TRIGONOMETRÍA
Medidas angulares

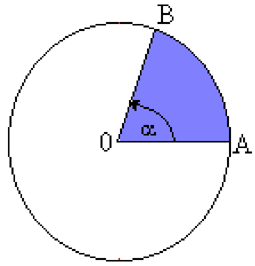
La medida de un ángulo puede expresarse en grados (sistema sexagesimal) o en radianes (sistema radial o circular).
En el sistema sexagesimal, la unidad de medida es el ***grado sexagesimal***, que se define como la 90-ava parte de un ángulo recto, esto es:

$$1^\circ = \frac{medida\ de\ un\ angulo\ recto}{90} = \frac{90^\circ}{90}.$$

A la 60-ava parte de un grado se la llama ***minuto*** y se la denota 1', y la 60-ava parte de un minuto se la denomina ***segundo*** y se denota 1''

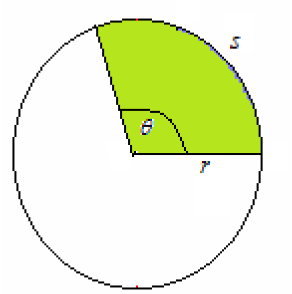
$$1' = \frac{1^\circ}{60}\ ,\quad 1'' = \frac{1'}{60}$$

En el sistema circular, la unidad de medida es el ***radián***.
El radián es la medida del ángulo central de un círculo, cuando la longitud del arco correspondiente a dicho ángulo central, es igual a la medida del radio del círculo.



longitud del arco AB = longitud del radio 0A $\Rightarrow \alpha = 1\ radian$

En general, la ***medida de un ángulo en radianes***, está dado por el cociente entre la longitud del arco circular y el radio del círculo. Esto es:



$$\theta = \frac{s}{r}\ rad$$

Relación entre la longitud del arco y la medida del ángulo central.

Long. del arco		*Medida del ángulo central*
1 radio	-------------	1 radián
2 radios	-------------	2 radianes
2π radios	-------------	2π radianes

El ángulo central correspondiente a la longitud 2π radios, en grados, es 360°, y en radianes es 2π radianes. De aquí obtenemos la relación entre grados y radianes:

$$\boxed{360^{\circ} = 2\pi \ radianes} \Leftrightarrow \boxed{180^{\circ} = \pi \ radianes}$$

A partir de esta equivalencia entre grados y radianes, podemos hallar la medida de cualquier ángulo expresado indistintamente en uno u otro sistema de medición. Por ejemplo:

Cuántos radianes mide un ángulo de 1°?.

$$180^{\circ} \rightarrow \pi \ radianes$$

$$1^{\circ} \rightarrow \frac{1^{\circ}.\ \pi \ radianes}{180^{\circ}} = \frac{\pi \ radianes}{180} \cong 0{,}0174 \ radianes$$

$$\boxed{1^{\circ} \cong 0{,}0174 \ radianes}$$

Cuántos grados mide un ángulo de1 radián?.

$$\pi \ radianes \rightarrow 180^{\circ}$$

$$1 \ rad. \rightarrow \frac{1 \ rad.180^{\circ}}{\pi \ radianes} = \frac{180^{\circ}}{\pi} = 57^{\circ}\ 17'$$

$$\boxed{1 \ radian = 57^{\circ}\ 17'}$$

Ejemplo: ¿Cuántos radianes equivalen a 225º ?

$$180^{\circ} \rightarrow \pi \text{ rad}$$

$$225^{\circ} \rightarrow \frac{\pi \text{ rad x } 225^{\circ}}{180^{\circ}} = \frac{5}{4} \ \pi \text{ rad}$$

Ejemplo: ¿Cuántos grados equivalen a $\frac{\pi}{6}$ radianes?

$$\pi \text{ rad} \rightarrow 180^{\circ}$$

$$\frac{\pi}{6} \text{ rad} \rightarrow \frac{180^{\circ} \ \frac{\pi}{6}}{\pi} = 30^{\circ}$$

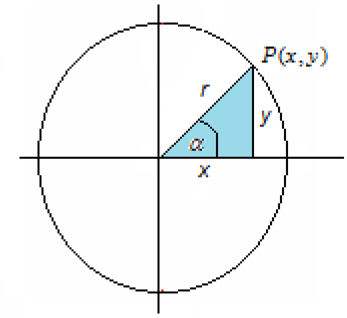
La tabla siguiente muestra la correspondencia entre grados y radianes para medidas de ángulos más usados.

