LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Para una función de una variable, al escribir $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, se está indicando que cuando x se acerca suficientemente al valor x_0, tanto por derecha como por izquierda, $f(x)$ se acerca a un único valor L.
Para las funciones de dos variables independientes, la idea es muy parecida.
Cuando escribimos:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

queremos decir que cuando (x, y) se acerca suficientemente al punto (x_0, y_0), entonces $f(x,y)$ se acerca a un único número L.

La diferencia fundamental cuando pasamos del límite de una variable independiente a dos variables independientes es que, en el primer caso, al punto $x_0 \in R$ nos podemos acercar sólo de dos maneras: por izquierda o por derecha, mientras que al punto $(x_0, y_0) \in R^2$, no sólo nos podemos acercar por infinitas direcciones, que serían las rectas que pasan por dicho punto, sino que además nos podemos acercar por infinitas curvas.

En una función de una variable independiente, si los límites por derecha e izquierda coinciden, podemos asegurar que la función tiene límite. En cambio, tratándose de funciones de dos variables independientes, para poder afirmar que la función tiene límite, deberíamos verificar que coinciden todos los límites cuando nos acercamos al punto, por las infinitas curvas que pasan por dicho punto, cosa que es imposible.

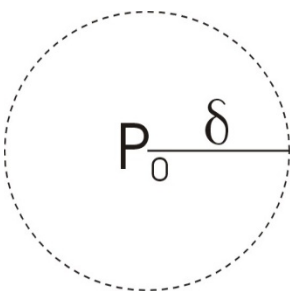
Sabemos que si una función de una variable tiene límite, entonces los límites laterales coinciden; y lo mismo ocurre para las funciones de dos variables independientes: si existe el límite doble en un punto $P_0 \in R^2$, éste coincidirá con los límites cuando nos acerquemos a dicho punto mediante cualquier curva.

Def: Sea f una función de dos variables, definida en un entorno del punto $P_0(x_0, y_0)$, excepto posiblemente en el punto (x_0, y_0). Entonces el límite de $f(x,y)$ cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) es L, y se escribe:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Si se cumple que: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ / si $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$

Obs.: *Entorno de un punto P_0 en el plano.*



Un entorno del plano son todos los puntos del círculo centrado en P_0 y radio δ, sin tomar los extremos, es decir: $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, que además podemos simbolizar como $E^2(P_0, \delta)$ (entorno circular de $\mathbb{R}^2$ centrado en P_0 y amplitud δ).

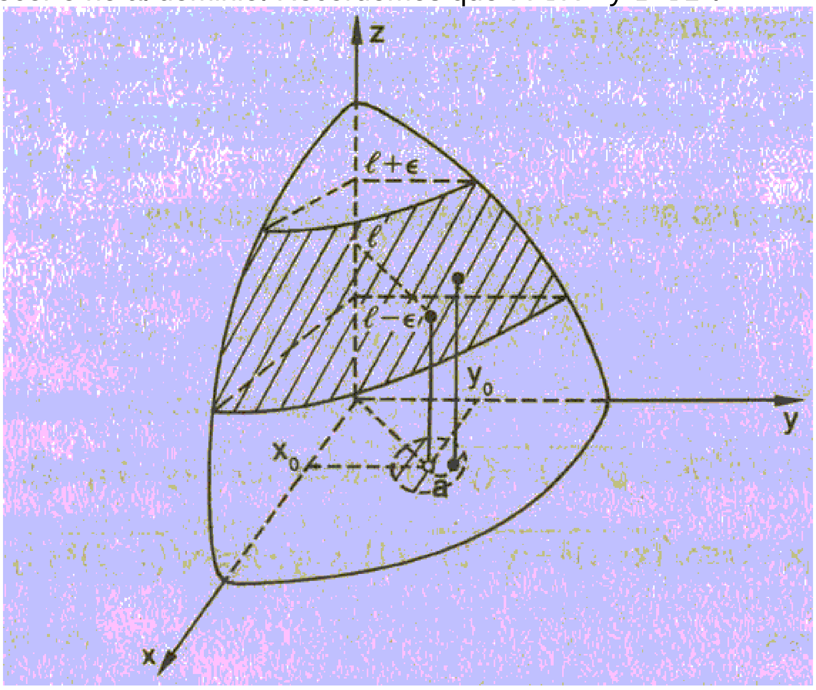
Si queremos trabajar con un entorno reducido, debemos eliminar la posibilidad de tomar el punto $P_0(x_0, y_0)$. Entonces, la distancia de los elementos del entorno a su centro debe ser estrictamente mayor que cero, y la expresión anterior cambia a:

$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ (simbólicamente lo podemos escribir $E_r^2(P_0, \delta)$).

