Esercizio

Sia $L = \{P, f, c\}$, dove

- P è simbolo relazionale binario
- f è simbolo funzionale binario
- c è simbolo di costante

Determinare se

$$(\mathbb{R}, \leq, \cdot, \sqrt{2}) \models (\forall x(f(y,x) = y \wedge \exists z(P(y,z) \wedge P(z, f(c,c)))))[y/0]$$

Svolgimento

Sia $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, \leq, \cdot, \sqrt{2})$.

$$\mathcal{R} \models (\forall x(f(y,x) = y \wedge \exists z(P(y,z) \wedge P(z, f(c,c)))))[y/0]$$

sse

Per ogni $a \in \mathbb{R}, \mathcal{R} \models (f(y,x) = y \wedge \exists z(P(y,z) \wedge P(z, f(c,c))))[y/0, x/a]$

sse

$$\text{Per ogni } a \in \mathbb{R}, \begin{cases} \mathcal{R} \models (f(y,x) = y)[y/0, x/a] \\ \text{e} \\ \mathcal{R} \models (\exists z(P(y,z) \wedge P(z, f(c,c))))[y/0, x/a] \end{cases}$$

sse

$$\text{Per ogni } a \in \mathbb{R}, \begin{cases} 0 \cdot a = 0 \\ \text{e} \\ \text{per qualche } b \in \mathbb{R}, \\ \quad \mathcal{R} \models (P(y,z) \wedge P(z, f(c,c)))[y/0, x/a, z/b] \end{cases}$$

Svolgimento (cont.)

sse

$$\text{Per ogni } a \in \mathbb{R}, \begin{cases} 0 \cdot a = 0 \\ \text{e} \\ \text{per qualche } b \in \mathbb{R}, \\ \qquad \mathcal{R} \models (P(y,z))[y/0, x/a, z/b] \\ \qquad\quad \text{e } \mathcal{R} \models (P(z, f(c,c)))[y/0, x/a, z/b] \end{cases}$$

sse

$$\text{Per ogni } a \in \mathbb{R}, \begin{cases} 0 \cdot a = 0 \\ \text{e} \\ \text{per qualche } b \in \mathbb{R}, 0 \leq b \text{ e } b \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \end{cases}$$

cioè

$$\text{Per ogni } a \in \mathbb{R}, \begin{cases} 0 \cdot a = 0 \\ \text{e} \\ \text{per qualche } b \in \mathbb{R}, 0 \leq b \leq 2 \end{cases}$$

Svolgimento (cont.)

Quest'ultima condizione è vera: dato $a \in \mathbb{R}$, si ha

$$0 \cdot a = 0 \text{ e } 0 \leq 0 \leq 2$$

Quindi

$$\mathcal{R} \models (\forall x(f(y,x) = y \land \exists z(P(y,z) \land P(z, f(c,c)))))[y/0]$$

Osservazione

Nella pratica, per capire se $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$, si può cercare di capire che cosa la formula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ afferma delle variabili $x_1, \ldots, x_n$ nella struttura $\mathcal{A}$, per poi vedere se è vera con l'assegnazione $x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n$.

Esempio

Sia $L = \{R, f\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove

- R è simbolo relazionale binario
- f è simbolo funzionale binario

Si considerino:

la L-formula $\varphi : \exists z \; f(z,z) = x \wedge \exists w (R(x,w) \wedge R(w,y))$

la L-struttura $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, <, +)$

Nella struttura $\mathcal{A}$ la formula $\varphi(x,y)$ asserisce che:

$$\begin{array}{rl} \text{Esiste un numero } z & \text{tale che } z + z = x \\ \text{ed esiste un numero } w & \text{tale che } x < w < y \end{array}$$

cioè

$$x \text{ è pari }, x < y, \text{ e } x, y \text{ non sono numeri consecutivi}$$

Quindi, per esempio

- $\mathcal{A} \models \varphi[x/2, y/6]$
- $\mathcal{A} \not\models \varphi[x/4, y/4]$
- $\mathcal{A} \not\models \varphi[x/3, y/6]$
- ...

Esercizio

Siano L, φ come nell'esempio precedente. Sia

$$\mathcal{B} = (\mathbb{R}, <, +)$$

Determinare tutte le coppie (a, b) tali che

$$\mathcal{B} \models \varphi[x/a, y/b]$$

Svolgimento

Nella struttura $\mathcal{B}$ la formula $\varphi(x, y)$ asserisce che:

Esiste un numero *reale* z tale che $z + z = x$
ed esiste un numero *reale* w tale che $x < w < y$

cioè

x è il doppio di qualche numero reale,
$x < y$, e c'è qualche numero reale tra x e y

Ogni numero *reale* è un doppio (della sua metà); inoltre, se $x < y$, c'è sempre un numero tra x e y (per esempio, $\frac{x+y}{2}$).

