OPERACIONES EN DIFERENTES BASES

Elementos de Informática

Operaciones aritméticas utilizando diferentes bases

Veremos como realizar diferentes operaciones, tales como:

- la suma
- la resta
- la multiplicación
- La división
- Complemento a la base
- Complemento restringido a la base

Suma

SUMA:
Cuando sumamos dos dígitos de una base podemos obtener dos resultados posibles.

1- Que el resultado sea un símbolo válido de la base.

2- Que el resultado no sea un símbolo válido de la base.

Suma

En el primer caso, no hay problemas y es el resultado.

En el segundo ya no podemos poner el resultado (símbolo no válido) como resultado.

Suma

Lo que se debe hacer es agrupamientos de la base componiendo una unidad para el siguiente peso, y el “resto” queda como resultado de la suma efectuada.

Para ello se obtiene el resultado en base 10, se lo divide por el número de base y se coloca el resto de la división en el resultado y el cociente se lo suma al siguiente producto.

Suma - Ejemplos

Suma

$$
\begin{array}{r}
{\color{red}{1\;\;1\;\;1}} \\
{\color{red}{_1}}1\,A\,B\,2_{12} \\
+\;\; {\color{red}{_1}}B\,3\,6\,7\,8_{12} \\
2\,0\,A\,3\,1\,B_{12} \\
\hline
{\color{red}{3\,0\,3\,8\,8\,9_{12}}}
\end{array}
$$

Resultado en base 10

$2+8+B=21 \;\rightarrow\; \frac{21}{12}=1$ Residuo 9

$1+B+7+1=20 \;\rightarrow\; \frac{20}{12}=1$ Residuo 8

$1+A+6+3=20 \;\rightarrow\; \frac{20}{12}=1$ Residuo 8

$1+1+3+A=15 \;\rightarrow\; \frac{15}{12}=1$ Residuo 3

$1+B+0=12 \;\rightarrow\; \frac{12}{12}=1$ Residuo 0

Multiplicación

El concepto es idéntico al de la suma, la diferencia que la cantidad de agrupamientos será mayor.
Luego de cada cálculo parcial se realiza la suma.

Multiplicación - Ejemplos

Multiplicación

$$
\begin{array}{r}
{\color{red}4\;\;8\;\;2\;\;7\;\;8} \\
5\,A\,3\,8\,B_{16} \\
x \quad C\,9\,D_{16} \\
\hline
{\color{red}4\,9\,4\,E\,0\,F_{16}}
\end{array}
$$

D x B = 143 → $\frac{143}{16} = 8$ Residuo 15 = F

(D x 8) + 8 = 112 → $\frac{112}{16} = 7$ Residuo 0

(D x 3) + 7 = 46 → $\frac{46}{16} = 2$ Residuo 14 = E

(D x A) + 2 = 132 → $\frac{132}{16} = 8$ Residuo 4

(D x 5) + 8 = 73 → $\frac{73}{16} = 4$ Residuo 9

10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F

Multiplicación - Ejemplos

Multiplicación

$$
\begin{array}{r}
\color{red}{3\ \ 5\ \ 1\ \ 4\ \ 6}\\
5\,A\,3\,8\,B_{16}\\
x \quad C\,9\,D_{16}\\
\hline
4\,9\,4\,E\,0\,F_{16}\\
\color{red}{3\,2\,B\,F\,E\,3_{16}}
\end{array}
$$

$9 \times B = 99 \rightarrow \frac{99}{16} = 6$ Residuo 3

$(9 \times 8) + 6 = 78 \rightarrow \frac{78}{16} = 4$ Residuo E =14

$(9 \times 3) + 4 = 31 \rightarrow \frac{31}{16} = 1$ Residuo F = 15

$(9 \times A) + 1 = 91 \rightarrow \frac{91}{16} = 5$ Residuo B = 11

$(9 \times 5) + 5 = 50 \rightarrow \frac{50}{16} = 3$ Residuo 2

10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F

Multiplicación - Ejemplos

Multiplicación

$$
\begin{array}{r}
{\color{red}4\;\;7\;\;2\;6\;\;8}\\
5A38B_{16}\\
x\quad C9D_{16}\\
\hline
494E0F_{16}\\
32BFE3_{16}\\
{\color{red}43AA84}_{16}
\end{array}
$$

