FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES INDEPENDIENTES

Hasta ahora hemos visto funciones de una variable independiente, es decir funciones del tipo $f: R \to R / y = f(x)$. Estas funciones pueden representar en algunos casos una aproximación de la realidad, pero es muy difícil que las funciones de la vida real dependan de una sola variable.

Por ejemplo si nuestra función representa el volumen del cilindro, vemos que esta función depende de dos variables, es decir $V(r,h) = \pi r^2 h$, el radio y la altura. Muchas funciones pueden depender de dos o más variables independientes entre si, cuya forma general será $f: R^n \to R / u = f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n)$. Por ejemplo la cantidad demandada de un bien, que los consumidores están dispuestos a adquirir en un período determinado, depende del precio del bien, del precio de los sustitutos, del ingreso del consumidor, de sus gustos...

Función de dos variables independientes

Def: Si a cada par (x,y) de valores de dos variables, x e y independientes una de otra tomadas en un cierto dominio A $\left(A \subseteq R^2\right)$, le corresponde uno y solo un valor $z \in B$ $(B \subseteq R)$, se dice que z es una función de las dos variables independientes x e y definidas en el dominio A. En forma simbólica escribiremos

$$f: A \to B / z = f(x,y)$$

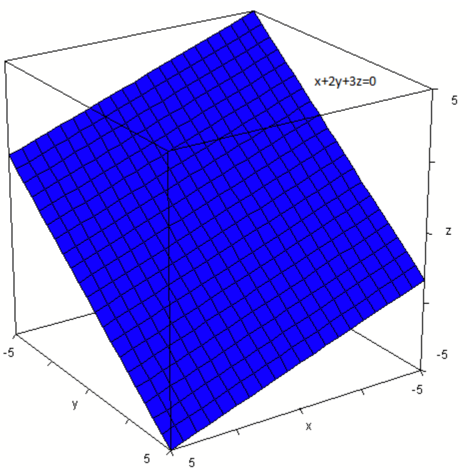
Donde x e y son las variables independientes y z la variable dependiente, debemos tener presente que A (dominio de la función) se encuentra contenido en R^2 y B se encuentra contenido en los números reales.

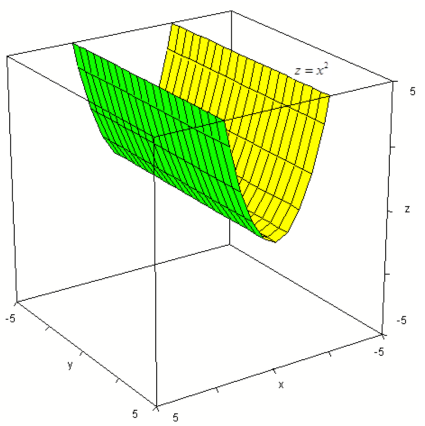
Los transformados del par (x,y) se llama imagen de la función.

$$\text{Im}.f = \left\{ f(x,y) / (x,y) \in A \right\}$$

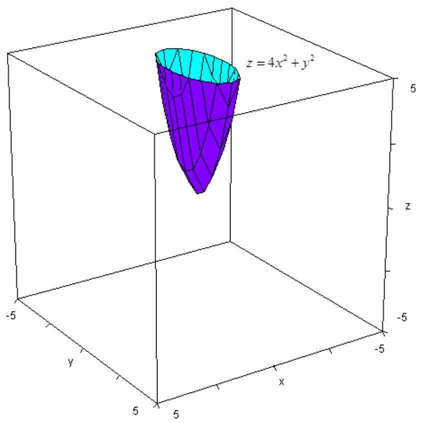
Las funciones de dos variables independientes son superficies en el espacio de tres dimensiones. Estas superficies pueden ser:

- ***Planas***, que responden a la forma general: $ax + by + cz + d = 0$
- ***Esféricas,*** que responden a la forma general: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$
- ***Cilíndricas,*** (cilindros parabólicos(ej: $z = x^2$) o circulares (ej: $x^2 + y^2 = r^2$))
- ***Cuadráticas***, (elipsoides, (ej: $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$); paraboloides (ej: $z = 4x^2 + y^2$, $z = y^2 - x^2$); hiperboloides (ej: $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$)