Interpretación gráfica de la definición de límite

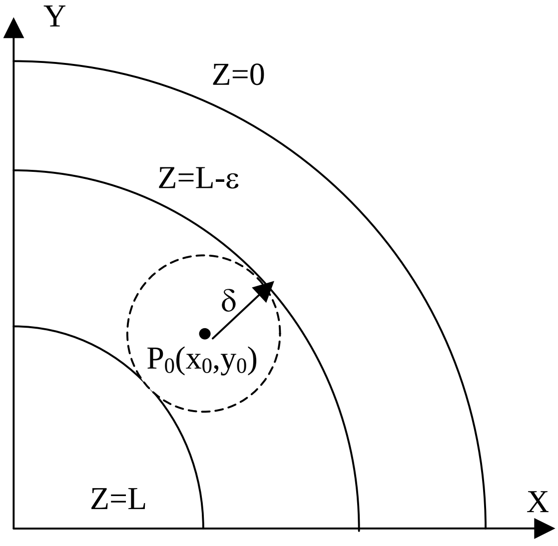
Podemos interpretar la definición de límite mediante el gráfico de una función $z = f(x, y)$ cuya representación es un octavo de esfera en el primer octante.

Sea $f : A \to B \,/\, z = f(x, y)$, y un entorno reducido incluido en el dominio A, de centro $P_0 \in R^2$, que puede pertenecer o no al dominio. Recordemos que $A \in R^2$ y $B \in \mathbb{R}$.



Vemos en el gráfico que, a medida que un punto P se acerca a P_0 , o que $(x, y) \to (x_0, y_0)$, el valor de la función $f(x, y)$ tiende al valor de L (en el gráfico está escrita en minúscula cursiva). Fijamos un valor de $\varepsilon > 0$, tan pequeño como se quiera, y marcamos en el eje z los valores $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$. Ahora en lugar de dos rectas obtenemos dos planos paralelos al plano xy . Con este valor de ε , encontramos un valor de $\delta(\varepsilon) > 0$ (en el gráfico figura como a) .

Mirando la figura desde arriba, resulta el siguiente gráfico:



Si tomamos un punto $(x,y)\in E_r^2(P_0,\delta)$, y su transformado $f(x,y)\in(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ para todo valor de $\varepsilon>0$ y tan pequeño como se quiera, entonces podemos afirmar que la función tiene límite finito, y escribiremos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

Obs.: Las *propiedades de los límites dobles* son las mismas que para los límites de las funciones de una variable independiente.

Ejemplos de cálculo de límites dobles en un punto.

1) Hallar $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2-y^2}{x-y}=\frac{1^2-2^2}{1-2}=\frac{-3}{-1}=3=L$$

Al igual que para funciones de una variable independiente, para calcular un límite doble el primer paso es hacer sustitución directa. En este caso no hubo problemas, ya que la función es continua en el punto considerado.

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y}=\frac{1^2-1^2}{1-1}=\frac{0}{0}$$

Al hacer la sustitución directa surge una indeterminación del tipo cero sobre cero. Factoreamos la expresión, y obtenemos:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y}=\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)(x+y)}{x-y}=\lim_{(x,y)\to(1,1)}(x+y)=1+1=2=L$$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}=\frac{0+0}{0-0}=\frac{0}{0}$$

.