Grados	0	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	240º	270º	300º	360º
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	2π

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Dado un ángulo cualquiera α , se introduce un sistema de coordenadas de tal modo que el ángulo esté en *posición normal*, esto es, con su vértice en el origen y su lado inicial sobre el eje x positivo. Luego se construye una circunferencia de radio arbitrario r, con centro en el origen y se marca un punto $P(x, y)$ correspondiente a la intersección de la circunferencia con el lado final del ángulo.

Las funciones trigonométricas de dicho ángulo α , se definen como:

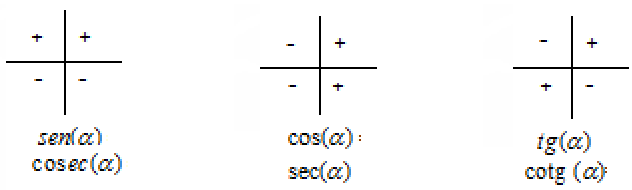


$$sen(\alpha) = \frac{y}{r} \qquad \cos ec(\alpha) = \frac{r}{y}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{r} \qquad \sec(\alpha) = \frac{r}{x}$$

$$tg(\alpha) = \frac{y}{x} \qquad \text{cotg } (\alpha) = \frac{x}{y}$$

Según la medida del ángulo α , los signos de las funciones trigonométricas son:

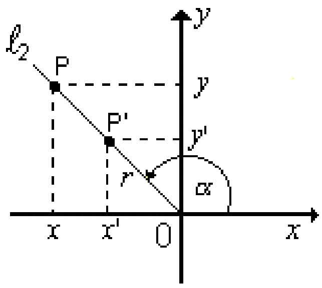


Obs.: Los valores de las funciones trigonométricas dadas en la definición anterior, no dependen del valor del radio r.

Estos cocientes aparentemente dependen del punto $P(x, y)$, pero no es así, pues dependen únicamente del ángulo α. En efecto, si P'(*x'* , *y'*) es otro punto sobre la circunferencia , observemos la siguiente figura.

r = $\sqrt{x^2 + y^2}$

r´ = $\sqrt{x'^2 + y'^2}$



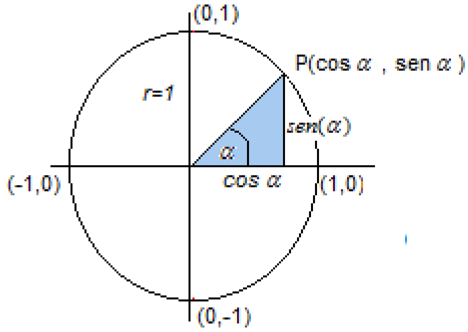
Como los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{Px0}$ y $\overset{\Delta}{P'x'0}$ son semejantes, los lados son proporcionales, luego:

$\alpha \ \frac{x}{r} = \frac{x'}{r'}$ y $\frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}$

O sea que los valores de las funciones trigonométricas son iguales para cualquier valor de r.

