

# Rapport II : Aiguille aimantée

Natalia BERGER HRYN'OVA & Giulia VITTORANGELI

[natalia.bergerhrynova@epfl.ch](mailto:natalia.bergerhrynova@epfl.ch), [giulia.vittorangeli@epfl.ch](mailto:giulia.vittorangeli@epfl.ch)

18 mars 2025

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Théorie</b>	<b>2</b>
2.1	Dérivation des équations du mouvement . . . . .	2
2.2	Énergie mécanique du système . . . . .	3
2.3	Linéarisation des équations du mouvement . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Simulations et analyses</b>	<b>5</b>
3.1	Théorie du schéma de Verlet [2] . . . . .	5
3.2	Petits mouvements et mode propre . . . . .	5
3.3	Excitation paramétrique . . . . .	6
3.4	Sections de Poincaré pour un mouvement sans amortissement . . . . .	8
3.5	Études de convergence pour un cas chaotique et non-chaotique, pour un mouvement sans amortissement . . . . .	10
3.6	Chaos, attracteurs étranges. Cas avec amortissement . . . . .	11
3.7	Étude facultative . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>13</b>
	<b>Références</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Annexe</b>	<b>14</b>

## 1 Introduction

Dans cette étude, le comportement d'une aiguille aimantée en rotation dans un fluide visqueux est étudié. L'aiguille est attachée à un point fixe dans le repère  $G$  et soumise à un champ magnétique oscillant  $\vec{B}$ . Cette situation expérimentale permet d'étudier les propriétés de la convergence numérique d'un schéma symplectique de Verlet. Du point de vue physique, le mode propre et la fréquence propre des oscillations de l'aiguille seront étudiées. Ensuite, en tenant compte des forces non inertielles et en modélisant la trajectoire dans l'espace des phases, la stabilité des orbites ainsi que la convergence du schéma dans les régimes chaotique

et non chaotique seront analysées. Les simulations successives permettent ainsi d'évaluer la fiabilité des résultats numériques en fonction des conditions initiales.

## 2 Théorie

Le système, consiste en une aiguille de masse  $m$  et longueur  $L$  positionné dans le plan munit d'un repère cartésien  $(x, y)$ , comme représenté en Fig. 1. En considérant que le mouvement du barreau est en rotation autour de l'origine  $G$  du repère, le système peut être entièrement décrit par une unique coordonnée généralisée  $\theta$ .

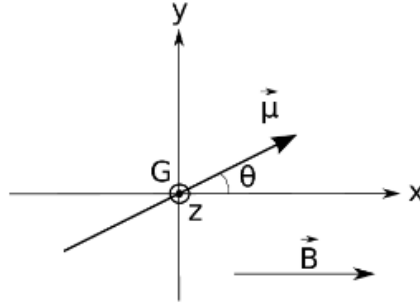


FIGURE 1 – Aiguille aimantée dans le repère cartésien  $(x, y)$

L'aiguille possède un moment magnétique  $\vec{\mu}$  non-nul, comme représenté en Fig. 1. Lorsque celle-ci est soumise à un champ magnétique oscillant  $\vec{B}(t) = (B_0 + B_1 \sin(\Omega t))\vec{x}$ , un moment de force est donc appliqué sur l'aiguille :  $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}(t)$ . En considérant que l'aiguille est baignée dans un fluide visqueux, celle-ci se trouve soumise au moment de forces de frottements visqueux :  $\vec{M}_v = -\kappa \dot{\theta} \vec{z}$ .

### 2.1 Dérivation des équations du mouvement

Deux forces s'exercent sur la tige : la force magnétique et la force de frottement visqueux exercée par le liquide sur la tige. Afin de déterminer les équations différentielles du mouvement, l'équation du mouvement angulaire s'écrit sous la forme :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum_i M_i = M_m + M_v \quad (1)$$

où  $M_m$  est le moment de force magnétique,  $M_v$  le moment de force visqueux, et  $I$  le moment d'inertie de la tige, donné par :

$$I = \frac{1}{12} m l^2. \quad (2)$$

**Détermination de  $M_m$**  L'expression du moment de force magnétique est donnée par :

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (3)$$

où les projections de  $\vec{\mu}$  et de  $\vec{B}(t)$  dans le repère  $(x, y)$  sont respectivement :

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu \cos(\theta) \\ \mu \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{B}(t) = \begin{pmatrix} B_0 + B_1 \sin(\Omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

En utilisant l'équation (3), le moment  $\vec{M}$  devient :

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu \sin(\theta)(B_0 + B_1 \sin(\Omega t)) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

**Détermination de  $M_v$**  Le moment des forces visqueuses est donné directement par :

$$\vec{M}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\kappa \dot{\theta} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Ainsi, le moment total des forces s'écrit :

$$\vec{M}_{\text{tot}} = \vec{M}_m + \vec{M}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu \sin(\theta)(B_0 + B_1 \sin(\Omega t)) - \frac{\kappa}{I} \dot{\theta} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

En appliquant Eq.(1), la forme différentielle des équations du mouvement est obtenu :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{\mu}{I} \sin(\theta)(B_0 + B_1 \sin(\Omega t)) - \frac{\kappa}{I} \dot{\theta} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

## 2.2 Énergie mécanique du système

**Énergie cinétique** Sachant qu'il n'y a pas de translation dans le plan, la vitesse admet uniquement une composante angulaire. L'énergie cinétique aura comme expression :

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{24} \dot{\theta}^2 m l^2 \quad (9)$$

Où  $I = \frac{1}{12} m l^2$  [1] représente le moment d'inertie d'une tige mince en rotation autour de son centre de masse avec  $m$  la masse de la tige et  $l$  sa longueur.

**Expression du potentiel** Premièrement, il est noté que la composante oscillante de la force magnétique admet une dépendance temporelle. Il est possible en déduire que cette composante est non-conservative et ne dérive pas d'un potentiel. Le potentiel  $V$  n'obtiens en calculant :

$$V = - \int_{\Gamma} (F \cdot d\theta) = - \int_{\Gamma} (F \cdot \dot{\theta}) dt = - \int_{\Gamma} (-\mu \sin(\theta) \dot{\theta} B_0) dt = -\mu B_0 \cos(\theta) \quad (10)$$

En particulier Eq.10 représente l'expression finale du potentiel, car la force visqueuse admet une dépendance explicite au temps.

