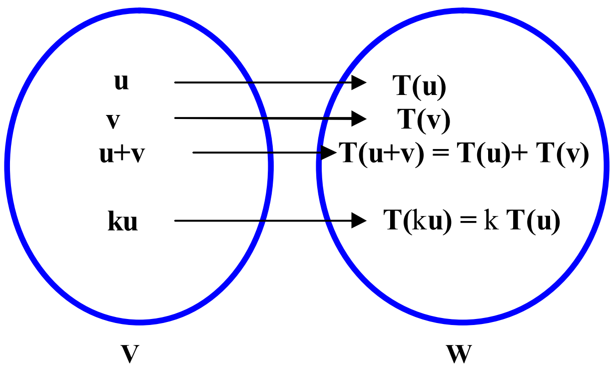
Definición



Sean **V**, **W** EV sobre un cuerpo de escalares **K**

T: **V** → **W** es una Transformación Lineal ⇔

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \forall k \in \mathbf{K}: \\ T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \\ T(k\mathbf{u}) = k\,T(\mathbf{u}) \end{array}}$$

La definición indica que las T.L. son funciones lineales entre espacios vectoriales. Si bien las aplicaciones más frecuentes son funciones entre $\mathbf{R}^n$ **y** $\mathbf{R}^m$, **T** puede relacionar espacios vectoriales de diversas carácterísticas.

Por ejemplo, **T** puede asignar vectores de $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$ o viceversa. Si **V=W**, un mismo espacio es a la vez dominio y codominio de la función.

Propiedad

Sea T: **V** → **W** TL ⇒

$$\boxed{T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}}$$

$T(\mathbf{0}) = T(v + (-v)) = T(\mathbf{v}) + T(-\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{v}) = 0$

Si $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0} \Rightarrow$ T no es TL.

Ejemplos

1) T: $R^2 \rightarrow R^2 / T(x1, x2) = (-x1,-x2)$ (asigna a cada vector de $\mathbf{R}^2$ su opuesto).

Para comprobar que T es TL hay que verificar que se cumplen las condiciones de la definición:

$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(u1+v1, u2+v2) = (-u1-v1, -u2-v2) = (-u1,-u2)+(-v1,-v2) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

$T(k\mathbf{u}) = T(ku1, ku2) = (-ku1, -ku2) = k(-u1, -u2) = kT(\mathbf{u})$

2) T: R2 → R4 /T(x1,x2) = (2x1, 2x1+x2, 2x1+x2, 2x2) (asigna a cada vector de R^2 uno de R^4)

T(**u**+**v**) = T(u1+v1, u2+v2) = (u1+v1, 2(u1+v1)+(u2+v2) , 2(u1+v1)+(u2+v2), u2+v2) =

= (2u1, 2u1+u2, 2u1+u2, 2u2) + (2v1, 2v1+v2, 2v1+v2, 2v2) = T(**u**) + T(**v**)

T(k**u**) = T(ku1, ku2) = (2ku1, 2ku1+ku2, 2ku1+ku2, 2ku2) =

= k (2u1, 2u1+u2, 2u1+u2, 2u2) = kT(**u**)

Como ejemplo, calculamos T(1 ,2) = (2, 4, 4, 2)

3) T: $R^2 \to R_{2x2}$ / T(x1, x2) = $\begin{pmatrix} 2x1 & 2x1+x2 \\ 2x1+x2 & 2x2 \end{pmatrix}$

La función es muy similar a la anterior, ya que los elementos de la segunda fila de la matriz están definidos de igual manera que las últimas dos componentes en R^4. T "construye" matrices simétricas 2x2 a partir de vectores de $\mathbf{R^2}$.

$$T\ (1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplos de Funciones que no son TL

T: $R^2 \to R^2$ / T(x1, x2) = ($x1^2 + x2^2$, 0)

T(**u**+**v**) = T(u1+v1, u2+v2) = ($(u1+v1)^2$, 0) = ($u1^2$+2u1v1+$v1^2$, 0)

Pero T(**u**) + T(**v**) = ($u1^2$, 0) + ($v1^2$, 0) = ($u1^2 + v1^2$, 0)

T(**u**+**v**) ≠ T(**u**) + T(**v**) ⇒ T no es TL

Una función que parece TL pero que en general no lo es:

T: $\mathbf{R^2 \to R^2}$ / T(x1, x2) = (x1, x2 + t) ; t∈ R

Toda TL debe verificar T(**0**) = **0** (vector nulo), pero

para t ≠ 0: **T(0,0) =** (0 , t) ≠ (0 , 0) ⇒ Se rechaza T como TL para t ≠ 0.

A una conclusión más completa se llega en base al análisis de linealidad:

T(**u**+**v**) = T(u1+v1, u2+v2) = (u1+v1, u2+v2+t)

Pero T(u)+ T(v) = (u1, u2 + t) + (v1, v2 + t) =(u1+v1, u2+v2+**2**t)

Resultan dos situaciones:

a) t≠ 0 ⇒ T(**u**+**v**) ≠ T(**u**) + T(**v**) ⇒ T no es TL (como era de esperar)

b) t= 0 ⇒ t = 2t T(**u**+**v**) = T(**u**) + T(**v**)

Además, con t=0: $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$ $\Rightarrow$ T es TL.

> Si la definición de T implica la adición de una constante no nula $\Rightarrow$ T no es TL.

Una función de la forma $T(x1, x2) = (x1, x2 + t)$ es una traslación sobre el eje x2. La misma tiene importante aplicabilidad, pero no está sujeta a la teoría de las T.L..

TL de una CL de vectores

> $\mathbf{T}:\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{W}$ es TL $\Leftrightarrow$ $T(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$

La transformación de una combinación lineal de vectores es igual a la misma combinación lineal de las trasformaciones de esos vectores.

$\Rightarrow$

Si T es TL:

$T(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = T(\alpha\mathbf{u}) + T(\beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$

$\Leftarrow$

Si $T(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Para } \alpha = \beta = 1 & T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \\ \text{Para } \beta = 0 & T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u}) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{T es TL}$$

Esto se puede generalizar para una CL de k vectores siguiendo igual razonamiento:

> $T(\alpha 1\mathbf{v1}+ \alpha 2\mathbf{v2}+\ldots+ \alpha k\mathbf{vk}) = \alpha 1T(\mathbf{v1})+ \alpha 2T(\mathbf{v2})+\ldots+ \alpha kT(\mathbf{vk})$

Propiedad

Sean $\mathbf{V}=\mathbf{W}= \mathbf{R}^2$ y $\alpha 1, \alpha 2, \beta 1, \beta 2 \in \mathbf{R}$

> La forma general $T(x1,x2) = (\alpha 1x1+\alpha 2x2,\ \beta 1x1+\beta 2x2)$ es siempre una T.L

$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(u1+v1, u2+v2) = (\alpha 1(u1+v1) + \alpha 2(u2+v2),\ \beta 1(u1+v1) + \beta 2(u2+v2)) =$
$= (\alpha 1u1+\alpha 2u2,\ \beta 1u1+\beta 2u2) + (\alpha 1v1+\alpha 2v2, \beta 1v1+\beta 2v2= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

$T(k\mathbf{u}) = T(ku1, ku2) = = k(\alpha 1u1+\alpha 2u2,\ \beta 1u1+\beta 2u2) = k\,T(\mathbf{u})$

Extendiendo lo anterior para T: Rn$\rightarrow$ Rm, diremos que:

> Si cada componente de $T(x1, \ldots xn)$ está definida como una combinación lineal de las componentes $x1, \ldots xn$, $\Rightarrow$ T es TL.

Geometría de las transformaciones lineales en el plano

Adelantaremos algunos conceptos que vinculan TL con matrices. Se ha demostrado que T: $R^2 \rightarrow R^2$ / T(x1,x2) = (α1x1+α2x2, β1x1+β2x2) es una TL

Escribiendo las componentes de **x** y T(**x**) en columna es:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} \qquad T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \alpha 1x1 + \alpha 2x2 \\ \beta 1x1 + \beta 2x2 \end{pmatrix}$$

Construimos ahora la matriz A con los escalares que intervienen en la expresión de T(**x**)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha 1 & \alpha 2 \\ \beta 1 & \beta 2 \end{pmatrix} \qquad \underset{A}{\begin{pmatrix} \alpha 1 & \alpha 2 \\ \beta 1 & \beta 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\mathbf{x}}{\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}} = \underset{T(\mathbf{x})}{\begin{pmatrix} \alpha 1x1 + \alpha 2x2 \\ \beta 1x1 + \beta 2x2 \end{pmatrix}}$$

T(x) puede entonces calcularse como el producto matricial A**x,** que como se verá presenta importantes ventajas. Toda la información sobre la TL está dada por la matriz A

Veremos a continuación unas transformaciones especiales en el plano denominadas expansiones, compresiones, reflexiones y cortes.

Expansiones y contracciones

Sea T: $R^2 \rightarrow R^2$/ T(x1, x2) = (cx1, x2)

c > 1 ⇒ T es una expansión sobre el eje de absisas x1

0 < c < 1 ⇒ T es una contracción sobre el eje de absisas x1

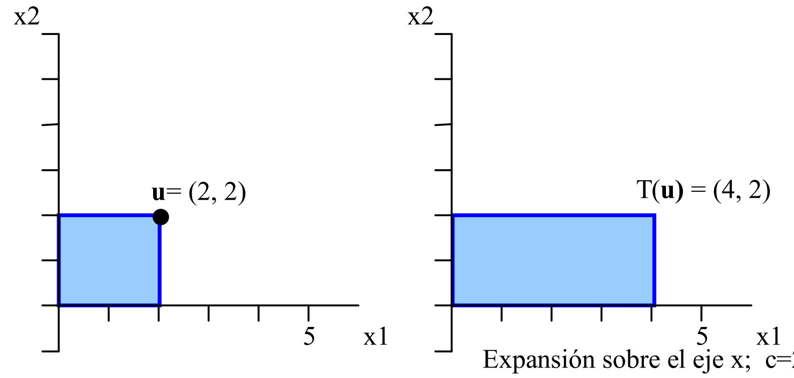
c = -1 ⇒ T es una simetría (o reflexión respecto del eje de ordenadas x2

Análogamente, T(x1, x2) = (x1, cx2) produce efectos similares, respecto al otro eje de coordenadas. Veremos posteriormente la interpretación de T para otros valores de c

