SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Elementos de Informática

Sistemas de Numeración

Un Sistema de Numeración es un conjunto de Símbolos y Reglas que se utilizan para representar números.

$$SN = (S,R)$$

Llamamos Número a la representación de una cantidad cualquiera.

Sistemas de Numeración

Un sistema de Numeración exitoso debe poseer características tales como:

- Ser Práctico: implica contar con reglas simples y precisas.
- Poseer un conjunto finito de símbolos.
- Ser libre de ambigüedades: correspondencia biunívoca entre cantidad y símbolo

Sistemas de Numeración

Que un sistema de numeración disponga de pocos símbolos no es un problema para la representación de cantidades grandes. Se consigue combinando adecuadamente los mismos.

SISTEMAS POSICIONALES

- Los sistemas de Numeración actuales tienen un conjunto finito de símbolos e incluyen el 0, es decir el elemento nulo.
- Los pueblos orientales desarrollaron los "sistemas posicionales", los cuales a partir de un número limitado de símbolos, llamado "raíz" o "**base**" del sistema, permiten representar cualquier número.
- Cada símbolo además del valor que posee aisladamente, tiene un significado o peso según la posición que ocupa dentro del número del que forma parte

Sistemas de Numeración Decimal

- En el sistema de numeración decimal, con un solo dígito pueden representarse diez números (incluyendo el cero): 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.
- Llamamos ***número*** a la representación de una cantidad determinada en un sistema.

POR QUE SU BASE ES 10 ?

- Diremos que su base es diez (10), ya que éste es el número de símbolos distintos que utiliza el sistema.
- Se puede establecer un sistema, de igual naturaleza que el decimal, tomando como base cualquier número mayor que uno.
- Los 10 símbolos combinados permiten simbolizar los números conforme a una convención que atribuye un valor individual y otro posicional a cada símbolo.

Sistemas de Numeración Decimal

- Cada dígito indica cuantas unidades representan según la posición que ocupa (uno, diez, cien, mil,...)
- Ejemplo: 9.402 representa 9 mil unidades + 4 cientos unidades + 0 de diez unidades + 2 unidades.
- El número está formado por los dígitos que representan cantidades según la posición que ocupan.

Sistemas de Numeración Decimal

En un sistema posicional por lo tanto, el valor de cada dígito depende de su posición en el número; a cada posición le corresponde siempre una misma potencia de la base o "peso".

Sistemas de Numeración Decimal

- Las potencias de la base aumentan de derecha a izquierda, comenzando por la potencia cero:

10^3, 10^2, 10^1, 10^0; etc.

- El número representado supone la suma de los productos de cada dígito por el peso correspondiente.

Descomposición Polinómica

- Escribir los siguientes número en su descomposición polinómica

Ejemplo:

42.507 $= 4 \times 10^{4} + 2 \times 10^{3} + 5 \times 10^{2} + 0 \times 10^{1} + 7 \times 10^{0}$
$= 4 \times 10.000 + 2 \times 1.000 + 5 \times 100 + 0 \times 10 + 7$

29=

386=

502.348=

6.200.361=

Descomposición Polinómica: Parte Entera

Entonces, la regla general para la representación de números en el sistema decimal, utilizando la notación posicional es como sigue:

$$N_{(10)} = d_{m-1} 10^{m-1} + d_{m-2} 10^{m-2} + \ldots\ldots + d_2 10^2 + d_1 10^1 + d_0$$

donde m indica el número de dígitos a izquierda del punto decimal.

Descomposición Polinómica: Parte fraccionaria

El mismo criterio se aplica con igual validez a las fracciones decimales, usando potencias negativas de 10, las cuales crecen en valor absoluto, de izquierda a derecha, a partir de la coma decimal.

$$0{,}573 = 5x\ 10^{-1} + 7x\ 10^{-2} + 3x\ 10^{-3}$$

Genéricamente NF_r (número fraccionario) expresado en base r, o sea 10 es:

$$Nf_{(r)} = \sum_{i=-1}^{-n} d_i r^i = d_{-1} r^{-1} + d_{-2} r^{-2} + ... + d_{-n} r^{-n}$$

