Tema 10

Integrales dobles y triples

Hasta ahora se han calculado el área de figuras geométricas planas elementales: el rectángulo, el círculo, el trapecio, etc. Pero, ¿cómo calcular el área de figuras no regulares? Una buena aproximación puede ser la de dividir la zona en pequeños rectángulos y sumar las áreas de cada uno de ellos:

Figura 10.1: Mallado para la aproximación del área

Esta idea era la que subyacía en la construcción de la integral que vimos en el tema anterior y que nos permitió calcular longitudes de curvas, áreas limitadas por curvas y volúmenes de cuerpos de revolución. En este tema, se generaliza el concepto de integral definida a funciones de dos o tres variables, obteniendo las llamadas integrales de área o de volumen, respectivamente. Esto nos permitirá calcular el volumen de cuerpos limitados por superficies, no necesariamente de revolución. También permitirá calcular áreas mediante integrales dobles sencillas que en el tema anterior resultaban algo más complicadas. Se empezará definiendo la integral sobre un rectángulo.

10.1. Integrales dobles sobre rectángulos

Sea $f(x, y)$ una función acotada sobre un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Una *partición* del rectángulo R son dos conjuntos de puntos $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ e $\{y_j\}_{j=0}^{m}$, satisfaciendo

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \qquad c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = d$$

es decir, $P = P_1 \times P_2$, donde P_1 y P_2 son particiones de $[a, b]$ y $[c, d]$, respectivamente.

Se llama área de R a $v(R) = (d-c)(b-a)$. Toda partición divide al rectángulo R en $n \cdot m$ subrectángulos $R_{jk} = [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$ como se observa en la Figura 10.2.

Se llama *norma* de la partición P a

$$\|P\| = \text{máx}\{v(R_{jk}) \ : \ j = 1, \ldots, n; \ k = 1, \ldots, m\}$$

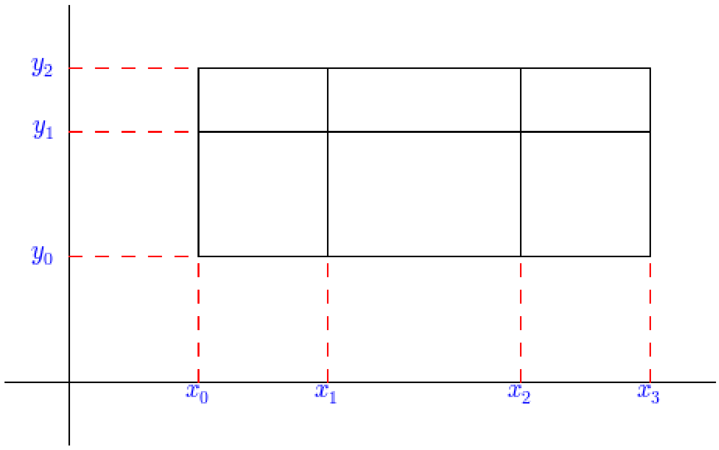


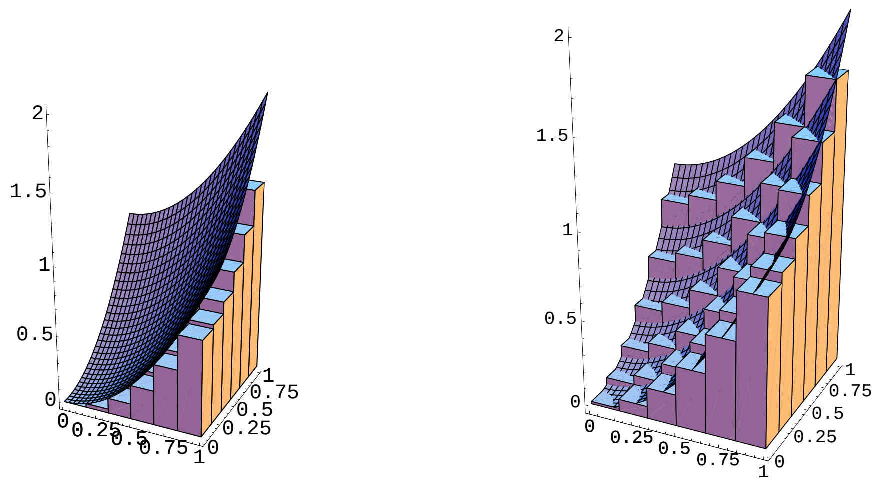
Figura 10.2: Una partición del rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$

Considérese cualquier punto c_{jk} del rectángulo R_{jk} y fórmese la suma

$$S(f, P) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} f(c_{jk}) v(R_{jk})$$

llamada *suma de Riemann* para f

En la siguiente gráfica hemos representado las sumas de Riemann para la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ tomando como punto c_{jk} el punto medio del rectángulo y el punto inferior del rectángulo.



(a) c_{jk} como punto inferior

(b) c_{jk} como punto medio

Figura 10.3: Sumas de Riemann

Definición 10.1 Si la sucesión $\{S(f,P)\}$ converge a un límite S, cuando la norma de la partición tiende a 0, que es el mismo para cualquier elección de c_{jk}, entonces se dice que f es integrable sobre R y se escribe

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} f(c_{jk}) v(R_{jk})$$

A continuación se resumen las propiedades más importantes de las funciones integrables.

Teorema 10.2 Sean f y g dos funciones integrables sobre un rectángulo R. Entonces

1. (Linealidad) $f+g$ es integrable sobre R y

$$\iint_R (f(x,y)+g(x,y))dxdy = \iint_R f(x,y)dxdy + \iint_R g(x,y)dxdy$$

2. (Homogeneidad) αf es integrable sobre R, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, y

$$\iint_R \alpha f(x,y)dxdy = \alpha \iint_R f(x,y)dxdy$$

3. (Monotonía) Si $f(x,y) \leq g(x,y)$, para todo $(x,y) \in R$, entonces

$$\iint_R f(x,y)dxdy \leq \iint_R g(x,y)dxdy$$

4. (Aditividad) Si $R = P \cup Q$ con P y Q dos rectángulos cuya intersección es una línea recta o un punto o vacía, entonces

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_P f(x,y)dxdy + \iint_Q f(x,y)dxdy$$

5. (Valor absoluto) $|f|$ también es integrable y se verifica

$$\left| \iint_R f(x,y)dxdy \right| \leq \iint_R |f(x,y)|dxdy$$

Un primer ejemplo de una amplia clase de funciones integrables la proporciona el siguiente teorema

Teorema 10.3 Toda función continua sobre un rectángulo cerrado R es integrable

Aunque la clase de las funciones integrables es mucho más amplia, el teorema anterior será suficiente en muchos casos prácticos.

En general, las funciones integrables son aquellas que son continuas salvo en conjuntos "muy pequeños".

Definición 10.4 (Medida nula) Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tiene *contenido nulo* si, dado $\epsilon > 0$, existe un número finito de rectángulos que lo recubren y la suma de sus volúmenes es menor que ϵ.

Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tiene *medida nula* si, dado $\epsilon > 0$, existe una sucesión (finita o infinita) de rectángulos, R_n, que lo recubren y cumpliendo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} V(R_n) < \epsilon$$

El criterio general para saber qué funciones son integrables lo proporciona el siguiente teorema

Teorema 10.5 (Criterio de Lebesgue) Una función definida en un rectángulo es integrable Riemann si, y sólo si, el conjunto de puntos de discontinuidad de la función tiene medida nula.

10.1.1. Cálculo de integrales dobles

El cálculo de una integral doble se realiza mediante el cálculo de dos integrales iteradas, de acuerdo al siguiente teorema:

Teorema 10.6 (Teorema de Fubini) Sea f una función integrable sobre un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$.

