Negazione di una quantificazione

Sia

$$P(x): \quad \text{lo studente } x \text{ supererà l'esame}$$

È vero? È falso? Dipende da chi è x.

La quantificazione universale è:

$$\forall x P(x): \quad \text{tutti gli studenti supereranno l'esame}$$

La negazione di quest'asserzione è

$$\neg \forall x P(x): \quad \text{non tutti gli studenti supereranno l'esame}$$

quindi

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x): \text{ almeno uno studente non supererà l'esame}$$

Negazione di una quantificazione

La quantificazione esistenziale di P è:

$$\exists x P(x): \quad \text{esiste qualche studente che supererà l'esame}$$

La negazione di quest'asserzione è

$$\neg\exists x P(x): \quad \text{non esiste alcuno studente che supererà l'esame}$$

quindi

$$\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x): \ \text{tutti gli studenti falliranno l'esame}$$

Negazione di una quantificazione

In generale:

$$\begin{aligned} \neg\forall x P &\equiv \exists x \neg P \\ \neg\exists x P &\equiv \forall x \neg P \end{aligned}$$

Da ciò segue anche che

$$\begin{aligned} \forall x P \equiv \neg\neg\forall x P &\equiv \neg\exists x \neg P \\ \exists x P \equiv \neg\neg\exists x P &\equiv \neg\forall x \neg P \end{aligned}$$

A parole:

- Una proprietà P vale per tutti gli oggetti se e solo se non è vero che ne esiste qualcuno per cui non vale, cioè se e solo se la proprietà P non ha eccezioni
- Una proprietà P vale per almeno un oggetto se e solo se non è vero che per tutti gli oggetti la proprietà fallisce

Definzione di un quantificatore in termini dell'altro

Le equivalenze

$$\begin{array}{rcl} \forall x P & \equiv & \neg \exists x \neg P \\ \exists x P & \equiv & \neg \forall x \neg P \end{array}$$

mostrano che i due quantificatori non sono entrambi necessari: se ne può prendere uno come primitivo, e definire l'altro usando quello primitivo e il connettivo $\neg$.

Proprietà

- $\exists x P \vee \exists x Q \equiv \exists x (P \vee Q)$

Infatti:

1) Se vale $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$, allora è vera almeno una tra $\exists x P(x), \exists x Q(x)$. Se è vera $\exists x P(x)$, allora sia a un oggetto tale che $P(a)$ e quindi anche $P(a) \vee Q(a)$, pertanto è vero che $\exists x (P(x) \vee Q(x))$; similmente, se è vera $\exists x Q(x)$, sia a un oggetto per cui vale $Q(a)$ e quindi anche $P(a) \vee Q(a)$, pertanto è vero che $\exists x (P(x) \vee Q(x))$.
Ho dimostrato che $\exists x P \vee \exists x Q \models \exists x (P \vee Q)$.

2) Viceversa, se $\exists x (P(x) \vee Q(x))$, sia a un oggetto per cui vale $P(a) \vee Q(a)$, quindi o vale $P(a)$ o vale $Q(a)$. Se vale $P(a)$, allora $\exists x P(x)$ e quindi $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$; se vale $Q(a)$, allora $\exists x Q(x)$ e di nuovo $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$.
Ho dimostrato che $\exists x (P \vee Q) \models \exists x P \vee \exists x Q$.

Proprietà

- $\exists x(P \wedge Q) \models \exists xP \wedge \exists xQ$

Infatti, se è vera $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$, sia a tale che $P(a) \wedge Q(a)$; pertanto $P(a)$ e $Q(a)$ sono entrambe vere, quindi sono vere sia $\exists xP(x)$ sia $\exists xQ(x)$, da cui segue che è vera $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$.

