Controllo della temperatura di una casa

Indice

Descrizione del problema

L'obiettivo del progetto è regolare la temperatura di una casa utilizzando un controllore MPC. Si ipotizza che la casa non condivida alcun muro esterno con altre abitazioni, che i flussi d'aria tra le stanze della casa siano trascurabili e che il riscaldamento della casa sia affidato a tre termosifoni, uno per ogni stanza. La pianta della casa in oggetto è mostrata nella figura seguente:

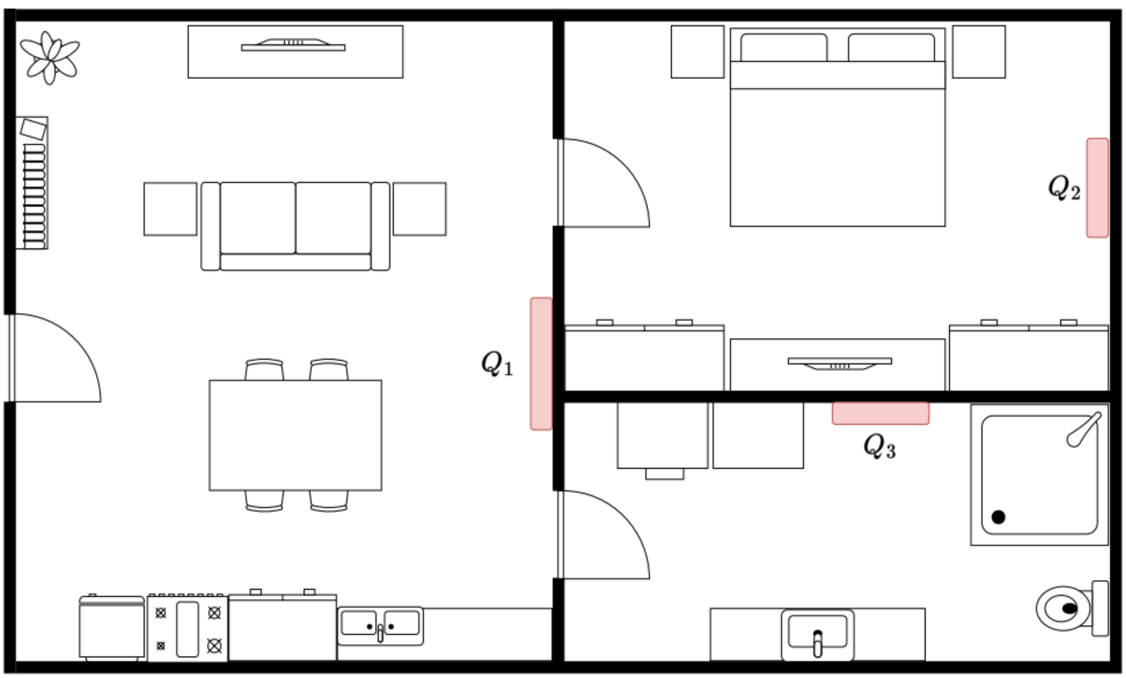

Figura 1: Planimetria della casa.

La dinamica della temperatura all'interno della casa è definita dalle equazioni seguenti:

$$
\begin{cases}
C_1\dot{T}_1(t) = Q_1(t) - k_{1,2}(t)(T_1(t) - T_2(t)) - k_{1,3}(t)(T_1(t) - T_3(t)) - k_{ext}(T_1(t) - T_{ext}) \\
C_2\dot{T}_2(t) = Q_2(t) + k_{1,2}(t)(T_1(t) - T_2(t)) - k_{2,3}(t)(T_2(t) - T_3(t)) - k_{ext}(T_2(t) - T_{ext}) \\
C_3\dot{T}_3(t) = Q_3(t) + k_{1,3}(t)(T_1(t) - T_3(t)) + k_{2,3}(t)(T_2(t) - T_3(t)) - k_{ext}(T_3(t) - T_{ext}) \\
\dot{Q}_1 = (Q_{1,r}(t) - Q_1(t))/\tau_1 \\
\dot{Q}_2 = (Q_{2,r}(t) - Q_2(t))/\tau_2 \\
\dot{Q}_3 = (Q_{3,r}(t) - Q_3(t))/\tau_3
\end{cases}
\quad \text{con } k_{i,j} = \bar{k}_{i,j} + \frac{4}{1 + e^{-0.5\|T_i(t) - T_j(t)\|_2}}
$$

Il significato delle grandezze presenti nelle precedenti equazioni è il seguente:

- $T_i\ [K]$ è la temperatura della i-esima stanza;
- $T_{ext}\ [K]$ è la temperatura esterna, ipotizzata costante.
- $C_i\ [J/s]$ è la capacità termica della i-esima stanza;
- $k_{i,j}\ [W/K]$ è un parametro che regola lo scambio di calore tra l'i-esima e la j-esima stanza;
- $k_{ext}\ [W/K]$ è un parametro che regola lo scambio di calore tra le stanze della casa e l'esterno;
- $Q_i\ [W]$ è la potenza termica dell'i-esimo termosifone;
- $Q_{i,r}\ [W]$ è la potenza termica di riferimento dell'i-esimo termosifone;
- $\tau_i\ [s]$ è la costante di tempo dell'i-esimo termosifone.