**Expression de l'énergie mécanique** L'énergie mécanique correspond à la somme des énergies cinétique et potentielle, d'où d'après les expressions des Éqs.9, 10 :

$$E_{\text{mec}} = K + V = \frac{1}{24}\dot{\theta}^2 ml^2 - \mu B_0 \cos(\theta) \quad (11)$$

**Conservation de l'énergie mécanique** L'énergie mécanique du système n'est pas conservé car les forces présentes sont non-conservatives. En particulier, il s'agit de forces dissipatives qui s'opposent à l'action du mouvement, donc une diminution de l'énergie mécanique est attendue.

**Puissance des forces non-conservatives** Sachant que le barreau est en rotation la puissance de la force magnétique  $P_m$  s'écrit comme :

$$P_m = \vec{M} \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu \sin(\theta) B_1 \sin(\Omega t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = -\mu \dot{\theta} \sin(\theta) B_1 \sin(\Omega t) \quad (12)$$

La puissance de la force visqueuse  $P_v$  s'écrit comme :

$$P_v = \vec{M}_v \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\kappa \dot{\theta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = -\kappa \dot{\theta}^2 \quad (13)$$

Donc la puissance totale des forces non-conservatives  $P_{\text{nc}}$  d'après les Éqs.12, 13 devient :

$$P_{\text{nc}} = P_v + P_m = -\mu \dot{\theta} \sin(\theta) B_1 \sin(\Omega t) - \kappa \dot{\theta}^2 \quad (14)$$

### 2.3 Linéarisation des équations du mouvement

Considérons le cas dans lequel les forces non-conservatives sont négligées, i.e  $B_1 = 0, \kappa = 0$ . L'accélération obtenu en l'Eq.8 s'écrit comme :

$$\ddot{\theta} = -\frac{\mu B_0}{I} \sin(\theta) \quad (15)$$

Dans la limite de petites oscillations autour de la position d'équilibre  $\theta_{\text{eq}} = 0$ , on peut approximer au premier ordre :  $\sin(\theta) \approx \theta$ , d'où :

$$\ddot{\theta} = -\frac{\mu B_0}{I} \theta \quad (16)$$

Par analogie avec l'équation de l'oscillateur harmonique, on détermine dans le cas général :

$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{\mu B_0}{I}} \\ \theta(t) = A_1 \sin(\omega_0 t) + A_2 \cos(\omega_0 t) \end{cases} \quad (17)$$

En prenant comme position d'équilibre la position initial et en considérant les conditions initiales  $A_2 = \theta(0)$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$ , alors :

$$\begin{cases} \theta(t) = A_2 \cos(\omega_0 t) \\ \dot{\theta}(t) = -\omega_0 \cdot \theta(0) \sin(\omega_0 t) \end{cases} \quad (18)$$

### 3 Simulations et analyses

#### 3.1 Théorie du schéma de Verlet [2]

L'objectif est de réaliser ici une simulation longue. Cela signifierait qu'en appliquant un schéma d'Euler l'erreur sur la conservation de l'énergie serait croissante dans le temps, ce qui ne permettrait pas d'obtenir un résultat en accord avec la théorie attendue. Il est donc essentiel trouver un algorithme qui satisfasse la conservation de l'énergie en moyenne. Dans le cas d'un mouvement oscillant, il est possible observer que les schémas d'Euler-Cromer "A" et "B" permettent d'obtenir des erreurs opposées sur la conservation de l'énergie mécanique. Cette observation suggère d'appliquer à notre problème un schéma de Verlet qui soit une combinaison de ces deux algorithmes. Il garantit par ailleurs une plus grande précision de la solution numérique qu'un schéma d'Euler-Cromer, notamment car la propagation de l'erreur est limitée à chaque itération.

Dans un algorithme de Verlet, le pas temporel usuel  $\Delta t$  est divisé en deux. Sur la première moitié, l'évolution du système est réalisée en appliquant l'algorithme d'Euler-Cromer "A", et sur la seconde moitié sera utilisé l'algorithme d'Euler-Cromer "B". Nous travaillons sur un système dans lequel les forces dépendent à la fois de la position  $\theta$  et de la rotation  $\dot{\theta}$  associée. Pour étendre l'algorithme à des forces dépendant explicitement de la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ , on applique le cas particulier du "*velocity-Verlet*". Celui-ci est symplectique dans la limite où les forces de traînée tendent vers 0. L'accélération est décomposée selon ses composantes dépendant explicitement de la vitesse et des position :

$$\vec{a}(\theta, \dot{\theta}, t) = \vec{F}(\theta, \dot{\theta}, t)/m = \vec{a}_1(\theta, t) + \vec{a}_2(\dot{\theta}, t) \quad (19)$$

Ce qui devient pour le cas de l'aiguille, d'après l'Éq.8 :

$$a_1 = -\frac{\mu}{I} \sin(\theta)(B_0 + B_1 \sin(\Omega t)) \quad a_2 = -\frac{\kappa}{I} \dot{\theta} \quad (20)$$

Pour évaluer la vitesse  $\dot{\theta}_{j+1}$ , la vitesse est avant actualisé pour un demi-pas de simulation :

$$\dot{\theta}_{j+1/2} = \dot{\theta}_j + \frac{1}{2}a(\theta_j, \dot{\theta}_j, t_j)(\Delta t) \quad (21)$$

La position est quant à elle évaluée en utilisant le modèle de l'algorithme de Verlet usuel, en éliminant les quantités évaluées au milieu de l'intervalle temporel. Un pas de simulation  $t_{j+1} = t_j + \Delta t$  correspond donc à :

$$\begin{cases} \theta_{j+1} = \theta_j + \dot{\theta} \Delta t + \frac{1}{2}a(\theta_j, \dot{\theta}_j, t_j)(\Delta t)^2 \\ \dot{\theta}_{j+1} = \dot{\theta}_j + \frac{1}{2}(a_1(\theta_j, t) + a_1(\theta_{j+1}, t_{j+1}))\Delta t + a_2(\dot{\theta}_{j+1/2}, t_{j+1/2})\Delta t. \end{cases} \quad (22)$$

