Esempio

La condizione

$$v(\neg P) = 1 - v(P)$$

significa che:

- se $v(P) = 0$, cioè v assegna a P il valore di verità *falso*, allora $v(\neg P) = 1 - v(P) = 1 - 0 = 1$, cioè v assegna a $\neg P$ il valore *vero*;
- se $v(P) = 1$, cioè v assegna a P il valore di verità *vero*, allora $v(\neg P) = 1 - v(P) = 1 - 1 = 0$, cioè v assegna a $\neg P$ il valore *falso*.

Si tratta della descrizione della tavola di verità della negazione:

P	$\neg P$
0	1
1	0

Esempio

La condizione

$$v(P \wedge Q) = \min(v(P), v(Q))$$

significa che:

- se almeno uno tra $v(P)$ e $v(Q)$ è 0, cioè v assegna ad almeno una tra P e Q il valore di verità *falso*, allora $v(P \wedge Q) = \min(v(P), v(Q)) = 0$, cioè v assegna a $P \wedge Q$ il valore di verità *falso*;
- se $v(P) = v(Q) = 1$, cioè v assegna sia a P sia a Q il valore di verità *vero*, allora $v(P \wedge Q) = \min(v(P), v(Q)) = \min(1, 1) = 1$, cioè v assegna a $P \wedge Q$ il valore di verità *vero*.

Si tratta della descrizione della tavola di verità della congiunzione:

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Interpretazioni e valutazioni

Un'interpretazione è una funzione

$$i : L \rightarrow \{0,1\}$$

Una valutazione di verità è una funzione

$$v : Prop(L) \rightarrow \{0,1\}$$

Quindi la restrizione di v alle formule atomiche definisce un'interpretazione:

$$v_{|_L} : L \rightarrow \{0,1\}$$

Viceversa, l'interpretazione i si può estendere **in modo unico** a una valutazione $i^* : Prop(L) \to \{0,1\}$ per induzione sull'altezza delle formule, ponendo

$$\begin{array}{rcl} i^*(\neg P) & = & 1 - i^*(P) \\ i^*(P \vee Q) & = & \max(i^*(P), i^*(Q)) \\ i^*(P \wedge Q) & = & \min(i^*(P), i^*(Q)) \\ i^*(P \to Q) & = & \max(1 - i^*(P), i^*(Q)) \\ i^*(P \leftrightarrow Q) & = & 1 - |i^*(P) - i^*(Q)| \end{array}$$

Osservazione. Data l'interpretazione $i : L \to \{0,1\}$ e una formula P, il valore $i^*(P)$ non dipende dai valori che i assume su tutto L, ma solo dai valori che i assume sulle lettere proposizionali che occorrono in P.
In altre parole: se $i, j : L \to \{0,1\}$ sono due interpretazioni tali che $i(A) = j(A)$ per ogni lettera proposizionale A che occorre in P, allora $i^*(P) = j^*(P)$.

Esempio

Sia $L = \{A, B, C, D, E\}$, e sia $i : L \to \{0, 1\}$ un'interpretazione. Sia

$$P : A \wedge \neg B \to \neg D$$

Il valore che i assume su C e su E non ha alcuna influenza sul valore di $i^*(P)$: se $j : L \to \{0, 1\}$ è tale che

$$j(A) = i(A), \quad j(B) = i(B), \quad j(D) = i(D)$$

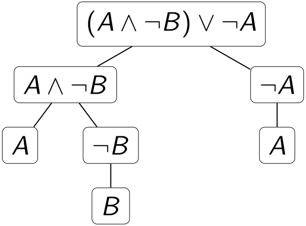
allora $j^*(P) = i^*(P)$

Esempio

Sia $i(A) = 1, i(B) = 0$, sia

$$P : (A \wedge \neg B) \vee \neg A$$

e si voglia calcolare $i^*(P)$.
L'albero sintattico di P è



Il calcolo di $i^*(P)$ utilizza il valore di i^* sulle sottoformule principali di P; iterativamente ci si riconduce ai valori di i sulle lettere che occorrono in P, cioè sulle etichette delle foglie dell'albero sintattico di P.

Esempio

$$
\begin{aligned}
i^*((A \wedge \neg B) \vee \neg A) &= \max(i^*(A \wedge \neg B), i^*(\neg A)) = \\
&= \max(\min(i^*(A), i^*(\neg B)), 1 - i^*(A)) = \\
&= \max(\min(i(A), 1 - i^*(B)), 1 - i(A)) = \\
&= \max(\min(i(A), 1 - i(B)), 1 - i(A)) = \\
&= \max(\min(1, 1 - 0), 1 - 1) = \\
&= 1
\end{aligned}
$$

I valori ottenuti durante il calcolo sono i seguenti:

A	B	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg A$	P
1	0	1	1	0	1

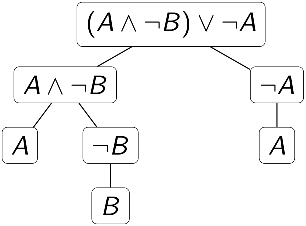
Calcolare $i^*(P)$ corrisponde dunque a calcolare una riga della tavola di verità di P: la riga che contiene i valori che i assume sulle lettere che occorrono in P.

