

DERIVADAS SUCESIVAS

Existen algunos problemas en los cuales es necesario derivar una función más de una vez. Cuando se deriva una función más de una vez, decimos que es una derivada de orden superior. La derivada de la primera derivada es la segunda derivada, la derivada de la segunda derivada es la tercera derivada, y así sucesivamente. En general, la derivada de orden n de una función $y = f(x)$ se obtiene al derivar n veces sucesivamente. El resultado de esta derivación, es decir, la derivada enésima, se representa mediante las

expresiones: $\frac{d^n y}{dx^n}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n (y)}{dx}$

Ejemplo:

$$y = 6x^5 + 3x^4 + 2x + 6$$

$$y' = 30x^4 + 12x^3 + 2$$

$$y'' = 120x^3 + 36x^2$$

$$y''' = 360x^2 + 72x$$

$$y^{IV} = 720x + 72$$

$$y^V = 720$$

El cálculo de las derivadas sucesivas nos permite conocer el comportamiento de la gráfica de una función.

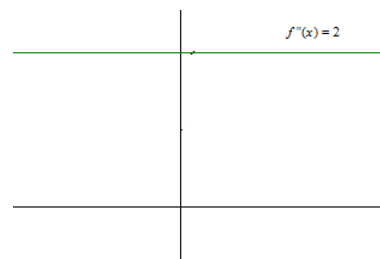
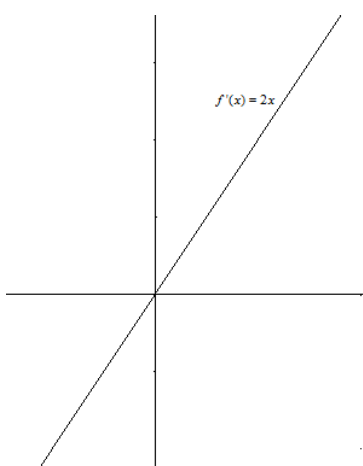
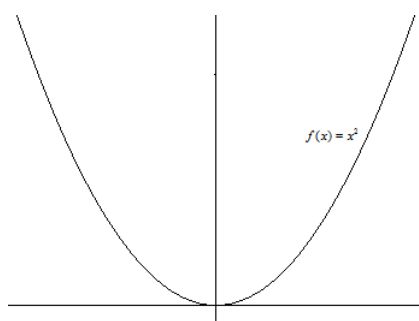
El signo de la derivada primera nos da información sobre el crecimiento o decrecimiento de $f(x)$, mientras que el signo de la derivada segunda nos informa sobre la concavidad de la gráfica de $f(x)$.

Ejemplo:

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$



Si observamos el gráfico de $f'(x) = 2x$, se puede corroborar que para los $x \in (-\infty, 0)$, es: $f'(x) < 0$. Si observamos la gráfica de $f(x)$ en este mismo intervalo comprobaremos que la misma es decreciente. Es decir: $\forall x \in (-\infty, 0)$ se cumple que $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente $\forall x \in (-\infty, 0)$.

Mientras que para los $x \in (0, \infty)$, es $f'(x) > 0$. En este mismo intervalo podemos observar que $f(x)$ es creciente.

Es decir: $\forall x \in (0, \infty)$ se cumple que $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente $\forall x \in (0, \infty)$.

Podemos ver claramente que para todos los $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) > 0$. Y si observamos la gráfica de $f(x)$, podemos comprobar que la misma es cóncava hacia arriba para todos los $x \in \mathbb{R}$.

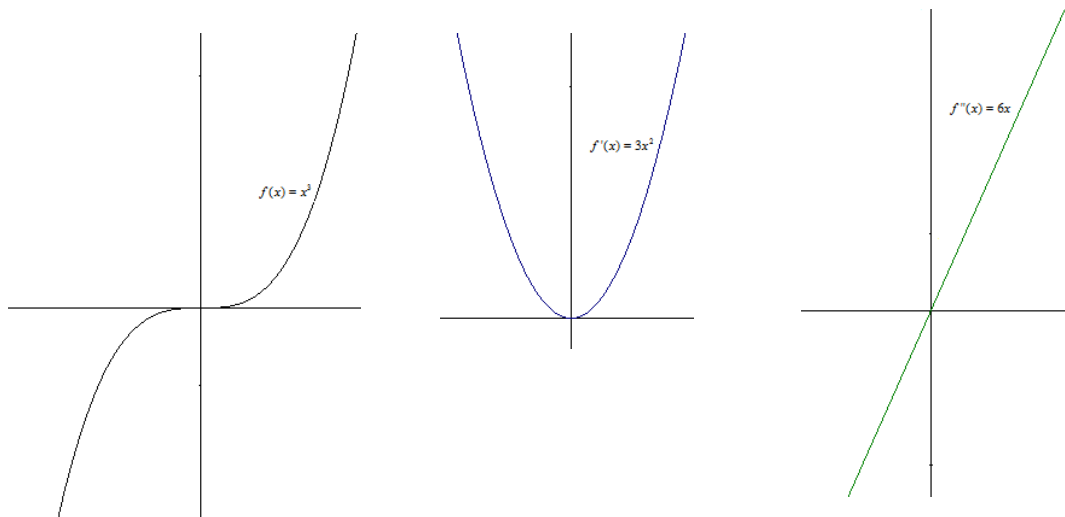
Es decir: $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que $f''(x) > 0 \Rightarrow$ la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba $\forall x \in \mathbb{R}$.

Otro ejemplo:

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$



En el gráfico de la derivada primera: $f'(x) = 3x^2$ se puede observar que para todos los reales, dicha función es positiva. Y la función $f(x) = x^3$ es creciente para todos los reales. Es decir:

$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente $\forall x \in \mathbb{R}$.

En el gráfico de la derivada segunda: $f''(x) = 6x$, se puede observar que $\forall x \in (-\infty, 0)$ se cumple que $f''(x) < 0$. Y la gráfica de $f(x) = x^3$, es cóncava hacia abajo en ese mismo intervalo. Mientras que $\forall x \in (0, \infty)$ se cumple que: $f''(x) > 0$. Y en ese intervalo, la gráfica de $f(x) = x^3$ es cóncava hacia arriba.

CRITERIO DE LA DERIVADA PRIMERA PARA FUNCIONES CRECIENTES O DECRECIENTES

Dada una función $f(x)$ continua y derivable en el intervalo (a,b) :

- si $\forall x \in (a,b): f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en (a,b)
- si $\forall x \in (a,b): f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en (a,b)
- si $\forall x \in (a,b): f'(x) = 0 \Rightarrow f(x)$ es constante en (a,b)

Ejemplo:

Encontrar los intervalos de crecimiento de las siguientes funciones:

1) $f(x) = (x-1)^2$

Hallamos la derivada primera: $f'(x) = 2(x-1)$.

