Le funzioni

lunedì 2 ottobre 2023 16:32

→ FUNZIONI

def: X, Y insiemi, una **Relazione** tra X e Y è un sottoinsieme $R \subseteq X \times Y$ del prodotto cartesiano

es:

1) $R = X \times Y$
2) $R = \emptyset$

$X = \{1, 2, 3\}$ $\quad Y = \{a, b, c, d, e, f\}$

$\varphi, \psi \subseteq X \times Y$ relazioni

$\varphi = \{(1,a), (1,d), (2,e), (3,a)\}$ non è una funzione

$\psi = \{(1,c), (2,c), (3,a)\}$ è una funzione

$f = \{(1,a), (2,d)\}$ non è una funzione

def: X, Y insiemi, una **funzione** (applicazione o mappa) da X a Y è una relazione $f \subseteq X \times Y$ tale che

$\forall x \in X \quad \exists!\, y \in Y$ tale che $(x, y) \in f$

X dominio di f

Y codominio di f

$(x, y) \in f$ si scrive $y = f(x)$

$f: X \to Y$

es: $\mathbb{R}$ $\quad X = \{1\}$ $\quad Y = \{2\}$

$f \subseteq X \times Y$ $\quad f = \{(1, 2)\}$

funzione $f(1) = 2$ $\quad f: X \to Y$

def: $f: X \to Y$ funzione

$A \subseteq X$ $\quad f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$ immagine di A mediante f

$= \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq Y$

$f(X)$ immagine di f

$B \subseteq Y$ $\quad f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ controimmagine di B mediante f

es: $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d, e, f\}$

$\psi: X \to Y$ $\quad \psi(1) = c$ $\quad \psi(2) = c$ $\quad \psi(3) = a$

$A = \{1\}$ $\quad \psi(A) = \{c\}$

$B = \{1, 2\}$ $\quad \psi(B) = \{c\}$ $\quad \psi(X) = \{c, a\}$

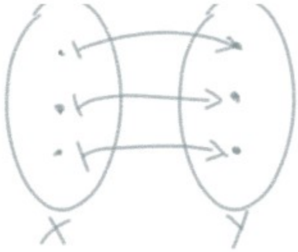
$C = \{a, e\}$ $\quad \psi^{-1}(C) = \{3\}$

$D = \{c\}$ $\quad \psi^{-1}(D) = \{1, 2\}$

$E = \{d, e, f\}$ $\quad \psi^{-1}(E) = \emptyset$

$f: X \to Y$ $\qquad X, Y$ insiemi

$f\ X \to Y$ X, Y insiemi



$\forall x \in X\ \exists!\ y \in Y\ \ y = f(x)$

def: $f\ X \to Y$ funzione,

1) f è iniettiva se soddisfa la seguente condizione:
   $\forall x_1, x_2 \in X$ se $f(x_1) = f(x_2)$ allora $x_1 = x_2$
   (equivalentemente $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) = f(x_2)$)
2) f è surgettiva (suriettiva) se $f(X) = Y$
   (equivalentemente $\forall y \in Y\ \exists x \in X\ f(x) = y$)
3) f è bigettiva (corrispondenza biunivoca, bigezione)
   se è iniettiva e suriettiva

es: $X = \{1, 2, 3\}$ $Y = \{a, b, c, d\}$

1) $\varphi\ X \to Y$ funzione

$1 \mapsto a$
$2 \mapsto b$ $\varphi(1) = a$ $\varphi(2) = b$ $\varphi(3) = d$ $\varphi(x) = \{a, b, d\} \in Y$
$3 \mapsto d$

iniettiva

2) $\eta\ Y \to X$ funzione

$a \mapsto 1$
$b \mapsto 1$ iniettiva? no perchè $a \neq b$ ma $\eta(a) = \eta(b)$
$c \mapsto 2$ suriettiva? si $\eta(Y) = X$
$d \mapsto 3$

3) $f\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funzione

$x \mapsto x^2$

iniettiva? si numeri naturali diversi hanno quadrati diversi
suriettiva? no $3 \in \mathbb{N}, 3 \notin f(\mathbb{N})$

4) $g\ \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ funzione

$x \mapsto x^2$

iniettiva? no $1, -1 \in \mathbb{Z},\ g(-1) = g(1)$
suriettiva? no $3 \notin g(\mathbb{Z})$

