Cardinalità

giovedì 16 novembre 2023 08:29

→ CARDINALITÀ

$\{1,2,3\}$ $\{A,B,C,D\}$

def: A, B insiemi **equipotenti** o hanno la stessa cardinalità se **$\exists f: A \to B$ bigettiva**

In questo caso scriviamo **$|A|=|B|$ o $\#A=\#B$**

L'equipotenza è:

- simmetrica
- riflessiva ($Id_A: A \to A$ bigettiva, $|A|=|A|$)
- transitiva ($|A|=|B|$ $f: A \to B$ bigettiva
  $|B|=|C|$ $g: B \to C$ bigettiva
  $|A|=|C|$ $g \circ f: A \to C$ bigettiva)

def: X insieme

X è finito se X è vuoto, oppure $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. X è equipotente a $\{1,\dots,n\}$

In questo caso diciamo che **X ha cardinalità n** $|X|=n$

La cardinalità è il numero di elementi di X

$|X|=n \to \exists f: \{1,\dots,n\} \to X$ bigettiva

$X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

def: X è infinito se X non è finito

teorema: $X \neq \emptyset$ allora sono equivalenti:

1) X è infinito
2) $\exists Y \subsetneq X$ t.c. $|Y|=|X|$
3) $\exists f: X \to X$ iniettiva non suriettiva

es:

$\mathbb{N} \supsetneq \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ **bigettiva**

$x \mapsto x+1$

iniettiva $x+1=y+1 \to x=y$

suriettiva $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \to x=m-1 \in \mathbb{N}$

$f(x)=m$

$|\mathbb{N}|=|\mathbb{N} \setminus \{0\}|$

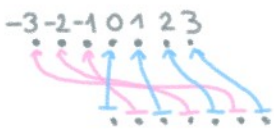
def: X si dice **numerabile** o di **cardinalità numerabile** se $|X|=|\mathbb{N}|$

Si scrive $|X|=\aleph_0$ "aleph zero"

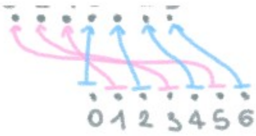
es: ($\mathbb{Z}$ è numerabile)

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$n \longmapsto \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$



$$n \mapsto \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$



$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$m \mapsto \begin{cases} 2m & \text{se } m \geq 0 \\ -1-2m & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

es: verificare che $f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$ e $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$

$m \in \mathbb{Z}$ $\quad (f \circ g)(m)$

$m \geq 0 \quad f(g(m)) = f(2m) = \frac{2m}{2} = m$

$m < 0 \quad f(g(m)) = f(-1-2m) = \frac{-1-2m+1}{2} = m$

$\to f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$

$\quad g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$

prop: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile

dim: $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$(m,n) \mapsto 2^m(2n+1)-1$

f INIETTIVA: $(m,n)(r,s) \in \mathbb{N}^2$ t.c. $f(m,n) = f(r,s)$

tesi: $(m,n) = (r,s)$

$$\left.\begin{array}{l} f(m,n)+1 = 2^m(2n+1) \\ \qquad\qquad\quad \| \\ f(r,s)+1 = 2^r(2s+1) \end{array}\right] \xrightarrow[\text{fond. aritmetica}]{\text{teor.}} m = r \text{ e } n = s$$

$$\underbrace{2^m(2n+1)}_{\text{dispari}} = \underbrace{2^r(2s+1)}_{\text{dispari}}$$

$$2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$$

$\to m = r = \alpha_1$

$\to 2n+1 = 2s+1 \to 2n = 2s \to n = s$

$(m,n) = (r,s)$

f SURIETTIVA: Sia $a \in \mathbb{N}$

tesi: $\exists (m,n) \in \mathbb{N}^2$ t.c. $f(m,n) = a$

$a+1 \in \mathbb{N} \quad a+1 \geq 1 \xrightarrow[\text{aritmetica}]{\text{teor. fond.}} a+1 = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$

$= 2^{\alpha} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$

$\underbrace{p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}}_{2n+1}$ dispari $\qquad$ scelgo $m = \alpha_1$

$f(m,n) = 2^m(2n+1)-1 = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t} - 1 = a+1-1 = a$

$= f$ bigettiva

$\square$

def: A, B insiemi, scriviamo $|A| \leq |B|$ se $\exists f: A \to B$ iniettiva

scriviamo $|A| < |B|$ se $\underbrace{\exists f: A \to B \text{ iniettiva}}_{|A| \leq |B|}$ ma $\underbrace{\nexists g: A \to B \text{ bigettiva}}_{|A| \neq |B|}$

prop: A, B insiemi finiti, $|A|=n, |B|=m \quad n,m \in \mathbb{N}$

allora $\exists f: A \to B$ iniettiva $\leftrightarrow n \leq m$

dim: $|A|=n \to \exists \varphi: A \to \{1,\dots,n\}$ bigettiva

$|B|=m \to \exists \psi: B \to \{1,\dots,m\}$ bigettiva

"$\Leftarrow$"

$$n \leq m \quad \begin{tikzcd} \{1,\dots,n\} \arrow[r, hook] & \{1,\dots,m\} \arrow[d, "\psi^{-1}"] \\ A \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, dashed, "\psi^{-1}\circ i \circ \varphi"'] & B \end{tikzcd}$$

iniettiva perchè composizione di iniettive

"$\Rightarrow$"

