

# Grafuri. DFS. BFS

---

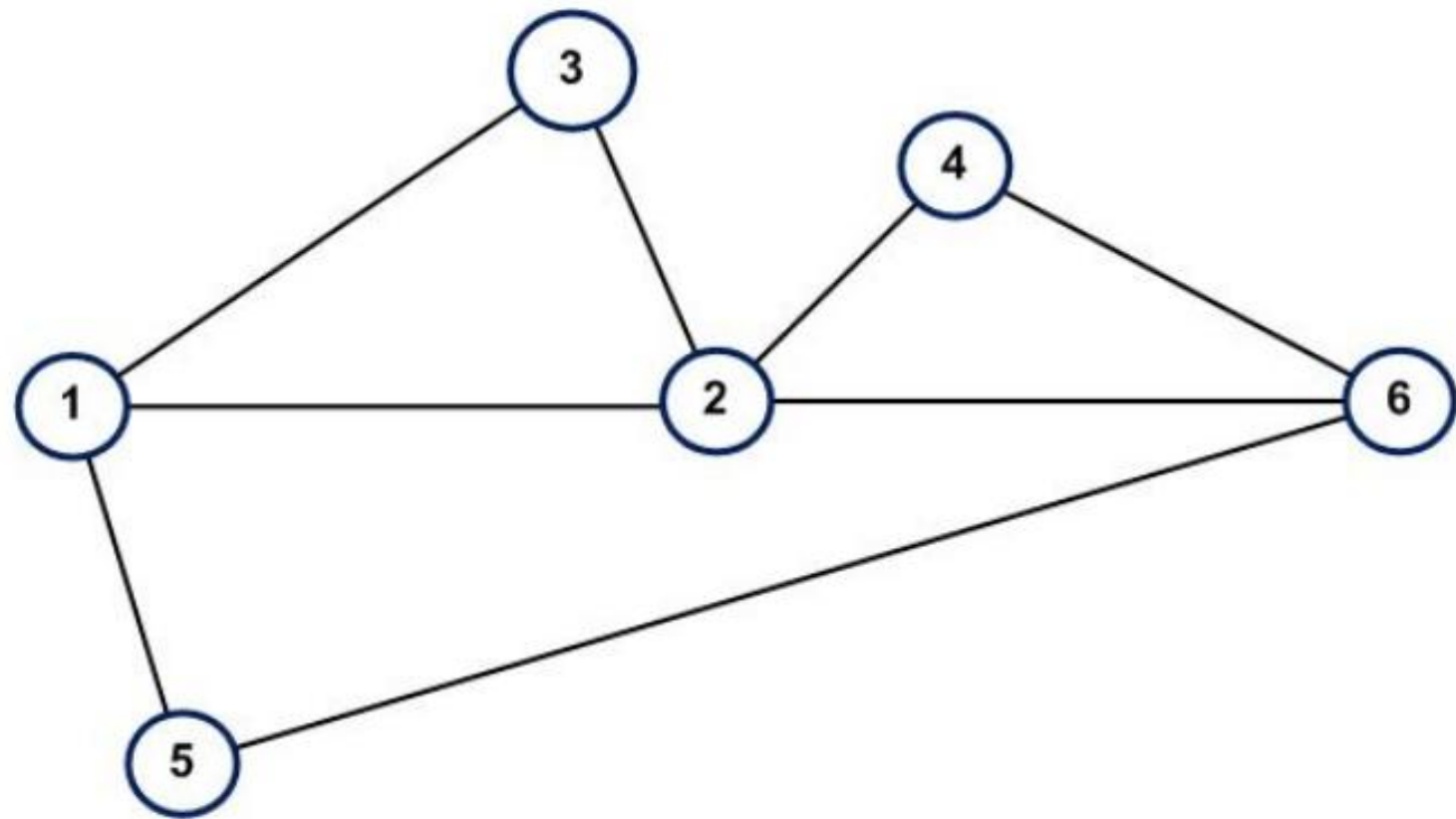
BUZATU GIULIAN & NIȚĂ ALEXANDROS

# Grafuri neorientate

---

**Graf neorientat:  $G = (V, E)$**

- $V$  = mulțimea nodurilor (finită)**
- $E$  = mulțimea muchiilor (submulțime a produsului cartezian  $V \times V$ )**
- $v \in V$  = vârf/nod**
- $e = \{u, v\} = uv$  = muchie**
- $u, v$  = capetele/extremitățile muchiei  $uv$**



- **Vecinul** unui nod  $x$  este un nod  $y$  dacă există muchia  $xy$ .
- Doua noduri vecine se numesc adiacente.
- **Gradul** unui nod  $x$  este numărul de muchii care îl au ca extremitate pe  $x$ .

