Formalizzazione

Formalizzare significa esprimere dei concetti in un linguaggio schematico, artificiale, dalla sintassi precisa e — in genere — semplificato.
Tale operazione permette di analizzare in modo astratto quei concetti, per controllare la correttezza dei ragionamenti. Permette inoltre di generalizzare dei ragionamenti, applicandoli a situazioni diverse da quella considerata inizialmente.

La logica del prim'ordine è in grado di formalizzare il ragionamento matematico.
È in effetti anche in grado di esprimere in modo abbastanza elementare gran parte delle affermazioni e ragionamenti.
Non tutti: per esempio non formalizza in modo semplice relazioni temporali (prima/dopo) o modali (possibile/necessario). Per formalizzare queste nozioni si sono sviluppati degli altri tipi di logica: logica temporale, logica modale, ecc.

Formalizzazioni e interpretazioni

L'operazione di formalizzazione nella logica del prim'ordine è un processo inverso a quello dell'interpretazione.

- Nel processo di interpretazione si parte da una formula del linguaggio del prim'ordine e la si traduce in una asserzione (o proprietà) che afferma qualcosa di un contesto (struttura e suoi elementi).
- Nel processo di formalizzazione si parte da un'asserzione riguardante un contesto (una struttura e i suoi elementi) e la si esprime nel linguaggio della logica.

L'importanza della formalizzazione

Il processo di formalizzazione è fondamentale (in matematica, ma non solo) per:

- evitare le ambiguità del linguaggio naturale, in modo che il significato delle asserzioni sia chiaro e preciso
- controllare la correttezza dei passaggi logici fatti in una deduzione, prescindendo dall'intepretazione particolare delle asserzioni: è la relazione di conseguenza logica

Esempi

I linguaggi naturali presentano ambiguità, ridondanze e imprecisioni che si vogliono evitare in un linguaggio formale.

- La vecchia porta la sbarra.
- Pino vede Gino che è malato e piange.
- Everybody needs somebody.
- Il padre di Lino ha visto un uomo nel parco con un telescopio.
- Rino e Tina sono sposati con due gemelli.
- *Se un uomo sapesse il valore che ha una donna andrebbe a quattro zampe alla sua ricerca.* (Julio Cortázar, 1914–1984)
- La macelleria resta aperta la domenica solo per i polli.
- Si vendono impermeabili per bambini di gomma.

Gli elementi della formalizzazione

Per evitare le ambiguità nell'interpretazione di un'asserzione, si deve in particolare chiarire:

- l'universo del discorso (cioè ciò di cui si sta parlando)
- quali sono le relazioni, o proprietà, che valgono sugli elementi del discorso
- quali sono le funzioni sugli elementi del discorso
- chi sono gli individui chiamati con un nome dato
- come si connettono le affermazioni elementari per costruirne di più complesse

Nella logica del prim'ordine questo si fa introducendo dei simboli per rappresentare ognuno di questi concetti.

Esempi

- Se uno ha un amico è fortunato.
  Si può formalizzare come

  $$\forall x\ (\exists y P(y,x) \rightarrow Q(x))$$

  dove
  - $P(x,y)$ sia interpretato come: x è amico di y
  - $Q(x)$ sia interpretato come: x è fortunato
- Pino dorme.
  Si può formalizzare come

  $$P(c)$$

  dove
  - $P(x)$ sia interpretato come: x dorme
  - c sia interpretato come: Pino

Esempio

- Uno che segue il corso di Logica si addormenta.
  Questa frase potrebbe essere ambigua:
  - Un'interpretazione ottimistica è che ci sia qualcuno che, seguendo il corso di Logica, si addormenta:

    $$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$$

    dove
    - $P(x)$ è interpretato come: x segue il corso di Logica
    - $Q(x)$ è interpretato come: x si addormenta
  - Tuttavia nel linguaggio naturale, *uno* può voler dire *chiunque*. La formalizzazione di questa interpretazione (più realistica?) è:

    $$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

Nella formalizzazione l'ambiguità è sparita.
Ciò significa che, per poter formalizzare un'asserzione, occorre prima poter stabilire qual è l'interpretazione corretta.

