1

Matrices

Definición 1 *Una matriz real es una función A de $[1,..,n] \times [1,..,m]$, al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, y decimos que A tiene orden $n \times m$*

Una matriz A se representa con todos sus valores de manera usual como un arreglo de n filas y m columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

También la podemos representar como $A = (a_{ij})$, donde $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$.

Ejemplos de matrices:

Las matrices se utilizan en matemática discreta para expresar relaciones entre los elementos de un conjunto.

1. Ejemplo de una matriz 2×2: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

   Como función la matriz anterior se escribe $A : [1, .., n] \times [1, .., m] \to \mathbb{R}$, donde:

$$\begin{array}{ccc} (1,1) & \mapsto & a_{11} \\ (1,2) & \mapsto & a_{12} \\ (2,1) & \mapsto & a_{21} \\ (2,2) & \mapsto & a_{22} \end{array}$$

2. Ejemplo de una matriz 3×3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

   Como función se escribe $A : [1, .., 3] \times [1, .., 3]$, donde:

$$\begin{array}{ccc} (11) & \mapsto & a_{11} \\ (12) & \mapsto & a_{12} \\ (13) & \mapsto & a_{13} \\ (21) & \mapsto & a_{21} \\ (22) & \mapsto & a_{22} \\ (23) & \mapsto & a_{23} \\ (31) & \mapsto & a_{31} \\ (32) & \mapsto & a_{32} \\ (33) & \mapsto & a_{33} \end{array}$$

3. Ejemplo de una matriz 3×2: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

4. Ejemplo de una matriz 2×3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

5. Ejemplo de una matriz 1×3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$

6. Ejemplo de una matriz 3×1: $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$

Igualdad de matrices:

Definición 2 *Dos matrices A, B del mismo orden $n \times m$ son iguales si y sólo si, son iguales como funciones. Es decir si son iguales entrada por entrada:*

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \;\; 1 \leq i \leq n, \;\; 1 \leq j \leq m$$

1.1. Matrices cuadradas

Las matrices cuadradas son aquellas que tienen el mismo número de filas que de columnas. Éste conjunto de matrices suele escribirse como M_n. Las matrices cuadradas tienen propiedades particulares.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1.2. Matriz transpuesta

Dada una matriz A se define la matriz transpuesta A^T (la transpuesta), como aquella que cambia las filas por columnas, o las columnas por filas, es decir:

Si $A = (a_{ij})$, entonces $A^T = (a_{ji})$

Para una matriz en M_3:

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, entonces $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

Propiedades de la matriz transpuesta:

1. $(A^T)^T = A$, la transpuesta de una transpuesta es igual a la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{A^T} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(A^T)^T} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. $(rA)^T = rA^T$, la transpuesta de un producto escalar es el producto escalar de la transpuesta.
3. Si $A = A^T$, la matriz se llama simétrica.
4. Si $A^T = -A$, la matriz se llama antisimétrica. ver figura 1

1.3. Elementos de una matriz

1. Sea $A \in M_n$ una matriz cuadrada decimos que los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots$ conforman la diagonal principal de una matriz. Por ejemplo en M_3,

$$N_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2. Sea $A \in M_n$ una matriz cuadrada definimos a la traza de la matriz A como

$$tr(a) = a_{11} + a_{22} + \cdots + A_{nn}$$

1.4. Matriz identidad

En M_n existe la matriz identidad, que consiste en una matriz con unos en la diagonal (es decir donde $i = j$) y ceros en otro lugar (o sea donde $i \neq j$).

Por ejemplo en M_3,

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

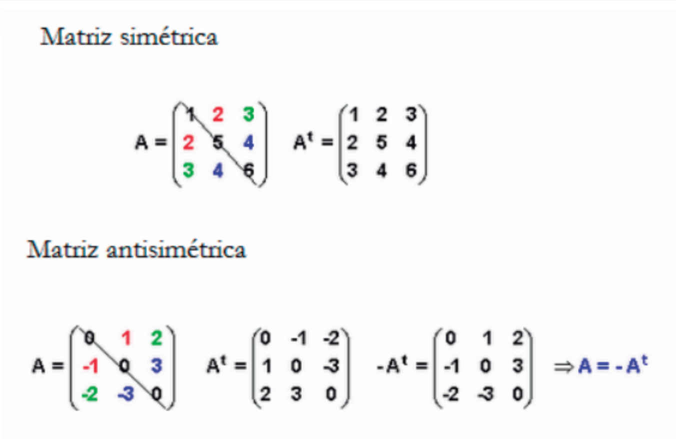

figura 1

1.5. Matriz nula

En M_n existe la matriz nula N, que consiste en una matriz donde todos sus elementos a_{ij} son cero.

