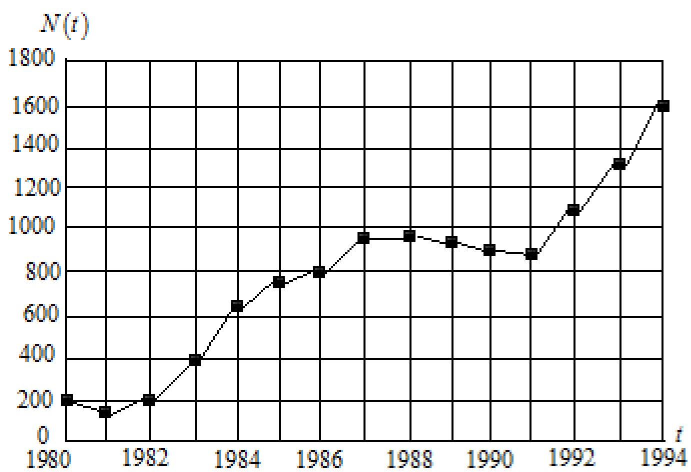
La derivación es una de los conceptos más importantes del Cálculo. La derivación está íntimamente relacionada con la razón de cambio.
Ya hemos analizado anteriormente el concepto de razón de cambio para funciones lineales. En ellas, esta razón de cambio, es decir su pendiente es constante en toda su longitud. En las funciones que no son lineales, la razón de cambio varía a lo largo de la gráfica.
Vamos a introducirnos en el concepto de *derivada* que nos va a proporcionar un método sistemático y directo para calcular esas razones de cambio.

RAZÓN PROMEDIO DE CAMBIO

En la práctica a menudo nos encontramos con situaciones en las cuales es importante establecer las relaciones entre los cambios de una variable con respecto a los cambios en otra variable, para conocer con qué *rapidez* o a qué *razón* está cambiando una con respecto a la otra.

Analicemos este ejemplo:
La siguiente figura muestra la cantidad de vehículos deportivos vendidos cada año en Estados Unidos desde 1980 hasta 1994.

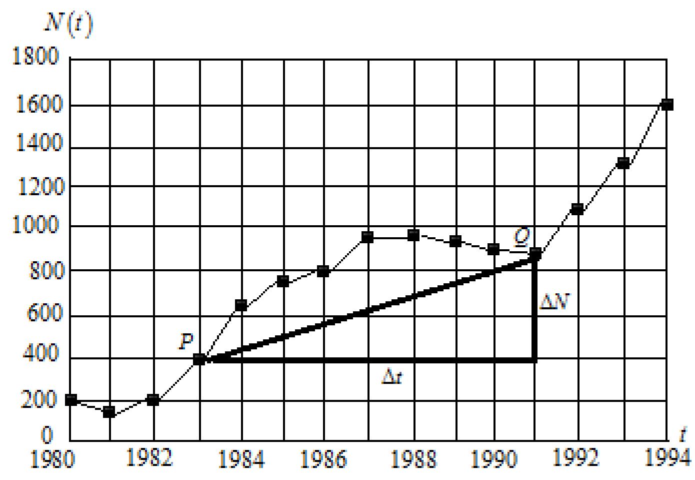


Obs: En el eje vertical, están indicadas las ventas de vehículos deportivos (en miles).

a) Utiliza la gráfica para estimar la razón promedio de cambio de $N(t)$ respecto del tiempo t durante el intervalo $[1983,1991]$ e interpreta el resultado.
b) ¿Durante cuál o cuáles períodos de un año fue máxima la razón promedio de cambio?.

Respuesta:

a) La razón promedio de cambio de N durante el intervalo $[1983,1991]$ se determina con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P\ y\ Q$:



En esta figura vemos que:

Razón promedio de cambio de $N = \dfrac{\Delta N}{\Delta t}$ = Pendiente $PQ \approx \dfrac{900-400}{1991-1983} = \dfrac{500}{8} = 62,5$.

Así, la razón de cambio de N durante el intervalo $[1983,1991]$ es 62,5 aproximadamente.

Como las unidades de N son miles de vehículos deportivos, y las unidades de t son años, entonces el resultado anterior indica que las ventas anuales de automóviles deportivos aumentaron a una razón promedio de 62500 automóviles deportivos al año durante el período: 1983 a 1991.

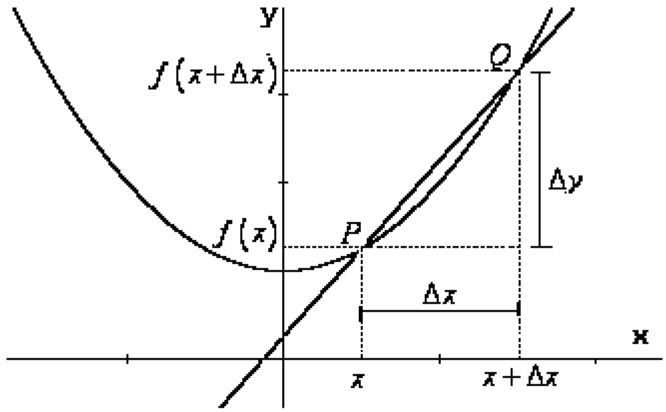
b) Las razones de cambio de las ventas anuales durante períodos sucesivos de un año son cada una de las pendientes de los segmentos de recta individuales que forman la gráfica anterior. Así que la máxima razón de cambio durante un solo año corresponde a los segmentos que tienen la máxima pendiente.
Observando la figura anterior, se ve que hay dos segmentos que corresponden a $[1983,1984]$ y a $[1993,1994]$ cuya pendiente aproximada es 250.

Obs: Tener en cuenta que no se obtienen resultados exactos a partir de una gráfica. Lo único que se puede hacer es *estimar* las razones de cambio.

Def.: *La tasa promedio de cambio o razón promedio de cambio* de una función $y = f(x)$ sobre un intervalo de $[x, x+\Delta x]$ está dado por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Gráficamente: Si $P(x, f(x))$ y $Q(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ son puntos ubicados sobre la gráfica de $y = f(x)$, entonces $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ es la elevación, y Δx es el recorrido horizontal de P a Q. Por la definición de pendiente, podemos decir que Δy/Δx (*razón* *promedio de cambio) es la pendiente de la recta secante que une los puntos* P y Q sobre la gráfica $y = f(x)$.



RAZÓN INSTANTÁNEA DE CAMBIO

Vamos a tratar de resolver ahora el siguiente problema: *hallar la ecuación de la recta tangente a una curva, en un punto determinado.*

Ej: Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$, en el punto $P(1,1)$.

Al tener como dato un punto, sólo nos resta hallar el valor de la pendiente para calcular la ecuación de la recta tangente a la curva, ya que podemos utilizar la ecuación:

$$y_{tan\,g} = m(x - x_0) + y_0$$

Sabemos que para calcular la pendiente de una recta necesitamos dos puntos y sólo tenemos uno. Podemos calcular una aproximación a la pendiente m, si elegimos puntos $Q(x, x^2)$ cercanos a P en la parábola y así calculamos la pendiente m_{PQ} de la recta secante que pasa por P y Q.

