ESAME 14-9-2022

esercizio 1)

Si consideri la seguente relazione di equivalenza sull'insieme $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

$$(a,b)\sim(c,d) \leftrightarrow a+b=c+d$$

Determinare la cardinalità delle classi di equivalenza:

$$\overline{(0,0)},\ \overline{(1,1)},\ \overline{(5,2)},\ \overline{(37,13)}$$

→ Quindi $\overline{(a,b)}=\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 : x+y=a+b\}$

- $\overline{(0,0)}=\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 : x+y=0\}=\{(0,0)\}$

  Quindi $\#\overline{(0,0)}=1$

- $\overline{(1,1)}=\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 : x+y=2\}=\{(2,0),(1,1),(0,2)\}$

  Quindi $\#\overline{(1,1)}=3$

- $\overline{(5,2)}=\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 : x+y=7\}=$

  $=\{(7,0),(6,1),(5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(1,6),(0,7)\}$

  Quindi $\#\overline{(5,2)}=8$

- $\overline{(37,13)}=\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 : x+y=50\}=\ \dots$

  Quindi $\#\overline{(37,13)}=51$

In generale, notiamo che vale la formula $\#\overline{(a,b)}=a+b+1$

esercizio 2)

Determinare tutte le radici terze complesse di $-i$.
Scrivere ciascuna radice nella forma $a+ib$ con $a,b\in\mathbb{R}$

→ $z=-1$ → $|z|=\sqrt{(-1)^2}=1$ e $\arg(z)=-\frac{\pi}{2}$

Pertanto le radici terze z_k $(k=0,1,2)$ di z sono date dalla formula:

$$z_k=\sqrt[|k|]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{|k|}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{|k|}\right)\right)=$$

$$=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{-\pi/2+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi/2+2k\pi}{3}\right)\Big)=$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)$$

Quindi

$$z_0 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$z_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

$$z_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

esercizio 3)

$A = \{(1,2,3),(2,2,3),(2,2,4),(2,4,4),(2,3,5)\}$

Si consideri A come sottoinsieme del POSET $(\mathbb{Z}^3, \leq\times\leq\times\leq)$ e si determinino max, min, estremo inferiore e superiore

→ diagramma di Hasse che rappresenta la struttura del POSET A:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
(2,4,4) & & (2,3,5) \\
& (2,2,4) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& (2,2,3) \arrow[u] & \\
& (1,2,3) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

- A ha un minimo in $(1,2,3)$, che è quindi anche l'estremo inferiore

$$\min A = \inf A = (1,2,3)$$

- A ha due elementi massimali non confrontabili $(2,3,5)$ e $(2,4,4)$, quindi $\nexists \max A$

- L'insieme dei maggioranti di A è dato da

$$M = \{(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3 : (x\geq 2)\wedge(y\geq 4)\wedge(z\geq 5)\},$$

che ha minimo $(2,4,5)$.

Quindi $\sup A = (2,4,5)$

Esercizio 4)

Si consideri il gruppo $(U(\mathbb{Z}_{18}), \cdot, \bar{1})$

1) Determinare tutti gli elementi del gruppo
2) Calcolare l'ordine dei seguenti elementi: $\bar{7}, \overline{11}$

1)

Per trovare l'insieme $U(\mathbb{Z}_{18})$ dobbiamo trovare gli interi positivi minori di 18 che non hanno fattori comuni con 18.

Quindi $U(\mathbb{Z}_{18}) = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}\}$ $\#U(\mathbb{Z}_{18}) = 6$

2)

Dato un gruppo $(G, *, \lambda)$ e $g \in G$, l'ordine di g è il più piccolo intero positivo n, se esiste, per cui

$$\underbrace{g * g * \dots * g}_{n \text{ volte}} = \lambda$$

Inoltre, per il Teorema di Lagrange l'ordine di un elemento dev'essere un divisore dell'ordine del gruppo, che in questo caso è $\#U(\mathbb{Z}_{18}) = 6$

Perciò calcoliamo soltanto le potenze $\bar{x}^d$ con $d \mid 6$

- Calcoliamo $\bar{7}^2 = \overline{49} = \overline{13}$ (49 mod 18)

