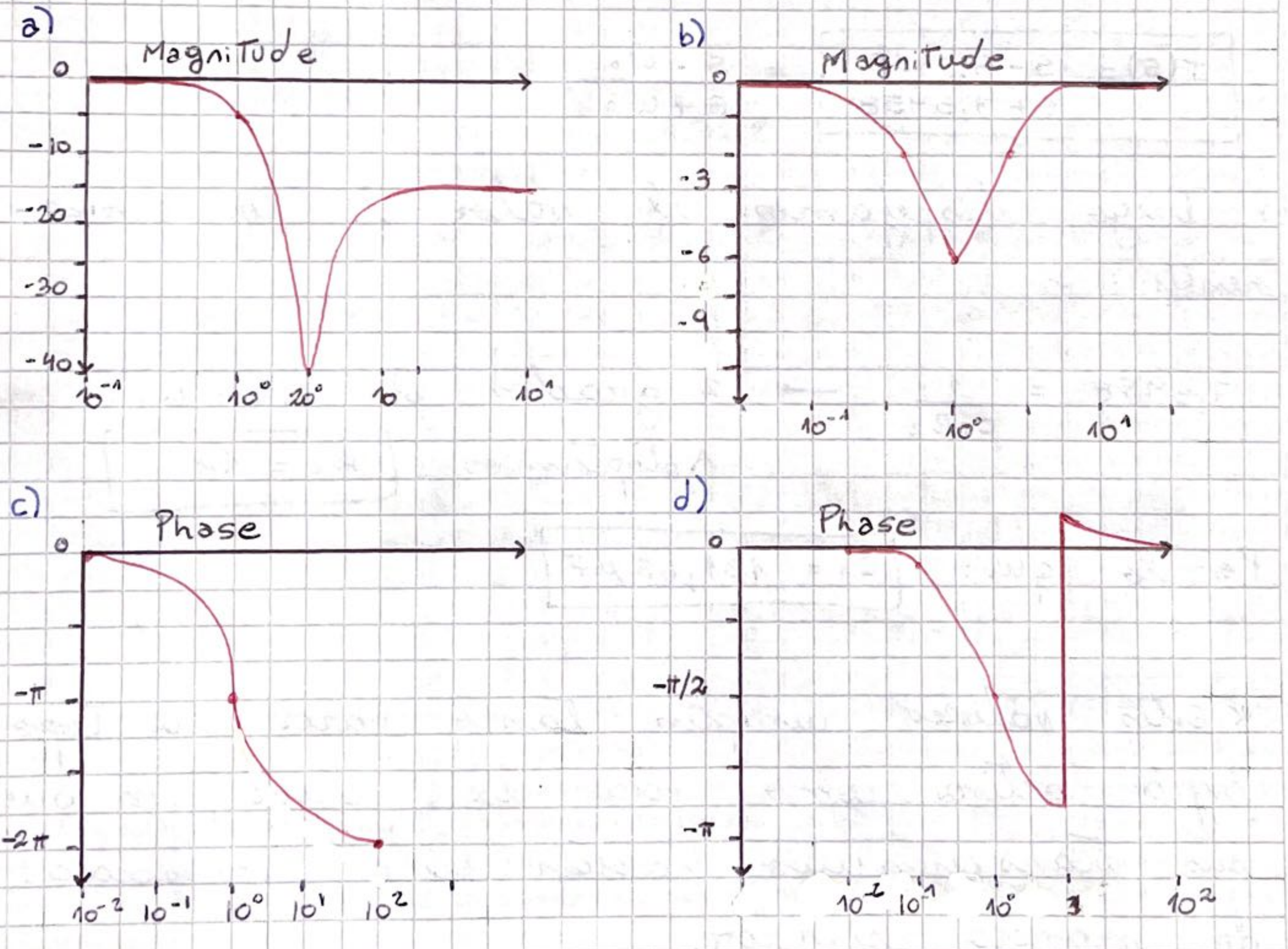
② Considere la siguiente expresión generalizada de una transferencia bicuadrática:

$$T(s) = K \frac{s^2 + s\frac{\omega_n}{Q_n} + \omega_n^2}{s^2 + s\frac{\omega_p}{Q_p} + \omega_p^2}$$

a) Considerando que el denominador de T(s) se corresponde con el de un filtro pasa-altos Butterworth de segundo orden, especifique las condiciones necesarias para los parámetros K, $Q_n$, $\omega_n$, $Q_p$ y $\omega_p$, de tal forma que la transferencia final resulte:




