Ejercicios de Espacios Vectoriales

1. Determinar cuales de los siguientes conjuntos son $\mathbb{R}$-espacios vectoriales:

   a) $V = \mathbb{R}^3$ con las operaciones:

   $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$,
   $\lambda.(x, y, z) = (\lambda^2 x, \lambda^2 y, \lambda^2 z),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

   b) $V = \mathbb{R}^3$ con las operaciones:

   $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$,
   $\lambda.(x, y, z) = (\lambda x, y, z),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

2. Sea $V = \mathbb{R}^3$. Hallar todos los valores de k para los cuales el vector $\vec{u}$ es combinación lineal de los vectores dados a continuación:

   a) $\vec{v_1} = (2, 3, 5)$; $\vec{v_2} = (3, 7, 8)$; $\vec{v_3} = (1, -6, 1)$ y $\vec{u} = (7, -2, k)$.

   b) $\vec{v_1} = (3, 4, 2)$; $\vec{v_2} = (6, 8, 7)$ y $\vec{u} = (9, 12, k)$.

   c) $\vec{v_1} = (4, 4, 3)$; $\vec{v_2} = (7, 2, 1)$; $\vec{v_3} = (4, 1, 6)$ y $\vec{u} = (5, 9, k)$.

   d) $\vec{v_1} = (1, 2, -1)$; $\vec{v_2} = (2, 4, -2)$ y $\vec{u} = (4, 5, 2k)$.

3. a) Sea $V = \mathbb{R}^3$. Dado $\vec{u} = (1, -2, 3)$, escribirlo, si es posible, como combinación lineal de los vectores pertenecientes a los siguientes conjuntos, indicando si la expresión es única:

   $\{(-1, 1, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$; $\{(-1, 1, 1), (0, 0, 1), (2, -2, 1)\}$;
   $\{(1, 2, 0), (0, 0, -1)\}$.

   b) Sea $V = M_2(\mathbb{R})$. Verificar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 18 & 13/6 \\ 8 & -18 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{pmatrix} 5 & 1/2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

   c) Sea $V = \mathbb{R}[X]$. Expresar,si es posible, al polinomio $4X^2 + 4X + 5$ como combinación lineal de los polinomios $2X^2 + 3X + 4$ y $X^2 - 2X + 3$.

4. Determinar cuales de los siguientes subconjuntos son subespacios del correspondiente $\mathbb{R}$-espacio vectorial V:

   a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$; $V = \mathbb{R}^3$.

   b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y \geq 0\}$; $V = \mathbb{R}^2$.

   c) $S = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = 0\}$; $V = M_n(\mathbb{R})$.

   d) $S = \mathbb{R}_n[X] = \{P(X) : P(X) = 0$ ó $gr(P(X)) \leq n\}$; $V = \mathbb{R}[X]$.

   e) $S = \{P(X) \in \mathbb{R}[X] : P(X) = a X^3 + b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$; $V = \mathbb{R}[X]$.

5. a) Verificar que $\overline{\{(0,1,1),(0,2,-1)\}} = \overline{\{(0,1,2),(0,2,3),(0,3,1)\}}$.

   b) Dados los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, hallar los subespacios por ellos generados:

      i) $\{(1,0,-2)\,,\,(-1,0,2)\,,\,(3,0,-1)\,,\,(-1,0,3)\}$,

      ii) $\{(1,2,-1)\,,\,(-1,4,1)\,,\,(0,1,0)\}$,

      iii) $\{(1,1,2)\,,\,(0,0,1)\}$.

   c) Determinar el valor de los escalares p y q para los cuales el vector $(2,p,3,-q)$ pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(2,3,1,-5)$ y $(0,2,-1,3)$.

6. a) Dados los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, hallar los subespacios por ellos generados:

      i) $\{(1,0,-2)\,,\,(-1,0,2)\,,\,(3,0,-1)\,,\,(-1,0,3)\}$,

      ii) $\{(1,2,-1)\,,\,(-1,4,1)\,,\,(0,1,0)\}$,

      iii) $\{(1,1,2)\,,\,(0,0,1)\}$.

   b) Determinar el valor de los escalares p y q para los cuales el vector $(2,p,3,-q)$ pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(2,3,1,-5)$ y $(0,2,-1,3)$.

