ANALISIS MATEMÁTICO I
SUCESIONES

Una sucesión se puede definir como un listado de números escritos en un orden definido. Por ejemplo:

$2,4,6,8,10,...$ $\quad$ $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},....$ $\quad$ $\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{9}....$

A los números de una sucesión se los llama ***términos*** de la sucesión. Los términos pueden describirse según las posiciones que ocupen.

En general, una sucesión se puede expresar como:

$a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...$ ó $\{a_n\}$

El número a_1, es el primer término; a_2 el segundo término; y en general, a_n es el enésimo término. Como sólo vamos a considerar las sucesiones infinitas, cada término a_n, tendrá un sucesor a_{n+1}.

Se puede observar que *para cada número natural n, hay un único número correspondiente a_n*
Por lo tanto, podemos definir formalmente una sucesión.

Una sucesión infinita de números es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

Casi siempre se escribe a_n en lugar de la notación de función $f(n)$, para indicar el valor de la función del número n.

Ejemplo 1.
La función asociada a la sucesión:

$2,4,6,8,10,...$, es $a_n = 2n$

$\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{9}....$, es $a_n = \frac{n}{2n+1}$

Obs.: Se puede definir también, una sucesión, considerando que el dominio sean los números naturales mayor que un número n_0 dado. Por ejemplo, la sucesión:

$12,14,16,18,20,...$, se puede definir por medio de la fórmula:

$a_n = 2n$, donde el índice $n \geq 6$

También se puede describir esta sucesión, con la expresión: $b_n = 2n+10$,considerando como en los casos anteriores, que $n \geq 1$.

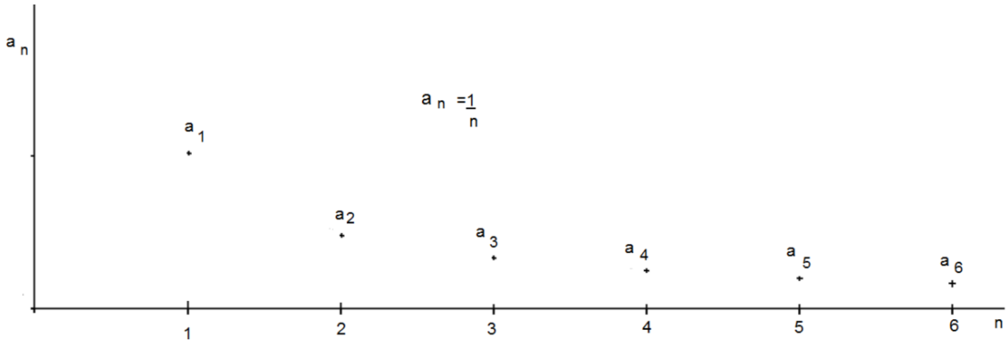
Al igual que en las funciones, las sucesiones también pueden expresarse en forma algebraica, numérica y gráfica. Se puede dar como dato una fórmula algebraica que expresa el valor del término general a_n; o si no, los valores numéricos de los primeros términos de la sucesión para hallar la expresión del término general.

Ejemplo 1

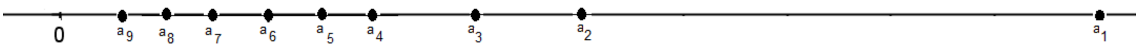
Dar los primeros seis términos de la sucesión: $a_n = \frac{1}{n}$

Estos términos son: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$

La gráfica de esta sucesión se compone de infinitos puntos aislados que a medida que los valores de n aumentan, los términos de la sucesión van tendiendo a cero.



Hay dos formas de representar gráficamente una sucesión, una es considerar los n en el eje horizontal, y los a_n en el eje vertical, como en este gráfico, y la otra forma es colocar en una recta numérica, los puntos: $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$



Ejemplo 2
Dar los seis primeros términos de las siguientes sucesiones, cuyo término enésimo es:

$$a) a_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad b) a_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$$

Sustituyendo n por los valores: 1, 2, 3, 4, 5, 6 en las expresiones dadas, se obtienen los términos de dichas sucesiones:

a) $1, 3, 6, 10, 15, 21$
b) $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}$

Ejemplo 3
Dar un término general para las siguientes sucesiones:

$$a) 1, 2, 4, 8, 16, 32 \qquad b) \frac{7}{2}, \frac{7}{5}, \frac{7}{8}, \frac{7}{11}, \frac{7}{14}, \frac{7}{17}$$

Los términos generales, son:

$$a) a_n = 2^{n-1} \qquad b) a_n = \frac{7}{3n-1}$$

Sucesiones definidas por recurrencia

Las sucesiones también se pueden definir recursivamente, dando una ecuación que relaciona el enésimo término con los términos anteriores, y alguno de los primeros términos que sean necesarios para empezar.