En cada caso, grafique además el diagrama de polos y ceros, detallando las coordenadas de

NOTA

Giuliana Ruffa | TSS | HOJA Nº 4 | FECHA

todas las singularidades.

b) Proponga un circuito normalizado, de ser posible pasivo, que tenga la respuesta indicada.

Resolución:

a) Recordamos el denominador de un filtro Butterworth de segundo orden:

$$\boxed{D_B(s) = s'^2 + \sqrt{2}\,s' + 1} \qquad \begin{cases} Q_P = 1/\sqrt{2} \\ \omega_P = 1 \end{cases}$$

Desarrollamos cómo obtener esta función:

- Butterworth: $Q = \dfrac{1}{2\cos\psi}$ y $\psi = \dfrac{\pi}{n.2}$

Siendo $\psi$ el ángulo de separación entre los polos del sistema y $Q$ el factor de selección. Entonces:

- $n = 2$ : $\psi = \dfrac{\pi}{4}$ y $Q = \dfrac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Partiendo de $\omega_p = 1$ y $DB(s) = s'^2 + \omega_P/Q + \omega_p^2$, verificamos que obtenemos $DB(s) = s'^2 + \sqrt{2}\,s + 1$.

* Luego, analizamos cada caso particular para establecer el resto de los parámetros: $\omega_n$, $Q_n$ y $K$.

Ya sabemos que: $\boxed{Q_P = 1/\sqrt{2}}$ y $\boxed{\omega_P = 1}$

NOTA

a) Observamos el "0" en 2, es decir, $\omega_n = 2$.
Y también, $Q \to \infty$. Luego, la función:

$$T(s) = \frac{s^2 + \omega_n^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} + \omega_p^2} \rightarrow \text{Filtro notch.}$$

$$\boxed{T(s) = \frac{s^2 + 2^2}{s^2 + s\sqrt{2} + 1} \cdot K} \quad \begin{cases} \omega_n = 2 \\ Q_n = \infty \end{cases}$$

Sabemos que $|T(s \to 0)| = 0dB \Rightarrow T(0) = K \cdot 2^2 = 1$

Establecemos: $\boxed{K = 1/4}$

b) De igual manera, observamos el "0" en 1.
Y también, que: $|T(\omega_0)| = -6dB = 0,5$ veces $= \frac{\omega_0}{Q_n} / \frac{\omega_0}{Q_p}$.
Entonces: $Q_p / Q_n = 1/2 \rightarrow Q_n = 2 \cdot Q_p \rightarrow Q_n = 2/\sqrt{2}$

$$\boxed{T(s) = K \cdot \frac{s^2 + 0,7075 + 1}{s^2 + \sqrt{2}\, s + 1}} \quad \begin{cases} \omega_n = 1 \\ Q_n = 1/0,707 \end{cases}$$

Sabemos que $|T(s \to 0)| = 0\ dB \Rightarrow T(0) = K = 1$
Establecemos: $\boxed{K = 1}$.

c) Observamos que se trata de un rotador de fase, por lo tanto $\omega_n = 1$ y luego:

$$\varphi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\frac{3}{2}\pi = -270°, \text{ para } \omega = 1.$$

Recordamos que, para el rotador de fase de orden 2:

$$\varphi(\omega) = -4\, tg^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \text{ entonces: } \omega_0 = 0,4142.$$

NOTA

Guiliana Ruffa | TS5 | HOJA Nº 5 | FECHA

Luego, $Q_n = 1/\sqrt{2}$, por lo que:

$$T(s) = \frac{s^2 - \omega_0/Q_n + \omega_0}{s^2 + \omega_0/Q_n + \omega_0}$$

$$\boxed{T(s) = \frac{s^2 - 0{,}5858 + 0{,}4142}{s^2 + 0{,}5858 + 0{,}4142}}$$

En el rotador de fase: $\boxed{K = 1}$.

