ESAME 7-9-2023

esercizio 1)

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -6 \leq x \leq 6\}$

determinare la cardinalità:

1) $R = A/\sim_1$, dove $\sim_1$ è la relazione d'equivalenza diagonale, cioè $x \sim_1 y \leftrightarrow x = y$

le classi di equivalenza sono costituite da singoletti,

$R = \{\{-6\}, \{-5\}, \{-4\}, \{-3\}, \{-2\}, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$

quindi $|R| = 13$

2) $S = A/\sim_2$, dove $\sim_2$ è la relazione d'equivalenza data da $x \sim_2 y \leftrightarrow x - y = 4k, k \in \mathbb{Z}$

Abbiamo 4 classi di equivalenza distinte, corrispondenti alle possibili classi di resto modulo 4.

Quindi $|S| = 4$

3) $T = A/\sim_3$, dove $\sim_3$ è la relazione d'equivalenza data da $x \sim_3 y \leftrightarrow x^2 = y^2$

$x \sim_3 y \leftrightarrow x^2 = y^2 \leftrightarrow x = \pm y$

le classi di equivalenza sono quindi

$T = \{\{0\}, \{1, -1\}, \{2, -2\}, \{3, -3\}, \{4, -4\}, \{5, -5\}, \{6, -6\}\}$

quindi $|T| = 7$

4) $V = A \times A$

$|V| = |A \times A| = |A| \times |A| = 13 \cdot 13 = 169$

$$\begin{array}{r} 13 \times \\ 13 = \\ \hline 39 \\ 13 \\ \hline 169 \end{array}$$

quindi $|V| = 169$

esercizio 2)

Sia $f: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ l'applicazione data da $f(x,y) = 44x + 21y$

1) Determinare se f è iniettiva e/o surgettiva
2) Determinare $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(44)$

1) MCD(44,21)

$44 = 2 \cdot 21 + 2$
$21 = 10 \cdot 2 + 1$
$10 = 10 \cdot 1 + 0$

f è surgettiva in quanto $MCD(44,21) = 1$

La funzione f non è iniettiva, si consideri ad esempio $f(21,-44) = 0 = f(0,0)$

2) $f^{-1}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 44x + 21y = 0\}$

Una soluzione particolare per l'equazione diofantea $44x + 21y = 0$ è data da $(x_0, y_0) = (0,0)$.

pertanto $f^{-1}(0) = \{(21k, -44k) : k \in \mathbb{Z}\}$

$f^{-1}(44)$

Una soluzione particolare dell'equazione diofantea $44x + 21y = 44$ è data da $(x_0, y_0) = (1,0)$.

Quindi $f^{-1}(44) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 44x + 21y = 44\} =$
$= \{(1 + 21k, -44k) : k \in \mathbb{Z}\}$

esercizio 3)

Sia dato il numero complesso $z = ((2i+1)(3+i) - 8i^5)^8$

Scrivere z in forma $a+ib$ con $a,b \in \mathbb{R}$, in forma trigonometrica, e in forma esponenziale

$(2i+1)(3+i) - 8i^5 = 6i + 2i^2 + 3 + i - 8i = 6i - 2 + 3 + i - 8i =$
$= 1 - i$

Pertanto $z = (1-i)^8$

→ forma trigonometrica

$|1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

argomento ϑ di $1-i$ è dato da $\begin{cases} \cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\vartheta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

cioè $\vartheta = -\frac{\pi}{4}$ o $\vartheta = \frac{7}{4}\pi$

Possiamo scrivere $\boxed{1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right)}$

→ forma esponenziale

Dalla formula di De Moivre ricaviamo

$$z=(1-i)^8=(\sqrt{2})^8\left(\cos\left(8\cdot\frac{7}{4}\pi\right)+i\sin\left(8\cdot\frac{7}{4}\pi\right)\right)$$
$$=16\left(\cos(14\pi)+i\sin(14\pi)\right)$$
$$=16(\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)$$
$$=16e^{2\pi i}$$
$$=\underline{16}.$$

esercizio 4)

Si consideri $\mathbb{Z}_{28}$

1) Calcolare $\overline{9}^{147}$

2) Determinare l'ordine dei seguenti elementi del gruppo degli elementi invertibili $(U(\mathbb{Z}_{28}),\cdot,\overline{1})$:

$$\overline{9},\ \overline{3},\ \overline{2}$$

per prima cosa calcoliamo $\varphi(28)$.

