Práctico 5 - Vectores

1. Sean los vectores en el plano: $\boldsymbol{u} = (3,-2)$, $\boldsymbol{v} = (3,5)$, $\boldsymbol{w} = (-4,1)$

   a) Graficar $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$

   b) Efectuar las siguientes operaciones gráfica y analíticamente:

   i) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ ii) $3\boldsymbol{u}$ iii) $-2\boldsymbol{u}$ iv) $\frac{1}{3}\boldsymbol{u}$ v) $3\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v}$

   vi) $\boldsymbol{w}-2\boldsymbol{u}$ vii) $2\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{w}$ viii) $\boldsymbol{u}-(2\boldsymbol{v}-3\boldsymbol{w})$ ix) $3(\boldsymbol{u}+4\boldsymbol{w})-\boldsymbol{v}$

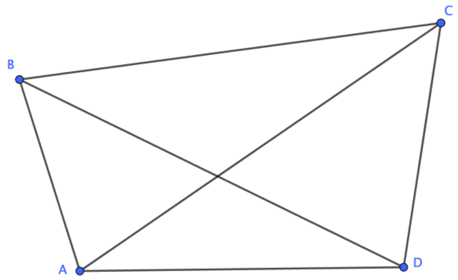
2. Utilizando la figura, escribir las siguientes combinaciones de vectores como un solo vector:

   a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

   b) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$

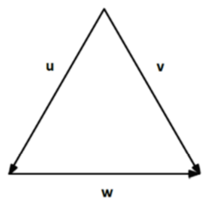
   c) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}$

   d) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$

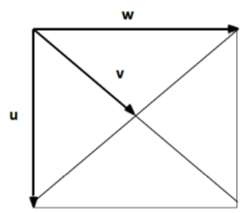


3. Sabiendo que $\boldsymbol{u}$ es unitario, calcular $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u}$ en cada caso (las figuras corresponden a un triángulo equilátero y un cuadrado)

a)



b)



4. Sea $\boldsymbol{w} = (3,2) \in \mathbb{R}^2$. Graficar $\alpha\boldsymbol{w}$ para diversos valores de α en los siguientes casos:

   a) $\alpha > 1$

   b) $0 < \alpha < 1$

   c) $-1 < \alpha < 0$

   d) $\alpha < -1$

5. Dados los vectores del espacio $\boldsymbol{u} = (1,3,2)$, $\boldsymbol{v} = (-2,0,1)$ y $\boldsymbol{w} = (3,-1,-5)$

   a) Graficar $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$

   b) Efectuar las siguientes operaciones:

   i) $\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$ ii) $4\boldsymbol{v}$ iii) $-\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ iv) $4\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}\boldsymbol{w}$

   v) $-3\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}+4\boldsymbol{w}$ vi) $-\boldsymbol{u}-(5\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{w})$ vii) $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})$

6. Calcular la longitud de los siguientes vectores:

   $(4,5)$; $(0,-5)$; $(-1,2)$; $(4,-3)$; $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$; $(-1,1,-1)$; $(2,1,-2)+(3,5,4)$; $(-1,-2,3)$; $-2(-1,-2,3)$

7. Hallar la distancia entre los puntos A y B si:

   a) $A = (-1,2)$, $B = (0,0)$ b) $A = (-1,2)$, $B = (3,-2)$

c) $A = (2,1,5)$, $B = (3,-1,4)$ d) $A = (1,0,-3)$, $B = (-2,3,1)$

8. Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que:
   a) $|\overrightarrow{OA}| = 6 \; si \; A = (3,k)$
   b) $|\overrightarrow{OA}| = 2 \; si \; A = (2,k,0)$
   c) $\text{dist}(A,B) = 2 \; si \; A = (1,1,1) \; y \; B = (k,-k,2)$
   d) $|\overrightarrow{OA}| = 1 \; si \; A = k\,(2,2,1)$

9. Sean los vectores $\boldsymbol{a} = (2,1)$; $\boldsymbol{b} = (-1,2)$; $\boldsymbol{c} = (-3,2)$; $\boldsymbol{d} = (1,0)$; $\boldsymbol{e} = (0,0)$
   Calcular:
   a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$
   b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$
   c) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}$
   d) $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$
   e) $\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d})$
   f) $(\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a}$