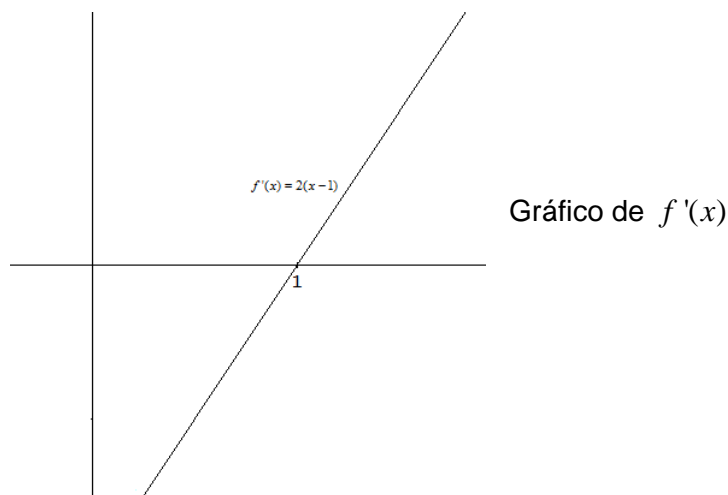
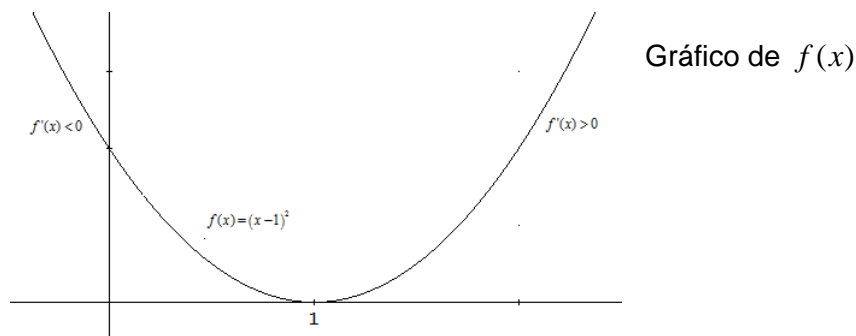
Determinamos para qué valores de x , la derivada es mayor que cero:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2(x-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \quad \therefore \forall x \in (1, \infty) \text{ se verifica que } f(x) \text{ es creciente.}$$

Nos queda determinar para qué valores de x , la derivada es menor que cero:

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2(x-1) < 0 \Leftrightarrow x < 1 \quad \therefore \forall x \in (-\infty, 1) \text{ se verifica que } f(x) \text{ es decreciente.}$$

En $x=1$, se cumple que $f'(x) = 0$.



$$2) f(x) = |x-1|$$

De acuerdo a la definición de valor absoluto, podemos escribir:

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{si } x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1 \end{cases}$$

Es decir:

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

La derivada de $f(x)$, será:

$$f'(x) = 1 \quad \text{si } x > 1 \quad \therefore f'(x) > 0 \quad \forall x \in (1, \infty) \Rightarrow f(x) \text{ es creciente } \forall x \in (1, \infty).$$

$$f'(x) = -1 \quad \text{si } x < 1 \quad \therefore f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, 1) \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente } \forall x \in (-\infty, 1).$$

En $x=1$, no existe la derivada, ya que, si calculamos la derivada en dicho punto, obtenemos:

$$L.D: \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$L.I: \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x+1}{x-1} = -1$$

$$3) f(x) = \frac{x}{x+1}$$

La derivada de esta función es: $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, que es positiva para todo valor de

$x \neq -1$. Es decir: $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$. De donde se deduce que $f(x) = \frac{x}{x+1}$ es creciente en todo su dominio

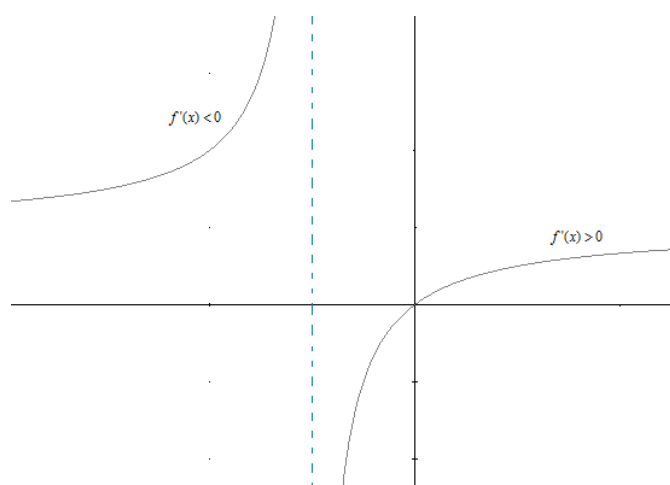
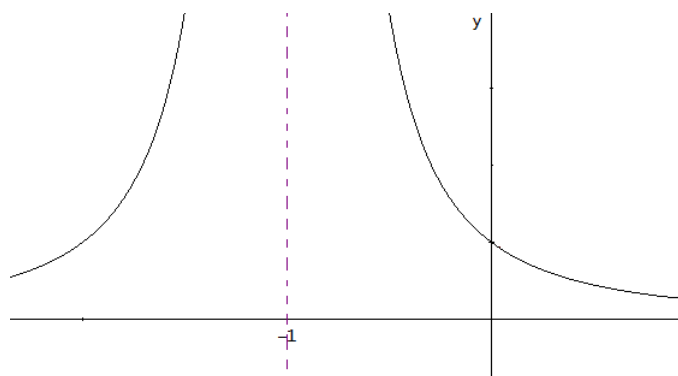


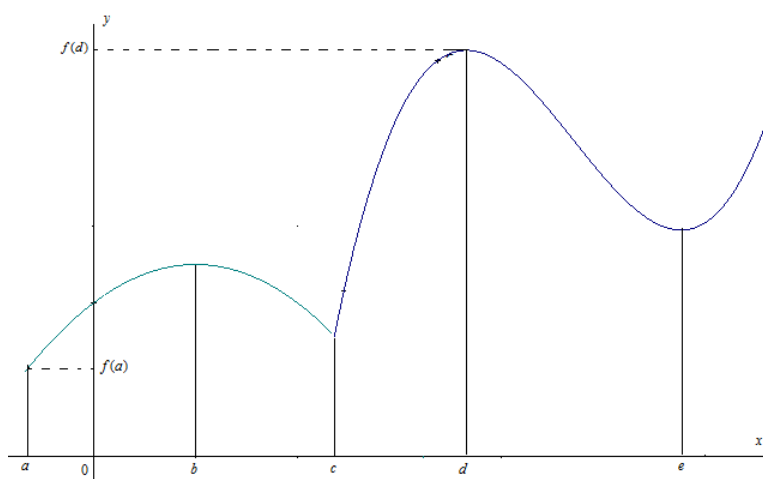
Gráfico de $f(x)$



VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Una de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial son los problemas de optimización, en los cuales se pide determinar la manera óptima de llevar a cabo algo. Muchos de estos problemas se reducen a hallar el valor máximo o mínimo de una función.

