## *FUNCIÓN LINEAL*

Ejemplos de funciones lineales:

$y = 2x$ $\qquad$ $y = -3x + 2$

$y = -3x$ $\qquad$ $y = x - 4$

$y = 0{,}5x + 2$ $\qquad$ $y = 2$

Toda función de la forma:

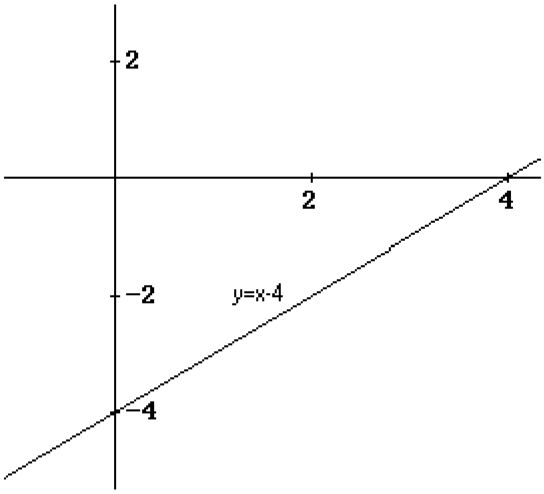
$$y = m\,x + b \quad \text{con} \quad m \in R,\ b \in R,$$

recibe la denominación de ***función lineal***.

En esta fórmula $x$ representa la ***variable independiente*** e $y$ la ***variable dependiente***. Denominaremos a $m$ ***pendiente*** y a $b$ ***ordenada al origen***.

Representemos en el plano coordenado las siguientes funciones:

Ej.1: $y = x - 4$

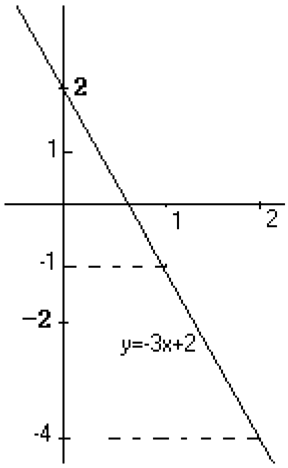



Cuando la abscisa aumenta 1, la ordenada aumenta 1; si la abscisa aumenta 2, la ordenada aumenta 2; etc.

Observemos que los cocientes entre el aumento de la ordenada y el de la abscisa son constantes e iguales al valor de la pendiente:

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = .... = 1 = m$$

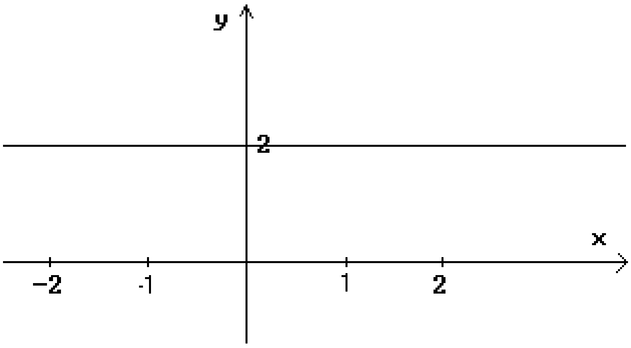
Ej. 2: $y = -3x + 2$




Cuando la abscisa aumenta 1, la ordenada disminuye 3; si la abscisa aumenta 2, la ordenada disminuye 6; etc.

Observemos que: $\frac{-3}{1} = \frac{-6}{2} = \frac{-9}{3} = .... = -3 = m$

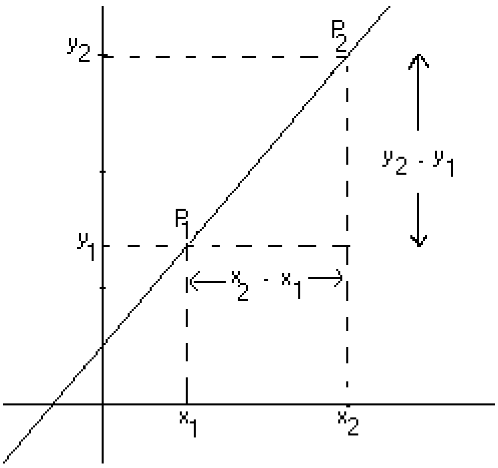
Ej. 3: $y = 2$




Cuando la abscisa aumenta 1, la ordenada no aumenta ni disminuye. Lo mismo ocurre cuando la abscisa aumenta 2, 3,... etc.

