Esercizio

Sia $L = \{f, g, c\}$, con:

- f, g simboli funzionali binari
- c simbolo di costante

Sia $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0)$.
Interpretare in $\mathcal{A}$ mediante l'assegnazione $x/\frac{2}{3}, y/-2, z/\sqrt{2}$ i termini

- $t_1 : \quad f(g(z, z), y)$
- $t_2 : \quad g(f(c, c), g(c, c))$
- $t_3 : \quad f(c, f(g(x, c), y))$

Svolgimento

$$t_1^{\mathcal{A}}\left[x/\frac{2}{3}, y/-2, z/\sqrt{2}\right] = (\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}) + (-2) = 0$$

$$t_2^{\mathcal{A}}\left[x/\frac{2}{3}, y/-2, z/\sqrt{2}\right] = (0+0)\cdot(0\cdot 0) = 0$$

$$t_3^{\mathcal{A}}\left[x/\frac{2}{3}, y/-2, z/\sqrt{2}\right] = 0 + \left(\left(\frac{2}{3}\cdot 0\right) + (-2)\right) = -2$$

Esercizio

Siano

- $L = \{f, g, c\}$, con:
  - f, g simboli funzionali binari
  - c simbolo di costante
- $\varphi(x, y)$ la formula

$$\exists z \; f(f(g(z,z), g(x,z)), y) = c$$

- $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0)$
- Stabilire se $\mathcal{A} \models \varphi[x/-2, y/-1]$
- Stabilire se $\mathcal{A} \models \varphi[x/1, y/1]$
- Determinare l'insieme di verità di φ in $\mathcal{A}$ e disegnarlo

Svolgimento

La formula $\varphi(x, y)$ in $\mathcal{A}$ asserisce che esiste un numero reale z tale che

$$z^2 + xz + y = 0$$

cioè che l'equazione $z^2 + xz + y = 0$ ha soluzione nell'incognita z. Questo succede se e solo se $x^2 - 4y \geq 0$, cioè l'insieme di verità della formula $\varphi(x, y)$ in $\mathcal{A}$ è l'insieme

$$\varphi(\mathcal{A}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4y \geq 0\}$$

che è la parte del piano al di sotto della parabola di equazione $x^2 - 4y = 0$ (parabola compresa).

Svolgimento (cont.)

In particolare:

- $(-2, -1) \in \varphi(\mathcal{A})$, quindi $\mathcal{A} \models \varphi[x/-2, y/-1]$
- $(1, 1) \notin \varphi(\mathcal{A})$, quindi $\mathcal{A} \not\models \varphi[x/1, y/1]$

Esercizio

Siano:

- $L = \{P, Q, R\}$, dove
  - P, Q sono simboli relazionali unari
  - R è simbolo relazionale binario
- $\varphi(x, y) : R(x, y) \to \neg P(x) \vee Q(y)$
- $\mathcal{A} = (A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}})$, dove

$$\begin{aligned}
A &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \\
P^{\mathcal{A}} &= \{0, 2, 3\} \\
Q^{\mathcal{A}} &= \{0, 1\} \\
R^{\mathcal{A}} &= \{(0, 0), (0, 2), (1, 2), (1, 3), (1, 4), \\
&\quad (3, 0), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}
\end{aligned}$$

Determinare l'insieme di verità di φ in $\mathcal{A}$, e stabilire se $\mathcal{A} \models \forall x \forall y \varphi$.

Svolgimento

Data $(a, b) \in A^2$, si ha che $(a, b) \in \varphi(\mathcal{A})$ se e solo se almeno una delle seguenti condizioni è verificata:

- $(a, b) \notin R^{\mathcal{A}}$
- $a \notin P^{\mathcal{A}}$
- $b \in Q^{\mathcal{A}}$

Per ispezione diretta, segue che

$$\begin{aligned}\varphi(\mathcal{A}) = \{&(0,0),(0,1),(0,3),(0,4),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3)\\&(1,4),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,0)\\&(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}\end{aligned}$$