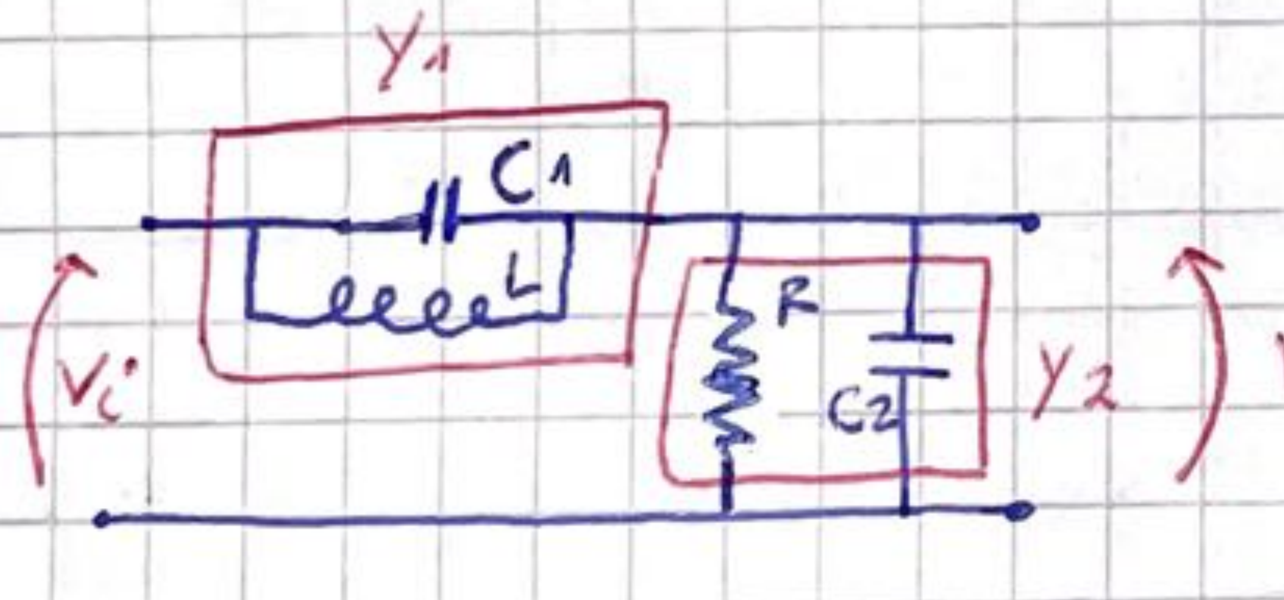
d) Observamos que se trata de un filtro notch con $\omega_n = 4$. Luego:

$$\boxed{T(s) = \frac{s^2 + 4^2}{s^2 + \sqrt{2}\, s + 1}} \qquad \begin{cases} \omega_n = 4 \\ Q_n \to \infty : \nexists \end{cases}$$

b) Circuitos propuestos.

A) $T(s) = \frac{1}{4} \frac{s^2 + 2^2}{s^2 + s\sqrt{2} + 1}$

$$G + \frac{1}{SL} + SC = \frac{S^2CL + SGL + 1}{SL} \quad \frac{SL(S^2CL + SGL + 1) + G + SC}{SL}$$




$$T(s) = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} = \frac{C_1 s + 1/Ls}{\frac{1}{SL} + SC_1 + SC_2 + G}$$

$$T(s) = \frac{S^2LC_1 + 1}{SL\left(\frac{S^2LC_1 + 1}{SL} + SC_2 + G\right)} = \frac{S^2LC_1 + 1}{S^2LC_1 + 1 + S^2LC_2 + SLG} = \frac{LC_1(S^2 + 1/LC_1)}{S^2L(C_1+C_2) + SLG + 1}$$

