Alcuni richiami

- Un enunciato φ è *soddisfacibile* se e solo se esiste una struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \models \varphi$.
- Un enunciato φ *non è valido* se e solo se esiste una struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \not\models \varphi$ (cioè $\mathcal{A} \models \neg\varphi$).
- Un enunciato φ *non è conseguenza logica* dell'insieme di enunciati Γ se e solo se esiste una struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \models \Gamma$ ma $\mathcal{A} \not\models \varphi$.
  In particolare, $\psi_1, \ldots, \psi_n \not\models \varphi$ se e solo se esiste una struttura $\mathcal{A}$ tale che
  $$\mathcal{A} \models \psi_1 \wedge \ldots \psi_n \wedge \neg\varphi$$
- Gli enunciati φ, ψ *non sono logicamente equivalenti*, cioè $\varphi \not\equiv \psi$ se e solo se esiste una struttura $\mathcal{A}$ tale $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \neg\psi$ oppure $\mathcal{A} \models \psi \wedge \neg\varphi$.

Esercizio

Sia $L = \{f\}$, con f simbolo funzionale binario, e sia φ l'enunciato

$$\forall x \exists y \forall z \ f(f(x, y), z) = z$$

- Mostrare che φ è soddisfacibile
- Mostrare che φ non è valido
- Stabilire se $(\mathbb{Q}, \cdot) \models \varphi$

Svolgimento

- È conveniente cominciare determinando se $(\mathbb{Q}, \cdot) \models \varphi$. Questo si ha se e solo se, per ogni $x \in \mathbb{Q}$ esiste $y \in \mathbb{Q}$ tale che per ogni $z \in \mathbb{Q}$ si abbia
$$xyz = z$$
Questo è falso perché (ponendo $x = 0$) si ha $0yz = 0$ quindi non esiste alcun y tale che per ogni z risulti $xyz = z$.
Quindi
$$(\mathbb{Q}, \cdot) \not\models \varphi$$
- Poiché $(\mathbb{Q}, \cdot) \not\models \varphi$, segue che φ non è valido.
- Si ha $(\mathbb{Z}, +) \models \varphi$.
Infatti, per ogni $x \in \mathbb{Z}$, esiste $y \in \mathbb{Z}$ tale che per ogni $z \in \mathbb{Z}$ si abbia $x + y + z = z$: basta scegliere $y = -x$.
Quindi φ è soddisfacibile.

Esercizio

Sia $L = \{R\}$, con R simbolo relazionale binario. Mostrare che

$$\forall x \exists y R(x,y) \not\models \exists y \forall x R(x,y)$$

Svolgimento. Basta osservare che

$$(\mathbb{N}, \leq) \models \forall x \exists y R(x,y), \qquad (\mathbb{N}, \leq) \not\models \exists y \forall x R(x,y)$$

Infatti:

- $(\mathbb{N}, \leq) \models \forall x \exists y R(x,y)$, perché per ogni $x \in \mathbb{N}$ c'è un numero y tale che $x \leq y$, per esempio $y = x + 1$
- $(\mathbb{N}, \leq) \not\models \exists y \forall x R(x,y)$, ovvero $(\mathbb{N}, \leq) \models \neg \exists y \forall x R(x,y)$, perché non c'è un numero massimo

Esercizio

Sia $L = \{P, Q\}$, con P, Q simboli relazionali unari. Mostrare che

$$\exists x(P(x) \to Q(x)) \not\models \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

Svolgimento

Si cerca una L-struttura $\mathcal{A}$ tale che

$$\mathcal{A} \models \exists x(P(x) \to Q(x)), \quad \text{ma} \quad \mathcal{A} \not\models \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

La condizione $\mathcal{A} \models \exists x(P(x) \to Q(x))$ equivale a

$$(1) \qquad \mathcal{A} \models \exists x(\neg P(x) \vee Q(x))$$

mentre la condizione $\mathcal{A} \not\models \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$ equivale alle due condizioni

$$(2) \qquad \mathcal{A} \models \exists x P(x)$$

$$(3) \qquad \mathcal{A} \models \neg \exists x Q(x))$$

Svolgimento (cont.)

Le condizioni (2) e (3) significano che

$$P^{\mathcal{A}} \neq \emptyset, \qquad Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$$

Pertanto, affinché anche $\mathcal{A} \models \exists x(\neg P(x) \vee Q(x))$, si deve e basta avere che esista un elemento che non soddisfi $P^{\mathcal{A}}$, cioè

$$P^{\mathcal{A}} \neq |\mathcal{A}|$$

Una struttura $\mathcal{A}$ come richiesto si può fare con un universo che abbia almeno due elementi. Per esempio

$$\mathcal{A} = (\{0, 1\}, \{0\}, \emptyset)$$

Esercizio

Sia $L = \{f, c\}$, dove:

- f è simbolo funzionale binario
- c è simbolo di costante

Trovare un enunciato φ tale che

$$(\mathbb{N}, \cdot, 17) \models \varphi, \qquad (\mathbb{N}, \cdot, 12) \not\models \varphi$$

Svolgimento

Si osserva che 17 è un numero primo, mentre 12 non lo è.
Un enunciato φ come richiesto sarebbe allora un enunciato che affermi

$$c \text{ è un numero primo}$$

cioè

$$\text{per ogni } x \text{ e } y, \text{ se } xy = c, \text{ allora } x = 1 \text{ o } y = 1$$

l'asserzione la cui interpretazione è $x = 1$ può essere espressa in L con

$$\forall z \; f(x, z) = z$$

e similmente per $y = 1$. Allora un enunciato φ come richiesto è

$$\forall x \forall y (f(x, y) = c \to \forall z \; f(x, z) = z \vee \forall z \; f(y, z) = z)$$