Matricialmente resulta:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} \qquad T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} cx1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx1 + 0x2 \\ 0x1 + 1x2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$$



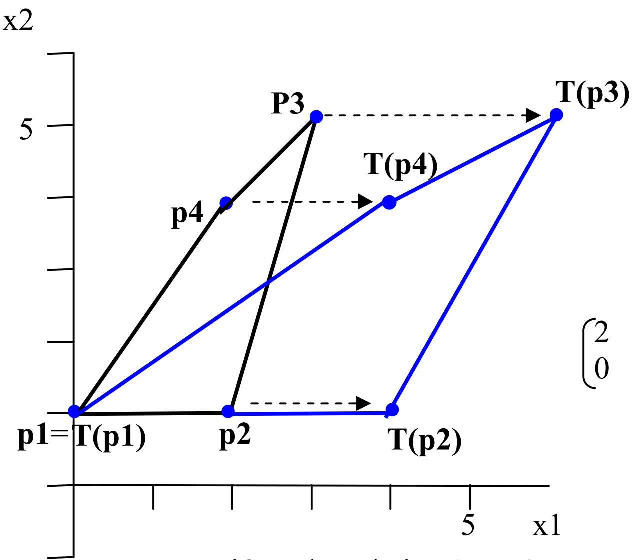
Expansión sobre el eje x; c=2

Ejemplo:

Expandir sobre el eje x2, aplicando un factor c=2, una figura cuyos vértices son: p1=(0,1), p2=(2,1), p3=(3,5), p4= (2,4)

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x1 + 0x2 \\ 0x1 + cx2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x1 \\ cx2 \end{pmatrix}$$

Las TL no suelen aplicarse a un único punto o vector sino a un gran número de ellos. Por razones prácticas el ejemplo considera sólo 4 puntos. En lugar de transformar uno a uno, es factible agruparlos como columnas de una matriz y realizar un único producto matricial. El resultado es una matriz de igual orden, cuyas columnas son las imágenes. Esto es útil, por ejemplo, en el tratamiento de imágenes digitales, compuestas por millones de celdas ordenadas matricialmente en las que los valores corresponden a atributos de color.



Expansión sobre el eje x1; c=2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p1 & p2 & p3 & p4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T(p1) & T(p2) & T(p3) & T(p4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

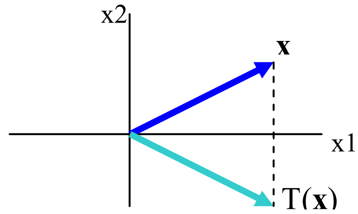
Simetrías (o reflexiones)

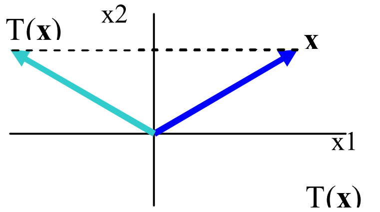
Analizaremos tres casos:

Para c = -1

Simetría respecto del eje x1:

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x1 + 0x2 \\ 0x1 + -1x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x1 \\ -x2 \end{pmatrix}$$





Simetría respecto del eje x2:

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x1 + 0x2 \\ 0x1 + 1x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x1 \\ x2 \end{pmatrix}$$

La matriz de una simetría es similar a las de las expansiones/contracciones, con c= -1

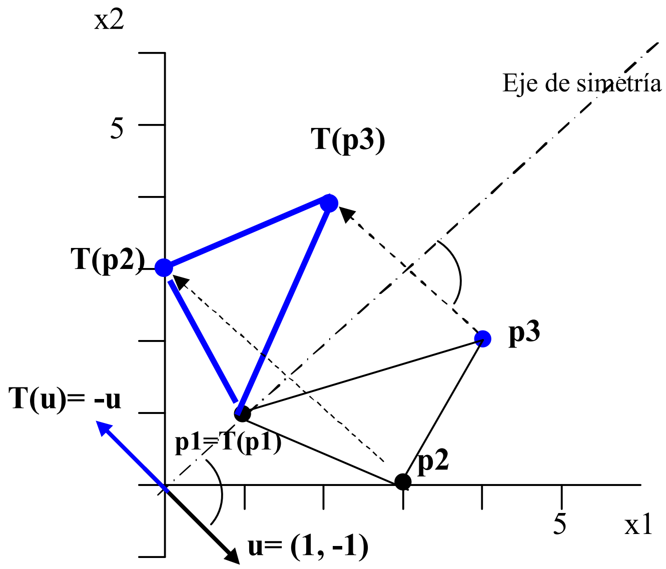
Simetría respecto de la recta x2 = x1

La TL lineal que produce este efecto se define como:

T(x1, x2) = (x2, x1) = (0x1+ x2, x1+0x2)

Se advierte que cambia la expresión de la matriz, ya que resulta A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x2 \\ x1 \end{pmatrix}$$



Simetría respecto de la recta x2=x1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p1 & p2 & p3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T(p1) & T(p2) & T(p3)) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

T refleja vectores ortogonalmente al eje de simetría. Las distancias de **x** y T(x) al e.s. son iguales. En consecuencia:

x $\in$ al e.sim. $\Rightarrow$ T(**x**)= **x**

u $\perp$ al e.sim. $\Rightarrow$ T(**u**)= **-u**

Cortes

Sea T: $R^2 \to R^2$/ T(x1, x2) = (x1 + cx2, x2)	T es un corte a lo largo del eje x1.

La matriz de T es

$$A=\begin{pmatrix}1 & c\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Sea T: $R^2 \to R^2$/ T(x1, x2) = (x1, cx1+x2)	T es un corte a lo largo del eje x2.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ c & 1\end{pmatrix}$$

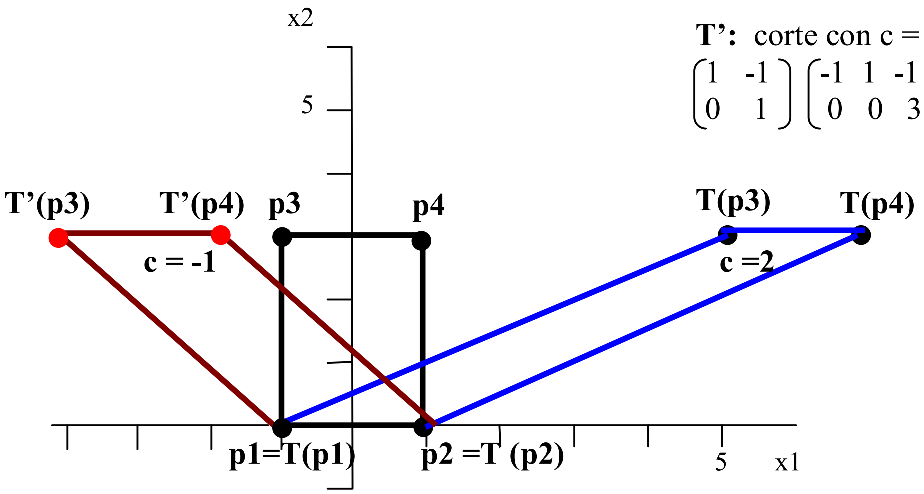
Ej. de corte a lo largo del eje x1

T: corte con c = 2

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

T': corte con c = -1

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -4 & -2\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$$



Los puntos sobre el eje x1 no se modifican a través de **T**

Expresar T

Ejemplo

Aplicar un corte que transforme los puntos del contorno del paralelogramo de la figura en en un rectángulo de igual área de lado coincidente con p1p2

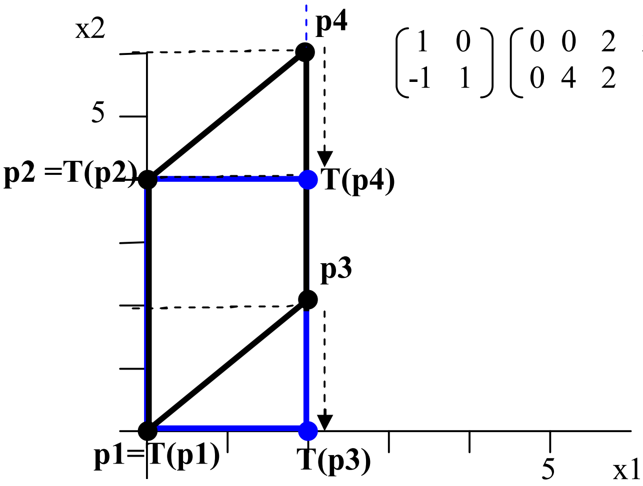
Debemos llevar p3 a la posición (2,0)
Para ello planteamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2c + 2 = 0 \Rightarrow c = -1$

T: corte con c = -1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$



Las matrices de estas tranformaciones del plano se presentan en el siguiente cuadro resumen, pudiéndose constatar que todas ellas son matrices elementales 2x2

	$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$
M. Elem Tipo	1	1	1	1	3	2	2
TL Tipo	Expansión/contracción		Simetría			Corte	
	Eje x1	Eje x2	Eje x1	Eje x2	Eje x2=x1	Eje x1	Eje x2

La forma genérica de una TL en el plano es, como ya se ha visto:
T: $R^2 \rightarrow R^2$ / T(x1,x2) = (α1x1+α2x2, β1x1+β2x2)

Teorema:

Sea T: $R^2 \rightarrow R^2$ y su matriz **A** = $\begin{pmatrix} \alpha 1 & \alpha 2 \\ \beta 1 & \beta 2 \end{pmatrix}$

> Toda TL en R^2 cuya matriz es no singular, es una composición de expansiones, contracciones, simetrías y/o cortes sucesivos.

Según ya se ha visto, **A** es la matriz de la forma genérica de una TL en el plano.

Si es **A** no singular ⇔ **A** ≡ **I** ⇒ **A** = (Ek...E2 E1) I

T(**x**) = **A . x** = (Ek...E2 E1) **x**

Cada Ei involucra una de las TL especiales indicadas o una combinación de ellas. Esto vale aún cuando Ei es tipo 3 con c < 0 (solo se analizó el caso c= -1, correspondiente a una simetría) Veremos que el caso c < 0 corresponde a la composición de una simetría y una expansión/contracción.