Il viceversa, cioè $\exists xP \wedge \exists xQ \models \exists x(P \wedge Q)$, invece in generale non vale. Sia infatti

$$\begin{aligned} P(x):&\quad x \text{ è pari} \\ Q(x):&\quad x \text{ è dispari} \end{aligned}$$

Allora $\exists xP \wedge \exists xQ$ è vera, perché esistono numeri pari ed esistono numeri dispari; però $\exists x(P \wedge Q)$ è falsa, perché non esiste alcun numero che sia al contempo pari e dispari.

Proprietà

- $\forall x P \wedge \forall x Q \equiv \forall x (P \wedge Q)$

Infatti, se vale $\forall x P \wedge \forall x Q$, si hanno entrambe $\forall x P$ e $\forall x Q$. Quindi ogni oggetto soddisfa P e ogni oggetto soddisfa Q; allora ogni oggetto soddisfa $P \wedge Q$, quindi $\forall x (P \wedge Q)$ è vera.
Viceversa, se è vera $\forall x (P \wedge Q)$, vuol dire che ogni oggetto soddisfa $P \wedge Q$, allora ogni oggetto soddisfa P e ogni oggetto soddisfa Q, quindi $\forall x P$ e $\forall x Q$ sono vere entrambe, da cui risulta vera $\forall x P \wedge \forall x Q$.

Proprietà

- $\forall x P \vee \forall x Q \models \forall x(P \vee Q)$

Infatti, se è vera $\forall x P \vee \forall x Q$, allora una tra $\forall x P, \forall x Q$ è vera. Se è vera $\forall x P$, allora per ogni oggetto vale P, quindi per ogni oggetto vale anche $P \vee Q$, da cui $\forall x(P \vee Q)$. Similmente, se è vera $\forall x Q$, allora per ogni oggetto vale Q, quindi per ogni oggetto vale anche $P \vee Q$, da cui nuovamente $\forall x(P \vee Q)$.

Il viceversa, cioè $\forall x(P \vee Q) \models \forall x P \vee \forall x Q$, in generale non vale:
è vero che ogni numero intero è pari o dispari,
ma non è vero che ogni numero intero è pari o ogni numeri intero è dispari.

Connettivi e tavole di verità

Il significato dei connettivi introdotti

$$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$$

è completamente descrivibile mediante delle *tavole di verità*.

Sono delle tabelle che riportano il valore di verità (vero o falso) di una formula ottenuta applicando il connettivo, in funzione dei valori di verità delle formule a cui il connettivo è stato applicato.

Le notazioni per indicare i valori di verità in queste tabelle possono essere varie:

- Falso: $0, \perp, F, \mathit{False}, \dots$
- Vero: $1, \top, T, \mathit{True}, \dots$

La negazione: $\neg$

- La formula $\neg P$ è vera se e solo se la formula P è falsa.

Quindi:

Tavola di verità di $\neg$

P	$\neg P$
0	1
1	0

Ogni riga della tavola di verità descrive una possibile situazione:

- La prima riga dice che se P è falsa, allora $\neg P$ è vera
- La seconda riga dice che se P è vera, allora $\neg P$ è falsa

Poiché l'affermazione P, qualunque essa sia e in qualunque contesto la si valuti, dovrà essere vera o falsa, la tabella precedente descrive in maniera completa ed esaustiva il significato di $\neg$ fornendo una regola precisa per *calcolare* se in un dato contesto l'espressione $\neg P$ è vera o falsa a seconda della verità o meno di P.

La disgiunzione: $\vee$

- La formula $P \vee Q$ è vera se e solo se almeno una tra P, Q è vera.

Quindi:

Tavola di verità di $\vee$

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Poiché $\vee$ è un connettivo binario, le possibili situazioni, cioè le combinazioni dei possibili valori di verità di P, Q, sono 4; pertanto la tavola di verità ha 4 righe.
Per ogni possibilità, la tavola permette di calcolare il valore di verità di $P \vee Q$.

La congiunzione: $\wedge$

- La formula $P \wedge Q$ è vera se e solo se P, Q sono entrambe vere.

