MATEMÁTICA

Grafos y Árboles

Tecnicatura Universitaria en Programación

Grafos

Bibiliografía: Matemática Discreta y sus Aplicaciones (5ta ed), Rosen Kenneth. Mcgraw-Hill, Interamericana de España, S.A.

Capítulo 8

DEFINICIONES SOBRE GRAFOS

Los grafos son estructuras discretas que constan de vértices y de aristas que conectan entre sí, esos vértices.

Un grafo G = (V, E) es un conjunto V ≠ ∅ de vértices V = $\{v_1, v_2, v_3, \ldots v_n\}$ y un conjunto de aristas E = $\{e_1, e_2, e_3, \ldots e_n\}$, tal que $e_k = \{v_i, v_j\}$ cada arista relaciona dos vértices iguales o distintos.

Hay varios tipos de grafos que se diferencian entre si por el tipo y el número de aristas que pueden conectar cada par de vértices.

Tipos de grafos:

- Grafo Simple
- Multigrafo
- Pseudografo
- Grafo dirigido
- Multigrafo dirigido

TIPOS DE GRAFOS

Grafo simple

Un grafo simple G = (V, E) consta de V, un conjunto no vacío de *vértices*, y de E, un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de V. A estos pares se los llama *aristas*

Multigrafo

Un multigrafo G = (V, E) consta de un conjunto V de *vértices*, un conjunto E de *aristas* y una *función* f de E en $\{\{u, v\} \mid u, v$ pertenecen a $V, u \neq v\}$. Se dice que las aristas e_1 y e_2 son aristas múltiples o paralelas si $f(e_1) = f(e_2)$

Pseudografo

Un pseudografo G = (V, E) consta de un conjunto V de *vértices*, un conjunto E de *aristas* y una *función* f de E en $\{\{u, v\} \mid u, v$ pertenecen a $V\}$. Una arista e es un *bucle*, o lazo si $f(e) = \{u, u\} = \{u\}$ para algún u que pertenezca a V.

TIPOS DE GRAFOS

Grafo Dirigido

Un grafo dirigido G = (V, E) consta de un conjunto V de *vértices* y de un conjunto E de *aristas*, que son pares ordenados de elementos de V.

Multigrafo Dirigido

Un multigrafo G = (V, E) consta de un conjunto V de *vértices*, un conjunto E de *aristas* y una *función* f de E en $\{\{u, v\} \mid u, v$ pertenecen a $V\}$. Se dice que las aristas e_1 y e_2 son aristas múltiples o paralelas si $f(e_1) = f(e_2)$

Ejemplos de grafos:

- Grafos de conocidos
- Torneo de todos contra todos
- Grafo de la Red de Internet

Resumen

TIPOS	ARISTAS	Admite aristas múltiples	Admite bucles
Grafo Simple	No dirigidas	No	No
Multigrafo	No dirigidas	Si	No
Pseudografo	No dirigidas	Si	Si
Grafo Dirigido	Dirigidas	No (en la misma dirección)	Si
Multigrafo Dirigido	Dirigidas	Si	Si

PRÁCTICA

Página 528 del PDF

- Dibujar un grafo de cada tipo
- Determinar de que tipo de grafo son los siguientes (ejercicios del 3 al 9)
- Para los grafos de los problemas 3 -6 halla un conjunto de aristas tal que si se eliminan esas aristas, el grafo se convierte en simple

PRACTICA

1. Dibujar modelos de grafos, especificando el tipo de grafo utilizado para representar un sistema de rutas aéreas en el que cada día hay cuatro vuelos de Boston a Newark. dos vuelos de Newark a Boston, tres vuelos de Newark a Miami, dos vuelos de Miami a Newark, un vuelo de Newark a Detroit, dos vuelos de Detroit a Newark, tres vuelos de Newark a Washington, dos vuelos de Washington a Newark y un vuelo de Washington a Miami, de modo que:

a) Hay una arista conectando cada par de vértices que representan ciudades para las que hay algún vuelo de la una a la otra (en cualquiera de los dos sentidos).

b) Hay una arista conectando dos ciudades por cada vuelo que opere entre las dos ciudades (en cualquiera de los dos sentidos).

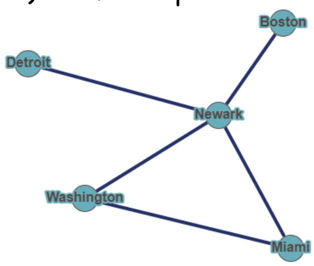
c) Hay una arista conectando dos ciudades por cada vuelo que opere entre las dos ciudades (en cualquiera de los dos sentidos) más un bucle que representa una excursión turística que despega y aterriza en Miami.

d) Hay una arista que sale de cada vértice asociado a una ciudad de la que despega algún vuelo y que llega al vértice correspondiente a la ciudad en que aterriza el vuelo.

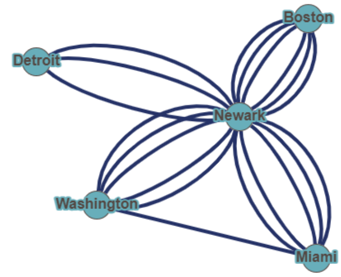
e) Hay una arista por cada vuelo. que sale del vértice que representa a la ciudad en que se inicia el vuelo y llega al vértice que representa a la ciudad en que aterriza.

PRACTICA

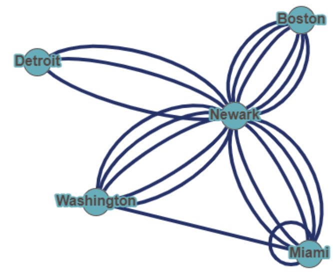
a) Grafo simple



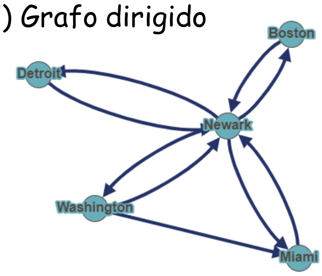
b) Multigrafo



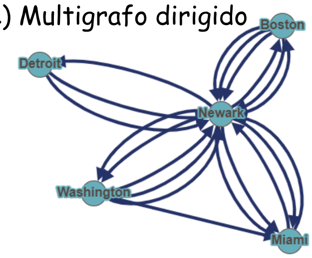
c) Pseudografo



d) Grafo dirigido

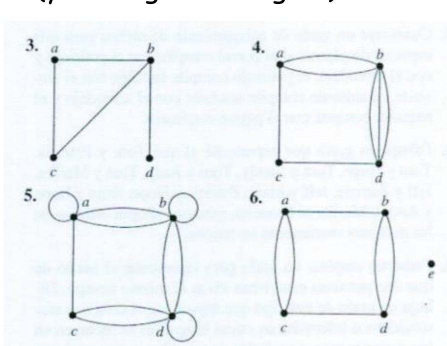


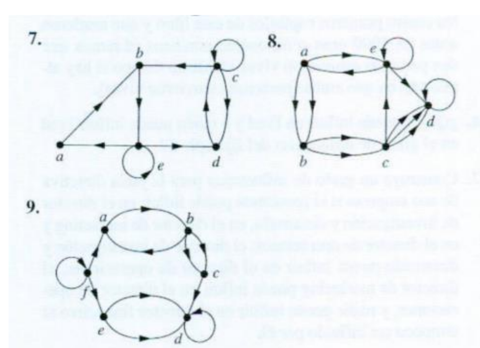
e) Multigrafo dirigido



PRACTICA

Determina si el grafo que se muestra es un grafo simple, un multigrafo (y no un grafo simple), un pseudografo (y no un multigrafo), un grafo dirigido o un multigrafo dirigido (y no un grafo dirigido)





3) Grafo simple. 4) Multigrafo 5) Pseudografo. 6) Multigrafo
7) Grafo dirigido. 8y9) Multigrafo dirigido.