Si una matriz elemental tipo 1 es de la forma: $Ei = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $c < 0$
se puede expresar como producto de dos matrices elementales:

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underset{\text{Simetría eje x2}}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{Expansión/Contracción}}{\begin{pmatrix} |c| & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

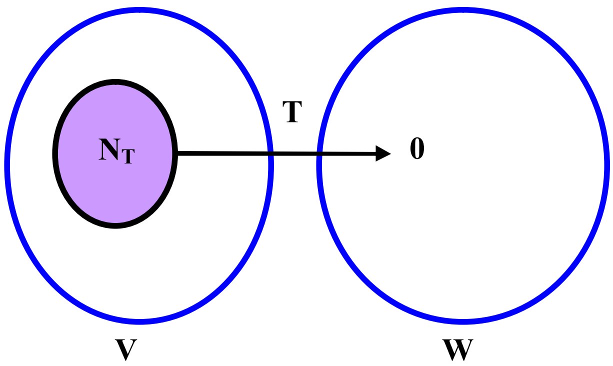
Nota:
$|c|$: valor absoluto de c

$\Rightarrow$ Ei es la composición de dos de las TL especiales descriptas.

Los problemas de la geometría en $\mathbf{R}^2$ tienen mayor alcance que las TL elementales analizadas. Tal es el caso de simetrías respecto a otro eje cualquiera, así como cortes o expansiones según direccones diferentes a las de los ejes de coordenadas, rotaciones, proyecciones, etc. Por otra parte, en $\mathbf{R}^3$ hay un mayor nivel de complejidad. El problema a resolver es encontrar la expresión de una TL que produzca el efecto requerido, no sólo sobre uno o varios vectores sino sobre subespacios tales como rectas y planos. Para ello es necesario profundizar en la teoría de las TL

Núcleo e Imagen de una TL

Es el conjunto de vectores del dominio cuya imagen a través de T es nula



$$\mathbf{N_T = \{ x \in V \,/\, T(x) \} = 0}$$

N_T incluye al menos al elemento nulo, ya que $T(0) = 0$

Ejemplo:

Sea $T: R^2 \rightarrow R^2 / T(x1, x2) = (x1 - x2 \,,\; x1 - x2)$

N_T se identifica en este caso fácilmente: la función se anula para todos los puntos en los que $x1 = x2$, o sea N_T es una recta.

Ejemplo:

Sea $T: R^2 \rightarrow R^2 / T(\mathbf{x}) = 2x$ Se advierte que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow N_T = \{\mathbf{0}\}$
Analizaremos entonces la naturaleza del Núcleo de una T.L. $T: V \rightarrow W$

Propiedad:

$\boxed{\mathbf{N_T \text{ es un subespacio de } V}}$

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$/ $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} \in N_T$, $\mathbf{v} \in N_T$

$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in N_T \Rightarrow N_T$ Verifica L.C.I.

$T(k\mathbf{v}) = k\,T(\mathbf{v}) = k\,\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow k\mathbf{v} \in N_T \Rightarrow N_T$ Verifica L.C.E

$\Rightarrow N_T$ es subespacio de $\mathbf{V}$

Si $\mathbf{V} = R^n \Rightarrow N_T$ es: $\{ \mathbf{0} \}$ o bien una recta o un plano, etc

Determinación del Núcleo de una TL

Sea $T: R^n \rightarrow R^m$ TL

En general, para identificar N_T se requiere un procedimiento analítico, consistente en plantear ecuaciones que resultan de igualar a cero la expresión de cada componente de T(x). Resultan en consecuencia m ecuaciones con n incógnitas.

Ejemplo

Resolveremos analíticamente el caso ya analizado

Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$/ $T(x1, x2, x3) = (\underbrace{x1 - x2 + x3}_{0}, \underbrace{x2 + x3}_{0})$

$$\begin{cases} x1 - x2 + x3 = 0 \\ \quad x2 + x3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x2 = -x3; \qquad x1 + x3 + x3 = 0 \qquad x1 = -2x3$$

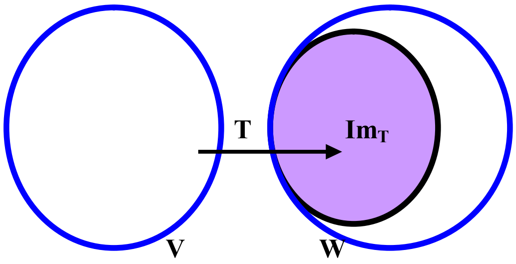
El sistema es indeterminado, el conjunto solución es una recta $\Rightarrow$ dim $(N_T) = 1$

Por lo que sabemos de SEL $\forall T: \mathbf{R^3} \rightarrow \mathbf{R^2}$ dim $(N_T) \geq 1$ (2 ecuaciones y 3 incógnitas)

La recta es de la forma (-2t, -t, t). Una base de N_T está dado por cualquier vector de la misma: v= (-2, -1, 1) es base de N_T

Verificamos que $T(v) = 0$: $T(-2, -1, 1) = (-2+1+1, -1+1) = (0 , 0)$

Imagen de T



$$\mathbf{Im_T} = \{\, T(\mathbf{x}) \,/\, \mathbf{x} \in \mathbf{V} \,\}$$

La imagen de T es un subespacio de W

Sean **u, v** vectores de V $\Rightarrow$ T(**u**), T(**v**) $\in$ Im_T

u + **v** $\in$ **V** por ser **V** EV $\Rightarrow$ T(**u** + **v**) $\in$ Im_T (i)

T(**u** + **v**) = T(**u**) + T(**v**) por ser **T** TL. Sustituyendo en (i) resulta:

$$\boxed{T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \in Im_T}$$

Por otra parte k**v** $\in$ **V** $\Rightarrow$ T(k**v**) $\in$ Im_T

T(k**v**) = kT(**v**) $\Rightarrow$ $\boxed{kT(\mathbf{v}) \in Im_T}$

$\Rightarrow$ Im_T es subespacio de **W**

Teorema:

Im_T es el subespacio generado por las imágenes de los vectores de una base del dominio

Sea T: **V** → **W** TL ; B={ **v1, v2,…vn**} base de V

$\mathbf{x} \in V \Rightarrow \mathbf{x} = \sum_{i=1,n} \alpha i\, \mathbf{vi} \quad \Rightarrow \quad T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1,n} \alpha i\, T(\mathbf{vi})$

Siendo **x** un vector genérico de **V**, T(**x**) es un vector genérico de la imagen, que se expresa como una CL de las imágenes de los vectores de la base B

Identificar Im_T es encontrar una base de este subespacio. Basta con determinar las imágenes de una base de **V** y excluir aquellas que pudieran ser CL del resto.

Ejemplo:

Determinaremos Im_T correspondiente a la TL del ejemplo anterior.

T: $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$/ T(x1, x2, x3) = (x1 - x2 +x3, x2 + x3)

Aplicamos **T** a la base canónica de $\mathbf{R}^3$:

$T(1, 0, 0) = (1, 0)$	Tres vectores en R^2 son LD. Para integrar una base de Im_T basta con escoger dos que no sean paralelos, por ejemplo: $\{(1, 0); (1, 1)\}$
$T(0, 1, 0) = (-1, 1)$	
$T(0, 0, 1) = (1, 1)$	Siendo la $\dim(Im_T) = 2 \Rightarrow Im_T = R^2$

Relación entre las dimensiones de V, N_T, Im_T

Sea la TL T: $V \rightarrow W$

Sea una base de N_T $\{\mathbf{v1} .. \mathbf{vk}\}$ y una base B de V que incluya la base de NT :

$B=\{ \underbrace{\mathbf{v1,v2,..vk,}}_{\text{base de } N_T} \quad \mathbf{vk+1, \ldots vn}\}$

$T(v1)= \ldots = T(vk) = 0$. Estos vectores no aportan elementos a una base de $Im_T \Rightarrow$

$$\boxed{\text{Dim } V \geq \dim Im_T}$$

Se cumple en toda TL que: $\boxed{\text{Dim } (V) = \dim N_T + \dim Im_T}$

Si bien omitiremos la demostración formal, esta última propiedad es importante para la evaluación de N_T e Im_T, ya que siendo conocida Dim(V), a partir de la dimensión del núcleo se deduce la de la imagen y viceversa.

Considerando el ejemplo anterior, una vez que se constató que $\dim N_T = 1$ y siendo $\dim V = 3$, era evidente que $\dim Im_T = 2 \Rightarrow Im_T = R^2$.

Clasificación de Transformaciones Lineales

Sea **T: V → W** Transformación lineal

T es monofirsmo $\Leftrightarrow$ T es inyectiva $\Leftrightarrow$ $N_T = \{0\}$

T es epimorfismo $\Leftrightarrow$ T es sobreyectiva $\Rightarrow$ $Im_T = W$

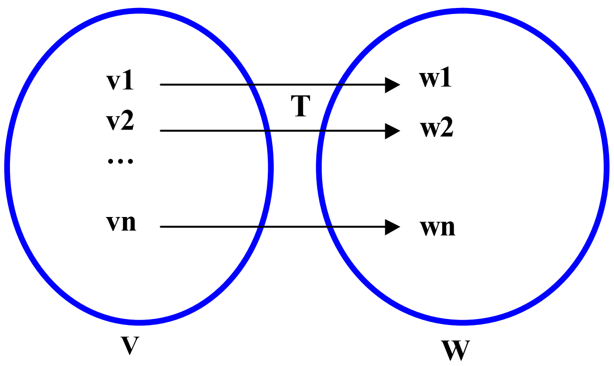
T es isomorfismo $\Leftrightarrow$ T es biyectiva (inyectiva y sobreyectiva a la vez)

T es endomorfismo $\Leftrightarrow$ V=W

En el ejemplo precedente, la TL es epimorfismo.

Teorema fundamental de las transformaciones lineales

Sean **V** y **W** E.V. ; B={v1,v2,..vn} base de **V**. Al asignarse a cada vector **vi** de la base de **V** un vector **wi** de **W** queda definida una T.L. que verifica T(**vi**) = **wi** y dicha T.L. es única.



