SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ecuaciones lineales

$3x+4=7$; $x+2y=7$; $\frac{3}{2}x+y-\pi z=\sqrt{5}$

Estos son ejemplos de ecuaciones lineales. En ellas, las variables figuran con exponente igual a 1.

Estas otras, no son ecuaciones lineales:

$x.y-2=z$; $e^{x}-4y=5$; $senx+3y-z=8$

En las ecuaciones lineales no deben figurar productos o raíces de variables, ni tampoco dichas variables deben figurar en funciones trigonométricas, exponenciales o logarítmicas.

Analicemos las soluciones de ecuaciones lineales.
En la ecuación: $3x+2=5$, la única solución es $x=1$, ya que al sustituir dicho valor en la incógnita se obtiene la igualdad.

En la ecuación lineal con dos incógnitas: $x+2y=7$, se puede asegurar que $x=1\ e\ y=3$, son solución de esta ecuación. Pero existen infinitas soluciones de la misma. Otras soluciones posibles son: $x=2\ e\ y=5/2$; $x=-1\ e\ y=4$; $x=5\ e\ y=1$.

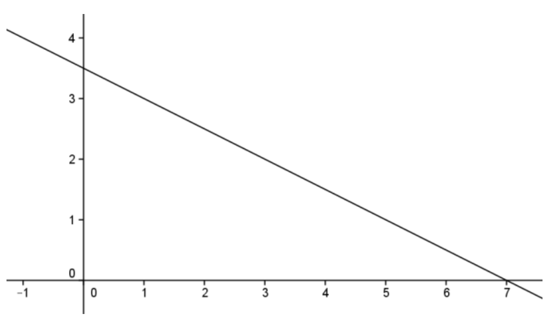
El conjunto de todas las soluciones de una ecuación lineal se denomina **conjunto solución**, y cuando se ha hallado este conjunto solución, se dice que se ha **resuelto** la ecuación.

Para determinar el conjunto solución de una ecuación lineal con dos incógnitas, una de ellas se escribe en función de la otra. Por ejemplo, en el caso anterior: $x+2y=7 \Rightarrow y=\frac{7}{2}-\frac{x}{2}$.

El conjunto solución se expresa:

$$Sol:\left\{(x,y)/\,y=\frac{7}{2}-\frac{x}{2},\quad \forall x\in R\right\}$$

Podemos interpretar este conjunto gráficamente:



Los infinitos puntos de la forma $\left(x,\frac{7}{2}-\frac{x}{2}\right)$ pertenecientes a la recta, son solución de la ecuación: $x+2y=7$

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas
Empecemos con un ejemplo.
Ejemplo 1. Resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 5x+2y=12 \end{cases}$$

Solución. Este sistema se puede resolver con el método que se desee, por ejemplo, por método de igualación, de sustitución, y también se puede utilizar una propiedad que establece que:

Si $\boxed{a=b \ y \ c=d \Rightarrow a+c=b+d}$

Es decir que si sumamos miembro a miembro estas ecuaciones, se obtiene una tercera ecuación equivalente. Esta nueva ecuación puede sustituir a una cualquiera de las dos ecuaciones del sistema.

$$\begin{array}{l} 3x-2y=4 \\ + \\ \underline{5x+2y=12} \\ \ \ 8x=16 \quad \Rightarrow \boxed{x=2} \end{array}$$

A partir de este valor de x, se puede hallar el valor de la otra variable, reemplazando en una de las ecuaciones del sistema: $3.2-2y=4 \Rightarrow \boxed{y=1}$

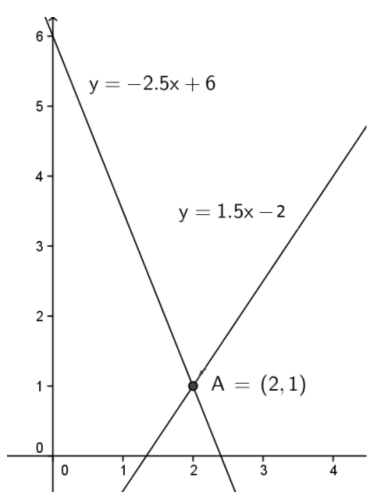
Este sistema tiene **una única solución**. En este caso se dice que el **sistema es compatible determinado**.

$$\boxed{Sol:\{(2;1)\}}$$

Interpretemos gráficamente el conjunto solución, para ello graficamos las dos rectas.
Despejamos y en función de x, en cada ecuación:

$$3x-2y=4 \Rightarrow \boxed{y=\frac{3}{2}x-2}$$

$$5x+2y=12 \Rightarrow \boxed{y=-\frac{5}{2}x+6}$$



Las **rectas se intersectan en un único punto**, el punto $(2;1)$.
Ese punto es la única solución que tiene el sistema.