Teorema di Eulero

dato $x\in\mathbb{Z}$ tale che $MCD(x,28)=1$ allora

$$\overline{x}^{12}=\overline{1} \text{ in } \mathbb{Z}_{28}$$

1)

Consideriamo la divisione euclidea $147=12\cdot12+3$, quindi

$$\overline{9}^{147}=\overline{9}^{12\cdot12+3}=(\overline{9}^{12})^{12}\cdot\overline{9}^{3}=\overline{1}\cdot\overline{9}^{3}=\overline{9}^{2}\cdot\overline{9}=\overline{81}\cdot\overline{9}=$$
$$=\overline{25}\cdot\overline{9}=\overline{225}=\overline{1}$$

2) Ricordiamo che l'ordine moltiplicativo di un elemento in $U(\mathbb{Z}_{28})$ dev'essere un divisore dell'ordine $|U(\mathbb{Z}_{28})|=\varphi(28)=12$

$$\overline{9}^2=\overline{25} \quad e \quad \overline{9}^3=\overline{1}\ ,\ ord(\overline{9})=3$$

Calcoliamo soltanto le potenze $\overline{3}^d$ con $d|12$

$$\overline{3}^2=9$$
$$\overline{3}^3=\overline{27}=-\overline{1}$$
$$\overline{3}^4=(\overline{3}^2)^2=\overline{9}^2=\overline{81}=\overline{25}$$
$$\overline{3}^6=(\overline{3}^3)^2=(-\overline{1})^2=1$$

pertanto $ord(\overline{3})=6$

ESAME 19-7-2023

esercizio 1)

Si considerino le seguenti funzioni

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto x^4+1 \qquad\qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^4+1$$

1) Determinare se f è iniettiva e/o suriettiva
2) Calcolare $f^{-1}(0)$
3) Determinare se g è iniettiva e/o suriettiva
4) Calcolare $g^{-1}(-1)$

1)

f non è iniettiva siccome $f(1) = 2 = f(-1)$

f è surgettiva, in quanto dato $c \in \mathbb{C}$ per il teorema fondamentale dell'algebra esiste sempre $x \in \mathbb{C}$ tale che $x^4+1-c=0$, tale che $f(x)=c$

2)

$f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{C} \mid x^4+1=0\} = \{x \in \mathbb{C} \mid x^4=-1\}$

quindi $f^{-1}(0)$ è l'insieme delle radici quarte complesse di $z=-1$

Abbiamo $|z|=1$ e $\arg(z)=\pi$, pertanto le radici quarte z_k (per $k=0,1,2,3$) di z sono date dalla formula

$$z_k = \sqrt[4]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)$$

Abbiamo quindi

$$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$f^{-1}(0) = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$$

3) g non è iniettiva siccome $g(1)=2=g(-1)$

g non è suriettiva in quanto non esiste $x \in \mathbb{R}$ per cui $x^4+1=0$, quindi $g^{-1}(0)=\emptyset$

4) $g^{-1}(1)=\{x \in \mathbb{C} \mid x^4+1=1\}=\{x \in \mathbb{C} \mid x^4=0\}=\{0\}$

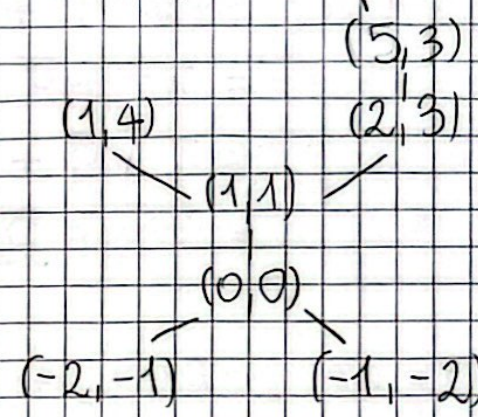
esercizio 2)

$A=\{(-1,-2),(-2,-1),(0,0),(1,1),(1,4),(2,3),(5,3)\}$

1) Si consideri A come sottoinsieme del poset $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \leq_x \leq)$ e si determino massimo, minimo, estremo inferiore e estremo superiore di A

2) Si consideri A come sottoinsieme del poset $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \text{lex})$ e si determino max, min, estremo inferiore e superiore

1) diagramma di Hasse poset $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \leq_x \leq)$



- A ha due elementi minimali $(-2,-1)$ e $(-1,-2)$, non confrontabili, quindi A non ammette minimo
- A ha due elementi massimali $(1,4)$ e $(5,3)$, non confrontabili, quindi A non ammette massimo
- L'insieme dei maggioranti di A è $\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : x\geq 5 \text{ e } y\geq 4\}$, che ha minimo $(5,4)$
- L'insieme dei minoranti è $\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : x\leq -2 \text{ e } y\leq -2\}$ che ha massimo $(-2,-2)$

