Esempio

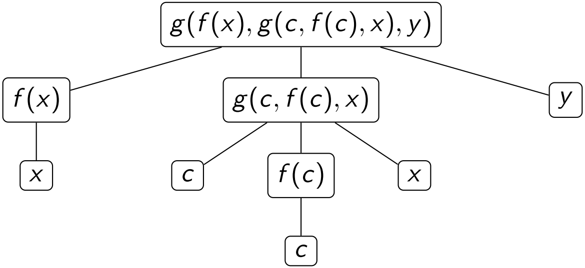
Sia $L = \{f, g, c\}$, dove

- f è simbolo funzionale unario
- g è simbolo funzionale ternario
- c è simbolo di costante

L'albero sintattico del termine

$$g(f(x), g(c, f(c), x), y)$$

è



Descrizione dell'algoritmo

Dato un nodo con la sua etichetta, questo è ciò che fa l'algoritmo:

1. Controlla se l'etichetta è una variabile o un simbolo di costante: in tal caso quel nodo è una foglia, e l'algoritmo passa a esaminare un altro nodo
2. Altrimenti, controlla se l'etichetta comincia con un simbolo funzionale. In caso contrario, l'algoritmo si arresta concludendo che la stringa considerata non è un termine.
3. Controlla se il simbolo successivo al simbolo funzionale è una parentesi (; se l'etichetta finisce con una parentesi); se le due parentesi si corrispondono (utilizzando il contatore di parentesi); se tra le due parentesi ci sono $n - 1$ virgole *rilevanti*, cioè non contenute in coppie corrispondenti di parentesi interne, dove n è l'arità del simbolo di funzione. In caso contrario, l'algoritmo si arresta, concludendo che la stringa considerata non è un termine.
4. Produce n successori immediati del nodo considerato, etichettati rispettivamente con la stringhe che si trovano: tra la prima parentesi (e la prima virgola; tra ogni coppia di virgole rilevanti consecutive; tra l'ultima virgola e l'ultima parentesi).
5. Passa a esaminare un altro nodo.

Esercizio

Sia $L = \{f, g, c\}$, dove

- f è simbolo funzionale unario
- g è simbolo funzionale ternario
- c è simbolo di costante

Stabilire, utilizzando l'algoritmo dell'albero sintattico, se la stringa

$$g(f(f(x)), c, g(f(z), x, f(c)))$$

è un termine.

Albero sintattico di un termine

L'etichettatura dell'albero sintattico di un termine può essere semplificata, utilizzando per i nodi non terminali solo il simbolo funzionale più esterno. In altre parole, ogni nodo è etichettato dal suo primo simbolo.

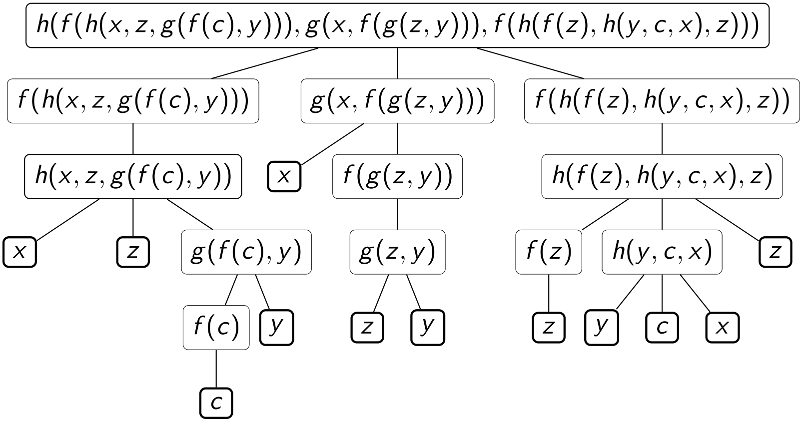
Esempio. Nel linguaggio $L = \{f, g, h, c\}$, dove

- f è simbolo funzionale unario
- g è simbolo funzionale binario
- h è simbolo funzionale ternario
- c è simbolo di costante

si consideri il termine
$h(f(h(x, z, g(f(c), y))), g(x, f(g(z, y))), f(h(f(z), h(y, c, x), z)))$

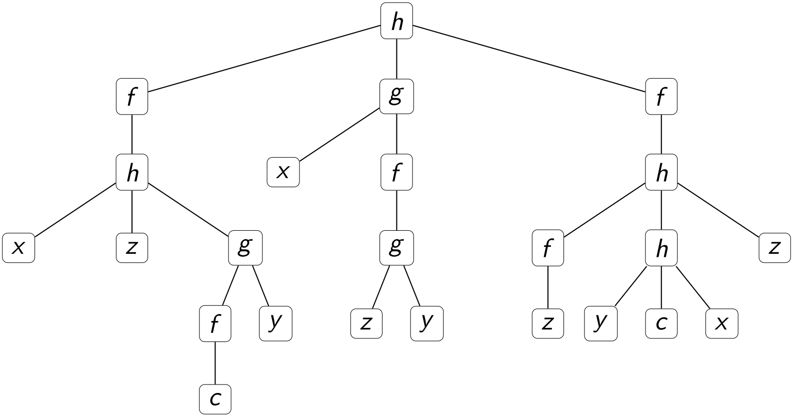
Esempio

L'albero sintattico è



Esempio

cioè



Lunghezza e altezza

Due misure di complessità per un termine t sono:

- la *lunghezza* $lh(t)$, cioè il numero di simboli nella stringa t
- l'altezza $ht(t)$, cioè il minimo n tale che $t \in Term_n$, cioè l'altezza dell'albero sintattico di t

Esempio. Sia t il termine

$$h(f(h(x, z, g(f(c), y))), g(x, f(g(z, y))), f(h(f(z), h(y, c, x), z)))$$

allora:

$$lh(t) = 59, \qquad ht(t) = 5$$

Esercizi

Siano f, g, h simboli funzionali di arità rispettive $1, 2, 3$, e siano a, b, c simboli di costante. Stabilire se le seguenti stringhe sono termini, usando l'algoritmo dell'albero sintattico. In caso affermativo, determinarne l'altezza.

1. $f(g(a, c))$
2. $h(f(x), g(f(a), y), z)$
3. $h(a, b, x)$
4. $g(h(x, x, x), f(x, x))$
5. $f(f(f(g(g(a, c), g(x, y)))))$
6. $h(f(a), g(f(a), a))$

Termini e polinomi

Sia $L = \{+, \cdot, 1\}$, dove:

- $+, \cdot$ sono simboli funzionali binari
- 1 è simbolo di costante

Esempi di termini:

- $1, x \in Term_0$
- $+(x, 1), \cdot(x, x) \in Term_1$
- $+(\cdot(x, x), 1), \cdot(+(1, 1), \cdot(x, x)) \in Term_2$
- $\dots$

Esempio

Sia t il termine

$$+(+(\cdot(x, x), \cdot(+(1, 1), \cdot(x, y))), 1)$$

Scrivendo i simboli binari in mezzo ai termini a cui sono applicati, cioè:

- $t_1 + t_2$ al posto di $+(t_1, t_2)$
- $t_1 \cdot t_2$ al posto di $\cdot(t_1, t_2)$

il termine t si può scrivere

$$((x \cdot x) + ((1 + 1) \cdot (x \cdot y))) + 1$$

che si può ulteriormente abbreviare, con le usuali convenzioni algebriche, come il polinomio

$$x^2 + 2xy + 1$$

Esempio

Ogni termine del linguaggio L rappresenta un polinomio (in più variabili) a coefficienti naturali.

Nota: Termini differenti possono rappresentare lo stesso polinomio. Per esempio: i termini

$$\cdot(+(1,+(1,1)),x) \quad \text{e} \quad \cdot(x,+(+(1,1),1))$$

rappresentano entrambi il polinomio

$$3x$$

I termini

$$\cdot(x,y), \quad \text{e} \quad \cdot(y,x)$$

rappresentano entrambi il polinomio

$$xy$$

Esercizi

Si consideri il linguaggio $L = \{+, \cdot, 1\}$.

- Scrivere i polinomi rappresentati seguenti termini:
  - $+(+(+(x, x), y), \cdot(z, z))$
  - $+(+(\cdot(x, \cdot(x, x)), +(x, x)), +(+(1, 1), 1))$
  - $+(+(\cdot(+(1, 1), x), x), +(1, 1))$
- Scrivere dei termini che rappresentino i seguenti polinomi:
  - $x + y + 3$
  - $x + y^2 + 3z$
  - $z^2 + 2x$

Formule atomiche

Sia L un linguaggio del prim'ordine. Per definire le formule di L, si definiscono anzitutto le formule atomiche:

Definizione

Una *formula atomica* è una stringa del tipo

$$(R(t_1, t_2, \dots, t_n))$$

dove R è simbolo relazionale n-ario di L, e $t_1, \dots, t_n \in \mathit{Term}$.

Nota: Tra le formule atomiche ci sono sempre le formule del tipo

$$(t_1 = t_2)$$

che sta in realtà per

$$(= (t_1, t_2))$$

con $t_1, t_2 \in \mathit{Term}$.

Esempio

Sia $L = \{<, +, \cdot, 0, 1\}$, dove

- $<$ è simbolo relazionale binario
- $+, \cdot$ sono simboli funzionali binari
- $0, 1$ sono simboli di costante

Allora

$$(=(+(\cdot(x, x), 1), 0))$$
$$(<(+(\cdot(x, x), 1), 0))$$

sono formule atomiche.