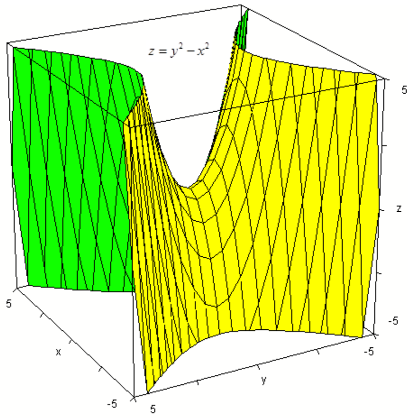




cilindro parabólico



paraboloide elíptico



paraboloide hiperbólico

Dominio de una función de dos variables independientes.
Si una función f está dada por una fórmula y no se especifica su dominio, entonces el dominio de dicho función se entiende que es el conjunto de todos los pares (x, y) para los cuales la expresión dada es un número real.

Def: Sea $f : A \to B / z = f(x,y)$ una función de dos variables independientes, por lo que $A \subseteq R^2$ y $B \subseteq R$ **.**

Dominio: $D_f = \{(x,y) \in A / \exists z \in B \text{ que cumple } z = f(x,y)\}$

Imagen**:** $I_f = \{z \in B / \exists (x,y) \in A \text{ que cumple } z = f(x,y)\}$

Veremos algunos ejemplos de cómo calcular el dominio para funciones de dos variables independientes:

Ej. 1)

$$f(x,y) = 3x^2 + 2y^3 + 7 \quad \Rightarrow \quad D_f : R^2$$

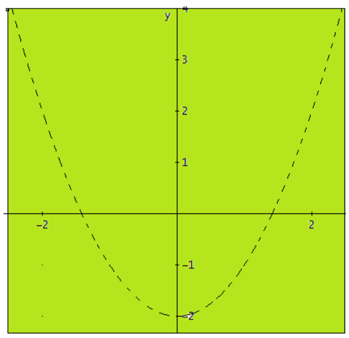
Es decir que el dominio de esta función es todo el plano xy

Ej. 2)

$$f(x,y) = \frac{1}{y - x^2 + 2} \quad \Rightarrow \quad y - x^2 + 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y \neq x^2 - 2$$

Es decir que el dominio de esta función son todos los puntos del plano xy, salvo los que se encuentran sobre la parábola $y = x^2 - 2$, y lo expresamos:

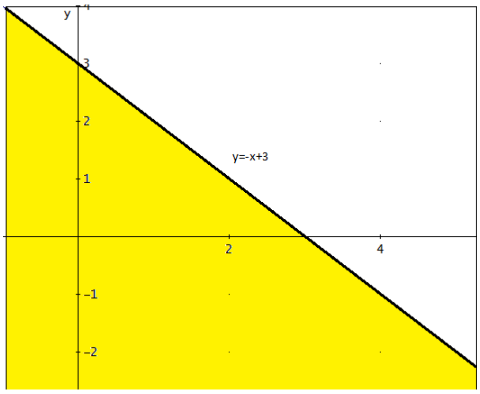
$$D_f : \{(x,y) \in R^2 / y \neq x^2 - 2\}$$



Ej. 3)

$$f(x,y)=\sqrt{3-x-y} \quad \Rightarrow \quad 3-x-y\geq 0 \quad \Rightarrow \quad y\leq -x+3$$

Es decir que el dominio de esta función son los puntos del plano xy que se encuentran debajo de la recta $y=-x+3$, incluyendo los puntos que se encuentran sobre esta misma recta.