Quindi $\nexists \max A$, $\nexists \min A$, $\sup A=(5,4)$, $\inf A=(-2,-2)$

2) $(\mathbb{Z},\leq)$ è totalmente ordinato, quindi anche $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \text{lex})$ Pertanto anche A è totalmente ordinato

$(-2,-1)\leq(-1,-2)\leq(0,0)\leq(1,1)\leq(1,4)\leq(2,3)\leq(5,3)$

Quindi $\min A=\inf A=(-2,-1)$ e $\max A=\sup A=(5,3)$

esercizio 3)

Semplificare la seguente espressione in $\mathbb{Z}_{36}$

$$\overline{7}^{24} + \overline{3}^{4} + \overline{2} \cdot \overline{13}^{13}$$

Teorema di Eulero: se $\overline{x}$ è invertibile in $\mathbb{Z}_n$ allora $\overline{x}^{\varphi(n)} = \overline{1}$, dove $\varphi(n)$ è la funzione di Eulero.

$\varphi(36) = \varphi(4)\varphi(9) = 2 \cdot 6 = 12$

$36 = 2^2 \cdot 3^2 \quad \varphi(36) = \varphi(2^2) \cdot \varphi(3^2) = (2^2 - 2^1) \cdot (3^2 - 3^1) = 2 \cdot 6 = 12$

$\overline{x}^{12} = \overline{1}$ per ogni $\overline{x}$ invertibile in $\mathbb{Z}_{36}$

$\overline{x}$ è invertibile in $\mathbb{Z}_n$ se e soltanto se $MCD(x,n) = 1$

$MCD(7,36) = MCD(13,36) = 1$

$$\begin{aligned}
\overline{7}^{24} + \overline{3}^{4} + \overline{2} \cdot \overline{13}^{13} &= (\overline{7}^{12})^2 + \overline{81} + \overline{2} \cdot \overline{13}^{12} \cdot \overline{13} \\
&= \overline{1}^2 + \overline{9} + \overline{2} \cdot \overline{1} \cdot \overline{13} \\
&= \overline{1} + \overline{9} + \overline{26} \\
&= \overline{36} = \underline{\overline{0}}
\end{aligned}$$

esercizio 4)

Si consideri la seguente funzione

$$\boxed{\begin{aligned} f : \mathbb{Z}_{21} &\to \mathbb{Z}_{21} \\ \overline{x} &\mapsto \overline{2x+1} \end{aligned}}$$

1) Determinare se f è iniettiva e/o surgettiva
2) Trovare l'inversa di f nel monoide $(X^X, \circ, Id)$, dove $X = \mathbb{Z}_{21}$

$\longrightarrow \overline{2}^{-1} = \overline{11}$ in $\mathbb{Z}_{21}$ infatti $\overline{2} \cdot \overline{11} = \overline{22} = \overline{1}$

1) <u>iniettività</u>

Siano $\overline{x}, \overline{a} \in \mathbb{Z}_{21}$ tali che $f(\overline{x}) = f(\overline{a})$, cioè $\overline{2x+1} = \overline{2a+1}$. Sottraiamo $\overline{1}$ ad entrambi i membri per $\overline{11} \in \mathbb{Z}_{21}$, che è l'inverso di $\overline{2}$, abbiamo $\overline{x} = \overline{a}$. Pertanto f è iniettiva

<u>surgettività</u>

Sia $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{21}$. Ci chiediamo se esiste $\overline{x} \in \mathbb{Z}_{21}$ tale che $f(\overline{x}) = \overline{a}$, cioè tale che $\overline{2x+1} = \overline{a}$

Sottraiamo $\overline{1}$

$$\overline{2x+1} = \overline{a}$$
$$\overline{2x} = \overline{a} - \overline{1}$$

moltiplichiamo per $\overline{2}^{-1} = \overline{11}$

$$\overline{x} = \overline{11} \cdot \overline{a} - \overline{11}$$

Quindi $f(\overline{x}) = \overline{a}$, cioè f è surgettiva

2) L'inversa di f è la funzione

$$\boxed{\begin{aligned} g: \mathbb{Z}_{21} &\to \mathbb{Z}_{21} \\ \overline{x} &\mapsto \overline{11} \cdot \overline{x} - \overline{11} \end{aligned}}$$

Verifichiamo che $f \circ g = Id_X$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(\overline{x}) &= f(g(\overline{x})) \\ &= f(\overline{11} \cdot \overline{x} - \overline{11}) \\ &= \overline{2}(\overline{11} \cdot \overline{x} - \overline{11}) + \overline{1} \\ &= \overline{x} - \overline{22} + \overline{1} \\ &= \overline{x} - \overline{21} \\ &= \overline{x} \end{aligned}$$

