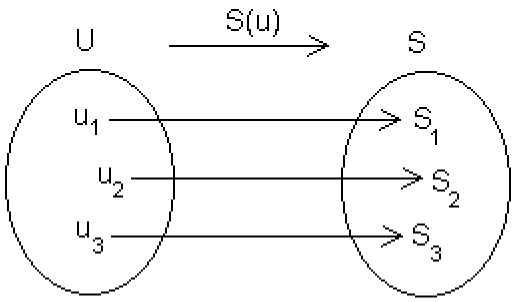
Decimos que una variable es función de otra, si la primera depende de la segunda, llamada **variable independiente.**
Por ejemplo:
$L=\pi.d$, indica que la longitud de la circunferencia es función de la medida del diámetro;
$S=180º.(n-2)$, indica que la suma de los ángulos interiores de un polígono depende del número de lados de dicho polígono.
$P=4.l$, indica que el perímetro del cuadrado es función de la medida del lado.
No solamente una ecuación matemática puede indicar que una variable depende de otra; sino que también una tabla, un gráfico o un diagrama pueden explicitar claramente la relación entre las variables.

Ejemplo: El dueño de un comercio le propone a su empleado una retribución semanal de $1200 fijos más $8 por cada unidad vendida. Suponiendo que el número máximo de unidades que se pueden vender por semana son 100, ¿cuál es la ecuación matemática que representa esta situación?
El modelo matemático que representa esta situación será la siguiente ecuación:
$S(u)=8u+1200$, quiere decir que si vende por ejemplo 20 unidades, la retribución semanal será de $1360. Si no vende ninguna, será solamente de $1200 semanales; y si vende el máximo, su sueldo semanal será de $2000.

Si representamos esta situación en diagramas de Venn:



Cada una de las u_i representa las unidades que vende el empleado por semana, y cada S_i es la cantidad correspondiente de dinero que recibe por esas ventas.
O sea que por cada valor de u, se obtendrá un valor de S.

Representando en una tabla algunos valores, tenemos:

Si $u=0 \Rightarrow S(0)=8.0+1200=1200$ Si $u=1 \Rightarrow S(1)=8.1+1200=1208$

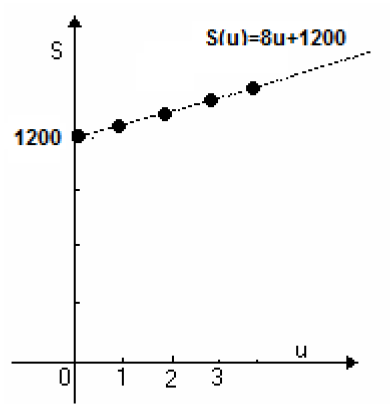
Si $u=2 \Rightarrow S(2)=8.2+1200=1216$ Si $u=3 \Rightarrow S(3)=8.3+1200=1224$

u	S(u)
0	1200
1	1208
2	1216
….	…
100	2000

Cuando en la fórmula de la función se sustituye la variable independiente por un valor determinado, se dice que el resultado es el **valor de la función** en dicho punto. Por ejemplo si se reemplaza u por 4, $S(4)=1232$, es el valor de la función en $u=4$.

Para poder representar gráficamente la función, necesitaremos un **sistema coordenado rectangular.** El mismo se construye mediante dos rectas perpendiculares, que dividen al plano en cuatro cuadrantes, los cuales se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj. Cada una de las rectas se llama eje, uno horizontal, denominado generalmente eje x, y el otro vertical, denominado eje y **.** Cada punto P del plano es un par ordenado de números reales (a,b), que son las coordenadas del punto. El punto (a,b) es el punto de intersección de la recta vertical $x=a$ con la recta horizontal $y=b$. La coordenada según x o **abscisa** del punto indica la distancia dirigida desde el eje y, al punto. La coordenada según y **,** u **ordenada** del punto indica la distancia dirigida desde el eje x hasta dicho punto.

La ecuación $S=1200+8u$, cuyas variables son: S y u, tiene como soluciones a los pares ordenados : (0,1200), (1,1208), (2,1216), (3,1224), ...(100,2000). Si se dibujan en un sistema de coordenadas todos los pares ordenados que son solución de esta ecuación, obtendremos la **gráfica** de la ecuación.



La gráfica de la función se presenta en línea de puntos ya que la variable u es discreta. Esto significa que la función está definida solamente para los valores de u: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... ya que no tiene sentido en este problema, hablar de por ejemplo: 1,5 unidades.