5) • $h\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione? no

$x \mapsto \sqrt{x}$

• $h_1\ \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ funzione? si

$x \mapsto \sqrt{x}$

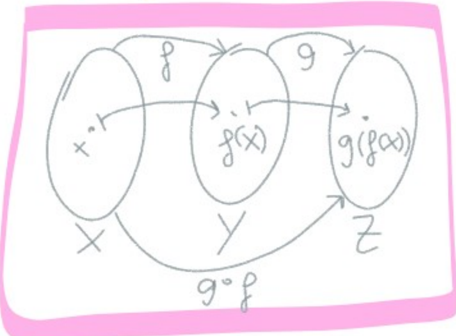
iniettiva? si suriettiva? si bigettiva

def: • X insieme, $Id_X : X \to X$

def:
- X insieme, $Id_X : X \to X$, $x \mapsto x$
funzione identità
- $f: X \to Y$ si dice costante se $f(x) = y_0$ per un qualche $y_0 \in Y$ fissato

es:
1) $f\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(x) = 2$ $\forall x \in \mathbb{N}$
costante
2) $A \subseteq X$ $f: X \to Y$ funzione
$f|_A : A \to Y$ $f|_A(x) = f(x)$ $\forall x \in A$
f ristretta ad A
3) $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $g(x) = x^2$
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(x) = x^2$
$g|_{\mathbb{N}} = f$
4) funzione parte intera
$[\ ] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$
$[x]$ è il più grande intero $\leq x$
$[2] = 2$ $[2,3] = 2$ $[2,9] = 2$ $[1/2] = 0$ $[-1/2] = -1$
$[\ ]$ non è iniettiva
$[\ ]$ è suriettiva
$\forall x \in \mathbb{Z}$ $\exists x \in \mathbb{R}$ tale che $[x] = y$
scelgo $x = y$ $[x] = x$
$[\ ]|_{\mathbb{Z}}$ $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto [x] = x$ è la funzione identità $Id_{\mathbb{Z}}$

def:
$f\ X \to Y$, $g: Y \to Z$ funzioni
la composizione o funzione composta di f e g è $g \circ f : X \to Z$ tale che
composto
$(g \circ f)(x) = g(f(x))\ \forall x \in X$



oss:
- la composizione è associativa
$f: X \to Y$ $g: Y \to Z$ $h \to Z \to W$
$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- la funzione identità è neutra rispetto alla composizione $f: X \to Y$
$f \circ Id_X = f$ $Id_Y \circ f = f$
- la composizione di funzioni non è commutativa
$f: X \to Y$ $g: Y \to Z$ $g \circ f: X \to Z$

- la composizione di funzioni non è commutativa

$f: X \to Y \quad g: Y \to Z \quad g \circ f: X \to Z$

$f \circ g$ non ha senso $\quad y \in Y \quad g(y) \in Z$

ma f si applica solo agli elementi di X

anche se $Z = X$ in generale $g \circ f \neq f \circ g$

es:

- $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad X = Y = Z = \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 \quad g(x) = -x$

$(g \circ f)\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = -x^2$

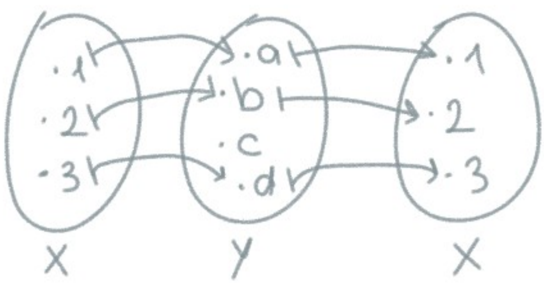
$(f \circ g)\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x) = x^2$

$$\left.\begin{array}{l}(f \circ g)(2) = 2^2 = 4 \\ (g \circ f)(2) = -2^2 = -4\end{array}\right\} (f \circ g) \neq (g \circ f)$$

- $X = \{1,2,3\} \quad Y = \{a,b,c,d\}$

$\varphi\ X \to Y \quad \varphi(1) = a \quad \varphi(2) = b \quad \varphi(3) = d$

$\eta\ Y \to X \quad \eta(a) = 1 \quad \eta(b) = 1 \quad \eta(c) = 2 \quad \eta(d) = 3$



