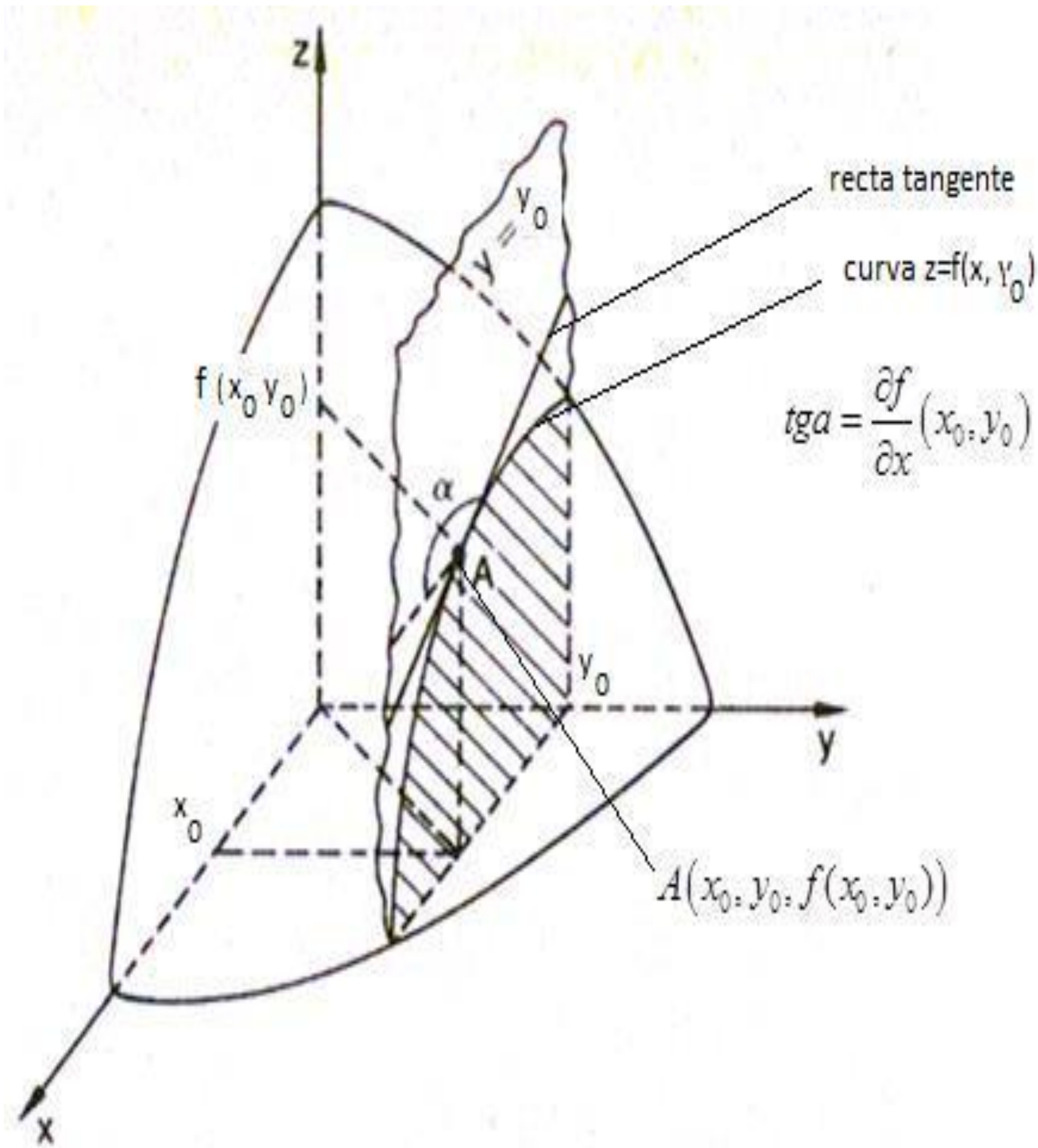
Derivadas parciales para una función de dos variables independientes

La derivación de funciones de varias variables no cambia significativamente lo visto para una función de una sola variable independiente. Si se mantienen constantes todas las variables independientes excepto una, y se deriva con respecto a esta variable, se obtiene una derivada parcial.

Veamos la interpretación gráfica y la definición de derivadas parciales, para luego determinar la forma de calcularlas aplicando las reglas de derivación para funciones de una sola variable.



Consideremos una función $Z = f(x, y)$ cuya gráfica es una <u>superficie suave, y</u> un punto $P_0(x_o, y_0)$ en el dominio de dicha función. Si cortamos la superficie con un plano $y = y_0$, paralelo al plano xz, obtenemos una curva $Z = f(x, y_0)$. Esta curva es la intersección del plano $y = y_0$ con la superficie $Z = f(x, y)$.