En este ejemplo resulta:
$\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = 0 = m$

***<u>Cálculo de la pendiente</u>***
Si se conocen las coordenadas de dos puntos de una recta, se puede calcular la pendiente de la misma.
Supongamos que $(x_1, y_1)\ y\ (x_2, y_2)$ son las coordenadas de dos puntos diferentes $P_1\ y\ P_2$, respectivamente, sobre una recta que no es vertical:




Cuando se hace un desplazamiento de $P_1\ a\ P_2$, $y$ cambia de $y_1\ a\ y_2$. El cambio en $y$ es $y_2 - y_1$. En forma similar, el cambio en $x$, es $x_2 - x_1$. La razón de estos cambios es la pendiente.
La pendiente $m$ de la recta $r$, está dada por la expresión:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x}} \quad \text{con } x_1 \neq x_2$$

En esta definición se excluyen las rectas paralelas al eje y, es decir donde $x_2 = x_1$, ya que de esta manera se estaría dividiendo por cero en la expresión del cálculo de la pendiente. En el caso que $x_2 = x_1$, se dice que la pendiente no está definida .
Notación: Al cambio en y: $y_2 - y_1$ se lo denomina "delta y": $\Delta y$ . Al cambio en x: $x_2 - x_1$, se lo denomina "delta x": $\Delta x$ . O sea que la pendiente se puede expresar así: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Obs.: No importa el orden en que se restan las coordenadas x e y para hallar la pendiente de la recta que pasa por dos puntos, es decir:

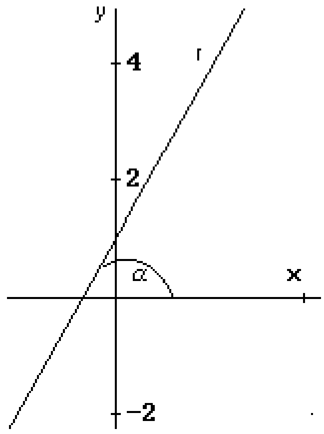
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{-(x_2 - x_1)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Ejemplos:
Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos:
a) $(1,4)\ y\ (2,7)$
b) (-3,2) y ( 1,2)
c) ( 0,2) y ( 1, -2)

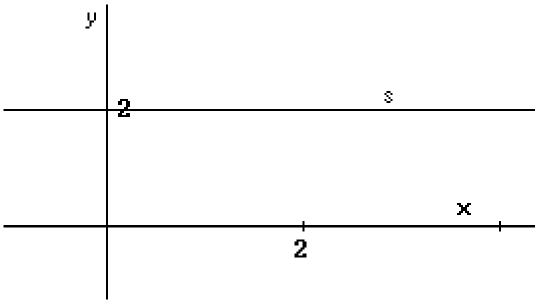
Respuestas:

a) $m=\dfrac{7-4}{2-1}=3$ ó también: $m=\dfrac{4-7}{1-2}=\dfrac{-3}{-1}=3$

La pendiente de r es m=3

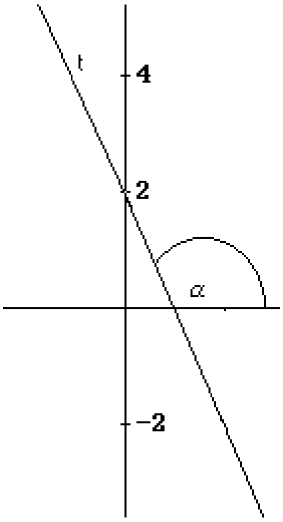



b) $m=\dfrac{2-2}{1-(-3)}=\dfrac{0}{4}=0$




La pendiente de la recta s es m=0

c) $m=\dfrac{-2-2}{1-0}=-4$




La pendiente de la recta t es m=-4

<u>Def</u>.: La pendiente de una recta es la tangente trigonométrica de su ángulo de inclinación $\alpha$, lo que puede expresarse como:

$$\boxed{m=tg\alpha}$$

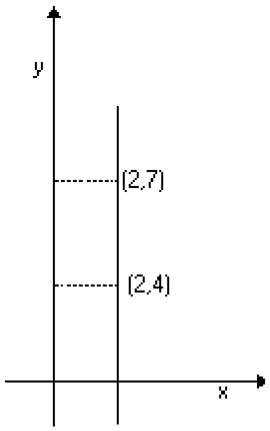
El ángulo de inclinación $\alpha$, es el ángulo que forma la recta con el eje x. El mismo se mide en sentido contrario a las agujas del reloj a partir de la dirección positiva del eje x.
De acuerdo a esta definición de pendiente podemos hallar los ángulos de inclinación de las rectas de los ejemplos anteriores, con la ayuda de la calculadora:

a) m=3 $\Leftrightarrow tg\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 71^\circ,5650 \Leftrightarrow \alpha = 71^\circ 33'$

b) m=0 $\Leftrightarrow tg\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0^\circ$