Tavole di verità e valutazioni

Quindi, per calcolare la tavola di verità di una formula P:

1. Si costruisce l'albero sintattico di P, ciò che permette anche di verificare che P è una proposizione ben formata.
2. Si considera il minimo linguaggio L tale che $P \in Prop(L)$: L è l'insieme delle lettere che occorrono in P.
3. Si considerano tutte le interpretazioni $i : L \to \{0, 1\}$, cioè tutte le combinazioni di valori di verità degli elementi di L. Tali interpretazioni sono in numero di $2^{\sharp(L)}$; ogni interpretazione costituisce una riga della tavola di verità.
4. Si estende ognuna di tali interpretazioni a una valutazione di verità i^* sulle sottoformule di P, seguendo la struttura dell'albero sintattico, fino a ottenere il valore $i^*(P)$.

Esempio

- $P : (A \wedge \neg B) \vee \neg A$
- $L = \{A, B\}$
- 

-

A	B	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg A$	P
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0

Definizioni

Sia $P \in Prop(L)$.

- Se $i^*(P) = 1$, si dice che P è *vera* nell'interpretazione i, o che i *soddisfa* P, o che i è un *modello* di P. Si denota

$$i \models P$$

- Se esiste almeno un'interpretazione i tale che $i \models P$ (cioè se esiste almeno una riga della tavola di verità in cui il valore di verità di P è 1), si dice che P è *soddisfacibile*, o *consistente*.
- Se non esiste alcuna interpretazione i tale che $i \models P$ (cioè se in tutte le righe della tavola di verità il valore di verità di P è 0), si dice che P è *insoddisfacibile*, o *inconsistente*, o una *contraddizione*.
- Se per ogni interpretazione i si ha che $i \models P$ (cioè se in tutte le righe della tavola di verità il valore di verità di P è 1), si dice che P è *valida*, o una *tautologia*. Si denota

$$\models P$$

Definizioni

Le definizioni precedenti si estendono a *insiemi* di formule:
Sia $\Gamma \subseteq Prop(L)$.

- Se $i \models P$ per ogni $P \in \Gamma$, si dice che i è un *modello* di Γ, o che i *soddisfa* Γ. Si denota
$$i \models \Gamma$$
- Se esiste almeno un'interpretazione i tale che $i \models \Gamma$, si dice che Γ è *soddisfacibile*, o *consistente*.
- Se non esiste alcuna interpretazione i tale che $i \models \Gamma$, si dice che Γ è *insoddisfacibile*, o *inconsistente*.
- Se per ogni interpretazione i si ha che $i \models \Gamma$, si dice che Γ è *valido*. Si denota
$$\models \Gamma$$

Osservazioni

Sia $\Gamma \subseteq Prop(L)$.

- Γ è valido se e solo se ogni $P \in \Gamma$ è una tautologia.
  Infatti:

  $$\begin{array}{lll} \models \Gamma & \text{sse} & \text{per ogni interpretazione } i \text{ si ha } i \models \Gamma \\ & \text{sse} & \text{per ogni interpretazione } i \text{ e ogni } P \in \Gamma \text{ si ha } i \models P \\ & \text{sse} & \text{per ogni } P \in \Gamma \text{ si ha } \models P \end{array}$$

- Se Γ è soddisfacibile, allora ogni $P \in \Gamma$ è soddisfacibile.
  Infatti, se i è tale che $i \models \Gamma$, per ogni $P \in \Gamma$ si ha $i \models P$.
- Il viceversa non è vero: se ogni $P \in \Gamma$ è soddisfacibile, non è detto che Γ sia soddisfacibile.
  Controesempio: $\Gamma = \{A, \neg A\}$

Osservazioni

- Se $\Gamma = \{P_1, \ldots, P_n\}$ è un insieme *finito*, allora per ogni interpretazione i si ha che:

$$i \models \Gamma \quad \text{sse} \quad i \models P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$$

Infatti:

$$\begin{array}{lll} i \models \Gamma & \text{sse} & i \models P_1 \text{ e } i \models P_2 \text{ e} \ldots \text{e } i \models P_n \\ & \text{sse} & i \models P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \end{array}$$

Quindi Γ è soddisfacibile/insoddisfacibile/valido se e solo se la congiunzione $P_1 \wedge \ldots \wedge P_n$ è soddisfacibile/insoddisfacibile/valida.

