MATRICES

Como ya definimos en la página 10, una matriz A de mxn es un arreglo rectangular de mxn números acomodados en m renglones (filas) y n columnas.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Los elementos de las matrices con las que trabajaremos son números reales, y se denotan a_{ij}.
En general, las matrices se denotan con una letra mayúscula: $A, B, C...$ o con un elemento representativo de la misma, entre paréntesis o corchetes, como $\left(a_{ij}\right),\left(b_{ij}\right),\left(c_{ij}\right),...\left[a_{ij}\right],\left[b_{ij}\right],...$

Renglón de una matriz (o vector renglón)

$\left(a_{i1}\, a_{i2} \quad a_{i3} \quad \dots \quad \dots \quad a_{in}\right)$, es el renglón i, o vector renglón i.

Columna de una matriz (o vector columna)

$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ .... \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, es la columna j, o vector columna j.

Cada vector se puede considerar un caso especial de una matriz. El vector renglón $\left(a_{i1}, a_{i2}, \dots\dots, a_{in}\right)$ es una matriz de $1xn$. Generalmente se dice que dicho **vector es de dimensión n,** para denotar que tiene n componentes.
El vector columna anterior, es una matriz de $mx1$**.** En este caso se dice que el **vector columna es de dimensión m.**

Matriz cuadrada

Si A es una matriz de orden mxn con $m=n$ entonces, A es una matriz cuadrada.

Matriz Identidad

Si A es una matriz cuadrada, con números 1 en la diagonal y ceros en las demás posiciones, se llama matriz identidad y se denota con la letra I.
Ejemplos de matrices identidad de orden 2 y 3:

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.
Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -7\\ 0 & 6 & 3\\ 8 & -2 & -5\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 9 & 6\\ 8 & -5 & -3 & 5\\ 2 & -3 & 5 & 7\\ 0 & 9 & -6 & 1\end{pmatrix}$$

Determinar: a) el orden de $A\ y\ B$, b) los valores de $a_{13};a_{23};a_{33};a_{42};b_{24};b_{42};b_{44}$,

Solución.

a) Orden de A: 4x3. Orden de B: 4x4
b) $a_{13}=-7; a_{23}=3; a_{33}=-5; a_{42}=2; b_{24}=5; b_{42}=9; b_{44}=1$

Igualdad de matrices

Dos matrices $A=\left(a_{ij}\right)$ y $B=\left(b_{ij}\right)$ son iguales si tienen el mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales.

Suma de matrices

Sean $A=\left(a_{ij}\right)$ y $B=\left(b_{ij}\right)$ dos matrices mxn. La suma de $A\ y\ B$ es la matriz $A+B$ de orden mxn dada por:

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & & \dots & \dots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & & \dots & \dots & a_{2n}+b_{2n}\\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & & \dots & \dots & a_{3n}+b_{3n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & & \dots & \dots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

Es decir la matriz $A+B$ es la matriz de orden mxn que se obtiene al sumar las componentes correspondientes de $A\ y\ B$.

Obs.: Para poder sumar dos matrices**, ambas deben tener el mismo tamaño.**

Ejemplo 2. Resolver $A+B$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

Solución

$$A+B=\begin{pmatrix}1+2 & 2+1\\ 3+2 & 4+3\\ 1+1 & 5+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 5 & 7\\ 2 & 8\end{pmatrix}$$

Multiplicación de una matriz por un escalar

Si $A=\left(a_{ij}\right)$ es una matriz de orden mxn, y c es un escalar, entonces la matriz $c.A$ de orden mxn, está dada por:

$$cA=\left(c.a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} & \dots & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} & \dots & \dots & ca_{2n} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} & \dots & \dots & ca_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & ca_{m3} & \dots & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

Esto es $c.A=\left(c.a_{ij}\right)$, es la matriz que se obtiene al multiplicar cada componente de A por c.

Obs.: Al trabajar con matrices, cuando se hace referencia a los números, generalmente se los denomina **escalares.** En este curso, los escalares serán siempre números reales.

Ejemplo 3. Dadas las matrices.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad N=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

Hallar:

a) $3.M$ b) $\frac{1}{2}.N$

Solución

a) $3.M=\begin{pmatrix} 3.1 & 3.2 & 3.3 \\ 3.(-5) & 3.(-3) & 3.0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -15 & -9 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{2}.N=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}.2 & \frac{1}{2}.4 & \frac{1}{2}.8 \\ \frac{1}{2}.6 & \frac{1}{2}.10 & \frac{1}{2}.14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

Obs.: Si $A\ y\ B$ son del mismo orden, entonces se puede definir la **resta de matrices** $A-B$, como la suma de $A+(-1).B$.