**Teoremă:** Suma gradelor tuturor nodurilor este dublul numărului de muchii.

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$$

# Grafuri orientate

---

**Graf orientat:  $G = (V, E)$**

**- $V$  = mulțimea nodurilor (finită)**

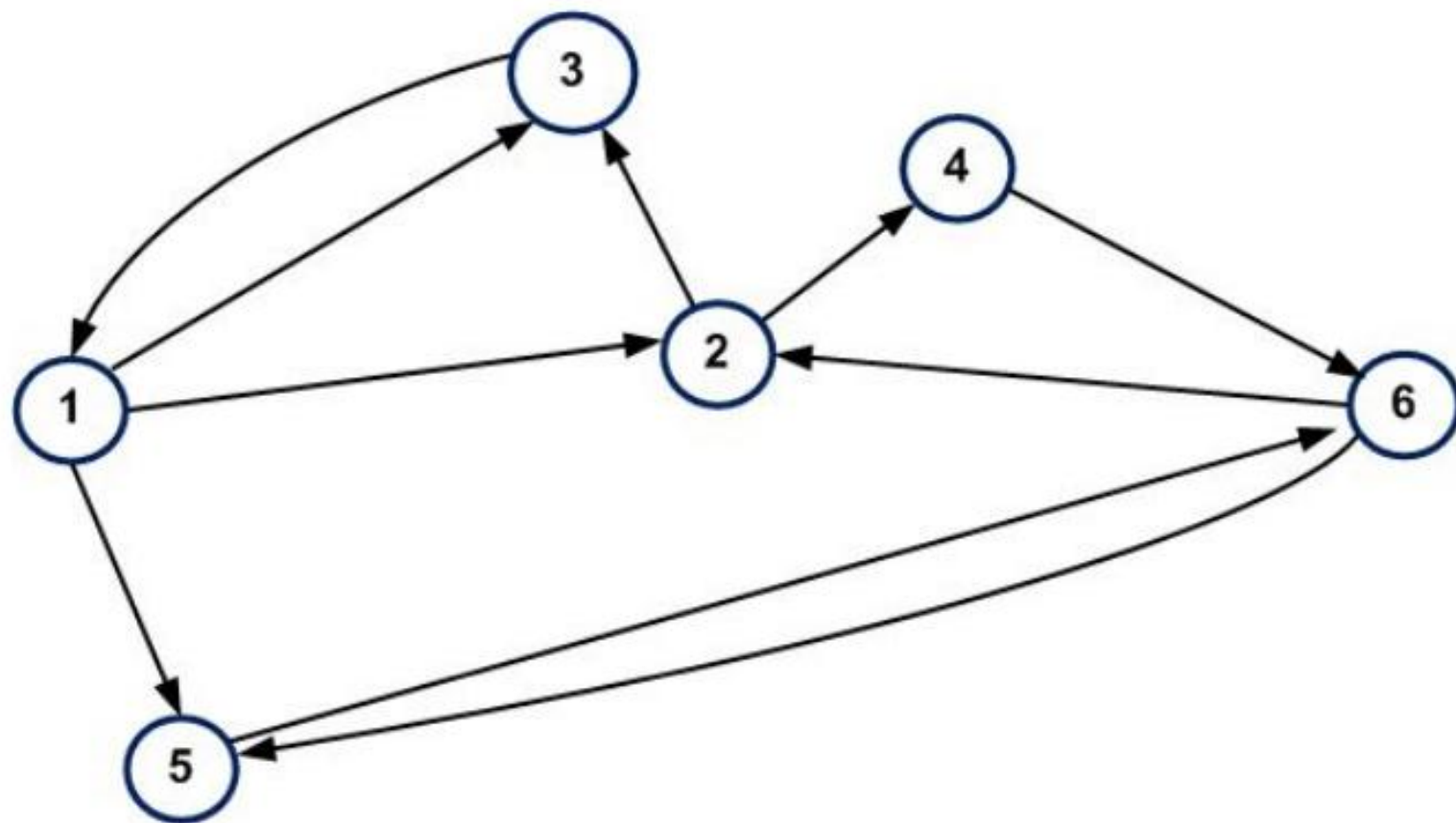
**- $E$  = mulțimea muchiilor (formată din perechi ordonate de 2 elemente  
distincte din  $V$ )**

