AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Definición:

Sea la transformación lineal $T: V \rightarrow V$. Un vector $x \in V$, no nulo es autovector de T con autovalor $\alpha \Leftrightarrow T(x) = \alpha x$.

El término autovalores y autovectores es sinónimo de valores y vectores propios, de eigenvalores y eigenvectores y de valores y vectores característicos.

Ejemplo 7.1:

Sea $T: R^2 \rightarrow R^2 / T(x1, x2) = (2\ x1, x2)$

para $\mathbf{u}= (1,0)$ resulta $T(\mathbf{u}) = (2, 0) = 2\ \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{u}$ es autovector con autovalor $\alpha=2$

Notar que no sucede lo mismo para cualquier vector. Por ejemplo para $\mathbf{v}= (1,1)$, $T(\mathbf{v})= (2,1) \neq 2\mathbf{v}$

Propiedad:

Si **u** es autovector de T con autovalor α, todo vector no nulo de la recta generada por **u** es también autovector de T con el mismo autovalor.

Sea **u** autovector / $T(\mathbf{u}) = \alpha\ \mathbf{u}$ y **v** un vector no nulo de la recta generada por **u**

$\Rightarrow \mathbf{v}= k\ \mathbf{u}$

$T(\mathbf{v}) = T(k\ \mathbf{u}) = k\ T(\mathbf{u}) = k\ \alpha\ \mathbf{u} = \alpha\ k\mathbf{u} = \alpha\ \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v}$ es autovector con autovalor α

Sean **u1**, **u2**,..**uk** autovectores L I con autovalores iguales. Cualquier vector del subespacio generado por los mismos es autovalor de T con el mismo autovalor.

Sea S el subespacio generado por **u1, u2,…uk** $\Rightarrow \mathbf{v}= \Sigma\ \beta i\ \mathbf{ui}$

$T(\mathbf{v}) = T(\Sigma\ \beta i\ \mathbf{ui}) = \Sigma\ \beta i\ \alpha\ \mathbf{ui} = \alpha\ \Sigma\ \beta i\ \mathbf{ui} = \alpha\ \mathbf{v}$

***Ejemplo 7.2*:**

$T: R^3 \rightarrow R^3 / T(x1, x2, x3) = (2x1, 2x2, x1 + x2 + x3)$

$T(1,0,0)= (2,0,0) \Rightarrow (1,0,0)$ es autovector con autovalor 2

$T(0,1,0)= (0,2,0) \Rightarrow (0,1,0)$ es autovector con autovalor 2

$\Rightarrow$ Todo vector del plano generado por (1,0,0) y (0,1,0) es autovector con autovalor 2; tal es el caso por ejemplo de $\mathbf{v}= (2,-1,0)$ ya que $T(\mathbf{v}) = (4, -2, 0) = 2\mathbf{v}$.

Puede suceder que todos los vectores de V sean autovectores con el mismo autovalor, es el caso de $T: R^3 \rightarrow R^3 / T(x1, x2, x3) = (- x1, -x2, -x3)$ donde $\forall \mathbf{x} \in V$:

T(x): (-1)**x** donde (-1) es autovalor

dim $N_T \geq 1 \Leftrightarrow 0$ es autovalor de T en un subespacio cuya dimensión es dim N_T

Si **v** $\in N_T \Rightarrow$ T(**v**) = **0** = 0**v** $\Rightarrow$ **v** es autovector con autovalor 0 $\Rightarrow N_T$ coincide con el subespacio de autovectores con autovalor nulo.

Si **v** es autovector de T con auvalor α y A es la matriz asociada a T / T(**u**) = A**u**, **v** es autovector de la matriz A con autovalor α. Notar que α no depende de la base escogida.

Si bien la existencia de un autovector implica infinitos autovectores, lo que en realidad interesa es identificar autovectores L.I. Obviamente, el máximo número de autovectores L.I. en R^n es n

Cuando los autovectores de T no pertenecen a los ejes de coordenadas, no es inmediata su identificación, es decir debe recurrirse a un método para ello.

Surgen preguntas para responder:

Cuál es el numero de autovectores L.I correspondientes a una TL T? Por el momento sólo podemos afirmar que es ≤ dimV

Es posible que una T.L. no tenga autovectores?