$$T(s) = \frac{LC_1(S^2 + 1/LC_1)}{L(C_1+C_2)\left(S^2 + \frac{SG}{C_1+C_2} + \frac{1}{L(C_1+C_2)}\right)} = \underbrace{\frac{C_1}{C_1+C_2}}_{K} \cdot \frac{S^2 + \overbrace{1/LC_1}^{\omega_n^2}}{S^2 + S\underbrace{\frac{G}{C_1+C_2}}_{\omega_p/Q} + \underbrace{\frac{1}{L(C_1+C_2)}}_{\omega_p^2}}$$

* Tenemos 4 variables y 4 GL.

NOTA

• $K = \frac{C_1}{C_1+C_2} \quad \rightarrow \quad = \frac{1}{4}$

• $\omega_n^2 = \frac{1}{L C_1} \quad \rightarrow \quad = 4$

• $\omega_0^2 = \frac{1}{L(C_1+C_2)} \quad \rightarrow \quad = 1$

$x_D$

• $\frac{\omega_D}{Q_D} = \frac{G}{(C_1+C_2)} \quad \rightarrow \quad = \sqrt{2}$

$\frac{x_D}{G} = \frac{K}{C_1} = \omega_D^2 \cdot L = \frac{1}{C_1+C_2}$

↳ $\frac{K}{C_1} = \frac{1}{C_1+C_2} \rightarrow \frac{C_1}{K} = C_1 + C_2 \rightarrow \boxed{C_2 = C_1\left(\frac{1}{K} - 1\right)}$

* $C_1 + C_2 = C_1 + C_1\left(\frac{1}{K} - 1\right) = C_1\left(\cancel{1} + \frac{1}{K} \cancel{-1}\right) = \frac{C_1}{K}$

↳ $L\omega_D^2 = \frac{K}{C_1} \rightarrow \boxed{L = \frac{K}{C_1 \omega_D^2}}$

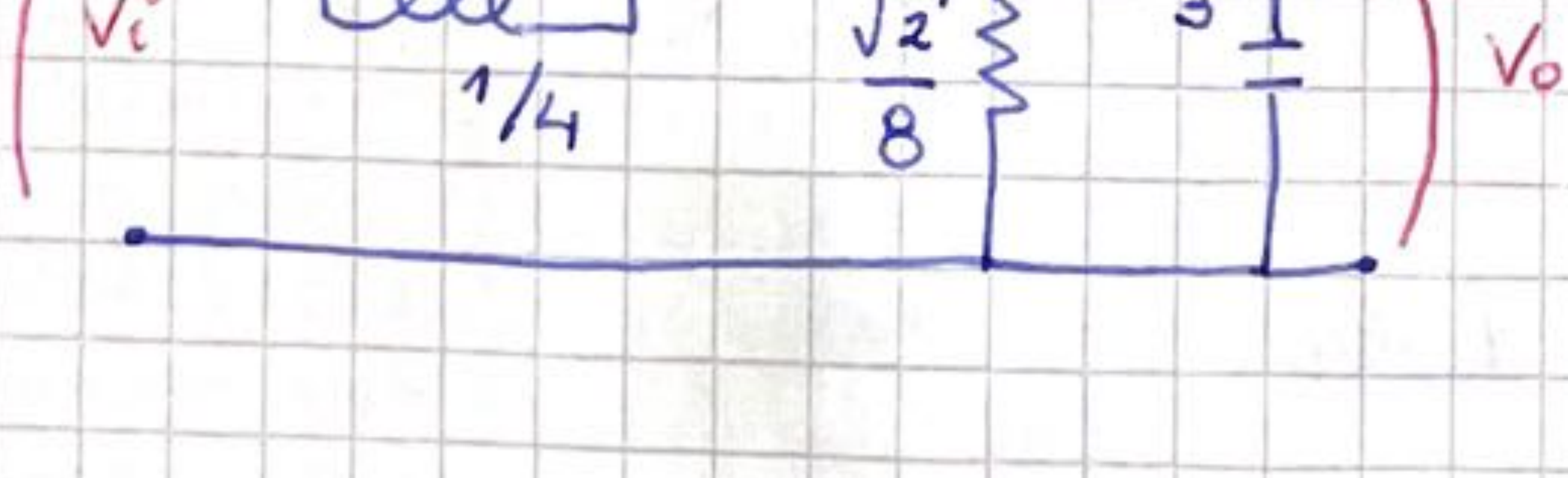
↳ $x_D = \frac{G \cdot K}{C_1} \rightarrow G = \frac{x_D \cdot C_1}{K} \rightarrow \boxed{G = \frac{C_1}{K} \cdot \frac{\omega_D}{Q_D}}$