I parametri noti sono riportati nella tabella seguente:

Parametro	**Valore**	**Unità**
C_1	6800	J/s
C_2	5600	J/s
C_3	5100	J/s
$\bar{k}_1$	15	W/K
$\bar{k}_2$	20	W/K
$\bar{k}_3$	15	W/K
k_{ext}	8	W/K
T_{ext}	278	K
τ_1	400	s
τ_2	450	s
τ_3	450	s

Tabella 1: Parametri noti del sistema in esame.

La potenza erogata dai tre termosifoni è non-negativa e mai superiore ai 150W, mentre la temperatura all'interno delle tre stanze non deve mai scendere al di sotto dei 286K.

Gli ingressi controllati del sistema sono le potenze di riferimento dei tre termosifoni, $Q_{i,r},\ i \in \{1, 2, 3\}$.

L'obiettivo del lavoro è progettare un controllore MPC in grado di portare il sistema dalla condizione iniziale $(T_1, T_2, T_3, Q_1, Q_2, Q_3) = (288, 288, 288, 0, 0, 0)$ all'equilibrio $(293, 293, 293, 120, 120, 120)$, rispettando sempre i vincoli, e simulare il funzionamento del sistema in anello chiuso.

Parametri costanti del modello della casa

Inizialmente, si creano delle variabili per salvare tutti i parametri noti del modello.

```
T_ext = 278; % [K], temperatura esterna ipotizzata costante
C = [6800 5600 5100]; % [J/s], capacità termica della i-esima stanza
k_bar = [15 20 15]; % [W/K], scambio di calore fra l'i-esima e la j-esima stanza
k_ext = 8; % [W/K], scambio di calore fra le stanze e l'esterno
Q_ref = [150 150 150]; % [W], potenza termica di riferimento dell'i-esimo termosifone
tau = [400 450 450]; % [s], costante di tempo dell'i-esimo termosifone
punto_eq = [293 293 293 120 120 120];
```

Equazioni del sistema in forma di stato

Prima di procedere ad analizzare il sistema, è necessario riscrivere le equazioni della sua dinamica nello spazio degli stati. Si definiscono il vettore degli stati, $\mathbf{x}$, ed il vettore degli ingressi, $\mathbf{u}$:

$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]' := [T_1, T_2, T_3, Q_1, Q_2, Q_3]'$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$

$\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]' := [Q_{1,r}, Q_{2,r}, Q_{3,r}]'$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$

Il sistema diventa quindi:

$$\begin{cases} C_1\dot{x}_1(t) = x_4(t) - k_{1,2}(t)(x_1(t) - x_2(t)) - k_{1,3}(t)(x_1(t) - x_3(t)) - k_{ext}(x_1(t) - T_{ext}) \\ C_2\dot{x}_2(t) = x_5(t) + k_{1,2}(t)(x_1(t) - x_2(t)) - k_{2,3}(t)(x_2(t) - x_3(t)) - k_{ext}(x_2(t) - T_{ext}) \\ C_3\dot{x}_3(t) = x_6(t) + k_{1,3}(t)(x_1(t) - x_3(t)) + k_{2,3}(t)(x_2(t) - x_3(t)) - k_{ext}(x_3(t) - T_{ext}) \\ \dot{x}_4 = (u_1(t) - x_4(t))/\tau_1 \\ \dot{x}_5 = (u_2(t) - x_5(t))/\tau_2 \\ \dot{x}_6 = (u_3(t) - x_6(t))/\tau_3 \end{cases} \quad \text{con } k_{i,j} = \bar{k}_{i,j} + \frac{4}{1 + e^{-0.5\|x_i(t) - x_j(t)\|_2}}$$