Cómo podemos determinar autovalores y autovectores de T?

Comenzaremos por buscar una respuesta a la última pregunta.

Sea **u** autovalor de T con autovalor α y A la matriz asociada a T

T(u)= α**u** o bien A**u** =α**u**

A**u** - α**u** = 0; además **u**= I**u**

A**u** – αI**u** = 0

(A – αI) **u** = 0 (*)

(A – αI) es una matriz cuadrada, del mismo orden que A y la expresión (*) representa un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, donde el vector **u** es el vector de las incógnitas.

El sistema siempre es compatible, por ser homogéneo. Si su solución es única, es la trivial (**u= 0**) entonces no hay autovectores, ya que éstos no pueden ser nulos. El tipo de solución depende de (A- αI), la matriz de coeficientes del sistema, que es indeteminada ya que no se conoce α. La condición para que el SEL sea indeterminado es:

$\lvert (A - \alpha I) \rvert = 0$	Ecuación característica

Tenemos ahora una ecuación con una única incógnita, que es α y para resolverla hay que igualar a cero el desarrollo del determinante.

$$A - \alpha I = \begin{pmatrix} a11\ a12 \ldots\ldots\ldots a1n \\ a21\ a22 \ldots\ldots\ldots a2n \\ \ldots. \\ an1\ an2 \ldots\ldots\ldots ann \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha & & \\ & & \ldots & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$$

$$| A - \alpha I | = \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11} - \alpha} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22} - \alpha} & \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots. & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots\ldots \mathbf{a_{nn} - \alpha} \end{vmatrix} = 0$$

Interesa analizar la forma general del desarrollo del determinante.

Uno de los términos del mismo es el producto de los elementos de la diagonal principal: $\mathbf{(a_{11} - \alpha)(a_{22} - \alpha) \ldots (a_{nn} - \alpha)}$

Del desarrollo de esta factorización resulta un término de mayor grado $(-\alpha)^n$ sumado a otros en donde α aparece elevado a una potencia < n, con un término independiente (sin α como factor) que es el producto $a_{11}a_{22}..a_{nn}$. Esto es un polinomio en α de grado n.

Los demás términos del determinante, son productos de distinta fila y distinta columna, de cuyo desarrollo también resultan polinomios en α, pero de menor grado, ya que la única combinacion que produce α^n es la de la diagonal principal. Esto asegura que el polinomio resultante de la suma de todos (cada término del determinante es un polinomio) sea de grado n con α como indeterminada.

$$(-1)^n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \ldots. + a1\ \alpha + a_0 = 0 \qquad \text{Polinomio característico}$$

El polinomio característico igualado a 0 da lugar a una ecuación polinómica. Resolver esta ecuación es encontrar las raíces del polinomio característico, o sea los valores de α (los autovalores buscados) que anulan en polinomio.

Toda ecuación polinómica de grado **n** admite exactamente **n** raices complejas (incluidas las reales)

Si α1…αn son raices reales del polinomio característico, el mismo se factoriza:

$p(\alpha)= (\alpha - \alpha1)\ (\alpha - \alpha2) \ldots\ldots(\alpha - \alpha n)$

Las raíces **no** reales no son autovalores ya que α es complejo:

$T(u)= (\alpha)(\mathbf{u}) = (a+bi)\mathbf{u}$ no es un vector de R^n; interesan por lo tanto las raíces reales del polinomio.

Sabemos que las raíces complejas se presentan como pares conjugados ⇒ el número de autovalores puede ser **n** (si no hay raíces complejas) o difiere de **n** en un número par.

***Ejemplo 7.3*:**

Suponiendo $P(\alpha) = \alpha^3 + 4\alpha = 0$

$\alpha(\alpha^2 + 4) = 0$ se anula para $\alpha=0$ y para $\alpha^2 + 4=0$, pero no hay números reales que verifiquen esta última, resultando raíces complejas:

$\alpha= \sqrt{-4} = \sqrt{-1}\ \sqrt{4} = \pm 2i$

Se verifica así que el polinomio de grado 3 tiene una raíz real $\alpha 1 = 0$ y dos complejas: $\alpha 2= 2i$; $\alpha 3= -2i$

Si el grado **n** de $p(\alpha)$ es par, es posible que T no tenga autovalores ni autovectores. Sería el caso en el que todas las raíces fuesen complejas. Esto implica que la ecuación

$|(A - \alpha I)| = 0$ no tiene solución en R debido a que el sistema $(A - \alpha I)\,\mathbf{u} = 0$ tiene $\forall\ \alpha \in R$ solución única, que es la trivial $\Rightarrow$ no hay autovectores.