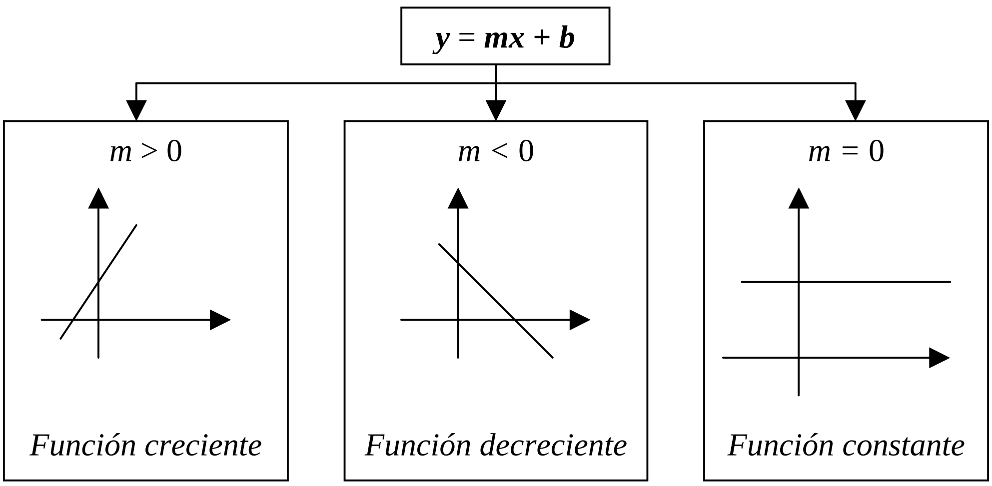
c) m=-4 $\Leftrightarrow tg\alpha = -4$. En este caso el resultado que nos da la calculadora es $\alpha = -75^\circ,9637$ que es el ángulo que forma la recta con el eje de las x pero medido en el mismo sentido que las agujas del reloj. Por lo tanto $\alpha = 180^\circ - 75^\circ,9637 = 104^\circ,0362 = 104^\circ 02'$

En general, si la recta forma con el eje x (sentido hacia x positivo), un ángulo $\alpha$, tal que:
$0^\circ < \alpha < 90^\circ$, la pendiente es positiva.
Si el ángulo $\alpha$, es tal que: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, la pendiente es negativa.
Si la recta resulta paralela al eje x, el ángulo que forma es de $0^\circ$, y la pendiente será igual a 0.
Si el ángulo que forma la recta con el eje x es de $90^\circ$, la pendiente no está definida.
Por ejemplo si se quiere calcular la pendiente de una recta que pase por los puntos (2,4) y (2,7), resulta que como las abscisas son iguales, el cálculo de la pendiente se reduce a: $m = \dfrac{7-4}{2-2}$, (operación que no está definida en R).



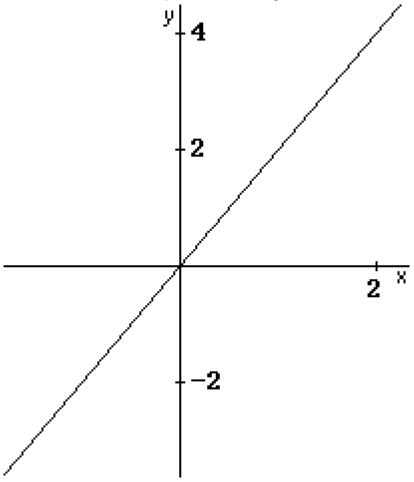

m no está definida

En el siguiente cuadro se clasifican las funciones lineales según el valor de la pendiente:



Si la ordenada al origen es 0, resulta $y = mx$ . Este caso particular se llama ***función de proporcionalidad directa*** y su gráfica es una recta que pasa por el origen.

Observemos que en $y = 2x$ resulta




| | |
|---|---|
| x | y |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 6 |
| 1/2 | 1 |

Es decir, al doble de *x* resulta el doble de *y*
al triple de *x* resulta el triple de *y*
a la mitad de *x* resulta la mitad de *y*
.....

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = ... = 2 = m$$

La pendiente es la constante de proporcionalidad.

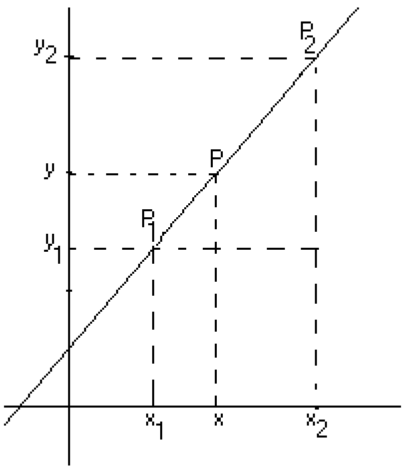
***Ecuaciones de la recta***

Para hallar la ecuación de una recta se deben tener como datos: dos puntos de dicha recta o bien la pendiente de la recta y un punto de la misma.