Veamos qué se entiende por valor máximo y mínimo de una función.



Definición: Una función f tiene un **máximo absoluto** en d si $f(d) \geq f(x)$ para todos los valores de x pertenecientes al dominio de la función. El número $f(d)$ se llama **valor máximo** de la función en todo su dominio. Igualmente, f tiene un **mínimo absoluto** en a si $f(a) \leq f(x)$ para todos los valores de x pertenecientes al dominio de la función. El número $f(a)$ se denomina **valor mínimo** de la función en todo su dominio.

En el gráfico anterior, si sólo consideramos los valores de x cercanos a b , por ejemplo los $x \in (a, c)$, entonces $f(b)$ es el máximo de esos valores de $f(x)$, y se llama **valor máximo local** de $f(x)$. De igual forma, en el intervalo (b, d) ; $f(c)$ es el **valor mínimo local** de $f(x)$. La función tiene otro mínimo local en e .

Podemos dar esta definición de extremos relativos:

Análisis Matemático
Derivadas (2º parte)
Lic. en Sistemas- UNTDF

Una función f tiene un **máximo local** (ó **máximo relativo**) en b si existe un intervalo abierto que contiene a b , tal que $f(b) \geq f(x)$, para todo x perteneciente a dicho intervalo. Asimismo, f tiene un **mínimo local** (ó **mínimo relativo**) en c , si existe un intervalo abierto que contiene a c , tal que $f(c) \leq f(x)$, para todo x perteneciente a dicho intervalo.

Los extremos relativos ocurren cuando la derivada es cero o no está definida en ese valor. Tales valores se llaman **números críticos**.

Definición de número crítico:

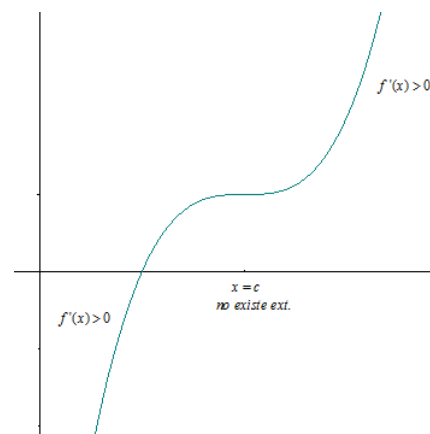
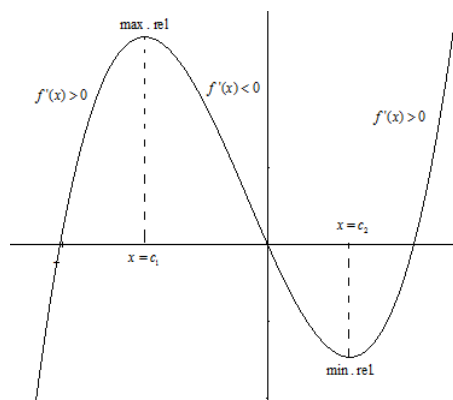
Si una función f está definida en c , se dice que **c es un número crítico de f** , si $f'(c) = 0$, o bien $f'(c)$ no existe.

CRITERIO DE LA DERIVADA PRIMERA PARA EL CÁLCULO DE EXTREMOS.

Sean $f(x)$ una función continua en el intervalo (a,b) , y $c \in (a,b)$ un número crítico.

Sea $f(x)$ derivable en el intervalo (a,b) excepto a lo sumo en c , entonces:

- Si el signo de $f'(x)$ cambia de negativo a positivo en c , $f(c)$ es un mínimo relativo, es decir que en $x = c$, la función presenta un **mínimo relativo**.
- Si el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en c , $f(c)$ es un máximo relativo, es decir que en $x = c$, la función presenta un **máximo relativo**.
- Si $f'(x)$ no cambia de signo en todo el intervalo, entonces **no existe extremo**.



Pasos a seguir para hallar los extremos relativos

Dada $y = f(x)$:

1. Hallar $f'(x)$.
2. Determinar los valores donde $f'(x) = 0$ ó no exista $f'(x)$, es decir encontrar los números críticos (estos son los probables extremos relativos).
3. Formar intervalos en el dominio de la función teniendo en cuenta los números críticos.
4. Probar para cada intervalo el signo de $f'(x)$ y utilizar el criterio anterior para ver si el número crítico obtenido anteriormente es máximo o mínimo, o ninguno de los dos.

Ejemplos:

1) Sea $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}$. Calcular intervalos de crecimiento, máximos y mínimos (si existen).

1. Hallamos la derivada primera de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot (x^2 - 4)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x = \frac{4x}{3 \cdot (x^2 - 4)^{\frac{1}{3}}}$$

2. Determinamos ahora los números críticos, o sea vemos para qué valor $f'(x) = 0$, y para qué valor de x , no existe la derivada:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{3 \cdot (x^2 - 4)^{\frac{1}{3}}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$f'(x)$ no está definida para: $x = 2$ y $x = -2$

Por lo tanto los números críticos son: $x = 0$, $x = 2$ y $x = -2$.

3. Formamos los intervalos dentro del dominio de la función, teniendo en cuenta los números críticos hallados:

Int.	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
Sig. $f'(x)$	-	No existe	+	0	-	No existe	+
Comp. $f(x)$	dec.	Mín.	Crec.	Máx.	dec.	Mín.	crec.

Por lo tanto, podemos concluir que en $x = -2$ existe un mínimo ya que la función pasa de decreciente a creciente. En $x = 0$ existe un máximo, porque la función pasa de creciente a decreciente, y en $x = 2$, otro mínimo.