Si dim(V) es impar ($V= R^3, R^5$, etc.) $\Rightarrow$ hay al menos un autovalor con un autovector asociado.

Determinación de los autovectores

Una vez calculadas las raíces reales del polinomio característico, que definen los autovalores de T, es posible determinar los autovectores correspondientes:

Si $\alpha 1$ es una de las raíces obtenidas, calculamos el autovector **u1** asociado a $\alpha 1$ resolviendo el SEL:

$$(A - \alpha_1 I)\,\mathbf{u1} = 0$$

Notar que **u1** es un vector del núcleo de la TL cuya matriz asociada es $(A - \alpha_1 I)$.

Resolver esta expresión es encontrar el espacio solución del Núcleo de $(A - \alpha_1 I)$, que como veremos más adelante puede tener dimensión mayor que 1.

Repitiendo el procedimiento para las demás raíces, se obtienen los autovalores correspondientes a cada autovalor.

***Ejemplo 7.4*:**

Calcular autovalores y autovectores de $T: R^2 \rightarrow R^2 \,/\, T(x1, x2) = (3x1+2x2, -x1)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |A-\alpha I| = \begin{vmatrix} 3-\alpha & 2 \\ -1 & 0-\alpha \end{vmatrix} = 0 = (3-\alpha)(-\alpha) + 2 = \underbrace{\boldsymbol{\alpha^2 - 3\alpha + 2}}_{\text{Pol. característico}} = 0$$

$$\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4.\,2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \quad \alpha1 = 2\ ;\ \alpha2 = 1$$

La factorización del polinomio es $p(\alpha) = (\alpha-2)(\alpha-1)$

Cálculo de los autovectores:

$\underline{\alpha1=2} \Rightarrow (A - 2I)\,\mathbf{u} = 0 = \begin{pmatrix} 3-2 & 2 \\ -1 & 0-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 = 0 \\ -u_1 - 2u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 = -2u_2 \qquad \text{(las dos rectas son coincidentes)}$$

Un vector que es base de la recta es **u**=(-2, 1)

$\underline{\alpha2=1} \Rightarrow (A - I)\,\mathbf{u} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 3-1 & 2 \\ -1 & 0-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2u_1 + 2u_2 = 0 \\ -u_1 - u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 = -u_2$$

Un vector que es base de la recta es **u**=(-1, 1)

Los autovalores son: (-2, 1) con autovalor $\alpha1 = 2$ y (-1, 1) con $\alpha2 = 1$

Verificamos que T(**u**)= α **u** para ambos casos:

T(-2,1) = (-6 + 2, 2) = (-4, 2) = 2 (-2, 1)

T(-1, 1) = (-3+2, 1) = (-1, 1)

Ejemplo 7.5:

Encontrar los autovalores y autovectores de $T:R^2 \rightarrow R^2$ cuya matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \qquad |A-\alpha I| = \begin{vmatrix} \sqrt{3}/2-\alpha & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2-\alpha \end{vmatrix} = 0 = (\sqrt{3}/2-\alpha)(\sqrt{3}/2-\alpha) + 1/4$$

$$\alpha^2 - \sqrt{3}\,\alpha + 1 = 0 \qquad \alpha = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-4}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{-1}}{2} \text{ No hay solución en R}$$

No hay raíces reales $\Rightarrow$ no hay autovalores ni autovectores.

El resultado era esperable, ya que la TL es una rotación de 30°. Para que un vector **u** sea autovector debe ser T(**u**) = α **u** $\Rightarrow$ T(**u**) debe pertenecer a la misma recta que **u**, lo cual no se verifica para ningún vector no nulo, ya que T modifica la dirección de los vectores.

