equivalenza: date due espressioni A e B, queste si dicono equivalenti quando conducono alla stessa verità. A e B sono quindi o entrambe vere o entrambe false. $\equiv$

conseguenza: Date due formule A e B in un modello di riferimento M, A consegue logicamente B nel modello M se e soltanto se la proposizione B è vera ogni volta che la proposizione A è vera!! $\models$ *

LE COSTANTI LOGICHE

connettivi	quantificatori
not $\neg$	esiste $\exists$
and $\wedge$	per ogni $\forall$
or $\vee$	
se... allora... $\rightarrow$	
...se e solo se... $\leftrightarrow$	

$\neg P$ è vera se e solo se P è falsa

$P \vee Q$ è vera se e solo se almeno uno tra P e Q è vera

$P \wedge Q$ è vera se e solo se P e Q sono entrambe vere

legge di De Morgan

$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

$\neg\neg(P \wedge Q) \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$

$P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$

---

tautologia: La tautologia è una proposizione logica composta sempre vera, qualunque siano i valori di verità delle proposizioni logiche elementari di cui è composta.

In altre parole, la tautologia è un'affermazione vera per qualsiasi valore di verità degli elementi che la compongono

contraddizione: la contraddizione è una proposizione logica composta sempre falsa, qualunque siano i valori di verità delle proposizioni logiche elementari di cui è composta. Quindi se Q è una tautologia, $\neg Q$ è una contraddizione

implicazione: $A \to B$ risulta falsa solo se A è vera e B è falsa. La prima proposizione logica A è detta proposizione antecedente mentre la seconda proposizione B è detta proposizione conseguente. L'implicazione cattura il significato di conseguenza logica, nel senso che $A \models B$ se e solo se $\models A \to B$

biimplicazione: $A \leftrightarrow B$ si presenta vera se entrambe le proposizioni sono vere o entrambe sono false. Quindi $A \equiv B$ se e solo se $\models A \leftrightarrow B$. Quindi A è condizione necessaria e sufficiente per B

quantificazioni

$$\neg \forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$$
$$\neg \exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$$
$$\neg \forall x\, P \equiv \exists x\, \neg P$$
$$\neg \exists x\, P \equiv \forall x\, \neg P$$
$$\forall x\, P \equiv \neg\neg \forall x\, P \equiv \neg \exists x\, \neg P$$
$$\exists x\, P \equiv \neg\neg \exists x\, P \equiv \neg \forall x\, \neg P$$

* esempio: $A \wedge \neg B \to A \wedge B$ è conseg. logica di $\neg A$? si

$\neg A$	$A \wedge \neg B$	$\to$	$A \wedge B$	
1	1		1	✓
0	0		0	
0			1	

TAVOLE DI VERITÀ

P	$\neg P$
0	1
1	0

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ALBERI SINTATTICI

A ogni formula è associato un albero sintattico T.
- gli elementi di T sono detti nodi
- se un nodo non ha successori, si dice che è una foglia

Un albero T è binario se ogni nodo ha al più 2 successori immediati
- la lunghezza di un ramo in un albero finito è il numero dei suoi elementi meno 1
- l'altezza di un albero è la massima lunghezza dei suoi rami

esempio:

$$(((A) \wedge (\neg(B))) \rightarrow (\neg(A)))$$

$$((A) \wedge (\neg(B))) \qquad (\neg(A))$$

$$(A) \qquad (\neg(B)) \qquad (A)$$

$$(B)$$

$ht = (3)$

$$\underset{0}{(}\underset{\star}{(}\underset{1}{(}\underset{1}{A}\underset{\cdot}{)}\underset{1}{\wedge}\underset{1}{(}\underset{\star}{\neg}\underset{1}{(}\underset{\cdot}{B}\underset{1}{)}\underset{1}{)}\underset{1}{\rightarrow}\underset{1}{(}\underset{\cdot}{\neg}\underset{1}{(}\underset{1}{A}\underset{1}{)}\underset{1}{)}\underset{0}{)}$$

Logica del prim'ordine

Una logica del prim'ordine estende la logica proposizionale

Simboli logici:

- parentesi: ( )
- virgola: ,
- connettivi: $\neg$ $\vee$ $\wedge$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$
- quantificatori $\exists$ $\forall$
- simboli d'uguaglianza =
- variabili v_0 v_1 v_2

