Osservazioni

- L'interpretazione $t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ in $\mathcal{A}$ di un termine mediante un'assegnazione è un elemento di $|\mathcal{A}|$.
- L'interpretazione di un termine t dipende solo dall'assegnazione di valori sulle variabili che effettivamente occorrono in t. In altre parole, se la variabile x_i *non* occorre in t, allora l'intepretazione $t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ sarà la medesima qualunque sia il valore che l'assegnazione dà alla variabile x_i.
  In particolare, se t non contiene variabili, allora la sua interpretazione in $\mathcal{A}$ sarà la stessa secondo qualunque assegnazione.

Esempio

Sia $L = \{f, c\}$, dove

- f è simbolo funzionale binario
- c è simbolo di costante

Sia t il termine

$$f(x, f(c, y))$$

Sia

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, +, 0)$$

Allora

$$t^{\mathcal{A}}[x/24, y/2, z/9] = 24 + (0 + 2) = 26$$

e tale elemento non dipende dal valore che l'assegnazione associa a z, cioè

$$t^{\mathcal{A}}[x/24, y/2, z/a] = 26 = t^{\mathcal{A}}[x/24, y/2]$$

qualunque sia $a \in \mathbb{N}$.

Interpretazioni di termini e alberi sintattici

Per interpretare un termine t in una struttura mediante un'assegnazione $x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n$ si può utilizzare l'albero sintattico di t, secondo il seguente algoritmo:

- Si costruisce l'albero sintattico di t e lo si analizza a partire dalle foglie verso la radice
- Se una foglia è etichettata con un simbolo di costante c, si rimpiazza c con l'elemento $c^{\mathcal{A}}$
- Se una foglia è etichettata da una variabile x_i, si rimpiazza x_i con l'elemento a_i, cioè il valore dell'assegnazione su quella variabile
- Procedendo a ritroso lungo i rami, se un nodo è etichettato da un termine $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, e nei k successori immediati di quel nodo le etichette $t_1, \ldots, t_k$ sono state rimpiazzate dalle loro interpretazioni $t_i^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$, si rimpiazza $f(t_1, \ldots, t_k)$ con l'elemento

$$f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n], \ldots, t_k^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n])$$

Esempio

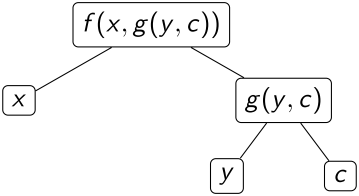
$L = \{f, g, c\}$, con

- f, g: simboli funzionali binari
- c: simbolo di costante

Sia t il termine $f(x, g(y, c))$, e si consideri la L-struttura $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0)$.
Per calcolare l'interpretazione di t in $\mathcal{A}$ mediante l'assegnazione

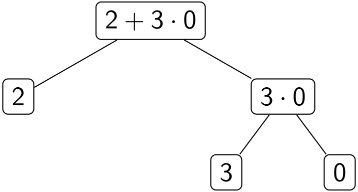
$$x/2, y/3, z/5$$

si consideri l'albero sintattico di t:

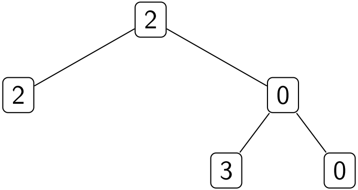


Esempio (cont.)

Rimpiazzando i termini che compaiono nei nodi, a cominciare dalle foglie, con le loro interpretazioni, si ottiene:



cioè



Esempio (cont.)

Quindi

$$t^{\mathcal{A}}[x/2, y/3, z/5] = 2 + (3 \cdot 0) = 2$$

Osservazione.
Nel calcolo di $t^{\mathcal{A}}[x/2, y/3, z/5]$ non si è mai usato il fatto che l'assegnazione associ a z il valore 5, perché z non occorre in t.
In effetti:

$$t^{\mathcal{A}}[x/2, y/3, z/5] = t^{\mathcal{A}}[x/2, y/3]$$

Esempio

$L = \{f, g\}$ con f, g simboli funzionali binari.
Sia t il termine

$$f(x, g(y, x))$$

L'interpretazione di t nella struttura

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$$

mediante l'assegnazione

$$x/2, y/3$$

è l'elemento

$$t^{\mathcal{A}}[x/2, y/3] = 2 + 3 \cdot 2 = 8$$

Esempio (cont.)