1. Si para cada $x \in [a, b]$, la sección transversal $f_x(y) := f(x, y)$, $y \in [c, d]$, es integrable sobre $[c, d]$, entonces la función

   $$F(x) := \int_c^d f_x(y)dy$$

   es integrable sobre $[a, b]$ y se verifica

   $$\iint_R f(x, y)dxdy = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx$$

2. Si para cada $y \in [c, d]$, la sección transversal $f_y(x) := f(x, y)$, $x \in [a, b]$, es integrable sobre $[a, b]$, entonces la función

   $$G(y) := \int_a^b f_y(x)dx$$

   es integrable sobre $[c, d]$ y se verifica

   $$\iint_R f(x, y)dxdy = \int_c^d G(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

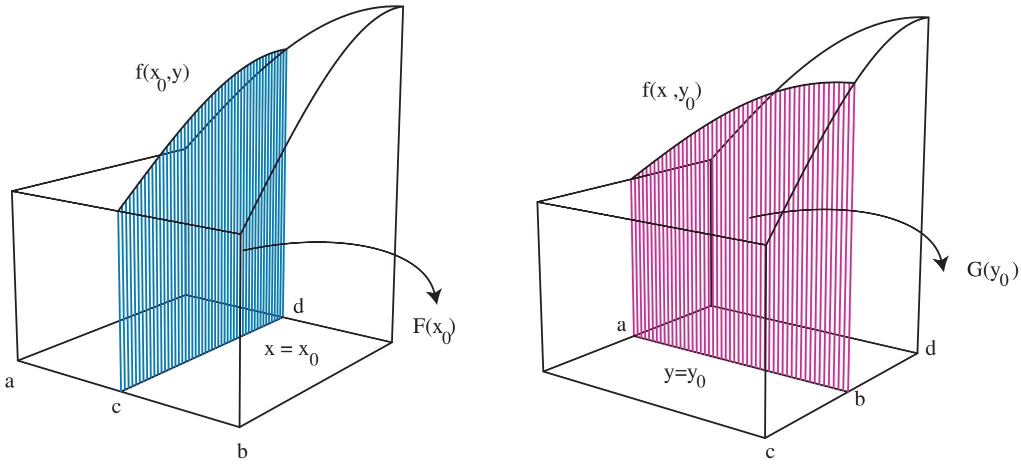


Figura 10.4: El teorema de Fubini

Corolario 10.7 Si f es continua sobre un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, entonces

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Ejemplo 10.1 Se desea calcular la integral doble $\iint_R x^2 y \, dxdy$ siendo $R = [1, 2] \times [0, 1]$.

Solución: Dado que la función $x^2 y$ es continua en R basta aplicar el Teorema de Fubini para obtener

$$\begin{aligned} \iint_R x^2 ydxdy &= \int_1^2 \left(\int_0^1 x^2 ydy \right) dx = \int_1^2 \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_1^2 \frac{x^2}{2} \, dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_{x=1}^{x=2} = \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

□

Ejercicio 10.1 Cálculese la integral anterior cambiando el orden de integración.

10.1.2. Integrales dobles sobre recintos acotados

Para generalizar el concepto de integral doble a recintos acotados se hace uso de la *función característica*

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

donde $A \subset \mathbb{R}^2$.

Si el conjunto A es acotado y verifica que su frontera tiene medida nula, entonces la función característica es integrable sobre cualquier rectángulo R que contiene a A y, en este caso, existe

$$a(A) := \iint_R 1_A(x,y)dxdy$$

que se llama la *medida* o *área* de A. El conjunto A se dice, entonces, *medible.*

Entonces, dada una función integrable sobre un rectángulo $R \supset A$, se define

$$\iint_A f(x,y)dxdy := \iint_R 1_A(x,y)f(x,y)dxdy$$

En la figura siguiente puede verse gráficamente este proceso, donde $F(x,y) = 1_A(x,y)f(x,y)$:

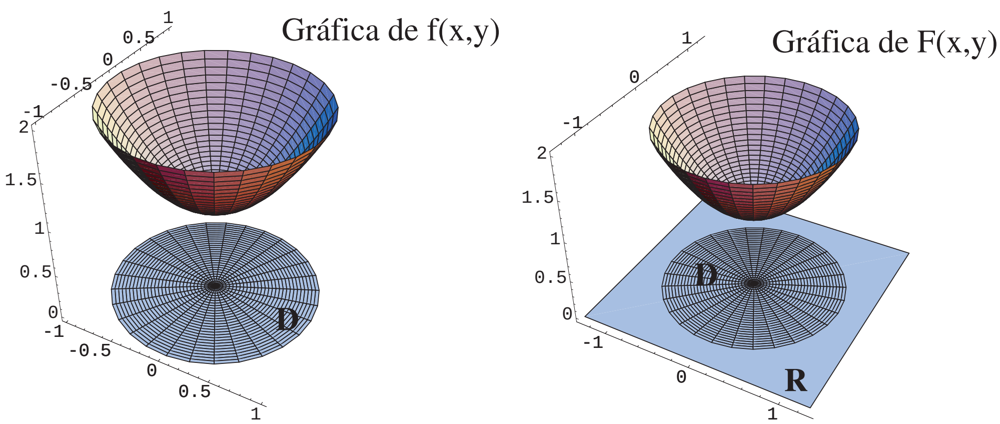


Figura 10.5: Recinto acotado y función característica

Esta definición permite extender la integración a recintos más generales: aquellos que son medibles.

Por tanto, hay que reconocer los conjuntos que son medibles. Para los objetivos de nuestro curso basta aplicar, en general el siguiente resultado:

Teorema 10.8 La gráfica de una función continua tiene medida nula; es decir, si $\Phi(x)$ es una función continua definida en un intervalo I, el conjunto

$$A = \{(x, y) \ : \ y = \Phi(x); \ x \in I\}$$

tiene medida nula.

En definitiva, los conjuntos cuya frontera está formada por gráficas de funciones continuas son medibles. En particular, pueden distinguirse dos tipos de recintos:

Recintos de tipo I

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b; \ g_2(x) \leq y \leq g_1(x)\}$$

siendo $g_2(x), g_1(x)$ funciones continuas en $[a, b]$. En este caso,

$$\boxed{\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_2(x)}^{g_1(x)} f(x, y) dy \right) dx}$$

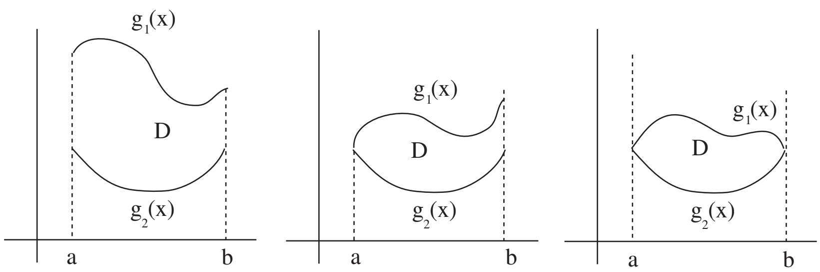


Figura 10.6: Algunos dominios de tipo I

Ejemplo 10.2 Se quiere calcular la integral

$$\int \int_D (x + 2y) \, dy \, dx$$

donde D es la región acotada por la parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

Solución:

En primer lugar, tras representar gáficamente el dominio de integración, trazamos una recta vertical, L, que pase por el dominio D y marcamos los valores de la variables y por donde entra y sale la recta L, como puede verse en la siguiente figura.

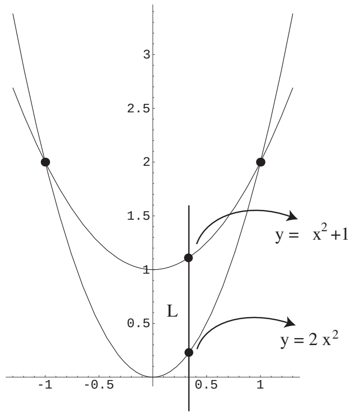


Figura 10.7: Integración sobre una región de tipo I

La región de integración es, por tanto, el dominio de tipo I:

$$D = \{(x, y) / -1 \leq x \leq 1\,;\, 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2)\}$$

Luego:

$$\int\int_D (x + 2y)\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\, dy\, dx$$

$\square$

Ejercicio 10.2 Calcula la integral doble $\iint_T xydxdy$ siendo T el recinto limitado por el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ y $C(1, 1)$; expresando T como un recinto de tipo I.

