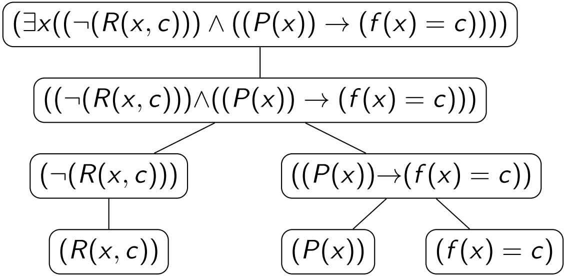
Esempio

L'albero sintattico di

$$(\exists x((\neg(R(x,c))) \wedge ((P(x)) \rightarrow (f(x) = c))))$$

è



Note

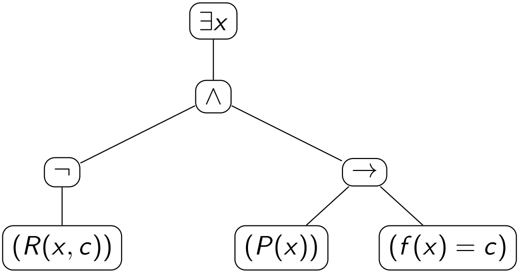
- Le formule che compaiono nei nodi dell'albero sintattico sono le *sottoformule* della formula data.
- Anche per le formule del prim'ordine vale il fatto che l'altezza della formula è uguale all'altezza del suo albero sintattico.
- L'etichettatura dell'albero sintattico può essere semplificata, usando come etichette le costanti logiche principali delle formule corrispondenti e, nel caso dei quantificatori, anche la variabile quantificata.

Esempio

L'albero sintattico di

$$(\exists x((\neg(R(x,c))) \wedge ((P(x)) \rightarrow (f(x) = c))))$$

è

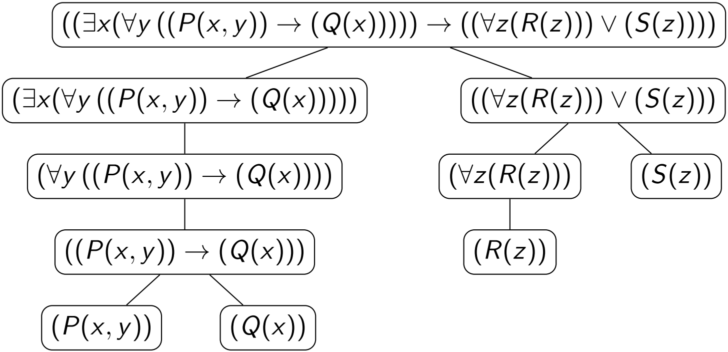


Esercizio

Costruire l'albero sintattico della formula

$$((\exists x(\forall y\,((P(x,y)) \to (Q(x))))) \to ((\forall z(R(z))) \vee (S(z)))).$$

Svolgimento.



Convenzioni

Come già fatto in situazioni precedenti, per rendere più leggibile una formula, nella pratica si ometteranno (o aggiungeranno) parentesi, a patto che si possa sempre ricostruire la formula nella sua struttura formale.
A tal fine si adotta la gerarchia di priorità seguente:

- $\exists, \forall$
- $\neg$
- $\vee, \wedge$
- $\rightarrow, \leftrightarrow$

Si applicano le convenzioni della logica proposizionale sulle disgiunzioni e congiunzioni multiple.

Inoltre, se comodo per la lettura, i simboli relazionali e funzionali binari potranno essere scritti tra i due termini a cui si applicano.
Es: $t_1 = t_2, \quad t_1 \leq t_2, \quad t_1 R t_2, \quad t_1 + t_2.$

Variabili libere e vincolate

Ogni volta che una variabile compare in una formula costituisce un'*occorrenza* di quella variabile.

Esempio

La variabile z occorre tre volte nella formula

$$\varphi : \qquad \exists x\ f(x, y) = c \rightarrow \forall z R(z) \vee S(z)$$

Le prime due occorrenze *non fanno alcuna asserzione su z*: qualunque sia la variabile u, le sottoformule

$$\forall z R(z), \qquad \forall u R(u)$$

asseriscono la stessa cosa: che tutti gli elementi soddisfano la proprietà R. Rimpiazzare $\forall z R(z)$ con $\forall u R(u)$ non cambierebbe il significato della formula φ.