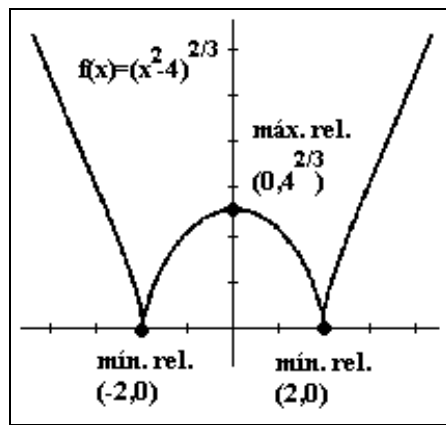
Debemos hallar las ordenadas correspondientes a dichos valores de x :

$$f(-2) = \sqrt[3]{((-2)^2 - 4)^2} = 0$$

$$f(0) = \sqrt[3]{((0)^2 - 4)^2} = \sqrt[3]{16}$$

$$f(2) = \sqrt[3]{((2)^2 - 4)^2} = 0$$

Análisis Matemático
Derivadas (2º parte)
Lic. en Sistemas- UNTDF



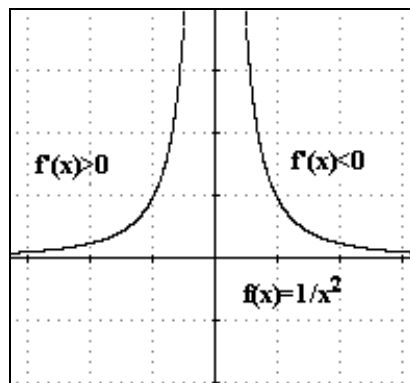
2) Vamos a ver ahora el caso de una función con un punto de discontinuidad.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{Dom. } f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$$

1. La derivada primera es: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$
2. $f'(x) \neq 0$ para cualquier valor del dominio. Debemos investigar qué pasa en $x = 0$ por ser el valor donde $f(x)$ no es continua.
3. Formamos los intervalos dentro del dominio de la función:

Int.	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
Sig. $f'(x)$	+	No existe	-
Comp. $f(x)$	crec.	No existe	dec.

Si bien en $x=0$, la función pasa de creciente a decreciente, en dicho punto no existe ni máximo ni mínimo porque no está definida la función.



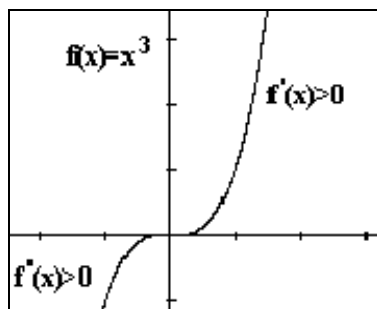
3) $f(x) = x^3$

1. La derivada primera es: $f'(x) = 3x^2$
2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Por lo tanto $x = 0$ es un número crítico.

3. Formamos los intervalos dentro del dominio de la función, teniendo en cuenta el número crítico hallado.

Int.	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
Sig. $f'(x)$	+	0	+
Comp. $f(x)$	crec.	Ni máx. ni mín.	crec.

Como en $x=0$ la función no cambia su crecimiento, no existe ni máximo ni mínimo en dicho punto.



CONCAVIDAD

Una curva es **cóncava hacia arriba** en un intervalo, cuando la misma se encuentra por encima de las rectas tangentes a la curva trazadas en dicho intervalo, y será **cóncava hacia abajo**, cuando la misma se encuentre por debajo de sus rectas tangentes.

Como vimos anteriormente, en el cálculo de las derivadas sucesivas, la derivada segunda nos sirve para determinar los intervalos de concavidad de una función.

Formalicemos este concepto:

CRITERIO DE LA CONCAVIDAD

Sea una función $f(x)$ tal que exista la $f''(x)$ en el intervalo (a,b) :

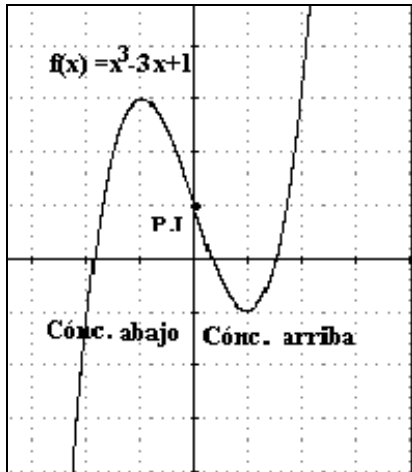
- Si $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el (a,b) .
- Si $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo en el (a,b) .

Ej.) Hallar los intervalos de concavidad de la función: $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Hallamos la derivada segunda de $f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f''(x) = 6x$$



$f''(x) > 0$ cuando $x > 0$, y $f''(x) < 0$ cuando $x < 0$. Por lo tanto la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 0)$, y es cóncava hacia arriba en el intervalo $(0, \infty)$. Cuando $x=0$, la curva cambia su concavidad, o sea en el punto $P(0,1)$. Este punto se llama **punto de inflexión**.

Punto de inflexión

Un punto P de una curva se llama **punto de inflexión**, si en él la curva pasa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa.

Si $f(x)$ tiene un **punto de inflexión** en $x=k$, entonces $f''(k)=0$ ó f'' no está definida en $x=k$.

Ej.1) Hallar los puntos de inflexión y determinar la concavidad de $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 1$

Hallamos la derivada segunda de $f(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6x - 6$$

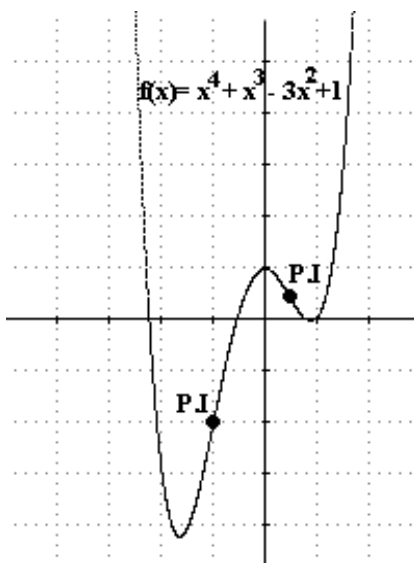
Hallamos los valores de x que hacen cero a $f''(x)$.

$$12x^2 + 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ y } x = 1/2$$

Teniendo en cuenta estos valores, formamos los intervalos:

Int.	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1/2)$	$1/2$	$(1/2, \infty)$
Sig. $f''(x)$	+	0	-	0	+
Comp. $f(x)$	Cónv. hacia arriba	P.I	Cónv.hacia abajo	P.I	Cónv.hacia arriba

P.I (-1,-2) y P.I (1/2, 0,43)



Obs.:

Siendo $f''(k)=0$ y $f'(k)\neq 0$, se puede asegurar que en $x=k$ existe un punto de inflexión.

