ESAME 24-1-2024

esercizio 1)

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto x^4 + 1$$

1) Determinare se f è iniettiva e/o suriettiva
2) Determinare $f^{-1}(1)$ e $f^{-1}(2)$

1)

f non è iniettiva siccome $f(1) = 2 = f(-1)$

f è surgettiva; dato un qualunque $c \in \mathbb{C}$ esiste sempre un valore $x_0 \in \mathbb{C}$ tale che $f(x_0) = c$ perché per il teorema fondamentale dell'algebra l'equazione $x^4 + 1 - c = 0$ ha sempre soluzioni in $\mathbb{C}$

2)

$f^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{C} \mid x^4 + 1 = 1\} = \{x \in \mathbb{C} \mid x^4 = 0\} = \{0\}$

$f^{-1}(2) = \{x \in \mathbb{C} \mid x^4 + 1 = 2\} = \{x \in \mathbb{C} \mid x^4 = 1\}$
$=$ radici quarte $\{1, -1, i, -i\}$

esercizio 2)

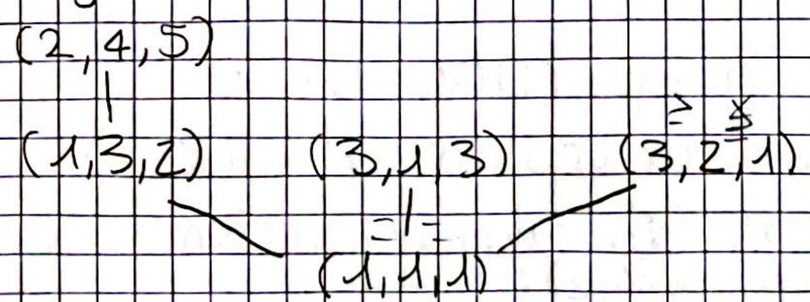
$A = \{(1,1,1), (3,1,3), (1,3,2), (2,4,5), (3,2,1)\}$

1) Si consideri A come sottoinsieme del POSET $(\mathbb{Z}^3, \leq_{x \leq y})$ e si determino massimo, minimo, estremo inferiore e superiore di A

2) Si consideri A come sottoinsieme del POSET $(\mathbb{Z}^3, \text{lex})$ e si determino massimo, minimo, estremo inferiore e superiore di A

1)

diagramma di Hasse



- A ha tre elementi massimali $(2,4,5)$, $(3,1,3)$ e $(3,2,1)$ quindi $\nexists \max A$
- $\min A = \inf A = (1,1,1)$
- insieme dei maggioranti $\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 : (x \geq 3) e (y \geq 4) e (z \geq 5)\}$ quindi $\sup A = (3,4,5)$

2)

$x \leq y \leq z$

LEX

$(1,1,1) \leq (1,3,2) \leq (2,4,5) \leq (3,1,3) \leq (3,2,1)$

- $\min A = \inf A = (1,1,1)$
- $\max A = \sup A = (3,2,1)$

esercizio 3)

1) Calcolare MCD(76,32) con l'algoritmo euclideo
2) Scrivere l'identità di bezout per 76 e 32
3) Stabilire se l'equazione $76x+32y=8$ ammette soluzioni intere e in tal caso determinarne una
4) Stabilire se l'equazione $76x+32y=2$ ammette soluzioni intere e in tal caso determinarne una

1)

$$76 = 2\cdot 32 + 12$$
$$32 = 2\cdot 12 + 8$$
$$12 = 1\cdot 8 + 4$$
$$8 = 2\cdot 4$$

MCD(76,32) = 4

2)

$$4 = 12 - 8\cdot 1 = 12-(32-12\cdot 2) = 12 - 32 + 12\cdot 2 =$$
$$= -32 + 12\cdot 3 = -32 + (76 - 32\cdot 2)\cdot 3 =$$
$$= -32 + 76\cdot 3 - 32\cdot 6 = 76\cdot 3 - 7\cdot 32$$

$$4 = 3\cdot 76 - 7\cdot 32$$

3)

$$4\cdot 2 = 8 \rightarrow 76\cdot 3 - 7\cdot 32 = 4 \quad \times 2$$
$$6\cdot 76 - 14\cdot 32 = 8$$

4)

$$MCD(76,32) = 4 \nmid 2 \rightarrow$$ non ci sono soluzioni intere

esercizio 4)

Si consideri il gruppo $(U(\mathbb{Z}_{42}), \cdot, \bar{1})$

1) Calcolare la cardinalità di $U(\mathbb{Z}_{42})$
2) Stabilire quali dei seguenti insiemi sono sottogruppi di $U(\mathbb{Z}_{42})$:

$$A = \{\bar{0}, \overline{21}\}$$
$$B = \{\bar{1}, \bar{5}, \overline{25}, \overline{31}, \overline{41}\}$$
$$C = \{\bar{1}, \overline{13}\}$$

1)

La cardinalità di $U(\mathbb{Z}_{42})$ è $|U(\mathbb{Z}_{42})| = \varphi(42)$
siccome $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, abbiamo che

$$\varphi(42) = 42\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right) = 12$$

2)

- A non è sottogruppo perchè $\overline{1} \notin A$ e un sottogruppo deve sempre contenere l'elemento neutro del gruppo
- il sottoinsieme B che ha cardinalità $5 \nmid 12 = |U(\mathbb{Z}_{42})|$ non è un sottogruppo
- C è un sottogruppo. $\overline{1}$ è l'elemento neutro, e

$$\overline{13} \cdot \overline{13} = \overline{169} = \overline{4 \cdot 42 + 1} = \overline{1}$$