La función que verifica T(**vi**) = **wi** es :

$$\forall x = \sum_{i=1,n} \alpha_i \mathbf{v_i} \Rightarrow T(x) = \sum_{i=1,n} \alpha_i \mathbf{w_i}$$

ya que para **x** = **vi** ⇒
vi= 0**v1**+ 0**v2** +..+ 1**vi**+..+ 0**vn**
⇒ T(**vi**) = **wi**

Demostramos que T es TL:

a) Sea $u = \sum_{i=1,n} \beta_i \mathbf{v_i} \Rightarrow \mathbf{T(x+u)} = \sum_{i=1,n} (\alpha_i+\beta_i)\mathbf{w_i} = \sum_{i=1,n}\alpha_i \mathbf{w_i} + \sum_{i=1,n}\beta_i\mathbf{w_i} = \mathbf{T(x)+T(u)}$

b) $T(k\mathbf{x}) = \sum k\alpha_i \mathbf{w_i} = k\sum \alpha_i\mathbf{w_i} = k\,T(\mathbf{x})$

⇒ T es TL

Demostramos que T es la única TL/ T(**vi**)= **wi**

Sea T': V→ W / T'(vi) = wi

x= α1**v1**+α2**v2**+ …+αn**vn**

$T'(x) = T'(\alpha_1\mathbf{v_1}+\alpha_2\mathbf{v_2}+ \ldots+\alpha_n\mathbf{v_n}) = \alpha_1 T'(\mathbf{v_1})+\alpha_2 T'(\mathbf{v_2})+\ldots +\alpha_n T'(\mathbf{v_n}) =$

$= \alpha_1\mathbf{w_1}+\alpha_2\mathbf{w_2}+\ldots+\alpha_n\mathbf{w_n} = \sum_{i=1,n} \alpha_i\mathbf{w_i} = T(x)$

$\Rightarrow \forall \mathbf{x}\in V:\ T'(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) \Rightarrow T' = T \quad \Rightarrow$ T es única.

El teorema es una herramienta esencial para construir transformaciones lineales

Ejemplo

Sabiendo que las imagenes de los vectores canónicos de R^2 son

T(1,0) = (2, 1)
T(0,1) = (-1,1) a) Calcular T(3, 4) ; b) Encontrar la forma general de la TL

a) (3, 4) = 3(1, 0) + 4(0,1) ⇒ T(3, 4)= 3T(1,0) + 4T(0,1) = 3(2, 1) + 4(-1,1) = (2, 7)

b) La forma general es:

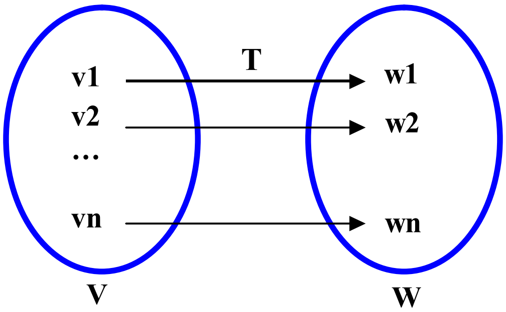
T(x1, x2) = x1T(1,0) + x2T(0, 1) = x1(2, 1) + x2(-1,1) = (2x1-x2, x1+x2)

Matriz asociada a una Transformación lineal

Se generalizará el concepto de matriz asociada a una Transformación lineal, ya aplicado para transformaciones en el plano.

Sean B={v1, v2, ..vn} base del EV **V** y B´= {v´$_1$, v´$_2$, …v'$_m$} una base de **W** $\Rightarrow$ Existe una única matriz A, relativa a las bases B y B' / T(x)= A**x**, con **x** expresado en base B y T(x) en base B´. A es la matriz asociada a T, según las bases especificadas.

De acuerdo al Teorema Fundamental de las T.L. la asignación T(**vi**) = **wi** define la TL T.



T(**vi**) = **wi**

La función que verifica esta asignación es :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1,n} x_i\, \mathbf{v_i} \quad \Rightarrow \quad T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1,n} x_i\, \mathbf{w_i}$$

wi es CL de la base B´: **wi**= a1i **v´$_1$**+a2i **v´$_2$**+..+ami **v´$_m$**

Expresando cada **wi** enfunción de sus componentes según la base B' resulta:

$$T(\mathbf{v1}) = \mathbf{w1} = \begin{pmatrix} a11 \\ a21 \\ \dots \\ am1 \end{pmatrix} \qquad T(\mathbf{v2}) = \mathbf{w2} = \begin{pmatrix} a12 \\ a22 \\ \dots \\ am2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \quad T(\mathbf{vn}) = \mathbf{wn} = \begin{pmatrix} a1n \\ a2n \\ \dots \\ amn \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ \dots \\ xn \end{pmatrix}$$ es la expresión de **x** según sus componentes en base B

$$T(\mathbf{x}) = T\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ \dots \\ xn \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T(x) = x1\,\mathbf{w1} + x2\,\mathbf{w2} + \dots\ xn\,\mathbf{wn} \quad (\text{ por el T. Fundam. })$$

$$T(\mathbf{x}) = x1 \underbrace{\begin{pmatrix} a11 \\ a21 \\ \dots \\ an1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{w1}} + x2 \underbrace{\begin{pmatrix} a12 \\ a22 \\ \dots \\ an2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{w2}} + \dots\dots + xn \underbrace{\begin{pmatrix} a1n \\ a2n \\ \dots \\ ann \end{pmatrix}}_{\mathbf{wn}} = \begin{pmatrix} a11\ x1 + a12\ x2 + \dots a1n\ xn \\ a21\ x1 + a22\ x2 + \dots a2n\ xn \\ \dots\dots \\ an1\ x1 + an2\ x2 + \dots ann\ xn \end{pmatrix}$$

$$T(\mathbf{x}) = \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{w1} & \mathbf{w2} & .. & \mathbf{wn} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} a11 & a12 & .. & a1n \\ a21 & a22 & .. & a2n \\ \dots\dots & & & \\ an1 & an2 & .. & ann \end{array}\right) \end{array}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ \dots \\ xn \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

A es la matriz asociada a T , según las bases B del primer espacio y B' del segundo espacio.

T (**x**)= A **x**

A no sólo depende de **T** sino también de las bases seleccionadas, ya que si el planteo se formula a partir de otras bases cambian los escalares que componen la matriz.

El vector **x** debe estar expresado en la base que se ha escogido para el dominio, en tanto que su imagen T(**x**) quedará expresado según sus componentes en la base B' de **W.** Si los vectores a transformar por **T** estuvieran disponibles en otra base, se les deberá aplicar el cambio de base correspondiente.

Hay dos situaciones posibles de aplicación de la matriz asociada:

Caso1: La expresión general de la T.L. es conocida

Ejemplo:

Sea T: R2 → R3 / T(x1, x2) = (2 x1 – 3x2, 2 x2, x1-x2)

Generalmente es conveniente trabajar con bases canónicas de V y W. Conocida la expresión de T es posible determinar la imágenes de la base canónica de R^2:

$$T(1,0) = \mathbf{w1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T(0,1) = \mathbf{w2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Componentes según base canónica de R^3

$$T(x1,x2) = x1\ \mathbf{w1} + x2\ \mathbf{w2} = x1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x2 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

A opera con vectores en base canónica de $\mathbf{R^2}$ y T(**x)** queda expresado en la base canónioca de R^3, ya que con esas bases se determinó la matriz.

La imagen de $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$ es: $T\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 40 \\ -10 \end{pmatrix}$

Se aprecia que la fila 1 de **A** se compone de los escalares 2, -3 que son los que expresan la 1ª componente de T(x) en la forma general de la función. Análogamente sucede con las otras filas. Tener esto en cuenta para agilizar la construcción de A cuando se trabaja con bases canónicas.

Caso 2: no se conoce la expresión de T sino las imágenes de una base

Ejemplo: Determinar A, y la expresión general de **T:** $\mathbf{R^3} \rightarrow \mathbf{R^4}$ sabiendo que:

T(1,0,0) = (2, 1, 0, 2)
T(0,1,0) = (1, 1, 1, 1)
T(0,0,1)= (0,-1, 2, 0)

Las bases utilizadas son las canónicas de R^3 y R^4 ⇒ A opera en esas bases.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2x1 + x2 \\ x1 + x2 - x3 \\ x2 + x3 \\ 2x1+x2 \end{pmatrix}$$

La expresión general de T es:

T: $R^3 \rightarrow R^4$ / T(x1,x2,x3) (2x1 + x2, x1 + x2 – x 3, x2 + x3, 2x1+x2)

Es posible que la base cuyas imágenes se conocen no sea la canónica:

Caso de estudio.

Determinar la matriz asociada de T sabiendo que:

T(1, 1) = (1, 2, 1)
T (0, 2) = (1, 4, 0)

Los vectores (1,1) y (0,2) son LI y por lo tanto forman una base B de R^2, (que no es la canónica). Esto influye en la funcionalidad de la matriz asociada, que sólo acepta argumentos en base B. Por otra parte las imágenes de la bases fueron expresadas en base canónica $\Rightarrow$ T(x) resulta en tal base.

$$A_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz A opera con argumentos de la función que estén expresados en la base B, que no es la canónica.

$$A_{BC} \;\; \mathbf{x}_B \;\; = \; T(\mathbf{x})_C$$

Cuando A esté vinculada a bases no canónicas usaremos la notación A_{BC} indicando así que A opera con vectores del primer espacio en base B y las imágenes quedan expresadas en la base canónica C del segundo espacio.

$\mathbf{x}_B$ y $T(\mathbf{x})_C$ indican que las componentes de **x** están expresadas en la base B del dominio y las de T(**x**) según la base canónica C del codominio.

Para transformar un vector en base canónica, el mismo debe ser expresado en base B. Si el vector en cuestión es x= (2, 4) (en base canónica) realizamos el cambio de base expresando este vector como CL de los dos elementos de la base B={(1, 1), (0,2)} (se debe respetar el orden de los vectores considerado para construir A.

$(2, 1)_B = \alpha 1\ (1, 1) + \alpha 2(\ 0, 2)$

$$\begin{cases} 2 = \alpha 1 \\ 4 = \alpha 1 + 2\ \alpha 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha 2 = (4 - \alpha 1)/2 = 1$$

$(2, 4)_C = (2, 1)_B$

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}_C$$

A partir de un caso como éste surge una nueva pregunta: Dada la matriz asociada a una TL según bases dadas, es posible convertirla de modo que opere con otras bases?

Usaremos para ello matrices de cambio de base.

Matriz de cambio de base

Sea la T.L. Identidad I: $R^n \rightarrow R^n$ / I(**x**) = **x** .

I(**x**) replica siempre el vector **x**. Toda vez que se use igual base {v1..vn} para el dominio y el codominio su matriz asociada es la matriz identidad, ya que I(**vi**) =**vi**.

Si en cambio las bases difieren, la matriz asociada a I es una matriz de cambio de base, ya que I(**x**) es el mismo vector **x** pero expresado en la base del segundo espacio.

