En el siguiente material se desarrollan los contenidos teóricos correspondientes a la unidad I de Análisis Matemático I, pretendiendo proporcionar una guía del nivel exigido en las evaluaciones y unificar la diversa nomenclatura existente en los diversos libros.

Definiciones

Extremos Absolutos

Sea f una función definida en $A \subseteq Dom\, f$ y sea $c \in A$.
$f(c)$ es el **máximo absoluto** de f en A si se verifica que
$f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in A$.
El punto $(c, f(c))$ se llama punto de máximo absoluto y c es abscisa de máximo absoluto.

Sea f una función definida en $A \subseteq Dom\, f$ y sea $c \in A$.
$f(c)$ es el **mínimo absoluto** de f en A si se verifica que $f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in A$.
El punto $(c, f(c))$ se llama punto de mínimo absoluto y c es abscisa de mínimo absoluto.

Llamaremos **extremos absolutos** de una función, indistintamente a los máximos o mínimos absolutos.

La existencia de estos valores en una función, depende del conjunto donde se la considere.
Se ha estudiado con anterioridad un teorema que garantiza que si la función es continua en un intervalo cerrado entonces seguro alcanza valores **extremos absolutos** en ese intervalo.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces f alcanza un valor máximo y un valor mínimo absoluto en $[a,b]$

Extremos locales o relativos

Sea f una función definida en $A \subseteq Dom\, f$
$f(c)$ es un máximo local o relativo de f en A si se verifica que existe al menos un entorno del punto c, tal que $f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in (E_c \cap A)$.
El punto $(c, f(c))$ se llama punto de máximo local o relativo y c es la abscisa de máximo relativo.

De manera análoga:

Sea f una función definida en $A \subseteq Dom\, f$
$f(c)$ es un mínimo local o relativo de f en A si se verifica que existe al menos un entorno del punto c, tal que $f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in (E_c \cap A)$.
El punto $(c, f(c))$ se llama punto de mínimo local o relativo y c es la abscisa de mínimo relativo.

Llamaremos **extremos locales o relativos** de una función indistintamente a los máximos o mínimos relativos.

Notemos que estos valores, si existen, se dan en **puntos interiores del dominio;** mientras que los **extremos absolutos,** pueden producirse tanto en **puntos interiores como en la frontera.**

El teorema de Bolzano – Weierstrass **garantiza** la existencia de los extremos absolutos en funciones **continuas** cuyos dominios son **intervalos cerrados.**

Si alguna de estas hipótesis no se cumplen, estos valores pueden o no existir.

Queremos comenzar un estudio que nos permita encontrar los puntos donde estos valores se producen, es decir queremos establecer las condiciones necesarias y las condiciones suficientes que nos permitan asegurar que una función alcanza extremos locales.

Punto crítico

Llamaremos punto crítico de una función **a un punto interior** de su dominio donde la derivada es cero o no existe.

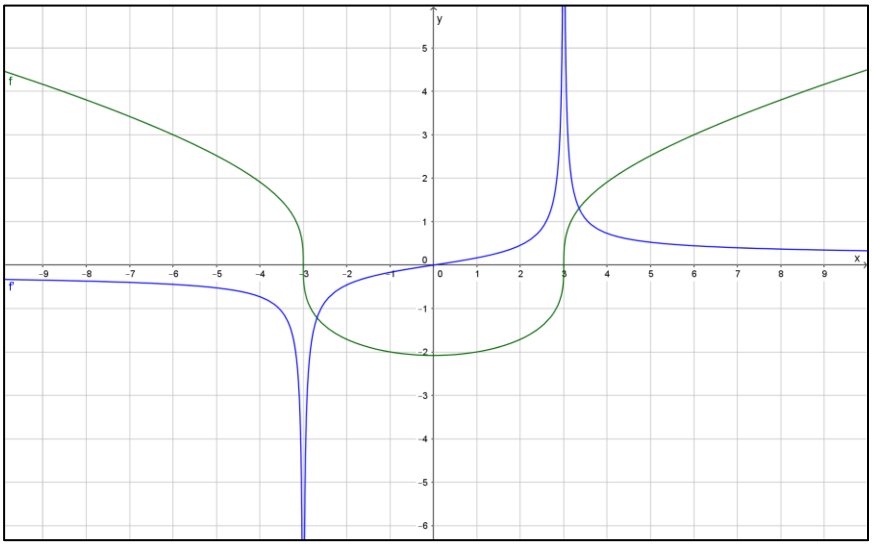
Ejemplo 1.

$f(x)=\sqrt[3]{x^2-9}$ $\qquad\qquad$ $Dom\ f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-9)^2}}$$

Para encontrar los puntos críticos de *f* debemos ver donde la **derivada es cero o no existe** y que sean **puntos interiores del dominio**.

Son puntos críticos de *f* $\quad x=0,\ x=3,\ x=-3$

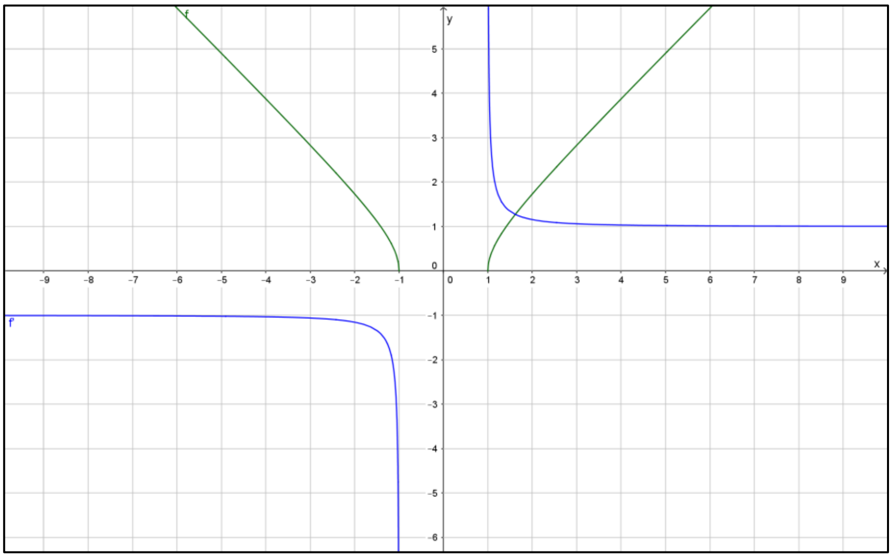


Ejemplo 2.

$g(x) = \sqrt[2]{x^2 - 1}$ $\qquad$ $Dom\, g = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt[2]{x^2 - 1}}$$

¿Son puntos críticos de g $\; x = 0, x = 1, x = -1$? No son puntos críticos, pues estos valores no son interiores del dominio de la función *g*. Esta función no tiene puntos críticos

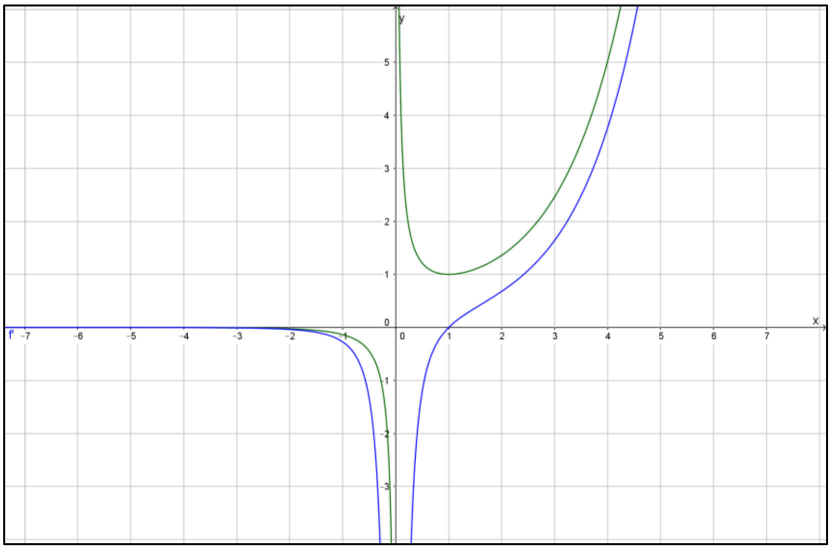


Ejemplo 3.

$h(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x}$ $\qquad$ $Dom\, h = \mathbb{R} - \{0\}$

$$h'(x) = \frac{xe^{x-1} - e^{x-1}}{x} = \frac{e^{x-1}(x-1)}{x}$$

$x = 1$ es un punto crítico de *h*, pero $x = 0$ no lo es, pues este valor no es interior del dominio.

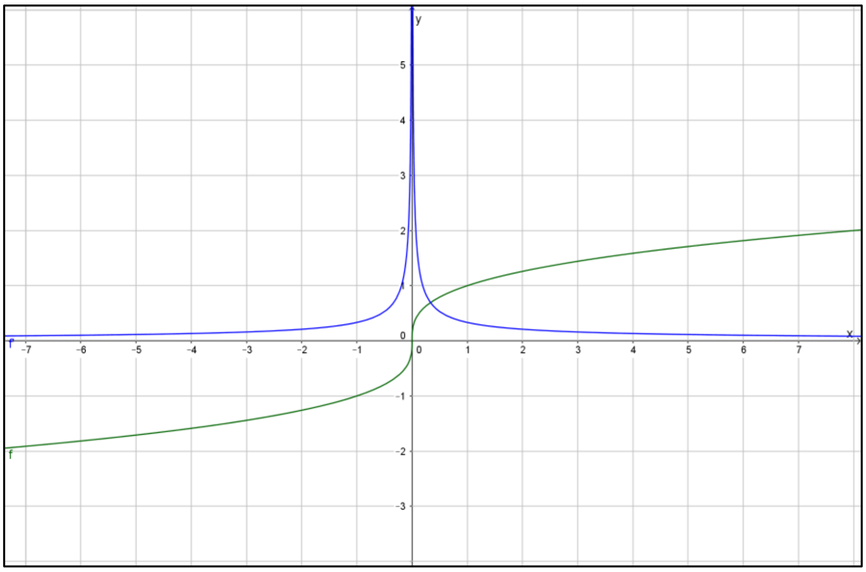


Ejemplo 4.

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\qquad\qquad$ $Dom\ f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$x = 0$ es un punto crítico de f pues es un punto interior del dominio donde la derivada no existe.



El siguiente teorema demuestra que si una función tiene un extremo local en un punto "*c*", necesariamente "*c*" es un punto crítico de la función *f*.

<u>Condición necesaria (pero no suficiente) para la existencia de extremos locales</u>

Sea f una función definida en $A \subseteq Dom\ f$, y sea "c" punto interior de *A*.
Si $(c, f(c))$ es un punto de extremo local entonces "c" es un punto crítico de f.

Haremos la demostración para **máximo local**,
.
Nuestras hipótesis son:

- "c" es punto interior de A
- f alcanza un máximo local en "c" luego $(\exists h > 0 \,/\, f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in A \cap (c-h, c+h))$

que es equivalente a decir $f(x) - f(c) \leq 0 \quad \forall x \in A \cap (c-h, c+h)$.

Demostración:

Si f no es derivable en "c" $\Rightarrow$ "c" es punto crítico de f por definición.

Si f es derivable de "c" (debemos ver que $f'(c)=0$)

La derivada de f en "c" es por definición $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$, consideremos entonces su las derivadas laterales:

$$f'(c)=\begin{cases} f'(c)^{+}=\lim\limits_{x\to c^{+}}\dfrac{\overbrace{f(x)-f(c)}^{(-)\,pues\;\; f(c)\geq f(x)}}{\underbrace{x-c}_{(+)\,pues\;\; x>c}}\leq 0 \\ \\ f'(c)^{-}=\lim\limits_{x\to c^{-}}\dfrac{\overbrace{f(x)-f(c)}^{(-)\,pues\;\; f(c)\geq f(x)}}{\underbrace{x-c}_{(-)\,pues\;\; x<c}}\geq 0 \end{cases}$$

Como por hipótesis la función es derivable en "c", las derivadas laterales deben ser iguales, y la única posibilidad de coincidencia es que $f'(c)=0$, por lo que "c" es punto crítico de f.

La demostración es similar en el caso que en "c" se produzca un mínimo local.

Veremos ahora algunos teoremas que establecen propiedades de funciones continuas en intervalos cerrados y derivables en intervalos abiertos que nos facilitarán la búsqueda de los extremos relativos de una función.

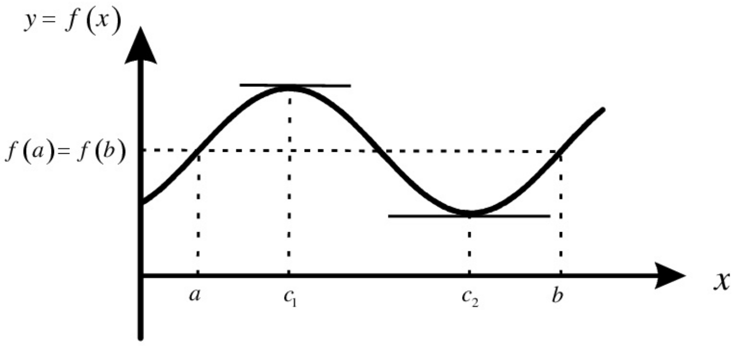
<u>Teorema de Rolle</u>

Si f es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y además es $f(a)=f(b)$
$\Rightarrow \exists\, c\in(a,b)\ /\ f'(c)=0$.

Remarquemos las hipótesis

- f es una función continua en $[a,b]$
- f es una función derivable en (a,b)
- $f(a)=f(b)$

Queremos demostrar que existe al menos un punto interior del intervalo donde la derivada es nula.



Geométricamente significa que por lo menos hay un punto interior del intervalo en el que la recta tangente al gráfico de la función es horizontal.

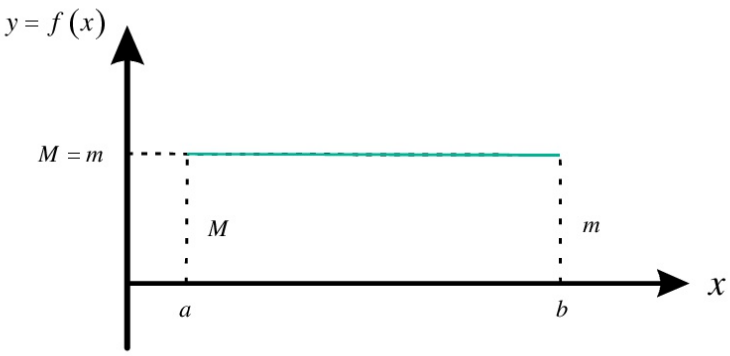
Demostración

Como *f* es una función continua en $[a,b]$ vale el teorema de Bolzano –Weierstrass; por lo que se puede garantizar la existencia de un valor máximo absoluto ***M*** y un valor mínimo absoluto ***m*** de *f* en $[a,b]$

Consideremos los distintos casos que pueden ocurrir:

Caso a)

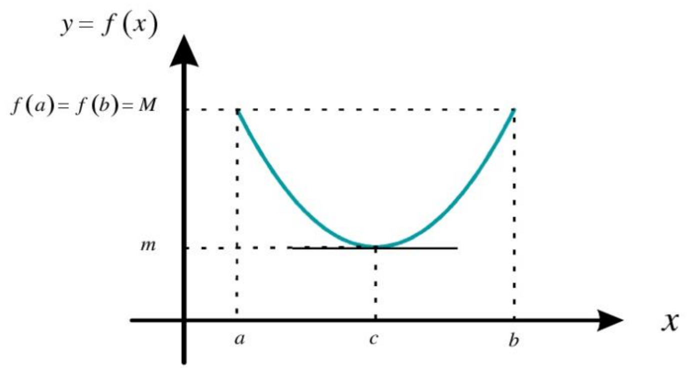
Supongamos primero que tanto ***M*** como ***m*** se dan en los extremos del intervalo.



Por ejemplo sea $\boldsymbol{M} = f(a)$ y $\boldsymbol{m} = f(b)$, como por hipótesis en los extremos del intervalo la función toma valores iguales resulta $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m}$, por lo que *f* es constante $\forall x \in [a,b]$, luego su derivada es nula en todo punto y se cumple la tesis, pues existe al menos un punto interior del intervalo, donde la derivada es cero.

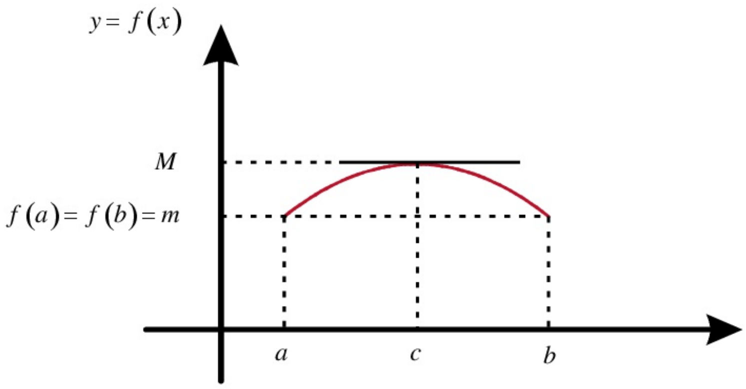
Caso b)

Supongamos ahora que el máximo absoluto $\boldsymbol{M}$ de f se da en los extremos a y b del intervalo , entonces el mínimo absoluto $\boldsymbol{m}$ necesariamente debe producirse en un punto interior , por lo que es también un extremo local, y por condición necesaria de existencia de extremos locales, al ser *f* derivable en todo punto de (a,b), debe ser $f'(c)=0$, luego se cumple la tesis , pues existe al menos un punto interior del intervalo , donde la derivada es cero.



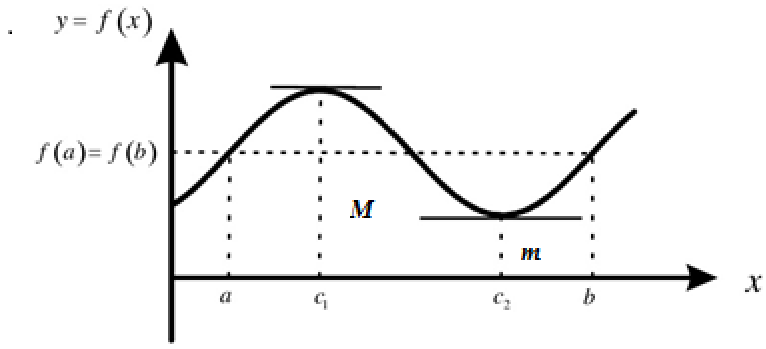
Caso c)

Supongamos ahora que el mínimo absoluto de f ***m*** se da en los extremos a y b del intervalo, entonces el máximo absoluto ***M*** , necesariamente debe producirse en un punto interior , por lo que es también un extremo local, y por condición necesaria de existencia de extremos locales, al ser *f* derivable en todo punto de (a,b), debe ser $f'(c)=0$, luego se cumple la tesis , pues existe al menos un punto interior del intervalo , donde la derivada es cero.



Caso d)

Supongamos ahora que ninguno de los extremos absolutos de *f* se dan en los extremos a y b, entonces , necesariamente deben producirse en puntos interiores del intervalo, por lo que son también extremos locales, y por condición necesaria de existencia de extremos locales, al ser *f* derivable en todo punto de (a,b), debe ser $f'(c)=0$, y se cumple la tesis , pues existe al menos un punto interior del intervalo , donde la derivada es cero.



<u>Teorema del valor medio del cálculo diferencial (Lagrange)</u>

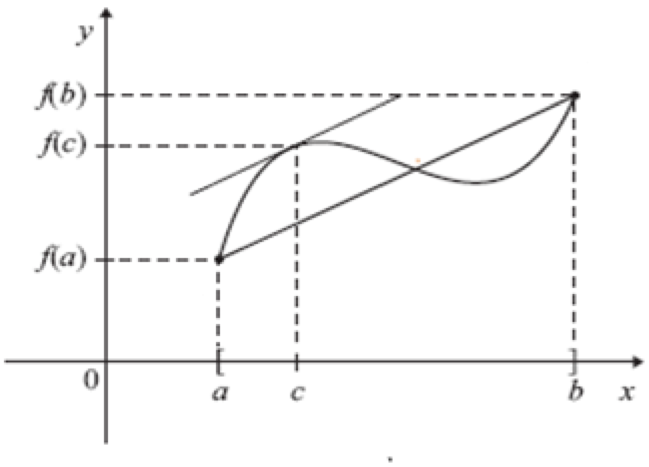
Si f es una función continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ / $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Veamos algunas consideraciones antes de demostrarlo:

- Si además se verifica que *f(a) = f(b)*, obtenemos la tesis del Teorema de Rolle. El teorema de Lagrange sería una generalización, pero con anterioridad debimos probar Rolle pues debemos usar sus conclusiones para su demostración.

- Geométricamente el teorema permite garantizar que si las hipótesis son válidas, existe al menos un punto **interior** del intervalo $[a,b]$ donde la recta tangente al gráfico de la función es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ $(b, f(b))$.

- Para hacer más intuitiva la validez del Teorema de Lagrange, si suponemos que la función f representa la distancia recorrida por una partícula móvil en función del tiempo *t*. Entonces el primer miembro representaría la velocidad media en el intervalo de tiempo $[a,b]$ y f'(t) sería la velocidad instantánea en el tiempo *t*. Luego la igualdad $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ puede interpretarse como que en algún instante de tiempo en $[a,b]$, la velocidad instantánea es igual a la velocidad media. Si un auto recorre una distancia de 100 km en una hora, necesariamente en algún momento su velocidad instantánea fue de 100 $\dfrac{km}{h}$.



Recordemos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos $(a, f(a))$ $(b, f(b))$

Como ya sabemos cualquier recta tiene ecuación $y = mx + n$

Donde *m* es la pendiente y *n* la ordenada al origen

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Reemplazando el valor de *m* en $y = mx + n$

$y_{\sec} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x+n$ Ahora como sabemos que el punto $(a, f(a))$ pertenece a la recta, debe satisfacer su ecuación

$f(a) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}a+n$ luego,

$n = f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}a$ Resultando

$$y_{\sec} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a$$

Finalmente la ecuación de la recta es

$$\boxed{y_{\sec} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)}$$

Demostración

Consideremos la una función auxiliar $g = f - y_{\sec}$

De manera que $g(x) = f(x) - y_{\sec}(x) = f(x) - \left[\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right]$

- ***g*** es una función continua en $[a,b]$ por ser resta de funciones continuas en tal intervalo, (f por hipótesis e y_{sec} por ser un polinomio de primer grado)
- ***g*** es una función derivable en (a,b) por resta de funciones derivables en (a,b).

$$g(a) = f(a) - y_{\sec}(a) = f(a) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) + f(a)\right] = 0$$

$$g(b) = f(b) - y_{\sec}(b) = f(b) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) + f(a)\right] =$$

$$= f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{(b-a)}}\cancel{(b-a)} - f(a) = f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0$$

- Por lo que $g(a) = g(b)$

Esto significa que la función auxiliar *g* satisface las hipótesis del teorema de Rolle, luego se puede afirmar que $\Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \;\; / \;\; g'(c) = 0$

Pero $g(x) = f(x) - \left[\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right]$

Derivando, $g'(x) = f'(x) - y'_{\sec}(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$;

y en particular la derivada de g en "c" ; es cero

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$$

$\therefore \exists \ c \in (a,b) \ / \ f'(\mathrm{c}) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ y esto es lo que queríamos probar.

Ejercicio:

Verificar si la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ satisface las condiciones del Teorema de Lagrange en el intervalo $[-1,0]$ y en caso afirmativo calcular el valor del cual el teorema hace mención.

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ $\qquad Domf = \mathbb{R} - \{1\}$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

- f es continua en $[-1,0]$
- f es derivable en $(-1,0)$

$$\Rightarrow \exists \ c \in (-1,0) \ / \ \frac{f(0) - f(-1)}{0-(-1)} = f'(c) = \frac{-2}{(c-1)^2}$$

$$-1 = \frac{-2}{(c-1)^2}$$

$$(c-1)^2 = 2$$
$$c = 1 \pm \sqrt{2}$$

Pero como el valor debe pertenecer al intervalo $(-1,0)$, el valor buscado es $c = 1 - \sqrt{2}$.

Este Teorema es de particular importancia en el Análisis Matemático, muchas de las propiedades que estudiaremos en breve, son consecuencias del mismo, que ofrece a partir de ahora una perspectiva distinta a la empleada. Hemos aprendido, dada una función *f* , a calcular su derivada; a partir de ahora podremos formular el problema inverso; esto es , conocida la derivada de una cierta función, establecer características de *f.*

Teorema del Valor medio Generalizado (Cauchy)

Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Sea $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow \exists \ c \in (a,b) \ / \ [f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c)$.

Observación: también puede escribirse

> Sean f y g funciones continuas $[a,b]$ en y derivables en (a,b).
>
> Sea $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \;\; / \;\; \dfrac{[f(b)-f(a)]}{[g(b)-g(a)]} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Ya que $g'(c) \neq 0$ pues por hipótesis la derivada de g nunca es nula en (a,b) y además $[g(b)-g(a)]$ debe ser distinto de cero, pues si fuera igual a cero significaría que $g(b)=g(a)$, y como la función g es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) valdría el Teorema de Rolle, es decir
$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \;\; / \;\; g'(c)=0$ y esto es imposible por hipótesis.

La demostración es análoga a la del Teorema de Lagrange.

Existen numerosas aplicaciones del Teorema del Valor Medio, una de ellas es el teorema de L'Hôpital, cuyo conocimiento nos permitirá realizar el cálculo de límites de formas indeterminadas.

Formas indeterminadas

Existen 7 formas indeterminadas

Ellas son $\dfrac{0}{0} \quad \dfrac{\infty}{\infty} \quad 0\,\infty \quad \infty - \infty \quad 0^0 \quad \infty^0 \quad 1^\infty$

¿Por qué son estas formas y no otras?

Recordemos que:

Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\overset{\to N}{f(x)}}{\underset{\to 0}{g(x)}} = \infty$ que representamos generalmente como $\dfrac{N}{0} \to \infty$

Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\overset{\to 0}{f(x)}}{\underset{\to M}{g(x)}} = 0$ que representamos generalmente como $\dfrac{0}{M} \to 0$

$\dfrac{0}{0}$ es la representación del comportamiento del cociente de dos funciones f y g que se aproximan simultáneamente a cero cuando x es cada vez más parecido al valor "a" .

Matemáticamente $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\overset{\to 0}{f(x)}}{\underset{\to 0}{g(x)}}$. El resultado del límite va a depender de quienes sean las funciones f y g

Si la función f tiende a cero **"más rápido "**que la función g, el resultado será cero, pero si g se aproxima a cero más rápido que f, el resultado será infinito,….. y si se acercan a cero de manera proporcional el resultado del límite será una constante. Esta es la razón por la que decimos que $\dfrac{0}{0}$ es una **forma indeterminada.**

$\frac{0}{0}$ representa un comportamiento, de ninguna manera es una cuenta a realizar, y va a tomar un valor distinto, según quienes sean las funciones f y g involucradas. El cálculo del límite resuelve cuánto vale $\frac{0}{0}$ en cada caso.

Algo parecido ocurre en la forma $\frac{\infty}{\infty}$

Si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\overset{\to N}{f(x)}}{\underset{\to\infty}{g(x)}}=0$ que representamos generalmente como $\frac{N}{\infty}\to 0$

Sí $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\overset{\to\infty}{f(x)}}{\underset{\to M}{g(x)}}=\infty$ que representamos generalmente como $\frac{\infty}{M}\to\infty$

$\frac{\infty}{\infty}$ Representa al igual que el caso anterior, el cociente de dos funciones f y g que se aproximan simultáneamente a infinito cuando x toma valores cada vez más parecidos al valor "a".

Matemáticamente expresamos esta idea de la siguiente forma:

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\overset{\to\infty}{f(x)}}{\underset{\to\infty}{g(x)}}$. El resultado del límite va a depender de quienes sean las funciones f y g.

Si la función f tiende a infinito **"más rápido "**que la función g, el resultado será infinito, pero si g se aproxima a infinito más rápido que f, el resultado será cero… y si se acercan a infinito de manera proporcional el resultado del límite será una constante.

Otra vez enfatizamos que $\frac{\infty}{\infty}$ es una **forma indeterminada,** de ninguna manera es una cuenta a realizar, simboliza un cociente de tendencias cuyo valor depende de quienes sean las funciones f y g involucradas y es el cálculo del límite el que determina cuánto vale $\frac{\infty}{\infty}$ en cada caso.

De manera análoga se puede entender porque son formas indeterminadas $0\cdot\infty$ y $\infty-\infty$.

Una discusión aparte merecen las formas indeterminadas que se asocian a funciones potencial exponencial

Explicaremos una de ellas por ejemplo el caso 1^{∞}

La clave para comprender porque esto es una indeterminación es que la expresión 1^{∞} simboliza

$$\lim_{x\to a}\left[\underbrace{f(x)}_{\to 1}{}^{\overbrace{g(x)}^{\to\infty}}\right].$$

El resultado de la tendencia de la función f^{g} va a depender de como la función f tiende a uno: si f se aproxima a uno por valores menores, el resultado será cero pues un número menor que uno elevado a una potencia que crece….¡tiende cero! , y por el contrario si f se aproxima a uno por valores mayores, resulta la base mayor que uno y elevada a una potencia que crece, luego su tendencia será al infinito.

Destaquemos también que es fácil pasar algebraicamente de una forma indeterminada a otra.

$$\frac{\overset{\to 0}{f(x)}}{\underset{\to 0}{g(x)}} = \frac{0}{0} \qquad \frac{\overset{\to 0}{f(x)}}{\underset{\to 0}{g(x)}} = \overset{\to 0}{f(x)} \overbrace{\left(\frac{1}{\underset{\to 0}{g(x)}} \right)}^{\to\infty} = 0.\infty$$

Otro ejemplo es:

$$\overset{\to\infty}{f(x)} - \overset{\to\infty}{g(x)} = \infty - \infty \qquad \overset{\to\infty}{f(x)} - \overset{\to\infty}{g(x)} = \frac{\overset{\to 0}{\dfrac{1}{g(x)}} - \overset{\to 0}{\dfrac{1}{f(x)}}}{\dfrac{1}{\underbrace{f(x)g(x)}_{0}}} = \frac{0}{0}$$

Sea cual sea el caso, en presencia de formas indeterminadas es el cálculo del límite el que decide a que valor se aproxima la expresión considerada.

El siguiente teorema, permite el cálculo de límites de formas indeterminadas

<u>Teorema de L´Hôpital</u> (Forma Indeterminada $\frac{0}{0}$)

Sean f *y* g derivables en un entorno reducido $E'_{a,h}$ de un punto *"a"*

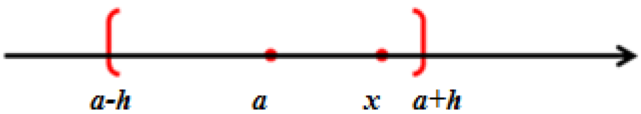
tales que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

sea $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in E'_{a,h}$.

Si además existe el $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (finito o no) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Recordemos que $E'_{a,h} = (a-h\ ,\ a)\ U\ (a\ ,\ a+h)$.

Sea $(a,x) \subseteq (a, a+h) \qquad a < x < a+h$



f y g son derivables en (a,x) pues por hipótesis son derivables en $(a,\, a+h)$. Podemos asegurar que dichas funciones son continuas en $(a,x]$ (puesto que al ser derivables, son continuas).

Queremos aplicar el teorema del valor medio generalizado en el intervalo $[a,x]$; necesitamos entonces que en ese intervalo ambas funciones sean continuas……y lo son, excepto quizás en *"a"*.

Consideremos entonces las extensiones continuas de las funciones F y G en *"a"*

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & si \quad x\neq a \\ 0 & si \quad x=a \end{cases} \qquad \text{y} \qquad G(x)=\begin{cases} g(x) & si \quad x\neq a \\ 0 & si \quad x=a \end{cases}$$

Si $x\neq a$ $F(x)=f(x)$ y $G(x)=g(x)$ y en particular en "a"

Tanto F como G son continuas ahora en $[a,x]$,

entonces verifiquemos que se satisfacen las hipótesis del **Teorema de Cauchy**:

- F como G son continuas en $[a,x]$
- F como G son derivables en (a,x)
- G' no se anula en (a,x)

$$\Rightarrow \exists\, c\in(a,x)\,/\,\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(c)}{G'(c)}$$

Tomemos en ambos miembros límite para $x\to a^{+}$

$$\lim_{x\to a^{+}}\frac{\overset{=f(x)}{F(x)}-\overset{=0}{F(a)}}{\underset{=g(x)}{G(x)}-\underset{0}{G(a)}}=\lim_{x\to a^{+}}\frac{\overset{f'(c)}{F'(c)}}{\underset{g'(c)}{G'(c)}}$$

Podemos afirmar que $F(x)=f(x)$ y $G(x)=g(x)$ pues $x\neq a$ $\left(\text{pues } x\to a^{+}\right)$

$$\lim_{x\to a^{+}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^{+}}\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad a<c<x$$

Ahora si $x\to a^{+}$, $c\to a^{+}$, por lo que x, y c tienen el mismo comportamiento, luego podemos escribir:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad a<c<x\,.$$

Hemos demostrado que los límites por derecha son iguales.

Por el mismo procedimiento, si analizamos las funciones en el intervalo $(x,a)\subseteq(a-h,\,a)$ $\quad a-h<x<a$, se podría demostrar que los límites laterales por izquierda también satisfacen lo expuesto, por lo que la propiedad es válida en un entorno del punto "*a*".

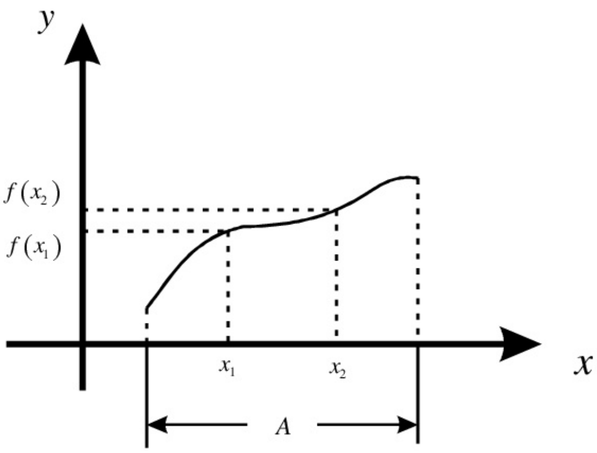
<u>Otras consecuencias del Teorema del valor medio</u>

<u>Funciones crecientes en un conjunto</u>

Intuitivamente una función f es creciente en un conjunto $A \subseteq Dom\, f$ cuando a medida que consideramos x mayores, las respectivas imágenes también son mayores.

Es decir:

Sea f definida en $A \subseteq Dom\, f$. Diremos que f **es creciente** en A si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A$.



Sea f definida en $A \subseteq Dom\, f$. Diremos que f **es estrictamente creciente** en A si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A$.

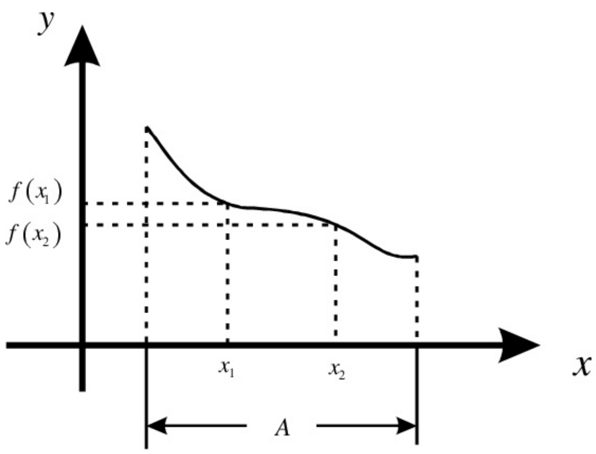
Ejemplos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } & 0 \leq x \leq 1 \\ x \text{ si } & x > 1 \end{cases}$$ **es creciente** en $[0, \infty)$.

$g(x) = x^3$ es **estrictamente creciente e**n todo su dominio.

De manera similar definimos:

Sea f definida en $A \subseteq Dom\, f$. Diremos que f **es decreciente** en A si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A$.



Sea f definida en $A \subseteq Dom\, f$. Diremos que f **es estrictamente decreciente** en A si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A$.

Las funciones que crecen o decrecen en un conjunto, se llaman monótonas; y a los intervalos donde las funciones crecen o decrecen se los denomina intervalos de monotonía.

Primera Consecuencia del Terorema de Lagrange

Sea f derivable en un intervalo abierto $J \subseteq Dom\, f$

a) Si $f'(x) > 0 \quad \forall x \in J \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en *J*.
b) Si $f'(x) < 0 \quad \forall x \in J \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en *J*.
c) Si $f'(x) = 0 \quad \forall x \in J \Rightarrow f$ es constante en *J*.

Demostración

a) Sean x_1, x_2 puntos arbitrarios de *J* con $x_1 < x_2$
Apliquemos el Teorema de Lagrange en el intervalo $[x_1, x_2]$

- f es continua en $[x_1, x_2]$
- f es derivable en (x_1, x_2)

$\Rightarrow \exists\, c \in (x_1, x_2) \,/\, \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$

y además es $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0$ (Por hipótesis)

$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} > 0$ y $x_2 - x_1 > 0$ (pues $x_1 < x_2$) entonces necesariamente debe ser $f(x_2) - f(x_1) > 0$

Concluimos que $\forall x_1, x_2 \in J$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $\therefore$ f es estrictamente creciente en *J*.

b) Sean $x_1,\ x_2$ puntos arbitrarios de *J* con $x_1 < x_2$

Apliquemos el Teorema de Lagrange en el intervalo $[x_1, x_2]$

- f es continua en $[x_1, x_2]$
- f es derivable en (x_1, x_2)

$$\Rightarrow \exists\, c \in (x_1, x_2) / \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

y además es $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) < 0$ (Por hipótesis)

$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} < 0$ y $x_2 - x_1 > 0$ (pues $x_1 < x_2$) entonces necesariamente debe ser $f(x_2) - f(x_1) < 0$

Luego $\forall x_1, x_2 \in J$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ $\therefore$ f es estrictamente decreciente en *J*.

c) Sean $x_1,\ x_2$ puntos arbitrarios de *J* con $x_1 < x_2$

Apliquemos el Teorema de Lagrange en el intervalo $[x_1, x_2]$

- f es continua en $[x_1, x_2]$
- f es derivable en (x_1, x_2)

$$\Rightarrow \exists\, c \in (x_1, x_2) / \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

y además es $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0$ (Por hipótesis)

$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} = 0$ y $x_2 - x_1 > 0$ (pues $x_1 < x_2$) entonces necesariamente debe ser $f(x_2) - f(x_1) = 0$

Luego $\forall x_1, x_2 \in J$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ $\therefore$ f es constante en *J*.

Consideración:

El reciproco de:

"Si $f'(x) > 0 \quad \forall x \in J \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en *J*".

"Si f es estrictamente creciente en. $J \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in J$" pero este enunciado es parcialmente cierto.

Consideremos la función $f(x) = x^3$ que es estrictamente creciente en creciente en su dominio, sin embargo en el origen la derivada de f es cero, por lo que hay que considerar esta posibilidad.

Luego el **teorema recíproco parcial** es

Si f es estrictamente creciente en $J \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in J$

Segunda Consecuencia del Teorema de Lagrange

Sean f y g funciones derivables en un intervalo abierto $J \subseteq Domf$; si $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in J \Rightarrow$ las funciones f y g difieren en una constante.

Si $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in J \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = 0$

Luego por álgebra de derivadas $(f-g)'(x) = 0 \ \ \forall x \in J$, y como la derivada de *(f-g)* es nula en todo *J*; por la primera consecuencia del Teorema de Lagrange, la función *(f-g)* es contante en *J.*

$(f-g)(x) = k \quad \forall x \in J \quad k \in \mathbb{R}$, que puede escribirse aplicando el álgebra de funciones

$f(x) - g(x) = k \quad \forall x \in J \quad k \in \mathbb{R}$. Luego las funciones difieren en una constante en J .

Condiciones suficientes para la existencia de extremos locales

Ya establecimos que si una función tiene extremos locales **necesariamente** estos se dan en puntos críticos, es decir en puntos interiores del dominio donde la derivada es cero o la derivada no existe. Esto se conoce como condición necesaria de existencia.

Dicho de otro modo, es **necesario** que haya puntos críticos de la derivada primera para que una función tenga extremos locales.

Los puntos críticos son "**candidatos" o "posibles"** abscisas de valores extremos **locales**.

No todo punto crítico es un extremo local. La función $f(x) = x^3$ tiene un punto crítico en el origen y claramente no presenta un extremo local en dicho punto.

Necesitamos entonces criterios suficientes que nos permitan decidir si en los puntos críticos se producen o no extremos locales.

Primer Criterio

Sea f derivable en un entorno reducido $E'_{c,h}$ de un punto *"c"*. Sea *"c"* un punto crítico de la derivada primera de *f*.

a) Si $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (c-h, c)$ y $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (c, c+h) \Rightarrow$ en *"c"* se produce un máximo local que vale *f(c)*.
b) Si $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (c-h, c)$ y $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (c, c+h) \Rightarrow$ en *"c"* se produce un mínimo local que vale *f(c)*.
c) Si f' tiene el mismo signo $\forall x \in E'_{c,h}$, entonces *f* no tiene un extremo local en *"c"*.

Demostración de a)

Si $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (c-h, c)$ y $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (c, c+h)$

Por ser $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (c-h, c)$ podemos afirmar que f es estrictamente creciente en $(c-h, c)$, lo que significa que $f(c) > f(x) \forall x \in (c-h, c)$

y, por ser $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (c, c+h)$ podemos afirmar que f es estrictamente decreciente en $(c, c+h)$, significa $f(c) > f(x) \forall x \in (c, c+h)$

Luego existe al menos un entorno del punto *"c"*, tal que $f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in E_{c,h}$, que es la definición de máximo local.

La demostración de b y c) son similares.

Segundo Criterio

Sea f una función dos veces derivable en un intervalo abierto J , que contiene a *"c"* como punto interior. Si $f'(c)=0$

a) y $f''(c)>0 \Rightarrow$ en *"c"* se produce un mínimo local que vale *f(c).*
b) y $f''(c)<0 \Rightarrow$ en *"c"* se produce un máximo local que vale *f(c).*
c) y $f''(c)=0 \Rightarrow$ el criterio no decide.

Este criterio es válido solamente para puntos críticos de derivada nula, es decir existe $\exists\ f'(c)$ y además es $f'(c)=0$

Demostración

a) $f''(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)-\overset{0}{f'(c)}}{x-c}=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{x-c}>0$ por hipótesis

por el teorema de conservación del signo para límites finitos[(1)] existe $E'_{c,h}$, tal que se verifica que

$$\frac{f'(x)}{x-c}>0 \quad \forall x\in E'_{c,h}$$

$$\frac{f'(x)}{x-c}>0\begin{cases}\text{si } (x-c)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \\ \qquad x<c \Rightarrow f'(x)<0 \\ \\ \text{si } (x-c)>0 \Rightarrow f'(x)>0 \\ \qquad x>c \Rightarrow f'(x)>0\end{cases}$$

Por el criterio anterior, la función pasa de decreciente a creciente, por lo que se produce un mínimo local.

b) se prueba de manera análoga

c) $f''(c)=0 \Rightarrow \dfrac{f'(x)-\overset{0}{f'(c)}}{x-c}=0$, no podemos usar el teorema de conservación del signo para limites finitos, por lo que no podemos analizar el comportamiento de f' .