Quindi $\mathcal{B} \models \varphi[x/a, y/b]$ se e solo se

$$a < b$$

Valore di verità di un enunciato

- Il valore di verità di una formula φ in una struttura $\mathcal{A}$ dipende da un'assegnazione, ma solo dai valori che questa assegnazione dà alle variabili libere di φ.
- Quindi, se φ è un *enunciato*, il suo valore di verità in $\mathcal{A}$ *non dipende da alcuna assegnazione* (cioè è sempre lo stesso, qualunque assegnazione si consideri).

Pertanto, se φ è un enunciato, si scrive

$$\mathcal{A} \models \varphi$$

per denotare che φ *è vero in* $\mathcal{A}$.

Si dice allora anche che $\mathcal{A}$ *soddisfa* φ, o che φ *è soddisfatto da* $\mathcal{A}$.

La relazione $\models$, che è una relazione tra strutture ed enunciati, si chiama *relazione di soddisfacibilità*.

Esempio

Sia $L = \{P, f, c\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove

- P è simbolo relazionale binario
- f è simbolo funzionale binario
- c è simbolo di costante

Si considerino:

l'enunciato $\sigma : \forall x \forall y (P(c, y) \land f(x, x) = y \to P(x, y))$

la struttura $\mathcal{A} = (\mathbb{N} <, +, 8)$

Nella struttura $\mathcal{A}$, l'enunciato σ asserisce che

$$\text{per ogni } x, y \in \mathbb{N} \text{ (se } 8 < y \text{ e } x + x = y, \text{ allora } x < y)$$

cioè che

ogni numero naturale pari maggiore di 8 è maggiore della sua metà

Ciò è vero, perché se $n = 2k > 8$, allora in particolare $k > 0$ e quindi $n = 2k > k$. Quindi

$$\mathcal{A} \models \sigma$$

Nota: Per verificare che $\mathcal{A} \models \sigma$ non si è fatto ricorso ad alcuna assegnazione.

Esercizio

Siano L, σ come nell'esempio precedente. Stabilire se σ è vero in ciascuna delle seguenti L-strutture:

- $(\mathbb{Z}, <, +, -1)$
- $(\mathbb{Q}, \leq, \cdot, 0)$
- $(\mathbb{R}, \geq, \cdot, 0)$
- $(\mathbb{Z}, \geq, +, 2)$

Insiemi di verità

Date una formula φ (con delle variabili libere) e una struttura $\mathcal{A}$ ha senso chiedersi quali siano le assegnazioni che rendono vera φ in $\mathcal{A}$.

Definizione

Siano:

- L un linguaggio del prim'ordine
- φ una L-formula, con $FV(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$
- $\mathcal{A}$ una L-struttura

L'*insieme di verità* di φ in $\mathcal{A}$ (o *insieme definito da* φ *in* $\mathcal{A}$) è l'insieme

$$\varphi(\mathcal{A}) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in |\mathcal{A}|^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]\}$$

Cioè: $\varphi(\mathcal{A})$ è l'insieme delle n-uple $(a_1, \ldots, a_n)$ di elementi del dominio di $\mathcal{A}$ che rendono vera φ in $\mathcal{A}$ quando sono assegnati come valori delle variabili libere di φ.

Nota. Se φ ha n variabili libere, allora $\varphi(\mathcal{A})$ è un sottoinsieme di $|\mathcal{A}|^n$, cioè è una relazione n-aria su $|\mathcal{A}|$.

Esempio

Come visto in precedenza, se

- $L = \{R, f\}$, con
  - R simbolo relazionale binario
  - f simbolo funzionale binario
- $\varphi(x, y) : \exists z \; f(z, z) = x \wedge \exists w (R(x, w) \wedge R(w, y))$
- $\mathcal{B} = (\mathbb{R}, <, +)$

allora

$$\varphi(\mathcal{B}) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a < b\}$$

Esempio

Siano

- $L = \{f, a\}$, con
  - f simbolo funzionale binario
  - a simbolo di costante
- $\varphi : \exists x\ f(x, y) = a$, per cui $FV(\varphi) = \{y\}$

