Teorema

Come nel caso della logica proposizionale, anche per la logica del prim'ordine si hanno i seguenti fatti:

1. Un enunciato φ è valido se e solo se la sua negazione $\neg\varphi$ è insoddisfacibile.
2. Un enunciato φ è soddisfacibile se e solo se la sua negazione $\neg\varphi$ non è valida.
3. $\Gamma \models \varphi$ se e solo se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è insoddisfacibile.

Dimostrazione

1. $$\begin{aligned} \varphi \text{ è valido} &\Leftrightarrow \text{per ogni } \mathcal{A},\ \text{si ha } \mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{per ogni } \mathcal{A},\ \text{si ha } \mathcal{A} \not\models \neg\varphi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \neg\varphi \text{ è insoddisfacibile} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \varphi \text{ è soddisfacibile} &\Leftrightarrow \text{per qualche } \mathcal{A},\ \text{si ha } \mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{per qualche } \mathcal{A},\ \text{si ha } \mathcal{A} \not\models \neg\varphi \\ &\Leftrightarrow \neg\varphi \text{ non è valido} \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \Gamma \models \varphi &\Leftrightarrow \text{per ogni } \mathcal{A},\ \text{se } \mathcal{A} \models \Gamma \text{ allora } \mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{non c'è alcun } \mathcal{A} \text{ tale che } \mathcal{A} \models \Gamma \text{ e } \mathcal{A} \models \neg\varphi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{non c'è alcun } \mathcal{A} \text{ tale che } \mathcal{A} \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ è insoddisfacibile} \end{aligned}$$

Equivalenza logica

Definizione

Sia L linguaggio del prim'ordine.
Gli L-enunciati φ, ψ sono *logicamente equivalenti*, denotato $\varphi \equiv \psi$, se per ogni L-struttura $\mathcal{A}$ si ha che

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \text{se e solo se} \quad \mathcal{A} \models \psi$$

Se φ, ψ *non* sono logicamente equivalenti, si scrive $\varphi \not\equiv \psi$.

Questo vuol dire che esiste una L-struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \models \varphi$ e $\mathcal{A} \not\models \psi$, oppure esiste una L-struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \models \psi$ e $\mathcal{A} \not\models \varphi$.
In altre parole, esiste una L-struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \neg\psi$, oppure esiste una L-struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \models \neg\varphi \wedge \psi$.

Proprietà

Come per la logica proposizionale, le tre seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $\varphi \equiv \psi$
2. $\varphi \models \psi$ e $\psi \models \varphi$
3. $\models \varphi \leftrightarrow \psi$

Dimostrazione

- (1) $\Rightarrow$ (2) La condizione $\varphi \equiv \psi$ significa che per ogni $\mathcal{A}$ si ha che $\mathcal{A} \models \varphi$ se e solo se $\mathcal{A} \models \psi$, cioè:
  - se $\mathcal{A} \models \varphi$, allora $\mathcal{A} \models \psi$; e
  - se $\mathcal{A} \models \psi$, allora $\mathcal{A} \models \varphi$

  Quindi $\varphi \models \psi$ e $\psi \models \varphi$.
- (2) $\Rightarrow$ (3) La condizione $\varphi \models \psi$ e $\psi \models \varphi$ significa che:
  - per ogni $\mathcal{A}$, se $\mathcal{A} \models \varphi$ allora $\mathcal{A} \models \psi$
  - per ogni $\mathcal{A}$, se $\mathcal{A} \models \psi$ allora $\mathcal{A} \models \varphi$

Proprietà

Dimostrazione (cont.)

Quindi, data una qualunque struttura $\mathcal{A}$, si ha che

o $\mathcal{A} \models \varphi$ e $\mathcal{A} \models \psi$; oppure $\mathcal{A} \not\models \varphi$ e $\mathcal{A} \not\models \psi$

Questo significa $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \psi$.
Pertanto $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

- (3) $\Rightarrow$ (1) La condizione $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ significa che, per ogni struttura $\mathcal{A}$ si ha che $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \psi$; cioè per ogni struttura $\mathcal{A}$ si ha che

  o $\mathcal{A} \models \varphi$ e $\mathcal{A} \models \psi$; oppure $\mathcal{A} \not\models \varphi$ e $\mathcal{A} \not\models \psi$

  Sia pertanto $\mathcal{A}$ una struttura:

  - se $\mathcal{A} \models \varphi$, allora $\mathcal{A} \models \psi$
  - se $\mathcal{A} \models \psi$, allora $\mathcal{A} \models \varphi$

  Quindi $\varphi \equiv \psi$.

Esempi: le strutture numeriche

Data la familiarità che si ha (o si dovrebbe avere) con le strutture numeriche (cioè con universo $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), per verificare se un dato enunciato φ è soddisfacibile può essere spesso utile cercare di soddisfarlo in una di queste strutture.