Ejemplo 2. Resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ 2x - 2y = 14 \end{cases}$$

Solución

Estas dos ecuaciones son **equivalentes.** Esto es, cualquiera sean los valores de x e y que satisfacen la primera ecuación, también satisfacen la segunda ecuación, y viceversa.

En este sistema, se observa que si se multiplica la primera ecuación por 2, se obtiene la segunda ecuación.

Esta situación responde a la siguiente propiedad:

Si $\boxed{a = b \ y \ c \in R \Rightarrow a.c = b.c}$

Es decir, **si se multiplican ambos miembros de una ecuación por un número real cualquiera, se obtiene otra ecuación equivalente a la primera.**

Al ser dos ecuaciones equivalentes, para escribir el conjunto solución, lo único que podemos hacer es despejar una variable en función de la otra, en cualquiera de las dos ecuaciones.

$$x - y = 7 \Rightarrow y = x - 7 \quad \text{o} \quad x = y + 7$$

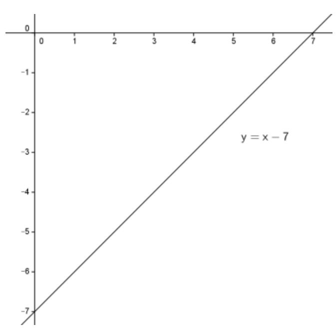
$$\boxed{Sol: \{(x; x-7), \forall x \in R\}} \quad \text{o} \quad \boxed{Sol: \{(y+7; y), \forall y \in R\}}$$

En este caso, el sistema tiene un **número infinito de soluciones.** En este caso el sistema es **compatible indeterminado.**

Interpretemos gráficamente el conjunto solución, para eso despejamos y en función de x, en cualquiera de las dos ecuaciones, ya que al ser equivalentes, la ecuación de la recta será la misma.

$$x - y = 7 \Rightarrow \boxed{y = x - 7}$$

$$2x - 2y = 14 \Rightarrow \boxed{y = x - 7}$$



Las dos **rectas son coincidentes**, por lo tanto los infinitos puntos de la recta son solución del sistema.

Ejemplo 3. Resolver

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ 2x - 2y = 13 \end{cases}$$

Solución

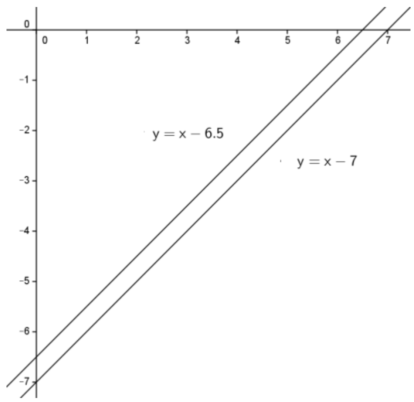
Si procedemos como en el caso anterior, multiplicando por 2 la primera ecuación, obtenemos $2x - 2y = 14$, lo cual contradice la segunda ecuación. Por lo tanto **el sistema no tiene solución**.

Se dice que es **incompatible o inconsistente.**

También se puede comprobar que no existe solución, utilizando por ejemplo, el método de igualación:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=7 \Rightarrow \boxed{y=x-7} \\ 2x-2y=13 \Rightarrow \boxed{y=x-\dfrac{13}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow x-7=x-\frac{13}{2} \Rightarrow -7=-\frac{13}{2}$$, lo cual es absurdo.

Interpretamos gráficamente esta situación:



Las **rectas son paralelas**. No existe punto de Intersección de las dos rectas

Formalicemos estos resultados

Consideremos el siguiente sistema de 2 ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ son números reales.

¿Cuándo este sistema tiene o no solución?.