Para hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos $(x_1, y_1)\ y\ (x_2, y_2)$, procedemos de la siguiente forma, primero hallamos la pendiente m teniendo como datos los números dados:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \text{ (a)}$$

Luego marcamos en la recta otro punto cualquiera (x,y):




Podemos calcular la pendiente de dicha recta utilizando por ejemplo los puntos P y $P_1$, de esta manera, resulta:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \text{ (b)}$$

Igualando las expresiones (a) y (b) resulta:

$$\boxed{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Leftrightarrow y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1) + y_1} \quad (2)$$

***ecuación de la recta teniendo como datos dos puntos:***
$(x_1, y_1)\ y\ (x_2, y_2)$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos:
(-1,-2) y (2,7)

$$y=\frac{7-(-2)}{2-(-1)}.(x-2)+7=3.(x-2)+7=3x+1 \Rightarrow y=3x+1$$

También podrían utilizar otro método para hallar la ecuación de la recta cuando les dan dos puntos:

Sabiendo que $y=mx+b$, y que la recta pasa por los puntos: (-1,-2) y (2,7), podemos escribir:

$$-2=m.(-1)+b$$
$$7=m.2+b$$

Resolviendo este sistema lineal, resulta que: $m=3$ y $b=1$. Por lo tanto la ecuación de la recta es:

$$y=3x+1$$

En particular, si necesitamos hallar la ecuación de una recta y tenemos como datos: su pendiente y un punto por donde pasa la misma, podemos utilizar la fórmula anterior (2) reemplazando la expresión $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ por el valor dado $m$.

Con lo cual resulta: $\boxed{y=m(x-x_1)+y_1}$ (3) ***ecuación de la recta, teniendo como datos un punto de la misma y su pendiente.***

Ejemplo: hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente $m=-4$ y pasa por el punto $(1,-5)$.

$$y=(-4).(x-1)+(-5)=-4x+4-5=-4x-1 \Rightarrow y=-4x-1$$

También se puede resolver, reemplazando en la ecuación general de la recta:

$y=mx+b$, el valor de $m=-4$ y los valores de x e y por las coordenadas del punto (1,-5):

$$-5=(-4).1+b \Rightarrow b=-1 \Rightarrow y=-4x-1$$

En el caso particular en que el punto $(x_1,y_1)$ es el de intersección con el eje $y$, que se acostumbra llamar $(0,b)$, la ecuación (3) se puede escribir:

$\boxed{y=mx+b}$ $(4)$ ***Ecuación de la recta cuando se conoce su punto de intersección con el eje*** $y$***, y su pendiente*** $m$***.***

Ejemplo: hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es $m=5$, y corta al eje $y$ en –2.
Reemplazando en (4) resulta: $y=5x-2$.

***Ecuación segmentaria de la recta***

Este es un caso particular de lo visto anteriormente, dado que la ecuación segmentaria de la recta, se basa en una expresión que se construye a partir de los puntos de intersección de la recta con los dos ejes cartesianos. Dichos puntos de intersección tienen la forma: P(0,b) y Q(a,0)
Entonces, teniendo en cuenta la ecuación (2):

$$\boxed{y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.(x-x_1)+y_1}$$ y reemplazando por los puntos dados, resulta:

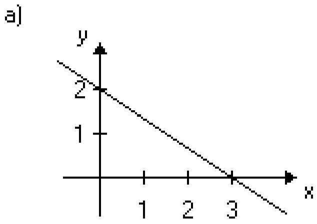
$$y=\frac{0-b}{a-0}.(x-a)$$

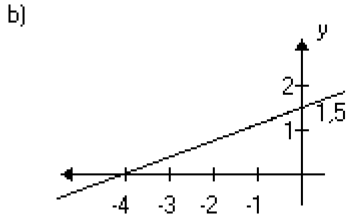
$$y=\frac{-b}{a}.(x-a)\Rightarrow \frac{y}{b}=\frac{-1}{a}.(x-a)=-\frac{x}{a}+1$$

Concluimos que la ecuación segmentaria de la recta tiene la forma:

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad con\ a\neq 0\ y\ b\neq 0}$$

La ventaja de esta ecuación es que nos da una información directa de la gráfica de la recta asociada, como se puede apreciar en los siguientes ejemplos con sólo analizar las intersecciones con los ejes:




En el inciso a, tenemos, según la ecuación segmentaria:

$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1 \Rightarrow$ despejando y, resulta: $y=\left(1-\frac{x}{3}\right).2=$ $2-\frac{2}{3}x$