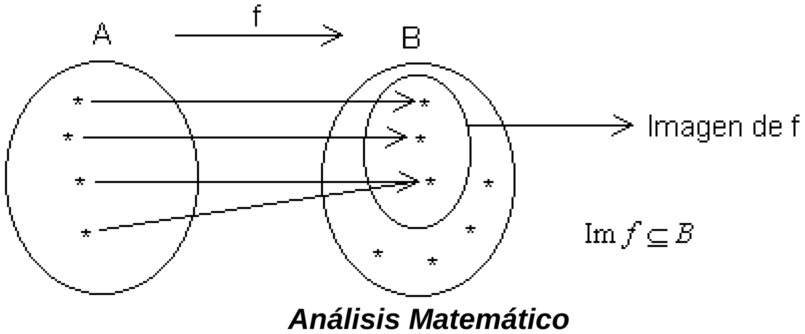
Si nos referimos a una función genérica, notaremos $y=f(x)$, donde x será la **variable independiente** e y la **variable dependiente**. El conjunto de valores que puede tomar la variable x es el **dominio** de la función, y el conjunto de valores que toma la variable y, es la **imagen** de la función.

Podemos ahora formalizar la definición de función:

Definición: Una relación entre elementos de un conjunto A y elementos de un conjunto B, es una función de A en B, si y sólo si se cumple que para todo x perteneciente a A, existe un único y perteneciente a B, tal que $y=f(x)$ ("y es el transformado de x por medio de la función f ")

Notaremos:

$f:A\to B$ $\qquad$ A: dominio; B: codominio o conjunto de llegada



Volvamos a las variables. Qué es una variable?. Una **variable** representa un número cualquiera dentro de los números reales. Se la simboliza con una letra, generalmente las últimas del abecedario: x, y, z, t, u, v. Los números que la variable puede representar se llaman valores de la variable, y el conjunto de todos esos valores que puede tomar la variable, se llama campo de variabilidad de ésta. De acuerdo a los valores que puede tomar, la variable puede ser **continua** o **discreta.** Es continua cuando su campo de variabilidad son los números reales, o un subconjunto del mismo, que no presente huecos, por ejemplo un intervalo real. Es discreta cuando su campo de variabilidad es un conjunto numérico que presenta huecos o vacíos numéricos, por ejemplo, el conjunto de los números enteros. En nuestros ejemplos u y x, son variables discretas porque las mismas pueden tomar sólo valores naturales, en cambio si consideramos $L(d)=\pi.d$; d es una variable continua, ya que puede tomar cualquier valor real positivo.
En las ecuaciones que representan funciones, generalmente figuran algunos valores que son constantes. Existen distintos tipos de constantes. Por ejemplo considerando las siguientes expresiones: $L(d)=\pi.d$, $S(u)=8u+1200$. El valor π es una **constante absoluta,** mientras que los valores 1200 y 8 son "constantes variables". ¿Qué quiere decir esto?, que estos valores pueden cambiar según el problema en cuestión. Cuando ocurre esto, esa “constante”, se llama **parámetro**. Podemos clasificar, entonces, las constantes de la siguiente forma:

$$\text{constantes}\begin{cases}\text{absolutas } (\pi,\text{e,g,...})\\ \text{parametricas}\begin{cases} y=ax^2+bc+c & (a,b,c:\ \text{parametros})\\ y=mx+b & (m,b:\ \text{parametros})\end{cases}\end{cases}$$

Algunos ejemplos para afianzar el concepto de función:

1) La relación entre la temperatura medida en grados Celsius (o centígrados C) y Fahrenheit (F) está dada por $C=\frac{5}{9}(F-32º)$.

a) Calcular C cuando F es 32º; calcular F cuando $C=100^\circ$.
B)Hallar la expresión de F en función de C.
c) Un día la temperatura en Ushuaia fue de $40^\circ F$, mientras que en Bs.As. fue de $80^\circ F$. Determinar la diferencia de temperatura entre las dos ciudades, medida en grados Celsius.

2) Sea $f(x)=x^2+2$

a) Calcular $f(0), f(-1), f\left(\frac{1}{2}\right)$

b) ¿Para qué valores de x se verifica que?:

I) $f(x)=f(-x)$

II) $f(x+1)=f(x)+f(1)$

3) Si $g(x)=4$, hallar $g(0)$ y $g(-2)$

4) Sea $f(x)$ la función definida por $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, calcular : $f\left(-\frac{1}{2}\right), f(0), f(2)$

Respuestas:

1)

a) $C = \frac{5}{9}\left(F - 32^{\circ}\right)$

Si $F = 32^{\circ} \Rightarrow C = \frac{5}{9}\left(32^{\circ} - 32^{\circ}\right) = 0$

