# Grafi diretti

Sia $L = \{R\}$, con $R$ simbolo relazionale binario.

**Definizione**

Una $L$-struttura $\mathcal{G} = (G, R^{\mathcal{G}})$ si dice anche *grafo diretto* (*directed graph*), o *digrafo*.

**Esempi:**

1. $(\mathbb{N}, \leq)$
2. $(\mathbb{N}, |)$
3. $\mathcal{G} = (G, R^{\mathcal{G}})$, dove
   - $G = \{a, b, c, d, e\}$
   - $R^{\mathcal{G}} = \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, a), (e, d)\}$
4. ...

# Grafi diretti

In un grafo diretto $\mathcal{G} = (G, R^{\mathcal{G}})$ gli elementi di $G$ si chiamano *nodi*, gli elementi di $R^{\mathcal{G}}$ si chiamano *lati*, o *archi*.

Il grafo diretto si può rappresentare disegnando i suoi nodi e, dati due nodi $u, v$, una freccia da $u$ a $v$ se $(u, v) \in R^{\mathcal{G}}$.

**Esercizio:** Rappresentare i grafi diretti dell'esempio precedente.

# Grafi diretti

Un grafo diretto si può anche rappresentare con una *matrice d'incidenza*: una tabella a doppia entrata dove le righe e colonne sono etichettate con i nodi del grafo. Nell'entrata che si trova nella riga etichettata $u$ e nella colonna etichettata $v$ c'è:

$$\begin{cases} 0 & \text{se} \quad (u, v) \notin R^{\mathcal{G}} \\ 1 & \text{se} \quad (u, v) \in R^{\mathcal{G}} \end{cases}$$

**Esempio.** Per il grafo $\mathcal{G} = (G, R^{\mathcal{G}})$ dell'esempio precedente, la matrice d'incidenza è:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

# Esercizio

Sia $\varphi$ l'enunciato

$$\exists x \, \forall y \, (Q(x,y) \vee Q(y,x)) \wedge \exists x \, \forall y \, \neg Q(x,y) \rightarrow \forall x \, (\exists y \, Q(x,y) \rightarrow Q(x,x)),$$

dove $Q$ è simbolo relazionale binario.
Dimostrare che $\varphi$ è soddisfacibile ma non valido, disegnando un grafo diretto $\mathcal{G}$ tale che $\mathcal{G} \models \varphi$ e un grafo diretto $\mathcal{H}$ tale che $\mathcal{H} \not\models \varphi$.

# Grafi

Sia $L = \{R\}$ con $R$ simbolo relazione binario.

**Definizione**

Una $L$ struttura $\mathcal{G} = (G, R^{\mathcal{G}})$ è un *grafo* (o *grafo non diretto*) se $R^{\mathcal{G}}$ è una relazione antiriflessiva e simmetrica, cioè

$$\mathcal{G} \models \forall x \neg R(x,x) \quad \text{e} \quad \mathcal{G} \models \forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x))$$

**Nota.** La terminologia è infelice: ogni grafo (non diretto) è un grafo diretto!

**Esempio.** $\mathcal{G} = (G, R^{\mathcal{G}})$ è un grafo, dove:

- $G = \{a, b, c, d\}$
- $R^{\mathcal{G}} = \{(a,c), (a,d), (b,c), (c,a), (c,b), (d,a)\}$

Se $u, v$ sono nodi di un grafo tali che $(u, v)$ è un lato (e quindi anche $(v, u)$ lo è), $u, v$ si dicono *adiacenti*.

Poiché in un grafo se $(u, v)$ è un lato, anche $(v, u)$ lo è, un grafo si può rappresentare con un tratto di linea che unisce ogni coppia di nodi adiacenti.