Sean las bases de R^2: B={ **v1, v2, .., vn**} y B'= {$\mathbf{v'_1}, \mathbf{v'_2}, ..\mathbf{v'_n}$}

Tomando B como base del primer espacio y B' del segundo, resulta:

$I(\mathbf{vi}_B) = \mathbf{vi}_{B'}$ La imagen de un vector en base B es el mismo vector expresado como CL de la base B'

$\mathbf{vi}_{B'} = a1i\, \mathbf{v'}_1 + a2i\, \mathbf{v'}_2 + .. + ami\, \mathbf{v'}_m$

Expresando cada **wi** en función de sus componentes según la base B' resulta:

$$I(\mathbf{v1}) = \mathbf{v1}_{B'} = \begin{pmatrix} a11 \\ a21 \\ \dots \\ am1 \end{pmatrix} \qquad I(\mathbf{v2}) = \mathbf{v2}_{B'} = \begin{pmatrix} a12 \\ a22 \\ \dots \\ am2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \quad I(\mathbf{vn}_{B'}) = \begin{pmatrix} a1n \\ a2n \\ \dots \\ amn \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ \dots \\ xn \end{pmatrix}$$ expresión de un vector genérico **x** según sus componentes en base B

$$I(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{B'} = \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{v1} & \mathbf{v2} & .. & \mathbf{vn} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} a11 & a12 & .. & a1n \\ a21 & a22 & .. & a2n \\ .... & & & \\ an1 & an2 & .. & ann \end{array}\right) \end{array}}_{\mathbf{C_{B-B'}}} \underbrace{\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ \dots \\ xn \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_B}$$

$\mathbf{C_{B-B'}}$ es la matriz asociada a la TL **I**, que opera en base B del 1^er^ espacio y base B' del 2°. Llamaremos a ésta, matriz $C_{B-B'}$ de cambio de base, (o de transición) de B a B' que verifica:

$$\boxed{\mathbf{x}_{B'} = \mathbf{C_{B-B'}}\, \mathbf{x_B}}$$

El procedimiento para obtener $\mathbf{C_{B-B'}}$ es sencillo. Se debe expresar cada vector de la base B como C.L. de la base B'. Estas componentes conforman las columnas de la matriz de cambio de base.

El cambio de base de un conjunto de vectores no requiere en lo sucesivo plantear un S.E.L. para cada vector al que se desea aplicar la TL, ya que el problema se resuelve mediante un producto matricial.

Propiedades:

$C_{B-B'} = (C_{B'-B})^{-1}$

ya que $\mathbf{x}_B = C_{B'-B}\, \mathbf{x}_{B'}$ y $\mathbf{x}_{B'} = C_{B-B'}\, \mathbf{x}_B$

$\mathbf{x}_B = C_{B'-B}\, C_{B-B'}\, \mathbf{x}_B \Rightarrow C_{B'-B}\, C_{B-B'} = I \Rightarrow C_{B-B'} = (C_{B'-B})^{-1}$

Consecuencia: $\boxed{\text{Toda matriz de cambio de base es no singular.}}$

Ejemplo de aplicación de matriz de cambio de base:

Expresar el vector (2,4) (base canónica) en la base B={(1, 1), (0,2)}

Aplicamos el Teorema Fundamental aplicando I a la base canónica de R2 y

Planteando las imágenes como CL de la base B:

$I(1, 0) = (1, 0) = \alpha1\ (1, 1) + \alpha2(\ 0, 2)$

$$\begin{cases} 1 = \alpha1 \\ 0 = \alpha1 + 2\,\alpha2 \quad \Rightarrow \quad \alpha2 = -1/2 \end{cases} \qquad (1, 0)_C = (1, -1/2)_B$$

$I(0, 1) = (0, 1) = \alpha1\ (1, 1) + \alpha2(\ 0, 2)$

$$\begin{cases} 0 = \alpha1 \\ 1 = \alpha1 + 2\,\alpha2 \quad \Rightarrow \quad \alpha2 = 1/2 \end{cases} \qquad (1, 0)_C = (0,\ 1/2)_B$$

$$\mathbf{C}_{C\rightarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}_{C\text{-}B} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

Cambio de Base de la Matriz Asociada

Sea **A** matriz asociada a T : $R^n \rightarrow R^n$ según la base B ={ **v1, v2 … vn**} en dominio y codominio. Esto significa que A opera con vectores del dominio expresados en base B, y produce imágenes en la misma base B.

Analizaremos cómo obtener la matriz asociada a **T** según una base B', también común a ambos espacios, de modo que opere con vectores en base B' y las imágenes queden expresadas en esa misma base.

$$\mathbf{Tx]}_B = A_{BB}\ \mathbf{x}_B$$

$$\mathbf{x}_B = C_{B'\text{-}B}\ \mathbf{x}_{B'} \qquad \mathbf{Tx]}_B = \overbrace{A_{BB}\ C_{B'\text{-}B}}^{A_{B'B}}\ \mathbf{x}_{B'} = A_{B'B}\,\mathbf{x}_{B'}$$

$A_{B'B}$ permite operar con vectores en base B, resultando las imágnes en la base original B. Si es necesario que la imágenes estén también expresadas en basa B' hay que aplicar un cambio de base:

$$\mathbf{Tx]}_{B'} = \mathbf{C}_{B\text{-}B'}\ \mathbf{Tx]}_B = (\mathbf{C}_{B\text{-}B'}\ \mathbf{A}_{BB}\ \mathbf{C}_{B'\text{-}B})\ \mathbf{x}_{B'} = \underbrace{(\mathbf{C}^{-1}\ \mathbf{A}_{BB}\ \mathbf{C}_{B'\text{-}B})}_{\mathbf{A}_{B'B'}}\mathbf{x}_{B'}$$

$$\mathbf{Tx]}_{B'} = \mathbf{A}_{B'B'}\ \mathbf{x}_{B'}$$

$A_{B'B'}$ es la matriz asociada a T que opera según la base B' de ambos espacios.

Este procedimiento puede aplicarse de manera análoga cuando es T: $R^n \rightarrow R^m$. En tal caso las matrices de cambio que afectan a A no son inversas entre sí y además son de diferente orden, ya que la primera matriz de cambio (de izquierda a derecha) es mxm, operando sobre R^m, y la segunda, que opera sobre el dominio de T es nxn.

Otras propiedades de la Matriz Asociada

Sea A matriz asociada a una T. L. T: $R^n \rightarrow R^m$

Las columnas de A generan Im_T

Basta recordar que las las imágenes de una base del dominio de T son sistema de generadores de ImT y que las columnas de A son precisamente imágenes de una base del dominio de T.

Como consecuencia de lo anterior resulta: **Rango (A) = Dim Im_T**

Sea A matriz asociada de T: $R^n \rightarrow R^n$
A es no singular $\Leftrightarrow$ T es un isomorfismo (T es biyectiva)

$\Rightarrow$

A $\in$ Rnxn no singular $\Rightarrow$ A es la m. asociada a una T.L. T: $R^n \rightarrow R^n$ cuyo Rango es n $\Rightarrow$ Dim $Im_{T=}$n $\Rightarrow$ $Im_T = R^n$ $\Rightarrow$ **T es sobreyectiva.**

Teniendo en cuenta que:

Dim V= Dim N_T + Dim Im_T

Resulta Dim $N_T = 0$ $\Rightarrow$ **T es inyectiva**, resultando **T biyectiva $\Rightarrow$ T es isomorfismo**

$\Leftarrow$

Si T es isomorfismo A es matriz nxn y Dim_T=n = R(A) $\Rightarrow$ la columnas de A son L.I $\Rightarrow$ A es no singular.

Matrices semejantes

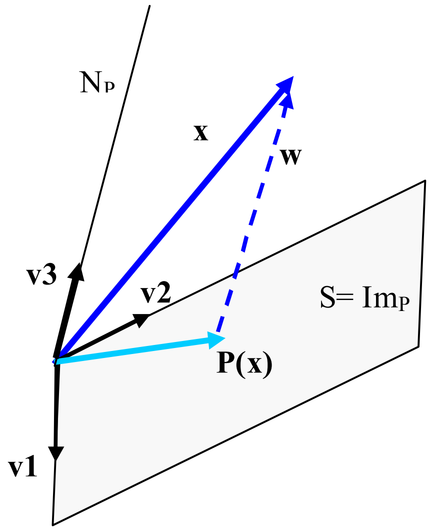
A y B $\in$ Knxn son semejantes $\Leftrightarrow \exists$ P $\in$ Knxn no singular / $\mathbf{B = P^{-1} A P}$

A y B son matrices asociadas a la misma TL, pero sobre diferentes bases y P es una matriz de cambio de base.

Proyecciones en R^n

Sea P: $R^n \rightarrow R^n$ TL. P es una proyección $\Leftrightarrow$ PP = P

lo que implica que $P(P(\mathbf{x})) = P(\mathbf{x})\ \forall\ \mathbf{x} \in R^n$ y que por lo tanto si $\mathbf{v} \in Im_P \Rightarrow P(\mathbf{v})=\mathbf{v}$



v1, v2 determinan una base de Im_p, **v3** es base de N_P. Este último vector define la inclinación de la proyección, que no necesariamente debe ser ortogonal al subespacio de proyección (Im_P)

$\mathbf{x}= P(\mathbf{x}) + \mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{w} = \mathbf{x} - P(\mathbf{x})$

En la Unidad 4 Se han estudiado proyecciones ortogonales de un vector sobre otro. Este enfoque es más general, ya que se proyecta sobre un subespacio (una recta, un plano, etc.) y no necesariamente la proyección debe ser ortogonal.

El análisis del caso en R^3 facilita la comprensión del problema:

Se analiza a continuación la TL P: $R^3 \rightarrow R^3$ que proyecta vectores sobre un plano S (que es la imagen de la proyección) según una orientación dada por la recta generada por **v3**. Dicha recta es el núcleo de P.

Toda proyección permite descomponer un vector $\mathbf{x} \in R^n$ como suma de dos vectores:

$\mathbf{x}= P(\mathbf{x}) + \mathbf{w}$ (ver figura)

$\Rightarrow \mathbf{w}= \mathbf{x} - P(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}) - P(\mathbf{x}) = (I - P)(\mathbf{x})$ donde I es la TL Identidad.

