spline

19/07/2024

Si consideri la funzione $S(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha x + \beta & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ -x^3 + \alpha x^2 & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

a) per essere una spline deve essere:
- polinomio a tratti gradi ≤ 3
- S, S', S'' continue

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} S(x) = 1+\alpha+\beta \\ \lim_{x\to 1^+} S(x) = -1+\alpha \end{array}\right\} 1+\alpha+\beta = -1+\alpha \Rightarrow \beta = -1 + \cancel{\alpha} - 1 - \cancel{\alpha} \Rightarrow \beta = -2$$

$S(x)$ per essere continua deve avere $\beta = -2$

$$S'(x) = \begin{cases} 3x^2 + \alpha & 0 \le x \le 1 \\ -3x^2 + 2\alpha x & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} S(x) = 3+\alpha \\ \lim_{x\to 1^+} S(x) = 3+2\alpha \end{array}\right\} 3+\alpha = -3+2\alpha \Rightarrow \alpha - 2\alpha = -3-3 \Rightarrow -\alpha = -6 \Rightarrow \alpha = 6$$

$S'(x)$ per essere continua deve avere $\alpha = 6$ e $\beta = -2$

$$S''(x) = \begin{cases} 6x & 0 \le x \le 1 \\ -6x + 2\alpha & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} S(x) = 6 \\ \lim_{x\to 1^+} S(x) = -6+2(6) = -6+12 = 6 \end{array}\right\} S''(x) \text{ continua}$$

b) spline naturale $\iff S''(a) = S''(b) = 0$, $a = 0$, $b = 2$

$a=0$ e $b=2$ perchè sono i valori esterni

$S''(0) = 6 \cdot 0 = 0$

$S''(0) = -6(2) + 2(6) = -12 + 12 = 0$

è naturale perchè è verificata la condizione

22/01/2024

Si consideri la funzione $S(x) = \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ -2x^3 + 3x^2 & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$

a) per essere una spline deve essere:
- polinomio a tratti gradi ≤ 3
- S, S', S'' continue

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} S(x) = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} S(x) = 0 \end{array}\right\} \text{funzione continua per } x=0$$

$$S'(x) = \begin{cases} 2\cdot 3x^2 + 3\cdot 2x \\ -2\cdot 3x^2 + 3\cdot 2x \end{cases} \begin{cases} 6x^2 + 6x & -1 \le x \le 0 \\ -6x^2 + 6x & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} S'(x) = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} S'(x) = 0 \end{array}\right\} \text{funzione continua per } x=0$$

$$S''(x) = \begin{cases} 12x & -1 \le x \le 0 \\ -12x & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\left.\lim_{x\to 0^-} S''(x) = 0 \quad \lim_{x\to 0^+} S''(x) = 0 \right\} \text{funzione continua per } x=0$$

b)
$f(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$f(-1) = 1 - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 = 1$

$f(0) = 0$

$f(1) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 = 1$

per essere interpolante devo ottenere gli stessi valori di $f(x)$

$S(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 = 2\cdot(-1) + 3(1) = 3 - 2 = 1$

$S(0) = 0$

$S(1) = -2(1)^3 + 3(1)^2 = 3 - 2 = 1$

dimostrato che $s(x)$ è interpolante alla funzione $1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

10/02/2022

Si consideri la funzione

$$S(x) = \begin{cases} x^3 + 9x^2 + 2 & \text{se } x \in [-2, -1] \\ -x^3 + 3x^2 - 6x & \text{se } x \in [-1, 0] \end{cases}$$

a)
per essere una spline deve essere:
- polinomio a tratti gradi ≤ 3
- s, s', s'' continue

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -1^-} S(x) &= -1 + 9 + 2 = 10 \\ \lim_{x \to -1^+} S(x) &= 1 + 3 + 6 = 10 \end{aligned}\right\} \text{funzione continua per } x = 10$$

$$S'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 18x & x \in [-2, -1] \\ -3x^2 + 6x - 6 & x \in [-1, 0] \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -1^-} S(x) &= 3 - 18 = -15 \\ \lim_{x \to -1^+} S(x) &= -3 - 6 - 6 = -15 \end{aligned}\right\} \text{funzione continua per } x = -15$$

$$S''(x) = \begin{cases} 6x + 18 & x \in [-2, -1] \\ -6x + 6 & x \in [-1, 0] \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -1^-} S(x) &= -6 + 18 = 12 \\ \lim_{x \to -1^+} S(x) &= 6 + 6 = 12 \end{aligned}\right\} \text{funzione continua per } x = 12$$

È NATURALE?