#### 3.2 Petits mouvements et mode propre

**Solution analytique** Dans cette première partie, nous considérons un cas sans excitation et sans viscosité. Sachant que nous choisissons pour condition initiale :  $\theta_0 = 10^{-6}$  et  $\dot{\theta}_0 = 0$ , nous travaillons dans la limite de petites oscillations autour de la position d'équilibre  $\theta_{eq} = 0$ . En particulier, les équations du mouvement peuvent donc être linéarisées pour établir une

solution analytique du problème. Numériquement, nous établissons que le temps final de simulation est  $t_{\text{fin}} = 44.43$ . En utilisant les résultats de l'Eq.18 nous pouvons déterminer la solution analytique explicite est de l'ordre de :  $\theta_{\text{eq}} = 9.98 \cdot 10^{-7}$ ,  $\dot{\theta}_{\text{eq}} = 4.41 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ . En utilisant ces résultats, nous calculons l'erreur  $\delta$  sur la solution numérique en utilisant la formule de la section 5 de l'Annexe.

**Simulation** En visualisant la trajectoire de l'aiguille dans l'espace de phase dans la Fig.2a, nous observons que nous obtenons bien les oscillations periodiques attendues par la théorie. Une visualisation de la vitesse et la position en fonction du temps permet d'arriver à la même conclusion. Sachant que notre simulation produit le résultat attendu, nous cherchons maintenant à évaluer sa convergence numérique. Nous représentons l'erreur  $\delta$  pour des pas de simulations  $n_{\text{steps}} = [2000, 10000, 20000]$ , en fonction de temps  $\Delta t$  dans un diagramme log-log. Nous observons alors que le résultat correspond à une droite de pente 2, ce qui est bien le résultat attendu théoriquement. Autrement dit, nous travaillons bien avec un schéma stable.

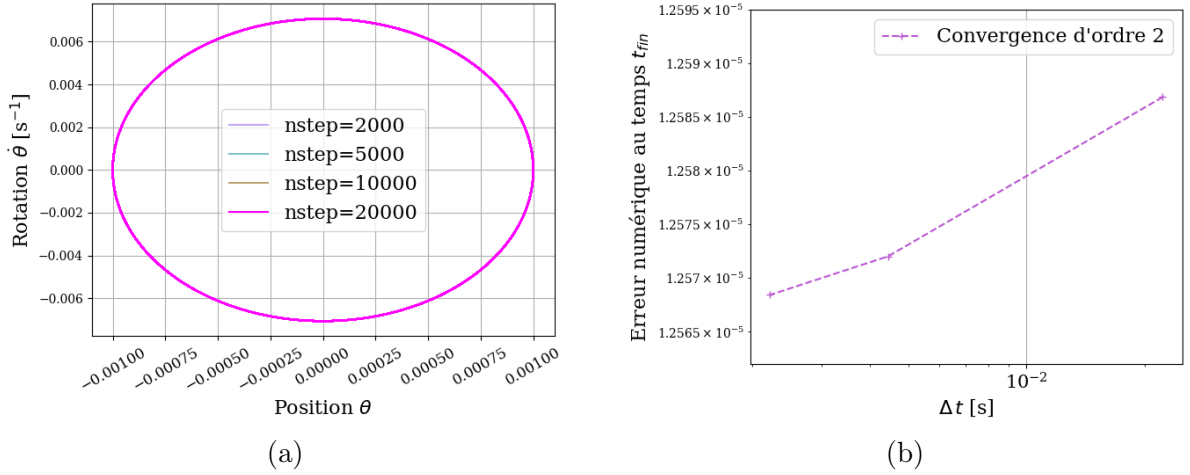


FIGURE 2 – (a) Trajectoire dans l'espace des phases ( $\theta, \dot{\theta}$ ) du barreau aimanté dans un champ magnétique constant, (b) Convergence numérique d'ordre 2 du schéma de Verlet associé à ces conditions initiales

### 3.3 Excitation paramétrique

**Conditions du problème** L'aiguille aimantée est maintenant soumise à un champ magnétique oscillant de magnitude  $B_1 = 0.002\text{T}$ . Sous l'action de cette force magnétique non-conservative, l'énergie magnétique varie au cours du mouvement. En posant comme conditions initiales :  $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (10^{-3}, 0)$ , nous attendons que la trajectoire dans l'espace de phases corresponde à une spirale dont le rayon augmente avec l'excitation du système, avant de se réduire sous l'action de la dissipation de l'énergie au cours du mouvement.

**Simulation numérique** En simulant le mouvement pour  $n_{\text{steps}} = [1000, 5000, 10000, 20000, 50000]$ , nous commençons par noter que pour  $n_{\text{steps}} \geq 1000$  les résultats obtenus sont très proches graphiquement. En simulant la rotation  $\dot{\theta}$  de l'aiguille en fonction de la position

angulaire  $\theta$  du pendule, nous observons que la trajectoire dans l'espace de phase correspond bien au résultat attendu par la théorie. En évaluant l'évolution de la vitesse de rotation et de la position du pendule en fonction du temps, on obtient bien le mouvement oscillant attendu par la théorie, avec une excitation progressive de l'aiguille grâce à l'action du champ magnétique qui fait augmenter l'amplitude et la vitesse des oscillations. Lorsqu'un maximum d'amplitude est atteint, l'amplitude des mouvement du pendule décroît pour atteindre une position finale proche de l'équilibre, autour de  $(\theta_{eq} = 0, \dot{\theta}_{eq} = 0 \text{ s}^{-1})$ .