Nota: Se il termine $+(\cdot(x, x), 1)$ è inteso rappresentare il polinomio $x^2 + 1$, le due formule date esprimono, rispettivamente, l'equazione e la disequazione

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 + 1 < 0$$

Riconoscimento delle formule atomiche

L'algoritmo per riconoscere se una stringa è una formula atomica controlla che:

1. Il primo e l'ultimo simbolo della stringa siano parentesi (e) corrispondenti
2. Il secondo simbolo della stringa sia un simbolo di relazione
3. Il terzo e il penultimo simbolo della stringa siano parentesi (che risultano forzatamente corrispondenti, per il punto 1)
4. Tra questa coppia di parentesi ci siano $n - 1$ virgole *rilevanti*, cioè non contenute in coppie di parentesi più interne, dove n è l'arità del simbolo relazionale
5. Ci sia un termine: tra la seconda parentesi (e la prima virgola rilevante; tra ogni coppia di virgole rilevanti consecutive; tra l'ultima virgola rilevante e la penultima parentesi)

Se la stringa passa tutti questi controlli, si tratta di una formula atomica. Altrimenti no.

Esercizio

Sia $L = \{P, f, c\}$, dove

- P è simbolo relazionale binario
- f è simbolo funzionale unario
- c è simbolo di costante

Verificare se le seguenti stringhe sono formule atomiche:

1. $(P(f(x), c))$
2. $(= (f(f(x)), f(c)))$

Formule del prim'ordine

Sia L un linguaggio del prim'ordine. L'insieme delle formule del linguaggio L (o L-formule) è definito ricorsivamente dalle seguenti clausole:

- Ogni formula atomica è una formula
- Se φ è una formula, allora $(\neg\varphi)$ è una formula
- Se φ, ψ sono formule, allora $(\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$ sono formule
- Se φ è una formula e x è una variabile, allora $(\exists x\varphi)$ e $(\forall x\varphi)$ sono formule

Formule del prim'ordine

In altre parole, si definisce per induzione:

- Fml_0: insieme delle formule atomiche
- Fml_{n+1}: unione di Fml_n con l'insieme delle formule ottenute applicando una delle clausole precedenti a delle formule appartenenti a Fml_n

L'insieme delle L-formule è allora

$$Fml = \bigcup_{n \geq 0} Fml_n$$

Data una formula φ:

- La *lunghezza* di φ, denotata $lh(\varphi)$, è il numero di simboli della stringa φ
- La *altezza* di φ, denotata $ht(\varphi)$, è il minimo n tale che $\varphi \in Fml_n$

Costante logica principale

La *costante logica principale* di una formula non atomica φ è l'ultima costante logica applicata nella costruzione di φ, cioè:

- Se φ è della forma $(\neg\psi)$, la costante logica principale (*connettivo principale*) è $\neg$; la formula ψ è la *sottoformula principale*.
- Se φ è della forma $(\psi\Box\theta)$, dove $\Box$ è un connettivo binario, la costante logica principale (*connettivo principale*) è $\Box$; le formule ψ e θ sono le *sottoformule principali*
- Se φ è della forma $(Qx\psi)$, dove Q è un quantificatore, la costante logica principale (*quantificatore principale*) è Q; la formula ψ è la *sottoformula principale*; la variabile x è la *variabile quantificata*

Una formula è una negazione/disgiunzione/congiunzione/implicazione/biimplicazione/formula esistenziale/formula universale se la sua costante logica principale è, rispettivamente, $\neg$/ $\vee$ / $\wedge$ / $\rightarrow$ / $\leftrightarrow$ /$\exists$/$\forall$.

Costante logica principale

Per determinare la costante logica principale di una formula non atomica, si può applicare una variante del corrispondente algoritmo della logica proposizionale.

- Il primo simbolo della stringa deve essere una parentesi (, e l'ultimo simbolo della stringa è una parentesi)
- Se il secondo simbolo della stringa è $\neg$, allora quello è il connettivo principale, e tutto ciò che segue, salvo l'ultima parentesi) è la sottoformula principale
- Se il secondo simbolo della stringa è un'altra parentesi (, allora il connettivo principale è il connettivo che segue la parentesi) associata a questa; le due sottoformule principali sono la stringa che precede il connettivo, salvo la prima parentesi (, e la stringa che segue il connettivo, salvo l'ultima parentesi)
- Se il secondo simbolo della stringa è un quantificatore, allora quello è il quantificatore principale; questo è seguito da una variabile, e tutto ciò che segue quella variabile, salvo l'ultima parentesi), è la sottoformula principale

Se le precedenti condizioni non sono verificate, allora la stringa non è una formula.

Albero sintattico di una formula

Anche per le formule del prim'ordine, la costruzione è descritta da un albero sintattico:

- La radice è etichettata dalla formula considerata
- Se un nodo è etichettato da una formula φ, allora:
  - se φ è una formula atomica, allora quel nodo è una foglia dell'albero
  - se φ è del tipo $(\neg\psi)$, si aggiunge un solo successore immediato di quel nodo, etichettandolo con ψ
  - se φ è del tipo $(\psi\Box\theta)$, con $\Box$ connettivo binario, allora si aggiungono due successori immediati del nodo, etichettandoli rispettivamente ψ e θ
  - se φ è del tipo $(Qx\psi)$, con Q quantificatore e x variabile, allora si aggiunge un solo successore immediato del nodo, etichettandolo con ψ