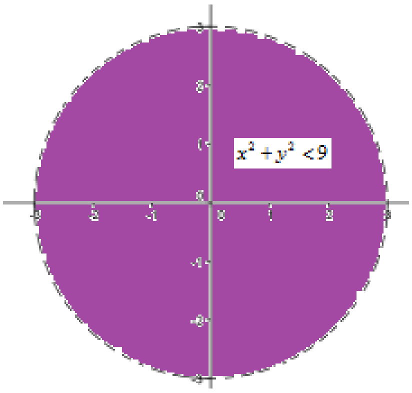


$$D_f:\left\{(x,y)\in R^2 \,/\, y\leq -x+3\right\}$$

Ej. 4)

$$f(x,y)=\ln\left(-x^2-y^2+9\right) \quad \Rightarrow \quad -x^2-y^2+9>0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2<9$$

Es decir que el dominio de esta función son los puntos del plano xy que se encuentran dentro de una circunferencia centrada en el origen de radio tres, sin tomar los puntos de la frontera.



$$D_f:\left\{(x,y)\in R^2 \,/\, x^2+y^2<9\right\}$$

Gráficas

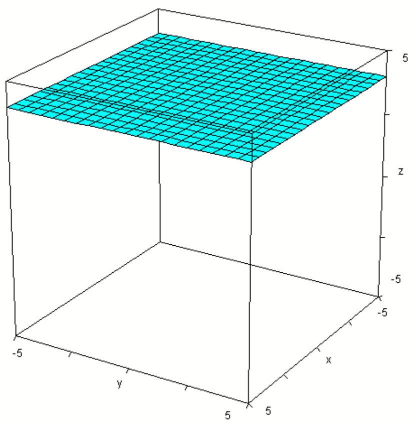
Método puntual

Este método consiste en fijar arbitrariamente los pares ordenados (x_i,y_i) y calcular el valor $z_i=f(x_i,y_i)$.Este método sirve para graficar planos ya que sabemos que tres puntos determinan un plano. Veremos algunos ejemplos.

Ej. 1) Graficar el siguiente plano

$$\begin{cases} z=4 \\ x=x \\ y=y \end{cases}$$

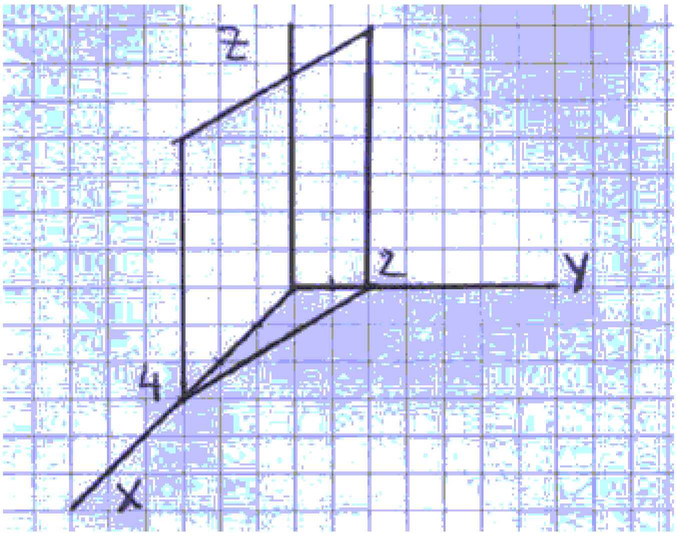
Es un plano paralelo al plano xy que corta al eje z en el punto 4, cuyo gráfico es:



Ej. 2) Graficar el siguiente plano:

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ z=z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{si } x=0 \Rightarrow y=2 \\ \text{si } y=0 \Rightarrow x=4 \end{array}$$