Si consideri la L-struttura

$$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, +, 0)$$

Pertanto,

$$\varphi(\mathcal{A}) = \{k \in \mathbb{Z} \mid \mathcal{A} \models (\exists x\ f(x, y) = a)[y/k]\} \subseteq \mathbb{Z}$$

ovvero $\varphi(\mathcal{A})$ è l'insieme di tutti i $k \in \mathbb{Z}$ tali che esiste $x \in \mathbb{Z}$ per cui $x + k = 0$.
Poichè questo è vero per ogni intero k (basta considerare $x = -k$) segue che

$$\varphi(\mathcal{A}) = \mathbb{Z}$$

Invece, se $\mathcal{B} = (\mathbb{N}, +, 0)$, si ha $\varphi(\mathcal{B}) = \{0\}$.

Esempio

Siano

- $L = \{f, g\}$, con f, g simboli funzionali binari
- $\varphi : f(x, x) = g(x, x)$

Si ha $FV(\varphi) = \{x\}$; quindi, data una L-struttura $\mathcal{A}$,

$$\varphi(\mathcal{A}) \subseteq |\mathcal{A}|$$

Sia $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$. Allora

$$\begin{aligned} r \in \varphi(\mathcal{A}) \quad & \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models (f(x, x) = g(x, x))[x/r] \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \quad r + r = r \cdot r \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \quad 2r = r^2 \end{aligned}$$

Risolvendo (in $\mathbb{R}$) questa equazione, si ottiene $\varphi(\mathcal{A}) = \{0, 2\}$.

Esempio

Sia $L = \{f\}$, con f simbolo funzionale binario. Sia

$$\varphi : \qquad \exists z \; f(x,z) = y$$

Si ha $FV(\varphi) = \{x, y\}$; data una L-struttura $\mathcal{A}$,

$$\varphi(\mathcal{A}) \subseteq |\mathcal{A}|^2$$

cioè $\varphi(\mathcal{A})$ è una relazione binaria su $|\mathcal{A}|$.

Esempio (cont.)

Sia $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, +)$. Allora

$$\begin{aligned}(n,m) \in \varphi(\mathcal{A}) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models (\exists z\ f(x,z) = y)[x/n, y/m] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{N} \text{ si ha } n + k = m \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad n \leq m\end{aligned}$$

Perciò $\varphi(\mathcal{A}) = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}$, ovvero $\varphi(\mathcal{A})$ è la relazione $\leq$ su $\mathbb{N}$.

Sia $\mathcal{B} = (\mathbb{N}, \cdot)$. Allora

$$\begin{aligned}(n,m) \in \varphi(\mathcal{B}) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \models (\exists z\ f(x,z) = y)[x/n, y/m] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{N} \text{ si ha } n \cdot k = m \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad n \text{ è un divisore di } m\end{aligned}$$

Perciò $\varphi(\mathcal{B}) = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \text{ è un divisore di } m\}$, cioè $\varphi(\mathcal{B})$ è la relazione di divisibilità su $\mathbb{N}$.

Esempio

Siano

- $L = \{P, f, c\}$, con
  - P simbolo relazionale binario
  - f simbolo funzionale binario
  - c simbolo di costante
- $\varphi : P(f(x, x), c)$, quindi $FV(\varphi) = \{x\}$

Se $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, <, +, 0)$, allora $k \in \varphi(\mathcal{A})$ se e solo se $k + k < 0$, cioè se e solo se $k < 0$:

$$\varphi(\mathcal{A}) = \{k \in \mathbb{Z} \mid k < 0\}$$

è l'insieme degli interi negativi.

Se invece $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}, <, \cdot, 0)$, allora $\varphi(\mathcal{B}) = \emptyset$: infatti non c'è alcun $k \in \mathbb{Z}$ tale che $k^2 < 0$.

Esempio

Siano

- $L = \{P, f\}$, con
  - P simbolo relazionale binario
  - f simbolo funzionale binario
- $\varphi : P(y,z) \wedge \exists x\ f(y,x) \neq y \wedge \exists x\ f(x,x) = z$, quindi $FV(\varphi) = \{y, z\}$.

L'insieme di verità di φ in $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, <, \cdot)$ è l'insieme delle coppie $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tali che

- $n < m$
- c'è qualche $k \in \mathbb{N}$ tale che $nk \neq n$, cioè $n \neq 0$
- m è un quadrato perfetto

cioè:

$$\varphi(\mathcal{A}) = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \neq 0, m \text{ è un quadrato perfetto}, n < m\}$$