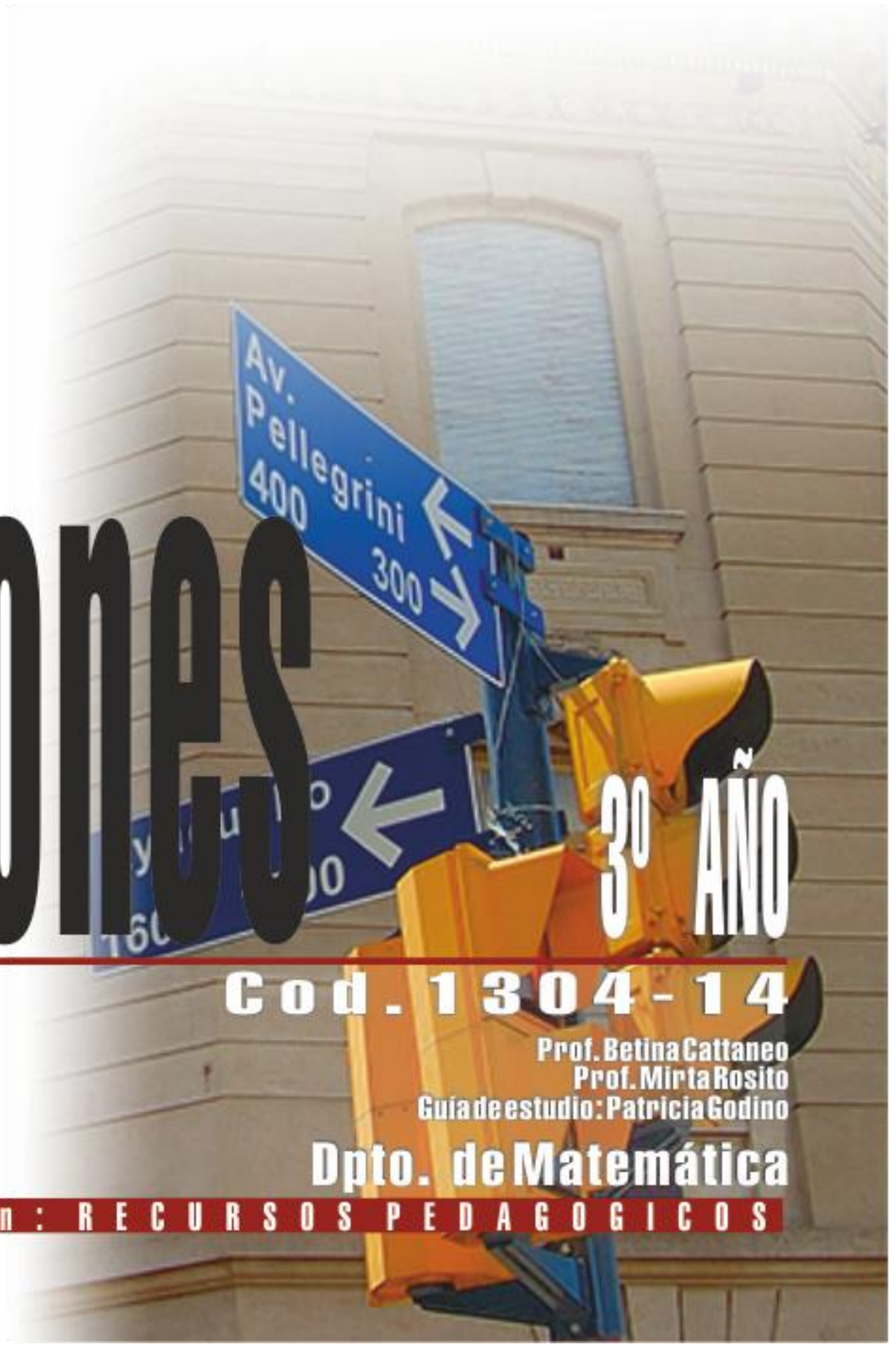
Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de R



Funciones

3º AÑO

Cod. 1304-14

Prof. Betina Cattaneo
Prof. Mirta Rosito
Guía de estudio: Patricia Godino

Matemática

Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

2. Introducción

¿Qué es una función?

El término función fue utilizado por primera vez en 1637 por el matemático francés René Descartes para designar una potencia x^n de la variable x. En 1694 el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz empleó el término para referirse a un aspecto de una curva (su pendiente - inclinación). Recientemente, su uso más generalizado ha sido el definido en 1829 por el matemático alemán, J.P.G. Lejeune - Dirichlet (1805 - 1859), quien utilizó el concepto como una correspondencia entre dos variables.

Las funciones son de mucho valor y utilidad para resolver problemas de la vida diaria. Generalmente en todos los fenómenos físicos observamos que una cantidad depende de otra. En problemas de finanzas, de economía, de estadística, de ingeniería, de medicina, de química y física, de astronomía, de geología, y de cualquier área social donde haya que relacionar variables se hacen presente las funciones.
En el presente curso profundizaremos lo desarrollado en primer año.

Son ejemplos de algunos de los problemas mencionados:

- El área $A = \pi r^2$ de un círculo depende del radio r del mismo.

- El volumen **v** de cierta cantidad de gas depende de la presión **p**, si se supone fija la temperatura (Ley de Boyle – Mariotte).

- Si un cultivo de bacterias se inicia con 5.000 de ellas y la población se duplica cada hora, el número **n** de bacterias depende del tiempo **t**, y la expresión que relaciona a **n** con **t** es **n** = $5000.2^{\mathbf{t}}$. Por cada valor de **t** hay uno de **n**.

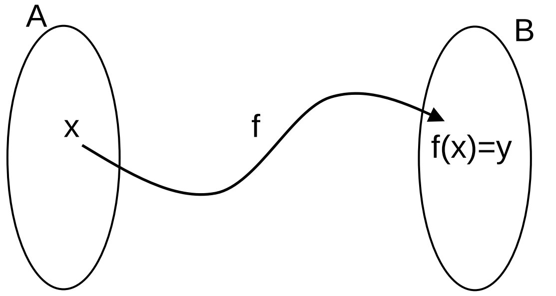
- El precio de cierto artículo depende de la demanda del mismo.

En los ejemplos anteriores, se describe la forma en la que se relacionan un número con otro o una variable con otra. En dichos casos, diremos que la segunda variable es función de la primera.

3. Función real de variable real

Definición:

Dados dos conjuntos A; B y una ley o regla, se llama función a la terna (A; B; ley o regla), tal que la ley asigne a **cada** elemento de A un **único** elemento de B, llamado imagen.



Nota: En este curso sólo estudiaremos las funciones en las cuales los conjuntos A y B son subconjuntos del conjunto de los números reales

Simbología y definiciones

- A un elemento genérico del conjunto A, se lo indica con la letra x (en general) y es la variable independiente.
- A un elemento genérico del conjunto B, se lo indica con la letra y (en general) y es la variable dependiente.
- A cada resultado obtenido de aplicar a x la ley f, es decir f(x) = y, se lo llama imagen.
- A la regla o ley, se la designa con letras, por ejemplo f; g; h; etc. y viene dada por una expresión matemática (ejemplos: f(x) = x + 28; g(x) = x^2; $h(x) = 2$; etc.)
- Con $f: A \to B / f(x) = y$ o $A \xrightarrow{f} B / f(x) = y$ expresamos la función f y se lee la función f que aplica A en B tal que f(x) = y.
- Al conjunto A se lo llama conjunto de partida o dominio y se lo simboliza Dom(nombre de la función).
- Al conjunto B se lo llama conjunto de llegada o codominio.
- Al conjunto de todas las imágenes, se lo denomina conjunto imagen, rango o recorrido y se lo simboliza Im(nombre de la función).
- Por practicidad se suele
  - identificar a una función sólo con su ley en cuyo caso se sobreentiende que el conjunto de partida o dominio es el conjunto para el cual esa ley tiene sentido .
  - considerar el conjunto de llegada coincidente con el de las imágenes o rango .

Problema

1. Si f: A$\to$B, justifica:
   a) ¿Por qué no existen elementos de A que no posean un elemento correspondiente en B?
   b) ¿Puede corresponderle a elementos distintos en A el mismo elemento en B?

De la definición de función surge que dada la ley de la misma, su **dominio** es el conjunto de valores de la variable independiente para los cuales la ley tiene sentido o significado.

Es decir, $Dom(f) = \{x /\ f(x)\ \text{exista}\}$

Ejemplos:

1) Dada f(x) = $\sqrt{x-2}$, su dominio serán los valores de x para los cuales $\sqrt{x-2}$ existe.
   Es decir:
   $Dom(f) = \{x / f(x)\ \text{exista}\} = \{x / \sqrt{x-2}\ \text{exista}\} = \{x /\ x - 2 \geq 0\} \Rightarrow Dom(f) = [2; +\infty)$
   Entonces la función dada en forma completa nos queda:
   $f: [2; +\infty) \to R / f(x) = \sqrt{x-2}$

Observación:
Es preciso destacar que en el conjunto $[4; +\infty)$, por ejemplo, la ley también tiene sentido. Sin embargo convenimos en usar la expresión Dom() para referirnos al máximo conjunto de valores que puede asumir la variable para que la ley tenga sentido, lo que no invalida el poder dar una función en un subconjunto (con una restricción) de su dominio.

2) Dada $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x}$,

- el dominio estará determinado por los valores de x tales que $\dfrac{1}{x^2-2x}$ exista. Esto ocurre si $x^2-2x\neq 0$. Por lo tanto $Dom(f)=R-\{0;2\}$ pues $x^2-2x=x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$
- $f(3)=\dfrac{1}{3^2-2.3}=\dfrac{1}{3}$
- $f(-1)=\dfrac{1}{(-1)^2-2.(-1)}=\dfrac{1}{4}$
- $f(a)=\dfrac{1}{a^2-2a}$, siempre que $a\neq 0 \wedge a\neq 2$
- $f(a+h)=\dfrac{1}{(a+h)^2-2(a+h)}$, siempre que $a+h\neq 0 \wedge a+h\neq 2$

Problemas

2. Determina si las siguientes proposiciones son V (verdaderas) o F(falsas). Justifica
   a) Dada $f(x)=x^4-x^2$ resulta $f\left(-\sqrt{2}\right)=6$
   b) $g(x)=x^3-1 \Rightarrow \{x/g(x)=-9\}=\{-2\}$
   c) $t(x)=x^3-x \Rightarrow t(-2)<0$
   d) g: $[-1;2]\rightarrow R/\ g(x)=x+1$ entonces Im(g) = $(0;3)$
   e) Dadas $f(x)=x^3$ y $g(x)=\dfrac{1}{x}$ resulta $f(-1)+g(2)=-\dfrac{1}{2}$
   f) Si $f(x)=2x^2+3x-1$ entonces $f(-a)=-2a^2-3a-1$
   g) Si $h(x)=\sqrt[5]{x+2}$ resulta $\{x_0/h(x_0)=1\}=\{-1\}$
   h) Si $f(x)=x^2$ entonces $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=2x+h$

3. Determina el dominio de las siguientes funciones
   a) $f_1(x)=\sqrt{3x-2}$
   b) $f_2(x)=\sqrt[4]{\dfrac{|x|+2}{3x}}$
   c) $f_3(t)=\sqrt[3]{t-1}$
   d) $f_4(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t-10}}$
   e) $f_5(x)=\sqrt{x^2+1}$
   f. $f_6(x)=\dfrac{x+1}{(x-3).(x-2)}$
   g. $f_7(x)=\dfrac{3}{x^3-4x}$
   h. $f_8(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$
   i. $f_9(x)=\dfrac{\sqrt{2+x}}{3-x}$

Definición:

Llamamos **ceros** o **raíces** de una función a todos los valores de la variable independiente pertenecientes al dominio tales que su imagen sea 0

En símbolos:

$\mathbf{x=a}$ **es cero o raíz de la función** $f(x) \Leftrightarrow \mathbf{f(a)=0}$ con $a \in Dom(f)$

Problemas

4. Determina los ceros o raíces, si poseen, de las funciones del problema 3.

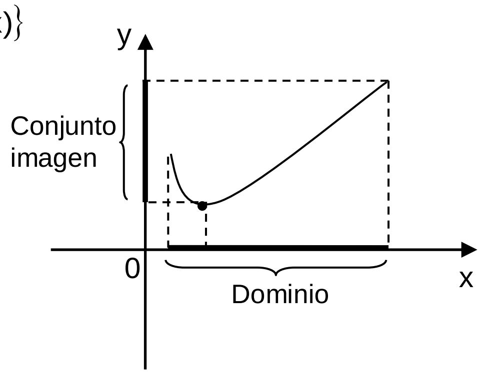
4. Gráfica de una función

Si f es una función con dominio A, entonces la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos del plano tales que la ordenada sea la imagen de la abscisa y ésta pertenezca al dominio de f.

En símbolos:

$$Graf(f) = \{(x,y) / \ x \in A \wedge y = f(x)\}$$

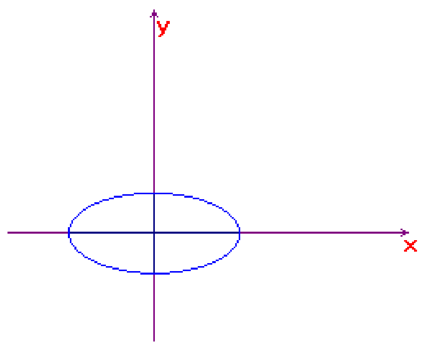
Es decir, la gráfica de una función f está formada por todos los puntos (x,y) del plano, tales que $y = f(x)$ y x pertenece al dominio de f. Dicha gráfica proporciona una "idea de su comportamiento". También nos permite representar el dominio y el conjunto de imágenes sobre los ejes x e y respectivamente como muestra la figura.

