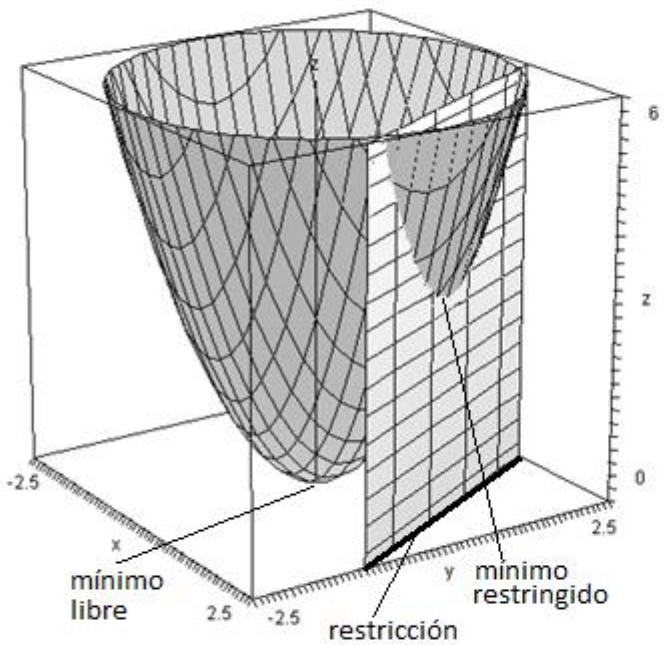
EXTREMOS CONDICIONADOS O LIGADOS

Vamos a estudiar el problema de maximizar o minimizar una función en la que sus variables deben satisfacer una o más restricciones en forma de igualdades. Por ejemplo podemos considerar el caso de un consumidor que tiene que decidir qué cantidad r, de su renta va a gastar en x unidades de un bien a un precio unitario p, y qué cantidad y va a reservar para gastar en otros bienes. O sea que el consumidor se enfrente a la restricción presupuestaria $px + y = r$. Vamos a suponer que la función $f(x, y)$ representa las preferencias del consumidor. En términos matemáticos, estamos en el caso que el consumidor debe resolver el problema de hallar el punto (x, y) que maximice $f(x, y)$, sujeta a $px + y = r$. Este es un problema de *maximización restringida*. En este caso, como $y = r - px$, se puede expresar el mismo problema como uno de maximización no restringida de la función $f(x, r - px)$ con respecto a la única variable x. Es decir, que estaríamos reduciendo un problema de optimización restringida a uno no restringido.

Supongamos que queremos optimizar la función, $f(x, y) = x^2 + y^2$ cuando las variables no son independientes entre ellas, sino que están relacionadas. Sabemos que el gráfico de esta función es un paraboloide de revolución con vértice en el origen, donde tiene su mínimo.



Supongamos ahora que queremos hallar el mínimo que tiene esta función, pero únicamente para los puntos del dominio que pertenecen a la recta $2x + y = 4$.

En este caso, el extremo ya no está en el origen, sino que debe encontrarse sobre la recta. A este punto que minimiza la función, con la restricción planteada, se lo llama **extremo condicionado o ligado.**

Ejemplo 3

Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$. Hallar los extremos condicionados de esta función, sujeta a la restricción $2x + y = 4$.

Solución

Para resolver este problema, podemos despejar y de la restricción, y reemplazar este valor en la función $f(x, y)$, quedando una función de una única variable independiente.

$2x + y = 4 \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 4$, que al reemplazarlo en f resulta

$$f(x, y) = x^2 + y^2 =$$

$$= x^2 + (-2x + 4)^2 =$$

$$= 5x^2 - 16x + 16 = F(x)$$

Ahora nos queda una función F que depende únicamente de x. Calculamos los extremos como lo hacíamos con funciones de una variable independiente:

$$F(x)=5x^2-16x+16 \quad \Rightarrow \quad F'(x)=10x-16=0 \quad \Rightarrow \quad x_0=\frac{8}{5} \text{ Punto Crítico}$$

Para saber si este punto crítico es un extremo, y si además en dicho punto la función tiene un máximo o mínimo, debemos calcular la derivada segunda en dicho punto.

$F''(x)=10 \quad \Rightarrow \quad F''\left(\frac{8}{5}\right)=10>0$, es decir que en el punto $x_0=\frac{8}{5}$ hay un mínimo.