(**Sol.:** $\frac{1}{3}$)

Ejercicio 10.3 Calcula la integral doble $\iint_T x - ydxdy$ siendo T el recinto limitado por el triángulo de vértices $A(1, 1)$, $B(2, 4)$ i $C(3, 3)$; expresando T como un recinto de tipo I.

$$\textbf{(Sol.: } -\tfrac{4}{3} \text{)}$$

Recintos de tipo II

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ c \leq y \leq d; \ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

siendo $h_1(y), h_2(y)$ funciones continuas en $[c, d]$. En este caso,

$$\boxed{\iint_A f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dx \right) dy}$$

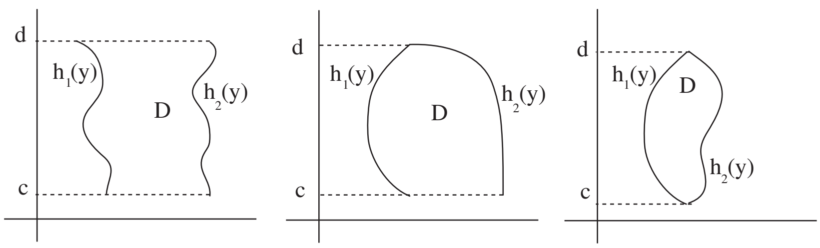


Figura 10.8: Algunos dominios de tipo II

Ejemplo 10.3 Calculemos la integral

$$\int\int_D xy\, dy\, dx$$

donde D es la región acotada por $y = x - 1$ y $2x + 6 = y^2$.

Solución: Después de representar gráficamente el dominio de integración, trazamos una recta horizontal, L, que pase por el dominio D y marcamos los valores de la variables x por donde entra y sale la recta L, como puede verse en la siguiente figura.

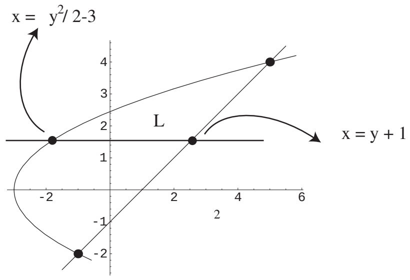


Figura 10.9: Integración sobre una región de tipo II

Luego el dominio de integración es el dominio de tipo II:

$$D \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} -2 \leq & y & \leq 4 \\ y+1 \leq & x & \leq \frac{1}{2}(y^2-6) \end{array} \right.$$

Por tanto:

$$\int\int_D xy\,dy\,dx = \int_{-2}^{4}\int_{y+1}^{\frac{1}{2}(y^2-6)} xy\,dx\,dy =$$

$\square$

Ejercicio 10.4 Calcula la integral doble $\iint_T xydxdy$ siendo T el recinto limitado por el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(2,0)$ y $C(1,1)$; expresando T como un recinto de tipo II. Compara el resultado con el obtenido en el Ejercicio 10.2.

(**Sol.:** $\frac{1}{3}$)

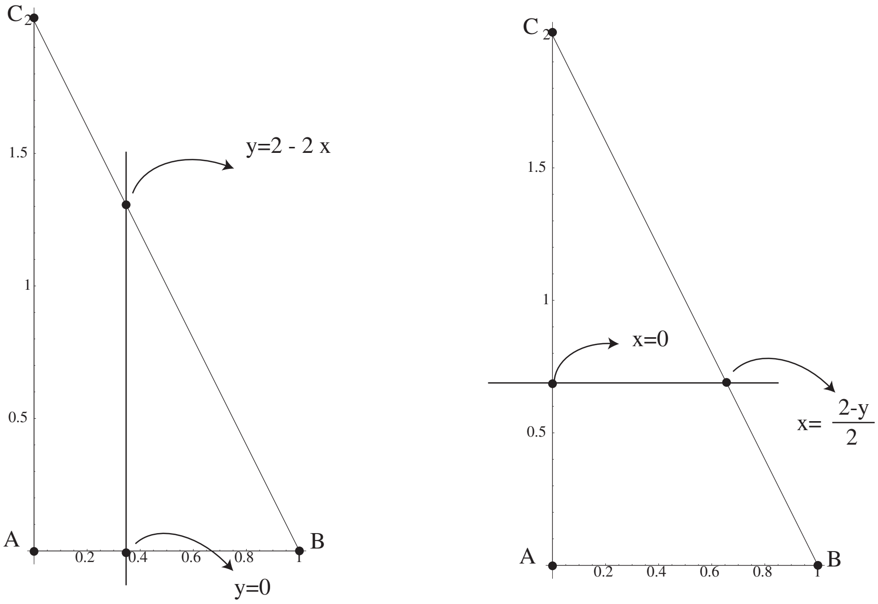
Ejercicio 10.5 Calcula la integral doble $\iint_T (x-y)dxdy$ siendo T el recinto limitado por el triángulo de vértices $A(1,1)$, $B(2,4)$ i $C(3,3)$; expresando T como un recinto de tipo II. Compara el resultado con el obtenido en el Ejercicio 10.3.

(**Sol.:** $-\frac{4}{3}$)

Algunas regiones pueden escribirse indistintamente como de tipo I o de tipo II. En estos casos, se elige aquella que resulte más fácil o más corta. En el siguiente ejemplo, se han calculado ambas para que se puedan comparar los procedimientos.

Ejemplo 10.4 Se desea calcular la integral doble $\iint_T xydxdy$ siendo T el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(1,0)$ y $C(0,2)$.

Solución: El recinto puede verse en la figura expresado como de tipo I o de tipo II



(a) Recinto de tipo I

(b) Recinto de tipo II

Figura 10.10: Un triángulo como región de tipo I y II

Para ello, si se expresa T como una región de tipo I: $T \equiv \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 \leq y \leq 2-2x \end{cases}$

y, entonces

$$\begin{aligned}
\iint_T xydxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} xy\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx \\
&= \int_0^1 \left(x\frac{(2-2x)^2}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(2x + 2x^3 - 4x^2 \right) dx \\
&= \left[x^2 + \frac{x^4}{2} - 4\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{4}{3} = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

Si se expresa T como un recinto de tipo II: $T \equiv \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ \\ 0 \leq x \leq \frac{2-y}{2} \end{cases}$

y, entonces

$$\iint_T xydxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{2-y}{2}} xy\,dx \right) dy = \ldots = \frac{5}{6}$$

$\square$

Ejercicio 10.6 Calcula la integral de la función $f(x,y) = x^2y^2$ sobre la región R del primer cuadrante limitada por las hipérbolas equiláteras $xy = 1$, $xy = 2$ y las rectas $y = \frac{x}{2}$, $y = 3x$.

(**Sol.:** $\frac{7}{6} \ln 6$)

Ejercicio 10.7 Calcular el área de la región del primer cuadrante limitada por las curvas $xy = 2$, $xy = 4$, $y = x$, $y = 3x$.

(**Sol.:** $\ln 3\; u^2$ (unidades al cuadrado))

10.1.3. Cálculo de áreas

Si se considera una función continua no negativa $f(x,y) \geq 0$ definida en un recinto acotado medible A, entonces la integral doble

$$\iint_A f(x,y)\; dxdy$$

tiene un significado geométrico claro: representa el volumen del sólido formado por el recinto A como base, paredes laterales verticales y como superficie superior la gráfica de $f(x,y)$.

Este resultado permite que, en el caso de integrar la función constante 1 sobre un recinto medible A, se obtenga el área de dicho recinto (en realidad, se obtiene el volumen de un prisma recto de base el recinto A y altura 1 que equivale numéricamente al área de A). Es decir;

$$a(A) := \iint_A 1\; dxdy$$

Ejemplo 10.5 Vamos a utilizar esta propiedad para calcular el área comprendida por la gráfica de las funciones $y = \text{sen}(x) + 1$ e $y = \cos(x) + 1$ en el intervalo $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.