* Despejamos los componentes:

Adoptamos: $\boxed{C_1 = 1}$

• $\boxed{C_2 = 3}$ • $\boxed{L = 1/4}$ • $\boxed{G = 4\sqrt{2}}$

Finalmente:



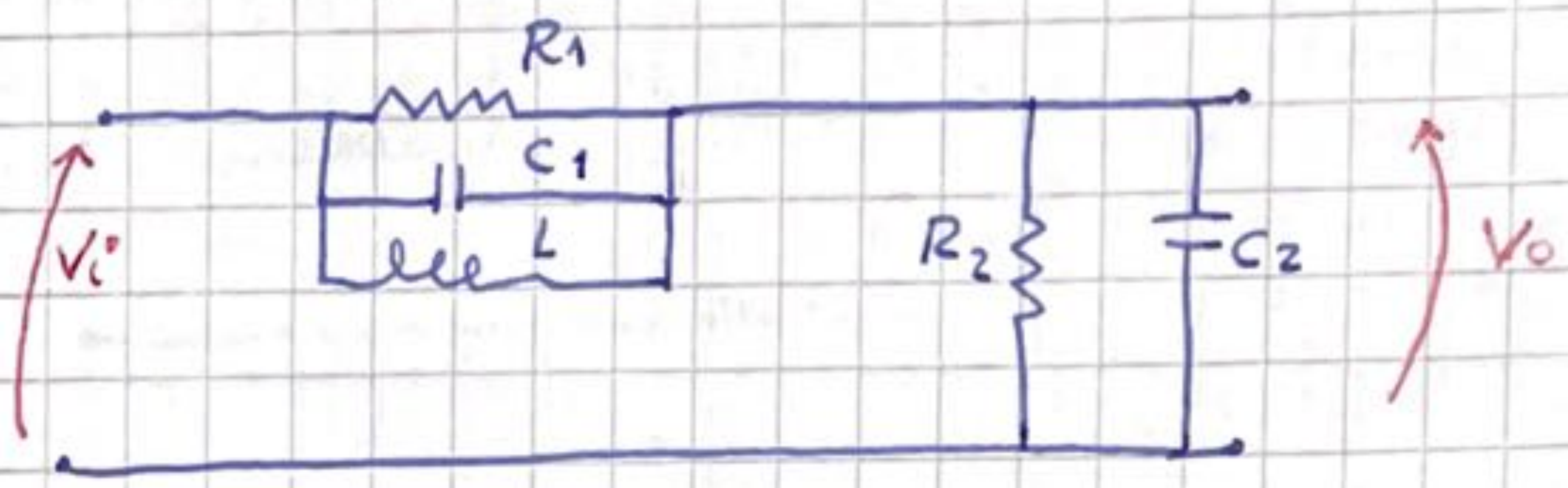
Giuliana Ruffa

TS5



B) $$T(s) = \frac{s^2 + 0{,}707\, s + 1}{s^2 + \sqrt{2}\, s + 1}$$

Proponemos:




$$T(s) = \frac{G_1 + 1/sL + sC}{G_1 + 1/sL + sC + sC + G_2} = \frac{s^2 C_1 L + s G_1 L + 1}{sL\left[\frac{(s^2 C_1 L + s G_1 L + 1)}{sL} + sC_2 + G_2\right]}$$

