Problema 3 leftmax

Propunător:

stud. **Tamio-Vesa Nakajima**

Oxford University

Complexitatea O(N^3): 15 puncte

Pentru această complexitate, putem considera toate subsecvențele de elevi consecutivi, să găsim elevul de înălțime maximă iterând prin elementele secvențelor. Rămâne doar să numărăm câte subsecvențe satisfac condiția din enunț.

Complexitatea O(N^2): 45 puncte

Pentru această complexitate, pornim de la soluția de 15 puncte, dar observăm că, dacă parcurgem subsecvențele în ordine crescătoare după poziția primului elev din subsecvență, iar în caz de egalitate în ordine crescătoare după poziția ultimului elev din subsecvență, atunci putem să aflăm poziția elevului de înălțime maximă în timp constant pentru fiecare subsecvență. Acest lucru se datoarează faptului ca elevul de înălțime maximă printre cei de la al **i**-lea până la al (**j+1**)-lea elev este fie cel de înălțime maximă printre cei de la al **i**-lea până la al **j**-lea elev (pe care deja îl cunoaștem), fie fix elevul de pe poziția **j+1.**

Complexitatea O(N): 100 puncte

Vom stoca înălțimile copiilor într-un *vector.* Într-o primă fază, putem folosi o *stivă* pentru a calcula două *șiruri* **st** și **dr** unde **st(i)** reprezintă poziția cea mai mică **j** pentru care toți copiii între **j** și **i** sunt mai mici sau egali cu cel pe poziția **i**, și **dr(i)** reprezintă poziția cea mai mare **j** pentru care toți copiii între **i** și **j** sunt mai mici sau egale cu cel pe poziția **i.** Această precalculare poate fi realizată în timp linear.

Acum, iteram prin șir. Când suntem la poziția **i** considerăm toate subsecvențele de copii pentru care copilul cel mai înalt este pe poziția **i.** Din definitia lui **st, dr** reiese că, dacă subsecvențele acestea sunt de la al **x**-lea copil la al **y**-lea copil, atunci $st(i) \le x \le i \le y \le dr(i)$. Pe noi ne intereseaza acele subsecvențe unde, mai mult, avem că $i - x \le y - i$. Daca notam pe **i - st(i)** cu **L** și pe **dr(i) - i** cu **R** atunci se poate demonstra că sunt

(min(L, R) + 1) * (R - L+ 2 + max(R, L)) / 2

Formula se demonstrează astfel.

Luam două cazuri, unul unde $L \le R$, unul unde **L > R.**

- Dacă $L \le R$ atunci formula devine **(L + 1) * (2 * R - L) / 2.** În cazul acesta, putem fixa pe **i-x** de la **0** la **L**, iar pentru fiecare mod de a il fixa, putem fixa pe **y-i** de la **i-x** la **R**. Astfel, vrem suma progresiei aritmetice cu **L+1** termeni unde primul termen este **R** iar ultimul termen este **R - L**, adica fix formula data mai sus.
- Daca **L > R**, atunci formula devine **(R + 1) * (R + 2) / 2.** În cazul acesta, putem fixa pe **y-i** de la **0** la **R**, iar pentru fiecare mod de a il fixa, putem fixa pe **i-x** de la **0** la **y-i**. Astfel, vrem suma progresiei aritmetice cu R**+1** termeni unde primul termen este **1** iar ultimul termen este **R+1**, adica fix formula data mai sus.

Tot ce rămâne acum este însumarea acestora pentru toate valorile lui **i.**