Descomposición Polinómica: Ejemplo

Escribir los siguientes números en su descomposición polinómica

0,806 $= 8 \text{ X } 10^{-1} + 0 \times 10^{-2} + 6 \times 10^{-3}$

$= 8/10 + 0/100 + 6/1000$

0,023 =

0,7542 =

27,39 =

Descomposición Polinómica

De manera Global: N_r expresado en base r, o sea 10

$$N_{(r)} = \sum_{i=-n}^{m-1} d_i r^i = d_{m-1} r^{m-1} + d_{m-2} r^{m-2} + \ldots. + d_1 r^1 + d_0 + d_{-1} r^{-1} + d_{-2} r^{-2} + \ldots. + d_{-n} r^{-n}$$

BASES ARBITRARIAS

Todo entero positivo $r > 1$, se puede emplear como base de un sistema de numeración posicional que sea semejante al sistema decimal.

Descomposición Polinómica de un número en base 2

Descomposición del número 10010 expresado en base 2

$1\ 0\ 0\ 1\ 0_{(2)} = 1 \times 10^{4} + 0 \times 10^{3} + 0 \times 10^{2} + 1 \times 10^{1} + 0 \times 10^{0}$

Sistema de numeración de base 4

Dado un sistema de numeración cuya base es r=4 podemos expresar:

Símbolos = {0, 1, 2, 3}

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

Número en base 10	Base r=4
0	0
1	1
2	2
3	3
4	10
5	11
6	12
7	13
8	20
9	21

Para tener en cuenta

Cada valor r de la base expresado en esa base es 10, dado que dicho valor surge de la primera combinación de lo dos primeros valores

Ejemplo:

- ✓ El 10 en base 10 es 10
- ✓ El 5 en base 5 es 10
- ✓ El 2 en base 2 es 10
- ✓ El 16 en base 16 es 10.

Sistemas de Numeración usados en Computación

SISTEMA BINARIO O BASE 2

SISTEMA OCTAL O BASE 8

SISTEMAS HEXADECIMAL O BASE 16

Elementos de Informática

Sistema Binario

Las máquinas digitales funcionan mediante dispositivos de dos posiciones, es decir que pueden considerarse dos estados: encendido (1) o apagado (0).

Los valores posicionales de estos dígitos o bits (binary digits) en la representación binaria de un número, son potencias de 2. De lo dicho se desprende que un número escrito en un sistema binario, será una sucesión de ceros y unos.

Sistema Binario

Características del Sistemas Binario:

-Base: 2

-Símbolos: 0, 1

Para formar un número en la base 2, partiremos de considerar cómo lo hacemos en el sistema decimal: una vez que se escribieron todos los símbolos correspondientes a las unidades (del 0 al 9), los mismos se comienzan a combinar de a dos en forma creciente.

Sistema Binario

De manera análoga, en base 2, luego de escribir los símbolos del sistema (0,1) los mismos se deben combinar

de a dos (10 y 11),

luego de a tres (100, 101, 110, 111)

y así sucesivamente.

SISTEMA OCTAL y HEXADECIMAL

Son muy útiles en computación ya que ambos permiten representar rápidamente un número binario con menos dígitos ($8= 2^3$ y $16= 2^4$, bases de estos sistemas son potencias enteras de 2).

En el interior de una computadora sólo existe información digital binaria, formando combinaciones de unos y ceros, compuestos de 8, 16, 32, 64 bits. Estas largas sucesiones de unos y ceros son difíciles de leer y pueden llevar a errores al manipularse por personas.

SISTEMA OCTAL y HEXADECIMAL

Por lo dicho, estos sistemas facilitan:

-La representación de números, dado que se emplea un número menor de símbolos que en binario (3ª y 4ª parte). Redunda en escritura más veloz y con menos errores.

-El pasaje en forma directa a binario y viceversa, por ser una base potencia entera de la otra.

SISTEMA OCTAL

Sus características son:

Sistema Octal:

-Base: 8

-Símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

-Los valores posicionales de un número octal, para calcular su equivalente decimal serán: 8^0, 8^1, 8^2, 8^3, etc.