Variabili libere e vincolate

La terza occorrenza invece asserisce che z ha la proprietà S. Se u è un'altra variablile, le sottoformule

$$S(z), \qquad S(u)$$

non asseriscono la stessa cosa: la prima afferma che l'elemento (che interpreta) z ha la proprietà S; la seconda che l'elemento (che interpreta) u ha la proprietà S. Rimpiazzare una formula con l'altra *cambierebbe* il significato della formula φ.
Le occorrenze del primo tipo si dicono *vincolate*; quelle del secondo tipo si dicono *libere*.

Le occorrenze libere e vincolate delle variabili saranno quindi trattate in modo diverso quando si parlerà di semantica.

Variabili libere e vincolate

Definizione

Siano φ una formula e x una variabile.

- Se φ è atomica, ogni occorrenza di x in φ è libera
- Se φ è della forma $(\neg\psi)$, allora le occorrenze libere di x in φ sono esattamente le occorrenze libere di x in ψ
- Se φ è della forma $(\psi\Box\theta)$, dove $\Box$ è un connettivo binario, allora le occorrenze libere di x in φ sono le occorrenze libere di x in ψ e le occorrenze libere di x in θ
- Se φ è della forma $(Qy\psi)$, dove Q è un quantificatore e y è una variabile diversa dalla variabile x, allora le occorrenze libere di x in φ sono esattamente le occorrenze libere di x in ψ
- Se φ è della forma $(Qx\psi)$, dove Q è un quantificatore, allora non ci sono occorrenze libere di x in φ, cioè tutte le occorrenze di x in φ sono vincolate

Variabili libere e vincolate

In altre parole, un'occorrenza di una variabile x in una formula è vincolata se si trova nell'argomento di una quantificazione Qx (compresa l'occorrenza di x che segue immediatamente il quantificatore).

Definizione

- Si dice che x *occorre libera/vincolata* in φ (oppure che x è una *variabile libera/vincolata* di φ) se c'è almeno un'occorrenza libera/vincolata di x in φ
- L'insieme delle variabili che occorrono libere in φ si denoterà

$$FV(\varphi)$$

Variabili libere e vincolate

Parlando di una formula φ, talvolta risulterà utile evidenziare quali sono le variabili libere di φ, o almeno una lista di variabili che comprende le variabili libere di φ.
Spesso si scriverà

$$\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

per intendere che le variabili libere di φ sono tra $x_1, \dots, x_n$, cioè che

$$FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$$

Nota: Quindi, scrivendo $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ non si sta affermando che tutte le variabili $x_1, \dots, x_n$ occorrano per forza libere in φ: alcune di tali variabili potrebbero occorrere solo vincolare, o non occorrere affatto. La notazione $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ sottolinea solo che le (eventuali) variabili libere di φ sono *tra* $x_1, \dots, x_n$.

Enunciati

Definizione

Un *enunciato*, o *formula chiusa*, è una formula senza variabili libere.

Cioè la formula φ è un enunciato se e solo se

$$FV(\varphi) = \emptyset$$

Variabili libere e albero sintattico

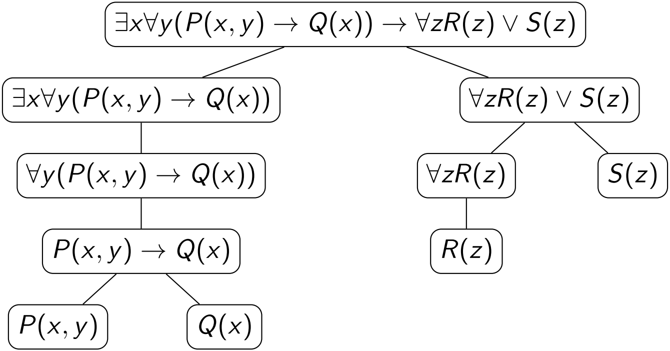
Per individuare se un'occorrenza di x in una formula φ è libera o vincolata, si può ricorrere all'albero sintattico della formula.