7. Indicar cuales de los siguientes subconjuntos generan V:

   a) $V=\mathbb{R}^2$.

      i) $\{(2,-5)\,,\,(-1,5/2)\,\}$,

      ii) $\{(1,2)\,,\,(-1,1)\,,\,(2,3)\}$,

      iii) $\{(1,2)\}$.

   b) $V=\overline{\{(1,0,-1)\,,\,(1,1,0)\,,\,(0,1,1)\}}$.

      i) $\{(2,1,-1)\,,\,(1,2,1)\}$,

      ii) $\{(2,1,-1)\,,\,(1,-1,0)\}$.

8. Determinar si los conjuntos de vectores indicados a continuación son linealmente independientes:

   a) $\{(1,-2,1)\,,\,(2,1,-1)\,,\,(7,-4,1)\}$,

   b) $\{(1,1,1)\,,\,(0,1,0)\}$,

   c) $\{(1,-3,7)\,,\,(2,0,-6)\,,\,(3,-1,-1)\,,\,(2,4,-5)\}$,

   d) $\{(1,1)\,,\,(2,-1)\,,\,(0,0)\}$.

9. Determinar en cada caso los valores de k para los cuales el conjunto de vectores que se indica es linealmente independiente:

   a) $\{(k,1,0)\,,\,(1,0,0)\,,\,(k,k,0)\}$,

   b) $\{(1,k,2\,k)\,,\,(1,0,0)\,,\,(1,-1,1)\}$,

   c) $\{(1,k,-3\,k)\,,\,(k,1,-1)\}$,

   d) $\{(1,k)\,,\,(1+k,0)\}$.

10. Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ un conjunto de vectores de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V. Indicar, justificando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) Si $\{\vec{v}_1\,,\,\vec{v}_2\,,\,\vec{v}_3\}$ es linealmente independiente, entonces:

      i) $\{\vec{v}_1\,,\,\vec{v}_2\}$ es linealmente independiente.

      ii) $\{\vec{v}_1\,,\,\vec{v}_2\,,\,\vec{v}_3\,,\,\vec{w}\}$ es linealmente dependiente si, y sólo si $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$.

      iii) $\{\vec{v}_1\,,\,\vec{v}_1 - \vec{v}_2\,,\,\vec{v}_1 - 2.\vec{v}_2 + \vec{v}_3\}$ es linealmente independiente.

      iv) $\{\vec{v}_1\,,\,\vec{v}_1 - \vec{v}_2\,,\,2.\vec{v}_1 - \vec{v}_2\}$ es linealmente independiente.

   b) Si $\{\vec{v}_1\,,\,\vec{v}_2\,,\,\vec{v}_3\}$ es linealmente dependiente y $\vec{v}_i \neq \vec{0}$, $1 \leq i \leq 3$, entonces:

      i) $\{\vec{v}_1\,,\,\vec{v}_2\}$ es linealmente dependiente.

      ii) $\{\vec{v}_1\}$ es linealmente independiente.

      iii) $\{\vec{v}_1\,,\,\vec{v}_2\,,\,\vec{v}_3\,,\,\vec{w}\}$ es linealmente dependiente, para todo $\vec{w} \in V$

11. Hallar una base y la dimensión de los subespacios siguientes:

   a) $\{\overline{(1,0,-2)\,,\,(0,1,0)\,,\,(1,1,-2)}\}$.

   b) $\{\overline{(1,2)\,,\,(2,1)}\}$.

   c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$,

   d) $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = t - 7z\}$,

   e) $S = \{(a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R}) : a_{12} = a_{21}\}$.

12. a) Verificar que los vectores $\vec{u} = (1,1,0,2)$ y $\vec{v} = (1,-1,2,0)$ forman un conjunto linealmente independiente y extenderlo a una base de $\mathbb{R}^4$.

   b) Hallar una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga al vector $(1,2,-1,1)$.

   c) ¿ Existe una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga a los vectores $(1,-1,2)$ y $(2,-2,4)$?

13. Sean $S = \{(x,y,z) : 2x + y = 0\}$ y $T = \overline{\{(1,-1,1)\,,\,(1,3,0)\}}$, subespacios de $\mathbb{R}^3$.

   a) Hallar bases para S y T.

   b) Hallar un subconjunto linealmente independiente de S, que no sea base de S.

   c) Hallar un conjunto de generadores de T, que no sea base de T.

14. Sean T y S subespacios de $\mathbb{R}^4$, $T = \overline{\{(1,2,-1,0),(1,0,0,-1),(2,2,-1,-1)\}}$ y $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = y + z\,,\, t = 0\}$.

   a) Hallar una base de S y extenderla a una base de $\mathbb{R}^4$.

   b) Escribir el subespacio T utilizando ecuaciones.

   c) Hallar $S \cap T$ y su dimensión.