Representación Digital de Números Reales

Elementos de Informática

Conceptos Básicos

Avance

Precisión

Error Absoluto

Error Relativo

Avance

Se denomina avance a la menor diferencia que puede existir entre dos valores representados.

El avance “a” se calcula con la siguiente fórmula:

$$a= b^{-f}$$

Donde b es la base y f la cantidad de cifras fraccionarias.

Ejemplo: se b=10 y f=3

$a= 10^{-3} = 1/10^3= 1/1000= 0,001$ es decir, la sucesión numérica avanza cada 0,001 (1,000, 1,001, 1,002, 1,003)

Precisión

Precisión es el detalle con el que un instrumento o procedimiento puede medir una variable

Por ejemplo, una regla tiene una precisión de milímetro mientras que un metro de electricista tiene una precisión de centímetro. Sin embargo será más exacto medir un muro con un metro que con una regla ya que el instrumento es más apropiado.

Precisión

En la representación de números reales, cuanto menor es el avance mayor es la precisión.

Mayor cantidad de cifras fraccionarias

↓

Mayor Precisión

Error Absoluto

El error absoluto (E) es la diferencia existente entre el número que se desea representar (v_r)y el número representado (v).

$$E = v_r - v$$

Error Relativo

El error relativo "e" pondera el valor del error con el valor del mayor número re presentable v_m.

$$e = \frac{v_r - v}{v_m}$$

¿Cómo representamos estos números?

Distancia de la Tierra al sol en metros

$1{,}496 \times 10^{11}$ → 149.600.000.000 m

Velocidad de la luz

$3{,}0 \times 10^{8}$ m/s → 300.000.000 m/s

Diámetro del glóbulo rojo en metros

$6{,}0 \times 10^{-6}$ → 0,0 0 0 0 0 6 m

Representación de Números Reales

Los números reales, tienen parte entera y parte fraccionaria, por lo que tenemos un rango de números posibles muy amplio.

Por ejemplo, en astronomía podríamos necesitar relacionar valores tales como:

- la masa del sol 2×10^{33} gramos
- la masa del electrón 9×10^{-28} gramos

Se desperdicia recursos

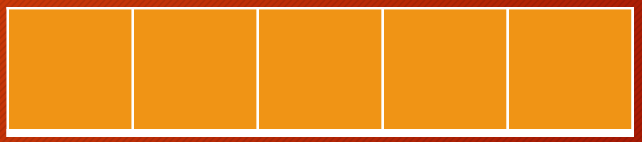
34 dígitos	28 dígitos
Enteros	**Fraccionaria**

62 dígitos

Representación de Números Reales

El rango de los números que se pueden representar con el formato de punto fijo tienen un rango limitado y no proveen precisión.

Pensemos en la posibilidad de representar números utilizando 5 dígitos.



El rango será desde 00000 al 99999

Representación de Números Reales

Que ocurre con los números que se encuentran entre el 0 y el 1?

Si buscamos tener mayor precisión podríamos representar:

Desde el 0,00000 al 0,99999

0,					

El rango será desde [0 al 1) sin incluir el 1

Formato de Punto Flotante

- El Punto Flotante resuelve la necesidad de representar números reales y enteros con un rango de representación mayor que el que ofrece el punto fijo y brinda la posibilidad de incrementar la precisión.

Formato de Punto Flotante

El rango de los números que se pueden representar en punto flotante no depende de la cantidad de dígitos significativos.
Este formato permite aumentar el rango y obtener precisión.

Formato de Punto Flotante

La representación en punto flotante es la versión para computadoras de la notación científica utilizando base 2

Utiliza el formato:

$$n = \text{mantisa} \times b^{\text{exponente}}$$

$$n = \text{mantisa} \times 2^{\text{exponente}}$$

Formato de Punto Flotante

Representación utilizando n bits

s	e	m

- s es el bit de signo (0 positivo,1 negativo)
- e es el exponente representado en q bits
- m es la mantisa, representada con p bits en binario.
- $1 + q + p = n$ (bits)

Normalización

Representación ambigua: en esta notación los números tienen infinitas representaciones.

