 $\forall y\in[c,d]$，$|x_1-x_2|<\delta_2$ 时，

$$|f(x_1,y)-f(x_2,y)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当 $(x,y)\in S$，$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)| \leq |f(x,y)-f(x_0,y)|+|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

由 P_0 任意性，$f(x,y)$ 在 S 处处连续。

7、证明：若$L=0$，知$f(x,y')=f(x,y'')$，$f(x,y)$在G上对x连续，∴$f(x,y)$在G上连续。

若$L>0$，∵f对x连续，对于$\forall P_0(x_0,y_0)\in G$，

$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta_1>0$，当$P(x,y_0)\in G$，$|x-x_0|<\delta_1$时，

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

取$\delta=\min\{\delta_1,\frac{\varepsilon}{2L}\}$，则当$P(x,y)\in G$，$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$时，有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|$$

$$\le L|y-y_0|+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$<L\cdot\frac{\varepsilon}{2L}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$f(x,y)$在P_0连续，由P_0任意性，f在G处处连续。

9、证明：f在D上是由初等函数运算得到的，无间断点，一定连续。

下证f在D上不一致连续。

对$\varepsilon_0=1$，对于极小的正数$\delta<\frac{1}{24}$，取$P_0(x_0,y_0)=(1-\frac{\delta}{2},1-\frac{\delta}{2})$，

$P_1(x_1,y_1)=(1-\frac{\delta}{3},1-\frac{\delta}{3})\in D$.

$$\rho(P_0,P_1)=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}=\frac{\delta}{\sqrt{18}}<\delta.$$

$$|f(x_1,y_1)-f(x_0,y_0)|=\frac{1}{1-(1-\frac{\delta}{3})^2}-\frac{1}{1-(1-\frac{\delta}{2})^2}$$

$$=\frac{12-5\delta}{\delta(6-\delta)(4-\delta)}>12-\frac{5}{24}>\varepsilon_0$$

即$f(x,y)=\frac{1}{1-xy}$在D上不一致连续。

4.(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b \iff \lim\limits_{\|x-a\|\to 0}\|f(x)-b\|=0$,

对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, 当 $0<\|x-a\|<\delta$ 时, 有 $\|f(x)-b\|<\varepsilon$.

$$\big|\,\|f(x)\|-\|b\|\,\big| \le \|f(x)-b\| < \varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x\to a}\|f(x)\|=\|b\|$

若 $\|b\|=0$, 则 $\lim\limits_{x\to a}\|f(x)\|=0$, $\therefore \lim\limits_{x\to a} f(x)=0$

$\exists \lim\limits_{x\to b} f^{-1}(x)=a$. 即 $b=0$ 时可逆.

(2) $\because \lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$,

$\therefore$ 对 $\forall\, 0<\varepsilon<1$, $\exists \delta>0$, 当 $0<\|x-a\|<\delta$ 时,

$$\|f(x)-b\| < \frac{\varepsilon}{2(1+\|c\|)}$$

$$\|g(x)-c\| < \frac{\varepsilon}{2(1+\|b\|)}$$

$$|f(x)^T g(x)-b^T c| \le \|f(x)\|\,\|g(x)-c\| + \|f^T(x)-b^T\|\,\|c\|$$

$$= \|f(x)-b+b\|\cdot\|g(x)-c\| + \|f^T(x)-b^T\|\cdot\|c\|$$

$$\le (\|f(x)-b\|+\|b\|)\|g(x)-c\| + \|f(x)-b\|\cdot\|c\|$$

$$< (1+\|b\|)\frac{\varepsilon}{2(1+\|b\|)} + \|c\|\frac{\varepsilon}{2(1+\|c\|)}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

$\therefore \lim\limits_{x\to a}[f^T(x)\cdot g(x)]=b^T c$.

5. 证明: 由题意, 对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists\, \delta=\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)^{\frac{1}{r}}$, 只要 $\|x-y\|<\delta$,

$$\|f(x)-f(y)\| \le K\|x-y\|^r = \varepsilon.$$

故 f 是 D 上连续函数。