TERMINOLOGÍA DE GRAFOS

Definición 1

Se dice que dos vértices u y v de un **grafo no dirigido** G son adyacentes (o vecinos) en G si $\{u, v\}$ es una arista de G. Si $e = \{u, v\}$, se dice que la arista e es incidente con los vértices u y v. También se dice que la arista e conecta a u y v.

Definición 2

El grado de un vértice de **grafo no dirigido** es el número de aristas incidentes con él, exceptuando los bucles,cada uno de los cuales contribuye con **dos** unidades al grado del vértice. El grado del vértice se denota con $\delta(v)$

TERMINOLOGÍA DE GRAFOS

Teorema de los apretones de manos

Sea G = (V, E) un **grafo no dirigido** con e aristas. Entonces:

$$2e = \sum_{v \in V} \delta(v)$$

Nótese que esto es cierto incluso cuando hay aristas múltiples y bucles en el grafo

Teorema 2

Todo **grafo no dirigido** tiene un número par de vértices de grado impar

TERMINOLOGÍA DE GRAFOS

Definición 3

Si (u, v) es una arista del **grafo dirigido** G, se dice que u es adyacente a v y que v es adyacente desde u. Al vértice u se le llama vértice inicial de (u, v) y a v se le llama vértice final o terminal de (u, v). Los vértices inicial y final de un bucle coinciden.

Definición 4

En un **grafo dirigido,** el grado de entrada de un vértice v se denota con $\delta^{-}(v)$ y es el número de aristas que tienen a v como vértice final. El grado de salida del un vértice v, se denota con: $\delta^{+}(v)$ y es el número de aristas que tienen a v como vértice inicial.

Nótese que un bucle contribuye con una unidad tanto al grado de entrada como al grado de salida

TERMINOLOGÍA DE GRAFOS

Teorema 3

Sea G = (V, E) un **grafo dirigido**. Entonces:

$$\sum_{v \in V} \delta^{-}(v) = \sum_{v \in V} \delta^{+}(v) = |E|$$

Siendo |E| el número de aristas

Familias distinguidas de grafos simples:

- Grafos completos K_n:
- Estrella S_n
- Lineal L_n
- Ciclos C_n
- Rueda W_n
- n-Cubos Q_n

TERMINOLOGÍA DE GRAFOS

Grafo Completo

Es un Grafo completo si para todo par de vértices distintos (v_i, v_j) existe una arista $e_k = \{v_i, v_j\}$ que los une.

Si el grafo completo tiene n vértices, entonces $|E| = n(n-1)/2$ y el $\delta(vi) = n-1$

Grafo Ciclo

Es un Grafo Ciclo si tiene vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tal que las aristas son: $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, …., $\{v_n, v_1\}$.
Si el grafo ciclo tiene n vértices, entonces $|E| = n$ y el $\delta(vi) = 2$

Grafo Estrella

Es un Grafo Estrella si tiene un vértice central y n vértices periféricos. Hay una arista entre el vértice central y cada vértice periférico.
Si el grafo estrella tiene n vértices periféricos, entonces $|V| = n+1$, $|E| = n$ y el grado de los vértices periféricos $\delta(v_p) = 1$ y para el vértice central el grado es: $\delta(v_c) = n$

TERMINOLOGÍA DE GRAFOS

Grafo Rueda

Un Grafo Rueda es un grafo ciclo, más un grafo estrella.

Si el grafo parte de un ciclo de n vértices, entonces $|V| = n+1$, $|E| = 2n$ y el grado de los vértices periféricos $\delta(v_p) = 3$ y $\delta(v_c) = n$ para el vértice central.

Grafo Lineal

Un Grafo Lineal tiene vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tal que las aristas son: $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, …., $\{v_{n-1}, v_n\}$.
Si el grafo lineal tiene n vértices, entonces $|V| = n$, $|E| = n-1$ y el $\delta(vi) = 2$, si $i = 2, 3, \ldots, n-1$, y el $\delta(v_1) = \delta(v_n) = 1$.

Grafo n-Cubos

Es un Grafo n-Cubos si sus vértices representan 2^n cadenas de bits de longitud n. Dos vértices son adyacentes si las cadenas de bits a las que representa difieren exactamente de un bit.

Grafo completo: K_n

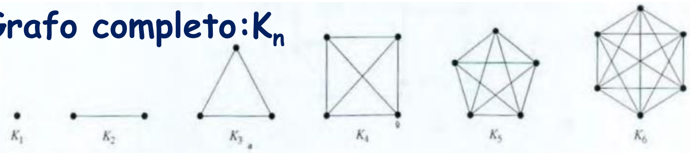


Figura 3. Los grafos K_n para $1 \leq n \leq 6$.

Grafo n-cubo: Q_n

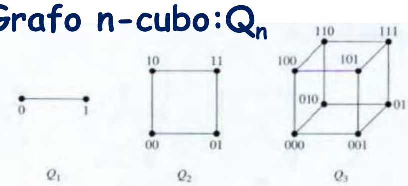


Figura 6. Los n-cubos Q_n, para $n = 1, 2$ y 3.

Grafo ciclo: C_n

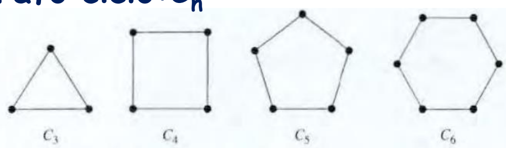


Figura 4. Los ciclos C_3, C_4, C_5 y C_6.

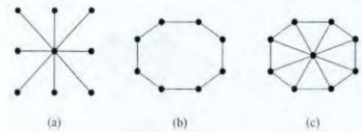


Figura 10. Topologías en estrella, en anillo e híbrida para redes de área local.

Grafo Rueda: W_n

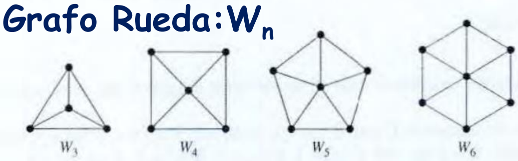


Figura 5. Las ruedas W_3, W_4, W_5 y W_6.

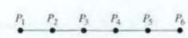


Figura 11. Una disposición lineal con seis procesadores.

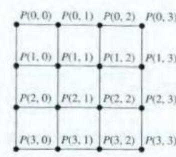


Figura 12. Una red de malla con 16 procesadores.