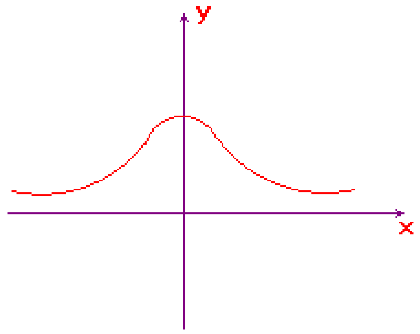


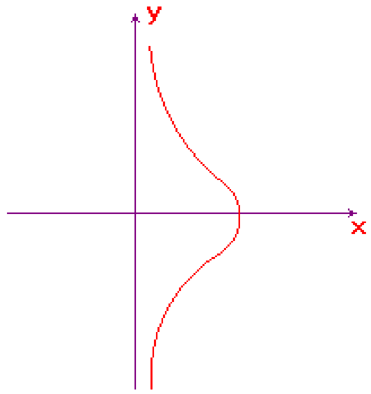
Podemos concluir que la gráfica de una función f es una curva en el plano xy. Pero ¿toda curva en el plano xy será la gráfica de una función?. Para responder a esta pregunta, analiza la siguiente propuesta.

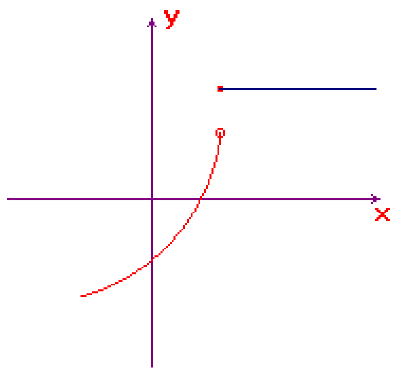
Propuesta

Observa las siguientes curvas y responde:
¿Pueden todas estas curvas ser la representación gráfica de alguna función? Justifica



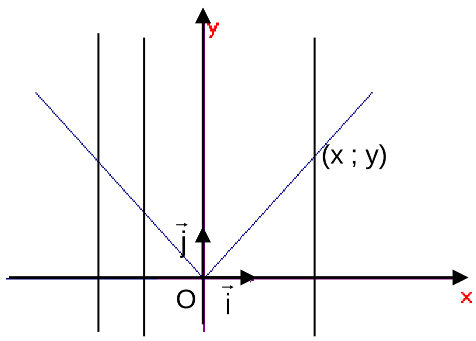






De lo observado en estos gráficos, en algunos existen puntos que poseen la misma abscisa y distinta ordenada. Esto significa que para un mismo valor de x corresponden distintos valores de y, lo cual contradice la definición de función. Por lo tanto las curvas que posean esta característica no podrán ser la gráfica de una función.

En conclusión:
Una curva en el plano xy representa la gráfica de una función f sí y sólo si al trazar rectas verticales ninguna de ellas interseca a la curva en más de un punto.



Observación:
Algunas gráficas de funciones se obtiene uniendo puntos del plano tratando de “intuir” la forma que puede llegar a tener. La desventaja práctica de este método es la necesidad de tener que determinar “muchos” puntos para obtener sólo una idea aproximada de la forma de la misma. Más adelante veremos algunas herramientas que facilitarán la confección de las gráficas de funciones.

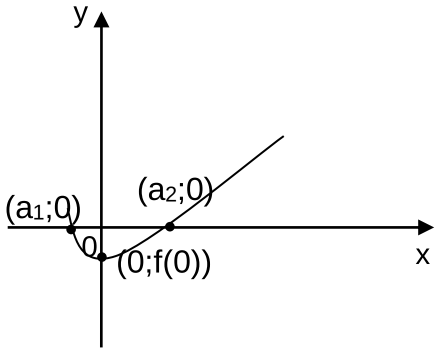
Problemas

5. ¿Puede la gráfica de una función ser simétrica respecto del eje de las abscisas? ¿Por qué?

6. Confecciona el gráfico de una función que tenga como dominio e imagen los que se indican en cada caso:
   a) $Dom(f) = [-1; 2];\ Im(f) = [-2; 5]$
   b) $Dom(f) = [0; +\infty);\ Im(f) = R$

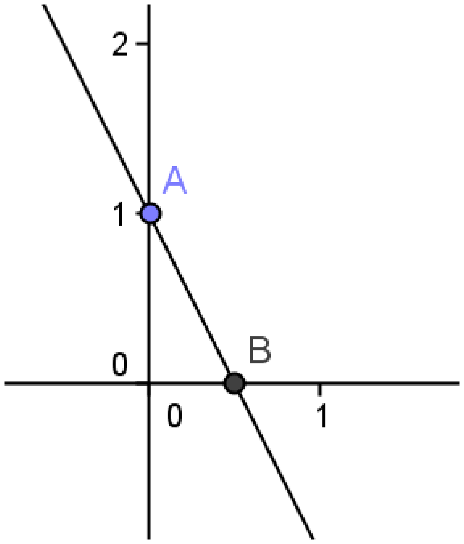
5. **Intersección con los ejes coordenados**

El punto (0;f(0)) , si existe, es la intersección de la gráfica de la función f con el eje de las ordenadas y el o los puntos (a;0) con a perteneciente al dominio de la función , cuando existen , es o son los puntos de intersección de la misma con el eje de las abscisas. Recordemos que los valores de a son los ceros de la función



Ejemplo:

Dada la función f(x)=-2x+1 .



Siendo f(0)=(-2).0+1=1 resulta A(0;1) el punto de intersección de la gráfica de la función con el eje de las ordenadas.

Y $B\left(\frac{1}{2};0\right)$ el punto de intersección de f con el eje de las abscisas puesto que :

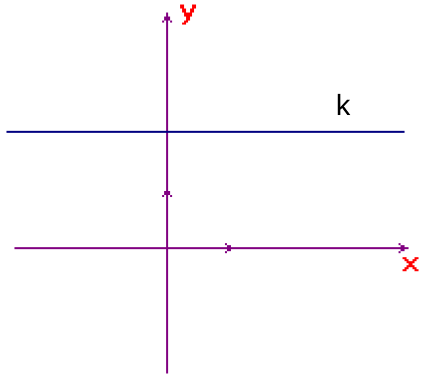
$$-2x+1=0 \Rightarrow -2x=-1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

6. **Algunas funciones particulares**

Algunas consideraciones nos permiten establecer la forma que tiene la gráfica de algunas funciones.

6.1. FUNCION CONSTANTE

A la función $f: R \to R \,/\, f(x) = k,\ k \in R$, la llamamos función constante.
Todos los puntos de la gráfica de esta función corresponden a pares del tipo $(x\,;k), \forall\, x \in R$. Es decir, dichos puntos se encuentran a una "distancia constante $|k|$ del eje x. Al unir todos estos puntos obtenemos una recta horizontal, como muestra el siguiente gráfico (considerando $k > 0$).



$Dom(f) = R$
$Im(f) = \{k\}$

Observación:

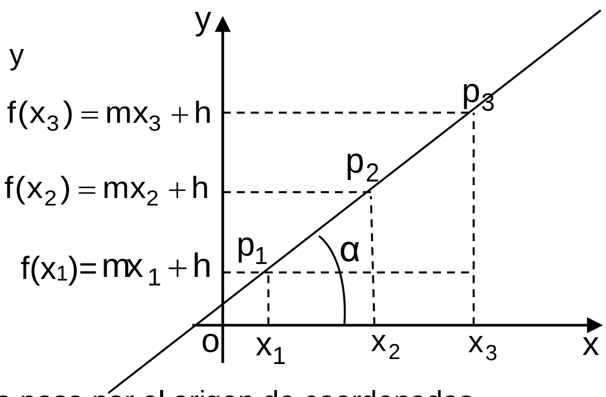
La gráfica obtenida resulta "simétrica" respecto del eje y, ya que $\forall\, x \in R$ resultan los pares (x ; k) y los (-x ; k) pertenecientes a la gráfica de dicha función.

6.2. FUNCION LINEAL

A la función $f: R \to R \,/\, f(x) = mx + h, \forall m \in R - \{0\}$ y $\forall\, h \in R$ la llamamos función lineal.

Denominamos al número m **pendiente** y al h **ordenada al origen**.

Todos los puntos de la gráfica de esta función están alineados y corresponden a pares de la forma $(x; mx + h)$



<u>Observación</u>:
En el caso particular que $h = 0$, la recta pasa por el origen de coordenadas.

<u>Interpretación geométrica del número h (ordenada al origen)</u>

Si x = 0 resulta que f(0) = h, es decir, el punto (0; h) pertenece a la gráfica de f(x) y es el punto donde la gráfica de la función interseca al eje de las ordenadas. Por tal razón a h se denomina ordenada al origen.

Interpretación geométrica del número m (pendiente)

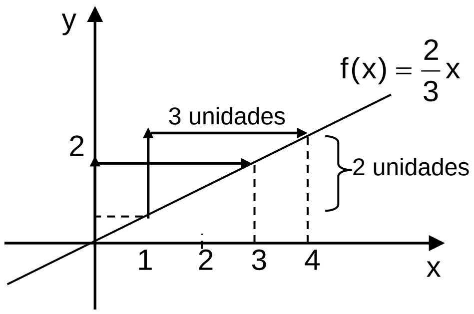
Observando la gráfica, teniendo en cuenta lo estudiado en trigonometría para ángulos agudos (la demostración es válida para ángulos obtusos y se desarrollará en estudios posteriores), resulta:

$$m = tg\alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f(x)\,(\text{incremento de } f(x))}{\Delta x\,(\text{incremento de } x)}$$

Gráficamente, podemos afirmar que la pendiente de la recta representa al número de unidades de un cambio vertical por cada número de unidades de un cambio horizontal.

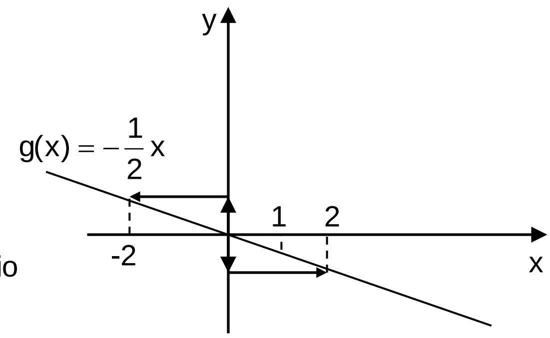
Ejemplos:

a) Dada $f(x) = \frac{2}{3}x$, su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas. Su pendiente es $\frac{2}{3}$, es decir, cada 3 unidades de variación de la variable x hay 2 unidades de cambio en la imagen de la función.

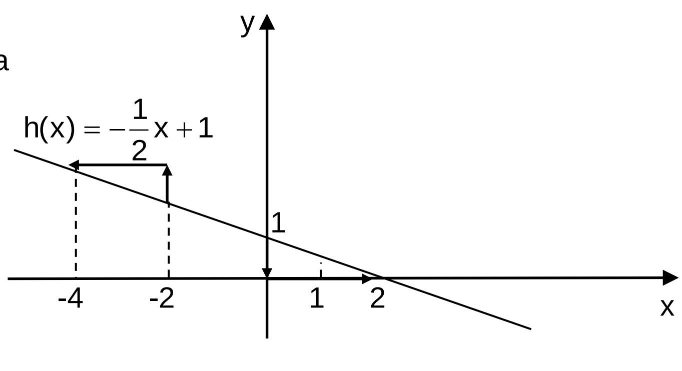


La **gráfica** de cualquier función f(x) = mx es **simétrica** respecto **al origen**.

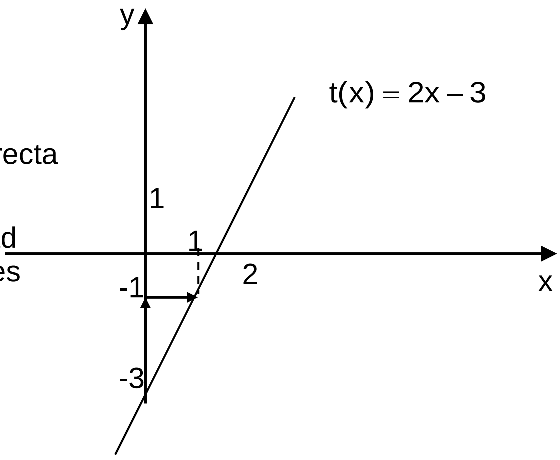
b) Dada $g(x) = -\frac{1}{2}x$, su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas.
Su pendiente es $-\frac{1}{2}$, es decir, cada 2 unidades de variación de la variable x hay 1 unidad de cambio en la imagen de la función.



c) Dada $h(x) = -\frac{1}{2}x + 1$, su gráfica es una recta que interseca al eje y en el punto $(0;1)$.
Su pendiente es $-\frac{1}{2}$, es decir, cada 2 unidades de variación de la variable x hay 1 unidad de cambio en la imagen de la función.



