Unidad Nº 1: Conjuntos

Casi todos los elementos matemáticos son conjuntos, independientemente de otras propiedades adicionales que los caracterizan, razón por la que se puede decir que la Teoría de Conjuntos constituye, en cierto sentido, la base sobre la que se construye toda la Matemática.
Una colección de elementos es un conjunto cuando es posible decidir, sin ambigüedades, si un objeto dado pertenece o no a la misma.

Ejemplos:

- Los puntos de una figura
- Los alumnos de un curso determinado
- Las letras del alfabeto
- Los números enteros mayores que -3 y menores que 3

Definición de conjunto

Un conjunto es un grupo o colección de objetos o entidades distinguibles y bien definidas con características comunes. Tales objetos o entidades que pertenecen a un conjunto reciben el nombre de elementos del mismo.

Notación

Un conjunto se escribe o denota con una letra mayúscula; y se puede determinar ya sea:

- por una lista de sus elementos separados por comas y entre llaves(**extensión**),
- estableciendo una regla que determine si cierto objeto o entidad pertenece al conjunto (**descripción**).

Se dice que una relación descriptiva a la que no satisface ningún elemento define el conjunto vacío y está representado por { }, o bien por Ø.

Por extensión	**Por descripción**
$A = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots \ldots.\}$	$A = \{x / x \in \Re, \text{x es un número entero impar}\}$
$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	$B = \{x / x \in \Re, \text{x un dígito}\}$
$P = \{\ \}$o bien Ø	$P = \{x / x \in \Re, \text{x es un impar term inado en 2}\}$

Pertenencia

La notación $x \in R$ significa que la entidad u objeto x es un elemento del conjunto R. La notación $x \notin R$ quiere decir que x no es un elemento del conjunto R.

Por ejemplo $3 \in A,\ 4 \notin A,\ 10 \notin B,\ 2 \in B$.

Subconjunto

Si todo elemento de un conjunto A es también un elemento del conjunto B, se dice entonces que A es un subconjunto del conjunto B, o que A está contenido o incluido en B, o que A es parte de B, o que B contiene o incluye a A.

Se denota por $A \subset B$. Con la notación $A \not\subset B$ se indica que A no es subconjunto de B.

En símbolos: $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Por ejemplo:

Sean los siguientes conjuntos:

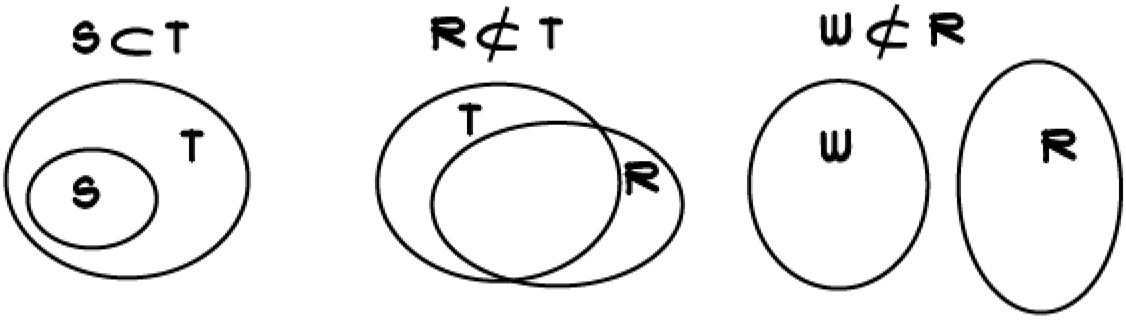
$T = \{2, 3, 5, 7, 11\};\ S = \{2\};\ W = \{2, 4, 6, 8, 10\};\ R = \{1, 3, 5, 7, 11\}$

$S \subset T$	S es subconjunto de T
$R \not\subset T$	R no es subconjunto de T
$S \subset W$	S es subconjunto de W
$W \not\subset R$	W no es subconjunto de R
$\varnothing \subset S$	El conjunto vacío es subconjunto de S

Observaciones:

- El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.
- Para probar que un conjunto A no es subconjunto de otro B, es suficiente mostrar un elemento a en A tal que a no pertenezca a B.
- Todo conjunto A es subconjunto de sí mismo: $A \subset A, \forall A$

Para mostrar relaciones entre conjuntos, es de utilidad emplear los **diagramas de Venn**. Así por ejemplo las relaciones de inclusión y de no inclusión anteriores, se representan del siguiente modo:



Cardinalidad de un conjunto finito

La cardinalidad de un conjunto finito es el número entero positivo que representa la cantidad de sus elementos y se denota por el símbolo |A|. Por ejemplo: |T| = 5

Conjuntos iguales

Dos conjuntos A y B son iguales si ambos tienen los mismos elementos, es decir todo elemento de A es elemento de B y todo elemento de B es elemento de A.