Conseguenza logica

Siano

$$\Gamma \subseteq Prop(L), \qquad Q \in Prop(L)$$

Si dice che Γ ha come *conseguenza logica* Q (o che Q è *conseguenza logica* di Γ) se

per ogni interpretazione i tale che $i \models \Gamma$ si ha anche che $i \models Q$.

Si denota allora

$$\Gamma \models Q$$

- Se $\Gamma = \{P_1, \ldots, P_n\}$ è un insieme *finito*, anziché scrivere $\Gamma \models Q$, cioè $\{P_1, \ldots, P_n\} \models Q$, si scrive talvolta

$$P_1, \ldots, P_n \models Q$$

Osservazione.

$$P_1, \ldots, P_n \models Q \quad \text{se e solo se} \quad \models P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$$

Proprietà

1. P è una tautologia se e solo se $\neg P$ è insoddisfacibile
2. P è soddisfacibile se e solo se $\neg P$ non è una tautologia
3. $\Gamma \models Q$ se e solo se $\Gamma \cup \{\neg Q\}$ è insoddisfacibile

Dim.

1.

$$
\begin{array}{lll}
P \text{ è una tautologia} & \text{sse} & \text{per ogni interpretazione } i \text{ si ha } i \models P \\
& \text{sse} & \text{per ogni interpretazione } i \text{ si ha } i^*(P) = 1 \\
& \text{sse} & \text{per ogni interpretazione } i \text{ si ha } i^*(\neg P) = 0 \\
& \text{sse} & \neg P \text{ è insoddisfacibile}
\end{array}
$$

Proprietà

2.

$$
\begin{array}{lll}
P \text{ è soddisfacibile} & \text{sse} & \text{per qualche interpretazione } i \text{ si ha } i \models P \\
 & \text{sse} & \text{per qualche interpretazione } i \text{ si ha } i^*(P) = 1 \\
 & \text{sse} & \text{per qualche interpretazione } i \text{ si ha } i^*(\neg P) = 0 \\
 & \text{sse} & \neg P \text{ non è una tautologia}
\end{array}
$$

Proprietà

3. Si assuma $\Gamma \models Q$, al fine di dimostrare che $\Gamma \cup \{\neg Q\}$ è insoddisfacibile.
   Si deve dunque provare che non esiste alcuna interpretazione i tale che $i \models \Gamma \cup \{\neg Q\}$, cioè tale che $i \models P$ per ogni $P \in \Gamma \cup \{\neg Q\}$.
   Infatti, se $i \models P$ per ogni $P \in \Gamma$, dall'ipotesi segue che $i \models Q$; in particolare, $i \not\models \neg Q$.

   Viceversa, si assuma che $\Gamma \cup \{\neg Q\}$ è insoddisfacibile, al fine di dimostrare che $\Gamma \models Q$.
   Sia allora i una qualunque interpretazione tale che $i \models \Gamma$, al fine di dimostrare che $i \models Q$.
   Poiché $i \models \neg Q$ contraddirebbe l'ipotesi, segue $i \models Q$.

Proprietà

Nel caso in cui $\Gamma = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ sia un insieme *finito*, la proprietà 3 ammette una dimostrazione più elementare:

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma \models Q & \text{sse} & \models P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \to Q \\
 & \text{sse} & \neg(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \to Q) \text{ è insoddisfacibile} \\
 & \text{sse} & P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge \neg Q \text{ è insoddisfacibile} \\
 & \text{sse} & \Gamma \cup \{\neg Q\} \text{ è insoddisfacibile}
\end{array}
$$

Equivalenza logica

Le formule $P, Q \in Prop(L)$ sono *logicamente equivalenti* se per ogni interpretazione i si ha

$$i \models P \quad \text{se e solo se} \quad i \models Q$$

In tal caso, si denota

$$P \equiv Q$$

Proprietà

Sono condizioni equivalenti:

- $P \equiv Q$
- $\models P \leftrightarrow Q$
- $P \models Q$ e $Q \models P$
- $i^*(P) = i^*(Q)$ per ogni interpretazione i

Osservazione. È possibile verificare relazioni quali

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \models P \quad \text{oppure} \quad P \equiv Q$$

utilizzando le tavole di verità.
Non è possibile invece utilizzare le tavole di verità per verificare se

$$\Gamma \models P$$

quando Γ è un insieme infinito.

Esempio

Per verificare se

$$A \vee (B \to C) \models A \wedge B$$

si può costruire la tavola di verità

A	B	C	$B \to C$	$A \vee (B \to C)$	$A \wedge B$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

Si osserva che per esempio l'interpretazione i tale che $i(A) = i(B) = i(C) = 0$, corrispondente alla prima riga, è tale che $i^*(A \vee (B \to C)) = 1$, ma $i^*(A \wedge B) = 0$. Pertanto

$$A \vee (B \to C) \not\models A \wedge B$$