- Se l'occorrenza di x è il simbolo immediatamente successivo a un quantificatore, allora tale occorrenza è vincolata da quel quantificatore
- Altrimenti, l'occorrenza in questione si trova in una sottoformula atomica di φ, cioè compare nell'etichetta di una foglia dell'albero sintattico di φ
- Si ripercorre il ramo dell'albero che contiene tale foglia:
  - se lungo il ramo compare una quantificazione Qx, allora l'occorrenza in considerazione è vincolata: si trova nell'argomento della prima quantificazione su x incontrata risalendo il ramo
  - altrimenti tale occorrenza è libera

Esempio

$$\exists x \forall y (P(x,y) \to Q(x)) \to \forall z R(z) \lor S(z)$$

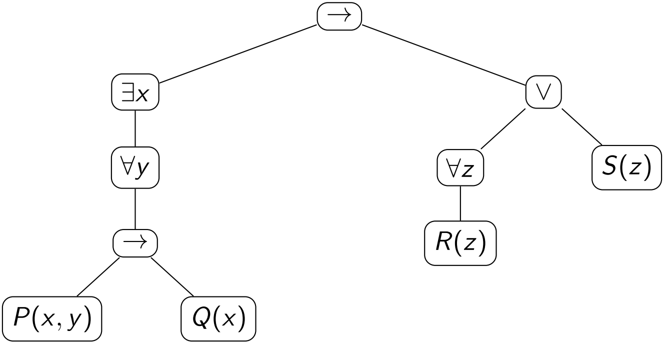
L'albero sintattico è



Esempio

$$\exists x \forall y (P(x,y) \to Q(x)) \to \forall z R(z) \vee S(z)$$

L'albero sintattico è



Pertanto:

- Tutte le occorrenze di x e di y sono vincolate
- Le prime due occorrenze di z sono vincolate; la terza è libera
- $FV(\exists x \forall y (P(x,y) \to Q(x)) \to \forall z R(z) \vee S(z)) = \{z\}$

Esercizio

Sia $L = \{P, Q, f, a, c\}$ un linguaggio del prim'ordine dove:

- P è simbolo di predicato binario
- Q è simbolo di predicato unario
- f è un simbolo funzionale unario
- a, c sono simboli di costante

1. Per ciascuna occorrenza di variabile nelle seguenti formule, stabilire se si tratta di un'occorrenza libera o vincolata
2. Per ciascuna formula, elencare le sue variabili libere
3. Stabilire quali formule sono enunciati

$$\varphi_1 : \forall z P(z, z) \wedge \exists x \forall y (P(x, y) \to P(z, y))$$
$$\varphi_2 : \exists x (\exists y \; f(x) = y \vee (f(y) = x \leftrightarrow P(x, y)))$$
$$\varphi_3 : P(c, c) \wedge Q(a)$$
$$\varphi_4 : \forall z \exists y P(y, x) \vee P(c, f(x))$$
$$\varphi_5 : P(z, x) \to \exists x \forall y P(z, x)$$

Variabili libere vs. variabili vincolate: esempio

Sia $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$, dove $+, \cdot$ sono simboli funzionali binari, $0, 1$ sono simboli di costante.

In questo linguaggio, l'equazione $x^2 + 2x = 0$ si può esprimere con la formula

$$\varphi(x) : \quad (x \cdot x) + ((1 + 1) \cdot x) = 0$$

Invece la formula $\psi : \exists x \varphi(x)$, cioè

$$\psi : \quad \exists x((x \cdot x) + ((1 + 1) \cdot x) = 0)$$

asserisce che l'equazione $x^2 + 2x = 0$ ha almeno una soluzione.

Pertanto, le formule

$$\begin{aligned} \varphi(x): &\quad (x \cdot x) + ((1+1) \cdot x) = 0 \\ \varphi(y): &\quad (y \cdot y) + ((1+1) \cdot y) = 0 \end{aligned}$$

non sono tra loro equivalenti: la prima asserisce che $x^2 + 2x = 0$, la seconda che $y^2 + 2y = 0$.
Invece le formule (enunciati)

$$\begin{aligned} \psi: &\quad \exists x \varphi(x): &\quad \exists x((x \cdot x) + ((1+1) \cdot x) = 0) \\ \theta: &\quad \exists y \varphi(y): &\quad \exists y((y \cdot y) + ((1+1) \cdot y) = 0) \end{aligned}$$

sono equivalenti: asseriscono che esiste un numero che elevato al quadrato e sommato al suo doppio dà 0.