Si tomamos cualquier valor $x \neq 1$, entonces la pendiente de la recta secante será:

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Tomemos valores cercanos a $x = 1$, tanto por derecha como por izquierda y hagamos una tabla para ver hacia qué valor tiende la pendiente de la recta secante:

x	m_{PQ}
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001
0.999	1.999
0.99	1.99
0.9	1.9
0.5	1.5
0	1

Por ejemplo, si tomamos el punto $Q(1.1\ ,\ 1.21)$, la pendiente será:

$$m_{PQ} = \frac{1.21 - 1}{1.1 - 1} = 2.1$$

Si tomamos el punto $Q(1.001\ ,\ 1.002)$, la pendiente será:

$$m_{PQ} = \frac{1.002001 - 1}{1.001 - 1} = 2.001$$

Si observamos la tabla, vemos que cuanto más se acerca Q a P, esto es, tomando valores de x cada vez más cercanos a $x=1$, los valores de la pendiente m_{PQ}, se acercan cada vez más a 2.

O sea:

$$x \to 1^{+} : m_{PQ} \to 2 \qquad x \to 1^{-} : m_{PQ} \to 2$$

Esto significa que *la pendiente de la recta tangente es el límite de las pendientes de las rectas secantes*, y se expresa de la siguiente manera:

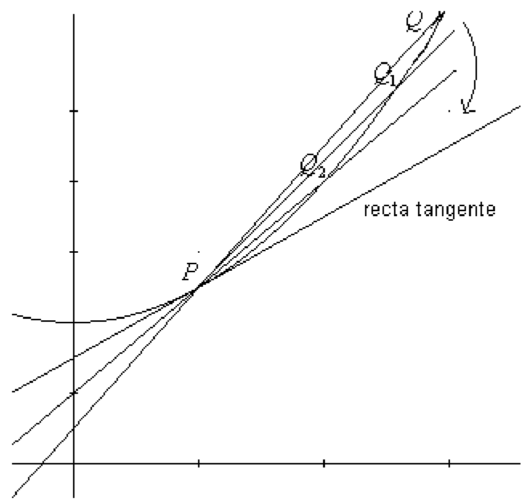
$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m_{R\tan g} \text{ , en nuestro caso: } \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

Ahora, con este dato: $m=2$, podemos hallar la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $P(1,1)$:

$$y_{\tan g} = 2(x-1)+1 = 2x-1$$

En general, partiendo del gráfico de la recta secante podemos llegar al gráfico de la recta tangente, de la siguiente manera:

Si el punto Q se va acercando al punto P, la pendiente de la recta secante se va acercando a la pendiente de la recta tangente, cuando pasa esto decimos que la pendiente de la recta tangente a la curva, es el límite de las pendientes de las rectas secantes.



Formalmente podemos decir:

La recta tangente a la curva $y = f(x)$, en el punto $P(x, f(x))$ tiene por pendiente el

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = m$$, siempre que este límite exista.

Derivada de una función

Hasta ahora hemos utilizado el límite para definir la pendiente de la recta tangente a una curva, pero también se usa para definir una de las dos operaciones fundamentales del cálculo: la derivada.

La derivada de f en x viene dada por $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, siempre que este límite exista.

A $f'(x)$ se la llama *función derivada*.

La derivada también se llama <u>*razón instantánea de cambio*</u> de la función $y = f(x)$ con respecto a la variable x.

El proceso de cálculo de la derivada de una función se llama derivación.

Otras notaciones, además de f´, son: $\dfrac{dy}{dx}$; $y´$; $\dfrac{d}{dx}\big(f(x)\big)$; $D_x(y)$

Resumiendo:

La *pendiente de la recta secante* que pasa por los puntos de la curva f: $P\big(x, f(x)\big)$ y $Q\big(x+\Delta x, f(x+\Delta x)\big)$, se determina con la razón promedio de cambio, es decir el cociente de diferencias:

$$m_{\sec} = \text{Pendiente de la recta secante=Razon promedio de cambio=}\ \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

La *pendiente de la recta tangente* que pasa por el punto de la curva f: $P\big(x, f(x)\big)$, se determina con la razón instantánea de cambio, es decir, la derivada:

$$m_{\tan} = \text{Pend. de la recta tang.=Razon inst.de cambio=Derivada=f }'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Derivada en un punto

Si queremos hallar la derivada de una función en un punto x_0, reemplazamos este valor en la función derivada, es decir hallamos $f´(x_0)$; o podemos aplicar la siguiente definición:

$$\boxed{f´(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \qquad (1)$$

Si existe este límite, entonces existe la derivada en el punto x_0, esto quiere decir que debe existir el límite por derecha y por izquierda de dicha función, cuando $x \to x_0$.

Cálculo de la derivada de una función por definición

Ejemplo 1: Hallar la derivada de la función: $y = f(x) = x^2$

$$f´(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x$$

¿Qué significado gráfico tiene este resultado?. Como la derivada nos permite calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $\big(x, f(x)\big)$, resulta que si queremos por ejemplo, calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $x_0 = 1$, será $m = 2.1 = 2$, o sea $f'(1) = 2$.

También podríamos calcular la pendiente con la otra definición de la derivada en el punto:

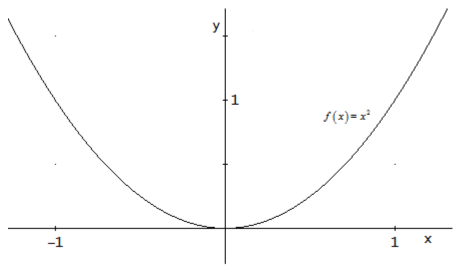
$$f´(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

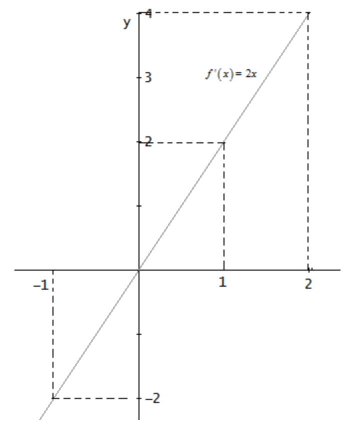
Si quisiéramos calcular la pendiente en el punto $x_0 = 2$, sería $m = 2.2 = 4 \Leftrightarrow f'(2) = 4$.

O también:

$$f´(2) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

Gráficamente se pueden corroborar estos valores:





Se puede observar en el gráfico correspondiente a la derivada de $f(x)$, es decir $f'(x) = 2x$, que para $x = 1$ le corresponde $f'(1) = 2$ y para $x = 2$, $f'(2) = 4$.

En general, se puede visualizar que para los $x > 0$, si trazáramos rectas tangentes a $f(x) = x^2$, éstas tendrían pendientes positivas. Esto se corrobora en el gráfico de $f'(x) = 2x$, ya que para todos los $x > 0$, el valor de $f'(x)$, es siempre positivo.

Y si trazáramos rectas tangentes a la curva $f(x) = x^2$ para los $x < 0$, resultarían con pendientes negativas, lo cual se puede corroborar en el gráfico de $f'(x)$, ya que los valores de la misma son negativos siempre que los x sean menores que cero.

