# Relazione di equivalenza

mercoledì 1 novembre 2023 15:27

## → RELAZIONE DI EQUIVALENZA

def: A insieme ($A \neq 0$), $R \subseteq A \times A$

è relazione di equivalenza se è:

1) RIFLESSIVA $\forall a \in A \quad (a,a) \in R$
2) SIMMETRICA vale $(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$
3) TRANSITIVA vale $(a,b)(b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R$

es:

$A = \{1,2,3\}$

$R = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$

$(1,1)(1,2) \rightarrow (1,2)$ ✓
$(1,2)(2,1) \rightarrow (1,1)$ ✓
$(2,1)(1,2) \rightarrow (2,2)$ ✗

RIFLESSIVA ✗
SIMMETRICA ✓
TRANSITIVA ✗

es:

$A = \{1,2,3\}$

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$

RIFLESSIVA ✓
SIMMETRICA ✓
TRANSITIVA ✓

è una relazione di equivalenza

Scriviamo $a \sim b$ o $a \equiv b$ invece di $(a,b) \in R$

"a è in relazione con b"

1) RIFLESSIVA $a \sim a$
2) SIMMETRICA $a \sim b \rightarrow b \sim a$
3) TRANSITIVA $a \sim b, b \sim a \rightarrow a \sim c$

es: la relazione di uguaglianta è una relazione di equivalenza

$a = a \quad \forall a \in A$

$a = b \rightarrow b = a$

$a = b, b = c \rightarrow a = c$

$R = \{(a,a) \mid \forall a \in A\}$

es: $\mathbb{Z} = A \qquad x \sim y \leftrightarrow |x| = |y| \qquad x,y \in \mathbb{Z}$

- RIFLESSIVA $\forall x \in \mathbb{Z} \quad x \sim x\,? \quad |x| = |x|$ ✓
- SIMMETRICA $x \sim y \rightarrow y \sim x\,? \quad |x| = |y| \rightarrow |y| = |x|$ ✓
- TRANSITIVA $x \sim y, y \sim z \rightarrow x \sim z\,? \quad |x| = |y|, |y| = |z| \rightarrow |x| = |z|$ ✓

es: $A = \mathbb{Z} \qquad x \sim y \leftrightarrow y = x^2$

relazione d'equivalenza?

NO RIFLESSIVA $\cancel{2 \sim 2}$ perchè $2 \neq 2^2$

es: $A = \mathbb{Z}$, fissiamo $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$

$x \sim_n y \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ t.c. $x - y = kn$

- RIFLESSIVA $\forall x \in \mathbb{Z} \quad x \sim x\,?$

$A=\mathbb{Z}$, fissiamo $n\in\mathbb{N}$, $n>0$

$x \sim_n y \leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}$ t.c. $x-y=kn$

- RIFLESSIVA

  $\forall x\in\mathbb{Z} \quad x\sim x$ ?

  $\underbrace{x-x}_{=0} = k\cdot n$ scelgo $k=0$ ✓

- SIMMETRICA

  $x\sim y \rightarrow y\sim x$ ?

  $\exists k\in\mathbb{Z}$ t.c. $x-y=kn \longrightarrow y-x=-kn$

  $\exists h\in\mathbb{Z}$ t.c. $y-x=hn$? scelgo $h=-k$ ✓

- TRANSITIVA

  $x\sim y,\ y\sim z \rightarrow x\sim z$

  $x\sim y \leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} \quad x-y=kn$

  $y\sim z \leftrightarrow \exists h\in\mathbb{Z} \quad y-z=hn$

  $x\sim z \leftrightarrow \exists \ell\in\mathbb{Z} \quad x-z=\ell n$

  $x-z=\underbrace{x-y}_{(1)\,=\,kn}+\underbrace{y-z}_{(2)\,=\,hn}=kn+hn=(k+h)n$

  scelgo $\ell=k+h$

# $\sim_n$ RELAZIONE DI EQUIVALENZA MODULARE

$x\sim_n y$ si scrive $x\equiv y \mod n$

- $n=2$ $\quad x\equiv y \mod 2 \longleftrightarrow x-y=2k$

  $x-y$ pari

  $x\equiv y \mod 2 \leftrightarrow$ $x$ e $y$ pari

  o

  $x$ e $y$ dispari

- $n=3$ $\quad x\equiv y \mod 3 \leftrightarrow x-y$ è multiplo di 3

  $0\sim3\sim6\sim9\sim\dots$

  $1\sim4\sim7\sim10\sim\dots$

  $2\sim5\sim8\sim11\sim\dots$

$x\equiv y \mod 3 \leftrightarrow$ danno lo stesso resto divisi per 3

$A$ insieme $\quad \sim$ relazione di equivalenza su $A$

- RIFLESSIVA $\quad \forall a\in A \quad a\sim a$
- SIMMETRICA $\quad a\sim b \rightarrow b\sim a$
- TRANSITIVA $\quad a\sim b,\ b\sim c \rightarrow a\sim c$

es:

1) $A$ insieme, $=$ è relazione di equivalenza
2) $\mathbb{Z},\ x\sim y \leftrightarrow |x|=|y|$
3) fissato $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, relazione d'equivalenza modulo $n$

   $\mathbb{Z},\ x\sim y \leftrightarrow x-y$ multiplo di $n$

   $\leftrightarrow x$ e $y$ danno stesso resto diviso $n$

   scriviamo $x\equiv y \mod n$

def: dato $a\in A$, la classe di equivalenza di $a$ è l'insieme $\bar{a}=[a]=\{b\in A \mid b\sim a\}$

es:

1) $A$ insieme, $=$ è relazione di equivalenza

es:

1) $A$ insieme, $=$ è relazione di equivalenza

$a \in A \qquad \underset{a}{\overset{\shortparallel}{[a]}} = \{b \in A \mid b \sim a\} = \{a\}$

$\{b \in A \mid b = a\}$

2) $\mathbb{Z}$, $x \sim y \leftrightarrow |x| = |y|$

$[1] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \sim 1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = |1|\} = \{-1, 1\}$

$[2] = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = |2|\} = \{-2, 2\}$

$[3] = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = |0|\} = \{0\}$

3) equiv. modulare $n=3$ classi di equiv. mod 3

$[0] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0 \bmod 3\} = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$

$[1] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1 \bmod 3\} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$

$[2] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 2 \bmod 3\} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$

$[3] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 3 \bmod 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv \mathbb{Z} \mid x \equiv 0 \bmod 3\}$

$[0] = [3] = [6] = [-3] = \dots$

def: $a \in A$, $[a]$

$a$ è detto **rappresentante** della classe

Qualunque elemento di $[a]$ può essere scelto come rappresentante

dati $a, b \in A$ possono succedere due cose

1) $a \sim b$ in questo caso $[a] = [b]$

2) $a \not\sim b$ in questo caso $[a] \cap [b] = \varnothing$

le classi di equivalenza formano una partizione di $A$

$A = \bigcup_{a \in A} [a]$ **unione disgiunta** (due insiemi distinti hanno intersezione vuota)

es: $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \qquad n=3$

in generale $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup \dots \cup [n-1]$ dato $n > 1$

es: $\mathbb{Z}$, $x \sim y \leftrightarrow |x| = |y|$

$\mathbb{Z} = \underset{\{0\}}{[0]} \cup \underset{\{-1,1\}}{[1]} \cup \underset{\{-2,2\}}{[2]} \cup [3] \cup \dots$

def: $A$ insieme, $\sim$ rel. d'equiv. su $A$, l'insieme quoziente $A/\sim \; := \{[a] \mid a \in A\}$ è l'insieme delle classi di equivalenza

**Mappa di proiezione** $\pi : A \to A/\sim$, $a \mapsto [a]$

- surgettiva
- in generale non è iniettiva

es: $n=3 \qquad \bmod 3$ su $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1], [2]\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

$\mathbb{Z}/_{3}$ $\qquad \bar{3} = \bar{0}$

$\mathbb{Z}/\sim = \{[0],[1],[2]\} = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$
$\searrow \bar{3} \quad \bar{3}=\bar{0}$

Si denota con $\mathbb{Z}_3$ o $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0},\bar{1}\}$ $\quad \bar{0} = \{\text{num pari}\}$ $\quad \bar{1} = \{\text{num dispari}\}$

in generale

$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\dots,\overline{n-1}\}$ n elementi

$\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$
$x \mapsto \bar{x}$

$\boxed{n=3 \quad \begin{array}{l}\pi(3)=\bar{3}=\bar{0}\\ \pi(0)=\bar{0}\end{array} \quad \text{non è iniettiva}}$

$f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$
$\bar{x} \mapsto x$
non è una funzione

$n=3 \quad f: \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}, \ \bar{x} \mapsto x \quad f(\bar{0})=0 \neq f(\bar{3})=3$
$f(\bar{1})=1$

$\mathbb{C}, \ z \sim w \leftrightarrow |z|=|w|$

$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$

$\bar{1} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |1|\} = \{1,-1,i,-i,\dots\}$

$\bar{2} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |2|\} = \{z \in \mathbb{C} \mid z=2\}$

$\overline{-3} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |-3|\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=3\} = \bar{3}$

