grafi

venerdì 9 agosto 2024 14:03

GRAFO

Un grafo $G=(V,E)$ consiste in:

- un insieme V di vertici (o nodi)
- un insieme E di coppie di vertici, detti archi o spigoli: ogni arco connette vertici

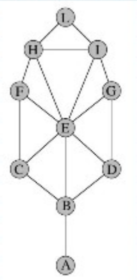
n = numero vertici m = numero spigoli

Dato un grafo $G=(V,E)$, se esiste un arco (x,y) in E, allora diciamo:

- l'arco (x,y) è incidente sia in x che in y
- x e y sono gli estremi dell'arco (x,y)
- se G è un grafo orientato, allora diciamo che l'arco (x,y) esce dal vertice x ed entra nel vertice y: inoltre diciamo che y è adiacente a x, ma x non è adiacente a y
- se G è un grafo non orientato, allora diciamo che x ed y sono adiacenti

Grado:

il grado di un vertice, indicato con δ è pari al numero di archi incidenti ad esso



esempio: I ha grado 4: $\delta(I)=4$

Sia G un grafo orientato:

- il grado in ingresso di un vertice v che è pari al numero di archi che entrano in v e si indica con $\delta_{in}(v)$
- il grado in uscita di un vertice v che è pari al numero di archi che escono in v e si indica con $\delta_{out}(v)$
- $\delta(v)=\delta_{in}(v)+\delta_{out}(v)$ è il grado del vertice v

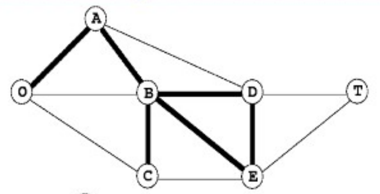
cammini e cicli:

- un cammino in un grafo è una sequenza di vertici tali che ogni coppia di vertici consecutivi nella sequenza (v_i, v_{i+1}) è connessa da un arco e tutti gli archi (v_i, v_{i+1}) sono distinti tra loro
- un cammino è detto semplice se tutti i vertici, ad eccezione al più del primo e dell'ultimo, sono distinti
- un cammino semplice in cui il primo e l'ultimo vertice sono coincidenti è detto ciclo

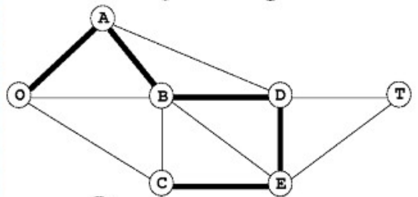
grafi etichettati:

I grafi etichettati sono grafi in cui ai vertici sono associati etichette mentre agli archi possono essere associati dei valori numerici detti pesi

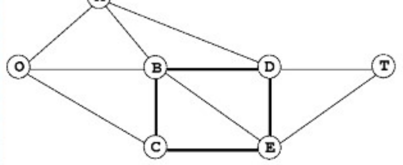
cammini e cicli (grafo non orientato):



(0,A,B,D,E,B,C) è un cammino



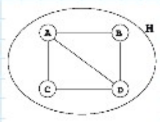
(0,A,B,D,E,C) è un cammino semplice



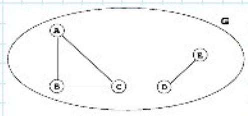
(B,D,E,C,B) e' un cammino semplice ed anche un ciclo

grafi non orientati: connessione

Un grafo non orientato $G=(V,E)$ è connesso se e solo se per ogni coppia (v,w) di vertici di G esiste un cammino che li unisce



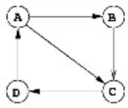
Un grafo connesso



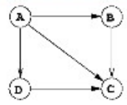
Un grafo non connesso

grafi orientati: connessione

Un grafo orientato G è fortemente connesso se e solo se esiste un cammino da ogni vertice v di G ad ogni vertice v' di G con $v' \neq v$



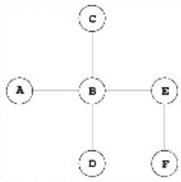
Un grafo orientato fortemente connesso



Un grafo orientato non fortemente connesso (nessun cammino da B, C, D ad A)