Ejemplo 2: Hallar por definición la derivada de la función: $f(x) = \sqrt{x}$. Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha curva en los puntos $P(1,1)$, $Q(4,2)$, $R(0,0)$ siempre que sea posible.

$$f´(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Para encontrar la ecuación de la recta tangente en el punto $P(1,1)$, primero debemos hallar la pendiente, es decir:

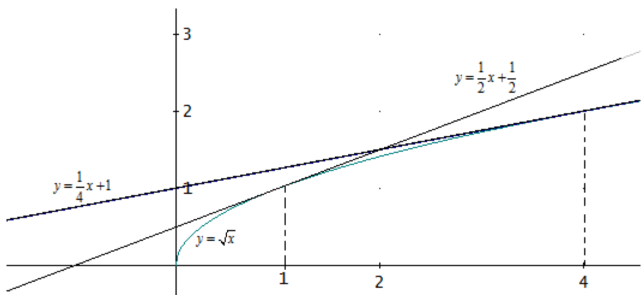
$$f´(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \quad \therefore \; R_{tan\,g} = \frac{1}{2}(x-1) + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $Q(4,2)$ será:

$$f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4} \quad \therefore \; R_{tan\,g}=\frac{1}{4}(x-4)+2=\frac{1}{4}x+1$$

Veamos qué ocurre en el punto $R(0,0)$.

La pendiente no está definida en $x=0$, ya que al sustituir dicho valor en $f'(x)$ se produce una división por cero. No existe la derivada de la función en $x=0$. Por lo tanto no se puede hallar la ecuación de la recta tangente en el punto (0,0)



Derivabilidad y continuidad

Existe una íntima relación entre estos dos conceptos.

Hemos visto anteriormente que si existe el $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, entonces existe la derivada $f'(x)$.

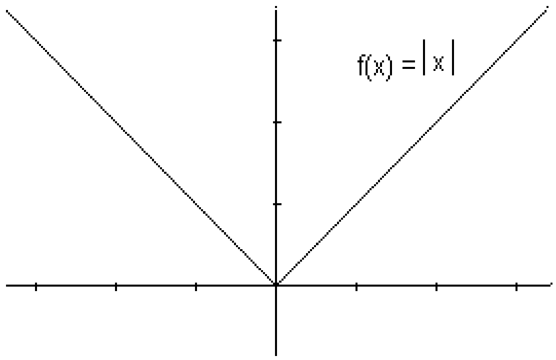
Vamos a ver algunos ejemplos en que dicho límite no existe.

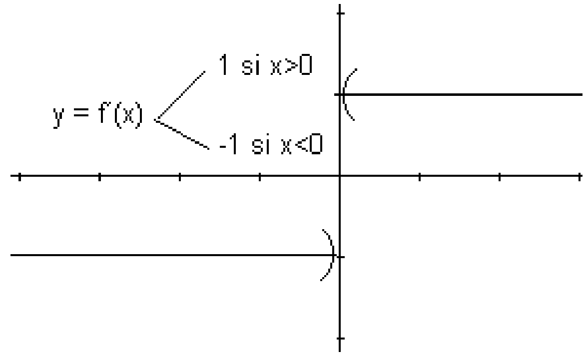
Ej.1: Consideremos la función $f(x)=|x|$, y calculemos su derivada en $x_0=0$. Esta función es continua para todos los reales.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1 & si\ x>0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1 & si\ x<0\end{cases}$$

Como el límite por derecha es distinto al límite por izquierda, entonces no existe el $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$.

La función $f(x)=|x|$ no es derivable en $x_0=0$, es decir la gráfica no tiene recta tangente en el punto (0,0).

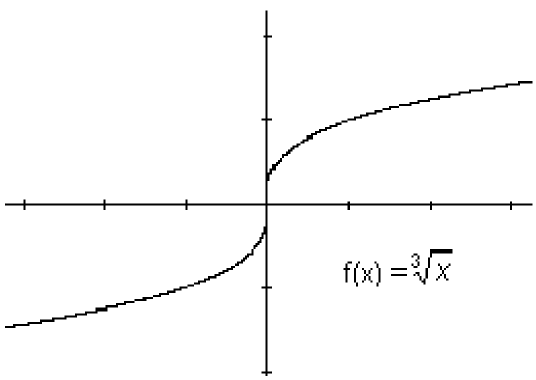


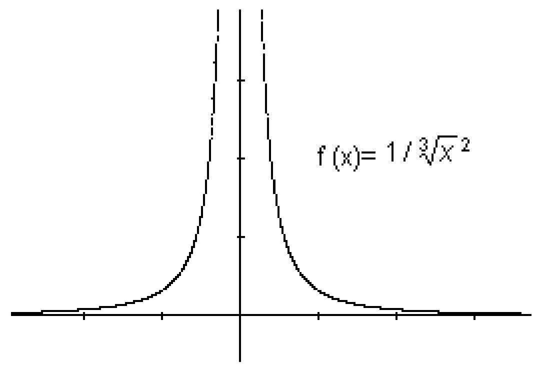


Ej.2: Consideremos la función $f(x)=\sqrt[3]{x}$ y veamos si existe su derivada en $x_0=0$. Esta función es continua para todos los números reales.

$$f´(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2/3}}=\infty$$

Llegamos a la conclusión que $f(x)$ no es derivable en $x_0=0$, ya que no existe límite.





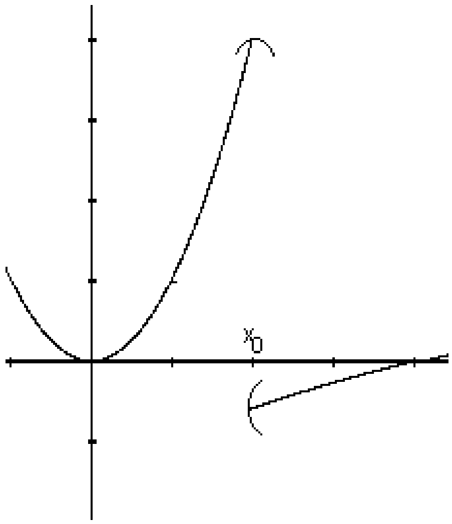
En $x_0=0$ existe una recta tangente vertical.

A partir de estos dos ejemplos, podemos corroborar que:

Una función cuya gráfica presenta un “pico o esquina” o una recta tangente vertical, no es derivable en ese punto.

La derivabilidad en un punto, también queda destruída si la función no es continua en dicho punto.

Si una función es derivable en un punto entonces es forzosamente continua en él, es decir:



Si f es derivable en $x_0 \Rightarrow$ f es continua en x_0, pero la recíproca no es válida.

Vamos a demostrar el teorema:

Si una función f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0

Demostración:

Si x está en el dominio de f, y $x \neq x_0$, entonces $f(x)$ puede expresarse de la siguiente manera:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.(x - x_0)$$

Si calculamos el límite de esta expresión:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} . \lim_{x \to x_0} (x - x_0) =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0).0 = f(x_0)$$

Es decir, llegamos a que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \therefore f$ es continua en x_0.

REGLAS PARA LA DERIVACIÓN

Permiten hallar derivadas sin recurrir a la definición.

1) *La derivada de una constante es cero.*

$$\boxed{\frac{d}{dx}(c) = 0 \quad c \in \mathbb{R}}$$

Gráficamente, esto indica que la pendiente de una recta horizontal es cero.