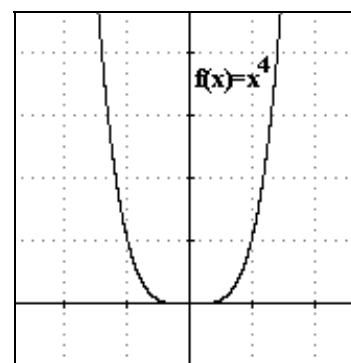
Puede ocurrir que $f''(x_0)=0$ y sin embargo la curva no presente un punto de inflexión en dicho punto, por ejemplo:

Sea la función $f(x) = x^4$

Hallamos la derivada segunda:

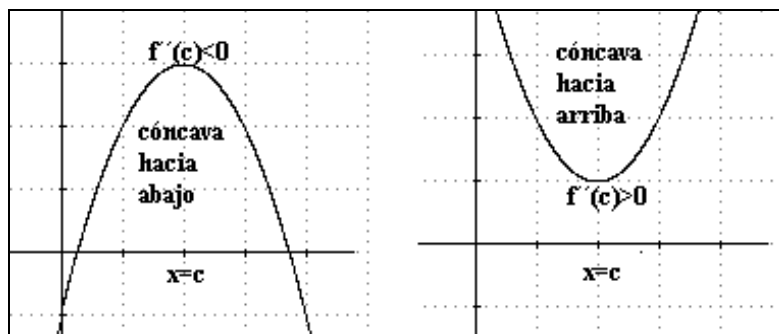
$f'(x) = 4x^3$; $f''(x) = 12x^2$. La derivada segunda se hace cero en $x=0$, pero sin embargo en dicha coordenada no existe un punto de inflexión, lo cual puede ser corroborado al construir el siguiente cuadro:

Int.	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
Sig. $f''(x)$	+	0	+
Comp. $f(x)$	Cónc. hacia arriba	No hay P.I	Cónc. hacia arriba



CRITERIO DE LA DERIVADA SEGUNDA PARA EL CÁLCULO DE EXTREMOS RELATIVOS

Si existe la derivada segunda de $f(x)$, hay un criterio sencillo para el cálculo de extremos ya que si en $x=c$ hay un máximo relativo, la gráfica de $f(x)$ debe ser cóncava hacia abajo y $f''(c) < 0$. Si por el contrario en $x=c$ hay un mínimo relativo, la gráfica de $f(x)$ debe ser cóncava hacia arriba y $f''(c) > 0$.



Criterio de la derivada segunda:

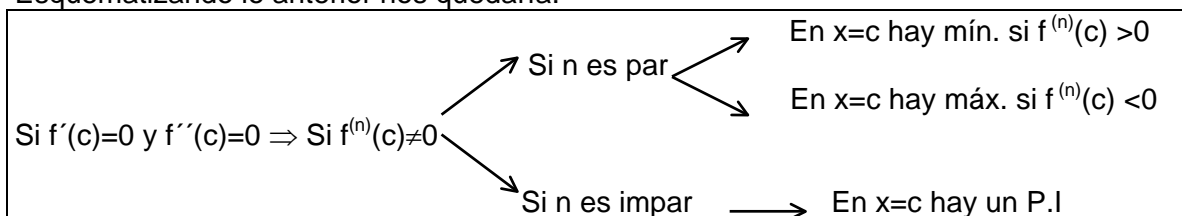
Sea f una función tal que $f'(c)=0$, y tal que existe la derivada segunda de f en un intervalo abierto que contiene a c :

- Si $f''(c) > 0 \Rightarrow$ en $x=c$ existe un mínimo relativo.
- Si $f''(c) < 0 \Rightarrow$ en $x=c$ existe un máximo relativo.
- Si $f''(c) = 0 \Rightarrow$ el criterio no decide.

Si la primera y segunda derivada son cero en $x=c$, debemos seguir derivando hasta encontrar la primera derivada enésima en $x=c$ que sea distinta de cero, esto es: $f^{(n)}(c) \neq 0$. Y luego verificar:

- Si n es de orden impar, en $x=c$ hay un punto de inflexión.
- Si n es de orden par, en $x=c$ habrá un mínimo si $f^{(n)}(c) > 0$; y si $f^{(n)}(c) < 0$ habrá un máximo en $x=c$.

Esquematisando lo anterior nos quedaría:



Ej: Hallar máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $f(x) = x^4 - 4x^3$

Hallamos la derivada primera: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$. La igualamos a cero para encontrar los números críticos: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 \cdot (x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 ; x = 3$

Hallamos la derivada segunda: $f''(x) = 12x^2 - 24x$. Para emplear el criterio de la derivada segunda, debemos evaluar f'' en los números críticos, es decir:

$$f''(0) = 0 \quad f''(3) = 36 > 0$$

Como $f'(3) = 0$ y $f''(3) > 0$, entonces en $x=3$ existe un mínimo relativo en la función. Busquemos la otra coordenada del mínimo, para ello reemplazamos $x=3$ en $f(x)$.

$f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 = -27$. Por lo tanto **P(3,-27) es un mínimo**.

Como $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$, entonces el criterio de la derivada segunda no da información acerca de lo que ocurre en $x=0$. Por lo tanto habrá que seguir derivando:

$$f'''(x) = 24x - 24. \text{ Evaluamos esta derivada en } x=0:$$

$f'''(0) = 24 \cdot 0 - 24 = -24 \neq 0$, por lo tanto en $x=0$ existe un punto de inflexión, ya que la derivada de orden tres, calculada en $x=0$ es distinta de cero. Nos falta hallar la otra coordenada del punto de inflexión, para eso reemplazamos en la función original: $f(0) = 0$, lo que indica que **P(0,0) es un punto de inflexión**.

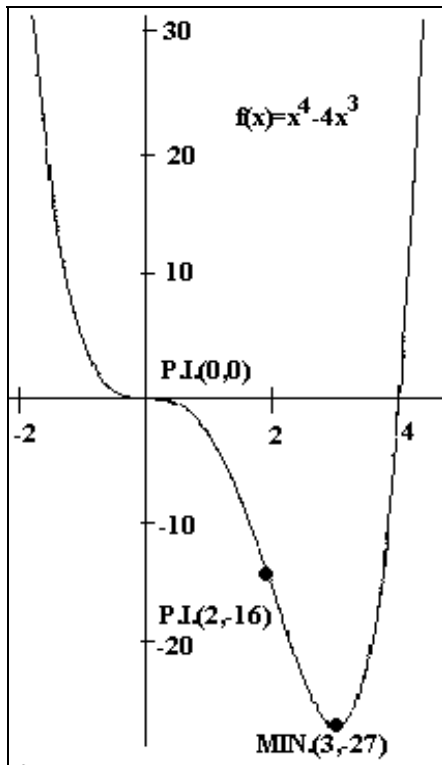
Veamos ahora si existen otros puntos de inflexión, para eso igualemos la derivada segunda a cero:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (12x - 24) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2.$$

Podemos asegurar que en $x=2$ existe otro punto de inflexión ya que $f'(2) \neq 0$ y $f''(2) = 0$. Busquemos la otra coordenada: $f(2) = -16$. O sea que el **punto de inflexión está en P(2,-16)**

Int.	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, \infty)$
Sig. $f'(x)$	-	0	-	-	-	+	+
Sig. $f''(x)$	+	0	-	0	+	+	+
Comp. $f(x)$	dec. conc. arriba	Punto de inflexión	dec. conc. abajo	Punto de inflexión	dec. Conc. arriba	Mínimo	crec. conc. arriba

Con toda esta información se puede bosquejar la curva:



Asíntotas

Ya definimos asíntota horizontal y vertical al estudiar límites de funciones, nos resta aún definir asíntota oblicua.

