Quantificatori per contare

L'uso dei quantificatori permette di esprimere l'esistenza di almeno/al più/esattamente n elementi con una data proprietà, qualunque sia n.

Esempi.

- L'asserzione

  esiste un unico x tale che $P(x)$

  si formalizza

  $$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow y = x))$$

  Nota. Spesso questa formula si abbrevia con

  $$\exists! x P(x)$$

- In presenza di un simbolo di costante c, l'asserzione

  c è l'unico per cui vale P

  si formalizza

  $$P(c) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow y = c)$$

Esempio

Si consideri un linguaggio consistente di:

- un simbolo relazionale unario pr, dove $pr(x)$ significa: x è primo
- un simbolo relazionale unario P, dove $P(x)$ significa: x è pari
- un simbolo di costante 2, col significato usuale

- Esiste un unico numero primo pari:

$$\exists x(pr(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(pr(y) \wedge P(y) \rightarrow y = x))$$

- 2 è l'unico numero primo pari:

$$pr(2) \wedge P(2) \wedge \forall y(pr(y) \wedge P(y) \rightarrow y = 2)$$

Quantificatori per contare (cont.)

L'asserzione

esistono (almeno) n oggetti per cui vale P

si può formalizzare

$$\begin{aligned}\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n (x_1 \neq x_2 \quad & \wedge x_1 \neq x_3 \wedge \ldots \wedge x_1 \neq x_n \wedge \\ & \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \ldots \wedge x_2 \neq x_n \wedge \\ & \wedge \ldots \wedge \\ & \wedge x_{n-1} \neq x_n \wedge P(x_1) \wedge \ldots \wedge P(x_n))\end{aligned}$$

Esempio

Si consideri un linguaggio il cui unico simbolo non logico sia un simbolo relazionale unario pr, tale che $pr(x)$ sia interpretato come: x è un numero primo.
L'asserzione

esistono almeno 3 numeri primi

si può formalizzare

$$\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge pr(x) \wedge pr(y) \wedge pr(z))$$

Quantificatori per contare (cont.)

L'asserzione

esistono al più n oggetti per cui vale P

è la negazione di

esistono almeno $n+1$ oggetti per cui vale P

Esempi

Si consideri il linguaggio che consiste del simbolo funzionale binario $\cdot$, interpretato nel modo standard.

L'asserzione

ogni numero è il quadrato di al più 2 numeri

si formalizza

$$\forall x \neg \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge x = x_1 \cdot x_1 \wedge x = x_2 \cdot x_2 \wedge x = x_3 \cdot x_3)$$

Equivalentemente:

$$\forall x \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x = x_1 \cdot x_1 \wedge x = x_2 \cdot x_2 \wedge x = x_3 \cdot x_3 \rightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \vee x_2 = x_3)$$

Quantificatori per contare (cont.)

L'asserzione

esistono esattamente n oggetti per cui vale P

è la congiunzione:

esistono almeno n oggetti per cui vale P ed esistono al più n oggetti per cui vale P

cioè

esistono almeno n oggetti per cui vale P e non esistono $n+1$ oggetti per cui vale P

Un'altra possibilità è:

esistono n oggetti per cui vale P e tali che ogni oggetto che soddisfa P è uno di quegli n

Esempio

Si consideri il linguaggio costituito da

- un simbolo relazionale unario pr, dove $pr(x)$ è interpretato come: x è un numero primo
- i simboli $<, 4$ con la loro interpretazione usuale

La frase

> esistono esattamente due numeri primi minori di 4

si formalizza

$$\begin{aligned}
&\exists x \exists y (x \neq y \wedge pr(x) \wedge pr(y) \wedge x < 4 \wedge y < 4) \wedge \\
&\wedge \neg \exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge pr(x) \wedge pr(y) \wedge pr(z) \wedge \\
&\wedge x < 4 \wedge y < 4 \wedge z < 4)
\end{aligned}$$

o anche

$$\begin{aligned}
\exists x \exists y \quad & (x \neq y \wedge pr(x) \wedge pr(y) \wedge x < 4 \wedge y < 4 \wedge \\
& \forall z (pr(z) \wedge z < 4 \rightarrow z = x \vee z = y))
\end{aligned}$$

Esempio

Sia P un simbolo relazionale unario (da interpretare come una proprietà che ha interesse in campo numerico).
In un linguaggio che contenga il simbolo P e il simbolo relazionale binario $\leq$ (da interpretare nel modo standard), si voglia formalizzare:

esistono numeri arbitrariamente grandi per cui vale P

La locuzione significa che, dato un qualunque numero, ne esiste uno almeno altrettanto grande che ha la proprietà P.