10. Sean los vectores $\boldsymbol{a} = (1,2,1)$; $\boldsymbol{b} = (0,-1,1)$; $\boldsymbol{c} = (3,1,-1)$; $\boldsymbol{d} = (-2,-3,1)$
    a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$
    b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$
    c) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$
    d) $\boldsymbol{a} \cdot (2\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c})$
    e) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d}$
    f) $(\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$

11. Determinar si $\boldsymbol{u} \; y \; \boldsymbol{v}$ son perpendiculares:
    a) $\boldsymbol{u} = (-1,1) \; y \; \boldsymbol{v} = (3,3)$
    b) $\boldsymbol{u} = (5,-3) \; y \; \boldsymbol{v} = (0,0)$
    c) $\boldsymbol{u} = (1,5,1) \; y \; \boldsymbol{v} = (1,0,1)$
    d) $\boldsymbol{u} = (1,-2,4) \; y \; \boldsymbol{v} = (-2,1,1)$

12. Ortogonalidad
    a) Hallar 3 vectores del plano que sean ortogonales al (-3,1). Graficar.
    b) Hallar todos los vectores perpendiculares al (-1,2) que tengan norma 1. Graficar.
    c) Hallar 3 vectores del espacio que sean perpendiculares al (-1,-3,4).
    d) Hallar un vector ortogonal al (1,0,-2) que tenga norma igual a 4.

13. Dados $\boldsymbol{a} = (1,1,1)$; $\boldsymbol{b} = (-1,-2,2)$; $\boldsymbol{c} = (2,4,-2)$; $\boldsymbol{d} = (0,0,0) \; y \; \boldsymbol{e} = (-1,2,5)$, efectuar las siguientes operaciones:
    a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ b) $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ c) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ d) $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$ e) $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$
    f) $\boldsymbol{d} \times \boldsymbol{e}$ g) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{e}$ h) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{e})$ i) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{e}$

14. Encontrar un vector no nulo que sea ortogonal a los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ en cada caso:
    a) $\boldsymbol{u}$=(-1,-3,6) y $\boldsymbol{v}$=(2,6,-12) ¿Cuántos hay?
    b) $\boldsymbol{u}$=(1,2,-3) y $\boldsymbol{v}$=(-1,5,-2) ¿Cuántos hay?

15. Encuentre el área del paralelogramo con los vértices adyacentes dados:
    a) $(1,-2,3)$; $(2,0,1)$; $(0,4,0)$ b) $(-8,0,10)$; $(-3,2,-6)$; $(5,-5,0)$
    c) $(-2,0,1)$; $(1,4,2)$; $(-3,1,5)$ d) $(7,-2,-3)$; $(-4,1,6)$; $(5,-2,3)$

16. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$, donde $P=(2,1,-1)$, $Q=(-3,1,4)$, $R=(-1,0,2)$ y $S=(-3,-1,5)$

17. Decidir cuales de los siguientes puntos pertenecen a la recta $L: X=\alpha\,(-2,1)+(3,2)$, con $\alpha\in\mathbb{R}$:
    $P_1=(3,2)$, $P_2=(-2,1)$, $P_3=(0,0)$, $P_4=(-2,4)$, $P_5=(5,-1)$ Graficar.

18. Dada la recta $L: X=\alpha\,(2,-1)+(4,-3)$, para $\alpha\in\mathbb{R}$.
    a) Hallar 3 puntos que pertenezcan a la recta.
    b) Encontrar los puntos donde la recta corta a los ejes coordenados.

19. Encontrar las ecuaciones paramétricas de:
    a) La recta que pasa por el punto $P=(-3,2)$ y que tiene dirección $\boldsymbol{v}=(4,5)$.
    b) La recta que tiene dirección $\boldsymbol{w}=(2,0)$ y pasa por el punto $Q=(3,5)$.
    c) La recta que pasa por los puntos $A=(-1,5)$ y $B=(3,4)$.
    d) La recta que es paralela a $L: X=\alpha\,(-2,3)+(1,-1)$ y pasa por el punto $P=(1,-4)$.
    e) La recta que pasa por el origen y es paralela a la recta que contiene a $(-4,5)$ y $\left(-\frac{1}{2},-3\right)$
    f) La recta que es perpendicular a $L: X=\alpha\,(-2,4)+(3,2)$ y pasa por el punto $P=(1,-3)$.
    g) La recta de ecuación $y=2x+3$.
    h) La recta de ecuación $x-2y=4$.
    i) La recta de ecuación $y=-3$.
    j) La recta de ecuación $x=2$.