Nos queda una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ que no tenemos manera de vencer, ya que no podemos efectuar ninguna simplificación. Como el punto al que tienden las variables independientes es el $(0,0)$, nos vamos a acercar al origen por diferentes curvas. Por ejemplo, nos podemos acercar a dicho punto por la recta $y = 2x$, que sabemos que pasa por $(0,0)$ ya que $y \to 0$ cuando $x \to 0$. Por lo tanto en lugar de calcular el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$, calcularemos este límite a través de la curva $\gamma_1 : y = 2x$ de la siguiente manera:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ \gamma_1: y=2x}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \gamma_1: y=2x}} \frac{x+2x}{x-2x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \gamma_1: y=2x}} \frac{3x}{-x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \gamma_1: y=2x}} (-3) = -3 = L_{\gamma_1}$$

A este límite lo llamaremos direccional, a través de la curva $\gamma_1 : y = 2x$

Calcularemos ahora otro límite direccional, mediante otra curva, que también pasa por el origen, por ejemplo $\gamma_2 : y = 3x$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ \gamma_2: y=3x}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \gamma_2: y=3x}} \frac{x+3x}{x-3x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \gamma_2: y=3x}} \frac{4x}{-2x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \gamma_2: y=3x}} (-2) = -2 = L_{\gamma_2}$$

Vemos que si nos acercamos al origen por la recta $y = 2x$ el límite toma un valor, y luego toma otro diferente cuando nos acercamos por la recta $y = 3x$. Es evidente que nuestra función no tiene límite en el origen, es decir que como: $L_{\gamma_1} \neq L_{\gamma_2} \Rightarrow \nexists L$

Si dos límites direccionales no coinciden, podemos asegurar que la función no tiene límite doble.

En lugar de esas dos rectas podríamos haber trabajado con todas las rectas que pasan por el origen, es decir $\gamma : y = mx$: $L_\gamma = \lim_{\substack{x\to 0\\ \gamma: y=mx}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \gamma: y=mx}} \frac{x+mx}{x-mx} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \gamma: y=mx}} \frac{x(1+m)}{x(1-m)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \gamma: y=mx}} \frac{1+m}{1-m} = L_\gamma$

Como el valor de los límites direccionales de las rectas que pasan por el origen depende del valor de la pendiente, podemos asegurar que éstos son distintos para distintos valores de la pendiente, y por lo tanto no existe el límite doble.

Si las variables independientes tendieran a un punto genérico $P_0(x_0, y_0)$ las rectas que pasan por dicho punto son $\gamma : y = m(x - x_0) + y_0$.

Obs.: *Por más que coincidan todos los límites direccionales de las rectas que pasan por un punto, no podemos asegurar que exista el límite doble ya que, además de las rectas que pasan por ese punto, deberíamos calcular los límites direccionales de las infinitas curvas que pasan por dicho punto, cosa que es imposible.*

La afirmación recíproca sí es válida, *si una función tiene límite doble en un punto, entonces todos los límites direccionales coinciden en dicho punto*.

4) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x+y}{x-y}$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+2}{1-2} = -3 = L$$

Calcularemos los límites direccionales de todas las rectas que pasan por $P_0(1,2)$. Dichas rectas son $y = m(x-x_0)+y_0 \Rightarrow y = m(x-1)+2$

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ \gamma: y=m(x-1)+2}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{\substack{x\to 1 \\ \gamma: y=m(x-1)+2}} \frac{x+m(x-1)+2}{x-[m(x-1)+2]} = \frac{1+m(1-1)+2}{1-[m(1-1)+2]} = -3 = L_\gamma$$

Vemos que los límites direccionales no dependen de la pendiente, ya que tienen el mismo valor para todas las rectas.

Conclusiones

Sea $f : A \to B / z = f(x,y)$ y un punto $P_0(x_0,y_0)$ y calculemos el $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

