Ministerio de Educación,
Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Rosario

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Para trabajar vamos a usar el libro: **Nociones de geometría analítica y algebra lineal – Kozak**, el cual está subido en el CVG.

A continuación, se detalla las secciones con las que vamos a trabajar:

CAPÍTULO 5. Sistemas de ecuaciones lineales

Sección 5.2: Ecuaciones lineales
Sección 5.3: Sistemas de ecuaciones lineales
Sección 5.4: Solución de un sistema de ecuaciones lineales
Sección 5.5: Sistemas de ecuaciones equivalentes
5.5.1. Operaciones elementales
Sección 5.6: Matrices relacionadas con un sistema de ecuaciones lineales
Sección 5.8: Método de Gauss y método de Gauss-Jordan
Sección 5.9: Clasificación de sistemas lineales por su tipo de solución
Sección 5.10: Sistemas compatibles indeterminados: variable principal y variable libre
Sección 5.11: Rango de un matriz
Sección 5.12: Rango y solución
Sección 5.13: Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

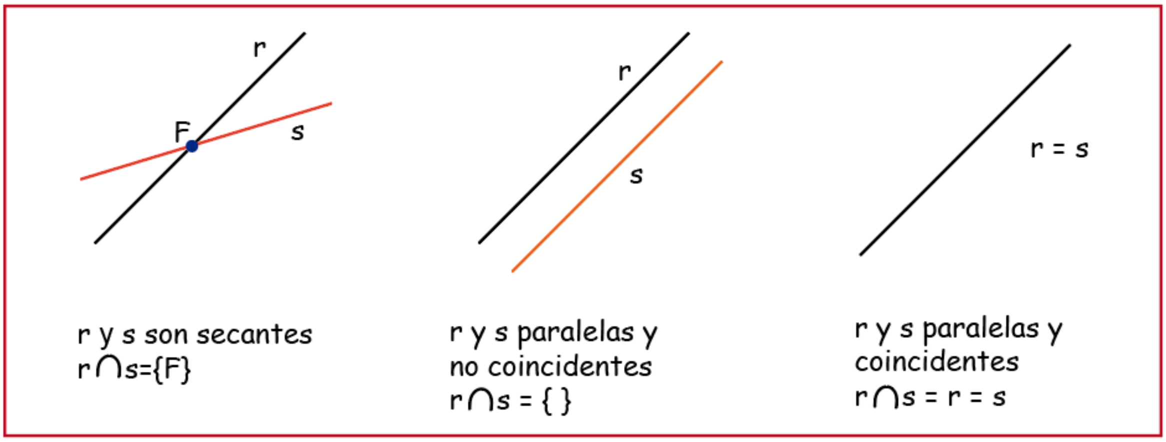
Práctica Nº 7: Sistemas de ecuaciones

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2

$$S = \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Cada una de las ecuaciones del sistema, representa la ecuación de una recta en el plano xy. Así, podemos interpretar geométricamente qué significa resolver un sistema de este estilo. En efecto, buscar el o los pares ordenados de números (x;y) que cumplan ambas ecuaciones, geométricamente se traduce a obtener el o los puntos de coordenadas (x;y) que están en ambas rectas. Entonces para discutir cuántas soluciones a (S) posibles existen, analicemos: ¿Cuáles son las posiciones relativas entre dos rectas en el plano?

Si la primera ecuación determina la recta r y la segunda, la recta s, tenemos:



No hay más opciones que esas tres. Analíticamente esto significa:

- ✓ Si r y s son secantes el sistema tiene solución única (x_F;y_F).
- ✓ Si r y s son paralelas no coincidentes, el sistema no tiene solución.
- ✓ Si r y s son paralelas coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones.

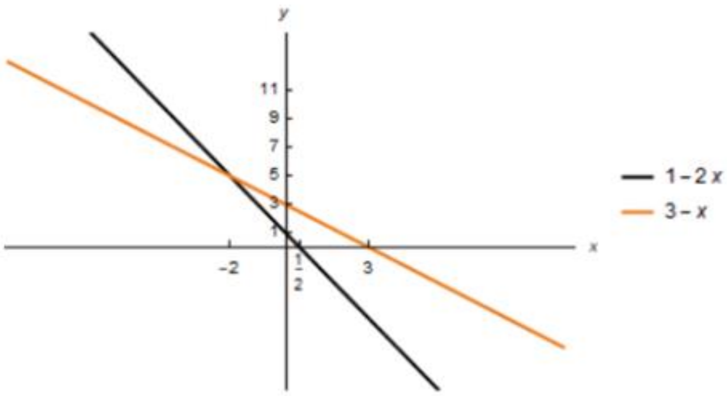
A partir de esto podemos clasificar cada uno de los siguientes sistemas según la cantidad de soluciones que posea. (sección 5.4 del libro)

Práctica Nº 7: Sistemas de ecuaciones

Veamos ahora, cómo resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo:

$$S = \begin{cases} 2x + y = 1 & (E_1) \\ x + y = 3 & (E_2) \end{cases}$$



Resolución:

Graficamos para ver y aproximar la solución. Es bastante claro que estamos frente a un sistema con única solución. Es decir, sistema compatible determinado. Podemos advertir también que la solución será (-2;5). Es más, podemos verificarla:

En E_1: 2 (-2) + 5 = -4 + 5 = 1

En E_2: -2 + 5 = 3

Cómo demostramos analíticamente que tiene una única solución?