$g \circ f = Id_X$ è analoga

ESAME 28-6-2023

esercizio 1)

$A = \{f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5\}$, $B\{f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$ iniettiva$\}$

$C = \{f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5 \mid f(\bar{0}) = f(\bar{1})\}$

Calcolare la cardinalità di $A \cap B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $A \times B$

Intanto calcoliamo la cardinalità di A, B e C

$|A| = 5^5 = 3125$

$|B| = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$|C| = 5^4 = 625$

1) $A \cap B$ Siccome $B \subseteq A$, abbiamo $|A \cap B| = |B| = 120$

2) $B \cap C$

$B \cap C = \{f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5 \mid f$ è iniettiva, $f(\bar{0}) = f(\bar{1})\}$

Siccome una funzione f tale che $f(\bar{0}) = f(\bar{1})$ è necessariamente non iniettiva, abbiamo che $B \cap C = \emptyset$. Pertanto $|B \cap C| = 0$

3) $B \cup C$

$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C| = 120 + 625 - 0 = 745$

4) $A \times B$

$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 3125 \cdot 120 = 375000$

esercizio 2)

Sia $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ l'applicazione data da $f(x,y) = 18x - 27y$

1) Determinare se f è iniettiva e/o surgettiva
2) Determinare $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(3)$, $f^{-1}(9)$

L'equazione diofantea $ax + by = c$ ha soluzioni intere se $MCD(a,b) \mid c$.

$MCD(18, 27) = 9 \to 9 \mid c$

1) f non è surgettiva in quanto $f^{-1}(1) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 18x - 27y = 1\} = \emptyset$

f non è iniettiva perché $f(27,18) = 0 = f(0,0)$

2) $f^{-1}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 18x - 27y = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 2x - 3y = 0\}$

$2x - 3y = 0$

$(x_0, y_0) = (0,0)$

$f^{-1}(0) = \{(-3k, -2k) : k \in \mathbb{Z}\}$

- $f^{-1}(3)$ Siccome $9 \nmid 3$, l'equazione diofantea $18x - 27y = 3$ non ha soluzioni e quindi $f^{-1}(3) = \emptyset$

- $f^{-1}(9) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 18x - 27y = 9\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 2x - 3y = 1\}$

$2x - 3y = 1$

$(x_0, y_0) = (-1, -1)$

$f^{-1}(9) = \{(-1-3k, -1-2k) : k \in \mathbb{Z}\}$

esercizio 3)

Si consideri l'insieme $\mathbb{C}$ dotato della seguente relazione d'ordine:

$$z \lhd w \leftrightarrow (\Re(z) \leq \Re(w) \text{ e } F(z) \leq F(w))$$

dove $\Re(-)$ denota la parte reale e $F(-)$ quella immaginaria

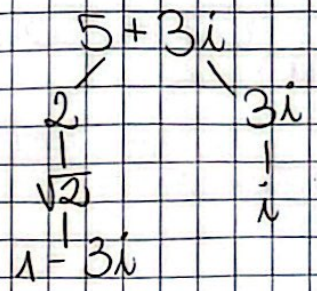
Sia $A = \{i, 2, \sqrt{2}, 5+3i, 3i, 1-3i\} \subseteq \mathbb{C}$

Si determinino max, min, elementi minimali e massimali, estremo inferiore e superiore di A nel POSET $(\mathbb{C}, \lhd)$

$$a + ib \in \mathbb{C} \leftrightarrow (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$

L'ordine $\lhd$ coincide con l'ordine prodotto $\leq \times \leq$

Diagramma di Hasse



- A ha un massimo di $5+3i$, che è l'unico elemento massimale, e coincide con l'estremo superiore
- Ci sono due elementi minimali non confrontabili $1-3i$ e i, quindi A non ammette minimo
- L'insieme dei minoranti di A è dato da

$\{z = a + ib \in \mathbb{C} \mid (z \lhd 1-3i) \text{ e } (z \lhd i)\} =$

$\{z = a + ib \in \mathbb{C} \mid (a \leq 0) \text{ e } (b \leq -3)\}$

tale insieme ha un massimo in $0 - 3i = -3i$ che è l'estremo inferiore

→ Quindi $\max A = \sup A = 5+3i$ $\quad \nexists \min A \quad \inf A = -3i$

esercizio 4)

Si consideri $\mathbb{Z}_{24}$

1) Calcolare $\overline{11}^{2025}$
2) Determinare l'ordine dei seguenti elementi del gruppo degli elementi invertibili $(U(\mathbb{Z}_{24}), \cdot, \overline{1})$

$$\overline{1}, \overline{7}, \overline{11}, \overline{13}$$

$\varphi(24) = 8$, dato $x \in \mathbb{Z}$ tale che $MCD(x, 24) = 1$ allora $\overline{x}^8 = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_{24}$

