Teórica Regla de L'Hopital

1. Indeterminación: cero sobre cero

Veamos tres problemas típicos de límites ya trabajados cuando vimos el tema:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+8}-4}{x-4}$ 2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(3x)}{2x}$

Sabemos ya que los límites 1. y 2. se resuelven mediante técnicas algebraicas, multiplicando y dividiendo por el conjugado del numerador y luego factorizando los polinomios; en el 3°, además, se utiliza que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x}=1$, como vimos oportunamente en el capítulo de límites.

Los tres límites tienen una característica en común. En cada caso, está incluido un cociente y, tanto el numerador como el denominador, tienden a 0 como su límite.

No se puede usar, en estos casos, que el ***límite del cociente es el cociente de los límites porque el límite del denominador es cero, y además, se llega a una indeterminación cero sobre cero.***

En el *problema N° 1*, si multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del numerador que es $\sqrt{2x+8}+4$, y simplificamos $x-4$, podemos entonces salvar la indeterminación y calcular el límite pedido:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+8}-4}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{2x+8}-4)(\sqrt{2x+8}+4)}{(x-4)(\sqrt{2x+8}+4)}=\lim_{x\to 4}\frac{(2x+8-16}{(x-4)(\sqrt{2x+8}+4)}=$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{2x+8}+4)}=\lim_{x\to 4}\frac{2}{(\sqrt{2x+8}+4)}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

En el *problema N° 2*, el numerador es una diferencia de cuadrados y si en el denominador sacamos factor común x, y simplificamos $x-3$, podemos salvar la indeterminación y resolver el problema.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{x}=2$$

En el *problema N° 3*, si multiplicamos el numerador y el denominador por 3, luego sacamos factor común $\dfrac{3}{2}$ y luego utilizamos $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\alpha x}{\alpha x}=1$, salvamos la indeterminación y podemos calcular el límite pedido

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{3}\frac{sen3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\frac{sen3x}{3x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{sen3x}{3x}=\frac{3}{2}$$

Pero este tipo de indeterminaciones se puede resolver utilizando la Regla de L'Hopital que resulta como consecuencia del Teorema del valor medio de Cauchy.

Teórica Regla de L'Hopital

Teorema. Regla de L'Hopital: Si $f(x)\ y\ g(x)$ son funciones continuas en un entorno de **a** ,

es decir, en un intervalo alrededor del punto, salvo quizás en el punto **a** , y con derivadas continuas

en dicho entorno, siendo $g'(x)\neq 0$ cerca de **a** , $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ y existe el $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

entonces existe el limite $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Demostración

Supongamos que $f\ y\ g$ son continuas en $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$, definimos:

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & si\ \ x\neq a \\ 0 & si\ \ x=a \end{cases} \quad \text{y} \quad G(x)=\begin{cases} g(x) & si\ \ x\neq a \\ 0 & si\ \ x=a \end{cases}$$

F así definida resulta continua en el intervalo $(a-\delta,a+\delta)$ que contiene a **a**, pues $f(x)$ es continua en $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$, y como $\lim\limits_{x\to a}F(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)=0=F(a)$, es continua en **a**.

Los mismos argumentos valen para la función **G**, con lo cual es continua en $(a-\delta,a+\delta)$.

Por el Teorema del valor medio $\exists\ x_1$ *con* $a<x_1<x$ tal que $\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(x)}{G'(x)}$

Tomando límite por derecha $x\to a^+$ "entonces" $x_1\to a^+$ y $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

El límite por izquierda es igual, con lo cual, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Volvamos a los 3 problemas y calculemos los límites con esta regla. Como en los 3 problemas hay un límite donde el numerador y denominador tienden a 0 y las funciones cumplen con las hipótesis del teorema, podemos utilizarlo, derivando ambas funciones y analizando el límite de los cocientes de dichas derivadas.

Calculemos los límites utilizando la regla de L'Hopital:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+8}-4}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+8}}}{1}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{2x+8}}=\frac{1}{4}$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x}{2x-3}=2$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(3x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{2}=\frac{3}{2}$

Concluimos entonces que:

La Regla de L'Hopital se puede utilizar para el cálculo de límites de cocientes de funciones donde ambas tienden a cero o infinito siempre y cuando las funciones cumplan con las hipótesis del teorema.

Ejemplo a) Calcular $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{\ln(x-3)}$

Ejemplo b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{sen3x}$

Al intentar evaluar los límites de los ejemplos **a) y b)** donde las funciones del numerador y del denominador tienden a cero obtenemos una indeterminación del tipo cero sobre cero (todas las funciones cumplen con las hipótesis de la regla de L'Hopital).

Solución ejemplo a)

Como las funciones $f(x)=\sqrt{x^2+9}-5$ y $g(x)=\ln(x-3)$ son continuas en un entorno de cero y tienden a cero, al querer evaluar $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ vemos que se presenta una indeterminación cero sobre cero, por lo que podemos utilizar la regla de L'Hopital, pues se cumplen las hipótesis.