TERMINOLOGÍA DE GRAFOS

Definición 6

Se dice que un **grafo simple** G, es bipartito si un conjunto de vértices V se puede dividir en dos conjuntos disjuntos V_1 y V_2, tales que cada arista del grafo conecta un vértice V_1 con un vértice V_2 (de manera que no haya ninguna arista que conecte entre si dos vértices de V_1 ni tampoco de V_2)

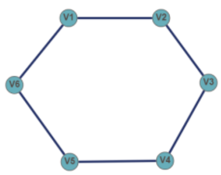
Definición 6

Un subgrafo de un grafo G = (V, E) es un grafo H = (W, F) $W \subseteq V$ y $F \subseteq E$

Definición 7

La unión de dos **grafos simples** $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ es el grafo simple cuyo conjunto de vértices es $V_1 \cup V_2$, cuyo conjunto de aristas es $E_1 \cup E_2$. La unión de G_1 y G_2 se denota por: $G_1 \cup G_2$

Grafo Bipartito



Grafo ciclo: C_6

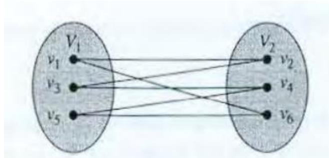
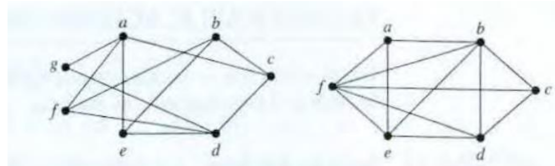


Figura 7. El ciclo C_6 es bipartito.



G **Bipartito** H **No Bipartito**

Figura 8. Los grafos no dirigidos G y H.

El conjunto de vértices de G es la unión de dos conjuntos disjuntos, {a, b, d } y {c, e , f, g }

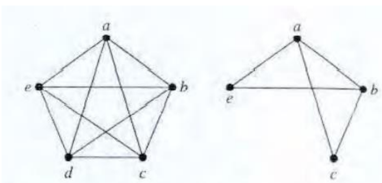


Figura 14. Un subgrafo de K_5.

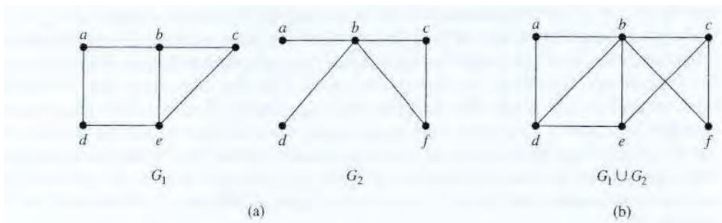


Figura 15. (a) Los grafos simples G_1 y G_2; (b) Su unión $G_1 \cup G_2$.

PRÁCTICA

Página 538 del PDF

- Resolver los problemas del 1 al 3.
- Ejercicio 4: Comprobar el Teorema de apretones de manos para los ejercicios del 1 al 3
- Ejercicios del 7 al 9: Determinar el número de vértices y de aristas. Dar el grado de entrada y de salida de cada vértice
- Dibuja los siguientes grafos
  - Grafos completos K_7
  - Ciclos C_7
  - Rueda W_7
- Resolver ejercicio 38 y 39: Unión de grafos
- Resolver ejercicio 41: Grafo complementario

REPRESENTACIÓN DE GRAFOS

Los grafos pueden ser representados a través de 3 estructuras

- Lista de adyacencia
- Matriz de adyacencia
- Matriz de incidencia

Lista de adyacencia: L_{vi}

Especifica los vértices que son adyacentes a cada uno de los vértices del grafo

Lista de adyacencia: L_{vi}

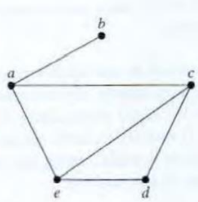


Figura 1. Un grafo simple.

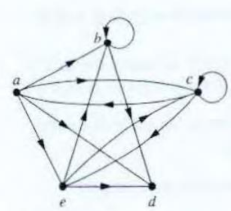


Figura 2. Un grafo dirigido.

Tabla 1. Una lista de aristas para un grafo simple.

Vértices	*Vértices adyacentes*
a	*b, c, e*
b	*a*
c	*a, d, e*
d	*c, e*
e	*a, c, d*

Tabla 2. Una lista de aristas para un grafo dirigido.

Vértice inicial	*Vértices finales*
a	*b, c, d, e*
b	*b, d*
c	*a, c, e*
d	
e	*b, c, d*

REPRESENTACIÓN DE GRAFOS

Matriz de adyacencia

La matriz de adyacencia del grafo G: A_G es la matriz booleana *nxn* que tiene un 1 en la posición *(i, j)* si v_i y v_j son adyacentes, y tiene un 0 en la posición *(i, j)* si v_i y v_j no son adyacentes. Es decir:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ \{v_i, v_j\} es\ una\ arista\ de\ G \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

Nótese que cuando hay aristas múltiples, la matriz de adyacencia deja de ser booleana.

Todos los grafos no dirigidos, incluyendo multigrafos y pseudografos tienen matrices de adyacencias simétricas

La matriz de adyacencia de un grafo dirigido no tiene por que ser simétrica, ya que puede no haber una arista a_j a a_i cuando hay una arista de a_i a a_j

REPRESENTACIÓN DE GRAFOS

Matriz de incidencia

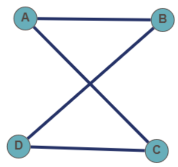
Sea G = (V, E) un grafo no dirigido, supongamos que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son los vértices, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ las aristas de G. Entonces, la matriz de incidencia con respecto a este ordenamiento de V y de E es la matriz **M** = $[m_{ij}]$ de *nxm* dada por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } e_j \text{ es incidente de } v_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para los grafos dirigidos, la matriz de incidencia se define:

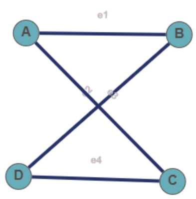
$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es el vértice final de la arista } e_k \\ 1 & \text{si } v_i \text{ es el vértice inicial de la arista } e_k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Representaciones matriciales de un Grafo



Matriz de adyacencia →

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Matriz de incidencia →

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Representaciones matriciales de un Grafo

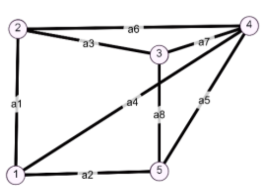


Fig. 5.14. Grafo G.

Matriz de adyacencia →

$$M_a(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de incidencia →

$$M_i(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(M_a)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Hay tres caminos, de longitud dos, del vértice 2 al 5.
C_1: 2, 1, 5; C_2:2, 3, 5;
C_3: 2, 4, 5.