Sea la siguiente sucesión $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\ldots\ldots$ es decir:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$$
$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3 \quad a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5 \quad a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

El término enésimo se obtiene como la suma de los dos términos anteriores. No obstante, los primero y segundo términos deben ser fijados. En este caso se dice que el término enésimo es hallado por recurrencia. Esta sucesión se la conoce con el nombre de sucesión de Fibonacci:

$$\begin{cases} a_1 = 1\ , \quad a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \end{cases}$$

Una sucesión definida por recurrencia queda determinada de la siguiente manera:

1°) Se da el valor del término inicial o los términos iniciales

2°) El resto de los términos se obtienen a partir del término o los términos que lo preceden

Ejemplo 4

Dar los primeros seis términos de las sucesiones definidas recursivamente:

$a)\ a_n = a_{n-1} + 3 \qquad \text{para} \quad n > 1 \quad y\ a_1 = 4$

$b)\ a_n = -3a_{n-1} \qquad \text{para} \quad n > 1 \quad y\ a_1 = 2$

$c)\ a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + a_{n-2}\right) \quad \text{para} \quad n > 2 \quad y \quad a_1 = 0,\ a_2 = 1$

$d)\ a_n = n.a_{n-1} \qquad \text{para} \quad n > 1 \quad y\ a_1 = 1$

Soluciones:

$a)\ Si\ n = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 + 3 = 4 + 3 = 7$

$\quad Si\ n = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + 3 = 7 + 3 = 10$

O sea, que cada término se obtiene sumándole 3 al anterior. Los términos son:
$4, 7, 10, 13, 16, 19$

$b)\ Si\ n = 2 \Rightarrow a_2 = -3a_1 = (-3).2 = -6$

Cada término, se obtiene multiplicando por -3, el término anterior. Los primeros seis términos de esta sucesión, son: $2, -6, 18, -54, 162, -486$

$c)\ Si\ n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + a_1\right) = \frac{1}{2}\left(1 + 0\right) = \frac{1}{2}$

$\quad Si\ n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{2}\left(a_3 + a_2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}.\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

$\quad Si\ n = 5 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{2}\left(a_4 + a_3\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.\frac{5}{4} = \frac{5}{8}$

Cada término, se obtiene como la semisuma de los dos términos anteriores. Los primeros seis términos de esta sucesión, son: $0,1,\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{8},\frac{11}{16}$

$d)\ Si\ n=2 \Rightarrow a_2 = 2.a_1 = 2.1 = 2$

$Si\ n=3 \Rightarrow a_3 = 3.a_2 = 3.2 = 6$

Cada término enésimo se obtiene, multiplicando el término anterior por el n correspondiente. Los primeros seis términos de esta sucesión, son: $1,2,6,24,120,720$

Ejemplo 5

Dar una definición recursiva de las siguientes sucesiones:

$a)\ 1,3,7,15,31,63,...$

$b)\ 1,4,9,16,25,36,..$

Soluciones:

a) Fijamos $a_1 = 1$, y el resto de los términos se obtienen haciendo:

$$a_2 = a_1 + 2$$
$$a_3 = a_2 + 4 = a_2 + 2^2$$
$$a_4 = a_3 + 8 = a_3 + 2^3$$
$$a_5 = a_4 + 16 = a_4 + 2^4$$

Es decir que la forma recursiva es:

$a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$, para $n > 1$ y $a_1 = 1$

También se podría fijar $a_1 = 1$, y obtener el resto de los términos haciendo:

$$a_2 = 2.a_1 + 1$$
$$a_3 = 2.a_2 + 1$$
$$a_4 = 2.a_3 + 1$$
$$a_5 = 2.a_4 + 1$$

Es decir que la forma recursiva es:

$a_n = 2.a_{n-1} + 1$, para $n > 1$ y $a_1 = 1$

b) Fijamos $a_1 = 1$, y el resto de los términos se obtienen haciendo:

$$a_2 = a_1 + 3$$
$$a_3 = a_2 + 5$$
$$a_4 = a_3 + 7$$
$$a_5 = a_4 + 9$$

La forma recursiva es:

$a_n = a_{n-1} + (2n-1)$, para $n > 1$ y $a_1 = 1$

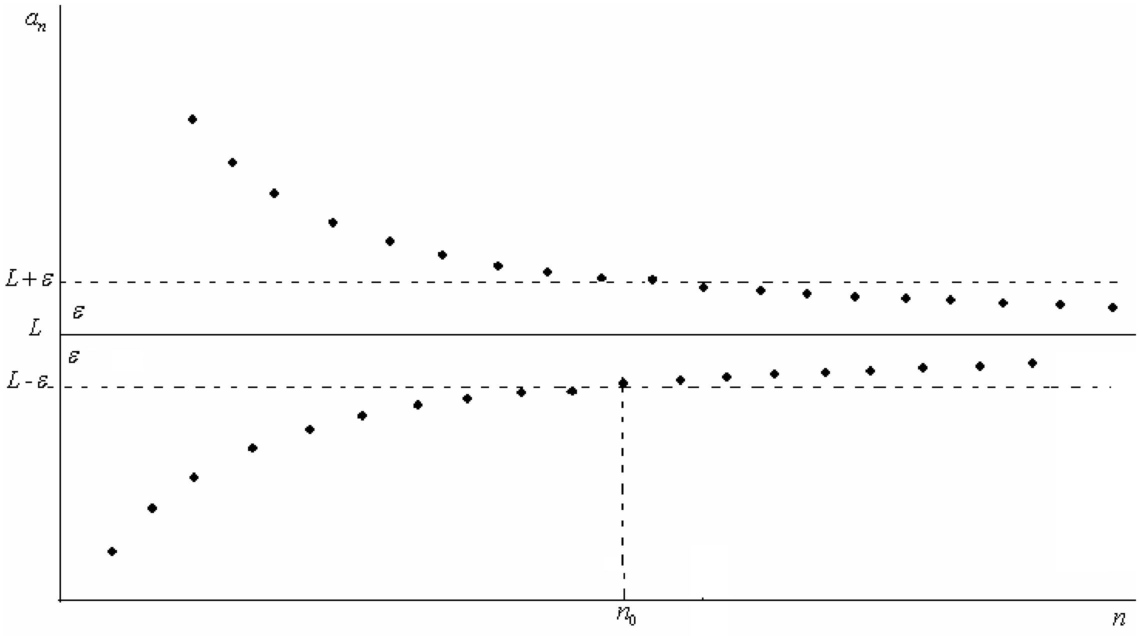
Convergencia de sucesiones

Estudiaremos ahora ciertas sucesiones en particular, en las cuales a medida que el subíndice n aumenta, los valores de a_n se van aproximando y acumulando alrededor de un punto fijo finito que llamaremos L. Si existe el límite L, se dice que la ***sucesión converge a su límite L.*** Si no existe L, decimos que la sucesión no converge.

Límite de sucesiones:

El concepto de límite de una sucesión es similar a lo trabajado en el límite de una función, incluyendo sus propiedades.

Supongamos que tenemos la siguiente sucesión, dada en forma gráfica:



Vemos que a medida que n crece, la sucesión a_n se va acercando al valor de L. Es decir que a partir de un cierto valor del subíndice al que llamaremos n_0 todos los términos que siguen a a_{n_0} en la sucesión, se encuentran cerca de L con bastante aproximación.

Si tomamos un valor de $\varepsilon > 0$ y tan pequeño como se quiera, con este valor construimos una franja alrededor de L. Es decir tendremos el entorno $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

La sucesión que estamos considerando tiene la propiedad de que existe un subíndice n_0 que depende del valor de ε (cuánto más pequeño es el ε mayor es el valor de n_0) tal que solamente un número finito de términos $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_{n_0-1}$ quedan fuera de la franja o entorno. Los valores $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots\ldots$ un número infinito de términos quedarán dentro de la franja o entorno por más pequeña que sea.