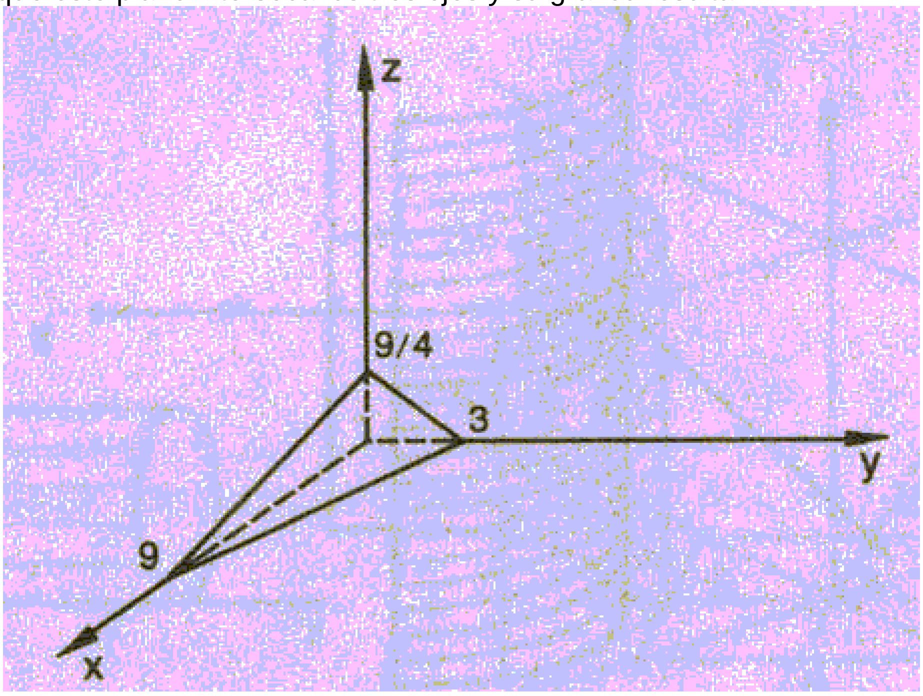
Tenemos un plano paralelo al eje z, que corta al eje x en 4 y al eje y en 2. Su gráfico es:



Ej. 3) Graficar el plano: $x+3y+4z-9=0$

si $x=0$ e $y=0 \Rightarrow z=9/4$
si $x=0$ y $z=0 \Rightarrow y=3$
si $y=0$ y $z=0 \Rightarrow x=9$

Es decir que este plano interseca los tres ejes y su gráfico resulta.

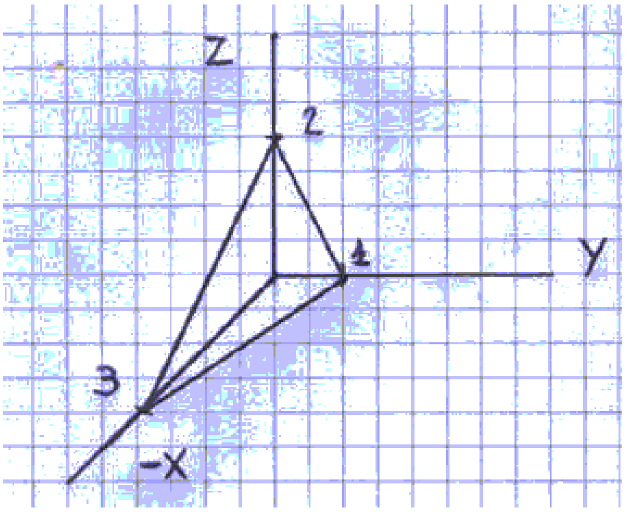


Ej. 4)

Graficar el plano: $-2x+6y+3z=6$

si $x=0$ e $y=0$ $\Rightarrow$ $z=2$
si $x=0$ y $z=0$ $\Rightarrow$ $y=1$
si $y=0$ y $z=0$ $\Rightarrow$ $x=-3$