Si $x_0=\frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad y_0=-2.\frac{8}{5}+4=\frac{4}{5}$; es decir que en $P_0=\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)$ hay un mínimo condicionado.

El valor de la función en ese punto resulta $f\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{5}$.

Es decir que el punto de la gráfica $\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5},\frac{16}{5}\right)$, es el mínimo restringido.

Este problema de extremos condicionados fue muy sencillo de resolver, porque pudimos despejar la variable y de la restricción, y reemplazarla en la función a optimizar para resolver el problema como si fuera una función de una variable independiente. Sin embargo, cuando la restricción es una función complicada y no se puede despejar y en función de x en la restricción, o cuando tenemos una función de n variables independientes sujeta a m restricciones, se utiliza el **método de los multiplicadores de Lagrange**.

Una función de dos variables independientes, puede tener a lo sumo una restricción, ya que si tuviera dos restricciones, no permite la posibilidad de elegir. Una función de n variables independientes, puede tener a lo sumo m restricciones, donde $m<n$. *La cantidad de restricciones debe ser estrictamente menor que la cantidad de variables.*

REGLA DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

La esencia del método de los multiplicadores de Lagrange es convertir un problema de extremos condicionados en uno de extremos libres.

Si se tiene una función $z=f(x,y)$, sujeta a la restricción $g(x,y)=c$, de quien se necesita calcular los extremos condicionados, se plantea lo que se denomina **función de Lagrange** o *función lagrangiana,* que es una función modificada de la función objetivo, a la cual se le incorpora la restricción. La expresión de esta función de Lagrange, es:

$$Z(\lambda,x,y)=f(x,y)+\lambda\left[c-g(x,y)\right].$$

donde λ representa un número aún indeterminado que se llama *multiplicador de Lagrange*.

Si bien λ no es una variable, se toma como una variable más, considerando así a Z, como una función de tres variables $Z(\lambda,x,y)$. De esta manera la *condición necesaria* (condición de primer orden) para la existencia de extremo libre consiste en igualar a cero las derivadas parciales primeras de Z, para poder determinar así el punto crítico, al resolver el sistema de ecuaciones que resulta.

$$Z_\lambda(\lambda,x,y)=c-g(x,y)=0;$$

$$Z_x(\lambda,x,y) = f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 0\,;$$
$$Z_y(\lambda,x,y) = f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 0$$

Vemos que la derivada parcial $Z_\lambda(\lambda,x,y)=0$ sólo depende de las variables x e y. Además nos garantiza el cumplimiento de la restricción, ya que si

$Z_\lambda(\lambda,x,y) = c - g(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x,y)=c$, que es la restricción.

Ejemplo 4

Hallar el extremo de la función $f(x,y)=x^2+y^2$, sujeta a la restricción $2x+y=4$.

Solución

1º) Se escribe la función de Lagrange.

$$Z(\lambda,x,y) = f(x,y) + \lambda\left[c - g(x,y)\right]$$
$$Z(\lambda,x,y) = x^2+y^2+\lambda\left[4-(2x+y)\right]$$
$$Z(\lambda,x,y) = x^2+y^2+\lambda\left[4-2x-y\right]$$

2º) Se hallan las derivadas parciales de Z, y se igualan a cero, que es la condición necesaria para hallar el punto crítico.

$$Z_\lambda(\lambda,x,y) = 4-2x-y=0 \qquad (1)$$
$$Z_x(\lambda,x,y) = 2x-2\lambda=0 \qquad (2)$$
$$Z_y(\lambda,x,y) = 2y-\lambda=0 \qquad (3)$$

3º) Se resuelve el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (por cualquier método), obtenido en el paso anterior.

.

En la primera ecuación, que resulta ser equivalente a la restricción, nunca aparece λ. Despejando la variable x de la ecuación (2), e y de la ecuación (3), y reemplazando en la ecuación (1), resulta:

De (2) $\quad 2x-2\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad x=\lambda$

De (3) $\quad 2y-\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad y=\dfrac{\lambda}{2}$

Reemplazando los valores de x e y en (1) resulta:

$$4-2x-y=0 \quad \Rightarrow \quad 4-2\lambda-\frac{\lambda}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{8}{5}$$

Por lo tanto: $\qquad x_0=\dfrac{8}{5}, \qquad y_0=\dfrac{4}{5}$

El punto crítico es $P_0\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{4}{5}\right)$, como habíamos determinado anteriormente.