Poiché $\varphi(\mathcal{A}) \neq A^2$, si ha che

$$\mathcal{A} \not\models \forall x \forall y \varphi$$

Esercizio

Si consideri il linguaggio del prim'ordine $\mathcal{L} = \{+, \cdot\}$, dove $+, \cdot$ sono simboli funzionali binari. Siano $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ l'insieme dei numeri naturali, $\mathbb{P} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ l'insieme dei naturali pari, $\mathbb{D} = \{1, 3, 5, \dots\}$ l'insieme dei naturali dispari.

a Determinare quali tra

$$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot), \quad \mathcal{P} = (\mathbb{P}, +, \cdot), \quad \mathcal{D} = (\mathbb{D}, +, \cdot)$$

sono $\mathcal{L}$-strutture, dove i simboli $+, \cdot$ sono interpretati come le usuali operazioni d'addizione e moltiplicazione.

b Per ognuna delle strutture determinate al punto a) trovare un $\mathcal{L}$-enunciato soddisfatto da tale struttura e da nessuna delle altre.

Svolgimento

a $\mathcal{N}$ e $\mathcal{P}$ sono $\mathcal{L}$-strutture, perché le operazioni di addizione e moltiplicazione sono definite nei loro universi. Invece $\mathcal{D}$ non è una $\mathcal{L}$-struttura, perché addizione e moltiplicazione non sono ovunque definite sui numeri dispari.

b Tra i numeri naturali c'è un elemento neutro per il prodotto, ciò che non vale per i numeri pari. Questo fornisce un enunciato vero in $\mathcal{N}$ e falso in $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{N} \models \exists x \forall y \; x \cdot y = y, \qquad \mathcal{P} \not\models \exists x \forall y \; x \cdot y = y$$

La negazione di tale enunciato è quindi vera in $\mathcal{P}$ e falsa in $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{N} \not\models \neg\exists x \forall y \; x \cdot y = y, \qquad \mathcal{P} \models \neg\exists x \forall y \; x \cdot y = y$$

Esercizio

Determinare, se esiste, una struttura $\mathcal{A}$ che soddisfi l'enunciato

$$\forall y \exists x\ \neg R(y,x) \land \forall x\ (\exists y\ R(y,x) \to \exists z \exists w\ (w \neq z \land R(x,z) \land R(x,w)))$$

e si disegni tale struttura.

Svolgimento (parziale)

La prima sottoformula principale della congiunzione asserisce che per ogni elemento della struttura (da determinare) c'è un elemento che non è in relazione a destra con l'elemento di partenza. La seconda sottoformula prinicipale asserisce che se un elemento x è in relazione a destra con qualcosa, allora è in relazione a sinistra con almeno due elementi distinti.

È pertanto sufficiente considerare una struttura $\mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}})$ con

- $A = \{a\}$ è un insieme con un solo elemento
- $R^{\mathcal{A}} = \emptyset$

Infatti in $\mathcal{A}$ per ogni elemento (cioè solo a) esiste un elemento (di nuovo, a) tale che $(a, a) \notin R^{\mathcal{A}}$, quindi la prima sottoformula principale è soddisfatta.
Inoltre, per ogni elemento (cioè solo a) la premessa della sottoformula principale del secondo congiungendo è falsa, quindi anche il secondo congiungendo è vero.

Esercizio

Determinare, se esiste, una struttura che soddisfi l'enunciato

$$\forall x \forall y \; (\neg R(x,y) \rightarrow R(y,x))$$

dove R è un simbolo relazionale binario.

Svolgimento

Una struttura $\mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}})$ che soddisfi l'enunciato deve essere tale che ogni volta che una coppia di elementi (a, b) non appartiene alla relazione $R^{\mathcal{A}}$, si deve avere che (b, a) ci appartiene. In particolare, per ogni elemento $a \in A$ si deve avere $(a, a) \in R^{\mathcal{A}}$, perché da $(a, a) \notin R^{\mathcal{A}}$ seguirebbe $(a, a) \in R^{\mathcal{A}}$, una contraddizione.