En particular, para el ***círculo unitario*** (la circunferencia de radio 1, con centro en el origen), las fórmulas de $sen(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$, son:

$$x = \cos(\alpha) \quad , \quad y = sen(\alpha)$$



A partir de estas definiciones se deduce que:

- 1 ≤ sen α ≤ 1 , - 1 ≤ cos α ≤ 1

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

A partir de la definición de las funciones trigonométricas se deduce que:

$$\boxed{\cos ec(\alpha)=\frac{1}{sen(\alpha)} \quad , \quad \sec(\alpha)=\frac{1}{\cos(\alpha)} \quad , \quad \text{cotg }(\alpha)=\frac{1}{tg(\alpha)}}$$

$$\boxed{tg(\alpha)=\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad , \quad \text{cotg }(\alpha)=\frac{\cos(\alpha)}{sen(\alpha)}}$$

Además, si a partir de las definiciones de seno y coseno, elevamos al cuadrado y sumamos miembro a miembro, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} sen(\alpha)=\dfrac{y}{r} \Rightarrow \quad sen^2(\alpha)=\dfrac{y^2}{r^2} \\ \cos(\alpha)=\dfrac{x}{r} \quad \Rightarrow \cos^2(\alpha)=\dfrac{x^2}{r^2} \end{array}\right\} sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=\frac{y^2+x^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}=1$$

Es decir: $\boxed{sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1}$ (identidad Pitagórica)

Si en esta identidad, dividimos ambos miembros por $\cos^2(\alpha)$, obtenemos la siguiente identidad:

$$\boxed{tg^2(\alpha)+1=\sec^2(\alpha)}$$

Si dividimos ambos miembros de la identidad Pitagórica por $sen^2(\alpha)$, obtenemos:

$$\boxed{cotg^2(\alpha)+1=\cos ec^2(\alpha)}$$

GRÁFICO DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Grafiquemos la función: $f(x)=senx$.
Esta expresión se refiere al seno de un ángulo de x radianes. Con lo cual esta expresión está definida para cualquier número real.
La forma general de esta gráfica se puede obtener geométricamente construyendo un ángulo de x radianes en posición normal y teniendo en cuenta el gráfico del ***círculo unitario***, donde se visualiza que el lado final del ángulo intersecta al círculo unitario en el punto P$(\cos x, senx)$. Por lo tanto, observando la ordenada de dicho punto se puede ver cómo varía el valor del $senx$, en función del ángulo x.
Cuando $x=0$, P es el punto de coordenadas $(1,0)$, de modo que $senx=0$.

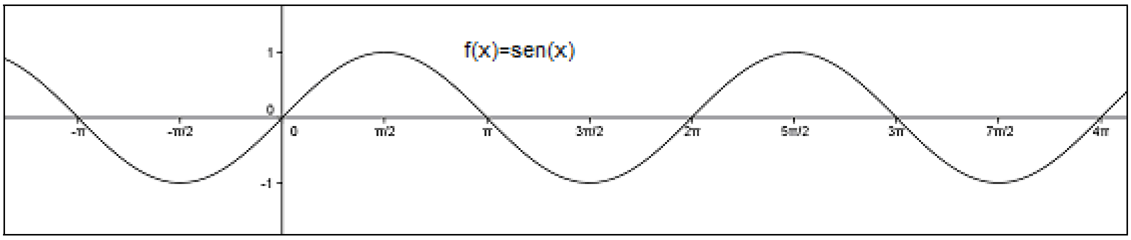
Cuando x se incrementa de 0 a $\frac{\pi}{2}$, P se mueve sobre el círculo en sentido contrario a las agujas del reloj, de $(1,0)$ al punto $(0,1)$, por lo tanto $senx$ se incrementa de 0 a 1.

Cuando x se incrementa de $\frac{\pi}{2}$ a π, P se mueve sobre el círculo en sentido contrario a las agujas del reloj, de $(0,1)$ al punto $(-1,0)$, por lo tanto $senx$ se reduce de 1 a 0 .