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & B \arrow[d, "\psi"] \\ \{1,\dots,n\} \arrow[u, "\varphi^{-1}"] \arrow[r, "\psi\circ f\circ\varphi^{-1}"'] & \{1,\dots,m\} \end{tikzcd} \longrightarrow n \leq m$$

iniettiva

$\square$

$A \subseteq B \to |A| \leq |B|$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \to |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$

ma anche $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$

→ TEOREMA DI CANTOR-BERNSTEIN

A, B insiemi, $f: A \to B$ iniettiva, $g: B \to A$ iniettiva

$\longrightarrow \exists h: A \to B$ bigettiva

$|A| \leq |B|, |B| \leq |A| \longrightarrow |A| = |B|$

def: X insieme

- X è al più numerabile se $|X| \leq \aleph_0$
- X è più che numerabile se $|X| > \aleph_0$

oss:

X è al più numerabile $\left\langle \begin{array}{l} X \text{ è finito} \\ X \text{ è infinito numerabile} \end{array} \right.$

prop: X insieme, $X \neq \emptyset$ allora non esiste una mappa $X \to \mathcal{P}(X)$ surgettiva

In particolare, $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$

oss: C'è sempre $X \to \mathcal{P}(X)$ iniettiva

ad esempio $f(x) = \{x\} \in \mathcal{P}(X)$

$|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$ la prop ci dice che $|X| < |\mathcal{P}(X)|$

dim: per assurdo $\exists f: \begin{array}{l} X \to \mathcal{P}(X) \\ x \mapsto f(x) \end{array}$ surgettiva

consideriamo l'insieme

$S = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ $\quad f(x) \subseteq X$ sottoinsieme

consideriamo l'insieme

$S=\{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ $\quad f(x) \subseteq X$ sottoinsieme

$S \subseteq X \rightarrow S \in \mathcal{P}(X)$

$\xrightarrow[f \text{ SURGETTIVA}]{} \exists s \in X \quad f(s)=S$

$s \in S$? due possibilità

1) $s \in S \rightarrow s \notin f(s)=S$ $\lightning$

2) $s \notin S \rightarrow s \in f(s)=S$ $\lightning$ $\square$

$|X|<|\mathcal{P}(X)|$

se scelgo $X=\mathbb{N}$

$|\mathcal{P}(\mathbb{N})|>|\mathbb{N}|=\aleph_0$

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ è più che numerabile

def: A, B insieme

$B^A=\{f: A \rightarrow B \text{ funzione}\}$

Lemma: se A e B sono finiti, $|A|=n$

B^A è equipotente a $B^n=\underbrace{B \times \ldots \times B}_{n \text{ volte}}$

dim: $\varphi: B^A \rightarrow B^n$

$f \longmapsto (f(a_1), \ldots, f(a_n))$

dove $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$ $\quad f: A \rightarrow B$

si dimostra che φ è bigettiva $\square$

oss: A, B finiti, $|A|=n$

$|B^A|=|B^n|=|B|^n$

A, B insiemi

A equipotente a $B \leftrightarrow \exists f: A \rightarrow B$ bigettiva

$|A|=|B|$ o $\#A=\#B$

$|A| \leq |B| \leftrightarrow \exists f: A \rightarrow B$ iniettiva

Cantor-Bernstein: $|A| \leq |B|, |B| \leq |A| \rightarrow |A|=|B|$

- A finito $\quad |A|=$ numero di elementi
- A infinito $\rightarrow$ A numerabile $|A|=|\mathbb{N}|=\aleph_0$; A più che numerabile $|A|>|\mathbb{N}|$

es: numerabili $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

più che numerabili $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

X insieme $|\mathcal{P}(X)|>|X|$

$A^B=\{f: B \rightarrow A \text{ funzioni}\}$

prop: X insieme, $X \neq \emptyset$. Allora $\mathcal{P}(X)$ è equipotente a $\{0,1\}^X=\{f: X \rightarrow \{0,1\}\}$

In particolare, se X è finito $|\mathcal{P}(X)|=2^{|X|}$

dim: prendiamo $\varphi: \{0,1\}^X \rightarrow \mathcal{P}(X)$

In particolare, se X è finito $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$

dim: prendiamo $\varphi : \{0,1\}^X \to \mathcal{P}(X)$

$$f \longmapsto \text{sottoinsieme di } X$$
$$f \longmapsto f^{-1}(1)$$

$f : X \to \{0,1\}$

$f^{-1}(1) = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$

φ SURIETTIVA

Sia $A \in \mathcal{P}(X)$ $(A \subseteq X)$

cerco $f \in \{0,1\}^X$ t.c. $\varphi(f) = A$

scelgo la funzione caratteristica di A

$\chi_A : X \to \{0,1\}$

$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$

$\varphi(\chi_A) = \chi_A^{-1}(1) = \{x \in X \mid \chi_A(x) = 1\} = \{x \in X \mid x \in A\} = A$