Para resolver el límite calculamos las derivadas de $f(x)$ *y* $g(x)$ o sea

$f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}$ *y* $g'(x)=\dfrac{1}{x-3}$, luego calculamos el límite del cociente $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ esto es,

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{\ln(x-3)}=\lim_{x\to 4}\frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}}{\dfrac{1}{x-3}}=\frac{4}{5}$$

Solución ejemplo b)

Como las funciones $f(x)=\ln(1+x)$ y $g(x)=sen3x$ son continuas en un entorno de cero y tienden a cero, al querer evaluar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ vemos que se presenta una indeterminación cero sobre cero, por lo que podemos utilizar la regla de L'Hopital, pues se cumplen las hipótesis.

Para resolver el límite calculamos las derivadas de $f(x)$ *y* $g(x)$ o sea

$f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)}$ *y* $g'(x)=3\cos 3x$, luego calculamos el límite del cociente $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ esto es,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)}}{3.\cos(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x).3.\cos(3x)}=\frac{1}{3}$$

Observación:

La misma regla sirve también cuando $x\to\infty$ (*x tiende a infinito*), es decir, que se puede aplicar no solo para los casos en que $x\to a$ (*x tiende a **a***), y $x\to 0$ (*x tiende a cero).*

Enunciado: *Si las funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$ *son continuas y derivables y se cumple que* $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ *y ∃ el* $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, $\to\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Demostración:

Mediante el cambio de variable, $x=\frac{1}{t}$ cuando $x\to\infty\Rightarrow t\to 0$

Utilizando la regla de L'Hopital para el caso $t\to 0$ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(\frac{1}{t})\frac{-1}{t^2}}{g'(\frac{1}{t})\frac{-1}{t^2}}$,

simplificando $\left(\frac{-1}{t^2}\right)$ quedará: $\lim_{t\to 0}\frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Calcular el $\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{\frac{1}{x}}-2}{\frac{3}{x}}=$

Solución

Como las funciones del numerador y denominador son continuas y con derivadas continuas y tienden a 0, aplicamos la regla de L'Hopital.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{\frac{1}{x}}-2}{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\frac{-3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{\frac{1}{x}}}{3}=\frac{2}{3}$$

Calcular el $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{4}{x}}$

Solución

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{4}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(1+\frac{1}{x})}\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\frac{-4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{-4(1+\frac{1}{x})}=\frac{1}{4}$$

2. Caso infinito sobre infinito

Enunciado Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continúas en un entorno de a alrededor del punto salvo quizás en **a**, y con derivadas continuas en dicho entorno, siendo $g'(x)\neq 0$ cerca de **a**, $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ y existe el $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Demostración:

Tomamos un $x_1\neq a$, por el teorema de valor medio existe un x_0 para el cual se cumple

(A) $\quad \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad a<x<x_0<x_1$

Por otro lado, al primer miembro le sacamos factor común $f(x)$ en el numerador y $g(x)$ en el denominador obtenemos: (B) $\quad \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\frac{f(x)(1-\frac{f(x_1)}{f(x)})}{g(x)(1-\frac{g(x_1)}{g(x)})}$

Igualando la ecuación (B), la ecuación (A) queda así:

$$\frac{f(x)(1-\frac{f(x_1)}{f(x)})}{g(x)(1-\frac{g(x_1)}{g(x)})}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Al multiplicar ambos miembros por $\frac{(1-\frac{g(x_1)}{g(x)})}{(1-\frac{f(x_1)}{f(x)})}$, obtenemos: $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(1-\frac{g(x_1)}{g(x)})f'(x)}{(1-\frac{f(x_1)}{f(x)})g'(x)}$

Supongamos que $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ tiene límite ℓ cuando $x_0\to a$, o sea, $\lim_{x_0\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$

Si elegimos un $\boldsymbol{x_1}$ suficientemente próximo a ***a*** para este cociente, y como $\left(1-\frac{f(x_1)}{f(x)}\right)$ y $\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)$ tienden a 1, entonces, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$ y podemos afirmar que

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *que es lo que queríamos demostrar.*

Calcular $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{2}{x}}$

En este ejemplo, el numerador tiende a menos infinito y el denominador a más infinito, esto da una indeterminación infinito sobre infinito (las funciones del numerador y denominador cumplen con las hipótesis del teorema), podemos utilizar la Regla de L'Hopital.

Solución:

Como las funciones del numerador y del denominador son continuas y con derivadas continuas en un entorno de 0, podemos aplicar la regla de L´Hopital, porque cuando $x \to 0^+$,

$$\ln(x) \to -\infty \quad y \quad \frac{2}{x} \to +\infty$$

Como en los ejercicios anteriores calculamos las derivadas y hacemos el cociente de ellas:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{2}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x}{2} = 0$$

Verificar que el resultado es $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

3. Otros casos

También se puede usar la regla de L'Hopital para los siguientes casos:

1) **Caso** cero por infinito,($0.\infty$): Para este caso *transformar* (0 por ∞) en la forma (∞ sobre ∞) o en la forma (0 sobre 0).

