ESPACIOS VECTORIALES

***Definición*:**

Sea **V** un conjunto de elementos que denominaremos "vectores", aunque no necesariamente correspondan al concepto de los vectores ya estudiados en el plano y en el espacio.

Sea **+** una operación definida en **V;** $+ : \mathbf{V} \mathbf{x} \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$

Sea **K** un **cuerpo** de escalares (normalmente, **R**, pero también podría ser C, Q, etc)

Sea "**.**" una operación entre escalares de **K** y vectores de **V**, de la que resulta un vector de **V**

$. : \mathbf{K} \mathbf{x} \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$

Bajo estas definiciones tenemos la estructura **(V, +, K, *)** que es un Espacio Vectorial (EV)si y sólo si se verifican las siguientes propiedades .

(**V, +, K, .**) es EV $\Leftrightarrow$ Verifica:

I.- (**V, +**) es Grupo Conmutativo. Es decir que la suma en **V** verifica:

I-1 Ley de composición interna: $u, v \in \mathbf{V} \Rightarrow (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in \mathbf{V}$

I-2 Asociatividad: $\forall\ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V: (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

I-3 Conmutatividad: $\forall\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V: (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{v} + \mathbf{u})$

I-4 $\exists$ Elemento Neutro: $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}: \ \mathbf{v} + \mathbf{n} = \mathbf{v} = \mathbf{n} + \mathbf{v}$

I-5 $\exists$ Elemento inverso: $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}\ \exists\ \mathbf{v'}\ /\ \mathbf{v} + \mathbf{v'} = \mathbf{n}$

II. El producto de un escalar de K por un vector de V satisface:

II-1 Ley de composición externa en **V**: $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ y $k \in \mathbf{K} \Rightarrow k\,\mathbf{.}\,\mathbf{v} \in \mathbf{V}$

II-2 $k \in \mathbf{K}$ y $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V} \Rightarrow k\,\mathbf{.}\,(u + v) = k\mathbf{.}\,\mathbf{u} + k\mathbf{.v}$

II-3 $k, k' \in \mathbf{K}$ y $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \Rightarrow (k + k')\,\mathbf{.}\,v = k\,\mathbf{.}\,v + k'\mathbf{.}\,\mathbf{v}$

II-4 $k, k' \in \mathbf{K}$ y $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \Rightarrow k\mathbf{.}\,(k'\mathbf{.}v) = (k\,.\,k')\mathbf{.}\,\mathbf{v}$

II-5 $\exists\, 1 \in \mathbf{K}\ /\ \forall\ \mathbf{v} \in \mathbf{V}\ \ 1\,\mathbf{.}\,\mathbf{v} = \mathbf{v} = \mathbf{v}\,\mathbf{.}\,1$

Ejemplos de Espacios Vectoriales

V puede abarcar conjuntos tales como matrices m x n, vectores de R^2 y $\mathbf{R}^3$, polinomios de coeficientes reales, etc. La importancia del estudio de los EV es que permite generalizar una teoría válida para cualquier ámbito que cumpla con las condiciones de EV.

Es sencillo verificar que una estructura como (**R^2, +, R, .**) es EV, donde **R^2** es el conjunto de vectores en el plano, **+** es la suma entre vectores, **R** es conjunto de los Reales a considerar como escalares y **.** es el producto de un real por un vector.

Sabemos que la suma en **R^2** se define como:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u1, u2) + (v1,v2) = (u1+v1, u2+v2)$$

La ley de composición interna se verifica por consecuencia de la suma de números reales: u1 + v1 siempre es un real y lo mismo sucede con u2 + v2, resultando que **u + v** tiene dos componentes reales, lo que es necesario y suficiente para su pertenencia a **R^2**.

La asociatividad se deduce también a partir de la asociatividad en **R**:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = (u1+v1, u2+v2) + (w1,w2) = ((u1+v1)+w1), (u2+v2)+w2)) =$$
$$= (u1+(v1+w1)), (u2+(v2+w2)) = \mathbf{u}+ (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

Se deja como ejercitación la validación de las restantes propiedades que demuestran que (**R^2,+,R, .**) es EV, basándose siempre en el criterio de usar las propiedades de los números Reales.

En forma similar se puede demostrar que también son EV:

(**R^3, + , R, .**) El espacio de ternas ordenadas de números Reales
(**R^n, +, R, .**) Espacio de n **-** uplas (o n componentes) ordenadas de números Reales.

Estamos familiarizados con **R^2** y **R^3** (el plano y el espacio), representables geométricamente y en principio puede resultar difícil imaginar espacios como R^4 o R^n. Sin embargo, el uso o aplicación de estos espacios es frecuente:

Supongamos el caso de un avión que sale de un aeropuerto (origen de coordenadas). Su ubicación (x,y,z) en un instante dado está determinada por algún vector de R^3.

Para registrar su trayectoria a lo largo del tiempo de vuelo, necesitaríamos cuatro coordenadas: (x,y,z, t) o sea un vector de **R^4**. Además se podría considerar la velocidad desarrollada a lo largo del vuelo, resultando un vector de **R^5** (x,y,z,t,v).

R^n habilita la posibilidad de considerar además durante el vuelo las lecturas de los instrumentos que sea necesario incorporar. Surge aquí la necesidad de nominar a las variables con subíndices (x_1, x_2, x_3, …, x_n)

En un censo poblacional, cada unidad de observación (personas) es un vector de n componentes: edad, DNI, número de hijos, ingreso mensual, etc.

Otros ejemplos de Espacios Vectoriales:

(**Rmxn, +, R, .**) Lo ya estudiado en la Unidad Álgebra Matricial, permite demostrar que las matrices reales mxn también son EV.

(**R[X], +, R, .**) Otro caso es el conjunto de polinomios en X, construidos con coeficientes de un cuerpo de escalares como **R**., al que denominamos R(X). En efecto, sabemos que la suma entre polinomios es grupo conmutativo, cumpliéndose ademas las propiedades requeridas para el producto por un escalar.

(**C^n, +, C, .**) Espacio de n-uplas de complejos, donde la suma se define como la suma entre las componentes homólogas y el producto por un escalar complejo es el producto de dicho complejo por cada componente compleja de **C^n**.