Quindi una formalizzazione è

$$\forall x \exists y (x \leq y \land P(y))$$

In modo analogo si procede se:

- invece della relazione $\leq$ si ha la relazione $<$
- invece di una formula atomica $P(y)$ si considera una qualunque altra formula $\varphi(y)$

Esempio

L'asserzione

esistono numeri quadrati arbitrariamente grandi

nel linguaggio $\{<, \cdot\}$ con l'interpretazione usuale, si formalizza

$$\forall x \exists y (x < y \wedge \exists z \; y = z \cdot z)$$

Esempio

In $\mathbb{N}$, l'asserzione

esistono infiniti numeri per cui vale P

è equivalente a

esistono numeri arbitrariamente grandi per cui vale P

Esempio

In un linguaggio che consista di

- un simbolo relazionale unario pr, dove $pr(x)$ è interpretato come: x è un numero primo
- un simbolo relazionale binario $<$, interpretato nel modo standard

l'asserzione

esistono infiniti numeri primi

si formalizza

$$\forall x \exists y (x < y \land pr(y))$$

Nota: Questo in generale non è vero per strutture il cui universo non sia $\mathbb{N}$.

In generale, *non si può formalizzare al prim'ordine un'asserzione del tipo*:

ci sono infiniti oggetti tali che ...

Esempio

L'asserzione

> per ogni numero sufficientemente grande vale P

significa che c'è un numero (soglia) tale che a partire da quel numero ogni numero ha la proprietà P.

Quindi, in un linguaggio che contenga il simbolo relazionare binario $\leq$ (intepretato in modo standard), tale affermazione si scrive

$$\exists x \forall y (x \leq y \to P(y))$$

Similmente con il simbolo $<$, interpretato in maniera standard.

Esempio

Si consideri il linguaggio $\{<, +, 0\}$, interpretato in modo standard.

L'asserzione

ogni numero sufficientemente grande è la somma di 3 addendi positivi

si formalizza

$$\exists x \forall y (x < y \to \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 (0 < z_1 \wedge 0 < z_2 \wedge 0 < z_3 \wedge y = z_1 + z_2 + z_3))$$

Esempio

L'asserzione

> tra due elementi che soddisfano la proprietà P ce n'è uno che soddisfa la proprietà Q, e viceversa

significa:

> tra due elementi che soddisfano P ce n'è uno che soddisfa Q
> e
> tra due elementi che sodddisfano Q ce n'è uno che soddisfa P

Esempio (cont.)

In un linguaggio che contenga:

- i simboli relazionali unari P, Q
- un simbolo relazionale binario $<$, intepretato in maniera standard

l'asserzione si può formalizzare in un contesto numerico (o, più in generale, ordinato) come:

$$\begin{array}{l}\forall x \forall y(x < y \wedge P(x) \wedge P(y) \rightarrow \exists z(x < z < y \wedge Q(z)))\wedge \\ \wedge \forall x \forall y(x < y \wedge Q(x) \wedge Q(y) \rightarrow \exists z(x < z < y \wedge P(z)))\end{array}$$

Esempio

Si consideri un linguaggio contenente

- un simbolo relazionale unario R, dove $R(x)$ è interpretato come: x è razionale
- un simbolo relazionale binario $<$, interpretato in maniera standard

L'asserzione

> tra due razionali c'è un irrazionale, e viceversa

si può formalizzare:

$$\forall x \forall y (x < y \wedge R(x) \wedge R(y) \to \exists z (x < z < y \wedge \neg R(z))) \wedge$$
$$\wedge \forall x \forall y (x < y \wedge \neg R(x) \wedge \neg R(y) \to \exists z (x < z < y \wedge R(z)))$$

Esempio

Si considerino il linguaggio $\{<, \cdot, 10\}$, interpretato nella maniera standard nella struttura $(\mathbb{N}, <, \cdot, 10)$.