Por ejemplo

$$n = 0{,}03875$$

Se puede representar como

- ✓ $3{,}875 \times 10^{-2}$
- ✓ $0{,}3875 \times 10^{-1}$
- ✓ $387{,}5 \times 10^{-4}$

Normalización

La condición básica es que los decimales deben representarse en algún formato fijo. Para no desperdiciar bits, la representación utilizada pasará por la normalización de todos los números.

La normalización radica representar los números de una única manera.

Normalización

Dado el número 0,123 x $10^{-3,}$ decimos que:

,123 se llama mantisa normalizada

-3 se llama exponente.

La normalización ha consistido en la eliminación de todos los ceros situados a la izquierda y en el cálculo del exponente.

$$0.123 \times 10^{-3} = 0,000123$$

Normalización

Ejemplos

$1{,}225 \longleftarrow 0{,}1225 \times 10$

$0{,}0\,0\,0\,0\,328 \longrightarrow 0{,}328 \times 10^{-4}$

$0{,}0428 \longrightarrow 0{,}428 \times 10^{-1}$

$5410 \longleftarrow 0{,}541 \times 10^{4}$

Normalización

Ejemplos

$0{,}95 \times 10$	$\longrightarrow$	$9{,}5$
$0{,}182 \times 10^{-2}$	$\longleftarrow$	$0{,}00182$
$0{,}327 \times 10^{4}$	$\longrightarrow$	3270
$0{,}51 \times 10^{-6}$	$\longleftarrow$	$0{,}00000051$

Normalización

Ejercicio: Expresar en forma normalizada los siguientes números colocando la coma a la izquierda del dígito más significativo.

$13,76 \longleftarrow 0,1376 \times 10^{2}$

$978 \longleftarrow 0,978 \times 10^{3}$

$0,00742 \longrightarrow 0,742 \times 10^{-2}$

$0,00019 \longrightarrow 0,19 \times 10^{-3}$

Normalización

Ejercicio: Expresar los siguientes números a partir de su expresión en notación científica.

$0{,}71 \times 10^{-4} \longleftarrow 0{,}000071$

$0{,}844 \times 10^{5} \longrightarrow 84400$

$0{,}28 \times 10^{3} \longrightarrow 280$

$0{,}16375 \times 10^{-6} \longleftarrow 0{,}00000016375$

Representación de Números Reales

- Existen infinitas formas de representar un número en punto flotante
- Cantidad de bits
- Representación del exponente (binarios puros, exceso a M, etc.)
- Representación de la mantisa
- Esto dificulta el intercambio de información entre distintas computadoras con arquitecturas diferentes.

Estándar IEEE 754

- Se establece el estándar IEEE 754
- Define el formato y las operaciones a utilizar.
- Los números representados en punto flotante se podrán intercambiar entre distintas arquitecturas.
- Es la representación de reales más común actualmente.

Estándar IEEE 754

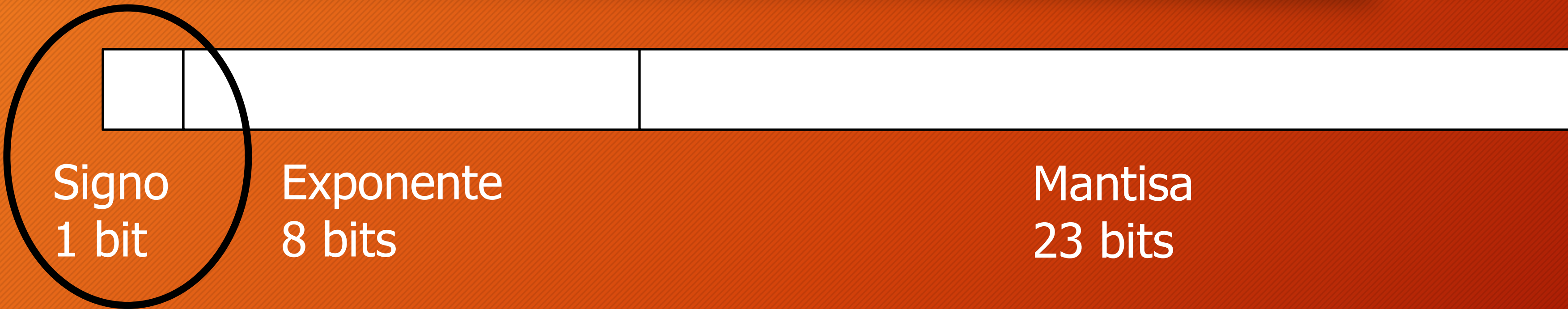
La figura muestra como están distribuidos los bits en el almacenamiento de un número binario de punto flotante, en forma de una palabra de 32 bits. (existen otros formatos pero siguen el mismo concepto)