Esempio

($*$) Ogni numero naturale diverso da zero è somma di due numeri naturali distinti.

Per decidere un linguaggio del prim'ordine adatto alla formalizzazione, si deve capire qual è il contesto a cui si è interessati: se per esempio si lavora sul dominio $\mathbb{R}$, può essere utile avere un simbolo relazionale unario N da interpretare come *essere un numero naturale*; se il dominio è $\mathbb{N}$, un tale simbolo è inutile.

Se $L = \{N, +, 0\}$, dove N è simbolo relazionale unario (per la proprietà di essere un numero naturale), $+$ è simbolo funzionale binario (per l'operazione di somma), 0 è simbolo di costante (per il numero zero), una formalizzazione dell'asserzione ($*$) in $\mathbb{R}$ è

$$\forall x(N(x) \wedge x \neq 0 \rightarrow \exists y \exists z(N(y) \wedge N(z) \wedge y \neq z \wedge y + z = x))$$

Una formalizzazione in $\mathbb{N}$ è più semplicemente

$$\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y \exists z(y \neq z \wedge y + z = x))$$

Esempio

Si voglia formalizzare in $\mathbb{N}$ l'asserzione

tutti i numeri dispari sono maggiori di zero

La formalizzazione dipende dal linguaggio e dalla sua interpretazione:

- Se il linguaggio comprende:
  - un simbolo relazionale unario D, interpretato come la relazione unaria *essere dispari*
  - un simbolo relazionale binario $<$, interpretato come la relazione binaria *essere minore di*
  - un simbolo di costante 0, interpretato come il numero 0

  allora una formalizzazione è

$$\forall x(D(x) \rightarrow 0 < x)$$

Esempio (cont.)

- Se il linguaggio comprende:
  - un simbolo relazionale binario $<$, interpretato come la relazione binaria *essere minore di*
  - un simbolo funzionale binario $+$, interpretato come l'operazione binaria di *somma*
  - un simbolo di costante 0, interpretato come il numero 0

  allora una formalizzazione è

$$\forall x(\neg\exists y\ y + y = x \to 0 < x)$$

Sommario

Per formalizzare un'asserzione si deve conoscere:

- l'universo del discorso, cioè l'insieme degli elementi di cui si parla, e che sono i possibili valori assegnabili alle variabili
- il linguaggio da utilizzare
- l'interpretazione dei simboli del linguaggio

In altre parole, si devono conoscere:

- Un linguaggio $L = \mathit{Rel} \cup \mathit{Funct} \cup \mathit{Const}$
- Una L-struttura $\mathcal{A}$

Formalizzare un'asserzione significa quindi determinare una formula del linguaggio L che, interpretata in $\mathcal{A}$, abbia lo stesso significato dell'asserzione data.

Esempio

Per formalizzare in $\mathbb{Q}$ l'asserzione

> dati due numeri, uno minore dell'altro, esiste un numero compreso tra i due

utilizzando il linguaggio $L = \{<\}$, dove $<$ è un simbolo relazionale binario, e interpretando tale simbolo con l'usuale relazione binaria *essere minore di*, un enunciato la cui interpretazione abbia lo stesso significato dell'asserzione data è

$$\forall x \forall y (x < y \to \exists z (x < z \wedge z < y))$$

L'interpretazione di tale enunciato nella struttura considerata è infatti:

Per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$, se $a < b$ allora esiste $c \in \mathbb{Q}$ tale che $a < c < b$

Osservazioni

- La circostanza che l'asserzione sia vera o sia falsa non c'entra nulla con la formalizzazione: la formalizzazione è solo una traduzione da un linguaggio naturale a un linguaggio formale.
  Per esempio, l'asserzione precedente

  > dati due numeri, uno minore dell'altro, esiste un numero compreso tra i due

  è falsa in $(\mathbb{N}, <)$, ma si può comunque formalizzare anche in questa struttura:
  $$\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$$
- Per formalizzare un'asserzione è necessario sia specificato un particolare linguaggio.
  Ciò significa che possono essere usati solo i simboli non logici (relazionali, funzionali, di costante) che appartengono al linguaggio, non altri.