L'interpretazione del medesimo $t : f(x, g(y, x))$ nella struttura

$$\mathcal{B} = (\mathbb{Z}, \cdot, -)$$

mediante l'assegnazione

$$x/-2, y/6$$

è l'elemento

$$t^{\mathcal{B}}[x/-2, y/6] = -2(6-(-2)) = -16$$

Interpretazione di formule

Per induzione sulla complessità, si definisce quando una formula

$$\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

è vera in una struttura $\mathcal{A}$ mediante un'assegnazione

$$x_1/a_1, \dots, x_n/a_n$$

In tal caso, si denota

$$\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$$

Definizione

- Se φ è una formula atomica del tipo $t = s$, con t, s termini, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$ se e solo se

$$t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n] = s^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$$

- Se φ è una formula atomica del tipo $P(t_1, \dots, t_k)$, con P simbolo relazionale k-ario e $t_1, \dots, t_k$ termini, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$ se e solo se

$$(t_1^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n], \dots, t_k^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]) \in P^{\mathcal{A}}$$

Esercizio

Siano dati:

- $L = \{P, f, g, c\}$, con
  - P simbolo relazionale binario
  - f, g simboli funzionali binari
  - c simbolo di costante
- $\mathcal{A} = (\mathbb{Q}, <, +, \cdot, 1)$
- $\varphi(x, y) : \quad P(g(x, x), f(y, c))$
- l'assegnazione $x/1, y/2$

Determinare se $\mathcal{A} \models \varphi[x/1, y/2]$

Svolgimento

La formula φ è $P(t_1, t_2)$, dove

$$\begin{aligned} t_1 : &\quad g(x, x) \\ t_2 : &\quad f(y, c) \end{aligned}$$

Pertanto $\mathcal{A} \models \varphi[x/1, y/2]$ se e solo se $t_1^{\mathcal{A}}[x/1, y/2] < t_2^{\mathcal{A}}[x/1, y/2]$, cioè se e solo se

$$1 \cdot 1 < 2 + 1$$

ovvero

$$1 < 3$$

Poichè questo vale, segue che

$$\mathcal{A} \models \varphi[x/1, y/2]$$

Esercizio

Siano $L, \mathcal{A}, \varphi$ come nell'esercizio precedente. Sia $\psi(x, y)$ la formula

$$f(x, x) = g(y, c)$$

Determinare se

- $\mathcal{A} \models \varphi[x/2, y/1]$
- $\mathcal{A} \models \psi[x/2, y/1]$

Svolgimento per ψ.

$$\begin{array}{l} (f(x,x))^{\mathcal{A}}[x/2, y/1] = 2 + 2 = 4 \\ (g(y,c))^{\mathcal{A}}[x/2, y/1] = 1 \cdot 1 = 1 \\ 4 \neq 1 \end{array}$$

quindi

$$\mathcal{A} \not\models \psi[x/2, y/1]$$

Definizione (cont.)

- Se φ è della forma $\neg\psi$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se
$$\mathcal{A} \not\models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$$
- Se φ è della forma $\psi \vee \theta$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se
$$\mathcal{A} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n] \quad \text{o} \quad \mathcal{A} \models \theta[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$$
- Se φ è della forma $\psi \wedge \theta$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se
$$\mathcal{A} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n] \quad \text{e} \quad \mathcal{A} \models \theta[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$$

Definizione (cont.)

- Se φ è della forma $\psi \to \theta$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se

  $$\text{da } \mathcal{A} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n], \text{ segue che } \mathcal{A} \models \theta[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$$

  cioè se e solo se

  $$\mathcal{A} \not\models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n] \quad \text{o} \quad \mathcal{A} \models \theta[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$$

- Se φ è della forma $\psi \leftrightarrow \theta$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se

  $$\mathcal{A} \models (\psi \to \theta)[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n] \quad \text{e} \quad \mathcal{A} \models (\theta \to \psi)[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$$

  cioè se e solo se

  $$\mathcal{A} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n] \quad \text{e} \quad \mathcal{A} \models \theta[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$$
  $$\text{oppure}$$
  $$\mathcal{A} \not\models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n] \quad \text{e} \quad \mathcal{A} \not\models \theta[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$$

Definizione (cont.)

- Se φ è della forma $\exists x \psi$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se

  $$\text{per qualche } b \in |\mathcal{A}|, \text{ si ha che } \mathcal{A} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n, x/b]$$

  dove, se x fosse una delle variabili $x_1, \ldots, x_n$, si intende che nell'assegnazione $[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n, x/b]$ il valore assegnato a x è b

Quindi $\mathcal{A} \not\models (\exists x \psi)[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se

$$\text{per ogni } b \in |\mathcal{A}|, \text{ si ha che } \mathcal{A} \not\models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n, x/b]$$

Definizione (cont.)