Veamos:

La pendiente de la recta que representa la primera ecuación, es:

$$m_1 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$$

La pendiente de la recta que representa la segunda ecuación, es:

$$m_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}$$

Si estas pendientes son iguales, entonces el sistema no tiene solución o tiene infinitas soluciones, esto es:

$$m_1 = m_2 \Leftrightarrow -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} \Leftrightarrow \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} \Leftrightarrow a_{11}.a_{22} = a_{21}.a_{12} \Leftrightarrow a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12} = 0$$

Por lo tanto, para que **un sistema tenga una única solución** las pendientes deben ser distintas, con lo cual:

$$\boxed{a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12} \neq 0}$$

¿Cómo se puede diferenciar si un sistema tiene infinitas soluciones o no tiene solución?.

Cuando un sistema tiene **infinitas soluciones**, como en el ejemplo 2, se visualiza que:

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{7}{14}$, en general es: $\boxed{\dfrac{a_{11}}{a_{21}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} = \dfrac{b_1}{b_2}}$

Cuando un sistema **no tiene solución**, como en el ejemplo 3, se visualiza que:

$\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{7}{13}$, en general es: $\boxed{\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}}$

Obs: La expresión $a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$, se llama **determinante de orden 2**, y se expresa:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$$

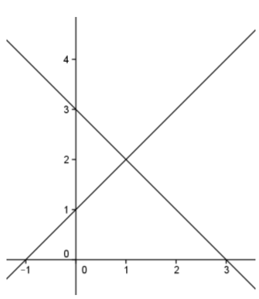
El sistema tiene una única solución cuando el determinante de los coeficientes es distinto de cero. Es decir,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12} \neq 0$$

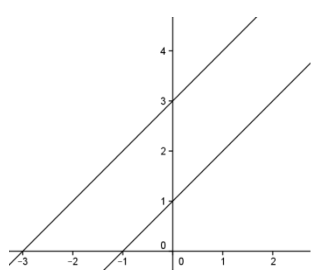
El sistema tiene **ninguna o infinitas soluciones** cuando el determinante de los coeficientes es igual a cero. Es decir,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12} = 0$$

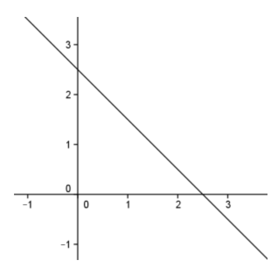
Resumiendo, un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, responde a alguno de estos gráficos:



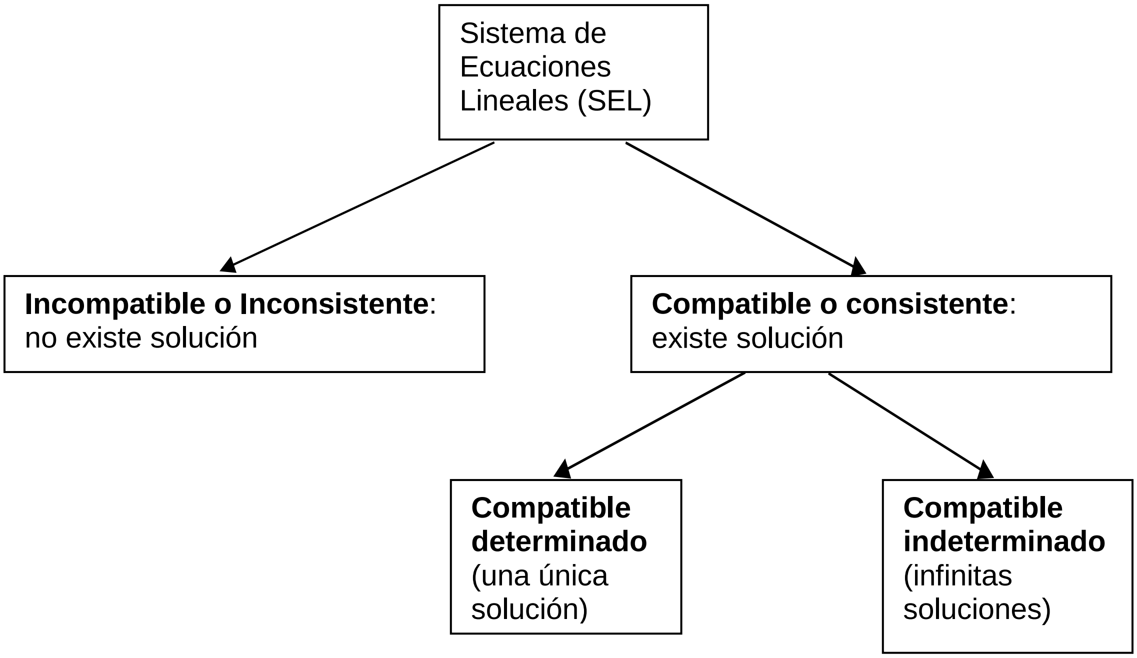
Solución única



Ninguna solución



Infinitas soluciones



Sistemas de m ecuaciones con n incógnitas.
Eliminación gaussiana

Vamos a describir un método para resolver un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m_2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