$$T(s) = \frac{s^2 C_1 L + s G_1 L + 1}{s^2 C_1 L + s G_1 L + 1 + s^2 L C_2 + s L G_2} = \frac{C_1 L \,(s^2 + s G_1/C_1 + 1/C_1 L)}{s^2 L (C_1 + C_2) + s L (G_1 + G_2) + 1}$$

$$T(s) = \frac{C_1 L \,(s^2 + s G_1/C_1 + 1/C_1 L)}{L(C_1 + C_2)\left[s^2 + s\frac{(G_1+G_2)}{C_1+C_2} + \frac{1}{L(C_1+C_2)}\right]}$$

$$\boxed{T(s) = \overbrace{\frac{C_1}{C_1 + C_2}}^{K} \cdot \frac{s^2 + s \overbrace{\frac{G_1}{C_1}}^{\omega_n/Q_n} + \overbrace{\frac{1}{C_1 L}}^{\omega_n^2}}{s^2 + s \underbrace{\frac{(G_1 + G_2)}{C_1 + C_2}}_{\omega_D/Q_D} + \underbrace{\frac{1}{L(C_1 + C_2)}}_{\omega_D^2}}}$$

- $K = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \rightarrow = 1 \Rightarrow$ Si $K = 1$, $C_2 = 0$.
- $\omega_n^2 = \frac{1}{C_1 L} \rightarrow = 1$
- $\frac{\omega_n}{Q_n} = \frac{G_1}{C_1} \rightarrow = 0{,}707 \Rightarrow$ Si $Q \to \infty$, $G_1 = 0$.
- $\omega_D^2 = \frac{1}{L(C_1 + C_2)} \rightarrow = 1$
- $\frac{\omega_D}{Q_D} = \frac{G_1 + G_2}{C_1 + C_2} \rightarrow = \sqrt{2}$

NOTA

Adoptamos: C1.

- $\boxed{C_2 = C_1 \left( \frac{1}{K} - 1 \right)}$

- $\boxed{L = \frac{K}{C_1 \, \omega_D^2}}$

- $\boxed{G_1 = \frac{\omega_n}{Q_n} \cdot C_1}$

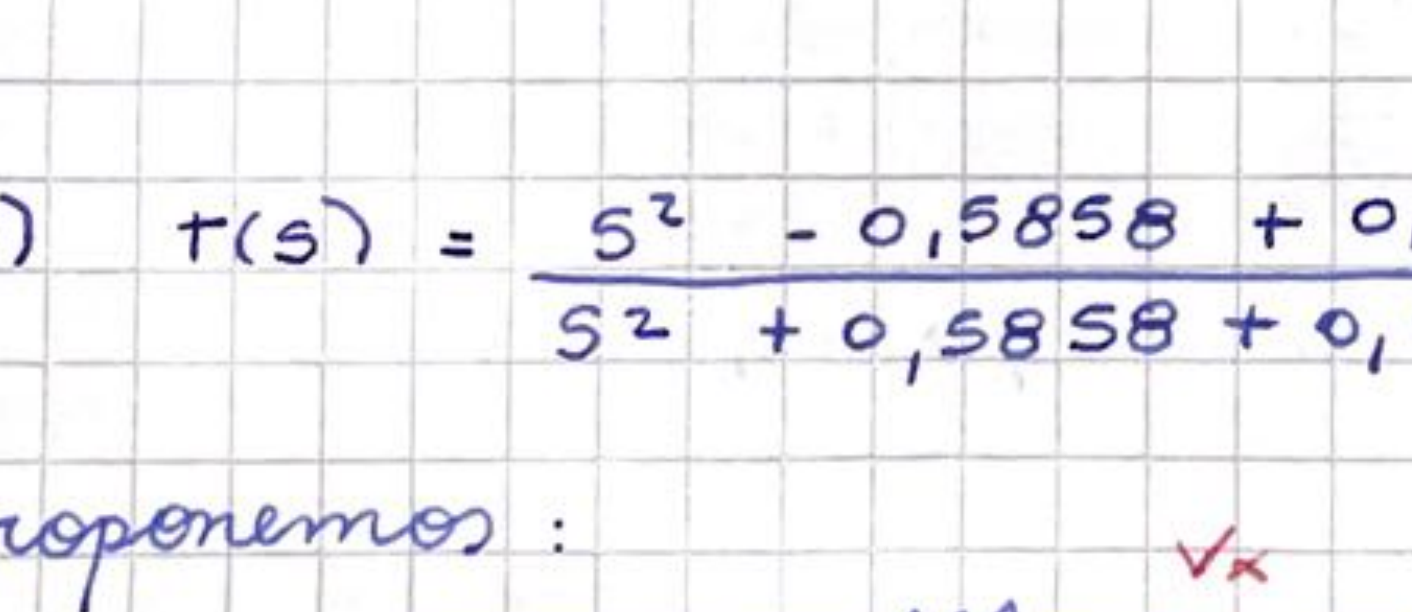
- $\boxed{G_2 = \frac{C_1}{K} \, \frac{\omega_D}{Q_D} - G_1}$