Solución:

Primer paso: Un croquis Para representar gráficamente el área que queremos calcular, hallaremos en primer lugar, los puntos de intersección de las dos funciones que se encuentran en ese intervalo, es decir, igualamos las dos funciones y obtenemos que:

$$\begin{array}{c} \text{sen}(x) + 1 = \cos(x) + 1 \\ \downarrow \\ \text{sen}(x) = \cos(x) \\ \downarrow \\ x = -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{array}$$

Luego los puntos de intersección son

$$P_1 = (-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1), \quad P_2 = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} + 1), \quad P_3 = (\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1)$$

Como podemos ver en la gráfica, Fig. 10.11 se obtienen dos dominios simétricos que tienen el mismo área. Es por ello que calcularemos el área que nos piden multiplicando por dos el área de uno de los dos dominios coloreados en la gráfica.

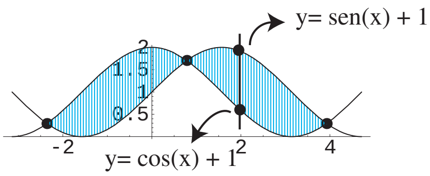


Figura 10.11: Área entre dos gráficas

Segundo Paso: Los límites de integración en y Trazamos una recta vertical, L, que pase por el dominio D y marcamos los valores de la variables y por donde entra y sale la recta L. Como puede verse en la Fig. 10.11, esos valores son justamente los valores de las funciones $y = \text{sen}(x) + 1$ e $y = \cos(x) + 1$.

Por lo tanto el dominio D sobre el que tenemos que integrar es el dominio de tipo 1:

$$D = \{(x, y)/\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}\,;\, \cos(x) + 1 \leq y \leq \text{sen}(x) + 1)\}$$

Tercer Paso: Cálculo de la integral Aplicando la fórmula de integración sobre dominios de tipo I a la fórmula de cálculo de áreas, tendremos que:

$$\begin{aligned}
\text{Área}(D) = &\iint_D 1\, dA = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_{\cos(x)+1}^{\text{sen}(x)+1} 1\, dy\, dx = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} y\big]_{\cos(x)+1}^{\text{sen}(x)+1}\, dx \\
=&2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \text{sen}(x) - \cos(x)\, dx = 2 - \cos(x) - \text{sen}(x)\big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = 4\sqrt{2}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 10.6 Calcular el área comprendida por la gráfica de las funciones $y = x$ e $y = (2 - x)^2$ y $x = 0$.

Solución:

Primer paso: Un croquis Para representar gráficamente el área que queremos calcular, hallaremos en primer lugar, los puntos de intersección de las funciones que delimitan el dominio a integrar. Igualando las funciones se tiene que:

$$\begin{gathered}
x = (2 - x)^2 \\
\downarrow \\
x^2 - 5x + 4 = 0 \\
\downarrow \\
x = 1 \text{ y } x = 4
\end{gathered}$$

Luego los puntos que delimitan el dominio son

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (1, 1), \quad P_3 = (2, 0)$$

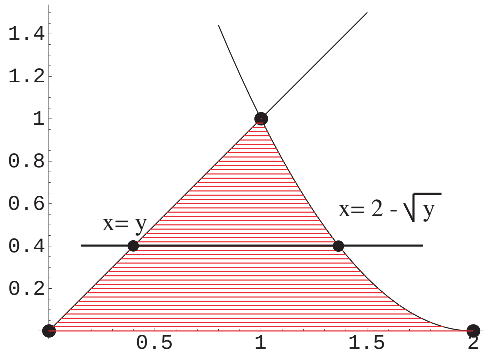


Figura 10.12: Área entre dos gráficas

Segundo Paso: Los límites de integración en x Trazamos una recta horizontal que pase por el dominio D y marcamos los valores de la variable x por donde entra y sale la recta. Como puede verse en la Fig. 10.12 esos valores son $y = x$ y $x = 2 - \sqrt{y}$. Por lo tanto el dominio D sobre el que tenemos que integrar es el dominio de tipo II:

$$D = \{(x, y)/0 \leq y \leq 1\,;\, y \leq x \leq 2 - \sqrt{y}\}$$

Tercer Paso: Cálculo de la integral Aplicando la fórmula de integración sobre dominios de tipo II a la fórmula de cálculo de áreas, tendremos que:

$$\text{Área}(D) = \iint_D 1\, dA = \int_0^1 \left(\int_y^{2-\sqrt{y}} 1\, dx \right) dy = \int_0^1 [x]_{x=y}^{x=2-\sqrt{y}}\, dy$$

$$= \int_0^1 (2 - \sqrt{y} - y\, dy = \left[2y - 2\frac{y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2}\sqrt{2}) \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{5}{6}$$

□

Ejemplo 10.7 . Cálculese el área del círculo unidad.

Solución: Según lo dicho

$$a(C) = \iint_C 1\, dxdy$$

siendo $C \equiv\ x^2 + y^2 \leq 1$.

Si se considera como un recinto de tipo I, debemos hallar las ecuaciones de las dos curvas que delimitan el recinto por su parte inferior y superior, tal y como se ve en la Fig. 10.13

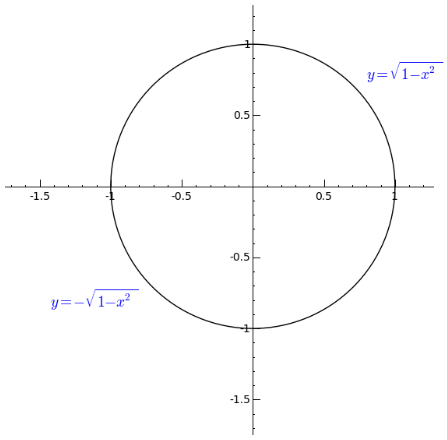


Figura 10.13: Disco unidad

por lo que los límites de integración serán

$$C \equiv \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{array} \right.$$

Por tanto,

$$\iint_C 1\, dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1\ dy \right)\ dx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\ dx$$

y, haciendo el cambio de variable $\left\{ \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t\ dt \\ x = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$, resulta

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\ dt = \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} = \pi$$

Más adelante se verá que este tipo de integrales puede resolverse de forma más sencilla, aplicando el cambio de variables a la integral doble.

$\square$

Ejercicio 10.8 Considera un triángulo isósceles con un vértice en el punto $(0,0)$ y los lados iguales sobre las rectas determinadas por $y = |x|$. Halla qué altura, h, debe tener el triángulo sobre el eje OY para que la circunferencia unidad lo divida en dos partes de igual área.

(**Sol.:** $h = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$)

10.2. Integrales triples

Las integrales triples no tienen ya mayor dificultad salvo la añadida por una dimensión más. Los rectángulos anteriores se substituyen ahora por rectángulos tridimensionales, o sea, cajas $R = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$. Una partición P de R es ahora $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ siendo P_1, P_2 y P_3 particiones de los intervalos $[a,b]$, $[c,d]$ y $[p,q]$, con respectivamente.

Si P_1 tiene $n+1$ puntos, P_1 tiene $m+1$ puntos y P_3 tiene $r+1$ puntos, la partición $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ divide al rectángulo R en $n \cdot m \cdot r$ subrectángulos $R_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$; cada uno de los cuales tiene volumen

$$v(R_{ijk} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

Procediendo de forma similar al caso de dos variables, dada una función real acotada f definida en R, se define la suma de Riemann correspondiente a la partición de P de R como

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{r} f(x_{ijk}) v(R_{ijk})$$

con $x_{ijk} \in R_{ijk}$.