C x B = 132 $\Rightarrow$ $\frac{132}{16} = 8$ Residuo 4

(C x 8) + 8 = 104 $\Rightarrow$ $\frac{104}{16} = 6$ Residuo 8

(C x 3) + 6 = 42 $\Rightarrow$ $\frac{42}{16} = 2$ Residuo A = 10

(C x A) + 2 = 122 $\Rightarrow$ $\frac{122}{16} = 7$ Residuo A = 10

(C x 5) + 7 = 67 $\Rightarrow$ $\frac{67}{16} = 4$ Residuo 3

10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F

Multiplicación - Ejemplos

Multiplicación

$$
\begin{array}{r}
5A38B_{16} \\
\times \quad C9D_{16} \\
\hline
\scriptstyle 1\ 1\ 2 \quad \\
{}^{1}\ 494E0F_{16} \\
32BFE3_{16}\quad \\
43AA84_{16}\quad\quad \\
\hline
471FD03F_{16}
\end{array}
$$

$E + E + 4 = 32 \rightarrow \frac{32}{16} = 2$ Residuo 0

$2 + 4 + F + 8 = 29 \rightarrow \frac{29}{16} = 1$ Residuo 13= D

$1 + 9 + B + A = 31 \rightarrow \frac{31}{16} = 1$ Residuo 15 = F

$1 + 4 + 2 + A = 17 \rightarrow \frac{17}{16} = 1$ Residuo 1

10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F

Resta

Nuevamente la resta nos presenta dos desafíos.

Un caso cuando el minuendo es mayor o igual que el sustrayendo, lo cual no reviste problema y efectuamos la resta.

El inconveniente es cuando el minuendo es menor que el sustrayendo, como (en otras bases) le "pedimos al compañero" para hacer la resta

Resta - Ejemplos

Resta

$$\begin{array}{rcccccl}
 & 4 & 1 & 2 & 3 & & \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & 5 & 2 & 3 & 4 & 0 & _6 \\
- & & 4 & 5 & 5 & 5 & _6 \\
\hline
 & 4 & 3 & 3 & 4 & 1 & _6
\end{array}$$

$(0+6) - 5 = 1$

$(3+6) - 5 = 4$

$(2+6) - 5 = 3$

$(1+6) - 4 = 3$

$4 - 0 = 4$

División

La división la vamos a trabajar tal como se especifica su interpretación, es decir como una sucesión de restas.

División - Ejemplos

```
101010 | 110
       -------
-110     111
----
 1001
 -110
 ----
 0110
  110
 ----
  000
```

Complemento

La operación de complementación es importante, puesto que permite reducir el problema de la resta a una simple suma. También facilita la representación de los números negativos

Complemento a la base

En primer lugar definiremos que es el complemento de un número.

El complemento de un número es lo que le falta para llegar al número 10 (independiente de la base) elevado a la cantidad de cifras del número del cual partimos. (10^m , m=cantidad de cifras)

Complemento a la base

Dado un Número B de m dígitos, donde r es el símbolo de la base escrito en esa base , que es siempre 10.

$B' = r^m - B$ se denomina "complemento a la base" de B

$B + B' = r^{m}$.

Complemento a la base

Dado un Número B= 349 de m=3 dígitos, donde r=10 es el símbolo de la base escrito en esa base , que es siempre 10.