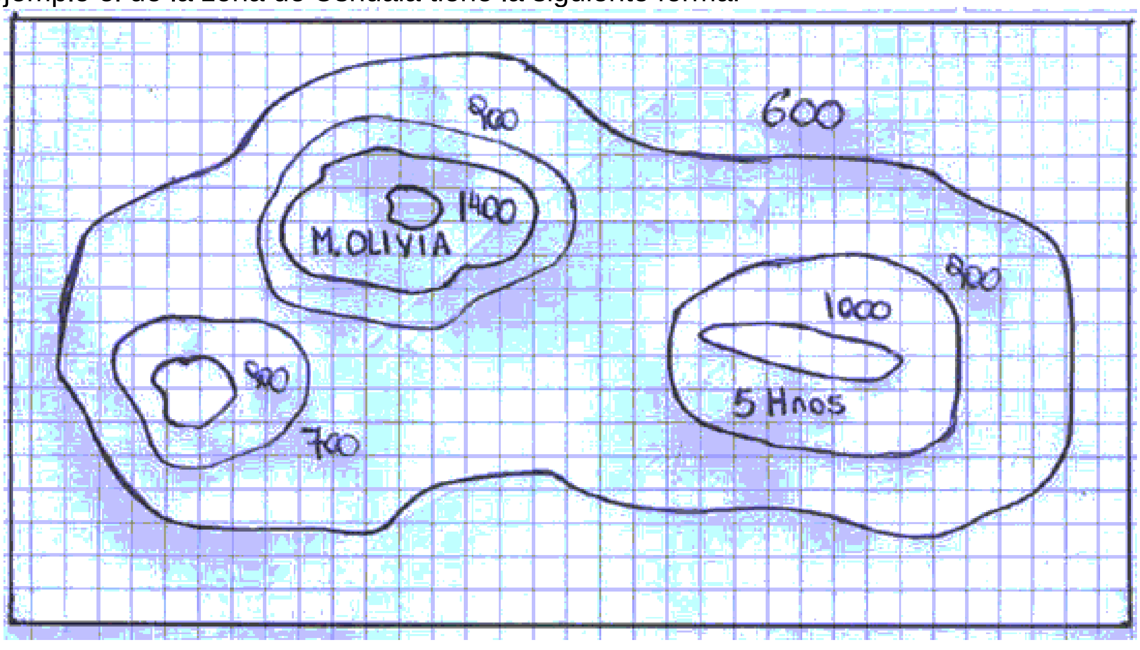
Es decir que este plano interseca los tres ejes, pero corta al eje x en un valor negativo y la forma más sencilla de dibujarlo es dando vuelta el eje, es decir que miramos el plano desde otro octante y su gráfico resulta.



Curvas de nivel

Este método consiste en obtener las curvas que resultan de la intersección entre la superficie $z=f(x,y)$ y planos paralelos a los planos coordenados. Luego con estas curvas hay que reconstruir la función.

Las curvas de nivel estamos acostumbrados a verlas en los mapas topográficos, por ejemplo el de la zona de Ushuaia tiene la siguiente forma:



Lo que hemos hecho, es cortar con planos paralelos al nivel del mar la zona de Ushuaia y la intersección nos da las curvas de nivel.
Veremos esto mismo con un ejemplo sencillo

Ejemplo: Graficar $z = x^2 + y^2$

En primer lugar cortamos la gráfica con planos paralelos al plano xy es decir que son planos $z = \text{cte}$. En nuestro ejemplo los valores de z no pueden ser negativos ya que $x^2 + y^2 \geq 0$ es decir que los planos horizontales con valores de z negativos, no cortan a la gráfica

1°) Veremos la intersección de la gráfica con planos $z = \text{cte}$

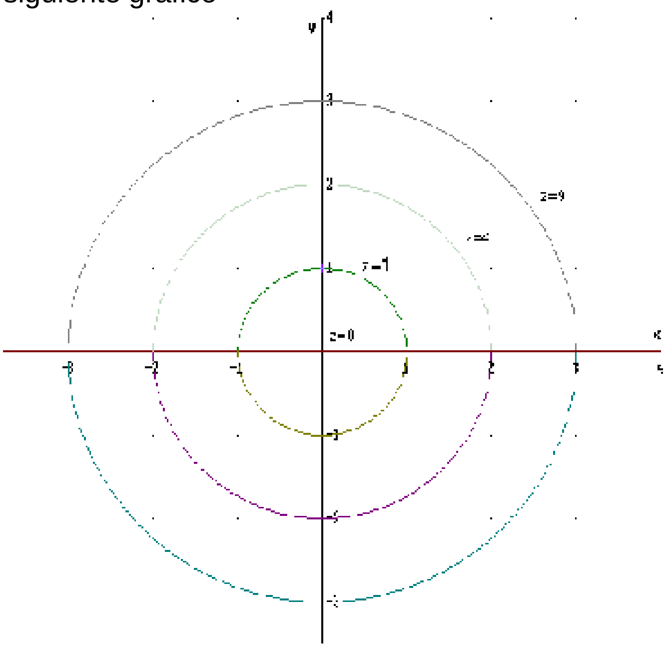
si $z = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = 0 \;\Rightarrow\;$ es el punto $(0,0)$

si $z = 1 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = 1 \;\Rightarrow\;$ circunferencia de $r = 1$

si $z = 4 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = 4 \;\Rightarrow\;$ circunferencia de $r = 2$

si $z = 9 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = 9 \;\Rightarrow\;$ circunferencia de $r = 3$

