Práctico 2 - Sistemas de ecuaciones lineales

1. Determinar, a partir del gráfico de cada una una de las ecuaciones, si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles. Determinar la solución cuando sea posible, calculando previamente el determinante de los coeficientes del sistema
$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \,.\, a_{22} - a_{12} \,.\, a_{21}$

   a) $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -4x + 2y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 8y = 5 \\ -3x + 12y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 8y = 6 \\ -3x + 12y = -9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x = 3y + 7 \\ 15x - 9y = 21 \end{cases}$

2. Dado el siguiente sistema lineal S: Decidir cuáles de los siguientes son soluciones de S, y cuáles del sistema homogéneo asociado: $v_1 = (0, 0, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 4)$, $v_3 = \left(-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$, $v_1 = (-1, -2, 3, -7)$

$$S : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

3. Verificar si cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales tiene solución por medio de la eliminación Gaussiana y/o por el método de Gauss-Jordan. Si el sistema es compatible escribir la solución correspondiente. Si es indeterminado indicar la expresión general del conjunto solución y una solución particular. Verificar todas las soluciones determinadas.

   a) $\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ 4x - 2y - z = -4 \\ 2x - y + 3z = 19 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 2x + 3y = 1 \\ 8x - 3z = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 6x + 6y + 2z = 3 \end{cases}$

   d) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x + 4y - 6z = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x + 2y - z = 11 \\ x - y + z = 1 \\ 4x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 10 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ x + y - 2z = -3 \\ 2x + 3y + 4z = 20 \end{cases}$

   g) $\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ -2x + 4z = 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x - 2y + z - t + u = 0 \\ 2x + y - z + 2t - 3u = 0 \\ 3x - 2y - z + t - 2u = 0 \\ 2x - 5y + z - 2t + 2u = 0 \end{cases}$

4. Para cada una de las matrices reducidas por filas:
   a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

I. Considerar que es la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.
II. Considerar que es la matriz ampliada de un sistema no homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.

5. Determinar el (los) valor(es) de k, de modo que el sistema de ecuaciones lineales dado tenga el número de soluciones indicado:

a) Exactamente una solución
$$\begin{cases} 4x + ky = 7 \\ kx + y = 0 \end{cases}$$

b) Infinidad de soluciones
$$\begin{cases} kx + y = 4 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases}$$

c) Ninguna solución
$$\begin{cases} x + ky = 2 \\ kx + y = 4 \end{cases}$$

6. Determinar los valores de k tales que los siguientes sistemas sean incompatibles:

a) $\begin{cases} x + y + kz = 3 \\ x + ky + z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + kz = 6 \\ 3x + 6y + 8z = 4 \end{cases}$

7. Dado el sistema:
$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 \\ -x + 7y - z = 0 \\ 4x - 11y + kz = 0 \end{cases}$$
¿Para qué valores de k este sistema es compatible indeterminado?

8. Hallar los valores de a, tales que el siguiente sistema homogéneo tenga infinitas soluciones
$$\begin{cases} (a-2)x + y = 0 \\ x + (a-2)y = 0 \end{cases}$$

9. Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema, en función del parámetro α, y resolverlo cuando sea compatible:
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + \alpha y + \alpha z = 5 \\ 4x + \alpha y = 5 \end{cases}$$

10. ¿Para qué valores de a, b y c el siguiente sistema es compatible?
$$\begin{cases} x - y + 2z + w = a \\ 2x + 2y + z - w = b \\ 3x + y + 3z = c \end{cases}$$

11. Una compañía produce tres artículos: A, B y C, que requiere se procesen en tres máquinas: I, II y III. El tiempo en horas requerido para el procesamiento de una unidad de cada producto por las tres máquinas está dado por:

	I	II	III
A	3	1	2
B	1	2	1
C	2	4	1

La máquina I está disponible 850 horas, la II durante 1200 horas y la III durante 550 horas. ¿Cuántas unidades de cada artículo deben ser producidas para utilizar todo el tiempo disponible de las máquinas?

12. Una investigadora ejecuta un experimento para probar una hipótesis que relaciona los nutrientes niacina y retinol. Todos los días alimenta a un grupo de ratas de laboratorio con una dieta precisa de 32 unidades de niacina y 22000 unidades de retinol. Utiliza dos tipos de alimentos comerciales. El alimento A contiene 0,12 unidades de niacina y 100 unidades de retinol por gramo. El alimento B contiene 0,20 unidades de niacina y 50 unidades de retinol por gramo. ¿Cuántos gramos de cada alimento debe administrar a su grupo de ratas todos los días?

13. Un doctor recetó a un paciente, tomar 10 unidades de vitamina A, 9 unidades de vitamina D y 19 unidades de vitamina E, diariamente. La persona puede elegir entre tres marcas de píldoras vitamínicas. La marca X contiene 2 unidades de vitamina A, 3 unidades de vitamina D y 5 de vitamina E; la marca Y tiene 1, 3 y 4 unidades respectivamente; y la marca Z tiene 1 unidad de vitamina A, ninguna de vitamina D y 1 unidad de vitamina E.
a) Hallar todas las combinaciones posibles de píldoras que proporcionen de manera exacta las cantidades requeridas.
b) Si la marca X cuesta $0,50 cada píldora, la marca Y cuesta $0,80 y la marca Z cuesta $0,60. ¿Cuál es la combinación menos cara del inciso a)?, ¿cuál es la más cara?