Definición 10.9 Dada la función acotada $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ se define la integral triple como el límite de las sumas de Riemann cuando $\|P\|$ tiende a 0:

$$\iiint_R f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x_{jkl}) v(R_{jkl})$$

siempre que dicho límite exista y sea independiente de la elección del punto x_{ijk}.

Como antes toda función continua es integrable y toda función acotada cuyas discontinuidades tienen medida nula es integrable. Asimismo se cumplen las propiedades del Teorema 10.2.

Finalmente, el cálculo de una integral triple puede reducirse al cálculo de tres integrales iteradas:

Teorema 10.10 Sea f una función integrable sobre un rectángulo $R = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$. Si existe cualquier integral iterada, es igual a la integral triple

$$\begin{aligned}
\iiint_R f(x,y,z)dxdydz &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_p^q f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_c^d \left(\int_p^q \left(\int_a^b f(x,y,z)dx \right) dz \right) dy \\
&= \int_p^q \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y,z)dy \right) dx \right) dz \\
&= \dots
\end{aligned}$$

y así sucesivamente hasta completar todas las ordenaciones posibles.

Ejemplo 10.8 Calcular la integral sobre $R = [-1,1] \times [0,2] \times [1,2]$ de la función $f(x,y,z) = xyz$

Solución: Se tiene que

$$\begin{aligned}
\iiint_R xyz\ dxdydz &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 \left(\int_1^2 xyz\ dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 xy \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=1}^{z=2} dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 \frac{3}{2} xy\ dy \right) dx \\
&= \int_{-1}^1 \frac{3}{2} x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} dx = \int_{-1}^1 3x\ dx = 0
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 10.9 Averigua cómo plantear la integral anterior para obtener el resultado más rápidamente.

10.2.1. Integración sobre recintos acotados

Al igual que sucedía en el caso de integrales dobles, la integral triple sobre recintos acotados se hace extendiendo la integral a un rectángulo y utilizando la función característica:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\ dxdydz := \iiint_R f(x,y,z)\cdot\chi_\Omega(x,y,z)\ dxdydz$$

siendo R un rectángulo que contiene a Ω.

Para el cálculo de la integral, el procedimiento ahora consiste en expresar el recinto en alguna de las formas siguientes:

$$\Omega = \{(x,y,z)\ :\ (x,y)\in D, \varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)\}$$

siendo $D = proy_{XOY}(\Omega)$ y φ_1, φ_2 funciones continuas.

$$\Omega = \{(x,y,z)\ :\ (x,z)\in D, \varphi_1(x,z)\le y\le\varphi_2(x,z)\}$$

siendo $D = proy_{XOZ}(\Omega)$ y φ_1, φ_2 funciones continuas.

$$\Omega = \{(x,y,z)\ :\ (y,z)\in D, \varphi_1(y,z)\le x\le\varphi_2(y,z)\}$$

siendo $D = proy_{YOZ}(\Omega)$ y φ_1, φ_2 funciones continuas.

A continuación el recinto $D\subset\mathbb{R}^2$ se expresa como de tipo I o de tipo II, dando lugar a la integral iterada correspondiente.

Por ejemplo, en el primer caso, si D es de tipo II en el plano XOY, se tendrá:

$$\Omega \equiv \left\{\begin{array}{c}\alpha\le y\le\beta\\ g_1(y)\le x\le g_2(y)\\ \varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)\end{array}\right.$$

y, por tanto,

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\ dxdydz = \int_\alpha^\beta\left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)}\left(\int_{\varphi_1(x,y)}\varphi_2(x,y)f(x,y,z)\ dz\right)dx\right)dy$$

Ejemplo 10.9 Se desea calcular el volumen del tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $x+y+z=1$. Para ello será necesario calcular $\iiint_\Omega 1\ dxdydz$, siendo Ω el tetraedro. Para calcular los límites de integración se proyecta el recinto sobre el plano XOY obteniendo el triángulo señalado en la figura Fig. 10.14. Las variables (x, y) varían en dicho triángulo, mientras que z recorre el recinto desde la superficie inferior $z = 0$ hasta la superficie superior $z = 1 - x - y$.

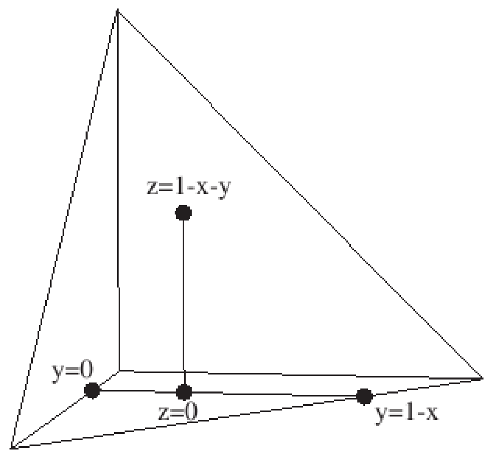


Figura 10.14: Volumen de un tetraedro

Por todo ello resulta:

$$\Omega \equiv \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x \\ 0 \le z \le 1 - x - y \end{cases}$$

y, entonces

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega 1\ dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} 1\ dz \right)\ dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)\ dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left(1 - x - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right)\ dx \\
&= \left[x - x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{(1-x)^3}{6} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Ejercicio 10.10 Calcular el volumen del cuerpo limitado por $z^2 = xy, x + y = 1, x + y = 2$.

(**Sol.:** $\frac{7\pi}{12}\ u^3$)

10.3. Cambio de variable

Una transformación en el plano es una aplicación $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $T(u, v) = (x, y)$. Se llama determinante jacobiano de T a

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Teorema 10.11 (Dos variables) Sean D y D^* dos regiones elementales del plano y sea $T : D^* \longrightarrow D$ una biyección de clase C^1, cuyo determinante jacobiano no se anula en D^* . Entonces, para cualquier función integrable $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ se tiene

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \iint_{D^*} (f \circ T)(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|\ dudv$$

Cambio a coordenadas polares

Es el dado por la transformación $T : D^* = [0,1] \times [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$(x, y) = T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Puede probarse fácilmente que T cumple las condiciones del teorema de cambio de variable y, además, con jacobiano:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Supongamos que queremos calcular una integral doble $\iint_R f(x,y)\,dA$ cuando R es un dominio como en la figura Fig. 10.15. La descripción de un dominio de este tipo en coordenadas rectangulares parece bastante complicada, sin embargo describir R en coordenadas polares nos simplificará bastante las cosas.

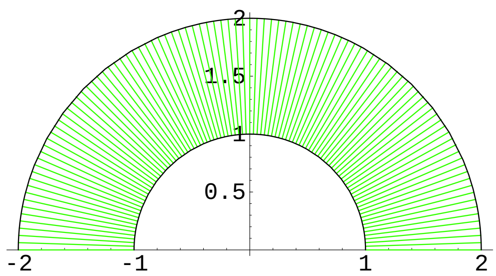


Figura 10.15: Un anillo circular

En general, las coordenadas polares son adecuadas cuando el recinto de integración es un círculo de centro el origen (o un sector circular) o, al menos, un círculo tangente al origen. En los siguientes ejemplos vamos a aplicar dicho cambio y hay que tener mucho cuidado de no olvidar multiplicar por r al hacer el cambio a coordenadas polares en la integral.