$\bar{7}^3 = \bar{7}^2 \cdot \bar{7} = \overline{13} \cdot \bar{7} = \overline{91} = \bar{1}$

Quindi $\text{ord}(\bar{7}) = 3$

- Calcoliamo $\overline{11}^2 = \overline{121} = \overline{13}$ (121 mod 18)

$\overline{11}^3 = \overline{11}^2 \cdot \overline{11} = \overline{13} \cdot \overline{11} = \overline{143} = \overline{17}$

$\overline{11}^6 = (\overline{11}^3)^2 = (\overline{17})^2 = \overline{289} = \bar{1}$

Quindi $\text{ord}(\overline{11}) = 6$

ESAME 14-7-2022

esercizio 1)

$A=\{1,2,3,4,5\}$ e $B=\{4,5,6\}$

Determinare la cardinalità degli insiemi seguenti:

1) $R=\{f: A\to B\}$
2) $S=\{f: B\to A\}$
3) $T=\{f: A\cap B\to B\}$
4) $Z=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

1) $R=B^A$, quindi $|R|=|B^A|=|B|^{|A|}=3^5=243$

2) $S=A^B$, quindi $|S|=|A^B|=|A|^{|B|}=5^3=125$

3) $T=B^{A\cap B}$, quindi $|T|=|B^{A\cap B}|=|B|^{|A\cap B|}=3^2=9$

4) $A\cap B=\{4,5\}$ e $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$,
quindi $Z=(A\cup B)\setminus(A\cap B)=\{1,2,3,6\}\to|Z|=4$

esercizio 2)

$$\boxed{\begin{aligned} f:\ &\mathbb{C}\to\mathbb{C}\\ &z\mapsto z^2+z\end{aligned}}$$

1) Determinare se f è iniettiva e/o suriettiva
2) Calcolare $f^{-1}(-\frac{5}{2})$

1)
- f non è iniettiva perchè $f(-1)=(-1)^2-1=0=f(0)$
- f è suriettiva. Dato $w\in\mathbb{C}$ esiste sempre $z\in\mathbb{C}$ tale che $f(z)=w$, cioè tale che $x^2+z-w=0$

2) $f^{-1}(-\frac{5}{2})=\{z\in\mathbb{C}: f(z)=-\frac{5}{2}\}=\{z\in\mathbb{C}: z^2+z+\frac{5}{2}=0\}$

$2\cdot z^2+z+\frac{5}{2}=0$

$2z^2+2z+5=0$ $\qquad \Delta=2^2+4\cdot2\cdot5=4-40=-36$

Le radici quadrate complesse di $\Delta=-36$ sono $\delta_1=6i$ e $\delta_2=-6i$

$w_1=\frac{-b+\delta_1}{2a}=\frac{-2+6i}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

$w_2=\frac{-b+\delta_2}{2a}=\frac{-2-6i}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$

Quindi $f^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right)=\left\{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right\}$

esercizio 3)

Calcolare la seguente espressione in $\mathbb{Z}_{21}$

$$\overline{4}^{50}+\overline{6}\cdot\overline{7}+\overline{3}^3$$

→ $\varphi(21)=(3-1)(7-1)=2\cdot 6=12$

teorema di eulero $\varphi(n)=(p-1)(q-1)$
↳ $n=p\cdot q$

Con la divisione euclidea possiamo scrivere $50=4\cdot 12+2$, quindi

$$\overline{4}^{50}=\overline{4}^{4\cdot 12+2}=(\overline{4}^{12})^4\cdot\overline{4}^2=\overline{1}\cdot\overline{16}=\overline{16}$$

Quindi

$$\overline{4}^{50}+\overline{6}\cdot\overline{7}+\overline{3}^3=\overline{16}+\overline{42}+\overline{27}=\overline{16}+\overline{0}+\overline{6}=\overline{22}=\overline{1}$$

esercizio 4)

Determinare l'inverso dei monoidi:

1) $\overline{3}$ nel monoide $(\mathbb{Z}_{15},+,\overline{0})$
2) $\overline{3}$ nel monoide $(\mathbb{Z}_{15},\cdot,\overline{1})$
3) $\overline{4}$ nel monoide $(\mathbb{Z}_{15},\cdot,\overline{1})$
4) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tale che $f(x)=x+1$ nel monoide $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}},\circ,Id_{\mathbb{Z}})$

1)

$\overline{3}+\overline{12}=\overline{15}=\overline{0}$, quindi l'inverso di $\overline{3}$ è $\overline{12}$

2)

Un elemento $\overline{x}$ è invertibile in $\mathbb{Z}_n$ rispetto al prodotto solo se $MCD(x,n)=1$

$MCD(3,15)=3\neq 1$

Quindi $\overline{3}$ non è invertibile in $(\mathbb{Z}_{15},\cdot,\overline{1})$

3)

$MCD(4,15)=1$

$\overline{4}\cdot\overline{4}=\overline{16}=\overline{1}$, quindi l'inverso di $\overline{4}$ è $\overline{4}$

4)

L'inversa è data dalla funzione $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tale che $g(x)=x-1$. Infatti verifichiamo che

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-1)=x-1+1=x=id_{\mathbb{Z}}(x)$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)=x+1-1=x=id_{\mathbb{Z}}(x)$

ESAME 28-6-2022

esercizio 1)

$A = \{a, b, c\}$ $B = \{1, 2\}$

Determinare la cardinalità degli insiemi seguenti:

1) $R = \{f : A \to B\}$
2) $S = A \cap B$
3) $T = \{f : A \to B : f(a) = f(b)\}$
4) $Z = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

1)

$R = B^A$, quindi $|R| = |B^A| = |B|^{|A|} = 2^3 = 8$

2)

$S = A \cap B = \emptyset$ quindi $|S| = 0$

3)

Quante sono le possibili funzioni $f : A \to B$ tali che $f(a) = f(b)$

Abbiamo 2 possibili scelte tra gli elementi di B per il valore $f(a) = f(b)$ e 2 possibili scelte tra gli elementi di B per il valore $f(c)$

$2 \cdot 2 = 4$ $|T| = 4$

4)

Siccome $A \cap B = \emptyset$

$Z = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cup B = \{a, b, c, 1, 2\}$

$|Z| = 5$

esercizio 2)

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 15x$ $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto 15x + 22y$

1) Determinare se f è iniettiva e/o suriettiva
2) Calcolare $f^{-1}(30)$
3) Determinare se g è iniettiva e/o suriettiva
4) Calcolare $g^{-1}(30)$

1)

La funzione f è iniettiva. Dati $x, y \in \mathbb{Z}$ tali che $f(x) = f(y)$, abbiamo $15x = 15y$ che implica $x = y$.

f non è suriettiva, non esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $f(x) = 2$, cioè non esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $15x = 2$.

$f^{-1}(30) = \{x \in \mathbb{Z} : f(x) = 30\} = \{x \in \mathbb{Z} : 15x = 30\} = \{2\}$

3)

- g non è iniettiva, $g(0,0) = 0 = g(22,-15)$
- $MCD(15,22) = 1$, quindi dato $c \in \mathbb{Z}$ esiste sempre $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tale che $15x + 22y = c$, cioè $g(x,y) = c$ pertanto g è surgettiva

4)

$$g^{-1}(30) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : g(x,y) = 30\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 15x+22y=30\}$$
$$= \{(2+22k, -15k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

esercizio 3)

Numero complesso $z = \dfrac{(1+i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i)}{i^7(1+i)^4}$

Scrivere z in forma $a+ib$ con $a,b \in \mathbb{R}$ e in forma esponenziale

→ calcolo prima il numeratore

$$(1+i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i) = -\sqrt{3}+i-3i-\sqrt{3} = -2\sqrt{3}-2i$$

→ poi il denominatore

$$i^7(1+i)^4 = i^3 \cdot ((1+i)^2)^2 = -i \cdot (1-1+2i)^2 = -i \cdot (2i)^2 =$$
$$= -i \cdot (-4) = 4i$$