Ejemplo 4. Teniendo en cuenta las matrices del ejemplo anterior, hallar:

a) $M-N$ b) $M-2N$

Solución

a)

$$M-N=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & -4 & -8 \\ -6 & -10 & -14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-2 & 2-4 & 3-8 \\ -5-6 & -3-10 & 0-14 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ -11 & -13 & -14 \end{pmatrix}$$

b)

$$M-2N=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -5 & -3 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2 & 4 & 8\\ 6 & 10 & 14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2.2 & 2-2.4 & 3-2.8\\ -5-2.6 & -3-2.10 & 0-2.14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -6 & -13\\ -17 & -23 & -28\end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices y de la multiplicación por un escalar
Sean $A, B\ y\ C$ matrices mxn, y los escalares $c\ y\ d$, entonces se cumplen las siguientes propiedades.

1. $A+B=B+A$
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. $c.(A+B)=cA+cB$
4. $(c+d)A=cA+dA$
5. $(c.d)A=c.(dA)$

Producto de matrices

El producto de dos matrices podría estar definido elemento a elemento como la suma de dos matrices pero no es así, el producto que se utiliza en la mayoría de las aplicaciones es otro.
Veamos un ejemplo:
Supongamos que un fabricante produce 4 artículos cuya demanda viene representada por el **vector demanda** $d=\begin{pmatrix}10 & 40 & 30 & 20\end{pmatrix}$ vector fila de 4 componentes o matriz de 1x4.
El precio unitario que el fabricante recibe por los artículos está dado por el **vector precio**

$p=\begin{pmatrix}100\\ 80\\ 50\\ 40\end{pmatrix}$ vector columna de 4 componentes o matriz de tamaño 4 x 1.

Si se satisface la demanda y queremos saber cuál es el ingreso que tendrá el fabricante, debemos hacer el siguiente cálculo:

10. \$100 + 40. \$80 + 30. \$50 + 20. \$40 = \$ 6500

Este resultado se escribe como:

$$\begin{pmatrix}10 & 40 & 30 & 20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\ 80\\ 50\\ 40\end{pmatrix}=6500$$

Es decir que si multiplicamos un vector fila de 4 componentes (matriz de 1x4) con un vector columna de 4 componentes (matriz de 4x1) obtenemos un escalar, que es lo mismo que una matriz de 1 x 1.

Producto escalar representado por el producto de un vector renglón por un vector columna

Sean **a=**$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$, un vector renglón de n elementos y **b=**$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$, un vector columna de n elementos, **el producto escalar, producto punto o producto interno**, da por resultado un número real (un escalar), y está dado por:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + \dots + a_n.b_n$$

Producto de dos matrices

Sea $A = \left(a_{ij}\right)$ una matriz de orden mxn, y sea $B = (b_{ij})$ una matriz de nxp. Entonces el **producto** de $A\ y\ B$, es la matriz $C = \left(c_{ij}\right)$ de tamaño mxp, cuyos elementos i, j (con $i:1,2,\dots,m$, y $j:1,2,\dots,p$), son:

$c_{ij} =$ (renglón i de $A = \left(a_{ij}\right)$) . (columna j de $B = (b_{ij})$)

Es decir, el elemento ij de $A.B$ es el producto escalar del renglón i de la matriz A y la columna j de B. Esto es:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j} + \dots + a_{in}.b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$$

Obs.: Dos matrices se pueden multiplicar **sólo si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz**. En nuestro caso: $A_{mxn}.B_{nxp} = C_{mxp}$

Es decir que el vector renglón i de la matriz A debe tener la misma cantidad de componentes que el vector columna j de B.

$$renglon\ i\ de\ A \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & b_{np} \\ & & & \uparrow & \end{pmatrix}$$

$$columna\ j\ de\ B$$

Ejemplo 5.