Esempio

Si voglia formalizzare in $\mathbb{N}$ l'asserzione

zero è il più piccolo numero naturale

utilizzando il linguaggio $L = \{+, 0\}$ dove $+$ è un simbolo funzionale binario da interpretare come l'operazione di *somma*, e 0 è un simbolo di costante da interpretare come il numero zero.

Si potrebbe essere tentati di formalizzare l'asserzione come

$$\forall x \; 0 \leq x$$

Tale formalizzazione **è sbagliata**, perché $\leq$ non è presente nel linguaggio L: solo i simboli non logici $+$ e 0 possono essere usati, e devono essere interpretati come prescritto (in questo caso, l'interpretazione standard).

Sapendo che $\leq$ è definito su $\mathbb{N}$ dalla condizione

$$a \leq b \Leftrightarrow \text{ esiste } c \text{ tale che } a + c = b$$

una possibile formalizzazione è

$$\forall x \exists y \; 0 + y = x$$

Osservazioni (cont.)

- La formalizzazione di un'asserzione non è unica: formule diverse possono costituire formalizzazioni equivalenti
  Esempio. Si voglia formalizzare in $\mathbb{R}$ l'asserzione

  il quadrato di un numero è sempre non negativo

  utilizzando il linguaggio $L = \{\leq, \cdot, 0\}$, con l'interpretazione standard. Sono entrambe formalizzazioni corrette:

$$\forall x \forall y (x = y \cdot y \to 0 \leq x)$$

  e

$$\forall y \; 0 \leq y \cdot y$$

  In alcuni casi ci possono però essere formalizzazioni più naturali, o più aderenti all'asserzione originale.

Osservazioni (cont.)

- La formalizzazione può essere una formula con variabili libere: questo capita quando l'asserzione da formalizzare riguardi uno o più elementi, non meglio determinati, del dominio del discorso.

  Esempio. L'asserzione

  x è un numero primo

  asserisce una proprietà di x, che dovrà quindi comparire libera nella formalizzazione.
  Per esempio, considerando la struttura $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$, nel linguaggio $L = \{\cdot, 1\}$ con l'interpretazione standard, l'asserzione può formalizzare come

  $$x \neq 1 \wedge \forall y \forall z (y \cdot z = x \rightarrow y = 1 \vee z = 1)$$

  che è una formula con variabile libera x.

Esempio

L'asserzione

esiste un x che è un numero primo

non asserisce una proprietà di x: è la quantificazione esistenziale dell'asserzione precedente. La sua formalizzazione è un enunciato:

$$\exists x(x \neq 1 \land \forall y \forall z(y \cdot z = x \rightarrow y = 1 \lor z = 1))$$

In effetti, l'asserzione potrebbe essere più semplicemente enunciata come

esistono dei numeri primi

Osservazioni (cont.)

- È importante capire bene un'asserzione, per poterla formalizzare. Per esempio, spesso la quantificazione è sottintesa.

  Esempio. Nell'asserzione

  Tutti i numeri primi maggiori di 2 sono dispari

  c'è una quantificazione universale esplicita: *tutti*.
  Tuttavia tale asserzione si può esprimere equivalentemente come

  i numeri primi maggiori di 2 sono dispari

  Una formalizzazione di questa asserzione è del tipo:

  $$\forall x(\varphi(x) \to \psi(x))$$

  dove

  - $\varphi(x)$ è una formalizzazione dell'asserzione: x è un numero primo maggiore di 2
  - $\psi(x)$ è una formalizzazione dell'asserzione: x è dispari

Esempio

Si voglia formalizzare in $\mathbb{N}$ l'asserzione

il quadrato di un numero pari è pari

utilizzando il linguaggio $\{P, \cdot\}$, dove

- P è simbolo relazionale unario; $P(x)$ è interpretato come: x è pari
- $\cdot$ è simbolo funzionale binario, interpretato come l'operazione di moltiplicazione

Nella frase non c'è una locuzione esplicita per indicare una quantificazione, ma il significato è

per ogni numero, se è pari, allora il suo quadrato è pari

Una formalizzazione è quindi

$$\forall x\ (P(x) \rightarrow P(x \cdot x))$$

Quantificatori limitati

Tipicamente le quantificazioni di un'asserzione sono limitate a un sottoinsieme del dominio individuato da una qualche proprietà.