Notar que (I-P) es también una proyección, ya que

$(I-P)(I-P) = II - IP - PI + PP = I - P - P + P$ (ya que PP = P)

$= I - P$

La proyección I-P proyecta sobre el núcleo de P

$Im(I-P)= N_P$

$$\forall \mathbf{x} \in R^n \quad \mathbf{x} = \underset{\in Im_P}{P(\mathbf{x})} + \underset{\in N_P}{(I-P)(\mathbf{x})}$$

$\Rightarrow$ todo vector de **x** puede escribirse como suma de un vector de la Im_P (P(**x**)) más otro vector del N_P y además $Im_P \cap N_P = \{ 0 \}$ ya que $\forall\ x \neq 0$:

$P(\mathbf{x}) = 0$ si $\mathbf{x} \in N_P$

$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ si $\mathbf{x} \in Im_P$ $\Rightarrow$ $\mathbf{x} \notin$ simultáneamente a Im_P y a N_P

Como consecuencia, las bases de Im_P y de N_P son complementarias respecto de la base de R^n , es decir:

si B1={ **v1, v2, ..vr**} es base de Im_P y B2={ **vr+1, .. vn**} es base de N_P $\Rightarrow$

{**v1, v2 .. vr, vr+1,…vn**} es base de $\mathbf{R^n}$

Además **P** queda unívocamente determinada a partir de la definición de N_P e Im_P

Matriz de una Proyección

Sea P proyección en R^n, donde B1={ **v1, v2, ..vr**} es base de Im_P y B2={ **vr+1, .. vn**} base de N_P y $B = B1 \cup B2$ base de R^n.

$\mathbf{vi}_B$ es CL de la base B´: $\mathbf{vi} = a1i\ \mathbf{v'_1} + a2i\ \mathbf{v'_2} + .. + ami\ \mathbf{v'_m}$

Expresando cada **wi** en función de sus componentes según la base B' resulta:

$$A_{BB}= \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} Pv1 & Pv2 & .... & Pvr & Pvr+1 & & Pvn \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & .. & 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 & .... & 0 \\ .... & & & 0 & 0 & .... & 0 \\ & & & 1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & ... & & & 0 & .... & 0 \\ .... & & & & & & \\ 0 & ... & & & & .... & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Matriz asociada a P según la base B de R^n, que incluye r vectores canónicos.

$P(v1) = \mathbf{v1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ .. \\ .. \\ 0 \end{pmatrix}$ $P(v2) = \mathbf{v2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ $P(Vr) = \mathbf{vr} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow r$ $P(\mathbf{vr+1}) = P(\mathbf{vr+2}) = ... = P(\mathbf{vn}) = \mathbf{0}$

La matriz A_{BB} trabaja con vectores en base B (entradas y salidas). Normalmente usamos vectores en base canónica, por lo que se debe determinar A_{CC}, según bases canónicas

$$\boxed{A_{CC} = C_{B-C}\ A_{BB}\ C_{C-B}}$$

A_{CC} opera con vectores en base canónica y las imágenes quedan expresadas también en base canónica.

Ejemplo

Encontrar la matriz asociada en bases canónicas correspondiente a la TL P: $R^3 \rightarrow R^3$ que proyecta vectores sobre el plano 2x + y + z = 0 según una dirección:

a) Ortogonal al mismo. Para **u**=(3, 2, 1) Calcular P(**u**) e (I-P)(**u**). Verificar que **u**= P(**u**) + (I-P)(**u**). Verificar que ambos términos son ortogonales.

b) Según la inclinación dada por el vector **w**= (1, 1, 1)

a) El plano es la Im_P. Es necesario determinar una base para el mismo. Para ello identificamos dos vectores del plano v1, v2, no colineales

z = -2x-y para x=0, y=1 $\Rightarrow$ z = -1 **v1**= (0, 1, -1)

para x=1, y=0 $\Rightarrow$ z = -2 **v2**= (1, 0, -2)

P es ortogonal $\Rightarrow$ N_P debe ser $\perp$ al plano. Las componentes de dicho vector están dadas por los coeficientes de la ecuación del plano $\Rightarrow$ **v3**= (2, 1, 1) es base de N_P.

La base de R^n a utilizar para determinar la matriz A es: B ={**v1, v2, v3**}

Aplicando el Teorema Fundamental:

T(**v1**) = **v1**= 1 **v1** + 0 **v2** + 0 **v3**

T(**v2**) = **v2**= 0 **v1** + 1 **v2** + 0 **v3**

T(**v3**) = 0 = 0 **v1** + 0 **v2** + 0 **v3**

Escribiendo las componentes en columna resulta la matriz asociada según la base B:

$$A_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos las matrices de cambio de base:

B={(0, 1, -1), (1, 0, -2), (2, 1, 1)} es la base de R^3, que comprende los elementos de las bases de Im_P y N_T

Matrices de cambio de base:

<u>De base B a la base Canónica</u>: la expresión de los vectores de B como combinación lineal de la base canónica está dada directamente por las componentes de los vectores.

<u>De base Canónica a la base B</u>: $C_{C\text{-}B}$ puede determinarse resolviendo tres S.E.L. 3x3 o bien como la inversa de $C_{B\text{-}C}$. Usamos esta última vía que es más sencilla empleando software Derive. (se recomienda su uso en esta unidad, o de otro software similar)

$$C_{B\text{-}C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{C\text{-}B} = \begin{pmatrix} -1/3 & 5/6 & -1/6 \\ 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C_{B\text{-}C}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A_{BB}}} \underbrace{\begin{pmatrix} -1/3 & 5/6 & -1/6 \\ 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C_{C\text{-}B}}} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 5/6 & -1/6 \\ -1/3 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A_{CC}}}$$

Verificación: aplicamos la matriz a los vectores de la base

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 5/6 & -1/6 \\ -1/3 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v1 & v2 & v3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Se verifica que:
P(**v1**)= **v1**
P(**v2**)= **v2**
P(**v3**)= **0**

$$P(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 5/6 & -1/6 \\ -1/3 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz M, asociada a (I-P):

$$M= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 5/6 & -1/6 \\ -1/3 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

$$(I-P)(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P(**u**), (I-P)(**u**) para **u**= (3,2,1):

Comprobamos que **u** = P(**u**) + (I-P)(**u**) y que P(**u**) ⊥ (I-P)(**u**):

$$P(\mathbf{u}) + (I-P)(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P(\mathbf{u}) \bullet (I-P)(\mathbf{u}) = 0 \,.\, 3 + 1/2 \,.\, 3/2 - 1/2 \,.\, 3/2 = 0 \;\Rightarrow\; P(\mathbf{u}) \perp (I-P)(\mathbf{u})$$

b) Según la inclinación dada por el vector **w**= (1, 1, 1)

El caso es similar al anterior, sólo se debe cambiar el vector que orienta la proyección, lo que implica una modificación de la base B

B= { v1, v2, w}   B={(0, 1, -1), (1, 0, -2), (1, 1, 1)}

$$C_{B\text{-}C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como en el caso anterior construimos $C_{B\text{-}C}$ con los vectores de la base, en el mismo orden y calculamos su inversa para determinar $C_{C\text{-}B}$

$$C_{C\text{-}B} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & -1/4 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C_{B\text{-}C}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A_{BB}}} \underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & -1/4 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C_{C\text{-}B}}} \mathbf{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 3/4 & -1/4 \\ -1/2 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A_{CC}}}$$

Verificación: aplicamos la matriz a los vectores de la base

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 3/4 & -1/4 \\ -1/2 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v1 & v2 & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Se verifica que:
P(**v1**)= **v1**
P(**v2**)= **v2**
P(**w**)= **0**

Transformaciones lineales ortogonales

Definimos el producto escalar en R^n como $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = (u1\ u2\ \ldots .un) \begin{pmatrix} v1 \\ v2 \\ \ldots \\ vn \end{pmatrix} = (u1v1 + u2v2 + \ldots .+ unvn)$$

Sea la T.L. $T: R^n \rightarrow R^n$. T es ortogonal $\Leftrightarrow \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in Rn$: $T(\mathbf{u}) \bullet T(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$

El producto escalar se preserva a través de T. En consecuencia ocurre lo mismo con los módulos y ángulos entre vectores.

T es ortogogonal $\Leftrightarrow |T(\mathbf{x})| = |\mathbf{x}| \quad \forall\ x \in R^n$

$\Rightarrow$

$|T(\mathbf{x})|^2 = T(\mathbf{x}) \bullet T(\mathbf{x}) = x \bullet x = |x|^2 \Rightarrow |T(x)| = |x|$ ya que los módulos son no negativos

$\Leftarrow$

$|T(x)| = |x| \quad \forall\ \mathbf{x} \in R^n \Rightarrow |T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})|^2 = |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2$

$$|T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})|^2 = (T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})) \bullet (T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})) = T(\mathbf{u}) \bullet T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \bullet T(\mathbf{v}) + 2\,(T(\mathbf{u}) \bullet T(\mathbf{v}))$$

$$= |T(\mathbf{u})|^2 + |T(\mathbf{v})|^2 + 2\,(T(\mathbf{u}) \bullet T(\mathbf{v})) \qquad \textbf{(i)}$$

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\,(T(\mathbf{u}) \bullet T(\mathbf{v})) \qquad \textbf{(ii)}$$

Igualando **(i)** e **(ii)** y siendo $|T(x)| = |x|$ resulta $T(\mathbf{u})) \bullet T(\mathbf{v})) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} \Rightarrow$ T es ortogonal.