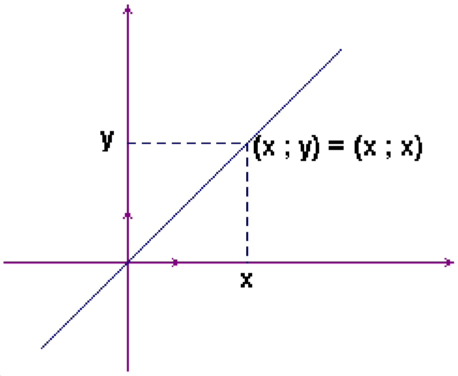
d) Dada $t(x) = 2x - 3$, su gráfica es una recta que interseca al eje y en el punto $(0; -3)$.
Su pendiente es 2, es decir, cada 1 unidad de variación de la variable x hay 2 unidades de cambio en la imagen de la función.



La función Identidad.

Entre las funciones lineales del tipo f(x)=mx resulta particular, por sus aplicaciones, la de pendiente igual a 1. Es decir, f(x) = x $\forall x \in \Re$.

Tal función recibe el nombre de “**función identidad”.**



La grafica de la función identidad resulta una recta a 45º que pasa por el origen de coordenadas

Problemas

7. El consumo de nafta según los kilómetros recorridos por un vehículo están dados en la siguiente tabla:

Distancia (km)	0	50	100	150	200	250
Consumo (litros)	0	3.5	7	10.5	14	17.5

   a) Si el consumo de nafta C(d) depende linealmente de la distancia recorrida, escribe la expresión de C(d).
   b) Calcula C(200) y C(350)

8. Una empresa abona a sus vendedores $40 diarios por alojamiento y alimentación más $10 por cada 10 kilómetros de viaje realizado con el vehículo del vendedor. Escribe la función lineal que represente el gasto g(x) diario en función de los kilómetros recorridos. Grafica g(x) y calcula g(300) y g(600)

9. Determina la ley y realiza la gráfica de la función que contiene a la mediana am del triángulo abc con a(-1; -2), b(-5; 6) y c(1; -1).

10. Prueba si p(-2; 1) pertenece a la gráfica de la función lineal que pasa por los puntos (-1; 0) y (0; 4).

11. Una persona adquiere una P.C. a $2500. Al cabo de 5 años quedará obsoleta y sin valor alguno. Escribe la función lineal que da el costo de la P.C. durante esos 5 años. Confecciona su gráfica.

7. Funciones patrones o básicas

Por ahora para realizar la gráfica de funciones utilizaremos una tabla de valores, la cual consiste en la determinación y organización de algunos puntos de la gráfica que deseamos realizar. La cantidad de puntos a determinar dependerá de la exactitud que deseemos para la gráfica.

Existen algunas funciones, que llamaremos patrones o básicas cuyas gráficas servirán de base para realizar la gráfica de otras un poco más complejas. Estas son:

Ley	Nombre
$f(x) = x^2$	x al cuadrado
$f(x) = x^3$	x al cubo
$f(x) = \sqrt{x}$	Raíz cuadrada de x
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	Raíz cúbica de x
$f(x) = \lvert x \rvert$	Valor absoluto de x
$f(x) = [x]$	Parte entera de x (mayor entero que no supera al número)
$f(x) = \frac{1}{x}$	Recíproco de x

Problemas

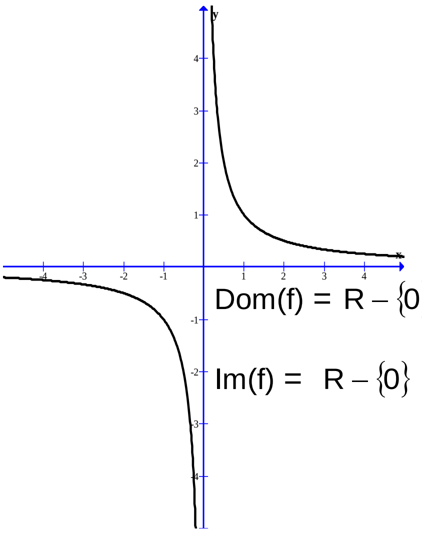
12. Con la confección de una tabla de valores y utilizando hojas milimetradas , realiza la gráfica de las funciones patrones, indicando dominio y conjunto imagen para cada una.

A modo de ejemplo realizaremos la gráfica de $y = \frac{1}{x}$

x	1	2	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3}$	-1	-2	$-\frac{1}{2}$	-3	$-\frac{1}{3}$
y	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{3}$	3	-1	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{3}$	-3

Para obtener la gráfica de esta función, marcamos los puntos obtenidos en la tabla y los unimos con “una curva suave”. Podemos tener en cuenta para la confección algunas propiedades de esta ley, alguna de ellas pueden ser:

- La variable x nunca es 0 (el recíproco de 0 no existe), es decir, la gráfica nunca corta al eje de las ordenadas
- La variable y nunca es 0 (nunca da 0 el recíproco de un número), es decir, la gráfica nunca corta al eje de las abscisa.



$Dom(f) = R - \{0\}$

$Im(f) = R - \{0\}$

- A medida que x se hace cada vez más grande, el recíproco se hace cada vez más chico, es decir, si $x \to \infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0$.

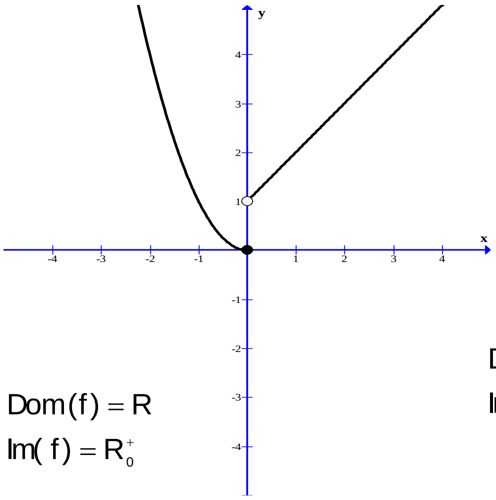
13. Confecciona patrones de las gráficas de las funciones del problema 12 en material de radiografía.

8. Funciones por tramos o definidas por secciones

Diremos que una función está definida por secciones o por tramos si está expresada por diferentes fórmulas en distintos subconjuntos de su dominio. Para realizar su gráfica, tendremos en cuenta en qué subconjunto del dominio está definido cada tramo.

Ejemplos:

1. Las funciones $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x > 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < -1 \\ 3x+1 & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ -3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ son funciones definidas por tramos y sus gráficas son las siguientes



$Dom(f) = R$

$Im(f) = R_0^+$

f(x)

$Dom(g) = R$

$Im(g) = [-2; 4] \cup \{-3\}$

g(x)

2. En la función $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 4 & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$, $\quad f(2) = 2^2 + 1 = 5$; $\quad f(-5) = 4$ y $\quad f(0) = 4$

Problemas

14. Realiza la gráfica de las siguientes funciones, indicando dominio y conjunto imagen para cada una.

a) $u(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \ \ge \ 1 \\ 3 & \text{si } x \ < \ 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \le 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ c) $g(x) = \begin{cases} [x] & \text{si} \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ x^3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

$$d)\ h(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<-1 \\ |x| & si \quad -1\le x\le 1 \\ 2 & si \quad x>1 \end{cases} \qquad e)\ t(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & si \quad x<0 \\ x+1 & si \quad 0\le x\le 2 \\ -2 & si \quad x>2 \end{cases}$$

15. Utilizando la definición de valor absoluto, realiza las gráficas de las siguientes funciones

a) $f(x)=|x+1|$ c) $h(x)=|-2x+4|$

b) $g(x)=\frac{|x|}{x}$ d) $f(x)=\left|-\frac{1}{2}x\right|$

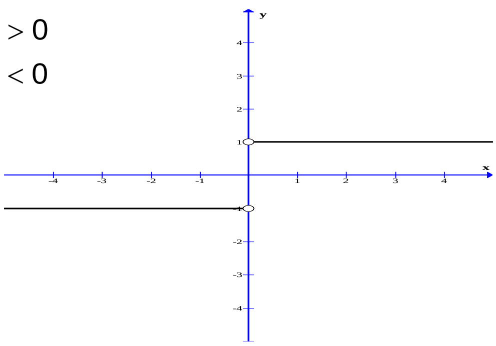
Recuerda: $|x|=\begin{cases} x & si \quad x\ge 0 \\ -x & si \quad x<0 \end{cases}$

A modo de ejemplo realizaremos la gráfica de los apartados b y c

Teniendo en cuenta la definición de valor absoluto, podemos expresar a:

$$b)\ g(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases} \frac{x}{x} & si \quad x>0 \\ \frac{-x}{x} & si \quad x<0 \end{cases}=\begin{cases} 1 & si \quad x>0 \\ -1 & si \quad x<0 \end{cases}$$

y su gráfica resulta

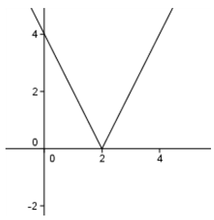


c)

$$h(x)=|-2x+4|=\begin{cases} -2x+4 & si \quad x\le 2 \\ -(-2x+4) & si \quad x>2 \end{cases}=$$

$$\begin{cases} -2x+4 & si \quad x\le 2 \\ 2x-4 & si \quad x>2 \end{cases} \quad \text{y su gráfica resulta}$$

y su gráfica resulta



9. Clasificación de funciones

9.1. Función inyectiva

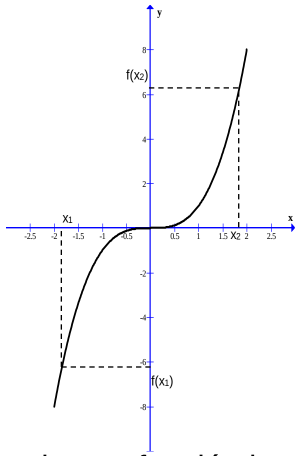
Dada la función $f:A\to B$, diremos que es inyectiva si a valores distintos de la variable independiente corresponden valores distintos de la variable dependiente o imagen.

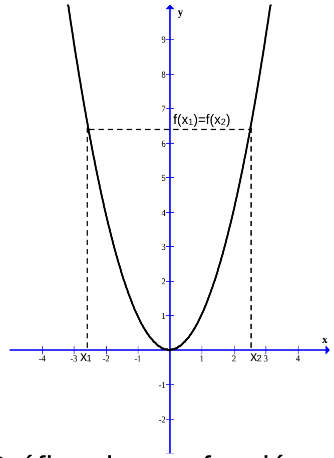
En símbolos:

$$\boxed{f:A\to B \text{ es inyectiva si } \forall x_1\neq x_2;\ x_1\in A.;\ x_2\in A.\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)}$$

Teniendo en cuenta la definición podemos deducir que en la gráfica de una función inyectiva resulta que no existirán dos puntos de la misma con la misma ordenada. Entonces, podemos identificar gráficamente si una función es inyectiva si al trazar rectas paralelas al eje de las abscisas, éstas intersecan una vez a la gráfica de la misma.

Ejemplos:





Gráfica de una función inyectiva   Gráfica de una función no inyectiva

9.2. Función suryectiva o sobre

Dada la función $f: A \to B$, diremos que es suryectiva o sobre si todo elemento del segundo conjunto es imagen de algún elemento del primer conjunto

En símbolos:

$$\boxed{f: A \to B \text{ es suryectiva si } \forall y \in B\ \exists x \in A /\ y = f(x)}$$

Analizando la definición podemos concluir que:

$$\boxed{f: A \to B \text{ es suryectiva si } B = \operatorname{Im}(f)}$$

9.3. Función biyectiva

$$\boxed{\text{Una función } f: A \to B \text{ es biyectiva} \Leftrightarrow f \text{ es inyectiva y suryectiva simultáneamente}}$$

Ejemplos:

1. La función $f: R_0^+ \to R$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$ no es biyectiva pues

$$\left.\begin{array}{r} B = R \\ \operatorname{Im}(f) = R_0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow B \neq \operatorname{Im}(f) \quad \Rightarrow f \text{ no es suryectiva}$$

2. La función $f: R_0^+ \to R_0^+$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$ es suryectiva pues $R_0^+ = \operatorname{Im}(f)$;Además es inyectiva pues al trazar rectas paralelas al eje de las abscisas, éstas intersecan una vez a la gráfica de la misma . Entonces es biyectiva.
3. La función $f: R \to [1; +\infty)$ tal que $f(x) = x^2 + 1$ no es biyectiva pues

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 2 \Rightarrow f(x_1) = f(2) = 5 \\ x_2 = -2 \Rightarrow f(x_2) = f(-2) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) = 5 \Rightarrow \text{ f no es inyectiva } \Rightarrow \text{ f no es biyectiva}$$

4. La función $f: R_0^+ \to [1;+\infty)$ tal que $f(x) = x^2 + 1$ es biyectiva pues
   - es inyectiva ya que al trazar rectas paralelas al eje de las abscisas, éstas intersecan una vez a la gráfica de la misma y
   - es suryectiva dado que B= $[1;+\infty) = \text{Im}(f)$

Problemas

16. Analiza la inyectividad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 1 - 2x^2$ b) $f(x) = -\sqrt[3]{x^2}$

c) $f(x) = 2x + 6$ d) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

17. Coloca verdadero o falso. Justifica la respuesta

a) La función $f: R \to [-1;+\infty)$ tal que $f(x) = 2x^2 - 1$ no es biyectiva

b) La función $f: R \to R$ tal que $f(x) = -2.|x|$ es inyectiva

c) La función $f: R \to R_0^-$ tal que $f(x) = -2|x+1|$ es suryectiva

9.4. Función par

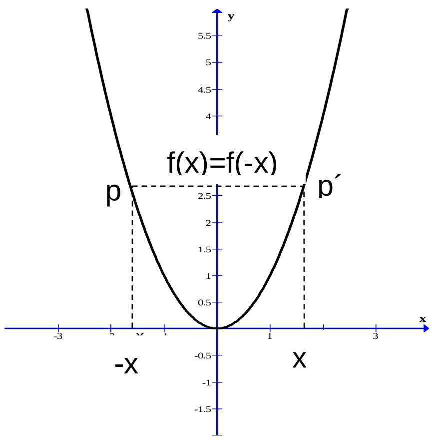
Dada la función $f: A \to B$, diremos que es par si su dominio es simétrico respecto al origen y si se cumple que para valores opuestos de la variable independiente corresponden valores iguales de la variable dependiente o imagen.