$B' = r^m - B$

$B' = 10^3 - 349 =$

$= 1000 - 349 = 651$ => Complemento a la base

$B + B' = r^m.$

$349 + 651 = 1000$

Complemento a la base - Ejemplo

Obtener el complemento a la base del número $6437_{(8}$

$B = 6437_{(8}$

$r = 10$ (es decir 8 escrito en su propia base)

$m = 4$

$r^m = 10^4 = 10000_{(8}$

$B' = r^m - B$

$B' = 10000_{(8} - 6437_{(8}$

$B' = 1341_{(8}$

$$\begin{array}{rrrrrl} & 7 & 7 & 7 & 8 & \\ \cancel{1} & 0 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & _{(8} \\ & 6 & 4 & 3 & 7 & _{(8} \\ \hline & 1 & 3 & 4 & 1 & _{(8} \end{array}$$

Complemento Restringido o a la base menos uno

Es más sencillo por lo general hallar el complemento restringido (o a la base menos uno) de un número que el complemento a la base.

Por este motivo, es frecuente hallar primero el complemento restringido y a partir de éste el complemento a la base.

¿Qué cálculo te resulta más simple?

$$\begin{array}{r} 10000 \\ -\ 2978 \\ \hline 7022 \end{array} \quad \text{Ó} \quad \begin{array}{r} 9999 \\ -\ 2978 \\ \hline 7021 \\ +\ \ \ \ 1 \\ \hline 7022 \end{array}$$

¿Cuál es la diferencia entre ambos resultados?

El segundo resultado es una unidad menor (complemento a la base menos 1)

¿Qué debemos hacer para obtener igual resultado que el obtenido con complemento a la base?

Sumar 1

Complemento Restringido o a la base menos uno

$\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{r^m - 1 - B}$**,** es "complemento restringido de B "

Por lo tanto

$$\mathbf{B + \overline{B} = r^m - 1}$$

Y a partir de el obtenemos el complemento a la base como $B' = \overline{B} + 1$

Complemento Restringido o a la base menos uno - Ejemplo

$$B = 31213_{(4}$$

$$m = 5$$

$$r^{m} = 100000_{(4}$$

$$r^{m} - 1 = 33333_{(4}$$

$$\overline{B} = 33333_{(4} - 31213_{(4} = 02120_{(4}$$

RESTA USANDO COMPLEMENTOS

Acompañaremos la explicación de la resta con un ejemplo.
Dados A=765 $_{(8)}$ y B= 24$_{(8)}$, d=? , r=8

Sea la diferencia d = A - B entre dos números naturales en base r y el mayor de ellos posee m dígitos. Si a ambos miembros se le suma r^m, se tiene:

RESTA USANDO COMPLEMENTOS

$d = A - B$

$d = 765 - 24$ (expresados en base 8)

$$r^m + d = r^m + A - B = A + \underbrace{(r^m - B)}_{\mathbf{B'}}$$

$1000 + d = 1000 + 765 - 24$

$1000 + d = 765 + (1000 - 24)$

$r^m + d = A + B'$

RESTA USANDO COMPLEMENTOS

El problema consiste en hallar **d**, conocida la suma A + B′.

Para evitar hacer la resta **$B' = r^m - B$** , que puede resultar engorrosa, se hace el siguiente artificio: Sumando y restando 1

RESTA USANDO COMPLEMENTOS

$r^m - B = r^m - B + 1 - 1 =$

(complemento a la base menos 1)

$$\overbrace{(r^m - 1) - B}^{\overline{B}} + 1 = B'$$

$1000 – 24 = 1000 – 24 +1 -1$

$1000 – 24 = (1000 – 1) – 24 +1$

RESTA USANDO COMPLEMENTOS

De allí la conveniencia de trabajar con complemento restringido en el sistema binario, por la facilidad de los cálculos.