Esempio. Sia assuma $\mathbb{R}$ come dominio, e si consideri l'asserzione

> tutti i numeri positivi sono il quadrato di qualche numero

Si tratta di una quantificazione universale.
Tuttavia l'affermazione conclusiva (*essere il quadrato di qualche numero*) non è asserita per tutti i numeri, ma solo per i numeri che hanno la proprietà di essere positivi: la quantificazione universale è *limitata* ai numeri positivi.

Quantificatori limitati

L'asserzione

tutti i numeri positivi sono il quadrato di qualche numero

può cioè essere riformulata come

ogni numero, se è positivo, allora è il quadrato di qualche numero

In un linguaggio che contenga:

- un simbolo relazionale unario P, dove $P(x)$ è interpretato come: x è positivo
- un simbolo funzionale binario $\cdot$, interpretato come l'operazione di moltiplicazione

tale asserzione può essere formalizzata come

$$\forall x(P(x) \to \exists y\ x = y \cdot y)$$

Quantificatori limitati

L'asserzione

esiste un numero primo che è pari

è una quantificazione esistenziale.
L'affermazione *essere pari* è asserita per qualche numero primo.
Si tratta dunque di una quantificazione esistenziali limitata ai numeri primi. Può essere riformulata come

esiste un numero che è primo ed è pari

Nel dominio $\mathbb{N}$, utilizzando un linguaggio che contenga due simboli relazionali unari P, Q, interpretati come:

- $P(x)$: x è primo
- $Q(x)$: x è pari

una formalizzazione di tale frase è

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$$

Quantificatori limitati

Quindi:

- l'asserzione

  per ogni x che soddisfa $P(x)$ vale che...

  è una quantificazione universale limitata, e si formalizza

  $$\forall x(P(x) \rightarrow \ldots)$$

- l'asserzione

  esiste x che soddisfa $P(x)$ tale che...

  è una quantificazione esistenziale limitata, e si formalizza

  $$\exists x(P(x) \land \ldots)$$

Quantificatori limitati

Cioè:

- Una quantificazione universale limitata è seguita da un'implicazione: l'antecedente di tale implicazione è la proprietà su cui è limitata la quantificazione.
- Una quantificazione esistenziale limitata è seguita da una congiunzione: un congiungendo è la proprietà su cui è limitata la quantificazione.

Esempio

Si consideri un linguaggio che contenga simboli relazionali unari M, U, interpretati come segue:

- $M(x)$: x è mortale
- $U(x)$: x è un uomo

L'asserzione

ogni uomo è mortale

si formalizza

$$\forall x(U(x) \to M(x))$$

L'asserzione

qualche uomo è mortale

si formalizza

$$\exists x(U(x) \land M(x))$$

Alcune convenzioni

Alcuni simboli relazionali/funzionali/di costante sono simboli di uso corrente. Per esempio:

$$\leq, <, \geq, \ +, \cdot, 0, 1, 2, \ldots$$

È comodo allora usare delle abbreviazioni convenzionali a cui si è abituati. Per esempio

$$t_1 < t_2 < t_3$$

è un'abbreviazione per

$$t_1 < t_2 \wedge t_2 < t_3$$

la quale a sua volta abbrevia

$$((< (t_1, t_2)) \wedge (< (t_2, t_3)))$$

Inoltre il più delle volte tali simboli saranno interpretati in una struttura nel modo standard.
Per esempio, in una struttura numerica il simbolo 0 sarà normalmente interpretato con il numero zero.

Esempio

Formalizzare in $\mathbb{R}$ la frase

non esiste un numero che sia il più grande di tutti

utilizzando il linguaggio contenente solo il simbolo relazionale binario $\leq$, interpretato nella maniera standard.

Significa che:

- Il linguaggio del prim'ordine da utilizzare è $\{\leq\}$, dove $\leq$ è un simbolo relazionale binario
- La struttura nella quale la frase data è l'interpretazione della formula da scrivere è $(\mathbb{R}, \leq)$, dove $\leq$ è la relazione *minore o uguale*

Una formalizzazione dell'asserzione data è allora

$$\neg \exists x \forall y \; y \leq x$$

Esempio

L'asserzione

dati due numeri diversi tra loro, esiste un numero strettamente compreso tra i due numeri dati

utilizzando un linguaggio contenente un simbolo relazionale binario $<$ si formalizza in $(\mathbb{N}, <)$ come

$$\forall x \forall y (x \neq y \to \exists z (x < z < y \lor y < z < x))$$

Esempio

Sia $L = \{<, \cdot, 0\}$, dove i simboli non logici di L sono intepretati nel modo standard.