El alumno puede demostrar que T preserva ángulos entre vectores:

T es ortogonal $\Leftrightarrow \widehat{T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})} = \widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}$

(se demuestra en base a la expresión de los cosenos en función del producto escalar)

Toda asignación entre bases ortonormales es una TL ortogonal

Demostración:

Sean B, B´ bases ortonormales de las bases de R^n: B={v1, v2, ..vn}, B´= {w1,w2,..wn} y $T: R^n \rightarrow R^n$ / $T(\mathbf{vi}) = \mathbf{wi}$

$\mathbf{u} = \sum_{i=1,n} \alpha i \mathbf{vi}$; $\mathbf{v} = \sum_{j=1,n} \beta i \mathbf{vi} \Rightarrow \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \sum_{i=1,n} \alpha i \mathbf{vi} \bullet \sum_{j=1,n} \beta j \mathbf{vj} = \sum_{i,j=1,n} \sum \alpha i \beta j \, (\mathbf{vi} \bullet \mathbf{vj}) = \sum_{i=1,n} \alpha i \beta i$, ya que

$(\mathbf{vi} \bullet \mathbf{vj}) = 1$ cuando $i=j$ y es nulo en los demás casos por ser vectores ortonormales.

$$T(\mathbf{u}) \bullet T(\mathbf{v}) = T(\sum_{i=1,n} \alpha i \mathbf{vi}) \bullet T(\sum_{j=1,n} \beta i \mathbf{vj}) = \sum_{i=1,n} \alpha i T(\mathbf{vi}) \bullet \sum_{j=1,n} \beta j T(\mathbf{vj}) = \sum_{i=1,n} \alpha i wi \bullet \sum_{j=1,n} \beta j wj = \sum_{i,j=1,n} \sum \alpha i \beta j (\mathbf{wi} \bullet \mathbf{wj}) =$$

$$= \sum_{i=1,n} \alpha i \beta i = (\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}).$$

Una TL es ortogonal $\Leftrightarrow$ su matriz asociada según bases ortonormales es ortogonal

Sean las bases ortonormales de R^2: $B=\{ \mathbf{v1}, \mathbf{v2}, .. \mathbf{vn}\}$ y $B'= \{\mathbf{v'_1}, \mathbf{v'_2}, ..\mathbf{v'_n}\}$

$\Rightarrow$

Si T es ortogonal preserva módulos y angulos entre vectores $\Rightarrow$ la imagen de toda base ortornormal es otra base ortonormal. En tal caso la matriz A asociada a las bases B,B' es ortogonal ya que sus columnas son las imágenes de la base de V, que como se dijo, es un conjunto ortonormal resultando A ortogonal.

$\Leftarrow$

Si A es la matriz asociada a bases ortonormales de T y además A es ortogonal, sus columnas **w1, w2, ..wn** son un conjunto ortonormal, que verifican T(**vi**)= **wi**, o sea que T es resultado de una asignación entre bases ortonormales y por lo tanto T es ortogonal.

A es ortogonal $\Rightarrow$ D(A) = $\pm$ 1

A es ortogonal $\Rightarrow A\,A^T = I$; $D(A\,A^T) = D(I) = 1$

$[D(A)]^2 = 1 \Rightarrow D(A) = \pm 1$

Notar que: si A es una rotación $\Rightarrow D(A) = 1$

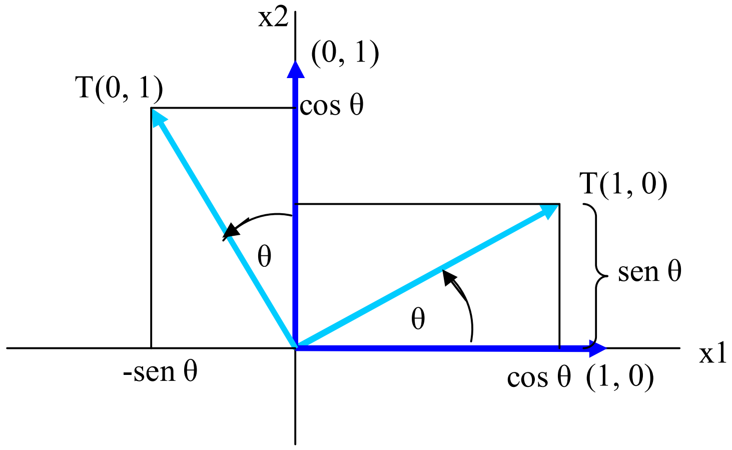
si A es una simetría $\Rightarrow D(A) = -1$

Recordar que la matriz asociada a una TL ortogonal es ortogonal, siempre y cuando esté referida a bases ortonormales.

Veremos dos tipos de TL ortogonales: rotaciones y simetrías

Rotaciones de ángulo θ en R^2

Aplicamos el Teorema Fundamental para obtener la matriz asociada de la rotación. Para ello consideramos la base canónica, de acuerdo a la figura.



$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\operatorname{sen}\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

Matriz asociada a la rotación θ según bases canónicas

Se ha usado la base canónica de R^2 para determinar las imágenes, también en base canónica, por lo tanto A opera con "entradas" y "salidas" en base canónica de R^2.

Notar que A es ortogonal ya que el producto escalar entre sus filas es nulo y c/u de éstas es un vector de módulo unitario ($\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$)

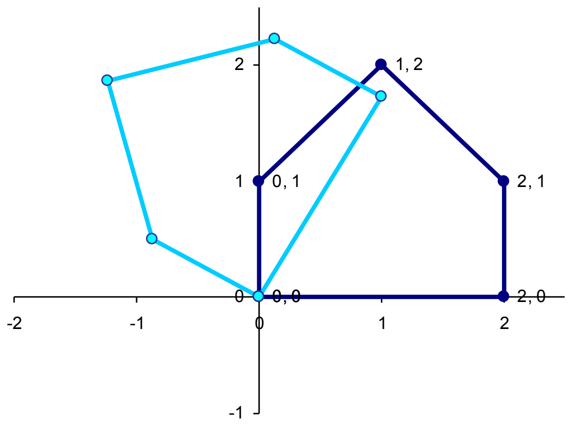
Ejemplo:

Rotar la figura determinada por los puntos (0, 0), (0,1), (1,2), (2,1),(2,0),(0,0) un ángulo de 60° aplicando la matriz asociada a la correspondiente TL.

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

Calculamos las imágenes de los puntos aplicando la matriz de rotación de 60°:

$$\begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.0 & -0.866 & -1.232 & 0.134 & 1.0 & 0.0\\ 0.0 & 0.5 & 1.866 & 2.232 & 1.732 & 0.0\end{pmatrix}$$

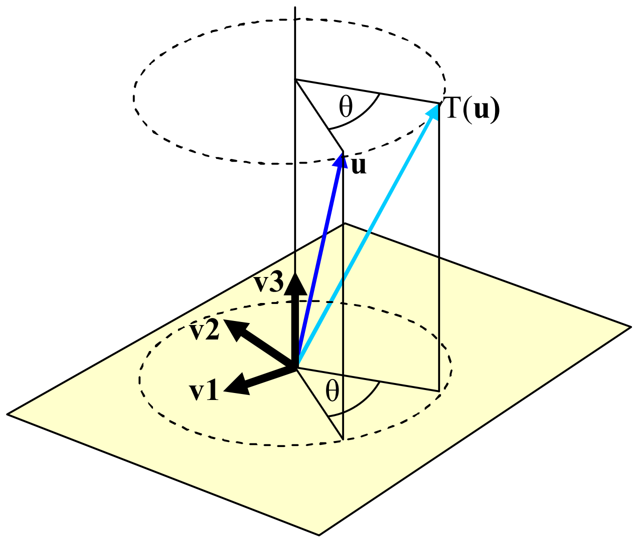


Representación gráfica del problema.
(calculado y graficado con Excel)

Rotaciones en R^3

Toda rotación se aplica según un plano de referencia, en consecuencia la misma queda definida por una base del mismo. Es necesario trabajar con una base ortonormal que incluya la base del plano de rotación y un tercero, normal al mismo.

Sea la base ortonormal B={**v1**,**v2**,**v3**} tal que {**v1**,**v2**} definen el plano de rotación π y **v3** es el vector normal al plano, y eje de la rotación. Los vectores que pertenecen a dicho eje son invariantes respecto de T (T(**v3**)=0); el resto gira en torno a dicho eje un angulo θ, que se puede medir sobre un plano paralelo a π. Los vectores que pertenecen al plano π responden ante T como en el caso de rotaciones en R^2, salvo que el sistema de referencia está determinado por la base {**v1**,**v2**}.



El planteo de la matriz asociada es sencillo, ya que a la rotación de **v1, v2** les cabe el mismo análisis ya planteado para los vectores canónicos de R^2.

El siguiente planteo da lugar a la matriz asociada a la rotación según la base B del dominio y codominio.

T(**v1**) = cos θ **v1** + sen θ **v2** + 0 **v3**
T(**v2**)= -sen θ **v1** + cos θ **v2** + 0 **v3**
T(**v3**)= 0 **v1** + 0 **v2** + **v3**

$$T(\mathbf{v1}) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T(\mathbf{v2}) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T(\mathbf{v3}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{BB} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{BB}$$

Matriz asociada a la base ortonormal B (no canónica)

En la práctica se requiere la matriz asociada a las bases canónicas, para lo cual se deben aplicar las matrices de cambio de base correspondientes:

$$\boxed{A_{CC} = \; C_{B\text{-}C} \; A_{BB} \; C_{C\text{-}B}}$$

Estas matrices de cambio de base son ortogonales porque vinculan bases ortogonales, de modo que $C_{C\text{-}B} = (C_{B\text{-}C})^{-1} = (C_{B\text{-}C})^{T}$

Esto facilita el cálculo ya que $C_{B\text{-}C}$ tiene por columnas los vectores de la base B y la otra matriz es su transpuesta.

La base ortonormal puede obtenerse usando producto vectorial y luego normalizando los vectores orgonales.

El problema puede estar planteado en diversas maneras:

a) Se conoce una base {**u1**,**u2**} del plano de rotación.

u3= **v1 x v2** es ortogonal al plano.

Si **u1** y **u2** no son ortogonales hay que plantear una base ortogonal para el plano, que se obtiene mediante nuevo producto vectorial entre **u3** y cualquiera de los anteriores:

u2'= u1 x u3

La base ortonormal de $\mathbf{R}^3$ es: $\mathbf{v1} = \dfrac{\mathbf{u1}}{|\mathbf{u1}|}$, $\mathbf{v2} = \dfrac{\mathbf{u2'}}{|\mathbf{u2'}|}$, $\mathbf{v3} = \dfrac{\mathbf{u3}}{|\mathbf{u3}|}$

b) Se conoce la ecuación del plano de rotación cuya forma es ax+by+cz= 0
En tal caso el vector normal es **u3**= (a,b,c)
Con la ecuación del plano obtenemos un vector cualquiera no nulo **u1** (ambos son ortogonales entre sí)
u2= u1 x u3 es un vector del plano ⊥ a **u1** y **u3**
Normalizando **u1, u2**, y **u3** resulta la base ortonormal B={**v1,v2,v3**}/ **vi= ui / |ui|**

c) Se conoce una base del eje de rotación **u3**= (a,b,c) ⇒ la ecuación del plano de rotación es ax+by+cz= 0 y se procede como en el caso b)

Ejemplo:

Encontrar la matriz asociada en bases canónicas que aplique una rotación de 30° a los vectores de R3 según un eje de rotación generado por el vector **u3**= (0,1,1)

La ecuación del plano es y + z = 0

Adoptamos como **u1** un vector cualquiera del plano: **u1**= (0, 1, -1)

$$\mathbf{u2} = \mathbf{u1} \times \mathbf{u3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} = (2, 0, 0)$$

$\mathbf{v1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,-1)$; $\mathbf{v2}=(1,0,0)$; $\mathbf{v3} = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,1)$

Determinamos las matrices de cambio de base. $C_{B\text{-}C}$ tiene por columnas los vectores de la base B:

$$A_{CC} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}}_{C_{B\text{-}C}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_{BB}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}}_{C_{C\text{-}B}}$$

$$A_{CC} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{6}/4 & -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{6}/4 & \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}}_{(C_{B\text{-}C}\,.\,A_{BB})} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}}_{C_{C\text{-}B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & \sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & (\sqrt{3}/4 + \frac{1}{2}) & (-\sqrt{3}/4 + \frac{1}{2}) \\ \sqrt{2}/4 & (\frac{1}{2} - \sqrt{3}/4) & (\sqrt{3}/4 + \frac{1}{2}) \end{pmatrix}}_{A_{CC}}$$

Rotaciones en R^n

Toda rotación es relativa a un plano. Sconsideremos para éste una base ortonormal **v1, v2**. Extendemos esta base a la base ortonormal de R^n que la incluye:

B={ **v1, v2, v3, …vn**}

De la misma manera que el eje de rotación en R^3, todos los vectores de la base, desde v3 en adelante se mantienen invariantes por T, así como el subespacio que éstos generan.

