Calcolo combinatorio

sabato 25 novembre 2023 08:28

→ CALCOLO COMBINATORIO

def: X insieme finito, $f: X \to X$ bigettiva si chiama permutazione

Se $|X| = n$, assumiamo $X = \{1, \dots, n\}$ si denota con $S_n = \{f: X \to X \text{ bigettive}\}$

def: $n \in \mathbb{N}$, il fattoriale $n! = n(n-1) \dots \cdot 2 \cdot 1$ se $n > 0$

teorema: X, Y insiemi, $|X| = n \leq m = |Y|$

le funzioni iniettive $f: X \to Y$ sono $m(m-1) \dots (m-n+1)$

cor: X insieme, $|X| = n$

le funzioni ~~iniettive~~ bigettive $X \to X$ sono $n!$

OSS:

$f: X \to X$ iniettiva $\to f$ bigettiva

X finito

cor: $|S_n| = n!$

posso ordinare n elementi in $n!$ modi diversi

es: $X = \{1, 2, 3\}$ in quanti modi posso ordinare gli elementi di X?

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \to \begin{cases} 123 & 231 \\ 132 & 312 \\ 213 & 321 \end{cases}$

def: $K, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $0 \leq K \leq n$

il coefficiente binomiale "n su K" "n scelgo K"

$$\binom{n}{K} = \frac{n!}{K!(n-K)!}$$

es:

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2(1!)} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!(3-0)!} = \frac{6}{1 \cdot 6} = 1$$

$$\boxed{\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{\cancel{n!}}{0!\,\cancel{n!}} = 1} \quad \boxed{\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\,0!} = 1}$$

OSS:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

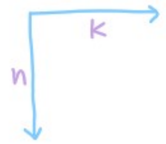
$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots\cancel{(n-k)\cdot 2 \cdot 1}}{k!\cancel{(n-k)(n-k-1)\dots \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

lemma: $n \geq 2$ $\quad 0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

IL TRIANGOLO DI TARTAGLIA (PASCAL)



$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}
$$

prop: X insieme finito, $X \neq \emptyset$, $|X| = n$
per ogni $0 \leq k \leq n$ il numero di sottoinsiemi di X con esattamente k elementi è $\binom{n}{k}$.

dim: $X = \{x_1, \dots, x_n\}$

- $k = 0$
  c'è un solo sottoinsieme in X con 0 elementi: il vuoto
  $\boxed{\binom{n}{0} = 1}$
- $k = n$
  c'è un solo sottoinsieme con n elementi X
  $\boxed{\binom{n}{n} = 1}$
- $0 < k < n$
  contiamo in quanti modi posso costruire $Y \subseteq X$, $|Y| = k$
  scelgo il primo elemento di $Y \rightarrow n$ possibilità
  scelgo il secondo elemento di $Y \rightarrow n-1$ possibilità
  scelgo il terzo elemento di $Y \rightarrow n-2$ possibilità
  ⋮
  scelgo il k-esimo elemento di $Y \rightarrow n-k+1$ possibilità
  ho $\underbrace{\boxed{\dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}}}_{= \binom{n}{k}}$ possibilità

$\square$

es: $X = \{a, b, c, d\}$ $\quad n = 4 \quad k = 3$
$\dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$ possibilità

teorema: $x, y \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

es:
$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + 2xy + y^2$
$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) = (x^2 + 2xy + y^2)(x+y) = x^3 + 3x^2y + 3xy + y^3$

$$\sum_{k=0}^{3} k = 0 + 1 + 2 + 3$$
$\sum$ sommatoria Σ

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

corr:
1) $x = y = 1 \rightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

2) $x=1,\ y=-1 \rightarrow 0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$

corr: X insieme finito, $|X|=n>0$ allora $|\mathcal{P}(X)|=2^n$
X ha 2^n sottoinsiemi

dim: X ha $\binom{n}{k}$ sottoinsiemi di cardinalità k
$\forall k\in\mathbb{N} \quad 0\leq k\leq n$
$|\mathcal{P}(X)| = \#$sottoinsiemi di $X = \sum_{k=0}^{n} \#\{$sottoinsiemi di X di k elementi$\} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

