Gli insiemi

domenica 1 ottobre 2023 13:59

→ GLI INSIEMI

$x \in A$ ← x è un elemento di A

Se $x_1, \dots, x_n$ sono tutti gli elementi di A, allora scriviamo:

$$A = \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$x_1 \in A \qquad y \notin A$$

P → proprieta' → vogliamo che sia oggettiva

$$A = \{x \mid P(x) \text{ vera}\}$$
$$= \{x \,!\, P(x) \text{ vera}\}$$

tale che

es:

① $A = \{x \mid x$ è un numero intero pari$\}$ → insieme

② $B = \{x \mid x$ è un libro interessante$\}$ → non è un insieme (non oggettivo)

③ $C = \{x \mid x$ è una città in Italia$\}$ → insieme

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$

$\varnothing$ insieme vuoto → non ha elementi

$\{*\}$ singoletto → insieme con un solo elemento

→ CONNETTIVI LOGICI

P, D → proprieta'

- $P \land D$ congiunzione → (P e D)
- $P \lor D$ disgiunzione → (P o D)

es:

$P = x$ è pari
$D = x > 7$
$(P \lor D)(2)$

P(2) vera
D(2) falsa

vera perchè basta che una delle proprietà sia vera

- $\neg P$ negazione → (non P)

es:

$P = x$ è pari

$\neg P(2)$ falsa

$\neg P(1)$ vera

- $P \to D$ implicazione → (P implica D)
- $P \leftrightarrow D$ equivalenza → (P se e solo se D)

→ QUANTIFICATORI UNIVERSALI

- $\forall$ → per ogni $\qquad \forall x \in A \;\; P(x)$ vera
- $\exists$ → esiste $\qquad \exists x \in A \;\; P(x)$ vera
- $\nexists$ → non esiste $\qquad \nexists x \in A \;\; x > 10$ vera
- $\exists!$ → esiste unico $\qquad \exists! \, x \in A \;\; x = 3$ vera; $\exists! \, x \in A \;\; x$ pari falsa

es:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\forall x \notin A \quad x > 5$ falsa

$0 \notin A \quad 0 > 5$

$\exists x \in A \quad x$ è pari vera

$\forall x \in A \quad x$ è pari falsa

$\forall x \in A \quad x$ è un numero vera

$\exists x \in A \quad x > 10$ falsa

def:

A, B insiemi

def: A, B insiemi

A è contenuto in B $\quad \forall x \in A \quad x \in B$

A è sottoinsieme di B

tutti gli elementi di A sono elementi di B

(è contenuto) · $A \subset B$ · $A \subseteq B$ · $A \subsetneq B$

il contenuto può essere anche uguale

es: $A = \{1,2,3,4,5\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\}$ $\quad A \subseteq B$ vero

$D = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 5\}$ $\quad A \subseteq D$ vero

def: A e B sono uguali se $x \in A \leftrightarrow x \in B$

(A e B hanno gli stessi elementi $A = B$)

→ PRINCIPIO DI ESTENSIONALITÀ

$$A = B \longleftrightarrow ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A))$$

→ INSIEME DELLE PARTI

def: A insieme, l'insieme delle parti di A è l'insieme i cui elementi sono sottoinsiemi di A

si denota con: $\wp(A)$

es: $A = \{1,2,3\}$ $\quad \wp(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A, \emptyset\}$

$\{1\} \in \wp(A)$ ✓ $\quad \{1\} \subseteq \wp(A)$ ✗

$1 \in A$ ✓ $\quad 1 \in \wp(A)$ ✗

es: $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$ $\quad \emptyset \subseteq \emptyset$ $\quad \emptyset \in \wp(\emptyset)$

def: A, B insiemi

$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$ unione

$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ intersezione

$B \setminus A = \{x \mid (x \in B) \wedge (x \notin A)\}$ differenza o complementare

es: $A = \{1,2,3\}$ $\quad B = \{3,4\}$

$A \cup B = \{1,2,3,4\}$ $\quad B \setminus A = \{4\}$

$A \cap B = \{3\}$ $\quad A \setminus B = \{1,2\}$

→ PROPRIETÀ

A, B, C insiemi

1) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$
2) $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$
3) $A \cup B = B \cup A$
4) $A \cap B = B \cap A$

proprietà commutativa (3, 4)