Posto allora

- $A = \{a\}$, universo con un solo elemento
- $R^{\mathcal{A}} = \{(a, a)\}$

si ha che di assegnazioni di valori alle variabili x, y ce n'è una sola: $x/a, y/a$. Mediante tale assegnazione, la formula $\neg R(x, y)$ è falsa in $\mathcal{A}$, e quindi l'implicazione è vera. Allora

$$\mathcal{A} \models \varphi$$

Esercizio

Sia φ l'enunciato

$$\forall x\ \exists y\ S(x,y) \wedge \neg S(a,a) \to S(a,b).$$

Trovare, se esistono, un modello per φ il cui universo sia l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, e un modello per $\neg\varphi$ il cui universo sia l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

Svolgimento

Le strutture che si cercano sono della forma

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, S^{\mathcal{A}}, a^{\mathcal{A}}, b^{\mathcal{A}}), \qquad \mathcal{B} = (\mathbb{C}, S^{\mathcal{B}}, a^{\mathcal{B}}, b^{\mathcal{B}})$$

Poiché l'enunciato da soddisfare in $\mathcal{A}$ è un implicazione, si osserva che è sufficiente che in $\mathcal{A}$ sia soddisfatto il conseguente: $S(a, b)$.
Si può allora definire

$$a^{\mathcal{A}} = b^{\mathcal{A}} = 0, \qquad S^{\mathcal{A}} = \{(0, 0)\}$$

Affinché $\mathcal{B} \models \neg\varphi$, è necessario e sufficiente che

$$\mathcal{B} \models \forall x \exists y S(x, y), \quad \mathcal{B} \models \neg S(a, a), \quad \mathcal{B} \not\models S(a, b)$$

Si può allora definire

$$S^{\mathcal{B}} = \{(u, u + 1) \mid u \in \mathbb{C}\}, \qquad a^{\mathcal{B}} = b^{\mathcal{B}} = 0$$

Esercizio

Sia φ l'enunciato

$$\forall x\ (\neg R(c,x) \to \neg R(x,c)),$$

dove R è simbolo relazionale binario, c è simbolo di costante. Trovare, se esistono, un modello per φ il cui universo sia l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali e un modello per $\neg\varphi$ con esattamente 3 elementi.

Svolgimento

- Il modello per φ cercato è della forma $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, R^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$. È sufficiente fare in modo che il conseguente della implicazione sia vero per ogni valore associato a x. Basta allora porre, per esempio, $R^{\mathcal{A}} = \emptyset, c^{\mathcal{A}} = 0$
- Il modello per $\neg\varphi$ cercato è della forma $\mathcal{B} = (B, R^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$, dove B ha tre elementi, per esempio $B = \{0, 1, 2\}$, di cui uno sia l'interpretazione del simbolo di costante c, per esempio $c^{\mathcal{B}} = 0$. Affinché $\mathcal{B} \models \neg\varphi$, cioè $\mathcal{B} \not\models \varphi$, si deve definire $R^{\mathcal{B}}$ in modo che ci sia un valore, per esempio 1, che assegnato alla variabile x renda vera la premessa dell'implicazione e falsa la conseguenza, cioè $(0, 1) \notin R^{\mathcal{B}}, (1, 0) \in R^{\mathcal{B}}$.
  Si può quindi porre
  $$B = \{0, 1, 2\}, \quad R^{\mathcal{B}} = \{(1, 0)\}, \quad c^{\mathcal{B}} = 0$$

Esercizio

Sia φ l'enunciato

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(y, x) \wedge P(y)) \wedge \neg R(x, c)),$$

dove P è simbolo relazionale unario, R è simbolo relazionale binario, c è simbolo di costante. Trovare, se esistono, un modello per φ con esattamente 4 elementi e un modello per $\neg\varphi$ con esattamente 3 elementi.

