Foglio 1 → INSIEMI

1)

$A=\{x\in\mathbb{N} : x\leq 6\}$, $B=\{x\in\mathbb{Z} : -3<x<1\}$, $C=\{x\in B : x<0\}$

$A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ $\quad B=\{-2,-1,0\}$ $\quad C=\{-2,-1\}$

$0\in A$ ✓

$-1\notin B$ ✗ perchè $-1\in B$

$0\in A\cup C$ ✓ perchè $0\in A$ e $A\cup C$ sono tutti gli elementi A e B

$-1\in A\cap B$ ✗ perchè $A\cap B=0$

$C\subseteq A$ ✗ perchè nessun elemento C è contenuto in A

$\{-2\}\in B\cap C$ ✗ $B\cap C$ non è $\mathcal{P}$ insieme delle parti

$\{-2\}\in\mathcal{P}(B)$ ✓ $\mathcal{P}(B)=\{\{-2\},\{-1\},\{0\},\{-2,-1\},\{-2,0\},\{-1,0\},B,\emptyset\}$

$\mathcal{P}(\{-2\})\subseteq\mathcal{P}(A)$ ✗

$(1,1)\in A\times B$ ✗

$\{(-1,0)\}\subseteq B\times A$ ✗

$(A\times B)\cap(B\times A)\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ✓

$(A\times B)\cap(B\times A)=\emptyset$ ✗

A×B $=\{(0,-2),(0,-1),(0,0),(1,-2),(1,-1),(1,0),(2,-2),(2,-1),(2,0),(3,-2),(3,-1),(3,0),(4,-2),(4,-1),(4,0),(5,-2),(5,-1),(5,0),(6,-2),(6,-1),6,0)\}$

B×A $=\{(-2,0)(-2,1),(-2,2),(-2,3),(-2,4),(-2,5),(-2,6),(-1,0),(-1,1),(-1,2),(-1,3),(-1,4),(-1,5),(-1,6),(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(0,5),(0,6)\}$

$\to (A\times B)\cap(B\times A)=(0,0)$

2)

$A=\{x\in\mathbb{R} : x^3=x\}$ $\to$

$x^3=x$

$x^3-x=0$

$x(x^2-1)=0$

$x=0$ $\qquad x^2=1$

$x=\pm1 < \begin{matrix} x=1 \\ x=-1\end{matrix}$

$A=\{-1,0,1\}$

$A\subseteq\mathbb{N}$ ✓

→ perchè 0 e 1 appartengono a $\mathbb{N}$, quindi A sottoinsieme di $\mathbb{N}$

$A\subseteq\mathbb{Z}$ ✓

$A\subseteq\mathbb{Q}$ ✓ → $-1,0,1$ sono numeri reali razionali

$\Rightarrow \boxed{A\cap\mathbb{N}=\{0,1\}} \Leftarrow$

3)

A e B sono uguali?

1) $A=\{(t,t+1): t\in\mathbb{Z}\}$, $B=\{(t-6,t-5): t\in\mathbb{Z}\}$

✓

{ esempio elementi $A=(0,1),(1,2),(5,6),\dots$
{ esempio elementi $B=(-6,-5),(-8,-7),(-2,-1),\dots$

A e B contengono coppie di numeri consecutivi

$\boxed{A=B}$

2) $A=\{(t,t+1): t\in\mathbb{N}\}$, $B=\{(t-6,t-5): t\in\mathbb{N}\}$

✓

$\boxed{A=B}$

3) $A=\{(t,t+1): t\in\mathbb{R}\}$, $B=\mathbb{R}^2$

esempio elementi $A=(1{,}5;2{,}5),(0{,}5;1{,}5),(-1,0)$

✗

B = insieme di tutte le possibili coppie ordinate di numeri reali → A sottoinsieme di B

$\boxed{A\neq B}$

4) $A=\{n\in\mathbb{N}: n \text{ è dispari}\}$, $B=\{n^2: n\in\mathbb{N}, n \text{ è dispari}\}$

A = tutti i numeri dispari → $1,3,5,7,9,\dots$

✗

B = tutti i quadrati dispari → $1,9,25,\dots$

$\boxed{A\neq B}$

4)