Si utilizamos la ecuación $\boxed{y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.\left(x-x_1\right)+y_1}$ llegaremos al mismo resultado:

$$y=\left(\frac{2-0}{0-3}\right).(x-0)+2\Leftrightarrow \ y=-\frac{2}{3}x+2$$

En el inciso b):

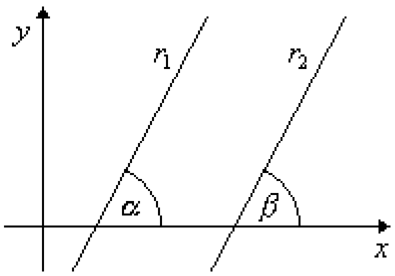
$\frac{x}{-4}+\frac{y}{1,5}=1\Rightarrow$ despejando y, resulta: $y=\left(1+\frac{x}{4}\right).1,5=$ $1,5+0,375x$

Si utilizamos la ecuación $\boxed{y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.\left(x-x_1\right)+y_1}$ llegaremos al mismo resultado:

$$y=\left(\frac{-1,5}{-4}\right).(x-0)+1,5\Leftrightarrow \ y=0,375x+1,5$$

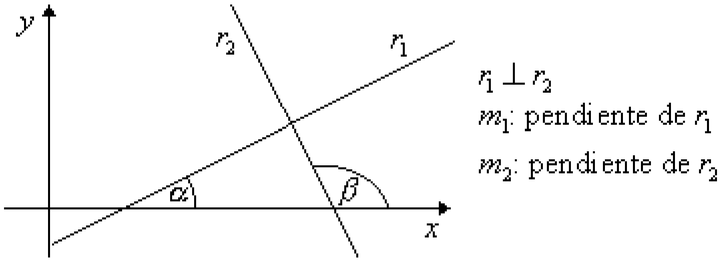
***RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES***

Dos rectas con pendientes $m_1$ y $m_2$ , son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente: $m_1=m_2$



Si $r_1$ y $r_2$ son paralelas, entonces sus ángulos de inclinación α y β son iguales ya que son ángulos correspondientes entre paralelas cortadas por la transversal: eje x. Por lo tanto:
Pendiente de $r_1 = tg\alpha = tg\beta =$ pendiente de $r_2$.

| |
|---|
| Dos rectas con pendientes $m_1$ y $m_2$, son perpendiculares si y solo si se verifica: $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$ |




Si $r_1$ y $r_2$ son perpendiculares, se verifica $\beta = \alpha + 90^\circ$ (ya que en todo triángulo cada ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a el). Por lo tanto:

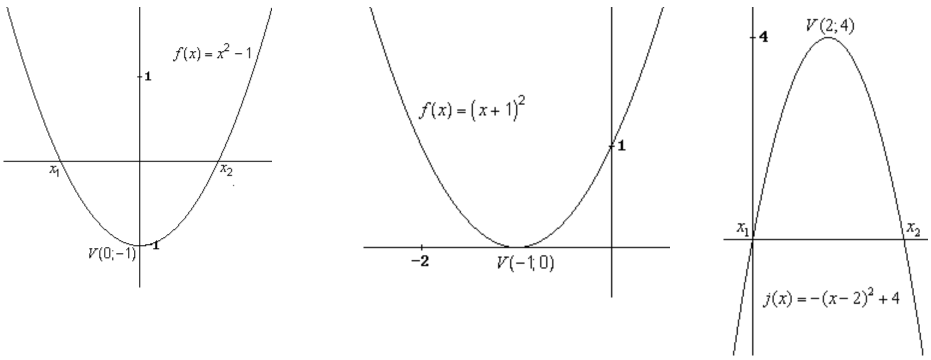
$$tg\beta = tg\left(\alpha + 90^\circ\right) = -\cot g\alpha = -\frac{1}{tg\alpha}$$

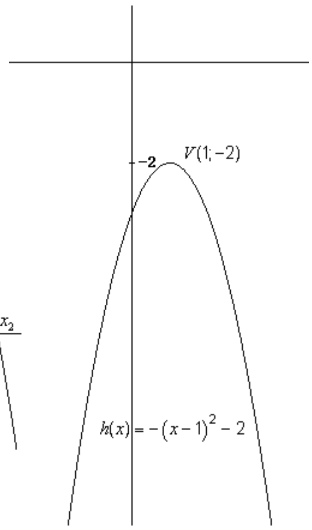
Como $tg\beta = m_2$ y $tg\alpha = m_1$, podemos concluir que $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$

## *FUNCIONES CUADRATICAS*

| |
|---|
| Una función cuadrática o función polinómica de segundo grado, responde a la forma general: $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$. |

La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola.




La forma de la parábola es, cóncava hacia abajo $(\cap)$ si $a < 0$, y es cóncava hacia arriba $(\cup)$ si $a > 0$.
Los elementos característicos de una parábola son: los ceros de la función, el vértice, el eje de simetría y la ordenada al origen.

