Tautologie

Alcune asserzioni risultano sempre vere, indipendentemente dal contesto in cui sono interpretate.

Esempio. L'asserzione $P \vee \neg P$ è vera (principio del terzo escluso).

Infatti, se P è vera, allora segue anche $P \vee \neg P$. Se invece P è falsa, allora $\neg P$ è vera, e quindi ancora $P \vee \neg P$ è vera.

Le affermazioni che sono vere in qualunque contesto si dicono *tautologie*. Quindi Q è una tautologia se e solo se

$$\models Q$$

cioè Q è sempre vera, senza bisogno di ipotesi aggiuntive.

Contraddizioni

Un'asserzione che risulta falsa in ogni contesto in cui sia interpretata si dice *contraddizione*.

Quindi se Q è una tautologia, allora $\neg Q$ è una contraddizione.

Esempio. $\neg(P \vee \neg P)$ è una contraddizione.

Usando le proprietà viste,

$$\neg(P \vee \neg P) \equiv \neg P \wedge \neg\neg P \equiv \neg P \wedge P \equiv P \wedge \neg P$$

Quindi anche $P \wedge \neg P$ è una contraddizione.

Osservazione

Supponiamo che P sia una contraddizione e Q un'asserzione qualsiasi. Allora

$$P \models Q$$

Infatti in qualunque contesto sia vera P è vera Q, in quanto non c'è alcun contesto in cui P sia vera: da un'affermazione sempre falsa, in questo caso P, segue qualsiasi conseguenza Q.

L'implicazione

L'implicazione

$$P \to Q$$

asserisce che tutte le volte in cui P è vera, allora anche Q è vera.
L'asserzione P si chiama anche *antecedente* dell'implicazione, l'asserzione Q è il *conseguente* dell'implicazione.

Esempio. Si consideri l'implicazione

$$x > 7 \to x + 5 > 10$$

Si tratta di un'implicazione vera: tutte le volte che $x > 7$, allora si ha che $x + 5 > 10$.

L'implicazione

Nei contesti in cui l'antecedente P è falso, l'implicazione $P \to Q$ è vera. Infatti $P \to Q$ asserisce che: se P è vera allora anche Q dev'essere vera.

Nell'esempio dell'implicazione (vera per tutti gli x)

$$x > 7 \to x + 5 > 10$$

quando l'antecedente è falso può succedere qualunque cosa al conseguente, senza influenzare il valore di verità dell'implicazione: per es.

- se $x = 6$ l'antecedente $x > 7$ è falso e il conseguente $x + 5 > 10$ è vero
- se $x = 3$ l'antecedente $x > 7$ è falso e il conseguente $x + 5 > 10$ è falso

Ciò che importa, per la verità dell'implicazione $P \to Q$, è solo che Q sia vera quando P è vera.

L'implicazione

In altre parole, un'implicazione $P \to Q$ è falsa se e solo se

- l'antecedente P è vero; e inoltre
- il conseguente Q è falso

Quindi

$$P \to Q \equiv \neg P \vee Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$$

In particolare, il connettivo $\to$ può essere definito a partire da $\neg$ e $\vee$ (o a partire da $\neg$ e $\wedge$).

Implicazione e conseguenza logica

L'implicazione cattura il significato di conseguenza logica, nel senso che

$$P \models Q \quad \text{se e solo se} \quad \models P \to Q$$

Infatti:

- Supponiamo che $P \models Q$: in tutti i contesti in cui vale P, vale anche Q. Allora non c'è alcun contesto in cui P sia vera e Q sia falsa, ovvero $P \land \neg Q$ non si verifica mai. Questo significa $\models \neg(P \land \neg Q)$, cioè $\models P \to Q$.
- Viceversa, supponiamo che $\models P \to Q$. Per concludere $P \models Q$ si deve osservare che dalla verità di P segue la verità di Q.
  In effetti, quando P è vera, l'asserzione Q non può essere falsa, altrimenti $P \to Q$ non sarebbe una tautologia.

Implicazione e conseguenza logica

Più in generale, ricordando che $P_1, \ldots, P_n \models Q$ significa che in ogni contesto in cui siano vere tutte $P_1, \ldots, P_n$ è vera anche Q, e osservando che $P_1, \ldots, P_n$ sono tutte vere se e solo se $P_1 \wedge \ldots \wedge P_n$ è vera, si ha che

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \models Q$$

se e solo se

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \models Q$$

se e solo se

$$\models (P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \to Q$$

Terminologia

Per esprimere a parole l'implicazione

$$P \to Q$$

si usano varie locuzioni, tra cui:

- se P allora Q
- P è (condizione) sufficiente per Q
- Q è (condizione) necessaria per P
- ...

Nota. La locuzione

$$Q \text{ è condizione necessaria per } P$$

significa che se Q non vale non può valere neanche P.
Infatti $P \to Q$ vuol proprio dire che se vale P deve valere anche Q; equivalentemente: se Q non vale, non può valere neanche P.

Osservazioni

- Asserire un'implicazione

$$P \to Q$$

non significa pretendere che ci sia una relazioni di causa/effetto tra l'antecedente P e il conseguente Q.

Esempio. L'implicazione

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \to \text{tutti gli studenti otterranno 30 all'esame}$$

è vera (perché?), anche se antecedente e conseguente dell'implicazione non hanno alcuna attinenza tra loro.

Osservazioni

- L'implicazione *non* è commutativa:

  $$P \to Q \not\equiv Q \to P$$

  Per esempio, se P è vera e Q è falsa, allora $P \to Q$ è falsa, mentre $Q \to P$ è vera.
- L'implicazione *non* è associativa:

  $$(P \to Q) \to R \not\equiv P \to (Q \to R)$$

  Per esempio, se P e R sono false:
  - $P \to Q$ è vera, quindi $(P \to Q) \to R$ è falsa; invece
  - $P \to (Q \to R)$ è vera

Osservazioni

- Vale la contrapposizione:

$$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$$

  Infatti, utilizzando equivalenze già ottenute:

$$P \to Q \equiv \neg P \vee Q \equiv \neg P \vee \neg\neg Q \equiv \neg\neg Q \vee \neg P \equiv \neg Q \to \neg P$$

- Se $P \equiv R$ e $Q \equiv S$, allora

$$P \to Q \equiv R \to S$$

  Infatti, utilizzando equivalenze già ottenute:

$$P \to Q \equiv \neg P \vee Q \equiv \neg R \vee S \equiv R \to S$$

Modus ponens

$$P, P \to Q \models Q$$

Infatti, in un contesto in cui P e $P \to Q$ sono vere, anche

$$\neg\neg P \quad \text{e} \quad \neg P \vee Q$$

sono vere; pertanto, per la legge della disgiunzione, Q è vera.