En símbolos:

$f: A \to B$ es par $\Leftrightarrow$ se cumplen simultáneamente: a) A es simétrico respecto al origen b) $f(x) = f(-x) \forall x \in A$

De acuerdo a la definición, si $f: A \to B$ es par, resulta que si el punto $p(x;f(x))$ pertenece a la gráfica de f, entonces el punto $p'(-x;f(-x)) = (-x;f(x))$ también pertenece a la misma. Como p' y p son simétricos respecto del eje de las ordenadas, entonces podemos concluir que:

La gráfica de una función par es simétrica respecto del eje de las ordenadas.



Ejemplos:

1. La función $f: R_0^+ \to R$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$ no es par pues su dominio no es simétrico respecto al origen

2. La función $f: R - \{-2\} \to R$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ no es par pues su dominio no es simétrico respecto al origen

3. La función $f: R \to R$ tal que $f(x) = x^3 + 2$ no es par pues
   - El dominio es simétrico respecto al origen
   - $\left.\begin{array}{l} f(-1) = (-1)^3 + 2 = -1 + 2 = 1 \\ f(1) \;=\; 3 \end{array}\right\} f(-1) \neq f(1)$

4. La función $f: R \to R$ tal que $f(x) = |x| - 4$ es par pues
   - El dominio es simétrico respecto al origen
   - $f(-x) = |-x| - 4 = |x| - 4 = f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow$ f es par

9.5. Función impar

Dada la función $f: A \to B$, diremos que es impar si su dominio es simétrico respecto al origen y si se cumple que para valores opuestos de la variable independiente corresponden valores opuestos de la variable dependiente o imagen.

En símbolos:

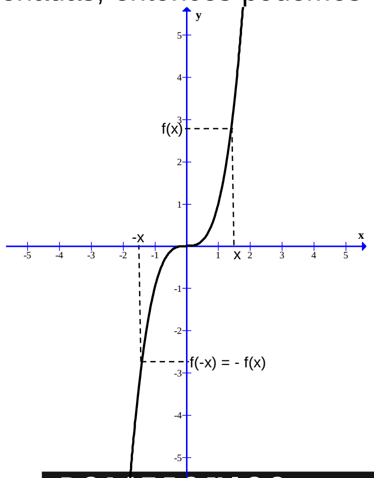
$f: A \to B$ es impar $\Leftrightarrow$ se cumplen simultáneamente:

a) A es simétrico respecto al origen

b) $f(x) = -f(-x) \; \forall \, x \in A$

De acuerdo a la definición, si $f: A \to B$ es impar, resulta que si el punto $p(x; f(x))$ pertenece a la gráfica de f, entonces el punto $p'(-x; f(-x)) = (-x; -f(x))$ también pertenece a la misma. Como p' y p son simétricos respecto del origen de coordenadas, entonces podemos concluir que:

La gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen de coordenadas.



Ejemplos:

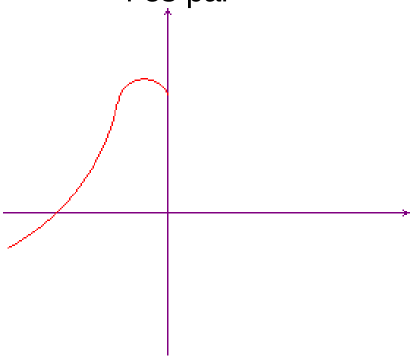
La función $f: R_0^+ \rightarrow R$ tal que $f(x)=\sqrt{x}$ no es impar pues su dominio no es simétrico respecto al origen

1. La función $f: R-\{3\} \rightarrow R$ tal que $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ no es impar pues su dominio no es simétrico respecto al origen
2. La función $f: R-\{0\} \rightarrow R$ tal que $f(x)=\dfrac{1}{x}-5$ no es impar pues
   - El dominio es simétrico respecto al origen
   - $\left.\begin{array}{r} f(2)=\dfrac{1}{2}-5=-\dfrac{9}{2} \\ -f(-2)=-\left(\dfrac{1}{-2}-5\right)=\dfrac{11}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f(2) \neq -f(-2) \Rightarrow$ f no es impar
3. La función $f: R \rightarrow R$ tal que $f(x)=x^3+5x$ es impar pues
   - El dominio es simétrico respecto al origen
   - $-f(-x)=-\left[(-x)^3+5(-x)\right]=-\left[-x^3-5x\right]=x^3+5x=f(x) \Rightarrow -f(-x)=f(x) \Rightarrow$ f es impar

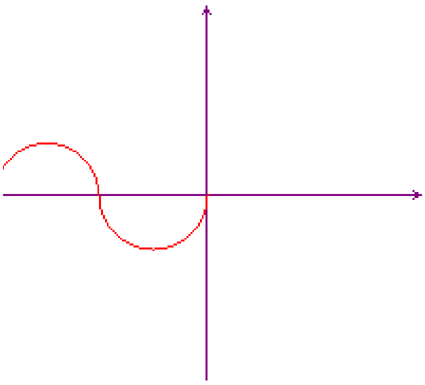
Problemas

18. Completa la gráfica de una función f si se sabe que

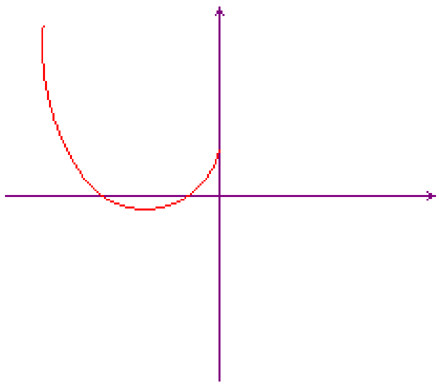
f es par



f es impar



f no es par ni impar



19. Determina si las siguientes proposiciones son V (verdaderas) o F(falsas). Justifica la respuesta.
    a) Si g(2) = -g(-2) $\Rightarrow$ g es impar
    b) Si $t(x) = x^2$; $\forall x \in [-6; 2] \Rightarrow$ t es par

20. Analiza la paridad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 4 - x^2$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $f(x) = x.(4 - x^2)$ d) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

9.6. Función creciente - decreciente

Diremos que una función f es creciente en un intervalo si para cualquier par de valores x_1 y x_2 de dicho intervalo, se verifica que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

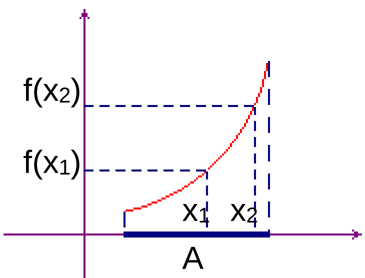
En símbolos:

$$\boxed{f : A \to B \text{ es creciente } \Leftrightarrow \forall x_1 \in A \wedge \forall x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$

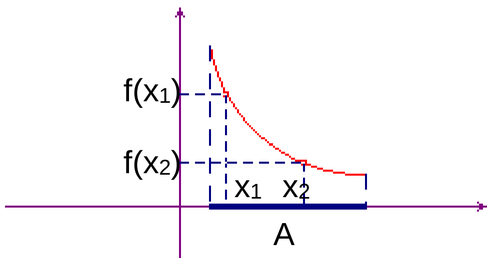
Diremos que una función f es decreciente en un intervalo si para cualquier par de valores x_1 y x_2 de dicho intervalo, se verifica que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

En símbolos:

$$\boxed{f : A \to B \text{ es decreciente } \Leftrightarrow \forall x_1 \in A \wedge \forall x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)}$$



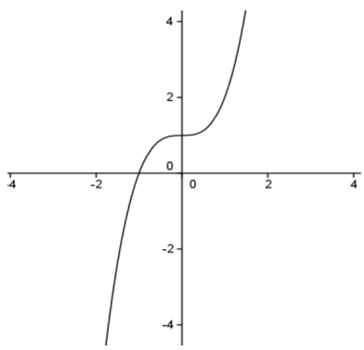
La función es creciente en A



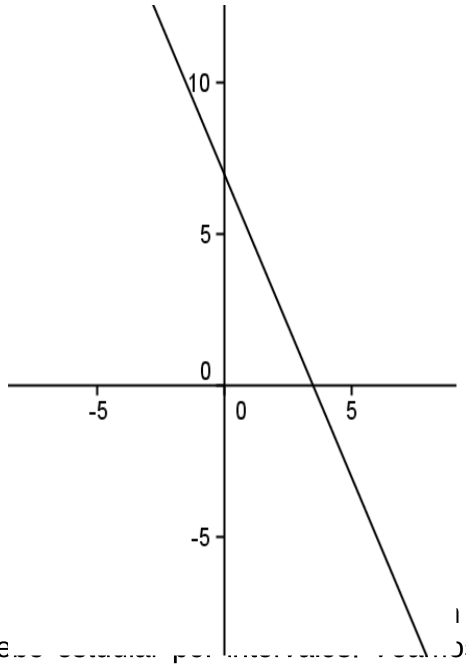
La función es decreciente en A

Ejemplos:

1. La función $f : R \to R$ tal que $f(x) = x^3 + 1$ es creciente en R

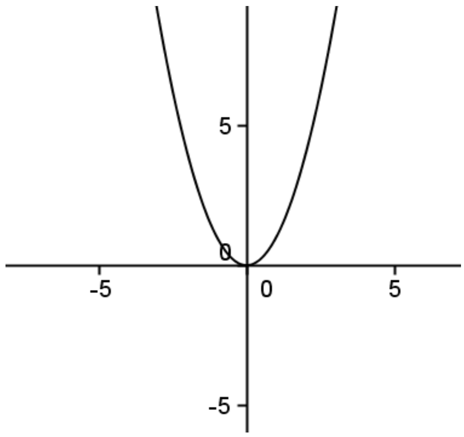


2. La función $f : R \to R$ tal que $f(x) = -2x + 7$ es decreciente en R



En los ejemplos anteriores vimos funciones que … todo su dominio. En otras funciones el crecimiento se de… …os los siguientes ejemplos.

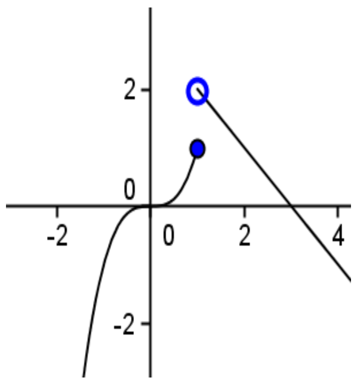
3. La función $f : R \to R$ tal que $f(x) = x^2$ es:
   - creciente en $[0; +\infty)$:
   - decreciente en $(-\infty; 0]$:



4. La función $f : R \to R$

tal que $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x > 1 \\ x^3 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$ es:

- creciente en $(-\infty;1]$:
- decreciente en $(1;+\infty)$:



Problemas

21. Contesta:

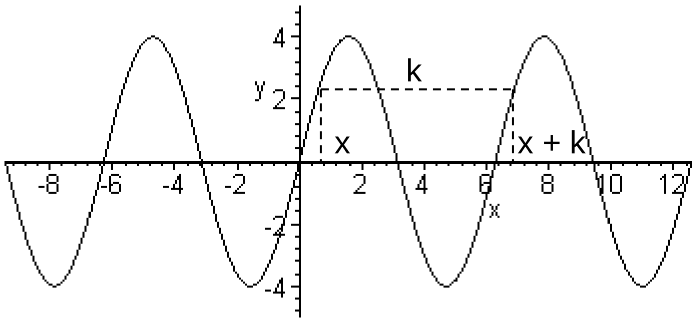
a) Si una función es creciente en A, ¿qué signo tiene $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, $\forall x_2; x_1 \in A; x_1 \neq x_2$?

b) Si una función es decreciente en A, ¿qué signo tiene $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, $\forall x_2; x_1 \in A; x_1 \neq x_2$?

9.7. Función periódica

Dada $f: A \to B$ diremos que es periódica $\Leftrightarrow$ existe un número $k \neq 0$ tal que $f(x) = f(x+k)$, $\forall x, x + k \in A$

De la definición podemos observar que si $\forall x \in A$ y siempre que $x+k$; $x+2k$; ...; $x+nk \in A \wedge \forall n \in Z$, se cumple que como $f(x)=f(x+k)$ entonces $f(x)=f(x+k)=f[(x+k)+k]=f(x+2k) \Rightarrow .... \Rightarrow f[x+(n-1)k]=f(x+nk)$



El menor de los valores positivos k para los que f(x) = f(x + k), $\forall x, x + k \in A$, se denomina período de la función.