**Esercizio.** Disegnare il grafo $\mathcal{G}$ dell'esempio precedente.

Una matrice di incidenza è la matrice di incidenza di un grafo se e solo se:

- ha diagonale nulla ($\mathcal{G} \models \forall x \neg R(x, x)$)
- è *simmetrica*, cioè l'entrata della riga $u$ e colonna $v$ è uguale all'entrata della riga $v$ e colonna $u$ ($\mathcal{G} \models \forall x \forall y (R(x, y) \to R(y, x))$)

**Esercizio.** Scrivere la matrice d'incidenza del grafo $\mathcal{G}$ dell'esempio precedente.

# Grafi

## Definizioni

Sia $\mathcal{G} = (G, R^{\mathcal{G}})$ un grafo.

- Un *cammino* in $\mathcal{G}$ è una sequenza di nodi $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ tale che $a_0 R^{\mathcal{G}} a_1 R^{\mathcal{G}} \ldots R^{\mathcal{G}} a_{n-1} R^{\mathcal{G}} a_n$
- Un *ciclo* in $\mathcal{G}$ è un cammino $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ tale che:
  - $n \geq 3$
  - $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sono tutti distinti
  - $a_n = a_0$
- Il grafo $\mathcal{G}$ si dice *connesso* se per ogni coppia di nodi distinti $u, v$ esiste un cammino che parte da $u$ e finisce in $v$
- Il grafo $\mathcal{G}$ si dice *aciclico* (o *albero*) se non ha cicli
- Il grafo $\mathcal{G}$ si dice *completo* se ogni nodo è adiacente a ogni altro nodo, cioè $\mathcal{G} \models \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow R(x, y))$

**Nota.** Non esiste alcun enunciato del prim'ordine che definisca che un grafo è acicliclo o che è connesso. In altre parole, non esiste alcun enunciato del prim'ordine $\varphi$ tale che, dato un qualunque grafo $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G} \models \varphi \quad \text{se e solo se} \quad \mathcal{G} \text{ è connesso}$$

# Esercizio

Sull'insieme $A$ dei numeri naturali maggiori o uguali a 2 si consideri la relazione $R$ definita da

$$R(n, m) \Leftrightarrow n, m \text{ sono primi fra loro.}$$

La relazione $R$ definisce un grafo? Un grafo completo? Un grafo connesso?

# Esercizi

## 1

Scrivere due enunciati $F$ e $G$ della logica proposizionale tali che $\neg F \to G$ sia una tautologia, ma che $G \to \neg F$ non lo sia.

## 2

Stabilire se l'insieme di formule

$$\{\neg P \to Q, \neg(\neg P \to \neg R), R \to P \vee \neg Q\}$$

è soddisfacibile.

## 3

Stabilire se l'insieme di formule

$$\{F \to \neg G \vee \neg H, H, \neg(G \to \neg F)\}$$

è soddisfacibile.

# Esercizi

## 4

Si consideri l'enunciato

$$\varphi : \forall x(R(x) \to R(f(x,x)))$$

dove $R$ è un simbolo relazionale unario ed $f$ è un simbolo funzionale binario. Si determini se $\varphi$ è sintatticamente ben formato, se è soddisfacibile e se è valido.

## 5

Sia $\varphi$ la formula

$$\forall x \, \exists y \, (y \neq x \to y \neq y).$$

Riconoscere se si tratta di un enunciato. In caso affermativo trovare, se esistono, un modello per $\varphi$ e uno per $\neg\varphi$.

### 6

Si consideri l'enunciato

$$\forall x\ (((P(x) \to P(x)) \to P(x)) \to (Q(x) \to P(x) \land Q(x))).$$

Determinare se $P$, $Q$ sono simboli di relazione, di funzione o di costante. L'enunciato è soddisfacibile? È valido?

### 7

Si consideri l'enunciato

$$(\neg\exists x\ P(x) \to \exists x\ \neg Q(x)) \to (\exists x\ \neg P(x) \to \forall x\ Q(x)).$$

Determinare se $P$, $Q$ sono simboli di relazione, di funzione o di costante. L'enunciato è soddisfacibile? È valido?

**8**

Sia $\varphi$ l'enunciato

$$\exists x\,(Q(x)\wedge\forall y\,P(x,y))\wedge\neg\forall x\,(\forall y\,P(y,x)\to Q(x))\wedge\exists x\,(R(x)\wedge\neg P(x,x))$$

dove $Q, R$ sono simboli relazionali unari, $P$ è simbolo relazionale binario. Giustificando la risposta, determinare se $\varphi$ è soddisfacibile e se è valido.