- Se φ è della forma $\forall x \psi$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se

$$\text{per ogni } b \in |\mathcal{A}|, \text{ si ha che } \mathcal{A} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n, x/b]$$

  dove, se x fosse una delle variabili $x_1, \ldots, x_n$, si intende che nell'assegnazione $[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n, x/b]$ il valore assegnato a x è b

Quindi $\mathcal{A} \not\models (\forall x \psi)[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se

$$\text{per qualche } b \in |\mathcal{A}|, \text{ si ha che } \mathcal{A} \not\models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n, x/b]$$

Osservazione

- Il valore di verità di una formula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ in una struttura $\mathcal{A}$ dipende dall'assegnazione considerata $x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n$ solo per i valori che quest'assegnazione assume sulle variabili libere di φ.

Esempio

Sia $L = \{P\}$, con P simbolo relazionale binario, e si consideri la formula

$$\varphi : \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))$$

quindi $FV(\varphi) = \{x, y\}$, mentre z occorre vincolata in φ.
Sia $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, <)$ e si consideri l'assegnazione

$$x/2, y/4, z/9$$

Per definizione, $\mathcal{A} \models \varphi[x/2, y/4, z/9]$ se e solo se

per qualche $n \in \mathbb{N}$ si ha che $\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$

cioè se e solo se

per qualche $n \in \mathbb{N}$ si ha che $2 < n$ e $n < 4$

Poichè $2 < 3 < 4$, si ha che in effetti

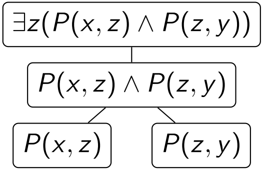
$$\mathcal{A} \models \varphi[x/2, y/4, z/9]$$

Osservazione

La definizione induttiva della soddisfacibilità $\models$, *scarica* la questione di determinare se $\mathcal{A} \models \varphi$, cioè se φ è vera in $\mathcal{A}$, mediante l'assegnazione $x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n$, all'analoga questione relative alle sottoformule di φ, cioè le formule che compaiono nell'albero sintattico di φ, fino ad arrivare alle sottoformule atomiche di φ, che compaiono nelle foglie dell'albero sintattico.
Queste sottoformule atomiche si valutano in $\mathcal{A}$ usando la definizione, e si può risalire l'albero sintattico fino a determinare il valore di verità della radice, cioè di φ.

Esempio

Determinare se $\mathcal{A} \models (\exists z(P(x,z) \wedge P(z,y)))[x/2, y/4, z/9]$, dove $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, <)$



$\mathcal{A} \models (\exists z(P(x,z) \wedge P(z,y)))[x/2, y/4, z/9]$

se e solo se

per qualche $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$

se e solo se

per qualche $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} \models P(x,z)[x/2, y/4, z/n]$ e $\mathcal{A} \models P(z,y)[x/2, y/4, z/n]$

se e solo se

per qualche $n \in \mathbb{N}$, $2 < n$ e $n < 4$

In effetti si ha: $2 < 3$ e $3 < 4$; quindi:

Per qualche $n \in \mathbb{N}$, $2 < n$ e $n < 4$; quindi:

Per qualche $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} \models P(x,z)[x/2, y/4, z/n]$ e $\mathcal{A} \models P(z,y)[x/2, y/4, z/n]$

Quindi $\mathcal{A} \models (\exists z(P(x,z) \wedge P(z,y)))[x/2, y/4, z/9]$.

Esempio

Determinare se $\mathcal{A} \models (\forall z(P(x,z) \wedge P(z,y)))[x/2, y/4, z/9]$, dove $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, <)$

$$\boxed{\forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))}$$

$$\boxed{P(x,z) \wedge P(z,y)}$$

$$\boxed{P(x,z)} \qquad \boxed{P(z,y)}$$

$$\mathcal{A} \models (\forall z(P(x,z) \wedge P(z,y)))[x/2, y/4, z/9]$$

se e solo se

per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$

se e solo se

per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} \models P(x,z)[x/2, y/4, z/n]$ e $\mathcal{A} \models P(z,y)[x/2, y/4, z/n]$

se e solo se

per ogni $n \in \mathbb{N}$, $2 < n$ e $n < 4$

Tuttavia: $5 \not< 4$; quindi:

non si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $2 < n$ e $n < 4$; quindi:

non si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} \models P(x,z)[x/2, y/4, z/n]$ e $\mathcal{A} \models P(z,y)[x/2, y/4, z/n]$

Quindi $\mathcal{A} \not\models (\forall z(P(x,z) \wedge P(z,y)))[x/2, y/4, z/9]$.