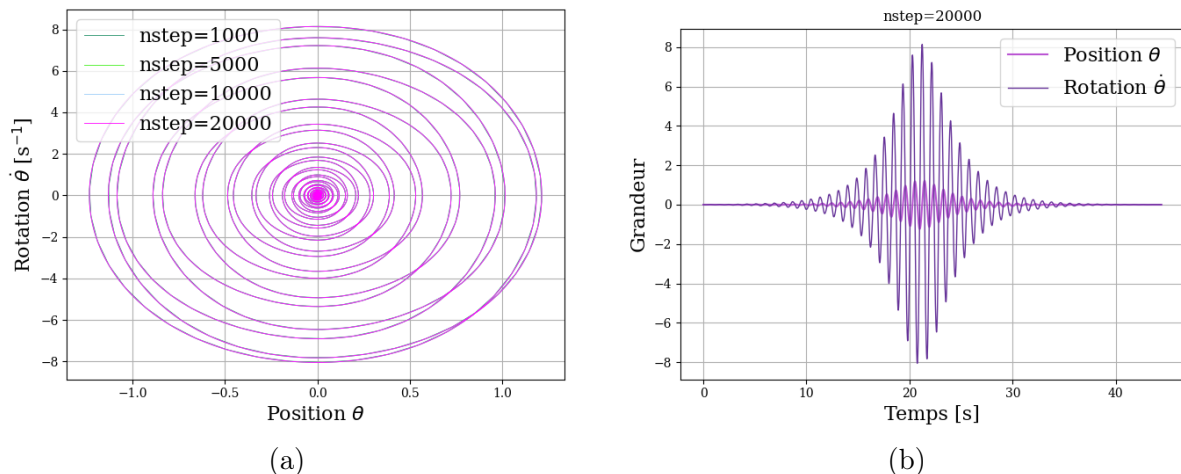


FIGURE 3 – (a) Trajectoire dans l'espace des phases  $(\theta, \dot{\theta})$  du barreau aimanté dans un champ magnétique oscillant, (b) Évolution de la vitesse et de la position en fonction du temps

**Point de vue énergétique** La trajectoire de l'aiguille peut être expliquée d'un point de vue énergétique. En représentant l'énergie en fonction du temps, comme montré dans la Fig.4a, il est observé que l'énergie croît initialement, avant de commencer à décroître après avoir atteint un maximum. Cela suggère que la source de l'excitation subie par le pendule réside dans la variation de l'énergie mécanique au cours du temps. La dérivée de l'énergie est alors déterminée à chaque instant  $t$  de la trajectoire à partir de la définition formelle de la dérivée, en utilisant un pas de temps  $\Delta t$  :  $\frac{dE}{dt} = \frac{E[t+1] - E[t]}{\Delta t}$ . La comparaison de cette dérivée temporelle  $\frac{dE}{dt}$  avec la puissance des forces conservatives permet de constater que les graphes se superposent lorsqu'ils sont produits séparément. En conséquence, ces derniers sont combinés dans un seul graphique, présenté dans la Fig.4b. Ce résultat montre que la variation de l'énergie est causée par la puissance des forces non-conservatives. Ainsi, lorsque la puissance des forces non-conservatives est positive dans la première phase du mouvement, une excitation paramétrique entraîne une augmentation de l'amplitude des mouvements de l'aiguille. Lorsque, par la suite, la puissance des forces conservatives devient négative, l'énergie mécanique du système diminue, ce qui conduit à une réduction de l'amplitude des mouvements de l'aiguille, la ramenant ainsi vers l'équilibre.

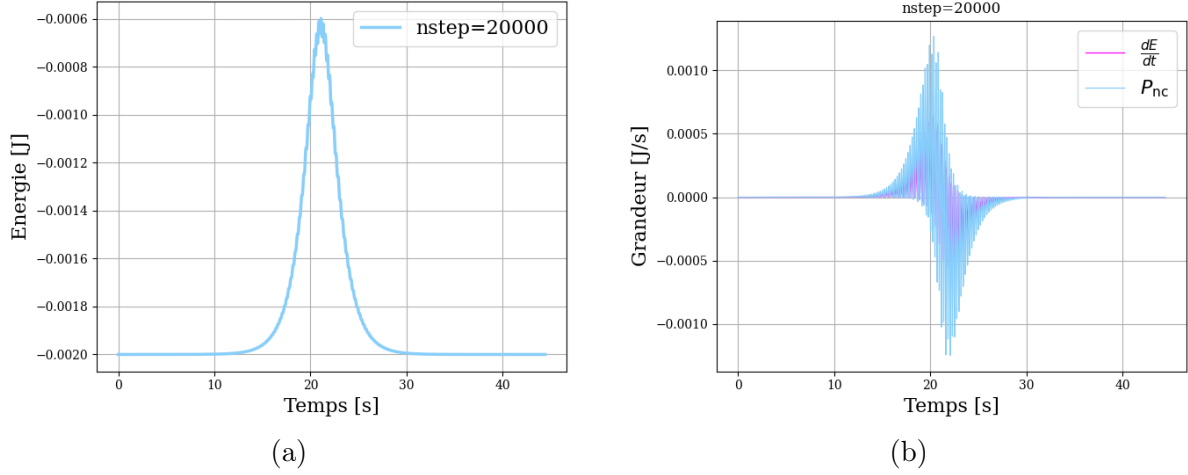


FIGURE 4 – (a) Évolution de l'énergie du système en fonction du temps, (b) Comparaison entre la puissance des forces non-conservatives et la variation de l'énergie en fonction du temps

**Convergence du schéma numérique** En présence d'un champ magnétique oscillant, il n'est plus possible de proposer une solution analytique du problème. Nous devons donc approximer celle-ci numériquement. En alignant les positions finales obtenues pour  $n_{\text{steps}} = [5000, 20000, 40000]$  en fonction du pas de temps  $(\Delta t)^2$ , et en répétant la même procédure pour les vitesses nous déterminons une rotation  $\dot{\theta}_{\text{th}}$  et position finale  $\theta_{\text{th}}$  théorique :

$$\begin{cases} \theta_{\text{th}} = 1.54 \cdot 10^{-4} \\ \dot{\theta}_{\text{th}} = 6.90 \cdot 10^{-4} \end{cases} \quad (23)$$

Nous utilisons ces résultats pour déterminer l'erreur  $\delta$  sur la position finale calculée à l'aide de la formule donnée dans la section 5 de l'Annexe. En traçant ce résultat en fonction du pas de temps  $\Delta t$  dans un repère log-log, nous déterminons que nous avons approximativement une convergence d'ordre 2. L'erreur sur notre résultat - que les points ne sont pas exactement alignés sur une droite - pourrait être due à des erreurs d'arrondi lors des simulations numériques.

