Modulo di Logica — a.a. 2023/24

Argomenti principali

1. **Logica proposizionale:** Sintassi. Semantica.
2. **Logica del prim'ordine:** Sintassi. Semantica.
3. **Formalizzazioni:** Traduzioni da un linguaggio naturale a un linguaggio formale.

Durata: 24 lezioni (di cui $\frac{1}{4}$ di esercizi).

Esame:
Solo scritto.
Durata: 1h.
Gli appelli d'esame sono comuni col modulo di Algebra, ma gli esami dei due moduli sono indipendenti e possono anche essere sostenuti o superati in appelli diversi.
Al superamento di entrambi i moduli si avrà anche la registrazione complessiva ALI che è la media delle valutazioni ottenute nei due moduli (arrotondata per eccesso).

Testi e riferimenti

- Note del corso (i.e., questi slides)
- A. Frigeri et al.: *Logica e algebra*
- S. Hedman: *A first course in logic*
- . . . : . . . (cioè: quasi qualunque testo di Logica matematica va bene)

Orario di ricevimento: mercoledì 13h-15h (o su appuntamento).
Per ogni richiesta di chiarimenti, spiegazioni, colloqui ecc.:

riccardo.camerlo@unige.it

Sul canale Teams del corso sono presenti le registrazioni di lezioni di a.a. precedenti
Codice d'accesso: 0dcxgqu

Esperimenti vs. dimostrazioni

Il termine **logica** è usato con due significati:

1. Studio del ragionamento.
   La **logica matematica** è lo studio del ragionamento dei matematici.
2. Sinonimo di *linguaggio* formale: logica proposizionale, del prim'ordine, ecc.

Domanda: A cosa serve il ragionamento?
Tentativo di risposta: A stabilire la verità.

Nella maggior parte delle scienze (e.g., fisica, chimica, biologia,...) la verità di un'affermazione è in genere stabilita mediante misurazioni, esperimenti, simulazioni: se gli esperimenti ripetuti confermano l'affermazione, questa è (temporaneamente) accettata, altrimenti è rifiutata.

In matematica (e in informatica teorica) il criterio è differente.

Esempio

Si può decidere sperimentalmente se:

- $\sqrt{2}$ è un numero razionale (cioè esistono numeri interi positivi m, n tali che $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$)?
- esiste un numero intero $n \geq 1$ tale che $991n^2 + 1$ è un quadrato perfetto?

Esercizio. Provare a stabilire sperimentalmente la verità di queste due asserzioni.

Se si procede per via sperimentale, si è indotti a credere che entrambe queste affermazioni sono false, perché:

- non si riescono a trovare m, n tali che $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$
- non si riesce a trovare n tale che $991n^2 + 1$ sia un quadrato perfetto

Esempio (cont.)

Tuttavia:

- Si *dimostra* che non esistono m, n tali che $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$
- Invece esistono dei numeri n (ce n'è addirittura una quantità infinita) tali che $991n^2 + 1$ è un quadrato perfetto.

  Ostacolo: il più piccolo di tali numeri è

  $$12055735790331359447442538767 > 10^{28}$$

  cominciando a provare tutti i numeri, a partire da 1, non c'è alcuna speranza di arrivare a trovarlo.

Teoremi e dimostrazioni

In matematica, le affermazioni vere sono i *teoremi*. Essi sono stabiliti mediante *dimostrazioni*.

Lo stesso vale in informatica teorica: per sapere se un programma funziona, non basta farlo girare tante volte e vedere che non va mai in crash; bisogna *dimostrarne* la *correttezza*.

Tipicamente, un teorema ha la forma seguente:

Teorema. Sotto date *ipotesi* (o *assunzioni*) vale una *tesi* (o *conclusione*).

Cioè

Teorema. Se valgono P_1 e P_2 e ... e P_n, allora vale anche Q.

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ sono le *ipotesi* del teorema

Q è la *tesi* del teorema

Teoremi e dimostrazioni

- È possibile il caso $n = 0$, cioè che Q valga senza fare alcuna assunzione.
- Sa dalle ipotesi $P_1, \ldots, P_n$ segue la tesi Q, si dice anche che

$$P_1, \ldots, P_n \text{ hanno come conseguenza } Q$$

o

$$Q \text{ è conseguenza di } P_1, \ldots, P_n$$

Esempio

Teorema. Se n è un numero dispari e m è un numero pari, allora $n + m$ è dispari.