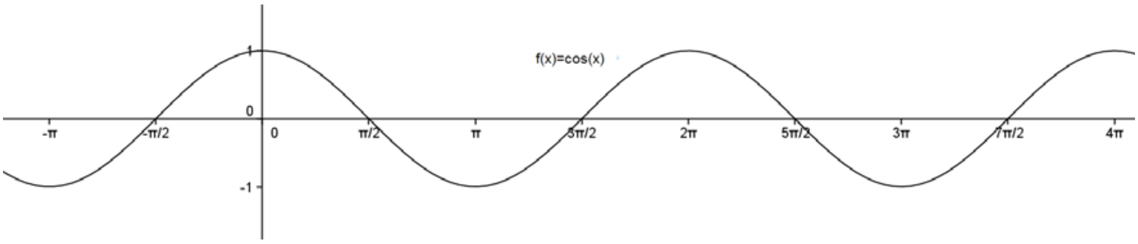
Cuando x se incrementa de π a $\frac{3\pi}{2}$, P se mueve sobre el círculo en sentido contrario a las agujas del reloj, de $(-1,0)$ al punto $(0,-1)$, por lo tanto $senx$ se reduce de 0 a -1.

Cuando x se incrementa de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, P completa una revolución al moverse en sentido contrario a las agujas del reloj, de $(0,-1)$ a $(1,0)$, por lo tanto $senx$ se incrementa de -1 a 0.

Cuando x se incrementa más allá de 2π, el punto P empieza una segunda vuelta alrededor del círculo de modo que los valores de $senx$ empiezan a repetirse.
De hecho, la gráfica de $f(x) = senx$, se repetirá cada 2π unidades.
La gráfica de $senx$, para ángulos negativos se puede obtener observando la ordenada de P durante una rotación en sentido de las agujas del reloj alrededor del círculo unitario. Como alternativa se puede usar la identidad: $sen(-x) = -senx$, para ver que los valores de la función seno en x y en $-x$, sólo difieren en el signo. Esto se visualiza en el gráfico, con una simetría con respecto al origen. La función $f(x) = senx$ es una función impar.
Para hallar la gráfica de $f(x) = senx$, basta sólo con dibujarla en el intervalo $[0,2\pi]$.
El resto de la curva se obtiene teniendo en cuenta que: $sen(x+2\pi) = senx$.Por cumplir con esta condición se dice que $f(x) = senx$ es periódica de período 2π .



El gráfico de la función $f(x) = \cos x$, puede obtenerse directamente por una traslación horizontal de la gráfica de la función $f(x) = senx$, en $\frac{\pi}{2}$ unidades a la izquierda, ya que : $\cos x = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.
La curva de ambas gráficas se llama ***sinusoide***.



La función $f(x)=\cos x$, también es periódica de período 2π, ya que $\cos(x+2\pi)=\cos x$.

Su gráfica es simétrica al eje y, esto ocurre porque $\cos(-x)=\cos x$. Es decir, $f(x)=\cos x$, es una función par.

Gráfico de la función : $f(x)=tg(x)$.

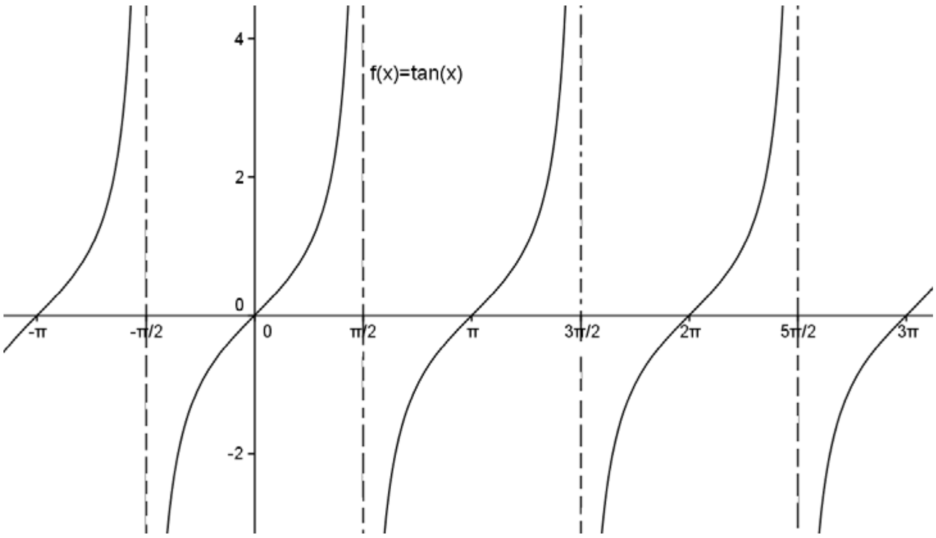
A diferencia de las funciones $sen(x)\ y\ \cos(x)$, que tienen dominio $(-\infty,\infty)$, la función tangente no está definida para todo valor de x. Puesto que $tg(x)=\dfrac{sen(x)}{\cos(x)}$, la función tangente no está definida cuando $\cos(x)=0$.

