Esercizio 1

Calcolare la tavola di verità delle proposizioni

$$
\begin{aligned}
P_1 &: (C \rightarrow A) \wedge \neg B \rightarrow A \vee B \\
P_2 &: \neg(A \leftrightarrow B) \vee A \\
P_3 &: B \rightarrow (\neg A \vee \neg B) \\
P_4 &: (A \vee \neg(B \rightarrow C)) \wedge (\neg C \vee B) \\
P_5 &: A \wedge \neg(A \rightarrow \neg(\neg A \vee A)) \\
P_6 &: ((A \wedge B) \wedge (A \vee B)) \wedge (A \rightarrow B)
\end{aligned}
$$

Esercizio 1, svolgimento

A	B	C	$C \to A$	$\neg B$	$(C \to A) \wedge \neg B$	$A \vee B$	P_1
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1

A	B	$A \leftrightarrow B$	$\neg(A \leftrightarrow B)$	P_2
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

Esercizio 1, svolgimento (cont.)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	P_3
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0

A	B	C	$B \to C$	$\neg(B \to C)$	$A \vee \neg(B \to C)$	$\neg C$	$\neg C \vee B$	P_4
0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	0	1	1

Esercizio 1, svolgimento (cont.)

A	$\neg A$	$\neg A \vee A$	$\neg(\neg A \vee A)$	$A \to \neg(\neg A \vee A)$	$\neg(A \to \neg(\neg A \vee A))$	P_5
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$(A \wedge B) \wedge (A \vee B)$	$A \to B$	P_6
0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Esercizio 2

Verificare mediante le tavole di verità quali delle seguenti conseguenze logiche valgono.

1. $\neg A \vee \neg B \models \neg A \rightarrow \neg B$
2. $A \rightarrow B \models A \vee B$
3. $\neg B \rightarrow \neg A \models \neg A \vee B$
4. $\neg A \wedge \neg B \models \neg A \rightarrow \neg B$
5. $A \vee B \models A$
6. $A \vee B \models B$

Esercizio 2, svolgimento

1.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg A \to \neg B$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1

Poiché nella seconda riga della tavola di verità $\neg A \vee \neg B$ è vera, ma $\neg A \to \neg B$ è falsa, si conclude

$$\neg A \vee \neg B \not\models \neg A \to \neg B$$

Esercizio 2, svolgimento (cont.)

2.

A	B	$A \to B$	$A \vee B$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Poiché nella prima riga della tavola di verità $A \to B$ è vera, ma $A \vee B$ è falsa, si conclude

$$A \to B \not\models A \vee B$$

Esercizio 2, svolgimento (cont.)

3.

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \to \neg A$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1

Poiché in ogni riga in cui $\neg B \to \neg A$ è vera (la prima, la seconda e la quarta riga della tavola di verità) anche $\neg A \vee B$ è vera, si conclude

$$\neg B \to \neg A \models \neg A \vee B$$

4.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \land \neg B$	$\neg A \to \neg B$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

Poiché in ogni riga della tavola di verità in cui $\neg A \land \neg B$ è vera (solo la prima riga) anche $\neg A \to \neg B$ è vera, si conclude

$$\neg A \land \neg B \models \neg A \to \neg B$$

5,6.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Poiché ci sono righe della tavola di verità in cui $A \vee B$ è vera, ma A è falsa (la seconda riga), si conclude

$$A \vee B \not\models A$$

Poiché ci sono righe della tavola di verità in cui $A \vee B$ è vera, ma B è falsa (la terza riga), si conclude

$$A \vee B \not\models B$$

Esercizio 3

Verificare utilizzando le tavole di verità la validità delle seguenti leggi logiche.

1. $P \models Q \vee \neg Q$
2. $P \wedge \neg P \models Q$
3. $P, Q \models P \wedge Q$
4. $P \wedge Q \models P$
5. $P \wedge Q \models Q$
6. $P \models P \vee Q$
7. $Q \models P \vee Q$

Esercizio 3, svolgimento

1.

P	Q	$\neg Q$	$Q \vee \neg Q$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1

Poiché in ogni riga in cui P è vera (la terza e la quarta) anche $Q \vee \neg Q$ è vera, si conclude

$$P \models Q \vee \neg Q$$

Esercizio 3, svolgimento (cont.)

