SVD

12/02/2024

sia $A = U\Sigma V^t$

$$U = \begin{bmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Ci sono diverse condizioni per verificare che un'SVD sia valida:

1- posso fare il prodotto tra $U\Sigma V^t$
2- la matrice A deve avere le stesse dimensioni di Σ
3- U e V devono essere ortogonali
4- Σ dev'essere diagonale e gli elementi sulla diagonale devono essere non-negativi e decrescenti

$$\underset{3\cdot 2}{A} = \underset{3\cdot 3}{U}\ \underset{3\cdot 2}{\Sigma}\ \underset{2\cdot 2}{V^t}$$

$U = (u_1 | u_2 | u_3)$ $\quad u_n$ = colonna di U

$\langle u_1, u_2 \rangle = (-3/5 \cdot 0) + (0 \cdot 1) + (-4/5 \cdot 0) = 0$

$\langle u_2, u_3 \rangle = (0 \cdot 4/5) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot -3/5) = 0$

$\langle u_1, u_3 \rangle = (-3/5 \cdot 4/5) + (0 \cdot 0) + (-3/5 \cdot -4/5) = -\frac{12}{25} + \frac{12}{25} = 0$

se esce qualcosa diverso da 0, non è un SVD

Ora verifico che $\|u_1\|_2 = \|u_2\|_2 = \|u_3\|_2 = 1$

$\|u_1\|_2 = \sqrt{(3/5)^2 + 0^2 + (-4/5)^2} = \sqrt{9/25 + 16/25} = \sqrt{25/25} = \sqrt{1} = 1$

$\|u_2\|_2 = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$

$\|u_3\|_2 = \sqrt{(4/5)^2 + (-3/5)^2} = \sqrt{16/25 + 9/25} = \sqrt{25/25} = \sqrt{1} = 1$

Le proprietà di U sono verificate

$V = (u_1 | u_2)$

$\langle u_1 | u_2 \rangle = (0 \cdot 1) + (-1 \cdot 0) = 0$

$\|u_1\|_2 = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

$\|u_2\|_2 = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \delta_1 \geq \delta_2 \geq 0$$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Sbagliato, gli altri valori devono essere 0

$2 \geq 0 \geq 0$

abbiamo verificato che è un'SVD

b) A, avendo le stesse proprietà di Σ, ha lo stesso rango, che in questo caso è 1

c) $A\underline{v_1} = \delta_1 u_1 \qquad A\underline{v_1} = 2u_1$

$A v_2 = \delta_2 u_2 \qquad A\underline{v_2} = 0$

$Im(A) = \langle u_1 \rangle$

due vettori distinti $\in Im(A)$: $\quad \underline{u_1} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 0 \\ -4/5 \end{pmatrix} \quad \underline{2u_1} = \begin{pmatrix} -6/5 \\ 0 \\ -8/5 \end{pmatrix}$

d) $Ker(A) = \langle \underline{v_2} \rangle$

due vettori distinti $\in Ker(A)$: $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{2v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

13/02/2023

a)

Ci sono diverse condizioni per verificare che un'SVD sia valida:

1- posso fare il prodotto tra $U \Sigma V^t$

2- la matrice A deve avere le stesse dimensioni di Σ

3- U e V devono essere ortogonali

4- Σ dev'essere diagonale e gli elementi sulla diagonale devono essere non-negativi e decrescenti

b)

i)

$$\underset{3\cdot 3}{A} = \underset{3\cdot 3}{U}\ \underset{3\cdot 3}{\Sigma}\ \underset{3\cdot 3}{V^t}$$

$U = \langle u_1 | u_2 | u_3 \rangle$

$\langle u_1, u_2 \rangle = (3/5 \cdot 0) + (0 \cdot 1) + (-4/5 \cdot 0) = 0$

$\langle u_2, u_3 \rangle = (0 \cdot 4/5) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot -3/5) = 0$

$\langle u_1, u_3 \rangle = (3/5 \cdot 4/5) + (0 \cdot 0) + (-4/5 \cdot -3/5) = 12/25 + 12/25 = \frac{24}{25} \neq 0$

non è un'SVD

ii)

non è un'SVD in quanto gli elementi sulla diagonale di Σ non sono decrescenti

iii)

non è un'SVD in quanto un elemento sulla diagonale di Σ è negativo

iv)

$$\underset{3\cdot 3}{A} = \underset{3\cdot 3}{U}\ \underset{3\cdot 3}{\Sigma}\ \underset{3\cdot 3}{V^t}$$

$U = \langle u_1 | u_2 | u_3 \rangle$

$\langle u_1, u_2 \rangle = (-3/5 \cdot 0) + (0 \cdot 1) + (-4/5 \cdot 0) = 0$

$\langle u_2, u_3 \rangle = (0 \cdot 4/5) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot -3/5) = 0$

$\langle u_1, u_3 \rangle = (-3/5 \cdot 4/5) + (0 \cdot 0) + (-4/5 \cdot -3/5) = -12/25 + 12/25 = 0$

ora verifico che $\|u_1\|_2 = \|u_2\|_2 = \|u_3\|_2 = 1$

$\|u_1\|_2 = \sqrt{(-3/5)^2 + (-4/5)^2} = \sqrt{9/25 + 16/25} = \sqrt{25/25} = \sqrt{1} = 1$

$\|u_2\|_2 = \sqrt{1^2} = \sqrt{1} = 1$

$\|u_3\|_2 = \sqrt{(4/5)^2 + (-3/5)^2} = \sqrt{16/25 + 9/25} = \sqrt{25/25} = \sqrt{1} = 1$

$V = (u_1, u_2, u_3)$

$\langle u_1, u_2 \rangle = (0 \cdot -1) + (1 \cdot 0) + (0 + 0) = 0$

$\langle u_2, u_3 \rangle = (-1 \cdot 0) + (0 \cdot 0) + (0 \cdot -1) = 0$

$\langle u_1, u_3 \rangle = (0 \cdot 0) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot -1) = 0$

$\|u_1\|_2 = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$

$\|u_2\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$

$\|u_3\|_2 = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

$$\begin{bmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 0 & 8 \\ 0 & 10 & 0 \\ -20 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -15 & 0 & 8 \\ 0 & 10 & 0 \\ -20 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 15 & -8 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 6 \end{bmatrix}$$

verificata