Vemos que resultan ser circunferencias concéntricas con centro en el origen como se ve en el siguiente gráfico



A continuación cortaremos la gráfica con planos paralelos al plano yz es decir $x = \text{cte}$

2°) Veremos la intersección de la gráfica con planos $x = \text{cte}$

Como x está elevada al cuadrado sus valores serán mayores o iguales a cero, además para los valores de x en positivo y negativo tendrán la misma gráfica.

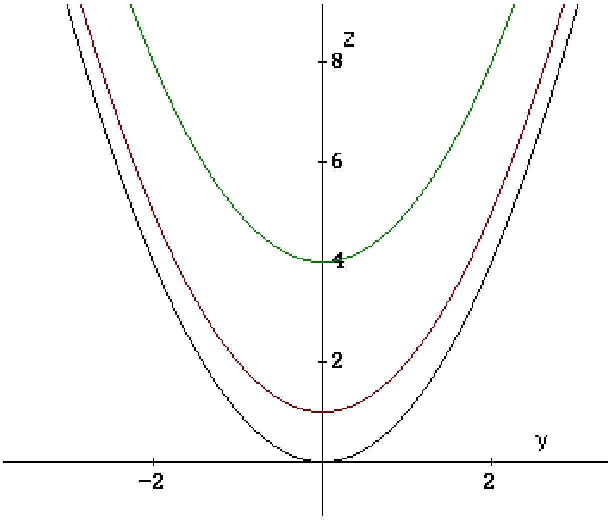
si $x=0 \;\Rightarrow\; z=y^2 \;\Rightarrow\;$ parábola con vértice en $(0,0)$

si $x=\pm1 \;\Rightarrow\; z=1+y^2 \;\Rightarrow\;$ parábola con vértice en $(0,1)$

si $x=\pm2 \;\Rightarrow\; z=4+y^2 \;\Rightarrow\;$ parábola con vértice en $(0,4)$

Que son parábolas que abren hacia arriba y desplazadas en el sentido positivo del eje z a medida que aumenta el valor de x

A continuación cortaremos la gráfica con planos paralelos al plano xz es decir $y=\text{cte}$



2°) Veremos la intersección de la gráfica con planos $y=\text{cte}$

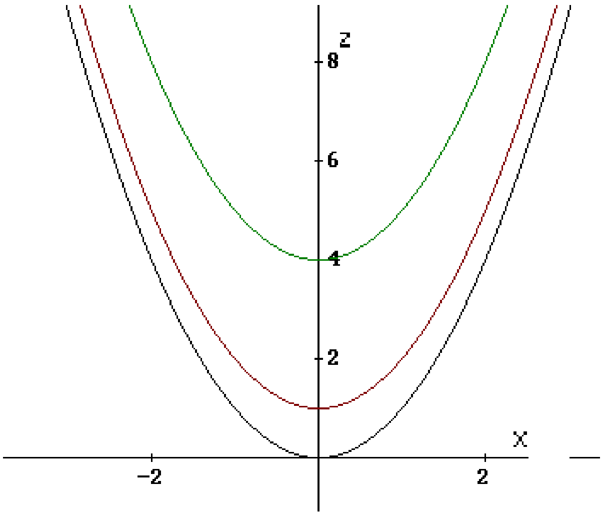
Como y está elevada al cuadrado sus valores serán mayores o iguales a cero, además para los valores de y en positivo y negativo tendrán la misma gráfica.