2.

P	Q	$\neg P$	$P \land \neg P$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Poiché in ogni riga in cui $P \land \neg P$ è vera (nessuna), anche Q è vera, si conclude

$$P \land \neg Q \models Q$$

Esercizio 3, svolgimento (cont.)

3,4,5.

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Poiché in ogni riga in cui P e Q sono vere (la quarta) anche $P \wedge Q$ è vera, si conclude

$$P, Q \models P \wedge Q$$

Poiché in ogni riga in cui $P \wedge Q$ è vera (la quarta) anche P è vera, si conclude

$$P \wedge Q \models P$$

Poiché in ogni riga in cui $P \wedge Q$ è vera (la quarta) anche Q è vera, si conclude

$$P \wedge Q \models Q$$

6,7.

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Poiché in ogni riga in cui P è vera (la terza e la quarta) anche $P \vee Q$ è vera, si conclude

$$P \models P \vee Q$$

Poiché in ogni riga in cui Q è vera (la seconda e la quarta) anche $P \vee Q$ è vera, si conclude

$$Q \models P \vee Q$$

Esercizio 4

Verificare mediante le tavole di verità quali delle seguenti equivalenze logiche valgono.

1. $\neg A \wedge \neg B \equiv \neg A \rightarrow \neg B$
2. $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
3. $\neg B \rightarrow \neg A \equiv \neg A \vee B$
4. $\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$
5. $A \rightarrow B \equiv B \rightarrow A$
6. $(A \rightarrow B) \rightarrow C \equiv A \rightarrow (B \rightarrow C)$

Esercizio 4, svolgimento

1.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg A \rightarrow \neg B$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

Poiché ci sono delle righe (la terza e la quarta) in cui i valori di verità di $\neg A \wedge \neg B$ e $\neg A \rightarrow \neg B$ sono differenti, si conclude

$$\neg A \wedge \neg B \not\equiv \neg A \rightarrow \neg B$$

Esercizio 4, svolgimento (cont.)

2.

A	B	$A \to B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Poiché in tutte le righe i valori di verità di $A \to B$ e $\neg A \vee B$ sono uguali, si conclude

$$A \to B \equiv \neg A \vee B$$

Esercizio 4, svolgimento (cont.)

3.

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \to \neg A$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1

Poiché in tutte le righe i valori di verità di $\neg B \to \neg A$ e $\neg A \vee B$ sono uguali, si conclude

$$\neg B \to \neg A \equiv \neg A \vee B$$

4.

A	B	$A \to B$	$\neg(A \to B)$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$
0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

Poiché in tutte le righe $\neg(A \to B)$ e $A \wedge \neg B$ hanno gli stessi valori di verità, si conclude

$$\neg(A \to B) \equiv A \wedge \neg B$$

Esercizio 4, svolgimento (cont.)

5.

A	B	$A \to B$	$B \to A$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Poiché ci sono delle righe (la seconda e la terza) in cui $A \to B$ e $B \to A$ hanno valori di verità differenti, si conclude

$$A \to B \not\equiv B \to A$$

6.

A	B	C	$A \to B$	$(A \to B) \to C$	$B \to C$	$A \to (B \to C)$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Poiché ci sono delle righe in sui $(A \to B) \to C$ e $A \to (B \to C)$ hanno valori di verità differenti, si conclude

$$(A \to B) \to C \not\equiv A \to (B \to C)$$

Esercizio 5

Utilizzando le tavole di verità, dimostrare la proprietà distributiva di $\wedge$ rispetto a $\vee$:

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

Svolgimento.

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
.1	1	1	1	1	1	1	1

Poiché in tutte le righe della tavola di verità i valori di verità di $P \wedge (Q \vee R)$ e $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ sono i medesimi, si conclude

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

Esercizio 6

Utilizzando le tavole di verità, dimostrare le due leggi di De Morgan:

$$\neg(P \land Q) \equiv \neg P \lor \neg Q$$
$$\neg(P \lor Q) \equiv \neg P \land \neg Q$$

Esercizio 6, svolgimento

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Poiché in tutte le righe della tavola di verità i valori di verità di $\neg(P \wedge Q)$ e $\neg P \vee \neg Q$ sono i medesimi, si conclude

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

Esercizio 6, svolgimento (cont.)