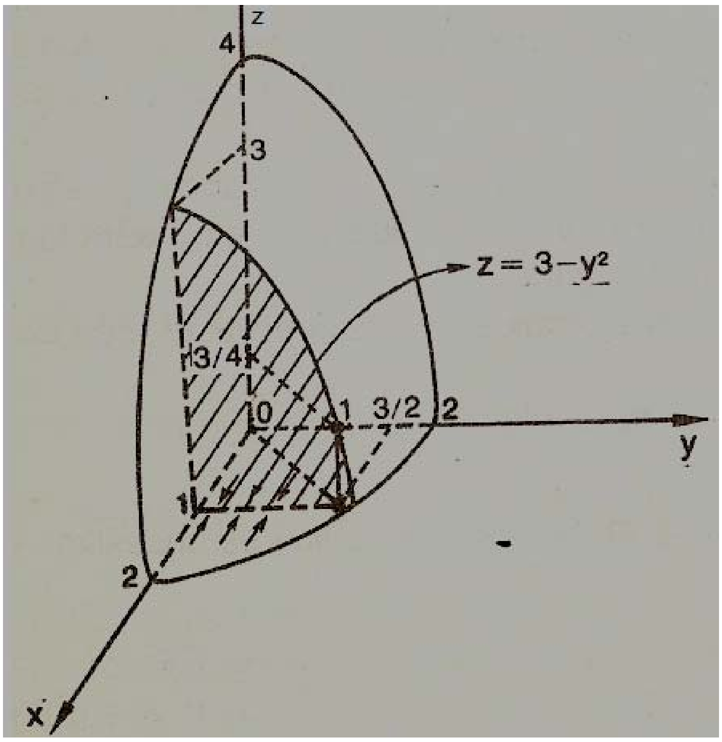
1°) Si $\exists L \Rightarrow$ todos los $L\gamma$ son iguales

2°) Si al menos dos $L\gamma$ son distintos $\Rightarrow \nexists L$

3°) Si dos o más $L\gamma$ son iguales $\not\Rightarrow \exists L$

Límites sucesivos o iterados

Existen límites direccionales muy usados, que se llaman sucesivos o iterados. Calcular estos límites significa fijar primero una de las variables y calcular el límite simple para la otra variable.
Ejemplo:
Sea: $f(x,y) = 4-x^2-y^2$,calcular: $\lim_{(x,y)\to(1,3/2)} 4-x^2-y^2$

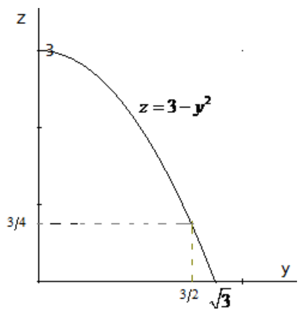


1º) Si fijamos primero, la variable x, tendremos: $x=1 \Rightarrow z = 3-y^2$.
Gráficamente estamos cortando a la superficie dada, con el plano $x=1$, como se ve en la figura.

Buscamos el límite en $y = \frac{3}{2}$, es decir:

$\lim_{y\to 3/2} (3-y^2) = \frac{3}{4}$.

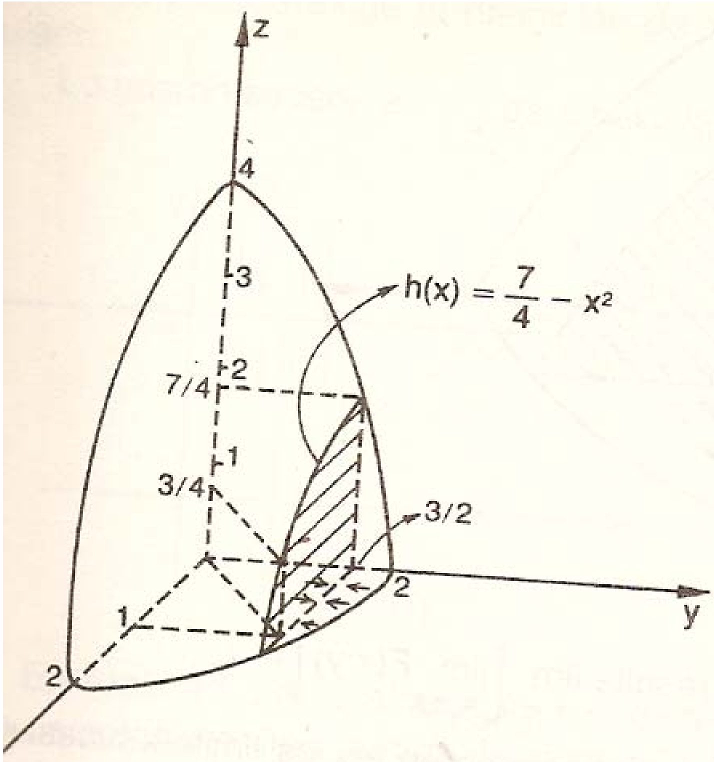
Interpretamos gráficamente este límite en el plano yz.