Svolgimento

- Per l'enunciato φ, si cerca un modello della forma $\mathcal{A} = (A, P^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, dove $\#(A) = 4$, per esempio $A = \{0, 1, 2, 3\}$.
  È sufficiente che in $\mathcal{A}$ l'antecedente dell'implicazione risulti falso per ogni possibile valore assegnato alla variabile x, cioè $P^{\mathcal{A}} = \emptyset$.
  Pertanto basta definire:
  $$A = \{0, 1, 2, 3\}, \quad P^{\mathcal{A}} = \emptyset, \quad R^{\mathcal{A}} = \emptyset, c^{\mathcal{A}} = 0$$
- Per l'enunciato $\neg\varphi$, si cerca un modello della forma $\mathcal{B} = (B, P^{\mathcal{B}}, R^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$, dove $\#(B) = 3$, per esempio $B = \{0, 1, 2\}$. Si ponga, per esempio, $c^{\mathcal{B}} = 0$.
  Si vuole che esista un valore a che, assegnato alla variabile x, renda vero l'antecedente dell'implicazione (cioè tale valore deve appartenere a $P^{\mathcal{B}}$) e falso il conseguente. Poiché tale conseguente è una congiunzione, è sufficiente che sia reso falso il secondo congiungendo, cioè che $(a, 0) \in R^{\mathcal{B}}$.
  In definitiva, si può porre:
  $$B = \{0, 1, 2\}, \quad P^{\mathcal{B}} = \{0\}, \quad R^{\mathcal{B}} = \{(0, 0)\}, \quad c^{\mathcal{B}} = 0$$
  (allora il valore a di cui sopra è 0).

Esercizio

Sia φ l'enunciato

$$\forall x\ P(x) \wedge \exists x\ (Q(x) \rightarrow \neg P(x)) \rightarrow \forall x\ \neg Q(x)$$

Trovare, se esistono, un modello per φ con esattamente 4 elementi e un modello per $\neg\varphi$ con esattamente 3 elementi.

Svolgimento

- Per φ, si cerca un modello della forma $\mathcal{A} = (A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}})$, con $\#(A) = 4$, per esempio $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Poiché l'enunciato è un'implicazione, è sufficiente che $\mathcal{A}$ non ne soddisfi l'antecedente; poiché tale antecedente è una congiunzione, è sufficiente che $\mathcal{A}$ non ne soddisfi il primo congiungendo.
  Si può allora porre, per esempio:
  $$A = \{0, 1, 2, 3\}, \quad P^{\mathcal{A}} = \emptyset, \quad R^{\mathcal{A}} = \emptyset$$

Svolgimento (cont.)

- Per $\neg\varphi$, si cerca un modello della forma $\mathcal{B} = (B, P^{\mathcal{B}}, Q^{\mathcal{B}})$ tale che $\#(B) = 3$, per esempio $B = \{0, 1, 2\}$.
  La struttura $\mathcal{B}$ dev'essere tale che
  1. $\mathcal{B} \models \forall x P(x)$, cioè $P^{\mathcal{B}} = B$
  2. $\mathcal{B} \models \exists x(Q(x) \to \neg P(x))$, cioè deve esistere un valore $a \in B$ tale che o $a \notin Q^{\mathcal{B}}$ o $a \in P^{\mathcal{B}}$
  3. $\mathcal{B} \not\models \forall x \neg Q(x)$, cioè $Q^{\mathcal{B}} \neq \emptyset$

  Si osservi che la condizione (1) implica automaticamente anche la (2). Basta allora definire:

$$B = \{0, 1, 2\}, \quad P^{\mathcal{B}} = \{0, 1, 2\}, \quad Q^{\mathcal{B}} = \{0\}$$

Esercizio

Sia $L = \{f\}$, dove f è un simbolo funzionale unario. Si considerino le L-strutture

$$\mathcal{A} = (\mathbb{C}, f^{\mathcal{A}}), \qquad \mathcal{B} = (\mathbb{C}, f^{\mathcal{B}})$$

dove:

- $f^{\mathcal{A}}$ è la moltiplicazione per l'unità immaginaria i, cioè

$$f^{\mathcal{A}}(u) = iu, \quad \text{per ogni } u \in \mathbb{C}$$

- $f^{\mathcal{B}}$ è l'operazione di raddoppio, cioè

$$f^{\mathcal{B}}(u) = 2u, \quad \text{per ogni } u \in \mathbb{C}$$

Determinare, se esiste, un enunciato φ che distingua $\mathcal{A}$ da $\mathcal{B}$, cioè tale che

$$\mathcal{A} \models \varphi, \qquad \mathcal{B} \not\models \varphi$$

Svolgimento

Poiché $i^4 = 1$, ogni numero complesso moltiplicato quattro volte di seguito per i rimane invariato.
Invece raddoppiando quattro volte un numero, questo cambia, salvo che sia il numero 0.