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Poiché in tutte le righe della tavola di verità i valori di verità di $\neg(P \vee Q)$ e $\neg P \wedge \neg Q$ sono i medesimi, si conclude

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

Esercizio 7

Utilizzando le tavole di verità, dimostrare le seguenti leggi logiche:

1. $P \equiv \neg\neg P$
2. $P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$
3. $P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$
4. $P \rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$
5. $P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

Esercizio 7, svolgimento

1.

P	$\neg P$	$\neg\neg P$
0	1	0
1	0	1

Poiché in tutte le righe della tavola di verità le formule P e $\neg\neg P$ hanno gli stessi valori di verità, si conclude $P \equiv \neg\neg P$.

2.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$
0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1

Poiché in tutte le righe della tavola di verità le formule $P \wedge Q$ e $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ hanno i medesimi valori di verità, si conclude

$$P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$$

Esercizio 7, svolgimento (cont.)

3.

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$
0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Poiché in tutte le righe della tavola di verità le formule $P \vee Q$ e $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$ assumono gli stessi valori di verità, si conclude

$$P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

Esercizio 7, svolgimento (cont.)

4.

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge \neg Q)$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1

Poiché in tutte le righe della tavola di verità le formule $P \to Q$ e $\neg(P \wedge \neg Q)$ assumono gli stessi valori di verità, si conclude

$$P \to Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$$

Esercizio 7, svolgimento (cont.)

5.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

Poiché in tutte le righe della tavola di verità le formule $P \leftrightarrow Q$ e $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ assumono gli stessi valori di verità, si conclude

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$$

Esercizio 8

Dimostrare che
$$\models (A \leftrightarrow B) \vee (\neg A \leftrightarrow B)$$

Svolgimento.

A	B	$A \leftrightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \leftrightarrow B$	$(A \leftrightarrow B) \vee (\neg A \leftrightarrow B)$
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1

Poiché in ogni riga della tavola di verità la formula $(A \leftrightarrow B) \vee (\neg A \leftrightarrow B)$ assume valore di verità 1, si conclude che tale formula è una tautologia.

Esercizio 9

Mostrare che la formula

$$(A \vee B \vee C) \wedge (A \rightarrow \neg B \wedge C) \wedge \neg B \wedge (C \rightarrow A \wedge \neg A)$$

è una contraddizione.

Esercizio 9, svolgimento

Siano:

$$
\begin{array}{ll}
Q_1 : & A \vee B \vee C \\
Q_2 : & A \rightarrow \neg B \wedge C \\
Q_3 : & C \rightarrow A \wedge \neg A \\
P : & Q_1 \wedge Q_2 \wedge \neg B \wedge Q_3
\end{array}
$$

Sia P la formula considerata. Si osservi P è una congiunzione di quattro sottoformule; una di queste sottoformule è la disgiunzione di tre sottoformule. Sebbene la disgiunzione e la congiunzione siano connettivi binari, per l'associatività è possibile trattare disgiunzioni e congiunzioni generalizzate, cioè più lunghe, osservando che:

- una disgiunzione è vera se e solo se è vero almeno un disgiungendo
- una congiunzione è vera se e solo se sono veri tutti i congiungendi

Esercizio 9, svolgimento (cont.)

Si deve mostrare che in nessuna riga della sua tavola di verità la formula P assume valore di verità 1.
Se esistesse una tale riga, in tale sarebbero veri i quattro congiungendi:

$$Q_1, \quad Q_2, \quad \neg B, \quad Q_3$$

In particolare, B dev'essere falsa. Inoltre, dalla verità di Q_3 e il fatto che $A \wedge \neg A$ è una contraddizione, segue che C dev'essere falsa. Di conseguenza, anche $\neg B \wedge C$ è falsa. Allora, affinché Q_2 sia vera, anche A dev'essere falsa. Tuttavia questi valori di verità per A, B, C rendono falsa Q_1, e dunque falsa P.
Si conclude che non c'è alcuna riga della tavola di verità in cui P ha valore di verità 1, dunque P è una contraddizione.

Esercizio 10

Mostrare che la formula

$$(A \land B \to C) \land (C \to \neg A)$$

è soddisfacibile.