Si no conociéramos la gráfica, para poder afirmar que en este punto hay un máximo o mínimo (o ninguno de los dos), falta comprobar una *condición suficiente* de segundo orden.

CONDICION SUFICIENTE PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMO CONDICIONADO

La introducción del multiplicador de Lagrange como una variable adicional, permite aplicar al problema del extremo condicionado, la misma *condición necesaria de primer orden* que se usa en los extremos libres. Pero no puede hacerse la misma transferencia de las *condiciones suficientes* de segundo orden desarrolladas para el caso de extremos libres, a los extremos condicionados. Se debe obtener un

conjunto de condiciones nuevas que tienen que ver con el diferencial segundo de la función pero con ciertas modificaciones.
Las condiciones suficientes de segundo orden giran alrededor del signo del diferencial de segundo orden evaluado en el punto crítico.
Para una función $z = f(x,y)$, sujeta a la restricción $g(x,y) = c$, las condiciones suficientes de segundo orden, son:

Si $d^2 f(P_0) < 0$ sujeto a $dg = 0$, la función es cóncava hacia abajo, y en P_0 hay máximo.
Si $d^2 f(P_0) > 0$ sujeto a $dg = 0$, la función es cóncava hacia arriba y en P_0 hay mínimo.

El problema que surge es que este $d^2 f(x,y)$ no es el que conocemos para dos variables independientes, ya que $x \; e \; y$ están relacionadas por la restricción $g(x,y) = c$. Ahora los valores del dy no son arbitrarios, dependerán de dx, pues están relacionados por dicha restricción, cuyo $dg(x,y) = 0$.

Como en el caso de los extremos libres, la condición suficiente de segundo orden se puede expresar en forma de determinante. Sin embargo, en lugar del determinante Hessiano utilizado en los extremos libres, en el caso de extremos restringidos usaremos lo que se conoce como *Hessiano orlado*.

Vamos a simbolizar al Hessiano orlado con $\overline{H}_{1+2}$. Este determinante está formado por:

$$\overline{H}_{1+2}(P_0) = \left| \begin{matrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & Z_{xx} & Z_{xy} \\ g_y & Z_{yx} & Z_{yy} \end{matrix} \right|_{P_0}$$

La raya superior nos indica que el determinante es Orlado, el 1 significa que tiene un solo cero en la posición a_{11}, que lo da la cantidad de restricciones, y el 2 corresponde a la cantidad de variables de la función a optimizar.

La **condición suficiente de segundo orden para extremos condicionados** está dada por:

Siendo: $\overline{H}_{1+2}(P_0) = \left| \begin{matrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & Z_{xx} & Z_{xy} \\ g_y & Z_{yx} & Z_{yy} \end{matrix} \right|_{P_0}$, entonces $\text{si} \begin{cases} \overline{H}_{1+2}(P_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en } P_0 \text{ hay Máximo} \\ \overline{H}_{1+2}(P_0 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en } P_0 \text{ hay Mínimo} \end{cases}$

Ahora tenemos la herramienta para determinar, en el ejemplo anterior, si en el punto $P_0\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)$ hay un mínimo restringido. Calculemos el Hessiano orlado en dicho punto.
Las derivadas que necesitamos son:

$$g_x(P_0) = 2 \;\; , \;\; g_y(P_0) = 1 \; , \;\; Z_{xx}(P_0) = 2 \;\; , \;\; Z_{xy}(P_0) = Z_{yx}(P_0) = 0 \; , \;\; Z_{yy}(P_0) = 2$$

Veamos el signo del Hessiano Orlado:

$$\overline{H}_{1+2}(P_0) = \left| \begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix} \right| (P_0) = -10 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en } P_0\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right) \text{ hay un mínimo restringido.}$$

Ejemplo 5

Hallar los extremos de la función $f\left(x,y\right)=x^2+y^2$, sujeta a la restricción $g(x,y)=x^2+xy+y^2=3$.

