Equivalenza

Siano P e Q affermazioni tali che valgano entrambi i teoremi:

$$\text{Se } P \text{ allora } Q$$

e

$$\text{Se } Q \text{ allora } P$$

cioè che P abbia come conseguenza Q e Q abbia come conseguenza P.
In tal caso, P e Q si dicono *equivalenti*.

Questo significa che, in qualunque contesto sia interpretabili, P e Q sono entrambe vere o entrambe false.

Alcune proprietà della conseguenza

La nozione di conseguenza è

- *Riflessiva:* Qualunque sia P, si ha che

$$P \text{ ha come conseguenza } P$$

- *Transitiva:* Qualunque siano P, Q, R:

  Se P ha come conseguenza Q e Q ha come conseguenza R, allora P ha come conseguenza R

(la transitività segue dal principio di dimostrazione per composizione)

Alcune proprietà dell'equivalenza

La nozione di equivalenza è:

- *Riflessiva:* Qualunque sia P, si ha che

  P è equivalente a P

- *Transitiva:* Qualunque siano P, Q, R:

  Se P è equivalente a Q e Q è equivalente a R,
  allora P è equivalente a R

- *Simmetrica:* Qualunque siano P e Q:

  Se P è equivalente a Q, allora Q è equivalente a P

Simboli matematici

La matematica si esprime attraverso l'uso di simboli.

- Si usano lettere (in genere $x, y, z, t, \ldots$, o $k, m, n, \ldots$, secondo il contesto voluto) per denotare *variabili*, cioè simboli che designano elementi generici nel dominio preso in considerazione (per es., numeri).
- Alcuni simboli sono usati per designare elementi specifici del dominio in considerazione. Per es., $\pi = 3.14159\ldots$.
- Alcuni simboli servono per denotare operazioni, o *funzioni*. Per es., di solito $+$ e $\cdot$ denotano le operazioni binarie di addizione e moltiplicazione; $\sqrt{\ }$ denota l'operazione unaria di radice quadrata.
- Alcuni simboli servono per denotare delle *relazioni* tra oggetti. Per es., il simbolo $\leq$ si usa spesso per designare la relazione binaria d'ordine tra coppie di numeri.
  - Il simbolo $=$ designa anch'esso una relazione binaria ma, a differenza degli altri simboli di relazione, la sua *interpretazione* è sempre la medesima, in qualunque contesto: afferma sempre che l'oggetto scritto alla sua sinistra coincide con l'oggetto scritto alla sua destra.

Lo studio di questi simboli sarà oggetto della *logica del prim'ordine*.

Le costanti logiche: connettivi e quantificatori

Per ragionare in matematica (e sperabilmente non solo in matematica!) si usano concetti logici espressi da locuzioni quali:

- *non* . . .
- . . . *e* . . .
- . . . *o* . . .
- *se* . . . *allora* . . .
- . . . *se e solo se* . . .
- *esiste un oggetto* x *tale che* . . .
- *per ogni oggetto* x . . .

Poiché uno scopo della logica matematica è quello di studiare rigorosamente il ragionamento matematico, si introducono dei simboli per denotare questi concetti.

Connettivi

I *connettivi logici* sono i simboli:

- $\neg$ per indicare la negazione *non*: la negazione di P è l'asserzione $\neg P$
- $\wedge$ per indicare la congiunzione *e*: la congiunzione delle asserzioni P, Q è l'asserzione $P \wedge Q$
- $\vee$ per indicare la disgiunzione *o*: la disgiunzione delle asserzioni P, Q è l'asserzione $P \vee Q$
- $\rightarrow$ per indicare l'implicazione *se* ... *allora* ...: l'implicazione tra le asserzioni P, Q è l'asserzione $P \rightarrow Q$
- $\leftrightarrow$ per indicare la biimplicazione ... *se e solo se* ...: la biimplicazione tra le asserzioni P, Q è l'asserzione $P \leftrightarrow Q$

Quantificatori

I *quantificatori* sono i simboli:

- $\exists$ per indicare la quantificazione esistenziale: applicata a una variabile x e a un'asserzione P fornisce l'asserzione $\exists xP$
- $\forall$ per indicare la quantificazione universale: applicata a una variabile x e a un'asserzione P, fornisce l'asserzione $\forall xP$

Perché queste quantificazioni siano significative, l'asserzione P deve affermare qualcosa su x.