No son Espacios Vectoriales:

($\mathbf{Z}^2$**, + , Z, .**) (Vectores del plano con componentes enteras). Si bien esta estructura cumple con las propiedades de la suma y del producto, no verifica una de las premisas de la definición: el conjunto de escalares debe ser un cuerpo, y **Z** no lo es.

Tampoco logramos un EV reemplazando **Z** por R: ($\mathbf{Z}^2$**, + , R, .**) en este caso hay un cuerpo de escalares pero no se cumple la ley de composición interna del producto:

Si k es real y **z**=(z1, z2) es un vector de componentes enteras resulta:
k.(z1, z2) = (k.z1, k.z2) en donde ambas componentes son reales, en consecuencia
k.(z1,z2) $\notin$ $\mathbf{Z}^2$

Para facilitar la notación, y cuando ya esté aceptado que (**V, + , K, .**) es EV, en lo sucesivo nos referiremos a dicho espacio directamente como V, o sea por el nombre del conjunto de vectores.

Algunas propiedades que se verifican en todos los EV

Sea **V** un EV

Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ y 0 el neutro aditivo de K $\Rightarrow$ $\underbrace{0}_{\text{escalar nulo}} . \mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{0}}_{\text{vector nulo}}$

Parece obvio para **V=** $\mathbf{R}^2$ o **V=** $\mathbf{R}^3$ pero es importante si consideramos la generalidad que se asigna a **V**.

Sea k un escalar de K:

k . **v** = (k + 0) **v** = **v** . (0 + k) k+0 = k = 0+k porque **K** es cuerpo de escalares (tiene neutro aditivo)

k . **v** = k.**v** + 0.**v** = 0.**v** + k.**v** Se aplicó propiedad II-2

Resulta en consecuencia que 0.v es el neutro aditivo de **V** $\Rightarrow$ 0.**v** = **0**

2) En forma similar, se puede demostrar que el producto de un escalar por el vector nulo es igual al vector nulo:

$$k . \underbrace{\mathbf{0}}_{\text{vector nulo}} = \underbrace{\mathbf{0}}_{\text{vector nulo}}$$

3) (multiplicando por -1 un vector de V, se obtiene su inverso aditivo)

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}: \ (-1) . \mathbf{v} = -\mathbf{v}$$

Subespacios

Se estudiarán los espacios vectoriales incluidos en otro espacio vectorial.

Definición:

> **Sea V un EV, y un conjunto S. S es subespacio de V $\Leftrightarrow$**
>
> 1) $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ condición simple de verificar a partir de la definición de **S**
>
> 2) $\mathbf{S} \neq \phi$ se verifica con sólo identificar un elemento perteneciente a **S**
>
> 3) **S es EV** se verifica cuando se cumple:
>
> a) Ley de composición interna de la suma en S:
>
> $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{S} \Rightarrow (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in \mathbf{S}$ (propiedad I-1 de los EV)
>
> b) Ley de composición externa del producto por un escalar en **S**:
>
> $k \in \mathbf{K}$ y $\mathbf{v} \in \mathbf{S} \Rightarrow (k.\mathbf{v}) \in \mathbf{S}$ (propiedad II-1 de los EV)

Para validar 3) no es necesario comprobar las 10 propiedades de los espacios vectoriales, ya que los elementos de S son elementos del espacio vectorial **V**, entonces se cumplen I-2, I,-3, II-2, II-3, II-4, y II-5. Por ejemplo, la conmutatividad de la suma se cumple en **S** porque la propiedad se cumple para todos los elementos de **V**

Si se cumplen además I-1 y II-1, se deduce la verificación de existencia de neutro e inverso aditivo (I-4 y I-5):

Por Ley de composición externa (II-1):

$\mathbf{v} \in S \Rightarrow (-1).\,\mathbf{v} = -\mathbf{v} \in \mathbf{S}$ (existe inverso aditivo en S)

Por existencia de inverso aditivo en S y Ley de composición interna (I-1):

$\mathbf{v} \in \mathbf{S} \Rightarrow -\mathbf{v} \in \mathbf{S} \Rightarrow (\mathbf{v} + (-\mathbf{v})) \in \mathbf{S}$

$(\mathbf{v} + (-\mathbf{v})) = \mathbf{0} \in \mathbf{S}$ Existencia de neutro en **S**

Propiedad:

> El conjunto cuyo único elemento es el vector nulo de un EV **V** (neutro aditivo de **V**) es un subespacio de **V**

Es sencillo comprobar que { 0 } es subespacio

1) $\mathbf{S} =$ y $\mathbf{0} \in \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{S} \subset \mathbf{V}$

2) $\mathbf{0} \in \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{S} \neq \phi$

3) **S** es EV:

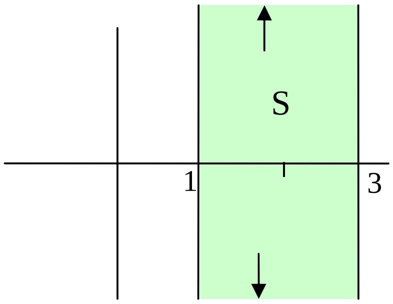
3-a) Ley de composición interna de la suma(LCI): la única suma factible e **S** es

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \in \mathbf{S}$$

3-b) Ley de composición externa (LCE): $\forall\, k \in K: \quad k\,.\,\mathbf{0} = \mathbf{0} \in \mathbf{S}$

Ejemplo

Verificar si es subespacio el conjunto S= { (x1, x2) $\in$ R^2 / 1< x1< 3



S no incluye el elemento nulo o neutro aditivo (0,0) o sea el origen de coordenadas. No es subespacio.

S no verifica la LCI : (2,1) + (2, 2) = (4, 3) $\notin$ S

Tampoco la LCE: v $\in$ S $\Rightarrow$ (-1) **v** $\notin$ S.