**- $v \in V$  vârf/nod**

**- $e = (u, v) = uv$  – arc**

**- $u = e^-$  = vârf inițial**

**- $v = e^+$  = vârf final**



$d_G^-(u) = |\{e \in E : u \text{ extremitate finala pentru } e\}|$  - grad interior

$d_G^+(u) = |\{e \in E : u \text{ extremitate initiala pentru } e\}|$  - grad exterior

**Teoremă:** Are loc următoarea relație:

$$\sum_{u \in V} d_G^-(u) = \sum_{u \in V} d_G^+(u) = |E|$$

# Reprezentarea grafurilor

---

## I. Matrice de adiacență:

- matrice unde  $A[i][j] = 1$ , dacă există muchia  $ij$

## II. Liste de adiacență:

- vectori unde în  $v[i]$  este un vector cu nodurile către care avem muchie (se poate folosi `std::vector` din STL)

## III. Listă de muchii:

- vector de perechi care reprezintă extremitățile unei muchii din graf (se poate folosi STL pentru implementare)



# Lanț. Ciclu

---

Se numește **lanț** o succesiune de vârfuri  $L = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  cu proprietatea că între  $x_i$  și  $x_{i+1}$  există muchie. Lungimea lanțului este  $k - 1$ . Un lanț care conține vârfuri distincte două câte două se numește **lanț elementar**, iar un lanț în care muchiile nu se repetă se numește **lanț simplu**.

Se numește **ciclu** un lanț în care primul și ultimul vârf sunt aceleași. Lungimea unui ciclu cu  $k$  elemente este  $k - 1$ . Un **ciclu elementar** este un ciclu cu toate vârfurile distincte două câte două. Un graf care nu conține niciun ciclu se numește **aciclic**.

# Drumuri. Circuite

---

În mod similar se definesc noțiunile de drum, drum simplu, drum elementar, circuit, circuit elementar și circuit simplu în cadrul grafurilor orientate.

# Subgrafuri. Grafuri parțiale

---

Se numește **graf parțial** al grafului neorientat  $G = (X, U)$  un graf  $G'(X, U_1)$ , unde  $U_1 \subseteq U$ .  
Se numește **subgraf** al grafului neorientat  $G = (X, U)$  un graf  $G''(X'', U'')$ , unde  $X'' \subseteq X$ , iar  $U''$  este o submulțime a lui  $U$  formată prin scoaterea muchiilor asociate nodurilor eliminate.