Demostración:

Sea f la función constante definida por $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Aplicando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

Ejemplos:

$a)\ y = 4 \Rightarrow y' = 0$

$b)\ f(x) = -3 \Rightarrow f'(x) = 0$

2) *La derivada de la potencia enésima de una variable, es el producto de su exponente n por la potencia (n-1) de la variable*. Es decir:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=n.x^{n-1} \qquad n\in\mathbb{R}}$$

Demostración) Vamos a demostrar sólo para el caso que $n\in\mathbb{Z}^+,\ n>1$. Vamos a usar el binomio de Newton.

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x+\Delta x\right)^n-x^n}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n+n.x^{n-1}\Delta x+\dfrac{n.(n-1)}{2}x^{n-2}\left(\Delta x\right)^2+\ldots+\left(\Delta x\right)^n-x^n}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0} n.x^{n-1}+\frac{n.(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x+\ldots+\left(\Delta x\right)^{n-1}=n.x^{n-1}$$

Recordar:

Fórmula del **binomio de Newton:**

$$\left(a+b\right)^n=\binom{n}{0}a^n b^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots.+\binom{n}{n}a^0 b^n$$

Utilizando el símbolo de sumatoria:

$$\left(a+b\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Número combinatorio

Sean $n\in N, m\in N,\ n\le m$*. Se llama número combinatorio de "m sobre n", al símbolo* $\binom{m}{n}$ *, definido por:*

$$\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!\ (m-n)!}$$

Función factorial: $f:\mathbf{N}_0\to N$

$$\begin{cases} f(0)=1\\ f(1)=1\\ f(h+1)=(h+1).f(h) \quad \textbf{si } h\ge 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\,!=1\\ 1\,!=1\\ (h+1)!=(h+1).h\,! \quad \textbf{si } h\ge 1\end{cases}$$

Más adelante se extiende esta regla para exponentes racionales.
Ejemplos:

$a)\ f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3x^2$
$b)\ f(x)=x^5 \Leftrightarrow f'(x)=5x^4$

En el caso que $n=1$, es: $\frac{d}{dx}(x)=1$

3) *La derivada del producto de una constante por una función derivable, es el producto de la constante por la derivada de la función.*

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[c.f(x)\right]=c.\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]}$$

Demostración)

$$\frac{d}{dx}\left[c.f(x)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c.f(x+\Delta x)-c.f(x)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c.\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]}{\Delta x}=c.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]}{\Delta x}=c.f'(x)$$

Ejemplos:

$$a)\frac{d}{dx}\left(3x^4\right)=3.\frac{d}{dx}\left(x^4\right)=3.4x^3=12x^3$$
$$b)\frac{d}{dx}\left(-4x^{10}\right)=-4.\frac{d}{dx}\left(x^{10}\right)=-4.10x^9=-40x^9$$

4) L*a derivada de una suma (o diferencia) de dos funciones derivables, es la suma (o diferencia) de sus derivadas*.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)=f'(x)+g'(x)}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)=f'(x)-g'(x)}$$

Demostración:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-\left[f(x)+g(x)\right]}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=$$
$$=f'(x)+g'(x)$$

La regla de la diferencia se demuestra con un razonamiento similar.

Obs.: Las reglas de la suma y de la diferencia se pueden extender a cualquier número de funciones. Así, si f, g, h, son funciones derivables, entonces:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) \pm g(x) \pm h(x)\right) = f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x)$$

Ejemplo:

$$h(x) = 3x^2 - 4x^3 + 8 \Rightarrow h'(x) = 6x - 12x^2$$

5) *Regla del producto:*
La derivada del producto de dos funciones derivables, es igual a la primera función multiplicada por la derivada de la segunda, más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right] = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)}$$

Demostración)

$$\frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - f(x).g(x)}{\Delta x}$$

Las demostraciones anteriores fueron directas, pero en este caso se necesita sumar y restar la expresión $f(x+\Delta x).g(x)$ en el numerador de la expresión anterior, es decir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x).g(x) + f(x+\Delta x).g(x) - f(x).g(x)}{\Delta x} =$$

Extraemos factor común $f(x+\Delta x)$ entre el primer y tercer término del numerador; y $g(x)$ entre el segundo y el cuarto, con lo cual, la expresión anterior puede escribirse así:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[f(x+\Delta x).\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x).\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x).\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x).\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$$

Obs.: La regla del producto puede extenderse para productos de más de dos funciones. Así, si f, g, h, son funciones derivables, entonces:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[f(x).g(x).h(x)\right] = f'(x).g(x).h(x) + f(x).g'(x).h(x) + f(x).g(x).h'(x)}$$

Ejemplo:

$$f(x) = \left(x^3 + 2x^2\right).\left(x^4 + 5x^2 + 3x\right) \Rightarrow f'(x) = \left(x^3 + 2x^2\right)'.\left(x^4 + 5x^2 + 3x\right) + \left(x^3 + 2x^2\right).\left(x^4 + 5x^2 + 3x\right)' =$$

$$= \left(3x^2 + 4x\right).\left(x^4 + 5x^2 + 3x\right) + \left(x^3 + 2x^2\right).\left(4x^3 + 10x + 3\right) =$$

$$= 7x^6 + 12x^5 + 25x^4 + 52x^3 + 18x^2$$

6) *Regla del cociente*:
La derivada del cociente de dos funciones derivables f(x) y g(x), es igual a la derivada del numerador multiplicada por el denominador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, y todo eso dividido por el cuadrado del denominador.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}}$$

Demostración:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x).g(x)-g(x+\Delta x).f(x)}{g(x+\Delta x).g(x).\Delta x}=$$

Sumando y restando $f(x).g(x)$ en el numerador de la expresión anterior, resulta:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x).g(x)-f(x).g(x)+f(x).g(x)-g(x+\Delta x).f(x)}{g(x+\Delta x).g(x).\Delta x}=$$

Reacomodando esta expresión:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\left[\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]-f(x)\left[\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]}{g(x+\Delta x).g(x)}$$

Tomando el límite del numerador y el denominador se obtiene la regla del cociente.

Ejemplo:

$$y=\frac{5x-2}{x^2+1}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{(5x-2)'.\left(x^2+1\right)-(5x-2).\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{5.\left(x^2+1\right)-(5x-2).2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{5x^2+5-10x^2+4x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-5x^2+4x+5}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Teorema: Si n es un entero positivo, entonces :

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(x^{-n}\right)=-n.x^{-n-1}}$$

Demostración) Utilizando la definición de x^{-n} y la regla del cociente, tenemos:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-n}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right)=\frac{(1)'.x^n-1.\left(x^n\right)'}{\left(x^n\right)^2}=\frac{0.x^n-1.nx^{n-1}}{x^{2n}}=-n.x^{n-1-2n}=-n.x^{-n-1}$$

Ejemplos:

Función	Reescribir	Derivada	Simplif.
$y=\dfrac{1}{3x^3}$	$y=\dfrac{1}{3}.x^{-3}$	$y'=\dfrac{1}{3}.(-3)\,x^{-4}$	$y'=-\dfrac{1}{x^4}$
$y=\dfrac{2}{3x^2}$	$y=\dfrac{2}{3}.x^{-2}$	$y'=\dfrac{2}{3}.(-2).x^{-3}$	$y'=-\dfrac{4}{3x^3}$
$y=\dfrac{1}{(3x)^3}$	$y=\dfrac{1}{27}.x^{-3}$	$y'=\dfrac{1}{27}.(-3).x^{-4}$	$y'=-\dfrac{1}{9x^4}$