Es decir que primero se toma un valor de $\varepsilon > 0$ y luego vemos si es posible hallar un valor de n_0 que dependa de ε (es decir $n_0 = f(\varepsilon)$) de tal manera que $a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ ó $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$

Si esto ocurre para todo valor de $\varepsilon > 0$, diremos que la sucesión $\{a_n\}$ tiene límite finito cuando $n \to \infty$, que su límite es L y que la sucesión es convergente.

Veremos a continuación la definición en forma simbólica.

Definición:
Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite finito L, o que es convergente y se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ si y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) / \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Veremos ahora ciertas sucesiones que no tienen un límite finito, pero tienen la particularidad de que a medida que el subíndice aumenta, también lo hace el valor de la sucesión

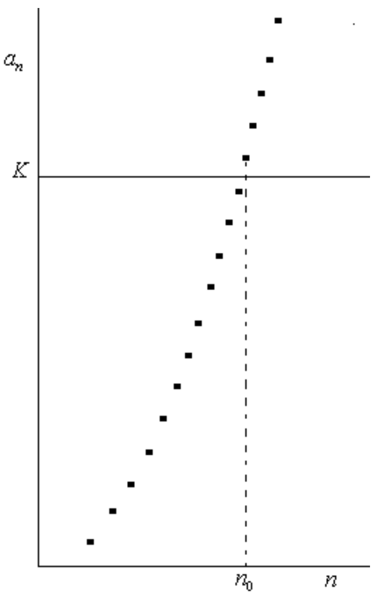
Límites infinitos
Sucesiones que divergen a más infinito
Supongamos que tenemos la siguiente sucesión:

$$\{n^2\} = 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\ldots\ldots\ldots n^2, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Vemos que a medida que n va tomando valores cada vez mayores, ocurre lo mismo con la sucesión. Para expresar esto escribiremos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

Para justificar esto tomemos un valor de K positivo y tan grande como se quiera, encontraremos un valor de n_0 en función de ese valor K, es decir $n_0 = f(K)$ tal como lo indica el siguiente gráfico:



Ahora, si para todo valor de $n \geq n_0$ resulta que el término de la sucesión se encuentra por encima del valor K (es decir $a_n \in (k, +\infty)$), podremos asegurar que el límite de la sucesión es más infinito.

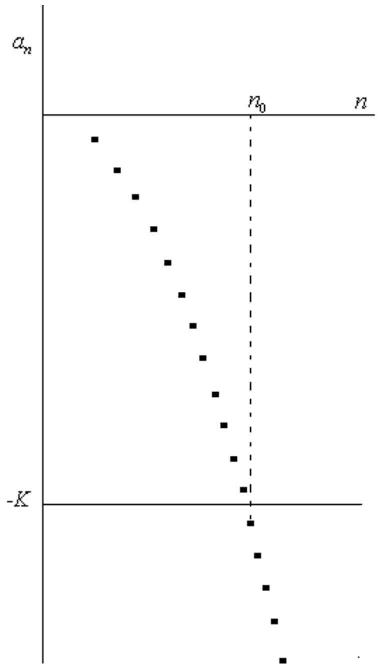
Veremos a continuación la definición en forma simbólica.

Definición:
Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite más infinito o que es divergente a más infinito y se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ si y solo si:

$$\forall K > 0, \exists n_0(K) / \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n > K$$

Sucesiones que divergen a menos infinito
De manera similar a las anteriores, hay ciertas sucesiones que tienen la particularidad de que a medida que el subíndice crece, los valores de la sucesión son cada vez menores. Para expresar esto escribiremos: $\lim_{n\to\infty} \{a_n\} = -\infty$

Para justificar esto tomemos un valor de K positivo y tan grande como se quiera, encontraremos un valor de n_0 en función de ese valor K, es decir $n_0 = f(K)$, pero coloquemos el valor de $-K$, tal como lo indica el siguiente gráfico:



Ahora, si para todo valor de $n \geq n_0$ resulta que el término de la sucesión se encuentra por debajo del valor $-K$ (es decir $a_n \in (-\infty, -K)$), podremos asegurar que el límite de la sucesión es menos infinito

Veremos a continuación la definición en forma simbólica.

Definición:

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite menos infinito o que es divergente a menos infinito y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ si y solo si:

$$\forall K > 0, \exists n_0(K) / \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n < -K$$

Algunas propiedades importantes a tener en cuenta para determinar la convergencia de una sucesión.