El valor de la función en el punto $P_0(x_0, y_0)$ es $f(x_0, y_0)$; si incrementamos el valor de x_0 en Δx, dejando constante el valor de la variable y, el nuevo valor de la función resulta $f(x_0 + \Delta x, y_0)$. El incremento de la variable dependiente será:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

y el cociente incremental resulta:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Este cociente incremental o razón promedio de cambio, representa, al igual que para una variable independiente, la pendiente de la recta secante definida por el punto $A(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y el punto $P(x_0 + \Delta x, y_0, f(x_0 + \Delta x, y_0))$.

Si a este cociente incremental le calculamos el límite cuando $\Delta x \to 0$, y este límite existe (en nuestro caso, existe por ser una superficie "suave"), será por definición la derivada parcial de la función con respecto a x en el punto $P_0(x_0, y_0)$, que notaremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{o} \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{o} \quad f_x(x_0, y_0) \quad \text{o} \quad z_x(x_0, y_0)$$

Es decir que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = z_x(x_0, y_0)$$

Siempre que este límite exista.

Geométricamente la derivada parcial de *f* con respecto a la variable *x* , es la pendiente de la recta tangente a la curva $z = f(x, y_0)$, en el punto $A(x_0, y_0, f(x_o, y_0))$, en la dirección del eje x.

Vamos a dar la definición de derivada parcial con respecto a x, generalizando para un punto cualquiera (*x*, *y*) .