Si $C = 100^{\circ} \Rightarrow 100^{\circ} = \frac{5}{9}\left(F - 32^{\circ}\right) \Rightarrow 100.\frac{9}{5} + 32 = F \Rightarrow F = 212^{\circ}$

b) $F = \frac{9}{5}.C + 32$

c) Si $F = 40^{\circ} \Rightarrow C = \frac{5}{9}\left(40^{\circ} - 32^{\circ}\right) = \frac{5}{9}.8 = 4,4^{\circ}$

Si $F = 80^{\circ} \Rightarrow C = \frac{5}{9}\left(80^{\circ} - 32^{\circ}\right) = \frac{5}{9}.48 = 26,6^{\circ}$

Por lo tanto la diferencia entre las temperaturas fue de 22,2 $^{\circ}C$

2)

a) $f(0) = 0^2 + 2 = 2;\ \ f(-1) = \left(-1\right)^2 + 2 = 3;\ \ f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 + 2 = \frac{9}{4}$

b) $I)\, f(-x) = \left(-x\right)^2 + 2 = x^2 + 2 = f(x)$

De esto se deduce que $\forall x \in \mathbb{R}$, se verifica que: $f(x) = f(-x)$

$II)\, f(x+1) = \left(x+1\right)^2 + 2 = x^2 + 2x + 1 + 2 = x^2 + 2x + 3$

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = x^2 + 2 \\ f(1) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) + f(1) = x^2 + 5$$

Por lo tanto, planteando: $f(x+1) = f(x) + f(1)$, resulta:

$$x^2 + 2x + 3 = x^2 + 5 \Leftrightarrow 2x + 3 = 5 \Leftrightarrow x = 1.$$

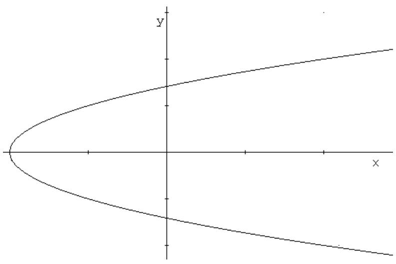
Es decir que sólo en $x = 1$, se verifica que: $f(x+1) = f(x) + f(1)$

3) $g\left(x\right) = 4$ está indicando una función que para cualquier valor de x, siempre su transformado es igual a 4. Es una función constante. Por lo tanto:
$g\left(0\right) = 4$ y $g\left(-2\right) = 4$

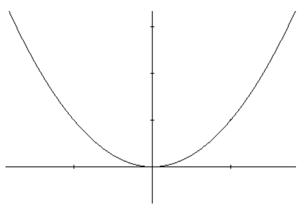
4) $$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = -2/5,\quad f(0) = 0,\ \ f(2) = \frac{2}{5}$$

La gráfica de una relación dada por una ecuación determinada, con una variable independiente y una variable dependiente, en un sistema de ejes cartesianos puede representar o no una función. Por ejemplo:

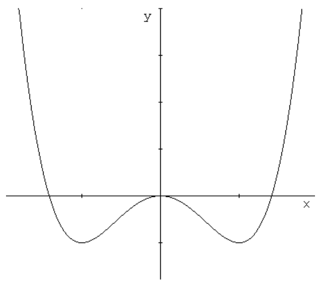
a)



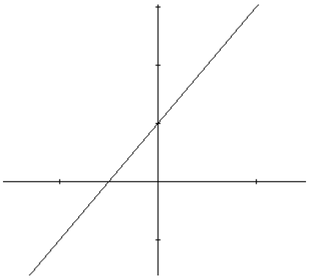
b)



c)



No es función Función Función.



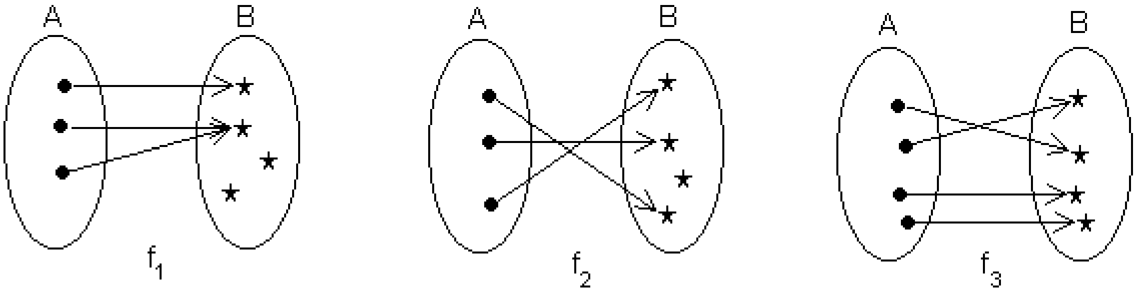
d) Función

Geométricamente, una función se caracteriza por el hecho de que toda recta perpendicular al eje x que corta su gráfica lo hace exactamente en un sólo punto.