A tal fine si interpretano i simboli non logici che occorrono in φ con delle relazioni, funzioni, elementi della struttura numerica (che sono ben noti) in modo che φ risulti soddisfatto.

Esempio

Sia $L = \{f\}$, con f simbolo funzionale unario, e si consideri l'L-enunciato

$$\forall y \exists x (x \neq y \land f(x) = y)$$

Per mostrare che φ è soddisfacibile, si esibisce una L-struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \models \varphi$.

Affinché φ sia vero in $\mathcal{A}$, si deve scegliere una funzione unaria $f^{\mathcal{A}}$ tale che, ogni elemento della struttura sia immagine attraverso $f^{\mathcal{A}}$ di un elemento diverso da lui.

Si può quindi considerare, per esempio, la struttura $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{A}})$, dove

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}} : \quad & \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ & n \mapsto n + 1 \end{aligned}$$

Infatti è vero che per ogni intero m esiste un intero n tale che

$$\mathcal{A} \models (x \neq y \land f(x) = y)[y/m, x/n]$$

basta prendere $n = m - 1$.
Dunque $\mathcal{A} \models \varphi$, e quindi φ è soddisfacibile.

Esempio (cont.)

Se si considera la struttura $\mathcal{B} = (\mathbb{N}, f^{\mathcal{B}})$, dove

$$f^{\mathcal{B}} : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n^3 \end{array}$$

si osserva che

$$\mathcal{B} \not\models \varphi$$

Infatti non esiste alcun numero naturale n tale che $n^3 = 55$, quindi non esiste alcun numero naturale n tale che $\mathcal{B} \models (x \neq y \wedge f(x) = y)[y/55, x/n]$.

Le due strutture $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ considerate testimoniano che φ è soddisfacibile (perché vero in $\mathcal{A}$), ma non valido (perché falso in $\mathcal{B}$).

Esempio

Sia $L = \{R\}$, dove R è simbolo relazionale binario, e si consideri l'enunciato

$$\varphi : \forall x \forall y (R(x,y) \to \exists z (z \neq x \wedge z \neq y \wedge R(x,z) \wedge R(z,y)))$$

Interpretato nella struttura $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, <)$, l'enunciato φ asserisce che per ogni coppia di numeri a, b con $a < b$ esiste un numero c tale che $a < c < b$ (l'enunciato asserisce anche che c deve essere diverso sia da a sia da b, ma questa è una conseguenza automatica di $a < c < b$).
Pertanto $\mathcal{A} \models \varphi$, in quanto basta considerare $c = \frac{a+b}{2}$.
Se $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}, <)$ si ha invece $\mathcal{B} \not\models \varphi$, perché non c'è alcun numero intero strettamente compreso tra 0 e 1.

L'enunciato φ è pertanto soddisfacibile (perché vero in $\mathcal{A}$), e non valido (perché falso in $\mathcal{B}$).

Esempio

Sia $L = \{+, \cdot, 1\}$, dove:

- $+, \cdot$ sono simboli funzionali binari
- 1 sono simboli di costante

Si considerino gli enunciati:

$$\begin{array}{ll} \varphi: & \forall x \exists y \; 1 + (x \cdot x) = y \\ \psi: & \forall y \exists x \; 1 + (x \cdot x) = y \end{array}$$

L'enunciato φ è valido, cioè è vero in ogni L struttura. Infatti, se $\mathcal{A}$ è una L -struttura, qualunque sia l'elemento $a \in |\mathcal{A}|$ esiste un elemento b tale che $1^{\mathcal{A}} +^{\mathcal{A}} (a \cdot^{\mathcal{A}} a) = b$: tale b è esattamente l'elemento $1^{\mathcal{A}} +^{\mathcal{A}} (a \cdot^{\mathcal{A}} a)$. In altre parole, per ogni $a \in |\mathcal{A}|$,

$$\mathcal{A} \models (1 + (x \cdot x) = y)[x/a, y/1^{\mathcal{A}} +^{\mathcal{A}} (a \cdot^{\mathcal{A}} a)]$$

quindi

$$\mathcal{A} \models \forall x \exists y \; 1 + (x \cdot x) = y$$

Esempio (cont.)

Invece l'enunciato ψ è soddisfacibile, ma non valido.

Non è valido perché se $\mathcal{B} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 1)$, in cui i simboli di L sono interpretati nella maniera usuale, allora

$$\mathcal{B} \not\models \psi$$

in quanto l'equazione $1 + x^2 = 0$ non ha soluzione in $\mathbb{R}$, cioè non esiste alcun $a \in \mathbb{R}$ tale che $\mathcal{B} \models (1 + (x \cdot x) = y)[y/0, x/a]$.