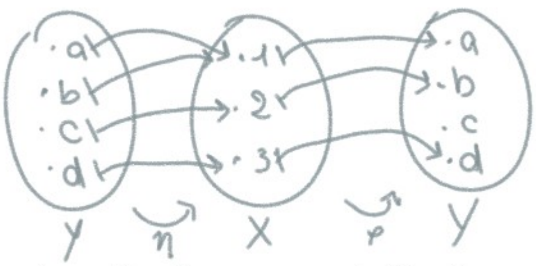
$\eta \circ \varphi: X \to X$

$(\eta \circ \varphi)(1) = (\eta \circ \varphi)(2) = 1$

$(\eta \circ \varphi)(3) = 3$

iniettiva? no $\quad$ suriettiva? no

$\varphi \circ \eta \quad Y \to Y$



$(\varphi \circ \eta)(a) = (\varphi \circ \eta)(b) = a$

$(\varphi \circ \eta)(c) = b$

$(\varphi \circ \eta)(d) = d$

iniettiva? no $\quad$ suriettiva? no

>prop: $f: X \to Y,\ g: Y \to Z$ funzioni

allora

1) f, g iniettive $\to g \circ f$ iniettiva
2) f, g suriettive $\to g \circ f$ suriettiva
3) f, g bigettive $\to g \circ f$ bigettiva

dim:

1) ipotesi:

f iniettiva $\quad x_1, x_2 \in X \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

ipotesi:

f iniettiva $x_1, x_2 \in X$ $\quad f(x_1)=f(x_2) \to x_1=x_2$

g iniettiva $y_1, y_2 \in Y$ $\quad g(y_1)=g(x_2) \to y_1=y_2$

tesi: $g \circ f$ iniettiva $x_1, x_2 \in X$ $\quad (g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2) \to x_1=x_2$

per dimostrare la tesi prendo $x_1, x_2 \in X$ tali che $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$

$$g(f(x_1))=g(f(x_2)) \xrightarrow[g \text{ iniettiva}]{} f(x_1)=f(x_2) \xrightarrow[f \text{ iniettiva}]{} x_1=x_2$$

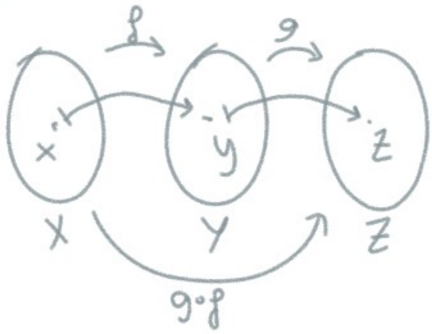
2) ipotesi:

f suriettiva $\forall y \in Y \ \exists x \in X \ f(x)=y$

g suriettiva $\forall z \in Z \ \exists x \in Y \ g(y)=z$

tesi: $g \circ f$ suriettiva $\forall z \in Z \ \exists x \in X \ (g\circ f)(x)=z$

per dimostrare la tesi prendo $z \in Z$, cerco $x \in X$ tale che $g(f(x))=z$



→ g suriettiva $\exists y \in Y$ tale che $g(y)=z$

→ f suriettiva $\exists x \in X$ tale che $f(x)=y$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$

3) f, g bigettive $\to$ g, f iniettive $\xrightarrow{1}$ $g \circ f$ iniettiva

f, g bigettive $\to$ g, f surgettive $\xrightarrow{2}$ $g \circ f$ surgettiva

$g \circ f$ bigettiva

>prop:

$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ funzioni

1) $g \circ f$ iniettiva $\to$ f iniettiva
2) $g \circ f$ suriettiva $\to$ g suriettiva
3) $g \circ f$ bigettiva $\to$ f iniettiva, g suriettiva

dim: 1) ipotesi: $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2) \to x_1=x_2$