Solución

1º) Se escribe la función de Lagrange.

$$Z\left(\lambda,x,y\right)=f\left(x,y\right)+\lambda\left[c-g\left(x,y\right)\right]$$

$$Z\left(\lambda,x,y\right)=x^2+y^2+\lambda[3-(x^2+xy+y^2)]$$

2º) Se hallan las derivadas parciales de Z, y se igualan a cero, que es la condición necesaria para hallar el punto crítico.

$$Z_\lambda=-x^2-xy-y^2+3=0 \qquad (1)$$

$$Z_x=2x-\lambda(2x+y)=0 \qquad (2)$$

$$Z_y=2y-\lambda(x+2y)=0 \qquad (3)$$

3º) Se resuelve el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Al sumar las ecuaciones (2) y (3), se obtiene:

$$2x-\lambda(2x+y)+2y-\lambda(x+2y)=0$$

$$2(x+y)-3\lambda x-3\lambda x=0$$

$$2(x+y)-3\lambda(x+y)=0$$

$$(x+y)(2-3\lambda)=0$$

Para que esta última expresión sea igual a cero, debe ser:

$$x+y=0 \quad \text{o} \quad 2-3\lambda=0$$

Si $x+y=0 \Rightarrow y=\text{-}x$. Al reemplazar en la ecuación (1), se obtienen: $\begin{cases}x_1=\sqrt{3}\\ x_2=-\sqrt{3}\end{cases}$

Por lo tanto al ser $y=\text{-}x$, los puntos son:

$$P_1(\sqrt{3},-\sqrt{3}) \text{ y } P_2(-\sqrt{3},\sqrt{3})$$

Nos falta hallar el λ correspondiente a estos puntos. Para eso reemplazamos $\sqrt{3}$ o $-\sqrt{3}$ en Z_x o Z_y, así obtenemos $\lambda=2$.

Si $2-3\lambda=0\Rightarrow\lambda=\dfrac{2}{3}$. Al reemplazar en la ecuación (2) ó (3), se obtiene $y=x$.

Al ser $y=x$, reemplazando en la ecuación (1), resulta:

$$-x^2-x^2-x^2+3=0\Rightarrow-3x^2=-3\Rightarrow x^2=1\Rightarrow\begin{cases}x_3=1\\ x_4=-1\end{cases}$$

Por lo tanto, los otros puntos son:

$$P_3(1,1) \text{ y } P_4(-1,-1)$$

4º) Se comprueban las condiciones de segundo orden, haciendo el Hessiano orlado en los puntos críticos.

Se tiene:

$$g_x=2x+y \quad , \quad g_y=x+2y \quad , \quad Z_{xx}=2-2\lambda \quad , \quad Z_{xy}=Z_{yx}=-\lambda \quad , \quad Z_{yy}=2-2\lambda$$

$$\overline{H}_{1+2}=\begin{vmatrix}0 & g_x & g_y\\ g_x & Z_{xx} & Z_{xy}\\ g_y & Z_{yx} & Z_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2x+y & x+2y\\ 2x+y & 2-2\lambda & -\lambda\\ x+2y & -\lambda & 2-2\lambda\end{vmatrix}$$

En los puntos $P_1(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ y $P_2(-\sqrt{3},\sqrt{3})$, el Hessiano orlado es igual a 24:

$$\overline{H}\Big|_{(\sqrt{3},-\sqrt{3})}=\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 & -2 \\ -\sqrt{3} & -2 & -2 \end{vmatrix}=24 \qquad \overline{H}\Big|_{(-\sqrt{3},\sqrt{3})}=\begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -2 & -2 \\ \sqrt{3} & -2 & -2 \end{vmatrix}=24$$

Por lo tanto, como los Hessianos son mayores que cero, en estos puntos existen máximos locales.

En los puntos $P_3(1,1)$ y $P_4(-1,-1)$, el Hessiano orlado es igual a -24:

$$\overline{H}\Big|_{(1,1)}=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 3 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}=-24 \qquad \overline{H}\Big|_{(-1,-1)}=\begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -3 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}=-24$$

Por lo tanto, como los Hessianos son menores que cero, en estos puntos existen mínimos locales.

Práctico 8
Extremos libres y condicionados

1) Determinar, si es que existen, los puntos donde las funciones tienen extremos relativos.

$a)\ \ f(x,y) = x.y(x-1)$

$b)\ \ f(x,y) = x - x^2 - y^2$

$c)\ \ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$

$d)\ \ f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

$e)\ \ f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$

2) Determinar, si es que existen, los puntos donde las funciones tienen extremos condicionados. Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange.

$a)\ \ f(x,y) = x.y \qquad si\ \ x + 2y = 2$

$b)\ \ f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad si\ \ 2x + 3y = 7$

$c)\ \ f(x,y) = x + y \qquad si\ \ 2x^2 + 2y^2 = 1$