Hay cuatro caminos, de longitud dos, del vértice 4 al 4.
Ellos son:
C_1: 4, 1, 4; C_2:4, 2, 4;
C_3: 4, 3, 4; C_4: 4, 5, 4

PRÁCTICA

Página 546 del PDF

- Resolver los problemas del 1 al 4.
  - Lista de adyacencia
  - Matriz de adyacencia
  - Matriz de incidencia

CONEXIÓN - CAMINOS

Definición 8

Sea n un entero no negativo y sea G un grafo (dirigido o no). Un camino de longitud n de u a v en G es una secuencia de n aristas $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de G tal que $f(e_1) = \{v_0, v_1\}$, $f(e_2) = \{v_1, v_2\}$, …, $f(e_n) = \{v_{n-1}, v_n\}$, donde $v_0 = u$ y $v_n = v$. Si el grafo es simple, denotamos este camino por su secuencia de vértices $v_0, v_1, \ldots, v_n$ (ya que el enumerar estos vértices determina el camino de forma única)

El camino es cerrado si empieza y termina en el mismo vértice (ciclo).
Un recorrido es un camino que no repite **aristas.**
Un circuito es un **recorrido cerrado**.
Un camino simple es un camino que no repite **vértices**.
Un ciclo es un camino **simple cerrado**.
La distancia entre dos vértices (u, v) es la longitud del camino más corto entre ambos.

CONEXIÓN - CAMINOS

Definición 9

Se dice que un **grafo no dirigido** es conexo si hay un camino entre cada par de vértices distintos del grafo

Teorema 4

Hay un camino simple entre cada par de vértices distintos de un **grafo no dirigido conexo**

Nótese que un grafo que no es conexo es la unión de dos o mas subgrafos conexos que dos a dos no tiene ningún vértices en común. A estos subgrafos conexos disjuntos se les llama componentes conexas del grafo

Definición 10

Se dice que un **grafo dirigido** es fuertemente conexo si hay un camino de a a b y un camino de b a a para cuales quiera dos vértices a y b del grafo

CONEXIÓN - CAMINOS

Definición 11

Se dice que un **grafo dirigido** es débilmente conexo si hay un camino entre cada dos vértices del grafo no dirigido subyacentes

Teorema 5

Sea G un grafo y sea **A** su matriz de adyacencia con respecto a la ordenación $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (se admiten aristas dirigidas o no dirigidas, aristas múltiples o bucles). El número de caminos distintos de longitud r de v_i a v_r, siendo r un entero positivo, es igual al elemento en la posición (i, j) de la matriz A^r

PRÁCTICA

Página 557 del PDF

- Resolver los problemas del 1 y 2.
- Determinar si los grafos de los ejercicios 3 – 5 son o no conexos
- Hallar la componente fuertemente conexa del ejercicio 13

EULER Y HAMILTON

Definición 12

Un recorrido euleriano de un grafo G es un recorrido que contiene a todas las aristas de G (sin repetir ninguna), es decir, pasa por cada arista exactamente una vez.

Un circuito euleriano es un recorrido euleriano cerrado, es decir, empieza y termina en la misma arista.

Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de circuitos y recorridos eulerianos:
- En un **grafo o multigrafo conexo** que contiene un circuito euleriano podemos demostrar que todos los vértices tienen grado par

EULER Y HAMILTON

Teorema 6

Un grafo o multigrafo **conexo** sin vértices aislados, admite un circuito euleriano si, y solo si, cada uno de sus vértices tiene grado par

Teorema 7

Un grafo o multigrafo **conexo** sin vértices aislados, admite un recorrido euleriano pero no un circuito euleriano si, y solo si, tiene exactamente dos vértices de grado impar

Teorema 8

Un grafo o multigrafo **dirigido conexo** sin vértices aislados, admite un circuito euleriano si, y solo si, el $\delta^{-}(v_i) = \delta^{+}(v_i)$ para cada vértice v_i.

EULER Y HAMILTON

Definición 13

Se dice que un camino $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n$ del grafo G = (V, E) es un camino hamiltoniano si V = $\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n\}$ y $v_i \neq v_j$ para $0 \leq i < j \leq n$.

Se dice que un ciclo $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n, v_0$ (con $n > 1$) del grafo G = (V, E) es un ciclo hamiltoniano si $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n$ es un camino hamiltoniano, es decir, un camino Hamiltoniano cerrado

---

Importante:
- Recorrido Euleriano pasa por todas las aristas
- Camino Hamiltoniano pasa por todos los vértices

EULER Y HAMILTON

Teorema de Dirac

Sea G un **grafo simple** con n vértices para $n \geq 3$, tal que todos los vértices de G tienen grado mayor o igual que $n/2$.

Entonces, G contiene un ciclo hamiltoniano

Teorema de Ore

Sea G un **grafo simple** con n vértices para $n \geq 3$, tal que $\delta(u) + \delta(v) \geq n$ para cada par de vértices no adyacentes en u y v de G. Entonces, G contiene un ciclo hamiltoniano

PRÁCTICA

Página 569 del PDF

- Resolver los problemas del 1 y 8.
- Resolver los problemas del 30 al 36.
- Determinar para que valor de n contienen los siguientes grafos un circuito euleriano
  - K_n
  - C_n

CAMINOS DE LONGITUD MÍNIMA

Definición 13

Se le llama grafos ponderados a los grafos en los que se asigna un número a cada una de las aristas

La longitud de un camino en un grafo ponderado es la suma de los pesos de las aristas de ese camino

Teorema 9

El algoritmo de Dijkstra determina la longitud del camino mas corto entre dos vértices de un **grafo simple conexo y no dirigido**