7) *Derivadas de funciones trigonométricas*

$$\frac{d}{dx}(senx)=\cos x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x)=-\operatorname{cosec} x.\cot x$$
$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-senx \qquad \frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x.\tan x$$
$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x)=-\operatorname{cosec}^2 x$$

Demostración)

Vamos a demostrar que $\dfrac{d}{dx}(senx)=\cos x$

$$\frac{d}{dx}(senx)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen(x+\Delta x)-senx}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{senx\cos\Delta x+\cos x sen\Delta x-senx}{\Delta x}=$$

sacando factor común $senx$ entre primer y tercer término del numerador, resulta:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{senx(\cos\Delta x-1)+\cos x\; sen\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[senx\left(\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\right)+\cos x\frac{sen\Delta x}{\Delta x}\right]=$$

$$=senx.\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\right)+\cos x.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen\Delta x}{\Delta x} \qquad (*)$$

Sólo nos queda determinar: $\lim_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\right)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\cos\Delta x-1)(\cos\Delta x+1)}{\Delta x(\cos\Delta x+1)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos^2\Delta x-1}{\Delta x(\cos\Delta x+1)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-sen^2\Delta x}{\Delta x(\cos\Delta x+1)}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen\Delta x\ .\ sen\Delta x}{\Delta x(\cos\Delta x+1)}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen\Delta x}{\Delta x}.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen\Delta x}{\cos\Delta x+1}=0$$

Por lo tanto: $\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\right)=0$

Con lo cual, volviendo a la expresión (*):

$$\frac{d}{dx}(senx)=senx.\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\right)+\cos x.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen\Delta x}{\Delta x}=senx.0+\cos x.1=\cos x$$

Hemos demostrado que:

$$\frac{d}{dx}(senx)=\cos x$$

Vamos a demostrar que $\frac{d}{dx}(\cos x)=-senx$

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x.\cos\Delta x-senx.sen\Delta x-\cos x}{\Delta x}=$$

sacando factor común $\cos x$, entre el primer y el tercer término del numerador, resulta:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x(\cos\Delta x-1)-senx.sen\Delta x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos x\left(\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\right)-senx\left(\frac{sen\Delta x}{\Delta x}\right)\right]$$

$$=\ \cos x.0-senx.1=\boxed{-senx}$$

Para hallar la derivada de la función tangente, se utiliza la identidad fundamental:

$\tan x=\frac{senx}{\cos x}$ y se aplica la regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{senx}{\cos x}\right)=\frac{(senx)'.\cos x-senx.(\cos x)'}{(\cos x)^2}=$$

$$\frac{\cos x.\cos x-senx.(-senx)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+sen^2x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\boxed{\sec^2 x}$$

Análogamente para la función secante:

$$\frac{d}{dx}(\sec x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{1'.\cos x-1.(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{0.\cos x-(-senx)}{\cos^2 x}=\frac{sen\ x}{\cos^2 x}=\frac{senx}{\cos x.\cos x}=\boxed{\sec x.\tan x}$$

Análogamente se pueden demostrar las derivadas de las funciones $\operatorname{cosec} x$ y $\cot x$.

8) *La derivada del logaritmo natural de x, es igual a 1/x*

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x} \quad x>0}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\ln\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)=\frac{1}{x}.\ln e=\frac{1}{x}$$

En particular si $y=\log_b x \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}(\log_b x)=\frac{1}{\ln b}.\frac{1}{x}}$

Para demostrarlo sólo basta recordar cambio de base:

$$\frac{d}{dx}(\log_b x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln b}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\ln b}.\ln x\right)=\frac{1}{\ln b}.\frac{d}{dx}(\ln x)=\boxed{\frac{1}{\ln b}.\frac{1}{x}}$$

9) *Regla de la cadena o derivada de una función compuesta*

Supongamos que se nos pide derivar la función $h(x)=(x^2+1)^3$. Con las reglas aprendidas hasta ahora no podemos calcular $h'(x)$.

Se puede observar que $h(x)$ es una función compuesta, ya que si hacemos $y=f(u)=u^3$, y que $u=g(x)=x^2+1$, podemos escribir $y=h(x)=f(g(x))$, esto es: $h(x)=(f\circ g)(x)$

Sabemos derivar f y g, sólo nos falta saber cómo derivar $f\circ g$. La derivada de una función compuesta $f\circ g$ es igual al producto de las derivadas de f y g. Esto se llama regla de la cadena. Podemos definirla de la siguiente manera:

Si $y=f(u)$ y $u=g(x)$ son dos funciones derivables, entonces:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

También podemos decir:

Si $h(x)=(f\circ g)(x)$ es una función compuesta definida por $h(x)=f(g(x))$, entonces existe $h'(x)$ y está dada por el producto: $h'(x)=f'(g(x)).g'(x)$

Apliquemos esta definición a nuestro ejemplo.

$$x \xrightarrow{g} u = x^2 + 1 \xrightarrow{f} y = u^3$$

Primero debemos derivar y con respecto a u, es decir : $\dfrac{dy}{du} = 3u^2$

Luego derivamos u con respecto a x, es decir: $\dfrac{du}{dx} = 2x$

Por lo tanto, reemplazando esto que obtuvimos en:

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}.\dfrac{du}{dx}$, nos queda: $\dfrac{dy}{dx} = 3u^2.2x = 3\left(x^2+1\right)^2.2x$

Al aplicar la regla de la cadena resulta útil pensar en $f \circ g$ como constituida por dos partes: una interior y otra exterior, luego derivamos primero la parte exterior y por último la interior. Por ejemplo: Si $y = \left(x^4 + 2x^3\right)^5 \Rightarrow y' = 5.\left(x^4+2x^3\right)^4.\left(4x^3+6x^2\right)$

10) *Derivada de la función inversa*

Sea $y = f(x)$ una función derivable y además que admita función inversa $x = g(y)$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)}$, es decir: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$

Partiendo de $x = g(y)$, derivando ambos miembros con respecto a x, obtenemos:

$1 = g'(y).y'$, como: $y' = f'(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)}$

Ejemplo:

Si $y = \sqrt{x-3} \Rightarrow x = y^2 + 3,$ como $\dfrac{dx}{dy} = 2y \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}$

11) *Derivadas de funciones trigonométricas inversas*

$$a)\ \frac{d}{dx}(arc.senx) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$b)\ \frac{d}{dx}(arc.\cos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$c)\ \frac{d}{dx}(arc.tgx) = \frac{1}{1+x^2}$$

Demostración:

a) Si:

$$y = arc.senx \Rightarrow x = sen\ y = g(y) \Rightarrow g'(y) = (sen\ y)' = \cos y$$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

b) Si:

$$y = arc.\cos x \Rightarrow x = \cos\ y = g(y) \Rightarrow g'(y) = (\cos\ y)' = -sen\ y$$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{sen\ y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

c) Si:

$$y = arc.tgx \Rightarrow x = tg\ y = g(y) \Rightarrow g'(y) = (tg\ y)' = \sec^2\ y$$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\sec^2\ y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 y + sen^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