Subespacios en R^2:

A partir del ejemplo anterior, se aprecia que S no debería ser un conjunto acotado para cumplir las condiciones de un subespacio (excepto S={ **0** }). Esto induce a pensar en rectas, como posibles subespacios de R^2

Sea el EV **V = R^2** y **S**= { (x,y) $\in$ **V** / y = mx +b} (m, b son escalares genéricos)

S es una recta en el plano de pendiente m y ordenada al origen b

1) Por definición **S** $\subset$ **V** ya que sus elementos pertenecen a **V**
2) para x=0 resulta y= b $\Rightarrow$ (0,b) $\in$ **S** $\Rightarrow$ **S** $\neq \phi$
3) 3-a: Verificaremos LCI:

u, **v** $\in$ **S** $\Rightarrow$ **u**= (u1, m.u1+b); **v**= (v1, m.v1+b)

$\Rightarrow$ **u** + **v** = (u1+v1 , m.(u1+v1) + 2b) que en general $\notin$ **S** ya que si z = u1+v1

$\Rightarrow$ **u** + **v** = (z, m.z +2b) en tanto que la condición en **S** sería (z, m.z + b)

Sólo se verifica la LCI para b=0 (la recta pasa por el origen). Se rechaza la condición de subespacio para rectas que no pasen por el origen de coordenadas.

3-b: Verificamos LCE:

k $\in$ K, **v** $\in$ S $\Rightarrow$ k.**v** = k.(v1, m.v1 + b) = ($\underline{\text{k.v1}}$, m.$\underline{\text{k.v1}}$ + k.b)

el término k.b de la segunda componente implica que se verifica la LCE $\Leftrightarrow$ b=0

Conclusión: **S** es subespacio de **V** $\Leftrightarrow$ b=0

Si la recta **S** no pasa por el origen de coordenadas, no incluye al vector nulo o neutro auditivo **v**=(0,0) $\Rightarrow$ **S** no es subespacio de **V**.

Al estudiar la condición de subespacio de un conjunto es conveniente verificar que incluya al elemento nulo.

En el caso $\mathbf{V}=\mathbf{R}^2$; $\mathbf{S} = \{ (a, 2a+3) \ / \ a \in R\}$ es fácil comprobar que $(0, 0) \notin \mathbf{S}$ ya que para x1=0 resulta la segunda componente x2= 3$\Rightarrow$ **S** no es subespacio de **V**.

En $\mathbf{R}^2$ podemos identificar los siguientes tipos de subespacios:

1)- El subespacio Nulo ($\mathbf{S}= \{0\}$)
2)- Las rectas que pasan por el origen
3)- La totalidad de $\mathbf{R}^2$, ya que se autoincluye ($\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^2$) siendo subespacio de sí mismo

Subespacios en R^3:

Rectas en R^3

Las rectas que incluyen al elemento nulo son las que pasan por el origen. En tal caso las componentes de todos los vectores de la recta son proporcionales entre sí.

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S \Rightarrow \mathbf{u}= k.\mathbf{v}$ donde k es un escalar

Dado un vector $\mathbf{v}=(x,y,z)$ de la recta **S**

Si $x \neq 0$:

$y/x= \alpha \Rightarrow y= \alpha x$
$z/x= \beta \Rightarrow z= \beta x$
$\mathbf{v}= (x, \alpha x, \beta x)$

$\forall \mathbf{u} \in S \Rightarrow \mathbf{u}= k.v \Rightarrow \mathbf{u}= (kx, kx\alpha, kx\beta)$
Siendo k, x, a y b escalares, llamamos t = kx $\Rightarrow$ **u** es de la forma: $\mathbf{u} = (t, \alpha t, \beta t)$

Planos en R^3

La ecuación general de un plano π en $\mathbf{R}^3$ es $ax + by + cz = d$
Despejamos en la ecuación una variable con coeficiente no nulo:

Si $c \neq 0$ $\quad z = [d -ax - by]/c$

$\Rightarrow \mathbf{v} = (x, y, [d-ax - by]/c) \in$ al plano π

$\pi= \{(x, y, [d-ax - by]/c) \} \ ; \quad x,y \in \mathbf{R}$

Esta forma de expresar un plano es apropiada para analizar su condición de subespacio.

Ejemplo:

Determinar el valor de *d* para que el plano **S** definido por la ecuación $2x - 4y -z = d$ sea subespacio de $\mathbf{R}^3$

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{u}= (u1, u2, 2u1 - 4u2 -d); \ v = (v1, v2, 2v1- 4v2 -d)$

$\Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u1+v1, u2+v2, 2(u1+v1) -4(u2+v2) -2d)$

u + **v** sólo responde a la forma general de los vectores del plano **S** cuando d=0

$\Rightarrow$ se cumple la LCI $\Leftrightarrow$ d=0

Sea k $\in$**R**:

k .**v** = k . (v1, v2, 2v1- 4v2 -d) = (kv1, kv2, 2kv1- 4kv2 -kd) que sólo cumple con la forma general de los vectores del plano **S** cuando d=0

$\Rightarrow$ se cumple la LCE $\Leftrightarrow$ d=0

El plano **S** es subespacio de $\mathbf{R}^3$ $\Leftrightarrow$ d=0; es decir cuando el plano pasa por el origen, lo que puede generalizarse para cualquier plano de la forma ax+by+cz=d aplicando un procedimiento análogo.

En consecuencia identificamos en $\mathbf{R}^3$ cuatro tipos de subespacios:

1. {0}
2. rectas que pasan por el origen
3. planos que pasan por el origen
4. $\mathbf{R}^3$

Combinaciones lineales

Sea **V** EV y A un conjunto no vacío cualquiera de elementos de **V**.
A= { **v1,v2,….vk**}

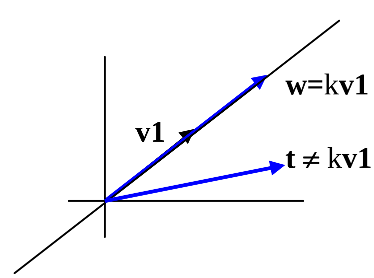
u $\in$**V** es combinación lineal (CL) de los vectores de A $\Leftrightarrow$ $\exists$ los escalares (α1, α2,..; αk) /

$$\mathbf{u} = \alpha 1\mathbf{v1} + \alpha 2\mathbf{v2} + \ldots + \alpha k\mathbf{vk}$$

o bien: $\mathbf{u}= \sum_{i=1,k} \alpha i\ \mathbf{vi}$

Un caso sencillo es cuando **A**={**v1**} (un único vector), en tal caso cualquier vector **w** de la recta a la que pertenece **v1** es combinación lineal de **v1**, ya que **w** es proporcional a v1: **w** = k**v1**

Un vector **t** externo a la recta no puede determinarse a partir de **v1**: t $\neq$ k**v1**



Caso en $\mathbf{R}^2$: probaremos que todo vector de $\mathbf{R}^2$ es CL de dos vectores no paralelos.