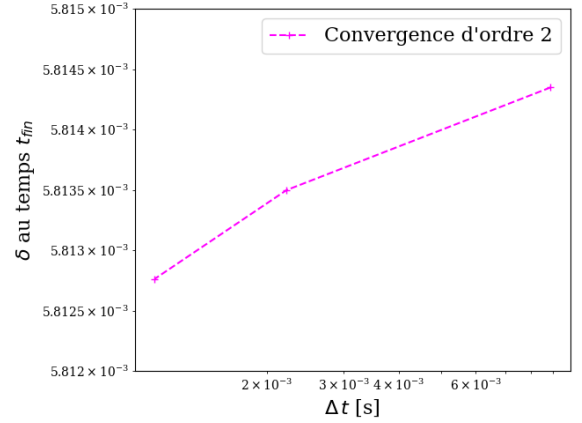


FIGURE 5 – Erreur sur la position finale en fonction du pas de temps  $\Delta t$  sur une échelle log-log.

### 3.4 Sections de Poincaré pour un mouvement sans amortissement

Le comportement de l'aiguille pour un mouvement sans amortissement,  $\kappa = 0$ , est étudié sous différentes conditions initiales en variant  $\theta_0$  entre  $[-3, 3]$  et  $\dot{\theta}_0$  entre  $[0, 13]$  en Fig.6 et en variant  $\theta_0$  entre  $[-2\pi, 2\pi]$  et  $\dot{\theta}_0$  entre  $[0, 12]$  en Fig.6. Cinq zones intéressantes peuvent être distinguées :



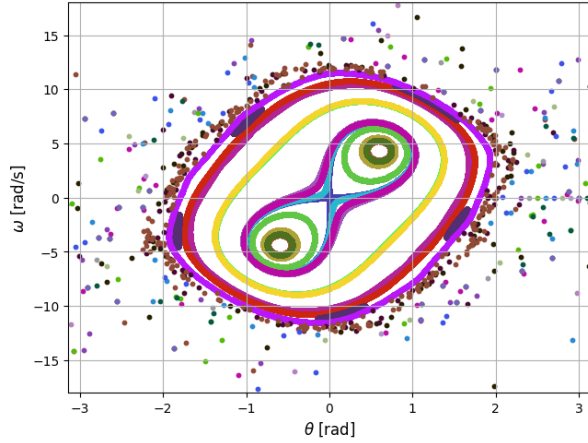


FIGURE 6 – Section de Poincaré obtenue pour  $N_{excit} = 7500$ , en variant  $\theta_0$  et  $\dot{\theta}_0$

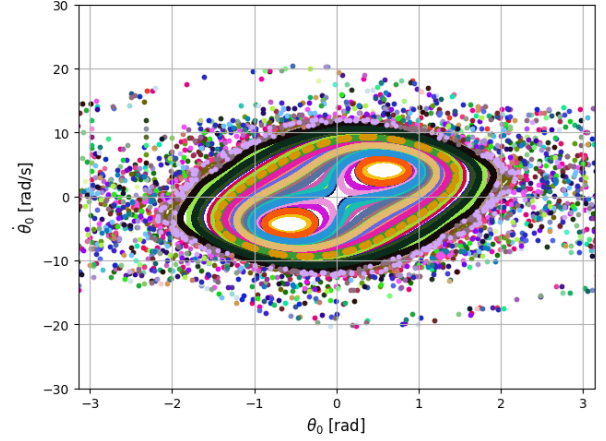


FIGURE 7 – Section de Poincaré obtenue en variant  $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$  et  $\dot{\theta}_0 \in [0; 12]$  pour  $N_{excit} = 10000$

**Premièrement**, deux points sont entourés de courbes fermées et concentriques, de couleur verte représenté en Fig. 6. Cela indique la présence de deux points d'équilibre stables, autour desquels, l'aiguille suit une trajectoire périodique. Ces trajectoires correspondent à des comportements réguliers du système où la variation de l'énergie du système au cours du temps est périodique, voir Fig. 8a et Fig. 8b pour les conditions initiales  $\theta_0 = 0.5$  et  $\dot{\theta}_0 = 4$ .

**Deuxièmement**, en augmentant légèrement la vitesse ou/et la position initiale, les courbes périodiques fermées prennent la forme d'un "huit" qui se croise en  $(0, 0)$ . Cette zone correspond au point d'équilibre instable. Lorsque l'aiguille se trouve dans cet état, une variation  $\delta\theta$  au niveau du point  $(0, 0)$  provoque une variation de la vitesse plus rapide par rapport aux points stables. Pour les courbes passant par ce point d'équilibre instable, voir les Fig. 8a et 8b, l'énergie du système présente des pics lorsque l'aiguille traverse le point d'instabilité, mais elle reste toujours contenue dans l'intervalle  $[-0.002, 0]$ .

**Troisièmement**, à mesure que la vitesse ou la position initiale continue d'augmenter, les trajectoires deviennent encore plus éloignées des points de stabilité, mais elles conservent un comportement périodique. Cette troisième zone montre encore des trajectoires régulières, mais elles sont maintenant moins proches des points d'équilibre stables. La variation de l'énergie du système reste toujours périodique avec une fréquence fixée, voir conditions initiales  $(\theta_0 = 0.7, \dot{\theta}_0 = 10)$  en Fig. 8b.

**Quatrièmement**, le système suit une transition vers le chaos, identifiée par une dispersion chaotique des points. Cette zone commence par des structures quasi-régulières, avec une accumulation de points violets, voir Fig. 6, qui sont interrompues par des dispersions chaotiques. En se déplaçant vers la zone plus externe, les points deviennent de plus en plus désordonnés, ce qui suggère que le système a complètement perdu sa périodicité initiale. Cette transition vers le chaos est mise en évidence en Fig. 8b où pour la condition initiale  $(\theta_0 = 3, \dot{\theta}_0 = 0)$  l'énergie du système évolue de manière imprévisible au cours du temps.