SISTEMA HEXADECIMAL

-Base: 16

-Símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

-Valores absolutos (en decimal): 0 a 15 respectivamente.

-El valor decimal de un número escrito en hexadecimal, se calcula teniendo en cuenta los valores posicionales: 16^0 , 16^1 , 16^2 , 16^3 , etc.

Cambio de Base

Elementos de Informática

Qué significa?

Cambiar de base significa encontrar el valor equivalente de un número en una base diferente de la que está expresado.

Ejemplos

Decimal	Binario	Octal
0	0	0
1	1	1
2	10	2
3	11	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
8	1000	10
9	1001	11

Cambio de Base

Recordando lo visto para sistemas posicionales, un número decimal puede expresarse como:

$$N_{(10)} = d_{n-1}\, d_{n-2} \ldots\ldots d_2\, d_1\, d_0 = d_{m-1}10^{m-1} + d_{m-2}10^{\,m\text{-}2} + \ldots\ldots + d_2 10^2 + d_1 10^1 + d_0$$

Cambio de Base

Si estuviera en otra base (ej 2), la expresión sería:

$$N_{(2)} = b_{k-1}10^{k-1} + b_{k-2}10^{k-2} + \ldots\ldots + b_{11}10^{11} + b_{10}10^{10} + b_{1}10^{1} + b_{0}$$

Con $b_i = (0,1)$

$$N_{(2)} = \sum_{i=0}^{i=k-1} b_i 10^{\mathrm{i}}$$

Base 2 --> Base 10

Para realizar un cambio de base se recurre a algoritmos que permiten pasar de un sistema a otro mediante operaciones simples.

En general, la equivalencia en base 10 de un número binario podrá expresarse:

$$N_d = b_{k-1}b_{k-2}......b_{11}b_{10}b_1b_0 = (b_{k-1}2^{k-1} + b_{k-2}2^{k-2} + ... + b_3\,2^3 + b_2\,2^2 + b_1 2^1 + b_0)$$

$$N_d = \sum_{i=0}^{i=k-1} b_i 2^{\mathrm{i}}$$

Base 2 --> Base 10
Ejemplo

Expresar el número $111011_{(2)}$ en su equivalente en base 10.

$$111011 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 =$$
$$= 32 + 16 + 8 + 0 + 2 + 1 =$$
$$= 59_{(10)}$$

Ejercicio: Expresar el número $1101001_{(2)}$ en su equivalente en base 10.

Genéricamente - Base X --> Base 10

Genéricamente la equivalencia en base 10 de un número escrito en una base X es:

$$N_d = b_{k-1} b_{k-2} \ldots\ldots b_{11} b_{10} b_1 b_0 = (b_{k-1} X^{k-1} + b_{k-2} X^{k-2} + \ldots\ldots + b_3\ \mathrm{X}^3 + b_2\ \mathrm{X}^2 + b_1 X^1 + b_0)$$

$$N_d = \sum_{i=0}^{i=k-1} b_i X^i$$

Donde X estará expresado en base 10

Genéricamente Base X --> Base 10

De la misma manera para números fraccionarios. Genéricamente la equivalencia en base 10 de un número escrito en una base X es:

$$Nf_{(r)} = \sum_{i=-1}^{-n} d_i r^i = d_{-1} r^{-1} + d_{-2} r^{-2} + \dots + d_{-n} r^{-n}$$

$$N_x = \sum_{i=-1}^{i=-k} b_{-i} X^{-i}$$

Base 2 --> Base 10
Ejemplo

Expresar el número $11{,}011_{(2)}$ en su equivalente en base 10.

$$
\begin{aligned}
11{,}011_{(2)} &= 1 \times 2^{1} + 1 \times 2^{0} + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} \\
&= 2 + 1 + 0 + 0{,}25 + 0{,}125 \\
&= 3{,}\ 375
\end{aligned}
$$

Base 10 --> Base 2

Debemos considerar la parte entera por un lado y la fraccionaria por otro, a saber:

Veamos genéricamente, pasar de r1=10 a r2=2

$$N_{(r1)} = b_{k-1} r_2^{k-1} + b_{k-2} r_2^{k-2} + \dots\dots\dots + b_2 r_2^{2} + b_1 r_2^{1} + b_0$$

Se suponen r_2 y k expresados en símbolos de la base r_1

Base 10 --> Base X

El algoritmo general que permite hallar los dígitos de una nueva base r_2 a la que se quiere pasar, puede deducirse así:

Sacando r_2 factor común:

$$N(r1) = r_2 \underbrace{(b_{k-1} r_2^{k-2} + \ldots\ldots\ldots + b_2 r2 + b_1)}_{N_{1(r1)}} + b_0 = r_2 N_{1(r1)} + b_0$$

Ejemplo

Expresar el número 3462 en base 10 en su equivalente en base 2.

$$
\begin{aligned}
3462 &= d_{n-1} \times 2^{n-1} + d_{n-2} \times 2^{n-2} + \ldots + d_1 \times 2^1 + d_0 \times 2^0 \\
&= d_{n-1} \times 2^{n-1} + d_{n-2} \times 2^{n-2} + \ldots + d_1 \times 2^1 + + d_0 \times 1 \\
&= 2\,(d_{n-1} \times 2^{n-2} + d_{n-2} \times 2^{n-3} + \ldots + d_1 \times 2^0) + d_0
\end{aligned}
$$

$$N \quad = \quad a \quad \times \quad c \quad + \quad r$$

a: divisor, c: cociente, r: resto

Base 10 --> Base X

De acuerdo a la definición de cociente, b_0 será el resto de dividir el número original $N_{(r1)}$ por r_2 en expresado en base r_1.

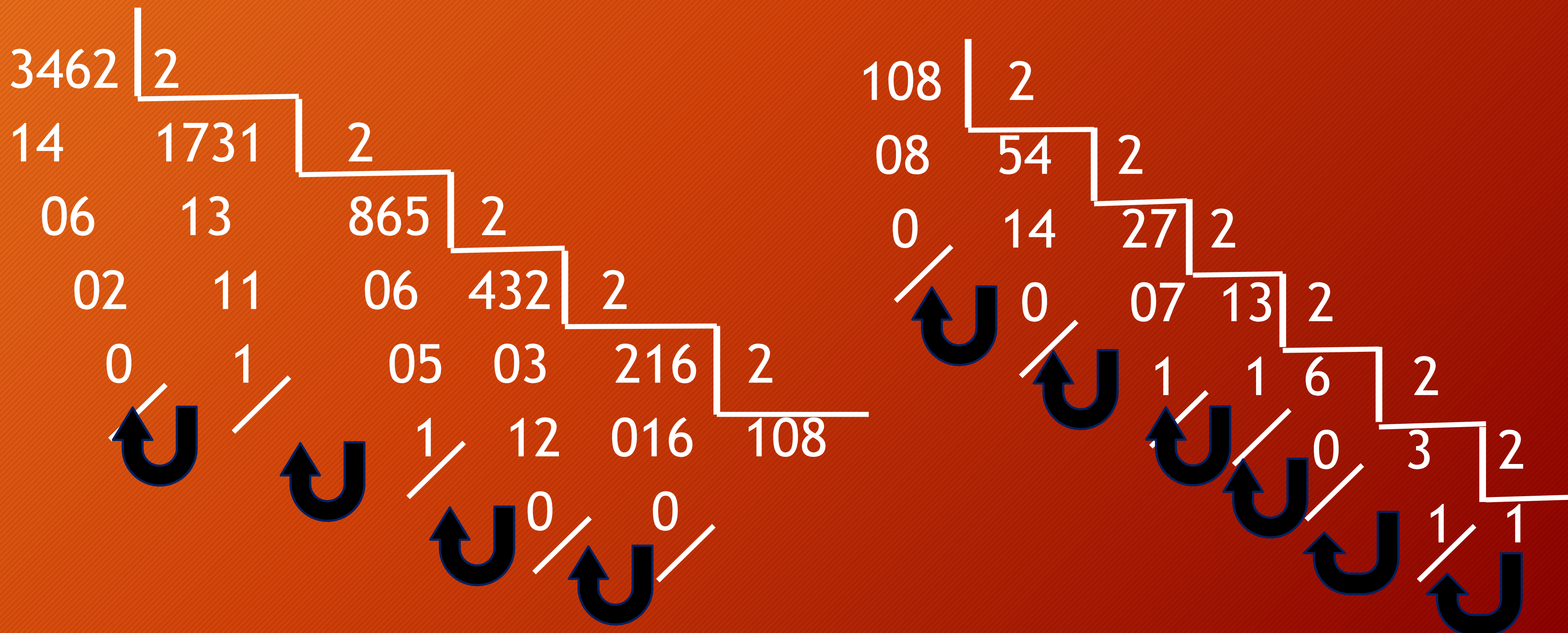
Por lo tanto, la incógnita b_0 es el resto de dividir N_{r1} original por r_2 y $N1_{(r1)}$ es el cociente