Consideremos en $\mathbf{R}^2$ **u**= (u1, u2); **v1**=(v_{11},v_{12}); **v2**= (v_{21},v_{22})

Las componentes de v1 y v2 no son proporcionales $\Rightarrow \dfrac{v_{11}}{v_{21}} \neq \dfrac{v_{12}}{v_{22}} \Rightarrow v_{11}v_{22} \neq v_{12}v_{21}$ **(I)**

Analizaremos **v** como CL de **v1** y **v2**:

u = α1**v1**+α2**v2** ecuación vectorial con incógnitas α1,α2

$(u1, u2) = \alpha1(v_{11},v_{12}) + \alpha2(v_{21},v_{22}) = (\alpha1 v_{11}+\alpha2 v_{21},\ \alpha1 v_{12}+\alpha2 v_{22})$

Resulta el siguiente sistema, con incógnitas α1,α2

$$\begin{cases} \alpha1 v_{11}+\alpha2 v_{21} = u1 \\ \alpha1 v_{12}+\alpha2 v_{22} = u2 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes (vij) del sistema tiene determinante ≠0 de acuerdo a **(I)** ⇒ hay solución única para α1,α2 ⇒ **v** es CL de **v1** y **v2**.

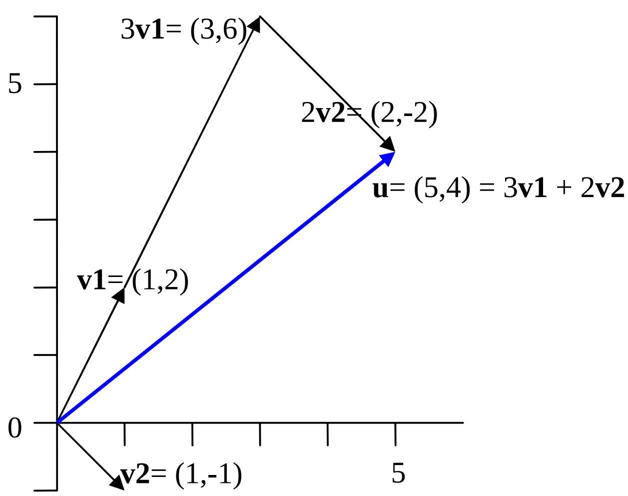
Ejemplo

Encontrar los escalares que permiten expresar **u**= (5, 4) como CL de **v1**= (1, 2) y **v2**= (1, -1). Interpretar gráficamente.

(5, 4) = α1(1, 2) + α2(1, -1)

$$\begin{cases} \alpha1 + \alpha2 = 5 \\ 2\alpha1 - \alpha2 = 4 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado con solución α1 = 3 ; α2 = 2



Ejemplo en R^3.

u= (1,2,3) no puede ser CL de un conjunto de vectores de la forma **v1**=(1,1,1); **v2**=(3,3,3), etc. Es fácil verificar que toda CL de **v1**,**v2** es siempre un vector con tres componentes iguales.

Se advierte que **v2** = 3**v1**. Por ser proporcionales pertenecen a la misma recta al origen, que es un subespacio de $\mathbf{R}^3$, o sea que la suma entre vectores de la recta y sus productos por escalares pertenecen a la misma (Leyes de composición interna y externa en el subespacio)

u= (1,2,3) no pertenece a ese subespacio y no puede ser resultado de las operaciones mencionadas.

Expresión de un vector como CL de otros

Generalizando el caso particular analizado en R^2 resulta el siguiente procedimiento en R^n para estudiar si un vector **u** es o no CL de los vectores de A:

u= (u1, u2, … un) y A= {**v1,v2, … vk**}

$$\mathbf{u} = \alpha 1\mathbf{v1} + \alpha 2\mathbf{v2} + \ldots + \alpha k\mathbf{vk}$$

(u1,u2,….,un) = $\alpha 1\mathbf{v1} + \alpha 2\mathbf{v2} + \ldots + \alpha k\mathbf{vk}$; siendo **v1**=(v_{11}, v_{12},…v_{1n}), etc.

Esta ecuación vectorial da lugar a un S.E.L. al relacionar las componentes una a una:

Cada vector de A da lugar a una incógnita αi $\Rightarrow$ resultan k incógnitas
Cada componente de **u** da lugar a una ecuación $\Rightarrow$ resultan n ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha 1 v_{11} + \alpha 2 v_{21} + \ldots + \alpha k v_{k1} = u1 \\ \alpha 1 v_{12} + \alpha 2 v_{22} + \ldots + \alpha k v_{k2} = u2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \\ \alpha 1 v_{1n} + \alpha 2 v_{2n} + \ldots + \alpha k v_{kn} = un \end{cases}$$

(igualando u1 a la primera componente de la suma: $\alpha 1\mathbf{v1} + \alpha 2\mathbf{v2} + \ldots + \alpha k\mathbf{vk}$)

Siempre que el sistema resulte compatible, **u** es CL de los **vi** (sea o no determinado). No lo es si el sistema es incompatible.

Si k > n, no hay solución única. Esto indica, por ejemplo que hay infinitas expresiones para expresar un vector **u** del plano R^2 como CL de otros tres que no sean paralelos.

Si los 3 vectores fuesen // estarían incluidos en la misma recta, así como todas las operaciones entre éstos $\Rightarrow$ **u** no sería CL de éstos, salvo que también perteneciera a la misma resta.