Calcular $\lim_{x \to 0^+} x.e^{\frac{1}{x}}$

Solución:

Podemos transformar este producto de dos funciones, donde una tiende a (0) cero y la otra a (∞) infinito en un cociente de dos funciones que tienden a (∞) infinito, escribiendo: $x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$

Obtenemos el cociente: $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} =$ Ahora estamos en condición de utilizar la regla de L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$$ Concluimos que el límite es infinito:

2) Caso 1^∞: Este caso de indeterminación es cuando una función que tiende a 1 está elevada a otra que tiende a ∞, o sea $f(x)^{g(x)}$, donde $f(x)\to 1$ y $g(x)\to\infty$. Para resolverlo aplicamos $\ln(f(x)^{g(x)})$, que por las propiedades del logaritmo es igual a $g(x)\ln(f(x))$, calculamos el límite y después le aplicamos la función inversa, es decir, e^x la función exponencial.

Calcular $\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$

Solución

Como el límite de $x\to 1$ y el de $\frac{1}{1-x}\to\infty$ este límite toma la forma indeterminada 1^∞.

Sea $F(x)=x^{\frac{1}{1-x}}$ entonces $\ln F(x)=\ln(x^{\frac{1}{1-x}})=\frac{\ln x}{1-x}$, este cociente tiende a cero sobre cero y ambas funciones son continuas con derivadas continuas; podemos aplicar la regla de L’Hopital.

$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1$, entonces $\lim_{x\to 1}\left(\ln F(x)\right)=-1$, así que F 1 pero como el logaritmo es una función continua, $\lim_{x\to 1}\left(\ln F(x)\right)=\ln\left(\lim_{x\to 1}F(x)\right)$ por lo tanto $\ln(\lim_{x\to 1}F(x))=-1$, si aplicamos la función exponencial (inversa de la logarítmica) obtenemos el límite e^{-1}, o sea, que $\lim_{x\to 1}F(x)=\lim_{x\to 1}(x^{\frac{1}{1-x}})=e^{-1}$

3) Caso ∞^0 : La indeterminación es cuando una función que tiende a infinito está elevada a otra que tiende a cero, $f(x)^{g(x)}$ donde $f(x)\to\infty$ *y* $g(x)\to 0$. Igual que en el caso anterior, aplicamos la función logaritmo, tomamos el límite y después aplicamos la inversa, o sea, la exponencial.

Calcular $\lim_{x\to\infty}\left(e^{2x}+1\right)^{\frac{1}{x}}=$

*Solució*n

Como el límite de $e^{2x}+1\to\infty$ y el límite de $\frac{1}{x}\to 0$ este límite toma la forma indeterminada ∞^0.

Sea $F(x)=\left(e^{2x}+1\right)^{\frac{1}{x}}\Rightarrow\ln F(x)=\ln\left(\left(e^{2x}+1\right)^{\frac{1}{x}}\right)\to\ln F(x)=\frac{\ln\left(e^{2x}+1\right)}{x}$ *como este cociente tiende a infinito sobre* infinito y ambas funciones son continuas con derivadas continuas, podemos aplicar la regla de L’Hopital.

$\lim\limits_{x\to\infty} = \dfrac{\ln\left(e^{2x}+1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$. Como obtuvimos otro cociente de funciones que tienden a infinito, podemos aplicar la regla nuevamente: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4e^{2x}}{2e^{2x}} = 2$. Como dijimos antes esto es igual a $\ln \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = e^2$ o sea $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{2x}+1\right)^{\frac{1}{x}} = e^2$

4) Caso 0^0 : La indeterminación es cuando una función que tiende a cero está elevada a otra que tiende a cero $f(x)^{g(x)}$ donde $f(x)\to 0$ *y* $g(x)\to 0$. Igual que en el caso anterior, aplicamos la función logaritmo, tomamos el límite y después aplicamos la Regla de L'Hopital.

Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

*Solució*n Como x $\to 0^+$ es un caso de indeterminación de la forma 0^0 .Aplicamos la función logaritmo y *x* obtenemos $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x^x\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x \ln x\right)$ se transformó en un límite caso 1), que es un producto de x dos funciones donde una tiende a cero y la otra a infinito, o sea, 0.∞. Hay que convertirlo en un caso infinito sobre infinito. Para eso escribimos $x = \dfrac{1}{\frac{1}{x}}$ y obtenemos el $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

Vemos que este es un caso de infinito sobre infinito y las funciones son continuas con derivadas continuas; podemos aplicar la L'Hopital: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$ simplificando quedará:

$\lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0$ por lo tanto el $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$