La recta de ecuación $y = mx + b$ con $m \neq 0$, es **asíntota oblicua** de $f(x)$ si :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$$

¿Cómo hallamos la ecuación de la asíntota?. Para ello debemos encontrar una expresión que nos permita calcular m y b .

Cálculo de m :

Partimos de la expresión: $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$, que es equivalente a escribir:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (mx + b)$$

En esta última expresión, si consideramos que $b=0$ (lo que no afecta al cálculo de m), nos queda:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} mx$$

En el caso que $m=0$, obtendremos una asíntota horizontal.

Cálculo de b :

Partimos de la expresión:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx + b)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (mx + b)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} mx + \lim_{x \rightarrow \infty} b$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} mx + b$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$$

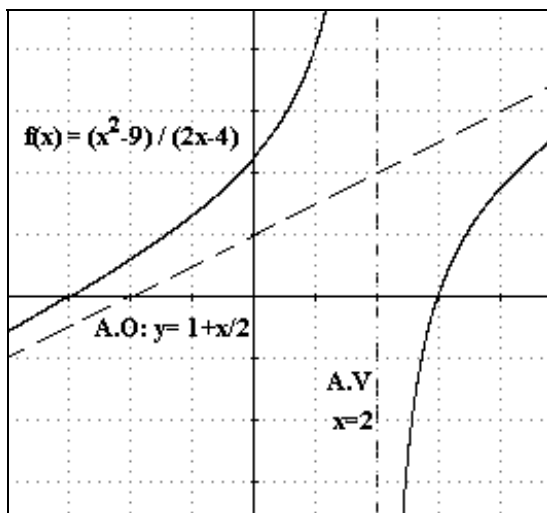
Ejemplo: Hallar la asíntota oblicua de $y = \frac{x^2 - 9}{2x - 4}$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 9}{2x - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 4x} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{2x - 4} - \frac{1}{2}x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9 - x(x - 2)}{2(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9 - x^2 + 2x}{2(x - 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 9}{2(x - 2)} = 1$$

La ecuación de la asíntota oblicua es : $y = \frac{1}{2}x + 1$



GRÁFICA DE FUNCIONES

Hasta aquí hemos visto algunos conceptos (crecimiento, concavidad, asíntotas, máximos, mínimos, puntos de inflexión,...) que nos serán muy útiles para poder graficar funciones. Para graficar una función, tendremos en cuenta:

Dominio: El primer paso consiste en determinar el dominio de la función, es decir el conjunto de los valores de x para los cuales está definida $f(x)$.

Intersección con los ejes: Hallar los puntos donde la curva corta a los ejes x e y .

La intersección con el eje y (ordenada al origen), se halla cuando $x=0$.

Para determinar la intersección con el eje x , se asigna a y el valor: $y=0$, y se despeja x .

Simetría: Verificar si la función es par o impar.

Si $f(x) = f(-x)$, entonces $f(x)$ es par, y la curva que la representa es simétrica respecto al eje y .

Si $f(x) = -f(-x)$, entonces $f(x)$ es impar, y la curva que la representa es simétrica respecto al origen.

Asíntotas: Verificar si la función tiene asíntota vertical, horizontal u oblicua.

i) **Asíntotas verticales:** Recordar que la recta $x=a$, es una asíntota vertical si es verdadera al menos una de las siguientes afirmaciones:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

En el caso que la función dada sea racional de la forma: $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, recordar que si $f(a) \neq 0$, siendo $g(a)=0$, entonces la gráfica de $F(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=a$.

ii) **Asíntotas horizontales:** Recordar que si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, ó $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y=f(x)$.

iii) **Asíntota oblicua:** La recta $y=mx+b$ es asíntota oblicua de $f(x)$ si se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx+b)) = 0$$

Números críticos: Hallar los números críticos de la función, que son los números c en los cuales $f'(c)=0$ ó donde $f'(c)$ no existe.

Extremos relativos: Una vez hallados los números críticos, se puede aplicar el criterio de la derivada primera. Si f' cambia de positiva a negativa en el número crítico c , entonces $f(c)$ es un máximo relativo; si por el contrario f' cambia de negativa a positiva en c , entonces $f(c)$ es un mínimo relativo. También se puede aplicar el criterio de la derivada segunda: siendo $f'(c)=0$, y $f''(c)>0$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo, mientras que si $f''(c)<0$ entonces $f(c)$ es un máximo relativo. Si $f'(c)=0$ y $f''(c)=0$, habrá que seguir derivando hasta encontrar una derivada distinta de cero en c . Si el orden de esta derivada es impar, entonces en $x=c$ hay un punto de inflexión; mientras que si el orden es par, habrá que verificar el signo de la misma. Si es positiva, en $x=c$ habrá un mínimo, de lo contrario habrá un máximo.

Intervalos de crecimiento o decrecimiento: Si $f'(x)>0$ en un intervalo, entonces $f(x)$ será creciente en dicho intervalo. Si $f'(x)<0$ en un intervalo, entonces $f(x)$ será decreciente en el mismo.

Concavidad y puntos de inflexión: Si $f''(x)>0$ en un intervalo, entonces $f(x)$ es cóncava hacia arriba en ese intervalo. Si $f''(x)<0$ en un intervalo, entonces $f(x)$ es cóncava hacia abajo en dicho intervalo.

Recordar que $f(k)$ es punto de inflexión si se verifica que $f''(k)=0$, siendo $f'(k) \neq 0$.

Con todos estos datos se construye la gráfica de la función.

Ejemplo: Graficar la función $y=x^4 - 6x^2$

Dominio : \mathbb{R}

Intersección con los ejes:

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=0$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow 0 = x^4 - 6x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 6) \Rightarrow x=0; x=\sqrt{6}; x=-\sqrt{6}$$

La curva corta a los ejes en los puntos: $P(0,0)$; $P(\sqrt{6},0)$; $P(-\sqrt{6},0)$

Simetría:

$f(-x) = (-x)^4 - 6(-x)^2 = f(x)$. Como $f(-x) = f(x)$, la función $f(x)$ es par, es decir la gráfica es simétrica al eje y .

Asíntotas:

No tiene asíntotas: horizontal, vertical ni oblicua.