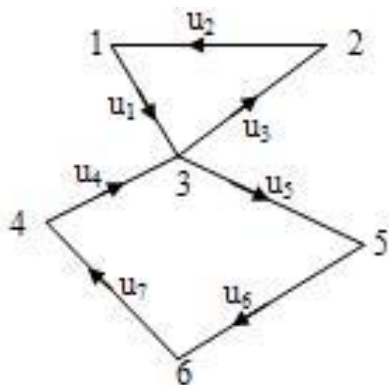


Figura 2

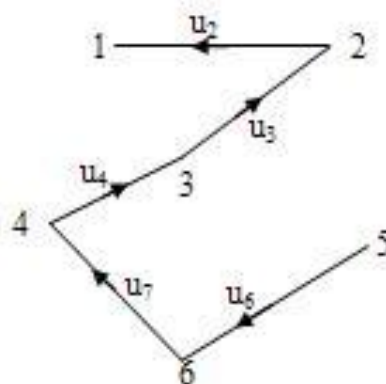


Figura 3

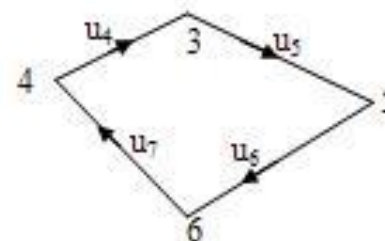
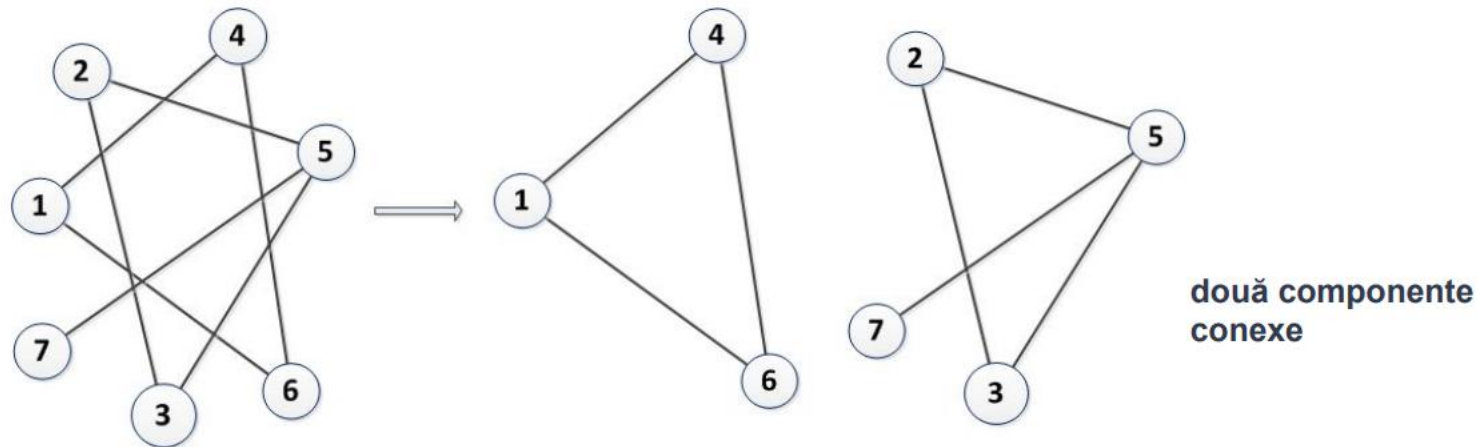


Figura 4

# Grafuri conexe

---

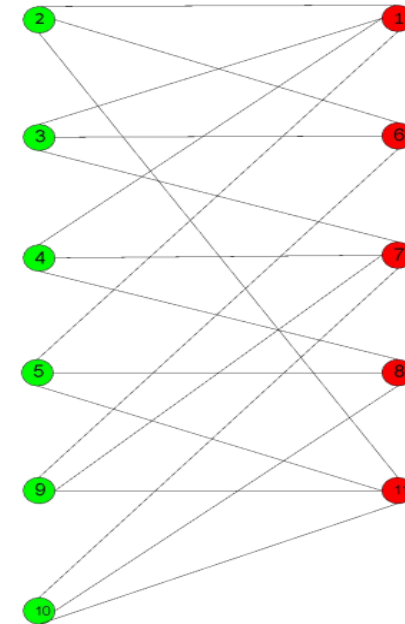
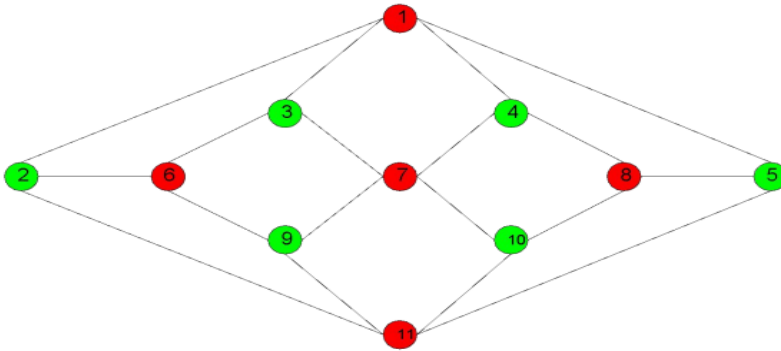
Un **graf conex** este un graf unde există drum de la un nod la oricare altul. O **componentă conexă** este un subgraf obținut din graful inițial și care este conex.