La estrategia básica es reemplazar un sistema por otro *equivalente* (es decir, otro sistema que tenga el mismo conjunto solución) y que sea más fácil de resolver. Para ello, vamos a transformar el sistema de ecuaciones lineales en otro que esté en *forma escalonada por filas,* por medio de distintas operaciones.

Operaciones que conducen a Sistemas de Ecuaciones equivalentes
Cada una de las operaciones siguientes, cuando se aplican a un sistema de ecuaciones lineales, produce un sistema equivalente.
1. Intercambio de dos ecuaciones.
2. Multiplicación (o división) de una ecuación por un número distinto de cero.
3. Suma de un múltiplo de una ecuación a otra.

Consideremos los siguientes ejemplos, para recrear este método.

Ejemplo 4. Resolver el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

Solución

- Mantenemos x_1 en la 1º ecuación y la eliminamos de la 3º ecuación. Para ello, multiplicamos la 1º ecuación por 4 y la sumamos a la 3º.

4. (Ec.1): $4x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 0$

<u>+ (Ec.3):</u> $-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9$

(Nueva Ec.3): $-3x_2 + 13x_3 = -9$

- Reescribimos el sistema, reemplazando la 3º ecuación original por la nueva ecuación 3.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ \quad -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{cases}$$

- Multiplicamos la 2º ecuación por $\frac{1}{2}$, para obtener 1 como coeficiente de x_2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad x_2 - 4x_3 = 4 \\ \quad -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{cases}$$

- Mantenemos x_2 en la 2º ecuación y la eliminamos de la 3º. Para ello, multiplicamos la 2º ecuación por 3 y la sumamos a la 3º.

3.(Ec.2): $3x_2 - 12x_3 = 12$

<u>+(Ec.3):</u> $-3x_2 + 13x_3 = -9$

(Nueva Ec.3): $x_3 = 3$

- Reescribimos el nuevo sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad x_2 - 4x_3 = 4 \\ \quad\quad x_3 = 3 \end{cases}$$

Este sistema equivalente al dado, está en **forma escalonada**. Para resolverlo se aplica el procedimiento de **sustitución hacia atrás***:*

Como $\boxed{x_3 = 3}$, se reemplaza este valor en la 2º ecuación, y se obtiene:

$$x_2 - 4.3 = 4 \Rightarrow \boxed{x_2 = 16}$$

Por último, se sustituye $x_3 = 3$ y $x_2 = 16$, en la 1º ecuación y se obtiene:

$$x_1 - 2.16 + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 29}$$

El sistema es **compatible determinado** porque tiene una única solución.
Este procedimiento se llama **Eliminación Gaussiana**, en honor al matemático Carl Gauss.

Ejemplo 5. Resolver

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$$

Solución.

- Eliminamos x_1 de la 2º ecuación. Para ello, multiplicamos la 1º ecuación por -2 y la sumamos a la 2º. Obtenemos así una nueva 2º ecuación.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ \quad 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$$

- Eliminamos x_1 de la 3º ecuación. Para ello, multiplicamos la 1º ecuación por -1 y la sumamos a la 3º. Obtenemos así una nueva 3º ecuación.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ \quad 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ \quad 5x_2 - 4x_3 = -2 \end{cases}$$

- Multiplicamos la 2º ecuación por $\frac{1}{5}$, para obtener 1 como coeficiente de x_2.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ \quad x_2 - \frac{4}{5}x_3 = 0 \\ \quad 5x_2 - 4x_3 = -2 \end{cases}$$

- Eliminamos x_2 de la 3º ecuación. Para ello, multiplicamos la 2º ecuación por -5 y la sumamos a la 3º ecuación. Obtenemos una nueva 3º ecuación.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ \quad x_2 - \frac{4}{5}x_3 = 0 \\ \qquad 0 = -2 \end{cases}$$