$\bar{0} = \{0\}$

$\mathbb{C}/\sim \ = ?$
$\ \ = \{\bar{z} \mid z \in \mathbb{C}\}$

posso identificare
$\mathbb{C}/\sim$ con $\mathbb{R}\geq 0$
posso definire
$f : \mathbb{R}\geq 0 \to \mathbb{C}/\sim$
$x \mapsto \bar{x}$
$\left.\begin{array}{l} f \text{ suriettiva} \\ \text{iniettiva}\end{array}\right\} f$ bigettiva

es:
$\mathbb{N}\times\mathbb{N} \quad (a,b)\sim(c,d) \leftrightarrow a+d=b+c$

relaz. d'equiv:

- RIFLESSIVA
  $(a,b)\sim(a,b)$?
  $a+b=b+a$ ✓
- SIMMETRICA
  $(a,b)\sim(c,d) \leftrightarrow a+d=b+c$
  $(c,d)\sim(a,b) \leftrightarrow c+b=d+a$ ✓
- TRANSITIVA
  $\left.\begin{array}{l}(a,b)\sim(c,d)\\(c,d)\sim(a,b)\end{array}\right\} \overset{?}{\to} (a,b)\sim(e,f)$
  $(a,b)\sim(c,d) \leftrightarrow a+d=b+c$
  $(c,d)\sim(e,f) \leftrightarrow c+f=d+e$
  $(a,b)\sim(e,f) \leftrightarrow a+f=b+e$?
  $a+f = a+d-d+f \overset{(1)}{=} b+c-d+f \overset{(2)}{=} b-\cancel{d}+\cancel{d}+e = b+e$ ✓

quoziente $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$ ?

- $\overline{(1,1)} = \{(a,b) \mid (a,b)\sim(1,1)\} = \{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid a+1=b+1\} = \{(a,b)\in\mathbb{N}^2 \mid a=b\}$

- $\overline{(1,1)} = \{(a,b) \mid (a,b) \sim (1,1)\} = \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid a+1 = b+1\} = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a = b\}$
- $\overline{(2,1)} = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a+1 = b+2\} = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a = b+1\} = \overline{(3,2)} = \overline{(4,3)} = \dots$
- $\overline{(3,1)} = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a+1 = b+3\} = \{(a,b) \mid a = b+2\} = \overline{(4,2)} = \overline{(5,3)} = \dots$
- $\overline{(1,2)} = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a+1 = b\}$

ho identificazione $\emptyset \quad \mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$(a,b) \longmapsto a-b$$

controllo che $\emptyset$ sia ben definita

devo controllare che il valore di $\emptyset(\overline{(a,b)})$ non dipenda dal rappresentante scelto:

$(c,d) \in \mathbb{N}^2$ t.c. $\overline{(c,d)} = \overline{(a,b)}$

$\emptyset(\overline{(c,d)}) = \emptyset(\overline{(a,b)})$

ma se $\overline{(c,d)} = \overline{(a,b)} \to (c,d) \sim (a,b) \to c+b = d+a \to a-b = c-d$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \emptyset(\overline{(a,b)}) \quad \emptyset(\overline{(c,d)})$

$\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\}) \quad (x,y) \sim (z,t) \longleftrightarrow xt = zy$

il quoziente $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})/\sim$ si identifica con $\mathbb{Q}$

**es:**

$\psi : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_3$

$\quad \overline{x} \longmapsto [x]$

$\overline{x}$ classe di $x$ in $\mathbb{Z}_6$

$[x]$ classe di $x$ in $\mathbb{Z}_3$

$\psi$ è ben definita se:

$\overline{x} = \overline{y}$ in $\mathbb{Z}_6 \longrightarrow [x] = [y]$ in $\mathbb{Z}_3$

$\overline{x} = \overline{y}$ in $\mathbb{Z}_6 \longleftrightarrow x-y = 6k$ per $k \in \mathbb{Z}$

$[x] = [y]$ in $\mathbb{Z}_3 \longleftarrow x-y = 3(\underbrace{3k}_{h})$

$\mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_3$

$\overline{6} = \overline{0} \longmapsto [0]$

$\overline{1} \longmapsto [1]$

$\overline{2} \longmapsto [2]$

$\overline{3} \longmapsto [3] = [0]$

$\overline{4} \longmapsto [4] = [1]$

$\overline{5} \longmapsto [5] = [2]$

$\overline{6} \longmapsto [6] = [0]$ in $\mathbb{Z}_3$

$\boxed{\begin{array}{l} \varphi : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_6 \\ \quad [x] \mapsto \overline{x} \\ \text{ben definita? no} \end{array}}$