$$\begin{array}{l|l} N_{(r1)} & r_2 \\ \hline \quad b_0 & N1_{(r1)} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l|l} N & a \\ \hline r & c \end{array}$$

Ejemplo

Expresar el número 3462 en base 10 en su equivalente en base 2.

$3462_{(10)} = ?_{(2)} = 110110000110$



Base 10 --> Base X

Ahora: $N_1(r1) = (b_{k-1}\, r_2^{\,k-2} + \ldots\ldots\ldots + b_2\, r_2^{\,1} + b_1)$

Sacando nuevamente r_2 factor común

$$N_1(r1) = r2\,\underbrace{(b_{k-1}\, r_2^{\,k-3} + \ldots\ldots\ldots + b_3\, r2 + b_2)}_{N_{2(r1)}} + b_1 = r_2\, N_{2(r1)} + b_1$$

Base 10 --> Base X

Si se divide el polinomio cociente, correspondiente al número $N1_{(r1)}$ por r_2 se obtendrá como resto a b_1 y $N1_{(r1)} = r_2\ N2_{(r1)} + b_1$:

$$\begin{array}{l|l} N1_{(r1)} & r_2 \\ \hline b_1 & N2_{(r1)}. \end{array}$$

Por lo tanto, la incógnita b_1 es el resto de dividir el polinomio $N1_{(r1)}$ por r_2 y $N2_{(r1)}$ es el cociente

Base 10 --> Base X

Se continúa dividiendo sucesivamente por r2 hasta llegar a un cociente nulo:

$Nn_{(r1)} = r_2 \text{ x } 0 + b_{k-1} = b_{k-1}$

De esta manera se obtuvieron los dígitos b_0, b_1,....., b_{k-1} de la base r_2 que se querían encontrar y el número binario obtenido es:

$N_{(b)} = \boxed{b_{k-1} b_{k-2} \ldots b_2 b_1 b_0}$

Obtener la parte fraccionaria de Base 10 --> Base X

$Nf_{(r1)} = b_{-1}\, r_2^{-1} + b_{-2}\, r_2^{-2} + \ldots + b_{-n}\, r_2^{-n}$
según el algoritmo general.

$b_{-1}, b_{-2}, \ldots\ldots, b_{-n}$ = dígitos de la nueva base que se quieren determinar.

Multiplicando ambos miembros por r_2:

$Nf_{(r1)} \times r_2 = b_{-1} + (b_{-2}\, r_2^{-1} + \ldots + b_{-n}\, r_2^{-n+1}) = b_{-1} + Nf2_{(r1)}$

Obtener la parte fraccionaria de Base 10 --> Base X

Siendo b_{-1} un número entero y $Nf2_{(r1)}$ su parte fraccionaria, por contener potencias negativas de r.

A $Nf2_{(r1)}$ se le multiplica x r_2, obteniéndose b_{-2} y una fracción.

El proceso puede continuar, hasta obtener una parte fraccionaria nula o hasta una precisión determinada.