Problemas

22. Realiza la gráfica de $f: [-8; 8] \to R$ sabiendo que cumple simultáneamente con:

- la gráfica de f coincide con la de $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ en el intervalo $[0; 2]$
- f es par y periódica de período k = 4

23. Realiza la gráfica de $g:[-4;5]\to R$ sabiendo que cumple simultáneamente con:

- la gráfica de g coincide con la de $f(x)=\begin{cases} x^3 & si \quad -1\le x\le 1 \\ -2x+3 & si \quad 1< x\le 2\end{cases}$ en el intervalo $[-1;2]$
- f es periódica de período k = 3

10. Operaciones con funciones

10.1. Función Suma

Definición:

Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, se define la función suma y se simboliza $(f+g)(x)$ a:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

Dominio de la función suma

El dominio de $(f+g)(x)$ serán los valores de x para los cuales $(f+g)(x)$ exista. Teniendo en cuenta la definición de suma serán los valores de x tales que $f(x)+g(x)$ exista. Por lo tanto, deberá existir f y g, al mismo tiempo para dichos valores de x. En conclusión:

$$Dom(f+g)=Dom(f)\cap Dom(g)$$

Ejemplo:

Si $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x-1}$, entonces $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2+\sqrt{x-1}$ cuyo dominio será $Dom(f+g)=Dom(f)\cap Dom(g)=R\cap[1;+\infty)=[1;+\infty)$,

10.2. Función Resta

Definición:

Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, se define la función resta y se simboliza $(f-g)(x)$ a:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

Dominio de la función resta

El dominio de $(f-g)(x)$ serán los valores de x para los cuales $(f-g)(x)$ exista. Teniendo en cuenta la definición de resta serán los valores de x tales que $f(x)-g(x)$ exista. Por lo tanto, deberá existir f y g, al mismo tiempo para dichos valores de x. En conclusión:

$$Dom(f-g)=Dom(f)\cap Dom(g)$$

Ejemplo:

Si $f(x)=\dfrac{x-1}{2x}$ y $g(x)=\sqrt{x}$, entonces $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{x-1}{2x}-\sqrt{x}$ cuyo dominio será $Dom(f-g)=Dom(f)\cap Dom(g)=R-\{0\}\cap R_0^+=R^+$,

10.3. *Función Multiplicación*

Definición:

Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, se define la función producto y se simboliza $(f\,g)(x)$ a:

$(f\,g)(x) = f(x)\,g(x)$

Dominio de la función multiplicación

El dominio de $(f\,g)(x)$ serán los valores de x para los cuales $(f\,g)(x)$ exista. Teniendo en cuenta la definición de producto serán los valores de x tales que $f(x)\,g(x)$ exista. Por lo tanto, deberá existir f y g, al mismo tiempo para dichos valores de x. En conclusión:

$$Dom(f.g) = Dom(f) \cap Dom(g)$$

Ejemplo:

Si $f(x) = 4x + 5$ y $g(x) = \frac{1}{|x|}$, entonces $(f\,g)(x) = f(x)\,g(x) = (4x+5).\frac{1}{|x|}$ cuyo dominio será $Dom(f.g) = Dom(f) \cap Dom(g) = R \cap R - \{0\} = R - \{0\}$,

10.4. *Función División*

Definición:

Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, se define la función división y se simboliza $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ a:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ con } g(x) \neq 0$$

Dominio de la función división

El dominio de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ serán los valores de x para los cuales $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ exista. Teniendo en cuenta la definición de división serán los valores de x tales que $\frac{f(x)}{g(x)}$ exista. Por lo tanto, deberá existir f y g, al mismo tiempo para dichos valores de x y deberá ser $g(x) \neq 0$. En conclusión:

$$Dom\left(\frac{f}{g}\right) = Dom(f) \cap Dom(g) - \{x / g(x) = 0\}$$

Ejemplo:

Si $f(x) = \sqrt{x} - 2$ y $g(x) = x^2 - 4$, entonces $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-4}$ cuyo dominio será $Dom\left(\frac{f}{g}\right) = Dom(f) \cap Dom(g) - \{x / g(x) = 0\} = R_0^+ \cap R - \{-2; 2\} = R_0^+ - \{2\}$,

Problemas

24. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$; $g(x)=-2x+5$ y $h(x)=\sqrt{-x+4}$, determina ley y dominio de cada una de las siguientes funciones.

a) $(f+g)(x)$ b) $(f-h)(x)$ c) $(g\,h)(x)$ d) $\left(\dfrac{h}{g}\right)(x)$

25. Dadas $f_1(x)=x^3-1$; $f_2(x)=|x|+4$ y $f_3(x)=\dfrac{1}{x}$. Para cada una de ellas:

a) analiza su paridad.
b) determina la intersección de su gráfica con los ejes coordenados, si existe.
c) confecciona su gráfica

10.5. Composición de funciones

Ya hemos visto anteriormente algunas operaciones entre funciones. Definiremos ahora otra forma de combinar dos funciones para obtener una nueva.

Definición:
Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, llamamos función compuesta de g y f y la simbolizamos $(gof)(x)$, a la que se obtiene de aplicar a la variable x la función f y a ese resultado, es decir a la imagen $f(x)$, le aplicamos la función g, obteniendo entonces la función $g[f(x)]$.

Gráficamente:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & f(x) \arrow[r, bend left, "g"] & g[f(x)] = gof(x) \end{tikzcd}$$

$g\,o\,f$ se lee:
g compuesta con f

Como esta nueva operación es una función tendremos que definir correctamente su dominio de definición.

Dominio de la composición de funciones

Teniendo en cuenta la definición anterior resulta que el dominio de $(gof)(x)$ serán todos los valores de x tales que $(gof)(x)$ exista. Entonces como $(gof)(x)$ se obtiene aplicando a la variable x la función f y a ese resultado, es decir a $f(x)$, le aplicamos la función g, resulta que x debe pertenecer al dominio de f (asegura que se pueda aplicar la función f), luego a los valores de $f(x)$ le debemos aplicar g, por lo tanto los valores de $f(x)$ deben pertenecer al dominio de g.

Gráficamente resulta:

$$x \xrightarrow{f} f(\underbrace{x}_{\in \mathrm{Dom}(f)}) \xrightarrow{g} g[\underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Dom}(g)}]$$

$$\boxed{\mathrm{Dom}(fog) = \{x / \ x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\}}$$

Ejemplos:

1. Dadas: $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$, entonces el dominio y la ley de $(gof)(x)$ y de $(fog)(x)$ resultan:

   - $(gof)(x)$
     - Ley

       $(gof)(x) = g[f(x)] = g(x^3 + 1) = \sqrt{x^3 + 1}$ con $x \geq -1$ pues
     - Dominio

       $\mathrm{Dom}(gof) = \{x / x \in R \wedge x^3 + 1 \geq 0\} = \{x / x \in R \wedge x^3 \geq -1\} = [-1; +\infty)$

   - $(fog)(x)$

     - Ley

       $(fog)(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{x}) \overset{x\geq 0}{=} (\sqrt{x})^3 + 1$ con $x \geq 0$

     - Dominio

       $\mathrm{Dom}(fog) = \{x / x \in \mathrm{Dom}(g) \wedge g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\} = \{x / x \in R_0^+ \wedge \sqrt{x} \in R\} = \{x / x \in R_0^+\} = R_0^+$

2. Si $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ y $g(x) = \dfrac{2x}{x-2}$, entonces el dominio y la ley de $(gof)(x)$ y de $(fog)(x)$ resultan:

   - $(gof)(x)$

     - Ley:

$$(gof)(x) = g[f(x)] = g\left(\frac{1}{x+1}\right) \overset{x\neq -1}{=} \frac{\frac{2}{x+1}}{\frac{1}{x+1} - 2} \overset{x\neq -1}{=} \frac{\frac{2}{x+1}}{\frac{1-2x-2}{x+1}} \overset{x\neq -1}{=} \frac{2}{-2x-1} \text{ con } x \neq -\frac{1}{2}; x \neq -1$$

     - Dominio

$$\mathrm{Dom}(gof) = \left\{x / \ x \neq -1 \wedge x \neq -\frac{1}{2}\right\} = R - \left\{-1; -\frac{1}{2}\right\}$$

- $(fog)(x)$

  - Ley

$$(fog)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{2x}{x-2}\right) \overset{x\neq 2}{=} \frac{1}{\frac{2x}{x-2}+1} \overset{x\neq 2}{=} \frac{1}{\frac{2x+x-2}{x-2}} \overset{x\neq 2}{=} \frac{x-2}{3x-2} \quad \text{con } x \neq \frac{2}{3}; x \neq 2$$

  - Dominio

$$Dom(fog) = \left\{ x /\ x \neq 2 \wedge x \neq \frac{2}{3} \right\} = R - \left\{ 2; \frac{2}{3} \right\}$$

Observación:
Teniendo en cuenta los ejemplos anteriores podemos concluir que la composición de funciones **no es conmutativa**

Problemas

26. Determina la ley y el dominio de gof y de fog, en cada caso:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$

b) $f(x) = x+1$ y $g(x) = |x|$

c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ y $g(x) = \frac{1}{2x+4}$

d) $f(x) = \frac{x+1}{2x}$ y $g(x) = \sqrt{x}$

27. Dadas las funciones $f_1(t) = t$; $f_2(t) = \frac{1}{t}$; $f_3(t) = 1-t$; $f_4(t) = \frac{1}{1-t}$; $f_5(t) = \frac{t-1}{t}$ y $f_6(t) = \frac{t}{t-1}$. Verifica que la composición de cualquier par de estas funciones es otra de ellas, luego completa la tabla.

o	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1						
f_2						
f_3				f_6		
f_4						
f_5						
f_6						

Nota: consideramos las funciones compuestas definidas en su dominio

11. Las transformaciones en las funciones

Dada la gráfica de una función (generalmente funciones patrones o básicas) es posible obtener la gráfica de otra a partir de ella, mediante el uso de algunas transformaciones sobre la gráfica de la función conocida.

Para ello la utilización de un software matemático interactivo como un recurso para construir conocimientos y resolver problemas es una estrategia atractiva y “poderosa” que debemos considerar.

El trazado preciso de una gráfica como una alternativa para conjeturar proposiciones cuya validez se demostrará con posterioridad, forma parte de una herramienta didáctica nada despreciable, por el contrario, utilísima a la hora de agilizar la obtención de conclusiones.

El desarrollo convencional del tema se ve actualmente enriquecido con el empleo de un software libre al alcance de todos en accesibilidad y sencillez. No pocas son las bondades de este material para despreciar su utilización.

El **GEOGEBRA** es el programa que por su conexión entre GEOMETRÍA y ALGEBRA facilita el aprendizaje de distintos conceptos que requieren de la gráfica y su expresión simbólica. Las funciones son un claro ejemplo de ello (tienen una expresión simbólica que las caracteriza y se las representa gráficamente) .
Conocer el funcionamiento de algunos de sus comandos pasará a ser una de nuestras primeras actividades .

Podrás acceder a este software gratuito en la página **www.geogebra.org**.

¡¡¡¡¡A TRABAJAR!!

Explorando con Geogebra las transformaciones que experimenta una función al variar algún parámetro .

Problema

28. Resuelve las actividades propuestas en la siguiente ***Guía de Estudio*** elaborada por la Prof. Patricia Godino

GUÍA DE ESTUDIO

ACTIVIDAD Nº1

1) Representa gráficamente la función $f(x) = x^2$:

2) Sin borrar lo anterior, representa en el mismo sistema con distintos colores :

$g(x) = f(x) + 1$	$h(x) = f(x) + 3$	$j(x) = f(x) + \frac{1}{2}$
$p(x) = f(x) - 2$	$m(x) = f(x) - 1$	$n(x) = f(x) - \frac{3}{2}$

3) Te habrás dado cuenta que has representado funciones de la forma "f(x) +k " con $k \in R$ y $k \neq 0$

Observando las distintas gráficas obtenidas, completa:

- La gráfica de la función g se obtiene trasladando …… unidades hacia …………… a la gráfica de la f .
- La gráfica de la función h se obtiene trasladando …… unidades hacia ………………..a la gráfica de la f .
- La gráfica de la función j se obtiene trasladando …..… unidades hacia …………… …a la gráfica de la f .
- La gráfica de la función p se obtiene trasladando ………unidades hacia ………………..a la gráfica de la f .
- La gráfica de la función m se obtiene trasladando ..…… unidades hacia …………….. a la gráfica de la f .
- La gráfica de la función n se obtiene trasladando ……… unidades hacia ………………..a la gráfica de la f .

4) ¿Qué observas respecto a los dominios y conjuntos imágenes de estas funciones en relación al dominio y conjunto imagen de f?

……
……

5) En una ventana o archivo nuevo, dibuja las siguientes funciones:

$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = f(x) + 2$ y $h(x) = f(x) - 1$

Nota:

Utiliza el listado de opciones (Funciones Matemáticas)

para escribir $\sqrt{x}$ = sqrt(x) que se activa con botón a la derecha de la barra de entrada .

¿Qué observas en relación a las gráficas de g(x) y h(x) respecto a la de f(x)?