FUNCION INYECTIVA

Una función es inyectiva si a elementos distintos del dominio le corresponden imágenes distintas. O sea:

$$f : A \to B \text{ inyectiva } \Leftrightarrow \forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



En estos diagramas se puede visualizar que f_1 no es inyectiva, pero sí lo son f_2 y f_3.
Si la función está representada en el plano cartesiano, para determinar si es invectiva, se deben trazar rectas paralelas al eje x, y éstas deben cortar a la curva en un sólo punto. Tomando los gráficos anteriores: b), c) y d), podemos determinar que d) es el gráfico de una función inyectiva pero no ocurre lo mismo con los gráficos b) y c).

FUNCION SURYECTIVA O SOBREYECTIVA

Una función $f : A \to B$ es suryectiva si todos los elementos de B son imagen de algún elemento de A, o sea que el conjunto imagen coincide con el conjunto de llegada B, es decir: $\mathrm{Im}(f) = B$

$$f : A \to B \text{ suryectiva } \Leftrightarrow \forall y \in B \, \exists \, x \in A / y = f(x)$$

Considerando los ejemplos anteriores de las funciones dadas en diagramas de Venn, se puede concluir que: f_3 es suryectiva, y f_1 y f_2 no son suryectivas

FUNCION BIYECTIVA. FUNCION INVERSA

Si una función es inyectiva y suryectiva simultáneamente, se dice que es biyectiva. En nuestros ejemplos f_3 es biyectiva.

En general, si una función $f: A \rightarrow B$ es biyectiva, se puede definir otra función $g: B \rightarrow A$, que será la función inversa de f , y se designa $g = f^{-1}$. En esta notación el -1 no debe tomarse como un exponente $\left(f^{-1} \neq \frac{1}{f} \right)$ sino que sólo representa que f^{-1} es la inversa de f .

Estrategia para hallar la inversa de una función:

1) Determinar si la función $y = f(x)$ admite inversa, es decir si es biyectiva.
2) Despejar x en función de y , obteniendo así $x = g(y) = f^{-1}(y)$.
3) Escribir f^{-1} como función de x , intercambiando las variables x e y .

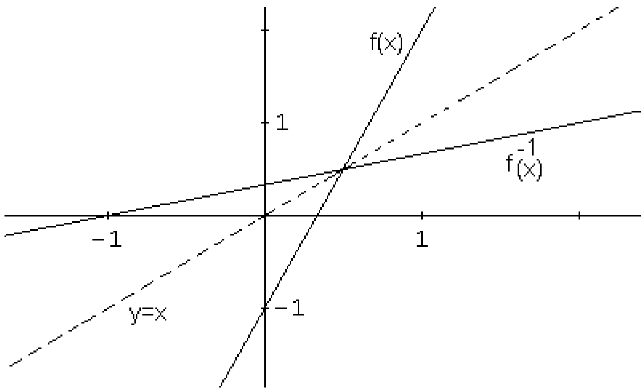
Ejemplo:
Hallar la inversa de $y = 3x - 1$,
Esta función es biyectiva, por lo tanto habrá que despejar x en función de y :

$$x = \frac{y+1}{3} = g(y) = f^{-1}(y)$$

Para que la función inversa quede en función de x, intercambiamos las variables:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$$

Las gráficas de $f^{-1}(x)$ y $f(x)$ son simétricas a la gráfica de la función $y = x$.



FUNCIONES PARES E IMPARES

Una función es par, si su gráfica es simétrica al eje y .
Una función es impar si su gráfica es simétrica con respecto al origen.
Para poder determinar, analíticamente, si una función es par o impar, se deberán tener en cuenta los siguientes criterios:

$f(x)$ es par si se cumple que: $f(x) = f(-x)$
$f(x)$ es impar si se cumple que: $f(x) = -f(-x)$

Ejemplo:
Determinar si las funciones siguientes son pares, impares o ninguna de las dos cosas:

a) $f(x) = 2 - x^2$ c) $h(x) = 2x + 3$

b) $g(x) = \sqrt[3]{x}$

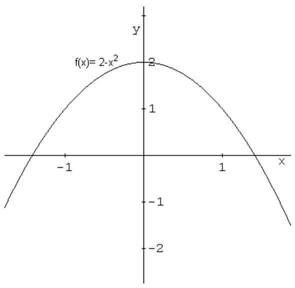
Teniendo en cuenta el criterio anterior:

a) $f(-x)=2-(-x)^2=2-x^2=f(x)$, por lo tanto $f(x)$ es par.