Se llega de esta manera a un absurdo. Por lo tanto el sistema al que arribamos, no tiene solución.
Y como este sistema es equivalente al sistema original, éste tampoco tiene solución.
El sistema **es incompatible o inconsistente.**

Ejemplo 6. Resolver

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ 3x_1 + 9x_2 - 36x_3 = -33 \end{cases}$$

Solución

- Eliminamos x_1 de la 2º ecuación. Para ello, multiplicamos la 1º ecuación por -2 y la sumamos a la 2º. Obtenemos así una nueva 2º ecuación.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-7x_3=-4 \\ \text{-3x}_2+15x_3=21 \\ 3x_1+9x_2-36x_3=-33 \end{cases}$$

- Dividimos la 2º ecuación por -3, para obtener 1 en el coeficiente de x_2.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-7x_3=-4 \\ \quad x_2-5x_3=-7 \\ 3x_1+9x_2-36x_3=-33 \end{cases}$$

- Multiplicamos la 1º ecuación por -3 y la sumamos a la 3º. Obtenemos una nueva 3º ecuación.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-7x_3=-4 \\ \quad x_2-5x_3=-7 \\ \quad 3x_2-15x_3=-21 \end{cases}$$

- Multiplicamos la 2º ecuación por -3 y la sumamos a la 3º. Obtenemos una nueva 3º ecuación.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-7x_3=-4 \\ \quad x_2-5x_3=-7 \\ \quad 0=0 \end{cases}$$

- Al hacer esta última operación, desapareció la 3º ecuación. Con lo cual, el sistema quedó reducido a dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-7x_3=-4 \\ \quad x_2-5x_3=-7 \end{cases}$$

- Para representar las soluciones, se elige, por ejemplo x_3 como la variable libre, y se escriben las otras variables en función de x_3.

$$x_2=5x_3-7 \quad , \quad \text{x}_1=-2x_2+7x_3-4 \Rightarrow \text{x}_1=-2(5x_3-7)+7x_3-4=-10x_3+14+7x_3-4=-3x_3+10$$

Conjunto solución:

$$x_1=-3x_3+10\,,\ x_2=5x_3-7 \quad , \quad \forall x_3 \in R$$

También se suele representar la variable x_3 por el parámetro t, y el conjunto solución se expresa:

$$\boxed{x_1=-3t+10 \quad , \quad x_2=5t-7 \ , \ x_3=t\ , \ \forall t \in R}$$

El sistema es **compatible indeterminado.**

Notación Matricial

Un sistema lineal puede expresarse de manera más compacta por medio de una **matriz.**

Por ejemplo, dado el sistema del ejemplo 3:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ 3x_1 + 9x_2 - 36x_3 = -33 \end{cases}$$

los coeficientes de las variables x_1, x_2, x_3, se pueden escribir como los elementos de una matriz, llamada **matriz de los coeficientes.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -36 \end{pmatrix}$$

Si a esta matriz le agregamos las constantes de los miembros que figuran a la derecha de cada ecuación, obtenemos la **matriz aumentada**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 13 \\ 3 & 9 & -36 & -33 \end{pmatrix}$$

El tamaño de una matriz indica su número de filas y columnas. La matriz aumentada tiene 3 filas y 4 columnas, por lo que es una matriz de 3x4.

Una matriz con m filas y n columnas se llama **matriz de** mxn (se lee “matriz de m por n”), y es un arreglo rectangular de m filas y n columnas. Siempre se escribe primero el número de filas.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} está ubicado en la fila i, y en la columna j.

Se dice que una matriz mxn, es de **orden** mxn. Si $m = n$, entonces la matriz es cuadrada de orden m.

Con esta nueva notación de matrices, se pueden reescribir las operaciones que conducen a sistemas equivalentes de la página 6. Estas operaciones cuando se aplican a los renglones de la matriz aumentada que representa un sistema de ecuaciones, se denominan **operaciones elementales por renglones.**

Operaciones elementales por renglones.
1. Intercambiar dos renglones.
2. Multiplicar (o dividir) un renglón por un número distinto de cero.
3. Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.

Uso de las operaciones elementales por renglones para resolver un sistema lineal

Ejemplo 7. Resolver el siguiente sistema, utilizando las operaciones elementales sobre la matriz aumentada del mismo.