Ejemplo 10.10 Calculemos la integral doble $\int\int_R (3x+4y^2)\,dA$ donde R es la región circular que se encuentra en el semiplano superior y está limitada por las circunferencias $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$, como puede verse en la siguiente figura:

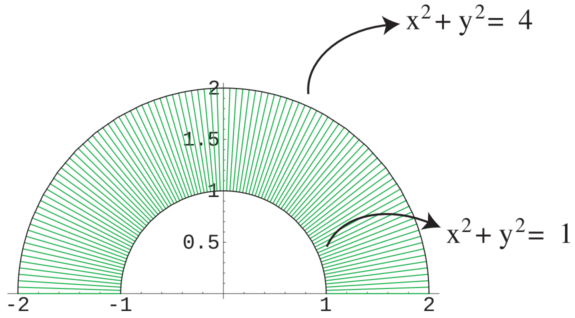


Figura 10.16: Integración en coordenadas polares

Solución: La región R se describe como:

$$R = \{(r,\theta)/1 \leq r \leq 2\,;\, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
\int\int_R (3x+4y^2)\,dA &= \int_0^{\pi}\int_1^2 (3r\,\cos(\theta) + 4(r\,\operatorname{sen}(\theta))^2)\,r\,drd\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left[r^3\,\cos(\theta) + r^4\,\operatorname{sen}^2(\theta)\right]_{r=1}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^{\pi} 7\,\cos(\theta) + 15\,\operatorname{sen}^2(\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi} 7\,\cos(\theta) + \frac{15}{2}\,(1-\cos(2\theta))\;d\theta \\
&= 7\operatorname{sen}(\theta) + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4}\operatorname{sen}(2\theta)\Big]_0^{\pi} = \frac{15\pi}{2}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 10.11 Veamos como calcular el volumen del sólido que está limitado por los planos $z = \frac{1}{3}$, $z = 0$ y el cilindro $x^2 + y^2 = y$.

Solución:

Este sólido está encima del disco que tiene como círculo frontera a la circunferencia

$$x^2+y^2 = y \Longrightarrow x^2+y^2-y = 0 \Longrightarrow x^2+y^2-y-\frac{1}{4}-\frac{1}{4} = 0 \Longrightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

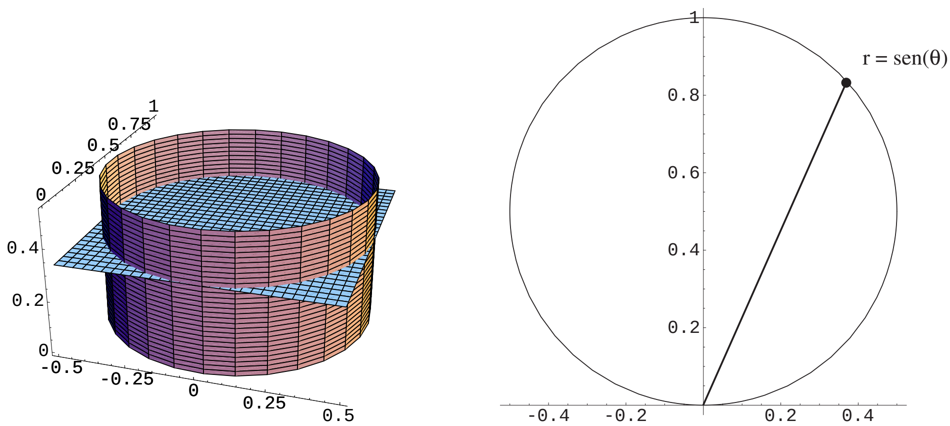
es decir, tiene como frontera la circunferencia de centro el punto $(0, 1/2)$ y radio $\frac{1}{2}$ (ver figura Fig. 10.17).

Si consideramos coordenadas polares, se tiene que este circulo se expresa como:

$$x^2+y^2 = y \Longrightarrow r^2\cos^2(\theta)+r^2\operatorname{sen}^2(\theta) = r\operatorname{sen}(\theta) \Longrightarrow r^2 = r\operatorname{sen}(\theta) \Longrightarrow r = \operatorname{sen}(\theta)$$

Por lo tanto, el disco sobre el que se encuentra el sólido está dado por:

$$D = \{(r,\theta)/0 \leq r \leq \operatorname{sen}(\theta)\,;\, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$



(a) Sólido (b) Proyección en el plano XOY

Figura 10.17: Volumen de un cilindro circular

Aplicando la fórmula de integración en coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\text{Vol} = \int\int_D \frac{1}{3}\,dA &= \int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen}(\theta)} \frac{1}{3} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi} \frac{r^2}{6}\bigg]_0^{\operatorname{sen}(\theta)} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{6} d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2\theta)}{12} d\theta = \frac{\theta}{12} - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{24}\bigg]_0^{\pi} = \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 10.12 Calcular el área por las hojas de una rosa de cuatro pétalos, con ecuación es $r = \cos(2\theta)$.

Solución: Recordar que área(D) $= \iint_D 1 \; dxdy$. Como se observa en la gráfica, Fig. 10.18, para calcular el área encerrada por las hojas de una rosa de cuatro pétalos, nos bastará con calcular el área encerrada en la mitad de un sólo pétalo; es decir, el conjunto sobre el que vamos a integrar es

$$D = \{(r,\theta)/0 \leq r \leq \cos(2\theta)\,;\, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$$

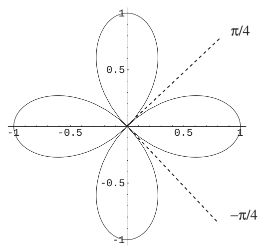


Figura 10.18: Una rosa de cuatro pétalos

Luego, el área que buscamos es:

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \iint_P 1\, dA = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\cos(2\theta)} r\, dr\, d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left.\frac{r^2}{2}\right]_0^{\cos(2\theta)} d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2\theta) = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos(4\theta)+1}{2}\right) \\
&= 4\left.\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}(4\theta)}{8}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 10.13 Calcula la integral $\displaystyle\int_S xy\; dxdy$ donde S es el recinto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 + y^2 \leq 1\;\}$$

Solución: La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ representa una circuferencia centrada en $(0,0)$ de radio 1. Así, la inequación $x^2 + y^2 < 1$ corresponde a los puntos interiores a la circunferencia y, por tanto, el recinto S es el disco unidad representado en la Figura 10.19. Esta integral se resolverá utilizando el cambio a coordenadas polares. Así, el recinto S se transforma en

$$D^* = \{(r,\theta) \ : \ 0 \leq r \leq 1; \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

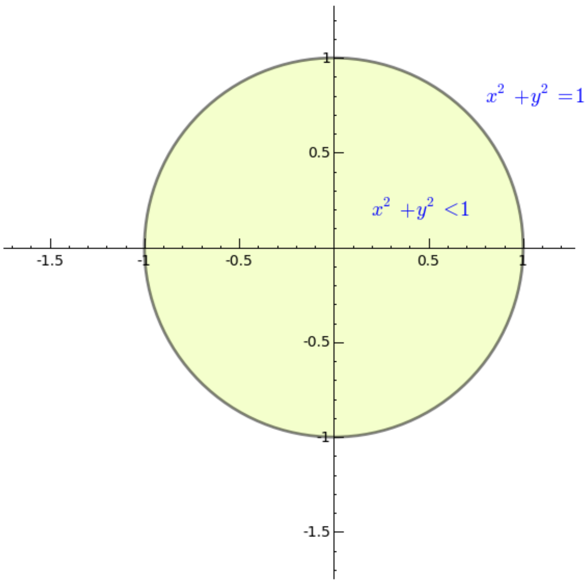


Figura 10.19: Disco unidad

$$\begin{aligned}
\iint_S xy \ dxdy &= \iint_{D^*} (r\cos\theta)(r\sin\theta) r \ drd\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^3 \cos\theta \sin\theta \ dr \right) d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta = \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 10.11 Calcula $\iint_A x^2 dxdy$ siendo A el recinto comprendido entre el rectángulo $R = [-2, 2] \times [-2, 2]$ y la circunferencia $C \equiv x^2 + y^2 = 1$.

(**Sol.:** $\frac{64}{3} - \frac{\pi}{4}$)

Ejercicio 10.12 Calcula $\iint_A \mathrm{e}^{x^2+y^2}\, dxdy$ siendo A la parte del círculo unidad, $x^2 + y^2 \leq 1$, situada en el semiplano positivo de las x, $x \geq 0$.