L'asserzione

ogni numero positivo ha una radice quadrata

si formalizza in $\mathbb{R}$ utilizzando il linguaggio L come

$$\forall x (0 < x \to \exists y \; y \cdot y = x)$$

Esempio

Si voglia formalizzare in $\mathbb{N}$ l'asserzione

3 è dispari

- Utilizzando il linguaggio $\{|, 2, 3\}$, dove $|$ è un simbolo relazionale binario (interpretando $x|y$ come: x è un divisore di y) e $2, 3$ sono simboli di costante, interpretati in modo standard, si può definire *essere dispari* come la negazione di *essere pari*.
  Una formalizzazione è quindi
  $$\neg 2|3$$
- Utilizzando invece il linguaggio $\{+, \cdot, 1, 2, 3\}$, con i simboli interpretati in modo standard, una formalizzazione è
  $$\exists x \; 3 = 2 \cdot x + 1$$

Esempio

Si consideri un linguaggio costituito da

- un simbolo relazione binario $|$, dove $x|y$ è interpretato come: x è un divisore di y
- i simboli $<, +, 1$ con il loro significato usuale

Si voglia formalizzare in $\mathbb{N}$ l'asserzione

ogni primo maggiore di 2 è dispari

Nota: non c'è alcun simbolo di costante nel linguaggio da interpretare direttamente con il numero 2. Bisogna costruirsi un termine adatto: $1+1$.
Similmente, non c'è un simbolo relazionale da interpretare direttamente con la relazione *essere un numero primo*.

Una formalizzazione è quindi:

$$\forall x \; (\underbrace{1+1<x}_{x \text{ è minore di } 2} \wedge \underbrace{\forall z(z|x \to z=1 \vee z=x)}_{x \text{ è primo}} \to \underbrace{\neg(1+1)|x}_{x \text{ è dispari}})$$

Esempio

Durante una formalizzazione può essere opportuno dare temporaneamente un nome a sottoformule o termini, che saranno poi formalizzati successivamente e inseriti nella formula finale.

Si consideri il linguaggio costituito da

- un simbolo relazionale binario $|$, dove $x|y$ è interpretato come: x è un divisore di y
- simboli $<, +, 1$ con il loro significato usuale

Utilizzando questo linguaggio, si formalizzi in $\mathbb{N}$ l'asserzione

> esistono due numeri consecutivi entrambi primi

Si denoti temporaneamente una formula

$$pr(x) : x \text{ è un numero primo}$$

che sarà formalizzata in seguito.

Esempio (cont.)

L'asserzione dell'esistenza di due primi consecutivi diventa allora

$$\exists x(pr(x) \land pr(x+1))$$

Resta da scrivere la formula $pr(x)$, che avrà x come variabile libera:

$$1 < x \land \forall y(y|x \to y = 1 \lor y = x)$$

Si ottiene quindi l'enunciato:

$$\exists x(\underbrace{1 < x \land \forall y(y|x \to y = 1 \lor y = x)}_{pr(x)} \land$$
$$\land \underbrace{1 < x+1 \land \forall y(y|(x+1) \to y = 1 \lor y = x+1)}_{pr(x+1)})$$

Si tratta di una quantificazione esistenziale di una congiunzione (generalizzata) di quattro formule.
Si osservi che, nella struttura $(\mathbb{N}, <, |, +, 1)$ considerata, la sottoformula $1 < x+1$ segue dalla sottoformula $1 < x$; pertanto la sottoformula $1 < x+1$ è ridondante e si può omettere.
In definitiva, si trova la formalizzazione richiesta:

$$\exists x(1 < x \land \forall y(y|x \to y = 1 \lor y = x) \land \forall y(y|(x+1) \to y = 1 \lor y = x+1))$$