Quindi, se φ è l'enunciato

$$\forall x \; f(f(f(f(x)))) = x$$

si ha che

$$\mathcal{A} \models \varphi, \qquad \mathcal{B} \not\models \varphi$$

Esercizio

Sia $\mathcal{L} = \{F\}$ un linguaggio del prim'ordine consistente d'un simbolo funzionale unario F. Siano Q l'insieme di tutti i quadrati del piano e R l'insieme di tutti i rettangoli del piano. Si considerino le $\mathcal{L}$-strutture seguenti:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Q} & = & (Q, F^{\mathcal{Q}}) \\ \mathcal{R} & = & (R, F^{\mathcal{R}}), \end{array}$$

dove $F^{\mathcal{Q}}, F^{\mathcal{R}}$ sono entrambe l'operazione di rotazione di una figura geometrica di $\frac{\pi}{4}$ rispetto al suo baricentro. Si trovi, se esiste, un $\mathcal{L}$-enunciato φ che distingua $\mathcal{Q}$ da $\mathcal{R}$, ovvero tale che $\mathcal{Q} \models \varphi, \mathcal{R} \not\models \varphi$.

Svolgimento

La rotazione di $\frac{\pi}{2}$ di un quadrato rispetto al suo baricentro lo lascia invariato.
Ciò invece non è vero per tutti i rettangoli (in effetti, nell'insieme dei rettangoli, tale proprietà vale esattamente per i quadrati).

Quindi, se φ è l'enunciato

$$\forall x\ F(F(x)) = x$$

si ha che

$$\mathcal{Q} \models \varphi, \qquad \mathcal{R} \not\models \varphi$$

Esercizio

Sia $\mathcal{L} = \{1, +, \cdot, \leq\}$. Interpretando i simboli di $\mathcal{L}$ nel modo usuale, determinare un enunciato φ che distingua le strutture

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} & = & (\mathbb{Q}, 1, +, \cdot, \leq) \\ \mathcal{B} & = & (\mathbb{R}_0^+, 1, +, \cdot, \leq) \end{array}$$

(dove $\mathbb{R}_0^+$ indica l'insieme dei numeri reali non negativi) cioè tale che $\mathcal{A} \models \varphi, \mathcal{B} \not\models \varphi$.

Svolgimento

In $\mathbb{Q}$ non esiste un numero che al quadrato faccia 2; un tale numero esiste in $\mathbb{R}$.

Quindi se φ è l'enunciato

$$\neg \exists x \; x \cdot x = 1 + 1$$

si ha che

$$\mathcal{A} \models \varphi, \qquad \mathcal{B} \not\models \varphi$$

Esercizio

Sia $\mathcal{L} = \{*\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove $*$ è un simbolo funzionale ternario. Si considerino le $\mathcal{L}$-strutture $\mathcal{A} = (A, *^{\mathcal{A}}), \mathcal{B} = (\mathbb{R}, *^{\mathcal{B}})$, dove:

- A è l'insieme dei punti dello piano euclideo e $*^{\mathcal{A}}$ è l'operazione che associa a ogni terna di punti il loro baricentro;
- $*^{\mathcal{B}}$ è l'operazione che a ogni terna (u, v, w) di numeri reali associa il numero $*^{\mathcal{B}}(u, v, w) = u + 2v - 3w$.

Determinare, se esiste, un enunciato φ che distingua $\mathcal{A}$ da $\mathcal{B}$, cioè tale che $\mathcal{A} \models \varphi, \mathcal{B} \not\models \varphi$.