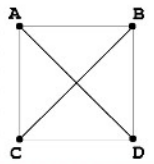
alberi liberi:

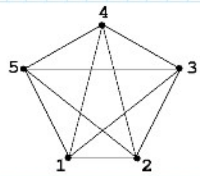
- Un albero libero è un grafo non orientato, connesso e senza cicli.
- Un albero libero si distingue da un albero radicato in quanto in un albero libero non esiste la radice.
- Se rimuoviamo un arco da un albero libero, il grafo risultante è non connesso
- se n è il numero di vertici di un albero libero, allora i suoi archi sono $n-1$



grafi completi non orientati:

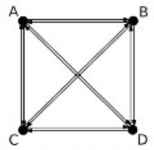
Un grafo non orientato G, in cui ogni vertice è connesso da un arco ad ognuno degli altri $n-1$ vertici, è detto grafo completo.
Un grafo non orientato completo con n vertici ha esattamente $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ archi.





grafi completi orientati:

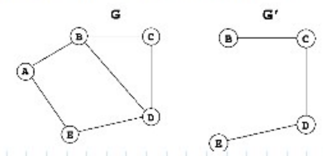
Un grafo orientato G in cui ogni vertice è connesso da un arco ad ognuno dei restanti $n-1$ vertici è detto completo.
Un grafo completo orientato ha esattamente $n \cdot (n-1)$ archi.



Sottografo:

Un sottografo di un grafo $G=(V,E)$ è un grafo $G'=(V',E')$ tale che $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.
Un sottografo G' è detto un sottografo proprio di G se G' non coincide con G

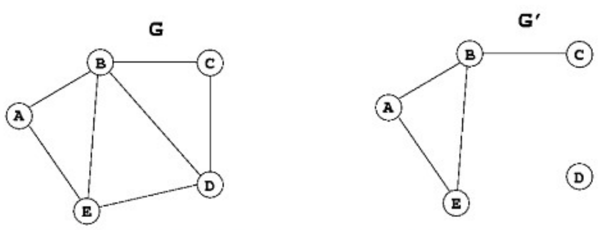
Esempio: un grafo *G* e un sottografo proprio *G'* di *G*



Sottografo di ricoprimento
(spanning graph)

Un sottografo *G'=(V',E')* di un grafo *G=(V,E)* tale che *V'=V* è detto *sottografo di ricoprimento* di *G*

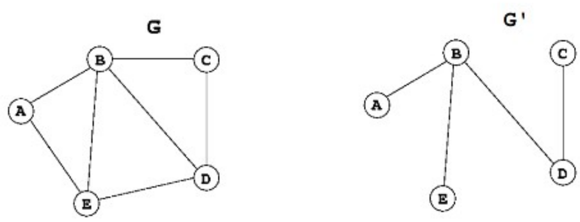
Esempio: *G'* un sottografo di ricoprimento del grafo *G*



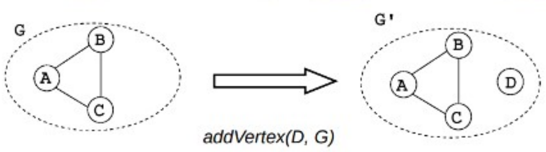
Albero di ricoprimento
(spanning tree)

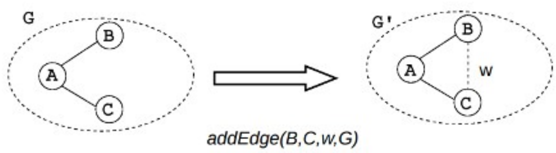
Un sottografo di ricoprimento *G'=(V,E')* di un grafo *G=(V,E)* **tale che G' è un albero libero** è detto *albero di ricoprimento* di *G*