Le studio dei quantificatori sarà oggetto della logica del prim'ordine.

Conseguenza logica e equivalenza logica

Per studiare il significato dei connettivi e, più in generale, il valore di verità di un'asserzione, introduciamo due simboli:

Scriviamo

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \models Q$$

per indicare che $P_1, \ldots, P_n$ hanno come conseguenza Q (ovvero, Q è conseguenza di $P_1, \ldots, P_n$).

Scriviamo

$$P \equiv Q$$

per indicare che P e Q sono equivalenti, cioè che ognuna è conseguenza dell'altra.

Nota. A differenza dei connettivi e dei quantificatori, $\models$ e $\equiv$ *non* sono simboli del particolare linguaggio matematico che vogliamo studiare, ma sono simboli che usiamo per parlare di tale linguaggio (per questo sono talvolta chiamati *metasimboli*, o *simboli metalogici*).
Cionondimeno, anch'essi sono soggeti a un uso rigoroso.

Il significato dei connettivi: la negazione

La negazione $\neg$ asserisce l'opposto dell'affermazione alla quale si applica. Cioè:

$$\neg P \text{ è vera} \quad \text{se e solo se} \quad P \text{ è falsa}$$

Esempio. Se P è l'affermazione $x < y$, allora $\neg P$ è l'affermazione

$$\neg x < y$$

Questa è vera se e solo se $x < y$ è falso.

Se $<$ è l'usuale relazione d'ordinamento tra numeri, allora $\neg x < y$ significa $x \geq y$.

Proprietà della negazione

Data un'asserzione P, si ha che

$$\begin{aligned} P \text{ è vera} \quad & \text{se e solo se} \quad \neg P \text{ è falsa} \quad \text{se e solo se} \quad \neg\neg P \text{ è vera} \\ & \text{se e solo se} \quad \neg\neg\neg P \text{ è falsa} \quad \text{se e solo se} \quad \neg\neg\neg\neg P \text{ è vera} \quad \ldots \end{aligned}$$

In particolare, vale la **legge della doppia negazione:**

$$P \equiv \neg\neg P$$

Inoltre:

$$P \equiv Q \quad \text{se e solo se} \quad \neg P \equiv \neg Q$$

Infatti, se $P \equiv Q$, allora

$$\begin{aligned} \neg P \text{ è vera} \quad & \text{se e solo se} \quad P \text{ è falsa} \quad \text{se e solo se} \quad Q \text{ è falsa} \\ & \text{se e solo se} \quad \neg Q \text{ è vera} \end{aligned}$$

e, similmente, se $\neg P \equiv \neg Q$ allora $P \equiv Q$: infatti

$$\begin{aligned} P \text{ è vera} \quad & \text{se e solo se} \quad \neg P \text{ è falsa} \quad \text{se e solo se} \quad \neg Q \text{ è falsa} \\ & \text{se e solo se} \quad Q \text{ è vera} \end{aligned}$$

Il significato dei connettivi: la congiunzione

La congiunzione $\wedge$ asserisce entrambe le affermazioni alle quali si applica. Cioè

$$P \wedge Q \text{ è vera} \quad \text{se e solo se} \quad P, Q \text{ sono entrambe vere}$$

Esempio. Se

$$P: \quad x \text{ è pari}, \qquad Q: \quad x \text{ è un quadrato perfetto}$$

allora $P \wedge Q$ è vera se e solo se

- P: x è della forma $2k$, per qualche naturale k; e inoltre
- Q: x è anche della forma n^2, per qualche naturale n

in altre parole

$$x = 2k = n^2$$

Poiché abbiamo dimostrato che n^2 pari equivale a n pari, cioè $n = 2m$ per qualche naturale m, segue che

$$P \wedge Q: \qquad x = (2m)^2 = 4m^2 \quad \text{per qualche naturale } m$$

Proprietà della congiunzione

- $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$ (commutatività)
- $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$ (associatività); questo permette di evitare delle parentesi *quando si è interessati solo alla verità* di una congiunzione
- $P, Q \models P \wedge Q$
- $P \wedge Q \models P$
- $P \wedge Q \models Q$
- Se $P \equiv R$ e $Q \equiv S$, allora $P \wedge Q \equiv R \wedge S$
  Infatti, assunto che $P \equiv R$ e $Q \equiv S$, se vale $P \wedge Q$, allora valgono entrambe P e Q; di conseguenza valgono R e S, perciò vale $R \wedge S$.
  Si è cioè ottenuto $P \wedge Q \models R \wedge S$.
  Similmente si dimostra che $R \wedge S \models P \wedge Q$, e quindi finalmente $P \wedge Q \equiv R \wedge S$.