……

……………………………………………………………

6) Idem apartado 5) para:

$f(x) = |x|$, $g(x) = f(x) + \frac{3}{2}$ y $h(x) = f(x) - 3$

Nota:

Utiliza el listado de opciones para escribir $|x|$ = abs(x)

De acuerdo a lo realizado en esta actividad podemos enunciar la siguiente conjetura:

Siendo f(x) una función, la gráfica de cualquier función h(x) = f(x) + k, con $k \in R$ y $k \neq 0$, se obtiene Por una **traslación vertical de la gráfica de f en $|k|$ unidades hacia arriba si k>0 ó hacia abajo si k<0.**

Observaste también que si: Dom(f) = A $\Rightarrow$ Dom(h) = A y si Im(f) = [a ; b] $\Rightarrow$ Im(h) = [a+k ; b+k]

ACTIVIDAD Nº2

Nos proponemos ahora analizar el comportamiento de funciones de la forma h(x) = - f(x), es decir, descubrir cómo se obtiene la gráfica de una función opuesta a una dada.

1) En una ventana o archivo nuevo, representa en distintos colores los siguientes pares de funciones:

Nota: Utiliza para cada par una ventana o archivo nuevo diferente.

a) $f(x) = x^2$ y g(x) = - f(x)

b) $m(x) = x^3$ y n(x) = - m(x)

c) $k(x) = |x|$ y p(x) = - k(x)

2) Observando las distintas gráficas obtenidas, completa:

- La gráfica de la funciones g,n y p se obtienen aplicando un ……………………………………… a la gráfica de f ,m y k respectivamente respecto al eje ………... .

¿Qué observas en cada par de gráficas respecto a sus dominios y conjuntos imagen?

……
……

De acuerdo a lo realizado en esta actividad podemos enunciar la siguiente conjetura:

Siendo f(x) una función, la gráfica de la función h(x) = - f(x) se obtiene por una **simetría axial ó rebatimiento respecto al eje x de la gráfica de f.**
Observaste también que si: Dom(f) = A $\Rightarrow$ Dom(h) = A y si Im(f) = [a ; b] $\Rightarrow$ Im(h) = [-b ; -a]

ACTIVIDAD Nº3

Esta actividad es una combinación de las ACTIVIDADES 1 y 2.

1) En una ventana o archivo nuevo, representa las siguientes funciones siguiendo " paso a paso " cada una de las transformaciones. Utiliza para cada transformación diferentes colores.

a) $h(x) = -|x| + 3$

El " **paso a paso** "
$h_1(x) = |x|$
$h_2(x) = -|x|$
$h(x) = -|x| + 3$

b) $r(x) = -\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

2) Observando lo obtenido completa:

Dom(h) = ……………………………. e Im(h) = ………………………

Dom(r) = ……………………………. e Im(r) = ………………………

ACTIVIDAD Nº4

Nuestro objetivo ahora es obtener, a partir de la gráfica de f(x), la gráfica de la función h(x) = k.f(x), con $k \neq 0$, y analizar también el dominio y conjunto imagen de la nueva función en relación a los de la dada.

1) En una ventana o archivo nuevo, representa en distintos colores las siguientes funciones:

$f(x) = x^2$, $g(x) = 2.\ f(x)$ y $j(x) = \frac{1}{2}.f(x)$

a) Determina la intersección de f , g y j con la recta de ecuación x=1 como una estrategia para analizar la relación entre las ordenadas de los puntos de abscisa 1 de las funciones g y j con respecto a las de f(x).

b) Idem el apartado a) con la recta de ecuación x=3.

c) Idem el apartado a) con la recta de ecuación x=4.

¿Qué intuyes ocurre con las **ordenadas** de los puntos **de igual abscisa** de la gráfica de g en relación con las correspondientes ordenadas de la gráfica de f ? ¿Y con las de j en relación con las correspondientes de f ?

……
……………………………………………………………………………………………

De acuerdo a lo realizado en esta actividad podemos enunciar la siguiente conjetura:

Siendo f(x) una función, la gráfica de la función h(x) = k.(x) con k>0 se obtiene"uniendo con una curva suave " los puntos cuya abscisa " x " pertenece al dominio de f y cuya ordenada es "k.f(x)".

Notemos que :

- Si k > 1 ,**las imágenes se dilatan.**
- Si 0 < k < 1, **las imágenes se contraen.**

Observación:

Hasta ahora has trabajado con funciones de la forma h(x) = k.f(x) con k > 0, ¿que pasará si k < 0? Para descubrirlo continuemos con esta actividad.

d) Sin borrar lo anterior, representa ahora:

$t(x) = -2\,x^2$ y $m(x) = -\frac{1}{2}x^2$

Cómo son las funciones t(x) y g(x)?……………………………., ¿ y las funciones j(x) y m(x)? ……………….………

también.

Podemos ahora conjeturar:

Siendo f(x) una función, la gráfica de la función h(x) = k.f(x) con $k \neq 0$ se obtiene por dilatación o contracción de imágenes de f de acuerdo a:

- Si $|k| > 1$, las **imágenes se dilatan.**
- Si $0 < |k| < 1$, **las imágenes se contraen.**
- Y si k < 0, la gráfica ya dilatada o contraída se rebate respecto al eje x.

Además si, Dom(f) = A $\Rightarrow$ Dom(h) = A y si Im(f) = [a ; b] $\Rightarrow$ [Im(h) = [k.a ; k.b] si k > 0 ó

Im(h) = [k.b ; k.a] si k < 0]

ACTIVIDAD Nº5

Esta actividad es una combinación de las ACTIVIDADES 1 , 2 y 4

1) Utilizando para cada apartado una ventana o archivo nuevo, representa las siguientes funciones Siguiendo " paso a paso " cada una de las transformaciones. Utiliza para cada transformación un color diferente

a) $f(x) = -3.\sqrt{x} + 2$ $\Leftarrow$

El " **paso a paso** "
$f_1(x) = \sqrt{x}$
$f_2(x) = 3.\sqrt{x}$
$f_3(x) = -3.\sqrt{x}$
$f(x) = -3.\sqrt{x} + 2$

b) $g(x) = \frac{1}{4}\left(x^3 - 1\right)$

2) Observando lo obtenido completa:

Dom(f) = ……………………………… e Im(f) = ………………………

Dom(g) = ……………………………. e Im(g) = ………………………

ACTIVIDAD Nº6

Ahora nos proponemos analizar el comportamiento de funciones de la forma h(x)=f(x+k), con k $\neq 0$, es decir analizar las transformaciones que se deben aplicar a la gráfica de una función f para obtener la de otra h, siendo esta el resultado de haberle sumado a la variable independiente de f un número real distinto de cero. Además analizar también el dominio y conjunto imagen de la nueva función en relación a los de la dada.

1) En una ventana o archivo nuevo, representa en distintos colores las siguientes funciones:

$f(x) = x^3$, $g(x) = f(x+2) = (x + 2)^3$ y $h(x) = f(x-3) = f(x-3)^3$

En forma similar a lo experimentado en la actividad 4

a) Determina la intersección de las funciones f , g y h con la recta de ecuación y = 1 como una estrategia para analizar la relación entre las abscisas de los puntos que poseen ordenada 1 de las funciones g y h con respecto a la de f .

b) Idem el apartado a) con la recta de ecuación y = 4.

c) Idem el apartado a) con la recta de ecuación y = -1.

De acuerdo a lo realizado en esta actividad y considerando los puntos de igual ordenada en f,g y h , **presta especial atención** a la relación entre las abscisas de los puntos de las gráficas de g y h respecto a la de f y completa según corresponda :

Las abscisas de la gráfica de g(x)=f(x+2) están --------------------------------en 2 unidades respecto a las de f
aumentadas-disminuidas

Las abscisas de la gráfica de g(x)=f(x-3) están---------------------------------- en 3 unidades respecto a las de f
aumentadas – disminuidas

Ampliando el análisis podemos afirmar que **la gráfica de g se obtiene trasladando horizontalmente a la gráfica de f dos unidades hacia la izquierda y la de h tres hacia la derecha**

2) En una ventana o archivo nuevo, representa en distintos colores las siguientes funciones:

$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$ y $h(x) = \sqrt{x+4}$

En primer lugar habrás visto que las gráficas de g y h resultaron ser una traslación horizontal de la gráfica de f.

Nos preguntamos ahora, que sucede con los Dom(g) y Dom(h) y sus respectivos conjuntos imagen. Observando las gráficas, completa:

Dom(f) = […..; …….) Dom(g) = […..; …….) Dom(h) = […..; …….)

Im(f) = […..; …….) Im(g) = […..; …….) Im(h) = […..; …….)

Luego, vemos que el Dom(g) y el Dom(h) también experimentan una traslación horizontal, mientras que los conjuntos imagen no varían.

De acuerdo a lo realizado en esta actividad podemos enunciar la siguiente conjetura:

> Siendo f(x) una función, la gráfica de cualquier función t(x) = f(x + k), con $k \in R$ y $k \neq 0$, se obtiene por una **traslación horizontal de la gráfica de f en $|k|$ unidades hacia la izquierda si k>0 ó hacia la derecha si k<0.**

Observaste también que si: Dom(f) = [a ; b] $\Rightarrow$ Dom(h) = [a - k ; b - k] y si Im(f) = B $\Rightarrow$ Im(h) =B

ACTIVIDAD Nº 7

1) Utiliza diferentes colores para representar en una ventana o archivo nuevo las funciones:

$f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = |f(x)| = |x^2 - 4|$

Observa y completa:

$$g(x) = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots & si \quad x \leq -2 \ \vee \ x \geq 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & si \quad -2 < x < -2 \end{cases}$$

Te habrás dado cuenta que $f(x) \geq 0$ en los intervalos $(-\infty; -2]$ y $[2;+\infty)$, y que $f(x) < 0$ en el intervalo (-2;2), luego podemos decir:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & si \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

2) Representa en distintas ventanas y en diferentes colores los siguientes pares de funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \left|\dfrac{1}{x}\right|$

b) $f(x) = -\sqrt{x} + 2$ y $g(x) = |-\sqrt{x} + 2|$

Observando los gráficos obtenidos, ¿se cumple que: $g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & si \quad f(x) < 0 \end{cases}$? ………

De lo visto podemos enunciar la siguiente conjetura:

> Siendo f(x) una función, la gráfica de la función g(x) = $|f(x)|$ resulta: $\mathbf{g(x)} = \begin{cases} \mathbf{f(x)} & \mathbf{si} \quad \mathbf{f(x) \geq 0} \\ \mathbf{-f(x)} & \mathbf{si} \quad \mathbf{f(x) < 0} \end{cases}$

Nota: Habrás observado que se está aplicando a la gráfica de una función la definición de valor absoluto ya conocida en R.

ACTIVIDAD Nº 8

Para finalizar, representa las siguientes funciones en distintas ventanas realizando una transformación por vez y en diferentes colores. Completa abajo con sus correspondientes dominios y conjuntos imágenes.

a) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}+1$ b) $g(x) = -(x-2)^2 + 4$ c) $h(x) = -2|x+3| - \frac{3}{2}$ d) $k(x) = \frac{1}{x-1} - 2$

Dom(f) = …….. Dom(g) = …….. Dom(h) = …….. Dom(k) = ……..

Im(f) = …….. Im(g) = …….. Im(h) = …….. Im(k) = ……..

e) $t(x) = \left|\sqrt{x}-3\right|$ f) $q(x) = 4|x| - 3$ c) $r(x) = |2x^3| - 1$ h) $s(x) = ||x|-1|$

Dom(t) = …….. Dom(q) = …….. Dom(r) = …….. Dom(s) = ……..

Im(t) = …….. Im(q) = …….. Im(r) = …….. Im(s) = ……..

Bibliografía

- Egler A., Müller D., Hecklein M. y Vrancken S.(2008). *Funciones.* Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral.
- Lagreca L, Cattaneo B., Rosito M.. Apunte de *Funciones* . Rosario: Dpto. Matemática Instituto Politécnico Superior "Gral. San Martín".
- Amicozzi S. Práctica de *Funciones corrimientos.* Rosario: Instituto Ntra. Sra. de Guadalupe.

La autora agradece la colaboración de las Prof. Silvia Amicozzi y Mirta Rosito.

Problemas

29. Usando las gráficas de $f(x) = x^2$; $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = \frac{1}{x}$, realiza las gráficas de las siguientes funciones indicando dominio y recorrido de cada una.

a) $t_1(x) = f(x-1)$ f. $t_6(x) = \left|\frac{1}{3}f(x) - 3\right| + 1$

b) $t_2(x) = g(x) + 3$ g. $t_7(x) = |-h(x)+1|$

c) $t_3(x) = h(x+2) - 1$ h. $t_8(x) = h(|x|)$

d) $t_4(x) = -f(x) - 2$ i. $t_9(x) = g(|x|)$

e) $t_5(x) = 2g(x-3)$ j. $t_{10}(x) = \frac{1}{2}|g(x+1) - 3|$

30. Dada f(x) = $[x]$

a) grafica f(x), f(x – 1), f(x) - 1 y –f(x)

b) ¿qué puedes decir de los valores de la imagen de $f(x)$ cuando la variable independiente toma valores próximos pero menores que 2? (significa que me acerco a 2 por la izquierda y se simboliza 2^-)

c) ¿y cuando toma valores próximos pero mayores que 2? (significa que me acerco a 2 por la derecha y se simboliza 2^+)

d) De los apartados b y c podemos concluir que la función presenta un ______________ para $x_0 = 2$

e) Ídem b y c para x_0 = 1,5. ¿llegas a la misma conclusión? ¿por qué?

Observación:

Diremos que una función presenta un salto en x_0 cuando al acercarnos por derecha y por izquierda a ese valor, sus imágenes tienen valores distintos.