Resumiendo, los dos límites que hemos calculado sucesivamente, son:

$$L_1 = \lim_{y\to 3/2}\left[\lim_{x\to 1}\left(4-x^2-y^2\right)\right] = \lim_{y\to 3/2}\left(3-y^2\right) = \frac{3}{4}.$$

En forma análoga, podemos fijar primero la variable y,así tendremos: $y=\frac{3}{2} \Rightarrow z=h(x)=\frac{7}{4}-x^2$.

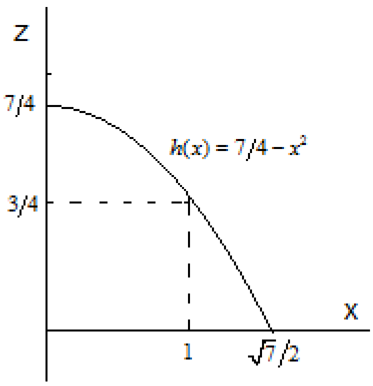


Gráficamente estamos cortando a la superficie dada, con el plano $y=\frac{3}{2}$, como se ve en la figura.

Buscamos el límite en $x=1$, es decir:

$$\lim_{x\to 1}\frac{7}{4}-x^2=\frac{3}{4}$$

Interpretamos gráficamente este límite en el plano xz.



Resumiendo, los dos límites que hemos calculado sucesivamente son:

$$L_2 = \lim_{x\to 1}\left[\lim_{y\to 3/2}\left(4-x^2-y^2\right)\right] = \lim_{x\to 1}\left(\frac{7}{4}-x^2\right) = \frac{3}{4}.$$

Cuando calculamos el límite L_1, dejamos constante la variable x, y hacemos tender $y \to y_0$, y cuando calculamos L_2 hacemos tender $x \to x_0$ con y constante.

Es decir que:

$$L_1 = \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right] = \lim_{y\to y_0}\left[f(y)\right]$$

$$L_2 = \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] = \lim_{x\to x_0}\left[h(x)\right]$$

Aquí son válidas las conclusiones enunciadas anteriormente:

1°) Si $L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists L$

2°) Si $\exists L \Rightarrow L_1 = L_2$

3°) Si $L_1 = L_2 \not\Rightarrow \exists L$

Ejemplos. Calcular:

5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x+y}{x-y}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x+0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1 = L_1$$

$$L_2 = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x+y}{x-y}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{0+y}{0-y} = \lim_{x\to 0}\frac{y}{-y} = \lim_{x\to 0}(-1) = -1 = L_2$$

$$\text{Como } L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists L$$

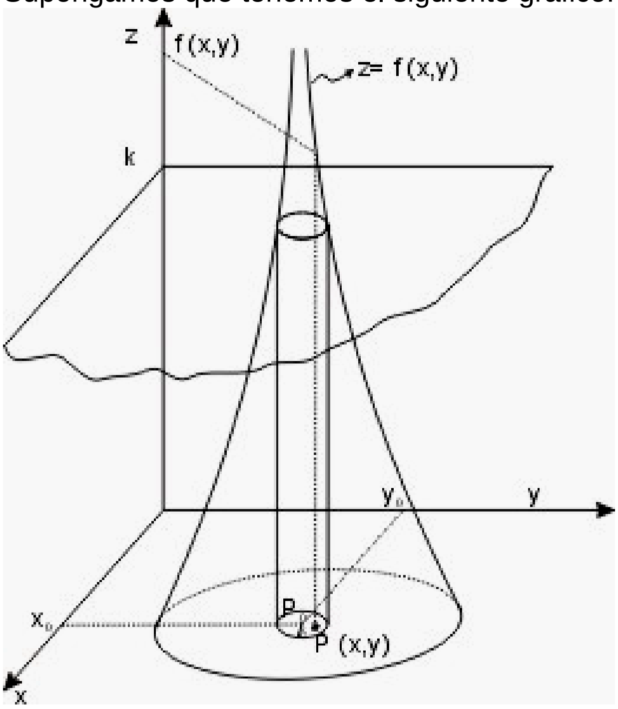
6) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = \displaystyle\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{0.y}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0 \\ L_2 = \displaystyle\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x.y}{x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x.0}{x^2+0} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{Si bien } L_1 = L_2, \textit{no implica que exista } L$$

Conclusión
Si el límite doble no se puede resolver por sustitución directa y tenemos una indeterminación que no podemos vencer, lo único que podemos asegurar es que el límite doble no existe si es que encontramos dos límites direccionales distintos. Si los límites direccionales que encontramos son iguales, nunca podremos asegurar la existencia del límite doble.