Los ceros de la función, son los valores de $x$ para los cuales $f(x)=0$.

¿Qué significa analíticamente que $f(x)=0$?, es equivalente a hallar las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$.

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases}$$

Cómo se llega a esta fórmula?.

Dada la ecuación de segundo grado: $ax^2+bx+c=0 \;\; ; \;\; a\neq 0$

Como $a\neq 0$, podemos escribir:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

Y completando cuadrados resulta:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow \boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Al hallar los valores de $x_1$ y $x_2$, pueden presentarse distintos casos:

- $x_1\neq x_2$ (números reales), la parábola corta al eje $x$ en dos puntos.
- $x_1=x_2$ (real), la parábola corta al eje $x$ en un sólo punto.
- $x_1\neq x_2$ (números complejos), la parábola no corta al eje $x$.

El vértice de la parábola es el punto $V(x_V;y_V)$. Este punto es el máximo absoluto de la función, si la parábola es cóncava hacía abajo, o es un mínimo absoluto si la parábola es cóncava hacia arriba. Analíticamente las coordenadas del vértice son:

$$x_V=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad\qquad y_V=f(x_V)$$

También puede calcularse: $x_V=\dfrac{-b}{2a}$

Esta última expresión se deduce de la anterior ya que si:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

entonces.

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{2}=\frac{\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}+(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a}}{2}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a}=\frac{-2b}{4a}=\frac{-b}{2a}$$

El eje de simetría de la parábola, es la recta vertical que pasa por el vértice, y su ecuación es: $x = x_V$
La ordenada al origen, es el valor de $c$, que se obtiene al calcular $f(0)$.

Ejemplo:
Graficar la función $f(x) = -x^2 - x + 2$, teniendo en cuenta los ceros, el vértice, el eje de simetría y la ordenada al origen.

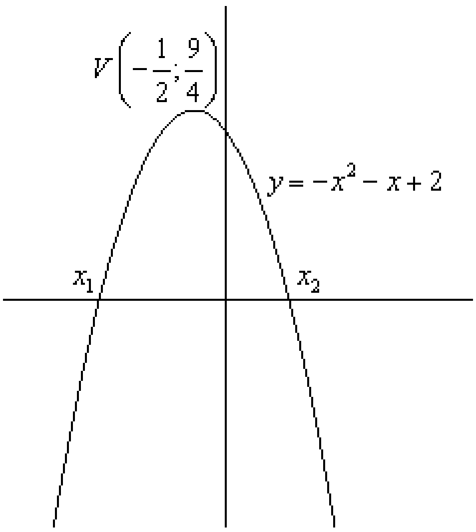
Respuesta:
Primero vamos a hallar los ceros de la función, es decir las raíces de la ecuación:

$$x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-1)2}}{2(-1)} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Estos son los puntos donde la parábola corta al eje $x$. Las coordenadas del vértice de la parábola son:

$$x_V = \frac{1 + (-2)}{2} = -\frac{1}{2} \qquad y_V = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{9}{4}$$

$V(-1/2,\ 9/4)$; Eje de simetría: $x = -1/2$; Ordenada al origen: $y = 2$




También para trazar la gráfica de una función cuadrática se puede llevar a la forma general: $f(x) = a(x-k)^2 + n$, donde $k$ y $n$ son las coordenadas del vértice: $V(k;n)$. Esta nueva forma permite visualizar claramente cuál es el desplazamiento de la parábola sobre el eje $x$ e $y$. Para llegar a esta nueva forma se deben "completar cuadrados" en la ecuación que se presenta.
Esto es:

$$y = -x^2 - x + 2 = -\left(x^2 + x - 2\right) = -\left(\left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4}\right) = -\left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{9}{4}$$

De esta expresión extraemos que:

$$a = -1 \qquad V\left(-\tfrac{1}{2};\tfrac{9}{4}\right)$$

### *DESPLAZAMIENTOS DE LA PARABOLA*

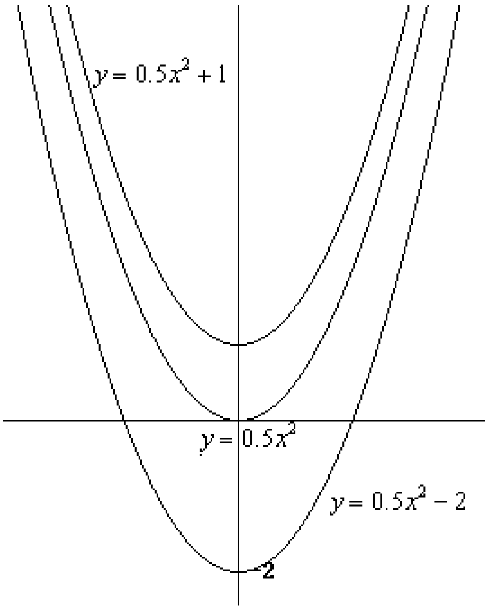
La expresión más sencilla que representa una parábola es: $y = ax^2$. La abertura de las ramas de dicha parábola depende del valor que tome $a$. Sabemos que si $a > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba. Para valores de $a > 1$, las ramas de la parábola se cierran alrededor del eje $y$; y para valores de $0 < a < 1$ las ramas se abren alejándose del eje $y$.