# Graf bipartit

---

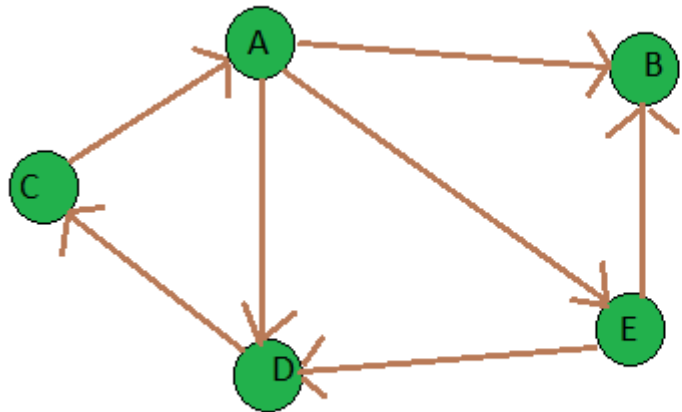
Un **graf bipartit** este un graf în care mulțimea nodurilor poate fi împărțită în două mulțimi nevide disjuncte, astfel încât orice muchie are câte o extremitate în una dintre cele două mulțimi.



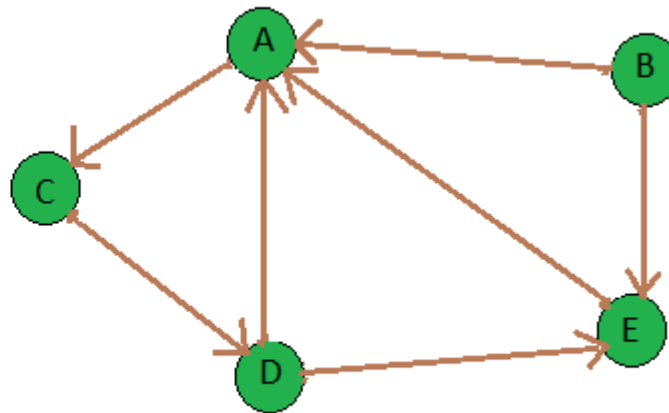
# Graf transpus

---

**Graful transpus** al unui graf orientat  $G(X, U)$  este graful obținut prin schimbarea sensului fiecărui arc din  $G$ .



(i)

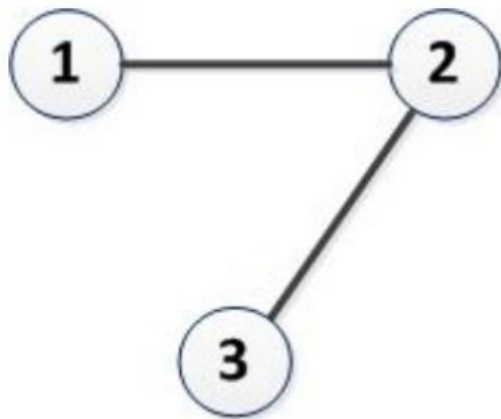


(ii)

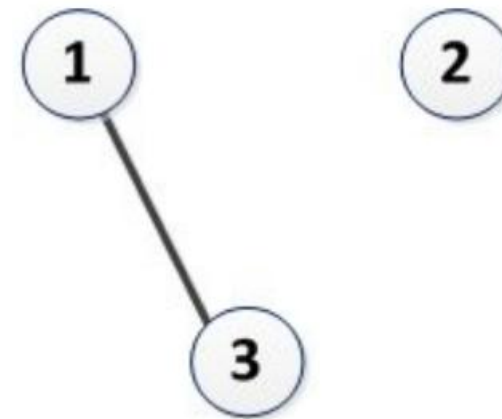
# Graful complementar

---

**Graful complementar** al unui graf neorientat  $G(X, U)$  este obținut prin eliminarea muchiilor actuale și adăugarea celor care lipseau în graful inițial.