PRÁCTICA

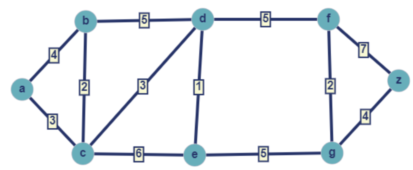
Página 581 del PDF

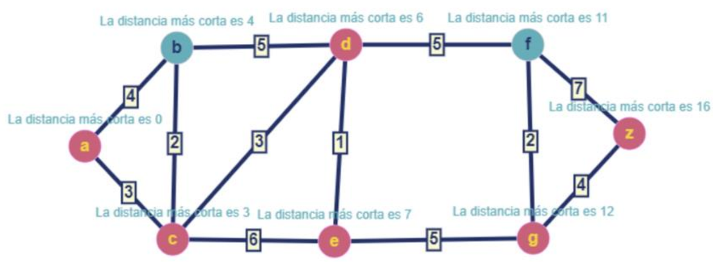
- Resolver el ejercicio 3

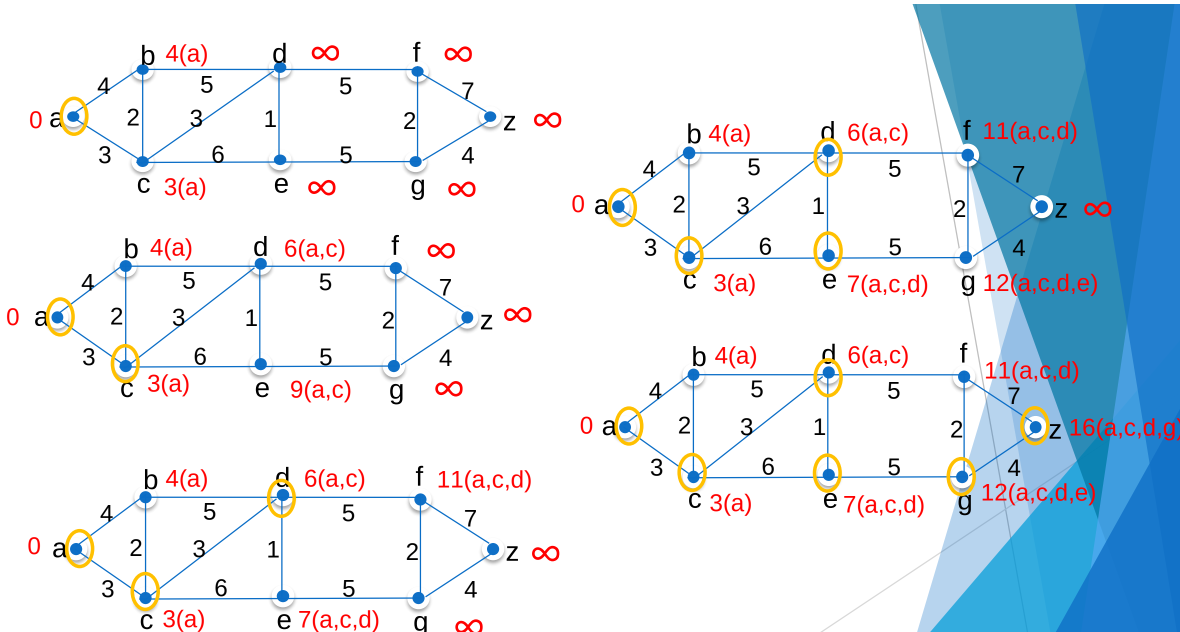
http://www.youtube.com/watch?v=6rl0ghgPfK0

https://www.youtube.com/watch?v=fgdCNuGPJnw

Ejercicio 3. La longitud del camino más corto es 16: a⇒c⇒d⇒e⇒g⇒z



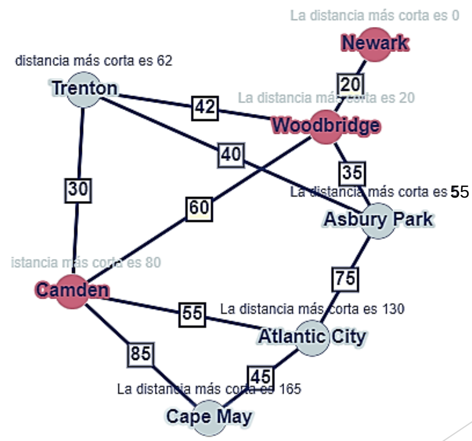




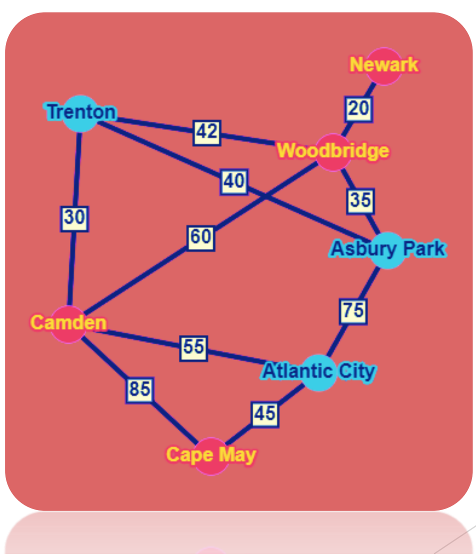
ALGORITMO DE DIJKSTRA

Ejercicio 17

- La longitud del camino más corto es 80: Newark⇒Woodbridge⇒Camden



- La longitud del camino más corto es 165: Newark⇒Woodbridge⇒Camden⇒Cape May



Árboles

Bibiliografía: Matemática Discreta y sus Aplicaciones (5ta ed), Rosen Kenneth. Mcgraw-Hill, Interamericana de España, S.A.

Capítulo 9

DEFINICIONES SOBRE ARBOLES

Definición 1

Un árbol es un grafo no dirigido, conexo y sin ciclos.

Nótese que un árbol necesariamente es un grafo simple

Los bosques son los grafos acíclicos (sin ciclos) pero no necesariamente conexo y tienen la propiedad de que cada una de sus componentes conexas es un árbol.

Teorema 1

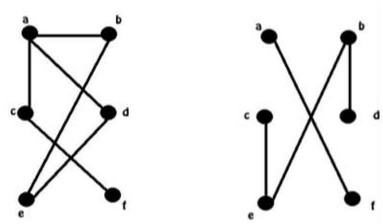
Un **grafo no dirigido** es un árbol si, y solo sí hay un *único camino* entre cada pareja de vértices

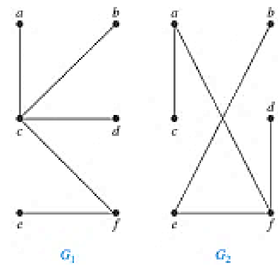
Definición 2

Un árbol con raíz es un árbol en el que uno de sus vértices ha sido designado como la raíz y todas las aristas están orientadas de modo que se alejan de la raíz.

Nótese que las distintas elecciones de la raíz producen diferentes árboles con raíz

¿Cuál de estos grafos son arboles?

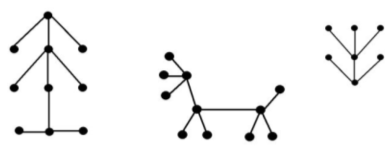




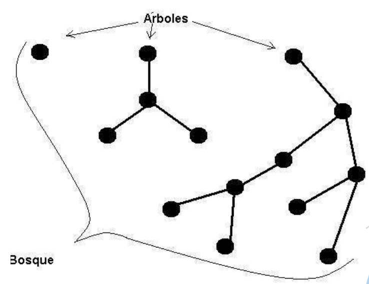
Respuesta= El primero no es un árbol, ya que e,b,a,d,e es un ciclo del grafo

Bosques

- Un bosque es un grafo acíclico pero no necesariamente conexo. Además tienen la propiedad de que cada una de sus componentes conexas es un árbol.

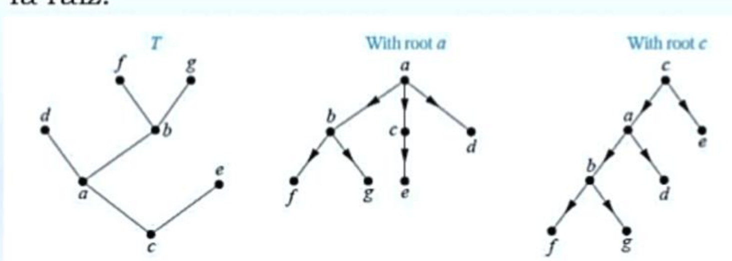


Ejemplo de bosque



Arboles con raíz

- Un árbol con raíz es un árbol en el que uno de sus vértices ha sido designado como la raíz y todas las aristas están orientadas de modo que se alejan de la raíz.