Le ipotesi sono

- n è un numero dispari
- m è un numero pari

La tesi è

- $n + m$ è un numero dispari

Terminologia

Oltre a *teorema*, altri termini che si usano in matematica per indicare delle asserzioni sono *proposizione*, *lemma*, *corollario*,...

Tecnicamente, si tratta di sinonimi: sono tutte affermazioni che ammettono una dimostrazioni. La differenza nell'uso dipende dall'importanza soggettiva che si attribuisce a questi enunciati. Di solito:

- *Teorema* è un enunciato importante, molto significativo, e spesso con una dimostrazione complessa
- *Proposizione* è un enunciato meno importante, ma comunque interessante
- *Lemma* è un enunciato che appare non molto importante di per sè, ma che è ausiliario per dedurre altri enunciati
- *Corollario* è un enunciato la cui dimostrazione segue facilmente da enunciati precedenti

Analizzando il ragionamento matematico, queste distinzioni sono irrilevanti, e si userà sempre il termine *teorema*.

Dimostrazioni

Una *dimostrazione* è un ragionamento logico che mostra che la tesi di un teorema vale, assumendo che valgano le ipotesi.
È costituita da una sequenza di affermazioni, la validità di ognuna della quale segue dalla validità delle precedenti.

La verità o meno di un'affermazione può dipendere da un *contesto*, ovvero da come si *interpretano* alcune parti dell'affermazione.

Esempio. L'affermazione

$$n \text{ è un numero naturale dispari}$$

è vera se $n = 3$, falsa se $n = 8$.

Si dovrà dunque rendere rigorosa la nozione di *contesto* perché il concetto di verità di un'affermazione sia preciso.

Dimostrazioni

Per **creare** una dimostrazione si usano varie strategie, spesso combinate tra loro, a seconda dell'enunciato che si vuole dimostrare. Alcune tra le principali sono:

- la dimostrazione diretta
- la dimostrazione per assurdo (o contraddizione)
- la dimostrazione per contrapposizione
- la dimostrazione per composizione (o interpolazione)
- la dimostrazione per casi

Si dovrà *dimostrare* che queste strategie sono corrette, cioè che se applicate a delle ipotesi vere ne fanno discendere delle conseguenze vere.

La dimostrazione diretta

La dimostrazione diretta è la strategia più naturale per cercare di dimostrare un'affermazione del tipo

$$\text{Se } P_1 \text{ e } P_2 \text{ e} \ldots \text{e } P_n \text{ allora } Q$$

consiste nell'assumere di trovarsi in un qualunque contesto in cui $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sono verificate e concludere in modo rigoroso che allora anche Q è verificata.

Esempio

Teorema. Se n è un numero intero dispari e m è un numero intero pari, allora $n+m$ è un numero intero dispari.

Dimostrazione.

- **Ipotesi:**
  P_1 : n è un numero intero dispari,
  P_2 : m è un numero intero pari
- **Tesi:** Q : $n+m$ è un numero intero dispari

Siano n, m interi e assumiamo che n sia dispari e m sia pari, al fine di dimostrare che $n+m$ è dispari.
Le assunzioni significano che: esiste un numero intero l tale che $n = 2l + 1$ ed esiste un numero intero k tale che $m = 2k$. Allora

$$\begin{aligned} n+m &= (2l+1)+2k = \\ &= (2l+2k)+1 = \\ &= 2(l+k)+1 \end{aligned}$$

Quindi $n+m$ è dispari, perché è della forma $n+m = 2j+1$ per qualche numero intero j (per la precisione, $j = l+k$).

La dimostrazione per assurdo

Una dimostrazione per assurdo del fatto che dalle ipotesi $P_1, \ldots, P_n$ segue Q consiste nell'assumere che $P_1, \ldots, P_n$ sono vere ma che Q sia falsa, e da questo derivare una contraddizione, per esempio che valgano contemporaneamente un'affermazione R e la sua negazione.