Quindi:

Tavola di verità di $\wedge$

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

L'implicazione: $\rightarrow$

- La formula $P \rightarrow Q$ è vera se e solo se P è falsa o Q è vera.

Quindi:

Tavola di verità di $\rightarrow$

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

La biimplicazione: $\leftrightarrow$

- La formula $P \leftrightarrow Q$ è vera se e solo se P, Q hanno lo stesso valore di verità.

Quindi:

Tavola di verità di $\leftrightarrow$

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Proposizioni elementari

Si fissi una famiglia di proposizioni elementari (*formule atomiche*, o *lettere*): sono le asserzioni di base del nostro linguaggio, affermazioni di senso compiuto che non sono ulteriormente decomponibili in affermazioni di senso compiuto. Ognuna di queste proposizioni, in un dato contesto, è vera o falsa.

Tali proposizioni saranno solitamente denotate con lettere quali $A, B, C, \dots$

Utilizzando le tavole di verità dei connettivi, è possibile costruire la tavola di verità di ogni espressione P ottenuta a partire dalle proposizioni elementari mediante (ripetute) applicazioni dei connettivi.
La tavola di verità di P fornisce il valore di verità di P in funzione dei valori di verità delle proposizioni elementari usate per costruire P.

Esempio

Sia

$$P : (B \to A) \wedge ((B \vee C) \leftrightarrow A)$$

La tavola di verità di P è:

A	B	C	$B \to A$	$B \vee C$	$(B \vee C) \leftrightarrow A$	P
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Costruzione di una tavola di verità

Per costruire la tavola di verità di una proposizione P, si considerano tutte le combinazioni dei possibili valori di verità delle lettere usate per costruire P.

Nell'esempio, intervengono tre lettere: A, B, C. Si hanno quindi $2^3 = 8$ combinazioni possibili, quindi la tavola di verità è costituita da 8 righe.

In generale, se P è costruita a partire da n lettere, la tavola di verità di P è costituita da 2^n righe.

Costruzione di una tavola di verità

Poi si calcolano i valori di verità corrispondenti di tutte le proposizioni costruite mediante applicazione di connettivi a partire dalle lettere fino a ottenere P.

Ogni colonna è ottenuta applicando un connettivo a una o due colonne precedenti.

A	B	C	$B \to A$	$B \vee C$	$(B \vee C) \leftrightarrow A$	P
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

$$P : (B \to A) \wedge ((B \vee C) \leftrightarrow A)$$

Lettura di una tavola di verità

Qualunque sia il contesto in cui si vuole interpretare la proposizione P, i valori di verità delle lettere che compongono P corrispondono a una delle righe della tavola di verità. La colonna di P riporta il valore di verità di P in quel contesto.

Esempio.

A	B	C	$B \to A$	$B \vee C$	$(B \vee C) \leftrightarrow A$	P
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Nell'esempio precedente, un contesto in cui A sia vera, B sia falsa e C sia vera corrisponde alla sesta riga della tavola di verità. In quel contesto allora P è vera.

Esempio

Calcolare la tavola di verità di

$$A \wedge (B \to \neg A)$$

A	B	$\neg A$	$B \to \neg A$	$A \wedge (B \to \neg A)$
0	0	1	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

Tavole di verità e conseguenza logica

Le tavole di verità permettono di determinare operativamente quando una proposizione è conseguenza logica di altre.

Siano $P_1, \ldots, P_n, Q$ delle proposizioni costruite a partire da lettere $A_1, \ldots A_k$.

$$P_1, \ldots, P_n \models Q$$

significa che in ogni contesto in cui sono vere $P_1, \ldots, P_n$ è vera anche Q.

Poiché ogni a ogni contesto corrisponde un'assegnazione di valori di verità per le lettere $A_1, \ldots, A_k$ si ottiene che $P_1, \ldots, P_n \models Q$ se e solo se ogni assegnazione di valori di verità a $A_1, \ldots, A_k$ che rende vere $P_1, \ldots, P_n$, rende vera anche Q.