Variabili libere vs. variabili vincolate: esempio

Quindi, interpretando i simboli di L nel modo usuale, si può considerare il problema di determinare se le formule $\varphi(x), \psi$ sono vere in $\mathbb{R}$.

- La formula $\varphi(x)$ non è né vera né falsa in $\mathbb{R}$: dipende dal valore che si assegna alla variabile libera x.
  La formula $\varphi(x)$ asserisce qualcosa di x: la formula è per es. vera se a x si assegna il valore -2, falsa se a x si assegna il valore 5.
- L'enunciato ψ è vero in $\mathbb{R}$: esiste un numero che moltiplicato per se stesso e sommato al suo doppio dà 0.

Conclusione

- Una formula asserisce qualcosa sulle sue variabili libere. Non è di per sè vera o falsa (in un dato contesto): dipende dai valori assegnati alle sue variabili *libere*.
- Un enunciato, non avendo variabili libere, ha un valore di verità ben definito in qualunque contesto fissato.
- In una formula si possono rimpiazzare le variabili vincolate con altre variabili, senza cambiare il significato della formula; non si possono rimpiazzare le variabile libere con altre variabili, senza cambiare il significato della formula.

Esercizio

Reintrodurre le parentesi nelle seguenti formule, dove P è un simbolo di relazione unario, R è un simbolo di relazione binario, f è un simbolo di funzione binario, g è un simbolo di funzione unario e a, b, c sono simboli di costante.
Per ognuna delle formule, risonoscere le occorrenze libere e vincolate delle variabili.

- $\varphi_1 : \exists x P(x) \rightarrow \forall z R(z, y) \wedge g(x) = f(x, y)$
- $\varphi_2 : P(x) \wedge \forall z \forall y R(g(z), f(z, y)) \leftrightarrow \neg \forall w (P(w) \wedge P(c))$
- $\varphi_3 : \forall x \exists y R(x, x) \rightarrow \forall z f(z) = a$
- $\varphi_4 : \forall x (\exists y R(x, x) \rightarrow \forall z f(z) = a)$
- $\varphi_5 : \forall x \exists y (R(x, x) \rightarrow \forall z f(z) = a)$
- $\varphi_6 : \neg P(x) \wedge \forall y R(y, z)$
- $\varphi_7 : \neg (P(x) \wedge \forall y R(y, z))$

Risposte

- $\varphi_1 : ((\exists x(P(x))) \rightarrow ((\forall z(R(z, y))) \wedge (g(x) = f(x, y))))$.
  Le prime due occorrenze di x sono vincolate, le altre due sono libere.
  Le due occorrenze di z sono vincolate.
  Le due occorrenze di y sono libere.
-
  $$\varphi_2 : (((P(x)) \wedge (\forall z(\forall y(R(g(z), f(z, y)))))) \leftrightarrow (\neg(\forall w((P(w)) \wedge (P(c))))))$$

  L'occorrenza di x è libera.
  Tutte le occorrenze di z, y, w sono vincolate.
- $\varphi_3 : ((\forall x(\exists y(R(x, x)))) \rightarrow (\forall z(f(z) = a)))$.
  Tutte le occorrenze delle variabili sono vincolate.
- $\varphi_4 : (\forall x((\exists y(R(x, x))) \rightarrow (\forall z(f(z) = a))))$.
  Tutte le occorrenze delle variabili sono vincolate.

Risposte (cont.)

- $\varphi_5 : (\forall x(\exists y((R(x,x)) \rightarrow (\forall z(f(z) = a)))))$.
  Tutte le occorrenze delle variabili sono vincolate.
- $\varphi_6 : ((\neg(P(x))) \wedge (\forall y(R(y,z))))$.
  L'occorrenza di x è libera.
  Le due occorrenze di y sono vincolate.
  L'occorrenza di z è libera.
- $\varphi_7 : (\neg((P(x)) \wedge (\forall y(R(y,z)))))$.
  L'occorrenza di x è libera.
  Le due occorrenze di y sono vincolate.
  L'occorrenza di z è libera.