La siguiente tabla aclara un poco estos datos:

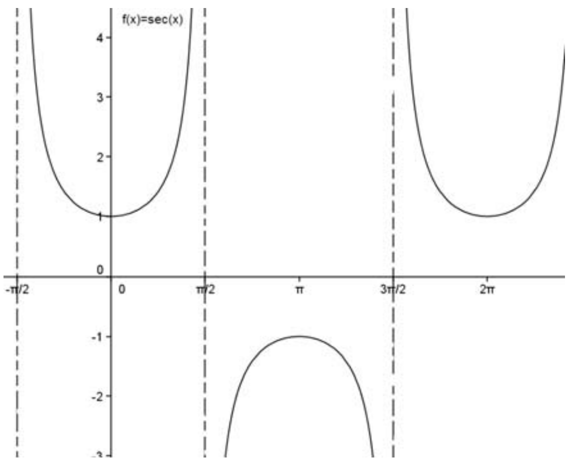
x (en rad.)	$senx$	$\cos(x)$	$tg(x)$
0	0	1	0
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/2$	1	0	No está def.
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	-$\sqrt{2}/2$	-1
π	0	-1	0
$5\pi/4$	-$\sqrt{2}/2$	-$\sqrt{2}/2$	1
$3\pi/2$	-1	0	No está def.
$7\pi/4$	-$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
2π	0	1	0

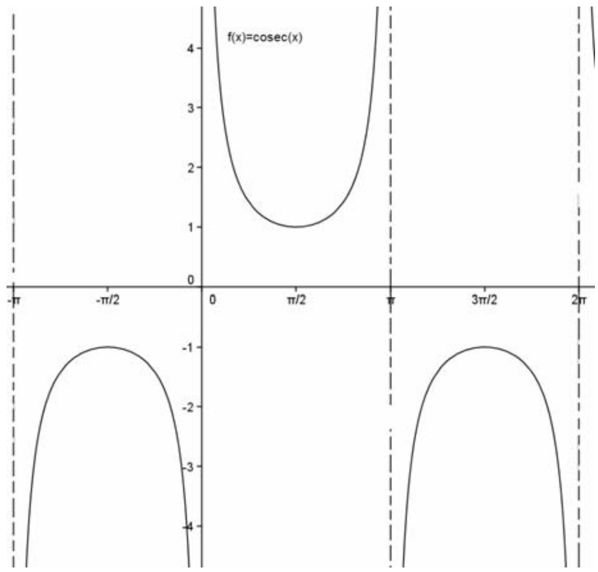
La función $f(x)=tg(x)$ no está definida en todos los valores de x. Cuando: $x=\pm\dfrac{\pi}{2},\pm\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2},.... \Rightarrow \cos(x)=0$. Es decir que el dominio de la función tangente de x, es: $R-\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\forall k\in Z\right\}$, y la imagen son todos los números reales.