12) *Derivada de la función exponencial:*

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(b^x\right) = b^x.\ln b \qquad b \in \mathbb{R},\ b > 0,\ b \neq 1}$$

Para la demostración, utilizamos la regla de la derivada de la función inversa:

$$y = b^x \Rightarrow \ln y = x.\ln b \Rightarrow x = \frac{\ln y}{\ln b} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}.\frac{1}{\ln b}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{y.\ln b}} = y.\ln b \Rightarrow \frac{dy}{dx} = b^x.\ln b$$

En particular si $y = e^x \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x.\ln e = e^x}$

13) *Derivadas de funciones hiperbólicas.*

$$\frac{d}{dx}\left(Senh\ x\right) = Cosh\ x \qquad \frac{d}{dx}\left(Co\sec h\ x\right) = -Co\sec h\ x.Cotgh\ x$$

$$\frac{d}{dx}\left(Cosh\ x\right) = Senh\ x \qquad \frac{d}{dx}\left(Sech\ x\right) = -Sech\ x.Tgh\ x$$

$$\frac{d}{dx}\left(Tgh\ x\right) = Sech^2 x \qquad \frac{d}{dx}\left(Coth\ x\right) = -Co\sec h^2 x$$

Demostración:

a)

$$\frac{d}{dx}\left(Senh\ x\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)-\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right)\right)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=Cosh\ x$$

b) $$\frac{d}{dx}\left(Cosh\ x\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)+\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right)\right)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=Senh\ x$$

Las derivadas de las demás funciones hiperbólicas pueden obtenerse expresándolas en términos de Senh x y Cosh x:

c) $$\frac{d}{dx}\left(Tgh\ x\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{Senh\ x}{Cosh\ x}\right)=\frac{\frac{d}{dx}\left(Senh\ x\right).Cosh\ x-Senh\ x.\frac{d}{dx}\left(Cosh\ x\right)}{Cosh^{2}\ x}=\frac{Cosh^{2}x-Senh^{2}x}{Cosh^{2}x}=\frac{1}{Cosh^{2}x}=Sech^{2}\ x$$

d) $$\frac{d}{dx}\left(Cotgh\ x\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{Cosh\ x}{Senh\ x}\right)=\frac{\frac{d}{dx}\left(Cosh\ x\right).Senh\ x-Cosh\ x.\frac{d}{dx}\left(Senh\ x\right)}{Senh^{2}\ x}=\frac{Senh^{2}x-Cosh^{2}x}{Senh^{2}x}=-\frac{1}{Senh^{2}x}=-Co\sec h^{2}\ x$$

e) $$\frac{d}{dx}\left(Sech\ x\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{Cosh\ x}\right)=\frac{-\frac{d}{dx}\left(Cosh\ x\right)}{Cosh^{2}\ x}=-\frac{Senh\ x}{Cosh^{2}x}=-Sech\ x.Tgh\ x$$

f) $$\frac{d}{dx}\left(Co\sec h\ x\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{Senh\ x}\right)=\frac{-\frac{d}{dx}\left(Senh\ x\right)}{Senh^{2}\ x}=-\frac{Cosh\ x}{Senh^{2}x}=-Co\sec h\ x.Cotgh\ x$$

14) *Derivadas de funciones hiperbólicas inversas.*

$$a)\frac{d}{dx}\left(\arg.Senh\ x\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}$$

$$b)\frac{d}{dx}\left(\arg.Cosh\ x\right)=\frac{1}{\sqrt{x^{2}-1}}$$

$$c)\frac{d}{dx}\left(\arg.Tgh\ x\right)=\frac{1}{1-x^{2}}\qquad\forall\left|x\right|<1$$

Demostración:

a) Si

$$y=\arg Senh\ x\Rightarrow x=Senh\ y=g(y)$$

$$f'(x)=\frac{1}{g'(y)}=\frac{1}{\left(Senh\ y\right)'}=\frac{1}{Cosh\ y}\quad(1)$$

Sabemos que $Cosh^{2}y-Senh^{2}y=1\Rightarrow Cosh\ \mathrm{y}=\sqrt{1+Senh^{2}y}$

Reemplazando esta igualdad en (1):

$$f'(x)=\frac{1}{g'(y)}=\frac{1}{\left(Senh\ y\right)'}=\frac{1}{Cosh\ y}=\frac{1}{\sqrt{1+Senh^{2}y}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}$$

b) Si:

$$y = \arg Cosh\ x \Rightarrow x = Cosh\ y = g(y)$$

$$f´(x) = \frac{1}{g´(y)} = \frac{1}{(Cosh\ y)´} = \frac{1}{Senh\ y} \quad (2)$$

Sabemos que: $Cosh^2 y - Senh^2 y = 1 \Rightarrow Senh\ \mathrm{y} = \sqrt{Cosh^2 y - 1}$

Reemplazando esta igualdad en (2):

$$f´(x) = \frac{1}{g´(y)} = \frac{1}{Senh\ y} = \frac{1}{\sqrt{Cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

c) Si:

$$y = \arg Tgh\ x \Rightarrow x = Tgh\ y = g(y)$$

$$f´(x) = \frac{1}{g´(y)} = \frac{1}{(Tgh\ y)´} = \frac{1}{Sech^2\ y} = \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{Cosh}^2 y}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{Cosh}^2 y - Senh^2 y}{Cosh^2 y}} = \frac{1}{1 - Tgh^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

15) *Derivación de funciones dadas en forma implícita*

Hasta ahora siempre hemos derivado funciones dadas en forma explícita, por ejemplo: $y = 4x + 8$; $s =$ -$16t^2 + 26t$; $u = 4w^2 + w^3$, en ellas decimos que y, s, u, son funciones de $x, t\ y\ w$, respectivamente.

Pero existen funciones que sólo vienen dadas implícitamente, por ejemplo:

$$x^2 y + y^3 x^2 + yx = 4 \quad ; \quad x^2 + y^2 = 16 \quad ; \quad x^3 + y^3 = 6xy .$$

En estos casos se utiliza la derivación implícita, suponiendo que y es función de x. Este método consiste en derivar ambos miembros de la ecuación con respecto a x , y luego despejar $y´$ de la ecuación resultante. Cuando derivemos términos que contienen sólo a x, podemos derivar como de costumbre. Pero cuando derivamos términos que contienen y, debemos aplicar la regla de la cadena porque estamos suponiendo que y está definida implícitamente como una función de x.

Ejemplo:

Calcular $\frac{dy}{dx}$, sabiendo que : $y^3 + x^3 = 6xy$

1) Se derivan los dos miembros de la ecuación con respecto a x:

$$\frac{d}{dx}\left(y^3 + x^3\right) = \frac{d}{dx}(6xy)$$

$$\frac{d}{dx}\left(y^3\right) + \frac{d}{dx}\left(x^3\right) = 6.\frac{d}{dx}(xy)$$

$$3y^2.y´ + 3x^2 = 6(1.y + x.y´)$$

2) Se agrupan todos los términos con $y´$ a la izquierda:

$$y'.\left(3y^2-6x\right)=6y-3x^2$$

3) Se despeja y':

$y'=\dfrac{6y-3x^2}{3y^2-6x}$. Simplificando esta expresión nos queda: $y'=\dfrac{2y-x^2}{y^2-2x}$

16) Derivación logarítmica

Cuando la expresión algebraica de una función incluye productos, cocientes o potencias complicadas, la derivada de dicha función puede hallarse usando las propiedades de los logaritmos. El método se llama derivación logarítmica. También se utiliza para hallar la derivada de funciones del tipo: $\left(f(x)\right)^{g(x)}$

Los pasos a seguir en este método, son:

1) Tomar logaritmos naturales en ambos miembros de la ecuación: $y=f(x)$.
2) Aplicar las propiedades de los logaritmos para eliminar los productos, cocientes y exponentes.
3) Derivar implícitamente, ambos miembros de la ecuación con respecto a x.
4) Despejar y' de la ecuación resultante.