1)

divisione euclidea $2025 = 253 \cdot 8 + 1$, quindi

$$\longrightarrow \overline{11}^{1025} = \overline{11}^{253 \cdot 8 + 1} = (\overline{11}^8)^{253} \cdot \overline{11}^1 = \overline{1} \cdot \overline{11}^1 = \overline{11}$$

2)

l'ordine moltiplicativo di un elemento $\overline{x}$ in $U(\mathbb{Z}_{24})$ dev'essere un divisore dell'ordine

$$|U(\mathbb{Z}_{24})| = \varphi(24) = 8.$$

Pertanto, calcoliamo solo le potenze $\overline{x}^d$ con $d = 1, 2, 4, 8$

- $\overline{1}$ è l'elemento neutro del gruppo $U(\mathbb{Z}_{24})$, quindi $ord(\overline{1}) = 1$
- Calcoliamo $\overline{7}^2 = \overline{49} = \overline{48} + \overline{1} = \overline{1}$, pertanto abbiamo $ord(\overline{7}) = 2$
- Calcoliamo $\overline{11}^2 = \overline{121} = \overline{120} + \overline{1} = \overline{1}$, pertanto abbiamo $ord(\overline{11}) = 2$

  Calcoliamo $\overline{13}^2 = \overline{169} = \overline{168} + \overline{1} = \overline{1}$, pertanto abbiamo $ord(\overline{13}) = 2$

ESAME 14-2-2023

esercizio 1)

$A = \{f: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \text{ iniettiva}\}$ $B = \{f: \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_6 \text{ iniettiva}\}$

$C = \{f: \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_6 \mid f(\bar{0}) = \bar{0}\}$

Calcolare la cardinalità di $A \cap B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $\mathcal{P}(C)$

→ Intanto calcoliamo la cardinalità di A, B e C

$|\mathbb{Z}_2| = 2$ $|\mathbb{Z}_6| = 6$

$|B| = |\mathbb{Z}_6| \cdot (|\mathbb{Z}_6| - 1) = 6 \cdot 5 = 30$

$A = \emptyset$ quindi $|A| = 0$

$C = f: \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_6$ tale che $f(\bar{0}) = \bar{0}$

l'elemento $\bar{0}$ ha già un'immagine e l'immagine di $\bar{1} \in \mathbb{Z}_2$ può essere scelta uno per ciascun elemento di $\mathbb{Z}_6$

$|C| = 6$

- $A \cap B$

$A = \emptyset$, quindi $A \cap B = \emptyset$ e $|A \cap B| = 0$

- $B \cap C$

$B \cap C = \{f: \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_6 \mid f \text{ è iniettiva}, f(\bar{0}) = \bar{0}\}$

immagine di $\bar{0}$ già fissata, l'immagine di $\bar{1}$ tutti elementi di $\mathbb{Z}_6$ tranne $\bar{0}$ (se no non sarebbe iniettiva)

$|B \cap C| = 5$

- $B \cup C$

$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C| = 30 + 6 - 5 = 31$

- $\mathcal{P}(C)$

$|\mathcal{P}(C)| = 2^{|C|} = 2^6 = 64$

esercizio 2)

$$\boxed{\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto x^2 + 4x \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + 4x \end{aligned}}$$

1) Determinare se f è iniettiva e/o suriettiva
2) Calcolare $f^{-1}(0)$ e $f^{-1}(-5)$
3) Determinare se g è iniettiva e/o suriettiva
4) Calcolare $g^{-1}(0)$ e $g^{-1}(-5)$

1) f non è iniettiva in quanto $f(-4)=(-4)^2+4\cdot(-4)=16-16=0=f(0)$

f è suriettiva se per ogni $c\in\mathbb{C}$ esiste $x\in\mathbb{C}$ tale che $f(x)=c$, cioè $x^2+4x=c$. Un tale x esiste sempre in quanto l'equazione $x^2+4x-c=0$ ha sempre soluzioni in $\mathbb{C}$

2)

- Abbiamo $f^{-1}(0)=\{x\in\mathbb{C} \mid f(x)=0\}=\{x\in\mathbb{C} \mid x^2+4x=0\}$

  $x^2+4x = x(x+4)$ e le soluzioni sono $x=0$ e $x=-4$, quindi

  $$f^{-1}(0)=\{0,-4\}$$

- Analogamente

  $f^{-1}(-5)=\{x\in\mathbb{C} \mid x^2+4x=-5\}=\{x\in\mathbb{C} \mid x^2+4x+5=0\}$