(1)Sea** f **una función," c" un punto de acumulación del** $Domf$ **. Si $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L\neq 0$ **y** $L\in\mathbb{R}$ **entonces existe** $E'_{c,h}$ **tal que todos los valores de** $f(x)$ **toman el mismo signo que L** $\forall x\in(E'_{c,h}\cap Domf)$

Calculemos los extremos locales e intervalos de crecimiento de las siguientes funciones:

Ejemplo 1

$$h(x)=\frac{x^2}{x^2-1} \qquad Dom\ f=\mathbb{R}-\{1,-1\}$$

Notemos que podemos expresar a h de la siguiente forma

$h(x)=\frac{x^2-1+1}{x^2-1}=\frac{x^2-1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-1}=1+\frac{1}{x^2-1}$ que es mucho más sencilla para derivar, luego

$h'(x)==\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}$, luego $x=0$ es un punto crítico, $x=\pm 1$ no son puntos críticos (no son puntos interiores del dominio de h) pero si son puntos probables de cambio de crecimiento, luego debemos incluirlos en el estudio de signo de la derivada.

	$-\infty$		-1		0		1		∞
$h'(x)$		$+$		$+$		$-$		$-$	
$h(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	

Podemos entonces afirmar que en $x=0$ ocurre un máximo local que vale 0

h es creciente en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ y es decreciente en $(0,1)\cup(1,\infty)$

Ejemplo 2

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x}} \qquad Dom\ f=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}\ e^{-\frac{1}{x}}$$

$x=0$ es un punto donde la derivada no existe, pero no es un candidato a ser extremo local pues no es punto interior del dominio. Luego esta función no tiene extremos locales por no cumplir la condición necesaria.

Veamos los intervalos de crecimiento del gráfico

	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Luego la función es estrictamente creciente en todo su dominio.

Ejemplo 3

$g(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}} \qquad Dom\, g = \mathbb{R}$

$g'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x+1)$

$x = 0$ es un punto crítico donde la derivada no existe y $x = -1$ es un punto crítico de derivada nula.

Realizando el estudio de signo de g'

	$-\infty$	-1	0	∞
$g'(x)$	$-$	$+$	$+$	
$g(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	

Podemos concluir que la función presenta un mínimo local en $x = -1$ que vale -3 y que en $x = 0$ no hay un extremo local.

g es decreciente en $(-\infty, -1)$ y es creciente en $(-1, 0) \cup (0, \infty)$ La derivada segunda, al igual que la derivada primera de una función, proporciona información acerca del comportamiento de la misma y su gráfica.Si analizamos el comportamiento de la función $f(x) = e^x$, vemos que es estrictamente creciente en todo su dominio.

Sabemos además;

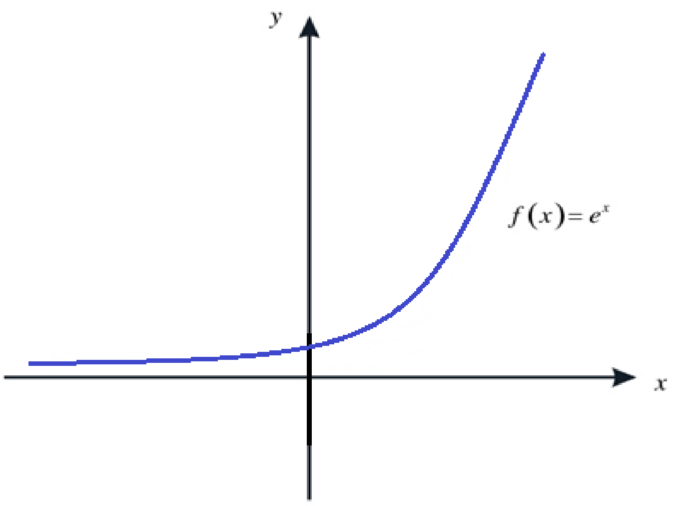
$f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$(0,1) \in Graf(f)$

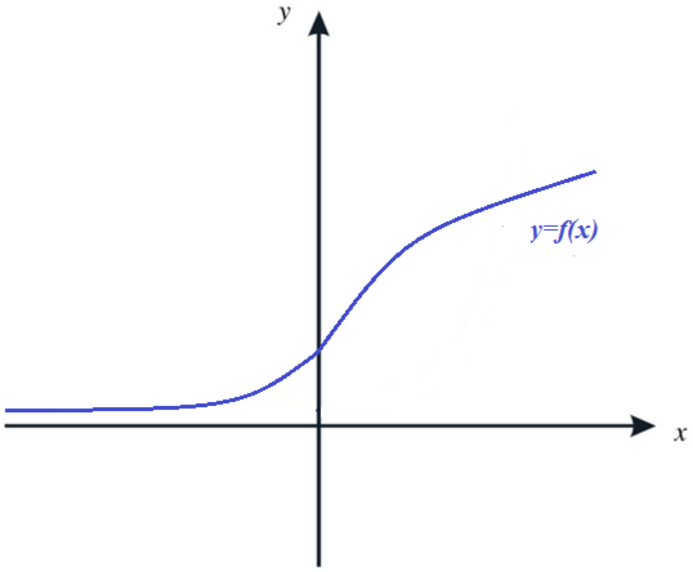
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Por lo que podríamos estimar que la gráfica es:



Pero cabe también la siguiente posibilidad:



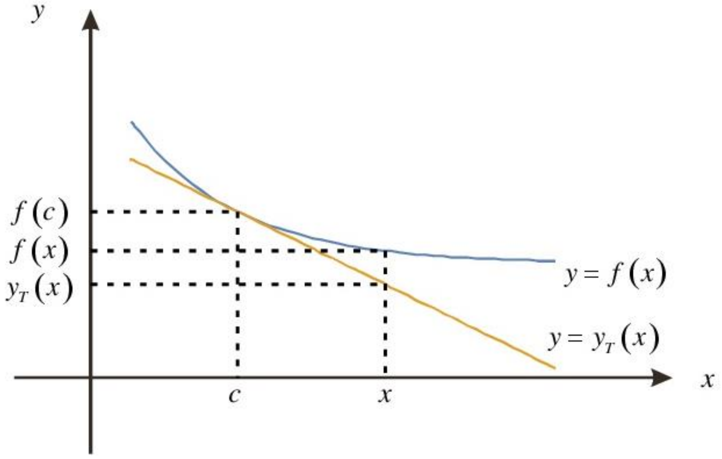
Entonces nos está faltando algún criterio que nos permita decidir si la gráfica de la función se "curva hacia arriba" o se "curva hacia abajo"

Formalicemos esto con la siguiente definición

Sea *f* derivable en un entorno del punto c.

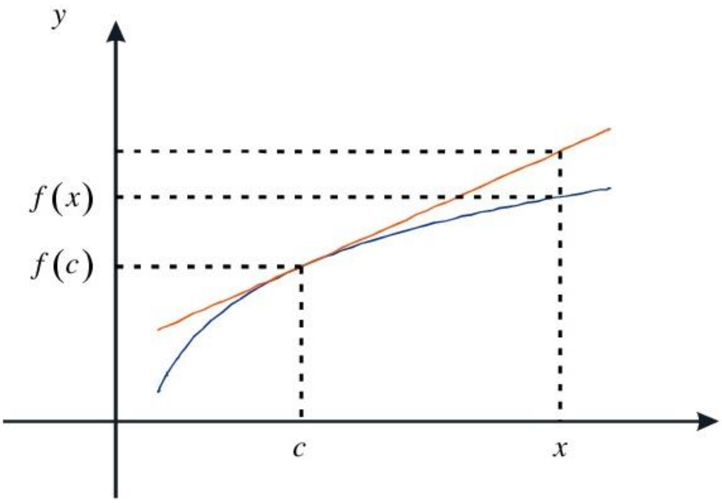
Se dice que la gráfica de una función derivable en el punto $(c, f(c))$ es "**cóncava hacia arriba"** si existe $E'_{c,h}$ tal que tal que el punto $(x, f(x))$ de la gráfica está por encima de la recta tangente al gráfico en el dicho punto $\forall x \in E'_{c,h}$.

Es decir $\forall x \in (c-h, c) \cup (c, c+h) \quad y_t < f(x)$.



Nota. La definición es complicada y podría ocurrir que la función no fuese derivable .Funciones no derivables en un conjunto pueden tener gráficos cóncavos hacia arriba o hacia abajo…..Tales casos quedan fuera del análisis de este curso y nos quedamos con la idea intuitiva de la definición

De manera análoga se define gráfica cóncava hacia abajo



El punto $(c, f(c))$ del gráfico de una función **derivable** es un **punto de inflexión** si y solo si en dicho punto el grafico cambia el sentido de su concavidad.

Teorema

Sea f una función dos veces derivable en un intervalo abierto $J \subseteq Dom\ f$

a) Si $f''(x) < 0 \quad \forall x \in J \Rightarrow$ el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en J .
b) Si $f''(x) > 0 \quad \forall x \in J \Rightarrow$ el gráfico de f es cóncavo hacia arriba en J .

Omitimos la demostración de este teorema por ser del mismo tipo de las vistas anteriormente.

Es importante destacar que es el signo de la derivada segunda el que "decide" la concavidad del gráfico, Entonces si queremos estudiar donde se producen los puntos de inflexión, debemos buscar dónde la derivada segunda cambia de signo, y como siempre, son puntos "sospechosos" de este comportamiento aquellos puntos dónde la función en cuestión se anula o es discontinua.

Son puntos críticos de la **derivada segunda**, los puntos interiores del dominio de *f*, donde la derivada segunda de *f* es cero o no existe (pero donde existe $f'(x)$).

Para saber si los puntos críticos de la derivada segunda son puntos de inflexión debemos realizar un estudio de signo de la derivada segunda. Si hay cambio antes y después de cada punto crítico, estos puntos serán puntos de inflexión, en caso contrario no

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Calcule los puntos de inflexión y determine los intervalos de concavidad de

$f(x) = 3x^4 - 2x^3 \qquad Dom\, f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 12x^3 - 6x^2$

$f''(x) = 36x^2 - 12x = 12x(x-3)$

son candidatos a ser puntos de inflexión los puntos: $x = 0$ y $x = 3$

Estudiemos entonces el signo de $f''(x)$

	$-\infty$		0		3		∞
$f''(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

$(0,0)$ y $(3,189)$ Son puntos de Inflexión.

El gráfico de f es cóncavo hacia arriba en $(-\infty,0)\cup(3,\infty)$ y cóncavo hacia abajo en $(-\infty,0)\cup(3,\infty)$.

Ejemplo 2

$g(x) = e^{x^3} \qquad Dom\, g = \mathbb{R}$

$g'(x) = 3e^{x^3}\ x^2$

$g''(x) = 6xe^{x^3} + 9x^4\ e^{x^2} = 3e^{x^3} x(2+3x^3)$

$x = 0$ y $x = \sqrt[3]{\frac{-2}{3}}$ son puntos críticos

	$-\infty$		$\sqrt[3]{\frac{-2}{3}}$		0		∞
$g''(x)$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

$(0,1)$ y $\left(\sqrt[3]{\frac{-2}{3}},\, e^{\frac{-2}{3}}\right)$ Son puntos de Inflexión.

El gráfico de f es cóncavo hacia arriba en $\left(-\infty,\sqrt[3]{\frac{-2}{3}}\right)\cup(0,\infty)$ y cóncavo hacia abajo en $\left(\sqrt[3]{\frac{-2}{3}},0\right)$.

Ejemplo 3

$h(x) = x^{\frac{1}{3}} \qquad Dom\, h = \mathbb{R}$

$$h'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$h''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

Como hemos definido que los puntos de inflexión se producen en puntos donde la función es derivable. $x = 0$ **no** es un punto crítico de la derivada segunda, pues no existe la derivada primera en $x = 0$.

Si estudiamos el signo de la derivada segunda resulta

	$-\infty$	0	∞
$h''(x)$	$-$		$+$
$h(x)$	$\cap$		$\cup$

Por lo que podemos afirmar que el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncavo hacia arriba en $(0, \infty)$. En el punto $(0,0)$ se produce un cambio de concavidad del gráfico, pero este no es un punto de inflexión, pues este no era un punto crítico de la derivada segunda.

Ejemplo 4

Sea $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & si \quad x \le 1 \\ 2 + x^2 & si \quad x > 1 \end{cases}$

Claramente f **no** es derivable en $x = 1$ pues

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & si \quad x < 1 \\ 2x & si \quad x > 1 \end{cases}$$

y las derivadas laterales toman valores distintos en $x = 1$

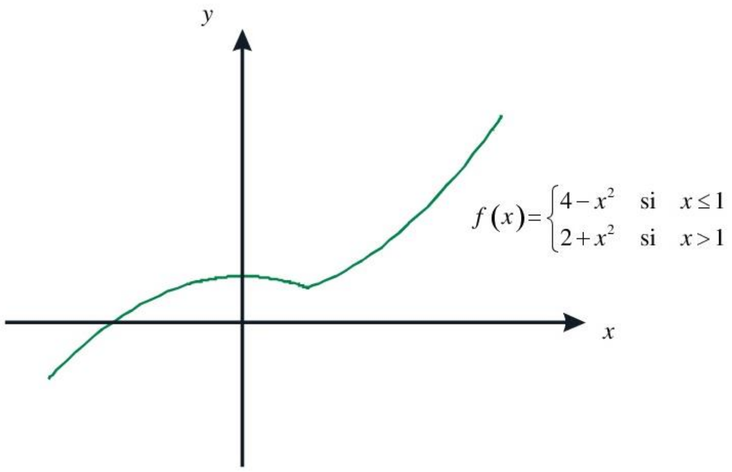
$$f''(x) = \begin{cases} -2 & si \quad x < 1 \\ 2 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Si estudiamos el signo de

	$-\infty$	1	∞
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

Podríamos preguntarnos ¿ocurre en $x = 1$ un punto de inflexión?

Podemos afirmar que el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en $(-\infty, 1)$ y cóncavo hacia arriba en $(1, \infty)$. En $x = 1$ **no** se produce un punto de inflexión, pues hemos pedido en la definición que la función sea derivable, luego tal punto es solo un punto de cambio de concavidad.



Ejercicio: Verifique que la función f del ejemplo 4 en $x=1$ presenta un mínimo local e indique los intervalos de crecimiento y decrecimiento del gráfico.

Generalización del segundo criterio para la determinación de extremos locales

Cuando estudiamos el segundo criterio para puntos críticos de derivada nula, vimos que si la derivada segunda en el punto crítico era cero, el criterio no permitía decidir si era un máximo o un mínimo local. Ahora estamos en condiciones de entender que el punto en cuestión es tanto un punto crítico de la derivada primera como de la segunda, por lo que en tal punto puede que haya un extremo local o un punto de inflexión.

Daremos una generalización de tal criterio, pero podremos demostrarlo después que hayamos visto la serie de Taylor.

Generalización del Segundo Criterio para la determinación de extremos locales

Sea f una función n veces derivable en un intervalo abierto J , que contiene a *"c"* como punto interior.

Si $f^{n-1}(c) = f^{n-2}(c) = \text{..........} f'''(c) = f''(c) = f'(c) = 0$ y además $f^{n}(c) \neq 0$

(Es decir son nulas la *n-1* primeras derivadas de f en *"c"* siendo la primer derivada no nula en dicho punto la de orden *n.*

$$\text{Si}\begin{cases} \text{n es par y} \begin{cases} f^{n}(c) > o \Rightarrow \text{en "}c\text{" se produce un mínimo local que vale } f(c). \\ f^{n}(c) < o \Rightarrow \text{en "}c\text{" se produce un máximo local que vale } f(c). \end{cases} \\ \\ \text{n es impar} \Rightarrow \text{ el punto } (c, f(c)) \text{ es un punto de inflexión.} \end{cases}$$

Ejemplo

Supongamos $f(x) = x^5$

$f'(x) = 5x^4 \qquad x = 0$ es un punto crítico

$f''(x) = 20x^4 \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = 60x^2 \qquad f'''(0) = 0$

$f^{(iv)}(x) = 120x \qquad f^{(iv)}(0) = 0$

$f^{(v)}(x) = 120 \qquad f^{(v)}(0) = 120 \neq 0$

La primer derivada no nula en $c = 0$ es la quinta, que es de orden impar, entonces en $(0,0)$ se produce un punto de inflexión.

Este criterio, tal como se dijo antes es para puntos críticos de derivada nula. Su utilización es frecuente en los problemas de optimización de funciones .Es un método más ágil cuando la derivada es de fácil cálculo t se puede prescindir del estudio de los intervalos de crecimiento.

Extremos Absolutos

Tal como dijimos, solo hay garantías que existen extremos absolutos cuando la función es continua en un intervalo cerrado, pudiendo darse estos valores tanto en los extremos del intervalo, como en puntos interiores del mismo, y en ese caso además de ser extremos absolutos, son también locales.

Para encontrar los extremos absolutos, deberemos buscar primero los extremos locales, y luego ver cuando vale la función en los extremos del intervalo, luego comparar todas las imágenes. La mayor de todas ellas es el **máximo absoluto** y la menor el **mínimo absoluto.**

Por ultimo cuando se considera la función en todo su dominio, generalmente este no es un intervalo cerrado. Para que haya extremos absolutos es necesario que la imagen de la función este acotada y verificar si algún extremo local es también un extremo absoluto.

Ejemplo 1

Calculemos los extremos absolutos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en el intervalo $[-1,3]$

Debemos primero encontrar los extremos locales

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$x = 0$ y $x = 2$ son puntos críticos

	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	2	$\nearrow$	3
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	

$f(0) = 0$ es un máximo local

$f(2) = -3$ es un mínimo local

Ahora debemos considerar las imágenes en el extremo del intervalo

$f(-1) = -3$

$f(3) = 1$

Concluimos en que máximo absoluto es 1 y el mínimo absoluto es -3.

Ejemplo 2

Calculemos los extremos absolutos de $f(x) = x^2 - 3\sqrt[3]{x^2}$ en el intervalo $\left[-\sqrt{8}, \sqrt{27}\right]$

Debemos primero encontrar los extremos locales:

$$f'(x) = 2x - 2x^{\frac{-1}{3}} = 2x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2x^{\frac{4}{3}} - 2}{\sqrt[3]{x}};$$

son puntos críticos $x = 0$ (la derivada no existe) y $x = \pm 1$ (de derivada nula)

Haciendo un estudio de signo de la derivada

	$-\sqrt{8}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt{27}$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	

Podemos afirmar que:

$f(-1) = f(1) = -2$ es un mínimo local

$f(0) = 0$ es un máximo local

Considerando ahora las imágenes en los extremos del intervalo

$f\left(-\sqrt{8}\right) = 2$

$f(\sqrt{27}) = 18$

Podemos concluir entonces que el mínimo absoluto se produce en $x = \pm 1$ y vale -2 y el máximo absoluto ocurre en $x = \sqrt{27}$ y vale 18.

TEOREMA DE ROLLE

1)Determinar si la función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ cumple con las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo[-1,1], indicar el punto "c "

Caso contrario indicar los puntos de la hipótesis que no se cumplen.

a)Df= R-{0} b) If= R>0 c) f(1)=f(-1)=1 d) No es continua en [-1,1] e) No es derivable en (-1,1) por lo tanto no existe el punto "c" en el intervalo (1, -1) / f´(c)=0

2) Determinar si la función $f(x)=|x-1|-1$ cumple con las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo[0,2], indicar el punto "c "

Caso contrario indicar los puntos de la hipótesis que no se cumplen

a)Df= R b) If= R≥ -1 c) f(0)=f(2)=0 d) Es continua en [0,2] e) No es derivable en (0,2) por lo tanto no existe el punto "c" en el intervalo (0,2) / f´(c)=0

3) Determinar si la función $f(x)=x^4-8x$ cumple con las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo[0,2],indicar el punto "c "

Caso contrario indicar los puntos de la hipótesis que no se cumplen

a)Df= R b) If= R≥ -7 c) f(0)=f(2)=0 d) Es continua en [0,2] por ser función polinómica e) Es derivable en (0,2) por ser función polinómica por lo tanto existe el punto "c" en el intervalo (0,2) / f´(c)=0 : $c=\sqrt[3]{2}$ $f(c)=-6\sqrt[3]{2}$

4) Determinar si la función $f_{(x)}=x^{2/3}+1$ cumple con las condiciones de hipótesis del Teorema de Rolle en $[-1,1]$. Si se cumplen, calcular "c", de lo contrario, indicar los puntos de la hipótesis que no se cumplen.
Resp: "f" es contínua en $[-1,1]$ pero no es derivable en (-1,1) .

5) Determinar si la función $f_{(x)}=\frac{x^4}{x^2+1}$ cumple con las condiciones de hipótesis del Teorema de Rolle en $[-1,1]$. Si se cumplen, calcular "c", de lo contrario, indicar los puntos de la hipótesis que no se cumplen justificando la respuesta.
Resp: "f" es contínua en $[-1,1]$, es derivable en (-1,1) , $f_{(1)}=f_{(-1)}$, c=0.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

1)Determinar si la función $f(x) = -x^2 + 5x - 4$ en [-1,3] cumple con las hipótesis del Teorema del Valor Medio, dar el valor del punto "c" . Caso contrario indicar los puntos de la hipótesis que no se cumplen.

$f'(a) = \dfrac{f(b) - f(a)}{(b-a)}$ a) f(-1)=-10 , f(3)= 2 b) f es contínua en [-1,3] c) Es derivable (-1,3) y $f'(c) = -2x + 5$ =2+10/4

Luego existe el punto C que pertenece (-1,3) de donde C=1 y f(1)= 0 d) En el punto P=(1,0) la recta tangente es paralela a la cuerda definida por los puntos M(-1,-10) y T=(3,2) y de pendiente m=3

2)Determinar si la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en [0,1] cumple con las hipótesis del Teorema del Valor Medio, dar el valor del punto "c" . Caso contrario indicar los puntos de la hipótesis que no se cumplen.

a)f(0)= 0 , f(1)= 1 luego f(a)≠f(b) b) f es contínua en [0,1] c) Es derivable (0,1) y $f'(c) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{1-0}{1} = 1$

luego C=8/27 y f(8/27)= 4/9

3) En que punto de la curva $y = x^n$ la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos M=(0,0) y T=(a,0)

a)f(0)= 0 , $f/a) = a^n$ luego f(a)≠f(b) b) f es contínua en [a,0] c) Es derivable (a,0) y $f'(c) = nx^{n-1} = \dfrac{a^n - 0}{a}$

luego C= $\dfrac{a}{\sqrt[n-1]{n}}$ y $f(c) = \dfrac{a^n}{\left(\sqrt[n-1]{n}\right)^n}$

4) Determinar si $f_{(x)} = \dfrac{x^2}{x-1}$ cumple con las condiciones de hipótesis del teorema del valor medio (Lagrange) en a) $[0,2]$ y b) $[2,3]$. Si se cumplen, calcular "c", de lo contrario indicar las condiciones que no se cumplen justificando la respuesta.

Resp: a) f no es continua en el cerrado ni derivable en el abierto. b) f es continua en el cerrado , derivable en el abierto, $c = 1 + \sqrt{2}$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO GENERALIZADO

1) Determinar si las funciones escalares f y g cumplen con el Teorema del Valor Medio Generalizado de Cauchy. En caso afirmativo dar el punto "c" $f(x)=\begin{cases} -x^2+5x \to x\langle 4 \\ x \to x \geq 4 \end{cases}$ $g(x)=-x+3$; en los intervalos I_1=[-2,6] ; I_2=[-1,2]

a)En el intèrvalo I_1=[-2,6] la función f no es derivable en x=4 que pertenece (-2,6) por lo tanto no cumple la hipótesis del teorema y no existe c en el intervalo (2,6).

b) En el intérvalo I_2=[-1,2] ambas funciones cumplen con las hipótesis del teorema de Cauchy y existe c que pertenece al (-1,2) tal que

$$\frac{f(2)-f(-1)}{g(2)-g(-1)}=\frac{-2x+5}{-1}=-4 \Rightarrow c=\frac{1}{2}$$

2) Determinar si las funciones escalares f y g cumplen con el Teorema del Valor Medio Generalizado de Cauchy. En caso afirmativo dar el punto "c" $f(x)=\sqrt{x+9}$ y $g(x)=\sqrt{x}$ en el intèrvalo I=[0,16].

En el intérvalo solicitado ambas funciones cumplen con el teorema de Cauchy entonces va existir un pùnto C quepertenece al abierto (a,b) / $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f^{/}(c)}{g^{/}(c)} \Rightarrow \frac{5-3}{4}=\sqrt{\frac{c}{c+9}} \Rightarrow C=3$

3) Determinar si $f_{(x)}=\frac{x^2+1}{x}$ y $g_{(x)}=2-\frac{1}{x}$, cumplen con las condiciones de hipótesis del teorema del valor medio generalizado (Cauchy) en a)$[0,1]$ y b)$[1,3]$.Si cumplen, calcular "c". Si no cumplen, indicar las condiciones, justificando la respuesta.

Resp: a) no son continuas en $[0,1]$, b) continuas en $[1,3]$, derivables en $(1,3)$, $c=\sqrt{3}$.

TEOREMA DE L'HOPITAL

Indeterminación del tipo($\frac{0}{0}$)

1) $Lim_0 \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - senx} = Lim_0 \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = Lim_0 \frac{e^x - e^{-x}}{senx} = \lim_0 \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$

2) $Lim_{\frac{\pi}{2}} \frac{Ln(senx)}{(\pi - 2x)^2} =$ Resp: $\frac{-\ 1}{8}$

3) $Lim_0 \frac{e^x senx - x}{3x^2 + x^5} =$ Resp: $\frac{1}{3}$

4) $Lim_0 \frac{x - tgx}{2sen^2 x} =$ Resp:0

5) $Lim_\infty \frac{sen\left(\frac{k}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =$ Resp:K

6) $Lim_0 \frac{e^x + senx - 1}{\ln(1+x)} =$ Resp:2

7) $Lim_0 \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} =$ Resp:-2

8) $Lim_0 \frac{a^x - b^x}{x1} =$ Resp: $\ln \frac{a}{b}$

9) $Lim_2 \frac{\ln\cos(x-2)}{1 - sen(x\frac{\pi}{4})} =$ Resp: $\frac{-\ 16}{\pi}$

10) $Lim_{0^-} \frac{x - arcsenx}{sen^3 x} =$ Resp: $\frac{-1}{6}$

Indeterminación del tipo($\frac{\infty}{\infty}$)

1)

$$Lim_{\frac{\pi}{2}} \frac{Tgx}{Tg(3x)} = Lim_{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{\frac{3}{\cos^2(3x)}} = Lim_{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(3x)}{3.\cos^2(x)} = Lim_{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \frac{2.3.\cos(3x).(-sen(3x))}{2\cos x.(-senx)} = Lim_{\frac{\Pi}{2}} \frac{(-6)\cos(3x).sen(3x)}{(-6)\cos(x).sen(x)} =$$

$$Lim_{\frac{\Pi}{2}} \frac{Tg(x)}{Tg(3x)} = Lim_{\frac{\Pi}{2}} \frac{-3.Sen(3x).Sen(3x) + 3.\cos(3x).\cos(3x)}{-Sen(x).Sen(x) + \cos(x).\cos(x)} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$Lim_{\frac{\pi}{2}} \frac{Tgx}{Tg(3x)} =$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{Ln(x-1) - x}{Tg(\frac{\pi}{2x})} =$ Resp:0

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{Ln(x) + x}{x * Ln(x)} =$ Resp:0

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{LnSen(3x)}{LnSen(x)} =$ Resp:1

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x * \ln/(x)}{(x+1)^2} =$ Resp:0

6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln tg(7x)}{\ln tg(2x)} =$ Resp:1

7) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{3x+2}}{x^2} =$ Resp: ∞

8) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Ln(x^2 + 2x)}{\ln(x)} =$ Resp:1

9) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{Sec(x)}{1+tg(x)} =$ Resp:1

10) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Ln(x)}{Ctg(x)} =$ Resp:0

<u>Indeterminación del tipo(</u> $\infty - \infty$ **)**

1) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{senx} - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0}\frac{x - senx}{x.senx} = \lim\limits_{x \to 0}\frac{1-\cos(x)}{x.\cos x + senx} = \lim\limits_{x \to 0}\frac{senx}{(-x).senx + \cos x + \cos x} = \frac{0}{2} = 0$

2) $\lim\limits_{x \to 1}\left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x-1} \right) =$ Resp: $\frac{-1}{2}$

3) $\lim\limits_{x \to 1}\left(\frac{1}{Lnx} - \frac{x}{Ln(x)} \right) =$ Resp:-1

4) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{sen(2x)} \right) =$ Resp: $\frac{-1}{2}$

5) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} - Tg(x) \right) =$ Resp: ∞

6) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{4}{x^2} - \frac{2}{1-\cos(x)} \right) =$ Resp: $\frac{-1}{3}$

7) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2x} \right) =$ Resp: ∞

8) $\lim\limits_{x \to 0}\left(Ctg(x) - \frac{1}{x} \right) =$ Resp:0

9) $\lim\limits_{x \to 0}\left(Co\sec^2(x) - \frac{1}{x^2} \right) =$ Resp: $\frac{1}{3}$

10) $\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{Lim}\left(Sec(x)-Tg(x) \right)=$ Resp:0

Indeterminación del tipo $(0.\infty)$

1) $\underset{x\to 0}{Lim}\left(x.e^{\frac{1}{x}} \right)=\underset{x\to 0}{Lim}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\underset{x\to 0}{Lim}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}.\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\frac{-1}{x^2}}=\infty$

2) $Lim_{-\infty}\left(2x*e^{3x}\right)=$ Resp:0

3) $\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{Lim}\left(Tg(x)*\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \right)=$ Resp:-1

4) $\underset{x\to 0}{Lim}\left(Ln(5x)(2x-Sen(x)) \right)=$ Resp:0

5) $\underset{x\to\infty}{Lim}\left(x*Sen\left(\frac{1}{x}\right)\right)=$ Resp:1

6) $\underset{x\to 0}{Lim}\left(x^n*Ln(x) \right)=$ Resp:0

7) $\underset{x\to 0}{Lim}\left(x^2*e^{\frac{1}{x^2}} \right)=$ Resp: ∞

8) $\underset{x\to 0}{Lim}\left(x*Ctg(2x) \right)=$ Resp: $\frac{1}{2}$

9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(Ln(x)*Ctg(1-x) \right)=$ Resp:-1

10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(x-Sen(x)*Ln(2x)\right) \right)=$ Resp:0

Indeterminación del tipo $\left(0^0,1^\infty,\infty^0\right)$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-e^x\right)^{1/Lnx}=0^0$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{Ln\left(1-e^x\right)}{Lnx}=\dfrac{\infty}{\infty}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{-e^x}{1-e^x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-xe^x}{1-e^x}=\dfrac{0}{0}$;

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-e^x-xe^x}{-e^x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cancel{-e^x}\left(1+x\right)}{\cancel{-e^x}}=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-e^x\right)^{1/Lnx}=e^1=e$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^{1/tgx}=1^\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ln\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}{tgx}=\dfrac{0}{0}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-1/3\sqrt[3]{x^2}}{1-\sqrt[3]{x}}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos^2 x}{3\sqrt[3]{x^2}\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}=-\infty\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^{1/tgx}=e^{-\infty}=0$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{x-1}=\infty^0$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{Ln\left(x-1\right)^{-1}}{\left(x-1\right)^{-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-Ln\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)^{-1}}=\dfrac{\infty}{\infty}$;

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{-1}/\left(x-1\right)}{\cancel{-1}/\left(x-1\right)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\left(x-1\right)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{x-1}=e^0=1$

4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\cos x\right)^{1/tgx}=$ Resp: 1

5) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{x-3}\right)^{x^2-9}=$ Resp: 1

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{1/e^x}=$ Resp: 1

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(-2x+1\right)^{1/x}=$ Resp: e^{-2}

8) $\lim_{x \to 0^+} (\cos x)^{1/\sqrt{x}} =$ Resp: 1

9) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right)^{1/3x} =$ Resp: 1

10) $\lim_{x \to 1} \left[1 + (Lnx) \right]^{1/(x-1)} =$ Resp: e

11) $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \left[(senx) - 1 \right]^{1/(x - \pi/2)} =$ Resp: $+\infty$

12) $\lim_{x \to m} (1 + x - m)^{2/(x-m)} =$ Resp: e^2

13) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x)^{\pi/tgx} =$ Resp: 1

14) $\lim_{x \to h} \left[\cot g\,(x - h) \right]^{\sqrt{x-h}} =$ Resp: 1

15) $\lim_{x \to -1} (x + 2)^{1/sen(x+1)} =$ Resp:

16) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{e^x} - 1 \right)^{x/3} =$ Resp: $e^{2/3}$

17) $\lim_{x \to p} \left[1 + sen(p - x) \right]^{1/(\sqrt{x} - \sqrt{p})} =$ Resp: $e^{2\sqrt{p}}$

18) $\lim_{x \to \pi} \left[\cos ec\left(x/2 \right) \right]^{1/(\pi - x)} =$ Resp: 1

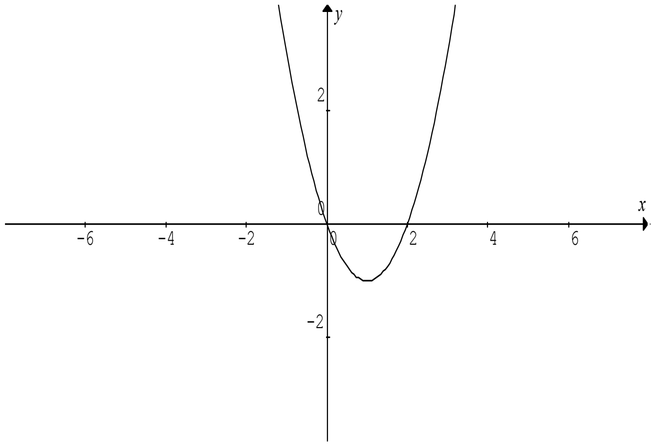
19) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{e/x} =$ Resp: 1

20) $\lim\limits_{x \to \pi} \left(\dfrac{1}{\cos\left(x/2 \right)} \right)^{x-\pi} =$ Resp: $e^{1/2}$

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Vamos a investigar el comportamiento de algunas funciones y su relación con las derivadas:

Ejemplo 1: La función cuadrática $f(x) = x^2 - 2x$ tiene como representación gráfica

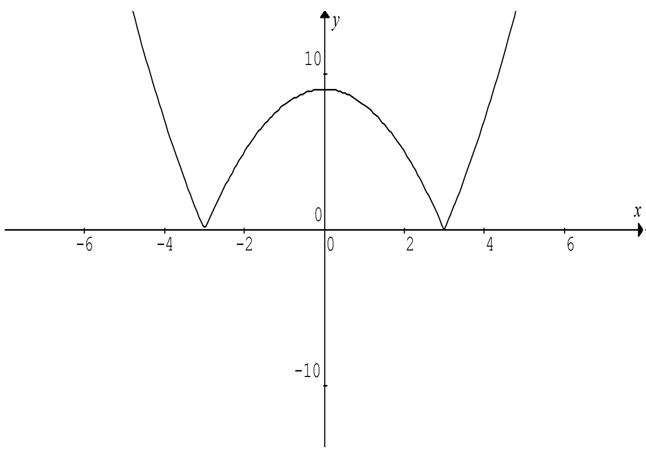


Desde la representación gráfica y a partir de nuestros conocimientos sobre las funciones cuadráticas es evidente concluir que $f(x)$ tiene un mínimo en x=1. Además en el punto (1;-1) la recta tangente a la curva, es horizontal pues $f'(1) = 0$.

Este resultado no es casual, ya que existe una propiedad que afirma que:

Si una función $f(x)$ *es derivable en* $x = a$*, y tiene un extremo relativo en ese punto, entonces* $f'(a) = 0$.

Ejemplo 2: Analicemos, ahora, la siguiente función : $f(x) = \left| x^2 - 9 \right|$, cuya gráfica es



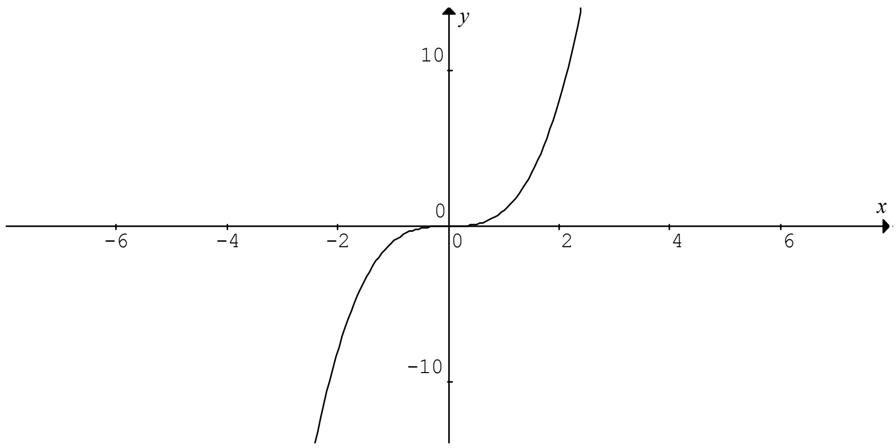
Como ya sabemos, esta función no es derivable en $x = -3$ y $x = 3$, sin embargo alcanza en ellos mínimos relativos como se evidencia en la gráfica.

Te proponemos que demuestres que $f(x)$ no es derivable en $x=-3$ y $x=3$, aplicando la definición de derivada.

Definimos a continuación: valores críticos

Llamaremos valores críticos de una función, a aquellos valores ***a*** pertenecientes a su dominio, en los cuales $f(x)$ es derivable y $f'(a)=0$, o bien, a aquellos en los cuales no existe $f'(a)$

Ejemplo 3: Apliquemos lo visto a esta función : $f(x)=x^3$ cuya gráfica es :



Busquemos sus valores críticos:

Si derivamos : $f'(x)=3x^2$, $f'(x)$ se anula para $x=0$, sin embargo, $f(x)$ no alcanza en $x=0$ extremos relativos, ya que cualquiera sea $x>0 : f(x)>0$ y cualquiera sea $x<0 : f(x)<0$, es decir la función es creciente en todo su dominio.

Este ejemplo nos muestra que no siempre se puede asegurar que los valores en donde la derivada primera se anula caracterizan a los extremos relativos de la función.

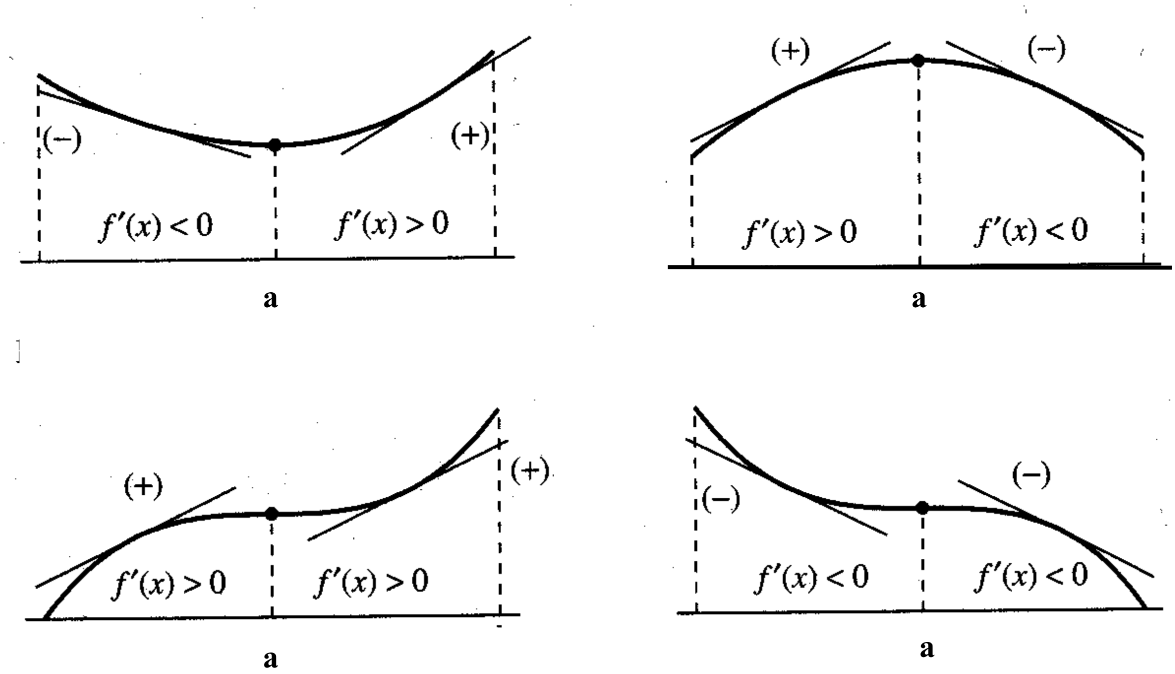
Este problema ya se les había presentado a algunos matemáticos antes que a nosotros y fue necesario reforzar la condición que asegura la existencia de extremos relativos. Por ello se estableció la siguiente proposición:

Sea un valor crítico ***a*** de una función f continua en un intervalo abierto que contiene a ***a.***

Si f es derivable en ese intervalo (o no existe $f'(a)$), $f(a)$ la podemos clasificar de la siguiente manera:

a) si $f'(x)$ cambia en $x = a$ de negativa a positiva, $f(a)$ ***es un mínimo relativo de*** f

b) si $f'(x)$ cambia en $x = a$ de positiva a negativa, $f(a)$ ***es un máximo relativo de*** f



<u>Ejemplo 4</u>: Investiguemos esta condición a partir del análisis de la función: $f(x) = 2x^3 + 3x^2$, para ello hallaremos los extremos relativos y los intervalos en donde es creciente y/o decreciente, aplicando la condición de existencia de extremos antes definida. Tengamos en cuenta que se trata de una función polinómica, por lo tanto continua.

Para hallar los valores críticos, es necesario encontrar su derivada.

$f'(x) = 6.x^2 + 6\,x$ si $6.x^2 + 6x = 0 \;\Rightarrow x = 0 \;\vee\; x = -1$. La derivada existe en todo el dominio de la función, por lo tanto son los únicos valores críticos de $f(x)$.