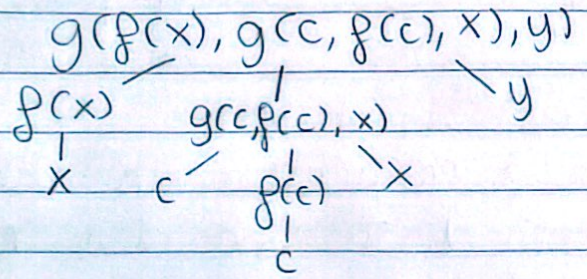
ALBERO SINTATTICO DI UN TERMINE

L'albero sintattico di un termine descrive algoritmicamente la costruzione del termine.

esempio:

$\mathcal{L} = \{f, g, c\}$

f: simbolo funzionale unario
g: simbolo funzionale ternario
c: simbolo di costante

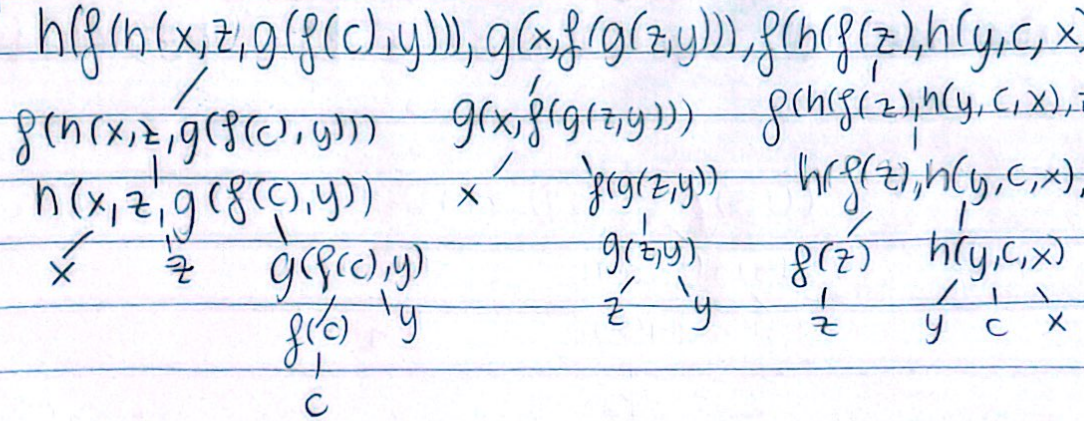


$lh(t) = 21$

Due misure di complessità di un termine t sono:

- lunghezza $lh(t)$, cioè il numero di simboli nella stringa t
- l'altezza, cioè l'altezza dell'albero sintattico di t

esempio:



$lh(t) = 59$ $\quad$ $ht(t) = 5$

Termini

$\mathcal{L} = \{+, \cdot, 1\}$, dove:

- $+, \cdot$ sono simboli funzionali binari
- 1 è simbolo di costante

esempio di termine:

$$+(+(\cdot(x,x), \cdot(+(1,1), \cdot(x,y))), 1)$$

che può essere convertito in polinomio quando $t_1 + t_2$ al posto di $+(t_1, t_2)$ e $t_1 \cdot t_2$ al posto di $\cdot(t_1, t_2)$

$$((x \cdot x) + ((1+1) \cdot (x \cdot y))) + 1$$

$$x^2 + 2xy + 1$$

$$x^2 + 2xy + 1$$

Formule atomiche

Una formula atomica è una stringa del tipo $(R(t_1, t_2, \dots, t_n))$

dove R è simbolo relazionale n-ario di $\mathcal{L}$, e $t_1, t_2, \dots, t_n \in Term$

Sia $\mathcal{L} = \{<, +, \cdot, 0, 1\}$, dove:

- $<$ è simbolo relazionale binario
- $+, \cdot$ sono simboli funzionali binari
- $0, 1$ sono simboli di costante

Allora

$$(=(+(\cdot(x,x),1),0)) \rightarrow x^2 + 1 = 0$$

$$(<(+(\cdot(x,x),1),0)) \rightarrow x^2 + 1 < 0$$

sono formule atomiche.