(**Sol.:** $\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}-1)$)

En ocasiones, resulta conveniente dividir el recinto en partes y calcular la integral sobre cada parte por separado

Ejemplo 10.14 Calcula la integral $\displaystyle\int_T x^2 ydxdy$ donde

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + (y + 1)^2 \leq 1, \ |x| \geq |y|\}$$

Solución: Para resolver la integral se utilizarán las integrales sobre C y S, siendo C círculo y S la parte interior del círculo que no está en T. De esta forma,

$$\iint_T x^2 y \; dxdy = \iint_C x^2 y \; dxdy - \iint_S x^2 y \; dxdy$$

Sobre el círculo se emplea el cambio a coordenadas polares:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x^2 + (y+1)^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + 2y = 0 \\ r^2 + 2r\sin\theta = 0 \\ r = -2\sin\theta \end{array}$$

por lo que los límites de integración son

$$T \equiv \left\{ \begin{array}{c} \pi \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq -2\sin\theta \end{array} \right.$$

y, entonces

$$\begin{aligned}
\iint_C x^2 y\ dxdy &= \int_\pi^{2\pi} \left(\int_0^{-2\sin\theta} r^2 \cos^2\theta\ r\sin\theta\ r\ dr \right)\ d\theta \\
&= \int_\pi^{2\pi} \cos^2\theta\ \sin\theta\ \left(\int_0^{-2\sin\theta} r^4\ dr \right)\ d\theta \\
&= \int_\pi^{2\pi} \cos^2\theta\ \sin\theta\ \left[\frac{r^5}{5} \right]_{r=0}^{r=-2\sin\theta}\ d\theta \\
&= \int_\pi^{2\pi} \frac{-2^5}{5} \cos^2\theta\ \sin^6\theta\ d\theta
\end{aligned}$$

y, aplicando las fórmulas de reducción,

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2^5}{5} \left(\left[\frac{\cos\theta \sin^7\theta}{8} \right]_\pi^{2\pi} + \frac{1}{8} \int_\pi^{2\pi} \sin^6\theta\ d\theta \right) \\
&= -\frac{4}{5} \int_\pi^{2\pi} \sin^6\theta\ d\theta
\end{aligned}$$

y, de nuevo, aplicando ahora la fórmula de reducción

$$\begin{aligned}
\iint_C x^2 y\ dxdy &= -\frac{4}{5} \left(\left[\frac{\sin^5\theta \cos\theta}{6} \right]_\pi^{2\pi} + \frac{5}{6} \int_\pi^{2\pi} \sin^4\theta\ d\theta \right) \\
&= -\frac{2}{3} \int_\pi^{2\pi} \sin^4\theta\ d\theta \\
&= -\frac{2}{3} \left(\left[\frac{\sin^3\theta \cos\theta}{4} \right]_\pi^{2\pi} + \frac{3}{4} \int_\pi^{2\pi} \sin^2\theta\ d\theta \right) \\
&= -\frac{1}{2} \int_\pi^{2\pi} \sin^2\theta\ d\theta
\end{aligned}$$

e, integrando,

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\theta - \sin\theta \cos\theta) \right]_\pi^{2\pi} = -\frac{\pi}{4}$$

Para la integral sobre S se tendrá en cuenta que las rectas $y = x$ e $y = -x$ corresponden a las ecuaciones polares $\theta = \frac{5\pi}{4}$ y $\theta = \frac{7\pi}{4}$, respectivamente.

Por tanto,

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{c} \frac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{4} \\ 0 \leq r \leq -2\sin\theta \end{array} \right.$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}\iint_S x^2y\;dxdy &= \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \left(\int_0^{-2\sin\theta} r^2\cos^2\theta\; r\sin\theta\; r\;dr \right)\; d\theta \\ &= \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{-2^5}{5} \cos^2\theta\;\; \sin^6\theta\; d\theta\end{aligned}$$

y, aplicando la fórmula de reducción,

$$\begin{aligned}\iint_S x^2y\;dxdy &= -\frac{2^5}{5}\left(\left[\frac{\cos\theta\sin^7\theta}{8} \right]_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} + \frac{1}{8}\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \sin^6\theta\; d\theta \right) \\ &= \frac{1}{10} - \frac{4}{5}\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \sin^6\theta\; d\theta\end{aligned}$$

y, aplicando ahora la fórmula de reducción

$$\begin{aligned}\iint_S x^2y\;dxdy &= \frac{1}{10} - \frac{4}{5}\left(\left[-\frac{\sin^5\theta\cos\theta}{6} \right]_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} + \frac{5}{6}\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \sin^4\theta\; d\theta \right) \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{30} - \frac{2}{3}\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \sin^4\theta\; d\theta \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{30} - \frac{2}{3}\left(\left[-\frac{\sin^3\theta\cos\theta}{4} \right]_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} + \frac{3}{4}\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \sin^2\theta\; d\theta \right) \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{30} - \frac{1}{12} - \frac{1}{2}\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \sin^2\theta\; d\theta\end{aligned}$$

e, integrando,

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{10} - \frac{1}{30} - \frac{1}{12} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\theta - \sin\theta\cos\theta\right) \right]_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{30} - \frac{1}{12} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{8}{30} - \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

Y, finalmente,

$$\iint_T x^2y\,dxdy = \iint_C x^2y\,dxdy - \iint_S x^2y\,dxdy = -\frac{\pi}{4} - \frac{8}{30} - \frac{\pi}{8} = -\frac{4}{15} - \frac{3\pi}{8}$$

$\square$

Ejercicio 10.13 Calcula la integral $\int_T \mathrm{e}^x\,dxdy$ donde

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; -2 \leq x \leq 2,\; -1 \leq y \leq 2,\; y \leq x+2,\; y \geq x-2\}$$

(**Sol.:** $3\,\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - 1$)

La extensión del resultado de cambio de variable a funciones de tres variables es inmediato.

Teorema 10.12 (Tres variables) Sean D y D^* dos regiones elementales del espacio tridimensional y sea $T : D^* \longrightarrow D$ una biyección de clase C^1, cuyo determinante jacobiano no se anula en D^*. Entonces, para cualquier función integrable $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ se tiene

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{D^*} (f \circ T)(u,v,w) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

Cambio a coordenadas cilíndricas

En la figura Fig. 10.20 puede apreciarse el significado de la coordenadas cilíndricas.

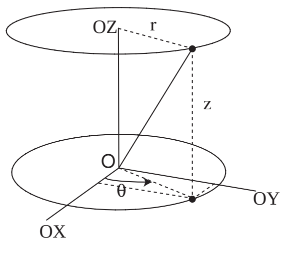


Figura 10.20: Coordenadas cilíndricas

Las ecuaciones del cambio de coordenadas y los nuevos límites de integración vienen dados por

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} r \geq 0 \\ \theta \in [0, 2\pi] \\ z \in \mathbb{R} \end{array}}$$

siendo el determinante jacobiano:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Ejemplo 10.15 (Coordenadas cilíndricas) Un sólido Ω está limitado, en el primer octante, por la gráfica del semicono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y los planos $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$. Se desea calcular la integral $\iiint_\Omega (x^2+y^2)\, dxdydz$.

Solución: Para ello se emplea el cambio a coordenadas cilíndricas. Como se ve en la figura Fig. 10.21, está claro que z varía de la superficie del semicono (de ecuación $z = r$) al plano $z = 1$.