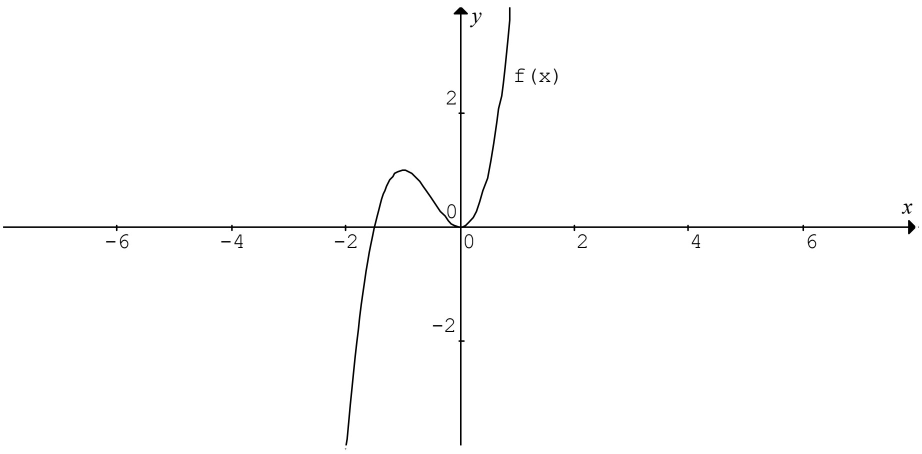
Construyamos un cuadro que nos permita ordenar los datos obtenidos:

Intervalos	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$		$(0;+\infty)$
Signo de $f'(x)$	positivo	0	negativo	0	positivo
La función f(x)	$\nearrow$ es creciente	tiene un valor crítico	$\searrow$ es decreciente	tiene un valor crítico	$\nearrow$ es creciente

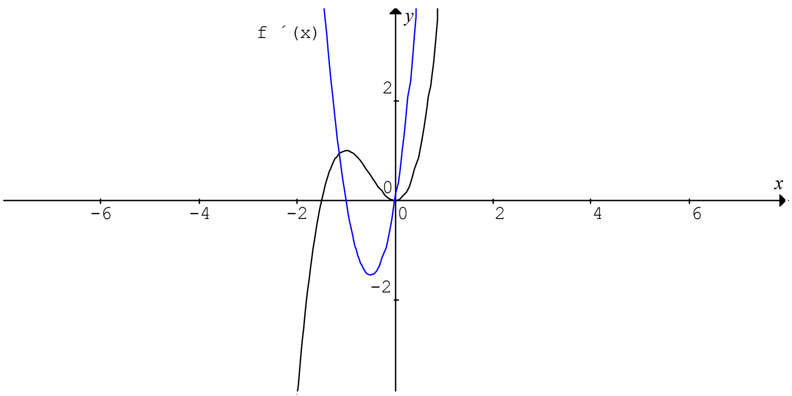
Para justificar el signo de la derivada en los intervalos, aplicamos el corolario del Teorema de Bolzano: "entre dos raíces consecutivas de una función continua, la función no cambia de signo, es decir es positiva o negativa".

Por todo lo expuesto, la función alcanza un máximo relativo en $x=-1$ y un mínino relativo en $x=0$. La función es creciente en $(-\infty;-1)$ y en $(0;+\infty)$ y decreciente en el intervalo $(-1;0)$.

Su gráfica es:



Representemos, en un mismo gráfico, la función derivada: $f'(x)=6.x^2+6x$ y la función $f(x)$.



¿Qué conclusiones podés deducir a partir de la comparación de la gráfica de la función y la de su derivada?

Ejemplo 5: Apliquemos lo visto a esta función: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ cuyo $D_f=R-\{0\}$

Si derivamos f(x) obtenemos: $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$ $\quad f'(1)=0$ y $f'(-1)=0$

Construyamos un cuadro que nos permita ordenar los datos obtenidos:

	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
Signo de f´(x)	positivo	0	negativo	no existe	negativo	0	positivo
La función f(x)	↗ crece	-2	↘ decrece	no existe	↘ decrece	2	↗ decrece

Por lo tanto $f(-1)=-2$ es un máximo local de f(x) y $f(1)=2$ es un mínimo local de f(x).
Grafica encontrando previamente las ecuaciones de las asíntotas.

Estudiaremos ahora, la concavidad de la función.

Para ello, te proponemos que grafiques, en sistemas coordenados diferentes, las funciones f(x) = $(x-1)^2+1$ y g(x)= $-(x-1).(x-2)$ y traces rectas tangentes a sus gráficas en el intervalo (-1;4).

¿Qué conclusiones podés sacar?

A partir de ellas, podemos afirmar que la gráfica de una función f(x) es cóncava positiva o cóncava hacia arriba en un intervalo de su dominio, si al trazar rectas tangentes a ella por puntos cuyas abscisas pertenezcan a ese intervalo, la gráfica se encuentra por encima de dichas rectas.

Diremos, también, que la gráfica de una función f(x) es cóncava negativa o cóncava hacia abajo en un intervalo de su dominio, si al trazar rectas tangentes a ella por puntos cuyas abscisas pertenezcan a ese intervalo, la gráfica se encuentra por debajo de dichas rectas.

Se puede observar en las gráficas anteriores que, si una función es derivable y cóncava hacia arriba, a medida que aumenta el valor de x, aumenta la pendiente de la recta tangente, es decir, aumenta f´(x).
En cambio, si es cóncava hacia abajo a medida que aumenta el valor de x, decrece f´(x).

<u>Criterio de concavidad:</u>

Sean f(x) y su derivada f´(x) dos funciones derivables en un intervalo, si:

a) si f´´(x) > 0 para todo x perteneciente a un intervalo, entonces la gráfica de f(x) es cóncava hacia arriba en ese intervalo.

b) si f´´(x) < 0 para todo x perteneciente a un intervalo, entonces la gráfica de f(x) es cóncava hacia abajo en ese intervalo.

Si f(x) es una función continua en x=a , diremos que (a;f(a)) es un punto de inflexión de f(x), si en x=a la gráfica de la función cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa.

Propiedad:
Si en x=a hay un punto de inflexión, con f(x) dos veces derivable, entonces $f''(a)=0$

Ahora bien, si $f''(a) = 0$ ¿podemos asegurar que $(a;f(a))$ es un punto de inflexión de f(x)

Te proponemos que realices un estudio completo de la función $f(x) = x^3 + 1$

Ejemplo 6: Apliquemos todo lo visto a la siguiente función:

$f(x) = x^{\frac{5}{3}} + 1$ su $D_f = R$, si calculamos sus derivadas primeras y segundas:

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} \qquad f''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9\,.\sqrt[3]{x}}$$

La derivada segunda no existe en x = 0 pero la función si está definida en ese valor.
Además, como podrás determinar, $f''(x)$ es positiva a derecha de x= 0 y negativa a su izquierda. Además existe $f'(0)$ y por lo existe la recta tangente en x=0.
Por lo tanto, el punto $(0;1)$ es un punto de inflexión.

A continuación te proponemos una serie de situaciones problemáticas que tienen por objetivo poner en juego los contenidos que hemos estado desarrollando.

1. Un alambre de 40 cm. de longitud, se cortó en dos trozos. Una de las partes se dobló formando un cuadrado y con la otra, un rectángulo tres veces más largo que ancho.
   Hallá la longitud de cada trozo para que la suma de las superficies del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

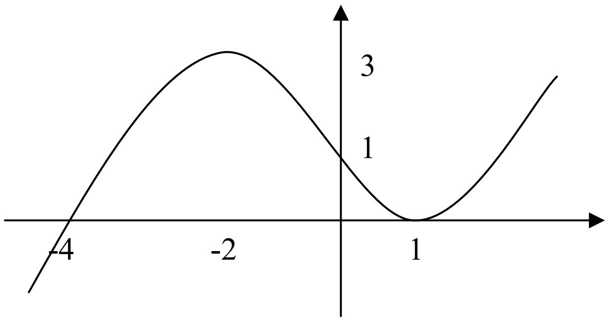
2. Decidí si las siguientes afirmaciones son correctas: (justificá tu respuesta)
   a) “ $f(x) = x^2 . \ln x$ tiene un mínimo relativo en $x = e$ ”.
   b) Toda función polinómica alcanza un valor máximo o un valor mínimo dentro de su dominio.
   c) Si una función es siempre creciente, entonces su derivada es siempre positiva.
   d) El valor crítico de una función f(x) puede ser un número que no pertenezca al dominio de la función derivada de f(x).

3. Sea la función $f(x)=x^2 .(2x+a)$ hallá el valor de a para que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x=\frac{1}{3}$. ¿De qué tipo de extremo se trata? ¿Por qué?

4. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 4cm ¿cuánto deberá medir la base para que el área del triángulo sea máxima?

5. Hallá a y b de manera tal que $f(x)=x^3+ax^2+bx$ tenga un extremo relativo en (2; 3).
6. Hallá, si existen, puntos de inflexión en: $f(x)=x+4+\frac{3}{x-1}$

7. En la figura está graficada la derivada primera de una función f(x) de dominio real.



Indicá:
a) los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). Justificá.
b) extremos relativos de f(x), aclarando si se trata de máximos o mínimos. Justificá.
c) los intervalos de concavidad de f(x). Justificá.
d) puntos de inflexión de f. Justificá.

8. Dada $g(x)=x^2.\ln(2x)$, calculá intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

9. Determiná los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión (si los hay) de la función: $h(x)=e^{2x}\cdot(4-x^2)$

10. Explicá, con argumentos algebraicos, porqué una función polinómica de cuarto grado tiene dos puntos de inflexión o ninguno pero nunca uno solo.

11. ¿Son correctas las siguientes afirmaciones? Justificá.
    a) Una función polinómica de grado tres tiene un solo punto de inflexión
    b) Entre dos puntos de inflexión consecutivos siempre hay un extremo relativo.
12. Hallá los valores de m para que la función $f(x)=x^4+4x^3+mx^2+3x-2$ sea cóncava hacia arriba para todo x real

Calcular las asíntotas de una función

Introducción

Uno de los temas más interesantes del estudio del análisis de funciones de los últimos cursos de bachillerato (y primero de carrera) es la representación de funciones de una variable. Y entre los cálculos que se entienden necesario para recopilar datos suficientes para la representación se encuentra el **cálculo de las asíntotas** de la función. En este artículo, muy adecuado teniendo en cuenta las fechas en las que estamos (cerca de los exámenes de septiembre), vamos a ver cómo realizar dicho cálculo.

Definición y tipos

Podemos definir el concepto de **asíntota** de la siguiente forma:

Dada una función $y = f(x)$ cuya gráfica es la curva C se dice que la recta r es una **asíntota** de $f(x)$ si la curva C se acerca a r indefinidamente sin llegar a coincidir con la propia r.

Teniendo en cuenta que una asíntota es, en particular, una recta, vamos a distinguir tres tipos de asíntotas:

- Asíntotas horizontales
- Asíntotas verticales
- Asíntotas oblicuas

Asíntotas horizontales

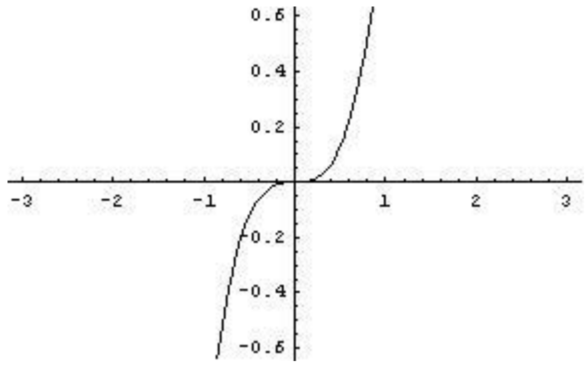
Las **asíntotas horizontales** de una función son rectas horizontales de la forma $y = a$. Una función puede tener a lo sumo dos asíntotas horizontales: una por la izquierda (cuando $x \to -\infty$) y otra por la derecha (cuando $x \to \infty$). Se calculan de la siguiente forma:

Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$, entonces $y = a$ es una asíntota horizontal para $f(x)$ (por la izquierda).
Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, entonces $y = b$ es una asíntota horizontal para $f(x)$ (por la derecha).

Por tanto podemos encontrarnos los siguientes casos:

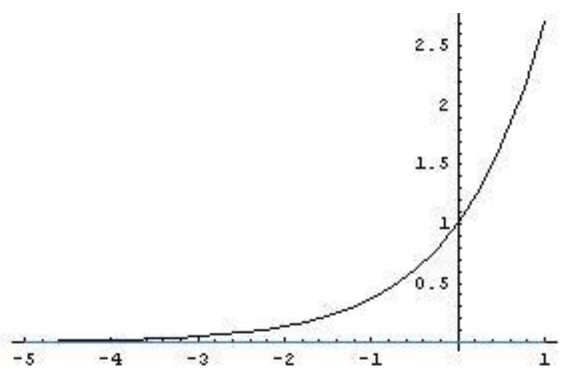
1. **Funciones que no tienen asíntotas horizontales**

   Por ejemplo, $f(x) = x^3$ cumple que los dos límites expuestos anteriormente dan como resultado $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente. Vemos su gráfica:



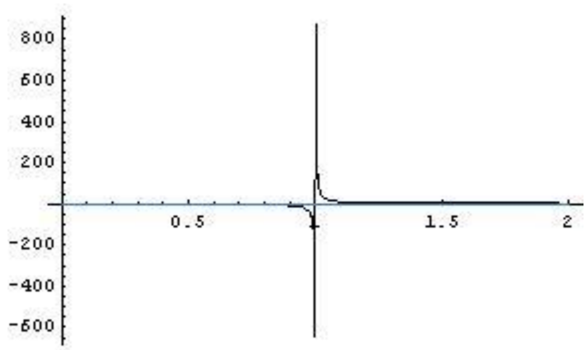
2. **Funciones que tienen una asíntota horizontal que lo es sólo por un lado**

   Como ejemplo tenemos la función $f(x) = e^x$. En este caso $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, por lo que $y = 0$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ por la izquierda, y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, por lo que por la derecha no tenemos asíntota horizontal. Vemos su gráfica junto a su asíntota (en azul):



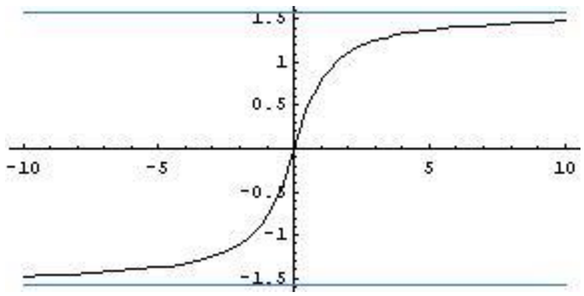
3. **Funciones que tienen una asíntota horizontal que lo es por los dos lados**

   Por ejemplo, $f(x) = \frac{x}{x-1}$. En este caso, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, por lo que la recta $y = 1$ es asíntota horizontal de $f(x)$ tanto por la izquierda como por la derecha. Vemos su gráfica junto a su asíntota (en azul):



4. **Funciones que tienen dos asíntotas horizontales distintas**

   Por ejemplo $f(x) = \arctan x$ cumple que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{-\pi}{2}$, por lo que $y = \frac{-\pi}{2}$ es asíntota horizontal de $f(x)$ por la izquierda y $\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, por lo que $y = \frac{\pi}{2}$ es asíntota horizontal de $f(x)$ por la derecha. Podéis ver su gráfica junto a sus dos asíntotas (en azul) en la siguiente imagen:



Asíntotas verticales

Las **asíntotas verticales** de una función son rectas verticales de la forma $x = k$. No hay restricciones en cuanto al número de asíntotas verticales que puede tener una función: hay funciones que no tienen asíntotas verticales, funciones que tienen sólo una, funciones que tienen dos y hasta funciones que tienen infinitas. Se calculan de la siguiente forma:

Si $\lim_{x \to k^-} f(x) = \pm\infty$, entonces $x = k$ es asíntota vertical para $f(x)$ (por la izquierda de la misma si el límite ha dado $-\infty$ y por la derecha si el límite ha dado $+\infty$).
Si $\lim_{x \to k^+} f(x) = \pm\infty$, entonces $x = k$ es asíntota vertical para $f(x)$ (por la izquierda de la misma si el límite ha dado $-\infty$ y por la derecha si el límite ha dado $+\infty$).

Una de las conclusiones que se pueden sacar a partir de esto es la siguiente: en las asíntotas horizontales planteamos siempre los mismos límites y el resultado es el que nos dice sin existen o no; sin embargo en las verticales **nosotros tenemos que aportar los valores de k para los cuales calcular los límites**. Evidentemente debemos aportar puntos para los cuales sea *factible* la existencia de asíntota vertical (no es demasiado aconsejable probar con valores al azar).

Los valores *candidatos* a existencia de asíntota vertical son los siguientes:

1. **Valores que anulan algún denominador de la función**

   Por ejemplo, para $f(x) = \frac{x}{x-1}$ tenemos un candidato a asíntota vertical en el punto $x = 1$.

2. **Extremos de intervalos del dominio que no pertenezcan al propio dominio**

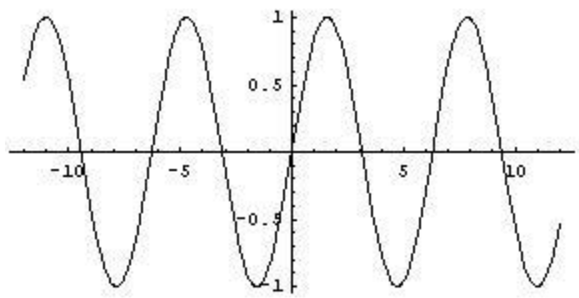
Por ejemplo, el dominio de $f(x) = x\,ln(x)$ es el intervalo $(0, +\infty)$. Por tanto, $x = 0$ es un candidato a asíntota vertical para esta función.

En consecuencia, lo primero que debemos hacer cuando tengamos que calcular las asíntotas de una función es calcular su dominio (fundamental para cualquier cálculo relacionado con la gráfica de una función) e igualar a cero todos los denominadores que aparezcan en la misma para recopilar todos los candidatos.

Vamos a ver algunos casos interesantes que pueden darse:

1. **Funciones que no tienen asíntotas verticales**

   Por ejemplo, $f(x) = sen(x)$ no tiene asíntotas verticales (su dominio es $\mathbb{R}$ y no hay denominadores):

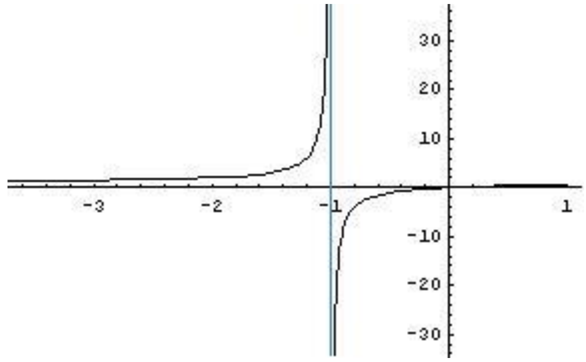


2. **Funciones que tienen una asíntota vertical por los dos lados**

   Por ejemplo, $f(x) = \frac{x}{x+1}$ tiene un candidato a asíntota vertical en $x = -1$(anula el denominador). Si calculamos los límites que hemos comentado anteriormente obtenemos los siguientes resultados:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$$

   Por lo tanto la recta $x = 1$ es una asíntota vertical para $f(x)$ **por los dos lados**. Lo vemos en su gráfica (la asíntota es la recta de color azul):

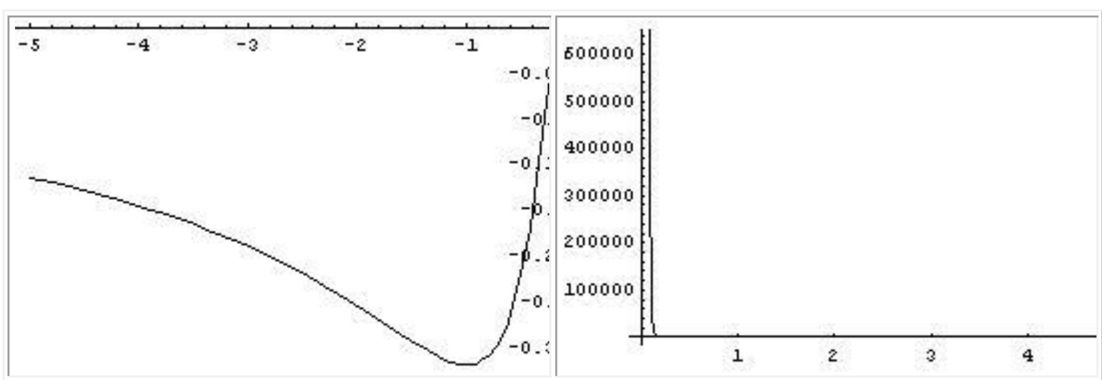


3. **Funciones que tienen una asíntota vertical sólo por un lado**

   Por ejemplo, $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ tiene un candidato a asíntota vertical en $x = 0$ (anula los dos denominadores que tiene la función). Calculamos los límites:

   $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$
   $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

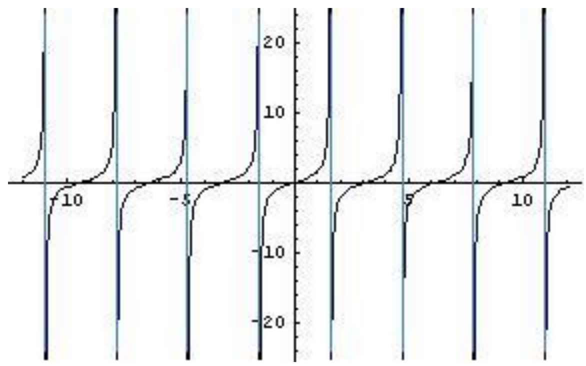
   Por tanto la recta $x = 0$ es una asíntota vertical para $f(x)$ **sólo por el lado derecho de la recta** (por el lado por el que el límite correspondiente da $\pm\infty$). Vemos la gráfica de la función a la izquierda y a la derecha de $x = 0$:



4. **Funciones que tienen infinitas asíntotas verticales**

   Hemos comentado antes que una función puede tener cualquier número de asíntotas verticales. El caso posiblemente más curioso es el de una función que tenga infinitas asíntotas de este tipo. El ejemplo más conocido es el de la función $f(x) = \tan(x)$. La razón es la siguiente:

Como $\tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$ tenemos que los candidatos a asíntota vertical de esta función son los valores que anulen el denominador.
Por otra parte, la ecuación $cos(x) = 0$ tiene infinitas soluciones, en concreto todos los números de la forma $\frac{\pi}{2} + n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$.
Se puede comprobar de forma sencilla (con los límites anteriores) que $f(x)$ tiene una asíntota vertical en cada uno de esos puntos, por lo que $f(x)$ tiene infinitas asíntotas verticales. Lo vemos en su gráfica (las asíntotas en azul):



Asíntotas oblicuas

Las **asíntotas oblicuas** de una función son rectas oblicuas, es decir, rectas de la forma $y = mx + n$. Una función puede tener, como máximo, dos asíntotas oblicuas distintas (una por la izquierda de su gráfica y otra por la derecha de la misma). El cálculo de las mismas se realiza así:

Asíntota oblicua por la izquierda

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Si m da un resultado distinto de 0 y $\pm\infty$ prodecemos con el cálculo de n de esta forma:

$$n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx)$$

Si n da como resultado un número real (es decir, ese límite no vale ni ∞ ni $-\infty$), entonces la recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua para $f(x)$ por la izquierda.
Asíntota oblicua por la derecha

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

Si m da un resultado distinto de 0 y $\pm\infty$ prodecemos con el cálculo de n de esta forma:

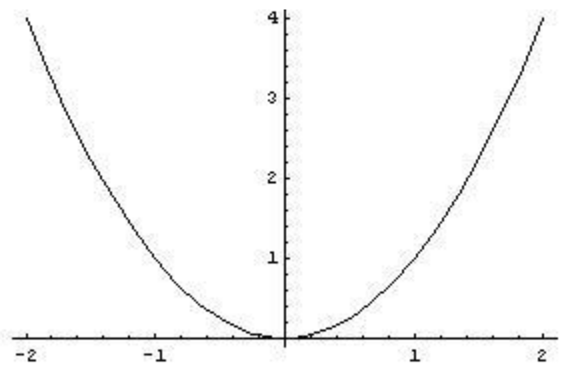
$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$$

Si n da como resultado un número real (es decir, ese límite no vale ni ∞ ni $-\infty$), entonces la recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua para $f(x)$ por la derecha.

Podemos encontrarnos entonces los siguientes casos:

1. **Funciones que no tienen asíntotas oblicuas**

   Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ no tiene asíntotas oblicuas ya que al calcular m tanto por la izquierda como por la derecha obtenemos $m = +\infty$. Su gráfica es la parábola que nos solemos encontrar con más frecuencia:



2. **Funciones que tienen una asíntota oblicua por los dos lados**

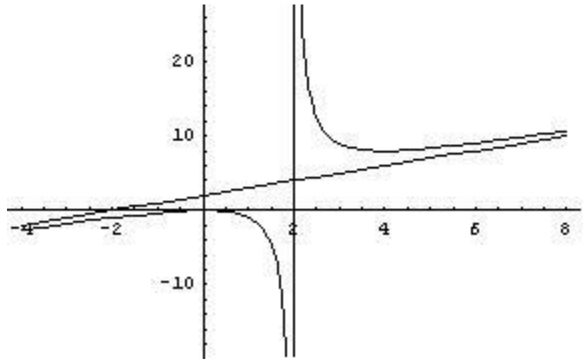
   Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ tiene una única asíntota oblicua, que además lo es por los dos lados. Veamos cuál es exactamente dicha asíntota:

   $$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x-2} = 1$$

   $$n = \lim_{x \to -infty} (f(x) - 1 \cdot x) = 2$$

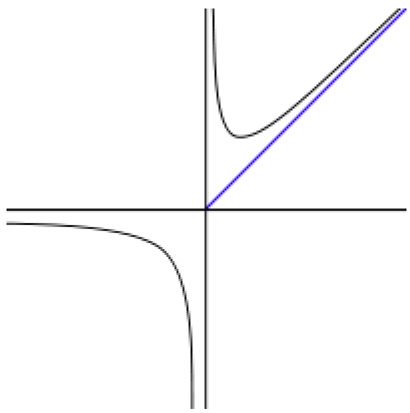
   Por tanto la asíntota oblicua por la izquierda es $y = x + 2$.

   Si realizamos los cálculos cuando $x \to +\infty$ el resultado es el mismo. Por tanto la recta $y = x + 2$ es asíntota oblicua de la función por los dos lados. Lo vemos en la siguiente gráfica (la asíntota oblicua en azul):



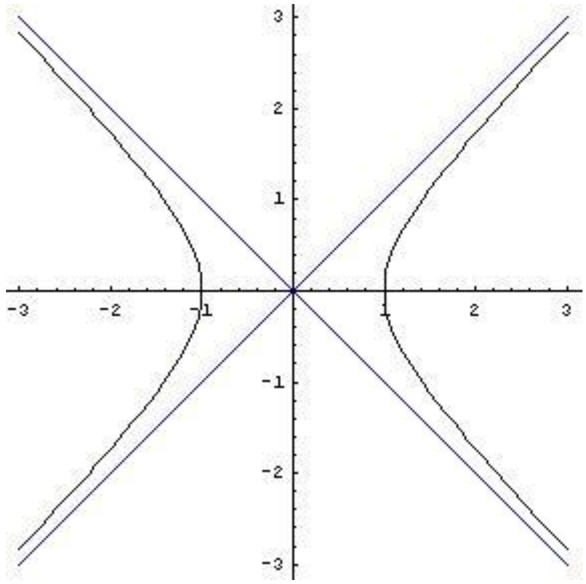
3. **Funciones que tienen una asíntota oblicua sólo por un lado**

   Curioso caso, complicado de encontrar por otra parte. Un ejemplo (sacado de [la entrada sobre asíntotas de la Wikipedia inglesa]) puede ser la función $f(x) = x^{\frac{|x|}{x}} + \frac{1}{x}$. Su gráfica es:



4. **Funciones que tienen dos asíntotas oblicuas distintas**

   Aunque tampoco es fácil encontrar una función de este tipo, aquí os traigo una. Concretamente es la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Esta función tiene dos asíntotas oblicuas, a saber, la recta $y = x$ y la recta $y = -x$. Las vemos en la siguiente gráfica en color azul junto a la gráfica de la propia función:

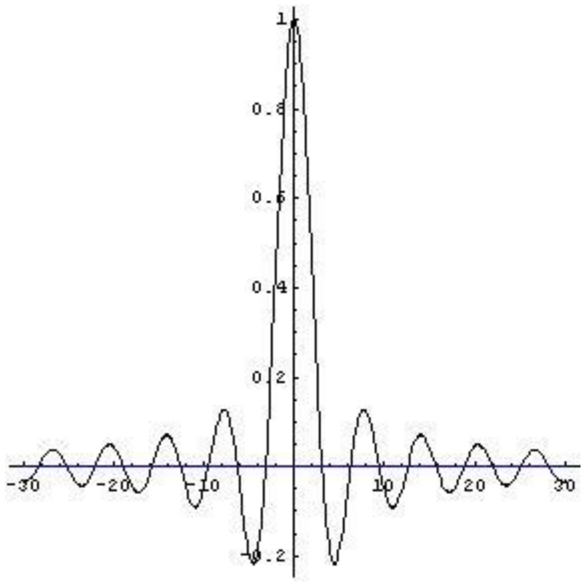


Dos grandes mentiras sobre las asíntotas

Como hemos comentado antes el cálculo de las asíntotas de una función real de variable real es parte del currículo de bachillerato. En él, por norma general (en realidad por experiencia personal y por comentarios de mis alumnos durante años), podemos encontrar dos grandes mentiras sobre las asíntotas de una función. Vamos a verlas y a darles una explicación más acorde con la realidad:

- **Una función no puede cortar a una asíntota suya**

  Primera mentira sobre las asíntotas: una función **sí puede cortar a una asíntota suya**. Un claro ejemplo de ello es la función $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$. Esta función tiene una asíntota horizontal, $y = 0$, por los dos lados. Lo vemos en la siguiente gráfica:



Vemos en la imagen que la función corta infinitas veces a su asíntota tanto por un lado como por el otro.

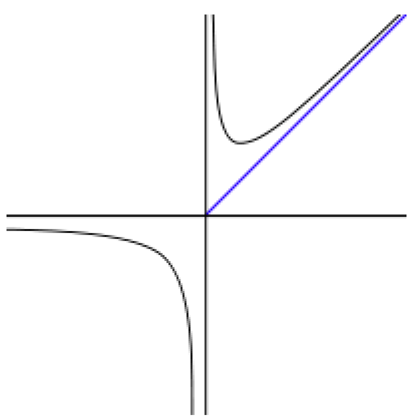
- **Una función no puede tener asíntotas horizontales y oblicuas a la vez**

Segunda mentira sobre las asíntotas: una función **sí puede tener asíntotas horizontales y oblicuas a la vez**.

Generalmente, en bachillerato se dice lo siguiente:

> Comenzad con el cálculo de las asíntotas horizontales. Si no aparece ninguna estamos obligados a calcular las oblicuas, pero si nos aparece alguna nos podemos evitar el cálculo de éstas últimas ya que en este caso tenemos asegurado que no habrá.

Eso es **falso**. Valga este ejemplo como explicación:



Sí. es el mismo ejemplo mostrado antes sobre función con una asíntota oblicua sólo por un lado. En concreto esta función tiene los tres tipos de asíntotas.

Como podéis ver hay funciones que presentan los dos tipos de asíntotas. Lo que sí es cierto es lo siguiente:

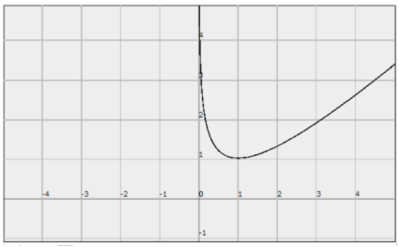
> Una función no puede tener una asíntota horizontal y otra oblicua **por el mismo lado**.

Es decir, no podemos tener una asíntota horizontal y otra oblicua por la izquierda de la gráfica ($x \to -\infty$) ni por la derecha ($x \to \infty$). Pero una función sí puede presentar una horizontal por un lado y una oblicua por otro.

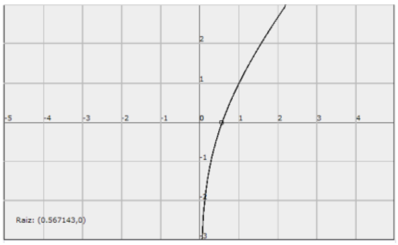
Espero que este artículo sobre el cálculo de las asíntotas de una función os sea útil para vuestros quehaceres matemáticos relacionados con el estudio de funciones. Y ya sabéis, cualquier duda será respondida lo antes posible en los comentarios

Análisis de funciones con Ln(x)

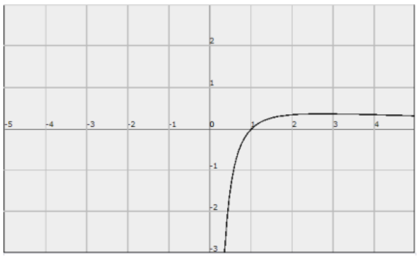
$$f(x) = x - Ln(x)$$



$$f(x) = x + Ln(x)$$

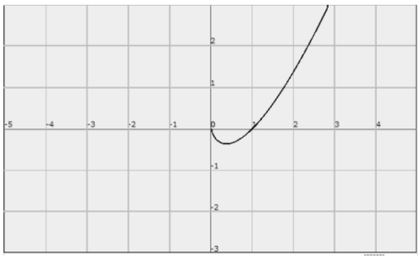


$$f(x) = \frac{Ln(x)}{x}$$



$$f(x) = \frac{x}{Ln(x)}$$

$$f(x) = xLn(x)$$



4.9 EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1.

Trazar la curva correspondiente a la función:

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 4} = \frac{x^2 + 3}{(x-2)(x+2)}$$

Solución:

Determinemos los elementos fundamentales de la curva como son:

1. Dominio natural de f (x).

Los únicos valores de x para los cuales no existe la función son $x = 2$ y $x = -2$ (valores de x que anulan el denominador). De esta forma: $D_f = R - \{2, -2\}$.

2. Interceptos:

i. Con el eje x (se hace $y = \text{o}$ en (1)): $0 = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4} \Leftrightarrow x^2 + 3 = 0$

Esta última ecuación no tiene Solución real, indicando con esto que la curva no corta al eje x.

ii. Con el eje y (se hace $x = \text{o}$ en (1)): $y = \dfrac{0^2 + 3}{0^2 - 4} = -\dfrac{3}{4}$

Asi que, la curva corta al eje y en el punto $P(0, -4/3)$.

3. Asíntotas:

i. **Verticales:** son aquellos valores de x que anulen el denominador de (1). En este caso, las rectas verticales $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales de la curva.

Además, $\displaystyle \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = +\infty$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+3}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+3}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+3}{x^2-4} = +\infty$$

ii. **Horizontales:**

Como: $\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2+3}{x^2-4} = 1$, se deduce que $y = 1$ es una **asíntota horizontal** de la curva.

De otro lado, como, $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4} = 1 + \frac{7}{x^2-4}$, se deduce entonces que los valores de la función para valores grandes de x en valor absoluto, son mayores que 1, indicando con esto que la curva siempre está por encima de la curva.

En la fig. 4.16 se indica el intercepto de la curva con el eje y, el comportamiento de la curva cerca de las asíntotas.

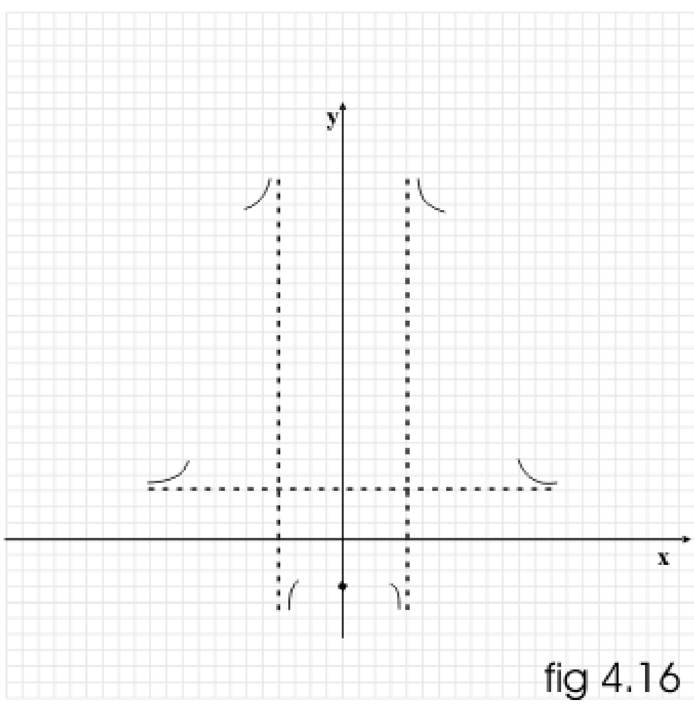


fig. 4.16

iii. **Oblicuas:** No tiene. ¿Porqué?.

4. Intervalos donde crece y decrece la curva. Extremos relativos.

Para ello, se hace el análisis de la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2+3)}{(x^2-4)^2} = \frac{-14x}{(x^2-4)^2}$$

Como $(x^2-4)^2 > 0$ (positivo), el signo de la derivada, solo depende del signo del factor $(-14x)$. Asi:

Signo de $(-14\,x)$ ó Signo de $f\,'(x)$ ++++++++++++++++| - - - - - - - - - - - - - - -
0

El diagrama indica que: $f(x)$ es creciente en $(-\infty,0]$
$f(x)$ es decreciente en $[0,+\infty)$

En consecuencia,
$x = 0$, corresponde a la abscisa de un punto máximo relativo. $P_m(0, f(0)) \Leftrightarrow P_m(0,-3/4)$.

5. Intervalos de concavidad. Posibles puntos de inflexión.

Para ello, se hace uso de la segunda derivada.

Si $$f'(x) = \frac{-14x}{(x^2-4)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{42x^2+56}{(x-2)^3 \cdot (x+2)^3}$$

Como $42x^2+56>0$ (positivo), el signo de la segunda derivada depende del signo de los factores del denominador.

Signo de $(x-2)^3$ - - - - - - - - - - - - - - - | ++++++++++++++++
2

Signo de $(x+2)^3$ - - - - - - -| +++++++++ ++++++++++++++++
-2

Signo de $f\,''(x)$ ++++++++++| - - - - - - - |++++++++++++++++
-2 2

El signo de la segunda derivada indica que:

f (x) es cóncava hacia arriba (+) en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$
f (x) es cóncava hacia abajo (-) en $(-2,2)$

En los puntos $x=-2$ y $x=2$ la concavidad cambia de signo, indicando con esto que hay "inflexión" pero, no existe punto de inflexión (¿Porqué?).

La fig. 4.17 recoge toda la información obtenida y proporciona una muy buena aproximación a la gráfica de la función dada.

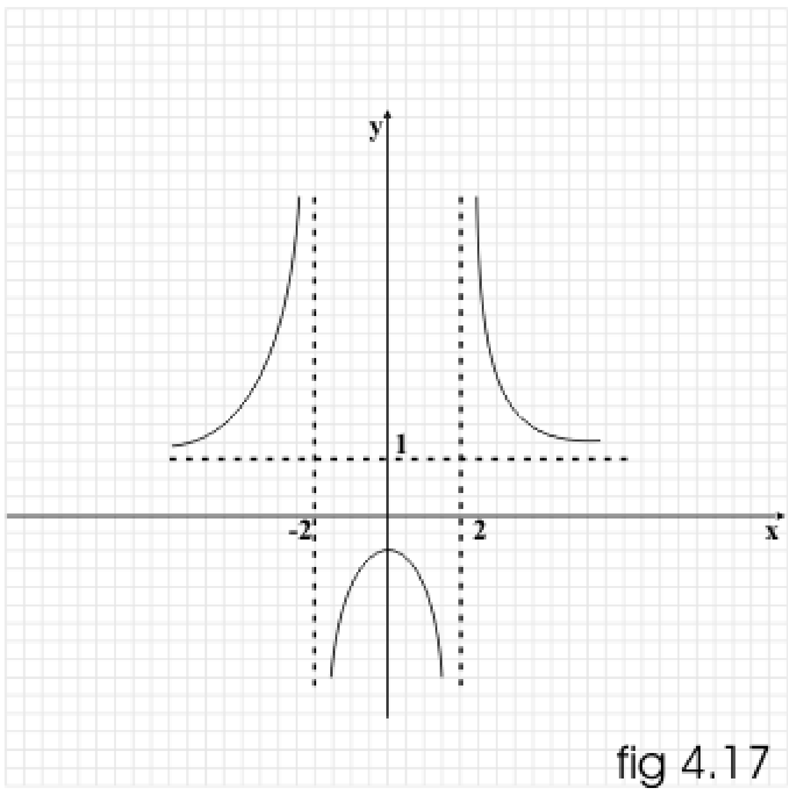


fig. 4.17

Ejemplo 2.

Trazar la curva correspondiente a la función:

$$y = f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} \qquad (1)$$

Solución:

1. **Dominio natural de *f(x)*:**

   El único valor de x para el cual no existe f es $x = 1$ (valor de x que anula el denominador). Asi que $D_f = R - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

   La función es continua para todo $x \neq 1$, por ser el cociente de dos polinomios.

2. **Interceptos:**

   i. Con el eje x (se hace $y = 0$ en (1)): $0 = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} \Rightarrow x = -1$. Luego el punto $P(-1,0)$ es el intercepto de la curva con el eje x.

   ii. Con el eje y (se hace $x = 0$ en (1)): $y = \frac{(0+1)^3}{(0-1)^2} = 1$. Luego el punto $Q(0,1)$ es el intercepto de la curva con el eje y.

3. **Asíntotas:**

   i. **Verticales:** El único valor de x que anula el denominador es $x = 1$ y esta es la única asíntota vertical de la curva.

   De otro lado:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x+1)^3 \to tiende, a, 8(+)}{(x-1)^2 \to tiende, a, 0(+)} \to +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x+1)^3 \to tiende, a, 8(+)}{(x-1)^2 \to tiende, a, 0(+)} \to +\infty$$

   ii. **Horizontales:** No tiene (¿Porqué?).

   iii. **Oblicuas:** Como el grado del numerador es 3, una unidad mas que el grado del denominador que es 2, la curva tiene una asíntota oblicua de la forma $y = mx + b$.

Para determinarla, se efectúa la división entre el numerador y el denominador y se obtiene:

$$\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-2x+1}=(x+5)+\frac{12x-4}{x^2-2x+1}$$

Asi que $y_A = x+5$ es la asíntota oblicua de la curva.

Para estudiar el comportamiento de la curva "cerca" de la asíntota se estudia la diferencia: $y_C - y_A$, para un mismo valor de x.

Donde y_C: la ordenada de la curva y y_A: ordenada de la asíntota.

Esto es,

$$y_C - y_A = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-2x+1}-(x+5)=\frac{12x-4}{x^2-2x+1}$$

Si $x>0$, entonces, $y_C - y_A > 0$, indicando con esto, que para valores grandes de x (positivos), la curva esta por encima de la asíntota.

