

Algebra per Informatica

Esercitazione guidata Novembre 2023

Svolgere i seguenti esercizi **motivando chiaramente** le risposte.

Esercizio 1. Sia dato il seguente numero complesso

$$z = \frac{-2}{1 - i\sqrt{3}}.$$

Calcolare z^{120} , z^5 , e le radici quarte complesse di z .

- Esercizio 2.**
1. Calcolare il massimo comun divisore di 34 e 55 utilizzando l'algoritmo euclideo.
 2. Scrivere l'identità di Bézout per 34 e 55.
 3. Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione diofantea $68x + 110y = 6$.

Esercizio 3. Determinare quali delle seguenti sono relazioni di equivalenza sull'insieme A assegnato.

1. $A = \mathbb{Z}$, $x \sim y \iff 5 \mid (x + 4y)$.
2. $A = \mathbb{Z}$, $x \sim y \iff 3 \mid (x + 3y)$.
3. $A = \mathbb{R}$, $x \sim y \iff xy \geq 0$.
4. $A = \mathbb{Z}$, $x \sim y \iff x$ è un multiplo o un divisore di y .

Esercizio 4. Calcolare la cardinalità dei seguenti insiemi.

1. $A = \{f : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_3\}$.
2. $B = \{f : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_3 \text{ iniettiva}\}$.
3. $C = \{f : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \text{ iniettiva}\}$.
4. $D = \{f : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_3 \mid f(\bar{0}) = f(\bar{1})\}$.

Esercizio 5. Stabilire se le assegnazione seguenti sono funzioni oppure no.

1. $f : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_4$ tale che $f([a]) = [(-1)^a]$.
2. $g : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$ tale che $g([a]) = [(-1)^a]$.

esercitazione guidata novembre 2023

esercizio 1)

$$z = \frac{-2}{1-i\sqrt{3}}$$

calcolare z^{120} , z^5 ,
radici quarte di z

- Scrivere z in forma algebrica, cioè come $z = a + ib$

$$z = \frac{-2}{1-i\sqrt{3}} \cdot \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{1-3i^2} = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{1+3} =$$
$$= \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$\rightarrow i = -1 \rightarrow i^2 = +1$

- Scrivere z in forma trigonometrica

- trovare il modulo di z

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

- trovare ϑ

$$\begin{cases} \cos \vartheta = -\frac{1}{2} \\ \sin \vartheta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \vartheta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

$$z = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = e^{i \frac{4}{3}\pi}$$

$$z^{120} = \cos\left(\frac{40}{120} \cdot \frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{40}{120} \cdot \frac{4}{3}\pi\right) =$$
$$= \cos(160\pi) + i \sin(160\pi) = \cos(0) + i \sin(0) = 1$$

$$z^5 = \cos\left(5 \cdot \frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(5 \cdot \frac{4}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{20}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{20}{3}\pi\right)$$
$$= \cos\left(\frac{2}{3}\pi + 6\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi + 6\pi\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

radice quarte complesse di z

$$z_k = \cos\left(\frac{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi}{4}\right)$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

$$K_0 = \cos\left(\frac{\frac{4}{3}\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{4}{3}\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$K_1 = \cos\left(\frac{\frac{4}{3}\pi + 2\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{4}{3}\pi + 2\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$K_2 = \cos\left(\frac{\frac{4}{3}\pi + 4\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{4}{3}\pi + 4\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$K_3 = \cos\left(\frac{\frac{4}{3}\pi + 6\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{4}{3}\pi + 6\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{11}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Esercizio 2)

1)

$$\text{MCD}(34, 55) = 1$$

$$55 = 1 \cdot 34 + 21$$

$$34 = 1 \cdot 21 + 13$$

$$21 = 1 \cdot 13 + 8$$

$$13 = 1 \cdot 8 + 5$$

$$8 = 1 \cdot 5 + 3$$

$$5 = 1 \cdot 3 + 2$$

$$3 = 1 \cdot 2 + 1 \rightarrow \text{MCD} = 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

2)

Bezout

$$2 \cdot 1 = 55 - 34$$

$$13 = 34 - 21$$

$$8 = 21 - 13$$

$$5 = 13 - 8$$

$$3 = 8 - 5$$

$$2 = 5 - 3$$

$$1 = 3 - 2$$

$$\begin{aligned}
 1 &= 3 - 2 = 3 - (5 - 3) = 3 - 5 + 3 = 2 \cdot 3 - 5 = 2 \cdot (8 - 5) - 5 = \\
 &= 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 2 \cdot 8 - 3(13 - 8) = 5 \cdot 8 - 3 \cdot 13 = 5 \cdot (21 - 13) - \\
 &\quad - 3 \cdot 13 = 5 \cdot 21 - 8 \cdot 13 = 5 \cdot 21 - 8(34 - 21) = 13 \cdot 21 - 8 \cdot 34 = \\
 &= 13 \cdot (55 - 34) - 8 \cdot 34 = 13 \cdot 55 - 21 \cdot 34
 \end{aligned}$$

$$\exists x, y \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } 1 = 34x + 55y \quad \begin{matrix} x = -21 \\ y = 13 \end{matrix}$$