A, B, C insiemi $A\cap B=C$, $B\cap C=A$, $C\cap A=B$

provare che $A=B=C$

- $A\cap B=C \rightarrow A\subseteq C \wedge B\subseteq C \rightarrow$ [perché ogni elemento di A e B è anche in C. A e B sottoinsiemi di C]
- $B\cap C=A \rightarrow B\subseteq A \wedge C\subseteq A \rightarrow$ [B e C sottoinsiemi di A]
- $C\cap A=B \rightarrow C\subseteq B \wedge A\subseteq B \rightarrow$ [C e A sottoinsiemi di B]

A, B, C sono sottoinsiemi l'uno dell'altro

$\boxed{A=B=C}$

1) $A \cap B = A \leftrightarrow A \subseteq B$

Ogni elemento in A è anche in B.

Se prendiamo un elemento da A, questo elemento dovrà essere anche in $A \cap B$; quindi l'elemento è sia in A che in B e $A \subseteq B$

2) $A \cup B = A \leftrightarrow B \subseteq A$

$B \subseteq A$

B è un sottoinsieme di A; se un elemento è in B, visto che B è un sottoinsieme di A, sarà anche in A. se un elemento è in A sia quando è in A sia quando è in B, allora $A \cup B$ è anche un sottoinsieme di A e $A \cup B = A$

3) $(B \setminus A) = \emptyset \leftrightarrow B \subseteq A$

se $(B \setminus A) = \emptyset$, significa che non ci sono elementi in B che non sono in A; quindi ogni elemento in B è anche in A, ossia $B \subseteq A$

4) $(B \setminus A) = B \leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

se $(B \setminus A) = B$, significa che non ci sono elementi in B che sono anche in A, quindi l'intersezione tra A e B è vuota $\rightarrow A \cap B = \emptyset$

5) $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

$(B \setminus A)$ è l'insieme di elementi in B che non sono in A e $A \cap B$ è l'insieme di elementi in comune tra A e B. L'unione di questi due insiemi rappresenta quindi tutti gli elementi di B

6) $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$

Questi due insiemi rappresentano situazioni contraddittorie, (l'elemento è in B ma non in A; l'elemento è sia in A che in B) e quindi l'intersezione tra di loro è contraddittoria.

6)

$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x + 4 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + 3x^2 = -4x\}$

provare che $A \subset B$ e $A \neq B$ (A sottoinsieme di B)

A:

$x^2 + 3x + 4 = 0 \quad \Delta = 9 - 4 \cdot 4 = 9 - 16 = -7 \quad A \notin \mathbb{R}$

B:

$x^3 + 3x^2 = -4x$

$x^3 + 3x^2 + 4x = 0$

$x(x^2 + 3x + 4) = 0 \quad x = 0$

A sottoinsieme di B perchè non contiene reali, mentre B

7) per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $A_n = \{x \in \mathbb{N} : x > n\}$

determinare l'insieme $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$

→ $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ rappresenta l'intersezione di tutti gli insiemi A_n $\forall n \in \mathbb{N}$. L'intersezione di tutti gli insiemi A_n sara' l'insieme dei numeri naturali maggiori di tutti i numeri naturali, ma visto che non è possibile $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ (insieme vuoto)

8) per ogni $i \in \mathbb{N}$ sia $A_i = \{n \in \mathbb{Z} : n \neq 2i\}$.

Determinare $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ e $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ → insieme di tutti i numeri tranne i multipli di 2

$B = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ → insieme di tutti i numeri dispari

$A = B$

9) $A = \{1, 2\}$ $B = \{a, b\}$

$A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b)\}$

$B \times A = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2)\}$

$A^2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

$B^3 = \{(a,a,a), (a,a,b), (a,b,a), (b,a,a), (a,b,b), (b,b,a), (b,a,b), (b,b,b)\}$

$\wp(A \times B) = \{\emptyset, \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b)\}, \{(1,a)\}, \{(1,b)\}, \{(2,a)\}, \{(2,b)\}, \{(1,a), (2,b)\}, \{(1,b), (2,a)\}, \{(1,a), (2,a)\} \{(1,b), (2,b)\}, \{(1,a), (2,a)\}\}$