T(**v1**) = cosθ **v1** + senθ **v2** + 0 **v3** + .. 0 vn

T(v2) = –senθ **v1** + cosθ **v2** + 0 **v3** + .. 0 **vn**

T(v3) = 0 **v1** + 0 **v2** + **v3** + 0 **v4** +..0**vn** resultando T(**vi**) = **vi** para i >2

$$A_{BB}=\left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & \mathbf{0} \\ \hline & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right)$$

$$\boxed{A_{CC} = C_{B\text{-}C}\ A_{B\text{-}B}\ \ C_{C\text{-}B}}$$

Para obtener una base ortonormal en R^n, con n>3 no se puede usar producto vectorial, sólo definido en R^3. En tal caso debe aplicarse el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, que no se verá en este curso, pero que está disponible en la bibliografía.

Simetrías o reflexiones

Se han estudiado previamente simetrias respecto de los ejes coordenados y respecto del eje x2=x1. Se verá cómo definir la TL que produce simetrías respecto de una recta cualquiera que pasa por el origen.

Se ha estudiado que las simetrías producen reflexiones respecto de un eje de simetría. Cada punto del plano se replica a igual distancia del eje. Los vectores que pertenecen al mismo no varían cuando se les aplica T, y los vectores ortogonales al eje tienen como imagen el vector opuesto: T(**u**) = **-u**

Escogiendo una base ortonormal de R^2 B={ **v1,v2**} , donde **v1** genera el eje de simetría y **v2** es ortogonal al mismo, resulta:

$$T(\mathbf{v1}) = \mathbf{v1} \quad = \quad \mathbf{v1} + 0\ \mathbf{v2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

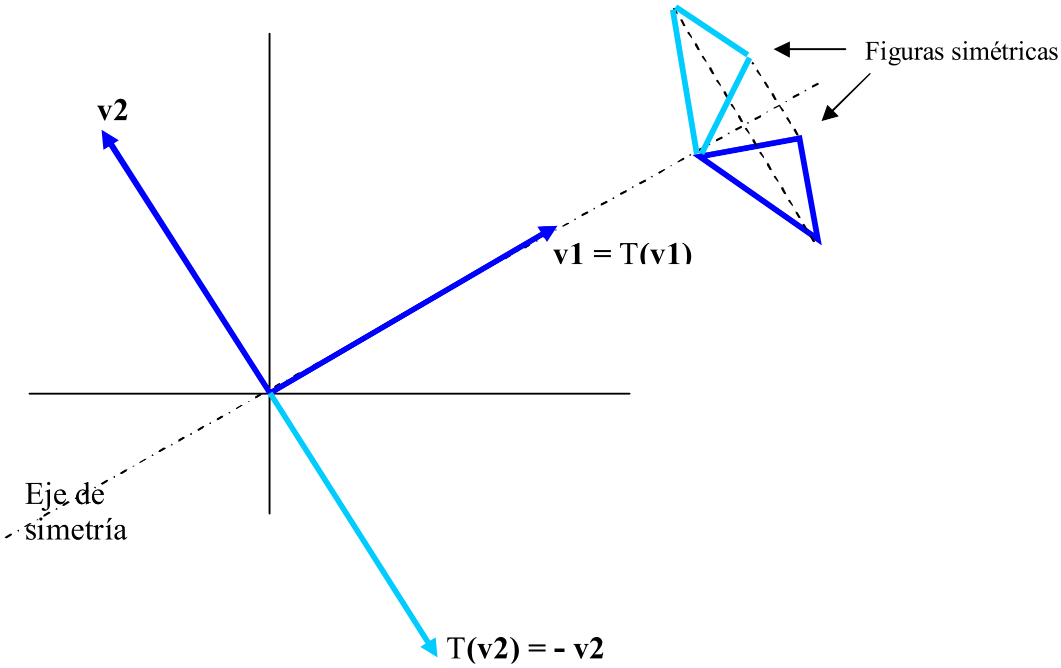
$$T(v2) = -\ \mathbf{v2} \ = \ 0\ \mathbf{v1} \ - \ \mathbf{v2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Usamos la base B para asignar sus imágenes y expresamos las mismas como combinación lineal de los vectores de B.

La matriz asociada de la simetría según la base B es:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La expresión de A según bases canónicas es: $\boxed{A_{CC} = \ C_{B\text{-}C}\ \ A_{BB}\ \ C_{C\text{-}B}}$



Ejemplo.

Determinar la matriz según la base canónica de R^2 que produce simetrías respecto de la recta y= 2x. Transformar la figura cuyos vértices son (2,4); (3,0); (3,2); (4,3); (2,4)

El primer paso es definir la base con **v1**= $\sqrt{5}/5\ (1, 2)$ y **v2**= $\sqrt{5}/5\ (2, -1)$

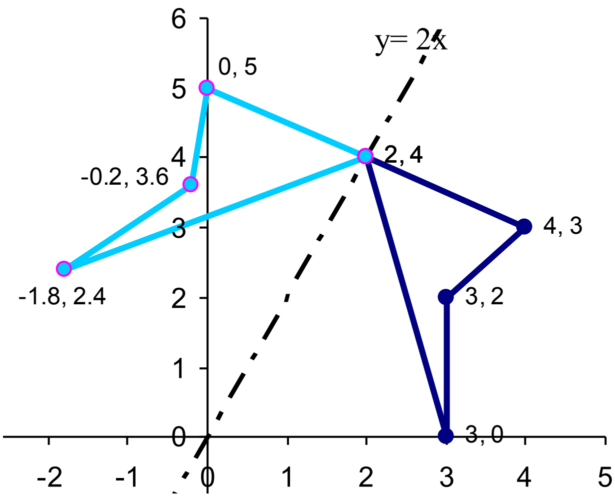
Matrices de cambio:

$$C_{B\text{-}C} = \sqrt{5}/5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = C_{C\text{-}B}$$

Ambas matrices de cambio, por ser ortogonales y simétricas son transpuestas, inversas e iguales entre sí.

$$A_{C\text{-}C} = \sqrt{5}/5 . \sqrt{5}/5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 1/5 \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Transformamos los vértices de la figura y graficamos:



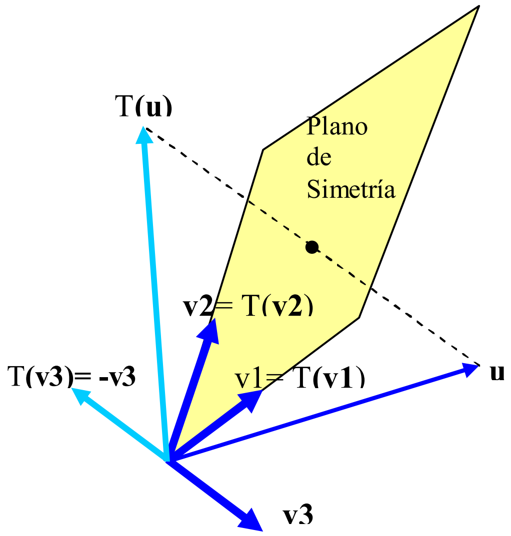
$$\begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1.8 & -0.2 & 0.0 & 2 \\ 4 & 2.4 & 3.6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculado y graficado con Excel

Simetrías en R^3

El concepto es similar al de R^2, sólo que las reflexiones son relativas a un plano de simetría. Cada punto se refleja ortogonalmente al mismo. De esta manera, es posible reflejar no sólo figuras sino también cuerpos.



$T(\mathbf{v1}) = \mathbf{v1} + 0\,\mathbf{v2} + 0\,\mathbf{v3}$
$T(\mathbf{v2}) = 0\,\mathbf{v1} + \mathbf{v2} + 0\,\mathbf{v3}$
$T(\mathbf{v3}) = 0\,\mathbf{v1} + 0\,\mathbf{v2} - \mathbf{v3}$

$$A_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A_{CC} = C_{B\text{-}C} \;\; A_{B\text{-}B} \;\; C_{C\text{-}B}}$$

Simetrías en R^n.

En R^n, una simetría es relativa a un hiperplano de dimensión n-1

Es necesario definir una base ortonormal B={**v1,v2,….vn-1, vn**}, cuyos primeros n-1 vectores son base ortonormal del hiperplano y **vn** es normal al mismo.

$\Rightarrow$ $T(\mathbf{vi}) = \mathbf{vi}$ para i=1, n-1

$T(\mathbf{vn}) = -\mathbf{vn}$

$$\boxed{\mathbf{A_{CC} = C_{B\text{-}C} \;\; A_{BB} \;\; C_{C\text{-}B}}}$$

$$A_{BB} = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1 \times n-1} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right)$$

BIBLIOGRAFÍA

Algebra Lineal 5ª Ed	Grossman	Mc. Graw Hill
Introd.al Algebra Lineal	Larson y Edwars	LIMUSA
Algebra Lineal	Lay	Prentice Hall
Algebra Lineal	Lipschutz	Mc. Graw Hill
Algebra lineal	Kolman	Prentice Hall