Por lo tanto:

$$\overline{B} = r^m - 1 - B$$

RESTA USANDO COMPLEMENTOS

Entonces:

Recordando: $r^m + d = A + B'$, a continuación se realizara $A + B'$.

$$r^m + d = A + \overline{B} + 1$$

$$1000 + d = 765 + (1000 - 1) - 24 + 1$$

$$1000 + d = 765 + 777 - 24 + 1$$

$$1000 + d = 765 + 753 + 1$$

$$1000 + d = 1741$$

$$d = 1741 - 1000 = 741$$

RESTA USANDO COMPLEMENTOS

Por último observaremos que al utilizar r^m en nuestra formula, el número final obtenido tendrá un digito mas respecto al de mayor cantidad (ya sea A o B), por esa razón nuestro resultado final serán todos los dígitos menos el mas significativo, que será un 1 (uno) a la extrema izquierda.

RESTA USANDO COMPLEMENTOS - Ejemplos

Vamos a restarle 63 a 77, es decir 77 – 63.

De manera normal

$$\begin{array}{r} 77 \\ -63 \\ \hline 14 \end{array}$$

Calculamos el complemento restringido de 63

$$\begin{array}{r} 99 \\ -\ 63 \\ \hline 36 \end{array}$$

Con Complemento a la base menos 1 (a 9)

$$\begin{array}{r} 77 \\ +36 \\ \hline (1)13 \\ +\quad 1 \\ \hline 14 \end{array}$$

Ejemplos

$$\overbrace{r^m - B + 1 - 1 = \underbrace{(r^m - 1) - B}_{\bar{B}} + 1 = B'}$$

Ejemplo 1 (en base 8):

$$d = (7541)_8 - (254)_8 = A - B$$

- Se complementa B :

$$\begin{array}{r} 7777 \\ -\ \underline{0254} \\ \bar{B}=7523 \end{array}$$

(m=4 ya que el mayor de los dos números tiene 4 dígitos)

- Se realiza la suma $A + \bar{B}$:

$$\begin{array}{r|l} A = & 7541 \\ + & \\ \bar{B} = & 7523 \\ \hline 1 & 7264 \\ & \quad + 1 \\ \hline 1 & 7265 \end{array}$$

- Por lo tanto $A - B = (7265)_8$

RESTA USANDO COMPLEMENTOS

En ejemplo anterior se ha supuesto A>B.

Ahora veremos que sucede si A<B, o sea si la diferencia entre A y B es: A - B = -d.

Para lo cual se hace la operación A - B = -d

RESTA USANDO COMPLEMENTOS

Según la regla anterior es:

$$A + \overline{B} = A + (r^m - 1 - B) = r^m - 1 + \underbrace{(A - B)}_{-d} = r^m - 1 - d$$

Por lo que $A + \overline{B} = r^m - 1 - d$, se observa que el resultado obtenido es el complemento restringido del valor deseado.

RESTA USANDO COMPLEMENTOS

Como $A + \overline{B} = \overline{d}$, para hallar d, se debe hallar el complemento del resultado hallado:

En ambos casos, se ha obtenido una diferencia, mediante una complementación y una suma, que era el objetivo buscado.

En síntesis, para restar dos números naturales cualquiera, A - B, se debe hallar primero $\overline{B}$ luego realizar la suma $A + \overline{B}$.

RESTA USANDO COMPLEMENTOS

Como regla general:

Obteniendo el algoritmo de la resta usando complemento

Siendo A – B

1) Se obtiene el complemento restringido de B

2) Se suma $A + \overline{B}$

3) La operación excedió los m dígitos de A o B ?

4a) Si → Se incrementa en 1 el resultado

4b) No → Se vuelve a complementar el resultado y coloca el signo negativo al mismo

Ejemplos

Ejemplo 2 (en base 2):

$$d = (1011)_2 - (11100)_2$$

- Se complementa B = 11100 (directamente se permutan ceros por unos y unos por ceros).

$$\overline{B} = 00011$$

- Se realiza la suma A + $\overline{B}$:

$$\begin{array}{r|r} A = & 1011 \\ + & \\ \overline{B} = & 00011 \\ \hline & 01110 \end{array}$$

- Se debe complementar $\overline{d} = 01110$.

$\overline{d} = 01110$ permutando: $d = -10001$

- Por lo tanto $(1011)_2 - (11100)_2 = (-10001)_2$