Esercizio

Sia $L = \{R, f, c\}$, con

- R simbolo relazionale binario
- f simbolo funzionale binario
- c simbolo di costante

Dimostrare che l'enunciato

$$\varphi : \forall x R(f(x,x), c)$$

è soddisfacibile, ma non valido

Svolgimento

Sia $\mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, dove

- $A = \{0\}$
- $R^{\mathcal{A}} = \{(0,0)\}$
- $f^{\mathcal{A}} : A^2 \to A$ è definita ponendo: $f^{\mathcal{A}}(0,0) = 0$
- $c^{\mathcal{A}} = 0$

Allora $\mathcal{A} \models \varphi$. Quindi φ è soddisfacibile.

Sia $\mathcal{B} = (B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$ uguale in tutto a $\mathcal{A}$, salvo nell'interpretazione di R:

- $B = \{0\}$
- $R^{\mathcal{B}} = \emptyset$
- $f^{\mathcal{B}} : B^2 \to B$ è definita ponendo: $f^{\mathcal{B}}(0,0) = 0$
- $c^{\mathcal{B}} = 0$

Allora $\mathcal{B} \not\models \varphi$. Quindi φ non è valido.

Esercizio

Sia $L = \{R\}$, con R simbolo relazionale binario.

Per ogni numero naturale positivo k, sia $Div(k)$ l'insieme dei divisori di k. Sia $|$ la relazione di divisibilità tra naturali positivi, cioè

$$n|m \Leftrightarrow n \text{ è un divisore di } m$$

Determinare per quali k, con $1 \leq k \leq 10$ si ha che

$$(Div(k), |) \models \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$$

Svolgimento

Si ha che $(Div(k), |) \models \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$ se e solo se dati due divisori di k, uno dei due è divisore dell'altro. Questo equivale a dire che o $k = 1$, o nella decomposizione in fattori primi di k:

$$k = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$$

c'è un solo fattore, cioè

$$k = p^n$$

per qualche numero primo p.

Quindi i numeri k tra 1 e 10 tali che $(Div(k), |) \models \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$ sono:

$$1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9$$

Esercizio (esame del 10-1-2019)

Sia $\mathcal{L} = \{f\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove f è un simbolo funzionale unario. Si considerino le $\mathcal{L}$-strutture $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{A}}), \mathcal{B} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{B}})$, dove:

- $\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi;
- $f^{\mathcal{A}}$ è l'operazione di opposto, cioè $f^{\mathcal{A}}(u) = -u$ per ogni $u \in \mathbb{Z}$;
- $f^{\mathcal{B}}$ è l'operazione di raddoppio, cioè $f^{\mathcal{B}}(u) = 2u$, per ogni $u \in \mathbb{Z}$.

Determinare, se esiste, un enunciato φ che distingua $\mathcal{A}$ da $\mathcal{B}$, cioè tale che $\mathcal{A} \models \varphi, \mathcal{B} \not\models \varphi$.

Esercizio (esame del 10-1-2019)

Sia $\mathcal{L} = \{f\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove f è un simbolo funzionale unario. Si considerino le $\mathcal{L}$-strutture $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{A}}), \mathcal{B} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{B}})$, dove:

- $\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi;
- $f^{\mathcal{A}}$ è l'operazione di successore, cioè $f^{\mathcal{A}}(u) = u + 1$ per ogni $u \in \mathbb{Z}$;
- $f^{\mathcal{B}}$ è l'operazione di elevamento al quadrato, cioè $f^{\mathcal{B}}(u) = u^2$, per ogni $u \in \mathbb{Z}$.

Determinare, se esiste, un enunciato φ che distingua $\mathcal{A}$ da $\mathcal{B}$, cioè tale che $\mathcal{A} \models \varphi, \mathcal{B} \not\models \varphi$.

Esercizio (esame del 10-1-2019)

Sia $\mathcal{L} = \{f\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove f è un simbolo funzionale binario. Si considerino le $\mathcal{L}$-strutture $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{A}}), \mathcal{B} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{B}})$, dove:

- $\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi;
- $f^{\mathcal{A}}$ è l'operazione di addizione, cioè $f^{\mathcal{A}}(u, v) = u + v$ per ogni $u, v \in \mathbb{Z}$;
- $f^{\mathcal{B}}$ è l'operazione di sottrazione, cioè $f^{\mathcal{B}}(u, v) = u - v$, per ogni $u, v \in \mathbb{Z}$.

Determinare, se esiste, un enunciato φ che distingua $\mathcal{A}$ da $\mathcal{B}$, cioè tale che $\mathcal{A} \models \varphi, \mathcal{B} \not\models \varphi$.

Esercizio (esame del 3-6-2019)

Sia $\mathcal{L} = \{P, Q\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove P è simbolo relazionare unario e Q è simbolo relazionale binario. Si considerino gli enunciati

$$\varphi : \forall x \forall y\ (Q(x,x) \wedge P(y)), \qquad \psi : \forall x \forall y\ (Q(x,y) \wedge P(y))$$

Si definisca una $\mathcal{L}$-struttura

$$\mathcal{A} = (A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}})$$

tale che $\mathcal{A}$ soddisfi esattamente uno tra φ e ψ.