11_12_13

sabato 2 dicembre 2023 14:20

logica del prim'ordine

La logica del prim'ordine estende la logica proposizionale

Si fissa una collezione di simboli logici:

- parentesi ( )
- virgola ,
- connettivi $\neg$ $\vee$ $\wedge$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$
- quantificatori $\exists$ $\forall$
- simbolo d'uguaglianza $=$
- variabili v_0 v_1 v_2

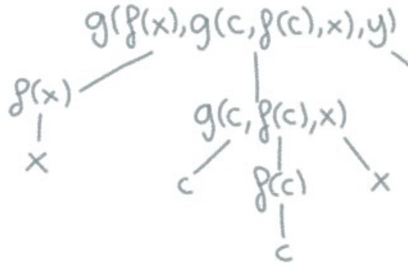
albero sintattico di un termine

L'albero sintattico di un termine descrive algoritmicamente la costruzione del termine

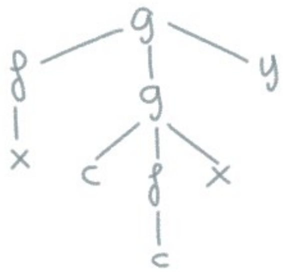
esempio: $L=\{f,g,c\}$, dove

- f è simbolo funzionale unario
- g è simbolo funzionale ternario
- c è simbolo di costante

L'albero sintattico del termine $g(f(x),g(c,f(c),x),y)$ è



cioè



Due misure di complessità per un termine t sono:

- la lunghezza $lh(t)$, cioè il numero di simboli nella stringa t
- l'altezza $ht(t)$, cioè il minimo n tale che $t \in Term_n$, cioè l'altezza dell'albero sintattico di t

termini e polinomi

Sia $L=\{+,\cdot,1\}$, dove:

- $+,\cdot$ sono simboli funzionali binari
- 1 è simbolo di costante

esempio: Sia t il termine $+(+(\cdot(x,x),\cdot(+(1,1),\cdot(x,y))),1)$

Scrivendo i simboli binari in mezzo ai termini a cui sono applicati, cioè:

- t_1+t_2 al posto di $+(t_1,t_2)$
- $t_1\cdot t_2$ al posto di $\cdot(t_1,t_2)$

il termine t si può scrivere $((x\cdot x)+((1+1)\cdot(x\cdot y)))+1$, che si può ulteriormente abbrieviare come $x^2+2xy+1$

formule atomiche

Una formula atomica è una stringa del tipo $(R(t_1,t_2,\ldots,t_n))$ dove R è simbolo relazionale

formule atomiche

Una formula atomica è una stringa del tipo $(R(t_1,t_2,\dots,t_n))$ dove R è simbolo relazionale n-ario di L, e $t_1,\dots,t_n \in$ Term

esempio: Sia $L=\{<,+,\cdot,0,1\}$, dove
- $<$ è simbolo relazionale binario
- $+,\cdot$ sono simboli funzionali binari
- $0,1$ sono simboli di costante

$$\left.\begin{array}{l}(=(+(\cdot(x,x),1),0))\\(<(+(\cdot(x,x),1),0))\end{array}\right\}\text{formule atomiche}$$

Per riconoscere se una stringa è una formula atomica si controlla che:
- il primo e l'ultimo simbolo della stringa siano parentesi corrispondenti
- il secondo simbolo della stringa sia un simbolo di relazione
- il terzo e il penultimo simbolo della stringa siano parentesi

formule del prim'ordine

- Ogni formula atomica è una formula
- Se φ è una formula, allora $(\neg\varphi)$ è una formula
- Se φ,ψ sono formule, allora $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\to\psi)$, $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ sono formule
- Se φ è una formula e x è una variabile, allora $(\exists x\varphi)$ e $(\forall x\varphi)$ sono formule

La costante logica principale di una formula non atomica φ è l'ultima costante logica applicata nella costruzione di φ, cioè:
- Se φ è della forma $(\neg\psi)$, la costante logica principale (connettivo principale) è $\neg$; la formula ψ è la sottoformula principale
- se φ è della forma $(\psi\square\vartheta)$, dove $\square$ è un connettivo binario, la costante logica principale è $\square$; le formule ψ e ϑ sono le sottoformule principali
- se φ è della forma $(Qx\psi)$, dove Q è un quantificatore, la costante logica principale (quantificatore principale) è Q; la formula ψ è la sottoformula principale; la variabile x è la variabile quantificata