Esercizio

Individuare la costante logica principale nelle formule seguenti:

- $\varphi_1 : \exists x(\forall y R(x,y) \wedge \neg(x = y)) \vee \forall z \neg P(z)$
- $\varphi_2 : \neg\exists x(P(x) \rightarrow R(x,x))$
- $\varphi_3 : \forall z P(z) \wedge \neg R(z,z) \wedge \exists z \neg P(z)$
- $\varphi_4 : \forall x \neg(\exists y R(x,y) \rightarrow P(x))$

Svolgimento

- φ_1: la costante logica principale è il connettivo $\vee$
- φ_2: la costante logica principale è il connettivo $\neg$
- φ_3: la costante logica principale è la seconda occorrenza del connettivo $\wedge$
- φ_4: la costante logica principale è il quantificatore $\forall$

Nota

Per negare una formula atomica del tipo

$$t_1 R t_2, \qquad \text{cioè} \quad (R(t_1, t_2))$$

talvolta si usa la notazione

$$t_1 \not R t_2$$

Ciò è soprattutto comune per il simbolo di uguaglianza e altre relazioni aritmetiche:

$$t_1 \neq t_2$$

significa

$$(\neg(= (t_1, t_2)))$$

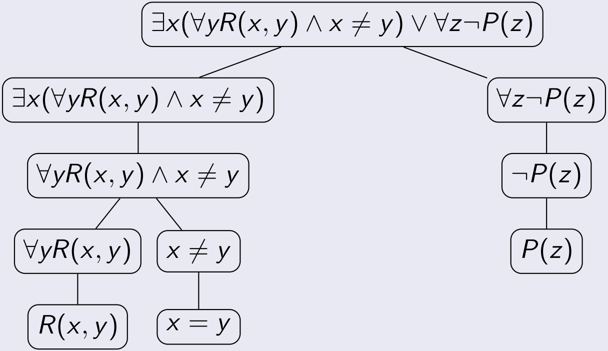
Quindi $t_1 \neq t_2$ non è una formula atomica; il suo connettivo principale è $\neg$.

Esercizio

Costruire l'albero sintattico della formula

$$\exists x(\forall y R(x,y) \wedge x \neq y) \vee \forall z \neg P(z)$$

Svolgimento



Esercizio

Per ciascuna delle formule seguenti:

- Determinare l'albero sintattico e l'altezza
- Stabilire per ogni occorrenza di variabile se si tratta di una variabile libera o vincolata.
- Determinare le variabili libere

Individuare quali sono gli enunciati.

$$\varphi_1 : \exists x P(x) \to \forall z (f(z) = x \vee \neg R(x, z))$$

$$\varphi_2 : \forall w \exists y (P(x) \wedge R(x, z) \leftrightarrow \exists z \neg \forall v R(z, v))$$

$$\varphi_3 : \neg \exists x (R(x, x) \vee \forall y P(c) \to R(c, c) \wedge P(x))$$

$$\varphi_4 : \exists x \forall z R(x, z) \to \forall z \exists x R(x, z)$$

$$\varphi_5 : P(c) \wedge \forall x (P(x) \to P(f(x))) \to \forall x P(x)$$

Svolgimento parziale

- $ht(\varphi_1) = 4$
  Le prime due occorrenze di x sono vincolate, le altre due sono libere.
  Tutte le occorrenze di z sono vincolate.
  $FV(\varphi_1) = \{x\}$.
  φ_1 non è un enunciato.
- $ht(\varphi_2) = 6$.
  Le occorrenze di w, y, v sono vincolate.
  Le occorrenze di x sono libere.
  La prima occorrenza di z è libera, le altre due sono vincolate.
  $FV(\varphi_2) = \{x, z\}$.
  φ_2 non è un enunciato.

Svolgimento parziale (cont.)

- $ht(\varphi_3) = 5$.
  Tutte le occorrenze di x, y sono vincolate.
  $FV(\varphi_3) = \emptyset$.
  φ_3 è un enunciato.
- $ht(\varphi_4) = 3$.
  Tutte le occorrenze di x, z sono vincolate.
  $FV(\varphi_4) = \emptyset$.
  φ_4 è un enunciato.
- $ht(\varphi_5) = 4$.
  Tutte le occorrenze di x sono vincolate.
  $FV(\varphi_5) = \emptyset$.
  φ_5 è un enunciato.

Semantica della logica del prim'ordine

Sia

$$L = \mathit{Rel} \cup \mathit{Funct} \cup \mathit{Const}$$

un linguaggio del prim'ordine.

L'obiettivo è di introdurre la nozione di *modello* (o *struttura*) per L: un contesto in cui interpretare *termini* e *formule* di L.