De lo anterior se observa que todo conjunto es subconjunto de si mismo.

En símbolos: $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$

Por ejemplo:

$A = \{x \in Z \, / \, x^2 = 9\}$ ***y*** $B = \{-3, 3\}$

$E = \{x \, / \, x \text{ es un número primo par}\}$ ***y*** $F = \{2\}$

Subconjunto propio

Un conjunto A es subconjunto propio de B si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $A \subset B$ (A es subconjunto de B)

2. $A \neq B$ (A y B no son iguales)

La segunda condición nos indica que la cardinalidad del conjunto B es mayor a la de A.

Dicho en términos más sencillos: el conjunto A es un subconjunto propio de B si cada elemento de A es también elemento de B, pero cada elemento de B no es necesariamente un elemento de A.

La relación anterior se denota por $A \subseteq B$.

Conjunto Universal y Complemento

Un conjunto universal (U) o universo, es un conjunto especificado que contiene todos los elementos de interés para un estudio en particular. A partir de este conjunto, determinado para un cierto contexto, se supone que cada conjunto considerado en este contexto es subconjunto de U.

El conjunto U puede variar. Un mismo conjunto puede adquirir distintos conjuntos universales.

Por ejemplo:

$A = \{x / x \text{ es natural y } 2 \leq \text{x} \leq 12 \}$ $\boldsymbol{y}$ $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

Admiten los universales:

$U_1 = Z$

$U_2 = \{x / \text{x} \in \text{N y } 2 \leq \text{x} \leq 12 \}$

$U_3 = N$

Si dos conjuntos tienen la propiedad de que su unión es el conjunto universo y su intersección es el conjunto vacío, se dice que un conjunto es el complemento del otro con relación al universo.

Entonces si U representa al conjunto universal, entonces el complemento de un conjunto dado A; es el conjunto de los elementos que no pertenecen al mismo. Se denota por CA o bien por $\overline{A}$ y se describe con:

$\overline{A} = \{x / x \in \text{U y x} \notin \text{A} \}$

De acuerdo a lo anterior: $\overline{A} = U - A \rightarrow \overline{A} \cup A = U$

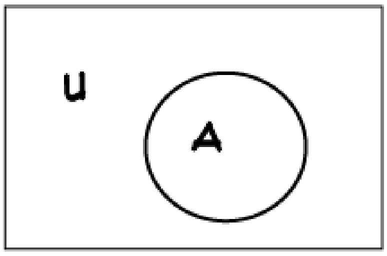
Por ejemplo:

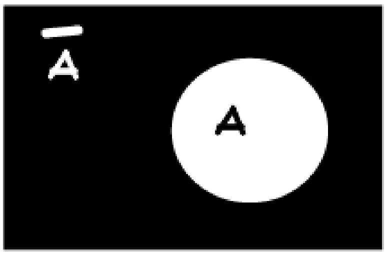
Si $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\boldsymbol{y}$ $A = \{4, 5\}, entonces$ $\overline{A} = \{1,2,3,6\}$

Si U es el abecedario y B = {a, e, i, o, u}, entonces $\overline{B}$ es el conjunto de todas las consonantes.

Ministerio de Educación,
Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Rosario

En los diagramas de Venn, se dibuja un rectángulo para representar U.





Operaciones entre conjuntos

En lo que sigue se definen nuevos conjuntos a partir de conjuntos dados, considerados subconjuntos de un mismo conjunto universal U.

Unión

La unión de dos conjuntos A y B, es el conjunto que se compone de todos los elementos de A y todos los elementos de B.

La unión de A y B se representa por $A \cup B$ y se describe mediante:

$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$

Propiedades de la Unión de Conjuntos

Si A, B y C son subconjuntos de un conjunto Universo:

1. Propiedad conmutativa: $A \cup B = B \cup A$

2. Propiedad Asociativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3. Propiedad de identidad $A \cup \varnothing = A \quad A \cup U = U$

Observación: $x \in A \cup B$ significa que x es un elemento de A o que x es un elemento de B, o que x pertenece a ambos conjuntos.

Por ejemplo:

$A = \{a, b, c, d\}$ ***y*** $B = \{a\}$, entonces $A\ U\ B = \{a, b, c, d\}$

Intersección

La intersección de dos conjuntos A y B, es el conjunto que consta de los elementos que son comunes a ambos.