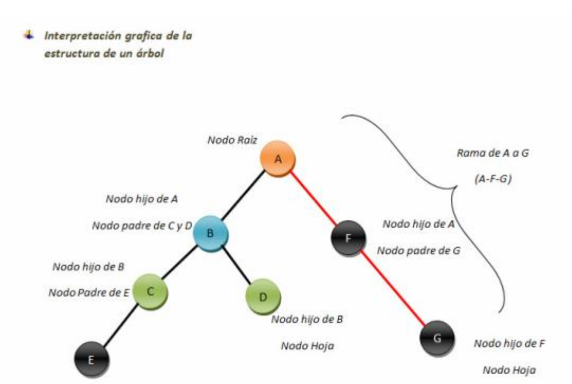


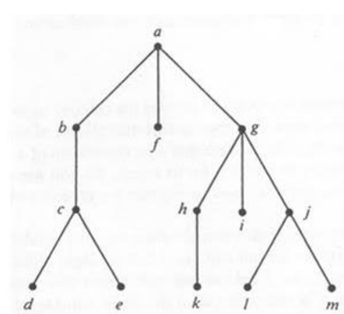
DEFINICIONES SOBRE ARBOLES

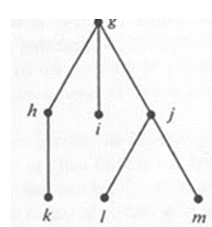
Otras definiciones:

- Padre: de v es el único vértice u talque hay una arista dirigida de u a v
- Hijo: cuando u es el padre de v, se dice que v es el hijo de u
- Hermano: son los vértices con el mismo padre
- Antecesores: de un vértice diferente de la raíz son todos los vértices en el camino desde la raíz hasta ese vértice.
- Descendientes: de un vértice v son aquellos vértices para los que v es un antecesor
- Hoja: es un vértice que no tiene hijos
- Vértice interno: es aquel que tiene hijos
- Subarbol: si a es un vértice de un árbol, el subarbol con raíz en a es un subgrafo del árbol que contiene al vértice a y a todos sus descendientes y a todas las aristas incidentes en dichos descendientes

En el árbol con raíz en a, halla el padre de c. los hijos de g, los hermanos de h, los antecesores de e, los descendientes de h, los vértices internos y las hojas. ¿Cuál es el subárbol con raíz en g?







DEFINICIONES SOBRE ARBOLES

Definición 3

Un **árbol raiz** se llama árbol m-ario si todos los vértices internos tienen a lo sumo, m hijos. El árbol se llama árbol m-ario completo si todo vértices interno tiene exactamente m hijos.

Teorema 2

Un árbol de n vértices tiene $n - 1$ aristas

Teorema 3

Un **árbol de m-ario completo** con i vértices internos tiene $n = mi + 1$ vértices y $l = (m-1).i + 1$ hojas

DEFINICIONES SOBRE ARBOLES

Teorema 4

Un árbol de **m-ario completo** con:

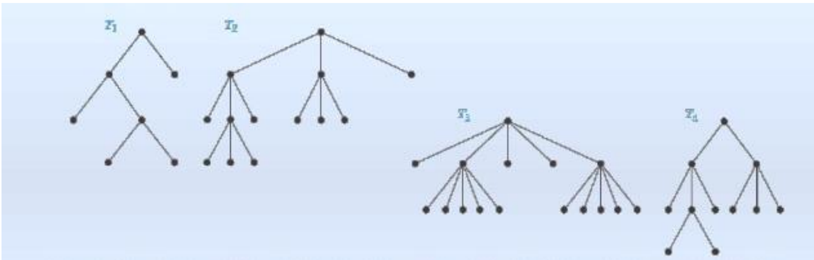
1. n vértices tiene $i = (n - 1)/m$ vértices internos y $l = [(m - 1)n + 1]/m$ hojas
2. i vértices internos tiene $n = mi + 1$ vértices y $l = (m - 1)i + 1$ hojas
3. l hojas tiene $n = (ml - 1)/(m - 1)$ vértices e $i = (l - 1)/(m - 1)$ vértices internos

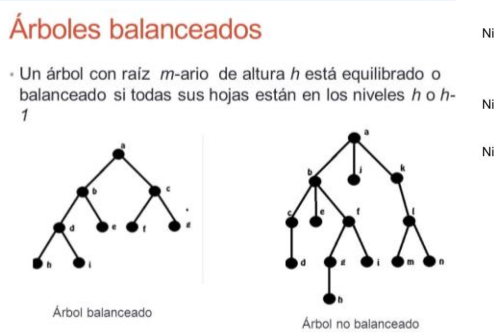
El nivel de un vértice es la longitud del camino desde la raíz.
La altura de un árbol h es el máximo de los niveles de sus vértices
Un árbol con raíz m-ario de altura h esta equilibrado o balanceado si todas sus hojas están en los niveles h o $h-1$

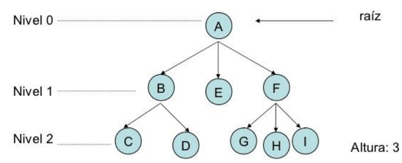
Teorema 5

Un árbol de m-ario de altura h tiene a lo sumo, m^h hojas

Los árboles con raíz de la Figura, ¿son árboles m-arios completos para algún entero positivo m?







PRÁCTICA

Página 617 del PDF

- Cuales de los grafos del ejerciocio 1 son árboles
- Responder las preguntas del ejercicio 3 y 4

RECORRIDOS EN ARBOLES

Sistema de etiquetado universal

- Los procedimientos para recorrer todos los vértices de un árbol ordenado con raíz se basan en las ordenaciones definidas en los hijos.
- Para ordenar totalmente los vértices de un árbol ordenado con raíz primero se deben etiquetar todos los vértices:
  - Etiquetar la raíz con el entero 0
  - Etiquetar sus k hijos (al nivel 1) de izquierda a derecha con los enteros 1, 2, 3, …, k
  - Para cada vértice v del nivel n con etiqueta A, etiquetamos sus k_v hijos de izquierda a derecha como A.1, A.2, …, A.k_v

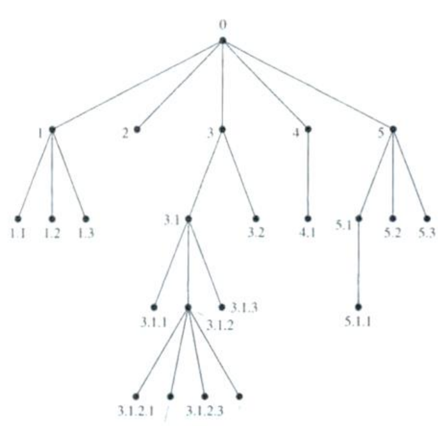


Figura 1. Sistema de etiquetado universal de un árbol ordenado con raíz.