$\square$

→ RELAZIONI D'ORDINE

"$=$" → relazione d'equivalenza
"$\leq$" → relazione d'ordine

def: X insieme, una relazione R su X ($R\subseteq X\times X$)
R si dice preordine se è
1) RIFLESSIVA $\forall x\in X \quad (x,x)\in R$
2) TRANSITIVA $(x,y),(y,z)\in R \rightarrow (x,z)\in R$

Se R è anche ...
3) ANTISIMMETRICA $(x,y),(y,x)\in R \rightarrow x=y$

... allora R è un ordine parziale (o relazione d'ordine)
X si dice insieme parzialmente ordinato (POSET)

$\left.\begin{matrix} x\Delta y \\ x\leq y\end{matrix}\right\rangle$ invece di $(x,y)\in R$

1) RIFLESSIVA $\forall x\in X \quad x\Delta x$
2) TRANSITIVA $x\Delta y,\ y\Delta z \rightarrow x\Delta z$
3) ANTISIMMETRICA $x\Delta y,\ y\Delta x \rightarrow x=y$

es:
1) $(\mathbb{R},\leq)$ POSET
numeri reali
relaz. d'ordine
disuguaglianza standard

$(\mathbb{Q},\leq),(\mathbb{Z},\leq),(\mathbb{N},\leq)$ POSET

2) $\mathbb{C}$, mettiamo una relazione d'ordine
$z\Delta w \leftrightarrow |z|\leq|w|$

- RIFLESSIVA
$\forall z\in\mathbb{C}$ vale $z\Delta z \leftrightarrow |z|\leq|z|$
- TRANSITIVA
$z\Delta w,\ w\Delta v \rightarrow z\Delta v$
$|z|\leq|w|,\ |w|\leq|v| \rightarrow |z|\leq|v|$
- ANTISIMMETRICA
$z\Delta w,\ w\Delta z \rightarrow z=w$
$|z|\leq|w|,\ |w|\leq|z| \overset{?}{\not\rightarrow} z=w$
$|z|=|w|$

$z=2,\ w=-2$
$|2|\leq|-2|,\ |-2|\leq|2| \not\rightarrow -2=2$

Δ preordine su $\mathbb{C}$

3) $X \neq \emptyset$ insieme, consideriamo $\wp(X)$ → A, B

$A \Delta B \leftrightarrow A \subseteq B$

$(\wp(X), \subseteq)$ POSET

- RIFLESSIVA $\forall A \in \wp(X)$ vale $A \subseteq A$ ✓
- TRANSITIVA $A \subseteq B, B \subseteq C \to A \subseteq C$ ✓
- ANTISIMMETRICA $A \subseteq B, B \subseteq A \to A = B$ ✓

4) $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$n \Delta m \leftrightarrow n|n$ (cioè $m = kn$ per $k \in \mathbb{Z}$)

$(\mathbb{N}^*, |)$ POSET

- RIFLESSIVA $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $n|n$ ✓
- TRANSITIVA $a|b, b|c \to a|c$ ✓
- ANTISIMMETRICA $a|b, b|a \to a = b$ ✓

$$\left.\begin{matrix} b = ka & k \in \mathbb{N} \\ a = hb & h \in \mathbb{N} \end{matrix}\right\} b = ka = k \cdot h\ b \xrightarrow{b \neq 0} \begin{matrix} 1 = kh \\ k = h = 1 \end{matrix}$$

def: (X, Δ) POSET, $x, y \in X$ diciamo che x e y sono confrontabili se vale $(x \Delta y) \vee (y \Delta x)$

altrimenti, x e y sono non confrontabili

L'ordine Δ si dice ordine totale se tutte le coppie di elementi sono confrontabili in questo caso X si dice totalmente ordinato

es:

1) $(\mathbb{R}, \leq)$ totalmente ordinato

2) $(\wp(X), \subseteq)$ POSET, ma in generale non totalmente ordinato

$X = \{1,2,3\}$ $\quad \wp(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, X\}$