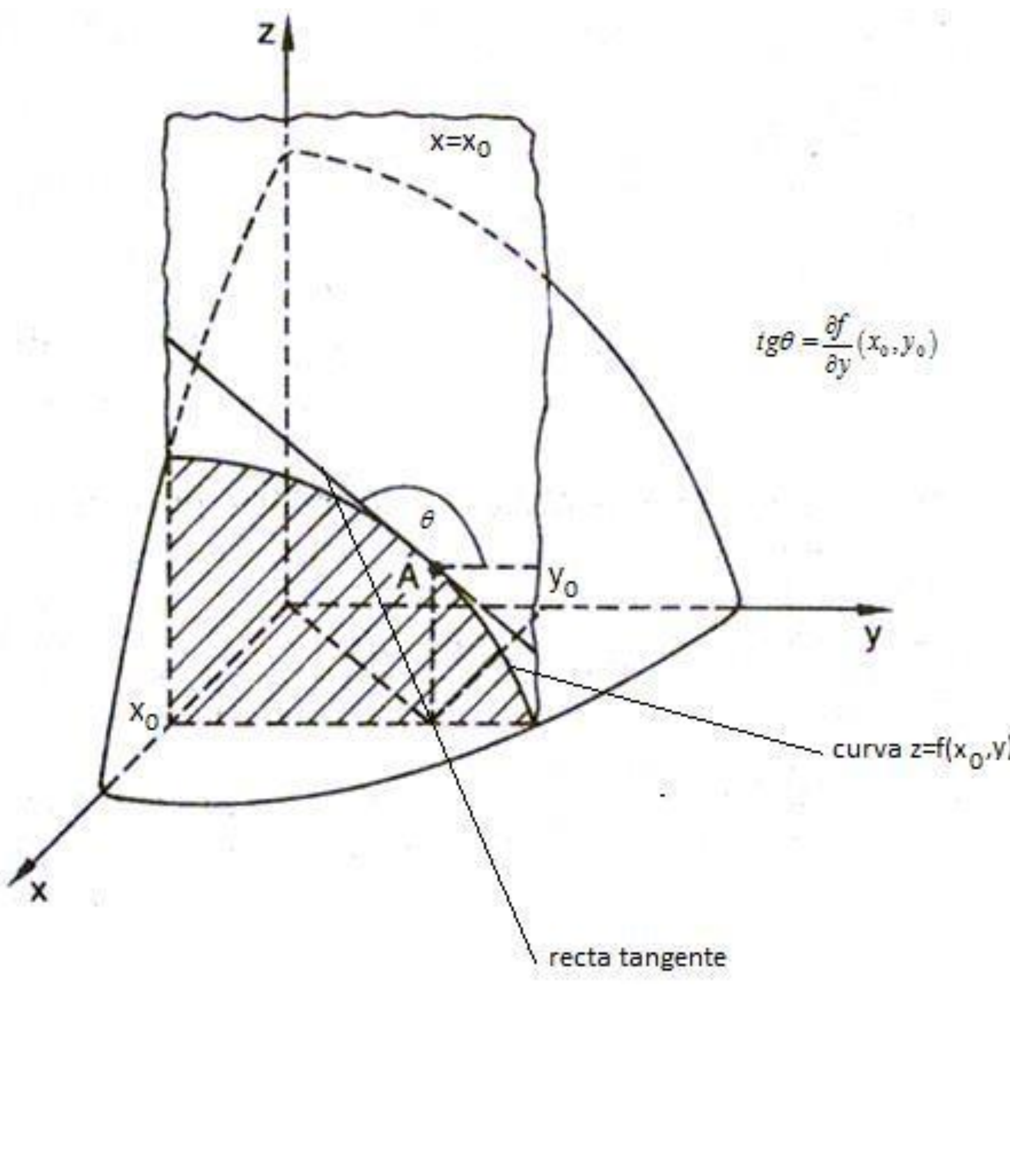
Definición

Derivada parcial con respecto a x

Sea $f(x,y)$, una función de dos variables. La derivada parcial de f con respecto a x, en un punto cualquiera (x,y) en el dominio de f, está dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}, \text{ siempre que este límite exista.}$$

Haremos un razonamiento similar para calcular la derivada parcial de *f* (*x*, *y*) con respecto a *y* en un punto $P_0(x_0, y_0)$



Cortamos la superficie con un plano $x = x_0$, paralelo al plano xz, obteniendo una curva $z = f(x_0, y)$. Esta curva es la intersección del plano $x = x_0$ con la superficie $z = f(x, y)$.

El valor de la función en el punto $P_0(x_0, y_0)$ es $f(x_0, y_0)$; si incrementamos el valor de y_0 en Δy, dejando constante el valor de la variable x, el nuevo valor de la función resulta $f(x_0, y_0 + \Delta y)$ El incremento de la variable dependiente será: $f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$,y el cociente incremental resulta:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Este cociente incremental o razón promedio de cambio, representa la pendiente de la recta secante definida por el punto $A(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y el punto $P(x_0, y_0 + \Delta y, f(x_0, y_0 + \Delta y))$.

Si a este cociente incremental le calculamos el límite cuando $\Delta y \to 0$, y este límite existe, será por definición la derivada parcial de la función con respecto a y en el punto $P_0(x_0, y_0)$, que notaremos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{o} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{o} \quad f_y(x_0, y_0) \quad \text{o} \quad z_y(x_0, y_0)$$

Es decir que:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = z_y(x_0, y_0)$$

Siempre que este límite exista.

Geométricamente la derivada parcial de f con respecto a la variable y, es la pendiente de la recta tangente a la curva $z = f(x_0, y)$ el punto $A(x_0, y_0, f(x_0, y_0)$, en la dirección del eje y.

Vamos a dar la definición de derivada parcial con respecto a y, generalizando para un punto cualquiera (x, y) .

Definición

Derivada parcial con respecto a y

Sea *f* (*x*, *y*) , una función de dos variables. La derivada parcial de *f* con respecto a *y* , en un punto cualquiera (*x*, *y*) en el dominio de *f* , está dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y},\quad \text{Siemrpe que este límite exista}$$

Ejemplo 1

Dada la función *f* (*x*, *y*)= 4 *y* ²+*xy*

a) Calcular por definición las derivadas parciales

b) Hallar:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\quad,\quad\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$$

Solución

a) En primer lugar calculamos la *derivada parcial con respecto a x.* Para derivar la función con respecto a *x*, consideramos a la variable *y* como constante.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4y^2+(x+\Delta x)y-(4y^2+xy)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4y^2+xy+\Delta xy-4y^2-xy)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}y=y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y$$

Calcularemos ahora la *derivada parcial de la función con respecto a y.* Para derivar la función con respecto a *y*, tratamos a la variable *x* como constante.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{4(y+\Delta y)^2+(y+\Delta y)x-(4y^2+xy)}{\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{4y^2+8y\Delta y+4\Delta y^2+xy+x\Delta y-4y^2-xy}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(8y+4\Delta y+x)\Delta y}{\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}(8y+4\Delta y+x)=8y+x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=8y+x$$

b) Para calcular las derivadas parciales en el punto $P_0(1,2)$ hacemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = y\Big|_{(1,2)} = 2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = (8y + x)\Big|_{(1,2)} = 8.2 + 1 = 17$$

Hasta aquí hemos calculado las derivadas parciales utilizando la definición. También podemos hallarlas usando las mismas *reglas de la derivación* de funciones de una variable independiente. A partir de la definición de derivadas parciales, se puede demostrar, que se cumplen dichas reglas de derivación.