Ejemplo

Determinar si el vector **u**= (1, 2, 3) es CL de los vectores

v1= (1, 0, 1); **v2**= (0, 1, 1); **v3**= (0, 0, 2)

$\alpha 1(1, 0, 1) + \alpha 2(0, 1, 1) + \alpha 3(0, 0, 2) = (1, 2, 1)$

$$\begin{cases} \alpha 1 + 0\alpha 2 + 0\alpha 3 = 1 \\ 0\alpha 1 + \alpha 2 + 0\alpha 3 = 2 \\ \alpha 1 + 2\alpha 2 + 2\alpha 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad 2\alpha 3 = 3 - \alpha 1 - 2\alpha 2 = 3 - 1 - 4 = -2 \Rightarrow \alpha 3 = -1$$

Sistema comportible determinado $\alpha 1 = 1$; $\alpha 2 = 2$; $\alpha 3 = 1$

La expresíon de u como CL de **v1**, **v2**, **v3** es **u**= v1 + 2v2 - v3

Subespacio generado por un conjunto de vectores

Sea **V** un EV y A un conjunto de vectores de **V**: A= {**v1,v2, … vk**}
El subespacio generado por A es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de A

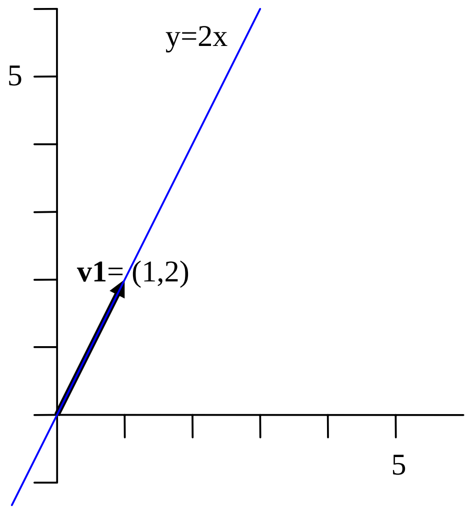
$$\bar{A} = \{ \mathbf{u} \in V \ / \ \mathbf{u} = \sum_{i=1,k} \alpha i \ vi \}$$

Ejemplos:

- El subespacio generado por un único vector **v1**≠ 0 es una recta, ya que todo vector de la recta que lo contiene es de la forma k.**v1**.
- El conjunto cuyo único elemento es el vector nulo sólo puede generar el subespacio nulo
- El subespacio generado por dos vectores colineales no nulos es la misma recta, en cambio si no son paralelos, generan el plano que los contiene.
- Más de dos vectores no nulos coplanares, no todos //, generan siempre el mismo plano al que pertencen.
- El subespacio generado por tres vectores de $\mathbf{R}^3$ no coplanares es $\mathbf{R}^3$.

Sistema de generadores de un EV.

Un conjunto A de vectores es sistema de generadores de un EV V $\Leftrightarrow \bar{A} = \mathbf{V}$
En tal caso, todo vector $\in$ **V** puede expresarse como combinación lineal de los vectores de A.



Por ejemplo, A= {**v1**= (1,2)} genera la recta y= 2x
Lo mismo ocurre con A= {(1,2), (2,4)} (ambos vectores están en la recta)
En cambio si incluyéramos en A un vector externo a la recta, el subespacio generado por A sería $\mathbf{R}^2$.

De igual manera, un conjunto de do o más vectores coplanares son sistema de generadores del plano al que pertenecen.

Dependencia e independencia lineal.

Sea un EV **V** y un conjunto A de vectores de **V**: A= {**v1, v2, … vk**}

Los vectores de A son linealmente dependientes (LD) ⇔∃ un conjunto de escalares {α1,α2,….αk} **no simultáneamente nulos** que verifican:

$$\alpha 1\mathbf{v1}+\alpha 2\mathbf{v2}+\ldots.+\alpha k\mathbf{vk} = \mathbf{0}$$

Los vectores de A son linealmente independientes (LI) ⇔ la ecuación precedente admite solamente la solución trivial (α1=α2= …=αk= 0)

Sean **v1** y **v2** ∈ V, vectores LD:

$\alpha 1\mathbf{v1}+\alpha 2\mathbf{v2}= 0$ con α1 o α2 no nulos. Supongamos α2≠0

$\mathbf{v2} = \dfrac{-\alpha 1\mathbf{v1}}{\alpha 2} = k\,\mathbf{v1}$ ⇒ **v1** y **v2** pertenecen a la misma recta

Si sólo se verificara la solución α1=α2=0 no podría determinarse **v2** a partir de **v1** y éstos serían vectores LI.

El vector nulo es C.L. de cualquier conjunto no vacío de vectores.

$\mathbf{0} = \alpha_1\mathbf{v_1}+\alpha_2\mathbf{v_2}+.+\alpha_k\mathbf{v_k}$ siempre admite la solución $\alpha_1=\alpha_2= .. = \alpha_k = 0$

Todo conjunto de vectores que incluye al vector nulo es L.D.

Si A= {**0, v2, .. vk**}, para cualquier $\alpha_1 \neq 0$ $\alpha_1 . \mathbf{0} + \mathbf{0 v_2} + \ldots \mathbf{0\ v_k} = \mathbf{0}$

(no todos los escalares de la solución son nulos) $\Rightarrow$ A es LD

Un conjunto compuesto por un único vector no nulo es siempre L.I.

$\alpha_1.\mathbf{v_1}=0$ $\Rightarrow$ única solución es $\alpha_1=0$

Un conjunto de vectores es LD $\Leftrightarrow$ alguno de los vectores es C.L. del resto.

Esta propiedad es relevante porque relaciona ambos conceptos.

Sea A={ **v1, v2, …vk**}

a) A es L.D. $\Rightarrow$ $\alpha_1\mathbf{v_1}+\alpha_2\mathbf{v_2}+\ldots+\alpha_k\mathbf{v_k} = 0$ con algún $\alpha_i \neq 0$. Supongamos $\alpha_1 \neq 0$

Despejando :

$$\mathbf{v_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{v_2}+\ldots+\frac{\alpha_k}{\alpha_1}\mathbf{v_k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_1} \text{ es C.L. del resto de los vectores}$$

b) Uno de los vectores es C.L. del resto. Sea éste **v1**.