Si $x<0$, entonces, $y_C - y_A < 0$, lo cual indica que para valores grandes de x (negativos), la curva esta por debajo de la asíntota.

En la figura 3 se ilustra los interceptos de la curva con los ejes coordenados, asi como también el comportamiento de la curva "cerca" de las asíntotas.

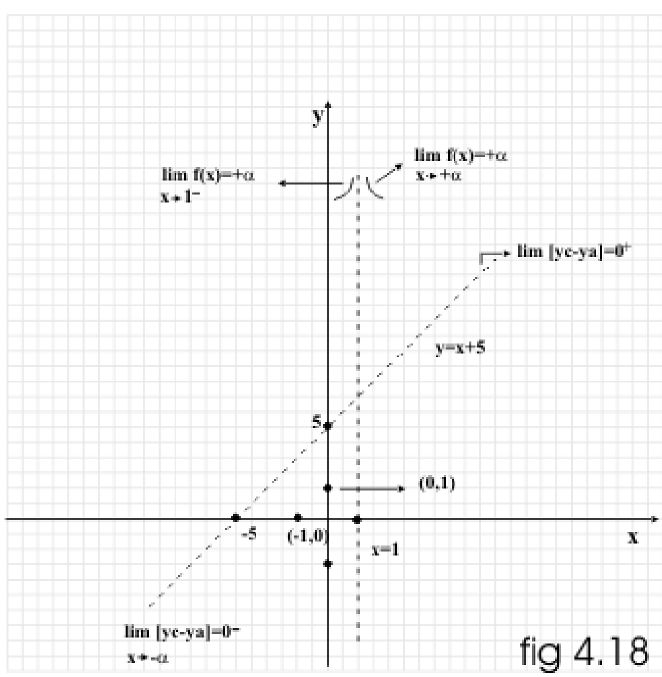


fig 4.18

4. Intervalos donde crece y decrece la curva. Extremos relativos.

Para ello se hace el análisis del signo de la primera derivada.

$$f'(x)=\frac{3(x+1)^2(x-1)^2-2(x-1)(x+1)^3}{(x-1)^4}=\frac{(x+1)^2\cdot(x-5)}{(x-1)^3}$$

El signo de *f ’(x)* depende de los signos que poseen los factores $(x-5)$ y $(x-1)^3$, puesto que $(x+1)^2$ es siempre positivo.

Signo de $(x-5)$ - | +++++++++++
5

Signo de $(x - 1)^3$ - - - - - - -| +++++++++++++++++++++++++
1

Signo de $f'(x)$ ++++++++| - - - - - - - - - - - - -|+++++++++++
1 5

El signo de *f ’(x)* indica:

f crece en los intervalos $(-\infty,1]$ y $[5,+\infty)$
f decrece en el intervalo $(1,5]$

$x = 1$ corresponde a un **máximo relativo**. $P_M(1, f(1)) = P_M(1,0)$
$x = 5$ corresponde a un **mínimo relativo**. $P_m(5, f(5)) = P_m(5,13.5)$

5. Intervalos de concavidad. Posibles puntos de inflexión

Para ello se analiza el signo de la segunda derivada *f’’(x)*.

$$f''(x)=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$$

El signo de *f’’(x)* solo depende del signo del factor $(x + 1)$, puesto que 24 y $(x-1)^4$ son siempre positivos.

Signo de $(x + 1)$ - - - - - - |+++++++++++++++++++++++++++ Signo de $f''(x)$
$\cap$ -1 $\cup$

El signo de *f ‘’(x)* indica:

f(x) es cóncava hacia abajo $(\cap)$ en $(-\infty,1]$

f(x) es cóncava hacia arriba $(\cup)$ en $[-1,+\infty)$.

El punto $P_I(-1, f(-1))$ corresponde a un punto de inflexión, es decir en $P_I(-1,0)$ la curva cambia de concavidad.

En la fig. 4.19 se traza la curva con todos los elementos así obtenidos

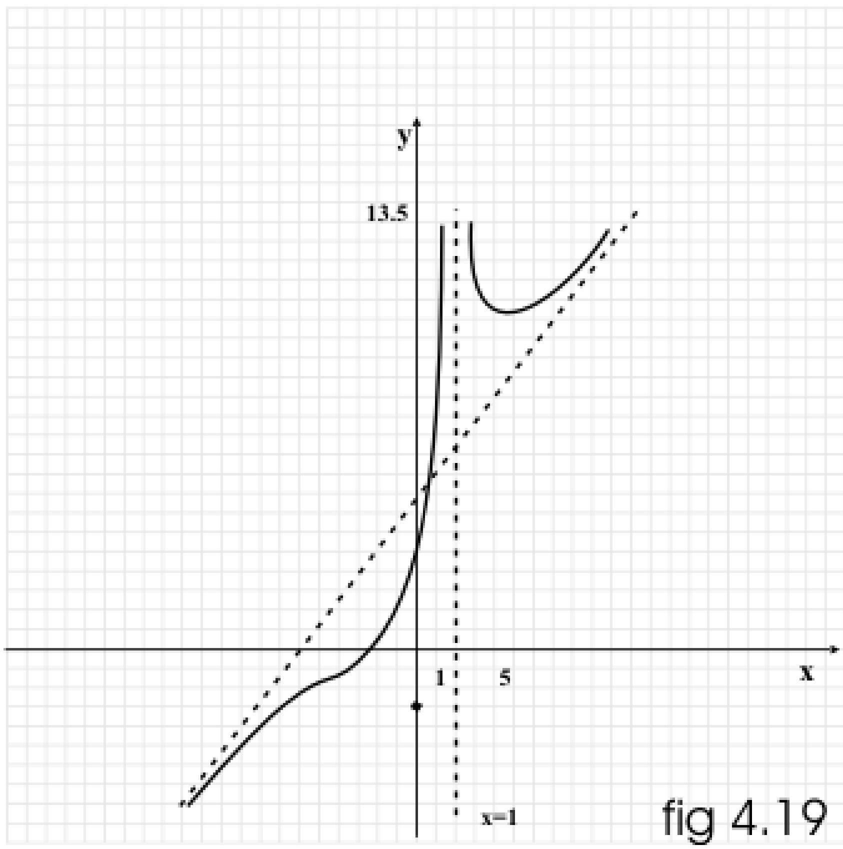


fig. 4.19

Ejemplo 3.

Trazar la gráfica de la función: $y = f(x) = 2senx + \cos 2x$ (1), para x en $[0,2\pi]$

Solución:

Como solo interesa la parte de la gráfica correspondiente al intervalo $[0,2\pi]$, solo se tiene en cuenta para su análisis los siguientes elementos:

1. **Continuidad:**

La función es continua en el intervalo $[0,2\pi]$ por ser suma de funciones continuas

2. **Interceptos:**

i. Con el eje x (se hace $y=0$ en (1)) y se resuelve para x.

$$2senx + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2senx + 1 - 2sen^2 x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2sen^2 x - 2senx - 1 = 0$$

Al resolver la última ecuación reducible a cuadrática, se obtiene por la fórmula general:

$$senx = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

La ecuación $senx = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$, carece de solución (¿Porqué?).

Si $senx = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$, entonces $x \approx \pi + 0.37$ y $x = 2\pi - 0.37$

Luego, los interceptos de la curva con el eje x, son los puntos:

$$P_1(\pi + 0.37{,}0) \quad \text{y} \quad P_2(2\pi - 0.37{,}0)$$

ii. Con el eje y (se hace $x=0$ en (1)). Así $y = 2sen0 + \cos 0 = 1$.

3. **Intervalos donde crece y decrece la curva. Extremos relativos**

Se obtienen analizando el signo de la primera derivada o *f'(x)*.

$$f'(x) = 2\cos x - 2sen2x = 2\cos x - 4senx \cdot \cos x$$

$$f'(x) = 2\cos x \cdot (1 - 2senx)$$

El signo de la derivada depende del signo de los factores $\cos x$ y $1-2senx$ en el intervalo $[0,2\pi]$.

$\cos x$ es positivo, si x pertenece al primero o al cuarto cuadrante, es decir, $\cos x > 0$ si $x \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$.

$\cos x$ es negativo, si x pertenece al segundo o al tercer cuadrante, es decir, $\cos x < 0$ si $x \in (\pi/2, 3\pi/2)$.

Ahora, como $senx > \frac{1}{2}$ siempre que $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$, se deduce que $2senx > 1$ si $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 1 - 2senx < 0$ si $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

También, $senx < \frac{1}{2}$ siempre que $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ó $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$, así que $1 - 2senx > 0$ si $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right)$.

Al llevar esta información al diagrama adjunto se puede escribir:

Signo de $(2\cos x)$	+ + + + + + + + +	- - - - - - - - - - - - - - -	+ + + + + + + + +		
en el intervalo $[0, 2\pi]$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π	

Signo de $(1 - 2senx)$	+ + +	- - - - - - - -	+ + + + + + + + + + + + + + + +		
en el intervalo $[0, 2\pi]$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	2π	

Signo de $f'(x)$	+ + +	- - - -	+ + +	- - - - - - - - - -	+ + + + + + + + +		
en el intervalo $[0, 2\pi]$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π	

El signo de $f'(x)$ indica que

$f(x)$ es creciente en los intervalos: $\left[0, \frac{\pi}{6}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$, y, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

$f(x)$ es decreciente en los intervalos: $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, y, $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Del diagrama anterior, se puede concluir también que:

$x = \frac{\pi}{6}$ corresponde a un **máximo relativo**, es decir, $P\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}\right)$ es un punto máximo de la curva

$x = \dfrac{5\pi}{6}$ corresponde a un **máximo relativo**, es decir, $Q\left(\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3}{2}\right)$ es un punto máximo de la curva

$x = \dfrac{\pi}{2}$ corresponde a un **mínimo relativo**, es decir, $R\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ es un punto mínimo de la curva

Finalmente, $x = \dfrac{3\pi}{2}$ corresponde a un **mínimo relativo**, es decir, $T\left(\dfrac{3\pi}{2}, -3\right)$ es un punto mínimo de la curva

4. Intervalos de Concavidad. Puntos de inflexión

Para ello se analiza el signo de la segunda derivada: $f''(x)$.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -2senx - 4\cos 2x \\
&= -2senx - 4(1 - 2sen^2 x) \\
&= 2(4sen^2 x - senx - 2) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Para hallar los posibles puntos de inflexión, se resuelve la ecuación: $f''(x) = 0$.

Es decir,

$$2(4sen^2 x - senx - 2) = 0$$

Resolviendo esta última ecuación reducible a cuadrática, se obtiene:

$$senx = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{33}}{8} \approx 0.84 \\ \dfrac{1-\sqrt{33}}{8} \approx -0.59 \end{cases} \qquad (3)$$

Mediante una calculadora, o una tabla de funciones trigonométricas, se pueden obtener los siguientes valores aproximados de x:

$x \approx 1$; $\quad x \approx \pi - 1$; $\quad x \approx \pi + 0.63$ $\quad$ y $\quad x \approx 2\pi - 0.63$

Para determinar si estos valores de x corresponden a posibles puntos de inflexión, se hace necesario analizar el signo de la segunda derivada

$$f''(x) = 2(4sen^2 x - senx - 2)$$

Los valores dados en (1), permiten escribir $f''(x)$ así:

$$f''(x) = 2(4sen^2 x - senx - 2) = 2\left[senx - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cdot \left[senx - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right]$$

Mediante consideraciones similares a la hechas para $f'(x)$, se puede obtener la información que aparece en el diagrama siguiente:

Signo de $\left[senx - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right]$ - - - - - - -| + + + + + +| -

0 1 $\pi - 1$ 2π

Signo de $\left[senx - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right]$ + + + + + + + + + + + +| - - - - - - - - - - - - - - - |+ + + +

0 $\pi + 0.63$ $2\pi - 0.63$ 2π

Signo de $f''(x)$ - - - - - - |+ + + + + | - - - - - | + + + + + + + + + +| - - - - - -

0 1 $\pi - 1$ $\pi + 0.63$ $2\pi - 0.63$ 2π

El signo de $f''(x)$ indica que:

$f(x)$ es **cóncava negativa** $(\cap)$ en: $[0,1] \cup [\pi - 1, \pi + 0.63] \cup [2\pi - 0.63, 2\pi]$
$f(x)$ es **cóncava positiva** $(\cup)$ en: $[1, \pi - 1] \cup [\pi + 0.63, 2\pi - 0.63]$

Además, se obtienen los siguientes puntos de inflexión:

$(1, 1.27)$; $(\pi - 1, 1.49)$; $(\pi + 0.63, -0.87)$ y $(2\pi - 0.63, -0.87)$

Con la información dada en los cuatro puntos anteriores, se puede trazar una buena aproximación a la curva correspondiente, como aparece en la fig.

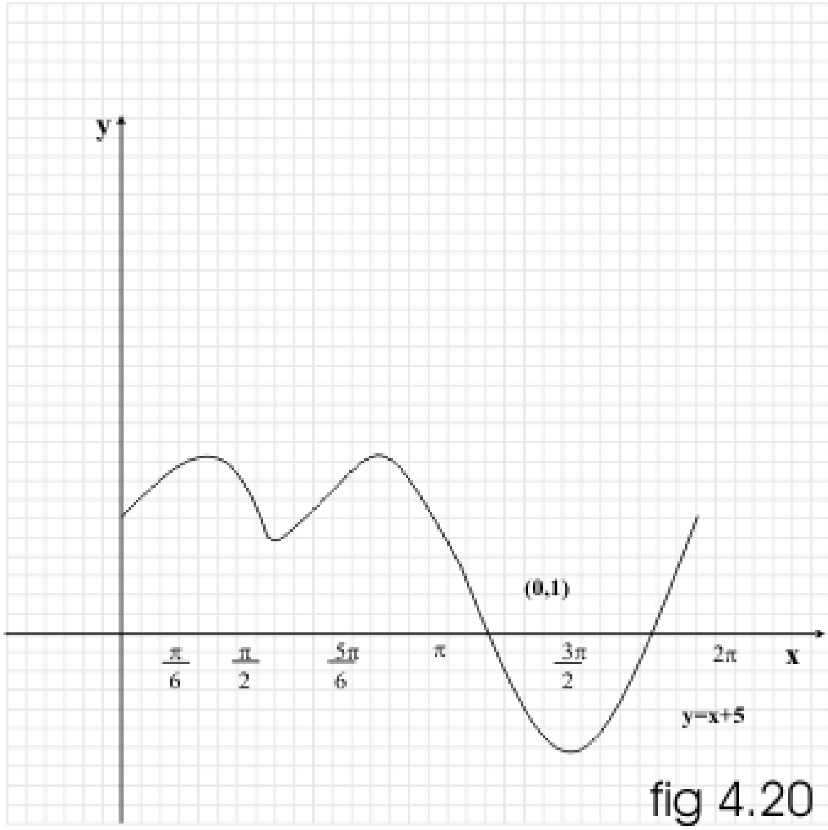


fig 4.20

ESTUDIO COMPLETO DE FUNCIONES

Realizar el estudio completo de las siguientes funciones:

1) $\boxed{f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x}$

1. Dominio. Discontinuidades. Asíntotas verticales

$D_f = \mathbb{R}$

Discontinuidades: no tiene

Asíntotas verticales: no tiene

2. Paridad

No tiene paridad

3. Raíces. Corte con eje y

Raíces: $x = 0$ y $x = 4$

Corte con eje *y*: $(0,0)$

4. Signos

$$f(x) = x(x-4)^3$$

	0		4
x	-	+	+
$(x-4)^3$	-	-	+
$x(x-4)^3$	+	-	+

5. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

$$f'(x) = 4(x-1)(x-4)^2$$

	1	4	
$(x-1)$	-	+	+
$(x-4)^2$	+	+	+
$4(X-1)(X-4)^2$	-	+	+
	Decreciente	Creciente	Creciente

6. Extremos relativos

Mínimo relativo: m=$(1,-27)$

7. Intervalos de concavidad y convexidad.

$$f''(x)=12(x-4)(x-2)$$

	2	4	
$(x-4)$	-	-	+
$(x-2)$	-	+	+
$12(x-4)(x-2)$	+	-	+
	Convexa	Cóncava	Convexa

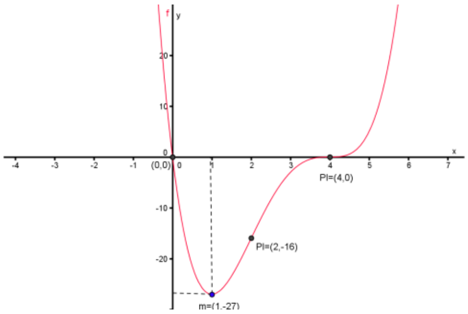
8. Puntos de inflexión.

Puntos de inflexión: $(2,-16)$ y $(4,0)$

9. Asíntotas oblicuas

No tiene

10. Gráfico



11. Conjunto imagen. Extremos absolutos. Supremo e ínfimo

Conjunto imagen: $I_f = [-27, \infty)$

Máximo absoluto: no tiene

Mínimo absoluto: $f(1) = -27$

Supremo: no tiene

Ínfimo: $f(1) = -27$

1) $\boxed{f(x) = 2x^{5/3} - 5x^{4/3}}$

1. Dominio. Discontinuidades. Asíntotas verticales

$D_f = \mathbb{R}$

Discontinuidades: no tiene

Asíntotas verticales: no tiene

2. Paridad

No tiene paridad

3. Raíces. Corte con eje y

Raíces: $x = 0$, $x = \dfrac{125}{8}$

Corte con eje *y*: $(0,0)$

4. Signos

$$f(x) = 2x^{4/3}\left(x^{1/3} - \frac{5}{2}\right)$$

		0	$\frac{125}{8}$
$x^{4/3}$	+	+	+
$\left(x^{1/3} - \frac{5}{2}\right)$	-	-	+
$2x^{4/3}\left(x^{1/3} - \frac{5}{2}\right)$	-	-	+

6. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{1/3}\left(x^{1/3} - 2\right)$$

		0	8
$x^{1/3}$	-	+	+
$(x^{1/3}-2)$	-	-	+
$\frac{10}{3}x^{1/3}(x^{1/3}-2)$	+	-	+
	Creciente	Decreciente	Creciente

7. Extremos relativos

Máximo relativo: M= $(0,0)$

Mínimo relativo: m=$(8,-16)$

8. Intervalos de concavidad y convexidad

$$f''(x)=\frac{20\left(x^{1/3}-1\right)}{9x^{2/3}}$$

		0	1
$\left(x^{1/3}-1\right)$	-	-	+
$x^{2/3}$	+	+	+
$\frac{20\left(x^{1/3}-1\right)}{9x^{2/3}}$	-	-	+
	Cóncava	Cóncava	Convexa

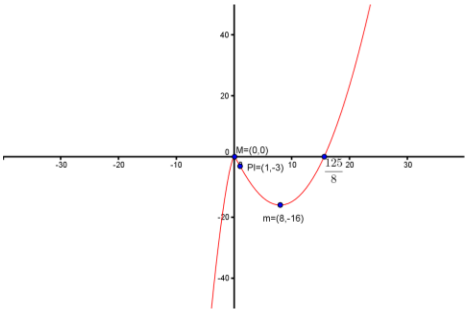
9. Puntos de inflexión

Punto de inflexión: PI=$(1,-3)$

10. Asíntotas oblicuas

No tiene

11. Gráfico



12. Conjunto imagen. Extremos absolutos. Supremo e ínfimo

Conjunto imagen: $I_f = (-\infty, \infty)$

Máximo absoluto: no tiene

Mínimo absoluto: no tiene

Supremo: no tiene

Ínfimo: no tiene

2) $\boxed{f(x) = e^{-x^2}}$

1. Dominio. Discontinuidades. Polos. Asíntotas verticales.

$D_f = \mathbb{R}$

Discontinuidades: no tiene

Asíntotas verticales: no tiene

2. Paridad

Es par

3. Raíces. Corte con eje y

Raíces: no tiene

Corte con eje *y*: $(0,1)$

4. Signos

La función es positiva en todo su dominio.

5. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

$$f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$$

	0	
x	-	+
e^{-x^2}	+	+
$-2xe^{-x^2}$	+	-

6. Extremos relativos

Máximo relativo: $(0,1)$

7. Intervalos de concavidad y convexidad.

$$f''(x) = 4e^{-x^2}\left(x - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$		$\sqrt{\frac{1}{2}}$
$\left(x - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$	-	-	+
$\left(x + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$	-	+	+
$4e^{-x^2}\left(x - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$	+	-	+
	Convexa	Cóncava	Convexa

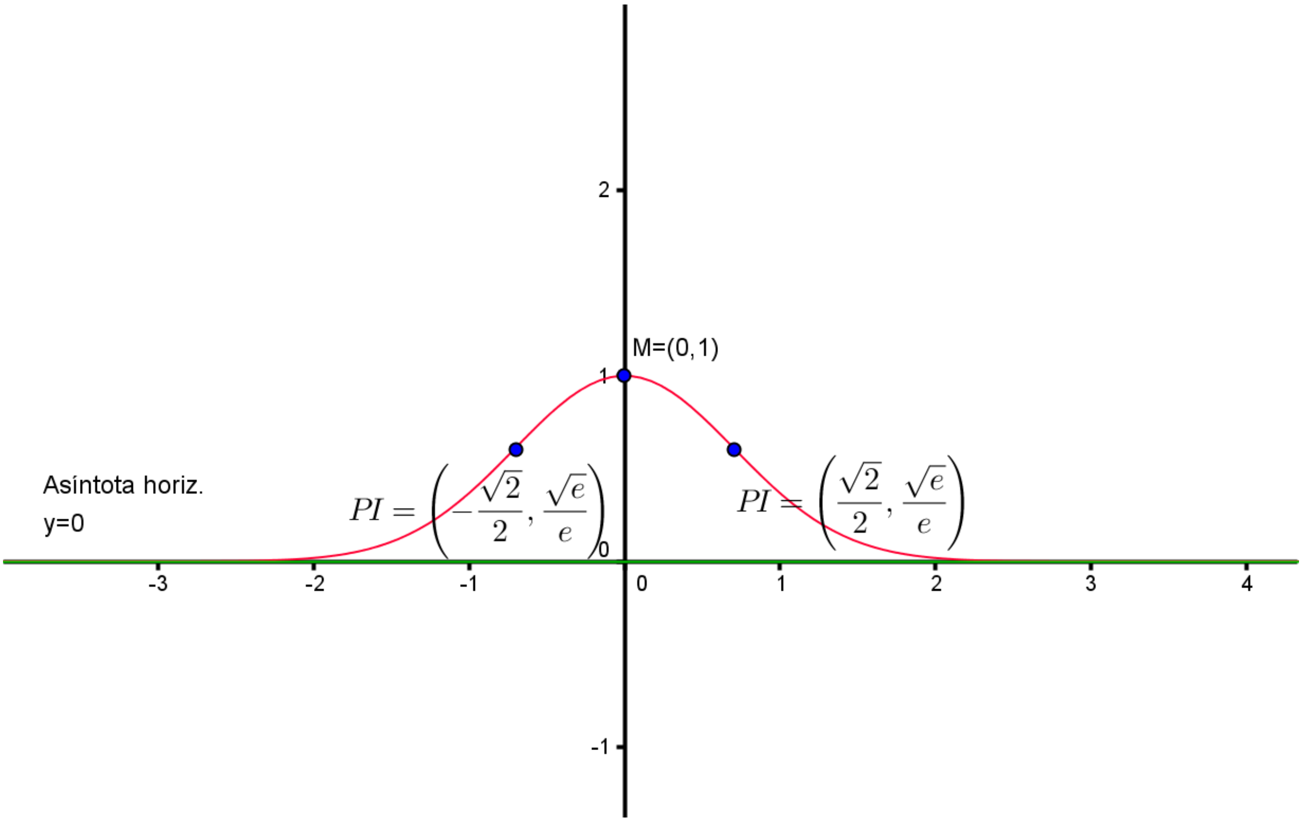
8. Puntos de inflexión

Puntos de inflexión: $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

9. Asíntotas oblicuas

Asíntota horizontal: $y = 0$

10. Gráfico



11. Conjunto imagen. Extremos absolutos. Supremo e ínfimo

Conjunto imagen: $I_f = (0, \infty)$

Máximo absoluto: $(0,1)$

Mínimo absoluto: no tiene

Supremo: $y = 1$

Ínfimo: $y = 0$

3) $\boxed{f(x) = \dfrac{Ln\,x}{x}}$

1. Dominio. Discontinuidades. Asíntotas verticales

$D_f = \mathbb{R}_{>0}$

Discontinuidades: no tiene

Polos: no tiene

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{Ln\,x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty \Rightarrow x = 0$ es asíntota vertical

2. Paridad

No tiene paridad

3. Raíces. Corte con eje y

Raíces: $x = 1$

Corte con eje y: no tiene

4. Signos

	1	
$Ln\,x$	-	+
x	+	+
$\dfrac{Ln\,x}{x}$	-	+

5. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

$$f'(x) = \frac{1 - Ln\,x}{x^2}$$

	e	
$1 - Ln\,x$	+	-
x^2	+	+

$\frac{1-Ln\,x}{x^2}$	**+**	**-**
	Creciente	Decreciente

6. Extremos relativos

Máximo relativo: $\left(e, \frac{1}{e}\right)$

7. Intervalos de concavidad y convexidad

$$f''(x) = \frac{2\left[Ln(x) - \frac{3}{2}\right]}{x^3}$$

	0	$e^{3/2}$
$Ln(x) - \frac{3}{2}$	**-**	**+**
x^3	**+**	**+**
$\frac{2\left[Ln(x) - \frac{3}{2}\right]}{x^3}$	**-**	**+**
	Cóncava	Convexa

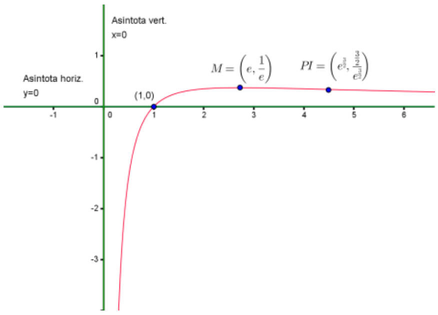
8. Puntos de inflexión

Punto de inflexión: $\left(e^{3/2}, \frac{\frac{3}{2}}{e^{3/2}}\right)$; $\qquad f\left(e^{3/2}\right) = \frac{\frac{3}{2}}{e^{3/2}} \approx 0{,}33$

9. Asíntotas oblicuas

Asíntota horizontal: $y = 0$

10. Gráfico



11. Conjunto imagen. Extremos absolutos. Supremo e ínfimo

Conjunto imagen: $I_f = \left(-\infty, e^{-1}\right)$

Máximo absoluto: $f(e) = \frac{1}{e}$

Mínimo absoluto: no tiene

Supremo: $f(e) = \frac{1}{e}$

Ínfimo: no tiene

4) $\boxed{f(x) = x^2\sqrt{x+1}}$

1. Dominio. Discontinuidades. Asíntotas verticales

$D_f = \mathbb{R}_{\geq -1}$

Discontinuidades: no tiene

Asíntotas verticales: no tiene

2. Paridad

No tiene paridad

3. Raíces. Corte con eje *y*

Raíces: $x = -1$ y $x = 0$

Corte con eje y: $(0,0)$

4. Signos

	-1	0
x^2	+	+
$\sqrt{x+1}$	+	+
$x^2\sqrt{x+1}$	+	+

5. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

$$f'(x) = \frac{5x\left(x+\frac{4}{5}\right)}{2\sqrt{x+1}}$$

	-1	$-\frac{4}{5}$	0
x	-	-	+
$\left(x+\frac{4}{5}\right)$	-	+	+
$\sqrt{x+1}$	+	+	+

$\dfrac{5x\left(x+\frac{4}{5}\right)}{2\sqrt{x+1}}$	+	-	+
	Creciente	Decreciente	Creciente

6. Extremos relativos

Máximo relativo: $\left(-\frac{4}{5}\ ,\ f\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$ $\qquad f\left(-\frac{4}{5}\right)\approx 0{,}29$

Mínimo relativo: $(0{,}0)$

7. Intervalos de concavidad y convexidad

$$f''(x)=\frac{15x^2+24x+8}{4(x+1)^{3/2}}$$

	-1	$\frac{-12+2\sqrt{6}}{15}$
$15x^2+24x+8$	-	+
$(x+1)^{3/2}$	+	+
$\dfrac{15x^2+24x+8}{4(x+1)^{3/2}}$	-	+
	Cóncava	Convexa

8. Puntos de inflexión

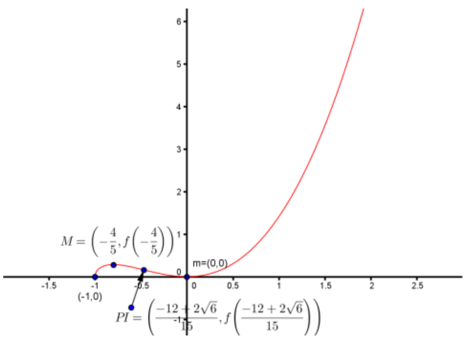
Punto de inflexión: $\left(\frac{-12+2\sqrt{6}}{15},\ f\left(\frac{-12+2\sqrt{6}}{15}\right)\right)$

$$f\left(\frac{-12+2\sqrt{6}}{15}\right)\approx 0{,}16$$

9. Asíntotas oblicuas

No tiene

10. Gráfico



11. Conjunto imagen. Extremos absolutos. Supremo e ínfimo

Conjunto imagen: $I_f = [0, \infty)$

Máximo absoluto: no tiene

Mínimo absoluto: $f(0) = f(-1) = 0$

Supremo: no tiene

Ínfimo: no tiene

6) $\boxed{f(x) = Ln\left(1 - x^2\right)}$

1. Dominio. Discontinuidades. Asíntotas verticales

$D_f = (-1, 1)$

Discontinuidades: no tiene

Asíntotas verticales: $x = -1$ y $x = 1$

2. Paridad

No tiene paridad

3. Raíces. Corte con eje y

Raíces: $x = 0$

Corte con eje y: $(0, 0)$

4. Signos

	-1	0	1
$Ln\left(1 - x^2\right)$	-		-

5. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

$$f'(x) = \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$$

	-1	0	1
x	-		+
$(x-1)$	-		-
$(x+1)$	+		+
$\frac{2x}{(x-1)(x+1)}$	+		-
	Creciente		Decreciente

6. Extremos relativos

Máximo relativo: $(0,0)$

7. Intervalos de concavidad y convexidad

$$f''(x)=\frac{-2\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

	-1 1
x^2+1	**+**
$(x-1)^2$	**+**
$(x+1)^2$	**+**
$\frac{-2\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2(x+1)^2}$	**-**
	Cóncava

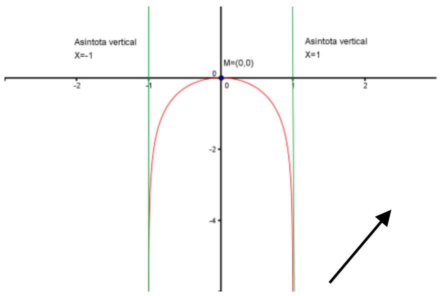
8. Puntos de inflexión

Punto de inflexión: no tiene

9. Asíntotas oblicuas

No tiene

10. Gráfico



11. Conjunto imagen. Extremos absolutos. Supremo e ínfimo

Conjunto imagen: $I_f = (-\infty, 0]$

Máximo absoluto: $(0,0)$

Mínimo absoluto: no tiene

Supremo: $y = 0$

Ínfimo: no tiene

7) $\boxed{f(x) = 4\ sen\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$

1. Dominio. Discontinuidades. Asíntotas verticales

$D_f = \square$

Discontinuidades: no tiene

Asíntotas verticales: no tiene

2. Paridad. Periodicidad

No tiene paridad.

Período: $T = \pi$

3. Raíces. Corte con eje y

Raíces: $x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$; $k \in \square$

Corte con eje y: $\left(0\ ,\ 2\sqrt{2}\right)$

4. Signos

	$\frac{-\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$
$sen\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$	+	-	

5. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

$$f'(x) = 8\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

	$\frac{-\pi}{8}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$
$COS\left(2X + \frac{\pi}{4}\right)$	+	-	+	
	Creciente	Decreciente	Creciente	

6. Extremos relativos

Máximo relativo: $\left(\frac{\pi}{8}+k\pi \quad , \quad 4\right)$; $k \in \mathbb{Z}$

Mínimo relativo: $\left(\frac{5\pi}{8}+k\pi ,-4\right)$; $k \in \mathbb{Z}$

7. Intervalos de concavidad y convexidad

$$f''(x) = -16 \quad sen\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

	$\frac{-\pi}{8}$ $\qquad\qquad$ $\frac{3\pi}{8}$ $\qquad\qquad$ $\frac{7\pi}{8}$	
$sen\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$	**+**	**-**
$-16 \quad sen\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$	**-**	**+**
	Cóncava	Convexa

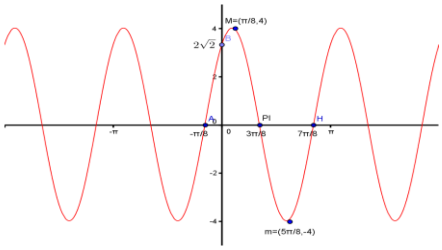
8. Puntos de inflexión

Puntos de inflexión: $\left(\frac{3\pi}{8}+k\pi \quad , \quad 0\right)$ $\qquad k \in \mathbf{Z}$

9. Asíntotas oblicuas

No tiene

10. Gráfico



11. Conjunto imagen. Extremos absolutos. Supremo e ínfimo

Conjunto imagen: $I_f = [-4, 4]$

Máximo absoluto: $y = 4$

Mínimo absoluto: $y = -4$

Supremo: $y = 4$

Ínfimo: $y = -4$

8) $\boxed{f(x)=\dfrac{\left|x^2-4\right|}{x}}$

1. Dominio. Discontinuidades. Asíntotas verticales

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x} & si \quad |x|\geq 2 \\ \dfrac{4-x^2}{x}=-\dfrac{x^2-4}{x}=-\dfrac{(x-2)(x+2)}{x} & si \quad |x|<2 \quad \wedge \quad x\neq 0 \end{cases}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{0\}$$

Discontinuidades: $x=0$, discontinuidad esencial

Asíntotas verticales: $x=0$

2. Paridad

Función impar

3. Raíces. Corte con eje y

Raíces: $x=-2$ y $x=2$

Corte con eje y: no tiene

4. Signos

	-2	0	2	
(x-2)	-	-	-	+
(x+2)	-	+	+	+
x	-	-	+	+
$\dfrac{x^2-4}{x}$	-			+
$-\dfrac{x^2-4}{x}$		-	+	

5. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+4}{x^2} & si \quad |x| > 2 \\ -\dfrac{x^2+4}{x^2} & si \quad |x| < 2 \end{cases}$$

	-2	0		2
x^2+4	+	+	+	+
x^2	+	+	+	+
$\dfrac{x^2+4}{x^2}$	+			+
$-\dfrac{x^2+4}{x^2}$		-	-	
	Creciente	Decreciente	Decreciente	Creciente

6. Extremos relativos

Máximo relativo: $(-2 \quad , \quad 0)$

Mínimo relativo: $(\ 2\ ,\ 0\ )$

7. Intervalos de concavidad y convexidad

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{8}{x^3} & si \quad |x| > 2 \\ \dfrac{8}{x^3} & si \quad |x| < 2 \end{cases}$$

	-2	0		2
x^3	-	-	+	+
$-\dfrac{8}{x^3}$	+			-

$\frac{8}{x^3}$		-	+	
	Convexa	Cóncava	Convexa	Cóncava

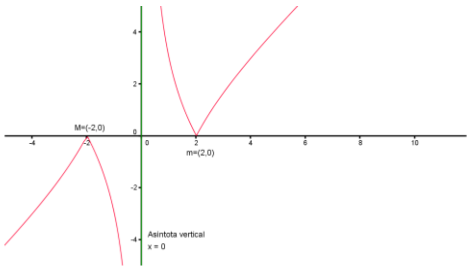
8. Puntos de inflexión

Puntos de inflexión: $(-2\,,\,0)$ y $(2\,,\,0)$

9. Asíntotas oblicuas

No tiene

10. Gráfico



11. Conjunto imagen. Extremos absolutos. Supremo e ínfimo

Conjunto imagen: $I_f = \mathbb{R}$

Máximo absoluto: no tiene

Mínimo absoluto: no tiene

Supremo: no tiene

Ínfimo: no tiene

9) $\boxed{f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}}$

1. Dominio. Discontinuidades. Asíntotas verticales

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

Discontinuidades: $x = 1$ (esencial).

Asíntotas verticales: $x = 1$

2. Paridad

No tiene paridad

3. Raíces. Corte con eje y

Raíces: no tiene

Corte con eje y: $(0,-2)$

4. Signos

	1	
x^2-2x+2	+	+
$x-1$	-	+
$\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$	-	+

5. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

$$f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

	0	1	2	
x	-	+	+	+
$(x-2)$	-	-	-	+
$(x-1)^2$	+	+	+	+

$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$	**+**	**-**	**-**	**+**
	Creciente	Decreciente	Decreciente	Creciente

6. Extremos relativos

Máximo relativo: $(0, -2)$

Mínimo relativo: $(2, 2)$

7. Intervalos de concavidad y convexidad

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

	1	
$(x-1)^3$	**-**	**+**
$\frac{2}{(x-1)^3}$	**-**	**+**
	Cóncava	Convexa

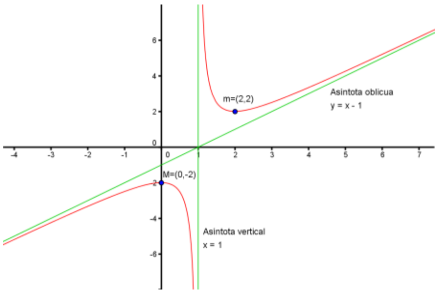
8. Puntos de inflexión

No tiene $\left(1 \notin D_f\right)$

9. Asíntotas oblicuas

Asíntota oblicua: $y = x - 1$

10. Gráfico



11. Conjunto imagen. Extremos absolutos. Supremo e ínfimo

Conjunto imagen: $I_f = (-\infty\ ,-2] \cup [\ 2\ ,\infty\ )$

Máximo absoluto: no tiene

Mínimo absoluto: no tiene

Supremo: no tiene

Ínfimo: no tiene

10) $\boxed{f(x)=\dfrac{x^4-2x^2}{x^2-1}}$

1. Dominio. Discontinuidades. Asíntotas verticales

$$D_f=\mathbb{R}-\{-1\ ,1\}$$

Discontinuidades: *x = -1* , *x = 1* (esenciales)

Asíntotas verticales: *x = -1* , *x = 1*

2. Paridad

Es función par

3. Raíces. Corte con eje y

Raíces: $x=-\sqrt{2}$, $x=0$, $x=\sqrt{2}$

Corte con eje y: $(0,0)$

4. Signos

	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	
x^2	+	+	+	+	+	+
$\left(x-\sqrt{2}\right)$	-	-	-	-	-	+
$(x+1)$	-	-	+	+	+	+
$\left(x+\sqrt{2}\right)$	-	+	+	+	+	+
$(x-1)$	-	-	-	-	+	+
$\dfrac{x^2\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)}{(x+1)(x-1)}$	+	-	+	+	-	+

5. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^4-x^2+2\right)}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

	-1	0	1	
x	**-**	**-**	**+**	**+**
$x^4 - x^2 + 2$	**+**	**+**	**+**	**+**
$(x-1)^2$	**+**	**+**	**+**	**+**
$(x+1)^2$	**+**	**+**	**+**	**+**
$\dfrac{2x\left(x^4 - x^2 + 2\right)}{(x-1)^2(x+1)^2}$	**-**	**-**	**+**	**+**
	Decreciente	Decreciente	Creciente	Creciente

6. Extremos relativos

Mínimo relativo: $(0,0)$

7. Intervalos de concavidad y convexidad

$$f''(x) = \frac{2\left(x^6 - 3x^4 - 2\right)}{\left(x^2 - 1\right)^3}$$

Las raíces de *f´´(x),* son las raíces de $x^6 - 3x^4 - 2 = 0$. Para hallarlas, hacemos la sustitución $z = x^2$ y obtenemos la ecuación $z^3 - 3z^2 - 2 = 0$ **.** Las raíces de esta última ecuación las obtenemos si consideramos la función continua y derivable $g(z) = z^3 - 3z^2 - 2 = 0$.

Su derivada es $g´(z) = 3z^2 - 6z = 3z(z-2) = 0$, cuyas raíces son *0* y *2*.

Analizamos los signos de *g´* en cada intervalo y obtenemos un máximo relativo de *g* en *(0,-2)* y un mínimo relativo en *(2,-6).*

Además, conocemos la forma aproximada del gráfico de *g,* función polinómica de grado 3 con coeficiente principal mayor que cero.

Con todos estos datos deducimos que la raíz de *g* está en el intervalo $(2,\infty)$.

Finalmente aplicamos el corolario del teorema del valor intermedio, el cual nos asegura que si *g* toma en z_1 un valor negativo y en z_2 un valor positivo, entonces una raíz de *g* estará comprendida entre ambos.

Por iteración (con la calculadora) concluimos que la raíz de *g* es $z_0 \approx 3{,}195...$, es decir que las raíces de *f´´* son $x_{1,2} = \pm\sqrt{z_0} = \pm\sqrt{3{,}195...} = \pm 1{,}78...$.

En la siguiente tabla, para obtener los signos de $x^6 - 3x^4 - 2 = 0$, valuamos la expresión en cada uno de los intervalos.

	x_1	-1	1	x_2	
$x^6 - 3x^4 - 2 = 0$	**+**	**-**	**-**	**-**	**+**
$(x+1)^3$	**-**	**-**	**+**	**+**	**+**
$(x-1)^3$	**-**	**-**	**-**	**+**	**+**
$\dfrac{2\left(x^6 - 3x^4 - 2\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$	**+**	**-**	**+**	**-**	**+**
	Convexa	Cóncava	Convexa	Cóncava	Convexa

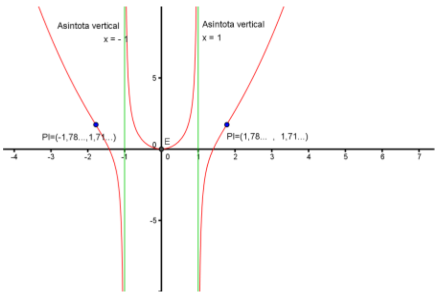
8. Puntos de inflexión

Puntos de inflexión: $(-1{,}78...., 1{,}71....)$ y $(1{,}78...., 1{,}71....)$

9. Asíntotas oblicuas

No hay asíntotas oblicuas

10. Gráfico



11. Conjunto imagen. Extremos absolutos. Supremo e ínfimo

Conjunto imagen: $I_f = \mathbb{R}$

Máximo absoluto: no tiene

Mínimo absoluto: no tiene

Supremo: no tiene

Ínfimo: no tiene

CAPÍTULO

10

Optimización

[1]

10.1 Problemas de optimización

Un problema de optimización consiste en minimizar o maximizar el valor de una variable. En otras palabras se trata de calcular o determinar el valor mínimo o el valor máximo de una función de una variable.
Se debe tener presente que la variable que se desea minimizar o maximizar debe ser expresada como función de otra de las variables relacionadas en el problema.
En ocasiones es preciso considerar las restricciones que se tengan en el problema, ya que éstas generan igualdades entre las variables que permiten la obtención de la función de una variable que se quiere minimizar o maximizar.
En este tipo de problemas se debe contestar correctamente las siguientes preguntas:

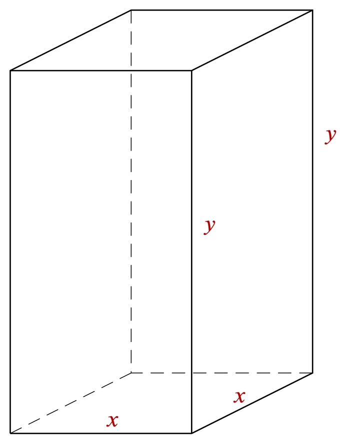
- ¿Qué se solicita en el problema?
- ¿Qué restricciones aparecen en el problema?