**G**

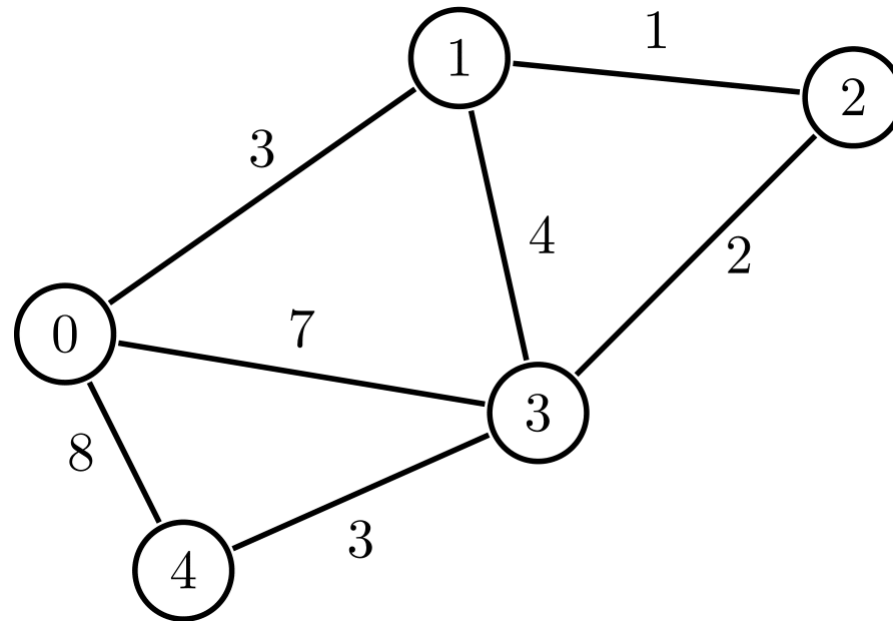


**$\overline{G}$**

# Grafuri ponderate

---

Putem extinde noțiunile învățate deja prin adăugarea unui cost fiecărei muchii, creând astfel o nouă noțiune, aceea de **graf ponderat**.





# Parcurgerea în adâncime (DFS)

---

Vrem să parcurgem graful nostru. Pornind dintr-un nod, vrem să trecem în noduri adiacente și să vedem în ce noduri putem ajunge folosind acest procedeu.

# Parcurgerea în adâncime (DFS)

---

Vrem să parcurgem graful nostru. Pornind dintr-un nod, vrem să trecem în noduri adiacente și să vedem în ce noduri putem ajunge folosind acest procedeu.

O idee este să pornim dintr-un nod și să mergem cât de adânc (depth first) se poate în graf, iar, când nu se mai poate, să revenim într-un nod din lanțul format, din care să putem continua parcurgerea.

# Parcurgerea în adâncime (DFS)

---

Aplicații ale parcurgerii în adâncime:

- aflarea componentelor conexe;
- să verificăm dacă un graf este bipartit;
- să facem o sortare topologică a grafului;

# Parcurgerea în adâncime (DFS)

---

Algoritm iterativ:

1. Adăugăm nodul de început într-o stivă.
2. Marcăm nodul ca vizitat.
3. Parcurgem nodurile adiacente cu nodul din vârful stivei, iar pe cele care nu au fost vizitate le adăugăm în stivă.
4. Repetăm pașii 2 și 3 până când stiva devine goală.

Complexitate:  $O(n + m)$ , unde  $n$  = numărul de noduri,  $m$  = numărul de muchii

# Parcurgerea în adâncime (DFS)

---

Problemă (implementare DFS):

<https://infoarena.ro/problema/DFS>

Soluție:

[https://infoarena.ro/job\\_detail/3152566?action=view-source](https://infoarena.ro/job_detail/3152566?action=view-source)

# Problemă

---

Să rezolvăm următoarea problemă: <https://infoarena.ro/problema/cerere> .

# Problemă

---

Să rezolvăm următoarea problemă: <https://infoarena.ro/problema/cerere> .

Hint: Pentru un nod  $i$  putem calcula răspunsul dacă știm care este răspunsul pentru cel de-al  $k_i$  – *lea* strămoș. Cum putem afla cel de-al  $k_i$  – *lea* strămoș?

# Problemă

---

Să rezolvăm următoarea problemă: <https://infoarena.ro/problema/cerere> .

Hint: Pentru un nod  $i$  putem calcula răspunsul dacă știm care este răspunsul pentru cel de-al  $k_i$  – *lea* strămoș. Cum putem afla cel de-al  $k_i$  – *lea* strămoș?

Soluție: Folosind parcurgerea în adâncime, dacă implementăm de mână stiva, vom avea acces la toți strămoșii nodului curent. Deci, implementăm astfel și calculăm pentru fiecare nod răspunsul, folosindu-ne de strămoșii săi aflați în stivă.