Per riconoscere se una stringa è una formula atomica:

- il primo e l'ultimo simbolo della stringa siano parentesi corrispondenti

- il secondo simbolo della stringa sia un simbolo di relazione
- il terzo e il penultimo simbolo della stringa siano parentesi

Formule del prim'ordine

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio del prim'ordine. L'insieme delle formule del linguaggio $\mathcal{L}$ (o $\mathcal{L}$-formule) è definito ricorsivamente dalle seguenti clausole:

- ogni formula atomica è una formula
- se φ è una formula, allora $(\neg\varphi)$ è una formula
- se φ, ψ sono formule, allora $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ sono formule
- se φ è una formula e x è una variabile, allora $(\exists x \varphi)$ e $(\forall x \varphi)$ sono formule

Per determinare la costante logica principale di una formula non atomica, si può applicare una variante del corrispondente algoritmo della logica proposizionale

- il primo e ultimo simbolo della stringa sono parentesi
- se il secondo simbolo è $\neg$, quello è il connettivo principale e tutto ciò che segue è la sottoformula principale
- se il secondo simbolo è un'altra parentesi (, allora il connettivo principale è il connettivo che segue la parentesi) associata a questa
- se il secondo simbolo della stringa è un quantificatore, allora quello è il quantificatore principale; questo è seguito da una variabile, e tutto ciò che segue quella variabile, salvo l'ultima parentesi), è la sottoformula principale

Se le condizioni non sono verificate, non è una formula

- Anche per le formule del prim'ordine, la costruzione è descritta da un albero sintattico

esempio:

$$(\exists x((\neg(R(x,c))) \wedge ((P(x)) \rightarrow (f(x)=c))))$$

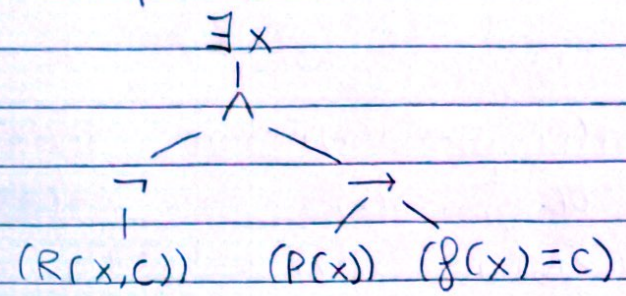
$$((\neg(R(x,c))) \wedge ((P(x)) \rightarrow (f(x)=c)))$$

$$(\neg(R(x,c))) \qquad ((P(x)) \rightarrow f(x)=c))$$

$$(R(x,c)) \qquad (P(x)) \qquad (f(x)=c)$$

$ht = 3$

- l'etichettatura può essere semplificata usando come etichette le costanti logiche principali delle formule corrispondenti



Variabili libere o vincolate

Ogni volta che una variabile compare in una formula costituisce un'occorrenza di quella variabile

- esempio:

la variabile z occorre 3 volte nella formula

$$\varphi: \exists x\, f(x,y) = c \rightarrow \underbrace{\forall z R(z)}_{} \vee \underbrace{S(z)}_{}$$

occorrenza vincolata

$\forall z R(z) = \forall u R(u)$

rimpiazzarlo non cambierebbe il significato

occorrenza libera

$S(z) \neq S(u)$

cambia significato, perché z ha proprietà S (se si cambia cambia la proprietà)

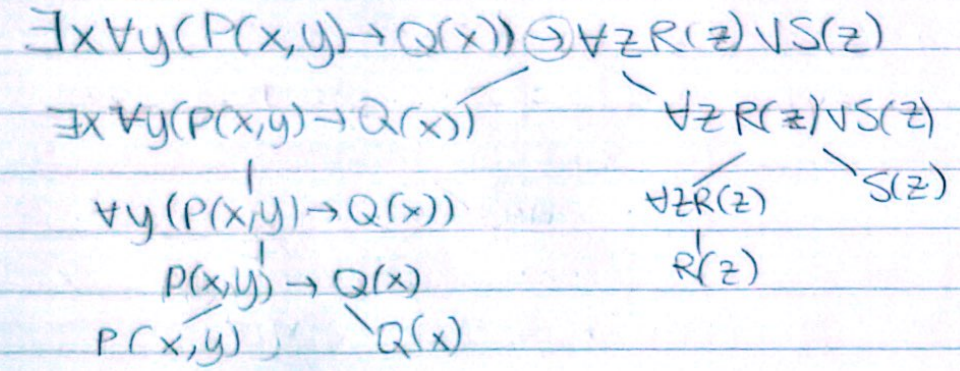
Un'occorrenza di una variabile x in una formula è vincolata se si trova nell'argomento di una quantificazione Qx. Si dice che x occorre libera/vincolata in φ se c'è almeno un'occorrenza libera/vincolata x in φ.