si $y=0 \;\Rightarrow\; z=x^2 \;\Rightarrow\;$ parábola con vértice en $(0,0)$

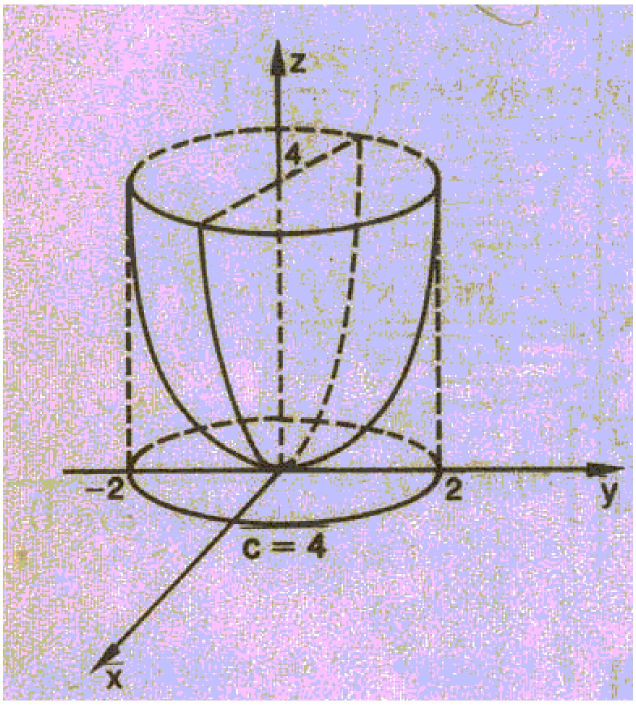
si $y=\pm1 \;\Rightarrow\; z=1+x^2 \;\Rightarrow\;$ parábola con vértice en $(0,1)$

si $y=\pm2 \;\Rightarrow\; z=4+x^2 \;\Rightarrow\;$ parábola con vértice en $(0,4)$

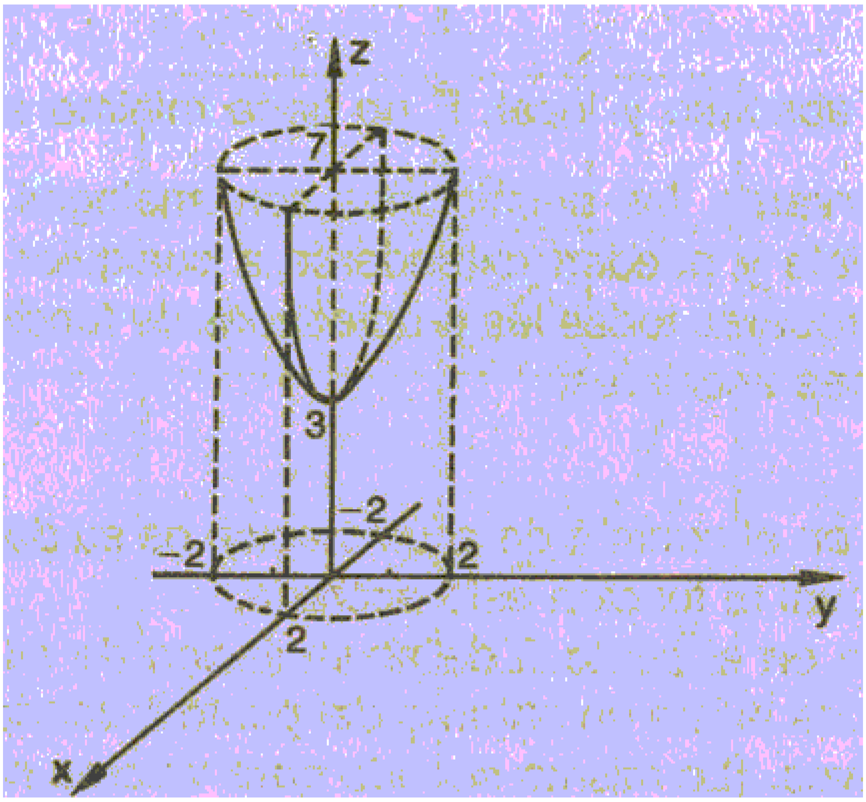
Que son parábolas que abren hacia arriba y desplazadas en el sentido positivo del eje z a medida que aumenta el valor de y