Propiedad:

Los autovectores asociados a autovalores distintos son L.I.

Supongamos los autovalores $\alpha 1, \alpha 2, .. , \alpha r$ distintos entre sí y los autovectores correspondientes **ui** / T(**ui**) = αi **ui**

Ya hemos probado que si dos autovectores son colineales tienen el mismo autovalor $\Rightarrow \alpha 1 \neq \alpha 2 \Rightarrow$ **u1, u2** son L.I.

Si incorporamos un tercer autovector **u3** con autovalor α3 resulta:

$T(u1) = \alpha 1\, \mathbf{u1}$
$T(u2) = \alpha 2\, \mathbf{u2}$
$T(u3) = \alpha 3\, \mathbf{u3}$

Si **u3** fuese C.L. de **u1, u2** $\Rightarrow$ $\mathbf{u3} = \beta 1\mathbf{u1} + \beta 2\mathbf{u2}$ **(i)**

$T(\mathbf{u3}) = \alpha 1\beta 1\mathbf{u1} + \alpha 2\beta 2\mathbf{u2} = \alpha 3\mathbf{u3}$

Si α3 = 0 resultaría : $\alpha 1\beta 1\mathbf{u1} + \alpha 2\beta 2\mathbf{u2} = \mathbf{0}$ (de acuerdo a **(i)**)

Sin embargo esto contradice la condición prestablecida de independencia lineal entre u1 y u2, ya que la ecuación se anula con coeficientes αiβi no simultáneamente nulos, teniendo en cuen que:

$\alpha 1 \neq 0$ y $\alpha 2 \neq 0$ por ser distintos de α1

$\beta 1 \neq 0$ y $\beta 2 \neq 0$ porque **u3** resultaría nulo en **(i)** o proporcional a u1 y u2 según sean nulos ambos o uno de los coeficientes respectivamente, y en este último caso no podrían ser distintos los tres autovalores .

Si $\alpha 3 \neq 0$

$$\mathbf{u3} = \frac{\alpha 1}{\alpha 3}\beta 1\mathbf{u1} + \frac{\alpha 2}{\alpha 3}\beta 2\mathbf{u2} \quad \text{pero}$$

$$\mathbf{u3} = \beta 1\mathbf{u1} + \beta 2\mathbf{u2} \quad \text{por } \mathbf{(i)}$$

Siendo **u1** y **u2** L.I., **u3** sólo puede expresarse como una única CL de ambos $\Rightarrow$ es necesario que $\alpha 1=\alpha 2=\alpha 3$ pero por hipótesis los autovalores son distintos, de lo que se concluye que **u3** no es CL de **u1** y **u2**.

Con igual razonamiento se puede demostrar que con 4 autovalores distintos y siendo $\mathbf{u_1}..\mathbf{u_3}$ L.I., resulta $\mathbf{u_4}$ L.I.; hasta concluir que con r autovalores distintos, y $\mathbf{u_1}..\mathbf{u_{r-1}}$ autovectores L.I., $\mathbf{u_r}$ es L.I.

Raíces múltiples en el polinomio característico

Si algunas de las raíces se repiten en la factorización, se dice que tienen multiplicidad y si una raíz αi tiene multiplicidad r, los factores iguales se pueden expresar como $(\alpha-\alpha i)^r$

Una raíz de multiplicidad **r** da lugar a un número **i** de autovectores L.I. / 1≤ **i** ≤ r; **i** está dado por la dimensión del conjunto solución de (A – αi I) **u** = 0

***Ejemplo 7.6*:**

Dada la siguiente matriz, determinar cuántos autovectores L.I. tiene

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 4-\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 2-\alpha \end{vmatrix} = 0 = (2-\alpha)\,(4-\alpha)\,(2-\alpha) = \quad (\alpha-2)^2\,(\alpha-4)$$

Hay una raíz con doble múltiplicidad en α=2 y una raíz simple en α=4. Estudiaremos si resulta uno o dos autovectores L.I. asociados a α=2. Planteamos (A- 2I) x = 0

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La dimensión del espacio solución para α1=2 es 1 ya que se trata de la interseccion de dos planos no paralelos, resultando la recta x2= 0; x1=0. Una base para dicha recta es el autovector u1= (0,0,1)

α2= 4 es el otro autovalor, al que estará asociado un segundo autovector, L.I. respecto de α1, resultando en consecuencia dos autovectores L.I. para la matriz A.