Sistema Lineal

$$\begin{cases} x-2y+3z=9 \\ -x+3y \quad =-4 \\ 2x-5y+5z=17 \end{cases}$$

Matriz aumentada asociada

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{pmatrix}$$

Solución. Aplicamos las operaciones elementales a la matriz aumentada

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3+(-2)R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to \frac{1}{2}.R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B$$

La última matriz está en forma **escalonada por renglones**. El término escalonada se refiere al patrón de escalera formado por los elementos no nulos de la matriz.

Para interpretar correctamente la solución, conviene regresar a la notación con ecuaciones.

$$\begin{cases} x-2y+3z=9 \\ \quad y \ +3z =5 \\ \qquad z=2 \end{cases}$$

De donde, sustituyendo $z=2$ en la 2º ecuación, se obtiene $y=-1$. Reemplazando estos valores en la 1º ecuación se obtiene $x=1$.

La solución al sistema es: $\boxed{x=1,\ \ y=-1,\ \ z=2}$ $\qquad Sol.:\{(1,-1,2)\}$

Reducción por renglones. Notación

El proceso de aplicar las operaciones elementales por renglones para simplificar una matriz aumentada se llama **reducción por renglones.**

1. $R_i \rightleftarrows R_j$, quiere decir intercambiar el renglón i , por el renglón j .

2. $R_i \longrightarrow c.R_i$, significa reemplazar el renglón i , por ese mismo renglón multiplicado por c.

3. $R_i \longrightarrow R_i + c.R_j$, significa sustituir el renglón i , por la suma del renglón i más el renglón j multiplicado por c.

4. $A \longrightarrow B$, indica que las matrices aumentadas $A \; y \; B$ son equivalentes, es decir que los sistemas que representan tienen la misma solución.

Forma escalonada de una matriz. Definición.

Una matriz está en **forma escalonada** si tiene las siguientes propiedades:

1. Todos los renglones (si los hay) cuyos elementos son todos cero, aparecen en la parte inferior de la matriz.

2. Para cada renglón, que no consiste por completo en ceros, el primer elemento no nulo es 1 (denominado 1 principal).

3. Para dos renglones consecutivos (no nulos), el 1 principal del renglón superior está más a la izquierda que el 1 principal del renglón inmediato inferior.

Obs.: Una matriz en forma escalonada por renglones, está en forma **escalonada reducida** si toda columna con un 1 principal tiene ceros en todas las posiciones por arriba y por debajo de su 1 principal.

Ejemplo 8.
Las siguientes matrices están en forma escalonada por renglones:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad b)\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad d)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución. Las matrices de los incisos c) y d) están en forma *escalonada reducida*.

A continuación están resumidos los pasos para resolver un sistema de ecuaciones por medio de la eliminación gaussiana.

Eliminación gaussiana

1. Escribir la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales.

2. Aplicar las operaciones elementales en los renglones para obtener una matriz aumentada equivalente en **forma escalonada**.

3. Escribir en forma escalonada por renglones el sistema de ecuaciones lineales correspondiente a la matriz obtenida y aplicar la sustitución hacia atrás para encontrar la solución.

Eliminación de Gauss-Jordan
Con la eliminación gaussiana se aplican operaciones elementales en los renglones de una matriz para obtener una matriz escalonada por renglones.
Un segundo método de eliminación, es el de Gauss-Jordan que continúa el proceso de reducción hasta que se obtiene una forma **escalonada por renglones reducida.**

Ejemplo 9. Resolver el siguiente sistema por el método de Gauss- Jordan

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$$

Solución
Aplicamos las operaciones elementales a la matriz aumentada para obtener una matriz escalonada reducida equivalente.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + (-4)R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 9 & -13 & -40 \\ 2 & -1 & 3 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + (-2)R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 9 & -13 & -40 \\ 0 & 3 & -3 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 9 & -13 & -40 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 9 & -13 & -40 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + (-9)R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+(2)R_2}\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&-1&-4\\0&0&-4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3.\left(-\frac{1}{4}\right)}\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&-1&-4\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+R_3}\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&0&-3\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+(-1)R_3}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-3\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