Di conseguenza, non può essere che Q sia falsa, cioè Q è vera.

Esempio

Teorema. Per tutti i numeri reali x e y, se $x + y \geq 2$, allora $x \geq 1$ o $y \geq 1$.

Dimostrazione.

- **Ipotesi:** $P : x + y \geq 2$
- **Tesi:** $Q : x \geq 1$ o $y \geq 1$

Siano x, y numeri reali e si supponga che $x + y \geq 2$ sia vero, ma che $x \geq 1$ o $y \geq 1$ sia falso, cioè che si abbia $x < 1$ e $y < 1$. Ma allora $x + y < 1 + 1 = 2$, contraddizione con $x + y \geq 2$.

Dunque si è dimostrato che, assumendo l'ipotesi $x + y \geq 2$, l'affermazione $x \geq 1$ o $y \geq 1$ non può essere falsa (pena una contraddizione: contemporaneamente $x + y \geq 2$ e $x + y < 2$) quindi è vera.

Esempio

Teorema. Per ogni numero intero n, se n^2 è pari, allora n è pari.

Dimostrazione.

- **Ipotesi:** P : n^2 è pari
- **Tesi:** Q : n è pari

Si assuma per assurdo che P sia vera e che Q sia falsa, cioè che n^2 sia pari, ma n non sia pari, cioè n sia dispari. Allora esiste un numero intero m tale che $n = 2m + 1$. Quindi

$$\begin{aligned} n^2 &= (2m+1)^2 = \\ &= 4m^2 + 4m + 1 = \\ &= 2(2m^2 + 2m) + 1 \end{aligned}$$

che è un numero dispari, in contraddizione con l'ipotesi P.

Pertanto, se vale P, deve valere anche Q.

La dimostrazione per contrapposizione

Per dimostrare un teorema del tipo

$(*)$ Se P allora Q

si può dimostrare (in modo diretto o no) il teorema

$(**)$ Se non Q, allora non P

Infatti, supponiamo di aver dimostrato $(**)$; vogliamo far vedere che vale anche $(*)$. Assumiamo quindi P, al fine di dimostrare che Q è vero. L'affermazione Q deve essere vera, perché altrimenti varrebbe non Q e quindi, oltre a P, grazie a $(**)$ varrebbe anche non P, contraddizione.

Esempio

Si può dimostrare per contrapposizione il

Teorema. Se n^2 è un numero intero pari, allora n è un numero intero pari.

dimostrando (in modo diretto) il

Teorema. Se n è un numero intero dispari, allora n^2 è un numero intero dispari.

Dimostrazione.

- **Ipotesi:** P : n è un numero intero dispari
- **Tesi:** Q : n^2 è un numero intero dispari

Si assuma che n è dispari, al fine di dimostrare che allora n^2 è dispari. Esiste un numero intero m tale che $n = 2m + 1$. Segue che

$$\begin{aligned} n^2 &= (2m+1)^2 = \\ &= 4m^2 + 4m + 1 = \\ &= 2(2m^2 + 2m) + 1 \end{aligned}$$

è un numero dispari, come voluto.

La dimostrazione per composizione

Se si sono dimostrati i teoremi

$$\text{Se } P_1, P_2, \ldots, P_n \text{ allora } Q$$

e

$$\text{Se } Q \text{ allora } R$$

si possono comporre le due dimostrazioni in una dimostrazione di

$$\text{Se } P_1, P_2, \ldots, P_n \text{ allora } R$$

Infatti, se valgono $P_1, \ldots, P_n$, il primo teorema garantisce che vale Q; quindi il secondo teorema assicura che vale R.

Esempio

Teorema. Se n è un numero intero dispari e m è un numero intero pari, allora $(n+m)^2$ è un numero intero dispari.

Dimostrazione.