$\mathbf{v_1}= \beta_2\mathbf{v_2}+ \beta_3\mathbf{v_3}+ \ldots\beta_k\mathbf{v_k}$

Planteamos la ecuación de la dependencia lineal:

$\alpha_1\mathbf{v_1}+\alpha_2\mathbf{v_2}+\alpha_3\mathbf{v_3}+\ldots+\alpha_k\mathbf{v_k} = 0$ sustituyendo **v1**:

$\alpha_1 (\beta_2\mathbf{v_2}+ \beta_3\mathbf{v_3}+ \ldots\beta_k\mathbf{v_k}) +\alpha_2\mathbf{v_2}+\alpha_3\mathbf{v_3}+\ldots+\alpha_k\mathbf{v_k} = 0$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones no nulas: una de ellas resulta para

$\alpha_1= -1$ y los demás $\alpha_i=\beta_i$ $\Rightarrow$ A es LD.

Procedimiento para el análisis de la dependencia lineal

La ecuación vectorial de la dependencia lineal da lugar a un sistema de ecuaciones lineales semejante al caso de combinaciones lineales ya estudiado, con la diferencia de que el sistema es homogéneo y siempre tiene solución. Si la solución es única, es la trivial, resultando vectores LI y si el sistema es indeterminado, los vectores son LD.

Si analizamos la dependencia lineal de los vectores de A en **V= R^n^** y
A= {**v1, v2, ….vk**} resulta:

$\alpha 1\mathbf{v1}+\alpha 2\mathbf{v2}+\ldots+\alpha k\mathbf{vk}=0$ y cada **vi**= $(v_{i1}, v_{i2},\ldots v_{ik})$

$\alpha 1(v_{11},v_{12}..v_{1n})+ \ldots +\alpha k(v_{k1},v_{k2}\ldots v_{kn}) = (0, 0, \ldots 0)$

$$\begin{cases} \alpha 1 v_{11} + \alpha 2 v_{21} + \ldots + \alpha k v_{k1} = 0 \\ \alpha 1 v_{12} + \alpha 2 v_{22} + \ldots + \alpha k v_{k2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \\ \alpha 1 v_{1n} + \alpha 2 v_{2n} + \ldots + \alpha k v_{kn} = 0 \end{cases}$$

En el caso particular de n vectores en $\mathbf{R}^n$ resulta una matriz de coeficientes del sistema nxn, que tiene solución única (la trivial) si y sólo si su determinante es $\neq 0$. En ese caso los vectores son LI. Notar que las columnas de dicha matriz están determinadas por las componentes de los vectores. En consecuencia:

> Un conjunto de n vectores de $\mathbf{R}^n$ es L.I. $\Leftrightarrow$ el determinante de la matriz conformada por su componentes dispuestos en filas o columnas es $\neq 0$

Que es equivalente a:

> El determinante de una matriz cuadrada es nulo $\Leftrightarrow$ alguna fila es CL de las otras

Otro aspecto a considerar es que si el número de incógnitas k, (cantidad de vectores) es mayor que el número de ecuaciones n (cantidad de componentes de los vectores de R^n) el sistema es indeterminado, resultando soluciones no nulas $\Rightarrow$ el conjunto de vectores es L.D.

> Un conjunto L.I. de vectores de $\mathbf{R}^n$ puede incluir a lo sumo n elementos

En $\mathbf{R_3}$ se dan las siguientes alternativas en el análisis de dependencia lineal:

Un único vector: es LI

Dos vectores: si son // (componentes proporcionales) son LD caso contrario, LI

Tres vectores: Si dos de ellos son // son LD, caso contrario es necesario calcular el determinante o resolver el sistema de ecuaciones

Más de tres vectores: siempre son LD

En R4 y para tres vectores, salvo vectores paralelos, es necesario resolver el SEL, pudiéndose aplicar el cálculo del determinante sólo en el caso de 4 vectores. En todos los casos, la presencia de un vector nulo en el conjunto produce dependencia lineal.

Base de un espacio vectorial

> Sea **V** un EV. Un conjunto B de vectores de **V** es una base de dicho espacio $\Leftrightarrow$
> a) B es sistema de generadores de **V**
> b) B es L.I.

Cuál es la principal ventaja de una base respecto de un sistema de generadores LD ?
Si B es una base de V cada vector de V se expresa como una única C.L. de los vectores de dicha base.

En efecto, sea B={**v1, v2, …vn**} base de R^n y un vector genérico de R^n **u**=(d1,d2, ..,dn)

$\mathbf{u}= \alpha 1\mathbf{v_1} + \alpha 2\mathbf{v_2}+\ldots.+\alpha k\mathbf{v_n}$ (cada $\mathbf{v_i} = (v_{i1}, v_{i2}, \ldots v_{in})$)

Para encontrar los escalares $\alpha 1\ldots\alpha n$ que permiten expresar **u** como CL de los vectores de la base planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \alpha 1 v_{11} + \alpha 2 v_{21}+\ldots.+\alpha k v_{n1} = d1 \\ \alpha 1 v_{12} + \alpha 2 v_{22}+\ldots.+\alpha k v_{n2} = d2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \quad \ldots \\ \alpha 1 v_{1n} + \alpha 2 v_{2n}+\ldots.+\alpha k v_{nn} = dn \end{cases}$$

Al ser los vectores LI la matriz de coeficientes del sistema es equivalente a I $\Rightarrow$ D(A)$\neq$0 $\Rightarrow\exists$ solución única.

Sea B' resultado de adicionar a B un vector cualquiera $\mathbf{v_{n+1}}$. **B'** es un sistema de generadores de **V** pero no una base porque sería un conjunto LD. El SEL para expresar **u** como CL de B' tendrá n+1 incógnitas αi y n ecuaciones, es decir infinitas soluciones ($\alpha 1$, $\alpha 2$,….. $\alpha n+1$) y por lo tanto infinitas formas de expresar **u** como CL de los vectores de B'.