**9**

Sia $\varphi$ l'enunciato

$$\forall x\,P(x)\wedge\exists x\,(Q(x)\to\neg P(x))\to\forall x\,\neg Q(x).$$

Trovare un modello per $\varphi$ e un modello per $\neg\varphi$.

# Esercizi

## 10

Si consideri l'enunciato $\exists x Q(x) \wedge \exists x P(x) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$. È soddisfacibile? È valido?

## 11

Si consideri l'enunciato $(\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$. È soddisfacibile? È valido?

## 12

Si consideri l'enunciato

$$\forall x \, \forall y \, (R(f(x,y)) \rightarrow R(x) \vee R(y)).$$

Determinare se è soddisfacibile e se è valido.

# Esercizi

## 13

Si consideri l'enunciato

$$\varphi : \forall x \forall y \forall z \; f(x, y, z) = f(y, x, z)$$

dove $f$ è un simbolo funzionale ternario. Si determini se $\varphi$ è soddisfacibile e se è valido.

## 14

Sia $\varphi$ l'enunciato

$$\exists x \, \forall y \, (Q(x, y) \vee Q(y, x)) \wedge \exists x \, \forall y \, \neg Q(x, y) \to \forall x \, (\exists y \, Q(x, y) \to Q(x, x)),$$

dove $Q$ è simbolo relazionale binario.
Giustificando adeguatamente la risposta, determinare se $\varphi$ è soddisfacibile e se è valido.

# Esercizi

## 15

Sia $\varphi$ l'enunciato

$$\forall x \forall y\ (R(f(x), f(y)) \rightarrow R(y, x))$$

dove $R$ è un simbolo relazionale binario.
È soddisfacibile? È valido?

## 16

Sia $\varphi$ l'enunciato

$$\exists x\ \forall y\ (P(x, y) \wedge P(y, x)) \wedge \exists x\ \forall y\ \neg P(x, y),$$

dove $P$ è simbolo relazionale binario.
Giustificando adeguatamente la risposta, determinare se $\varphi$ è soddisfacibile e se è valido.

# Esercizi

## 17

Sia $\varphi$ l'enunciato

$$\exists x\,\forall y\,(P(x,y)\vee P(y,x))\wedge\exists x\,\forall y\,\neg P(x,y)\Rightarrow\forall x\,(\exists y\,P(x,y)\Rightarrow P(x,x)),$$

dove $P$ è simbolo relazionale binario.
Giustificando adeguatamente la risposta, determinare se $\varphi$ è soddisfacibile e se è valido.

## 18

Sia $\varphi$ l'enunciato

$$\exists x\,\forall y\,(Q(x,y)\vee Q(y,x))\wedge\exists x\,\forall y\,\neg Q(x,y)\Rightarrow\forall x\,(\exists y\,Q(x,y)\Rightarrow Q(x,x)),$$

dove $Q$ è simbolo relazionale binario.
Giustificando adeguatamente la risposta, determinare se $\varphi$ è soddisfacibile e se è valido.

**19**

Sia $\varphi$ l'enunciato

$$\forall x\ \exists y\ R(x,y) \land \neg\forall x\ P(x),$$

dove $P$ è simbolo relazionale unario e $R$ è simbolo relazionale binario.
Giustificando la risposta, determinare se $\varphi$ è soddisfacibile e se è valido.

**20**

Si consideri l'enunciato

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ (x \neq y \rightarrow R(x,y,z)),$$

dove $R$ è un simbolo relazionale ternario.
È soddisfacibile? È valido?

# Esercizi

## 21

Si consideri l'enunciato

$$\forall x\ \exists y\ R(y,x) \land \exists y\ \forall x\ \neg R(y,x) \land \forall x\ \neg R(x,x),$$

dove $R$ è un simbolo relazionale binario.
È soddisfacibile? È valido?