Obtener la parte fraccionaria de Base 10 --> Base X - Ejemplos

Expresar el número $0{,}324_{(10)}$ en su expresión equivalente en base 2

$0{,}324 \times 2 = 0{,}648$

$0{,}648 \times 2 = 1{,}296$

$0{,}296 \times 2 = 0{,}592$

$0{,}592 \times 2 = 1{,}184$

$0{,}184 \times 2 = 0{,}368$

$0{,}368 \times 2 = 0{,}736$

$0{,}324_{(10)} = 0{,}010100_{(2)}$

Expresar el número $0{,}324_{(10)}$ en su expresión equivalente en base 5

$0{,}324 \times 5 = 1{,}62$

$0{,}62 \times 5 = 3{,}1$

$0{,}1 \times 5 = 0{,}5$

$0{,}5 \times 5 = 2{,}5$

$0{,}5 \times 5 = 2{,}5$

$0{,}324_{(10)} = 0{,}13022_{(5)}$

Base X → Base 10
Base 10 → Base X

Los procesos presentados se aplican de la misma manera para pasar de cualquier base a base 10 y viceversa.

Conversión de un numero en base p a otro en base q, con p <> q <> 10

Posibilidad 1:

a. Convertir el Nro de base p a 10
b. Convertir el Nro obtenido en Base 10 a base q

Posibilidad 2:
Si p y q son una potencia entera de la otra.

Posibilidad 2

Para pasar una expresión de un número en base r a una base potencia entera de r, se deben agrupar los dígitos de izquierda a derecha en cantidades iguales a la potencia y luego expresar los dígitos en la nueva base según los pesos que corresponden a cada dígito dentro del grupo

Posibilidad 2

Ejemplo: expresar el número $10110111_{(2)}$ en su equivalente en base 8

$10110111_{(2)} = ?_{(8)}$

Se agrupan los dígitos de tres en tres de izquierda a derecha. Si la cantidad de dígito no es múltiplo de tres se completa con ceros a la izquierda en grupo más a la izquierda.

0	1	0
2^2	2^1	2^0
4	2	1
0 x 4 +	1 x 2 +	0 x 1
	2	

1	1	0
2^2	2^1	2^0
4	2	1
1 x 4 +	1 x 2 +	0 x 1
	6	

1	1	1
2^2	2^1	2^0
4	2	1
1 x 4 +	1 x 2 +	1 x 1
	7	

Posibilidad 2

Ejemplo: expresar el número $1011010111_{(2)}$ en su equivalente en base 16

$1011010111_{(2)} = ?_{(16)}$

Se agrupan los dígitos de cuatro en cuatro de izquierda a derecha. Si la cantidad de dígito no es múltiplo de cuatro se completa con ceros a la izquierda el grupo más a la izquierda.

0	0	1	0
2^3	2^2	2^1	2^0
8	4	2	1
0	0	2	0
2			

1	1	0	1
2^3	2^2	2^1	2^0
8	4	2	1
8	4	0	1
D			

0	1	1	1
2^3	2^2	2^1	2^0
8	4	2	1
0	4	2	1
7			

Posibilidad 2

Ejemplo: expresar el número $A49_{(16)}$ en su equivalente en base 2

$A49_{(16)} = ?_{(2)}$

Se escriben los pesos que forman el número. En la posición de cada pesos necesario para formar el dígito se escribe un 1 y e el resto de los lugares un cero.

A			
2^3	2^2	2^1	2^0
8	0	2	0
1	0	1	0

4			
2^3	2^2	2^1	2^0
0	4	0	0
0	1	0	0

9			
2^3	2^2	2^1	2^0
8	0	0	1
1	0	0	1

Resumen

Cambio de base	Parte Entera	Parte fraccionaria
Base 10 a Base X	Realizar divisiones sucesivas del número por la base a la cual se quiere llevar la expresión y escribir el nuevo número desde el último cociente hacia el primer resto.	Se multiplica sucesivamente la parte decimal por la base destino hasta obtener la precisión deseada o hasta obtener parte decimal igual a cero y se construye la nueva expresión con las partes entera obtenidas de arriba hacia abajo
Base X a Base 10	Suma de productos de cada dígito por potencias de la base original según la posición del dígito (potencia 0, 1, 2, 3, etc)	Suma de divisiones de cada dígito por potencias de la base original según la posición del dígito