Por ejemplo en M_3,

$$N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.6. Matriz diagonal

La matriz es diagonal si tiene valores cero fuera de la diagonal. En la diagonal es posible tener ceros o no.

Si $a_{ij} = 0$, con $i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

1.7. Matriz triángular

Una matriz es triángular superior, si tiene valores cero abajo de la.

Si $a_{ij} = 0$, con $i > j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Una matriz es triángular inferior, si tiene valores cero arriba de la diagonal.

Si $a_{ij} = 0$, con $i < j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Una matriz es no negativa si todas sus entradas no son negativas.

$$\text{Si } a_{ij} \geq 0, \forall i, j$$

Una matriz simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$, es decir si $A = A^T$

$$\text{Si } a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

1.8. Matrices binarias

Una matriz es binaria, si sus entradas toman sólo dos valores diferentes, podemos tomar los valores de $0, 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz booleana

Una **matriz booleana** es una matriz de números cuyas componentes o entradas son exclusivamente ceros o unos. Las matrices booleanas son útiles porque pueden representar objetos abstractos como relaciones binarias o grafos.

Una matriz booleana general de *nxm* elementos tiene la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3m} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Donde $a_{ij} = 0$ o $a_{ij} = 1$.

Operaciones con matrices booleanas

Las operaciones que se pueden realizar entre matrices booleanas son tres: unión, conjunción y producto booleano. Sin embargo, estas operaciones no pueden realizarse sobre dos matrices cualesquiera, sino que deben cumplir ciertos criterios para poder llevarse a cabo. En particular, en el caso de la unión y la conjunción, las matrices que intervienen en la operación deben tener el mismo tamaño, y en el caso del producto booleano, las matrices deben cumplir con las mismas condiciones que para formar el producto de matrices.

Unión / Disyunción

Sean A, B y C matrices booleanas de nxm elementos. Se define $A \vee B = C$ la unión de A y B, por:

$$C[i,j] = \begin{cases} 1, & \text{si } A[i,j] = 1 \text{ } o \text{ } B[i,j] = 1 \\ 0, & \text{si } A[i,j] = B[i,j] = 0 \end{cases}$$

Intersección / Conjunción

Sean A, B y C matrices booleanas de nxm elementos. Se define $A \wedge B = C$ la intersección de A y B, por:

$$C[i,j] = \begin{cases} 1, & \text{si } A[i,j] = B[i,j] = 1 \\ 0, & \text{si } A[i,j] = 0 \text{ } o \text{ } B[i,j] = 0 \end{cases}$$

Otras operaciones matriciales

La traspuesta de una matriz booleana es también otra matriz booleana; pero las operaciones con matrices booleanas no siempre producen matrices booleanas. Un ejemplo de operación que no es interna para las matrices booleanas es la suma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sin embargo, si se consideran las operaciones no sobre números reales sino sobre elementos del cuerpo de característica 2 $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ queda garantizado que cualquier operación entre matrices booleana es boolena. Para el ejemplo anterior se tiene:

$$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$$

2

Operaciones entre matrices

2.1. Suma entre matrices

La suma esta definida sólo para matrices del mismo orden, es decir, sólo se puede sumar una matriz de orden $n \times m$ con otra de orden $n \times m$. La suma se realiza entrada por entrada, es decir:

Si $A = (a_{ij})$, y $B = (b_{ij})$, entonces $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

Ejemplos de suma de matrices:

1. Una matriz de orden 2×2 más otra del mismo orden 2×2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1) + (-1) & (2) + (0) \\ (3) + (2) & (4) + (3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Una matriz de orden 3×2 más otra del mismo orden 3×2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Una matriz de orden 1×3 más otra del mismo orden 1×3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Una matriz de orden 3×1 más otra del mismo orden 3×1.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

5. Una matriz 3×3 sumada con otra del mismo orden 3×3.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Las matrices con la suma forman un grupo Abeliano, es decir:

1. La suma de matrices es conmutativa, $A + B = B + A$.
2. La suma de matrices es asociativa, $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. Existe la matriz (neutro aditivo) cero, tal que $A + 0 = 0 + A = A$.
4. Para toda matriz A, existe (inverso aditivo) la matriz $-A$.