5) $A \cup A = A$

idempotenza

4) $A \cap B = B \cap A$] proprietà commutativa
5) $A \cup A = A$
6) $B \cup B = B$] idempotenza
7) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
8) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$] proprietà associativa
9) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
10) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$] proprietà distributiva
11) $A \setminus A = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin A \} = \emptyset$
12) $A \cup \emptyset = A$
13) $A \cap \emptyset = \emptyset$
14) $A \setminus \emptyset = A$

→ TEOREMA (Leggi di De Morgan)

$A, B \subseteq X$ $\quad$ A, B, X insiemi
allora
1) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$
2) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

dim 1) "$\subseteq$"
sia $x \in X \setminus (A \cap B)$
tesi $x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$
$x \in X \setminus (A \cap B) \rightarrow x \notin A \cap B \rightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B) \rightarrow (x \in X \setminus A) \vee (x \in X \setminus B) \rightarrow x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

"$\supseteq$"
sia $x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$
tesi $x \in X \setminus (A \cap B)$
$x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \rightarrow (x \in X \setminus A) \vee (x \in X \setminus B) \rightarrow x \notin A \vee x \notin B \rightarrow x \notin A \cap B \rightarrow x \in X \setminus (A \cap B)$ $\square$

→ PRODOTTO CARTESIANO

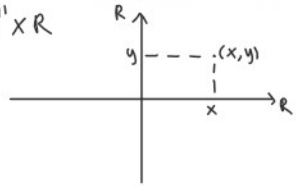
def: A, B insiemi non vuoti $(A \neq \emptyset, B \neq \emptyset)$
$x \in A,\ y \in B \rightarrow$ coppia ordinata
$(x, y) := \{ \{x\}, \{x, y\} \}$
"questa notazione è uguale a"
(SX qualcosa che non conosciamo, DX qualcosa di uguale che

$$\boxed{\text{il prodotto cartesiano } A \times B \text{ è l'insieme } A \times B = \{ (x,y) \mid x \in A, y \in B \}}$$

es:
- $A = \{1, 2\}$ $\quad$ $B = \{2, 3\}$
  $A \times B = \{ (1,2), (1,3), (2,2), (2,3) \}$
  $(2,1) \notin A \times B$ $\quad$ $(2,1) \neq (1,2)$ $\quad$ $\{1,2\} = \{2,1\}$
  $B \times A = \{ (2,1), (2,2), (3,1), (3,2) \}$
  $$A \times B \neq B \times A$$ non commutativi
- $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$
- A, B, C insiemi
  $A \times B \times C = \{ (a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C \}$
  $(a_1, b_1, c_1) = (a_2, b_2, c_2) \leftrightarrow (a_1 = a_2) \wedge (b_1 = b_2) \wedge (c_1 = c_2)$
  più in generale $A_1, \dots, A_n$ insiemi $(n \in \mathbb{N}, n > 0)$
  $A_1 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n \}$
  se $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ allora $A \times A = A^2$, $A \times A \times A = A^3$, $A^1 = A$, $A^0 = \{*\}$

$\mathbb{R}^2$ PIANO CARTESIANO

$\mathbb{R}^{11} \times \mathbb{R}$



→ INSIEMI INDICIATI O INDICIZZATI

def: I insieme, una famiglia F di insiemi indicizzati su I è data da insiemi A_i etichettati con gli elementi $i \in I$

$$F = \{A_i\}_{i \in I}$$

unione $\bigcup_{i \in I} A_i := \{X \mid \exists\, i \in I \text{ per cui } X \in A_i\}$

intersezione $\bigcap_{i \in I} A_i := \{X \mid \forall i \in I \text{ si ha } X \in A_i\}$

es:

$I = \{1,2,3\}$ $\quad i \in I \quad (i = 1,2,3)$

$A_i = \{i, i^2\}$

$A_1 = \{1\}$ $\quad A_2 \{2,4\}$ $\quad A_3 = \{3,9\}$

$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,2,4,3,9\}$

$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$

es:

1) $A_i = \{i\}$ $\quad i \in I = \mathbb{N}$ $\quad A^0 = \{0\}$ $\quad A_1 = \{1\}$ ...

$\bigcup_{i \in I} A_i = \mathbb{N}$ $\qquad \bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$

2) $I = \{K \in \mathbb{N} \mid K \geq 2\}$

$A_K = \{n^K \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\quad K \in I$

$A_2 = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0,1,4,9,16,\dots\}$

$A_3 = \{n^3 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0,1,8,27,\dots\}$

$\bigcap_{i \in I} A_i = \{0,1\}$ $\quad \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \mathbb{N} \rightarrow 7 \notin \bigcup_{i \in I} A_i$