Esercizio

Formalizzare in $\mathbb{N}$ l'asserzione

il prodotto di due numeri è dispari se e solo se i due numeri sono entrambi dispari

utilizzando il linguaggio del prim'ordine $L = \{P, \cdot\}$, dove P è simbolo relazionale unario e $\cdot$ è simbolo funzionale binario, secondo la seguente interpretazione:

- $P(x)$: x è pari
- $\cdot$: l'operazione di moltiplicazione

Risposta.

$$\forall x \forall y (\neg P(x \cdot y) \leftrightarrow \neg P(x) \wedge \neg P(y))$$

THE HORROR GALLERY

Queste sono alcune soluzioni tratte da esami passati.
L'esito di questi esami è facilmente immaginabile.

- $P(x) =$ essere un numero pari.
  $\exists x \exists y\,(x \cdot y \neq P(x)) \leftrightarrow (x \neq P(x) \wedge y \neq P(x))$.
- $\exists z \forall x \forall y\,(\neg P(z) = \neg P(x) \cdot P(y))$.
- $\forall x \forall y\,(x \cdot y = z) \rightarrow \exists z\,(z \neq P) \leftrightarrow \exists x \exists y\,(x \neq P, y \neq P)$.
- $\forall x \forall y \exists z\,(\neg P(x) \cdot \neg P(y) = \neg P(z))$.
- $\forall P(x, y) \exists z\,(z = x + y \wedge \forall k\,(k = x + y \rightarrow k = z))$.
- $\forall x \forall y (P(x) \cdot P(y) = P(z) \rightarrow \neg P(z) \leftrightarrow (\neg P(x) \wedge \neg P(y))$.
- $\exists x \exists y\,((x \cdot y) = \neg P(x \cdot y)) \leftrightarrow$
  $\forall x \forall y\,((\neg P(x) \wedge \neg P(y)) \rightarrow \neg P(x, y))$.
- $\forall x \forall y \exists z\,(z = x \cdot y \Leftrightarrow x = z \wedge y = z) \wedge \neg \exists P(p)\,(p = x \vee p = y)$.

Esercizio

Sia $L = \{P, <, \cdot, 1\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove

P è simbolo relazionale unario

$<$ è simbolo relazionale binario

$\cdot$ è simbolo funzionale binario

1 è simbolo di costante

Si consideri la seguente interpretazione di L:

$P(x)$: x è un numero primo

$<, \cdot, 1$: interpretazione standard

Formalizzare in $\mathbb{N}$ la frase:

- Per ogni $n > 1$ c'è un primo compreso tra n^2 e $(n+1)^2$.

Risposta

- $\forall x \forall y (1 < x < y \land \neg \exists z \; x < z < y \to \exists w (P(w) \land x \cdot x < w < y \cdot y))$

Oppure:

- $\forall x (1 < x \to \exists y (x < y \land \neg \exists z \; x < z < y \land \exists w (P(w) \land x \cdot x < w < y \cdot y)))$

Esercizio

Sia $L = \{P, <, +\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove

P è simbolo relazionale unario

$<$ è simbolo relazionale binario

$+$ è simbolo funzionale binario

Si consideri la seguente interpretazione di L:

$P(x)$: x è primo

$<, +$: interpretazione standard

Formalizzare in $\mathbb{N}$ la frase:

- Per ogni numero k ci sono numeri primi p arbitrariamente grandi tali che $p + k$ è primo e non ci sono numeri primi tra p e $p + k$

Esercizio

Sia $L = \{A, G\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove A, G sono simboli relazionali binari.
Si consideri la seguente interpretazione di L:

$A(x, y)$: x ama y

$G(x, y)$: x è genitore di y

Formalizzare la frase:

- Tutti i nipoti amano i propri nonni

Risposta

- $\forall x \forall y \forall z (G(y,x) \land G(z,y) \to A(x,z))$

Oppure:

- $\forall x \forall z (\exists y (G(y,x) \land G(z,y)) \to A(x,z))$

Esercizio

Sia $L = \{P, f\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove

- P è simbolo relazionale unario
- f è simbolo funzionale unario

Si formalizzi utilizzando il linguaggio L la frase:

Se ci sono almeno due elementi che soddisfano la proprietà P, allora la funzione f è suriettiva.