φ INIETTIVA

Siano $f, g \in \{0,1\}^X$, $f \neq g$

devo far vedere che $\varphi(f) \neq \varphi(g)$

$f \neq g \to \exists x_0 \in X \quad f(x_0) \neq g(x_0)$

supponiamo $f(x_0) = 1$ e $g(x_0) = 0$

(l'altro caso è simmetrico)

$\varphi(f) = f^{-1}(1) = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$

$\ni x_0$

$\varphi(g) = g^{-1}(1) = \{x \in X \mid g(x) = 1\}$

$\varphi(f) \neq \varphi(g) \longrightarrow \varphi$ bigettiva

$|\mathcal{P}(X)| = |\{0,1\}^X|$

X finito, $|X| = n > 0$

$|\{0,1\}^X| = |\{0,1\}^n| = 2n$ $\square$

A volte l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ si denota con 2^X

Cardinalità di $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \to \underbrace{|\mathbb{N}|}_{= \aleph_0} \leq |\mathbb{Q}|$

$\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$\frac{p}{q} \longmapsto (p, q)$

φ ben definita
iniettiva

$\boxed{\begin{matrix} MCD(p,q) = 1 \\ q > 0 \end{matrix}} \longrightarrow |\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = \aleph_0$

$\xrightarrow[\text{bernstein}]{\text{cantor}} |\mathbb{Q}| = \aleph_0 \quad \mathbb{Q}$ numerabile

	1	2	3	4	5	6
1	$1/1$	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$	$1/6$
2	$2/1$	$\cancel{2/2}$	$2/3$	$\cancel{2/4}$	$2/5$	$\cancel{2/6}$
3	$3/1$	$3/2$	$\cancel{3/3}$	$3/4$	$3/5$	$\cancel{3/6}$
4	$4/1$	$\cancel{4/2}$	$4/3$	$\cancel{4/4}$	$4/5$	$\cancel{4/6}$
5	$5/1$	$5/2$	$5/3$	$5/4$	$\cancel{5/5}$	$5/6$

questo definisce una funzione $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}_{>0}$ bigettiva

$f(0)=1 \quad f(1)=1/2 \quad f(2)=2 \quad \dots$

$\mathbb{R}$ è più che numerabile $|\mathbb{R}| = |\wp(\mathbb{N})| > \aleph_0$

$\mathbb{C} \supseteq \mathbb{R} \longrightarrow \underbrace{|\mathbb{C}|}_{= |\mathbb{R}|} > \aleph_0$

X, Y insiemi finiti

- $|\wp(X)| = 2^{|X|}$
- $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$
- $|X^n| = |X|^n$
- $|Y^X| = |Y|^{|X|}$
- $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$

$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$

$Y^X = \{f : X \to Y\}$

es:

$A = \{1,2,3\} \qquad B = \{1,2,3,4\}$

$|A| = 3 \quad |B| = 4 \quad |\wp(A)| = 2^3 = 8$
$|\wp(B)| = 2^4 = 16$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 3 + 4 - 3 = 4$

$A \cap B = A \quad (A \subseteq B) \quad A \cup B = B$

$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 3 = 12$

$|\wp(A) \cap \wp(B)| = |\wp(A)| = 8$

$\wp(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \dots, A\}$

$\wp(B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \dots, B\}$

$A \subseteq B \rightarrow \wp(A) \subseteq \wp(B)$

$|A^B| = |A|^{|B|} = 3^4 = 81 \qquad |B^A| = |B|^{|A|} = 4^3 = 64$

$A^B = \{f : B \to A\} \qquad B^A = \{f : A \to B\}$

$|A^B \cap B^A| = 64 \qquad A \neq B$

$A^B \cap B^A = \{f \mid f : A \to B, \underbrace{f : B \to A}_{= f : A \to A}\} = \varnothing$

prop:

X e Y insiemi finiti, $|X| = n$, $|Y| = m$

Il numero delle funzioni iniettive $X \to Y$ è

se $n \leq m$ $\quad m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \dots (m-n+1)$

se $n > m$ $\quad 0$

dim:

$|X| = n \rightarrow X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$

$|Y| = m \rightarrow Y = \{y_1, \dots, y_n\}$

$X \to Y$ iniettiva

$x_1 \longmapsto m$ possibilità

$x_2 \longmapsto (m-1)$ poss

$x_3 \longmapsto (m-2)$ poss

$\vdots$

$x_n \longmapsto (m-(n-1)) = m-n+1$ poss

Corollario:

funzione iniettiva $X \to X$ è $n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = n!$

$$n! \begin{cases} n(n-1)\dots 2\cdot 1 & \text{se } n>0 \\ 1 & \text{se } n=0 \end{cases}$$

fattoriale

$0! = 1 \qquad 1! = 1 \qquad 2! = 2\cdot 1 \qquad 3! = 3\cdot 2\cdot 1$

$\{x_1, \dots, x_1\} \to \{x_1, \dots, x_n\}$