1) La sucesión $\{a_n\} = a^n$ converge a 0, si $|a| < 1$, y diverge si $a > 1$.

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 0 & \text{si } |a| < 1 \end{cases}$$

2) La sucesión $\{a_n\} = \dfrac{1}{n^p}$ converge a 0, si $p > 0$.

3) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{|a_n|} = +\infty$

4) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$

Observación:

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$

5) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ (convergente) y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ (divergente a más infinito), entonces:

$$\lim_{n\to\infty} a_n.b_n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad L>0 \\ -\infty & \text{si} \quad L<0 \end{cases}$$

Observación:
En el caso de que $L=0$ tendremos una indeterminación del tipo $0.\infty$

Ejemplo 6
Determinar si las siguientes sucesiones convergen o divergen. Si convergen, determinar el valor del límite.

$a) a_n = (0,8)^n \qquad b) a_n = \dfrac{1-e^{-n}}{1+e^{-n}} \qquad c) a_n = 1+(-1)^n$

Soluciones:

a) Como $0,8<1$, entonces la sucesión $a_n = (0,8)^n$ converge y su límite es 0.

b) Como $e^{-1}<1$, entonces el $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{-1}\right)^n = 0$.

Por lo tanto, como el $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-n}}{1+e^{-n}} = 1$, la sucesión es convergente.

c) Como $(-1)^n$, va cambiando el signo de acuerdo al valor de n, esta sucesión alterna sus valores de 0 a 2. Por lo tanto la sucesión $a_n = 1+(-1)^n$ no converge.

Límites indeterminados
Cuando al calcular el límite de una sucesión nos encontramos con indeterminaciones, debemos operar algebraicamente el término general de la sucesión para poder calcular dicho límite, de la misma forma que hemos trabajado en límite de funciones.
Veremos esto mediante una serie de ejemplos con las indeterminaciones más comunes que ocurren en el cálculo de límites de sucesiones.

Ejemplo 7

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1} = 0$$

En este ejemplo no hay indeterminación debido a que el denominador de la sucesión es cada vez mayor y al ser constante el numerador la sucesión tiende a cero

Ejemplo 8
Hallar:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{5n^2+3}$$

Si calculamos el límite del numerador y del denominador, nos encontramos con una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ que resolvemos dividiendo numerador y denominador por n a la mayor potencia del denominador, (en este caso n^2) con lo cual la expresión algebraica del término general de la sucesión no cambia.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{5n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2}+\frac{3}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{5+\frac{3}{n^2}}=\frac{3+0}{5+0}=\frac{3}{5}$$

Ejemplo 9
Hallar:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^3+3n}$$

Dividimos numerador y denominador por n^3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^3+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^3}+\frac{2}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}+\frac{3n}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}}{1+\frac{3}{n^2}}=\frac{0+0}{1+0}=\frac{0}{1}=0$$

Ejemplo 10
Hallar:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n}{n^2+2}$$

Dividimos numerador y denominador por n^2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3}{n^2}+\frac{3n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}=\frac{\infty+0}{1+0}=\frac{\infty}{1}=\infty$$

SUCESIONES ACOTADAS

Sucesiones acotadas superiormente:
Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está acotada superiormente si:

$$a_n\le K \quad \forall n \quad \text{y} \quad K\in R$$

A la menor de las cotas superiores se la llama **Supremo**

Sucesiones acotadas inferiormente:
Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está acotada inferiormente si:

$$a_n\ge K \quad \forall n \quad \text{y} \quad K\in R$$

A la mayor de las cotas inferiores se la llama **ínfimo.**

Sucesión acotada

Si una sucesión está acotada superior e inferiormente, diremos que está acotada.
Una sucesión está acotada si existe un valor de $K \in R^+$ tal que $|a_n| \leq K \quad \forall n$

Que una sucesión esté acotada, no quiere decir que tenga límite finito (convergente)

Por ejemplo la sucesión $\{a_n\} = \left\{(-1)^n\right\}$ está acotada pero no tiene límite, ya que los términos de la sucesión oscilan entre 1 y -1 según el exponente sea par o impar. Algunos autores a estas sucesiones las llaman oscilantes.

Si la sucesión es no acotada podemos asegurar que es divergente

SUCESIONES MONOTONAS

Las sucesiones crecientes (estrictamente crecientes) y las sucesiones decrecientes (estrictamente decrecientes), se llaman sucesiones monótonas.

