Riassunto della logica proposizionale

La logica proposizionale permette una prima analisi del ragionamento matematico:

1. Si introduce un *linguaggio* L i cui elementi rappresentano *proposizioni atomiche*, non analizzabili ulteriormente mediante l'uso di connettivi.
2. Si introducono i *connettivi*, per costruire nuove proposizione collegando fra loro proposizioni già costruite.
3. Si introducono le *formule proposizionali* (concetto **sintattico**): stringhe di simboli costruite con regole algoritmiche.
4. Si introduce il concetto **semantico** di *modello*: è un *contesto* in cui interpretare le formule, cioè in cui decidere se sono vere o false. Come modello, in logica proposizionale si usa il concetto di *interpretazione*, cioè una funzione i che assegna un valore di verità a ogni elemento di L.

5. A partire da i si utilizzano delle regole che permettono di calcolare il valore di verità $i^*(P)$ per ogni formula P nel modello i.
6. Considerando tutti i modelli possibili si introducono le nozioni di *tautologia*, *formula soddisfacibile*, *contraddizione*, *conseguenza logica*, *equivalenza logica*.
   In particolare, la nozione di conseguenza logica

   $$P \models Q$$

   formalizza il concetto di *deduzione*: dall'ipotesi che P sia vera si può concludere che anche la tesi Q è vera.

Esempio

($*$) *Se io ho ragione tu hai torto; e se tu hai ragione io ho torto. Quindi almeno uno di noi due ha ragione.*

È un ragionamento corretto?

Sia $L = \{A, B\}$, dove:

- A: io ho ragione
- B: tu hai ragione

La frase si formalizza allora nella formula:

$$P : (A \to \neg B) \land (B \to \neg A) \to A \lor B$$

La formula P non è valida: l'interpretazione definita da $i(A) = i(B) = 0$ è tale che $i^*(P) = 0$.
Pertanto il ragionamento ($*$) non è un ragionamento corretto.

Problema

Determinare una proposizione P conoscendo sotto quali interpretazioni essa è vera, cioè conoscendone la tavola di verità.

Esempio:

A	B	C	P
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Si tratta di un **problema di programmazione:** costruire una formula (programma) P che sia vera (reagisca positivamente) esattamente quando una combinazione data di input sia verificata.

Problema

Nell'esempio, perché P sia vera è necessario e sufficiente che:

- A sia falsa *e* B sia vera *e* C sia falsa; oppure
- A sia vera *e* B sia falsa *e* C sia vera; oppure
- A sia vera *e* B sia vera *e* C sia vera

quindi un possibile P è:

$$(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

Questa soluzione non è unica: le soluzioni sono esattamente tutte le formule equivalenti a P. Per esempio, P può essere semplificata:

$$\begin{aligned} P &\equiv (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee [(A \wedge C \wedge \neg B) \vee (A \wedge C \wedge B)] \equiv \\ &\equiv (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge C \wedge (\neg B \vee B)) \equiv \\ &\equiv (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge C) \end{aligned}$$

Osservazione

Il procedimento appena applicato mostra che:

Teorema

Ogni formula proposizionale è logicamente equivalente a una formula in *forma normale disgiuntiva*, cioè una disgiunzione di congiunzioni di formule atomiche o loro negazioni.

Esercizio

Dimostrare che ogni formula proposizionale è anche logicamente equivalente a una formula in *forma normale congiuntiva*, cioè una congiunzione di disgiunzioni di formule atomiche o loro negazioni.

1. Quali tra le seguenti sono formule (abbreviate usando le convenzioni sulle parentesi)?
   - $\vee AB$
   - $\neg(A \to A \wedge B)$
   - $(A \vee \neg B) \wedge (B \to C)$
   - $B \neg C$

Esercizi

2. Si consideri l'interpretazione $i : \{A, B, C\} \to \{0, 1\}$ definita da

$$i(A) = 0, i(B) = 1, i(C) = 1$$

Quali tra le seguenti formule sono soddisfatte da i?

- $(A \to \neg B) \vee \neg(C \wedge B)$
- $\neg A \vee \neg B \to A \vee \neg C$
- $\neg(\neg A \to \neg B) \wedge C$
- $\neg(\neg A \to B \wedge \neg C)$

Esercizi

3. Calcolare la tavola di verità delle formule
   - $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$
   - $(A \to A) \to A$
   - $A \to (A \to A)$
   - $A \vee B \to A \wedge B$
   - $A \vee (B \wedge C) \to (A \wedge C) \vee B$
   - $A \to (B \to A)$
   - $(A \wedge \neg B) \vee \neg(A \leftrightarrow B)$

4. Sia

$$P : (A \to \neg B) \vee (B \to \neg A).$$

Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

a P è conseguenza logica di $\neg(A \vee \neg A)$
b P è logicamente equivalente a $\neg(A \wedge B)$
c P ha come conseguenze logica $\neg(A \vee \neg A)$
d P è una tautologia

Esercizi

5. Usando le tavole di verità, determinare:
   - Se la formula $(A \to B) \vee (A \to \neg B)$ è valida.
   - Se la formula $(\neg A \vee B) \wedge (B \to \neg C \wedge \neg A) \wedge (A \vee C)$ è soddisfacibile.
   - Se la formula $A \wedge \neg B \to A \wedge B$ è conseguenza logica della formula $\neg A$.
   - Se le formule $A \to (B \wedge \neg B)$ e $\neg A$ sono logicamente equivalenti.

