La biimplicazione

La biimplicazione

$$P \leftrightarrow Q$$

significa che

$$P \text{ se e solo se } Q$$

cioè

$$\text{se } P \text{ allora } Q, \text{ e se } Q \text{ allora } P$$

ovvero $P \leftrightarrow Q$ è equivalente a

$$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$$

Dunque $P \leftrightarrow Q$ è vera in un dato contesto se e solo se in quel contesto P e Q sono o entrambe vere, o entrambe false.

Terminologia. La biimplicazione $P \leftrightarrow Q$ si esprime anche dicendo che

$$P \text{ è condizione necessaria e sufficiente per } Q$$

Proprietà della biimplicazione

- $P \leftrightarrow Q \equiv Q \leftrightarrow P$ (commutatività)
  Infatti

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \equiv (Q \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow Q) \equiv Q \leftrightarrow P$$

- $P \leftrightarrow Q \models P \rightarrow Q$
- $P \leftrightarrow Q \models Q \rightarrow P$
- $P \rightarrow Q, Q \rightarrow P \models P \leftrightarrow Q$
- Se $P \equiv R$ e $Q \equiv S$, allora $P \leftrightarrow Q \equiv R \leftrightarrow S$
  Infatti, se $P \equiv R$ e $Q \equiv S$, allora

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \equiv (R \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow R) \equiv R \leftrightarrow S$$

Biimplicazione ed equivalenza logica

$$P \equiv Q \quad \text{se e solo se} \quad \models P \leftrightarrow Q$$

Infatti

$$P \equiv Q$$
$$\text{se e solo se}$$
$$P \models Q \quad \text{e} \quad Q \models P$$
$$\text{se e solo se}$$
$$\models P \to Q \quad \text{e} \quad \models Q \to P$$
$$\text{se e solo se}$$
$$\models (P \to Q) \land (Q \to P)$$
$$\text{se e solo se}$$
$$\models P \leftrightarrow Q$$

I quantificatori

Il quantificatore esistenziale: $\exists$
L'espressione $\exists xP$ asserisce che esiste (almeno) un oggetto x tale che la proprietà P vale.

Il quantificatore universale: $\forall$
L'espressione $\forall xP$ asserisce che per ogni oggetto x vale la proprietà P.

Nota. Una quantificazione $\exists x$ o $\forall x$ può essere applicata a qualunque asserzione P.

Tuttavia, perché la quantificazione sia significativa, P deve asserire qualcosa della variabile x quantificata.

Esempi

La formula

$$\exists x \; x^2 + x = 0$$

asserisce che l'equazione $x^2 + x = 0$ ha almeno una soluzione. Si tratta di un'affermazione vera (nell'usuale contesto aritmetico).

La formula

$$\forall x \; x^2 + x = 0$$

asserisce che tutti i numeri sono soluzioni dell'equazione $x^2 + x = 0$. Si tratta di un'affermazione falsa (nell'usuale contesto aritmetico).

Le formule

$$\exists x \; 2 + 2 = 4 \quad \text{e} \quad \forall x \; 2 + 2 = 4$$

sono sintatticamente legittime. Tuttavia la quantificazione è ineffettiva, perché sono applicate a una formula che non menziona x. Entrambe sono equivalenti all'asserzione $2 + 2 = 4$ (che è un'affermazione vera, nell'usuale contesto aritmetico).

Esempi

Partendo dalla formula

$$P : \exists x \; x^2 + x = 0$$

si può ulteriormente quantificare, per esempio ottenendo

$$\exists y \; \exists x \; x^2 + x = 0, \qquad \forall y \; \exists x \; x^2 + x = 0$$

tuttavia la quantificazione su y è ineffettiva, perché P non parla di y. Le due formule affermano la stessa cosa che P, cioè: l'equazione $x^2 + x = 0$ ha soluzioni.

In effetti, P non parla di alcuna variabile, neanche di x: la quantificazione su x annulla (tecnicamente: vincola) il ruolo della lettera x nella formula.

Esempi

In un contesto aritmetico si consideri la formula

$$P : x + y = 0$$

La formula P parla di x e y: asserisce che

$$\boxed{\text{gli elementi } \; x \; \text{ e } \; y \; \text{ solo uno l'opposto dell'altro}}$$

La sua verità o falsità dipende da chi sono x e y.
La formula

$$\exists y P : \quad \exists y \; x + y = 0$$

non parla più di y, che è quantificata, ma solo di x. Asserisce che

$$\boxed{\text{l'elemento } \; x \; \text{ ha un opposto}}$$

La verità o falsità di questa formula dipende da chi è x.

- Nel contesto dell'artimetica dei numeri naturali $\mathbb{N}$, è vera solo per $x = 0$
- Nel contesto dell'aritmetica dei numeri interi $\mathbb{Z}$, è vera per tutti gli x

Esempi

La formula

$$\forall x \exists y P : \quad \forall x \ \exists y \ x + y = 0$$

non parla né di x né di y: dice che

$$\boxed{\text{ogni elemento ha un opposto}}$$

- Nel contesto dell'aritmetica dei numeri naturali $\mathbb{N}$ è falsa
- Nel contesto dell'aritmetica dei numeri interi $\mathbb{Z}$ è vera

L'ordine dei quantificatori

L'ordine dei quantificatori è importante!
Esempio. Sia di nuovo $P : x + y = 0$. Allora

$$\exists y \forall x P : \quad \exists y \ \forall x \ x + y = 0$$

asserisce che esiste un numero che è l'opposto di ogni numero.
È un'affermazione falsa, sia nel contesto dei numeri naturali $\mathbb{N}$ sia nel contesto dei numeri interi $\mathbb{Z}$.

Quindi

$$\exists y \forall x P \models \forall x \exists y P$$

ma non vale il viceversa, come visto nell'esempio sopra.

L'ordine dei quantificatori

Esempio. Sia

$$P: \qquad x \text{ paga da bere a } y$$

La verità o falsità di P dipende da chi sono x e y.

La formula

$$\forall y \exists x P$$

asserisce che

$$\boxed{\text{ognuno ha qualcuno che gli paga da bere}}$$

La formula

$$\exists x \forall y P$$

asserisce che

$$\boxed{\text{c'è qualcuno che paga da bere a tutti}}$$

Il significato è ben differente!

L'ordine dei quantificatori

Invece quantificazioni dello stesso tipo si possono scambiare tra loro:

$$\begin{aligned} \exists x \exists y P &\equiv \exists y \exists x P \\ \forall x \forall y P &\equiv \forall y \forall x P \end{aligned}$$

Notazione

Se l'asserzione P parla di una variabile x, talvolta può essere utile segnalarlo denotando l'assezione con $P(x)$. Similmente se più variabili sono coinvolte.

Esempio.

$$\begin{array}{llrr} P(x,y): & & & x+y=0 \\ Q(x): & & \exists y\ P(x,y): & \exists y\ x+y=0 \\ R: & \forall x Q(x): & \forall x \exists y P(x,y): & \forall x\ \exists y\ x+y=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} P(x,y) & : & \boxed{\text{x e y sono l'uno l'opposto dell'altro}} \\ Q(x) & : & \boxed{\text{x ha un opposto}} \\ R & : & \boxed{\text{ogni numero ha un opposto}} \end{array}$$