* Calculamos los componentes:

Adoptamos: $\boxed{C_1 = 1}$

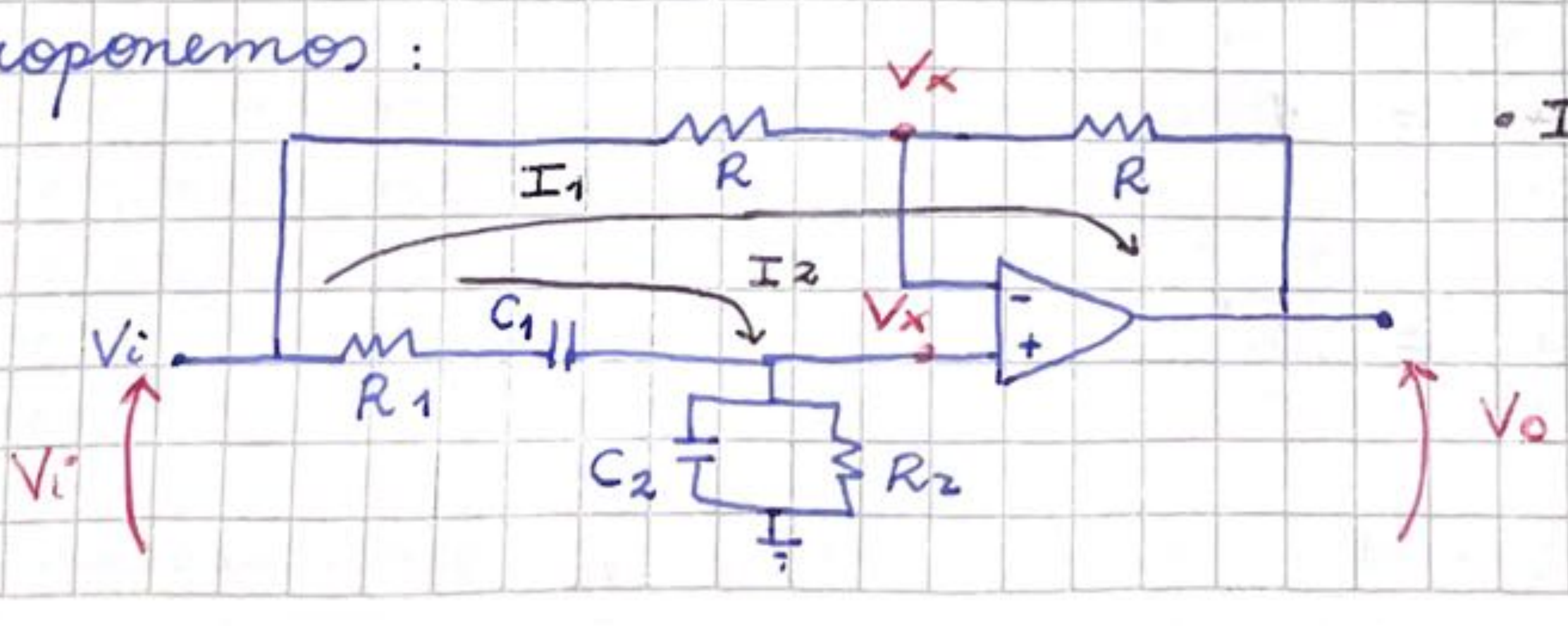
- $\boxed{C_2 = 0}$ • $\boxed{L = 1}$ • $\boxed{G_1 = 0{,}707}$ • $\boxed{G_2 = 0{,}707}$