Veremos varios métodos analíticos para resolver sistemas, por lo pronto lo haremos con el **METODO POR SUSTITUCION**, que es el que más frecuentemente han usado. Consiste en "despejar" una de las incógnitas en función de la otra en una ecuación y usar esa igualdad en la otra ecuación, sustituyendo la incógnita. Así:

En (E_1): y = 1 - 2x, sustituyo en (E_2) x + y = 3

y = 1 - 2 (-2)	x + (1 - 2x) = 3
y = 5	-x + 1 = 3
	x = -2

Entonces el conjunto solución será S = {(-2;5)}

Práctica Nº 7: Sistemas de ecuaciones

Otro método usualmente usado es el **METODO POR IGUALACION**. Consiste en "despejar" la misma incógnita en función de la otra en ambas ecuaciones, y finalmente, por propiedad transitiva, igualar. Así en nuestro sistema, por ejemplo, tendríamos:

En (E_1): $y = 1 – 2x$

En (E_2): $y = 3 - x$

$1 - 2x = 3 – x \rightarrow -2x + x = 3 – 1 \rightarrow x = -2$

ACTIVIDAD Nº 1

Resolver los siguientes sistemas por sustitución o igualación, clasificarlos y representarlos gráficamente.

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 2y = 31 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$

ACTIVIDAD Nº 2: Plantear el sistema correspondiente y resolver

a) Calcular las edades de dos hermanos, sabiendo que la edad de uno es el triple que la del otro y que, de aquí a 5 años, la suma de las dos edades será el triple de la edad actual del más grande.

b) Hallar un número de dos cifras sabiendo que el doble de la cifra de las decenas más la cifra de las unidades es 8 y el producto del número con el que resulta de invertir sus cifras es 736.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 3X3

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, utilizaremos una herramienta matemática llamada: Algoritmo de Gauss (o Gauss sistematizado)
Veámoslo con un ejemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ 2x - y + 2z = 8 \\ 3x + 3y + 4z = 5 \end{cases}$$

Algoritmo de Gauss

Vamos a resolver por este método el sistema que utilizamos para mostrar la eliminación gaussiana:

x	y	z	t.i.	
1	2	-1	-5	E_1
2	-1	2	8	E_2
3	3	4	5	E_3
	-5	4	18	E_2'
	-3	7	20	E_3'
		-23	-46	E_3''

El número -5 de la fila E2' se obtuvo del producto cruzado:

-5 = 1 x (-1) - 2 x 2

El número 18 de la misma fila se obtuvo del producto cruzado:

18 = 1 x 8 - (-5) x 2

Para completar dicha fila

4 = 1 x 2 - (-1) x 2

Para obtener los números de la fila E_3' se van a obtener resolviendo los productos cruzados entre los números de la fila E_1 y E_3. Siempre se usa la primera columna (la de x) y la otra columna corresponderá a la columna en la que esté ubicado el número.
Luego procedemos de igual manera con E_2' y E_3' quedándonos E_3''.
Para armar el sistema escalonado usamos E_1; E_2' y E_3''. Es decir, queda:

$$S' = \begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ \quad -5y + 4z = 18 \\ \qquad -23z = -46 \end{cases}$$

Práctica Nº 7: Sistemas de ecuaciones

Siempre tener en cuenta que el número que se ubica en la primera fila y primer columna del cuadro debe ser distinta de cero. ¡En caso de que eso no suceda, intercambia ecuaciones!

ACTIVIDAD Nº 3: Resolver cada uno de los siguientes sistemas y clasificarlos

a) $S = \begin{cases} 7y - 17z = -21 \\ x - 3y + 7z = 10 \\ 5x - y + z = 8 \end{cases}$

b) $S = \begin{cases} x - 3y - 2z = 7 \\ 2x - y + 15z = 3 \\ x - 8y - 21z = 11 \end{cases}$

c) $S = \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

d) $S = \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ 3x - y + 4z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$

ACTIVIDAD Nº 4: Determinar para qué valores de k, si existen, el sistema es compatible (determinado o indeterminado) y para qué valores resulta incompatible.

$$S = \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ kx + 5y - 4z = 1 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Ministerio de Educación,
Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Rosario

Práctica Nº 7: Sistemas de ecuaciones

Desde aquí en adelante, para completar el tema SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES, trabajaremos con las secciones del libro: 5.6; 5.7.1; 5.7.2; 5.9; 5.11; 5.12; 5.12.1; 5.13

ACTIVIDAD Nº 5: Clasificar cada uno de los siguientes sistemas, a partir del rango de su matriz de coeficientes y el rango de su matriz ampliada.

a) $S = \begin{cases} x + y - 2z + 3w = 1 \\ x - 2y + w = -2 \\ y - 2z + w = -1 \\ 2x - y - z + 2w = 0 \end{cases}$

b) $S = \begin{cases} x + y - 2z + 3w = 1 \\ y - 2z + w = -1 \\ 2x + 2y - 4z + 6w = 2 \end{cases}$

$c)$ $S = \begin{cases} x + y + z + w = -1 \\ x - 2y + z = 2 \\ x - 2z + w = -1 \\ -y - z + w = 0 \\ x + y + z + w = 1 \end{cases}$

ACTIVIDAD Nº 6:

Determinar y verificar el conjunto solución de los siguientes sistemas lineales:

$a)$ $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

$c)$ $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 5x + y + 2z = 0 \end{cases}$

$d)$ $\begin{cases} 7x - 3y + 5z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$