Tavole di verità e conseguenza logica

Questo fornisce un *algoritmo* per determinare se $P_1, \ldots, P_n \models Q$:

- Si costruisce una tavola di verità, con 2^k righe, che fornisca i valori di verità di tutte le proposizioni $P_1, \ldots, P_n, Q$, in funzione dei valori di verità delle lettere $A_1, \ldots, A_k$.
- Si considerano le righe nelle quali $P_1, P_2, \ldots, P_n$ risultano tutte vere.
- Se in tutte queste righe anche Q è vera, allora si conclude che $P_1, \ldots, P_n \models Q$.
- Se invece c'è almeno una riga in cui $P_1, \ldots, P_n$ sono tutte vere e Q è falsa, si conclude che $P_1, \ldots, P_n \not\models Q$.

Osservazione

L'algoritmo descritto è molto lungo: se le proposizioni sono costruite a partire da k lettere, la tavola di verità ha 2^k righe. Il numero di passi da fare è dunque esponenziale nel numero di lettere $A_1, \ldots, A_k$ che costituiscono l'input $P_1, \ldots, P_n, Q$.

Domanda. Esiste un algoritmo più efficiente per determinare se $P_1 \ldots, P_n \models Q$, per esempio che richieda un numero di passi polinomiale nel numero di lettere utilizzate?
In altre parole, esiste un algoritmo tale che ci sono numeri α, p fissati per cui: ogni volta che si danno in input delle proposizioni $P_1, \ldots, P_n, Q$ che usano al più k lettere, l'algoritmo determina se $P_1, \ldots, P_n \models Q$ in meno di αk^p passi?

Esercizio. Provare a descrivere un tale algoritmo, o a dimostrare che un tale algoritmo non può esistere.
Coloro che, entro il termine del corso, svolgeranno correttamente l'esercizio, passeranno immediatamente l'esame con una valutazione di 30 (è consentito collaborare).

Nota

L'esercizio proposto è uno dei più importarti problemi attualmente non risolti in matematica.

Oltre a ottenere una valutazione di 30 all'esame di Logica, lo studente che lo risolvesse è invitato a ritirare presso il Clay Mathematics Institute il premio di 1 milione di dollari associato alla risoluzione questo problema.

Esempio

Siano:

$$\begin{array}{rcl} P_1 & : & A \to C \\ P_2 & : & B \to C \\ Q & : & A \vee B \to C \end{array}$$

Per verificare se

$$P_1, P_2 \models Q$$

si costruisce la tavola di verità delle tre proposizioni P_1, P_2, Q rispetto alle lettere A, B, C, quindi con $2^3 = 8$ righe.

Esempio

			P_1	P_2		Q
A	B	C	$A \to C$	$B \to C$	$A \lor B$	$A \lor B \to C$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Le righe in cui P_1, P_2 sono entrambe vere sono la prima, la seconda, la quarta, la sesta e l'ottava. Su ognuna di queste righe la formula Q risulta vera.

Quindi

$$P_1, P_2 \models Q$$

Osservazione

Nell'esempio precedente, le tavole di verità delle proposizioni P_1 e P_2 hanno solo $2^2 = 4$ righe, perché P_1 coinvolge solo le lettere A e C, e P_2 le lettere B e C.

Tuttavia per verificare se

$$P_1, P_2 \models Q$$

non è sufficiente calcolare le tavole di verità delle tre proposizioni P_1, P_2, Q separatamente, perché si deve verificare che dalla verità di P_1 e P_2 segue quella di Q in tutti i contesti suscettibili di influenzare il valore di verità di almeno una delle tre proposizioni.
Si deve cioè calcolare una tavola di verità di $2^3 = 8$ righe, in funzione dei valori di verità di tutte le lettere che occorrono in qualcuna delle tre proposizioni.