  $x^2+4x+5=0$

  $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\cdot5=16-20=-4$

  Le radici quadrate complesse δ_1,δ_2 di -4 sono $\delta_1=2i$ e $\delta_2=-2i$

  Le soluzioni di $x^2+4x+5=0$ sono

  $$w_1=\frac{-b+\delta_1}{2a}=\frac{-4+2i}{2}=-2+i \qquad w_2=\frac{-4-2i}{2}=-2-i$$

  Quindi $f^{-1}(-5)=\{-2+i,-2-i\}$

3) g non è iniettiva in quanto
$g(-4)=(-4)^2+4\cdot-4)=16-16=0=g(0)$

g non è suriettiva non esiste nessuna $x\in\mathbb{R}$ tale che $g(x)=-5$ siccome le soluzioni di x^2+4x+5 non sono reali

4)

- $g^{-1}(0)=\{x\in\mathbb{C} \mid x^2+4x=0\}=\{0,-4\}$
- $g^{-1}(-5)=\{x\in\mathbb{C} \mid x^2+4x=-5\}=\emptyset$ perchè i risultati dell'equazione non sono reali

esercizio 3)

$$f: \mathbb{Z}_{13}\times \to \mathbb{Z}_{39} \to \mathbb{Z}_{13}\times\mathbb{Z}_{39}$$
$$(\bar{x},\bar{y}) \longmapsto (\bar{5}\cdot\bar{x},\bar{5}\cdot\bar{y})$$

1) Determinare se f è iniettiva o/e suriettiva
2) Trovare l'inversa di f nel monoide $(X^X, \circ, Id_X)$ dove $X=\mathbb{Z}_{13}\times\mathbb{Z}_{39}$

MCD(5,13)

$13 = 2 \cdot 5 + 3$
$5 = 1 \cdot 3 + 2$
$3 = 1 \cdot 2 + 1$
$2 = 2 \cdot 1 + 0$

MCD(5,39)

$39 = 7 \cdot 5 + 4$
$5 = 1 \cdot 4 + 1$
$4 = 4 \cdot 1 + 0$

$MCD(5,13) = MCD(5,39) = 1$

bezout di $(5,13) = 1$

$1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (5 - 3 \cdot 1) \cdot 1 = 3 - 5 + 3 = -5 + 3 \cdot 2 =$
$= -5 + (13 - 5 \cdot 2) \cdot 2 = -5 + 13 \cdot 2 - 5 \cdot 4 =$
$= 13 \cdot \underline{2} - 5 \cdot \underline{5}$

bezout di $(5,39) = 1$

$1 = 5 - 4 \cdot 1 = 5 - (39 - 5 \cdot 7) \cdot 1 = 5 - 39 + 5 \cdot 7 =$
$= 5 \cdot \underline{8} - 39 \cdot \underline{1}$

1) • iniettività

Siano $(\bar{x}, \bar{y}), (\bar{a}, \bar{b}) \in X$ tali che $f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{a}, \bar{b})$, cioè $(\bar{5} \cdot \bar{x}, \bar{5} \cdot \bar{y}) = (\bar{5} \cdot \bar{a}, \bar{5} \cdot \bar{b})$

Moltiplicando la prima componente per $\bar{8} \in \mathbb{Z}_{13}$ e la seconda componente in $\bar{8} \in \mathbb{Z}_{39}$

$(\bar{8} \cdot \bar{5} \cdot \bar{x}, \bar{8} \cdot \bar{5} \cdot \bar{y}) = (\bar{8} \cdot \bar{5} \cdot \bar{a}, \bar{8} \cdot \bar{5} \cdot \bar{b})$

Quindi siccome $\bar{5} \cdot \bar{8} = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_{13}$ e $\bar{1} = \bar{5} \cdot \bar{8}$ in $\mathbb{Z}_{39}$ si ha $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{a}, \bar{b})$, quindi è iniettiva

COME TROVARE mod

$x \bmod n = r$ → resto della divisione di x e n

esempio $x = 17$ e $n = 5$, $17 \bmod 5 = 2$

• surgettività

Sia $(\bar{a}, \bar{b}) \in X$. Scegliamo $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{8} \cdot \bar{a}, \bar{8} \cdot \bar{b})$

$f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{8} \cdot \bar{a}, \bar{8} \cdot \bar{b}) = (\bar{5} \cdot \bar{8} \cdot \bar{a}, \bar{5} \cdot \bar{8} \cdot \bar{b}) = (\bar{a}, \bar{b})$

2) L'inversa della funzione è

$$g: \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{39} \to \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{39}$$
$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (\bar{8} \cdot \bar{x}, \bar{8} \cdot \bar{y})$$

esercizio 4)

