ESAME 28-1-2021

esercizio 1)

$A = \mathbb{Z}_5$ e $B = \mathbb{Z}_6$, si determini la cardinalità di:

1) $R = \mathcal{P}(A) \times B$
2) $S = \{f : B \to A \mid f \text{ iniettiva}\}$
3) $T = \{f : A \to B \mid |f(A)| = 1\}$

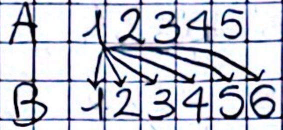
1) $|A| = 5$ e $|B| = 6$, quindi

$|R| = |\mathcal{P}(A) \times B| = |\mathcal{P}(A)| \cdot |B| = 2^5 \cdot 6$

2) $|B| > |A|$, non esistono funzioni iniettive $f : B \to A$, cioè $S = \emptyset$ e quindi $|S| = 0$

3) Sia $f : A \to B$ una funzione tale che $|f(A)| = 1$

$|T| = 6$



esercizio 2)

Si consideri la funzione $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ tale che $f(x,y) = 12x + 21y$

1) Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva
2) Calcolare $f^{-1}(0), f^{-1}(1), f^{-1}(15)$

1)
- f non è surgettiva; dato $n \in \mathbb{Z}$ esistono due interi x, y tali che $12x + 21y = n$ se e solo se $MCD(12, 21) = 3 \mid n$, quindi ad esempio $f^{-1}(1) = \emptyset$
- f non è iniettiva $f(-7, 4) = 12 \cdot (-7) + 21 \cdot 4 = 0 = f(0,0)$

2)
- $f^{-1}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 12x + 21y = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 4x + 7y = 0\}$

Siccome una soluzione particolare di $4x + 7y = 0$ è data da $(x_0, y_0) = (0,0)$, si ha

$f^{-1}(0) = \{(7K, -4K) : K \in \mathbb{Z}\}$

- $f^{-1}(1) = \emptyset$ perchè $MCD(12, 21) = 3 \nmid 1$

- $f^{-1}(15) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 12x + 21y = 15\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 4x + 7y = 5\}$

MCD (7,4) bezout di (7,4) = 1

$7 = 1 \cdot 4 + 3$ $\quad 1 = 4 - 3 \cdot 1 = 4 - (7 - 4 \cdot 1) \cdot 1 =$

$4 = 1 \cdot 3 + \underline{1}$ $\quad = 4 - 7 + 4 = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 7$

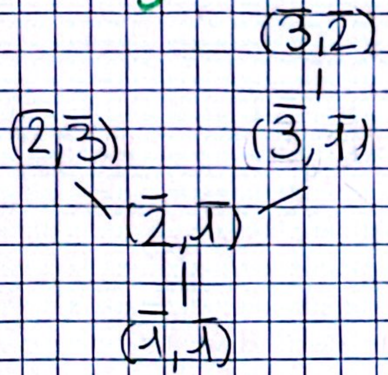
$1 = 2\cdot 4 - 1\cdot 7 \rightarrow 5 = 10\cdot 4 - 5\cdot 7 \rightarrow (x_0, y_0) = (10, -5)$

Quindi $f^{-1}(15) = \{(10+7k, -5-4k) : k \in \mathbb{Z}\}$

esercizio 3)

Poniamo la seguente relazione d'ordine sull'insieme $\mathbb{Z}_4 : \bar{1} \le \bar{2} \le \bar{3} \le \bar{4}$. Si consideri l'insieme $A = \{(\bar{1},\bar{1}), (\bar{2},\bar{1}), (\bar{2},\bar{3}), (\bar{3},\bar{1}), (\bar{3},\bar{2})\}$ come sottoinsieme del poset $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ con l'ordine prodotto

→ diagramma di Hasse



- $\min A = \inf A = (\bar{1},\bar{1})$
- A ha due elementi massimali non confrontabili $(\bar{3},\bar{2})$ e $(\bar{2},\bar{3})$, quindi $\nexists \max A$
- L'insieme dei maggioranti è $\{(x,y) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 : x \ge \bar{3} \text{ e } y \ge \bar{3}\}$ quindi $\sup A = (\bar{3},\bar{3})$

esercizio 4)

Dato il gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$ e il gruppo $U_4 = \{1, -1, i, -i\}$ delle radici quarte dell'unità in $\mathbb{C}$ si consideri il gruppo prodotto $G = \mathbb{Z}_3 \times U_4$

1) Determinare un sottogruppo H di G di ord 6 e un sottogruppo K di G di ord 7
2) Determinare un omomorfismo di gruppi $\varphi : \mathbb{Z}_3 \rightarrow G$
3) Determinare un isomorfismo di gruppi $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G$

1)

Per il teorema di Lagrange, l'ordine di un sottogruppo deve essere un divisore dell'ordine del gruppo.

Pertanto, non esiste un sottogruppo K di G di ord 7

Invece esiste un sottogruppo H di ord 6

$H = \{(\bar{0},1)(\bar{1},1), (\bar{2},1), (\bar{0},-1), (\bar{1},-1), (\bar{2},-1)\}$

Costituito dal prodotto tra $\mathbb{Z}_3$ e il sottogruppo $\{1,-1\}$ di U_4

2)

Un omomorfismo di gruppi $\varphi : \mathbb{Z}_3 \to G$ è dato ad esempio dall'inclusione di $\mathbb{Z}_3$ come primo fattore di G

$$\varphi(\bar{0}) = (\bar{0}, 1), \varphi(\bar{1}) = (\bar{1}, 1), \varphi(\bar{2}) = (\bar{2}, 1)$$

3)

Non esiste un isomorfismo di gruppi $\varphi : \mathbb{Z} \to G$

$$|\mathbb{Z}_3| = 3 \neq 12 = |G|$$