La base de uso más frecuente es la base canónica, que en $\mathbf{R^2}$ y $\mathbf{R^3}$ se materializa como el conjunto de vectores unitarios según cada eje de coordenadas. La base canónica de $\mathbf{R^n}$ es:

e1= (1, 0, 0, ….,0)

e2= (0, 1, 0, ….,0)

e3= (0, 0, 1, ….,0)

…………………...

en= (0, 0, 0, ….,1)

Notar que la matriz formada con los vectores canónicos de $\mathbf{R^n}$ es **I** en **Rnxn**

Es evidente que los vectores canónicos son LI y que son necesarios n vectores para generar $\mathbf{R}^n$.

Cuando expresamos un vector lo hacemos normalmente en función de la base canónica

Sea el caso de **v** en $\mathbf{R}^3$: **v**= (a,b,c)

La base canónica de $\mathbf{R}^3$ es B={(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)}

$$\mathbf{v} = (a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$

Las componentes a,b,c del vector **v** son los escalares que permiten expresar **v** como combinación lineal de los vectores de la base.

Suele ser conveniente trabajar con bases distintas de la canónica, las que se compondrán siempre por la misma cantidad de elementos.

Ejemplo

Encontrar una base B para el plano cuya ecuación es

$2x + y - z = 0$

El problema se reduce a encontrar dos vectores pertenecientes al plano que sean L.I. Al ser sólo dos, basta con que no sean proporcionales.

$z = 2x + y$ Asignamos valores arbitrarios a x e y:

$x = 1$; $y=0 \Rightarrow z= 2$ **v1**= (1, 0, 2)

$x = 0$; $y=1 \Rightarrow z= 1$ **v2**= (0, 1, 1) ; B = { (1, 0, 2), (0, 1, 1) }

Cambio de base

Puede ser necesario expresar los vectores de un EV como CL de los elementos de una base en particular, distinta de la canónica. En tal caso las componentes de un vector **u** cambian, sin que cambie el vector. Tales componentes son los escalares que intervienen para expresar **u** como CL de los vectores de la nueva base.

Ejemplo:
Sea **v**= (2, 6) (según la base canónica) - Expresar sus componentes según la base B={ (1, 1), (0, 2) }

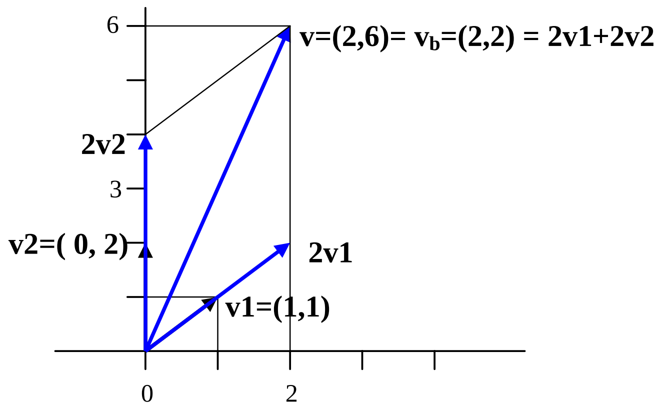
El problema consiste en expresar v como CL de los vectores de la nueva base, determinando las nuevas componentes ($\alpha 1$, $\alpha 2$).

$$(2, 6) = \alpha 1(1, 1)+ \alpha 2(0, 2)$$

$$\begin{cases} \alpha 1 + 0\, \alpha 2 = 2 \\ \alpha 1 + 2\, \alpha 2 = 6 \end{cases}$$

resultando $\alpha 1=2$; $\alpha 2= 2 \Rightarrow$ v en la base B es $\mathbf{v_b}= (2, 2)$

Gráficamente:



Dimensión de un Espacio Vectorial

> La dimensión de un EV está dada por el número de vectores que componen una base del mismo.

La dimensión de $\mathbf{R^3}$ es 3, pero los subespacios incluidos $\mathbf{R^3}$ no iguales a éste, tienen dimensión menor:

Una recta S de R^3 es generada por una base integrada por un único vector **v** perteneciente a dicha recta. La dimensión de S es 1, aunque sus elementos tengan tres componentes. No es posible agregar a la base otro vector u a la base de la recta**:** si **u** $\in$ **S** , ambo serían linealmente dependientes y ya no seria una base. Un vector externo a **S** tampoco puede integrar la base ya que entonces el subespacio generado no sería una recta sino un plano.

Un plano de R^3 tiene dimensión 2 ya que una base B del mismo sólo puede incluir exactamente dos vectores L.I. pertenecientes al plano. Un único vector sólo generaría una recta, en tanto que un tercer vector del plano sería C.L. de los anteriores y su inclusión a B daría lugar a un conjunto L.D. Así, todas las bases de un plano tienen la misma cantidad de elementos y generalizando:

Todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen igual cantidad de elementos.

Aplicación en matrices: Subespacios de matrices

El alumno puede comprobar que muchos conjuntos definidos como matrices especiales nxn son subespacios del EV de matrices nxn. Tal es el caso de las matrices escalares, diagonales, triangulares, simétricas, etc.

Ejemplo:
Sea **V**= conjunto de matrices reales de orden 2x2. Determinar una base de **V** y la dimensión.
La forma general de un matriz genérica A$\in$**V** es:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resultando la base canónica de matrices cuadradas 2x2:

$$B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \text{Dim}(\mathbf{S})=4$$

Ejemplo:
Sea S el subespacio de R2x2 definido por las matrices diagonales.
Determinar una base de S y su dimensión.
La forma general de A$\in$V es

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resultando la base canónica de matrices diagonales 2x2:

$$B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \text{Dim}(\mathbf{S})=2$$

No se puede incluir en la base a la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (por ejemplo) porque ésta no pertenece a **S** (no es diagonal).

Ejemplo:
Sea S el subespacio de R2x2 definido por las matrices escalares. Determinar una base de S y su dimensión.
La forma general de $A \in V$ es

$$A= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resultando la base de matrices diagonales 2x2:

$$B= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{Dim}(\mathbf{S})= 1$$

Bases ortonormales

Una base de Rn B = { u1, u2 .... un} es base ortonormal ⇔ verifica las siguientes condiciones:

1-) **ui • uj** = 0 $\forall\, i \neq j$ Todos los vectores son ortogonales entre sí

2-) **ui • uj** = 1 $\forall\, i = j$ Los vectores tienen módulo unitario.