1) Determinare tutti i sottogruppi di $(\mathbb{Z}_9, +, \bar{0})$

2) Determinare tutti i sottogruppi di $(\mathbb{Z}_{11}, +, \bar{0})$

1)

Per il Teorema di Lagrange, siccome $|\mathbb{Z}_9| = 9$, un sottogruppo di $\mathbb{Z}_9$ può avere ordine 1, 3 e 9

- C'è solo un sottogruppo di ordine 1, il sottogruppo triviale $\{\bar{0}\}$
- C'è solo un sottogruppo di ordine massimo 9, il gruppo stesso $\mathbb{Z}_9$
- Rimangono da determinare i sottogruppi di ordine 3. Proviamo a costruire un sottogruppo $H \subseteq \mathbb{Z}_9$ di cardinalità 3. L'elemento neutro $\bar{0}$ deve appartenere ad H. Quindi H sarà della forma $H = \{\bar{0}, x, y\}$, e quindi x e y devono avere ordine $3 = |H|$, ossia $\bar{3}$ e $\bar{6}$.
  Quindi
  $$H = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\}$$

2)

$|\mathbb{Z}_{11}| = 11$, un sottogruppo di $\mathbb{Z}_{11}$ può avere ordine 1 oppure 11.

- C'è solo un sottogruppo di ordine 1, il sottogruppo triviale $\{\bar{0}\}$
- C'è solo un sottogruppo di ordine massimo 11, il gruppo stesso $\mathbb{Z}_{11}$

ESAME 25/11/2023

esercizio 1)

Si consideri la seguente relazione d'equivalenza sull'insieme $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$: ($\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$$(a,b) \sim (c,d) \leftrightarrow a+b-2 = c+d-2$$

Determinare la cardinalità delle classi di equivalenza:

$$\overline{(1,1)}, \overline{(2,2)}, \overline{(4,1)}, \overline{(13,7)}$$

$\rightarrow \overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : x+y-2 = a+b-2\} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : x+y = a+b\}$

- $\overline{(1,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : x+y = 2\} = \{(1,1)\}$

  $|\overline{(1,1)}| = 1$ — cardinalità = numero di soluzioni

- $\overline{(2,2)} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : x+y = 4\} = \{(3,1), (2,2), (1,3)\}$

  $|\overline{(2,2)}| = 3$

- $\overline{(4,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : x+y = 5\} = \{(4,1), (3,2), (2,3), (1,4)\}$

  $|\overline{(4,1)}| = 4$

- $\overline{(13,7)} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : x+y = 20\} = \dots$

  $|\overline{(13,7)}| = 19$

In generale, la formula è $|\overline{(a,b)}| = a+b-1$ IN QUESTO CASO

esercizio 2)

Sia $f: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ l'applicazione data da $f(x,y) = 34x + 31y$

1) Determinare le controimmagini

$$f^{-1}(1), \; f^{-1}(f(1,-1))$$

2) Determinare un'inversa sinistra e un'inversa destra

1)

- $f^{-1}(1) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 34x + 31y = 1\}$

MCD(34,31)

$34 = 1 \cdot 31 + 3$
$31 = 10 \cdot 3 + 1$

bezout di $(34,31) = 1$

$1 = 31 - 3 \cdot 10 = 31 - (34 - 31 \cdot 1) \cdot 10 = 31 - 34 \cdot 10 + 31 \cdot 10$

$= 31 \cdot 11 - 34 \cdot 10$ $\qquad (x,y) = (-10, 11)$

$$f^{-1}(1) = \begin{cases} x = -10 + 31k \\ y = 11 - 34k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

- $f^{-1}(f(1,-1)) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : f(x,y) = f(1,-1)\}$
  $= \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 34x + 31y = 3\}$

  $f(1,-1) = 34 \cdot 1 + 31 \cdot (-1) = 34 - 31 = 3$

2)
- f non è iniettiva quindi non ammette inverse sinistre
  $f(0,0) = 0 = 34 \cdot (-31) + 31 \cdot 34 = f(-31,34)$
- f è suriettiva e quindi ammette inverse destre
  $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2 \quad g(n) = (-10n, 11n)$
  verifichiamo che $f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$
  $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(-10n, 11n) = 34 \cdot (-10n) + 31 \cdot (11n)$
  $= -340n + 341n = n = Id_{\mathbb{Z}}(n)$

esercizio 3)