Esempio: *G'* un albero di ricoprimento del grafo *G*

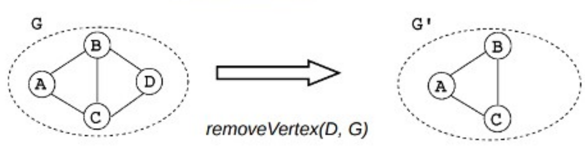


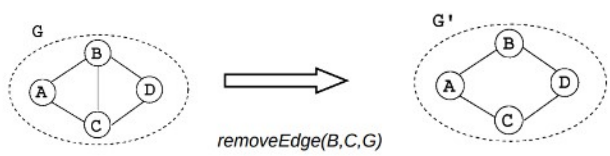
Operazioni su grafi non orientati e non etichettati





Operazioni su grafi non orientati e non etichettati



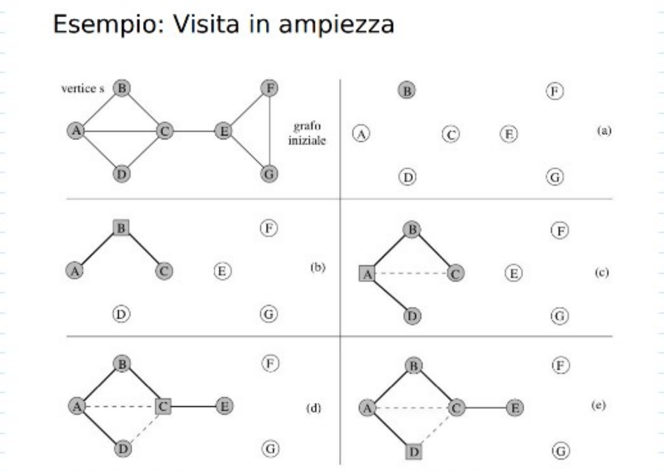


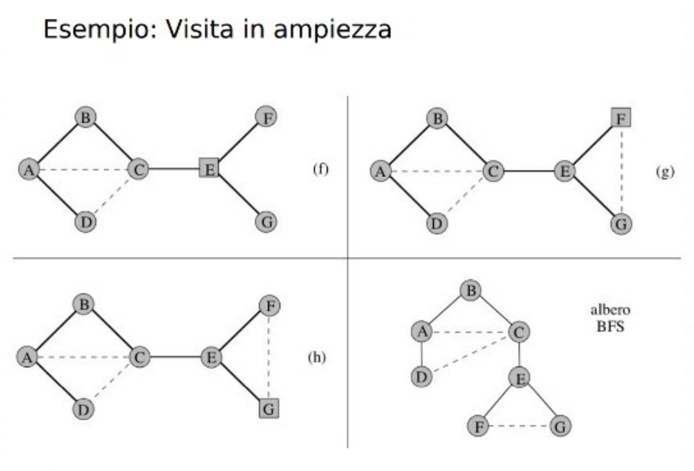
Visita di un grafo:

- visita: consente di esaminare tutti i vertici e gli archi di un grafo in modo sistematico (sistematico: seguendo le relazioni di adiacenza dei vertici)
- La visita parte da un vertice sorgente s
- si assume che ogni vertice di G sia raggiungibile da s
- un vertice viene marcato quando viene incontrato per la prima volta
- consideriamo grafi non orientati connessi

BFS: Breadth-First search

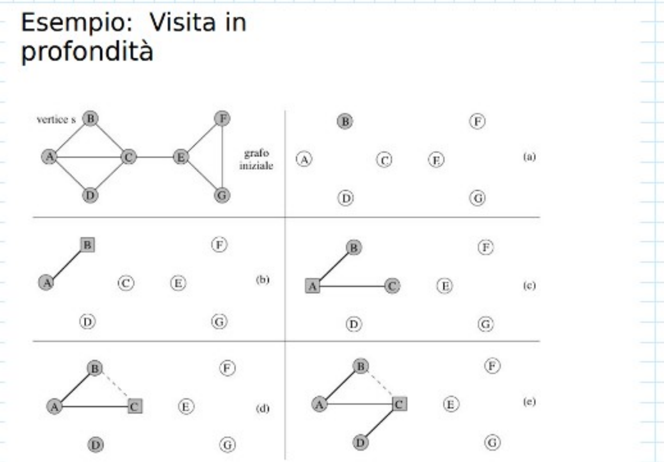
corrisponde ad una visita a livelli di un albero; la visita procede in ampiezza sul grafo a partire dai vertici incontrati. Utilizza come struttura una coda che registra l'ordine in cui i vertici sono visitati dall'algoritmo.