La base ortonormal de Rn más usada es la base canónica, sin embargo es posible definir bases ortonormales según direcciones preestablecidas .

Se verá en la siguiente unidad que en todo espacio vectorial hay bases ortonormales y que todas ellas son rotaciones de la base canónica.

Rango de una matriz

El rango R de una matriz de orden mxn está determinado por la cantidad de filas LI.

Toda matriz de orden mxn puede considerarse como un conjunto de vectores filas (m vectores de $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$) o de vectores columna (n vectores de R^m). Dichos conjuntos pueden ser LI o LD. Excluyendo aquellas filas que son C.L. del resto se determina la cantidad de filas L.I.

La cantidad de filas LI es siempre igual a la cantidad de columnas L.I., aunque la matriz no sea cuadrada, por lo cual el rango no varía si se lo evalúa a través de filas o de columnas. En consecuencia el rango de una matriz rectangular es menor o igual a la menor de sus dimensiones.

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El máximo rango posible para A es 3 (4 columnas, pero sólo 3 filas). Sin embargo la fila 3 (F3) es CL de F1 y F2: F3 = F1 + F2 $\Rightarrow$ hay sólo 2 filas LI. $\Rightarrow$ R(A)=2

Asimismo, sólo hay dos columnas LI, ya que C1 y C2 son CL de C3 y C4: C2= C3+C4; C1= 2C4

Rango de matrices equivalentes

Si dos matrices son equivalentes tienen igual rango.

A $\equiv$ B por filas $\Rightarrow$ A puede transformarse en B aplicándole sucesivas operaciones elementales de filas.

Las operaciones elementales no modifican la cantidad de vectores LI ya que sólo producen combinaciones lineales de los vectores fila de A (semejante consideración corresponde si A y B fueran equivalentes por columnas).

Las filas de B generan el mismo subespacio que el que generan las filas de A, o sea que la cantidad de vectores L.I. no varía. Resulta R(A)= R(B) que además es igual a la dimensión del subespacio que generan las filas de la matriz.

El procedimiento para determinar el rango de una matriz consiste en aplicar sucesivas operaciones elementales de modo de obtener otra que permita identificar fácilmente los vectores LI. Es posible para ello aplicar Gauss-Jordan.

El rango aporta información importante sobre una matriz. Si A $\in$ **Knxn** y R(A) < n $\Rightarrow \Rightarrow$ alguna fila de A es CL de las restantes $\Rightarrow$ D(A)= 0. Si Aes una matriz principal de un SEL el sistema no tiene solución única.

Consecuencia:

Un sistema de n ecuaciones con n incógnitas cuya matriz principal es A, es compatible determinado $\Leftrightarrow$ R(A) = n

Teorema de Rouche-Frobenius

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible $\Leftrightarrow$ el rango de la matriz de coeficientes del sistema es igual al rango de la matriz ampliada.

$$\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} C1 & C2 & \ldots & Cn & B \end{array} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} a11 & a12 & & a1n \\ a21 & a22 & \ldots & a2n \\ \ldots & & & \\ am1 & am2 & \ldots & amn \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ \\ bm \end{pmatrix} \end{array}}_{A'}$$

R(A)=R(A') es equivalente a decir que B es C.L. de las columnas de A. Si B no es C.L. de las Ci $\Rightarrow$B es LI y A' tiene un vector L.I. más que A

Demostración

$\Rightarrow$

SEL compat $\Rightarrow \exists$ un conjunto solución $\{\alpha 1, \alpha 2, \ldots, \alpha n\}$/ que verifica las ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} a11\alpha 1 + a12\alpha 2 + \ldots + a1n\alpha n = b1 \\ a21\alpha 1 + \ldots \\ \ldots \\ am1\alpha 1 + am2\alpha 2 + \ldots + amn\alpha n = bm \end{cases}$$

El sistema tiene la forma:

$C1\alpha 1 + C2\alpha 2 + \ldots + Cn\alpha n = B \Rightarrow$ B es CL de los vectores columna de A.

$\Leftarrow$

R(A)=R(A') $\Rightarrow$ B es CL de las columnas Ci $\Rightarrow \exists \{\alpha 1, \alpha 2, \ldots, \alpha n\}$/

$C1\alpha 1 + C2\alpha 2 + \ldots + Cn\alpha n = B \Rightarrow$

$$\begin{cases} a11\alpha 1 + a12\alpha 2 + \ldots + a1n\alpha n = b1 \\ a21\alpha 1 + \ldots \\ \ldots \\ am1\alpha 1 + am2\alpha 2 + \ldots + amn\alpha n = bm \end{cases}$$

$\Rightarrow \{\alpha 1, \alpha 2, \ldots, \alpha n\}$ es solución del SEL y el sistema es compatible

Este teorema complementa el teorema de Cramer en la discusión de S.E.L.. Cramer define las condiciones de solución única para el caso de n ecuaciones con n incógnitas, en tanto que Rouche-Frobenius define cuándo un SEL mxn es compatible.

Ejemplo:

Sea la siguiente la matriz de un S.E.L. y sus transformaciones luego de aplicar 2 pivotes según Gauss Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{\mathbf{1}} & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & \underline{\mathbf{-2}} & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)}_{R(A')\,=\,3}$$

R(A) ≠ R(A') ⇒ El sistema es incompatible

$R(A) = 2$

$R(A') = 3$

Bibliografía

TÍTULO	AUTOR	EDITORIAL
Álgebra Lineal	Lipschutz	Mc. Graw Hill
Álgebra Lineal 5/E	Grossman	Mc. Graw Hill
Algebra Lineal	Lay	Prentice Hall
Introducción al Álgebra Lineal	Anton	Limusa
Introd.al Algebra Lineal	Larson	Limusa
Álgebra Lineal	J. de Burgos	Mc. Graw Hill