Svolgimento

Data una terna di punti P_0, P_1, P_2 nel piano euclideo, con $P_0 = P_1 \neq P_2$, il loro baricentro è sempre diverso da P_0.
Invece esistono terne di numeri u, v, w con $u = v \neq w$ e $u + 2v - 3w = u$, perché se $u = v$ questa equazione diventa $2u = 3w$; una soluzione con $u = v \neq w$ è quindi $u = v = 3, w = 2$.

Quindi, se φ è l'enunciato

$$\neg \exists x \exists y (x \neq y \wedge *(x, x, y) = x)$$

si ha

$$\mathcal{A} \models \varphi, \qquad \mathcal{B} \not\models \varphi$$

Esercizio

Sia $\mathcal{L} = \{*\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove $*$ è un simbolo funzionale binario. Si considerino le $\mathcal{L}$-strutture $\mathcal{A} = (A, *^{\mathcal{A}}), \mathcal{B} = (B, *^{\mathcal{B}})$, dove:

- A è l'insieme dei punti dello spazio ordinario e $*^{\mathcal{A}}$ è l'operazione che associa a ogni coppia di punti il loro punto medio;
- B è l'insieme delle funzioni reali di variabile reale e $*^{\mathcal{B}}$ è l'operazione di differenza tra funzioni, definita da $(f *^{\mathcal{B}} g)(x) = f(x) - g(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Determinare, se esiste, un enunciato φ che distingua $\mathcal{A}$ da $\mathcal{B}$, cioè tale che $\mathcal{A} \models \varphi, \mathcal{B} \not\models \varphi$.

Svolgimento

Dati due punti distinti dello spazio ordinario, il loro punto medio è diverso da entrambi.
Invece l'insieme delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con l'operazione di differenza ha un elemento neutro a destra: la funzione costante nulla.

Quindi se φ è l'enunciato

$$\forall x \forall y (x \neq y \to x * y \neq x)$$

si ha che

$$\mathcal{A} \models \varphi, \qquad \mathcal{B} \not\models \varphi$$

Esercizio

Sia $\mathcal{L} = \{F\}$ un linguaggio del prim'ordine consistente d'un simbolo funzionale unario F. Siano $\mathbb{N}^*$ l'insieme dei numeri naturali positivi e $C^\infty(\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni reali di variabile reale derivabili infinite volte. Si considerino le $\mathcal{L}$-strutture seguenti:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} & = & (\mathbb{N}^*, F^\mathcal{A}) \\ \mathcal{B} & = & (C^\infty(\mathbb{R}), F^\mathcal{B}), \end{array}$$

dove

- $F^\mathcal{A}$ è l'operazione di raddoppio sui numeri (cioè $F^\mathcal{A}(n) = 2n$),
- $F^\mathcal{B}$ è l'operazione di derivazione sulle funzioni (cioè $F^\mathcal{B}(g) = g'$).

Si trovi, se esiste, un $\mathcal{L}$-enunciato φ che distingua $\mathcal{A}$ da $\mathcal{B}$, ovvero tale che $\mathcal{A} \models \varphi, \mathcal{B} \not\models \varphi$.

Svolgimento

Il doppio di un numero positivo è sempre differente dal numero di partenza.
Invece ci sono funzioni che sono uguali alla loro derivata (sono le funzioni esponenziali $x \mapsto ke^x$).

Quindi se φ è l'enunciato

$$\forall x \; F(x) \neq x$$

si a che

$$\mathcal{A} \models \varphi, \qquad \mathcal{B} \not\models \varphi$$

Definizioni

Sia φ un L-enunciato

- Se $\mathcal{A}$ è una L-struttura tale che $\mathcal{A} \models \varphi$, si dice che φ è *vero* in $\mathcal{A}$, o che $\mathcal{A}$ *soddisfa* φ, o che $\mathcal{A}$ è un *modello* di φ.
- Se esiste almeno un modello di φ (cioè, se esiste almeno una L-struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \models \varphi$) si dice che φ è *soddisfacibile*, o *consistente*.
- Se non esiste alcun modello di φ (cioè, se non esiste alcuna L-struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \models \varphi$) si dice che φ è *insoddisfacibile*, o *inconsistente*, o una *contraddizione*.
- Se ogni L-struttura è un modello di φ (cioè se per ogni L-struttura $\mathcal{A}$ si ha che $\mathcal{A} \models \varphi$) si dice che φ è *valido*, o una *tautologia*. Si scrive anche
$$\models \varphi$$

Definizioni

Le precedenti nozioni si estendono a *insiemi di enunciati*.