- $$z = \frac{(1+i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i)}{i^7(1+i)^4} = \frac{-2\sqrt{3}-2i}{4i} = \frac{-\sqrt{3}-i}{2i} \cdot \frac{i}{i} =$$
$$= \frac{1-\sqrt{3}i}{-2} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Modulo di z:

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$$

L'argomento di z è dato dall'angolo $\theta \in (0,2\pi)$ tale che $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ e $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ quindi $\theta = \frac{2}{3}\pi$

La forma esponenziale di z è

$$z = |z| e^{\theta i} = e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

esercizio 4)

Si consideri il gruppo $(\mathbb{Z}^3, +)$ e il seguente sottogruppo:

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 : x+y+z \equiv 0 \mod 4\}$$

Determinare tutti gli elementi del quoziente $\mathbb{Z}^3/H$

→ Gli elementi del quoziente $\mathbb{Z}^3/H$ sono

$$\mathbb{Z}^3/H = \{\overline{(0,0,0)}, \overline{(1,0,0)}, \overline{(2,0,0)}, \overline{(3,0,0)}\} =$$
$$= \{H, (1,0,0)+H, (2,0,0)+H, (3,0,0)+H\}$$

Dato $(x,y,z) \in \mathbb{Z}_3$, indichiamo con K l'unico intero in $\{0,1,2,3\}$ tale che $K \equiv x+y+z \mod 4$.

La classe di $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ nel quoziente $\mathbb{Z}^3/H$ coincide con $\overline{(K,0,0)}$

Infatti si ha:

$$(x,y,z) - (K,0,0) = x+y+z-K \equiv 0 \mod 4$$

cioè $(x,y,z)-(K,0,0) \in H$ e quindi $\overline{(x,y,z)} = \overline{(K,0,0)}$

ESAME 11-2-2022

esercizio 1)

Sia dato il numero complesso

$$z = \frac{(6+12i)(4+12i)}{(\sqrt{3}+i)^3}$$

Scrivere z in forma $a+ib$ con $a,b \in \mathbb{R}$ e in forma esponenziale

→ **numeratore**

$$(6+12i)(4+12i) = 24+48i+72i-144 = -120+120i$$

→ **denominatore**

$|\sqrt{3}+i| = 2$ e $\arg(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6}$, quindi

$$(\sqrt{3}+i)^3 = (2e^{i\frac{\pi}{6}})^3 = 2^3 e^{3i\frac{\pi}{6}} = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = 8i$$

oppure

$$(\sqrt{3}+i)^3 = (\sqrt{3}+i)^2(\sqrt{3}+i) = (2\sqrt{3}i+2)(\sqrt{3}+i) =$$
$$= 2(3i-\sqrt{3}+\sqrt{3}+i) = 6i+2i = 8i$$

• $z = \frac{120(-1+i)}{8i} = \frac{15(-1+i)}{i} = -15i(-1+i) =$

$$= 15(1+i) = 15+15i$$

Per scrivere z in forma esponenziale, calcoliamo

$|z| = \sqrt{15^2+15^2} = 15\sqrt{2}$ e $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$

Quindi

$$z = 15\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

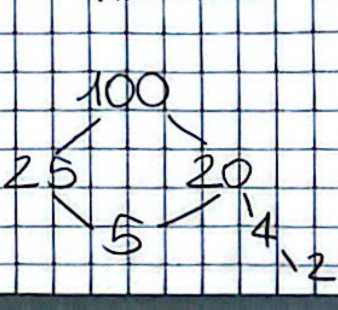
esercizio 2)

insieme $A = \{2,4,5,20,25,100\}$ con la seguente relazione d'ordine:

$a \preceq b \leftrightarrow a|b$ (cioè esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $b=ka$)

Si determinino max, min, elementi minimali e massimali di A

• **diagramma di Hasse**



• $\max A = 100$

• due elementi minimali, 2 e 5, quindi $\nexists \min A$

esercizio 3)

Sia $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ l'applicazione data da $f(x,y) = 24x - 20y$.