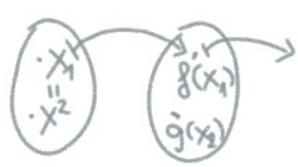
$x_1, x_2 \in X$

tesi: $x_1, x_2 \in X$ $\quad f(x_1)=f(x_2) \to x_1=x_2$

Siano $x_1, x_2 \in X$ tali che $f(x_1)=f(x_2)$

$f(x_1), f(x_2) \in Y$

$g(f(x_1))=g(f(x_2)) \to \underset{\text{iniettiva}}{g \circ f} \to x_1=x_2$

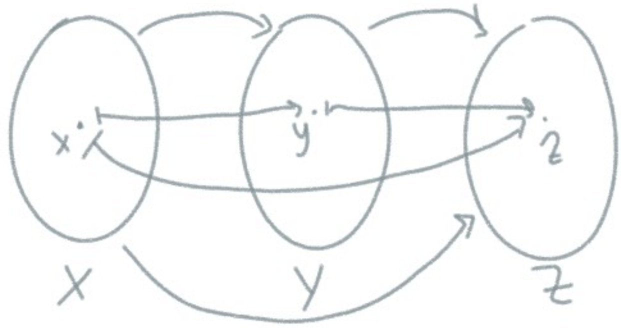


2) ipotesi: $\forall z \in Z \ \exists x \in X \ (g\circ f)(x)=z$

tesi: $\forall z \in Z \ \exists y \in Y \ g(y)=z$

tesi: $\forall z \in Z \ \exists y \in Y \quad g(y)=z$

$g \circ f$ suriettiva $\rightarrow g$ suriettiva



sia $z \in Z \longrightarrow \exists x \in X \ (g \circ f)(x) = z$

$g(\underbrace{f(x)}_{\rightarrow y \in Y})$

scelgo come $y = f(x)$ vale $g(y)=z$ $\square$

→ FUNZIONE INVERSA

def:

1) $f \ X \rightarrow Y$ funzione
f invertibile a sinistra se $\exists g \ Y \rightarrow X$ tale che $g \circ f = Id_X$
g inversa sinistra di f

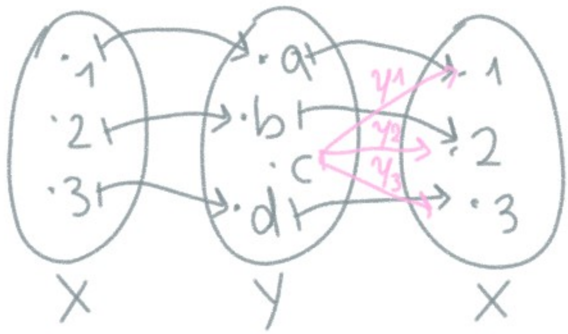
2) f invertibile a destra se $\exists h \ Y \rightarrow X$ tale che $f \circ g = Id_Y$
h inversa destra di f

3) f invertibile se $\exists t \ Y \rightarrow X$ tale che $f \circ t = Id_Y$
t l'inversa di f e si denota f^{-1}

oss: se l'inversa esiste è l'unica
siano $t_1, t_2 \ Y \rightarrow X$ inverse di f
$t_1 = t_1 \circ Id_Y = (f \circ t_2) = (t_1 \circ f) \circ t_2 = Id_X \circ t_2 = t_2$

t_2 è inversa dx di f $\qquad$ t_1 è inversa sx di f

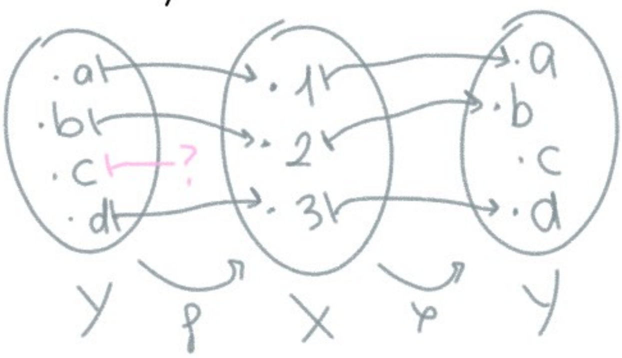
es: $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b,c,d\}$
$\varphi: X \rightarrow Y \quad \varphi(1)=a \quad \varphi(2)=b \quad \varphi(3)=d$



$\gamma_1(c)=1$
$\gamma_2(c)=2$
$\gamma_3(c)=3$

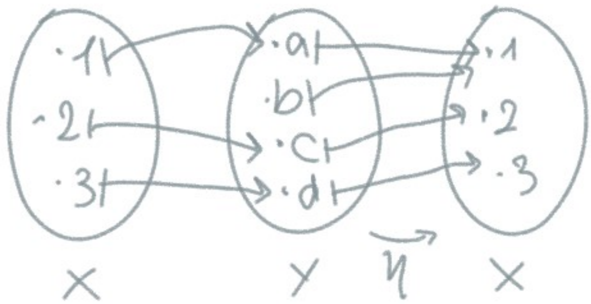
$\psi_1(a) = \psi_2(a) = 1$
$\psi_1(b) = \psi_2(b) = 2$
$\psi_1(d) = \psi_2(d) = 3$