El orden lexicográfico de las etiquetas es:

0< 1 < 1.1 < 1.2 < l.3 < 2 < 3 < 3. 1 < 3. 1.1 < 3. 1.2 < 3. 1.2.1 < 3.1.2.2 < 3.1.2.3 < 3.1.2.4 <3.1.3<3.2<4<4.l <5 <5.1 <5.1.1 <5.2< 5.3

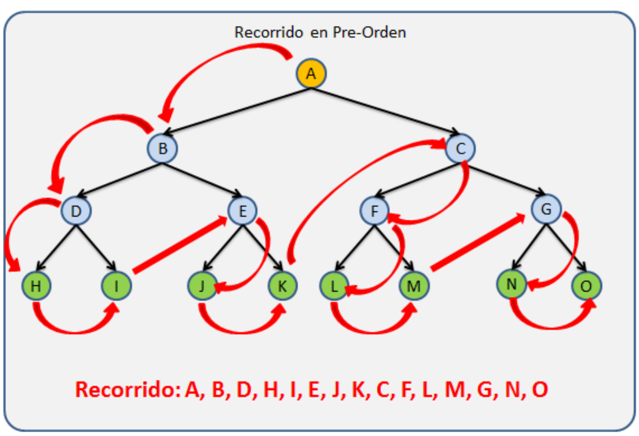
RECORRIDOS EN ARBOLES

Definición 10

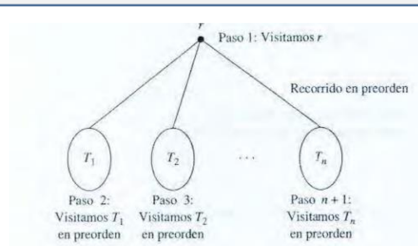
Sea T un árbol ordenado con raíz r. Si T consta sólo de r, entonces r es el recorrido en preorden de T. En otro caso, supongamos que T_1, T_2, ..., T_n son subárboles de r listado de izquierda a derecha en T. El recorrido en preorden comienza visitando r, continua recorriendo T_1, en preorden, luego T_2 y así sucesivamente hasta recorrer Tn en preorden.

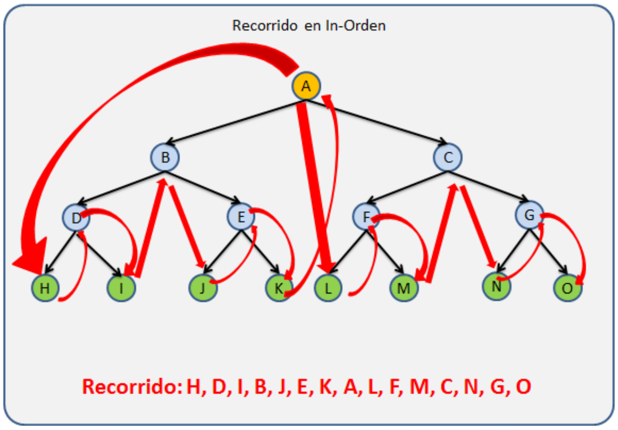
Definición 11

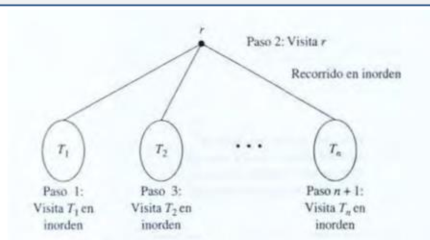
Sea T un árbol ordenado con raíz r. Si T consta sólo de r, entonces r es el recorrido en inorden de T. En otro caso, supongamos que T_1, T_2, ..., T_n son subárboles de r listado de izquierda a derecha en T. El recorrido en inorden comienza recorriendo T_1, en inorden y a continua visitando r, a continuación recorre T_2 en inorden y así sucesivamente hasta recorrer Tn en inorden.



El recorrido en pre-orden de un árbol ordenado con raíz proporciona el mismo orden en los vértices que el obtenido con el sistema de etiquetado universal.



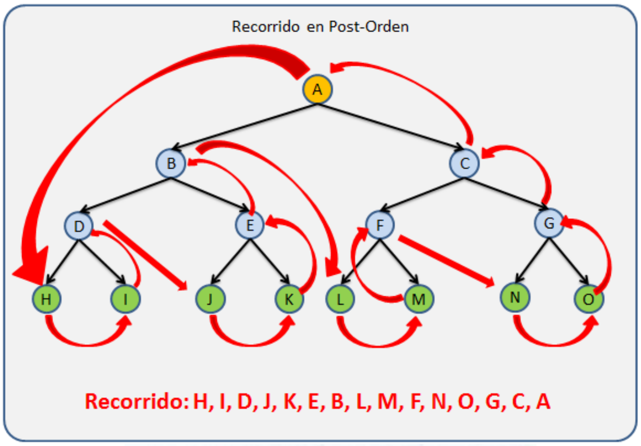


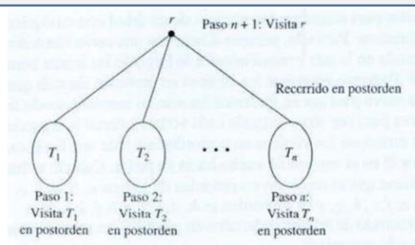


RECORRIDOS EN ARBOLES

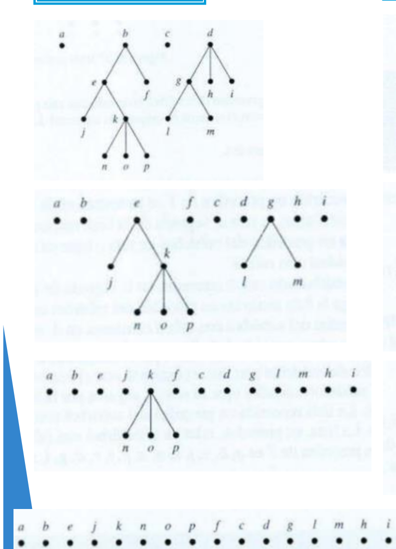
Definición 12

Sea T un árbol ordenado con raíz r. Si T consta sólo de r, entonces r es el recorrido en postorden de T. En otro caso, supongamos que T_1, T_2, …, T_n son subárboles de r listado de izquierda a derecha en T. El recorrido en postorden comienza recorriendo T_1, en postorden, luego recorre T_2 en postorden y así sucesivamente hasta recorrer T_n y finaliza visitando r.

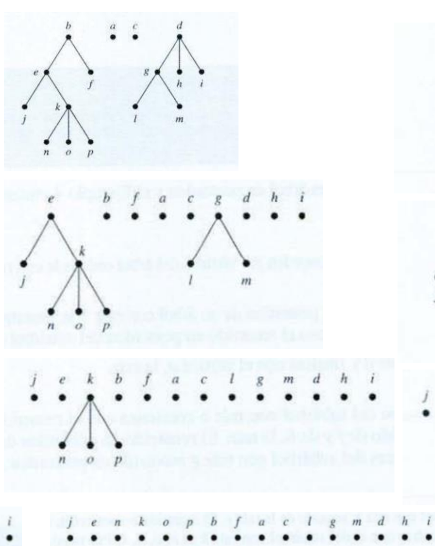




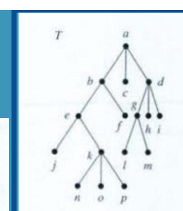
pre-orden



in-orden



Post-orden



PRÁCTICA

Página 645 del PDF

- Ejercicio 8
  - Recorrido en Preorden
  - Recorrido Inorden
  - Recorrido en Postorden

ARBOLES GENERADODRES

Definición 13

Sea G un **grafo simple**. Un árbol generador (o recubridor)de G es un subgrafo de G que es un árbol y contiene todos los vértices de G.

Nótese que un grafo simple que admite un árbol generador necesariamente es conexo. También, todo grafo simple conexo tiene un árbol generado

Teorema 9

Un grafo simple es conexo si, y sólo si, admite un árbol generador

La demostración del Teorema 9 da un algoritmo para construir árboles generadores mediante la supresión de aristas. Este algoritmo no es eficiente ya que requiere identificar los ciclos.