Ejemplo 7.7:

Determinar cuántos autovectores L.I. corresponden a la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\alpha & -1 & -2 \\ 2 & -\alpha & -2 \\ 2 & -1 & -1-\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\alpha & -1 & -2 \\ 0 & -\alpha & -2 \\ 1-\alpha & -1 & -1-\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\alpha & -1 & -2 \\ 0 & -\alpha & -2 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} = 0$$

Op. Elementales: C1= C1+ C3 F3=F3-F1

p(α)= α(α-1)^2 = 0 ⇒ α1= 0; α2=α3= 1

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución es el plano 2x1-x2- 2x3=0 de donde resultan dos autovectores L.I con autovalor 1.
u2= (1,0,1) ; u3= (1,2,0)

El tercer autovalor α1= 0 da lugar a otro autovector L.I., según puede verificar el alumno.

Diagonalización de una matriz cuadrada.

La posibilidad de expresar una matriz en su forma diagonal, si esta existe, otorga facilidades propias de las matrices diagonales, ya sea en relación al producto matricial, a los S.E.L. o al análisis de la estructura de la matriz y lo que ésta representa, por ejemplo una T.L. Se abordará este problema sobre la base de autovalores y autovectores.

Sea $T: R^n \rightarrow R^n$. Si existe una base B de R^n conformada por autovectores **u1,u2…un** correspondientes a los autovalores α1, α2 …αn, la matriz de T según la base B es diagonal.

T(**u1**) = α1 **u1** = **α1 u1** + 0 u2+ …….. + 0 un
T(**u2**)= α2 **u2** = 0 u1 + **α2 u2**+ 0 u3+…+ 0 un
…..
T(**un**)= αn **un** = 0 u1+ 0 u2+ ……… + **αn un**

$$D=\begin{pmatrix} \alpha 1 & & & & \\ & \alpha 2 & & & \\ & & \alpha 3 & & \\ \ldots & & & \ldots & \\ & & & & \alpha n \end{pmatrix}$$

D es la matriz asociada a T según la base B de autovectores.

> Una matriz $A \in Knxn$ es diagonalizable ⇔ es semejante a una matriz diagonal D.

A es diagonalizable ⇔ ∃ P, no singular / $D= P^{-1} A\ P$

Si A es la matriz asociada a T en base canónica y D es la asociada a T en una base B de autovectores, P es una matriz de cambio de base (de B a C) cuyas columnas son los autovectores de la base B.

El requisito para diagonalizar es la existencia de una base de autovectores, o sea que la condición necesaria y suficiente para A se pueda diagonalizar es que existan n autovectores L.I.

Un conclusión relativa a la existencia de n autovalores distintos es:

> Si una matriz nxn tiene n autovalores distintos es diagonalizable

Si todas las raices del polinomio característico son reales pero una o más de ellas tiene multiplicidad, para saber si la matriz es diagonalizable es preciso analizar si resultan n autovectores L.I.

Por ejemplo, $T:R^2 \rightarrow R^2 / T(x1,x2)= (2x1, 2x2)$, cuyo polinomio característico es $p(\alpha)=(\alpha-2)^2$ presenta un único autovalor α=2 con autovectores (1, 0) y (0, 1). Es un caso en donde los autovalores no son distintos, sin embargo la matriz asociada a T diagonaliza como

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En este caso, la base canónica es también base de autovectores.

Ejemplo 7.8

En relación al ejemplo 7.7. Hallar la matriz P que diagonaliza a A en la forma $D= P^{-1}A\,P$

Indicar a que base está asociada la matriz D. Hay una única base que produce tal diagonalización?

D es la matriz que resulta de la asignación A**ui** = α**ui**, donde **ui** es un autovector y αi es el autovalor asociado.