La respuesta correcta a la primera pregunta nos lleva a definir la función que deberá ser minimizada o maximizada.
La respuesta correcta a la segunda pregunta dará origen a (al menos) una ecuación que será auxiliar para lograr expresar a la función deseada precisamente como una función de una variable.

Ejemplo 10.1.1 *Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de* $50\ cm^3$. *Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material que va a ser usado.*

▼ La siguiente figura representa la caja:

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008



Volumen de la caja, según la figura:

$$V = x^2 y \ \& \ V = 50 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ 50 = x^2 y; \text{ esta igualdad relaciona las variables del problema.}$$

De esta ecuación podemos obtener y como función de x o viceversa, despejando la variable elegida.

El área de la caja sin tapa:

$$A = x^2 + 4xy \, .$$

Ésta es la cantidad de material que deseamos que sea mínima; vemos que es una función de dos variables.

Despejamos y de la restricción dada, esto es, de la fórmula del volumen:

$$y = \frac{50}{x^2} \, .$$

Sustituimos en el área y obtenemos una función de una sola variable:

$$A(x) = x^2 + 4x\left(\frac{50}{x^2}\right) = x^2 + \frac{200}{x} = x^2 + 200x^{-1} \, .$$

Derivando:

$$A'(x) = 2x - 200x^{-2} = 2x - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^3 - 200}{x^2} \, ;$$
$$A''(x) = 2 + 200\left(\frac{2}{x^3}\right) = 2 + \frac{400}{x^3} > 0 \, .$$

Calculamos puntos críticos:

$$A'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x^3 - 200 = 0 \;\Rightarrow\; x^3 = 100 \;\Rightarrow\; x = \sqrt[3]{100}\,\text{cm}\,.$$

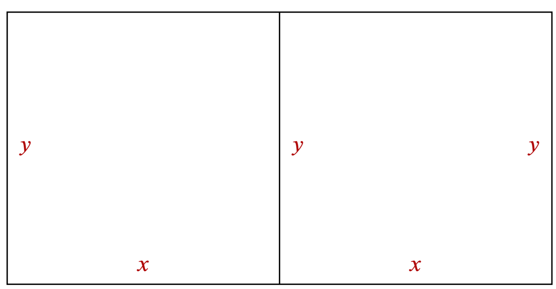
Es un mínimo absoluto pues $A''(x) > 0$ para cualquier $x > 0$. El valor correspondiente de la otra variable es

$$y = \frac{50}{100^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}\frac{100}{100^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}100^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{100} = \frac{1}{2}x\ \text{cm}\,.$$

□

Ejemplo 10.1.2 *Un ranchero tiene* 300 *m de malla para cercar dos corrales rectangulares iguales y contiguos, es decir, que comparten un lado de la cerca. Determinar las dimensiones de los corrales para que el área cercada sea máxima.*

▼ La siguiente figura representa los corrales contiguos:



Tenemos que el perímetro y el área de los corrales son, respectivamente:

$$P = 4x + 3y = 300 \quad \& \quad A = 2xy\,.$$

Pero como $y = \dfrac{300 - 4x}{3}$:

$$A(x) = \frac{2x(300 - 4x)}{3} = 200x - \frac{8}{3}x^2\,.$$

Derivando y obteniendo los puntos críticos:

$$A'(x) = 200 - \frac{16}{3}x = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{16}{3}x = 200 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3 \cdot 200}{16} = \frac{75}{2} \text{ es el punto crítico}$$

y como

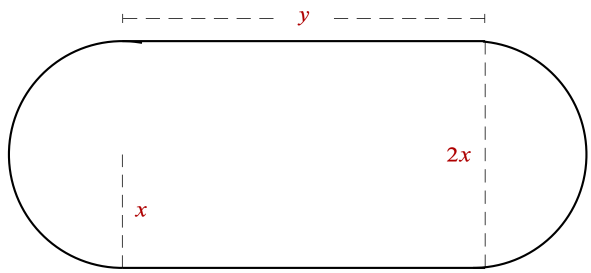
$$A''(x) = -\frac{16}{3} < 0, \text{ entonces se trata de un máximo.}$$

El área máxima ocurre para $x = \dfrac{75}{2}$ m & $y = \dfrac{300 - 150}{3} = 50$ m, que son las dimensiones pedidas.

□

Ejemplo 10.1.3 *Un terreno tiene la forma de un rectángulo con dos semicírculos en los extremos. Si el perímetro del terreno es de* 50 *m, encontrar las dimensiones del terreno para que tenga el área máxima.*

▼ El terreno lo representamos por la siguiente figura:



El área del terreno es

$$A = 2xy + \pi x^2 .$$

El perímetro, $P = 50$ m, está dado por $P = 2y + 2\pi x$, por lo que

$$2y + 2\pi x = 50 \Rightarrow y = \frac{50 - 2\pi x}{2} = 25 - \pi x.$$

Si sustituimos este valor en la fórmula del área, la tendremos expresada como función de una variable x:

$$A(x) = 2x(25 - \pi x) + \pi x^2 = 50x + x^2(\pi - 2\pi) = 50x - \pi x^2.$$

Su punto crítico se obtiene cuando $A'(x) = 0$. Esto es:

$$A'(x) = \left(50x - \pi x^2\right)' = 50 - 2\pi x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{50}{2\pi} = \frac{25}{\pi}.$$

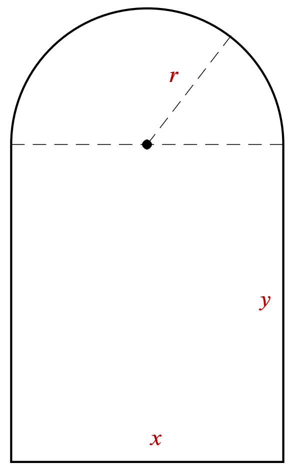
Como $A''(x) = -2\pi < 0$, se trata en efecto de un máximo; además $y = 25 - \pi\dfrac{25}{\pi} = 0$, es decir, el área máxima se obtiene cuando el terreno tiene la forma circular.

Éste fue un típico problema isoperimétrico, en el que se pide hallar una figura de área máxima teniendo el perímetro fijo, como se cuenta que se construyó la ciudad de Cartago sobre el máximo terreno que se pudiese abarcar con una cuerda hecha a partir de una piel de vaca.

□

Ejemplo 10.1.4 *Una ventana presenta forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Encuentre las dimensiones de la ventana con área máxima, si su perímetro es de* 10 *m.*

▼ Un croquis de la ventana es el siguiente:



Si A es el área que deseamos que sea máxima y P es el perímetro de la ventana, entonces

$$A = xy + \frac{1}{2}\pi r^2 \ \&\ P = x + 2y + \pi r.$$

Pero debido a que $r = \dfrac{x}{2}$ y a que $P = 10$:

$$A = xy + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 \ \&\ 10 = x + 2y + \pi\left(\frac{x}{2}\right);$$
$$A = xy + \frac{\pi}{8}x^2 \ \&\ 10 = x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + 2y.$$

Es decir, tenemos una función de dos variables $\left(A = xy + \dfrac{\pi}{8}x^2\right)$ y una ecuación $\left[x\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right) + 2y = 10\right]$. De la ecuación despejamos la variable y para luego sustituirla en la función A.

$$\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x + 2y = 10 \ \Rightarrow\ 2y = 10 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x \ \Rightarrow\ y = \frac{1}{2}\left[10 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x\right] =$$
$$= \frac{10}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{2 + \pi}{2}\right)x \ \Rightarrow\ y = 5 - \frac{2 + \pi}{4}x;$$

sustituyendo ahora en A:

$$A(x) = xy + \frac{\pi}{8}x^2 = x\left(5 - \frac{2 + \pi}{4}x\right) + \frac{\pi}{8}x^2 = 5x - \frac{2 + \pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{8}x^2 =$$
$$= \frac{\pi}{8}x^2 - \frac{2 + \pi}{4}x^2 + 5x = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{2 + \pi}{4}\right)x^2 + 5x =$$
$$= \frac{\pi - 2(2 + \pi)}{8}x^2 + 5x = \frac{\pi - 4 - 2\pi}{8}x^2 + 5x =$$
$$= \frac{-\pi - 4}{8}x^2 + 5x \ \Rightarrow\ A(x) = -\frac{\pi + 4}{8}x^2 + 5x;$$

$A(x)$ es la función de la variable x que queremos maximizar. Derivando y calculando puntos críticos:

$$A'(x) = -\frac{\pi+4}{8}(2x) + 5 = -\frac{\pi+4}{4}x + 5;$$
$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi+4}{4}x + 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi+4}{4}x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{20}{\pi+4}.$$

Entonces, $A(x)$ tiene un punto crítico en $x_1 = \dfrac{20}{\pi+4}$.

$$A'(x) = -\frac{\pi+4}{4}x + 5 \Rightarrow A''(x) = -\frac{\pi+4}{4} \text{ para cada } x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A''(x_1) = -\frac{\pi+4}{4} \Rightarrow A''(x_1) < 0.$$

$A(x)$ tiene un máximo local estricto en $x_1 = \dfrac{20}{\pi+4}$.

Entonces el área A de la ventana es máxima cuando $x = \dfrac{20}{\pi+4}$ m, para la cual

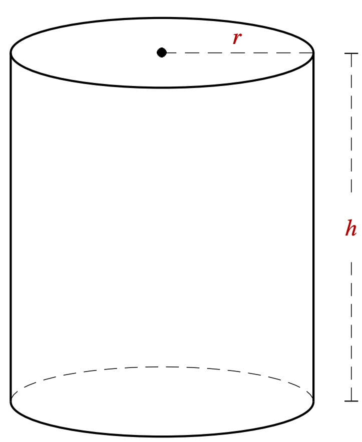
$$y = 5 - \frac{2+\pi}{4}x = 5 - \left(\frac{\pi+2}{4}\right)\left(\frac{20}{\pi+4}\right) = 5 - \frac{5(\pi+2)}{\pi+4} =$$
$$= 5\left(1 - \frac{\pi+2}{\pi+4}\right) = 5\left(\frac{\pi+4-\pi-2}{\pi+4}\right) = 5\left(\frac{2}{\pi+4}\right) = \frac{10}{\pi+4};$$

es decir, cuando $x = \dfrac{20}{\pi+4}$ m y cuando $y = \dfrac{10}{\pi+4}$ m. Vemos que $y = \dfrac{x}{2}$.

□

Ejemplo 10.1.5 *Se desea construir un recipiente cilíndrico de metal con tapa que tenga una superficie total de 80 cm^2. Determine sus dimensiones de modo que tenga el mayor volumen posible.*

▼ La figura del cilindro es la siguiente:



Se desea maximizar el volumen $V = \pi r^2 h$ que depende de dos variables r & h.
Se sabe que el área total $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ debe ser igual a 80 cm^2.
Es decir, se sabe que $2\pi r^2 + 2\pi r h = 80$.
Tenemos entonces:

Una función $V = \pi r^2 h$;

Una ecuación $2\pi r^2 + 2\pi r h = 80$.

De la ecuación despejamos una de las variables (la que nos convenga) para sustituirla en la función. Conviene despejar h ya que para r se obtiene una ecuación cuadrática.

$$2\pi r^2 + 2\pi r h = 80 \;\Rightarrow\; \pi r^2 + \pi r h = 40 \;\Rightarrow\; \pi r h = 40 - \pi r^2 \;\Rightarrow\; h = \frac{40 - \pi r^2}{\pi r}.$$

Sustituyendo en V obtendremos el volumen V como función de una única variable: r
$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\dfrac{40 - \pi r^2}{\pi r}\right) = r(40 - \pi r^2) \;\Rightarrow\; V(r) = 40r - \pi r^3$ que es la función a maximizar.
Derivando y obteniendo puntos críticos:

$$\begin{aligned} V'(r) &= 40 - 3\pi r^2;\\ V'(r) &= 0 \;\Leftrightarrow\; 40 - 3\pi r^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; r^2 = \frac{40}{3\pi} \approx 4.2441 \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow\; r = \pm\sqrt{4.2441} \approx \pm 2.0601. \end{aligned}$$

En el contexto del problema se ignora el valor negativo de r y sólo nos importa $r_1 \approx 2.0601$;

$$V'(r) = 40 - 3\pi r^2 \;\Rightarrow\; V''(r) = -6\pi r;$$
$$V''(r_1) = -6\pi r_1 \approx -6\pi(2.0601) < 0.$$

Por lo anterior, la función $V(r)$ tiene un máximo cuando $r = 2.0601$.
La altura h del cilindro entonces es

$$h_1 = \frac{40 - \pi r_1^2}{\pi r_1} \approx \frac{40 - \pi(2.0601)^2}{\pi(2.0601)} \approx 4.1203.$$

Por lo tanto, las dimensiones del cilindro con volumen máximo son

$$r_1 \approx 2.0601 \text{ cm } \;\&\; h_1 \approx 4.1203 \text{ cm}.$$

Observamos que $h_1 = 2r_1$, pues

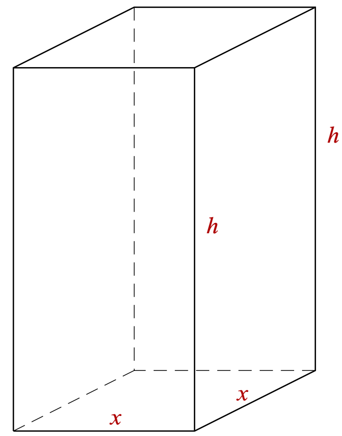
$$\frac{40 - \pi r_1^2}{\pi r_1} = 2r_1 \;\Leftrightarrow\; 40 - \pi r_1^2 = 2\pi r_1^2 \;\Leftrightarrow\; 40 = 3\pi r_1^2 \;\Leftrightarrow\; r_1^2 = \frac{40}{3\pi}, \text{ que es el caso.}$$

□

Ejemplo 10.1.6 *Se va a construir una cisterna rectangular con base y tapa cuadradas para almacenar* $12\,000$ $pies^3$ *de agua. Si el concreto para construir la base y los lados tiene un costo de* \$100 *por* pie^2 *y el material para construir la tapa cuesta* \$200 *por* pie^2 *¿cuáles son las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo de su construcción?*

▼ ¿Qué se quiere en el problema?
Determinar las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo de su construcción.
Suponiendo que las dimensiones de la cisterna son: x pies el lado de la base cuadrada y h pies su altura. ¿Cuál es el costo de su construcción?

La siguiente figura representa a la cisterna:



Para encontrar las dimensiones (x & h) que minimizan el costo de su construcción se necesita la expresión del costo de la cisterna. Usamos la tabla siguiente:

	Costo unitario (\$) por pie^2	*Área (pie*^{2}*)*	*Costo total* (\$)
Base	100	x^2	$100x^2$
Tapa	200	x^2	$200x^2$
Caras laterales	100	$4xh$	$400xh$
	Costo de la cisterna: $300x^2 + 400xh$		

El costo total de la contrucción de la cisterna es:

$$C = 300x^2 + 400xh \text{ pesos} .$$

En el problema aparece la siguiente restricción: el volumen de la cisterna debe ser igual a 12 000 pies^3, es decir, que $x^2h = 12\,000$.
Tenemos pues:
Una función $C = 300x^2 + 400xh$ y una ecuación $x^2h = 12\,000$.
De la ecuación despejamos una de las variables (la que más convenga) para sustituirla en la función. Conviene despejar h.

$$x^2h = 12\,000 \Rightarrow h = \frac{12\,000}{x^2} .$$

Sustituyendo en la función se obtiene

$$C = 300x^2 + 400xh = 300x^2 + 400x\left(\frac{12\,000}{x^2}\right) ;$$

$$C(x) = 300x^2 + \frac{4\,800\,000}{x} .$$

Ésta es la función (de una sola variable: x) que se quiere minimizar.

$$C(x) = 300x^2 + 4\,800\,000x^{-1} \Rightarrow C'(x) = 600x - 4\,800\,000x^{-2} .$$

Derivando y calculando sus puntos críticos:

$$C'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 600x - \frac{4\,800\,000}{x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 600x = \frac{4\,800\,000}{x^2} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; x^3 = \frac{4\,800\,000}{600} = 8\,000 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt[3]{8\,000} = 20\,.$$

Es decir, la función $C(x)$ tiene un punto crítico en $x = 20$. Ahora bien

$$C'(x) = 600x - 4\,800\,000x^{-2} \;\Rightarrow\; C''(x) = 600 + 9\,600\,000x^{-3} > 0 \text{ para cualquier } x > 0\,.$$

Lo cual implica que el punto crítico es un mínimo para $C(x)$ (por el criterio de la segunda derivada). El costo C de la cisterna es mínimo cuando $x = 20$ pies y por tanto

$$h = \frac{12\,000}{x^2} = \frac{12\,000}{(20)^2} = \frac{12\,000}{400} = 30\,.$$

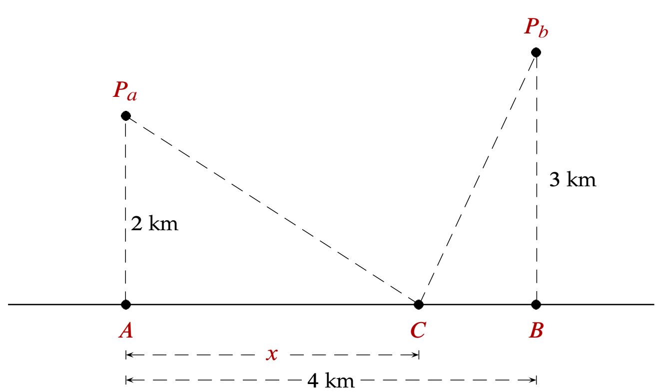
Esto es, el costo mínimo es cuando $x = 20$ pies y $h = 30$ pies. Con lo cual:

$$\begin{aligned} C &= 300x^2 + 400xh\,;\\ C_{\min} &= C(20) = 300(20)^2 + 400(20)(30) = 120\,000 + 240\,000\,;\\ C_{\min} &= \$360\,000\,. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 10.1.7 *Dos poblados P_a y P_b están a 2 km y 3 km, respectivamente, de los puntos más cercanos A y B sobre una línea de transmisión, los cuales están a 4 km uno del otro. Si los dos poblados se van a conectar con un cable a un mismo punto de la línea, ¿cuál debe ser la ubicación de dicho punto para utilizar el mínimo de cable?*

▼



Sea C el punto de conexión ubicado, digamos, a x km del punto A y por supuesto a $4 - x$ km del punto B.
Si l es la longitud del cable utilizado para conectar P_a y P_b con C, entonces:

$$l = \overline{P_aC} + \overline{P_bC} = \sqrt{x^2 + 2^2} + \sqrt{(4 - x)^2 + 3^3}\,.$$

La función a minimizar es:

$$l(x) = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{(4-x)^2+9} = (x^2+4)^{\frac{1}{2}} + \left[(4-x)^2+9\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Derivando y obteniendo puntos críticos:

$$l'(x) = \frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}2x + \frac{1}{2}\left[(4-x)^2+9\right]^{-\frac{1}{2}}2(4-x)(-1);$$

$$l'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+9}};$$

$$l'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+9}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+9}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\sqrt{(4-x)^2+9} = (4-x)\sqrt{x^2+4}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$x^2[(4-x)^2+9] = (4-x)^2(x^2+4) \Rightarrow x^2(4-x)^2+9x^2 = x^2(4-x)^2+4(4-x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2 = 4(4-x)^2 \Rightarrow 9x^2 = 4(16-8x+x^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2 = 64-32x+4x^2 \Rightarrow 5x^2+32x-64 = 0.$$

Esta última ecuación tiene por soluciones:

$$x = \frac{-32 \pm \sqrt{(32)^2-4(5)(-64)}}{2(5)} = \frac{-32 \pm \sqrt{2304}}{10} = \frac{-32 \pm 48}{10}.$$

De donde se obtienen dos puntos críticos que son:

$$x_1 = \frac{-32+48}{10} = \frac{16}{10} = 1.6 \text{ así como } x_2 = \frac{-32-48}{10} = \frac{-80}{10} = -8.$$

Claramente el valor $x_2 = -8 < 0$ es descartado y sólo consideramos $x_1 = 1.6$.

Ya que

$$l''(x) = \frac{4}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{9}{[(4-x)^2+9]^{\frac{3}{2}}},$$

entonces $l''(x) > 0$ para cada x. En particular $l''(1.6) > 0$, por lo que $l(x)$ es mínima cuando $x = 1.6$ km.

Puesto que $0 \le x \le 4$, calculemos los números $l(0)$, $l(1.6)$ y $l(4)$ a manera de ejemplo:

$$l(0) = \sqrt{0^2+4} + \sqrt{(4-0)^2+9} = 2 + \sqrt{25} = 2+5 = 7;$$

$$l(1.6) = \sqrt{(1.6)^2+4} + \sqrt{(4-1.6)^2+9} = \sqrt{6.56} + \sqrt{14.76} \approx 6.4;$$

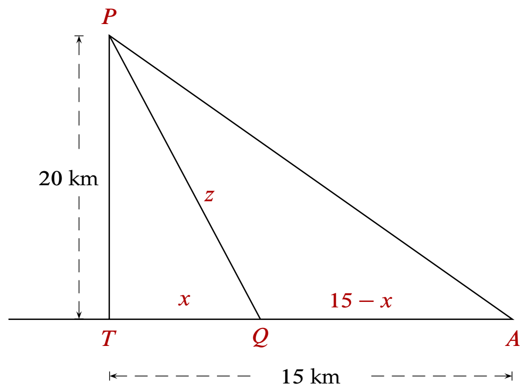
$$l(4) = \sqrt{4^2+4} + \sqrt{(4-4)^2+9} = \sqrt{20}+3 \approx 7.5.$$

Se ve pues que $l(x)$ es menor cuando $x = 1.6$ km, siendo la longitud mínima del cable igual a 6.4 km aproximadamente.

□

Ejemplo 10.1.8 *Se requiere construir un oleoducto desde una plataforma marina que está localizada al norte 20 km mar adentro, hasta unos tanques de almacenamiento que están en la playa y 15 km al este. Si el costo de construcción de cada km de oleoducto en el mar es de 2 000 000 de dólares y en tierra es de 1 000 000, ¿a qué distancia hacia el este debe salir el oleoducto submarino a la playa para que el costo de la construcción sea mínimo?*

▼ Usamos la siguiente figura:



Consideremos que la plataforma está en P y que T es el punto de la playa más cercano a ella; que A es donde están los tanques de almacenamiento y Q es el punto de la playa donde debe de salir el oleoducto submarino.

Si x representa la distancia del punto T al punto Q, entonces considerando el triángulo rectángulo PTQ:

$$z^2 = x^2 + (20)^2 \Rightarrow z = \sqrt{x^2 + 400}\,,$$

que es la porción de oleoducto submarino; $\overline{QA} = 15 - x$ es la porción de oleoducto en tierra.

Es importante notar que $0 \le x \le 15$.

El costo de construir z kilómetros de oleoducto submarino, a razón de 2 000 000 de dólares por km es de $2z$ millones de dólares y el costo de construir $15-x$ km de oleoducto terrestre, a razón de 1 000 000 de dólares por km es $1 \cdot (15 - x)$ millones de dólares. Entonces, el costo total de la construcción del oleoducto (en millones de dólares) es

$$C = 2z + (15 - x) = 2\sqrt{x^2 + 400} + 15 - x \Rightarrow C(x) = 2\sqrt{x^2 + 400} + 15 - x = 2(x^2 + 400)^{\frac{1}{2}} + 15 - x$$

que es la función a minimizar. Derivando y calculando puntos críticos:

$$C'(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)(x^2 + 400)^{-\frac{1}{2}}2x - 1 = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 400}} - 1\,;$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow C'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 400}} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 400}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = \sqrt{x^2 + 400} \Rightarrow 4x^2 = x^2 + 400 \Rightarrow 3x^2 = 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{400}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{20}{\sqrt{3}}\,.$$

Por ser $x \geq 0$ podemos descartar $x = -\dfrac{20}{\sqrt{3}} < 0$ y solamente analizaremos el costo en $x = \dfrac{20}{\sqrt{3}}$.

$$C'(x) = 2x(x^2 + 400)^{-\frac{1}{2}} - 1\,;$$
$$C''(x) = 2x\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+400)^{-\frac{3}{2}}2x + 2(x^2+400)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-2x^2}{(x^2+400)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{(x^2+400)^{\frac{1}{2}}}\,;$$
$$C''(x) = \frac{-2x^2 + 2(x^2+400)}{(x^2+400)^{\frac{3}{2}}} = \frac{800}{(x^2+400)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Vemos que $C''(x) > 0$ para cualquier x.

Por lo cual $C(x)$ tiene un mínimo local estricto en $x = \dfrac{20}{\sqrt{3}}$.

Ahora bien, no debemos olvidar que $0 \leq x \leq 15$.

¿Cuál será el costo $C(x)$ en los casos extremos $x = 0$ y en $x = 15$?

Ya que $C(x) = 2\sqrt{x^2 + 400} + 15 - x$, entonces

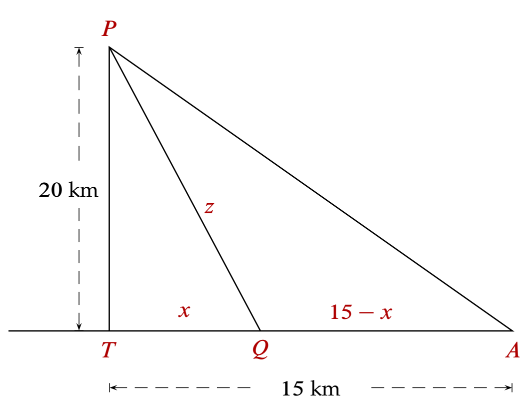
$$C(0) = 2\sqrt{400} + 15 = 55\,;$$
$$C\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{\frac{400}{9} + 400} + 15 - \frac{20}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{400 + 3\,600}{9}} + 15 - \frac{20}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{4\,000}{9}} + 15 - \frac{20}{\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{2\sqrt{4\,000}}{3} + 15 - \frac{20}{\sqrt{3}} \approx 45.6167\,;$$
$$C(15) = 2\sqrt{225 + 400} + 15 - 15 = 50\,.$$

El costo mínimo de la construcción del oleoducto es de 45.6167 millones de dólares y se tiene cuando $x = \dfrac{20}{\sqrt{3}} \approx 11.547$ km.

□

Ejemplo 10.1.9 *Se requiere construir un oleoducto desde una plataforma marina que está localizada al norte 20 km mar adentro, hasta unos tanques de almacenamiento que están en la playa y 15 km al este. Si el costo de construcción de cada kilómetro de oleoducto en el mar es de 3 000 000 y en tierra es de 2 000 000, ¿qué tan alejado debe salir el oleoducto submarino a la playa para que el costo de la construcción sea mínimo?*

▼ Usamos la siguiente figura:



El costo de construir z km de oleoducto submarino, a razón de 3 000 000 de dólares por km, es de $3z$ millones de dólares y el costo de construir $15 - x$ km de oleoducto terrestre, a razón de 2 000 000 de dólares por km, es $2(15 - x)$ millones de dólares.

Entonces, el costo total de la construcción del oleoducto es (en millones de dólares)

$$C = 3z + 2(15 - x) = 3\sqrt{x^2 + 400} + 2(15 - x)\,;$$
$$C(x) = 3\sqrt{x^2 + 400} + 2(15 - x) = 3(x^2 + 400)^{\frac{1}{2}} + 30 - 2x\,;$$

que es la función a minimizar. Derivando y obteniendo puntos críticos:

$$C'(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)(x^2 + 400)^{-\frac{1}{2}}2x - 2 = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 400}} - 2\,;$$
$$C'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 400}} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 400}} = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x = 2\sqrt{x^2 + 400} \Rightarrow 9x^2 = 4(x^2 + 400) \Rightarrow 5x^2 = 1\,600 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 = \frac{1\,600}{5} = 320 \Rightarrow x = \pm\sqrt{320}\,.$$

Por ser $x \geq 0$, podemos descartar $x = -\sqrt{320}$.

Pero cuidado, $x = \sqrt{320} \approx 17.889$ no cumple con la restricción $0 \leq x \leq 15$. Esto nos indica que la función costo $C(x)$ no tiene puntos críticos en el intervalo cerrado $[0, 15]$, por lo cual no hay mínimo local estricto (ni máximo) para el costo $C(x)$ en $[0, 15]$.

Esto es, la función $C(x)$ es estrictamente creciente o decreciente en el intervalo $[0, 15]$.

Por lo tanto, el costo mínimo aparece en uno de los extremos del intervalo y, por ende, el costo máximo aparece en el otro extremo.

Valuamos pues $C(x)$ en $x = 0$ y en $x = 15$.

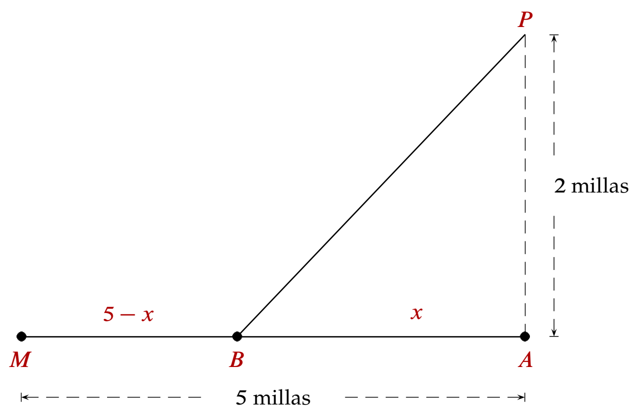
$$C(x = 0) = 3\sqrt{400} + 2(15) = 3(20) + 30 = 90\,;$$
$$C(x = 15) = 3\sqrt{225 + 400} + 2(0) = 3\sqrt{625} = 3(25) = 75\,.$$

Por lo tanto, el costo mínimo de la construcción del oleoducto es de 75 000 000 de dólares y se obtiene cuando todo el oleoducto es submarino y sale a la playa precisamente donde están los tanques de almacenamiento.
Notamos además que en $[0, 15]$ la función $C(x)$ es decreciente, ya que $C'(x) < 0$ si $0 \leq x < \sqrt{320} \approx 17.889$.

□

Ejemplo 10.1.10 *En un concurso de resistencia, los participantes están* 2 *millas mar adentro y tienen que llegar a un sitio en la orilla (tierra firme) que está a* 5 *millas al oeste (la orilla va de este a oeste). Suponiendo que un concursante puede nadar* 4 *millas por hora y correr* 10 *millas por hora, ¿hacia qué punto de la orilla debe nadar para minimizar el tiempo total de recorrido?*

▼ Usamos la figura siguiente:



Sean P el punto de partida, A el punto de la playa más cercano a P, M la meta y B el punto de la playa donde el concursante sale del mar.
Es decir: $\overline{PA} = 2$ millas, $\overline{MA} = 5$ millas, $\overline{PB}$ es el recorrido nadando y $\overline{BM}$ es el recorrido corriendo por la playa.
Si suponemos que B está a x millas de A, entonces

$$\overline{BA} = x \Rightarrow \overline{MB} = 5 - x \;\&\; \overline{BP} = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AP}^2} = \sqrt{x^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 + 4}.$$

Si el concursante nada $\overline{PB} = \sqrt{x^2 + 4}$ millas a razón de 4 millas por hora, entonces el tiempo que tarda nadando es $t_n = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{4}$ horas.
Si el concursante corre $\overline{MB} = 5 - x$ millas a razón de 10 millas por hora, entonces el tiempo que tarda corriendo es $t_c = \dfrac{5 - x}{10}$ horas.
El tiempo total de recorrido del concursante es

$$t = t_n + t_c = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4} + \frac{5 - x}{10}.$$

Es decir,

$$t(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 4)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} - \frac{x}{10} \text{ con } 0 \le x \le 5,$$

que es la función que debemos minimizar.

Derivando y obteniendo los puntos críticos:

$$
\begin{aligned}
t'(x) &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)(x^2+4)^{-1/2}2x - \frac{1}{10} = \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{10};\\
t'(x) = 0 \;\Rightarrow\; & \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{10} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{10} \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow\; 10x = 4\sqrt{x^2+4} \;\Rightarrow\; (10x)^2 = 4^2(x^2+4) \;\Rightarrow\; 100x^2 = 16x^2+64 \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow\; 100x^2 - 16x^2 = 64 \;\Rightarrow\; 84x^2 = 64 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{64}{84} \approx 0.762 \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow\; x \approx \pm\sqrt{0.762} \approx \pm 0.87.
\end{aligned}
$$

Entonces $t(x)$ tiene un punto crítico en $x \approx 0.87$ millas.

Ya que $t''(x) = \dfrac{1}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$, entonces $t''(x) > 0$ para cada x. En particular $t''(0.87) > 0$ por lo que $tx)$ es mínimo cuando $x = 0.87$ millas.
A manera de ejemplo valuamos $t(x)$ en $x = 0.87$, $x = 0$ & $x = 5$, para comparar los tiempos obtenidos.

$$
\begin{aligned}
t(x) &= \frac{\sqrt{x^2+4}}{4} + \frac{5-x}{10};\\
t(0.87) &= \frac{\sqrt{(0.87)^2+4}}{4} + \frac{5-0.87}{10} \approx 0.958 \text{ hora};\\
t(0) &= \frac{\sqrt{0^2+4}}{4} + \frac{5-0}{10} = 1 \text{ hora};\\
t(5) &= \frac{\sqrt{5^2+4}}{4} + \frac{5-5}{10} \approx 1.34629 \text{ h}.
\end{aligned}
$$

Luego el tiempo mínimo es 0.958 de hora, esto es 57 min 29.727 s.

□

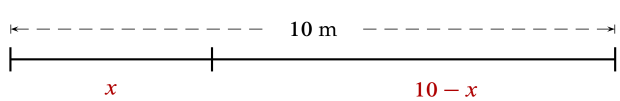
Ejemplo 10.1.11 *Un trozo de alambre de 10 m de largo se corta en dos partes. Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. Hallar cómo debe cortarse el alambre de modo que el área encerrada sea:*

1. *Máxima.*

2. *Mínima.*

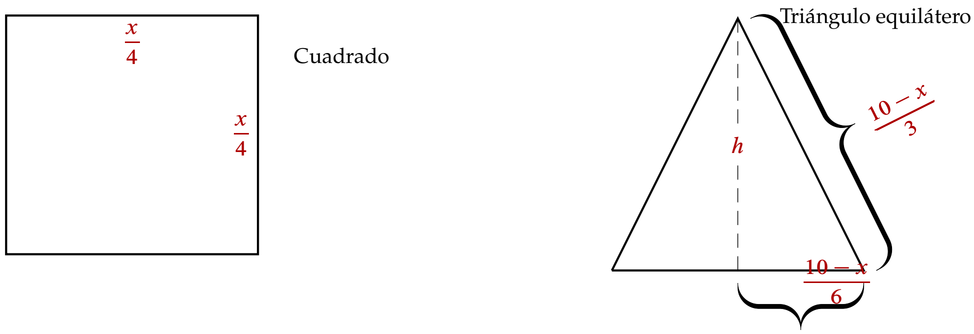
Interpretar prácticamente los resultados.

▼ Usando la siguiente figura



Alambre

La parte x del alambre se usa para el cuadrado, por lo tanto cada lado tiene longitud $\dfrac{x}{4}$.
La parte $10 - x$ del alambre se usa para el triángulo equilátero, por lo tanto cada lado tiene longitud $\dfrac{10-x}{3}$.



De la figura del triángulo, usando el teorema de Pitágoras, obtenemos la siguiente relación:

$$h^2 + \left(\frac{10-x}{6}\right)^2 = \left(\frac{10-x}{3}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{1}{9}(10-x)^2 - \frac{1}{36}(10-x)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h^2 = \frac{3}{36}(10-x)^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{6}(10-x).$$

El área del cuadrado es

$$A_C(x) = \frac{x^2}{16}.$$

El área del triángulo es

$$A_T(x) = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}(10-x) \times \frac{\sqrt{3}}{6}(10-x) = \frac{\sqrt{3}}{36}(10-x)^2.$$

El área de ambas figuras es

$$A(x) = A_T(x) + A_C(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}(10-x)^2 + \frac{x^2}{16}.$$

Ésta es la función a la cual deseamos calcular sus máximo y mínimo.

Nótese que el dominio de esta función es $D_A = [0, 10]$ (la longitud del alambre es de 10 m).

Calculamos la primera derivada:

$$A'(x) = \frac{1}{8}x + \frac{\sqrt{3}}{36} \times 2(10-x)(-1) = \frac{1}{8}x - \frac{\sqrt{3}}{18}(10-x) =$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{5\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{18}x = \frac{9+4\sqrt{3}}{72}x - \frac{5\sqrt{3}}{9}.$$

Calculamos el punto crítico:

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{9+4\sqrt{3}}{72}x - \frac{5\sqrt{3}}{9} = 0 \Rightarrow x = \frac{72(5\sqrt{3})}{9(9+4\sqrt{3})} = \frac{40\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} \approx 4.34965.$$

Puesto que al calcular la segunda derivada obtenemos:

$$A''(x) = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{72} > 0,$$

entonces el punto crítico anterior es un mínimo local.
Calculamos la función $A(x)$ en los extremos de su dominio:

$$A(0) = \frac{\sqrt{3}}{36}100 \approx 4.81125 \text{ y } A(10) = \frac{100}{16} = 6.25.$$

Vemos entonces que la máxima área encerrada es cuando $x = 10$, es decir, cuando sólo se construye el cuadrado.
Y la mínima área encerrada es cuando $x = 4.34965$, caso en el que se construyen ambas figuras.

□

Ejemplo 10.1.12 *Determinar las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio R.*

▼ Consideramos un cilindro recto con base circular de radio r y altura h (inscrito en una esfera). Suponiendo (imaginando) que tanto la esfera como el cilindro son transparentes y que sólo sus contornos se ven, esto es, si consideramos una sección transversal del cuerpo, la figura representativa de ellos es la misma que se tiene para una circunferencia de radio R y un rectángulo inscrito en ella de base $2r$ y altura h.

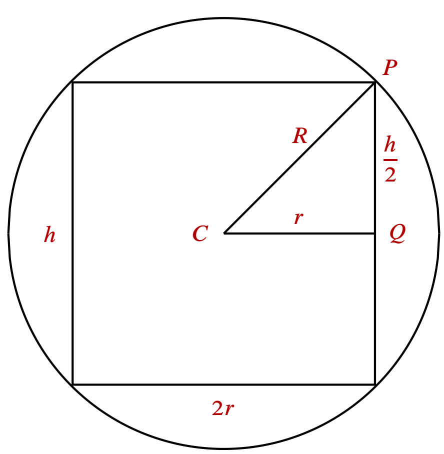
El volumen del cilindro es

$$V = \pi r^2 h$$

que es una función de dos variables (r y h).
En el triángulo rectángulo CQP (por el teorema de Pitágoras) obtenemos

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

que es una ecuación representativa de una restricción, (la esfera es de radio R).



Tenemos pues una función:

$$V = \pi r^2 h$$

y por el teorema de Pitágoras obtenemos la ecuación:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 .$$

De la ecuación despejaremos una de las variables para luego sustituirla en la función.
¿Cuál variable se despeja? La que más convenga.
En este caso conviene despejar r^2, a saber:

$$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} .$$

Sustituyendo en la función:

$$V = \pi r^2 h = \pi(R^2 - \frac{h^2}{4})h = \pi(R^2 h - \frac{1}{4}h^3) .$$

Así tenemos (R es una constante):

$$V(h) = \pi \left(R^2 h - \frac{1}{4}h^3\right) ;$$

que es la función a maximizar. Derivando para obtener puntos críticos:

$$\begin{aligned}
&V'(h) = \pi(R^2 - \frac{3}{4}h^2) ;\\
&V'(h) = 0 \Rightarrow \pi(R^2 - \frac{3}{4}h^2) = 0 \Rightarrow R^2 - \frac{3}{4}h^2 = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}h^2 = R^2 \Rightarrow\\
&\quad \Rightarrow h^2 = \frac{4}{3}R^2 \Rightarrow h = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}R .
\end{aligned}$$

Esto implica que la función $V(h)$ tiene dos puntos críticos, uno para $h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$ y el otro para $h = -\frac{2}{\sqrt{3}}R$. Pero este último $\left(h = -\frac{2}{\sqrt{3}}R\right)$ no tiene significado en el contexto del problema por ser un valor negativo (que daría lugar a una altura negativa).
Por lo tanto veamos qué tipo de punto crítico tiene $V(h)$ para $h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$:

$$\begin{aligned}
V'(h) &= \pi\left(R^2 - \frac{3}{4}h^2\right) = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi h^2 ;\\
V''(h) &= -\frac{3}{2}\pi h < 0, \text{ para cualquier } h > 0 .
\end{aligned}$$

Luego $V(h)$ tiene un máximo local estricto cuando $h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$. Además

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}h^2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}R^2\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}}R .$$

Por lo tanto el volumen del cilindro es máximo cuando

$$h = \frac{2}{\sqrt{3}}R \text{ y } r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R\,.$$

Dicho volumen máximo es

$$V_{max} = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R\right)^2 (\frac{2}{\sqrt{3}}R) = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi R^3\,.$$

Notemos que

$$V(h) = \pi h(R^2 - \frac{1}{4}h^2) \text{ con } 0 \le h \le 2R\,.$$

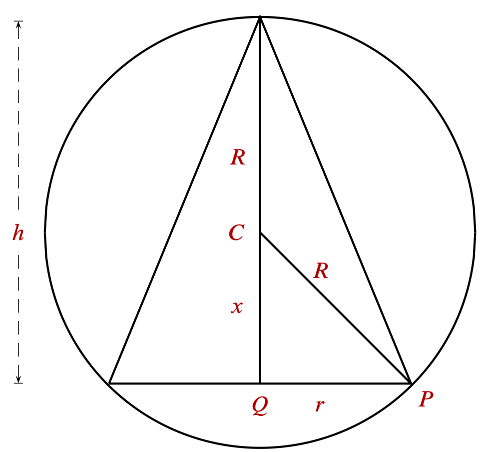
También que $h = 0 \;\Rightarrow\; V(h = 0) = 0$ y además que $h = 2R \;\Rightarrow\; V(h = 2R) = 0$.