Risposta.

$$\exists x \exists y (x \neq y \wedge P(x) \wedge P(y)) \to \forall y \exists x \; f(x) = y$$

Esercizio

Sia $L = \{C, T, A, p, g\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove

- C, T sono simboli relazionali unari
- A è simbolo relazionale binario
- p, g sono simboli di costante

Si consideri la seguente interpretazione di L:

- $C(x)$: x ama il cinema
- $T(x)$: x ama il teatro
- $A(x, y)$: x è amico di y
- p: Pino
- g: Gino

Si formalizzino utilizzando L le seguenti asserzioni:

1. Chi è amico di qualcuno che ama il cinema, ama il cinema.
2. Chi ama il teatro, è amico di qualcuno che ama il teatro.
3. Pino è amico di Gino e ama il teatro, ma non il cinema.

Risposta

1. $\forall x(\exists y(A(x,y) \wedge C(y)) \rightarrow C(x))$
2. $\forall x(T(x) \rightarrow \exists y(A(x,y) \wedge T(y)))$
3. $A(p,g) \wedge T(p) \wedge \neg C(p)$

Esercizio

Sia $L = \{P, +\}$, dove

- P è simbolo relazionale unario
- $+$ è simbolo funzionale binario

Si consideri la seguente interpretazione di L:

- $P(x)$: x è un numero primo
- $+$: interpretazione standard

Si formalizzi in $\mathbb{N}$ utilizzando L la frase

Ogni numero dispari è somma di tre addendi primi

Risposta.

$$\forall x(\neg\exists y\, x = y+y \rightarrow \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3\, (P(z_1) \wedge P(z_2) \wedge P(z_3) \wedge x = (z_1+z_2)+z_3))$$

Esercizio

Sia $L = \{P, <, +\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove

- P è simbolo relazionale unario
- $<$ è simbolo relazionale binario
- $+$ è simbolo funzionale binario

Si consideri la seguente interpretazione di L:

- $P(x)$: x è un numero primo
- $<, +$: interpretazione standard

Si formalizzino in $\mathbb{N}$ usando L le frasi

1. Ogni numero dispari sufficientemente grande è somma di tre addendi primi.
2. Il più piccolo numero primo è pari.

Risposta

1. $$\exists x \forall y (x < y \land \neg \exists z\ y = z + z \to \\ \to \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 (P(z_1) \land P(z_2) \land P(z_3) \land y = (z_1 + z_2) + z_3))$$

2. $\forall x (P(x) \land \forall y (y < x \to \neg P(y)) \to \exists z\ x = z + z)$

Esercizio

Sia $L = \{B, L, p\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove

- B, L sono simboli relazionali unari
- p è simbolo di costante

Si consideri la seguente interpretazione di L:

- $B(x)$: x è biondo
- $L(x)$: x è lappone
- p: Pino

Si formalizzi la frase

Se tutti i lapponi sono biondi e Pino non è biondo, allora Pino non è lappone.

Risposta.

$$\forall x(L(x) \to B(x)) \land \neg B(p) \to \neg L(p)$$

Esercizio

Sia $L = \{P, <, \cdot\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove

- P è simbolo relazionale unario
- $<, \cdot$ sono interpretati in modo standard

Formalizzare in $\mathbb{N}$ usando L la frase

Se ci sono numeri arbitrariamente grandi che soddisfano la proprietà P, allora almeno uno di questi numeri è un quadrato.