D opera entonces según la base B de autovectores en el 1^er y 2º espacio. Sabemos que existe porque en el ejemplo 7.7 se ha comprobado que hay 3 autovectores L.I.:

u2= (1,0,1) ; u3= (1,2,0) y u1 que no fue especificado y que caculamos a continuación, sabiendo que el autovalor asociado es α1=0

$$(A-0I)\,\mathbf{u}= A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tomando pivote en fila2, col.1 resulta:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x2=x3 \\ x1=x3 \end{matrix}$$

u1= (1,1,1)

La matriz P es la matriz de cambio de base $C_{B\text{-}C}$ cuyas columnas son **u1 u2 u3**, en tanto que P^{-1} es la matriz de cambio $C_{C\text{-}B.}$ D es la matriz asociada según la base B de autovectores.

$$D= P^{-1}A\,P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D= P^{-1}A\,P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D= P^{-1}A\,P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Como se esperaba, D es la matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal son los autovalores, que aparecen en una secuencia correspondiente al orden de la base B.

Respondiendo a la pregunta si es B a única base que diagonaliza a A, cualquier par de vectores L.I del espacio propio correspondiente al autovalor 1 produciría la misma matriz diagonal. Una alteración del orden de los vectores de la base B implica una base diferente, y una nueva matriz P que cambia el orden de los elementos de la diagonal.

Algunas aplicaciones

El campo de aplicación es muy amplio, particularmente en la Estadística y en Matemática aplicada.

En relación a Transformaciones Lineales es una herramiente que aporta información sobre la estructura de la función.

En el caso de una TL que aparenta ser una proyección, es fácil comprobar si es así verificando que la matriz es idempotente, Es fácil definir el subespacio de proyección y la inclinación de P si se conocen los autovalores y autovectores: los autovectores asociados a $\alpha 1=1$ determinan la Im_P y el N_P es el subespacio de autovectores con autovalor nulo.

Lo mismo sucede en simetrías. Si la matriz es ortogonal y su determinante es -1 verificamos que es una simetría. El eje o el plano de simetría, según el caso, está dado por el o los autovectores asociados al autovalor $\alpha=1$. Tener en cuenta que si se sabe que la amtriz es una simetría, se conocen los autovalores:uno es -1 y los restantes son 1 con multiplicidad n-1.

Debe tenerse en cuenta que si T no es inyectiva el N_T tiene dimensión ≥ 1 y en consecuencia hay algún autovalor nulo, cuya multiplicidad es igual a la dimensión del N_T

Métodos numéricos aplicados al cálculo de autovalores y autovectores.

En problemas reales las matrices cuyos autovalores y autovectores se deben determinar suelen ser de mayor orden y el cálculo de las raíces de los polinomios característicos se complica. Incuso para n= 3, cuando las raíces no son enteras o racionales el problema es complicado y se deben calcular por aproximación. Veremos uno de los métodos a manera de ejemplo.

Método de las potencias o del autovalor dominante.

El método permite obtener el autovalor de mayor valor absoluto de la matriz

Requisitos para la convergencia:

1) Debe existir un autovalor de mayor valor absoluto a los restantes:

$|\alpha 1| > |\alpha i|$ para $i > 1$

2) Debe existir una base B de autovectores B={**u1,…un**}

Fundamentos:

Sea x_0 un vector cualquiera de R^n

$x_0= \Sigma\beta i\ ui$

$A\ x_0 = \Sigma\beta i\ Aui = \Sigma\ \beta i\ \alpha i\ ui = \beta 1\ \alpha 1\ u1 + \beta 2\ \alpha 2\ u2 + \ldots + \beta n\ \alpha n\ un = x1$

$A\ x1= A^2\ x_0 = \beta 1\alpha 1^2\ u1 + \beta 2\ \alpha 2^2\ u2 + \ldots + \beta n\ \alpha n^2\ un = x1$

….

$Ax_{k-1} = A^k x_0 = x_k$

Dividiendo el segundo término por $\alpha 1^k$ resulta la siguiente aproximación:

$$\beta 1\,\mathbf{u1} + \beta 2\,\frac{\alpha 2^k}{\alpha 1^k}\,\mathbf{u2} + \ldots + \beta n\,\frac{\alpha n^k}{\alpha 1^k}\,\mathbf{un} \cong \beta 1\mathbf{u1} \Rightarrow \beta 1\ u1 \text{ es autovector}$$

Los cocientes $(\alpha i/\alpha 1)^k$ tienden a cero cuando k crece ya que $|\alpha i/\alpha 1| < 1$

La velocidad de convergencia es mayor cuanto mayor es la relación entre $|\alpha 1|/|\alpha 2|$, donde $\alpha 2$ es el sucesivo autovalor en orden decreciente de valore absoluto. Si hay dos autovalores dominantes de igual valor absoluto, el método no converge.