**Cinquièmement**, en Fig.??, au delà de la zone chaotique deux îles formant des zones

d'équilibre stable. Nous les voyons par ailleurs se dessiner autour des points résultant des conditions initiales chaotiques.

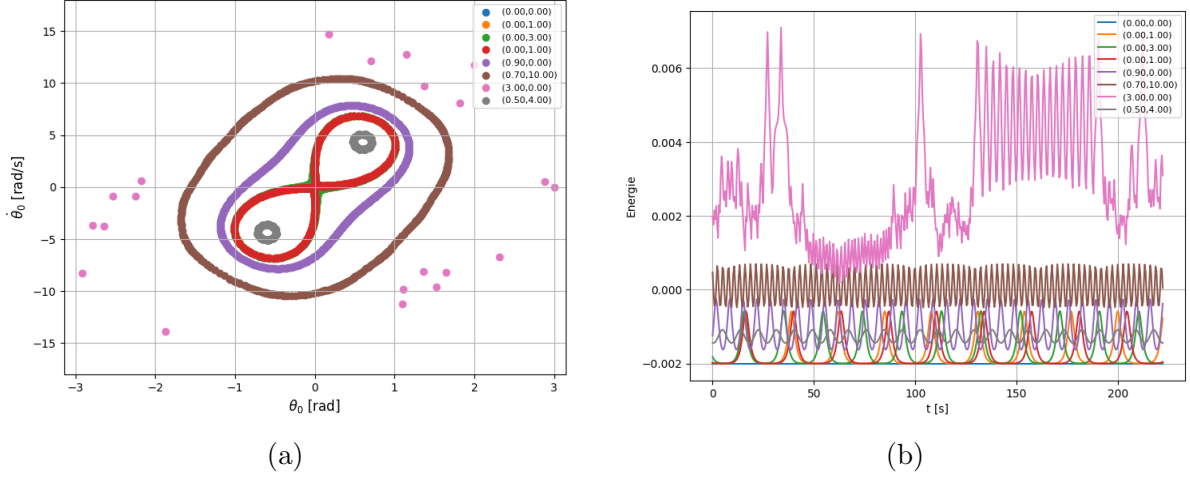


FIGURE 8 – (a) Section de Poincaré obtenu pour  $N_{excit} = 500$  et différents  $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ , (b) Variation temporelle de l'énergie pour les mêmes conditions initiales  $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$

### 3.5 Études de convergence pour un cas chaotique et non-chaotique, pour un mouvement sans amortissement

Deux états initiaux sont choisis : un produisant un mouvement chaotique ( $\theta_0 = 3$ ,  $\dot{\theta}_0 = 0$ ) et l'autre produisant un mouvement non-chaotique ( $\theta_0 = 0.5$ ,  $\dot{\theta}_0 = 0$ ). Par la suite deux simulations  $\theta_a(t)$  et  $\theta_b(t)$  différant d'un angle  $10^{-6}$  sont exécuté pour les deux conditions initiales. L'évolution temporelle de la distance  $\delta_{ab}(t)$ , voir Annexe 5, est représenté en Fig. 9a, et en Fig. 9b.

**Cas non-chaotique** comme représenté en Fig. 9a, la distance  $\delta_{ab}(t)$  dans le cas non chaotique reste toujours proche de zéro. Cela signifie que la séparation entre les trajectoires demeure contenue, indiquant que, pour une petite variation d'angle de  $10^{-6}$ , le mouvement non chaotique reste presque le même. Cette caractéristique est particulièrement mise en évidence en Fig. 9b, où l'on observe, dans le cas non chaotique, des oscillations d'amplitude maximale de l'ordre de  $10^{-1}$ . Celles-ci traduisent la nature du mouvement de l'aiguille, qui suit ici une variation de vitesse en fonction de la position initiale, comme représenté par la courbe violette passant par le point d'équilibre instable (0,0) en Fig. 6.

**Cas chaotique** En revanche, dans le cas chaotique, la courbe orange de la Fig. 9a montre que, pour une petite variation de l'angle  $\theta$ , la distance  $\delta_{ab}(t)$  entre les deux trajectoires croît de manière exponentielle par rapport au cas non chaotique. Ce phénomène est encore plus manifeste sur la courbe rose de la Fig. 9b, où  $\delta_{ab}(t)$  augmente selon une tendance exponentielle avant d'atteindre une valeur stable de l'ordre de  $10^3$ . La période transitoire de croissance nous permet alors en particulier de déterminer la valeur du coefficient de Lyapunov  $\lambda$  associé. Un fit exponentiel sur nos données nous permet de déterminer :  $\lambda = (1.896 \pm 0.008)s^{-1}$ , d'où  $\lambda > 0$ , implique que nous nous trouvons bien, comme observé, dans un cas chaotique.

Donc les deux simulations effectuées avec des conditions initiales chaotiques ont perdu toute périodicité, contrairement au cas non chaotique, où la courbe verte en Fig. 9b met en évidence une variation contenu de  $\delta_{ab}(t)$ .