Usando ahora las *reglas de derivación* de funciones de una variable, veremos otros ejemplos.

Ejemplo 2
Calcular las derivadas parciales de las funciones.

a) $f(x,y) = 3x^3 - 4x^2y + 3xy^2$

b) $f(x,y) = e^{\frac{y}{x}} \ln\left(\frac{x^2}{y}\right)$

c) $f(x,y) = sen(x.y)e^{(x2+y2)}$

Solución

a) Para hallar la $\frac{\partial f}{\partial x}$, consideramos a y como constante y derivamos con respecto a x.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^3 - 4x^2y + 3xy^2) = 9x^2 - 8xy + 3y^2$$

Para hallar la $\frac{\partial f}{\partial y}$, consideramos a x como constante y derivamos con respecto a y.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^3 - 4x^2y + 3xy^2) = -4x^2 + 6xy$$

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(e^{\frac{y}{x}}\ln(\frac{x^2}{y}))=e^{\frac{y}{x}}(-\frac{y}{x^2})\ln(\frac{x^2}{y})+e^{\frac{y}{x}}\,\frac{1}{x^2}\,\frac{2x}{y}=e^{\frac{y}{x}}((-\frac{y}{x^2})\ln\frac{x^2}{y}+\frac{2}{x})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(e^{\frac{y}{x}}\ln(\frac{x^2}{y}))=e^{\frac{y}{x}}(\frac{1}{x})\ln(\frac{x^2}{y})+e^{\frac{y}{x}}\,\frac{1}{x^2}(-\frac{x^2}{y^2})=e^{\frac{y}{x}}((\frac{1}{x})\ln\frac{x^2}{y}-\frac{1}{y})$$

c)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(sen(xy)e^{\left(x^2+y^2\right)})=\cos(xy)ye^{\left(x^2+y^2\right)}+sen(xy)e^{\left(x^2+y^2\right)}2x=e^{\left(x^2+y^2\right)}(y\cos(xy)+2xsen(xy))$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(sen(xy)e^{\left(x^2+y^2\right)})=\cos(xy)xe^{\left(x^2+y^2\right)}+sen(xy)e^{\left(x^2+y^2\right)}2y=e^{\left(x^2+y^2\right)}(x\cos(xy)+2ysen(xy))$$

Así como hemos visto que en las funciones de una variable independiente, la derivada representa una medida de intensidad de cambio, una derivada parcial también se interpreta de la misma manera.

Si f es una función de las dos variables x e y, la derivada parcial de f con respecto a x, en el punto $P_0(x_0,y_0)$, da la razón de cambio instantánea, en P_0, de $f(x,y)$ por unidad de cambio en x. Análogamente, la derivada parcial de f con respecto a y, en el punto $P_0(x_0,y_0)$, da la razón de cambio instantánea, en P_0, de $f(x,y)$ por unidad de cambio en y

Derivadas parciales para una función de tres variables independientes.

Sea $u=f(x,y,z)$ una función de tres variables independientes; hallamos las derivadas parciales con respecto a cada una de sus variables, calculando los siguientes límites:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}$$

Siempre que cada uno de estos límites exista, diremos que existe la derivada parcial de la función con respecto a la variable correspondiente.

También podemos expresar a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$, como:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) = f_x(x, y, z) = u_x(x.y.z)$$

En forma análoga usamos la misma nomenclatura para las derivadas con respecto a las otras variables.

En general, podemos calcular las derivadas parciales de una función de varias variables independientes con respecto a cualquiera de sus variables.

Derivadas parciales para una función de varias variables independientes

Sea $u = f(x_1, x_2, x_{3,..........}x_n) = f(\vec{x})$ una función de n variables independientes; hallamos la derivada parcial con respecto a una de sus variables, que llamaremos xi , calculando el siguiente límite:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_1, x_2, x_3, ...x_i + \Delta x, ...x_n\right) - f\left(x_1, x_2, x_3, ... + x_i ......x_n\right)}{\Delta x_i}$$

Siempre que este límite exista, diremos que es la derivada parcial de la función con respecto a la variable xi .

Derivadas parciales sucesivas para una función de dos variables independientes

Repasaremos en primer lugar derivadas sucesivas para una función de una variable independiente. Sea $y = f(x)$ derivable, es decir $\exists f^{!}(x)$ que también es una función, y está definida como:

$$f^{!}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Como *f '(x)* es también una función, es natural pensar en la derivada de esta nueva función, que definiremos de la siguiente manera:

$$f^{"}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{!}(x + \Delta x) - f^{!}(x)}{\Delta x} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$, siempre que este límite exista.