3) equazione diofantea $68x + 110y = 6$

MCD(68, 110)

$$\begin{aligned}
 110 &= 1 \cdot 68 + 42 \\
 68 &= 1 \cdot 42 + 26 \\
 42 &= 1 \cdot 26 + 16 \\
 26 &= 1 \cdot 16 + 10 \\
 16 &= 1 \cdot 10 + 6 \\
 10 &= 1 \cdot 6 + 4 \\
 6 &= 1 \cdot 4 + 2 \\
 4 &= 2 \cdot 2 + 0
 \end{aligned}$$

$$68x + 110y = 6 \xrightarrow{\div 2} 34x + 55y = 3$$

$$34x + 55y = 1 \quad \begin{matrix} x = -21 \\ y = 13 \end{matrix}$$

$\times 3 \downarrow$

$$34(-21 \cdot 3) + 55(13 \cdot 3) = 3$$

$$34(-63) + 55(39) = 3$$

$$\begin{cases} x = -63 + 55k \\ y = 39 - 34k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 3)

1) $A = \mathbb{Z}$, $x \sim y \iff 5 \mid (x + 4y)$

REFLESSIVA

$$x \sim x \iff 5 \mid x + 4x = 5x \quad \checkmark$$

SIMMETRICA

$$x \sim y, y \sim x \iff 5 \mid (x + 4y), 5 \mid (y + 4x)$$

$$5 \mid x + 4y \rightarrow x + 4y = 5k \rightarrow x = 5k - 4y$$

$$\begin{aligned}
 y + 4x &= y + 4(5k - 4y) = y + 20k - 16y = \\
 &= 20k - 15y = 5(4k - 3y) \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$x \sim y, y \sim z \rightarrow x \sim z$$

$$5|x+4y, 5|y+4z \rightarrow 5|x+4z?$$

$$\begin{aligned} x+4y &= 5k, y+4z = 5h & x+4z &= 5k - 4y + 4z \\ &= 5k - 4(5h - 4z) + 4z & &= 5k - 20h + 16z + 4z = \\ &= 5k - 20h + 20z \quad \checkmark \end{aligned}$$

2) $A = \mathbb{Z}, x \sim y \Leftrightarrow 3|(x+3y)$

RIFLESSIVA

$$x \sim x \Leftrightarrow 3|x+3x = 4x \quad \times$$

3) $A = \mathbb{R}, x \sim y \Leftrightarrow xy \geq 0$

RIFLESSIVA

$$x \sim x \Leftrightarrow x^2 \geq 0 \quad \checkmark$$

SIMMETRICA

$$x \sim y, y \sim x \Leftrightarrow x \cdot y \geq 0, y \cdot x \geq 0 \quad \checkmark$$

TRANSITIVA

$$\begin{aligned} x \sim y, y \sim z &\rightarrow x \sim z \Leftrightarrow x \cdot y \geq 0, y \cdot z \geq 0 \\ &\rightarrow x \cdot z \geq 0 \quad \times \end{aligned}$$

4) $A = \mathbb{Z}, x \sim y \Leftrightarrow x$ multiplo o divisore di y

RIFLESSIVA

$$x \text{ multiplo o divisore di } x \quad \checkmark$$

SIMMETRICA

$$x \sim y, y \sim x \quad \checkmark$$

TRANSITIVA

$$x \sim y, y \sim z \rightarrow x \sim z$$

x multiplo di y , x divisore di z

$$x=2, y=6, z=3$$

$$6|3, 6|2 \rightarrow 2|3 \quad \times$$

Esercizio 4)

→ Calcolare la cardinalità:

1) $A = \{f: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_3\}$ $|\mathbb{Z}_4| = 4$ $|\mathbb{Z}_3| = 3$
 $= \mathbb{Z}_3^{\mathbb{Z}_4}$

$$|A| = |\mathbb{Z}_3|^{|\mathbb{Z}_4|} = 3^4 = 81$$

2) $B = \{f: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_3 \text{ iniettiva}\}$

$4 > 3 \rightarrow$ non ci sono funzioni iniettive da \mathbb{Z}_4 a \mathbb{Z}_3

$$B = \emptyset \quad |B| = 0$$

$$3) C = \{f: \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \text{ iniettiva}\}$$

$$\bar{0} \mapsto 4 \text{ poss}$$

$$\bar{1} \mapsto 3 \text{ poss}$$

$$\bar{2} \mapsto 2 \text{ poss}$$

$$|C| = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

$$4) D = \{f: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_3 \mid f(\bar{0}) = f(\bar{1})\}$$

$$\bar{0} \mapsto 3 \text{ poss}$$

$$\bar{1} \mapsto 1 \text{ poss}$$

$$\bar{2} \mapsto 3 \text{ poss}$$

$$\bar{3} \mapsto 3 \text{ poss}$$

$$|D| = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 27$$

esercizio 8)

$$1) f: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \text{ t.c. } f([a]) = [(-1)^a]$$

$$f([0]) = [(-1)^0] = [1]$$

$$f([1]) = [(-1)^1] = [-1] = [3] = [-]$$

$$f([2]) = [(-1)^2] = [1]$$

$$2) g: \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3 \quad g([a]) = [(-1)^a]$$

$$[0] = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$[1] = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$[2] = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$