Una formula è una ...	se la sua costante logica principale è ...
negazione	$\neg$
disgiunzione	$\vee$
congiunzione	$\wedge$
implicazione	$\to$
biimplicazione	$\leftrightarrow$
formula esistenziale	$\exists$
formula universale	$\forall$

Anche per le formule del prim'ordine, la costruzione è descritta da un albero sintattico

variabili libere e vincolate

Ogni volta che una variabile compare in una formula costituisce un'occorrenza di quella variabile

esempio: $\varphi: \exists x\, f(x,y)=c \to \forall z R(z) \vee S(z)$

non fanno alcuna asserzione su z → occorrenze vincolate

asserisce che z ha la proprietà S → occorrenze libere

DEFINIZIONE

Siano φ una formula e x una variabile

- Se φ è atomica, ogni occorrenza di x in φ è libera
- Se φ è della forma $(\neg\psi)$, allora le occorrenze libere di x in φ sono esattamente le occorrenze libere di x in ψ
- Se φ è della forma $(\psi\square\vartheta)$, dove $\square$ è un connettivo binario, allora le occorrenze libere di x in φ sono le occorrenze libere di x in ψ e le occorrenze libere di x in ϑ
- Se φ è della forma $(Qy\,\psi)$, dove Q è un quantificatore e y è una variabile diversa dalla variabile x, allora le occorrenze libere di x in φ sono esattamente le occorrenze libere di x in ϑ
- Se φ è della forma $(Qx\,\psi)$, dove Q è un quantificatore, allora non ci sono occorrenze libere di x in φ, cioè tutte le occorrenze di x in φ sono vincolate

Un'occorrenza di una variabile x è vincolata se si trova nell'argomento di una quantificazione Qx

- si dice che occorre/che è una variabile libera/vincolata in φ se c'è almeno un'occorrenza libera/vincolata di x in φ
- l'insieme delle variabili che occorrono libere in φ si denoterà $FV(\varphi)$

$\varphi(x_1,\dots,x_n)$ per intendere che le variabili libere di φ sono tra $x_1,\dots,x_n$, cioè $FV(\varphi)\subseteq\{x_1,\dots,x_n\}$

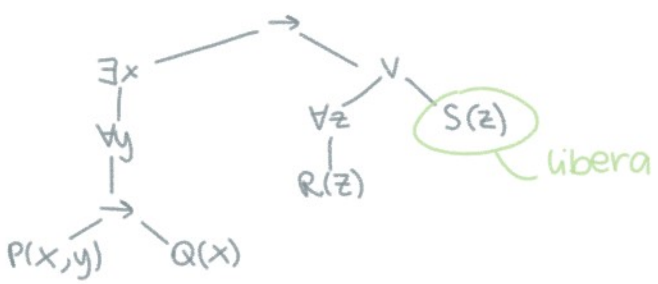
Un enunciato, o formula chiusa, è una formula senza variabili libere, cioè la formula φ è un enunciato se e solo se $FV(\varphi)=\emptyset$

Per individuare se un'occorrenza di x in una formula φ è libera o vincolata, si può ricorrere all'albero sintattico della formula:

- Se l'occorrenza di x è il simbolo successivo a un quantificatore, tale occorrenza è vincolata da quel quantificatore
- Altrimenti, l'occorrenza in questione si trova in una sottoformula atomica di φ, cioè compare nell'etichetta di una foglia dell'albero di φ
- Si ripercorre il ramo dell'albero che contiene tale foglia:
  - Se lungo il ramo compare una quantificazione Qx, allora l'occorrenza è vincolata
  - altrimenti tale occorrenza è libera

esempio: $\exists x\forall y(P(x,y)\to Q(x))\to\forall zR(z)\vee S(z)$

l'albero sintattico è:



$FV(\exists x\forall y(P(x,y)\to(Q(x))\to\forall zR(z)\vee S(z))=\{z\}$

In conclusione:

- Una formula asserisce qualcosa sulle sue variabili libere. Non è di per sé vera o falsa: dipende dai valori assegnati alle sue variabili libere
- Un enunciato, non avendo variabili libere, ha un valore di verità ben definito in qualunque contesto fissato
- In una formula si possono rimpiazzare le variabili vincolate con altre variabili, senza cambiare il significato, ma non si possono rimpiazzare le variabili libere senza cambiare il significato