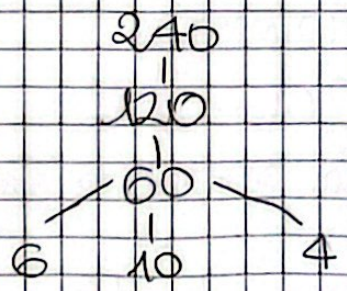
Si consideri il POSET $(\mathbb{N}^*, |)$, cioè l'insieme $\mathbb{N}^*$ con la relazione d'ordine:

$a \leq b \leftrightarrow a | b$ (cioè esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $b = ka$)

Sia $A = \{4, 6, 10, 60, 120, 240\} \subseteq \mathbb{N}^*$

Si determino max, min, elementi minimali e massimali, estremo inferiore e superiore di A

→ diagramma di Hasse



- A ha un unico elemento massimale 240, quindi $\max A = \sup A = 240$
- A ha tre elementi minimali non confrontabili 4, 6 e 10. Quindi A non ammette minimo $\nexists \min A$
- Per determinare l'estremo inferiore di A, troviamo prima l'insieme dei minoranti di A
  $\{n \in \mathbb{N}^* : n | a \ \forall a \in A\} = \{n \in \mathbb{N}^* : n|4, n|6, n|10\} = \{1,2\}$
  Questo insieme ha un massimo in due che è quindi $\inf A = 2$

esercizio 4)

Si considerino i gruppi $(\mathbb{Z}_4, +, \bar{0})$, $(\mathbb{Z}_6, +, \bar{0})$ e il corrispondente gruppo prodotto $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$

1) Determinare l'elemento neutro del gruppo G
2) Calcolare l'ordine degli elementi di G: $(\bar{7},\bar{0})$, $(\bar{2},\bar{2})$
3) Determinare l'elemento inverso di $(\bar{2},\bar{4})$

- L'operazione nel gruppo prodotto $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ si effettua componente per componente, cioè $(\bar{x},\bar{y}) + (\bar{a},\bar{b}) = (\bar{x}+\bar{a}, \bar{y}+\bar{b})$ dove $\bar{x}+\bar{a} \in \mathbb{Z}_4$ e $\bar{y}+\bar{b} \in \mathbb{Z}_6$

1) L'elemento neutro di G è la coppia $(\bar{0},\bar{0})$

2) Dato un gruppo $(G, *, \lambda)$ e $g \in G$, l'ordine di g è il più piccolo intero positivo n, per cui

$$\underbrace{g*g*g \dots *g}_{n \text{ volte}} = \lambda$$

- $(\bar{7},\bar{0}) = (\bar{3},\bar{0})$

$0 = 4 = 8 = 12$
$1 = 5 = 9$
$2 = 6 = 10$
$3 = 7 = 11$

$(\bar{3},\bar{0}) + (\bar{3},\bar{0}) = (\bar{2},\bar{0})$

$(\bar{3},\bar{0}) + (\bar{3},\bar{0}) + (\bar{3},\bar{0}) = (\bar{1},\bar{0})$

$(\bar{3},\bar{0}) + (\bar{3},\bar{0}) + (\bar{3},\bar{0}) + (\bar{3},\bar{0}) = (\bar{0},\bar{0})$

Quindi $\text{ord}(\bar{3},\bar{0}) = 4$

- $(\bar{2},\bar{2})$

$0 = 4 = 8$
$1 = 5 = 9$
$2 = 6 = 10$
$3 = 7$

$(\bar{2},\bar{2}) + (\bar{2},\bar{2}) = (\bar{0},\bar{4})$

$(\bar{2},\bar{2}) + (\bar{2},\bar{2}) + (\bar{2},\bar{2}) = (\bar{2},\bar{0})$

$(\bar{2},\bar{2}) + (\bar{2},\bar{2}) + (\bar{2},\bar{2}) + (\bar{2},\bar{2}) = (\bar{0},\bar{2})$

$0 = 6$
$1 = 7$
$2 = 8$
$3 = 9$
$4 = 10$
$5 = 11$

$(\bar{2},\bar{2}) + (\bar{2},\bar{2}) + (\bar{2},\bar{2}) + (\bar{2},\bar{2}) + (\bar{2},\bar{2}) = (\bar{1},\bar{4})$

$(\bar{2},\bar{2}) + (\bar{2},\bar{2}) + (\bar{2},\bar{2}) + (\bar{2},\bar{2}) + (\bar{2},\bar{2}) + (\bar{2},\bar{2}) = (\bar{0},\bar{0})$

Quindi $\text{ord}(\bar{2},\bar{2}) = 6$

3) L'inverso di $(\bar{2},\bar{4})$ è $(\bar{2},\bar{2})$ perchè

$$(\bar{2},\bar{4}) + (\bar{2},\bar{2}) = (\bar{4},\bar{6}) = (\bar{0},\bar{0})$$