Esercizi

6. Usando le tavole di verità, determinare se le seguenti formule sono valide, soddisfacibili, insoddisfacibili.
   - $(A \to B) \land \neg B \to \neg A$
   - $(A \to B) \to (A \to \neg B)$
   - $(A \lor B \to C) \lor A \lor B$
   - $(A \lor B) \land (A \to C \land B) \land (B \to \neg C \land A)$
   - $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
   - $(A \lor B) \land \neg B \land \neg A$
   - $(\neg A \to B) \lor ((A \land \neg C) \leftrightarrow B)$
   - $(A \to B) \land (A \to \neg B)$
   - $(A \to B \lor C) \lor (C \to \neg A)$

Esercizi

7. Per ogni interpretazione $i : \{A, B\} \to \{0, 1\}$ calcolare il valore $i^*((A \wedge \neg B) \to B)$.

Esercizi

8. Scrivere due formule proposizionali P e Q tali che $\neg P \to Q$ sia una tautologia, ma $P \to \neg Q$ non lo sia.

9. Stabilire se l'insieme di formule

$$\{\neg A \to B, \neg(\neg A \to \neg C), C \to A \vee \neg B\}$$

è soddisfacibile.

10. Usare le tavole di verità per determinare se le seguenti conseguenze logiche sono corrette.
    - $A \rightarrow B \models \neg B \rightarrow \neg A$
    - $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \models \neg A$
    - $A \rightarrow B \wedge C \models (A \rightarrow B) \rightarrow C$
    - $A \vee (\neg B \wedge C) \models (B \vee \neg C) \rightarrow A$

Esercizi

11. Usare le tavole di verità per determinare se le seguenti equivalenze logiche sono corrette.
    - $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
    - $(A \vee B) \wedge (\neg A \to \neg B) \equiv B$
    - $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \to \neg B) \to C$
    - $(A \vee B) \wedge (\neg A \to \neg B) \equiv A$
    - $((A \to B) \to B) \to B \equiv A \to B$

Esercizi

12. Sia $L = \{A, B, C\}$. Se

$$A : \text{Pino è contento}$$
$$B : \text{Pino dipinge}$$
$$C : \text{Gino è contento}$$

si formalizzino le seguenti frasi come formule in $Prop(L)$:

- Se Pino è contento e dipinge, allora Gino non è contento.
- Se Pino è contento, allora dipinge.
- Pino è contento solo se dipinge.

13. Sia $L = \{A, B\}$. Se

$$A : x \text{ è un numero primo}$$
$$B : x \text{ è dispari}$$

si formalizzino le seguenti frasi come formule in $Prop(L)$:

- Il fatto che x sia primo è condizione sufficiente affinché x sia dispari.
- Il fatto che x sia dispari è condizione necessaria affinché x sia primo.

14. Sia $L = \{A, B\}$. Se

$$A : \text{Pino è catalano}$$
$$B : \text{Gino è lappone}$$

si formalizzino le seguenti frasi come formule in $Prop(L)$:

- Pino non è catalano.
- Pino è catalano mentre Gino è lappone.
- Se Pino è catalano allora Gino non è lappone.
- Pino è catalano o se Pino non è catalano allora Gino è lappone.
- O Pino è catalano e Gino è lappone, o nè Pino è catalano nè Gino è lappone.

15. Sia $L = \{A, B, C\}$. Se

$$A: \text{Pino ha superato l'esame}$$
$$B: \text{Gino ha superato l'esame}$$
$$C: \text{Lino ha superato l'esame}$$

si formalizzino le seguenti frasi come formule in $Prop(L)$:

- Lino è l'unico ad aver superato l'esame.
- Pino è l'unico a non aver superato l'esame.
- Solo uno tra Pino, Gino e Lino ha superato l'esame.
- Almeno uno tra Pino, Gino e Lino ha superato l'esame.
- Almeno due tra Pino, Gino e Lino hanno superato l'esame.
- Al massimo due tra Pino, Gino e Lino hanno superato l'esame.
- Esattamente due tra Pino, Gino e Lino hanno superato l'esame.