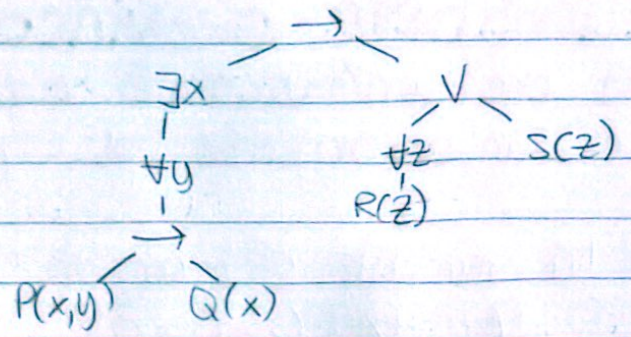
$$FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$$

Enunciato: Un enunciato è una formula senza variabili libere, $FV(\varphi) = \emptyset$

Per individuare se un'occorrenza di x in una formula φ è libera o vincolata, si può ricorrere all'albero sint.

esempio:





- tutte le occorrenze di x e y sono vincolate
- le prime due occorrenze di z sono vincolate, la terza è libera
- $FV(\exists x \forall y (P(x,y) \to Q(x)) \to \forall z R(z)) = \{z\}$

- dati due numeri, uno minore dell'altro, esiste un numero compreso tra i due

$$\forall x \forall y (x<y \rightarrow \exists z (x<z \wedge z<y))$$

- zero è il più piccolo numero naturale

$$\forall x \; 0 \leq x$$

invece se il linguaggio è $\mathcal{L}=\{+,0\}$, allora $\forall x \exists y \; 0+y=x$

- il quadrato di un numero è sempre non negativo

$$\forall x \forall y (x=y \cdot y \rightarrow 0 \leq x)$$

o

$$\forall y \; 0 \leq y \cdot y$$

- x è un numero primo

$$x \neq 1 \wedge \forall y \forall z (y \cdot z = x \rightarrow y=1 \vee z=1)$$

- esiste un x che è un numero primo

$$\exists x (x \neq 1 \wedge \forall y \forall z (y \cdot z = x \rightarrow y=1 \vee z=1))$$

- il quadrato di un numero pari è pari

$$\forall x (P(x) \rightarrow P(x \cdot x))$$ P = x è pari

- tutti i numeri positivi sono il quadrato di qualche numero

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y \; x=y \cdot y)$$ P = x è positivo

vale che: $\rightarrow$ tale che: $\wedge$

M(x): x è mortale
U(x): x è un uomo

- ogni uomo è mortale: $\forall x (U(x) \rightarrow M(x))$
- qualche uomo è mortale: $\exists x (U(x) \wedge M(x))$

- non esiste un numero che sia più grande di tutti $\neg \exists x \forall y \; y \leq x$
- dati due numeri diversi, esiste un numero strettamente compreso tra i due numeri dati

$$\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow \exists z (x<z<y \vee y<z<x))$$

- ogni numero positivo ha una radice quadrata

$$\forall x (0 < x \rightarrow \exists y \; y \cdot y = x)$$

- 3 è dispari

usando il linguaggio $\{1,2,3\}$, $|$ simbolo relazionale binario

$$\neg 2 | 3$$

usando il linguaggio $\{+, \cdot, 1, 2, 3\}$

$$\exists x \; 3 = 2 \cdot x + 1$$

- ogni primo maggiore di 2 è dispari

$$\forall x (\underbrace{1+1 < x}_{x \text{ è minore di } 2} \wedge \underbrace{\forall z (z | x \rightarrow z = 1 \vee z = x)}_{x \text{ è primo}} \rightarrow \underbrace{\neg (1+1) | x)}_{x \text{ è dispari}}$$

- esistono due numeri consecutivi entrambi primi

$$\exists x (\underbrace{1 < x \wedge \forall y (y | x \rightarrow y = 1 \vee y = x)}_{x \text{ primo}} \wedge \underbrace{1 < x+1 \wedge \forall y (y | (x+1) \rightarrow y = 1 \vee y = x+1)}_{x+1 \text{ primo}})$$

- esiste un unico x tale che $P(x)$

$$\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow y = x))$$

- c è l'unico per cui vale P

$$P(c) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow y = c)$$

- esistono infiniti numeri primi

$$\forall x \exists y (x < y \wedge pr(y))$$ pr: x è primo

o

$$pr(y): 1 < y \wedge \forall z (z | y \rightarrow z = 1 \vee z = 1)$$

quindi

$$\forall x \exists y (x < y \wedge \underbrace{1 < y \wedge \forall z (z | y \rightarrow z = 1 \vee z = y)}_{\text{primo}})$$

o

$$\forall x \exists y (x < y \wedge \forall z (z | x \rightarrow \underbrace{\forall w \; z | w}_{z = 1} \vee z = y))$$