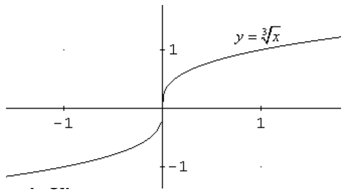
b) $g(-x)=\sqrt[3]{-x}\neq g(x)$,por lo tanto $g(x)$ no es par.
$g(x)$ es impar porque $g(x)=-g(-x)$, ya que:
$-g(-x)=-\sqrt[3]{-x}=-\left(-\sqrt[3]{-x}\right)=\sqrt[3]{x}=g(x)$

c) $h(x)$ no es par ni impar ya que $h(x)\neq h(-x)$ y $h(x)\neq -h(-x)$
$h(-x)=2(-x)+3=-2x+3\neq h(x)$
$-h(-x)=-(-2x+3)=2x-3\neq h(x)$

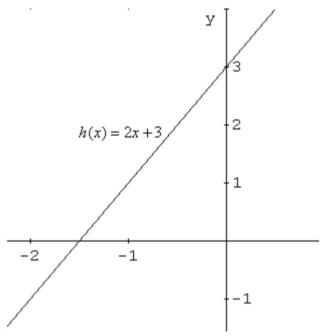
Gráficamente se pueden corroborar estos resultados:



Par



Impar



No es par ni impar

Ni par ni impar

DOMINIO
Como dijimos anteriormente el dominio de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente x. Como sólo estudiaremos funciones de valores reales, entonces el dominio va a estar compuesto por todos los valores reales de la variable independiente para los cuales la expresión algebraica de la función tiene sentido dentro de los números reales. Si se conoce el dominio, la imagen de una función será el conjunto correspondiente de los valores de la variable dependiente.

Consideremos los siguientes ejemplos:

1) $f(x)=3x^2+3x-2$, el dominio en este caso es el conjunto de todos los números reales.
2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$. Dom: $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ pues en $x=-2$ y $x=2$, no está definida la ecuación.
3) $f(x)=\sqrt{x+2}$. Dom: $x\in[-2,\infty)$, resultado que surge al resolver la siguiente inecuación: $x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$
4) $f(x)=\log(x-3)$ Dom: $x\in(3;\infty)$, ya que $x-3>0\Leftrightarrow x>3$

Obs.: Si en la ecuación figura un cociente, el denominador debe ser distinto de cero; si figura una raíz de índice par, el radicando deberá ser mayor o igual que cero, y en el caso de un logaritmo, su argumento deberá ser mayor que cero.

Ejercicios propuestos:
Calcular el dominio de las siguientes funciones:

$f(x)=3x^2+2$ Dom: R

$f(x)=1/x$	Dom: $R-\{0\}$
$f(x)=1/x^2-5x+6$	Dom: $R-\{2;3\}$
$f(x)=\left(x^2-4\right)^{1/2}$	Dom: $x\in(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$
$f(x)=\left(9-x^2\right)^{1/2}$	Dom: $x\in[-3;3]$
$f(x)=\left(3x+2\right)^{1/2}$	Dom: $x\in[-2/3;\infty)$
$f(x)=\log(x+2)$	Dom: $x\in(-2;\infty)$

Considerando el ejemplo del sueldo: $S(u)=8u+1200$, vemos que esta expresión tiene sentido dentro de los números reales para cualquier valor que se le asigne a la variable u . Pero esto tomado desde un punto de vista netamente matemático. En la práctica, puede haber otras condiciones que restrinjan aún más el dominio y por ende la imagen. Volviendo a este ejemplo, habíamos dicho que se podían vender hasta 100 unidades por semana, por lo tanto el **dominio restringido** de $S(u)$, será:

Dom. $S(u)=\left\{u\in\mathbb{N}\cup\{0\}\,/\,0\le u\le 100\right\}$;

Correspondiendo a este dominio restringido, tendremos **imágenes** también **restringidas,** es decir:

Imag. $S(u)=\{1200,1208,1216,...2000\}$

FUNCIONES IMPLICITAS Y EXPLICITAS

Si en la ecuación que representa una función, se puede identificar claramente cuál es la variable dependiente y cuál la independiente, se dice que la misma está dada en forma explícita; por ejemplo: $y=3x^2+2x-3$, $y=4sen(x)$, son funciones dadas en forma explícita.