Ejemplo 1: Usar la derivación logarítmica para hallar $\dfrac{dy}{dx}$, donde:

$$y=\frac{\left(x^2+3\right)^{2/3}.\left(3x-4\right)^4}{\sqrt[4]{x^3+2x}}$$

Tomamos logaritmo natural en ambos miembros de la ecuación:

$$\ln y=\ln\left[\frac{\left(x^2+3\right)^{2/3}.\left(3x-4\right)^4}{\sqrt[4]{x^3+2x}}\right]$$

Aplicamos propiedades de los logaritmos:

$$\ln y=\ln\left[\left(x^2+3\right)^{2/3}.\left(3x-4\right)^4\right]-\ln\sqrt[4]{x^3+2x}$$

$$\ln y=\frac{2}{3}.\ln\left(x^2+3\right)+4\ln\left(3x-4\right)-\frac{1}{4}\ln\left(x^3+2x\right)$$

Derivamos implícitamente, ambos miembros de la ecuación con respecto a x:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}.\frac{1}{x^2+3}.2x+4.\frac{1}{3x-4}.3-\frac{1}{4}.\frac{1}{x^3+2x}.\left(3x^2+2\right)$$

$$\frac{1}{y}.y'=\frac{4x}{3\left(x^2+3\right)}+\frac{12}{3x-4}-\frac{3x^2+2}{4\left(x^3+2x\right)}$$

Despejamos y' de la ecuación resultante:

$$y' = \left[\frac{4x}{3\left(x^2+3\right)} + \frac{12}{3x-4} - \frac{3x^2+2}{4\left(x^3+2x\right)} \right] . \frac{\left(x^2+3\right)^{2/3} . \left(3x-4\right)^4}{\sqrt[4]{x^3+2x}}$$

Ejemplo 2:

Derivar la función: $y = \left(4x^3 - 2x\right)^{5x+1}$

1) Aplicamos logaritmo natural en ambos miembros:

$$\ln y = \ln\left[\left(4x^3-2x\right)^{5x+1}\right]$$

2) Aplicamos propiedades de los logaritmos:

$$\ln y = \left(5x+1\right).\ln\left(4x^3-2x\right)$$

3) Derivamos ambos miembros con respecto a x:

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = 5.\ln\left(4x^3-2x\right) + \left(5x+1\right).\frac{1}{4x^3-2x}.\left(12x^2-2\right)$$

4) Despejamos y´:

$$y' = \left[5.\ln\left(4x^3-2x\right) + \frac{\left(5x+1\right)\left(12x^2-2\right)}{4x^3-2x}\right].\left(4x^3-2x\right)^{5x+1}$$

Ejemplo 3: Probemos aplicando la regla de derivación logarítmica, que si: $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = n.x^{n-1}$.

Aplicamos la derivación logarítmica, es decir, si: $y = x^n$

$$\ln y = n.\ln x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\left(n.\ln x\right)$$

$$\frac{1}{y}.y' = n.\frac{1}{x} \Rightarrow y' = n.\frac{1}{x}.y \Rightarrow y' = n.\frac{1}{x}.x^n \Rightarrow y' = n.x^{n-1}$$

Esta regla nos permite derivar funciones irracionales:

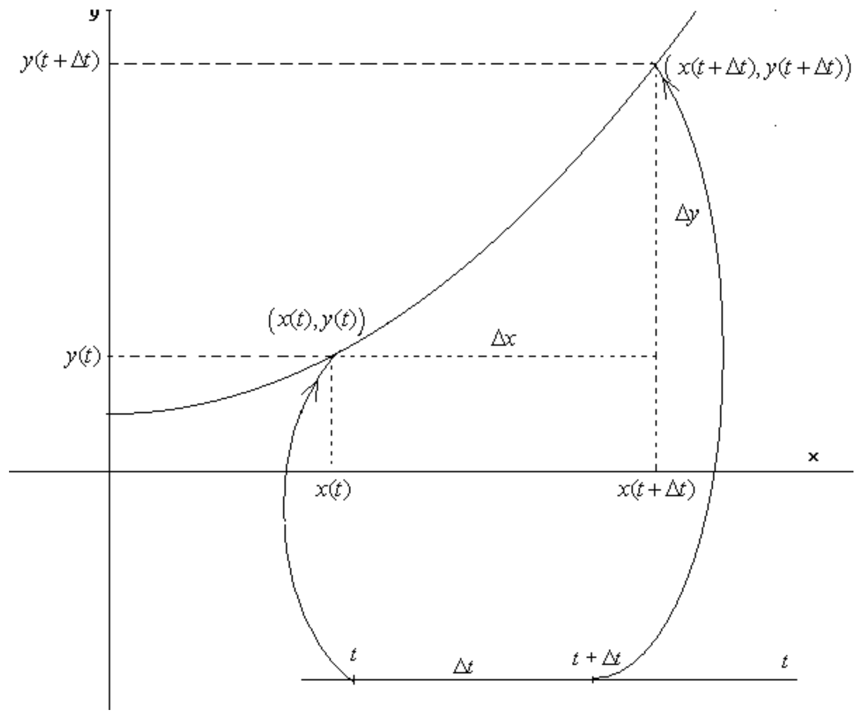
Ejemplo 1: $y = \sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}} \Rightarrow y' = \frac{2}{5}.x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

Ejemplo 2: $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow y' = -\frac{2}{3}.x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$

17) *Derivada de una curva dada en forma paramétrica*

Si una curva C viene dada por las ecuaciones: $x = x(t) \quad e \quad y = y(t)$, la pendiente de la recta tangente a C en $P(x,y)$ es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad ; \text{ con } \frac{dx}{dt} \neq 0$$



Demostración:
Según se observa en el gráfico, podemos asegurar:
$\Delta y = y(t+\Delta t) - y(t) \qquad \text{y} \qquad \Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$.

Si hallamos : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{x(t+\Delta t) - x(t)}$ y dividimos numerador y denominador por $\Delta t \neq 0$, la expresión no varía:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}}{\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}}$$

Si calculamos el límite cuando $\Delta x \to 0$, es lo mismo que calcular el límite cuando $\Delta t \to 0$, es decir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}}{\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}}$$

, el límite del numerador y del denominador, existen ya que $x(t)$ e $y(t)$ son derivables:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Con lo cual podemos asegurar que: $\boxed{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}}$

Otras notaciones son: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$

Si además $x(t)$ tiene función inversa y ésta es derivable, se puede calcular la segunda derivada de la curva dada en forma paramétrica.