31. Sea f(x) = $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ -x & \text{si} \quad -1 \le x < 0 \end{cases}$

a. grafica f(x), f(x + 2), f(x) – 1, 2f(x)
b. calcula $f(0{,}5)$ y $f(-0{,}5)$

12. Inversa de una función

Definición:

Dada la función biyectiva f con dominio A y conjunto imagen B, llamamos función inversa de f y la simbolizamos f^{-1}, a la función cuyo dominio es B, conjunto imagen A y cumple que si $f(x) = y$ entonces $f^{-1}(y) = x$

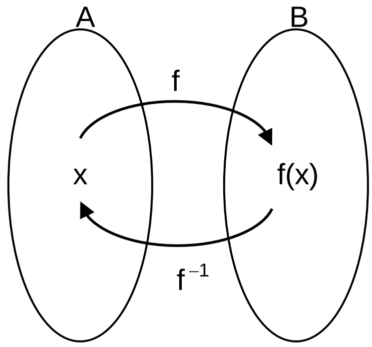
En símbolos resulta:

Dada $f : A \to B / f(x) = y$ entonces la inversa de f es $f^{-1} : B \to A / f^{-1}(y) = x$

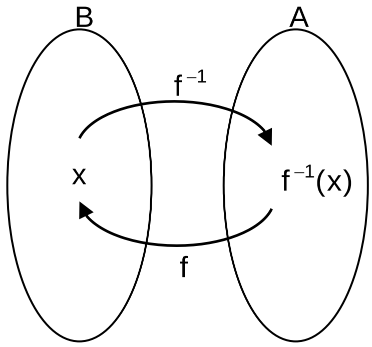
Como consecuencia de la definición anterior resulta que si f^{-1} y f son funciones inversas cumplen con las siguientes condiciones:

- $(f^{-1} o f)(x) = f^{-1}[f(x)] = x\ ,\ \forall\, x \in A$
- $(f o f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = x\ ,\ \forall\, x \in B$

Gráficamente resulta:



$f^{-1}[f(x)] = x; \forall x \in A$



$f[f^{-1}(x)] = x; \forall x \in B$

Mecanismos de obtención de la función inversa a una dada

Dada $f : A \to B / f(x) = y$, para obtener su inversa $f^{-1} : B \to A / f^{-1}(y) = x$ podemos seguir alguno de los siguientes procedimientos que se detallan a continuación :

❖ Procedimiento 1

1º) Analizamos la biyectividad de f(x)
2º) Determinamos fof^{-1}
3º) Despejamos $f^{-1}(x)$ de la ecuación $(fof^{-1})(x) = x$

Ejemplo:

Dada $f : R \to R / f(x) = x^3 - 1$ resulta :

f es biyectiva pues :

- es suryectiva ya que Im(f) =R y
- es inyectiva ya que toda paralela al eje de las abscisas interseca una vez a la gráfica de la función

Además, siendo $f : R \to R / f(x) = x^3 - 1$ es $f^{-1} : R \to R / f^{-1}(x) = y$

$$(fof^{-1})(x) = x \Rightarrow f\left[f^{-1}(x)\right] = x \Rightarrow \left[f^{-1}(x)\right]^3 - 1 = x \Rightarrow \left[f^{-1}(x)\right]^3 = x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

De lo desarrollado resulta:

$$f^{-1} : R \to R / f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

❖ Procedimiento 2

1º)Analizamos la biyectividad de f(x)
2º)Despejamos x de la ecuación $f(x) = y$
3º)Sustituimos en la ecuación obtenida en 2º la variable y por la variable x y recíprocamente teniendo en cuenta que ahora la variable y representa $f^{-1}(x)$

Ejemplo:

Dada $f : [3; +\infty) \to R / f(x) = 2\sqrt{x-3}$ no admite inversa por no ser biyectiva pues :

$$\left.\begin{array}{l} Im(f) \neq R \quad \text{entonces f no es suryectiva} \\ \forall x_1, x_2 \in [3;+\infty); x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2\sqrt{x_1 - 3} \neq 2\sqrt{x_2 - 3} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ entonces f es inyectiva} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{f no es biyectiva}$$

Restringiendo el conjunto de llegada al de las imágenes la función así obtenida es biyectiva y podremos determinar su inversa, entonces:

Dada $f:[3;+\infty)\rightarrow R_0^+ \,/\, f(x)=2\sqrt{x-3}$ resulta $f^{-1}:R_0^+\rightarrow[3;+\infty)/\,f^{-1}(x)=y$ es:

$$2\sqrt{x-3}=y\Rightarrow\sqrt{x-3}=\frac{y}{2}\Rightarrow x-3=\left(\frac{y}{2}\right)^2\Rightarrow x=\left(\frac{y}{2}\right)^2+3\Rightarrow f^{-1}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^2+3$$

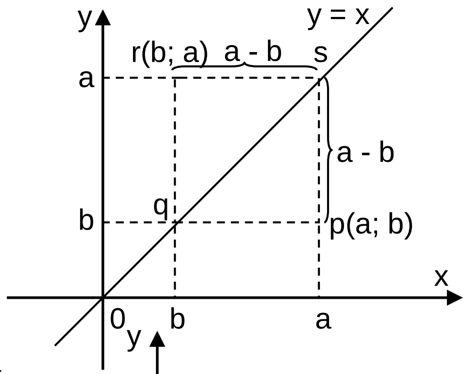
De lo desarrollado resulta:

$$f^{-1}:[3;+\infty)\rightarrow R_0^+\,/\,f^{-1}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^2+3$$

Gráfica de la función inversa de una función dada

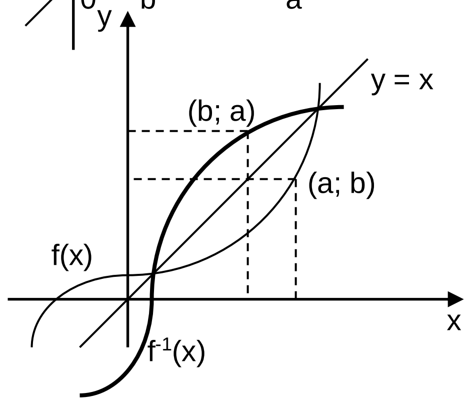
Dada la función biyectiva $f:A\rightarrow B/\,f(x)=y$ y teniendo en cuenta la definición de función inversa, podemos afirmar que:

Si $f(a)=b$ entonces $f^{-1}(b)=a$, es decir, si el punto $(a;b)\in Graf(f)$ resulta $(b;a)\in Graf(f^{-1}(x))$.



Ubicando los puntos $p(a;b)$; $q(b;b)$; $r(b;a)$ y $s(a;a)$ en un sistema coordenado, resulta que el cuadrilátero $pqrs$ es un cuadrado, en el cual la recta $\overleftrightarrow{qs}$ es eje de simetría, por lo que podemos concluir que los puntos $p(a;b)$ y $r(b;a)$ son simétricos respecto de ese eje.

La recta $\overleftrightarrow{qs}$, que es el eje de simetría, es la recta de ecuación $y=x$ ya que los puntos $q(b;b)$ y $s(a;a)$ pertenecen a la misma y verifican su ecuación.



Como el punto $p(a;b)$ es cualquier punto de la gráfica de f, podemos generalizar dicho análisis. Con lo cual resulta que la gráfica de la inversa de una función es la simétrica a la gráfica de la función original respecto de la recta $y=x$.

Problemas

32. Dadas las funciones $f(x)=2x^3+1$; $g(x)=\sqrt{x+2}$ y $h(x)=\dfrac{1}{x-2}$

a) Justifica la existencia de la función inversa de cada una de ellas
b) Determina ley; dominio; conjunto imagen y representación gráfica de cada una de las funciones inversas de las dadas.
c) Calcula el o los ceros de f(x) y g(x)

33. Justifica que las funciones $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-1$; $g(x)=\sqrt[3]{3(x+1)}$ son funciones inversas.

13. La simultaneidad de condiciones modelizadas con funciones

El concepto de función ha sido uno de los más "ricos" aportes de la matemática a una innumerable cantidad de disciplinas por su utilización en diversas aplicaciones. Los "campos" de la física, química, biología, economía, medicina, entre otros, han utilizado las funciones para describir e interpretar el comportamiento de distintos fenómenos y procesos.

En muchas situaciones están involucradas más de una función y resulta de utilidad encontrar los valores de la variable que cumplan con las leyes de todas esas funciones simultáneamente. Es decir, la simultaneidad de condiciones modelizadas por distintas leyes de funciones es de mucha utilidad en varias aplicaciones, al igual que su representación gráfica ha resultado una herramienta en la interpretación de algunos problemas.

La representación gráfica de las funciones, si bien facilita la "visualización" de la situación problemática planteada no resulta imprescindible en la resolución analítica del problema.

Para poner en práctica lo expuesto te proponemos resolver los siguientes problemas.

34. Las funciones $p_A(t)$ y $p_B(t)$ representan la posición (en km) de los móviles A y B en función del tiempo (en hs.) . Determina al cabo de cuánto tiempo se encuentran los móviles, si $p_A(t) = 30t$ y $p_B(t) = 20t + 10$ y ambos parten simultáneamente .Grafica la situación.

Nota: el tiempo transcurrido hasta el encuentro estará dado cuando las posiciones se igualen

35. Dos empresas de transporte interurbano promocionan las ventas de tarjetas magnéticas pre-pagas con el costo que indica el cuadro:

Empresa	Costo de la tarjeta	Costo de un pasaje (no incluye el costo de la tarjeta)
A	$ 5	$ 12
B	$ 15	$ 10

Determina utilizando el Geogebra:

a) ¿Cuál es el número de pasajes para el que cuesta lo mismo adquirir tarjetas de cualquiera de las empresas?

b) Si un usuario necesita comprar una tarjeta para realizar 8 viajes ¿Qué empresa le conviene más?

36. Determina (x;y) / f(x)=g(x) siendo f(x)= -x+2 , g(x)= x^2

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Respuestas

1. **a)** pues por definición "**a cada elemento del conjunto A**" excluye la posibilidad de que existan elementos en A que no posean su correspondiente en B.
   b) Sí, pues la definición exige que posean un "**único**" elemento en B, no dice que deba ser exclusivo .
2. **a)**F **b)**V **c)**V **d)**F **e)**V **f)**F **g)**V **h)**V
   justificaciones a cargo del lector
3. **a)**Dom(f_1)= $\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$ **b)**Dom(f_2)=R^+ **c)**Dom(f_3)=R **d)**Dom(f_4)= $(10;+\infty)$ **e)**Dom(f_5)=R
   f)Dom(f_6)= $R-\{3;2\}$ **g)**Dom(f_7)= $R-\{0;2;-2\}$ **h)**Dom(f_8)=R **i)**Dom(f_9)= $[-2;+\infty)-\{3\}$
4. **a)** $\frac{2}{3}$ **b)**carece de ceros **c)**1 **d)**carece de ceros **e)** carece de ceros
   f)-1 **g)** carece de ceros **h)** 0 **i)**-2
5. No, pues contradice la definición de función
6. a cargo del lector
7. **a)**c(d)= $\frac{7}{100}d$ **b)**c(200)=14 l y c(350)=24.5 l
8. g(x)= $\frac{1\$}{km}x+\$40$ .Gráfica a cargo del lector .g(300)=$340.g(600)=$640.
9. f(x)= $-\frac{9}{2}x-\frac{13}{2}$ .Gráfica a cargo del lector
10. (-2;1) no pertenece .
11. f(x)=-500x+2500 $0\le x\le 5$
12. A cargo del lector .
13. A cargo del lector .
14. Gráficas a cargo del alumno

a)Dom(u)=R, Im(u)= $\{2;3\}$ **b)**Dom(f)=R,Im(f)=R **c)**Dom(g)=R,Im(g)= $R_0^+\cup Z^-$
d)Dom(h)=R,Im(h)= R_0^+ **e)**Dom(t)=R , Im(t)= $R^-\cup[1;3]$

15. **a)** $f(x)=|x+1|=\begin{cases} x+1 & x\ge -1 \\ -x-1 & x<-1\end{cases}$ **d)** $f(x)=\left|-\frac{1}{2}x\right|=\begin{cases} -\frac{1}{2}x & x\le 0 \\ \frac{1}{2}x & x>0\end{cases}$
16. **a)** no es inyectiva **b)**no es inyectiva **c)**es inyectiva **d)**no es inyectiva
17. **a)**V **b)**F **c)**V (justificaciones a cargo del alumno)
18. a cargo del lector
19. **a)**F **b)**F

20. **a)**Par **b)**Impar **c)**Impar **d)**impar
21. **a)** positivo **b)**negativo
22. a cargo del lector
23. a cargo del lector
24. **a)** $R-\{5\}$ **b)** $(-\infty;4]$ **c)** $(-\infty;4]$ **d)** $(-\infty;4]-\left\{\frac{5}{2}\right\}$
25. **a)** $g\circ f=\frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}-2}$ $Dom(g\circ f)=R-\{8\}$; $f\circ g=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}$ $Dom(f\circ g)=R-\{2\}$

b) $g\circ f=|x+1|$ $\quad$ $Dom(g\circ f)=R$; $f\circ g=|x|+1$ $\quad$ $Dom(f\circ g)=R$

c) $g\circ f=\dfrac{x-1}{4x-2}$ $\quad$ $Dom(g\circ f)=R-\left\{1;\dfrac{1}{2}\right\}$; $f\circ g=\dfrac{2x+4}{-3-2x}$ $\quad$ $Dom(f\circ g)=R-\left\{-2;-\dfrac{3}{2}\right\}$

d) $g\circ f=\sqrt{\dfrac{x+1}{2x}}$ $\quad$ $Dom(g\circ f)=(-\infty;-1]\cup R^{+}$ $\quad$ $f\circ g=\dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$ $\quad$ $Dom(f\circ g)=R^{+}$

26. a) f_1 no es par, f_1 no es impar. f_2 es par. f_3 es impar.

b)

	Intersección con eje x	Intersección con eje y
$f_1(x)=x^3-1$	(1;0)	(0;-1)
$f_2(x)=\lvert x\rvert+4$	no existe	(0;4)
$f_3(x)=\dfrac{1}{x}$	No existe	No existe

c) a cargo del lector

27.

o	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_5	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

28. a cargo del lector

29. gráficas a cargo del lector

a) $Dom(t_1)=R$, $Im(t_1)=R_0^+$ **b)** $Dom(t_2)=R_0^+$, $Im(t_2)=[3;+\infty)$ **c)** $Dom(t_3)=R-\{-2\}$, $Im(t_3)=R-\{-1\}$

d) $Dom(t_4)=R$, $Im(t_4)=(-\infty;-2]$ **e)** $Dom(t_5)=[3;+\infty)$, $Im(t_5)=R_0^+$ **f)** $Dom(t_6)=R$, $Im(t_6)=[1;+\infty)$

g) $Dom(t_7)=R-\{0\}$, $Im(t_7)=R_0^+$ **h)** $Dom(t_8)=R-\{0\}$, $Im(t_8)=R^+$ **i)** $Dom(t_9)=R$, $Im(t_9)=R_0^+$

j) $Dom(t_{10})=[-1;+\infty)$, $Im(t_{10})=R_0^+$

30. a) a cargo del lector
b) las imágenes valen 1 **c)** las imágenes valen 2 **d)** de los apartados a y c podemos concluir que la función presenta un "salto " para $x_0=2$ **e)** por derecha y por izquierda de $x_0=1.5$ las imágenes valen 1y la función no presenta un salto para dicho valor de la variable independiente.