En cambio si la expresión es $y+3x-7=0$, o sea en general $F(x,y)=0$, se dice que la función está definida implícitamente. En el caso que $F(x,y)=2xy-3y+1=0$, se puede obtener $y=-\dfrac{1}{2x-3}$, o $x=\dfrac{-1+3y}{2y}$, es decir, es indistinto tomar a y como función de x , o viceversa. En otros casos no es así, por ejemplo, en la expresión $x-4y^2+2y+6=0$, resulta más sencillo tomar a y como variable independiente, es decir: $x=4y^2-2y-6$

Si $F(x,y)=x^2+y^2-9$,entonces $F(x,y)=0$ puede definir implícitamente dos funciones distintas: $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, y $g(x)=-\sqrt{9-x^2}$. También puede ocurrir que una expresión en dos variables no defina implícitamente a ninguna función, por ejemplo: $F(x,y)=x^2+y^2+3$. En este caso, $F(x,y)=0$ no se satisface para ningún par de valores x e y reales.

OPERACIONES CON FUNCIONES

Así como los números pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse para obtener otros números, también en las funciones ocurre lo mismo.

Definición: Dadas dos funciones: f y g , su suma $f+g$, diferencia $f-g$, producto

$f.g$, y cociente f/g ,se definen por:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

$(f.g)(x)=f(x).g(x)$

$(f/g)(x)=f(x)/g(x)$

Estas funciones van a estar definidas teniendo en cuenta sus dominios.
Para las funciones: $f+g$, $f-g$ y $f.g$, el dominio se define como la intersección de los dominios de f y g , y para f/g , el dominio es esta intersección pero con los puntos donde $g(x)=0$ estén excluidos.

Ejemplo:

Dadas las funciones f y g definidas por: $f(x)=\sqrt{x-3}$ y $g(x)=x^2-9$, determinar:

$a)(f+g)(x);\ b)(f-g)(x);\ c)(f.g)(x);\ d)(f/g)(x)$

a) $(f+g)(x)=\sqrt{x-3}+x^2-9$

b) $(f-g)(x)=\sqrt{x-3}-x^2+9$

c) $(f.g)(x)=\left(\sqrt{x-3}\right).\left(x^2-9\right)$

d) $(f/g)(x)=\left(\sqrt{x-3}\right)\Big/\left(x^2-9\right)$

El dominio de $f(x)$ es $[3;\infty)$, y el dominio de $g(x)$ es R . Por lo tanto en a), b), y c), el dominio de la función resultante está dado por la intersección entre $[3;\infty)$ y R , es decir $[3;\infty)$. En d), el denominador es cero en $x=\pm 3$, entonces se excluye del dominio sólo el 3, ya que el –3 no pertenece al mismo. En conclusión, el dominio de la función $(f/g)(x)$ es $(3;\infty)$.

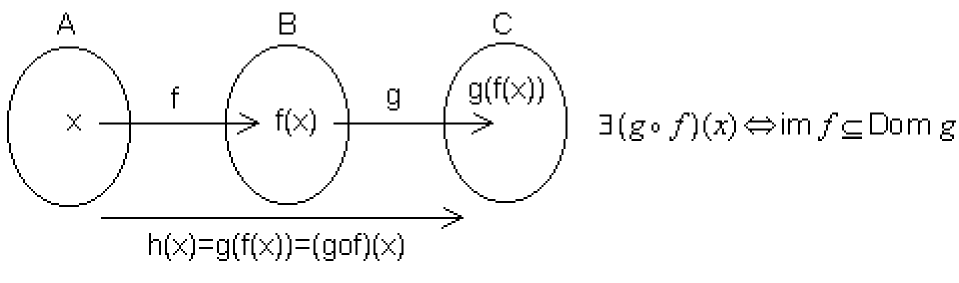
COMPOSICION DE FUNCIONES O FUNCION DE FUNCION

Además de combinarse algebraicamente como vimos anteriormente, también las funciones pueden relacionarse de otro modo.

Sea una función $f:A\to B$ y $g:B\to C$; se define para todo $x\in A$:

$h(x)=g(f(x))=(g\circ f)(x)$ como la función compuesta de g con f .

La condición para que exista $(g\circ f)$ es que la imagen de f debe estar incluida en el dominio de g .



Ejemplo:

Dadas $f:R\to R$ y $g:R\to[1;\infty)$

$f(x)=2x+3 \quad g(x)=x^2+1$

Hallar: $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$

Como la $\text{Imag}(f) = R$ está contenida en el $\text{Dom}(g) = R$, se puede calcular $(g \circ f)(x) = g(2x+3) = (2x+3)^2 + 1$

La $\text{Imag}(g) = [1;\infty)$ está contenida en el $\text{Dom}(f) = R$, por lo tanto se puede calcular: $(f \circ g)(x) = f(x^2+1) = 2(x^2+1)+3$

CLASIFICACION DE FUNCIONES

Las funciones pueden clasificarse en:

$$\text{Funciones}\begin{cases}\text{algebraicas}\begin{cases}\text{racionales}\begin{cases}\text{enteras o polinomicas}\\ \text{fraccionarias}\end{cases}\\ \text{irracionales}\end{cases}\\ \text{trascendentes (logaritmica, exponencial, trigonometrica)}\end{cases}$$

Se llama función algebraica, a toda función que se pueda obtener efectuando sobre la variable independiente, solamente operaciones racionales y radicaciones. Cuando las funciones son tales que trascienden el campo del álgebra, como son las logarítmicas, exponenciales y trigonométricas, se llaman trascendentes.