16. Sia $L = \{A, B, C, D\}$. Se

$$\begin{aligned} A &: \text{Pino viene alla festa} \\ B &: \text{Gino viene alla festa} \\ C &: \text{Lino viene alla festa} \\ D &: \text{Nino viene alla festa} \end{aligned}$$

si formalizzino le seguenti frasi come formule in $Prop(L)$:

- Se Nino viene alla festa allora vengono anche Gino e Lino.
- Lino viene alla festa solo se Pino e Gino non vengono.
- Nino viene alla festa se e solo se Lino viene e Pino non viene.
- Se Nino viene alla festa, allora se Lino non viene, Pino viene.
- Lino viene alla festa a patto che Nino non venga, ma se Nino viene allora Gino non viene.
- Condizione necessaria perché Pino venga alla festa è che se Gino e Lino non vengono, allora venga Nino.
- Pino, Gino e Lino vengono alla festa se e solo se Nino non viene, ma se né Pino né Gino vengono, allora Nino viene solo se Lino viene.

16. (cont.)
    - Pino viene alla festa mentre Gino non viene.
    - O Lino viene alla festa, o Gino e Nino non vengono.
    - Se Pino e Gino vengono alla festa, allora Lino viene a patto che Nino non venga.
    - Lino viene alla festa se Gino e Pino non vengono, o se Nino viene.
    - Se Pino viene alla festa allora anche o Gino o Lino vengono, ma se Pino non viene alla festa allora Lino e Nino vengono.

17. Quali dei seguenti ragionamenti sono logicamente corretti?
    - Se sono colpevole, devo essere punito. Sono colpevole. Quindi devo essere punito.
    - Se sono colpevole, devo essere punito. Non sono colpevole. Quindi non devo essere punito.
    - Se sono colpevole, devo essere punito. Non devo essere punito. Quindi non sono colpevole.
    - Se sono colpevole devo essere punito. Devo essere punito. Quindi sono colpevole.
    - Se Pino ha vinto la gara allora o Gino è arrivato secondo o Lino è arrivato terzo. Lino non è arrivato terzo. Quindi, se Gino non è arrivato secondo allora Pino non ha vinto la gara.

17. (cont.)
    - Se Pino ha vinto la gara allora o Gino è arrivato secondo o Lino è arrivato terzo. Gino non è arrivato secondo. Quindi se Pino ha vinto la gara, allora Lino non è arrivato terzo.
    - Se Pino ha vinto la gara allora Gino è arrivato secondo e Lino è arrivato terzo. Gino non è arrivato secondo. Quindi Pino non ha vinto la gara.
    - Se Pino ha vinto la gara allora, se Gino è arrivato secondo, Lino è arrivato terzo. Gino non è arrivato secondo. Quindi o Pino ha vinto, o Lino è arrivato terzo.
    - Se dormi e studi supererai l'esame, mentre se dormi e non studi non supererai l'esame. Pertanto, se dormi, o studi e supererai l'esame, o non studi e non supererai l'esame.

18. Pino trova due bottiglie, a e b, in cantina. Ognuna contiene o del vino o un purgante.

    Sulla bottiglia a c'è scritto: «Almeno una bottiglia contiene del vino».
    Sulla bottiglia b c'è scritto: «In a c'è del purgante».
    Inoltre Pino sa che o entrambe le scritte sono vere o entrambe sono false.

    È possibile per Pino scegliere con sicurezza una bottiglia in cui ci sia del vino? Se sì, quale?

19. Si supponga che
    - Se Pino è magro, allora Gino non è biondo o Lino non è alto.
    - Se Lino è alto, allora Nino è simpatico.
    - Se Nino è simpatico e Gino è biondo, allora Pino è magro.
    - Gino è biondo.

    Si può dedurre che Lino non è alto?

20. Pino trova tre bottiglie, a, b e c, in cantina. Ognuna contiene o del vino o del purgante.

    Sulle bottiglie a e b c'è scritto: «Il vino non è qui».
    Sulla bottiglia c c'è scritto: «Il vino è nella bottiglia b».
    Inoltre Pino sa che:

    - una sola delle scritte è vera, le altre due sono false
    - esattamente una delle bottiglie contiene del vino

    È possibile per Pino scegliere con sicurezza la bottiglia in cui c'è del vino? Se sì, quale?

21. Pino trova tre bottiglie, a, b e c, in cantina. Ognuna contiene o del vino o del purgante.

Sulla bottiglia a c'è scritto: «Il vino è qui».
Sulla bottiglia b c'è scritto: «Il vino non è qui».
Sulla bottiglia b c'è scritto: «Il vino non è nella bottiglia b».
Inoltre Pino sa che

- esattamente una bottiglia che contiene del vino
- almeno una delle scritte è vera e almeno una è falsa

È possibile per Pino scegliere con sicurezza la bottiglia in cui c'è del vino? Se sì, quale?

22. Pino trova tre bottiglie, a, b e c, in cantina. Ognuna contiene o del vino o del purgante.

    Sulla bottiglia a c'è scritto: «Qui c'è del vino. Inoltre, se in c c'è del vino, allora anche in b c'è del vino».
    Sulla borriglia b c'è scritto: «Nè in a nè in c c'è del vino».
    Sulla bottiglia c c'è scritto: «In a c'è del vino, in c no».
    Inoltre Pino sa che tutte le scritte sono false.

    È possibile per Pino scegliere con sicurezza una bottiglia in cui ci sia del vino? Se sì, quale?