□

Ejemplo 10.1.13 *Determinar las dimensiones del cono circular recto de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio R.*

▼ Consideramos una esfera de radio $R > 0$ y un cono que tiene base circular de radio $r > 0$ y altura $h > 0$.

Una sección transversal perpendicular a la base del cono y que pase por su eje se muestra en el croquis siguiente:



El volumen del cono es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

que es una función de dos variables (r & h).
En el triángulo rectángulo CQP, por el teorema de Pitágoras, vemos que $R^2 = x^2 + r^2$ con $x = h - R$, por lo que $R^2 = (h - R)^2 + r^2$, es decir, la ecuación asociada a la restricción en el problema (que la esfera sea de radio R).

Tenemos pues una función :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

y una ecuación:

$$R^2 = (h - R)^2 + r^2 .$$

De la ecuación despejamos (por conveniencia) r^2

$$r^2 = R^2 - (h - R)^2 = R^2 - h^2 + 2hR - R^2 = 2hR - h^2 .$$

Y sustituyendo en la función:

$$V = \frac{1}{3}\pi(2hR - h^2)h .$$

Así tenemos (R es una constante):

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(2Rh^2 - h^3) ,$$

que es la función a maximizar. Derivando para obtener puntos críticos:

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(4Rh - 3h^2) ;$$

$$V'(h) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi(4Rh - 3h^2) = 0 \Rightarrow h(4R - 3h) = 0 \Rightarrow h = 0 \text{ o bien } h = \frac{4}{3}R .$$

Esto implica que la función $V(h)$ tiene dos puntos críticos, uno para $h = 0$ y otro para $h = \frac{4}{3}R$. En el contexto del problema, el caso $h = 0$ queda descartado (ya que el volumen sería $V = 0$). Sólo consideramos el caso en que $h = \frac{4}{3}R$.

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(4Rh - 3h^2) \Rightarrow V''(h) = \frac{1}{3}\pi(4R - 6h) .$$

Así:

$$V''(h = \frac{4}{3}R) = \frac{1}{3}\pi\left[4R - 6\left(\frac{4}{3}R\right)\right] = \frac{1}{3}\pi[4R - 8R] = -\frac{4}{3}\pi R < 0 .$$

Luego $V(h)$ tiene un máximo local estricto cuando $h = \frac{4}{3}R$.

Además,

$$r = \sqrt{R^2 - (h - R)^2} = \sqrt{R^2 - (\frac{4}{3}R - R)^2} \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - \frac{1}{9}R^2} = \frac{\sqrt{8}}{3}R = \frac{2\sqrt{2}}{3}R .$$

Por lo tanto, el volumen del cono es máximo cuando $h = \frac{4}{3}R$ y cuando $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$.
Dicho volumen máximo es:

$$V_{max} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}R\right)^2\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{32}{81}\pi R^3 .$$

Notemos que

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi h^2(2R - h) \text{ con } 0 \le h \le 2R .$$

Además,

$$h = 0 \;\Rightarrow\; V(h = 0) = 0$$

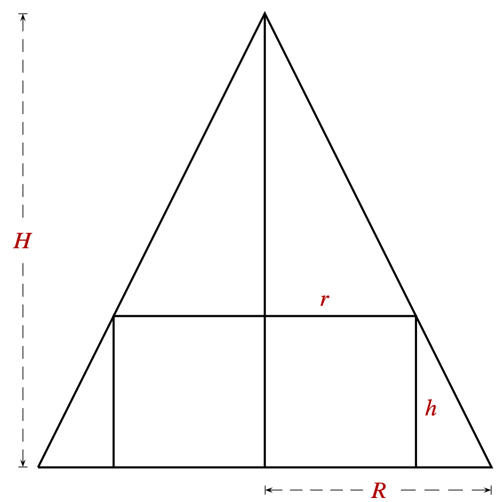
así como

$$h = 2R \;\Rightarrow\; V(h = 2R) = 0\,.$$

□

Ejemplo 10.1.14 *Determinar las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que puede ser inscrito en un cono circular recto de radio R y altura H.*

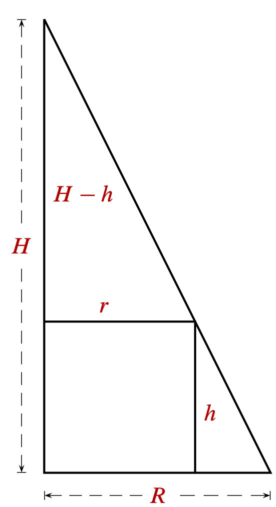
▼ Consideramos que el cilindro tiene radio r y altura h.
Una sección transversal perpendicular a la base del cono y que pase por su eje, se muestra en el croquis siguiente:



El volumen del cilindro es

$$V = \pi r^2 h\,,$$

que es una función de dos variables (r y h).
Para tener una ecuación con las mismas variables r, h veamos los dos triángulos semejantes que hay en la figura.



Por semejanza se cumple la proporción:

$$\frac{R}{H} = \frac{r}{H-h}\,.$$

De donde se obtiene la ecuación: $R(H-h) = rH$, de la cual despejaremos una de las variables para después sustituirla en la función volumen.

Despejaremos r:

$$rH = R(H-h) \Rightarrow r = \frac{R}{H}(H-h)\,;$$

sustituyendo

$$V = \pi r^2 h = \pi\left[\frac{R}{H}(H-h)\right]^2 h = \pi\frac{R^2}{H^2}(H-h)^2 h = \frac{\pi R^2}{H^2}(H^2 - 2Hh + h^2)h\,.$$

Así tenemos:

$$V(h) = \frac{\pi R^2}{H^2}(H^2 h - 2Hh^2 + h^3)\,,$$

que es la función a maximizar. Derivamos para obtener los puntos críticos:

$$V'(h) = \frac{\pi R^2}{H^2}(H^2 - 4Hh + 3h^2) = \frac{\pi R^2}{H^2}(3h^2 - 4Hh + H^2)\,;$$

$$V'(h) = 0 \Rightarrow \frac{\pi R^2}{H^2}\left(3h^2 - 4Hh + H^2\right) = 0 \Rightarrow 3h^2 - 4Hh + H^2 = 0\,.$$

Tenemos que:

$$h = \frac{4H \pm \sqrt{(-4H)^2 - 4(3)H^2}}{2(3)} = \frac{4H \pm \sqrt{16H^2 - 12H^2}}{6} =$$
$$= \frac{4H \pm \sqrt{4H^2}}{6} = \frac{4H \pm 2H}{6}\,.$$

Entonces:

$$h_1 = \frac{4H + 2H}{6} = \frac{6H}{6} = H$$

y

$$h_2 = \frac{4H - 2H}{6} = \frac{2H}{6} = \frac{1}{3}H\,.$$

Luego la función $V(h)$ tiene dos puntos críticos: uno cuando $h = h_1 = H$ y otro cuando $h = h_2 = \frac{1}{3}H$.

$V'(h) = \dfrac{\pi R^2}{H^2}(3h^2 - 4Hh + H^2) \;\Rightarrow\; V''(h) = \dfrac{\pi R^2}{H^2}(6h - 4H).$
Así:

$$V''(h_1) = \frac{\pi R^2}{H^2}(6h_1 - 4H) = \frac{\pi R^2}{H^2}(6H - 4H) = \frac{\pi R^2}{H^2}2H > 0\,;$$

$V''(h_1) > 0 \;\Rightarrow\; V(h)$ tiene un mínimo local estricto para $h_1 = H$.

Además:

$$V''(h_2) = \frac{\pi R^2}{H^2}(6h_2 - 4H) = \frac{\pi R^2}{H^2}\left[6(\frac{1}{3}H) - 4H\right] = \frac{\pi R^2}{H^2}(2H - 4H) = \frac{\pi R^2}{H^2}(-2H) < 0\,;$$

$V''(h_2) = -\dfrac{2\pi R^2}{H} < 0 \;\Rightarrow\; V(h)$ tiene un máximo local estricto para $h_2 = \dfrac{H}{3}$.

Por lo tanto el volumen $V(h)$ es máximo cuando $h = h_2 = \dfrac{1}{3}H$.
¿Qué sucede en los extremos del intervalo $[0, H]$?
$V(h = 0) = 0$ y $V(h = H) = 0$.
Por lo anterior concluimos que dicho volumen máximo es:

$$\begin{aligned} V_{max} &= \frac{\pi R^2}{H^2}\left(H - \frac{1}{3}H\right)^2 \frac{1}{3}H = \\ &= \frac{\pi R^2}{H^2}\left(\frac{2}{3}H\right)^2 \frac{1}{3}H = \\ &= \frac{\pi R^2}{H^2}\frac{4}{9}H^2\frac{1}{3}H = \\ &= \frac{4}{27}\pi R^2 H\,. \end{aligned}$$

Este volumen máximo se obtiene para el cilindro de altura $h_2 = \dfrac{1}{3}H$
y radio

$$r_2 = \frac{R}{H}(H - h_2) = \frac{R}{H}(H - \frac{1}{3}H) = \frac{2}{3}R\,.$$

□

Ejercicios 10.1.1 *Soluciones en la página 28*

1. Hallar dos números positivos cuya suma sea S y cuyo producto sea máximo.
2. Hallar dos números positivos cuyo producto sea P y cuya suma sea mínima.
3. Hallar dos números positivos cuyo producto sea P y la suma del primero más tres veces el segundo sea mínima.
4. Hallar dos números positivos tales que el segundo número sea el inverso multiplicativo del primero y la suma sea mínima.

5. Hallar dos números positivos tales que el primero más n veces el segundo sumen S y el producto sea máximo.

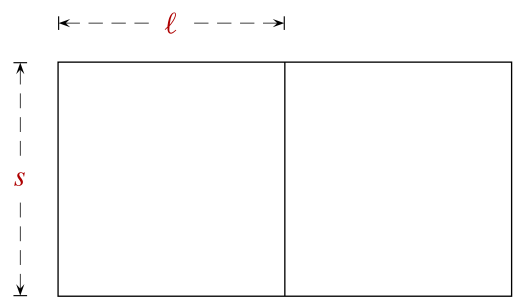
6. La suma de tres números positivos es 30. El primero más el doble del segundo, más el triple del tercero suman 60. Elegir los números de modo que el producto de los tres sea el mayor posible.

7. Un granjero que tiene 24 m de cerca desea encerrar un área rectangular y dividirla en tres corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es el área total máxima posible de los tres corrales?

8. Un granjero que tiene C m de cerca desea encerrar un área rectangular y dividirla en cuatro corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es el área total máxima posible de los cuatro corrales?

9. Un granjero que tiene C m de cerca desea encerrar un área rectangular y dividirla en n corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es el área total máxima posible de los n corrales?

10. Un ranchero quiere bardear dos corrales rectangulares adyacentes idénticos, cada uno de 300 m^2 de área como se muestra en la figura.



¿Cuánto deben medir s & ℓ para que se utilice la mínima cantidad de barda?

11. Un ganadero desea cercar un prado rectangular junto a un río. El prado ha de tener 180 000 m^2 para proporcionar suficiente pasto. ¿Qué dimensiones debe tener el prado para que requiera la menor cantidad de cerca posible, teniendo en cuenta que no hay que cercar en el lado que da al río?

12. Un terreno rectangular está delimitado por un río en un lado y por una cerca eléctrica de un solo cable en los otros tres lados.

    ¿Cuáles son las dimensiones del terreno que nos dan el área máxima?

    ¿Cuál es la mayor área que pueda cercarse con un cable de 800 m?

13. Se desea hacer una caja abierta con una pieza cuadrada de material de 12 cm de lado, cortando cuadritos iguales de cada esquina. Hallar el máximo volumen que puede lograrse con una caja así.

14. Se va a construir una caja con la parte superior abierta a partir de un trozo cuadrado de cartón que tiene L metros de lado, recortando un cuadrado en cada una de las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. Encuentre el volumen más grande que puede tener la caja.

15. Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un círculo de radio r.

16. Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de V cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

17. Una caja con base y tapa cuadradas debe tener un volumen de 50 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

18. Una caja con base y tapa cuadradas debe tener un volumen de V cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

19. Se quiere construir una cisterna con base rectangular y sin tapa, de manera tal que el ancho de la base sea el doble de la altura de la cisterna. Calcular las dimensiones que debe tener la cisterna para que el volumen sea de 20 m^3 y se requiera la mínima cantidad de material en su construcción.

20. Un recipiente rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener un volumen de V m^3. El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta B pesos el metro cuadrado. El material para los costados cuesta L pesos el metro cuadrado. Encuentre las dimensiones para tener el más barato de esos recipientes.

21. Si se cuenta con 1 000 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

22. Si se cuenta con M cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

23. Si se cuenta con 1 000 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

24. Si se cuenta con M cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

25. Demuestre que, de todos los rectángulos con un área dada, el que tiene el menor perímetro es un cuadrado.

26. Demuestre que de todos los rectángulos con un perímetro dado el que tiene el área máxima es un cuadrado.

27. Un recipiente rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener un volumen de 10 m^3. El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta 3 pesos el metro cuadrado. El material para los costados cuesta 2 pesos el metro cuadrado. Encuentre las dimensiones para tener el más barato de esos recipientes.

28. Halle el punto de la recta $y = -2x + 3$ más cercano al origen.

29. Halle el punto de la recta $y = mx + b$ más cercano al origen.

30. Una ventana normanda tiene forma de un rectángulo rematado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de P m, encuentre las dimensiones de la ventana de modo que se admita la cantidad más grande posible de luz.

31. Una pista de entrenamiento consta de dos semicírculos adosados en los lados opuestos de un rectángulo. Si su perímetro es de P m, hallar las dimensiones que hacen máxima el área de la región rectangular.

32. Un triágulo rectángulo está formado por los semiejes positivos y una recta que pasa por el punto (a, b). Hallar los vértices de modo que su área sea mínima.

33. Se quiere construir un recipiente cilíndrico de base circular con tapa y una capacidad para 600 ℓ. Calcular las dimensiones que debe tener para que se requiera la mínima cantidad de material en su construcción.

    (Considerar que $1\ \ell = 1\ \text{dm}^3$.)

34. Un cilindro circular recto ha de contener V cm^3 de refresco y usar la mínima cantidad posible de material para su construcción. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones?

35. Determine el volumen máximo posible de un cilindro circular recto si el área total de su superficie, incluyendo las dos bases circulares, es de 150π m^2.

36. Dos puntos A, B se encuentran en la orilla de una playa recta, separados 6 km entre sí. Un punto C esta frente a B a 3 km en el mar. Cuesta \$400.00 tender 1 km de tubería en la playa y \$500.00 en el mar. Determine la forma más económica de trazar la tubería desde A hasta C. (No necesariamente debe pasar por B.)

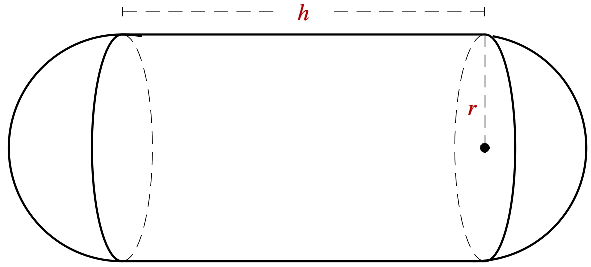
37. Dos barcos salen al mismo tiempo; uno de un muelle, con dirección sur y con velocidad de 20 km/h. El otro parte hacia el muelle desde un punto que se encuentra a 15 km al oeste, a 10 km/h. ¿En qué momento se encuentran más próximos estos dos navíos?

38. A las 13:00 horas un barco A se encuentra 20 millas al sur del barco B y viaja hacia el norte a 15 millas/h. El barco B navega hacia el oeste a 10 millas/h. ¿A qué hora se alcanza la distancia mínima entre las dos embarcaciones?

39. Se va a construir un tanque metálico de almacenamiento con volumen de 10 ℓ en forma de un cilindro circular recto rematado por dos hemisferios (medias esferas). Tomando en cuenta que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y que la superficie es $4\pi r^2$, encontrar las dimensiones del tanque que minimicen la cantidad de metal.

40. Una lata de aceite tiene la forma de un cilindro con fondo plano en la base y una semiesfera en la parte superior. Si esta lata debe contener un volumen de 1 000 pulgadas cúbicas y se desprecia el espesor del material, determine las dimensiones que minimizan la cantidad de material necesario para fabricarla.

41. Se desea construir un tanque de acero con la forma de un cilindro circular recto y semiesferas en los extremos para almacenar gas propano. El costo por pie cuadrado de los extremos es el doble de la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de 10π pies^3?



42. Una página ha de contener 30 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. Hallar las dimensiones de la página que permiten ahorrar más papel.

43. Los costos de la empresa Alfa están dados por la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$, donde x representa miles de artículos vendidos. Se pronostica que los costos serán mínimos si se venden entre 1 700 y 1 800 artículos.

    ¿Es verdadero el pronóstico? Justifique su respuesta.

44. Un hombre se encuentra en un punto A de la orilla de un río rectilíneo de 2 km de ancho. Sea C el punto enfrente de A en la otra orilla. El hombre desea llegar a un punto B situado a 8 km a la derecha y en la misma orilla de C.

    El hombre puede remar en su bote cruzando el río hasta el punto D entre B y C. Si rema a 6 km/h y corre a 8 km/h ¿a qué distancia debe estar D del punto C, para llegar al punto B lo más pronto posible?

45. La suma del perímetro de un círculo y un cuadrado es de 16 cm. Hallar las dimensiones de las dos figuras que hacen mínima el área total encerrada por ambas figuras.

Soluciones

Soluciones a los ejercicios del capt'ítulo 10

Ejercicios 10.1.1 *Optimización, página 23*

1. $x = \dfrac{S}{2}$ & $y = \dfrac{S}{2}$.
2. $x = \sqrt{P}$ & $y = \dfrac{P}{\sqrt{P}} = \sqrt{P}$.
3. $x = \sqrt{3P}$ & $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{3P}$.
4. $x = 1$ & $y = 1$.
5. $x = \dfrac{S}{2}$ & $y = \dfrac{S}{2n}$.
6. $x = y = z = 10$.
7. $A = 18$ para $x = 3$ & $y = 6$.
8. $A = \dfrac{C^2}{40}$ para $x = \dfrac{C}{10}$ & $y = \dfrac{5}{2}\dfrac{C}{10}$.
9. $A = \dfrac{C^2}{8(n+1)}$ m^2 para $x = \dfrac{C}{2(n+1)}$ & $y = \dfrac{C}{4}$.
10. $s = 20$ & $l = 15$ m.
11. $x = 300$ m & $y = 600$ m.
12. $y = 200$; $x = 2y = 400$ & $A = 80\,000$.
13. Volumen máximo: $V(3) = 108$ cm^3.
14. $V\left(\dfrac{L}{6}\right) = \dfrac{2}{27}L^3$.
15. $x = \dfrac{2}{\sqrt{2}}r = y$.
16. $x = \sqrt[3]{2V}$ & $y = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.
17. $x = \sqrt[3]{50}$ & $y = \sqrt[3]{50}$.
18. $x = \sqrt[3]{V}$ & $y = \sqrt[3]{V}$.
19. Base cuadrada de lado $2 \times 5^{\frac{1}{3}}$ y con altura $5^{\frac{1}{3}}$.
20. $x = \sqrt[3]{\dfrac{3LV}{4B}}$ & $y = \dfrac{2}{3}\dfrac{B}{L}\left(\dfrac{3LV}{4B}\right)^{\frac{1}{3}}$.
21. $V = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1\,000}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ para

    $x = \sqrt{\dfrac{1\,000}{3}}$ & $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1\,000}{3}}$.
22. $V = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$.
23. $V = \dfrac{500}{3}\sqrt{\dfrac{500}{3}}$.
24. $V = \dfrac{M}{6}\sqrt{\dfrac{M}{6}}$.
25. $y = \sqrt{A} = x$.
26. $y = \dfrac{P}{4} = x$.
27. $y = \sqrt[3]{5} = x$.
28. $\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$.
29. $\left(-\dfrac{bm}{1+m^2}, \dfrac{b}{1+m^2}\right)$.
30. $x = \dfrac{2P}{4+\pi}$; $y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2P}{4+\pi}\right)$.
31. $y = \dfrac{P}{2\pi}$ & $x = \dfrac{\pi}{2}y = \dfrac{P}{4}$.
32. $x = 2a$ & $y = 2b$.
33. $r = \sqrt{\dfrac{300}{\pi}}$ & $h = 2r$.
34. $r = \left(\dfrac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$; $h = 2\left(\dfrac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2r$.
35. $V = 250\pi$ m^3.
36. El costo es 3 300 pesos.
37. $t = \dfrac{3}{10}$ h.

38. $13 + \dfrac{12}{13}$ h.

39. $r = 1.3365$ & $l = 0$.

40. $r \approx 5.75882$ & $h = r$.

41. $r \approx 1.233$ & $h \approx 4.932$.

42. $x = \sqrt{15}$ & $y = 2x$.

43. Es verdadero, pues el costo es mínimo cuando se venden 1 732.058 artículos.

44. A 2.27 km de C.

45. $x = \dfrac{16}{\pi + 4}$ & $r = \dfrac{8}{\pi + 4} = \dfrac{1}{2}x$.

En el siguiente material se desarrollan los contenidos teóricos correspondientes a la parte de la unidad II de Análisis Matemático I que se evalúa en el primer parcial, pretendiendo proporcionar una guía del nivel exigido en las evaluaciones y unificar la variada nomenclatura existente en los diversos libros.

Definición

Sean P y f funciones definidas en un conjunto $A \subseteq dom\, f \cap dom\, P$

P es **una** primitiva de f en A sí y solo si $P'(x) = f(x) \forall x \in A$.

Ejemplo1

$P(x) = x + sen(x)$ es una **primitiva** de $f(x) = 1 + \cos(x)$, pues $(x + sen(x))' = 1 + \cos(x)$

$Q(x) = x + sen(x) + \pi$ es otra **primitiva** de $f(x) = 1 + \cos(x)$, pues $\left(x + sen(x) + \pi\right)' = 1 + \cos(x)$

$P(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ es una **primitiva** de $f(x) = \sqrt{x}$ pues $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Decimos **una primitiva** y no "la" primitiva de f porque si P es una primitiva de f también lo es $P + C$ para cualquier constante C .

Ya hemos visto, por la segunda consecuencia de Lagrange, que si dos funciones tienen la misma derivada en un conjunto, entonces difieren en una constante. Esto equivale a decir que todas las primitivas de una función difieren en una constante.

Llamaremos **integral indefinida de** f al conjunto de **todas** la primitivas que tiene la función f y lo denotaremos

$\int f(x)\,dx = P(x) + C$ en donde:

f es una función de variable x, P es una primitiva cualquiera, y $\int f(x)\,dx = P(x) + C$ es la Integral Indefinida de f .

Usando las reglas básicas de derivación, podemos establecer:

$$\int 1\,dx = x + C$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$$

Podemos afirmar que $\int x^m\,dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C$ si $m + 1 \neq 0$

Pues $\left(\dfrac{x^{m+1}}{m+1}+C\right)' = x^m$

En particular si $m+1=0$, es decir $m=-1$,

$$\underset{dom\ f=R-\{0\}}{\int \dfrac{1}{x}\, dx} = \underset{dom\ f=R-\{0\}}{\ln|x|} + C$$

El valor absoluto es necesario porque si no se aclara lo contrario, en la notación $\int f(x)\,dx = P(x)+C$, se supone que el conjunto A, del cual hace mención la definición, es el $Dom\ f$.

Si consideramos

$\underset{dom\ f=R-\{0\}}{\int \dfrac{1}{x}\, dx} = \underset{dom\ f=(0,\infty)}{\ln(x)} + C$ **no se cumpliría** la definición de primitiva, pues debe ser $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$ para todo valor distinto de cero y vemos, que para los valores menores que cero una función existe y la otra no, se debe buscar una primitiva que tenga el mismo dominio de f .

Importante:

$\int x\ sen(x)\,dx \neq \dfrac{x^2}{2}\cos(x)+C$ porque $\left(\dfrac{x^2}{2}\cos(x)+\mathrm{C}\right)' \neq x sen(x)$

La derivada de un producto no es el producto de las derivadas.

Propiedades de la Integración Indefinida

$$\int [f(x)+g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx + \int \mathrm{g}(x)\ dx$$
$$\int k\ f(x)\ dx = k\int f(x)\ dx$$

Se puede generalizar a la suma algebraica de un número finito de funciones.

Estas dos propiedades se conocen como propiedad de linealidad de la integración

Resumiendo entonces y basándonos en la definición de primitiva tenemos la **"Tabla de integrales inmediatas"** confeccionada a partir de la tabla de derivadas:

$$\int 1dx = x + C$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2}+C$$

$$\int x^m\ dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}+C \quad \text{si } m+1\neq 0$$

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\, dx = e^x + C$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad a > 0; a \neq 1$$

$$\int sen(x)\, dx = -cos(x) + C$$

$$\int \cos(x)\, dx = sen(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = \int \sec^2(x) = \int \left(1 + tg^2(x)\right) dx = tg(x) + C$$

$$\int \frac{1}{sen^2(x)}\, dx = \int \operatorname{cosec}^2(x) = -ctg(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = artg(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = arsen(x) + C = -ar\cos(x) + C$$

Método de Integración Semi-Inmediata

De denomina así, a las integrales que se pueden resolver usando las propiedades de la integración indefinida.

Ejemplos.

$$\int \frac{3x^2 + 2\sqrt[3]{x} + 1}{x}\, dx = \int [\frac{3x^2}{x} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{x} + \frac{1}{x}] dx = \int 3x\, dx + \int 2x^{\frac{-2}{3}}\, dx + \int \frac{1}{x} dx = 3\int x\, dx + 2\int x^{\frac{-2}{3}}\, dx + \int \frac{1}{x} dx =$$

Aplicando los resultados de nuestra "tabla" elemental

$$3\int x\, dx + 2\int x^{\frac{-2}{3}}\, dx + \int \frac{1}{x} dx = 3\frac{x^2}{2} + \frac{2}{1/3} x^{\frac{1}{3}} + \ln|x| + C = \frac{3}{2}x^2 + 6\sqrt[3]{x} + \ln|x| + C$$

Lamentablemente mediante este procedimiento no podemos integrar cualquier función. Lo común es que las funciones a integrar sean producto de otras funciones o funciones compuestas, por lo que debemos avanzar en el estudio de otros métodos de integración, que básicamente consisten en transformar la integral indefinida en alguna integral inmediata o semi-inmediata conocida.

Método de Integración por sustitución directa.

Si el integrando puede expresarse de la siguiente forma

$\int h(g(x))\, g'(x)\, dx$ entonces solo debemos encontrar una primitiva de la función h y valuarla en g .

Consideremos H una primitiva de h, esto significa que $H'(x) = h(x)$, y en particular

$H'(g(x)) = h(g(x))g'(x)$ que es nuestro integrando.

Veamos algunos ejemplos:

$$\int \underbrace{\underbrace{sen(x^2+1)}_{g(x)}}_{h(g(x))} \underbrace{2x}_{g'(x)}\ dx = -\underbrace{cos(x^2+1)}_{H(g(x))} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,dx = \int \sqrt{\ln(x)}\ \frac{1}{x}\,dx = \frac{2}{3}\left(\ln(x)\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Podemos aplicar este método aun en aquellos casos no aparezca exactamente la derivada de la función g , pudiendo diferir en algún factor constante.

Por ejemplo

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,2x\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C = \ln\sqrt{\left(x^2+1\right)} + C$$

Podemos aplicar este método de forma más" mecánica", haciendo un cambio de variable, siempre y cuando reemplacemos los diferenciales. Hemos definido el diferencial de una función $u = f(x)$ como $du = f'(x)\,dx$. Veamos cómo aplicar esto en los ejemplos anteriores.

$$\int sen\left(x^2+1\right)\,2x\,dx$$

Si llamamos $u = \left(x^2+1\right)$ entonces $du = 2x\,dx$ y reemplazando en la integral tenemos

$$\int sen\left(x^2+1\right)\,2x\,dx = \int sen(u)\ du = -\cos(u) + \mathrm{C} = -\cos\left(x^2+1\right) + \mathrm{C}$$

La sustitución fue efectiva porque al hacerla, el problema queda en la variable u y se transforma en una integral inmediata.

El segundo ejemplo,

$$\int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,dx = \int \sqrt{\ln(x)}\ \frac{1}{x}\,dx = \frac{2}{3}\left(\ln(x)\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

puede resolverse llamando $u = \ln(x)$ entonces $du = \frac{1}{x}dx$

$$\int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,dx = \int \sqrt{u}\ du = \frac{2}{3}(u)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\left(\ln(x)\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

En el último ejemplo designamos $u = \left(x^2+1\right)$ entonces $du = 2x\ dx$, de donde podemos ver que $\frac{du}{2x} = dx$

Entonces

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,x\,dx = \int \frac{1}{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln(u) + \mathrm{C} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C = \ln\sqrt{\left(x^2+1\right)} + C$$

Por último resolvamos

$$\int tg(x)\,dx = \int \frac{sen(x)}{\cos(x)}\,dx$$

Llamaremos $u = \cos(x)$ entonces $du = -sen(x)dx$

$$\int tg(x)\,dx = \int \frac{(-1)}{u}\,du = -\ln|u| + C = \ln\left|\frac{1}{u}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\cos(x)}\right| + C = \ln\left|\sec(x)\right| + C$$

Método de integración por partes

El método de integración por sustitución permite calcular la integral indefinida de integrandos que puedan expresarse de la forma $\int h(g(x))\,g'(x)\,dx$, pero hay ciertos productos que no cumplen esta condición.

Para integrar expresiones de la forma $\int f(x)\,g(x)\,dx$, debemos recordar que la integral indefinida de un producto de funciones **NO** es el producto de las integrales indefinidas (la derivada del producto funciones no es el producto de sus derivadas).
Algunos casos de integración del producto de funciones se pueden resolver mediante el método de integración por partes. Este procedimiento se basa en la fórmula de la derivada de un producto de funciones:

$$(fg)' = f'g - g'f$$

Si integramos miembro a miembro

$$\int (fg)' = \int [f'g - g'f] = \int (f'g) - \int (g'f) \quad \text{de donde}$$

$$\int (fg)' = \int (f'g) - \int (g'f)$$

Como $\int (fg)' = fg$ resulta

$fg = \int (f'g) - \int (g'f)$ que podemos escribir de la forma:

$$\boxed{\int (f'g) = fg - \int (g'f)}$$

Utilicemos esta fórmula en los siguientes ejemplos:

Si tenemos que resolver $\int x e^x dx$, debemos pensar que uno de los factores del integrando es f' y el otro es g. Tenemos dos opciones:

Supongamos primero que

$f'(x) = e^x$ $\quad\quad$ $f(x) = e^x$

$g(x) = x$ $\quad\quad$ $g'(x) = 1$

Entonces si aplicamos la fórmula resulta:

$$\int x e^x dx = xe^x - \int 1x\, dx = xe^x - x + C$$

Pero también podríamos haber seleccionado al revés, y en ese caso

$f'(x) = x$ $\quad\quad$ $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$

$g(x) = e^x$ $\quad\quad$ $g'(x) = e^x$

$$\int x e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x\, dx$$

Notemos que la integral del segundo miembro es más complicada que la original!!

Esto quiere decir que el método propone un "cambio" de la integral a calcular y esta puede ser más fácil, igual o más complicada que el problema original.
En general, en caso de ser posible, hay que evitar llamar f' a los polinomios, porque cuando buscamos una primitiva, esta resulta de un grado mayor, en el siguiente ejemplo, no tenemos más opción que hacer esa elección.

Consideremos $\int \ln(x)\, dx$

Podríamos pensar que aquí no hay un producto, pero $\int \ln(x)\, dx = \int 1.\ln(x)\, dx$ entonces podemos seleccionar

$f'(x) = 1$ $\quad\quad$ $f(x) = x$

$g(x) = \ln(x)$ $\quad\quad$ $g'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\int 1.\ln(x)\, dx = x\ \ln(x) - \int x\ \frac{1}{x}\ dx = x\ln(x) - \int 1\ dx = \ln(x) - x + C$$

Notemos que aquí la otra elección no es posible, pues si elijo que $f'(x) = \ln(x)$ no sabría decir quien es f ….(**justamente es el problema original**)

Esto significa que a veces cualquiera de las dos opciones son válidas y otras no.

El método puede aplicarse varias veces

$\int e^x \cos(x)\, dx$; aquí es indistinta la elección que hagamos, probemos entonces

$f'(x) = e^x$ $\quad\quad$ $f(x) = e^x$

$g(x) = \cos(x)$ $\quad\quad$ $g'(x) = -sen(x)$

$$\int e^x \cos(x)\, dx = -e^x\, sen(x) - \int e^x\left(-sen(x)\right)dx = -e^x\, sen(x) + \int e^x sen(x)\, dx$$

Ciertamente no avanzamos mucho, la integral del segundo miembro es de la misma complejidad que la original, pero si aplicamos nuevamente el método

$$\int e^x sen(x)\, dx$$

$$f'(x) = e^x \qquad f(x) = e^x$$
$$g(x) = sen(x) \qquad g'(x) = \cos(x)$$

$$\int e^x sen(x)\, dx = e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x)\, dx$$

$$\int e^x \cos(x)\, dx = -e^x\, sen(x) + \int e^x sen(x)\, dx = -e^x\, sen(x) + \underbrace{e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x)\, dx}_{\int e^x sen(x) dx}$$

$$\int e^x \cos(x)\, dx = -e^x\, sen(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x)\, dx$$

Vemos que volvimos al problema original, pero podemos pasar la integral del segundo miembro al primero, ¡¡¡¡¡ya que son iguales!!!!!

$$\int e^x \cos(x)\, dx + \int e^x \cos(x)\, dx = -e^x\, sen(x) + e^x \cos(x)$$

$$2\int e^x \cos(x)\, dx = -e^x\, sen(x) + e^x \cos(x)$$

$$\int e^x \cos(x)\, dx = \frac{e^x \cos(x) - e^x\, sen(x)}{2} + C$$

Si al aplicar este método, volvemos al problema original, podemos proceder de esta manera.

Por ultimo analicemos

$$\int \cos^2(x)\, dx = \int \cos(x)\ \cos(x)\, dx$$

$$f'(x) = \cos(x) \qquad f(x) = sen(x)$$
$$g(x) = \cos(x) \qquad g'(x) = -sen(x)$$

$$\int \cos^2(x)\, dx = sen(x)\cos(x) - \int sen(x)\left(-sen(x)\right)dx = sen(x)\cos(x) + \underbrace{\int sen^2(x)\, dx}_{aplicando\ partes\ nuevamente}$$

$$f'(x) = sen(x) \qquad f(x) = -\cos(x)$$
$$g(x) = sen(x) \qquad g'(x) = \cos(x)$$

$$\int sen^2(x)\, dx = sen(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)\, dx$$

Reemplazando

$$\int \cos^2(x)\, dx = sen(x)\cos(x) + \int sen^2(x)dx = sen(x)\cos(x) - sen(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)\, dx$$

$$\int \cos^2(x)\, dx = sen(x)\cos(x) - sen(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)\, dx$$

y llegamos a que

$0 = 0$, que si bien es una afirmación cierta, no resuelve nuestro problema!!

Cuando pasa esto podemos probar la otra la otra elección de las funciones, y si esto no resulta, significa simplemente que el problema en cuestión no se resuelve por este método. En nuestro ejemplo en particular se resuelve a partir de

$$\int \cos^2(x)\, dx = sen(x)\cos(x) + \int sen^2(x)dx\ ,$$

utilizando la identidad trigonométrica $\cos^2(x) + sen^2(x) = 1$ nos queda

$$\int \cos^2(x)\, dx = sen(x)\cos(x) + \int \left(1 - \cos^2(x)\right)dx = sen(x)\cos(x) + \int 1dx - \int \cos^2(x)dx$$

$$\int \cos^2(x)\, dx + \int \cos^2(x)dx = sen(x)\cos(x) + \int 1dx$$

$$2\int \cos^2(x)\, dx = sen(x)\cos(x) + x + \tilde{C}$$

$$\int \cos^2(x)\, dx = \frac{sen(x)\cos(x) + x}{2} + C$$

Antes de seguir avanzando es conveniente remarcar que si una integral se puede resolver por el método de sustitución, siempre este es preferible a cualquier otro método. Con otros métodos la complejidad algebraica aumenta y no hay garantía de llegar a un resultado.

Integración de Funciones Racionales

Queremos ahora resolver integrales de la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y para aplicar el método **necesariamente** el grado del polinomio numerador debe ser menor que el grado del polinomio denominador. Diremos que la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es una fracción propia cuando se cumple esta condición.

Si esto no ocurre, siempre es posible realizar la división para obtener una fracción propia.

Recordando el algoritmo de la división de polinomios, se desean encontrar los polinomios $C(x)$ y $R(x)$

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$$

Tal que se cumplan dos condiciones

$$\begin{cases} P(x) = C(x)Q(x) + R(x) \\ \text{grado}(R) < \text{grado}(Q) \end{cases}$$

La última condición garantiza la unicidad del resultado de la división.

Entonces si $P(x) = C(x)Q(x) + R(x)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C(x)Q(x) + R(x)}{Q(x)}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C(x)Q(x)}{Q(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \underbrace{\frac{R(x)}{Q(x)}}_{Grad(\text{R})<\text{Grad}(Q)}$$

Retomando entonces nuestro problema para integrar $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, primero hay que verificar que $\frac{P(x)}{Q(x)}$ sea una fracción propia y en caso contrario efectuar la división y escribir $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$.

La integración de este tipo de funciones va a depender del tipo de raíces que tenga el polinomio denominador.

Primer caso: Q tiene raíces reales y distintas

Ejemplo 1

$$\int \frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 6x}\,dx$$

La fracción a integrar es una fracción propia ya que el grado del polinomio numerador es menor que el de el denominador

Nos vamos a preguntar si existen coeficientes a determinar $A\ B$ y C tales que podamos escribir

$$\frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

Si estos coeficientes existen entonces podremos resolver el problema calculando las primitivas del segundo miembro de

$$\int \frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 6x}\,dx = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{(x-2)}dx + \int \frac{C}{(x-3)}\,dx$$

que son casi inmediatas. Para determinar los coeficientes buscados podemos proceder de la siguiente manera:

$$\frac{x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$ (se llama descomposición en fracciones simples)

Es importante volver a insistir que los coeficientes A, B y C existen e igualan ambos miembros; si la fracción del primer miembro es propia, es decir el numerador es de menor grado que el denominador.

$$x+1 = x(x-2)(x-3)\left[\frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}\right]$$

$$x+1 = x(x-2)(x-3)\frac{A}{x} + x(x-2)(x-3)\frac{B}{(x-2)} + x(x-2)(x-3)\frac{C}{(x-3)}$$

Si simplificamos

$$x+1 = (x-2)(x-3)A + x(x-3)B + x(x-2)C$$

Y esta igualdad debe ser cierta para todo x .Podemos asignarle a x tres valores arbitrarios y generar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas A B y C

Pero hay valores de x que nos facilitan notoriamente el problema y son justamente los de las raíces del polinomio Q

$$x+1 = (x-2)(x-3)A + x(x-3)B + x(x-2)C$$

si $x = 2$ “sobrevive” únicamente el segundo término

$$3 = 2(2-3)B$$

$$3 = (-2)B \Rightarrow B = \frac{-3}{2}$$

De igual forma *si* $x = 3$ “sobrevive” únicamente el tercer término

$$4 = 3(3-2)C$$

$$4 = 3C \Rightarrow C = \frac{4}{3}$$

Finalmente si $x = 0$

$$1 = (0-2)(0-3)A$$

$$1 = 6A \Rightarrow A = \frac{1}{6}$$

Y estamos en condiciones de afirmar

$$\int \frac{x+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{6}}{x}dx + \int \frac{\frac{-3}{2}}{(x-2)}dx + \int \frac{\frac{4}{3}}{(x-3)}\,dx$$

$$\int \frac{x+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx = \tfrac{1}{6}\int \frac{1}{x}dx - \tfrac{3}{2}\int \frac{1}{(x-2)}dx + \tfrac{4}{3}\int \frac{1}{(x-3)}\,dx$$

$$\int \frac{x+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx = \tfrac{1}{6}\ln|x| - \tfrac{3}{2}\ln|x-2| + \tfrac{4}{3}\ln|x-3| + C$$

Que aplicando propiedades de logaritmo, puede escribirse

$$\int \frac{x+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx = \ln\left|\frac{x^{\frac{1}{6}}(x-3)^{\frac{4}{3}}}{(x-2)^{\frac{3}{2}}}\right| + C$$

Verifique que

$$\frac{x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{1}{6x} - \frac{3}{2(x-2)} + \frac{4}{3(x-3)}$$

Si la fracción no es propia, encontraríamos los números A, B y C, pero la igualdad no sería cierta.

Si quisiéramos resolver $\int \frac{x}{x^2-25}\,dx$, notemos que el método de sustitución es mucho más simple

Llamamos $u = x^2-25$ entonces $du = 2xdx$

$$\int \frac{x}{x^2-25}\,dx = \int \frac{x}{u}\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \ln\sqrt{u} + C = \ln\sqrt{x^2-25} + C$$

Este último ejemplo es para insistir en el hecho que si la integral puede resolverse por sustitución, hay menos cálculos involucrados y es mucho más simple.

Segundo caso: Q tiene raíces reales múltiples

Lo único que cambia es la forma en que se descompone en fracciones simples

Supongamos querer calcular $\int \frac{x+1}{x^4(x-2)^3(x-3)^2}\,dx$

$$\frac{x+1}{x^4(x-2)^3(x-3)^2} = \frac{A_1}{x^4} + \frac{A_2}{x^3} + \frac{A_3}{x^2} + \frac{A_4}{x^1} + \frac{B_1}{(x-2)^3} + \frac{B_2}{(x-2)^2} + \frac{B_3}{(x-2)^1} + \frac{C_1}{(x-3)^2} + \frac{C_2}{(x-3)^1}$$

Es decir que vamos a tener que calcular tantos coeficientes como grado tenga el polinomio denominador. Es decir que el número de coeficiente a calcular es igual al grado del polinomio denominador.