La función que a cada valor de la variable independiente x le hace corresponder uno y solo un valor recibe el nombre función derivada segunda con respecto a x .

Recordar que la notación $\frac{d^2 y}{dx^2}$ (notación de Leibniz) se lee: derivada segunda de *y* con respecto a *x* dos veces.

De manera análoga, se define la derivada tercera.

$$f^{!!!}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{!!}(x+\Delta x) - f^{!!}(x)}{\Delta x} = \frac{d^3 y}{dx^3}, \text{ siempre que este límite exista.}$$

En general, podemos definir la derivada *n* -ésima, a partir de la derivada *n* -1 ésima, que también es una función:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\ \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x} = \frac{d^n y}{dx^n}, \text{ siempre que este límite exista.}$$

Derivadas parciales sucesivas

Si consideramos ahora, una función de dos variables independientes $z = f(x.y)$, con derivadas primeras parciales:

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y - f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Estas derivadas parciales f_x y f_y son también funciones de dos variables, por lo tanto se pueden hallar sus derivadas parciales, si es que existen. Debemos tener en cuenta que una función de dos variables independientes tiene dos derivadas parciales primeras, y como cada una de éstas (si es que son derivables) tienen dos derivadas parciales, la función f_x y f_y tiene cuatro derivadas parciales segundas. Éstas, son:

$$f_{xx}(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_x(x+\Delta x,y)-f_x(x,y)}{\Delta x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$$
$$f_{xy}(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(x,y+\Delta y)-f_x(x,y)}{\Delta y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$$
$$f_{yx}(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(x+\Delta x,y)-f_y(x,y)}{\Delta x}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$$
$$f_{yy}(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_y(x,y+\Delta y)-f_y(x,y)}{\Delta y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

Cuando necesitemos hallar: f_{xy} o $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$, vamos a derivar en primer lugar con respecto a la variable x y luego con respecto a la variable y . En algunos libros, este cálculo se interpreta al revés.

De manera análoga se pueden calcular, si es que existen, las derivadas parciales terceras y continuar. Para visualizar las derivadas parciales sucesivas es conveniente hacer el árbol de derivación de la siguiente manera:

Sea $z=f(x,y)$ el árbol de derivación, resulta:

$$z\begin{cases} z_x\begin{cases} z_{xx}\begin{cases} z_{xxx}\\ z_{xxy}\end{cases}\\ z_{xy}\begin{cases} z_{xyx}\\ z_{xyy}\end{cases}\end{cases}\\ z_y\begin{cases} z_{yy}\begin{cases} z_{yyx}\\ z_{yyy}\end{cases}\\ z_{yx}\begin{cases} z_{yxx}\\ z_{yxy}\end{cases}\end{cases}\end{cases} \text{ y así sucesivamente}$$

Para una función de dos variables independientes:

- La cantidad de derivadas parciales primeras es: $2^1 = 2$
- La cantidad de derivadas parciales segundas es: $2^2 = 4$
- La cantidad de derivadas parciales terceras es: $2^3 = 8$
- ……………………………………………………..

- La cantidad de derivadas parciales de orden n, es: 2^n

Ejemplo

Calcular las derivadas parciales segundas de la función: $z = x^2 y^3$

Solución

$$z = x^2 y^3 \begin{cases} z_x = 2xy^3 \begin{cases} z_{xx} = 2y^3 \\ z_{xy} = 6xy^2 \end{cases} \\ z_y = 3x^2y^2 \begin{cases} z_{yx} = 6xy^2 \\ z_{yy} = 6x^2 y \end{cases} \end{cases}$$

Vemos que las derivadas parciales de segundo orden z_{xy} y z_{yx} son iguales. Esto no es una coincidencia, este resultado se da en todas las funciones que trabajaremos en la práctica, siempre que las derivadas parciales sean continuas. Estas derivadas se llaman *derivadas segundas parciales mixtas (o cruzadas) de f*

El siguiente teorema afirma que, en condiciones adecuadas, las derivadas cruzadas son iguales, es decir, el orden de la derivación no altera el resultado.

Teorema de Schwarz, o simplemente de las derivadas cruzadas)

Si $f\ (x\ ,\ y\ )$ y sus derivadas parciales f_x , f_y , f_{xy} y f_{yx} están definidas y son *continuas* en una región abierta R , entonces las derivadas cruzadas son iguales en todo punto de R :

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Es decir que la derivación cruzada es conmutativa y esto se extiende a las derivadas parciales de orden superior, siempre que se verifique la continuidad de las derivadas correspondientes.

Por ejemplo, para las derivadas parciales terceras se verifica que

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$$

Este teorema se puede ampliar a funciones de varias variables independientes.