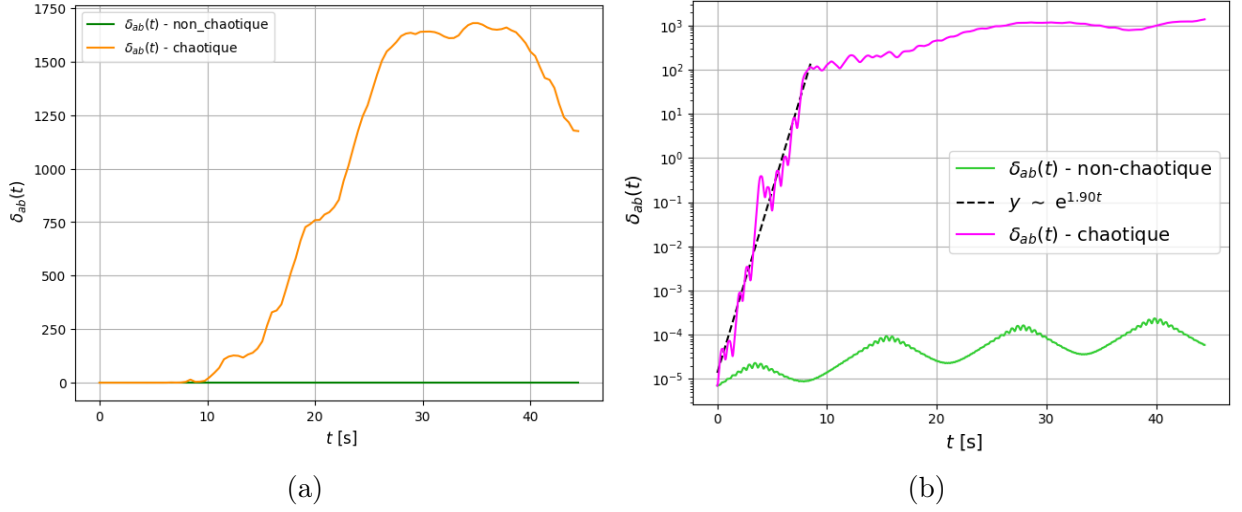


FIGURE 9 – (a) Évolution temporelle de  $\delta_{ab}(t)$  en échelle linéaire et en échelle lin-log (b)

### 3.6 Chaos, attracteurs étranges. Cas avec amortissement

**Condition du problème** Nous soumettons maintenant à la fois à un champ magnétique oscillant et à une force de frottements visqueux. La présence de cette seconde force amorti le mouvement de notre système, et nous place donc dans le cas d'un système dissipatif. Nous nous attendons donc à voir apparaître sur la section de Poincaré un comportement chaotique et le concept d'attracteur étrange.

**Attracteurs étranges** Afin d'analyser la présence de chaos dans le système, les trajectoires dans l'espace des phases du barreau aimanté ont été établies pour deux ensembles de cinq conditions initiales distinctes. Les résultats correspondants sont présentés dans les Fig. 10a et 10b. L'apparition d'attracteurs étranges est alors observée, caractérisés par un ensemble infini de points formant une structure de dimension fractale [3], vers laquelle les trajectoires semblent converger au fil du temps. La dimension fractale du mouvement est perceptible par endroits dans la simulation, mais elle deviendrait plus évidente avec une résolution plus élevée et un nombre de points accru. De plus, l'existence de bandes centrales stables entre les attracteurs a été mise en évidence. La comparaison des deux simulations montre que les résultats obtenus pour des ensembles de conditions initiales très différentes sont identiques, ce qui indique que l'évolution temporelle du système est peu sensible aux conditions initiales. Comme discuté dans la partie précédente, un comportement chaotique est caractérisé par une sensibilité exponentielle aux conditions initiales. Ainsi, il est possible de conclure que l'attracteur étrange observé est non-chaotique [4].

*Notons néanmoins que nous n'obtenons pas exactement le résultat escompté, nous attendrions les points de notre trajectoire convergent vers les attracteurs de manière plus marquée, avec moins de dispersion.*

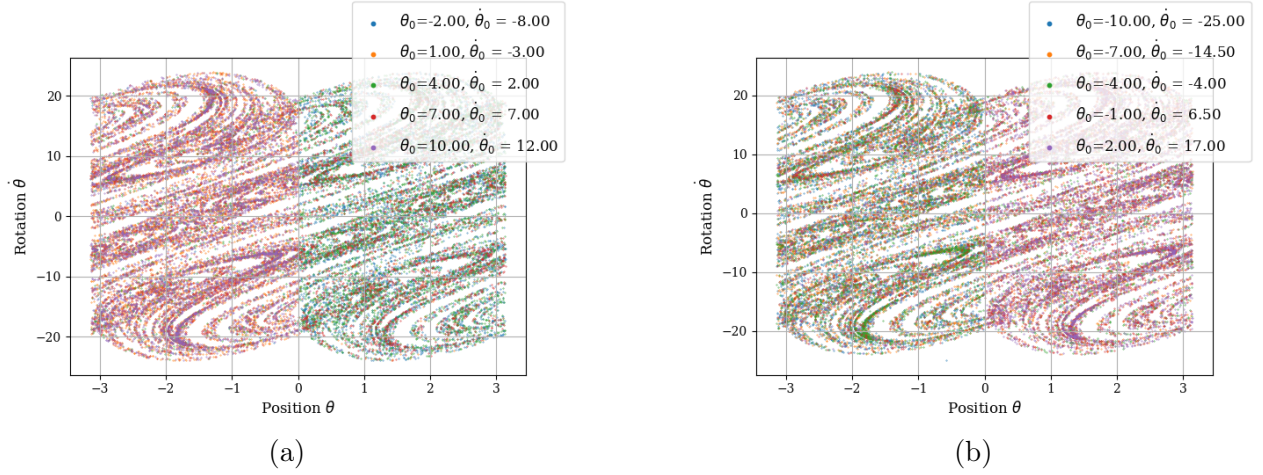


FIGURE 10 – (a), (b) Trajectoire dans l'espace des phases  $(\theta, \dot{\theta})$  pour deux ensembles de conditions initiales distincts

### 3.7 Étude facultative

**Analyse de stabilité des orbites pour un cas avec amortissement et comparaison au cas sans amortissement** Les résultats présentés dans les Fig. 11a et 11b illustrent l'évolution temporelle de la distance  $\delta_{ab}(t)$  respectivement dans le cas d'un mouvement non amorti et d'un mouvement amorti. En considérant les mêmes conditions initiales et en variant  $\kappa$ , il est observable que l'amortissement influence le caractère chaotique du mouvement. En effet, bien que pour le cas initial  $(\theta_0 = 2, \dot{\theta}_0 = 12)$ , le système reste chaotique dans les deux scénarios, pour  $(\theta_0 = -1, \dot{\theta}_0 = -8)$ , il passe d'un régime non chaotique, caractérisé par  $\delta_{ab}(t) \approx 0$  en Fig. 11a, à un état chaotique en Fig. 11b.