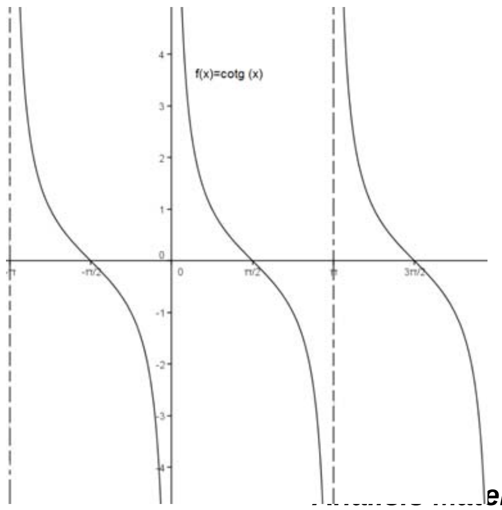
Es periódica de período π.



Veamos el gráfico de las otras funciones trigonométricas:
$y = \sec(x),\;\; y = \cos ec(x),\;\; y = \cot g(x)$



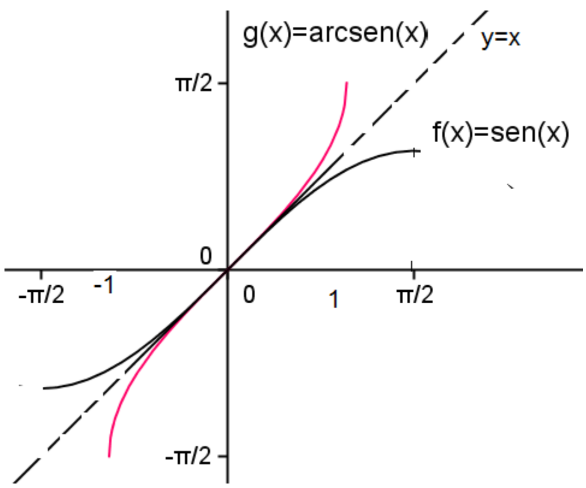




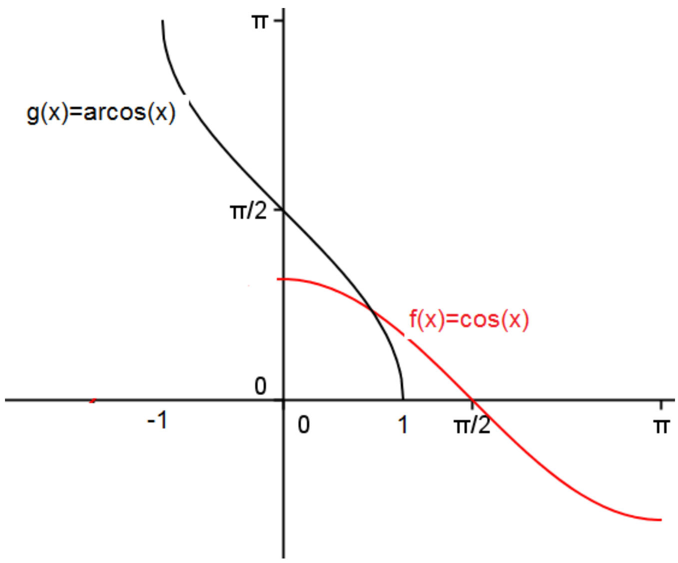
Funciones trigonométricas inversas
Como las funciones trigonométricas son periódicas, no tienen inversa. Pero se puede restringir el dominio de de dichas funciones de manera que las funciones restringidas tengan inversa.

Si se considera la función $f(x) = senx$, en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, dicha función resulta biyectica. Con lo cual se puede hallar su inversa. A la inversa de esta función se la llama función arcsen(x), y está definida desde $[-1,1]$ a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$f^{-1}(x) = arsen(x)$$



Para hallar la inversa de $f(x) = \cos(x)$, se debe restringir el dominio al intervalo $[0, \pi]$. Por lo tanto su inversa: $f^{-1}(x) = ar\cos(x)$ va a estar definida desde $[-1,1]$ a $[0, \pi]$



$$f^{-1}(x) = ar\cos(x)$$

Para hallar la inversa de $f(x) = tg(x)$, se debe restringir el dominio al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Por lo tanto su inversa: $f^{-1}(x) = arctg(x)$ va a estar definida desde $(-\infty, \infty)$ a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.