Sucesión creciente

Una sucesión $\{a_n\}$ es creciente si: $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n$
Una sucesión $\{a_n\}$ es estrictamente creciente si: $a_{n+1} > a_n \quad \forall n$

Es decir que el término siguiente es mayor que el anterior

Ejemplo 11

Verificar que la sucesión $\left\{\dfrac{n^2}{n+5}\right\}$ es estrictamente creciente.

Debemos probar que $a_n < a_{n+1}$

$$a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n^2}{n+5} < \frac{(n+1)^2}{(n+1)+5} \Leftrightarrow n^2.(n+6) < (n+5)(n+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^3 + 6n^2 < n^3 + 7n^2 + 11n + 5 \Leftrightarrow 6n^2 < 7n^2 + 11n + 5$$

Con esta última expresión hemos verificado que $a_n < a_{n+1}$

Sucesión decreciente

Una sucesión $\{a_n\}$ es decreciente si: $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n$
Una sucesión $\{a_n\}$ es estrictamente decreciente si: $a_{n+1} < a_n \quad \forall n$

Es decir que el término siguiente es menor que el anterior

Ejemplo 12

Verificar que la sucesión $\left\{\dfrac{5n+1}{n}\right\}$ es estrictamente decreciente.

Debemos probar que $a_n > a_{n+1}$

$$a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow 5+\frac{1}{n} > 5+\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

Como $n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, por lo tanto $a_n > a_{n+1}$.

También se podría haber probado que:

$$a_n - a_{n+1} > 0 \Leftrightarrow 5+\frac{1}{n} - 5 - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

Sucesiones monótonas acotadas

Si una sucesión es monótona y acotada, entonces es convergente

Admitiremos sin demostración, dos principios fundamentales:

1) Si una sucesión $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente, entonces tiene límite finito y el valor de ese límite coincide con el supremo
2) Si una sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente, entonces tiene límite finito y el valor de ese límite coincide con el ínfimo.

Obs.: La sucesión $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se puede demostrar que es creciente y acotada. Por lo tanto podemos asegurar por la proposición anterior que esta sucesión tiene límite. Dicho límite es el número irracional e.

Sucesión aritmética

Una secuencia en la que cada término se obtiene del anterior sumándole un valor constante, se llama sucesión aritmética. En estas sucesiones, la diferencia entre dos términos consecutivos es constante.

Ejemplo 13

Cuáles de las siguientes sucesiones son aritméticas?:

$a)9,5,1,-3,-7,\ldots$ $\quad$ $b)2,4,8,16,32,\ldots$

$c)2+p,\ 5+p,\ 8+p,\ 11+p\ldots$ $\quad$ $d)10,5,0,5,10,..$

a) Cada término se obtiene restando 4 al término anterior, por lo tanto la sucesión es aritmética.
b) Esta sucesión no es aritmética, ya que cada término es el doble del anterior. Las diferencias son: 2, 4, 8, 16.
c) La sucesión es aritmética ya que cada término se obtiene sumándole 3 al anterior.
d) La sucesión no es aritmética, ya que la diferencia entre los términos primero y segundo es 5, pero la diferencia entre los términos cuarto y quinto es -5.

Ejemplo 14

Veamos cómo escribir una fórmula para el término general de una sucesión aritmética. Dada la sucesión: 2, 6, 10, 14, 18, ... en la que los términos se incrementan en 4 unidades, podemos escribir:

$a_1 = 2$

$a_2 = 6 = 2 + 1.4$

$a_3 = 10 = 2 + 2.4$

$a_4 = 14 = 2 + 3.4$

cuando llegamos al término de orden n, hemos añadido $(n-1)$ veces el 4, por lo que:

$$a_n = 2 + (n-1).4$$

En general:

Para $n \geq 1$, el n-ésimo término de una sucesión aritmética es:

$$a_n = a_1 + (n-1).d$$

donde a_1 es el primer término, y d es la diferencia entre términos consecutivos, llamada razón de la sucesión.

Ejemplo 15

Dada la sucesión aritmética: 5, 9,13,…, hallar el décimo término.