Una función es racional cuando se puede obtener efectuando sobre la variable independiente, solamente operaciones racionales (suma, resta, multiplicación y división), un número finito de veces.

Por ejemplo: $y = 3x^4 - x^3 + 2x$; $y = \left(3x^5 - 4x\right)/(7-x)$.

Entre las funciones racionales, las más sencillas son las funciones racionales enteras o polinómicas, o sea las que se pueden obtener efectuando sobre la variable independiente, solamente las operaciones de suma, resta y multiplicación (operaciones enteras), en un número finito de veces, con coeficientes numéricos cualesquiera.

También se puede definir la función entera o polinómica de grado n, a la función dada por:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$

a_i : coeficientes a_0 : coeficiente principal

Si el grado del polinomio es:	la función es:	Ejemplo:
0	$f(x) = a_0$ constante	$f(x) = 2$
1	$f(x) = a_1x + a_0$ lineal $(a \neq 0)$	$f(x) = 3x+1$
2	$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ cuadrática $(a_2 \neq 0)$	$f(x) = 2x^2 + 4x + 5$
3	$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ cúbica $(a_3 \neq 0)$	$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 7$

Función fraccionaria: está dada por el cociente de funciones enteras, por ejemplo: $y = 1/x$, $y = \left(x^2-1\right)^2/(x-2)$ Función irracional: es el caso de la función en la cual la variable independiente está afectada a las cuatro operaciones racionales (suma, resta, multiplicación, división), y además a la radicación.

Ejemplos:

$y=\sqrt{x-1}$; $\quad y=\sqrt[3]{x+1}$

TRANSFORMACIONES DE GRÁFICAS DE FUNCIONES

Al aplicar ciertas transformaciones a la gráfica de determinada función podemos obtener gráficas de otras funciones relacionadas.

Tipos de transformaciones:

Desplazamientos verticales y horizontales

Si c>0 , para obtener la gráfica de:

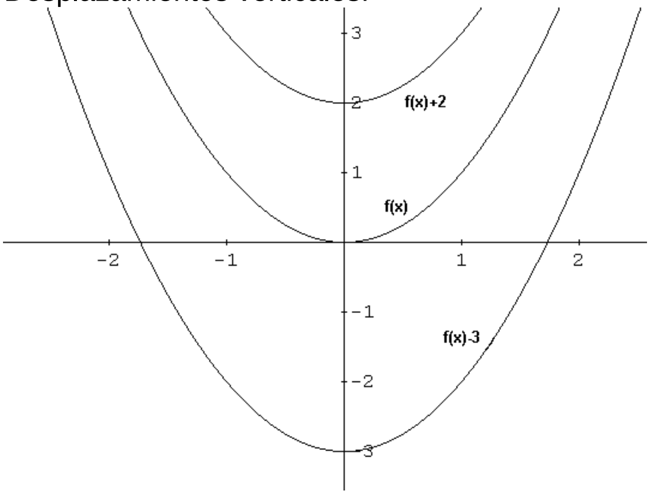
$y=f(x)+c$, la gráfica de $y=f(x)$ se desplaza c unidades hacia arriba.

$y=f(x)-c$, la gráfica de $y=f(x)$ se desplaza c unidades hacia abajo.

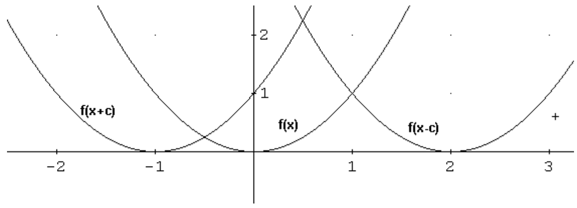
$y=f(x-c)$, la gráfica de $y=f(x)$ se desplaza c unidades hacia la derecha.

$y=f(x+c)$, la gráfica de $y=f(x)$ se desplaza c unidades hacia la izquierda.

Desplazamientos verticales:



Desplazamientos horizontales:



Expansión, contracción y reflexión.

Si suponemos que c>1, para obtener la gráfica de:

$y=c.f(x)$, la gráfica de $y=f(x)$ se expande en dirección vertical, multiplicando cada valor de la ordenada por c.