    Graficar cada una de las rectas halladas.

20. Encontrar la ecuación implícita de las siguientes rectas en $\mathbb{R}^2$:
    a) $L: X=\alpha\,(-3,2)+(7,1)$
    b) $L: X=\beta\,(2,0)+(0,4)$
    c) $L: X=\delta\,(0,1)+(3,-2)$

21. Encontrar en $\mathbb{R}^3$ las ecuaciones paramétricas de:
    a) La recta que tiene dirección $\boldsymbol{v}=(-3,7,1)$ y que pasa por el punto $(-3,8,5)$
    b) La recta que pasa por los puntos $(1,-3,5)$ y $(2,4,-1)$.
    c) La recta que es paralela al eje y y que pasa por el punto $(1,2,3)$.
    d) La recta paralela a $L: X=\alpha\,(-2,-4,5)+(0,3,-1)$ que pasa por $(3,-1,2)$.
    e) Dos rectas distintas perpendiculares a $L: X=\alpha\,(-1,2,-1)+(3,5,6)$ y que pasen por el punto $(1,9,-3)$.

22. Determinar si los puntos $A=(1,1,1)$, $B=(-2,0,1)$ y $C=(3,2,0)$ están alineados.

23. Dado el plano $\Pi : 2x - 5y + 3z = 11$
    a) Encontrar $a \in \mathbb{R}$ de manera tal que el punto $(2,a,7) \in \Pi$.
    b) ¿Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $(0,3a,5a) \in \Pi$?

24. Encontrar una ecuación vectorial para:
    a) El plano que contiene a los puntos $(1,3,4)$; $(-1,5,-7)$ y $(3,-1,2)$.
    b) El plano que contiene a la recta $L : X = \alpha\,(-1,2,3) + (3,4,1)$ y que pasa por el punto $(1,1,-1)$.
    c) El plano $\Pi : x - 2y + 3z = 6$
    d) El plano $\Pi : 3x + 5y - z = 0$
    e) El plano que contiene al eje x y al eje z.
    f) El plano paralelo a la recta $L : X = \alpha\,(1,2,-3) + (3,5,6)$ y que contiene a la recta $L' : X = \alpha\,(3,-5,6) + (1,-2,3)$.

25. Encontrar una ecuación implícita para:
    a) El plano que pasa por $(2,-1,4)$; $(6,8,-1)$ y $(1,-3,1)$
    b) El plano $\Pi : X = \alpha\,(2,-3,1) + \beta\,(5,1,-2)$
    c) El plano $\Pi' : X = \alpha\,(2,-3,1) + \beta\,(5,1,-2) + (4,-3,2)$
    d) El plano paralela al plano $\Pi_1 : 2x - 3y + 6z = -1$ que pase por el punto $(1,-2,1)$.
    e) El plano perpendicular a la recta $L : X = \alpha\,(1,-3,4) + (1,6,7)$ y que pase por el origen.
    f) El plano que contiene a la recta $L' : X = \beta\,(2,1,0) + (1,-4,1)$ y al punto $(1,-2,-2)$.

26. Comprobar si los puntos $(8,2,4)$, $(4,2,8)$, $(-2,0,1)$ y $(1,-1,3)$ son coplanares, es decir, que pertenecen al mismo plano.

27. Sea Π el plano que contiene a las rectas $L_1 : X = \lambda\,(-1,2,-1) + (3,0,0)$ y $L_2 : X = \mu\,(-2,4,-2) + (0,-2,1)$. Dar una ecuación vectorial y una implícita de Π.

28. Encontrar una recta que sea perpendicular al plano $\Pi : 2x - 3y + z = 8$ y que pase por $(-1,0,2)$

29. Encontrar una recta L que sea perpendicular a $L_1 : X = \lambda\,(1,-3,4) + (1,-2,1)$, paralela al plano $\Pi : -x + y - 2z = 9$ y que tenga un punto en común con $L_2 : X = \mu\,(-1,4,5) + (0,3,2)$