$S''(a) = S''(b) = 0$ con $a = -2$ e $b = 0$

$S''(a) = 6(0) + 18 = 18$

$S''(b) = -6(2) + 6 = -12 + 6 = 6$

non naturale

b)
$f(x) = 5x^2 - 5x$

$f(-2) = 5(-2)^2 - 5(-2) = 20 + 10 = 30$

$f(-1) = 5(-1)^2 - 5(-1) = 5 + 5 = 10$

$f(0) = 0$

per essere interpolante devo ottenere gli stessi valori di $f(x)$

$f(-2) = (-2)^3 + 9(-2)^2 + 2 = -8 + 36 + 2 = 30$

$f(-1) = (-1)^3 + 9(-1)^2 + 2 = -1 + 9 + 2 = 10$

$f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1)^2 - 6(-1) = 1 + 3 + 6 = 10$

$f(0) = -(0)^2 + 3(0)^2 - 6(0) = 0$

22/01/2021

Si consideri la funzione

$$S(x) = \begin{cases} x^3+6x-2 & \text{se } x\in[0,1] \\ -x^3+6x^2 & \text{se } x\in[1,2] \end{cases}$$

a)

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} S(x) &= 1+6-2 = 5 \\ \lim_{x\to 1^+} S(x) &= -1+6 = 5 \end{aligned}\right\} \text{funzione continua per } x=5$$

$$S'(x) = \begin{cases} 3x^2+6 & x\in[0,1] \\ -3x^2+12x & x\in[1,2] \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} S(x) &= 3+6 = 9 \\ \lim_{x\to 1^+} S(x) &= -3+12 = 9 \end{aligned}\right\} \text{funzione continua per } x=9$$

$$S''(x) = \begin{cases} 6x & x\in[0,1] \\ -6x+12 & x\in[1,2] \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} S(x) &= 6 \\ \lim_{x\to 1^+} S(x) &= -6+12 = 6 \end{aligned}\right\} \text{funzione continua per } x=6$$

b)

Spline naturale $\Leftrightarrow S''(a) = S''(b) = 0$ con $a=0$ e $b=2$

$S''(a) = 6\cdot 0 = 0$

$S''(b) = -6(2)+12 = -12+12 = 0$

è naturale

22/07/2021

Si consideri la funzione

$$S(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{se } x\in[-1,0] \\ x^3 & \text{se } x\in[0,1] \end{cases}$$

a)

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} S(x) &= 0 \\ \lim_{x\to 0^+} S(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{continua per } x=0$$

$$S'(x) = \begin{cases} -3x^2 & x\in[-1,0] \\ 3x^2 & x\in[0,1] \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} S'(x) &= 0 \\ \lim_{x\to 0^+} S'(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{continua per } x=0$$

$$S''(x) = \begin{cases} -6x & x\in[-1,0] \\ 6x & x\in[0,1] \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} S''(x) &= 0 \\ \lim_{x\to 0^+} S''(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{continua per } x=0$$

naturale $\Leftrightarrow S(a) = S(b) = 0$

con $a=-1$ e $b=1$

$S(a) = -1$

$S(a) = 1$

non naturale

b)

$f(x) = x^2$

$f(-1) = 1$

$f(0) = 0$

$f(1 = 1$

$\xrightarrow{\text{interpolante?}}$

$f(-1) = -(-1)^3 = 1$

$f(0) = -(0)^3 = 0$

$f(0) = (0)^3 = 0$

$f(1) = (1)^3 = 1$

$S(x)$ è interpolante per la funzione $f(x) = x^2$

14/09/2020

Si consideri la funzione $S(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \beta x^2 - 2x & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ -\alpha x^3 - \beta x^2 - 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

a)

$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} S(x) &= 0 \\ \lim_{x\to 0^+} S(x) &= 0 \end{aligned}\right\}$ funzione continua per $x=0$

$S'(x) = \begin{cases} \alpha 3x^2 + \beta 2x - 2 \\ -\alpha 3x^2 - \beta 2x - 2 \end{cases}$

$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} S(x) &= -2 \\ \lim_{x\to 0^+} S(x) &= -2 \end{aligned}\right\}$ funzione continua per $x=-2$

$S''(x) = \begin{cases} 6\alpha x + 2\beta \\ -6\alpha x - 2\beta \end{cases}$

$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} S(x) &= +2\beta \\ \lim_{x\to 0^+} S(x) &= -2\beta \end{aligned}\right\}$ $+2\beta = -2\beta \Rightarrow 4\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$

$S(x)$ per essere continua deve avere $\beta = 0$

b)

$f(x) = x^2 - 2x$

$f(-1) = 1 + 2 = \underline{3}$

$f(0) = 0$

$f(1) = 1 - 2 = \underline{-1}$

$\xrightarrow{\text{interpolante?}}$ NON INTERPOLANTE

$f(-1) = \alpha(-1)^3 + \beta(-1)^2 + 2 = \alpha + 0 + 2 = \underline{2}$

$f(0) = 0$

$f(0) = 0$

$f(1) = -\alpha(1)^3 + \beta(1)^2 - 2 = -\alpha + 0 - 2 = \underline{-2}$