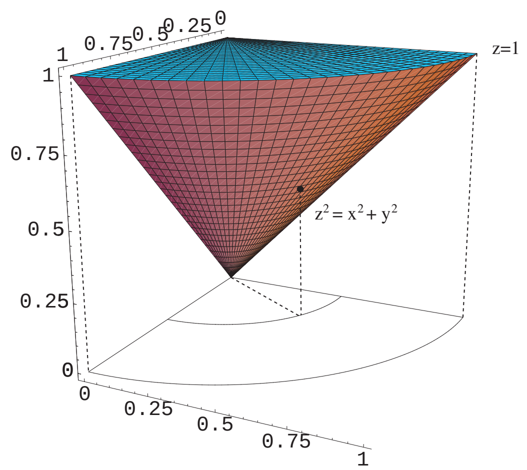


Figura 10.21: Integración sobre un semicono

La proyección en el plano $z = 0$ del sólido produce el sector circular $x^2+y^2 \leq 1$, $x, y \geq 0$. Por tanto, la coordenada r varía de 0 a 1 y la coordenada θ de

0 a $\frac{\pi}{2}$. En definitiva,

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \\ r \leq z \leq 1 \end{array}\right\}$$

y, entonces

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\, dxdydz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \left(\int_r^1 r^2 r \; dz \right) \; dr \right) \; d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \left(r^3(1-r) \right) \; dr \right) \; d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5} \right]_{r=0}^{r=1} \; d\theta \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \; d\theta = \frac{\pi}{40} \end{aligned}$$

□

Ejercicio 10.14 Calcular la integral triple de la función $f(x, y, z) = xyz$ sobre la región Ω que se encuentra en el primer octante $(x > 0, y > 0, z > 0)$ limitada por los paraboloides $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, por los cilindros $xy = 1$, $xy = 4$, y por los planos $y = x$, $y = 5x$.

(**Sol.:** $\frac{765}{8}\left(\ln 5 + \frac{156}{25}\right)$)

Cambio a coordenadas esféricas

En la figura siguiente, Fig. 10.22, puede apreciarse el significado geométrico de las coordenadas esféricas.

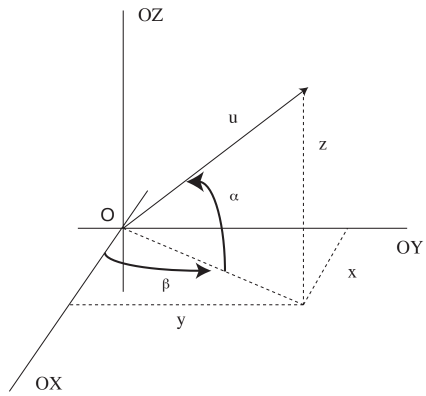


Figura 10.22: Coordenadas esféricas

Las ecuaciones del cambio de coordenadas vienen dadas por

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} r \geq 0 \\ \theta \in [0, 2\pi] \\ \phi \in [0, \pi] \end{array}}$$

siendo el determinante jacobiano:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{vmatrix} = -r^2\sin\phi$$

Ejemplo 10.16 (Coordenadas esféricas) Se desea calcular el volumen de una esfera de radio R. La integral correspondiente es

$$v(S) = \iiint_S 1\ dxdydz$$

Solución: Para ello, se introduce el cambio a coordenadas esféricas: al aplicar el cambio de coordenadas a la ecuación de la superficie esférica, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, resulta $r = R$. Como no depende de θ ni ϕ estas dos variables no tienen restricciones y, por tanto,

$$\left.\begin{array}{c} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \phi \leq \pi \end{array}\right\}$$

y, entonces

$$\iiint_S 1\ dxdydz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \left(\int_0^\pi r^2 \sin\phi\ d\phi \right)\ dr \right)\ d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 \left[-\cos\phi \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi}\ dr \right)\ d\theta = 2\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2\ dr \right)\ d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=R}\ d\theta = \frac{2R^3}{3}\int_0^{2\pi}\ d\theta = \frac{4\pi R^3}{3}\ u.v.$$

$\square$

Ejercicio 10.15 Calcular $\iiint_\Omega (x+2z)\ \ dx\ dy\ dz$, donde $\Omega = \{(x,y,z) : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9, z \leq 0\}$.

(**Sol.:** -40π)

En ocasiones resulta imposible dibujar el recinto de integración. en el caso en que la superficie que encierra el sólido esté formada por una única ecuación aún resulta posible, mediante un cambio adecuado de coordenadas, calcular los límites de integración, lo cual resultaría imposible de realizar en coordenadas cartesianas.

Ejemplo 10.17 Calcula el volumen del sólido Ω encerrado por la superficie de ecuación $(x^2+y^2+z^2)^2 = z(x^2+y^2)$.

Solución: Se aplica el cambio a coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}
(x^2+y^2+z^2)^2 &= z(x^2+y^2) \\
r^4 &= r\cos\phi(r^2\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi) \\
r^4 &= r^3\cos\phi\sin^2\phi(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \\
r^4 &= r^3\cos\phi\sin^2\phi \\
r &= \cos\phi\sin^2\phi
\end{aligned}$$

Como debe ser $\cos\phi \geq 0$ entonces $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. La ecuación anterior no depende de θ luego $\theta \in [0, 2\pi]$ por lo que los límites de integración son

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq \cos\phi\sin^2\phi \end{cases}$$

con lo cual

$$v(\Omega) = \iiint_\Omega 1\ dV = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\phi \sin^2\phi} r^2 \sin\phi\ dr \right)\ d\phi \right)\ d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=\cos\phi\sin^2\phi} d\phi \right)\ d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\phi \sin^7\phi\ d\phi \right)\ d\theta$$

Ahora

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\phi \sin^7\phi\ d\phi = \left[\frac{\cos^2\phi \sin^8\phi}{10} \right]_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{10} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \sin^7\phi\ d\phi$$

$$= \frac{2}{10} \left[\frac{\sin^8\phi}{8} \right]_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{40}$$

y volviendo a la integral de volumen:

$$v(\Omega) = \ldots = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\phi \sin^7\phi\ d\phi \right)\ d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \frac{1}{40}\ d\theta = \frac{\pi}{60}$$

$\square$

Ejercicio 10.16 Calcula el volumen encerrado por la superficie de ecuación $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = x^2+y^2-z^2$

(**Sol.:** $\frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}\ u^3$)

10.4. Problemas adicionales

Ejercicio 10.17 Calcula $\iint_S (x^2+y^2-2y)dxdy$ siendo

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x^2+y^2 \le 1, \quad y \ge |x|\ \}$$

(**Sol.:** $\frac{\pi}{8}-\frac{2\sqrt{2}}{3}$)

Ejercicio 10.18 Calcula $\displaystyle\iint_S x\ \cos(x+y)dxdy$ siendo S el triángulo de vértices $(0,0)$, $(\pi,0)$ y (π,π).

(**Sol.:** $-\frac{3\pi}{2}$)

Ejercicio 10.19 Calcula la integral de la función $f(x,y)=x^2y^2$ sobre la región R del primer cuadrante limitada por las hipérbolas equiláteras $xy=1$, $xy=2$ y las rectas $y=\frac{x}{2}$, $y=3x$.

(**Sol.:** $\frac{7}{6}\ln 6$)

Ejercicio 10.20 Calcula el área de la región del primer cuadrante limitada por las curvas $xy=2, xy=4, y=x, y=3x$.

(**Sol.:** $\ln 3\ u^2$)

Ejercicio 10.21 Calcula el área encerrada por la lemniscata de Bernoulli $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$.

(**Sol.:** $2a^2\ u^2$)

Ejercicio 10.22 Calcula el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide hiperbólico $z=xy$, el cilindro $y=\sqrt{2x}$ y los planos $x+y=4$, $y=0$ y $z=0$.

(**Sol.:** $6\ u^3$)

Ejercicio 10.23 Calcula el volumen del cuerpo limitado por la semiesfera $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ y el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

(**Sol.:** $\frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)\ u^3$)

Ejercicio 10.24 Calcula el volumen del cuerpo limitado por la superficie $z^2=xy$ y los planos $x+y=1$ y $x+y=2$.

(**Sol.:** $\frac{7\pi}{12}\ u^3$)

Ejercicio 10.25 Calcula $\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\ dxdydz$, donde Ω es la región limitada por el cilindro $x^2+y^2=16, 3\leq z\leq 4$.

(**Sol.:** $\frac{976\pi}{3}$)

Ejercicio 10.26 Calcula $\iiint_\Omega (x+2z)\ dxdydz$, donde Ω es la región definida por $\{(x,y,z): 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 9, z\leq 0\}$.

(**Sol.:** -40π)