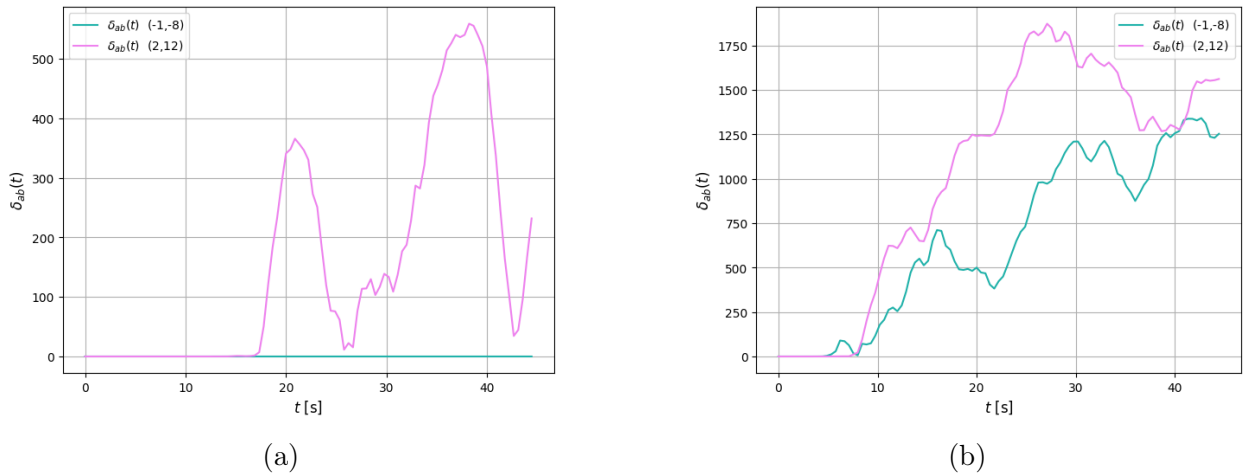


FIGURE 11 – (a) Évolution temporelle de  $\delta_{ab}(t)$  pour  $\kappa = 0$  (b) Évolution temporelle de  $\delta_{ab}(t)$  pour  $\kappa = 2 \cdot 10^{-5}$

**Détermination des plages chaotiques et non-chaotiques** En fixant  $\kappa = 0$  et en prenant comme conditions initiales  $\theta_0 = 0.5$  et  $\dot{\theta}_0 = 0$ , les sections de Poincaré présentées

en Fig. 12 sont obtenues en faisant varier  $B_1$  entre 0.0001 et 0.03. Il est observé que pour des valeurs de  $B_1$  supérieures à 0.0044, le mouvement de l'aiguille devient chaotique. En revanche, pour des valeurs inférieures, l'évolution de  $\dot{\theta}_0$  en fonction de  $\theta_0$  reste confinée à des trajectoires fermées, indiquant un comportement régulier et non chaotique.

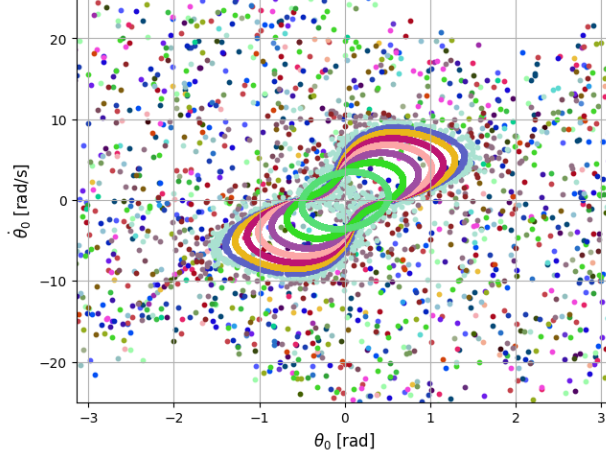


FIGURE 12 – Sections de Poincaré pour des valeurs de  $B_1$  variant entre 0.0001 et 0.03

## 4 Conclusion

Cette analyse a permis d'étudier la modélisation de la trajectoire de l'aiguille pour deux conditions initiales distinctes, accompagnée d'une étude de la convergence numérique. Les résultats obtenus ont montré une bonne concordance avec les prédictions théoriques. Une analyse énergétique a ensuite été menée afin d'expliquer les trajectoires observées, mettant en évidence que la variation de l'énergie est directement liée à la puissance des forces non conservatives. L'étude des sections de Poincaré a permis d'identifier cinq régions distinctes dans le cas d'un mouvement sans amortissement, en fonction des conditions initiales du système. Ces régions ont pu être mises en relation avec l'évolution temporelle de l'énergie, apportant ainsi une meilleure compréhension de la dynamique du système. Une distinction entre les mouvements chaotiques et non chaotiques a ensuite été effectuée. Il a été montré que, pour un faible déplacement initial, le mouvement non chaotique conserve sa périodicité, tandis que le mouvement chaotique se caractérise par un comportement imprévisible. L'influence de l'amortissement a également été examinée, révélant qu'un mouvement initialement non chaotique peut évoluer vers un régime chaotique lorsque l'amortissement dépasse un certain seuil. Enfin, en faisant varier l'amplitude  $B_1$  du champ magnétique oscillant, les transitions entre un comportement chaotique et non chaotique ont été analysées. Il en ressort qu'au-delà d'une certaine valeur critique de  $B_1$ , le système adopte un comportement chaotique, tandis qu'en deçà, il demeure dans un régime régulier. Ces résultats offrent une compréhension approfondie des mécanismes dynamiques liés au mouvement de l'aiguille. Il serait intéressant de mener une étude plus détaillée afin d'analyser l'influence de l'ensemble des paramètres caractérisant le système, tels que le moment magnétique  $\mu$ .

## Références

- [1] Khan Academy, *Rotational inertia*, 2016
- [2] Laurent Villard, *Physique numérique* (Notes de cours PHYS-210, Version 25.1), 2025
- [3] F. Mila & P. de Los Rios *Mécanique analytique*, Hiver 2006-2007
- [4] Wikipédia, *Strange nonchaotic attractor*, Accessed 16/03/25

## 5 Annexe

**Formule de la distance  $\delta_{ab}$  entre les simulations  $\theta_a(t)$  et  $\theta_b(t)$**

$$\delta_{ab}(t) = \sqrt{w_0^2(\theta_b(t) - \theta_a(t))^2 + (\dot{\theta}_b(t) - \dot{\theta}_a(t))^2} \quad (24)$$