Dadas $A=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Hallar: a) $A.B$, b) $B.A$

Solución

a) Verificamos si es posible realizar el producto. Como A es una matriz de orden $2x3$, y B es de orden $3x2$, se puede realizar el producto y la matriz resultado será de orden $2x2$.

$$A.B=C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \text{, donde:}$$

$c_{11}=$producto escalar entre la fila 1 de A y la columna 1 de B

$$c_{11}=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}=7.1+1.0+4.(-2)=-1$$

$c_{12}=$producto escalar entre la fila 1 de A y la columna 2 de B

$$c_{12}=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}=7.6+1.4+4.3=58$$

$c_{21}=$producto escalar entre la fila 2 de A y la columna 1 de B

$$c_{21}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}=2.1+(-3).0+5.(-2)=-8$$

$c_{22}=$producto escalar entre la fila 2 de A y la columna 2 de B

$$c_{22}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}=2.6+(-3).4+5.3=15$$

La matriz resultante es:

$$A.B=C=\begin{pmatrix} -1 & 58 \\ -8 & 15 \end{pmatrix}$$

b) Verificamos que es posible realizar el producto de $B.A$, ya que el número de columnas de B es igual al número de filas de A. La matriz B es de orden $3x2$ y la matriz A es una matriz de orden $2x3$, y la matriz resultado será de orden $3x3$.
La matriz resultante es:

$$B.A = \begin{pmatrix} 19 & -17 & 34 \\ 8 & -12 & 20 \\ -8 & -11 & 7 \end{pmatrix}$$

Estos dos ejemplos nos permite verificar que en general los productos $A.B$ y $B.A$ no son iguales. Es decir, el producto de dos matrices no es conmutativo.

Ejemplo 6. Dadas A y B, resolver $A.B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 4}$$

Solución

Verificamos que es posible realizar el producto de $A_{2x3}.B_{3x4} = C_{2x4}$

Vamos a realizar el producto de $A.B$, utilizando una **regla práctica para resolver el producto de matrices**.

Para hacer dicho producto dispondremos las matrices de la siguiente forma:

	B
A	$A.B$

Cada elemento de la matriz producto está ubicado en la intersección de la fila de la primer matriz y la columna de la segunda matriz, y su resultado se obtiene al hacer el producto escalar entre la fila y columna respectiva.

	$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 23 & -5 & 2 & 5 \\ 15 & 6 & 26 & 39 \end{pmatrix}$

Podemos verificar que el producto de $B_{3x4}.A_{2x3}$ no está definido, ya que el número de columnas de la primer matriz no es igual al número de filas de la segunda.

Propiedades del producto de matrices

Sean $A, B\ y\ C$, matrices para los que las sumas y los productos indicados estén definidos, y sea c un escalar, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $A.(B.C) = (A.B).C$
2. $A.(B+C) = A.B + A.C$
3. $(A+B).C = A.C + B.C$
4. $c.(A.B) = (c.A).B = A.(c.B)$
5. $I.A = A = A.I \qquad (I\text{: matriz identidad})$

Las siguientes observaciones, muestran las diferencias que existen entre el álgebra de matrices y el álgebra de números reales.

Observaciones:

1. En general , $A.B \neq B.A$
2. Las leyes de la cancelación **no** se aplican en la multiplicación de matrices. Es decir, si $A.B = A.C$, en general **no** es cierto que $B = C$.
3. Si un producto $A.B$ es la matriz cero, en general, no se puede concluir que $A = 0 \text{ o } B = 0$

Ejemplo 7. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Comprobar que $A.B = A.C$, y sin embargo $B \neq C$.

Solución

Resolviendo los productos $A.B\ y\ A.C$, resulta que:

$A.B = A.C = \begin{pmatrix} -21 & -21 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$ y esto no implica que la matriz B sea igual a la matriz C .

Ejemplo 8. Dadas las siguientes matrices, verificar que, si bien $A.B = 0$, no necesariamente es cierto que $A = 0$ $ó$ $B = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

Resolviendo el producto, se llega a que:

$$A.B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con lo cual concluimos que si bien el producto de dos matrices es la matriz cero, no necesariamente una de las dos, debe ser la matriz cero.

La transpuesta de una matriz

Dada una matriz A de orden mxn, la transpuesta de A es la matriz nxm, que se denota con A^T cuyas columnas se forman a partir de las filas correspondientes de A.

Ejemplo 9. Dadas las matrices A, B , $C\ y\ D$:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallar $A^T, B^T, C^T\ y\ D^T$.

Solución

$$A^T=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \ , B^T=\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \ , \ C^T=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \\ 1 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \ , \ D^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Obs.: La matriz cuadrada D, es igual a su transpuesta. Esta matriz se denomina **simétrica.** Es decir, una matriz cuadrada A es simétrica si $A = A^T$.