Signo
1 bit

Exponente
8 bits

Mantisa
23 bits

Estándar IEEE 754
Signo



0 → el número es positivo

1 → el número es negativo

Estándar IEEE 754
Exponente

8 bits

Signo
1 bit

Mantisa
23 bits

El exponente e, se representa con q bits en formato Cero

Desplazado donde M es el desplazamiento o exceso

$M = 2^{q-1} - 1$ Si q =8 entonces:

$M = 2^{8-1} - 1 = 2^{7} - 1 = 127$ (desplazamiento)

$e + M = exp(binario)$ $e + 127 = exp$ $e = exp - 127$

Estándar IEEE 754
Exponente

Ejemplo

Dado e = 6 entonces el exp se representará de la siguiente manera:

e + M = exp

6 + 127 = 133

Exp

128	64	32	16	8	4	2	1
1	0	0	0	0	1	0	1

Estándar IEEE 754
Mantisa

- El dígito más significativo de la mantisa es diferente de cero o lo que es equivalente, la mantisa es máxima.
- El bit más significativo de la mantisa es un 1.

Los números normalizados proporcionan la máxima precisión posible para los números de punto flotante.

Estándar IEEE 754
Mantisa

- Todos los números normalizados tienen un 1 en el bit más significativo
- Se define una representación que omite este bit y solo representa los dígitos que se encuentran a la derecha de la coma.
- Esta representación consiste en un 1 implícito, una coma implícita y luego la mantisa

Estándar IEEE 754
Fórmula

La representación de punto flotante en el Estándar IEEE 745 responde a la siguiente fórmula:

$$(-1)^{\text{signo}} \times 1{,}M \times 2^{\text{exp} - 127}$$

Estándar IEEE 754
Ejemplo 1

Representa el número 17,5 en formato Punto Flotante Normalizado

1. Representar el signo

El número positivo se representa con un 0

Estándar IEEE 754
Ejemplo 1

2. Convertir el número 17,5 en número binario

Parte entera

128	64	32	16	8	4	2	1
0	0	0	1	0	0	0	1

Parte fraccionaria

0,50	0,25	0,125	0,0625	0,03125	…		…
1	0	0	0	0	0	0	0

Estándar IEEE 754
Ejemplo 1

3. Normalizar

$$1\,0\,0\,0\,1,1 \times 2^{0}$$

$$1,0\,0\,0\,1\,1 \times 2^{0+4}$$

Mantisa normalizada: en la representación el uno que se encuentra a la izquierda de la coma no se almacena. Permanece implícito
Los bits, a la derecha, que no se utilizan para representar el número se completan con cero.

Estándar IEEE 754
Ejemplo 1

4. Exponente sesgado

Si utilizamos 8 bits para el exponente, utilizaremos un desplazamiento de 127 posiciones, por lo que al número 4 le corresponde el número 131.

128	64	32	16	8	4	2	1

1	0	0	0	0	0	1	1

Exp = 10000011

Estándar IEEE 754
Representación del número 17,5

Signo= 0

Exp = 10000011

Mantisa = 1,00011

0

1	0	0	0	0	0	1	1

0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Estándar IEEE 754
Ejemplo 2

Representa el siguiente número en base decimal

1

1	0	0	0	0	1	0	1

1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Signo: Negativo

Exponente:

128 + 4 + 1 = 133

133 – 127= 6

Mantisa:

$1,1\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \times 2^{6}$

$-\,1\,1\,0\;\;0\,1\,1\,1,1 \times 2^{0}$

Estándar IEEE 754
Ejemplo 2

n = - 1 1 0 0 1 1 1, 1

64	32	16	8	4	2	1	0,5
1	1	0	0	1	1	1	1

64 + 32 + 4 + 2 + 1 + 05= - 103,5