31. a) a cargo del lector $\quad$ **b)** $f(0,5)=\dfrac{1}{4}$ y $f(-0,5)=\dfrac{1}{2}$

32. a) a cargo del lector $\quad$ **b)** $f:R\to R/f(x)=2x^3+1$; $f^{-1}:R\to R/f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{2}}$

$g:[-2;+\infty)\to R_0^+$ / $g(x)=\sqrt{x+2}$; $g^{-1}:R_0^+\to[-2;+\infty)$ / $g^{-1}(x)=x^2-2$

$h:R-\{2\}\to R-\{0\}$ / $h(x)=\dfrac{1}{x-2}$; $h^{-1}:R-\{0\}\to R-\{2\}$ / $h^{-1}(x)=\dfrac{1}{x}+2$

c) $x=-\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$ x (cero de f) $\quad$ x=-2 (cero de g)

33. a cargo del lector

34. 1 hora
35. a)5 b)B
36. (1;1) y (-2;4)

Práctica complementaria

1. Dada f: $R \to R / f(x) = x^4 - x^2$

   a)analiza su paridad b)calcula $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ c)determina sus ceros

   d)esboza su gráfica analizando el comportamiento de f(x), para valores de x suficientemente grandes ($x \to \infty$).
2. Dada f: $R \to R / f(x) = x^3 - x$

   a)analiza su paridad b)determina sus ceros c)estudia a que valores tienden las imágenes cuando los valores de la variable independiente crecen (o decrecen) sin tope. d) esboza la gráfica de la función
3. Indica posibles funciones f(x) y g(x), en cada caso, tales que $h(x) = (fog)(x)$.

   a. $h(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ c. $h(x) = (x^3 - 2)^2$

   b. $h(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2}$ d. $h(x) = \dfrac{1}{|x| + 2}$
4. Justifica la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:"Si f y g son funciones inyectivas entonces fog es inyectiva"
5. Dadas las funciones $g(x) = \dfrac{-1}{x+2} + 3$ y $h(x) = x - 1$, determina:

   a. la gráfica de g, aplicando transformaciones.

   b. los ceros de la función t(x)= $t(x) = (goh)(x)$
6. Determina si las siguientes proposiciones son V(verdaderas) o F(falsas) . Justifica tus respuestas.

   a. El dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^3 - 4}$ es $[4;+\infty)$

   b. La función $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ es impar

   c. La función $f: R \to R /\ f(x) = (x+2)^2$ admite inversa

   d. $A = \left\{ x / f(x) = \dfrac{-|x|}{-x+1} \geq 0 \right\} = (1;+\infty)$

   e. La función $g(x) = \dfrac{3}{x-1}$ es inyectiva

   f. La función $h: R - \{0\} \to R^+ / h(x) = \dfrac{|x| + 2}{x^2}$ es par

   g. La función $g(x) = \dfrac{x-1}{x(x+1)}$ interseca al eje de las ordenadas

   h. Si f es una función par y g una función impar entonces f.g es una función impar

   i. Si $f(x) = x^3$ y $g(x) = x - 1$ entonces $f[g(3)] = 26$

   j. La función $f(x) = x(x-3)$ no interseca al eje de las abscisas

k. Las funciones $f(x)=\frac{1}{x-2}+3$ y $g(x)=\frac{1}{x-3}+2$ son funciones inversas

l. Los ceros de la función $h(x)=9x-x^3$ son x = 0 y x = 3

m. Si las funciones f y g tienen el mismo dominio entonces la función $h=\frac{f}{g}$ tiene ese dominio

7. Dadas las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=\frac{x}{x-5}$, determina la ley y el dominio de $(gof)(x)$.

8. Determina la función $g(x)$ sabiendo que $h(x)=(fog)(x)$; $f(x)=3x+3$ y $h(x)=x^2+3$

9. Sea $f(x)=x^4-2x^2+5$, demuestra que $f(a)=f(-a)$

10. Dada $f(x)=2x^3-1$ ¿Existe $f^{-1}(x)$?. En caso afirmativo determina dominio, ley y gráfica de la misma.

11. Una compañía aérea calculó que la ganancia g (en pesos) obtenida en un vuelo a un país limítrofe es $g(x)=4000-62x$, siendo x la cantidad de asientos vacíos.
    a. ¿Cuál es la ganancia máxima en un vuelo?
    b. ¿Cuál es el mínimo número de asientos vacíos a partir del cual el vuelo da pérdida?

12. Dadas las funciones $f(x)=\frac{1}{2}(x-3)^3+1$ y $h(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\geq 0 \\ [x] & \text{si } x<0 \end{cases}$.
    a. Realiza la gráfica de h y determina su conjunto imagen
    b. Calcula $f[f(0)]+h(-2{,}5)$
    c. Justifica analíticamente:
       i. que f es creciente
       ii. que $g:R\rightarrow R\ /\ g(x)=2(x+3)^3-1$ no es la inversa de $f(x)$
       iii. ¿es f impar?

13. Dada $g(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$, realiza la gráfica de $t(x)=|g(x-1)-2|$ a partir de la gráfica de g.

14. Determina la ley de una función lineal m(x) sabiendo que los puntos $a(-1;2)$ y $b(3;6)$ pertenecen a su gráfica.

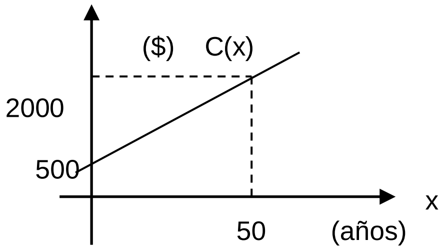
15. Dadas las funciones $g(x)=x^2+x-7$ y $h(x)=\frac{-x^3+1}{2}$, determina:
    a. la gráfica h a partir de $h_1(x)=x^3$.
    b. las coordenadas de el o los puntos de intersección de la gráfica de $t(x)=\frac{(sog)(x)}{x^2-4}$ con el eje de las ordenadas si $s(x)=x+5$

16. En una isla se introduce cierta cantidad de conejos en agosto de 1999. La siguiente función permite calcular la cantidad de conejos C que hay en la isla x meses después de agosto de 1999.

$$g(x)=-3(x-20)^2+2700$$

    a. ¿En qué mes la población de conejos fue la máxima?
    b. ¿Cuál es la mayor cantidad de conejos que llega a haber en la isla?
    c. ¿Cuántos conejos había en la isla en enero del 2000?
    d. ¿Se extingue en algún momento la población de conejos?. ¿Cuándo?

17. . El gráfico muestra la evolución del costo de un cuadro en función del tiempo (en años) a partir del momento en que fue originalmente vendido por su creador

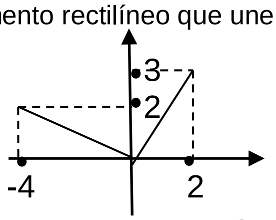


a. Determina la ley C(x) correspondiente al gráfico de la función
b. ¿Cuál será el precio de la obra a los 60 años de su venta?
c. ¿En qué momento el costo de la obra es de $3500?

18. Se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad de $4\frac{m}{s}$.La altura (en metros) a la que se encuentra la piedra ,transcurridos t segundos desde su lanzamiento está dada por la función $h(x) = -(t-2)^2 - 4$
a. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la piedra?
b. ¿Cuánto tiempo tarda en volver al suelo?

19. Determina el dominio de la función cuya ley se expresa:
a. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x+1}$ c. $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$
b. $f(x) = \frac{x^2+5x+3}{x^2-1}$ d. j(x)= $\sqrt{x} + \sqrt{3-x}$

20. Expresa como función a los conjuntos de puntos que se indican en cada caso:
a. El segmento rectilíneo que une los puntos (1;-3) y (5;7).
b.



Respuestas a los problemas de la práctica complementaria

1. **a)**es par **b)** $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ =2+5h+4h^2+h^3 **c)**ceros= $\{0,1,-1\}$ **d)**gráfica a cargo del lector.Si $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to +\infty$
2. **a)** es impar **b)** ceros=$\{0,1,-1\}$ **c)** Si $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$ **d)**gráfica a cargo del lector
3. a cargo del lector
4. Verdadera
5. **a)**A cargo del lector **b)**el cero de t(x) es $-\frac{2}{3}$
6. **a)** Falso.Dom(f)=$\left[\sqrt[3]{4};+\infty\right)$**b)** Falso,pues –f(-x)$\neq$ f(x) **c)**Falso,pues no es biyectiva:f(1)=f(-3)
d) Falso, para x=0 f(x)=0 $\therefore$ A=$(1;+\infty) \cup \{0\}$
e) Verdadero, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{3}{x_1-1} \neq \frac{3}{x_2-1} \qquad \forall x_1, x_2 \neq 1$
f) Verdadero , h(-x)=h(x) $\forall x \neq 0$ entonces h es par
g) Falso . No existe g(0)entonces g no interseca el eje de las ordenadas .
h) Verdadero . –(f.g)(-x)=(f.g)(x) entonces f.g es impar

i) Falso . f(g(3))=8 $\neq$ 26
j) Falso . f(0)=f(3)=3 entonces f interseca al eje de las abscisas .
k) Verdadero . f(g(x))=x entonces f y g son funciones inversas .
l) Falso .El conjunto de los ceros de h(x) es $\{0;3;-3\}$

m) Falso.Considerando $\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3 \quad Dom(f)=R \\ g(x)=x^2 \quad Dom(g)=R \end{array}\right\} \Rightarrow Dom\left(\frac{f}{g}\right)=Dom\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=R-\{0\}$ entonces h no tiene el mismo dominio de f y g.

7. $g(f(x))=\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-5}$ $\qquad Dom(g\circ f)=R-\left\{0;\frac{1}{5}\right\}$

8. $g(x)=\dfrac{x^2}{3}$

9. $f(-a)=(-a)^4-2(-a)^2+5=a^4-2a^2+5=f(a)$

10. Sí,f es biyectiva , $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}$

11. a)$4000 es la ganancia máxima b)65 asientos .

12. a) representación gráfica a cargo del alumno. Im(h)= $Z\cup[-1;+\infty)$
 b) -4
 c) i) $\forall x_1,x_2\in R; x_1<x_2 \Rightarrow x_1-3<x_2-3\Rightarrow$
 $\Rightarrow (x_1-3)^3<(x_2-3)^3 \Rightarrow 2(x_1-3)^3<2(x_2-3)^3 \Rightarrow f \text{ es creciente}$
 ii) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2(x-1)}+3\neq 2(x+3)^3-1=g(x)$
 iii) $\left.\begin{array}{r} -f(-1)=-31 \\ f(1)=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow -f(-1)\neq f(1) \Rightarrow \quad f \text{ no es impar}$

13. a cargo del alumno
14. m(x)=x+3
15. gráficas a cargo del alumno b)$(0;\frac{1}{2})$
16. a) a los 20 meses , en abril del 2001 b) 2700 conejos
 c)2112 conejos d) después de los 50meses
17. a) C(x)=30x+$500 b) C(60 años)=$2300 c) A los 100 años
18. a) altura máxima:4 m b) 4 seg. Tarda en volver al suelo .
19. a) Dom(f)= $R-\{-1\}$ b) Dom(g)=R c) Dom(f)= $R-\{1;-1\}$ d)S=(0;3)

a) $f:[1;5]\to R / f(x)=\frac{5}{2}x-\frac{11}{2}$ $\qquad$ b) $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x & -4\le x<0 \\ \frac{3}{2}x & 0<x\le 2 \end{cases}$