Esercizio 10, svolgimento

Sia

$$P : (A \wedge B \to C) \wedge (C \to \neg A)$$

Si vuole mostrare che c'è una riga della tavola di verità di P in cui P assume valore di verità 1.
In una tale riga, entrambe le sottoformule

$$A \wedge B \to C, \qquad C \to \neg A$$

devono essere vere.
Se C è falsa, ciò garantisca la verità della seconda; in tal caso, la prima risulta vera se e solo se $A \wedge B$ è falsa, cioè se e solo se almeno una tra A e B è falsa.
Quindi una riga della tavola di verità in cui P ha valore di verità 1 è quella per cui:

$$A \text{ è falsa}, \quad B \text{ è falsa}, \quad C \text{ è falsa}$$

Esistendo una riga della tavola di verità in cui P è vera, la formula P è soddisfacibile.

Esercizio 11

Si consideri la formula

$$\neg A \vee B \rightarrow A \wedge B$$

È soddisfacibile? È una tautologia? È una contraddizione?

Esercizio 11, svolgimento

Essendo la formula un'implicazione, affinché sia vera basta che $A \wedge B$ sia vera, cioè che A e B siano entrambe vere. In altre parole, l'assegnazione di valori di verità

$$A: \text{ vera}, \qquad B: \text{ vera}$$

rende vera anche la formula $\neg A \vee B \to A \wedge B$, che dunque è soddisfacibile. Essendo soddisfacibile, non è una contraddizione.

Per vedere se è una tautologia, si deve vedere se la formula è vera per tutte le possibili assegnazioni di verità alle lettere A e B (nel qual caso è effettivamente una tautologia) o se esiste almeno un'assegnazione di valori di verità alle lettere A e B che rende la formula falsa (nel qual caso la formula non è una tautologia).
La formula è falsa se e solo se l'antecedente $\neg A \vee B$ è vero e il conseguente $A \wedge B$ è falso. L'antecedente $\neg A \vee B$ è vero se e solo se o A è falsa o B è vera. Quindi se per esempio

$$A \text{ è falsa} \quad \text{e} \quad B \text{ è falsa}$$

allora $\neg A \vee B$ è vera e $A \wedge B$ è falsa, per cui $\neg A \vee B \to A \wedge B$ è falsa. Essendoci almeno un'assegnazione di valori di verità alle lettere che rende falsa la formula considerata, questa non è una tautologia.

Sia fissato un insieme non vuoto L. Gli elementi di L saranno detti *lettere proposizionali*, e tipicamente denotati con lettere quali $A, B, C, \ldots, A_0, A_1, \ldots, A', A'', \ldots$.
Sia

$$I = L \cup \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$$

l'insieme formato dalle lettere proposizionali, i connettivi e le parentesi.
Sia

$$I^* = \text{l'insieme di tutte le stringhe finite di elementi di } I$$

Esempio

$$A\neg))AB \leftrightarrow AA\vee \in I^*$$

Formule proposizionali

Si definisce ricorsivamente l'insieme $Prop(L)$ delle *proposizioni*, o *formule proposizionali*, di L mediante le seguenti clausole:

- Se $A \in L$, allora $(A) \in Prop(L)$
- Se $P \in Prop(L)$, allora
$$(\neg P) \in Prop(L)$$
- Se $P, Q \in Prop(L)$, allora
$$(P \vee Q), (P \wedge Q), (P \rightarrow Q), (P \leftrightarrow Q) \in Prop(L)$$

Una stringa di elementi di I è una proposizione (cioè un elemento di $Prop(L)$) se e solo se può essere costruita usando tali clausole.

Osservazione. Una formula comincia con una parentesi sinistra (e finisce con una parentesi destra).

Formule proposizionali

In altre parole, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si può definire ricorsivamente un insieme $Prop_n(L)$:

- $Prop_0(L) = \{(A) \mid A \in L\}$
- $Prop_{n+1} = Prop_n(L) \cup \{(\neg P) \mid P \in Prop_n(L)\} \cup \{(P \Box Q) \mid P, Q \in Prop_n(L), \Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}\}$

Quindi

$$Prop_0(L) \subseteq Prop_1(L) \subseteq Prop_2(L) \subseteq \dots$$

e

$$Prop(L) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Prop_n(L)$$

Notazione. Tipicamente le formule proposizionale saranno denotate con lettere quali $P, Q, R, \dots$.