Números críticos:

Para obtener los números críticos hallamos la derivada e igualamos a cero:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x = 0 \Rightarrow 4x \cdot (x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x=0; x=\sqrt{3}; x=-\sqrt{3}$$

Extremos relativos:

Utilizamos el criterio de la derivada segunda:

$$f''(x) = 12x^2 - 12$$

Evaluamos la derivada segunda en cada uno de los números críticos:

$f''(0) = -12 < 0$ \therefore En $x=0$ hay un máximo. Hallamos la otra coordenada del punto, reemplazando $x=0$ en $f(x)$. El máximo está en el punto $P(0,0)$.

$f''(\sqrt{3}) > 0$ \therefore En $x=\sqrt{3}$ hay un mínimo. Hallamos la otra coordenada del punto: $f(\sqrt{3}) = -9$.

Un mínimo está en $P(\sqrt{3}, -9)$.

$f''(-\sqrt{3}) > 0$ \therefore En $x=-\sqrt{3}$ hay un mínimo. Hallamos la otra coordenada del punto: $f(-\sqrt{3}) = -9$.

El otro mínimo está en $P(-\sqrt{3}, -9)$.

Puntos de inflexión:

Para hallar los puntos de inflexión, igualamos la derivada segunda a cero:

$12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x=1; x=-1$. Podemos asegurar que en estas coordenadas existen puntos de inflexión ya que $f'(1) \neq 0$ y $f'(-1) \neq 0$.

Hallamos la otra coordenada de cada uno de estos puntos: $f(1) = -5$; $f(-1) = -5$

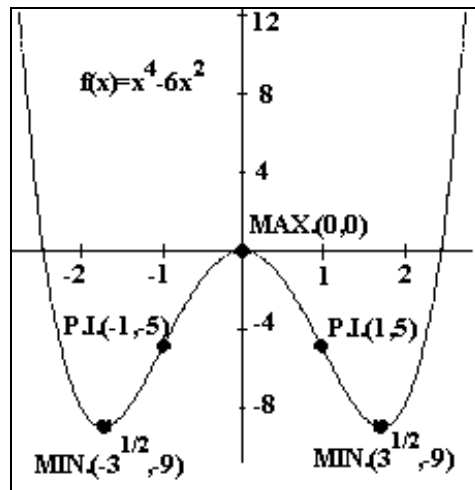
Los puntos de inflexión son: $P(1, -5)$; $P(-1, -5)$

Intervalos de crecimiento y de concavidad

Estos intervalos están detallados en la tabla.

Int.	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
Sig. $f'(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
Sig. $f''(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
Com. $f(x)$	dec. cónc. arriba	M I N	crec. cónc. arriba	P.I	crec. cónc. abajo	M A X	dec. cónc. abajo	P.I	dec. cónc. arriba	M I N	crec. cónc. arriba

Con estos datos podemos graficar la función:



DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

Sea $y=f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto que contiene a x .

La diferencial de x es cualquier número real no nulo; también se lo denomina incremento de x y se indica $dx=\Delta x$.

La diferencial de y viene dada por : $dy= f'(x).dx$. Es decir que la diferencial de una función se define como el producto de su derivada por el cambio (o incremento) de la variable independiente.

Si bien dx puede tomar cualquier valor no nulo, en la mayoría de las aplicaciones se toma dx pequeño.

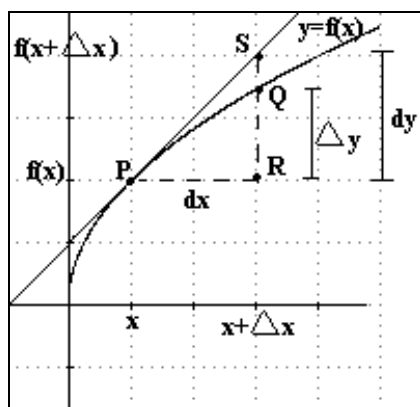
El concepto de diferencial es útil en la determinación de los cambios que presenta la variable dependiente por efecto de la variación de la variable independiente.

También se puede aproximar el valor de una función por medio de los diferenciales (cuando los Δx son pequeños, ya que $dy \approx \Delta y$).

El cálculo de la diferencial de una función cobra mucha importancia en el concepto de marginalidad, ya que la dy es la marginalidad de la función cuando $\Delta x=1$, porque se verifica que: $dy=f'(x)$.

Interpretación geométrica de las diferenciales

Para la interpretación de las diferenciales tomaremos tres tipos de funciones: cóncava hacia arriba, hacia abajo y lineal.



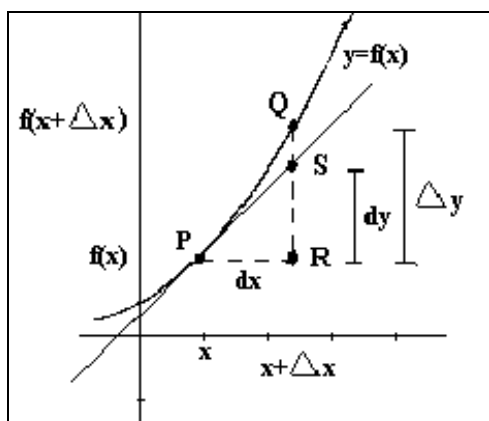
a) Función cóncava hacia abajo:

Partiendo del concepto de que la derivada de la función en x es la tangente trigonométrica del ángulo α , es decir del ángulo SPR , tenemos:

$$f'(x) = \tan \alpha = \frac{RS}{PR} = \frac{RS}{\Delta x} \Rightarrow RS = f'(x) \cdot \Delta x = f'(x) \cdot dx = dy$$

Con lo cual llegamos a la conclusión de que el segmento RS representa la diferencial de la función, es decir RS es la medida de dy .

En este caso, cuando la función es cóncava hacia abajo, se verifica: $dy > \Delta y$.



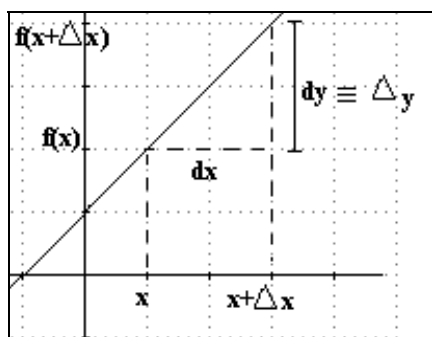
b) *Función cóncava hacia arriba*

Procediendo como en el caso anterior, tendremos:

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{RS}{PR} = \frac{RS}{\Delta x} \Rightarrow RS = f'(x) \cdot \Delta x = f'(x) \cdot dx = dy$$

En este caso, cuando la función es cóncava hacia arriba, resulta: $dy < \Delta y$

c) *Función lineal*



Si la función es lineal, la diferencial de la función coincide con el incremento de la misma: $dy = \Delta y$

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Hasta ahora hemos hallado máximos y mínimos de una función expresada algebraicamente. Ahora vamos a resolver problemas de optimización, por ejemplo, calcular área mínima, volumen máximo, minimizar costos, maximizar beneficios, y para ello habrá que “armar” la ecuación de la función a maximizar o minimizar.