Si sviluppano i calcoli del sistema precedente, in modo da esplicitare variabili di stato ed ingressi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ((-k_{1,2}(t) - k_{1,3}(t) - k_{ext}(t))/C_1)x_1(t) + (k_{1,2}(t)/C_1)x_2(t) + (k_{1,3}(t)/C_1)x_3(t) + (1/C_1)x_4 + (k_{ext}T_{ext})/C_1 \\ \dot{x}_2(t) = (k_{1,2}(t)/C_2)x_1(t) + ((-k_{1,2}(t) - k_{2,3}(t) - k_{ext}(t))/C_2)x_2(t) + (k_{2,3}(t)/C_2)x_3(t) + (1/C_2)x_5 + (k_{ext}T_{ext})/C_2 \\ \dot{x}_3(t) = (k_{1,3}(t)/C_3)x_1(t) + (k_{2,3}(t)/C_3)x_2(t) + ((-k_{1,3}(t) - k_{2,3}(t) - k_{ext}(t))/C_3)x_1(t) + (1/C_3)x_6 + (k_{ext}T_{ext})/C_3 \\ \dot{x}_4 = -x_4(t)/\tau_1 + u_1(t)/\tau_1 \\ \dot{x}_5 = -x_5(t)/\tau_2 + u_2(t)/\tau_2 \\ \dot{x}_6 = -x_6(t)/\tau_3 + u_3(t)/\tau_3 \end{cases}$$

In questo modo è facile identificare le matrici A e B del sistema:

$$
A = \begin{bmatrix} \frac{-k_{1,2}(t) - k_{1,3}(t) - k_{\text{ext}}}{C_1} & \frac{k_{1,2}(t)}{C_1} & \frac{k_{1,3}(t)}{C_1} & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_{1,2}(t)}{C_2} & \frac{-k_{1,2}(t) - k_{2,3}(t) - k_{\text{ext}}}{C_2} & \frac{k_{2,3}(t)}{C_2} & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ \frac{k_{1,3}(t)}{C_3} & \frac{k_{2,3}(t)}{C_3} & \frac{-k_{1,3}(t) - k_{2,3}(t) - k_{\text{ext}}}{C_3} & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_3} \end{bmatrix} \quad A \in \mathbb{R}^{6x6}
$$

$$
B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\tau_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau_3} \end{bmatrix} \quad B \in \mathbb{R}^{6x3}
$$

In questo modo, è possibile scrivere il sistema di equazioni in forma matriciale, che è molto più compatta:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

Di seguito si calcolano le matrici A e B utilizzando la notazione simbolica di Matlab. Nel nostro sistema è presente anche un vettore di termini costanti (noti).

```
syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 u1 u2 u3;
matrix_TvsT = [-((k_bar(1)+(1/(1+exp(-0.5*(norm((x1-x2),2))))))+((k_bar(3)+(1/(1+exp(-0.5*(norm
                (k_bar(1)+(1/(1+exp(-0.5*(norm((x1-x2),2))))))/C(2)), -((k_bar(2)+(1/(1+exp(-0.5
                (k_bar(1)+(1/(1+exp(-0.5*(norm((x1-x3),2))))))/C(3)), (k_bar(2)+(1/(1+exp(-0.5*(
matrix_TvsQ = eye(3).*(1./C);
matrix_QvsT = zeros(3,3);
matrix_QvsQ = -eye(3).*(1./tau);
A = [matrix_TvsT, matrix_TvsQ;
     matrix_QvsT, matrix_QvsQ];
B = [zeros(3,3);
     eye(3).*(1./tau)];
tn = [(k_ext*T_ext)./C';
      zeros(3,1)
     ];
```

Vincoli su stato e ingresso

Successivamente, si definiscono i vincoli esistenti su stato e ingresso del sistema.

```
x_min_temp = 268.*ones(3,1); % Vincolo di minimo sulla temperatura dell'i-esima stanza
x_min_power = zeros(3,1); % Vincolo di minimo sulla potenza dell'i-esimo termosifone
x_min = [x_min_temp;x_min_power]; % Vincolo di minimo sullo stato
x_max_temp = inf.*ones(3,1); % Vincolo di massimo sulla temperatura dell'i-esima stanza
x_max_power = 150.*ones(3,1); % Vincolo di massimo sulla potenza dell'i-esimo termosifone
x_max = [x_max_temp;x_max_power]; % Vincolo di massimo sullo stato
u_min = zeros(3,1); % Vincolo di minimo sulla potenza dell'i-esimo termosifone
u_max = 150.*ones(3,1); % Vincolo di minimo sulla potenza dell'i-esimo termosifone
```

Punti di equilibrio

Dalle equazioni sappiamo che il sistema non è lineare, in quanto alcune variabili di stato compaiono nell'esponenziale. Sarà perciò necessario linearizzare il sistema attorno ad un punto di equilibrio. Per fare ciò, si pongono a zero le derivate degli stati e si calcolano le soluzioni del sistema di equazioni.

```
eq = A*[x1 x2 x3 x4 x5 x6]' + B*[u1 u2 u3]' + tn == 0;
var = subs(eq,[x1,x2,x3,x4,x5,x6],punto_eq);
S = solve(var([4,5,6],:))
```

```
S = struct with fields:
    u1: 120
    u2: 120
    u3: 120
```