Veamos a modo de ejemplo como resolver

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\,dx$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B_1}{(x+2)^2} + \frac{B_2}{(x+2)}$$

$$1 = \frac{A}{(x+1)}(x+1)(x+2)^2 + \frac{B_1}{(x+2)^2}(x+1)(x+2)^2 + \frac{B_2}{(x+2)}(x+1)(x+2)^2$$

$$1 = A(x+2)^2 + B_1(x+1) + B_2(x+1)(x+2)$$

$$si\ x=-2 \qquad 1 = B_1(-2+1) \Rightarrow B_1 = -1$$

$$si\ x=-1 \qquad 1 = A(-1+2)^2 \Rightarrow A = 1$$

Y ahora, se nos acabaron las raíces, pero podemos reemplazar los valores calculados y darle cualquier otro valor a *x*, para calcular B_2

$$1 = 1(x+2)^2 - 1(x+1) + B_2(x+1)(x+2)$$

Entonces si $x=0$ $\qquad 1 = 1(0+2)^2 - 1(0+1) + B_2(0+1)(0+2)$

$$1 = 4 - 1 + B_2 2$$

$$1 = 3 + B_2 2 \Rightarrow -2 = 2B_2 \Rightarrow B_2 = -1$$

Resultando

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+2)}$$

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)}\,dx - \int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x+2)}\,dx = \ln|x+1| + \frac{1}{(x+2)} - \ln|x+2| + C$$

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + \frac{1}{(x+2)} + C$$

Tercer caso: Q tiene raíces complejas simples

Consideremos antes un caso sencillo que podemos resolver por sustitución

<u>Ejemplo 1</u>

$$\int \frac{1}{x^2+9}dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\frac{x^2}{9}+1}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx$$

Si llamamos $u=\frac{x}{3}$ $\quad du=\frac{1}{3}\,dx \quad dx = 3\,du$

Resulta

$$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{u^2+1}3\,du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = artg(u)+C = artg(\tfrac{x}{3})+C$$

<u>Ejemplo 2</u>

$$\int \frac{1}{x^2+2x+10}\,dx$$

Si calculamos las raíces del denominador resultan ser complejas. Completando cuadrados podemos resolver de manera parecida al ejemplo anterior

$$\int \frac{1}{x^2+2x+8}\,dx = \int \frac{1}{x^2+2x+1-1+8}\,dx = \int \frac{1}{\left(x^2+2x+1\right)-1+8}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+1\right)^2+7}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\left(x+1\right)^2+7}\,dx = \tfrac{1}{7}\int \frac{1}{\frac{\left(x+1\right)^2}{7}+1}\,dx = \tfrac{1}{7}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}\,dx$$

Si llamamos $u=\frac{x+1}{\sqrt{7}}$ $\quad du=\frac{1}{\sqrt{7}}\,dx \quad dx=\sqrt{7}du$

$$\frac{1}{7}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{7}\int \frac{1}{u^2+1}\sqrt{7}du = \frac{\sqrt{7}}{7}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{\sqrt{7}}{7}artg(u)+\mathrm{C} = \frac{\sqrt{7}}{7}artg\left(\frac{x+1}{\sqrt{7}}\right)+\mathrm{C}$$

<u>Ejemplo 3</u>

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+10}\,dx$$

Notemos primero que las raíces del polinomio denominador son complejas y que si llamamos

$u = x^2+2x+10 \qquad du=\left(2x+2\right)dx$

Nuestro numerador se "parece" al du ; no es igual pero "casi" .Procederemos de la siguiente forma

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+10}\,dx = 3\int \frac{x+\frac{2}{3}}{x^2+2x+10}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2\left(x+\frac{2}{3}\right)}{x^2+2x+10}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4/3}{x^2+2x+10}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+4/3}{x^2+2x+10}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2-2+4/3}{x^2+2x+10}\,dx = \frac{3}{2}\int \left(\frac{2x+2}{x^2+2x+10} - \frac{2/3}{x^2+2x+10}\right)dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \underbrace{\frac{2x+2}{x^2+2x+10}}_{se\ resuelve\ por\ sustitucion}\,dx - \frac{3}{2}\int \underbrace{\left(\frac{2/3}{x^2+2x+10}\right)}_{se\ resuleve\ \text{completando}\ cuadrados}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+10\right| - \int\left(\frac{1}{x^2+2x+1-1+10}\right)dx = \ln\sqrt{\left|x^2+2x+10\right|^3} - \int\left(\frac{1}{(x+1)^2+9}\right)dx =$$

$$= \ln\sqrt{\left|x^2+2x+10\right|^3} - \frac{1}{9}\int \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{9}+1}\,dx = \ln\sqrt{\left|x^2+2x+10\right|^3} - \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1}\,dx =$$

Ahora si llamamos $u = \dfrac{x+1}{3}$ $\qquad du = \dfrac{1}{3}dx$

$$= \ln\sqrt{\left|x^2+2x+10\right|^3} - \frac{1}{9}\int \frac{3}{u^2+1}\,du = \ln\sqrt{\left|x^2+2x+10\right|^3} - \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \ln\sqrt{\left|x^2+2x+10\right|^3} - \frac{1}{3}artg(u) + C$$

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+10}\,dx = \ln\sqrt{\left|x^2+2x+10\right|^3} - \frac{1}{3}artg\left(\frac{x+1}{3}\right) + C$$

Veamos por último un caso combinado, en donde debemos descomponer de manera distinta.

Por cada polinomio de segundo grado con raíces complejas hay que proponer en el numerador un polinomio de primer grado de la manera que muestra el siguiente ejemplo:

$$\int \frac{1}{\left(x^2+2x+2\right)(x-3)}\,dx$$

$$\frac{1}{\left(x^2+2x+2\right)(x-3)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{Mx+N}{\left(x^2+2x+2\right)}$$

$$1 = A\left(x^2+2x+2\right) + (Mx+N)(x-3)$$

$$si\ x=3 \qquad 1 = A(9+6+2) + (Mx+N)(3-3) = A\,17 \Rightarrow A = \frac{1}{17}$$

Remplazando el valor calculado de A, y asignándole dos valores arbitrarios a x, podemos calcular los otros dos coeficientes.

$$x=0 \Rightarrow \quad 1=\frac{1}{17}(0+0+2)+(M0+N)(0-3)$$

$$1=\frac{2}{17}-3N \Rightarrow 3N=\frac{2}{17}-1 \Rightarrow 3N=-\frac{15}{17} \Rightarrow N=-\frac{5}{17}$$

$$1=\frac{1}{17}\left(x^2+2x+2\right)+\left(Mx-\frac{5}{17}\right)(x-3)$$

$$\text{si } x=-1 \qquad 1=\frac{1}{17}(1-2+2)+\left(M(-1)-\frac{5}{17}\right)(-1-3)$$

$$1-\frac{1}{17}-\frac{20}{17}=4M \Rightarrow 4M=\frac{17-1-20}{17}=-\frac{4}{17}$$

$$M=-\frac{1}{17}$$

¡¡¡Ya tenemos todos los coeficientes!!!!!

Entonces

$$\frac{1}{\left(x^2+2x+2\right)(x-3)}=\frac{\frac{1}{17}}{(x-3)}+\frac{-\frac{1}{17}x-\frac{5}{17}}{\left(x^2+2x+2\right)}$$

$$\int \frac{1}{\left(x^2+2x+2\right)(x-3)}\,dx=\int \frac{\frac{1}{17}}{(x-3)}\,dx+\int \frac{-\frac{1}{17}x-\frac{5}{17}}{\left(x^2+2x+2\right)}\,dx=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{17}\int \frac{1}{x-3}\,dx}_{\text{integral casi inmediata}}-\frac{1}{17}\underbrace{\int \frac{x+5}{x^2+2x+2}\,dx}_{\text{la resolverermos por sustitucion}}$$

Resolvamos cada una de ellas por separado:

$$\frac{1}{17}\int \frac{1}{x-3}\,dx=\frac{1}{17}\int \frac{1}{u}\,du=\frac{1}{17}\ln|u|+C=\ln\sqrt[17]{u}+C=\ln\sqrt[17]{x-3}+C$$

Veamos ahora $-\frac{1}{17}\int \frac{x+5}{x^2+2x+2}\,dx$

Si llamamos $u=x^2+2x+2 \Rightarrow du=2x+2$. Si bien el numerador del integrando no es igual, se “parece” porque es un polinomio de primer grado, luego vamos a proceder de la siguiente forma:

$$-\frac{1}{17}\int \frac{x+5}{x^2+2x+2}\,dx=$$

$$-\frac{1}{17}\int \frac{x+5}{x^2+2x+2}\,dx=-\frac{1}{17}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2(x+5)}{x^2+2x+2}\,dx=-\frac{1}{34}\int \frac{2x+10}{x^2+2x+2}\,dx=-\frac{1}{34}\int \frac{2x+2-2+10}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$-\frac{1}{34}\int \frac{2x+2-2+10}{x^2+2x+2}\,dx = \underbrace{-\frac{1}{34}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx}_{\text{integral por sustitución}} - \underbrace{\frac{1}{34}\int \frac{-2+10}{x^2+2x+2}\,dx}_{\text{primer caso de raices complejas}}$$

$$-\frac{1}{34}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx = -\frac{1}{34}\ln\left|x^2+2x+2\right| + C = \ln\left|x^2+2x+2\right|^{-\frac{1}{34}} + C$$

$$-\tfrac{1}{34}\int \frac{-2+10}{x^2+2x+2}\,dx = -\tfrac{1}{34}\int \frac{8}{x^2+2x+2}\,dx = \tfrac{-4}{17}\int \frac{1}{x^2+2x+1-1+2}\,dx =$$

$$= \tfrac{-4}{17}\int \frac{1}{\left(x^2+2x+1\right)+1}\,dx = \tfrac{-4}{17}\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \tfrac{-4}{17}\int \frac{1}{(u)^2+1}\,du = \tfrac{-4}{17}\,artg(u) + C = \tfrac{-4}{17}\,artg(x+1) + C$$

En esta última hemos llamado $u = (x+1) \Rightarrow du = dx$

Entonces

$$\int \frac{1}{\left(x^2+2x+2\right)(x-3)}\,dx = \frac{1}{17}\int \frac{1}{x-3}\,dx - \frac{1}{17}\int \frac{x+5}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$= \ln\sqrt[17]{x-3} + \ln\left|x^2+2x+2\right|^{-\frac{1}{34}} - \frac{4}{17}\,artg(x+1) + K$$

Existen numerosos métodos de integración, sólo desarrollaremos en este curso estos métodos elementales. A continuación veremos dos sustituciones útiles a tener en cuenta.

Para resolver integrales en las que aparecen raíces de distinto índice

$\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[2]{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$ lo que se desea es que las raíces "desaparezcan" ; esto se logra llamando $t^6 = x$, es decir hay que elevara a t al mínimo común múltiplo de los índices de raíz.

Si $t^6 = x$ entonces $6\,t^5 dt = dx$; reemplazando

$$\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[2]{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{t+1}{t^3+t^2}\,6t^5 dt = 6\int \frac{t^5(t+1)}{t^2(t+1)}\,dt = 6\int t^3\,dt = 6\,\frac{t^4}{4} + C = \frac{3}{2}\left(\sqrt[6]{x}\right)^4 + C = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + C$$

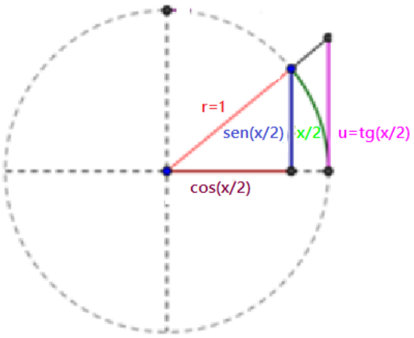
Comentario:

$\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[2]{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[6]{x}+1)}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ …..y esta integral es inmediata, simplificar si se puede, siempre hace que sea más simple …

Integración de funciones racionales de seno y coseno.

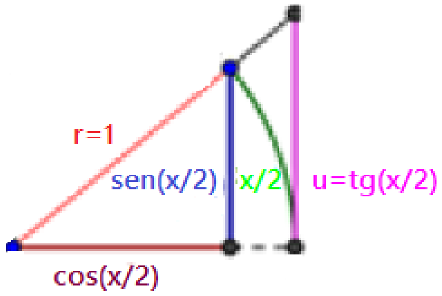
Nuestro objetivo es integrar funciones que son razones de expresiones que contienen $sen(x)$ y $\cos(x)$

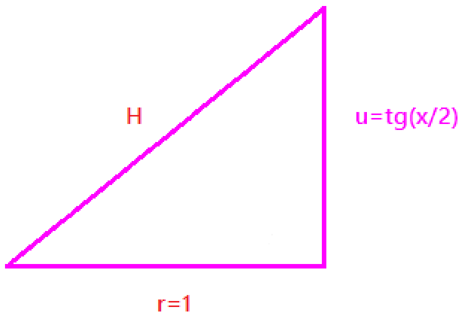
Consideremos el circulo trigonométrico:



Podemos ver en la figura anterior los triángulos semejantes, uno cuyos catetos son $sen(x/2)$ y $\cos(x/2)$ y su hipotenusa es igual a 1, y otro con catetos $r=1$, $u=tg(x/2)$ y de hipotenusa $H=\sqrt{u^2+1}$

Ampliando los triángulos que se ven en la figura anterior, vemos





Usaremos la sustitución

$$\boxed{\begin{array}{l} u = tg(\tfrac{x}{2}) \\ \dfrac{x}{2} = artg(u) \\ x = 2\ artg(u) \end{array}}$$

$$\boxed{dx = 2\ \frac{1}{1+u^2}\, du}$$

Y podemos deducir por semejanza de triángulos

$$\frac{sen(x/2)}{1} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \qquad \text{y} \qquad \frac{\cos(x/2)}{1} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

entonces

$$\boxed{sen(x/2) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}} \ \text{ y } \ \boxed{\cos(x/2) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}}$$

Pero queremos una sustitución para $sen(x)\ y\ \cos\left(x\right)$ Recordando que $sen(2x) = 2\ sen(x)\ \cos(x)$ y que $\cos(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x)$

Llegamos a que $sen(x) = 2\ sen(x/2)\ \cos(x/2) = 2\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \dfrac{2u}{1+u^2}$

y $\cos(x) = \cos^2(x/2) - sen^2(x/2) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2 - \left(\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2 = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$

Entonces las sustituciones a realizar son

$$\boxed{dx = 2\ \frac{1}{1+u^2}\ du}$$

$$\boxed{sen(x) = \frac{2u}{1+u^2}}$$

$$\boxed{\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}}$$

Por ultimo comentemos que esta sustitución, siempre transforma el problema a uno de fracciones simples.

$$\int \frac{1}{3+\cos(x)+2sen(x)}\, dx = \int \frac{1}{3+\frac{1-u^2}{1+u^2}+2\frac{2u}{1+u^2}} 2\,\frac{1}{1+u^2}\; du =$$

$$= \int \frac{1}{3+\frac{1-u^2}{1+u^2}+2\frac{2u}{1+u^2}} 2\,\frac{1}{1+u^2}\; du = \int \frac{2\; du}{3\left(1+u^2\right)+1-u^2+4u} = \int \frac{2\; du}{3+3u^2+1-u^2+4u} =$$

$$= \int \frac{2\; du}{4+2u^2+4u} = \int \frac{du}{u^2+2u+2} = \int \frac{du}{u^2+2u+1+1} = \int \frac{du}{(u+1)^2+1}$$

$$z = u+1$$

$$du = dz$$

$$\int \frac{du}{(u+1)^2+1} = \int \frac{dz}{z^2+1} = artg(z)+\mathrm{C} = artg(\mathrm{u}+1)+\mathrm{C} = artg(tg(x/2)+1)+\mathrm{C}$$

Métodos de integración

Integración directa

De cada regla de derivación se puede deducir una regla correspondiente de integración. La integración directa es aplicable cuando identificamos la función primitiva de forma inmediata; esto es, cuando conocemos la regla de derivación que al aplicarla nos permite hallar el integrando a partir de la función primitiva.

Ejemplo:

$\int 2x\,dx = x^2 + c;\quad \text{porque}\quad D_x(x^2 + c) = 2x$

Propiedades fundamentales de la antidiferenciación	
P1. $\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx,\quad k$ es una constante. Esta propiedad indica que podemos sacar un factor ***constante*** de la integral.	
P2. Si f_1 y f_2 están definidas en el mismo intervalo, entonces: $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$	
P3. Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ están definidas en el mismo intervalo, entonces: $\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x)]dx = k_1\int f_1(x)dx + k_2\int f_2(x)dx + \cdots + k_n\int f_n(x)dx$ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ son constantes.	
P4. Si k es una constante, entonces $\int k\,dx = kx + c$	**P5.** $\int dx = x + c$
P6. Si n es un número racional diferente de -1, entonces $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$. También $\int kx^n dx = \frac{k}{n+1}x^{n+1}$, k es una constante.	
P7. $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c.$	**P8.** $\int e^x dx = e^x + c.$
P9. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$	**P10.** $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c.$ a es un número positivo, $a \neq 1.$
P11. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c.$	**P12.** $\int \cos x\,dx = \sin x + c.$

P13. $\int \sec^2 x dx = \tan x + c.$	**P14.** $\int \csc^2 x dx = -\cot x + c.$
P15. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c.$	**P16.** $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c.$
P17. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c.$	**P18.** $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c.$
P19. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c.$	**P20.** $\int \sinh x dx = \cosh x + c.$
P21. $\int \cosh x dx = \sinh x + c.$	**P22.** $\int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + c.$
P23. $\int \csc h^2 x dx = -\coth x + c.$	**P24.** $\int \sec hx \tanh x dx = -\sec hx + c.$
P25. $\int \csc hx \coth x dx = -\csc hx + c.$	

Ejercicios resueltos

Efectúe las operaciones de antidiferenciación que se indican, aplicando las propiedades correspondientes en cada caso:

1. $\int (3x+4)dx$	**2.** $\int (\cos x - 5\sin x - 7)dx$	**3.** $\int \frac{-8x^4 + 3x^2 + 9}{3x^3} dx$
4. $\int \cot^2 x(1+\tan^2 x)dx$	**5.** $\int \sqrt{x}(x-3)dx$	**6.** $\int 7 - \frac{4}{x^5} + \frac{2}{x^2} dx$
7. $\int \frac{\sec x}{\tan x + \cot x} dx$	**8.** $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx$	**9.** $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx$
10. $\int x^{-2} dx$		

S o l u c i o n e s

1. Solución:

$$\int 3x + 4dx = \int 3xdx + \int 4dx \qquad \{\text{Propiedad } 2\},$$

$$\Rightarrow \quad \int 3x + 4dx = \frac{3}{1+1}x^{1+1} + 4x + c \qquad \{\text{Propiedades } 4 \text{ y } 6\};$$

$$\therefore \quad \int 3x + 4dx = \frac{3}{2}x^2 + 4x + c.$$

2. Solución:

$$\int \cos x - 5\sin x - 7dx = \int \cos x dx - 5\int \sin x dx - 7\int dx \qquad \{\text{Propiedad 3}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \cos x - 5\sin x - 7dx = \sin x - 5(-\cos x) - 7x + c \qquad \{\text{Propiedades 12, 11 y 5}\};$$

$$\therefore \quad \int \cos x - 5\sin x - 7dx = \sin x + 5\cos x - 7x + c.$$

3. Solución:

$$\int \frac{-8x^4 + 3x^2 + 9}{3x^3} dx$$

Efectuando la división, se obtiene

$$\int \frac{-8x^4 + 3x^2 + 9}{3x^3} dx = \int -\frac{8}{3}x + x^{-1} + 3x^{-3} dx = -\frac{8}{3}\int x dx + \int x^{-1} dx + 3\int x^{-3} dx \quad \{\text{Propiedad 3}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{-8x^4 + 3x^2 + 9}{3x^3} dx = -\frac{8}{3} \times \frac{1}{1+1} x^{1+1} + \ln|x| + 3 \times \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c \qquad \{\text{Propiedades 6 y 7}\};$$

$$\therefore \quad \int \frac{-8x^4 + 3x^2 + 9}{3x^3} dx = -\frac{4}{3}x^2 + \ln|x| - \frac{3}{2}x^{-2} + c.$$

4. Solución:

$$\int \cot^2 x(1 + \tan^2 x) dx$$

Simplifiquemos el integrando

$$\cot^2 x(1 + \tan^2 x) = \cot^2 x + \cot^2 x \tan^2 x = \cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

De tal manera que

$$\int \cot^2 x(1 + \tan^2 x) dx = \int \csc^2 x dx;$$

$$\therefore \quad \int \cot^2 x(1 + \tan^2 x) dx = -\cot x + c \qquad \{\text{Propiedad 14}\}.$$

5. Solución:

$$\int \sqrt{x}(x-3) dx = \int x^{1/2}(x-3) dx = \int x^{3/2} - 3x^{1/2} dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \sqrt{x}(x-3) dx = \int x^{3/2} dx - 3\int x^{1/2} dx \qquad \{\text{Propiedad 3}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \sqrt{x}(x-3) dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} - 3\frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + c \qquad \{\text{Propiedad 6}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int \sqrt{x}(x-3) dx = \frac{1}{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}} - 3\frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + c;$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{x}(x-3) dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + c.$$

6. Solución:

$$\int 7-\frac{4}{x^5}+\frac{2}{x^2}dx=\int 7-4x^{-5}+2x^{-2}dx,$$

$$\Rightarrow \int 7-\frac{4}{x^5}+\frac{2}{x^2}dx=\int 7dx-4\int x^{-5}dx+2\int x^{-2}dx \qquad \{\text{Propiedad 3}\},$$

$$\Rightarrow \int 7-\frac{4}{x^5}+\frac{2}{x^2}dx=7x-4\frac{1}{-5+1}x^{-5+1}+2\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+c \qquad \{\text{Propiedades 4 y 6}\},$$

$$\Rightarrow \int 7-\frac{4}{x^5}+\frac{2}{x^2}dx=7x-4\frac{1}{-4}x^{-4}+2\frac{x^{-1}}{-1}+c;$$

$$\therefore \int 7-\frac{4}{x^5}+\frac{2}{x^2}dx=7x+x^{-4}-2x^{-1}+c=7x-2x^{-1}+x^{-4}.$$

7. Solución:

Trabajenos el integrando, con el objeto de simplificarlo:

$$\frac{\sec x}{\tan x+\cot x}=\frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}}=\frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}}=\frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\sin x\cos x}}=\frac{\sin x\cos x}{\cos x}=\sin x$$

De tal manera que

$$\int\frac{\sec x}{\tan x+\cot x}dx=\int\sin x dx;$$

$$\therefore \int\frac{\sec x}{\tan x+\cot x}dx=-\cos x+c \qquad \{\text{Propiedad 11}\}.$$

8. $\int\frac{2}{\sqrt[3]{x}}dx$

Solución:

$$\int\frac{2}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{2}{x^{1/3}}dx=\int 2x^{-1/3}dx=2\int x^{-1/3}dx=2\cdot\frac{3}{2}x^{2/3}+C;$$

$$\therefore \int\frac{2}{\sqrt[3]{x}}dx=3x^{2/3}+C.$$

9. $\int\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx$

Solución:

$$\int\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}dx=\int\tan x\cdot\sec x dx;$$

$$\therefore \int\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx=\sec x+C.$$

10. $\int x^{-2}dx$

Solución:

$$\int x^{-2}dx = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C = \frac{1}{-1}x^{-1} + C = -x^{-1} + C \qquad \{\text{Propiedad6}\}.$$

Integración por partes

La fórmula para la "integración por partes", se deduce a partir de la regla de la derivada de un producto de funciones. Veamos:

Si f y g son funciones diferenciables, entonces

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \{\text{derivada de un producto de funciones}\},$$

$$\Rightarrow \quad f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - g(x)f'(x),$$

$$\Rightarrow \quad \int f(x)g'(x)dx = \int [f(x)g(x)]'dx - \int g(x)f'(x)dx \quad \{\text{Integrando cada término de la ecuación}\},$$

$$\Rightarrow \quad \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx \quad (1)$$

Ahora, si

$$u = f(x) \text{ y } v = g(x),$$

$$\Rightarrow \quad du = f'(x)dx \text{ y } dv = g'(x)dx$$

Al sustituir estos valores en (1), se obtiene la conocida ***fórmula de integración por partes***:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Ejercicios resueltos En los ejercicios siguientes efectúe la integral indefinida:		
1. $\int \ln x dx$	2. $\int xe^{3x}dx$	3. $\int \cos\sqrt{x}dx$
4. $\int xe^{-x}dx$	5. $\int x\sec x\tan x dx$	6. $\int (\ln x)^2 dx$
7. $\int x^2\ln x dx$	8. $\int e^x\cos x dx$	9. $\int \cos^2 x dx$
10. $\int 3x\cos 2x dx$	11. $\int (e^x + 2x)^2 dx$	12. $\int x\,\text{sen}\, x dx$

S o l u c i o n e s

1. Solución:

$$\int \ln x dx$$

Sea

$$u = \ln x, \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = dx, \quad \Rightarrow \quad v = x$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx;$$

$$\therefore \quad \int \ln x dx = x\ln x - x + c.$$

2. Solución:

$$\int xe^{3x}dx$$

Sea

$$u = x, \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = e^{3x}dx, \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{3}e^{3x}$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int xe^{3x}dx = x\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int\frac{1}{3}e^{3x}dx;$$

$$\therefore \quad \int xe^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + c.$$

3. Solución:

$$\int \cos\sqrt{x}\,dx$$

Modifiquemos la forma del integrando por medio de la siguiente sustitución:

Sea $\quad w = \sqrt{x}, \quad \Rightarrow \quad dw = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$$\int \cos\sqrt{x}\,dx = 2\int \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right) = 2\int w\cos w\,dw;$$

$\therefore \quad \int \cos\sqrt{x}\,dx = 2\int w\cos w\,dw \qquad (1)$

Integremos ahora, $\int w\cos w\,dw$:

Sea

$$u = w, \quad \Rightarrow \quad du = dw$$
$$dv = \cos w\,dw, \quad \Rightarrow \quad v = \sin w$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, se obtiene

$$\int w\cos w\,dw = w\sin w - \int \sin w\,dw = w\sin w - (-\cos w + c_2) = w\sin w + \cos w + c_1 \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$\int \cos\sqrt{x}\,dx = 2(w\sin w + \cos w + c_1) = 2w\sin w + 2\cos w + c$$

Pero, como $w = \sqrt{x}$, concluimos que:

$$\int \cos\sqrt{x}\,dx = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + c.$$

4. Solución:

$$\int xe^{-x}dx$$

Sea

$$u = x, \quad \Rightarrow \quad du = dx$$
$$dv = e^{-x}dx, \quad \Rightarrow \quad v = -e^{-x}$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene:

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx;$$

$\therefore \quad \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c.$

5. Solución:

$$\int x \sec x \tan x dx$$

Sea

$$u = x, \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \sec x \tan x dx, \quad \Rightarrow \quad v = \sec x$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int x \sec x \tan x dx = x \sec x - \int \sec x dx;$$

$$\therefore \quad \int x \sec x \tan x dx = x \sec x - \ln |\sec x + \tan x| + c.$$

Nota: para la observar la obtención de $\int \sec x dx$ haga clic en el ícono $\rightarrow$ (Ejercicio 17).

$\boxed{\int \sec x dx}$

6. Solución:

$$\int (\ln x)^2 dx = \int (\ln x)(\ln x) dx$$

Sea

$$u = \ln x, \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \ln x dx, \quad \Rightarrow \quad v = x \ln x - x \qquad \{\text{Ejercicio} 1\}$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int (\ln x)^2 dx = \ln x (x \ln x - x) - \int (x \ln x - x) \frac{1}{x} dx = x(\ln x)^2 - x \ln x - \int (\ln x - 1) dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - x \ln x - \int \ln x dx + \int dx = x(\ln x)^2 - x \ln x - (x \ln x - x) + x + c,$$

$$\Rightarrow \quad \int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - x \ln x - x \ln x + x + x + c$$

$$\therefore \quad \int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + c.$$

7. Solución:

$$\int x^2 \ln x dx$$

Sea

$$u = \ln x, \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x^2 dx, \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{3} x^3$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \int \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \int \frac{1}{3} x^2 dx;$$

$$\therefore \quad \int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c.$$

8. Solución:

$$\int e^x \cos x dx$$

Sea

$$u = \cos x, \quad \Rightarrow \quad du = -\operatorname{sen} x dx$$

$$dv = e^x dx, \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x dx \qquad (1).$$

Ahora, evaluemos la integral en el miembro derecho; sea:

$$u = \operatorname{sen} x, \quad \Rightarrow \quad du = \cos x dx$$

$$dv = e^x dx, \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x dx \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x dx,$$

$$\Rightarrow \quad 2\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x;$$

$$\therefore \quad \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \operatorname{sen} x + c.$$

9. $\int \cos^2 x dx$

Solución:

$$\int \cos^2 x dx = \int \cos x \cos x dx$$

Sea

$$u = \cos x, \quad \Rightarrow du = -\operatorname{sen} x dx$$

$$dv = \cos x dx, \quad v = \operatorname{sen} x$$

De tal manera que:

$$\int \cos^2 x dx = \operatorname{sen} x \cos x + \int \operatorname{sen}^2 x dx = \operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \cos^2 x dx = \operatorname{sen} x \cos x + \int dx - \int \cos^2 x dx,$$

$$\Rightarrow \quad 2\int \cos^2 x dx = \operatorname{sen} x \cos x + x + c_1;$$

$$\therefore \quad \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x + \frac{1}{2} x + c = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2} x + c.$$

10. $\int 3x \cos 2x dx$

Sea

$$u = 3x, \quad \Rightarrow \quad du = 3dx$$

$$dv = \cos 2x dx, \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int 3x \cos 2x dx = \frac{3}{2} x \operatorname{sen} 2x - \int \frac{3}{2} \operatorname{sen} 2x dx;$$

$$\therefore \quad \int 3x \cos 2x dx = \frac{3}{2} x \operatorname{sen} 2x + \frac{3}{4} \cos 2x + c.$$

11. $\int (e^x + 2x)^2 dx$

Solución:

$$\int (e^x + 2x)^2 dx = \int (e^{2x} + 4xe^x + 4x^2)dx = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{4}{3}x^3 + \int 4xe^x dx \quad (1)$$

Vamos a efectuar ahora $\int 4xe^x dx \quad (2)$

Sea

$$u = 4x, \quad \Rightarrow \quad du = 4dx \quad (3)$$

$$dv = e^x dx, \quad \Rightarrow \quad v = e^x \quad (4)$$

De tal manera que, aplicando la fórmula de integración por partes, se obtiene:

$$\int 4xe^x dx = 4xe^x - \int 4e^x dx = 4xe^x - 4e^x + C \quad (5)$$

Finalmente, susutituyendo (5) en (1), se obtiene:

$$\int (e^x + 2x)^2 dx = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{4}{3}x^3 + 4xe^x - 4e^x + C.$$

12. $\int x \operatorname{sen} x dx$

Solución:

Sea

$$u = x, \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x dx, \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int x \operatorname{sen} x dx = -x\cos x + \int \cos x dx;$$

$$\therefore \quad \int x \operatorname{sen} x dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + c.$$

Integración por sustitución

En muchas ocasiones, cuando la integración directa no es tan obvia, es posible resolver la integral simplemente con hacer un cambio de variable adecuado; este procedimiento se conoce como *integración por sustitución*.

Ejercicios resueltos En los siguientes ejercicios realice la integral que se indica:		
1. $\int \sqrt{1-4y}\,dy$	**2.** $\int x^2(x^3-1)^{10} dx$	**3.** $\int (x^2 - 4x + 4)^{4/3} dx$

4. $\int x\sqrt{x+2}dx$	**5.** $\int \sqrt{3-2x}x^2dx$	**6.** $\int \cos 4\theta d\theta$
7. $\int \frac{1}{2}t\sin 4t^2dt$	**8.** $\int \cos x(2+\sin x)^5dx$	**9.** $\int \sqrt{1+\frac{1}{3x}}\frac{dx}{x^2}$
10. $\int 2\sin x\sqrt[3]{1+\cos x}dx$	**11.** $\int \text{sen}^3\theta\cos\theta d\theta$	**12.** $\int \frac{\sec^2 3\sqrt{t}dt}{\sqrt{t}}$
13. $\int \frac{(y+3)dy}{(3-y)^{2/3}}$	**14.** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-2x^2}}$	**15.** $\int \tan xdx$
16. $\int e^{kx}dx$, k es una constante arbitraria	**17.** $\int \sec xdx$	**18.** $\int \cot xdx$
19. $\int \csc xdx$	**20.** $\int \frac{y^3}{(1-2y^4)^5}dx$	**21.** $\int \frac{2rdr}{(1-r)^{2/3}}$
22. $\int \frac{(x^2+2x)dx}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}$	**23.** $\int \frac{y+3}{(3-y)^{2/3}}dy$	**24.** $\int \left(t+\frac{1}{t}\right)^{3/2}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)dt$
25. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$	**26.** $\int \frac{s}{2s+3}ds$	**27.** $y=\int x(x^2+9)^{1/2}dx$
28. $\int (x^2+2)/(x^3+6x-1)dx$	**29.** $\int \left[(3x^2-6)/\sqrt{x^3-6x}\right]dx$	**30.** $\int x^2\,\text{sen}(x^3+4)dx$

S o l u c i o n e s

1. Solución:

$$\int \sqrt{1-4y}dy = \int (1-4y)^{1/2}dy \qquad \text{(Se expresa el integrando en la forma de potencia).}$$

Sea

$$u = 1-4y, \quad \Rightarrow \quad du = -4dy,$$

$$\Rightarrow \qquad dy = -\frac{1}{4}du$$

De tal manera que al hacer la sustitución, queda:

$$\int \sqrt{1-4y}dy = \int u^{1/2}(-\tfrac{1}{4}du) = -\frac{1}{4}\int u^{1/2}du = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}+c_1\right) = -\frac{1}{6}u^{3/2}+c, \quad c = -\frac{1}{4}c_1;$$

$$\therefore \qquad \int \sqrt{1-4y}dy = -\frac{1}{6}(1-4y)^{3/2}+c$$

2. Solución:

$$\int x^2(x^3-1)^{10}dx=\frac{1}{3}\int (x^3-1)^{10}\,3x^2dx$$

Sea

$$u=x^3-1,\quad \Rightarrow\quad du=3x^2dx,$$

De tal manera que al hacer la sustituciones respectivas, queda:

$$\int x^2(x^3-1)^{10}dx=\frac{1}{3}\int u^{10}du=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{11}u^{11}+c_1\right)=\frac{1}{33}u^{11}+c,\quad c=\frac{1}{3}c_1;$$

$$\therefore\qquad \int x^2(x^3-1)^{10}dx=\frac{1}{33}(x^3-1)^{11}+c.$$

3. Solución:

$$\int (x^2-4x+4)^{4/3}dx=\int\left[(x-2)^2\right]^{4/3}dx\qquad \{\text{Se factoriza el } \textit{trinomio cuadrado perfecto}\},$$

$$\Rightarrow\qquad \int (x^2-4x+4)^{4/3}dx=\int (x-2)^{8/3}dx$$

Sea

$$u=x-2,\quad \Rightarrow\quad du=dx,$$

De tal manera que al hacer la sustituciones respectivas, queda:

$$\int (x^2-4x+4)^{4/3}dx=\int u^{8/3}du=\frac{3}{11}u^{11/3}+c;$$

$$\therefore\qquad \int (x^2-4x+4)^{4/3}dx=\frac{3}{11}(x-2)^{11/3}+c.$$

4. Solución:

$$\int x\sqrt{x+1}dx=\int x(x+1)^{1/2}dx$$

Sea

$$u=x+1,\quad \Rightarrow\quad du=dx$$

$$x=u-1$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int x\sqrt{x+1}dx=\int (u-1)u^{1/2}dx=\int u^{3/2}-u^{1/2}dx=\frac{2}{5}u^{5/2}-\frac{2}{3}u^{3/2}+c;$$

$$\therefore\qquad \int x\sqrt{x+1}dx=\frac{2}{5}(x+1)^{5/2}-\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+c.$$

5. Solución:

$$\int \sqrt{3-2x}\,x^2dx = \int (3-2x)^{1/2}x^2dx = -\frac{1}{2}\int (3-2x)^{1/2}x^2(-2dx)$$

Sea

$$u = 3-2x, \quad \Rightarrow \quad du = -2dx$$

$$x = \frac{3-u}{2}, \quad \text{Y} \quad x^2 = \frac{(3-u)^2}{4} = \frac{9-6u+u^2}{4}$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \sqrt{3-2x}\,x^2dx = -\frac{1}{2}\int u^{1/2}\frac{9-6u+u^2}{4}du = -\frac{1}{8}\int 9u^{1/2}-6u^{3/2}+u^{5/2}du$$

$$\Rightarrow \quad \int \sqrt{3-2x}\,x^2dx = -\frac{1}{8}\left(9\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}-6\cdot\frac{2}{5}u^{5/2}+\frac{2}{7}u^{7/2}+c_1\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int \sqrt{3-2x}\,x^2dx = -\frac{3}{4}u^{3/2}+\frac{3}{10}u^{5/2}-\frac{1}{28}u^{7/2}+c;$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{3-2x}\,x^2dx = -\frac{3}{4}(3-2x)^{3/2}+\frac{3}{10}(3-2x)^{5/2}-\frac{1}{28}(3-2x)^{7/2}+c.$$

6. Solución:

$$\int \cos 4\theta d\theta = \frac{1}{4}\int \cos 4\theta(4d\theta)$$

Sea

$$u = 4\theta, \quad \Rightarrow \quad du = 4d\theta$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \cos 4\theta d\theta = \frac{1}{4}\int \cos u du = \frac{1}{4}\sin u + c;$$

$$\therefore \quad \int \cos 4\theta d\theta = \frac{1}{4}\sin 4\theta + c.$$

7. Solución:

$$\int \frac{1}{2}t\sin 4t^2dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\int \sin 4t^2(8tdt) = \frac{1}{16}\int \sin 4t^2(8tdt)$$

Sea

$$u = 4t^2, \quad \Rightarrow \quad du = 8tdt$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \frac{1}{2}t\sin 4t^2dt = \frac{1}{16}\int \sin u du = \frac{1}{16}(-\cos u + c_1) = -\frac{1}{16}\cos u + c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{2}t\sin 4t^2dt = -\frac{1}{16}\cos 4t^2 + c.$$

8. Solución:

$$\int \cos x(2+\sin x)^5 dx = \int (2+\sin x)^5 \cos x dx$$

Sea

$$u = 2+\sin x, \quad \Rightarrow \quad du = \cos x dx$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \cos x(2+\sin x)^5 dx = \int u^5 du = \frac{1}{6}u^6 + c;$$

$$\therefore \qquad \int \cos x(2+\sin x)^5 dx = \frac{1}{6}(2+\sin x)^6 + c.$$

9. Solución:

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{3x}}\frac{dx}{x^2} = \int \left(1+\frac{1}{3x}\right)^{1/2}\frac{dx}{x^2} = -3\int \left(1+\frac{1}{3x}\right)^{1/2}\left(-\frac{dx}{3x^2}\right)$$

Sea

$$u = 1+\frac{1}{3x}, \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{dx}{3x^2}$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{3x}}\frac{dx}{x^2} = -3\int u^{1/2}du = -3\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + c = -2u^{3/2} + c;$$

$$\therefore \qquad \int \sqrt{1+\frac{1}{3x}}\frac{dx}{x^2} = -2\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3/2} + c.$$

10. Solución:

$$\int 2\sin x\sqrt[3]{1+\cos x}dx = -2\int (1+\cos x)^{1/3}(-\sin x dx)$$

Sea

$$u = 1+\cos x, \quad \Rightarrow \quad du = -\sin x dx$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int 2\sin x\sqrt[3]{1+\cos x}dx = -2\int u^{1/3}du = -2\cdot\frac{3}{4}u^{4/3} + c = -\frac{3}{2}u^{4/3} + c;$$

$$\therefore \qquad \int 2\sin x\sqrt[3]{1+\cos x}dx = -\frac{3}{2}(1+\cos x)^{4/3} + c.$$

11. Solución:

$$\int \sin^3\theta\cos\theta d\theta = \int \sin^3\theta\left(\cos\theta d\theta\right)$$

Sea

$$u = \sin\theta, \quad \Rightarrow \quad du = \cos\theta d\theta$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \sin^3\theta\cos\theta d\theta = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + c;$$

$$\therefore \quad \int \sin^3\theta\cos\theta d\theta = \frac{1}{4}\sin^4\theta + c.$$

12. Solución:

$$\int \frac{\sec^2 3\sqrt{t}dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3}\int \sec^2 3\sqrt{t}\left(\frac{3dt}{2\sqrt{t}}\right)$$

Sea

$$u = 3\sqrt{t}, \quad \Rightarrow \quad du = \frac{3dt}{2\sqrt{t}}$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \frac{\sec^2 3\sqrt{t}dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3}\int \sec^2 u du = \frac{2}{3}\tan u + c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{\sec^2 3\sqrt{t}dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3}\tan 3\sqrt{t} + c.$$

13. Solución:

$$\int \frac{(y+3)dy}{(3-y)^{2/3}} = -\int (y+3)(3-y)^{-2/3}\left(-dy\right)$$

Sea

$$u = 3-y, \quad \Rightarrow \quad du = -dy$$

Y $\quad y+3 = 6-u$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \frac{(y+3)dy}{(3-y)^{2/3}} = -\int (6-u)u^{-2/3}du = -\int 6u^{-2/3} - u^{1/3}du = \int u^{1/3} - 6u^{-2/3}du,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{(y+3)dy}{(3-y)^{2/3}} = \frac{3}{4}u^{4/3} - 6\left(3u^{1/3}\right) + c = \frac{3}{4}u^{4/3} - 18u^{1/3} + c$$

$$\therefore \quad \int \frac{(y+3)dy}{(3-y)^{2/3}} = \frac{3}{4}(3-y)^{4/3} - 18(3-y)^{1/3} + c.$$

14. Solución:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-2x^2}} = -\frac{1}{4}\int x^2\left(1-2x^2\right)^{-1/2}\left(-4xdx\right)$$

Sea

$$u = 1-2x^2, \quad \Rightarrow \quad du = -4xdx$$

Y $\quad x^2 = \dfrac{1-u}{2}$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-2x^2}} = -\frac{1}{4}\int \frac{1-u}{2}u^{-1/2}du = -\frac{1}{8}\int u^{-1/2} - u^{1/2}du = -\frac{1}{8}\left(2u^{1/2} - \frac{2}{3}u^{3/2} + c_1\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-2x^2}} = -\frac{1}{4}u^{1/2} + \frac{1}{12}u^{3/2} + c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-2x^2}} = -\frac{1}{4}\left(1-2x^2\right)^{1/2} + \frac{1}{12}\left(1-2x^2\right)^{3/2} + c.$$

15. Solución:

$$\int \tan xdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}(-\sin xdx)$$

Sea

$$u = \cos x, \quad \Rightarrow \quad du = -\sin xdx$$

Al hacer las sustituciones respectivas, se obtiene

$$\int \tan xdx = -\int \frac{1}{u}du = -\ln|u| + c = \ln|u^{-1}| + c = \ln|\cos^{-1}x| + c;$$

$$\therefore \quad \int \tan xdx = \ln|\sec x| + c.$$

16. Solución:

k es una constante arbitraria

$$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}\int e^{kx}kdx$$

Sea

$$u = kx, \quad \Rightarrow \quad du = kdx$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda

$$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}\int e^{u}du = \frac{1}{k}e^{u} + c;$$

$$\therefore \quad \int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + c.$$

17. Solución:

$$\int \sec x dx$$

Primero, multiplicamos y dividimos el integrando por $\sec x + \tan x$.