Gli elementi di $Prop_0$ sono detti *formule atomiche*.

Formule proposizionali: terminologia

- L'ultimo connettivo applicato nella costruzione di una formula è detto *connettivo principale*; le *sottoformule immediate*, o *sottoformule principali* sono le formule alle quali il connettivo principale è applicato, cioè:
  - il connettivo principale di $(\neg P)$ è $\neg$; l'unica sottoformula immediata di $(\neg P)$ è P
  - il connettivo principale di $(P \Box Q)$ è $\Box$, se $\Box$ è un connettivo binario; le sottoformule immediate sono P, Q
- una formula (non atomica) è una negazione/disgiunzione/congiunzione/implicazione/biimplicazione se il connettivo principale è $\neg/\vee/\wedge/\rightarrow/\leftrightarrow$

Lunghezza e altezza di una formula

- La *lunghezza* $lh(P)$ di una formula P è il numero di simboli di I che usa, cioè la sua lunghezza come stringa di elementi di I
- La *altezza* $ht(P)$ di una formula P è il numero di passi impiegato per costruirla, cioè

$$ht(P) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid P \in Prop_n(L)\}$$

Esempio.

- Se P è una formula atomica, allora $lh(P) = 3, ht(P) = 0$
- Se

$$P : ((\neg(A)) \wedge ((B) \rightarrow (\neg(A))))$$

allora $lh(P) = 21, ht(P) = 3$.

Esempi

Siano $A, B \in L$

- $A \wedge B$ non è una formula, perché non comincia con una parentesi (
- $)A($ non è una formula, perché non comincia con una parentesi (
- $((A) \to (B))$ è una formula, ottenuta applicando il connettivo $\to$ alle formule atomiche $(A), (B)$. Dunque

$$(A), (B) \in Prop_0(L)$$
$$((A) \to (B)) \in Prop_1(L)$$

- $(\neg((A) \to (B)))$ è una formula, ottenuta applicando il connettivo $\neg$ alla formula precedente. Dunque

$$(\neg((A) \to (B))) \in Prop_2(L)$$

- $((A)$ non è una formula: per costruzione, tutte le formule hanno ugual numero di parentesi sinistre e destre
- (AB) non è una formula, perché non è atomica, ma non contiene connettivi

Alberi

A ogni formula è associato un *albero di costruzione*, o *albero sintattico*. Si tratta di un albero etichettato, binario, finito.

Un *albero* è un insieme non vuoto T dotato di una relazione d'ordine (parziale) $\preceq$ tale che:

- per ogni $x \in T$ l'insieme $\{y \in T \mid y \preceq x\}$ è finito e totalmente ordinato da $\preceq$
- esiste un elemento minimo rispetto a $\preceq$, detto *radice*

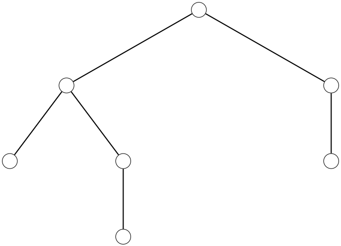
Terminologia.

- Gli elementi di T sono detti *nodi*
- Il nodo minimo rispetto a $\preceq$ si dice *radice* dell'albero
- Se $x \prec y$ si dice che x è un *predecessore* di y, o che y è un *successore* (o *discendente*) di x
- Se $x \prec y$ e non c'è alcun z tale che $x \prec z \prec y$, si dice che x è un *predecessore immediato* di y, o che y è un successore immediato di x
- Se il nodo x non ha successori, si dice che x è una *foglia*

Un albero T è *binario* se ogni nodo ha al più 2 successori immediati.

Alberi

Spesso è più comodo rappresentare graficamente gli alberi a testa in giù, cioè con la radice in alto e l'albero che cresce verso il basso:



- Un *ramo* è un insieme totalmente ordinato massimale di nodi; negli alberi finiti, i rami partono dalla radice e arrivano a una foglia
- La *lunghezza* di un ramo in un albero finito è il numero dei suoi elementi meno 1
- L'*altezza* di un albero finito è la massima lunghezza dei suoi rami

Esempio. L'albero nel disegno ha altezza 3.