Finalmente:




c) $T(s) = \dfrac{s^2 - 0{,}5858 + 0{,}4142}{s^2 + 0{,}5858 + 0{,}4142}$ → Rotador de fase orden 2.

Proponemos:




- $I_1 = (V_i - V_o) \cdot \overset{G/2}{\overline{Y_{RR}}} = (V_i - V_x) G$
  $= (V_x - V_o) G$

- $I_2 = I_{C2} + I_{R2}$
  $= (V_i - V_x)(sC_1 R_1 + 1)/sC_1$
  $= V_x (G_2 + sC_2)$

Giuliana Ruffa

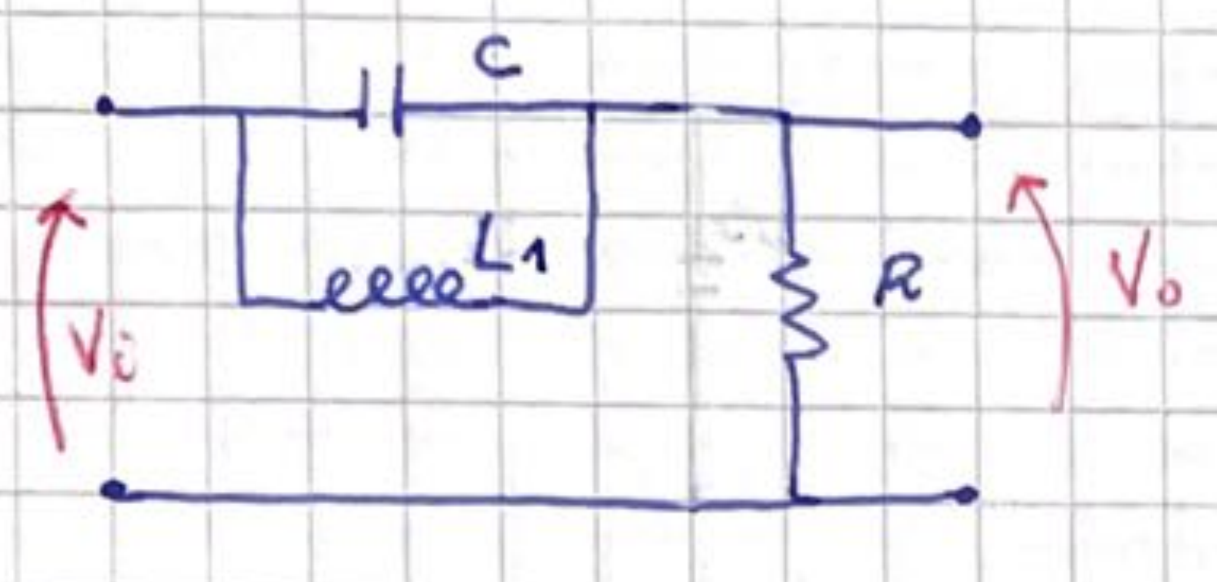
TS5

HOJA N° 7

FECHA

D) $T(s) = \dfrac{s^2 + 4^2}{s + \sqrt{2}\, s + 1}$

Proponemos:




Donde: $\boxed{C_1 = 1}$

- $G = \dfrac{C_1}{K} \cdot \dfrac{\omega_0}{Q_0} \Rightarrow \boxed{G = \sqrt{2}}$

- $L_1 = \dfrac{K}{C_1} \cdot \dfrac{1}{\omega_0^2} \Rightarrow \boxed{L_1 = 1/8}$