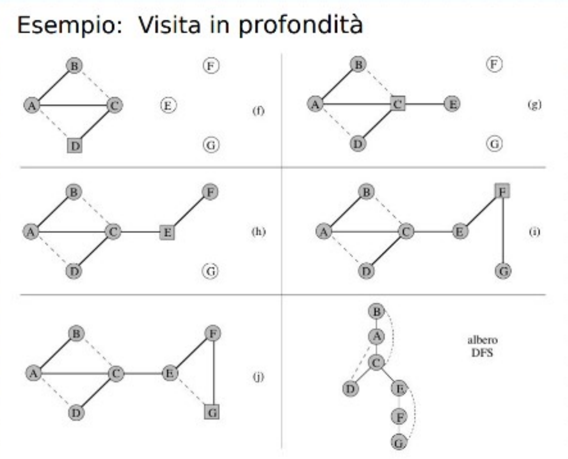




DFS: Depth-First search

corrisponde alla visita in profondità di un albero. Utilizza uno stack (al posto della coda)



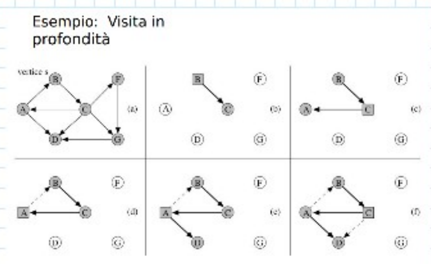


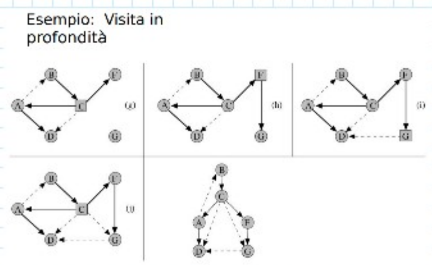
per entrambi i casi: complessità → liste di adiacenza: $\Theta(n+m)$, matrice di adiacenza: $\Theta(n^2)$

visite su grafi orientati:

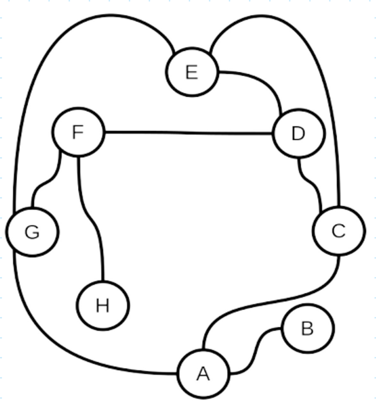
Visite in ampiezza e profondità di grafi orientati

- Le visite possono essere definite anche su grafi orientati
- L'unica differenza è che nell'operazione di visita dei vicini consideriamo solo gli archi uscenti dal vertice in esame





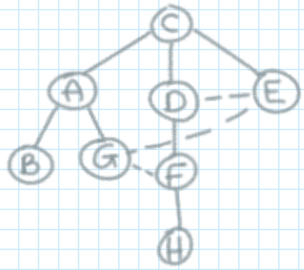
esercizio da aulaweb



1) **[1/2 del punteggio]** Si illustrino mediante disegni o altra modalità schematica e chiara i vari passaggi di una visita DFS di tale grafo che parta dal nodo etichettato con **B** con creazione dell'albero di ricoprimento; si disegni l'albero di ricoprimento risultante.

2) **[1/2 del punteggio]** Si illustrino mediante disegni o altra modalità schematica e chiara i vari passaggi di una visita BFS di tale grafo che parta dal nodo etichettato con **C** con creazione dell'albero di ricoprimento; si disegni l'albero di ricoprimento risultante.

2)



~~C~~ ~~A~~ ~~D~~ ~~E~~ ~~B~~ ~~G~~ ~~F~~

1)