$y=\frac{1}{c}.f(x)$, la gráfica de $y=f(x)$ se contrae en dirección vertical, multiplicando cada valor de la ordenada por $\frac{1}{c}$

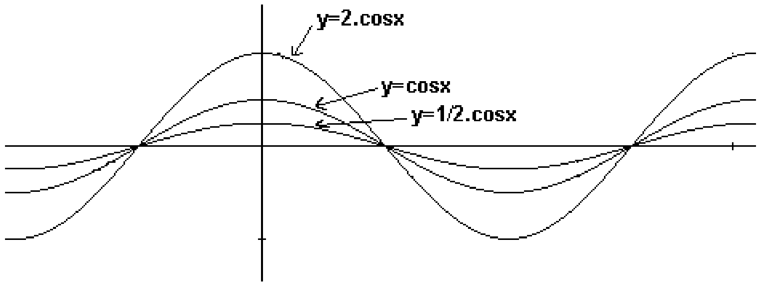
$y=f(c.x)$, la gráfica de $y=f(x)$ se comprime c veces en dirección horizontal.

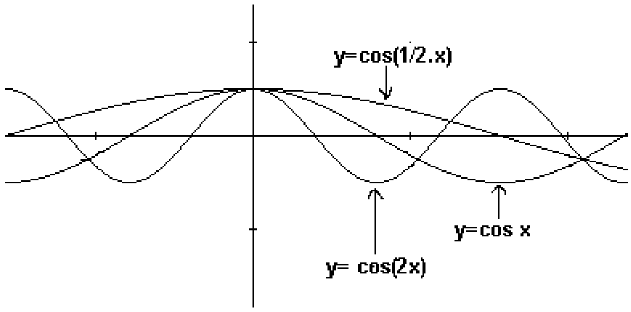
$y=f\left(\frac{x}{c}\right)$, la gráfica de $y=f(x)$ se estira c veces en dirección horizontal.

$y=-f(x)$, la gráfica de $y=f(x)$ se refleja respecto del eje x.

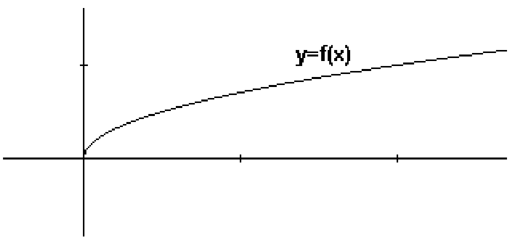
$y=f(-x)$, la gráfica de $y=f(x)$ se refleja respecto del eje y.

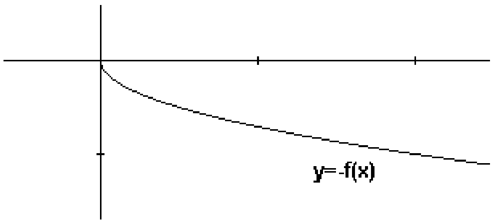
Ejemplos de expansión y contracción:

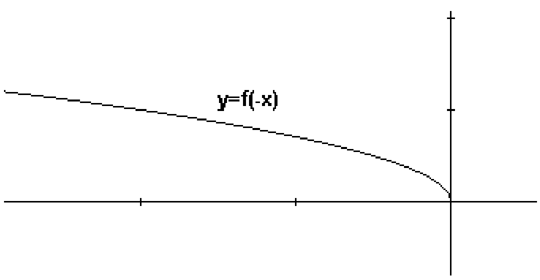




Ejemplos de reflexión:



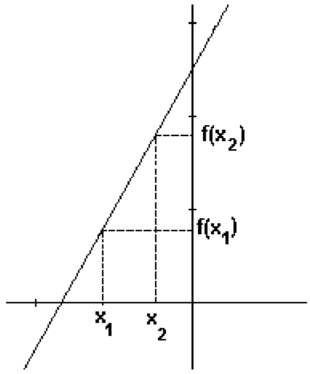




FUNCIONES MONÓTONAS

Función estrictamente creciente

Sea una función $f : A \to B$, se dice que es una función estrictamente creciente si para todo par de puntos $x_1, x_2 \in$ A tales que si $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$



Ejemplo:

$f(x) = 3x + 5$

$Si\ x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 + 5 < 3x_2 + 5 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Función estrictamente decreciente

Sea una función $f : A \to B$, se dice que es una función estrictamente decreciente si para todo par de puntos $x_1, x_2 \in$ A tales que si $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$

Ejemplo:

$f(x) = -3x + 5$

$Si\ x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow -3x_1 + 5 > -3x_2 + 5 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$