Si $a < 0$ la parábola es cóncava hacia abajo, en este caso para valores de $a < -1$, las ramas de la parábola se cierran alrededor del eje $y$; y para valores de $-1 < a < 0$, las ramas se abren alejándose del eje $y$.

- Si a la forma reducida $y = ax^2$ se le suma una constante $n$, la gráfica se desplaza en la dirección del eje $y$. En el sentido positivo sí $n > 0$, y en el sentido negativo si $n < 0$. En ambos casos el vértice de la parábola tiene coordenadas $(0;n)$.

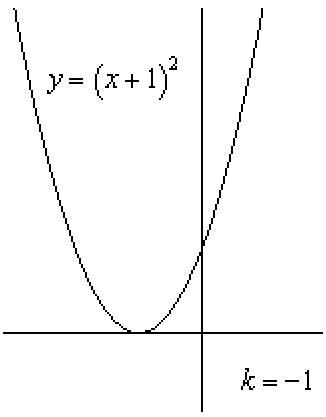
En general la ecuación de la parábola será en este caso: $y = ax^2 + n$.

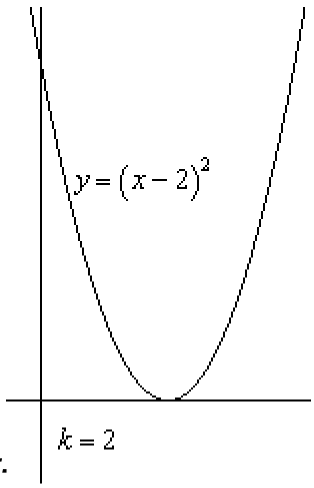
Por ejemplo si a la función $f(x) = 0{,}5x^2$ se le suma 1, se obtendrá $g(x) = 0{,}5x^2 + 1$, que marca el desplazamiento de $f(x)$ en una unidad en el sentido positivo de $y$. Y si a $f(x)$ se le suma -2, la gráfica se desplaza 2 unidades en el sentido negativo de las $y$.




- Si en la forma reducida reemplazamos $x$ por $x - k$, tendremos: $y = a(x-k)^2$, y la parábola sufrirá un desplazamiento hacia la derecha sí $k > 0$, o hacia la izquierda si $k < 0$. El vértice de la parábola tiene coordenadas $(k;0)$.

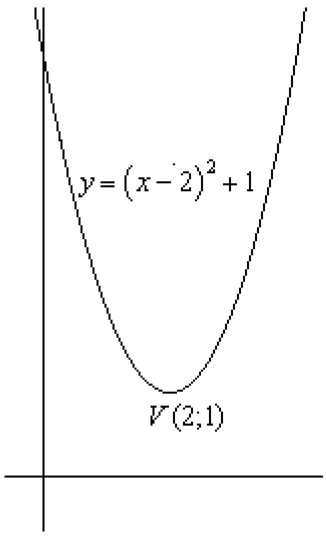
Ejemplos:

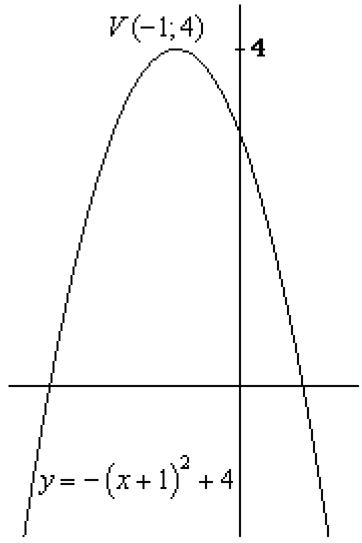


- Si combinamos ambos desplazamientos resulta: $y=a\left(x-k\right)^2+n$, de donde se desprende que el vértice de la parábola tendrá coordenadas $\left(k;n\right)$.