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right).\dfrac{dt}{dx}$ (por derivada de la función compuesta)

Esta expresión la podemos escribir:

$\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)}{\frac{dx}{dt}}$ (por derivada de la función inversa)

Desarrollando esta última expresión:

$$\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{y''(t).x'(t)-y'(t).x''(t)}{\left(x'(t)\right)^2}}{x'(t)}=\frac{y''(t).x'(t)-y'(t).x''(t)}{\left(x'(t)\right)^3}$$

Es decir que la derivada segunda es muy similar a derivar la derivada primera como un cociente, salvo que el denominador está elevado al cubo:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''(t).x'(t)-y'(t).x''(t)}{\left(x'(t)\right)^3}$$

Análisis de la pendiente de una curva dada en forma paramétrica

Ej. 1: Dadas las siguientes ecuaciones:

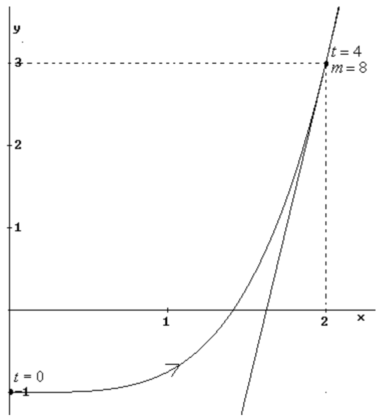
$$x=\sqrt{t}$$

$$y=\frac{1}{4}\left(t^2-4\right)\quad con\ t\geq 0$$

Estudiar la pendiente de dicha curva en el punto (2,3).

Calculamos la derivada primera:

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{1}{2}t}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=t^{3/2}$. En $(x,y)=(2,3)$, se tiene $t=4$, por lo tanto la pendiente en dicho punto será igual a 8.



Ej. 2:
Dadas las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 2t - \pi sent \\ y = 2 - \pi \cos t \end{cases}$$

Al representar dichas ecuaciones obtenemos una curva llamada cicloide que se corta a sí misma en el punto (0,2). Vamos a hallar las ecuaciones de sus dos rectas tangentes en dicho punto.
Calculemos la pendiente de cada una de estas rectas:

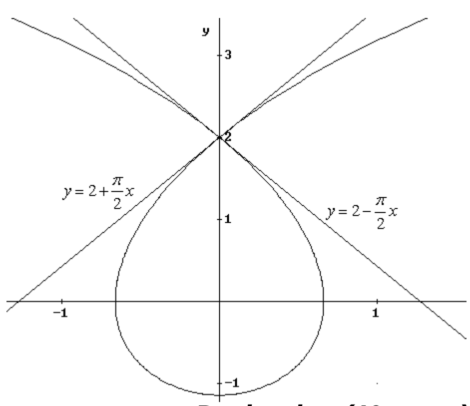
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\pi sent}{2 - \pi \cos t}$$

Si $x = 0 \;\; e \;\; y = 2$, resulta que $t = \pm\frac{\pi}{2}$. Al calcular $\frac{dy}{dx}$ en cada uno de estos valores del parámetro t, resulta:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto las ecuaciones de las rectas tangentes en (0,2), son:

$y = \frac{\pi}{2}x + 2$ e $y = -\frac{\pi}{2}x + 2$



Ejemplo 3:

Hallar las derivadas primera y segunda: $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$, si:

$$\begin{cases} x = t^2 + sent \\ y = 2t^3 - \cos t \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{6t^2 + sent}{2t + \cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(12t + \cos t).(2t + \cos t) - (6t^2 + sent)(2 - sent)}{(2t + \cos t)^3} = \frac{12t^2 + 14t\cos t - 2sent + 6t^2 sent + 1}{(2t + \cos t)^3}$$

18) Derivada de curvas dadas en forma polar

Sabemos que una curva en coordenadas polares está expresada por: $r = r(\theta)$. Como entre las coordenadas cartesianas y las polares existen las relaciones:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\ sen\theta \end{cases}$$

se puede considerar que dicha curva está dada en forma paramétrica con θ como parámetro, pues a cada valor de θ corresponde un valor de r y a cada par (r,θ) le corresponde un par de valores (x, y).

Teorema:

La pendiente m de la recta tangente a la gráfica de $r = r(\theta)$ en el punto $P(r,\theta)$ es:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{dr}{d\theta} sen\theta + r.\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r.sen\theta}$$

Demostración:

Si (x, y) son las coordenadas rectangulares de $P(r,\theta)$, entonces se verifican las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = r(\theta)\cos\theta \\ y = r\ sen\theta = r(\theta) sen\theta \end{cases}$$

Considerando a éstas como ecuaciones paramétricas de la gráfica, donde θ es el parámetro, se puede asegurar que:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r'(\theta) sen\theta + r(\theta).\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r(\theta).sen\theta}$$

Es decir que la derivada de una curva dada en forma polar, está dada por:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{r'(\theta)\,sen\theta+r(\theta).\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta).sen\theta}}$$

Ejemplo:

Para la circunferencia $r=4\cos\theta$, calcular:

a) la pendiente de la recta tangente en $\frac{\pi}{6}$

b) los puntos en los que la recta tangente es horizontal.

Solución:

a) Aplicando el teorema anterior:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r'(\theta)\,sen\theta+r(\theta).\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta).sen\theta}=\frac{-4sen^2\theta+4\cos^2\theta}{-4sen\theta.\cos\theta-4\cos\theta.sen\theta}=\frac{4(\cos^2\theta-sen^2\theta)}{-4(2sen\theta.\cos\theta)}=-\frac{\cos^2\theta-sen^2\theta}{2sen\theta.\cos\theta}$$

Reemplazando en $\theta=\frac{\pi}{6}$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\pi/6}=-\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Vamos a escribir la ecuación de la recta tangente a la curva cuando $\theta=\frac{\pi}{6}$:

$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-x_0)+y_0$. Debemos hallar las coordenadas x_0 e y_0.

Sabemos que:

$$\cos\theta=\frac{x_0}{r}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{6}=\frac{x_0}{2\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{x_0}{2\sqrt{3}}\Rightarrow x_0=3$$

$$sen\theta=\frac{y}{r}\Rightarrow sen\frac{\pi}{6}=\frac{y}{2\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{y}{2\sqrt{3}}\Rightarrow y=\sqrt{3}$$

Por lo tanto la ecuación de la recta tangente a la curva cuando $\theta=\frac{\pi}{6}$, es:

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)+\sqrt{3}$$

b) Para que la recta tangente sea horizontal, se debe verificar que: $\cos^2\theta-sen^2\theta=0$, reemplazando $sen^2\theta$ por $1-\cos^2\theta$, nos queda:

$2\cos^2\theta - 1 = 0$ $2\cos^2\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2\theta = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Teniendo en cuenta este dato, vamos a hallar los puntos donde la tangente es horizontal:

1) Si $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4} \therefore como\ r = 4.\cos\theta \Rightarrow r = 4.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

Por lo tanto, las coordenadas de P son: $P\left(2\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$

2) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{3}{4}\pi \therefore como\ r = 4.\cos\theta \Rightarrow r = 4.\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}$

Por lo tanto, las coordenadas de P_1 son: $P_1\left(-2\sqrt{2}, \dfrac{3}{4}\pi\right)$