- **Ipotesi:**
  P_1 : n è un numero intero dispari,
  P_2 : m è un numero intero pari
- **Tesi:** R : $(n+m)^2$ è un numero intero dispari

Sia Q : $n+m$ è un numero intero dispari. Si è già dimostrato in precedenza che

Se P_1 e P_2, allora Q

e che

Se Q allora R

Componendo le dimostrazioni dei due teoremi si ottiene che

Se P_1 e P_2 allora R

La dimostrazione per casi

Per dimostrare un teorema della forma

$$\text{Se } P \text{ allora } Q$$

dove l'ipotesi P è del tipo

$$P_1 \text{ o } P_2 \text{ o} \ldots \text{o } P_n$$

di solito è conveniente dimostrare separatamente gli n teoremi

$$\begin{array}{c}\text{Se } P_1 \text{ allora } Q \\ \text{Se } P_2 \text{ allora } Q \\ \ldots \\ \text{Se } P_n \text{ allora } Q\end{array}$$

Il procedimento è lecito. Si assuma infatti P; allora vuol dire che qualche P_i vale, quindi se si è dimostrato il teorema

$$\text{Se } P_i \text{ allora } Q$$

segue che vale Q.

La dimostrazione per casi

Nota. Si può fare una dimostrazione per casi anche aggiungendo dei casi che non sono esplicitamente elencati nelle ipotesi del teorema, ma di cui si sa che almeno uno deve essere vero.

Si supponga di voler dimostrare il teorema

$$Q$$

(senza ipotesi). Poiché per ogni asserzione P si ha che una tra P e non P è vera, il teorema risulta stabilito se si dimostrano i due teoremi

Se P allora Q
Se non P allora Q

Esempio

Teorema. Per ogni numero reale x si ha $x \leq |x|$.

Dimostrazione

- **Ipotesi:** nessuna
- **Tesi:** $Q : x \leq |x|$

Per dimostrare il teorema, viene comodo dimostrare i due teoremi seguenti:

$$\text{Se } x \geq 0, \text{ allora } x \leq |x|$$

e

$$\text{Se } x \ngeq 0, \text{ allora } x \leq |x|$$

Questa scelta di casi è suggerita dalla definizione di $|x|$, che dipende appunto dal fatto se $x \geq 0$ oppure no.

Esempio (cont.)

- Se $x \geq 0$, allora $x \leq |x|$

  Si assuma $x \geq 0$. Allora per definizione $|x| = x$, quindi è vero che $x \leq |x|$.
- Se $x \ngeq 0$, allora $x \leq |x|$.

  Se $x \ngeq 0$, vuol dire che $x < 0$. In questo caso, per definizione, $|x| = -x > 0 > x$. Quindi $x \leq |x|$.

Esempio

Generalmente in una dimostrazione matematica si combinano varie delle tecniche discusse.

Teorema. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Dimostrazione.

- **Ipotesi:** nessuna
- **Tesi:** $Q : \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Si assuma non Q, cioè $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Allora esistono numeri interi n, m, con $m \neq 0$, tali che $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$. Semplificando la frazione, cioè eliminando i fattori comuni, siano n', m' numeri interi tali che $\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'} = \sqrt{2}$ e

$$R : \qquad n', m' \text{ sono relativamente primi}$$

Esempio (cont.)

Si ha che

$$\left(\frac{n'}{m'}\right)^2 = 2$$

da cui

$$n'^2 = 2m'^2$$

Allora n'^2 è pari. Per quanto dimostrato precedentemente, segue che n' è pari, cioè $n' = 2k$ per qualche intero k. Quindi

$$n'^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2m'^2$$

da cui

$$2k^2 = m'^2$$

Pertanto m'^2 è pari, e di nuovo si ottiene per quanto dimostrato precedentemente che anche m' è pari.

Esempio (cont.)

Quindi si è stabilito

$$\text{non } R : \qquad n', m' \text{ non sono relativamente primi}$$

in contraddizione con l'affermazione R ottenuta precedentemente.

Questa contraddizione, conseguenza dell'assunzione non Q, mostra che invece vale Q.

Schema riassuntivo

Per dimostrare l'asserzione Q:

- Si è assunto, **per contraddizione**, non Q
- Sotto l'ipotesi non Q si è dimostrato **in modo diretto** R
- Sotto l'ipotesi non Q, **concatenando** dimostrazioni precedenti, si è dimostrato non R
- Pertanto sotto l'ipotesi non Q segue la contraddizione R e non R
- Si è dunque dedotto Q