Il significato dei connettivi: la disgiunzione

La disgiunzione $\vee$ asserisce la verità di **almeno una** delle asserzioni a cui si applica. Cioè

$$P \vee Q \text{ è vera} \quad \text{se e solo se} \quad \text{almeno una tra } P, Q \text{ è vera}$$

Esempio. Se

$$P: \quad x \text{ è pari} \qquad Q: \quad x \text{ è un quadrato perfetto}$$

allora

$$P \vee Q$$

- è vera se $x = 16$ (perché valgono entrambe P e Q), se $x = 20$ (perché è vera P, anche se Q è falsa), se $x = 49$ (perché è vera Q, anche se P è falsa);
- è falsa se $x = 53$ (perché sia P sia Q sono false).

Proprietà della disgiunzione

- $P \vee Q \equiv Q \vee P$ (commutatività)
- $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$ (associatività); ciò permette di risparmiare delle parentesi se interessati solo alla verità di una disgiunzione
- $P \models P \vee Q$
- $Q \models P \vee Q$
- $P \vee Q, \neg P \models Q$
- $P \vee Q, \neg Q \models P$
- Se $P \equiv R$ e $Q \equiv S$, allora $P \vee Q \equiv R \vee S$
  Infatti, se $P \equiv R$ e $Q \equiv S$, se vale $P \vee Q$, allora vale almeno uno tra P e Q. Se vale P, allora vale R e quindi vale $R \vee S$; se vale Q, allora vale S e quindi di nuovo $R \vee S$. Pertanto $P \vee Q \models R \vee S$. Similmente si dimostra che $R \vee S \models P \vee Q$, e quindi finalmente $P \vee Q \equiv R \vee S$.

Leggi di De Morgan

- $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
- $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

Per la prima:
Se $\neg(P \wedge Q)$ è vera, significa che $P \wedge Q$ è falsa, cioè che è falsa almeno una tra P e Q. Se è falsa P, allora $\neg P$ è vera e quindi $\neg P \vee \neg Q$ è vera; se è falsa Q, allora $\neg Q$ è vera e quindi di nuovo segue $\neg P \vee \neg Q$.
Si è dimostrato $\neg(P \wedge Q) \models \neg P \vee \neg Q$.

Viceversa, se vale $\neg P \vee \neg Q$, significa che almeno una fra $\neg P$ e $\neg Q$ è vera. Se è vera $\neg P$, allora P è falsa e quindi anche $P \wedge Q$ è falsa, cioè $\neg(P \wedge Q)$ è vera; se è vera $\neg Q$, allora Q è falsa, $P \wedge Q$ è falsa, e di nuovo $\neg(P \wedge Q)$ risulta vera.
Si è dimostrato $\neg P \vee \neg Q \models \neg(P \wedge Q)$.

Esercizio. Dimostrare la seconda.

Definizione di $\wedge$ in termini di $\neg$ e $\vee$

Dall'equivalenza

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

si ottiene l'equivalenza delle negazioni dei due membri

$$\neg\neg(P \wedge Q) \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$$

e ancora

$$P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$$

Quindi, *dal punto di vista semantico*, il connettivo $\wedge$ è ridondante in presenza di $\neg$ e $\vee$: si potrebbe eliminare, sostituendo tutte le sue occorrenze in formule del tipo $P \wedge Q$ con $\neg(\neg P \vee \neg Q)$. Ciò naturalmente aumenterebbe in modo considerevole la lunghezza delle espressioni.

Definizione di $\vee$ in termini di $\neg$ e $\wedge$

Similmente, dall'equivalenza

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

si ottiene

$$\neg\neg(P \vee Q) \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

e quindi

$$P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

ciò che mostra che il connettivo $\vee$ è definibile in termini di $\neg$ e $\wedge$.