L'affermazione

> ci sono almeno 2 numeri quadrati più piccoli di 10

si può formalizzare:

$$\exists x \exists y (x \neq y \wedge q(x) \wedge q(y) \wedge x < 10 \wedge y < 10)$$

dove $q(x)$ è una formula che esprime: x è un numero quadrato.
Poichè

$$q(x): \quad \exists z \; x = z \cdot z$$

l'asserzione considerata si formalizza come:

$$\exists x \exists y (x \neq y \wedge \underbrace{\exists z \; x = z \cdot z}_{q(x)} \wedge \underbrace{\exists z \; y = z \cdot z}_{q(y)} \wedge x < 10 \wedge y < 10)$$

Esempio

In un dominio costituito da tutti i punti e tutte le rette del piano, si consideri l'affermazione

> per due punti distinti passa una e una sola retta

Sia $L = \{P, R, \in\}$, intepretato nel modo seguente:

- $P(x)$: x è un punto
- $R(x)$: x è una retta
- $\in$ è interpretato in maniera standard, cioè $x \in y$ significa: x appartiene a y

L'asserzione si può formalizzare in L come:

$$\forall x \forall y (P(x) \land P(y) \land x \neq y \to \exists z (R(z) \land x \in z \land y \in z \land \\ \land \forall w (R(w) \land x \in w \land y \in w \to w = z)))$$

o anche

$$\forall x \forall y (P(x) \land P(y) \land x \neq y \to \exists ! z (R(z) \land x \in z \land y \in z))$$

Esempio

Si voglia formalizzare in $\mathbb{N}$ l'affermazione

esistono infiniti numeri primi

con un linguaggio L che contenga

- un simbolo relazionale binario $<$, interpretato in modo standard
- un simbolo relazionale binario $|$, dove $x|y$ significa: x è un divisore di y

Sia $pr(x)$ è una formula che asserisce: x è un numero primo.
Allora una formalizzazione dell'asserzione è

$$\forall x \exists y (x < y \wedge pr(y))$$

Se il linguaggio contenesse un simbolo di costante 1, interpretato in modo standard, si potrebbe formalizzare

$$pr(y) : \quad 1 < y \wedge \forall z (z|y \rightarrow z = 1 \vee z = y)$$

Esempio (cont.)

ottenendo

$$\forall x \exists y (x < y \wedge \underbrace{1 < y \wedge \forall z (z | y \rightarrow z = 1 \vee z = y)}_{pr(y)})$$

La sottoformula $1 < y$ è eliminabile, cioè (in $\mathbb{N}$)

$$\forall x \exists y (x < y \wedge 1 < y \wedge \varphi) \tag{1}$$

è equivalente a

$$\forall x \exists y (x < y \wedge \varphi) \tag{2}$$

Infatti:

- Se vale (1), vale anche (2), che richiede una condizione in meno
- Se vale (2), per verificare (1) si consideri un qualunque x. La condizione (2) può allora essere applicata a $\max(x, 1)$ al posto di x. L'elemento y che verifica $\max(x, 1) < y \wedge \varphi$ verifica anche $x < y \wedge 1 < y \wedge \varphi$

Esempio (cont.)

Si è dunque arrivati a

$$\forall x \exists y (x < y \wedge \forall z (z|y \rightarrow z = 1 \vee z = y))$$

Resta ancora il problema di rimpiazzare la sottoformula $z = 1$, poichè 1 non fa parte del linguaggio dato: $L = \{<, |\}$.

Si osserva allora che, in $\mathbb{N}$, il numero 1 è l'unico che divide tutti i numeri naturali, cioè $z = 1$ è esprimibile come $\forall w \; z|w$.

In definitiva, l'asserzione

esistono infiniti numeri primi

è formalizzabile in $\mathbb{N}$ nel linguaggio L come:

$$\forall x \exists y (x < y \wedge \forall z (z|x \rightarrow \underbrace{\forall w \; z|w}_{z=1} \vee z = y))$$