$\{1\}$ e $\{2,3\}$ non sono confrontabili

$\{1\}$ e $\{1,2\}$ sono confrontabili $\{1\} \subseteq \{1,2\}$

3) $(\mathbb{N}^*, |)$ POSET

totalmente ordinato? NO

2 e 3 non confrontabili $\quad 2 \nmid 3 \quad 3 \nmid 2$

4 e 12 sono confrontabili $\quad 4 | 12$

def: (X, Δ) POSET, $Y \subseteq X$

L'ordine indotto su Y Δ_Y dato $x \Delta_Y y \longleftrightarrow x \Delta y$

$\forall x, y \in Y$

Se (Y, Δ_Y) è totalmente ordinato diciamo che Y è una catena

es:

1) $(\mathbb{N}^*, |)$ POSET

$Y = \{2, 4, 8, 16, 32\}$ $\quad (Y, |)$ totalmente ordinato

Y è una catena

2) $X = \{\dots\}$ $(\wp(X), \subseteq)$

Y è una catena

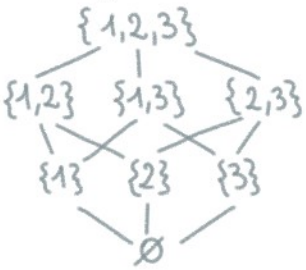
2) $X=\{1,2,3\}$ $\quad (\mathcal{P}(x),\subseteq)$

catena in $\mathcal{P}(x)$ $\quad Y=\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$

Se (x,Δ) POSET, x finito, posso rappresentare il POSET con un DIAGRAMMA DI HASSE

- vertici gli elementi di X
- collego $x\in X$ e $y\in Y$ se $x\Delta y$ e $\nexists z\in X$ t.c. $x\Delta z, z\Delta y$

$X=\{1,2,3\}$ $\quad (\mathcal{P}(x),\subseteq)$ $\quad |\mathcal{P}(x)|=2^3=8$



def: $(A_1,\Delta_1),(A_2,\Delta_2),\dots,(A_n,\Delta_n)$ POSET

definiamo 2 ordini parziali su $A_1\times\dots\times A_n$

1) ORDINE LESSICOGRAFICO (lex)

$$(a_1,\dots,a_n)\,\Delta_{LEX}\,(b_1,\dots,b_n)\longleftrightarrow\begin{cases}a_1\Delta b_1 \text{ se } a_1\neq b_1\\ a_{k+1}\,\Delta_{k+1}\,b_{k+1} \text{ se } a_j=b_j\ \forall j=1,\dots k \text{ e } a_{k+1}\neq b_{k+1}\end{cases}$$

2) ORDINE PRODOTTO $\quad \Delta_1\times\dots\times\Delta_n=\Delta$

$$(a_1,\dots,a_n)\,\Delta\,(b_1,\dots,b_n)\longleftrightarrow a_i\,\Delta_i\,b_i \quad \forall i=1,\dots,n$$

es: $(\mathbb{R},\leq)$ consideriamo $\mathbb{R}^2$

1) $(\mathbb{R}^2, LEX)$

$(1,2)\leq_{LEX}(1,3)$

$(1,1)\leq_{LEX}(2,1)$

$(1,1)\leq_{LEX}(2,-100)$

2) $(\mathbb{R}^3,\leq_{LEX})$

$(1,2,3)\leq_{LEX}(3,2,1)$

$(2,2,3)\geq_{LEX}(2,1,3)$

3) $(\mathbb{R}^2,\leq_{PROD})$

$(1,2)\leq_{PROD}(1,3)$

$(1,1)\leq_{PROD}(2,1)$

$(1,1)$ e $(2,-100)$ non confrontabili

4) $(\mathbb{R}^3,\leq_{PROD})$

$(1,2,3)$ e $(3,2,1)$ non confrontabili

$(2,2,3)\geq_{PROD}(2,1,3)$

OSS: Se $(A_1,\Delta_1),\dots,(A_n,\Delta_n)$ sono totalmente ordinati anche $(A_1\times\dots\times A_n,\Delta_{LEX})$ è totalmente ordinato

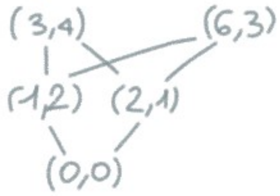
non è vero per l'ordine prodotto

es: $A=\{(1,2),(2,1),(3,4),(0,0),(6,3)\}\subseteq\mathbb{R}^2$

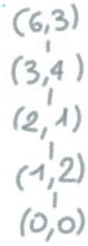
es: $A = \{(1,2),(2,1),(3,4),(0,0),(6,3)\} \subseteq \mathbb{R}^2$

diagramma di Hasse per LEX e PROD

ordine prodotto:



ordine lex:



(X, Δ)

insieme

relazione d'ordine ⟨ riflessiva, antisimmetrica, transitiva

es:
- $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{R}^2, \leq_{PROD})$ $(\mathbb{R}^2, \leq_{LEX})$
- $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$
- $(\mathbb{N}^*, |)$

def: (X, Δ) POSET, $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$, $y \in Y$

1) y è il **minimo** di Y se $\forall x \in Y$ $y \Delta x$
   $y = \min Y$
2) y è il **massimo** di Y se $\forall x \in Y$ $x \Delta y$
   $y = \max Y$
3) y è **elemento minimale** di Y se $\forall x \in Y$ $x \Delta y \rightarrow x = y$
4) y è **elemento massimale** di Y se $\forall x \in Y$ $y \Delta x \rightarrow x = y$

oss:
1) massimo e minimo, se esistono, sono unici
2) se esiste il minimo, ogni elemento minimale coincide con il minimo
3) se esiste il massimo, gni elemento minimale coincide con il massimo
4) se Δ è totale allora
   $\exists$ un elemento minimale $\longleftrightarrow \exists$ minimo
   $\exists$ un elemento massimale $\longleftrightarrow \exists$ massimo

es:

1) $(\mathbb{N}, \leq)$ $\min \mathbb{N} = 0$
   $0 \leq n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ è l'unico minimale
   $\nexists \max \mathbb{N}$, non ci sono massimali

2) $(\mathbb{Z}, \leq)$ $\nexists$ min, max, massimali e minimali
   $Y = \{-2, 5, 10\} \subseteq \mathbb{Z}$ $\min Y = -2$ $\max Y = 10$

3) $X = \{1,2,3\}$ $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ → ordine parziale non totale
   $\max \mathcal{P}(X) = X$
   vale $\forall Y \in \mathcal{P}(X)$, $Y \subseteq X$
   $\min \mathcal{P}(X) = \emptyset$
   $\forall Y \in \mathcal{P}(X)$ $\emptyset \subseteq Y$

4)

$\forall Y \in \wp(X) \quad \emptyset \subseteq Y$

4) $Y \subseteq \wp(X)$

$Y = \{\{2\},\{3\},\{2,3\}\}$

$\max Y = \{2,3\}$

$\min Y$ non esiste

elementi minimali $\{2\},\{3\}$

diagramma di Hasse Y

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \{2,3\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \{2\} & & \{3\} \end{tikzcd}$$

elementi minimali

5) $A = \{(1,2),(0,0),(2,1),(3,4),(4,3)\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$\leq_{PROD}$ $\quad (a,b) \leq_{PROD} (x,y) \leftrightarrow (a \leq x \text{ e } b \leq y)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] (3,4) \arrow[d, dash] \arrow[drr, dash] & & (4,3) \arrow[d, dash] \arrow[dll, dash] \\ (1,2) \arrow[dr, dash] & & (2,1) \arrow[dl, dash] \\ & (0,0) & \end{tikzcd}$$

$\min A = (0,0)$

$\nexists \max A$

$(3,4)(4,3)$ elementi massimali

$\leq_{LEX}$ $\quad (a,b) \leq_{LEX} (x,y) \leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \text{ e } a \neq x \\ \text{oppure} \\ b \leq y \text{ e } a = x \end{cases}$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] (4,3) \arrow[d, dash] \\ (3,4) \arrow[d, dash] \\ (2,1) \arrow[d, dash] \\ (1,2) \arrow[d, dash] \\ (0,0) \end{tikzcd}$$

$\min A = (0,0)$ unico minimale

$\max A = (4,3)$ unico massimale

6) $X = \{0,1,2,3,w\}$

$0 \Delta 1 \Delta 2 \Delta 3 \qquad 0\Delta 0, 1\Delta 1, 2\Delta 2, 3\Delta 3, w \Delta w$

relazione d'ordine su X

$\max X$ non esiste

$\min X$ non esiste

minimali $\{0,w\}$

massimali $\{3,w\}$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] 3 \arrow[d, dash] & \\ 2 \arrow[d, dash] & \\ 1 \arrow[d, dash] & w \\ 0 & \end{tikzcd}$$

def: (X,Δ) POSET, $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$, $z \in X$