Antes de dar un método general de resolución para estos problemas, veamos unos ejemplos:

Minimización de recursos

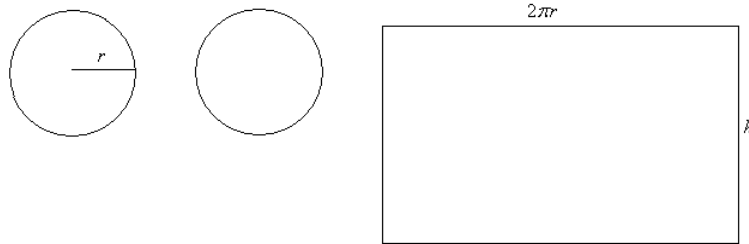
Se quieren fabricar latas cilíndricas de 250cm^3 de capacidad. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de las latas para usar la menor cantidad de metal en su fabricación?.

Para resolver este problema, vamos a seguir un orden:

1) Identificar la o las incógnitas, quizá con ayuda de un diagrama o un dibujo.

En este caso se pide calcular las dimensiones de las latas. Estas son la *altura* y el *radio* de la base. También se pide minimizar la cantidad total de metal que se usa en la lata, que equivale al *área del cilindro*.

Podemos deducir la fórmula. Para ello, imaginemos que quitamos la tapa y el fondo circulares, y que cortamos verticalmente el tubo que queda y después aplanamos y desenrollamos la lámina para obtener un rectángulo:



2) Identificar la función objetivo. Esta es la cantidad que se pide maximizar o minimizar.

Nuestra función objetivo es la *superficie total* de la lata.

El área de cada disco es πr^2 , y el área de la pieza rectangular es $2\pi r h$. En consecuencia, nuestra función objetivo es:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

3) Identificar la o las restricciones. Pueden ser ecuaciones que relacionen variables, o desigualdades que expresen limitaciones para los valores de las variables.

En este caso la restricción es que el volumen debe ser igual a 250cm^3 . Como la fórmula para calcular el volumen de un cilindro es: $V = \pi r^2 h$, debe darse que: $\pi r^2 h = 250$. Al despejar h , resulta:

$$h = \frac{250}{\pi r^2}$$

4) Enunciar el problema de optimización.

Será de la forma: “Maximizar o minimizar la función objetivo sujeta a la o las restricciones”

Si la función objetivo depende de varias variables, resolver las ecuaciones de restricción para expresar todas las variables en función de una sola. Sustituir esas

Análisis Matemático

Derivadas (2º parte)

Lic. en Sistemas- UNTDF

ecuaciones en la función objetivo para expresarla como una función de una sola variable. Sustituir las ecuaciones en las restricciones de desigualdad necesarias para ayudar a determinar el dominio de la función objetivo.

$$\text{En este caso: } S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{250}{\pi r^2} \Rightarrow S(r) = 2\pi r^2 + \frac{500}{r} \quad \text{con } r > 0$$

5) Calcular el máximo (o mínimo) de la función objetivo.

Se aplican los criterios estudiados anteriormente.

Determinamos la derivada primera:

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{500}{r^2}$$

Hallamos los valores de r , para los cuales: $4\pi r - \frac{500}{r^2} = 0$, despejamos r :

$$4\pi r = \frac{500}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{500}{4\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{125}{\pi}} \Rightarrow r = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \cong 3,41$$

La superficie para este valor de r , será:

$$S = 2\pi \cdot \frac{25}{\left(\sqrt[3]{\pi}\right)^2} + \frac{500}{\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}} = 50\sqrt[3]{\pi} + 100\sqrt[3]{\pi} = 150\sqrt[3]{\pi}$$

La altura de la lata será:

$$h = \frac{250}{\pi r^2} = \frac{250}{\pi \cdot \frac{25}{\sqrt[3]{\pi^2}}} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} \cong 6,82$$

Entonces, la lata que necesita la mínima cantidad de metal tiene una altura aproximada de 6,82cm, y un radio aproximado de 3,41cm. Para esa lata se necesitan 220cm^2 de metal.

Comprobación:

Si sustituimos la expresión exacta: $r = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$, en la fórmula de h , obtenemos:

$$h = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}, \text{ que es exactamente el doble de } r.$$

Dicho de otro modo, la altura es igual al diámetro, por lo que estas latas parecerán cuadradas al verlas de costado.

Generalización:

Una lata cilíndrica debe contener $V\text{cm}^3$ de líquido. Determinar las dimensiones que

minimicen el costo de la hojalata. Rta: $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

Maximización de un área

Se desea construir un corral rectangular adosado a un paredón. Se compraron 100m de alambre de tejido. ¿Cuáles son las dimensiones que determinan el área máxima?.

Análisis Matemático

Derivadas (2º parte)

Lic. en Sistemas- UNTDF

Seguimos los mismos pasos que en el problema anterior:

1) **Identificar la o las incógnitas**

Las incógnitas son las dimensiones del corral, las con x e y .



denotamos

2) **Identificar la función objetivo.**

En este problema se trata de maximizar el área, que es el producto del largo por el ancho, así que la función objetivo es:

$$A = x \cdot y$$

3) **Identificar la o las restricciones.**

Sólo se tienen 100m de alambre. Si observamos la figura, vemos que la suma de las longitudes de los tres lados debe ser igual a 100, así que:

$$x + 2y = 100$$

4) **Enunciar el problema de optimización.**

Se debe maximizar $A = x \cdot y$, sujeta a la restricción: $x + 2y = 100$, con $x > 0$ e $y > 0$.

Como la función a maximizar depende de dos variables, debemos usar la restricción para expresar una variable en función de la otra:

$$y = \frac{100 - x}{2} \Rightarrow y = 50 - \frac{1}{2}x$$

Al sustituir en la función objetivo, se obtiene:

$$A = xy = x \cdot \left(50 - \frac{1}{2}x\right) \Rightarrow A = 50x - \frac{1}{2}x^2$$

5) **Calcular el máximo (o mínimo) de la función objetivo.**

Determinamos la derivada primera de A :

$$A'(x) = 50 - x$$

Igualamos a cero:

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 50 - x = 0 \Leftrightarrow x = 50$$

Hallamos la derivada segunda:

$$A''(x) = -1$$

Como $A''(x) < 0 \Rightarrow$ en $x = 50$, hay un máximo.

El valor correspondiente de y es: $y = 50 - \frac{1}{2} \cdot 50 = 25$

El área máxima será de: $A = 25m \cdot 50m = 1250m^2$