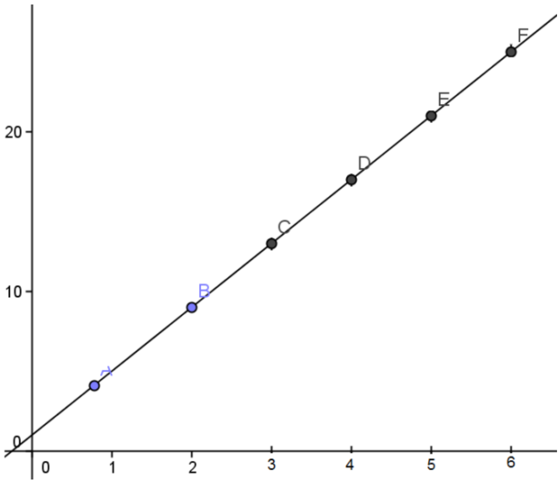
Usando la fórmula $a_n = a_1 + (n-1).d$, donde: $a_1 = 5$, $d = 4$ y $n = 10$, el décimo término es:

$a_{10} = 5 + (10-1)4 = 41$

Ejemplo 16

Graficar los valores de la sucesión del ejemplo anterior : $a_n = 5 + (n-1)4$, y la gráfica de la función lineal $f(x) = 4x + 1$, en un mismo sistema coordenado.

Podemos concluir que los términos de una sucesión aritmética son puntos de la gráfica de una función lineal.



Ejemplo 17

Hallar los cuatro primeros términos de la sucesión $a_n = a_{n-1} + 3$, y el enésimo término cuando $a_1 = 5$. Qué tipo de sucesión es?.

Sabemos que el primer término es $a_1 = 5$. Lo usamos para encontrar el segundo término:

$$a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$$

Usamos a_2, para calcular a_3, y a_3 para calcular a_4:

$$a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11; \qquad a_4 = a_3 + 3 = 11 + 3 = 14$$

Como cada término se obtiene del anterior sumándole 3, ésta es una sucesión aritmética.

Tenemos: $a_2 = 5 + 3.1$, $a_3 = 5 + 3.2$, $a_4 = 5 + 3.3$, en general: $a_n = 5 + 3(n-1)$.

Sucesión geométrica.
Una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior por un valor constante se denomina sucesión geométrica. En una sucesión geométrica, la razón entre los términos sucesivos es constante.

Ejemplo 18
Cuáles de las siguientes sucesiones son geométricas?.

$$a)\ 10,100,1000,10000,\ldots \qquad b)\ 10,110,210,310,410,\ldots$$
$$c)\ 100,50,25,12.5,\ldots \qquad d)\ 5,25,125,625,\ldots$$

a) la sucesión es geométrica, ya que cada término es 10 veces el término anterior. El cociente entre cualquiera de los términos con el anterior es 10.
b) La sucesión no es geométrica ya que la razón entre términos consecutivos no es constante. Como se mantiene constante la diferencia entre términos consecutivos la sucesión es aritmética.
c) La sucesión es geométrica ya que cada término es 1/2 del anterior, de modo que la razón entre términos sucesivos es siempre 1/2.

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}, \quad \frac{a_3}{a_2}=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$$

d) La sucesión es geométrica, ya que cada término se obtiene de multiplicar el anterior por 5.

Al igual que con las secuencias aritméticas, hay una fórmula para el término general de una progresión geométrica.

Consideremos la sucesión 30, 300, 3000, ... en la que cada término es 10 veces el término anterior:

$$a_1=30 \quad a_2=30.10 \quad a_3=30.10^2 \quad a_4=30.10^3$$

Cuando llegamos al término de orden n, se ha multiplicado 30 por $(n-1)$ veces 10, es decir:

$$a_n=30.10^{n-1}$$

En general:

Para $n\geq 1$, el n-ésimo término de una sucesión geométrica es:

$$a_n=a_1.q^{n-1}$$

donde a_1 es el primer término, y q es la razón entre términos consecutivos.

Ejemplo 19
Dada la sucesión geométrica: $6,18,54,162,486,\ldots.$, identificar la razón y escribir el enésimo término de la misma.
Como $a_1=6\ y\ q=3$, el término general es:

$$a_n=6.3^{n-1}$$

Obs:
La fórmula $a_n=6.3^{n-1}$, se parece a la fórmula de la función exponencial: $f(x)=a.\,b^x$. Una sucesión geométrica es una función exponencial cuyo dominio se limita a los números enteros positivos.