1) Determinare le seguenti controimmagini:

$$f^{-1}(10), f^{-1}(8), f^{-1}(f(5,6))$$

2) Determinare un'inversa sinistra e destra per f

1)

$MCD(24,-20) = 4$

$24 = 1 \cdot 20 + 4$
$20 = 5 \cdot 4 + 0$

- $MCD(24,-20) = 4 \nmid 10$, quindi $f^{-1}(10) = \emptyset$
- $f^{-1}(8) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 24x - 20y = 8\} =$
  $= \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 6x - 5y = 2\}$

  $(x_0, y_0) = (2,2)$, quindi

  $$f^{-1}(8) = \{(2-5k, 2-6k) : k \in \mathbb{Z}\}$$
- $f(5,6) = 0$

  Soluzione a $6x - 5y = 0$ è data da $(x_0,y_0) = (0,0)$ (o da $(x_0,y_0) = (5,6)$), quindi

  $$f^{-1}(f(5,6)) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 24x - 20y = 0\} =$$
  $$= \{(-5k, -6k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

2)

- f non è suriettiva in quanto $f^{-1}(10) = \emptyset$, quindi f non ha inverse destre
- f non è iniettiva, $f(5,6) = 0 = f(0,0)$, quindi f non ha inverse sinistre

esercizio 4)

Determinare tutti i sottogruppi di $(U(\mathbb{Z}_8), \cdot, \bar{1})$

- $U(\mathbb{Z}_n) = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}_n : MCD(x,n) = 1\}$

  quindi $U(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$

Per il Teorema di Lagrange, se H è un sottogruppo di $U(\mathbb{Z}_8)$, l'ordine di H dev'essere un divisore di $\# U(\mathbb{Z}_8) = 4$, cioè può essere $1, 2, 4$

- Abbiamo sempre un sottogruppo di ordine 1: il gruppo trivale $\{\overline{1}\}$
- Abbiamo sempre un sottogruppo di ordine massimo: il gruppo stesso $U(\mathbb{Z}_8)$
- Rimangono da considerare i possibili sottogruppi di ordine 2.

  $\overline{3}, \overline{5}, \overline{7}$ hanno tutti ordine 2, infatti

  $\overline{3} \cdot \overline{3} = \overline{9} = \overline{1}$, $\overline{5} \cdot \overline{5} = \overline{25} = \overline{1}$, e $\overline{7} \cdot \overline{7} = \overline{49} = \overline{1}$

  Abbiamo quindi i seguenti sottogruppi di ordine 2:

  $\{\overline{1}, \overline{3}\}, \{\overline{1}, \overline{5}\}, \{\overline{1}, \overline{7}\}$

ESAME 25-1-2022

esercizio 1)

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto z^4$$

1) Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva
2) Determinare $f^{-1}(-256)$

1)
- f non è iniettiva in quanto $f(1) = 1 = f(-1)$
- f è surgettiva, dato un qualunque $z \in \mathbb{C}$ esiste sempre $w \in \mathbb{C}$ tale che $f(w) = w^4 = z$

2)
$$f^{-1}(-256) = \{w \in \mathbb{C} : w^4 = -256\}$$

Si ha che $|z| = \sqrt{(-256)^2} = 256$ e $\arg(z) = \pi$

pertanto le radici quarte z_k di z sono date dalla formula:

$$\boxed{z_k = \sqrt[4]{256}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)\right)} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Siccome $\sqrt[4]{256} = 4$, abbiamo

$$z_0 = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

$$z_1 = 4\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

$$z_2 = 4\left(\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$$

$$z_3 = 4\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$$

Quindi

$$f^{-1}(-256) = \{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i,\ 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i,\ -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i,\ -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i\}$$

esercizio 2)

Si consideri la seguente relazione d'equivalenza sull'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(a,b) \sim (c,d) \leftrightarrow a \cdot b = c \cdot d$$

Determinare la cardinalità delle seguenti classi d'equivalenza:

$$\overline{(1,1)}, \overline{(6,6)}, \overline{(0,0)}$$

fissati $a,b \in \mathbb{N}$ si ha

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : xy = ab\}$$

Quindi:

- $\overline{(1,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : xy = 1\} = \{(1,1)\}$

  quindi $\#\overline{(1,1)} = 1$

- $\overline{(6,6)} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : xy = 36\} =$