Si juntamos los tres gráficos podemos interpretar la superficie en el espacio que es un paraboloide de revolución como vemos en el siguiente gráfico



A la función $z = x^2 + y^2$ llamamos paraboloide de revolución y al igual que las funciones de una variable independiente se pueden trasladar e invertir por ejemplo la gráfica de $z = x^2 + y^2 + 3$ resulta:



Función de tres variables independientes.
La vamos a definir de manera similar a la anterior.
Def: Si a cada terna (x,y,z) de valores de tres variables, x ; y ; z independientes una de otra tomadas en un cierto dominio A de definición $\left(A \subseteq R^3\right)$ le corresponde uno y solo un valor $u \in B$ $\left(B \subseteq R\right)$ se dice que u es una función de las tres variables independientes x ; y ; z definidas en el dominio A, que en forma simbólica escribiremos $f : A \to B / u = f(x,y,z)$
Donde x ; y ; z son las variables independientes y u la variable dependiente, debemos tener presente que A se encuentra contenido en R^3 y B se encuentra contenido en los números reales, donde:
Los transformados de la terna (x,y,z) se llama imagen de la función. La gran diferencia con las funciones de dos variables es que a partir de las tres variables independientes las funciones ya no son posibles de graficar.

Ejemplo:

$$f(x,y,z) = \ln(z-y) + xy.senz$$

Esta función está definida cuando $z - y > 0 \Leftrightarrow z > y$

$$Dom. f = \left\{(x,y,z) \in R^3 / z > y\right\}$$

Éste es un semiespacio formado por los puntos que se encuentran arriba del plano $z = y$.

Función de n variables independientes.
Def: Si a cada n-upla $(x_1, x_2, x_3, ...x_n)$ de valores de n variables, x_1 ; x_2 ; x_3 ; .... x_n independientes una de otra tomadas en un cierto dominio A de definición $\left(A \subseteq R^n\right)$ le corresponde uno y solo un valor $u \in B$ $\left(B \subseteq R\right)$ se dice que u es una función de las n variables independientes x_1 ; x_2 ; x_3 ; .... x_n definidas en el dominio A, que en forma simbólica escribiremos:

$$f : A \to B / u = f(x_1, x_2, x_3, ...x_n)$$

Donde x_1 ; x_2 ; x_3 ; .... x_n son las variables independientes y u la variable dependiente, debemos tener presente que A se encuentra contenido en R^n y B se encuentra contenido en los números reales.

Los transformados de la n-upla $(x_1, x_2, x_3, ...x_n)$ se llama imagen de la función.
La función de varias variables puede pensarse que los elementos del dominio son vectores de R^n es decir que $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, ...x_n) \in R^n \Rightarrow u = f(\vec{x})$.

Dominio e imagen de una función de n variables independientes
Sea $f : A \to B / u = f(x_1, x_2, x_3, ...x_n)$ una función de n variables independientes, por lo que $A \subseteq R^n$ y $B \subseteq R$.

$$D_f = \left\{(x_1, x_2, x_3, ...x_n) \in A / \exists u \in B \text{ que cumple } u = f(x_1, x_2, x_3, ...x_n)\right\}$$

$$I_f = \left\{u \in B / \exists (x_1, x_2, x_3, ...x_n) \in A \text{ que cumple } u = f(x_1, x_2, x_3, ...x_n)\right\}$$

Forma práctica de hallar el dominio

Sea $f: A \to B / u = f(x_1, x_2, x_3, ...x_n) = f(\vec{x})$ (las variables las escribimos como un vector de n variables). Por ser una función de n variables independientes, resulta que $A \subseteq R^n$ y $B \subseteq R$.

Primer caso: Si $f(\vec{x}) = \dfrac{g(\vec{x})}{h(\vec{x})} \Rightarrow h(\vec{x}) \neq 0$

Segundo caso: Si $f(\vec{x}) = \sqrt[n]{g(\vec{x})}$ donde si n es par $\Rightarrow g(\vec{x}) \geq 0$

Tercer caso: Si $f(\vec{x}) = \log_b\left[g(\vec{x})\right] \Rightarrow g(\vec{x}) > 0$