ψ_1, ψ_2 sono inverse sx di φ

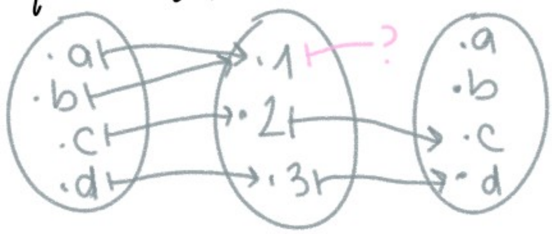


c non torna in y
φ non ha inverse dx

$\eta: X \to Y$ $\eta(a)=1$ $\eta(b)=1$ $\eta(c)=2$ $\eta(d)=3$



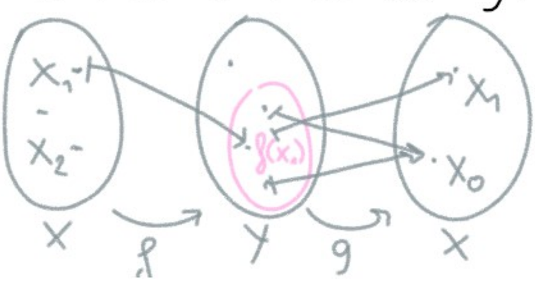
$\mu_1, \mu_2 : X \to Y$
$\mu_1(1)=a$ $\mu_2(1)=b$ $\mu_1(2)=\mu_2(2)=c$ $\mu_1(3)=\mu_2(3)=d$
μ_1, μ_2 sono inverse dx di η
$\eta \circ \mu_1 = \eta \circ \mu_2 = Id_X$



η non ha inverse sx

teorema: $f: X \to Y$ allora
f è iniettiva $\leftrightarrow$ f è invertibile a sx

dim: "$\rightarrow$" ipotesi f iniettiva $f(x_1)=f(x_2) \to x_1 = x_2$
$\exists$ inversa sx
costruiamo un'inversa sx $g: Y \to X$ tale che $g \circ f = Id_X$



se $y \in f(X) \rightarrow \exists!\, x \in X$ tale che $f(x) = y$
definisco $g(y) = x$ scelgo $x_0 \in X$
se $y \in Y \setminus f(X)$ definisco $g(y) = x_0$

dim: "$\longleftarrow$" f è invertibile a sx
$\exists g: Y \to X$ tale che $g \circ f = Id_X \xrightarrow[\text{precedente}]{\text{prop}} f$ iniettiva $\square$
iniettiva

teorema: $f: X \to Y$ allora
f è suriettiva $\longleftrightarrow f$ è invertibile a dx

dim: "$\longleftarrow$" è invertibile a dx
$\exists g: Y \to X$ tale che $f \circ g = Id_Y \xrightarrow[\text{precedente}]{\text{prop}} f$ suriettiva $\square$
suriettiva

→ ASSIOMA DELLA SCELTA

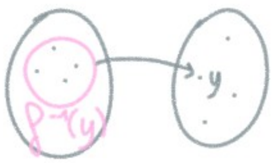
Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ famiglia di insiemi non vuoti, $I \neq \emptyset$. Allora $\exists\, \gamma\ I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ tale che $\gamma(i) \in A_i \quad \forall i \in I$

funzione di scelta

f surgettiva ipotesi $f: X \to Y$
$\rightarrow \forall y \in Y \ \exists x \in X$ tale che $f(x) = y$ cioè $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ (perché $x \in f^{-1}(y)$)
$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\} \subseteq X$

prendo $I = Y \neq \emptyset$
$A_y = f^{-1}(y) \neq \emptyset$
assioma
$\rightarrow \exists\, \gamma: Y \to \bigcup_{y \in Y} A_y$ tale che $\gamma(y) \in A_y$

γ è inversa dx di f



$\bigcup_{y \in Y} A_y = \bigcup_{y \in X} f^{-1}(y) = X$
$\gamma(y) \in A_y = f^{-1}(y)$
$f(\gamma(y)) = y \qquad f \circ \gamma(y) = y$
$f \circ \gamma = Id_Y$ γ inversa dx di f $\square$

teorema: $f: X \to Y$
f è bigettiva $\leftrightarrow f$ è invertibile