Propiedades de las Transpuestas

Sean $A\ y\ B$, matrices cuyos tamaños son adecuados para las siguientes sumas y productos, y c un escalar, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\left(A^T\right)^T = A$
2. $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$
3. $\left(c.A\right)^T = c.\left(A^T\right)$
4. $\left(A.B\right)^T = B^T.A^T$

Obs.: Las propiedades 2 y 4, pueden generalizarse para abarcar sumas o productos de cualquier número finito de matrices. Por ejemplo, tomando la suma y el producto de tres matrices, resulta:

$$A+B+C)^T = A^T + B^T + C^T$$

$$\left(A.B.C\right)^T = C^T.B^T.A^T$$

Ejemplo 10. Dada la matriz A, hallar $A.A^T$, y verificar que dicho producto es una matriz simétrica.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución

$$A.A^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & -6 & -5 \\ -6 & 4 & 2 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

La matriz obtenida $A.A^T$, es simétrica.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Una aplicación práctica de la multiplicación de matrices es la de representar un sistema de ecuaciones lineales. Es decir, por ejemplo, el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Puede escribirse como la ecuación matricial $A.X = B$, donde A es la **matriz de los coeficientes** del sistema. Es decir, se puede escribir:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{B}$$

Ejemplo 11. Escribir el sistema dado en la forma $A.X = B$

$$\begin{cases} 4x - y + z - t = -7 \\ 3x + y - 5z + 6t = 8 \\ 2x - y + z = 9 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -5 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Inversa de una matriz

Para trabajar con ecuaciones matriciales, se introduce el concepto de inversa de una matriz. Hay una analogía entre el inverso multiplicativo de un número real distinto de cero y la inversa de una matriz.

Recordemos que el inverso multiplicativo de un número, como el 3, es $1/3$ o 3^{-1}. Este inverso satisface la ecuación:

$$3^{-1}.3 = 1 \quad y \quad 3.3^{-1} = 1$$

Definición -Inversa de una matriz

Una matriz A_{nxn} es invertible (o no singular) si hay una matriz B_{nxn} tal que:

$$A.B = I \quad y \quad B.A = I$$

Donde I es la matriz identidad de orden n.

La matriz B se denomina inversa de A y la simbolizamos A^{-1}. Escribimos:

$$A.A^{-1} = I \quad y \quad A^{-1}.A = I$$

Obs:

1. Sólo las matrices cuadradas pueden tener inversa.
2. Una matriz que no tiene inversa se denomina no invertible (o singular).
3. Si A_{nxn} es una matriz invertible, entonces su inversa es única.

Ejemplo 12. Demostrar que B es la inversa de A.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Solución

Para demostrar que B es la inversa de A, debemos probar que $A.B=B.A=I$.

Haciendo ambos productos se llega a que:

$$A.B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B.A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ejemplo 13. Hallar la inversa de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

Solución

Para encontrar la inversa de A, se resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Efectuando el producto del primer miembro, resulta:

$$\begin{pmatrix}x_{11}+3x_{21} & x_{12}+3x_{22}\\ 2x_{11}-x_{21} & 2x_{12}-x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Al igualar los elementos correspondientes, se obtienen dos sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases}x_{11}+3x_{21}=1\\ 2x_{11}-x_{21}=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x_{12}+3x_{22}=0\\ 2x_{12}-x_{22}=1\end{cases}$$

Resolviendo el primer sistema, se obtienen:

$$x_{11}=1/7 \quad , \quad x_{21}=2/7$$

Análogamente, en el segundo sistema, se obtienen:

$$x_{12}=3/7 \quad , \quad x_{22}=-1/7$$

Por lo tanto la inversa de A, es

$$X=A^{-1}=\begin{pmatrix}1/7 & 3/7\\ 2/7 & -1/7\end{pmatrix}$$

Se puede comprobar este resultado, resolviendo:

$$A.A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/7 & 3/7\\ 2/7 & -1/7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Encontrar la inversa de una matriz a través de un sistema de ecuaciones, se torna muy engorroso cuando la matriz es de orden superior a dos. Vamos a ver un algoritmo que resulta mucho más práctico generalizando el método recién utilizado.