Implementare: [https://www.infoarena.ro/job\\_detail/3128037?action=view-source](https://www.infoarena.ro/job_detail/3128037?action=view-source)



# Sortare topologică

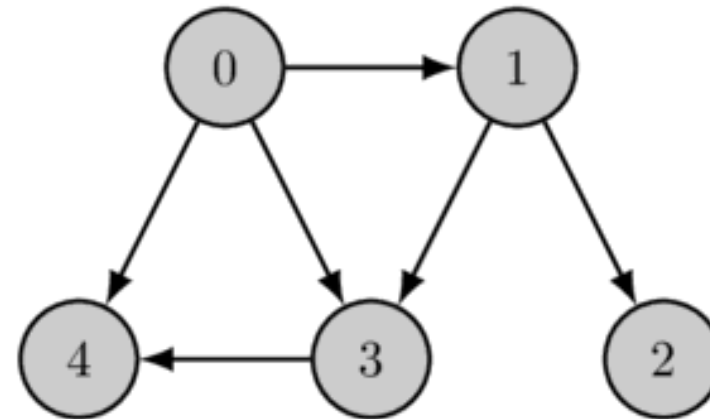
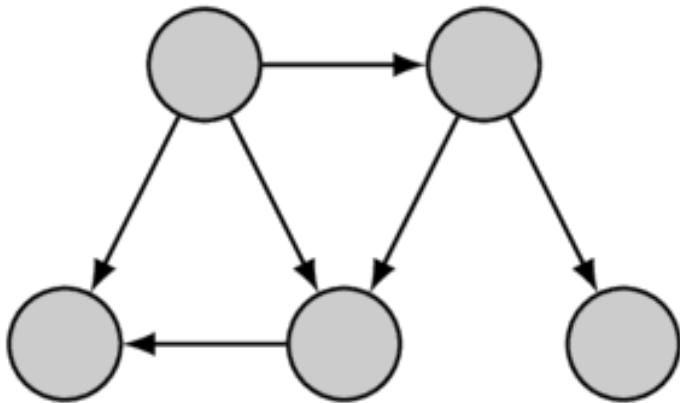
---

Avem un graf orientat și vrem să găsim o ordine a nodurilor, astfel încât dacă  $i$  este înaintea lui  $j$  în această ordonare, nu există muchie de la  $j$  la  $i$ .

# Sortare topologică

---

Avem un graf orientat și vrem să găsim o ordine a nodurilor, astfel încât dacă  $i$  este înaintea lui  $j$  în această ordonare, nu există muchie de la  $j$  la  $i$ .



# Sortare topologică

---

Dacă există muchie de la  $u$  la  $v$ , atunci  $u$  trebuie să fie înaintea lui  $v$ . Atunci, parcurgând în adâncime graful, obținem un drum elementar, inversând acest drum, obținem o posibilă sortare topologică pentru subgraful acesta. Făcând acest procedeu pentru toate vârfurile nevizitate, vom obține o sortare topologica validă.

# Sortare topologică

---

Algoritm:

1. Parcurgem nodurile grafului.
2. Din fiecare nod care nu este deja vizitat, pornim o parcurgere in adâncime.
3. În parcurgere, adăugăm vârfurile într-un vector, în ordinea inversă față de cea în care le parcurgem.
4. Inversăm vectorul.

Complexitate :  $O(n + m)$ , unde  $n$  = numarul nodurilor,  $m$  = numarul muchiilor

# Sortare topologică

---

Problemă(implementare a algoritmului):

<https://infoarena.ro/problema/sortaret>

Soluție:

[https://infoarena.ro/job\\_detail/3159001?action=view-source](https://infoarena.ro/job_detail/3159001?action=view-source)

# Parcurgerea în lăţime (BFS)

---

Parcurgerea în lăţime explorează sistematic muchiile unui graf, pentru a afla care sunt toate nodurile accesibile din nodul de plecare.

# Parcurgerea în lăţime (BFS)

---

Aplicaţii ale parcurgerii în lăţime:

- aflarea lungimii lanţului minim de la un nod sursă la toate celelalte;
- aflarea componentelor conexe;
- să facem o sortare topologică a grafului;

# Parcurgerea în lăţime (BFS)

---

Algoritm:

1. Adăugăm nodul de început într-o coadă.
2. Marcăm nodul ca vizitat.
3. Parcurgem nodurile adiacente cu nodul din faţa(vârful) cozii, iar pe cele care nu au fost vizitate le adăugăm în coadă.
4. Repetăm paşii 2 şi 3 până când coada devine goală.