2.2. Producto por un escalar

El producto de un escalar (número real) r por una matriz rA, se define de la forma natural, es decir, multiplicar cada entrada de A por el número r. El orden de A puede ser cualquiera.

Si $A = (a_{ij})$, entonces $rA = (ra_{ij})$

Ejemplos

1. Una matriz 2×2 por $r = 3$.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Una matriz 3×2 por $r = 2$.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

3. Una matriz 3×3 por r.

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & ra_{13} \\ ra_{21} & ra_{22} & ra_{23} \\ ra_{31} & ra_{32} & ra_{33} \end{pmatrix}$$

2.3. Producto de matrices

El producto de matrices esta definido, entre A, matriz de orden $n \times p$, por B de orden $p \times m$. Dando como resultado C de orden $n \times m$

Si $A = (a_{ij})$, y $B = (b_{ij})$, entonces $C = (c_{ij})$ donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p}(a_{ik})(b_{kj})$.

Ejemplos de producto de matrices:

1. Una matriz 2×2 por otra de orden 2×2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(1)+(2)(2) & (0)(1)+(3)(2) \\ (1)(3)+(2)(4) & (0)(3)+(3)(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

El proceso es el siguiente:

a) Se multiplica la primera fila de la primera matriz por la primera columna de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 1 + 2\ 2 & \_ \\ \_ & \_ \end{pmatrix}$$

b) Se avanza de fila y se multiplica la segunda fila de la primera matriz por la primera columna de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(1)+(2)(2) & \_ \\ 1\ 3 + 2\ 4 & \_ \end{pmatrix}$$

c) De manera similar se multiplica la primera fila de la primera matriz por la segunda columna de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(1)+(2)(2) & 0\ 1 + 3\ 2 \\ (1)(3)+(2)(4) & \_ \end{pmatrix}$$

d) Avanzando de fila finalmente, se multiplica la segunda fila de la primera matriz por la segunda columna de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(1)+(2)(2) & (0)(1)+(3)(2) \\ (1)(3)+(2)(4) & 0\ 3 + 3\ 4 \end{pmatrix}$$

---

2. Una matriz 2×2 por otra de orden 2×2.

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)(-3)+(-1)(5) & (3)(-3)+(4)(5) \\ (-2)(1)+(-1)(2) & (3)(1)+(4)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$$

---

3. Una matriz 2×2 por otra de orden 2×2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(1)+(1)(1) & (2)(1)+(1/2)(1) \\ (-1)(2)+(1)(-1) & (2)(2)+(1/2)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5/2 \\ -3 & 7/2 \end{pmatrix}$$

---

4. Una matriz 2×3 por otra de orden 3×2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (-1)(1)+(0)(3)+(3)(5) & (1)(1)+(1/2)(3)+(-2)(5) \\ (-1)(2)+(0)(4)+(3)(6) & (1)(2)+(1/2)(4)+(-2)(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -15/2 \\ 16 & -8 \end{pmatrix}$$

---

5. Una matriz $A, 3 \times 3$ por otra B de orden 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Resumiendo:

1. La suma de matrices forma un grupo Abeliano, es decir, es conmutativa, es asociativa, existe la matriz cero 0, y para toda matriz A, existe la matriz inversa aditiva $-A$.
2. Para el producto de matrices: éste NO es conmutativo, si es asociativo, existe la matriz neutra I (para matrices cuadradas), y NO para toda matriz A, existe su matriz inversa multiplicativa A^{-1}.

Propiedades de la matriz transpuesta y operación entre matrices:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$, la transpuesta de una suma, es la suma de las transpuestas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A+B} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(A+B)^T} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \xrightarrow{A^T} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{B^T} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

2. $(AB)^T = B^T A^T$, la transpuesta de un producto es el producto conmutado de las transpuestas .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{AB}$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 13 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{(AB)^T} \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 20 & 18 \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{A^T} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, B \xrightarrow{B^T} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 20 & 18 \end{pmatrix}$$