Límite infinito cuando las variables independientes tienden a un valor infinito

Supongamos que tenemos el siguiente gráfico:



Fijamos, al igual que antes, un valor de K positivo y tan grande como se quiera, es decir $K >> 0$, que ubicamos en el eje z. Con este plano horizontal cortamos a la función y obtenemos un valor de $\delta(K) > 0$. Vemos que δ es función de K porque, cuanto mayor es éste, más pequeño será el valor de δ.

Ahora, si tomamos un punto cualquiera $P(x,y)$ dentro del $E_r^2(P_0,\delta)$, y su transformado $f(x,y)$ resulta mayor que K, para todo valor de K positivo y tan grande como se quiera, podemos afirmar que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$$

En símbolos, podemos escribir la siguiente definición:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty \Leftrightarrow \forall K >> 0, \exists \delta(K) > 0 \,/\, \text{si } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow f(x,y) > K$$

CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES EN UN PUNTO

Definición:
Sea $f : A \to B \,/\, z = f(x,y)$ y un punto $P_0(x_0,y_0) \in A$. Diremos que la función es continua en $P_0(x_0,y_0)$ si cumple las siguientes tres condiciones.

1°) La función está definida en dicho punto, es decir $\exists f(x_0,y_0)$
2°) La función tiene límite en dicho punto, es decir $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$
3°) El valor de función y el límite coinciden en dicho punto, es decir $f(x_0,y_0) = L$

En caso de no cumplir alguna de estas tres condiciones, diremos que la función es discontinua en dicho punto. Dicho de otro modo, para que una función sea continua en un punto, el valor de función debe coincidir con el límite en dicho punto; o sea que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$, que por la definición simbólica de límite resulta:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{, tal que:}$$

$$\text{si } \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow \left| f(x,y) - f(x_0,y_0) \right| < \varepsilon$$

Ahora el entorno de P_0 ya no es reducido (por eso sacamos la condición de mayor que cero), porque también nos interesa lo que pasa en el punto P_0. Si la función no es continua en P_0, será discontinua en dicho punto, y podríamos hacer un análisis similar al anterior. Veremos a continuación dos ejemplos:

Ejemplo 1: Estudiar la continuidad en el punto $P_0(2,2)$ de la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y} & \text{si} \quad (x,y) \neq (2,2) \\ 5 & \text{si} \quad (x,y) = (2,2) \end{cases}$$

1°) Calculamos el valor de función en P_0: $\quad f(2,2) = 5$

2°) Calculamos el límite en P_0: $\quad \lim_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = \dfrac{0}{0}$

Tratamos de resolver la indeterminación:

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} (x+y) = 4 = L$$

3°) Como $f(2,2) \neq L$ la función no es continua en $P_0(2,2)$

Por tener límite, podemos decir que la discontinuidad es evitable, y si queremos hacer continua esta función en dicho punto, la debemos redefinir de la siguiente manera:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x-y} & \text{si} \quad (x,y)\neq(2,2)\\ 4 & \text{si} \quad (x,y)=(2,2)\end{cases}$$

Ejemplo 2: Estudiar la continuidad de la siguiente función en el punto $P_0(0,0)$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 3 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1°) Calculamos el valor de función en P_0: $f(0,0)=3$

2°) Calculamos el límite en P_0: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{0}{0}$

Como no podemos resolver la indeterminación, veremos si no tiene límite, mediante los límites sucesivos:

$$L_1=\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x+y}{x-y}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x+0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}1=1=L_1$$

$$L_2=\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x+y}{x-y}\right]=\lim_{y\to 0}\frac{0+y}{0-y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{-y}=\lim_{x\to 0}(-1)=-1=L_2$$

Como $L_1\neq L_2\Rightarrow\nexists L$, por lo tanto al no tener límite, la función tiene una discontinuidad inevitable en el punto $P_0(0,0)$.