- z è **minorante** di Y se $\forall x \in Y \ z \Delta x$
- z è **maggiorante** di Y se $\forall x \in Y \ x \Delta z$
- se l'insieme dei minoranti di Y è non vuoto e ha massimo $z \in X$, z è **estremo inferiore** di Y, $z = \inf Y$
- se l'insieme dei maggioranti di Y è non vuoto e ha minimo $z \in X$, z è **estremo superiore** di Y, $z = \inf Y$

oss:
- se $\inf Y \in Y$ allora $\inf Y = \min Y$
- se $\sup Y \in Y$ allora $\sup Y = \max Y$

es:

1) $(\mathbb{R}, \leq)$

es:

1) $(\mathbb{R}, \leq)$

$Y=(0,1)=\{x\in\mathbb{R} \mid 0<x<1\}$

$\nexists$ minimo, massimo, elementi minimali e massimali

- minoranti di Y

$(-\infty,0]=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq 0\}=A$

$0=\max A \rightarrow \inf Y=0$

- maggioranza di Y

$[1,\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 1\}=B$

$1=\min B \rightarrow \sup Y=1$

2) $(\mathbb{R}, \leq)$

$Z=[0,1]=\{x\in\mathbb{R} \mid 0\leq x\leq 1\}$

$\min Z=0 \quad \max=1$

- minoranti di Z

$(-\infty,0)=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq 0\}=A$

$0=\max A \longrightarrow \inf Z=0$

- maggioranti di Z

$[1,\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 1\}=B$

$\min B=1 \longrightarrow \sup Z=1$

3) $X=\{1,2,3\} \quad (\mathcal{P}(X),\subseteq)$

$Y=\mathcal{P}(X) \quad Y=\{\{2\},\{3\},\{2,3\}\}$

$\sup Y=\max Y=\{2,3\}$

$\nexists \min Y$

- minoranti di Y

$\{\varnothing\}$

$\max\{\varnothing\}=\varnothing$

$\inf Y=\varnothing$

- maggioranti di Y

$\{\{2,3\},\{1,2,3\}\}=B$

$\min B=\{2,3\}$

$\sup Y=\{2,3\}$

4) $A=\{(0,0),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}\subseteq\mathbb{N}^2$

$(\mathbb{N}, \leq_{PROD})$

- minoranti di A

$\{(0,0)\}=X \qquad \max X=(0,0)\longrightarrow \inf A=(0,0) = \min A$

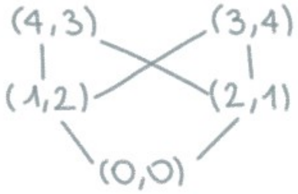
- maggioranti di A

$\{(4,4),(4,5),(5,4),(100,100),\dots\}=\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \mid x\leq 4 \text{ e } y\geq 4\}=Y$

$\min Y=(4,4)=\sup$

(4,3) (3,4)

min $Y = (4,4) = \sup$



(X, Δ) POSET

insieme

relazione d'ordine

def: Diciamo che X è **bene ordinato** se ogni sottoinsieme non vuoto di X ha un elemento minimo

es:

1) $(\mathbb{N}, \leq)$ è bene ordinato (principio del minimo)
2) $(\mathbb{Z}, \leq)$ non è bene ordinato
   $Y = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\} = \mathbb{Z}_{\leq 0}$ non ha minimo
3) $(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \leq_{PROD})$ non è bene ordinato
   $Y = \{(1,2), (2,1)\}$ non ha minimo

prop: $(X_1, \Delta_1), (X_2, \Delta_2)$ POSET bene ordinati
allora $(X_1 \times X_2, LEX)$ è bene ordinato

ASSIOMA DEL BUON ORDINAMENTO

Dato X insieme non vuoto, esiste un ordine parziale su X t.c. (X, Δ) bene ordinato

Si dimostra che **l'assioma del buon ordinamento** è equivalente all'**assioma della scelta** ed è equivalente al

lemma di Zorn:

(X, Δ) POSET, $X \neq 0$ tale che ogni catena in X ha almeno un maggiorante, allora X ha elementi massimali