05_06_07_08_09_10

venerdì 1 dicembre 2023 08:16

tavole di verità

Tabelle che riportano il valore di verità (vero o falso) di una formula applicando il connettivo

Falso: 0, F, ... Vero: 1, T, ...

tavola di verità di $\neg$

P	$\neg P$
0	1
1	0

tavola di verità $\vee$

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

tavola di verità di $\wedge$

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

tavola di verità di $\rightarrow$

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

La formula $P \rightarrow Q$ è vera se e solo se P è falsa o Q è vera

tavola di verità $\leftrightarrow$

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La formula $P \leftrightarrow Q$ è vera se e solo se P e Q hanno lo stesso valore di verità

Per costruire la tavola di verità di una proposizione P, si considerano tutte le combinazioni dei possibili valori di verità delle lettere usate per costruire P

Se P è costruita da n lettere, la tavola di verità di P è costituita da 2^n righe

esempio: $P: (B \rightarrow A) \wedge ((B \vee C) \leftrightarrow A)$

A	B	C	$B \rightarrow A$	$B \vee C$	$(B \vee C) \leftrightarrow A$	P
F	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V

alberi sintattici

A ogni formula è associato un albero di costruzione, o albero sintattico

Un albero è un insieme non vuoto T dotato di una relazione d'ordine $\leq$ tale che:

- per ogni $x \in T$ l'insieme $\{y \in T \mid y \leq x\}$ è finito e totalmente ordinato da $\leq$
- esiste un minimo rispetto a $\leq$, detto radice

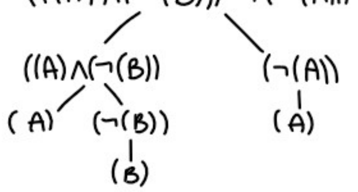
terminologia:

- esiste un minimo rispetto a $\leq$, detto radice

terminologia:

- gli elementi di T sono detti nodi
- se $x<y$ si dice che x è un predecessore di y, o che y è un successore (o discendente) di x
- se il nodo x non ha successori, si dice che x è una foglia
- l'altezza di un albero è la massima lunghezza dei suoi rami

esempio: $(((A)\wedge(\neg(B)))\rightarrow(\neg(A)))$



valutazione di verità

Una valutazione di verità è una funzione $v: Prop(L) \rightarrow \{0,1\}$ che soddisfa le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} v(\neg P) &= 1 - v(P) \\ v(P \vee Q) &= \max(v(P), v(Q)) \\ v(P \wedge Q) &= \min(v(P), v(Q)) \\ v(P \rightarrow Q) &= \max(1 - v(P), v(Q)) \\ v(P \leftrightarrow Q) &= 1 - |v(P) - v(Q)| \end{aligned}$$

- $v(\neg P) = 1 - v(P)$

se $v(P) = 0$, ossia P ha un valore di verità falso, allora
$v(\neg P) = 1 - v(P) \rightarrow 1 - 0 = 1$, e $\neg P$ è vera

se $v(P) = 1$, ossia P ha un valore di verità vero, allora
$v(\neg P) = 1 - v(P) \rightarrow 1 - 1 = 0$, e $\neg P$ è falsa

P	¬P
F	V
V	F

Si tratta della descrizione della tavola di verità della negazione

- $v(P \wedge Q) = \min(v(P), v(Q))$

se almeno uno tra $v(P)$ e $v(Q)$ è 0, ossia falso, allora
$v(P \wedge Q) = \min(v(P), v(Q)) = 0$, quindi $P \wedge Q$ falso

se $v(P) = v(Q) = 1$, ossia vero sia per P che Q, allora
$v(P \wedge Q) = \min(v(P), v(Q)) = \min(1,1) = 1$, quindi $P \wedge Q$ vero

P	Q	P∧Q
F	F	F
V	F	F
F	V	F
V	V	V

Si tratta della descrizione della tavola di verità della congiunzione

interpretazione

Un interpretazione è una funzione $i: L \rightarrow \{0,1\}$

L'interpretazione i si può estendere in modo unico a una valutazione $i^*: Prop(L) \rightarrow \{0,1\}$ per induzione sull'altezza delle formule, ponendo

$$\begin{aligned} i^*(\neg P) &= 1 - i^*(P) \\ i^*(P \vee Q) &= \max(i^*(P), i^*(Q)) \\ i^*(P \wedge Q) &= \min(i^*(P), i^*(Q)) \\ i^*(P \rightarrow Q) &= \max(1 - i^*(P), i^*(Q)) \\ i^*(P \leftrightarrow Q) &= 1 - |i^*(P) - i^*(Q)| \end{aligned}$$

Sia $P \in Prop(L)$

$\longrightarrow$ Se $i^*(P) = 1$, si dice che P è vera nell'interpretazione i, o che i soddisfa P, o che i è un modello di P. Si denota $i \models P$

1) se esiste almeno un'interpretazione i tale che $i \models P$, si dice che P è soddisfacibile o consistente

2) Se non esiste alcuna interpretazione i tale che $i \models P$, si dice che P è insoddisfacibile, inconsistente o una contraddizione

3) se per ogni interpretazione i si ha che $i \models P$, si dice che P è valida o una tautologia, e si denota $\models P$