Risposta.

$$\forall x \exists y (x < y \wedge P(y)) \to \exists z (P(z) \wedge \exists w \; z = w \cdot w)$$

Oppure:

$$\forall x \exists y (x < y \wedge P(y)) \to \exists w P(w \cdot w)$$

Esercizio

Sia $L = \{<, +, \cdot\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove i simboli sono interpretati nel modo standard in $\mathbb{N}$.
Formalizzare la frase

Ogni numero sufficientemente grande è somma di quattro addendi che sono dei cubi.

Risposta.

$$\exists x \forall y (x < y \to \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \exists z_4$$
$$y = ((((z_1 \cdot z_1) \cdot z_1) + ((z_2 \cdot z_2) \cdot z_2)) + ((z_3 \cdot z_3) \cdot z_3)) + ((z_4 \cdot z_4) \cdot z_4))$$

Esercizio

Sia $\mathcal{L} = \{G, L, O\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove G, L, O sono simboli relazionali unari.
Si consideri la seguente interpretazione di $\mathcal{L}$:

- $G(x)$: x è un gentiluomo
- $L(x)$: x è un ladro
- $O(x)$: x è onesto

Formalizzare utilizzando $\mathcal{L}$ la frase

Nessun ladro è onesto, ma c'è un ladro gentiluomo che è onesto.

Risposta.

$$\neg\exists x(L(x) \wedge O(x)) \wedge \exists x(L(x) \wedge G(x) \wedge O(x))$$

Nota: L'enunciato è insoddisfacibile.

Esercizio

Sia $L = \{P, Q\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove P, Q sono simboli relazionali unari.
Formalizzare la seguente frase:

Se ci sono almeno 3 elementi che soddisfano la proprietà P, allora ci sono al più 2 elementi che soddisfano la proprietà Q.

Risposta.

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3)) \rightarrow$$
$$\rightarrow \forall y_1 \forall y_2 \forall y_3 (Q(y_1) \wedge Q(y_2) \wedge Q(y_3) \rightarrow y_1 = y_2 \vee y_1 = y_3 \vee y_2 \vee y_3)$$

Oppure:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3)) \rightarrow$$
$$\rightarrow \neg \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 (y_1 \neq y_2 \wedge y_1 \neq y_3 \wedge y_2 \neq y_3 \wedge Q(y_1) \wedge Q(y_2) \wedge Q(y_3))$$

Esercizio

Sia $\mathcal{L} = \{B, I, L, c, p\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove

- B, I sono simboli relazionali unari
- L è simbolo relazionale binario
- c è simbolo funzionale unario
- p è simbolo di costante

Si consideri la seguente interpretazione di $\mathcal{L}$:

- $B(x)$: x lavora bene
- $I(x)$: x è un impiegato
- $L(x, y)$: x licenzia y
- $c(x)$: il capufficio di x
- p: Pino

(cont.)

Esercizio (cont.)

Si formalizzino usando $\mathcal{L}$ le seguenti frasi:

1. C'è qualche impiegato che, pur lavorando bene, viene licenziato dal proprio capufficio.
2. Il capufficio di Pino non licenzia alcun impiegato che lavori bene.
3. Qualunque impiegato, a meno che si tratti di Pino, che non lavori bene viene licenziato dal proprio capufficio.

Risposta.

1. $\exists x(I(x) \wedge B(x) \wedge L(c(x), x))$
2. $\neg\exists x(I(x) \wedge B(x) \wedge L(c(p), x)$
3. $\forall x(I(x) \wedge x \neq p \wedge \neg B(x) \rightarrow L(c(x), x))$

Esercizio

Sia $L = \{P, <, +, \cdot 1\}$ dove

- P è un simbolo relazionale unario.
  Interpretazione: $P(x)$: x è numero primo.
- $<, +, \cdot, 1$ sono interpretati in modo standard.

Formalizzare in $\mathbb{N}$ usando L la frase

Dati un numero maggiore di 1 e il suo successore, nell'intervallo compreso strettamente tra i loro quadrati c'è sempre un numero primo.

Risposta.

$$\forall x (1 < x \to \exists y (x \cdot x < y < (x+1) \cdot (x+1) \wedge P(y)))$$