Observemos, los dos sistemas de ecuaciones lineales que obtuvimos en el ejercicio anterior:

$$\begin{cases} x_{11}+3x_{21}=1 \\ 2x_{11}-x_{21}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{12}+3x_{22}=0 \\ 2x_{12}-x_{22}=1 \end{cases}$$

tienen la misma matriz de coeficientes. En lugar de resolver por separado los dos sistemas representados por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$ respectivamente,

es posible resolverlos simultáneamente. Para eso, unimos la matriz identidad con la matriz de coeficientes,

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Al aplicar el algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan , se obtiene:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2+(-2)R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2/(-7)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -1/7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1+(-3)R_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 2/7 & -1/7 \end{array}\right)$$

O sea, al aplicar la eliminación de Gauss-Jordan a la matriz $\left(A|I\right)$, se obtuvo la matriz $\left(I|A^{-1}\right)$

$$\left(\underbrace{\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{array}}_{A}\middle|\underbrace{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}}_{I}\right) \xrightarrow{Gauss-Jordan} \left(\underbrace{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}}_{I}\middle|\underbrace{\begin{array}{cc} 1/7 & 3/7 \\ 2/7 & -1/7 \end{array}}_{A^{-1}}\right)$$

Este algoritmo nos permite determinar la inversa de cualquier matriz cuadrada.
Es más, nos permite determinar también si una matriz cuadrada es o no invertible, ya que si no puede reducirse por renglones a la matriz identidad, entonces no tiene inversa.

Algoritmo para determinar la inversa de una matriz por el método de Eliminación de Gauss-Jordan

Sea A una matriz cuadrada de orden nxn.

1. Escribir la matriz aumentada $\left(A|I\right)$. La matriz identidad I, debe ser del mismo orden que A.

2. Llevar la matriz $\left(A|I\right)$ a su forma escalonada reducida por renglones. El resultado es la matriz $\left(I|A^{-1}\right)$. Si no se puede llevar a cabo lo anterior, entonces A no es invertible.

3. Comprobar el proceso con la multiplicación para verificar que $A.A^{-1}=I=A^{-1}.A$

Ejemplo 14. Determinar, si es que existe, la inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & -2 & 1\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$

Solución

1. Escribimos la matriz $\left(A|I\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

2. La llevamos a su forma reducida escalonada por renglones, aplicando Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3+(-5)R_1]{R_2\to R_2+(-1)R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -12 & 12 & -5 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2/(-4)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1/4 & -1/4 & 0\\ 0 & -12 & 12 & -5 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+12.R_2}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1/4 & -1/4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)$$

Encontramos una matriz equivalente por renglones a A, con una fila de ceros, por tanto podemos concluir que A es una matriz singular (o no invertible). O sea, no existe en este caso A^{-1}.

Una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si su forma escalonada reducida por renglones es la matriz identidad.

Ejemplo 15.

Determinar, si es que existe, la inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

Solución.

1. Escribimos la matriz $\left(A|I\right)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

2. La llevamos a su forma escalonada reducida por renglones, aplicando Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3+(-1)R_1]{R_2 \to R_2+(-1)R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3+2.R_2]{R_1 \to R_1+(-1).R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3/(-3)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2/3 & -1/3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2+2.R_3]{R_1 \to R_1+(-3).R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

Como la forma escalonada reducida por renglones de A es I_3, entonces:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1/3 & -2/3 \\ 1 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Propiedades de las matrices invertibles

1. Si A es una matriz invertible, entonces A^{-1} también es invertible y se verifica que:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

2. Si A y B son matrices invertibles de nxn, entonces también lo es $A.B$, y la inversa de $A.B$ es el producto de las inversas de A y B en el orden opuesto. Es decir:

$$\left(A.B\right)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

3. Si A es una matriz invertible, también lo es A^T, y la inversa de A^T es la transpuesta de A^{-1}. Es decir:

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

Sistemas de ecuaciones lineales con soluciones únicas

Si A es una matriz invertible de nxn, entonces el sistema de ecuaciones representado por $A.X = B$, tiene solución única dada por:

$$X = A^{-1}.B$$

Demostración: Como A es invertible, entonces son válidos los pasos siguientes.

$$A.X = B$$

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$$

$$I.X = A^{-1}.B$$

$$X = A^{-1}.B$$

Ejemplo 16
Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales, utilizando la inversa de la matriz de coeficientes.

$$\begin{cases} x+y+z=-3 \\ x+2y-z=2 \\ x-y+2z=6 \end{cases}$$

Solución

La matriz de coeficiente de este sistema es la del ejemplo 15, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Como ya vimos, tiene inversa y $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1/3 & -2/3 \\ 1 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

Por tanto, el sistema tiene una única solución dada por:

$$X = A^{-1}.B$$

$$X = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1/3 & -2/3 \\ 1 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 11 \\ -23/3 \\ -19/3 \end{pmatrix}$$