En lugar de construir árboles generadores eliminando aristas, se los puede construir añadiendo aristas. A continuación veremos dos algoritmos basados en esta estrategia:

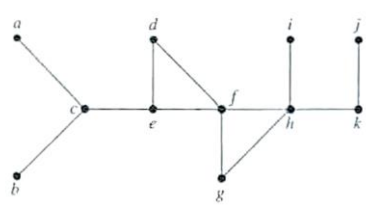
BÚSQUEDA EN PROFUNDIDAD

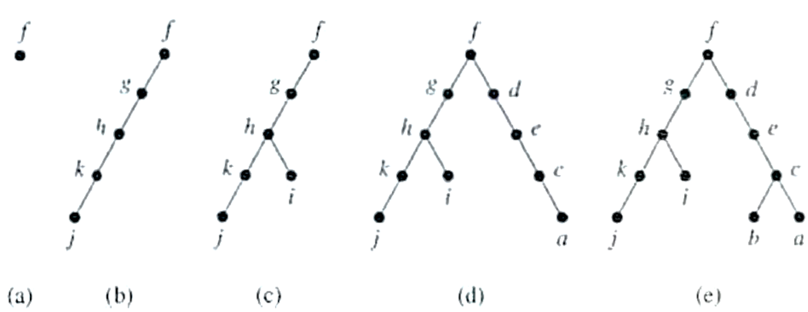
Podemos construir un árbol generador para un grafo simple conexo:

Construiremos un árbol con raíz, y el árbol generador será el grafo no dirigido subyacente.

- Elegimos un vértice arbitrario como raíz del árbol
- Formamos un camino que comienza en este vértice añadiendo sucesivamente vértices y aristas, siendo cada arista incidente con el último vértice del camino y un vértice que no está en el camino.
- Añadimos a este camino tantos vértices y aristas como sea posible.
  - Si el camino pasa por todos los vértices, el árbol generador es dicho camino
  - Si no, se debe añadir más vértices y aristas.
- Retrocedemos al penúltimo vértice del camino y, si es posible, formamos un nuevo camino comenzamos en este vértice y que pase por los nodos **no visitados**. Si esto no se puede hacer, retrocedemos al vértice anterior en el recorrido hacia la raíz y lo intentamos de nuevo.
- Repetimos el proceso, hasta que no se pueda añadir más aristas

Utiliza la búsqueda en profundidad para obtener un árbol recubridor del grafo.



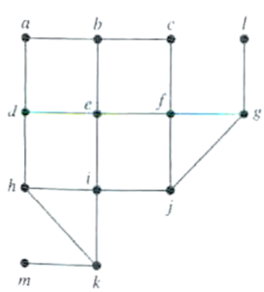


BÚSQUEDA EN ANCHURA

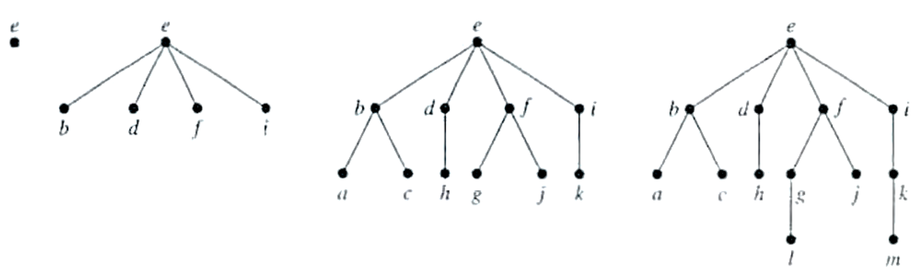
Podemos construir un árbol generador para un grafo simple conexo:

Construiremos un árbol con raíz, y el grafo no dirigido subyacente es el árbol generador.

- Elegimos un vértice arbitrario como raíz del árbol
- Añadimos todas las aristas incidentes en ese vértices. Los nuevos vértices añadidos en esa fase forman los vértices del nivel 1 del árbol generador. Los ordenamos con un orden cualquiera.
- Para cada vértice del nivel 1visitados en orden, añadimos todos los vértices incidentes con él, siempre que no formen un ciclo
- Ordenamos los hijos de los vértices del nivel 1 con un orden cualquiera, generando así los vértices de nivel 2 del árbol.
- Repetimos este procedimiento hasta que se hayan añadido todos los vértices del árbol.



Obtén un árbol generador para el grafo, utilizando la búsqueda en anchura.



PRÁCTICA

Página 657 del PDF

- Crea un árbol generador eliminado ciclos con el ejercicio 3
- Aplicando la búsqueda por profundidad, crea un árbol generador - Ejercicio 13 – vértice a
- Aplicando la búsqueda por anchura, crea un árbol generador - Ejercicio 13 – vértice d

ARBOL GENERADOR MINIMO

Definición 14

Un árbol generador mínimo de un **grafo ponderado** es un árbol generador tal que la suma de los pesos de sus aristas es la mínima posible de entre todos los árboles generadores.

Presentaremos dos algoritmos para construir árboles generadores de pesos mínimos:

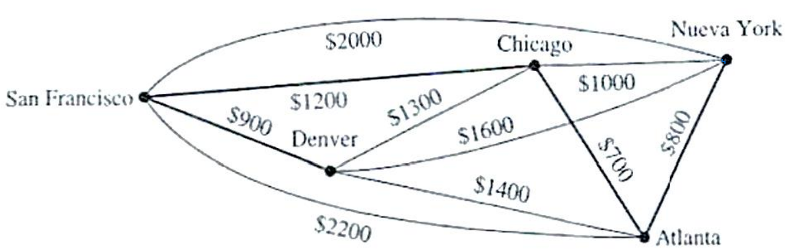
- Algoritmo de Prim
- Algoritmo de Kruskal

ALGORITMOS - ARBOL GENERADOR MINIMO

Algoritmo de Prim:

- Se elige cualquier arista de peso mínimo y se la selecciona para el árbol
- Se añaden sucesivamente aristas al árbol de entre las de peso mínimo que sean **incidentes con un vértice** que ya está en el árbol y **que no formen ciclos** con otras aristas del árbol
- Finaliza cuando se hayan añadido n-1 aristas

Grafo ponderado que muestra el coste mensual del alquiler de las líneas de una red de computadoras



Elección	Arista	Coste
1	{Chicago, Atlanta}	$ 700
2	{Atlanta, Nueva York}	$ 800
3	{Chicago, San Francisco}	$ 1200
4	{San Francisco, Denver}	$ 900
	Total:	$ 3600

Un árbol generador de peso mínimo para el grafo ponderado usando el Algoritmo de Prim

ALGORITMOS - ARBOL GENERADOR MINIMO

Algoritmo de Kruskal:

- Se elige cualquier arista de peso mínimo y se la selecciona para el árbol
- Se añaden sucesivamente aristas al árbol de entre las de peso mínimo siempre que estas **no formen un ciclo** con las otras ya incorporadas. (no es necesario que sean incidentes con vértices del árbol)
- Finaliza cuando se hayan añadido n-1 aristas

PRÁCTICA

Página 664 del PDF

- Ejercicio 1
- Utilizar Prim para el ejercicio 3
- Utilizar Kruskal para el ejercicio 3