  $= \{(1,36),(2,18),(3,12),(4,9),(6,6),(9,4),(12,3),(18,2),(36,1)\}$

  quindi $\#\overline{(6,6)} = 9$

- $\overline{(0,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : xy = 0\} = \{(0,x) : x \in \mathbb{N}\} \cup \{(x,0) : x \in \mathbb{N}^*\}$

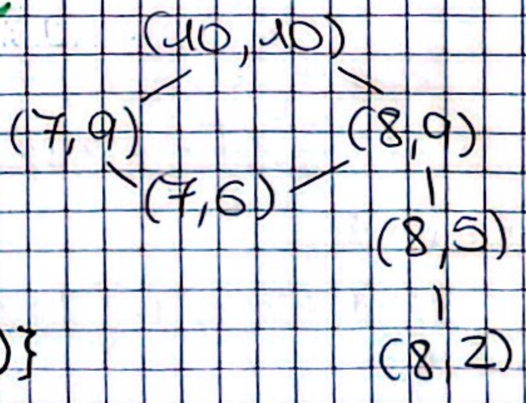
  quindi $\#\overline{(0,0)} = \aleph_0$

esercizio 3)

$$A = \{(7,9),(7,6),(10,10),(8,6),(8,5),(8,2)\}$$

Si consideri A come sottoinsieme del POSET $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq \times \leq)$ e si determinino max, min, estremo inferiore e superiore di A

→ diagramma di Hasse



- $\max A = \sup A = (10,10)$
- A ha due elementi minimali $(7,6)$ e $(8,2)$, quindi $\nexists \min A$
- insieme dei minoranti

  $M = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : (x \leq 7) \wedge (y \leq 2)\}$

  quindi $\inf A = (7,2)$

esercizio 4)

1) Calcolare l'ordine dei seguenti elementi nel gruppo $(\mathbb{Z}_{26}, +, \overline{0})$: $\overline{2}, \overline{9}, \overline{13}$

2) Calcolare l'ordine dei seguenti elementi del gruppo $(U(\mathbb{Z}_{26}), \cdot, \overline{1})$: $\overline{9}, \overline{21}$

→ Dato un gruppo $(G, *, \lambda)$ e $g \in G$, l'ordine di g è il più piccolo intero positivo n, per cui

$$\underbrace{g * g * \dots * g}_{n \text{ volte}} = \lambda$$

1)

$\overline{2}$ $= \underbrace{\overline{2} + \dots + \overline{2}}_{13 \text{ volte}} = \overline{26} = \overline{0}$, quindi $ord(\overline{2}) = 13$

$\overline{9}$ = siccome 9 è coprimo con 26 il più piccolo intero positivo n per cui $n \cdot \overline{9} = \overline{0}$ è 26, perciò $(\overline{9}) = 26$

$\overline{13}$ $= \overline{13} + \overline{13} = \overline{26} = \overline{0}$, quindi $ord(\overline{13}) = 2$

2)

Per il teorema di Lagrange l'ordine di un elemento deve essere un divisore dell'ordine del gruppo, che in questo caso è

$$\# U(\mathbb{Z}_{26}) = \varphi(26) = \varphi(2 \cdot 13) = \varphi(2) \cdot \varphi(13) = $$
$$= (2-1) \cdot (13-1) = 1 \cdot 12 = 12$$

Quindi calcoliamo solo le potenze $\overline{x}^d$ con $d \mid 12$

$\overline{9}$ $= \overline{9}^2 = \overline{81} = \overline{78} + \overline{3} = \overline{3}$, e poi

$\overline{9}^3 = \overline{9}^2 \cdot \overline{9} = \overline{3} \cdot \overline{9} = \overline{27} = \overline{1}$

Quindi $ord(\overline{9}) = 3$

$\overline{21}$ $= \overline{21}^2 \overset{\text{mod } 26}{=} (\overline{-5})^2 = \overline{25} = \overline{-1}$, e poi

$\overline{21}^4 = (\overline{21})^2 \cdot (\overline{21})^2 = (\overline{-1})(\overline{-1}) = \overline{1}$

Quindi $ord(\overline{21}) = 4$