Cálculo del autovalor:

Si u es autovector con autovalor α:

$$\mathbf{u} \bullet \alpha\,\mathbf{u} = \alpha\ \mathbf{u} \bullet \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\mathbf{u} \bullet \alpha\,\mathbf{u}}{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}}$$

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{u_k} \bullet \alpha_k\,\mathbf{u_k}}{\mathbf{u_k} \bullet \mathbf{u_k}} \qquad \text{donde} \quad \alpha_k\,\mathbf{u_k} = A\,\mathbf{u_k} = \mathbf{u_{k+1}}$$

Ejemplo 7.9

Calcular el autovalor y autovector dominante por el método de las potencias en $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (tiene autovalores $\alpha 1 = 2$; $\alpha 2 = 1$) y autovector $u1 = (2,1)$

Aplicamos método de las potencias partiendo de $x_0 = (1, 1)$ (arbitrario)

$$A\,x_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = x1$$

$$A^2\,x_0 = A\,x_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2.6 \\ -1 \end{pmatrix} = x2$$

$$A^3\,x_0 = A\,x_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ -13 \end{pmatrix} = 13\begin{pmatrix} 2.23 \\ -1 \end{pmatrix} = x3$$

$$A^4\,x_0 = A\,x_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 29 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61 \\ -29 \end{pmatrix} = 29\begin{pmatrix} 2.1 \\ -1 \end{pmatrix} = x4$$

$$A^5\,x_0 = A\,x_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 61 \\ -29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 \\ -61 \end{pmatrix} = 61\begin{pmatrix} 2.05 \\ -1 \end{pmatrix} = x5$$

$$A^6\,x_0 = A\,x_5 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 125 \\ -61 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 253 \\ -125 \end{pmatrix} = 125\begin{pmatrix} 2.02 \\ -1 \end{pmatrix} = x6$$

$$A^7\,x_0 = A\,x_6 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 253 \\ -125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 509 \\ -253 \end{pmatrix} = 253\begin{pmatrix} 2.01 \\ -1 \end{pmatrix} = x7$$

El autovector se aproxima a (2.01, -1). Esposible mejorar la aproximación con más iteraciones.

Calculamos el autovalor:

$$\alpha k = \frac{x6 \bullet x7}{x6 \bullet x6} = \frac{253 \times 509 + 125 \times 253}{253^2 + 125^2} = 2.01$$

Se compara la diferencia entre αk y αk-1. Si la diferencia es inferior al error aceptable (por ej. 0.0001) se toma α_k como autovalor y $\mathbf{x_{k+1}}$ como autovector. En caso contrario se realiza otra iteración. Es necesario considerar más decimales que los utilizados en este ejemplo.

El método no tiene significación en el caso de una matriz 2x2, pero aplicado a matrices 3x3 cuyos autovalores no son enteros, permite reducir el polinomio de grado 3 a un polinomio de grado 2 cuyas raíces se encuentra facilmente. Obtenido el autovalor α1 por el método de las potencias, basta dividir p(α) por (α-α1) aplicando el método de Ruffini). Hay también aplicaciones estadísticas en donde interesa precisamente el autovalor dominante de matrices de alto orden, en donde el método resulta muy práctico.

En general, los problemas de calculo de autovalores y autovectores en matrices de orden >3 se resuelven mediante métodos de cálculo numérico como el que se ha presentado.

BIBLIOGRAFÍA

Algebra Lineal 5ª Ed	Grossman	Mc. Graw Hill
Introd.al Algebra Lineal	Larson y Edwars	LIMUSA
Algebra Lineal	Lay	Prentice Hall
Algebra Lineal	Lipschutz	Mc. Graw Hill
Algebra lineal	Kolman	Prentice Hall