Sia Γ un insieme di enunciati

- Se $\mathcal{A}$ è una L-struttura tale che $\mathcal{A} \models \varphi$ per ogni $\varphi \in \Gamma$, si dice che $\mathcal{A}$ *soddisfa* Γ, o che $\mathcal{A}$ è un *modello* di Γ. Si scrive anche

$$\mathcal{A} \models \Gamma$$

- Se esiste almeno un modello di Γ, si dice che Γ è *soddisfacibile*, o *consistente*.
- Se non esiste alcun modello di Γ (cioè, se per ogni L-struttura $\mathcal{A}$ esiste un enunciato $\varphi \in \Gamma$ tale che $\mathcal{A} \not\models \varphi$), si dice che Γ è *insodddisfacibile*, o *inconsistente*.
- Se tutte le L-strutture soddisfano Γ, si dice che Γ è *valido*.

Osservazioni

- Se
$$\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$$
è un insieme *finito* di enunciati, allora Γ è soddisfacibile/insoddisfacibile/valido se e solo se la congiunzione
$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$$
è soddisfacibile/insoddisfacibile/valida.
- Se un enunciato della *logica proposizionale* è valido (o se è una contraddizione), c'è un numero finito di interpretazioni da controllare per verificarlo: esattamente 2^n se n è il numero di lettere distinte che occorrono nell'enunciato.
Invece, se un enunciato *del prim'ordine* è valido (o se è insoddisfacibile) se ne deve in generale verificare la verità (o la falsità) in tutte le infinite strutture del linguaggio.
- Per determinare se un enunciato φ del prim'ordine è soddisfacibile, basta trovare *una* struttura in cui sia vero; similmente, per verificare che un enunciato del prim'ordine non è valido, basta trovare *una* struttura in cui sia falso.

Definizione

Siano:

- L un linguaggio del prim'ordine
- Γ un insieme di L-enunciati
- φ un L-enunciato

Si dice che Γ *ha come conseguenza logica* φ (o che φ è *conseguenza logica* di Γ) se per ogni L-struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \models \Gamma$, si ha anche $\mathcal{A} \models \varphi$; cioè se:

ogni modello di Γ è modello anche di φ

Si denota

$$\Gamma \models \varphi$$

Conseguenza logica

- Se $\Gamma = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ è un insieme finito, anziché $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\} \models \varphi$, si può scrivere più semplicemente

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \models \varphi$$

- In particolare, se $\Gamma = \{\psi\}$ consiste di un solo elemento, la notazione diventa

$$\psi \models \varphi$$

- Si ha

$$\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi \qquad \text{se e solo se} \qquad \models \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \varphi$$

La notazione $\models$

Nota: Il simbolo $\models$ nella logica del prim'ordine è usato in tre modi differenti:

- $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ significa che la struttura $\mathcal{A}$ soddisfa la formula φ mediante l'assegnazione $x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n$ di valori alle variabili libere di φ.
  In particolare, se φ è un enunciato, ciò diventa $\mathcal{A} \models \varphi$.

  In questo uso, $\models$ è una relazione che coinvolge strutture, formule e assegnazioni.
- $\models \varphi$ significa che φ è un enunciato valido, o tautologia.

  In questo uso, $\models$ è una relazione sugli enunciati, cioè una proprietà che ogni singolo enunciato ha o non ha.
- $\Gamma \models \varphi$ significa che in ogni struttura che soddisfi tutti gli elementi dell'insieme di enunciati Γ, anche l'enunciato φ è soddisfatto.

  In questo uso, $\models$ è una relazione tra insiemi di enunciati e singoli enunciati: è la relazione di conseguenza logica.