La intersección de A y B se representa por $A \cap B$ y se describe por medio de:

$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$

Por ejemplo:

$A = \{a, b, c, d\}$ **y** $B = \{a\}$, entonces $A \cap B = \{a\}$

Propiedades de la intersección de Conjuntos

Si A, B y C son subconjuntos de un conjunto Universo:

1.- Propiedad conmutativa: $A \cap B = B \cap A$

2.- Propiedad Asociativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3.- Propiedad de identidad: $A \cap \varnothing = \varnothing$ $\quad A \cap U = A$

Diferencia

El conjunto diferencia de dos conjuntos A y B es el conjunto que se compone de los elementos de A que no son elementos de B.

El conjunto diferencia de A y B se representa por $A - B$ y se describe por:

$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$

Por ejemplo:

$A = \{a, b, c, d\}$ **y** $B = \{a\}$, entonces $A - B = \{b, c, d\}$

Conjuntos disjuntos

Los conjuntos A y B se llaman disjuntos si no tienen elementos comunes. Entonces, A y B son disjuntos si y solo sí $A \cap B = \varnothing$**.**

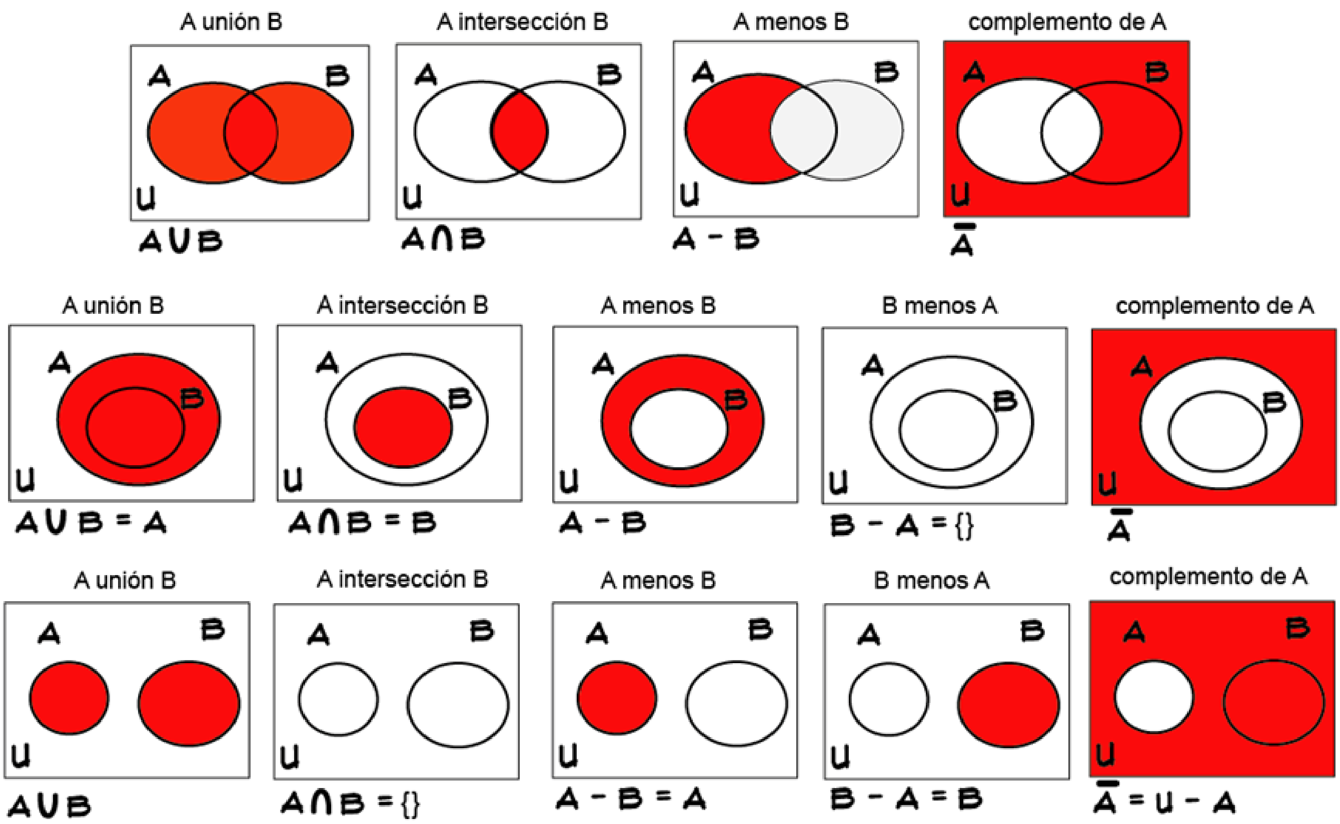
Observación: las operaciones definidas pueden extenderse a un número finito de conjuntos. Así, por ejemplo, para los conjuntos A, B y C se define:

Unión: $A \cup B \cup C = \{x / x \in A \vee x \in B \vee x \in C\}$

Intersección: $A \cap B \cap C = \{x / x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\}$

Unidad Nº 1: Conjuntos

Los conjuntos formados por uniones, intersecciones, complementos y diferencias pueden representarse por medio de los diagramas de Venn. Se indica la operación correspondiente a la región sombreada.



<u>**Propiedades de las operaciones entre conjuntos**</u>

Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Ministerio de Educación,
Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Rosario

Unidad Nº 1: Conjuntos

Idempotencia	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Complemento	$\overline{\overline{A}} = A$ $A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$ $\overline{\varnothing} = U$ $\overline{U} = \varnothing$
Leyes de Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

PRÁCTICA N°1: CONJUNTOS, OPERACIONES Y SUS PROPIEDADES

Ejercicio 1:

Considere el conjunto $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y los conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 7\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$; $C = \{1, 3, 6\}$ y $D = \{2, 6, 7\}$.

Calcule:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $B \cup C$

d) $A \cap B \cap C$

e) $A \cap (B \cup C)$

f) $A - B$

g) $\overline{A}$

h) $\overline{D}$

i) $\overline{A \cup B}$

j) $\overline{A} \cap \overline{B}$

k) $C - B$

l) $(C - B) \cup (B - C)$

m) $(A \cap B) \cup C$

n) $B \cap C$

o) $\overline{A \cap B}$

Ejercicio 2:

Atendiendo a la figura, identifique los casos enunciados como verdaderos (V) o falsos (F):

a) $a \in A \cap B$

b) $b \in B \cap C$

c) $d \notin A \cup B - C$

d) $c \in B \cup C$

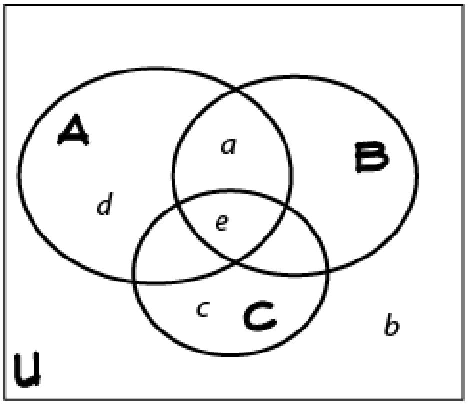
e) $d \notin C$

f) $c \in A - B$

g) $e \in A \cap B \cap C$

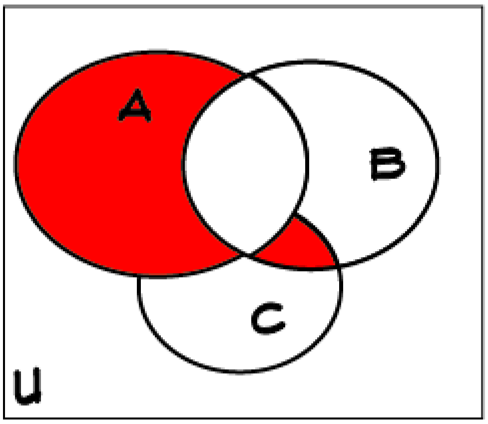
h) $e \in A \cap C$

i) $b \in \overline{A \cup B \cup C}$



Ejercicio 3:

Por medio de operaciones con los conjuntos A, B y C describa la región sombreada del diagrama:



Ejercicio 4:

Se ha definido el cardinal de A, conjunto finito, como el número de elementos del mismo y se lo ha notado |A|.

Para la unión de dos conjuntos finitos A y B se verifica la siguiente propiedad:

$|A \cup B| = |A| + |B|$ Si A y B son conjuntos disjuntos

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ Si A y B no son disjuntos

Para tres conjuntos; A, B y C, se verifica:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Compruebe estas propiedades para los siguientes conjuntos:

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{2, 3, 5, 6, 8\}$

b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{1, 2, 5, 6, 7\}$.

$C = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

c) $A = \left\{ x / x \text{ es un entero positivo y } x^2 \leq 16 \right\}$

$B = \left\{ x / x \text{ es un entero negativo y } x^2 \leq 25 \right\}$