Se puede “ver” de inmediato que la solución es $x_1=2$; $x_2=-3$; $x_3=1$

Ejemplo 10. Resolver el siguiente sistema por el método de Gauss- Jordan

$$\begin{cases}2x_1+4x_2-2x_3=0\\3x_1+5x_2=1\end{cases}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix}2&4&-2&0\\3&5&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1}\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\3&5&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+(-3)R_1}\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&-1&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2(-1)}\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&1&-3&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+(-2)R_2}\begin{pmatrix}1&0&5&2\\0&1&-3&-1\end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones correspondiente es:

$$\begin{cases}x_1\quad+5x_3=2\\\quad x_2-3x_3=-1\end{cases}$$

Usando el parámetro t, para representar la variable x_3, se tiene:

$x_1=2-5t$, $x_2=-1+3t$, $x_3=t$

Donde t es cualquier número real.

Ejemplo 11. Resolver el siguiente sistema por el método de Gauss- Jordan

$$\begin{cases}3x_1+6x_2-6x_3=9\\2x_1-5x_2+4x_3=6\\5x_1+28x_2-26x_3=-8\end{cases}$$

Solución

$$\begin{pmatrix}3&6&-6&9\\2&-5&4&6\\5&28&-26&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{3}.R_1}\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\2&-5&4&6\\5&28&-26&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3+(-5)R_1]{R_2\to R_2+(-2)R_1}\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\0&-9&8&0\\0&18&-16&-23\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to\left(-\frac{1}{9}\right).R_2}\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\0&1&-\frac{8}{9}&0\\0&18&-16&-23\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3+(-18)R_2]{R_1\to R_1+(-2)R_2}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{2}{9}&3\\0&1&-\frac{8}{9}&0\\0&0&0&-23\end{pmatrix}$$

La última ecuación es de la forma: $0x_1+0x_2+0x_3=-23$, lo cual es imposible ya que $0\neq-23$.
Por lo tanto el sistema no tiene solución. Es decir es incompatible.

Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales
Un sistema de ecuaciones lineales donde los términos constantes son iguales a cero, se llama sistema homogéneo.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots.. + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots.. + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots.. + a_{3n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots.. + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Un sistema homogéneo debe tener siempre al menos una solución, que es cuando cada variable vale cero. Si todas las variables del sistema son iguales a cero, se verifica la igualdad en cada ecuación. A esta solución se la llama **trivial**.

Ejemplo 12. Resolver el siguiente sistema homogéneo, por el método de Gauss- Jordan

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y \qquad = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + (-1)R_1]{R_2 \to R_2 + (-1)R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2}.R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1 \to R_1 + R_2]{R_3 \to R_3 + (-3)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to (-2).R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)R_3]{R_2 \to R_2 + \frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es **compatible determinado**. Tiene una única solución, que es la trivial:
$x_1 = 0 \;\; , \;\; x_2 = 0 \;\; , \;\; x_3 = 0$

Ejemplo 13. Resolver el siguiente sistema homogéneo, por el método de Gauss- Jordan

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + (-3)R_1]{R_2 \to R_2 + (-2)R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + (-2)R_2]{R_1 \to R_1 + (-1)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones correspondiente es:

$$\begin{cases} x_1 \quad + 2x_3 = 0 \\ \quad x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Usando el parámetro t, para representar la variable x_3, se tiene:

$x_1 = -2t \quad , \quad x_2 = t \quad , \quad x_3 = t$

Donde t es cualquier número real.

El sistema es **compatible indeterminado**. Existen infinitas soluciones además de la trivial.

Ejemplo 14. Resolver el siguiente sistema homogéneo por el método de Gauss- Jordan

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & -6 & -6 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + (-3)R_1]{R_2 \to R_2 + 2.R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + 3.R_2]{R_1 \to R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones correspondiente es:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \dfrac{10}{3}x_4 = 0 & \Rightarrow x_1 = 2x_2 - \dfrac{10}{3}x_4 \\ \qquad x_3 + \dfrac{1}{3}x_4 = 0 & \Rightarrow x_3 = -\dfrac{1}{3}x_4 \end{cases}$$

Fijando dos parámetros, t y s, tales que : $x_2 = s; \quad x_4 = t$, la solución se puede expresar:

$$x_1 = 2s - \frac{10}{3}t \;\; ; \;\; x_2 = s; \;\; x_3 = -\frac{1}{3}t \;\; ; \;\; x_4 = t, \qquad \forall s,\ t \in R$$