Ejemplos:

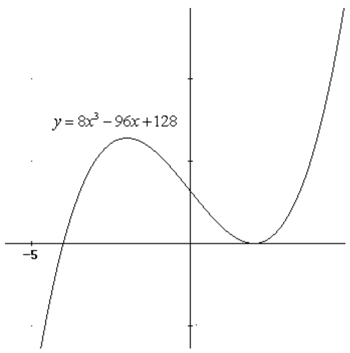


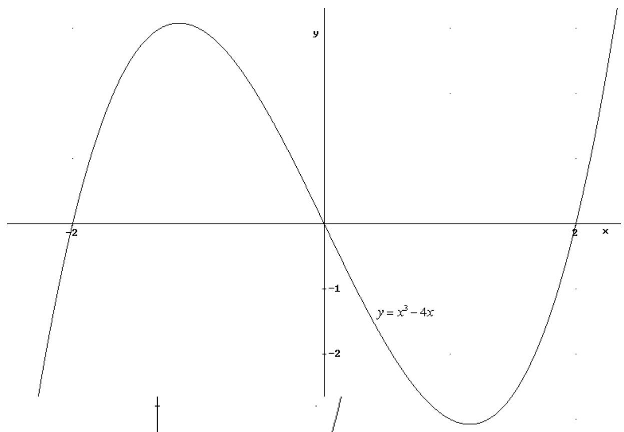



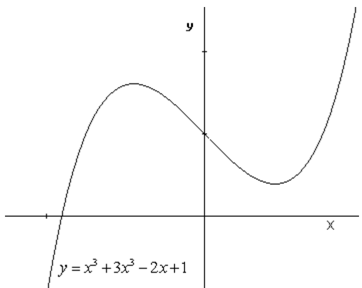

**OTRAS FUNCIONES POLINÓMICAS**

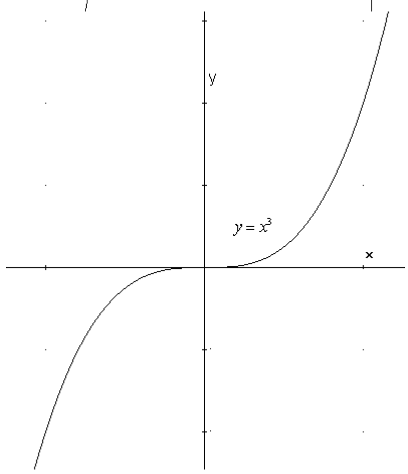
La gráfica de una función polinómica está relacionada con el grado del polinomio. Si el grado del polinomio es impar, las gráficas tienen un comportamiento similar y si el grado es par también tienen algo en común. Veamos algunos ejemplos:

Funciones polinómicas de grado impar:

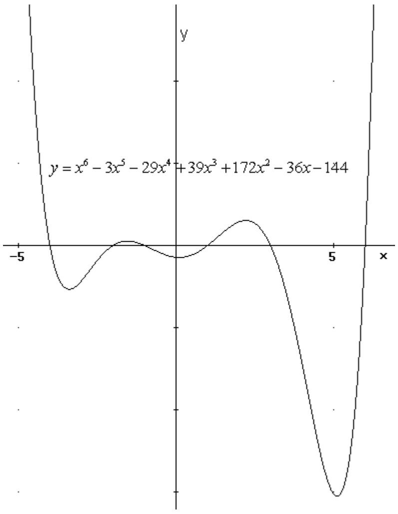


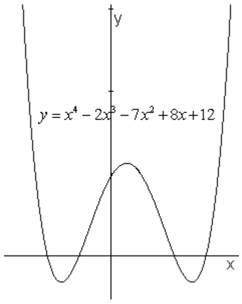



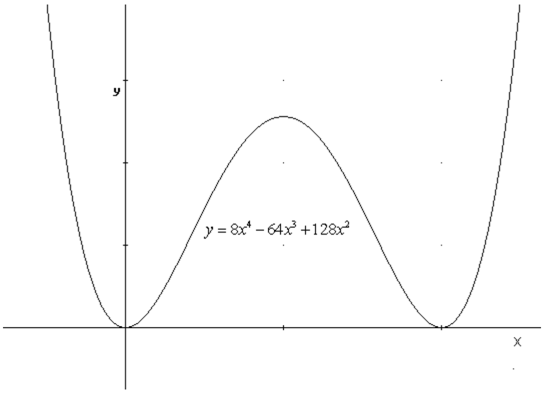



Los siguientes gráficos corresponden a funciones polinómicas de grado par:




Toda función polinómica de grado n tiene las siguientes propiedades:

- ✓ *Es continua para todos los números reales.*
- ✓ *La gráfica de dicha función es una curva suave.*
- ✓ *La gráfica tiene a los sumo n intersecciones con el eje x.*

Para estudiar el comportamiento y graficar las funciones polinómicas de grado mayor que dos, se debe calcular la derivada primera y segunda para poder determinar los intervalos de crecimiento, concavidad y la existencia de puntos máximos, mínimos y de inflexión.