L'enunciato ψ è soddisfacibile, perché se $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot, 1)$, in cui i simboli di L sono interpretati nella maniera usuale, allora

$$\mathcal{C} \models \psi$$

in quanto per ogni numero complesso b esiste un numero complesso a tale che $1 + a^2 = b$, cioè l'equazione $1 + x^2 = b$ ha soluzioni in $\mathbb{C}$ qualunque sia b.

Osservazione

L'enunciato

$$\varphi : \forall x \exists y \; 1 + (x \cdot x) = y$$

dell'esempio precedente è del tipo

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \;\; t = y$$

dove t è un termine le cui variabili sono comprese tra $x_1, \ldots, x_n$.

Un tale enunciato è valido.

Infatti, qualunque sia la struttura $\mathcal{A}$ per il linguaggio considerato, e qualunque siano gli elementi $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{A}|$ esiste sempre un elemento $b \in |\mathcal{A}|$ tale che $b = t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$, in quanto l'interpretazione di tale termine mediante l'assegnazione $x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n$ è un elemento di $|\mathcal{A}|$.

In altre parole, qualunque siano $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$, si ha

$$\mathcal{A} \models (t = y)[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n, y/t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]]$$

pertanto

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \;\; t = y$$

Osservazione (cont.)

Invece, l'enunciato

$$\forall y \exists x_1 \ldots \exists x_n \; t = y$$

dove t è un termine le cui variabili sono tra $x_1, \ldots, x_n$, è vero in una struttura $\mathcal{A}$ se e solo se ogni elemento di $|\mathcal{A}|$ è della forma $t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$, per qualche $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{A}|$, cioè se e solo se la mappa

$$\begin{array}{rcl} A^n & \to & A \\ (a_1, \ldots, a_n) & \mapsto & t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n] \end{array}$$

è suriettiva.

Relazioni binarie

Sia $L = \{R\}$ un linguaggio del prim'ordine, con R simbolo relazionale binario. Allora in ogni L struttura $\mathcal{A}$, l'interpretazione $R^{\mathcal{A}}$ è una relazione binaria sull'universo $|\mathcal{A}|$, cioè un sottoinsieme di $|\mathcal{A}|^2$.

Si considerino gli enunciati

- $\varphi_1 : \forall x R(x,x)$
- $\varphi_2 : \forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x))$
- $\varphi_3 : \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$

Quindi, data una L-struttura $\mathcal{A}$:

- $\mathcal{A} \models \varphi_1$ se e solo se $R^{\mathcal{A}}$ è riflessiva
- $\mathcal{A} \models \varphi_2$ se e solo se $R^{\mathcal{A}}$ è simmetrica
- $\mathcal{A} \models \varphi_3$ se e solo se $R^{\mathcal{A}}$ è transitiva

In particolare, $\mathcal{A} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ se e solo se $R^{\mathcal{A}}$ è una relazione d'equivalenza.

Esempio

Siano $L, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ come sopra.
Nessuno dei tre enunciati è conseguenza logica degli altri due, cioè

$$\varphi_2, \varphi_3 \not\models \varphi_1, \quad \varphi_1, \varphi_3 \not\models \varphi_2, \quad \varphi_1, \varphi_2 \not\models \varphi_3$$

Per ogni i si trova una L-struttura $\mathcal{A}_i$ tale che $\mathcal{A}_i \models \varphi_j$ con $j \neq i$, ma $\mathcal{A}_i \not\models \varphi_i$.

- $\mathcal{A}_1 = (|\mathcal{A}_1|, \emptyset)$: la relazione $\emptyset$ è simmetrica, transitiva, ma non riflessiva
- $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{N}, \leq)$: la relazione $\leq$ è riflessiva, transitiva, ma non simmetrica
- $\mathcal{A}_3 = (\{0, 1, 2\}, R^{\mathcal{A}_3})$, dove

$$R^{\mathcal{A}_3} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

la relazione $R^{\mathcal{A}_3}$ è riflessiva, simmetrica, ma non transitiva.

Alcuni richiami

- Un enunciato φ è *soddisfacibile* se e solo se esiste una struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \models \varphi$.
- Un enunciato φ *non è valido* se e solo se esiste una struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \not\models \varphi$ (cioè $\mathcal{A} \models \neg\varphi$).
- Un enunciato φ *non è conseguenza logica* dell'insieme di enunciati Γ se e solo se esiste una struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \models \Gamma$ ma $\mathcal{A} \not\models \varphi$.
  In particolare, $\psi_1, \ldots, \psi_n \not\models \varphi$ se e solo se esiste una struttura $\mathcal{A}$ tale che
  $$\mathcal{A} \models \psi_1 \wedge \ldots \psi_n \wedge \neg\varphi$$
- Gli enunciati φ, ψ *non sono logicamente equivalenti*, cioè $\varphi \not\equiv \psi$ se e solo se esiste una struttura $\mathcal{A}$ tale $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \neg\psi$ oppure $\mathcal{A} \models \psi \wedge \neg\varphi$.