Complexitate:  $O(n + m)$ , unde  $n$  = numărul de noduri,  $m$  = numărul de muchii



# Parcurgerea în lăţime (BFS)

---

Problemă (implementare BFS):

<https://infoarena.ro/problema/bfs>

Soluţie:

[https://infoarena.ro/job\\_detail/2542435?action=view-source](https://infoarena.ro/job_detail/2542435?action=view-source)

# Problemă

---

Să rezolvăm următoarea problemă: <https://infoarena.ro/problema/cifre4>.

# Problemă

---

Să rezolvăm următoarea problemă: <https://infoarena.ro/problema/cifre4>.

Hint: Încercăm să reducem problema la o parcurgere în lăţime.

# Problemă

---

Să rezolvăm următoarea problemă: <https://infoarena.ro/problema/cifre4>.

Soluție: Pornim de la stările inițiale 2, 3, 5 și 7 și ne folosim de un vector de tați, în care ținem minte proveniența stării curente. Pentru stările inițiale, în vectorul de tați avem -1. Rezolvăm problema similar cu o parcurgere BFS, unde stările sunt reprezentate de resturile la împărțirea cu P. Fie r starea noastră curentă, atunci,  $\text{newR} = (r * 10 + \text{digit}) \bmod P$ , unde variabila digit ia, pe rând, valorile 2, 3, 5 și 7. Dacă nu am mai fost în starea newR, atunci o adăugăm în coadă și actualizăm vectorul de tați.

# Problemă

---

Să rezolvăm următoarea problemă: <https://infoarena.ro/problema/cifre4>.

Soluție: Când se finalizează algoritmul BFS, dacă avem că  $tata[n]=0$ , atunci nu există soluție și afișăm -1, altfel facem reconstrucția soluției folosindu-ne de o stivă. Cât timp părintele nodului curent nu este -1, verificăm ce cifră am adăugat părintelui pentru a crea o stare curentă și, în caz că există mai multe posibilități, luăm valoarea minimă. Astfel, la final, de la capul până la baza stivei avem cifrele în ordinea corectă (de la cea mai importantă, la cea mai puțin importantă). Așa că afișăm cifrele de la capul la baza stivei și obținem soluția corectă.

Implementare: [https://infoarena.ro/job\\_detail/2950074?action=view-source](https://infoarena.ro/job_detail/2950074?action=view-source)

# Problemă

---

Să rezolvăm următoarea problemă: <https://infoarena.ro/problema/berarii2>.

# Problemă

---

Să rezolvăm următoarea problemă: <https://infoarena.ro/problema/berarii2>.

Hint: Construim graful transpus.

# Problemă

---

Să rezolvăm următoarea problemă: <https://infoarena.ro/problema/berarii2>.

Soluție: Construim graful transpus, pentru a putea porni din berării și să aflăm din care intersecții se poate ajunge la ele. Nodurile care rămân nevizitate reprezintă intersecțiile din care nu se poate ajunge la nicio berărie.

Cum implementăm?



# Problemă – BFS multisource

---

Să rezolvăm următoarea problemă: <https://infoarena.ro/problema/berarii2>.

Soluție: Construim graful transpus, pentru a putea porni din berării și să aflăm din care intersecții se poate ajunge la ele. Nodurile care rămân nevizitate reprezintă intersecțiile din care nu se poate ajunge la nicio berărie.

Pentru o implementare eficientă, actualizăm puțin algoritmul elementar de BFS, astfel încât să plecăm din mai multe noduri deodată. Acest procedeu se numește BFS multisource.

Implementare: [https://infoarena.ro/job\\_detail/3158876?action=view-source](https://infoarena.ro/job_detail/3158876?action=view-source)

# Temă

---

- <https://infoarena.ro/problema/graf>
- <https://infoarena.ro/problema/sate>
- <https://pbinfo.ro/probleme/3110/genius>
- <https://codeforces.com/problemset/problem/510/C>
- <https://codeforces.com/problemset/problem/580/C>

# Probleme suplimentare

---

- <https://infoarena.ro/problema/patrol2>
- <https://codeforces.com/contest/1144/problem/F>
- <https://codeforces.com/contest/1881/problem/F>
- <https://codeforces.com/problemset/problem/920/E>