$$\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{(\sec x \tan x + \sec^2 x) dx}{\sec x + \tan x}$$

Sea

$$u = \sec x + \tan x, \quad \Rightarrow \quad du = (\sec x \tan x + \sec^2 x) dx$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \sec x dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c;$$

$\therefore \qquad \int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + c.$

18. Solución:

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x}$$

Sea

$$u = \sin x, \quad \Rightarrow \quad du = \cos x dx$$

De tal manera que

$$\int \cot x dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c;$$

$\therefore \qquad \int \cot x dx = \ln |\operatorname{sen} x| + c.$

19. Solución:

Primero, multiplicamos y dividimos el integrando por $\csc x - \cot x$:

$$\int \csc x dx = \int \frac{\csc x(\csc x - \cot x)}{\csc x - \cot x} dx = \int \frac{(\csc^2 x - \csc x \cot x) dx}{\csc x - \cot x}$$

Sea

$$u = \csc x - \cot x, \quad \Rightarrow \quad du = (-\csc x \cot x + \csc^2 x) dx$$

De tal manera, que al hacer las sustituciones respectivas, queda:

$$\int \csc x dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c;$$

$\therefore \qquad \int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + c.$

20. $\int \frac{y^3}{(1-2y^4)^5} dy$

Solución:

$$\int \frac{y^3 dy}{(1-2y^4)^5} \qquad (1)$$

Sea

$$u = 1 - 2y^4 \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \quad du = -8y^3 dy,$$

$$\Rightarrow \quad y^3 dy = -\frac{1}{8} du \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$\int \frac{-\frac{1}{8} du}{u^5} = -\frac{1}{8} \int \frac{du}{u^5} = -\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{4u^4}\right) = \frac{1}{32u^4} + c \qquad (4);$$

$$\therefore \quad \int \frac{y^3 dy}{(1-2y^4)^5} = \frac{1}{32(1-2y^4)^4} + c \qquad \{(2) \text{ en } (4)\}.$$

21. $\int \frac{2r dr}{(1-r)^{2/3}}$

Solución:

$$\int \frac{2r dr}{(1-r)^{2/3}} \qquad (1)$$

Sea

$$u = 1 - r \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \quad du = -dr,$$

$$\Rightarrow \quad dr = -du \qquad (3)$$

De (2) se deduce que:

$$r = 1 - u \qquad (4)$$

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1), se obtiene:

$$\int \frac{2r dr}{(1-r)^{2/3}} = \int \frac{2(1-u)(-du)}{u^{2/3}} = -2\int u^{-2/3}(1-u) du = -2\int \left(u^{-2/3} - u^{1/3}\right) du,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2r dr}{(1-r)^{2/3}} = -2\left(3u^{1/3} - \frac{3}{4}u^{4/3}\right) + c \qquad (5);$$

$$\therefore \quad \int \frac{2r dr}{(1-r)^{2/3}} = \frac{3}{2}(1-r)^{4/3} - 6(1-r)^{1/3} + c \qquad \{(2) \text{ en } (5)\}.$$

22. $\int \frac{(x^2 + 2x) dx}{\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1}}$

Solución:

$$\int \frac{(x^2+2x)dx}{\sqrt{x^3+3x^2+1}} \qquad (1)$$

Sea

$$u = x^3 + 3x^2 + 1 \qquad (2),$$

$\Rightarrow \quad du = (3x^2+6x)dx = 3(x^2+2x)dx,$

$\Rightarrow \quad (x^2+2x)dx = \frac{1}{3}du \qquad (3)$

Sustituyendo (2), (3) en (1), se obtiene:

$$\int \frac{(x^2+2x)dx}{\sqrt{x^3+3x^2+1}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\int u^{-1/2}du = \frac{1}{3}(2u^{1/2}) + c = \frac{2}{3}u^{1/2} + c \qquad (4);$$

$\therefore \quad \int \frac{(x^2+2x)dx}{\sqrt{x^3+3x^2+1}} = \frac{2}{3}(x^3+3x^2+1)^{1/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+3x^2+1} + c \qquad \{(2) \text{ en } (4)\}.$

23. $\int \frac{y+3}{(3-y)^{2/3}}dy$

Solución:

$$\int \frac{y+3}{(3-y)^{2/3}}dy \qquad (1)$$

Sea

$$u = 3 - y \qquad (2),$$

$\Rightarrow \quad du = -dy,$

$\Rightarrow \quad dy = -du \qquad (3)$

De (2), se deduce que $y = 3 - u \qquad (4)$

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1), se obtiene:

$$\int \frac{y+3}{(3-y)^{2/3}}dy = \int \frac{3-u+3}{u^{2/3}}(-du) = \int (u-6)u^{-2/3}du = \int (u^{1/3} - 6u^{-2/3})du$$

$\Rightarrow \quad \int \frac{y+3}{(3-y)^{2/3}}dy = \frac{3}{4}u^{4/3} - 18u^{1/3} + c \qquad (5);$

$\therefore \quad \int \frac{y+3}{(3-y)^{2/3}}dy = \frac{3}{4}(3-y)^{4/3} - 18(3-y)^{1/3} + c \qquad \{(2) \text{ en } (5)\}.$

24. $\int \left(t + \frac{1}{t}\right)^{3/2} \left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)dt$

Solución:

$$\int\left(t+\frac{1}{t}\right)^{3/2}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)dt=\int(t+t^{-1})^{3/2}(1-t^{-2})dt \qquad (1)$$

Sea

$$u=t+t^{-1} \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \qquad du=(1-t^{-2})dt \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$\int\left(t+\frac{1}{t}\right)^{3/2}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)dt=\int u^{3/2}du=\frac{2}{5}u^{5/2}+c \qquad (4);$$

$$\therefore \qquad \int\left(t+\frac{1}{t}\right)^{3/2}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)dt=\frac{2}{5}(t+t^{-1})^{5/2}+c=\frac{2}{5}\left(t+\frac{1}{t}\right)^{5/2}+c \qquad \{(2)\text{ en }(4)\}.$$

25. $\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

Solución:

Sea

$$u=x^2+x+1,$$

$$\Rightarrow \qquad du=(2x+1)dx$$

De tal modo que:

$$\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}=\int\frac{du}{u}=\ln u+c;$$

$$\therefore \qquad \int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\ln(x^2+x+1)+c.$$

26. $\int\frac{s}{2s+3}ds$

Solución:

$$\int \frac{s}{2s+3}ds = \frac{1}{2}\int \frac{2sds}{2s+3} \qquad (\blacklozenge)$$

Sea

$$u = 2s+3 \Leftrightarrow s = \frac{u-3}{2} \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \qquad du = 2ds \Leftrightarrow ds = \frac{1}{2}du \qquad (3);$$

Sustituyendo (2) y (3) en ($\blacklozenge$), se obtiene:

$$\int \frac{s}{2s+3}ds = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{(u-3)du}{u} = \frac{1}{4}\int\left(1-\frac{3}{u}\right)du = \frac{1}{4}u - \frac{3}{4}\ln|u| + c = \frac{1}{4}(2s+3) - \frac{3}{4}\ln|2s+3| + c_1,$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{s}{2s+3}ds = \frac{1}{2}s + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\ln|2s+3| + c_1;$$

$$\therefore \qquad \int \frac{s}{2s+3}ds = \frac{1}{2}s - \frac{3}{4}\ln|2s+3| + c \qquad \left\{c = \frac{3}{4} + c_1\right\}.$$

27. $\int x(x^2+9)^{1/2}dx$

Solución:

$$\int x(x^2+9)^{1/2}dx = \frac{1}{2}\int (x^2+9)^{1/2}2xdx$$

Sea

$$u = x^2+9, \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx,$$

De tal manera, que al hacer la sustituciones respectivas, queda:

$$\int x(x^2+9)^{1/2}dx = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2} + c_1\right) = \frac{1}{3}u^{3/2} + c, \quad c = \frac{1}{2}c_1;$$

$$\therefore \qquad \int x(x^2+9)^{1/2}dx = \frac{1}{3}(x^2+9)^{3/2} + c.$$

28. $\int (x^2+2)/(x^3+6x-1)dx$

Solución:

$$\int \left[(x^2+2)/(x^3+6x-1)\right]dx = \frac{1}{3}\int \frac{(3x^2+6)dx}{(x^3+6x-1)}$$

Sea

$$u = x^3+6x-1, \quad \Rightarrow \quad du = (3x^2+6)dx,$$

De tal manera, que al hacer la sustituciones respectivas, queda:

$$\int \left[(x^2+2)/(x^3+6x-1)\right]dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln u + c;$$

$$\therefore \qquad \int \left[(x^2+2)/(x^3+6x-1)\right]dx = \frac{1}{3}\ln(x^3+6x-1) + c.$$

29. $\int\left[(3x^2-6)/\sqrt{x^3-6x}\right]dx$

<u>Solución</u>:

$$\int\left[(3x^2-6)/\sqrt{x^3-6x}\right]dx=\int\frac{(3x^2-6)dx}{\sqrt{x^3-6x}}$$

Sea

$$u=x^3-6x,\quad\Rightarrow\quad du=(3x^2-6)dx,$$

De tal manera, que al hacer la sustituciones respectivas, queda:

$$\int\left[(3x^2-6)/\sqrt{x^3-6x}\right]dx=\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\int u^{-1/2}du=2u^{1/2}+c;$$

$$\therefore\quad \int\left[(3x^2-6)/\sqrt{x^3-6x}\right]dx=2(x^3-6x)^{1/2}+c=2\sqrt{x^3-6x}+c.$$

30. $\int x^2\operatorname{sen}(x^3+4)dx$

<u>Solución</u>:

Sea

$$u=x^3+4,\quad\Rightarrow\quad du=3x^2dx\qquad(1)$$

$$\int x^2\operatorname{sen}(x^3+4)dx=\frac{1}{3}\int\operatorname{sen}(x^3+4)3x^2dx\qquad(2)$$

De tal manera que:

$$\int x^2\operatorname{sen}(x^3+4)dx=\frac{1}{3}\int\operatorname{sen}u\,du\qquad\{\text{sustituyendo (2) en (1)}\},$$

$$\Rightarrow\quad \int x^2\operatorname{sen}(x^3+4)dx=\frac{1}{3}(-\cos u+c),\ \text{pero } u=x^3+4;$$

$$\therefore\quad \int x^2\operatorname{sen}(x^3+4)dx=-\frac{1}{3}\cos(x^3+4)+C,\quad C=\frac{1}{3}c.$$

Integración de funciones racionales, por fracciones parciales, cuando el denominador sólo tiene factores lineales

Ejercicios resueltos

En los siguientes ejercicios, obtenga la integral indefinida:

1. $\int \frac{x^2}{x^2+x-6}dx$	2. $\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx$	3. $\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx$
4. $\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2}dx$	5. $\int \frac{5x^2-11x+5}{x^3-4x^2+5x-2}dx$	6. $\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx$
7. $\int \frac{dP}{P-P^2}$		

Soluciones

1. $\int \frac{x^2}{x^2+x-6}dx$

Solución:

$$\frac{x^2}{x^2+x-6} = 1 - \frac{x-6}{x^2+x-6} \Leftrightarrow 1 - \frac{x-6}{(x+3)(x-2)}$$

{expresando el integrando en la forma: parte entera-fracción propia. Y factorizando el denominador}

De tal manera que:

$$\int \frac{x^2}{x^2+x-6}dx = \int\left(1 - \frac{x-6}{(x+3)(x-2)}\right)dx = x - \int \frac{x-6}{(x+3)(x-2)}dx + c_1 \qquad (\spadesuit)$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{x-6}{(x+3)(x-2)} \equiv \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $(x+3)(x-2)$, y se simplifica:

$x - 6 \equiv A(x-2) + B(x+3)$,

$\Rightarrow \quad x - 6 \equiv Ax - 2A + Bx + 3B \qquad$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad x - 6 \equiv (A+B)x + (-2A+3B) \qquad$ {asociando de una forma adecuada} $\quad$ (2)

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$A + B = 1 \qquad (3)$

$-2A + 3B = -6 \qquad (4)$

Multiplicamos (3) por 2, y la ecuación resultante la sumamos con la (4):

$$\begin{array}{r} 2A + 2B = 2 \\ -2A + 3B = -6 \\ \hline \end{array}$$

$$5B = -4 \Leftrightarrow B = -\frac{4}{5} \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) en (3) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$A = \frac{9}{5} \qquad (6)$$

Sustituyendo (5), (6) en (1), se obtiene:

$$\frac{x-6}{(x+3)(x-2)} \equiv \frac{9}{5(x+3)} - \frac{4}{5(x-2)}$$

De tala manera que:

$$\int \frac{x-6}{(x+3)(x-2)}dx = \frac{9}{5}\int \frac{1}{x+3}dx - \frac{4}{5}\int \frac{1}{x-2}dx;$$

$$\therefore \quad \int \frac{x-6}{(x+3)(x-2)}dx = \frac{9}{5}\ln(x+3) - \frac{4}{5}\ln(x-2) + c_2 \qquad (7)$$

Sustituyendo (7) en ($\spadesuit$), se obtiene:

$$\int \frac{x^2}{x^2+x-6}dx = x - \left(\frac{9}{5}\ln(x+3) - \frac{4}{5}\ln(x-2) + c_2\right) + c_1;$$

$$\therefore \quad \int \frac{x^2}{x^2+x-6}dx = x - \frac{9}{5}\ln(x+3) + \frac{4}{5}\ln(x-2) + c.$$

2. $\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx$

Solución:

$$\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx = \int \frac{5x-2}{(x+2)(x-2)}dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresamos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{5x-2}{(x+2)(x-2)} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $(x+2)(x-2)$, y se simplifica:

$$5x-2 \equiv A(x-2) + B(x+2),$$

$$\Rightarrow \quad 5x-2 \equiv Ax - 2A + Bx + 2B \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \quad 5x-2 \equiv (A+B)x + (-2A+2B) \qquad \{\text{asociando de una forma adecuada}\} \qquad (2)$$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$A + B = 5 \qquad (3)$$

$$-2A + 2B = -2 \qquad (4)$$

Multiplicamos (3) por 2, y la ecuación resultante la sumamos con la (4):

$$\begin{array}{r} 2A + 2B = 10 \\ \underline{-2A + 2B = -2} \\ 4B = 8 \Leftrightarrow B = 2 \quad (5) \end{array}$$

Sustituyendo (5) en (3) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$A = 3 \qquad (6)$$

Sustituyendo (5), (6) en (1), se obtiene:

$$\frac{5x-2}{(x+2)(x-2)} \equiv \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2}$$

De tala manera que:

$$\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx = \int \frac{3}{x+2}dx + \int \frac{2}{x-2}dx;$$

$$\therefore \quad \int \frac{5x-2}{x^2-4}dx = 3\ln(x+2) + 2\ln(x-2) + c.$$

3. $\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

Solución:

$$\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \int \frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $x(x-2)(x+1)$, y se simplifica:

$$4x-2 \equiv A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2),$$

$$\Rightarrow \qquad 4x-2 \equiv Ax^2 - Ax - 2A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - 2Cx \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \qquad 4x-2 \equiv (A+B+C)x^2 + (-A+B-2C)x + (-2A) \qquad \{\text{asociando de una forma adecuada}\} \qquad (2)$$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$A+B+C=0 \qquad (3)$$

$$-A+B-2C=4 \qquad (4)$$

$$-2A=-2 \Leftrightarrow A=1 \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4), como también (5) en (3) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$B-2C=5 \qquad (6)$$

$$B+C=-1 \qquad (7)$$

Restando (6) de (7), se obtiene:

$$\begin{array}{r} B+C=-1 \\ \underline{-B+2C=-5} \\ 3C=-6 \Leftrightarrow C=-2 \qquad (8) \end{array}$$

Sustituyendo (8) en (6), y operando aritméticamente, se obtiene:

$$B=1 \qquad (9)$$

Sustituyendo (5), (8) y (9) en (1), se obtiene:

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1}$$

De tal manera que:

$$\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{2}{x+1}dx;$$

$$\therefore \qquad \int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \ln x + \ln(x-2) - 2\ln(x+1) + c.$$

4. $\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2}dx$

Solución:

$$\int \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - x^2}dx = \int \frac{3x^2 - x + 1}{x^2(x-1)}dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{3x^2 - x + 1}{x^2(x-1)} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $x^2(x-1)$, y se simplifica:

$$3x^2 - x + 1 \equiv A(x-1) + Bx(x-1) + Cx^2,$$

$$\Rightarrow \qquad 3x^2 - x + 1 \equiv Ax - A + Bx^2 - Bx + Cx^2 \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \qquad 3x^2 - x + 1 \equiv (B + C)x^2 + (A - B)x - A \qquad \{\text{asociando de una forma adecuada}\} \qquad (2)$$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$B + C = 3 \qquad (3)$$

$$A - B = -1 \qquad (4)$$

$$-A = 1 \Leftrightarrow A = -1 \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$B = 0 \qquad (6)$$

Sustituyendo (6) en (3) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$C = 3 \qquad (7)$$

Sustituyendo (5), (6) y (7) en (1), se obtiene:

$$\frac{3x^2 - x + 1}{x^2(x-1)} \equiv \frac{-1}{x^2} + \frac{0}{x} + \frac{3}{x-1}$$

De tal manera que:

$$\int \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - x^2}dx = -\int \frac{1}{x^2}dx + 3\int \frac{1}{x-1}dx;$$

$$\therefore \qquad \int \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - x^2}dx = \frac{1}{x} + 3\ln|x-1| + c.$$

5. $\displaystyle\int \frac{5x^2 - 11x + 5}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}dx$

Solución:

$$\int \frac{5x^2-11x+5}{x^3-4x^2+5x-2}dx = \int \frac{5x^2-11x+5}{(x-1)^2(x-2)}dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{5x^2-11x+5}{(x-1)^2(x-2)} \equiv \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $x^2(x-1)$, y se simplifica:

$$5x^2-11x+5 \equiv A(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)^2 \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \quad 5x^2-11x+5 \equiv Ax-2A+Bx^2-3Bx+2B+Cx^2-2Cx+C \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \quad 5x^2-11x+5 \equiv (B+C)x^2 + (A-3B-2C)x + (-2A+2B+C)$$

{asociando de una forma adecuada} (3)

Como (3) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$B+C=5 \qquad (4)$

$A-3B-2C=-11 \qquad (5)$

$-2A+2B+C=5 \qquad (6)$

Si en (2) se sustituye la x por 2, se obtiene:

$$5(2)^2-11(2)+5 \equiv A(2-2)+B(x-1)(2-2)+C(2-1)^2;$$

$\therefore \quad C=3 \qquad (7)$

Sustituyendo (7) en (4) y operando aritméticamente, se obtiene:

$B=2 \qquad (8)$

Sustituyendo (7), (8) en (5), y operando aritméticamente, se obtiene:

$A=1 \qquad (9)$

Sustituyendo (7), (8) y (9) en (1), se obtiene:

$$\frac{5x^2-11x+5}{(x-1)^2(x-2)} \equiv \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

De tala manera que:

$$\int \frac{5x^2-11x+5}{x^3-4x^2+5x-2}dx = \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{3}{x-2}dx;$$

$$\therefore \quad \int \frac{5x^2-11x+5}{x^3-4x^2+5x-2}dx = -\frac{1}{x-1} + 2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + c = -\frac{1}{x-1} + \ln(x-1)^2 + 3\ln|x-2| + c.$$

6. $\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx$

Solución:

$$\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx = \int \frac{6x^2-2x-1}{x(2x-1)(2x+1)}dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{6x^2-2x-1}{x(2x-1)(2x+1)} \equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{2x+1} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $x(2x-1)(2x+1)$, y se simplifica:

$$6x^2-2x-1 \equiv A(2x-1)(2x+1)+Bx(2x+1)+Cx(2x-1) \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \quad 6x^2-2x-1 \equiv 4Ax^2-A+2Bx^2+Bx+2Cx^2-Cx \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \quad 6x^2-2x-1 \equiv (4A+2B+2C)x^2+(B-C)x+(-A) \qquad \{\text{asociando de una forma adecuada}\} \qquad (3)$$

Como (3) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$4A+2B+2C=6 \Leftrightarrow 2A+B+C=3 \qquad (4)$$

$$B-C=-2 \qquad (5)$$

$$-A=-1 \Leftrightarrow A=1 \qquad (6)$$

Sustituyendo (6) en (4) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$B+C=1 \qquad (7)$$

Sumando, término a término, (5) y (7), se obtiene:

$$\begin{array}{l} B-C=-2 \\ \underline{B+C=\ \ 1} \\ 2B \qquad =-1 \Leftrightarrow B=-\dfrac{1}{2} \qquad (8) \end{array}$$

Sustituyendo (8) en (7), y operando aritméticamente, se obtiene:

$$C=\frac{3}{2} \qquad (9)$$

Sustituyendo (6), (8) y (9) en (1), se obtiene:

$$\frac{6x^2-2x-1}{x(2x-1)(2x+1)} \equiv \frac{1}{x}-\frac{1}{2(2x-1)}+\frac{3}{2(2x+1)}$$

De tala manera que:

$$\int \frac{6x^2-2x-1}{x(2x-1)(2x+1)}dx = \int \frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int \frac{1}{2x-1}dx+\frac{3}{2}\int \frac{1}{2x+1}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx = \ln|x|-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln|2x-1|+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln|2x+1|+c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx = \ln|x|-\frac{1}{4}\ln|2x-1|+\frac{3}{4}\ln|2x+1|+c.$$

7. $\int \frac{dP}{P - P^2}$

Solución:

$$\int \frac{dP}{P-P^2} = \int \frac{dP}{P(1-P)} \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{1}{P(1-P)} \equiv \frac{A}{P} + \frac{B}{1-P} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $P(1-P)$, y se simplifica:

$$1 \equiv A(1-P) + BP \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \qquad 1 \equiv A - AP + BP \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \qquad 1 \equiv (-A + B)P + (A) \qquad \{\text{asociando de una forma adecuada}\} \qquad (3)$$

Como (3) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$-A + B = 0 \qquad (4)$$

$$A = 1 \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$B = 1 \qquad (6)$$

Sustituyendo (5) y (6) en (1), se obtiene:

$$\frac{1}{P(1-P)} \equiv \frac{1}{P} + \frac{1}{1-P}$$

De tala manera que:

$$\int \frac{dP}{P-P^2} = \int \frac{1}{P} dP + \int \frac{1}{1-P} dP \Leftrightarrow \int \frac{dP}{P-P^2} = \int \frac{1}{P} dP - \int \frac{1}{P-1} dP,$$

$$\therefore \qquad \int \frac{dP}{P-P^2} = \ln P - \ln(P-1) + c.$$

Integrales que producen funciones trigonométricas inversas

Como ya se ha dicho antes, de cada fórmula de derivación se deduce una fórmula correspondiente de integración. De las fórmulas para las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, obtenemos el siguiente teorema que da algunas fórmulas de integrales indefinidas:

Teorema:

(i) $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}+c, \qquad a>0$$

(ii) $$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}+c, \qquad a\neq 0$$

(iii) $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a}+c, \qquad a>0$$

Ejercicios resueltos Evalúe la integral indefinida:		
1. $\int \frac{9dx}{9x^2+1}$	**2.** $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$	**3.** $\int \frac{1}{x^2+3}dx$
4. $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$	5. $\int \frac{10}{x^2+1}dx$	

Soluciones

1. $\int \frac{9dx}{9x^2+1}$

Solución:

$$\int \frac{9dx}{9x^2+1} = 3\int \frac{3dx}{(3x)^2+1};$$

$\therefore \quad \int \frac{9dx}{9x^2+1} = 3\tan^{-1}(3x)+c \qquad$ {aplicando la parte (ii) del Teorema}.

2. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$

Solución:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2},$$

$\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+c \qquad$ {aplicando la parte (ii) del Teorema};

$\therefore \quad \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3}+c.$

3. $\int \frac{1}{x^2+3}dx$

Solución:

$\int \frac{1}{x^2+3}dx = \int \frac{1}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}+c \qquad$ {aplicando la parte (ii) del Teorema};

$\therefore \quad \int \frac{1}{x^2+3}dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{3}+c.$

4. $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$

Solución:

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+5} = \int \frac{dx}{(x^2-2x+1)+4} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+2^2},$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x-1}{2} + c \qquad \{\text{aplicando la parte (ii) del Teorema}\}.$$

5. $\int \frac{10}{x^2+1}dx$

Solución:

$$\int \frac{10}{x^2+1}dx = 10\int \frac{1}{x^2+1}dx;$$

$$\therefore \quad \int \frac{10}{x^2+1}dx = 10\tan^{-1}x + c \qquad \{\text{aplicando la parte (ii) del Teorema}\}.$$

Miscelánea1

1. $\int e^{\sqrt{x}}dx$	2. Hallar la longitud del arco de la curva $f(x) = x^3$ del punto $(2,8)$ al punto $(5,125)$	
3. $\int \frac{\operatorname{sen} x dx}{1+\cos^2 x}$	4. $\int \frac{x}{1+x^4}dx$	5. $\int \frac{x-\sqrt{\tan^{-1} 2x}}{1+4x^2}dx$
6. $\int \frac{x}{\cos x^2}dx$	7. $\int \frac{2+\ln x}{x}dx$	8. $\int \frac{(x-4)dx}{(x-2)(x^2+1)}$
9. $\int x^3\sqrt{4-x^2}dx$	10. $\int \frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)}$	11. $\int x \operatorname{sen} x^2 dx$
12. $\int \operatorname{sen} 5x dx$	13. $\int (x+1)^2 dx$	14. $\int \frac{x+6}{x+1}dx$

15. $\int 2xe^{-x}dx$	**16.** $\int \frac{x}{4+x^2}dx$	**17.** $\int \frac{dx}{x^4+1}$

Soluciones

1. Solución:

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx = 2\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

Sea $w = \sqrt{x}, \;\Rightarrow\; dw = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx;$

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int we^{w}dw \qquad (1)$$

Ahora, sea:

$u = w, \;\Rightarrow\; du = dw$

$dv = e^{w}dw, \;\Rightarrow\; v = e^{w}$

Aplicando la fórmula de integración por partes, se obtiene:

$$\int we^{w}dw = we^{w} - \int e^{w}dw = we^{w} - e^{w} + c_1 \qquad (2)$$

De tal manera que:

$$2\int we^{w}dw = 2(we^{w} - e^{w} + c_1) = 2we^{w} - 2e^{w} + c \qquad (3)$$

Pero, $w = \sqrt{x}$; por lo tanto:

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c.$$

2. Solución:

$f(x) = x^3,$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2$

Tanto f como f' son funciones polinómicas; por lo que ambas son continuas en todos los reales y, en particular, son continuas en $[2,5]$.

$$L = \int_2^5 \sqrt{1+(3x^2)^2}\,dx = \int_2^5 \sqrt{1+9x^4}\,dx$$

Hallamos el valor aproximado de L aplicando la regla de Simpson, con $n = 6$:

$$L \approx \frac{5-2}{3(6)}\left[f(2)+4f(2{,}5)+2f(3)+4f(3{,}5)+2f(4)+4f(4{,}5)+f(5)\right],$$

$$\Rightarrow \quad L \approx \frac{1}{6}\left[12.0416+75.1066+54.0370+147.0544+96.0208+243.0329+75.0067\right],$$

$$\Rightarrow \quad L \approx \frac{1}{6}[702.3];$$

$$\therefore \quad L \approx 117.05$$

3. Solución:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{1+\cos^2 x} \quad (1)$$

Sea

$$u = \cos x, \quad \Rightarrow \quad du = -\operatorname{sen} x\,dx \Leftrightarrow -du = \operatorname{sen} x\,dx \quad (2)$$

Sustiutuyendo (2) en (1), se obtiene:

$$\int \frac{-du}{1+u^2} = -\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + C;$$

$$\therefore \quad \int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{1+\cos^2 x} = \tan^{-1}(\cos x) + C.$$

4. Solución:

$$\int \frac{x}{1+x^4}dx = \int \frac{x}{1+(x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+(x^2)^2} \quad (\clubsuit)$$

Sea $\quad u = x^2 \quad (1),$

$\Rightarrow \quad du = 2x\,dx \quad (2)$

Sustituyendo (1) y (2) en ($\clubsuit$), se obtiene :

$$\int \frac{x}{1+(x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1} u + C \quad (3);$$

$$\therefore \quad \int \frac{x}{1+(x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\tan^{-1} x^2 + C \qquad \{(1) \text{ en } (3)\}.$$

5. Solución:

$$\int \frac{x-\sqrt{\tan^{-1}2x}}{1+4x^2}dx = \int \frac{x}{1+4x^2}dx - \int \frac{\sqrt{\tan^{-1}2x}}{1+4x^2}dx \qquad (\clubsuit)$$

Vamos a integrar por separado cada una de las integrles del miembro derecho de ($\clubsuit$):

$$\int \frac{x}{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\int \frac{8xdx}{1+4x^2} \qquad (1)$$

Sea $\quad u = 1+4x^2 \quad (2)$,

$\Rightarrow \quad du = 8xdx \quad (3)$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$\int \frac{x}{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{8}\ln u + C = \frac{1}{8}\ln(1+4x^2) + C_1 \qquad (4).$$

$$\int \frac{\sqrt{\tan^{-1}2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{\tan^{-1}2x}\,\frac{2dx}{1+4x^2}dx \qquad (5)$$

Sea $\quad u = \tan^{-1}2x \quad (6)$,

$$\Rightarrow \quad du = \frac{dx}{1+4x^2}dx \qquad (7)$$

Sustituyendo (6) y (7) en (5), se obtiene:

$$\int \frac{\sqrt{\tan^{-1}2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C_2 = \frac{1}{3}(\tan^{-1}2x)^{3/2} + C_2 \qquad (8)$$

Sustituyendo (4) y (8) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$\int \frac{x-\sqrt{\tan^{-1}2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\ln(1+4x^2) + C_1 - \left[\frac{1}{3}(\tan^{-1}2x)^{3/2} + C_2\right];$$

$$\therefore \qquad \int \frac{x-\sqrt{\tan^{-1}2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\ln(1+4x^2) - \frac{1}{3}(\tan^{-1}2x)^{3/2} + C \qquad \{C = C_1 - C_2\}.$$

6. Solución:

$$\int \frac{x}{\cos x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\cos x^2} \quad (♣)$$

Sea $u = x^2$ (1),

$\Rightarrow$ $du = 2xdx$ (2)

Sustituyendo (1) y (2) en (♣), se obtiene :

$$\int \frac{x}{\cos x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\cos u} = \frac{1}{2}\int \sec u = \frac{1}{2}\ln\left|\sec u + \tan u\right| + C \quad (4);$$

$$\therefore \quad \int \frac{x}{\cos x^2}dx = \ln\left|\sec x^2 + \tan x^2\right| + C \qquad \{(1) \text{ en } (4)\}.$$

7. Solución:

$$\int \frac{2+\ln x}{x}dx = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{\ln x}{x}dx = 2\ln x + \int \ln x \frac{dx}{x} \quad (1)$$

Sea

$u = \ln x$ (2),

$\Rightarrow$ $du = \dfrac{dx}{x}$ (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$\int \frac{2+\ln x}{x}dx = 2\ln x + \int udu = 2\ln x + \int udu = 2\ln x + \frac{1}{2}u^2 + C \quad (5);$$

$$\therefore \quad \int \frac{2+\ln x}{x}dx = 2\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C \qquad \{(2) \text{ en } (5)\}.$$

8. Solución:

Vamos a expresar el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{(x-4)}{(x-2)(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \qquad (\spadesuit)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{(x-4)}{(x-2)(x^2+1)} \equiv \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)},$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{(x-4)}{(x-2)(x^2+1)} \equiv \frac{Ax^2+A+Bx^2-2Bx+Cx-2C}{(x-2)(x^2+1)},$$

$$\Rightarrow \qquad (x-4) \equiv (A+B)x^2 + (-2B+C)x + (A-2C) \qquad (1)$$

Como (1) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal manera que:

$$A + B = 0 \Leftrightarrow B = -A \qquad (2)$$

$$-2B + C = 1 \qquad (3)$$

$$A - 2C = -4 \qquad (4)$$

Sustituyendo (2) en (3), se obtiene.

$$-2(-A) + C = 1 \Leftrightarrow 2A + C = 1 \qquad (5)$$

Multiplicamos la ecuación (4) por -2, y la ecuación resultante la sumamos con la (5):

$$\begin{array}{r} -2A + 4C = 8 \\ \underline{2A \quad + C = 1} \\ 5C = 9 \Leftrightarrow C = \dfrac{9}{5} \qquad (6) \end{array}$$

Sustiutyendo (6) en (4), se obtiene:

$$A - 2\cdot\frac{9}{5} = -4 \Leftrightarrow A = \frac{-20+18}{5} \Leftrightarrow A = -\frac{2}{5} \qquad (7)$$

Sustiutyendo (7) en (2), se obtiene:

$$B = \frac{2}{5} \qquad (8)$$

De tal manetra que:

$$\frac{(x-4)}{(x-2)(x^2+1)} \equiv \frac{-\frac{2}{5}}{x-2} + \frac{\frac{2}{5}x + \frac{9}{5}}{x^2+1} \qquad \{(6),\ (7)\ \text{y}\ (8)\ \text{en}\ (\spadesuit)\},$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{(x-4)}{(x-2)(x^2+1)} \equiv -\frac{2}{5(x-2)} + \frac{2x+9}{5(x^2+1)} \qquad (9)$$

Así

$$\int \frac{(x-4)dx}{(x-2)(x^2+1)} = \int\left(-\frac{2}{5(x-2)} + \frac{2x+9}{5(x^2+1)}\right)dx = \frac{1}{5}\int\left(-\frac{2}{x-2} + \frac{2x+9}{x^2+1}\right)dx,$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{(x-4)dx}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{1}{5}\left(-\int\frac{2}{x-2}dx + \int\frac{2x}{x^2+1}dx + \int\frac{9}{x^2+1}dx\right);$$

$$\therefore \qquad \int \frac{(x-4)dx}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{1}{5}\left(-2\ln(x-2) + \ln(x^2+1) + 9\tan^{-1}x + C\right).$$

9. $\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$

Solución:

$$\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int x^2\sqrt{4-x^2}\,(-2xdx)\qquad \text{(organizando convenientemente)}\qquad (\spadesuit)$$

Sea

$u=4-x^2\quad(1),$

$du=-2xdx\quad(2)$

De (1), se deduce que:

$x^2=4-u\quad(3)$

Sustituyendo (1), (2) y (3) en ($\spadesuit$), se obtiene:

$$\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int(4-u)\sqrt{u}\,du=-\frac{1}{2}\int(4-u)u^{1/2}du=-\frac{1}{2}\int(4u^{1/2}-u^{3/2})du,$$

$$\Rightarrow\quad \int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx=\int\left(\frac{1}{2}u^{3/2}-2u^{1/2}\right)du=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}u^{5/2}-2\times\frac{2}{3}u^{3/2}+c=\frac{1}{5}u^{5/2}-\frac{4}{3}u^{3/2}+c\qquad(\clubsuit)$$

Finalmente, sustituyendo (1) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{1}{5}(4-x^2)^{5/2}-\frac{4}{3}(4-x^2)^{3/2}+c.$$

10. $\int\frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)}$

Solución:

Vamos a expresar el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+5} \quad (\spadesuit)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)} \equiv \frac{A(x^2+5)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+5)},$$

$$\Rightarrow \quad x^2-9 \equiv A(x^2+5)+(Bx+C)(x+2) \Leftrightarrow x^2-9 \equiv Ax^2+5A+Bx^2+2Bx+Cx+2C,$$

$$\Rightarrow \quad x^2-9 \equiv (A+B)x^2+(2B+C)x+(5A+2C) \quad (\clubsuit)$$

Como ($\clubsuit$) es una identidad, se cumple que:

$$A+B=1 \Leftrightarrow B=1-A \quad (1)$$

$$2B+C=0 \quad (2)$$

$$5A+2C=-9 \quad (3)$$

Sustituyendo (1) en (2), se obtiene:

$$2(1-A)+C=0 \Leftrightarrow 2-2A+C=0 \Leftrightarrow 2A-C=2 \quad (4)$$

Multiplicando la ecuación (4) por 2 y, sumando la ecuación resultante con la (3), se obtiene:

$$\begin{array}{l} 4A-2C=\ \ 4 \\ \underline{5A+2C=-9} \\ 9A \qquad\ = -5 \Leftrightarrow A=-\dfrac{5}{9} \quad (5) \end{array}$$

Sustituyendo (5) en (1), se obtiene:

$$B=1-\left(-\frac{5}{9}\right) \Leftrightarrow B=1+\frac{5}{9} \Leftrightarrow B=\frac{14}{9} \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (2), se obtiene:

$$2\left(\frac{14}{9}\right)+C=0 \Leftrightarrow C=-\frac{28}{9} \quad (7)$$

Sustituyendo (6), (7) y (8) en ($\spadesuit$), se obtiene:

$$\frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)} \equiv \frac{-\frac{5}{9}}{x+2} + \frac{\frac{14}{9}x-\frac{28}{9}}{x^2+5} \Leftrightarrow \frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)} \equiv -\frac{5}{9}\times\frac{1}{(x+2)} + \frac{14}{9}\times\frac{x-2}{x^2+5}$$

De tal manera que.

$$\int \frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)}dx = \int\left(-\frac{5}{9}\times\frac{1}{(x+2)}+\frac{14}{9}\times\frac{x-2}{x^2+5}\right)dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)}dx = -\frac{5}{9}\int\frac{1}{(x+2)}dx + \frac{14}{9}\int\frac{x-2}{x^2+5}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)}dx = -\frac{5}{9}\ln|x+2| + \frac{14}{9}\left(\int\frac{xdx}{x^2+5} - \int\frac{2}{x^2+5}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)}dx = -\frac{5}{9}\ln|x+2| + \frac{7}{9}\left(\int\frac{2xdx}{x^2+5} - \int\frac{4}{x^2+5}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)}dx = -\frac{5}{9}\ln|x+2| + \frac{7}{9}\ln(x^2+5) - \frac{28}{9}\times\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}}+c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+5)}dx = -\frac{5}{9}\ln|x+2| + \frac{7}{9}\ln(x^2+5) - \frac{28\sqrt{5}}{45}\tan^{-1}\frac{\sqrt{5}x}{5}+c.$$

11. $\int x \operatorname{sen} x^2 dx$

Solución:

$$\int x \operatorname{sen} x^2 dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x^2 (2xdx) \quad (♣)$$

Sea

$$u = x^2 \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad du = 2xdx \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (♣), se obtiene:

$$\int x \operatorname{sen} x^2 dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u du = \frac{1}{2}(-\cos u) + c = -\frac{1}{2}\cos u + c \quad (3)$$

Finalmente, susutituyendo (1) en (3), se obtiene:

$$\int x \operatorname{sen} x^2 dx = -\frac{1}{2}\cos x^2 + c.$$

12. $\int \operatorname{sen} 5x dx$

Solución:

$$\int \operatorname{sen} 5x dx \quad (♠)$$

Sea

$$u = 5x, \ \Rightarrow \ du = 5dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{5}du \quad (1)$$

Sustituyendo (1) en (♠), obtiene :

$$\int \operatorname{sen} 5x dx = \int \operatorname{sen} u \left(\frac{1}{5}du\right) = \frac{1}{5}\int \operatorname{sen} u du = \frac{1}{5}(-\cos u + c_1);$$

$$\therefore \quad \int \operatorname{sen} 5x dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + c \qquad \{u = 5x,\ c = c_1/5\}.$$

13. $\int (x+1)^2 dx$

Solución:

$$\int (x+1)^2 dx \quad (♠)$$

Sea

$$u = x+1, \Rightarrow du = dx \quad (1)$$

Sustituyendo (1) en (♠), obtiene:

$$\int (x+1)^2 dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + c;$$

$$\therefore \quad \int (x+1)^2 dx = \frac{1}{3}(x+1)^3 + c.$$

14. $\int \frac{x+6}{x+1} dx$

Solución:

$$\int \frac{x+6}{x+1} dx = \int \frac{x+1+5}{x+1} dx = \int \frac{x+1}{x+1} dx + \int \frac{5}{x+1} dx = \int dx + \int \frac{5}{x+1} dx = x + 5\int \frac{1}{x+1} dx \quad (♦)$$

Sea

$$u = x+1, \Rightarrow du = dx \quad (1)$$

Sustituyendo (1) en (♦), obtiene:

$$\int \frac{x+6}{x+1} dx = x + 5\int \frac{1}{u} du = x + 5\ln|u| + c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{x+6}{x+1} dx = x + 5\ln|x+1| + c.$$

15. $\int 2xe^{-x} dx$

Solución:

$$\int 2xe^{-x}dx$$

Sea

$$u = 2x, \ \Rightarrow \ du = 2dx$$
$$dv = e^{-x}dx \Leftrightarrow v = -e^{-x}$$

De tal modo, que al aplicar la fórmula de integración por partes, $\int udv = uv - \int vdu$, se obtiene:

$$\int 2xe^{-x}dx = -2xe^{-x} - \int -e^{-x}2dx = -2xe^{-x} + 2\int e^{-x}dx;$$

$$\therefore \quad \int 2xe^{-x}dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + c.$$

16. $\int \frac{x}{4+x^2}dx$

Solución:

$$\int \frac{xdx}{4+x^2} \quad (\blacklozenge)$$

Sea

$$u = 4 + x^2, \ \Rightarrow \ du = 2xdx \Leftrightarrow xdx = \frac{1}{2}du \quad (1)$$

Sustituyendo (1) en ($\blacklozenge$), se obtiene:

$$\int \frac{xdx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u + c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{xdx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\ln(4+x^2) + c.$$

17. $\int \frac{dx}{x^4+1}$

Solución:

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \int \frac{1}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}dx \qquad \{\text{factorizando}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{1}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1} \qquad (1),$$

$$\Rightarrow \quad 1 \equiv (Ax+B)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + (Cx+D)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$$

{multiplicando cada miembro de la identidad por el mínimo común denominador},

$$\Rightarrow \quad 1 \equiv Ax^3 - \sqrt{2}Ax^2 + Ax + Bx^2 - \sqrt{2}Bx + B + Cx^3 + \sqrt{2}Cx^2 + Cx + Dx^2 + \sqrt{2}Dx + D$$

{destruyendo paréntesis},

$$\Rightarrow \quad 1 \equiv (A+C)x^3 + (-\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D)x^2 + (A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D)x + (B+D) \qquad (2)$$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal manera que:

$$A + C = 0 \qquad (3)$$

$$-\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D = 0 \qquad (4)$$

$$A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D = 0 \qquad (5)$$

$$B + D = 1 \qquad (6)$$

Sustituyendo (3) en (5) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$$-B + D = 0 \qquad (7)$$

Sumando (6) y (7) y despejando, se obtiene:

$$D = \frac{1}{2} \qquad (8)$$

Sustituyendo (8) en (6) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$$B = \frac{1}{2} \qquad (9)$$

Sustituyendo (6) en (4) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$$A - C = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (10)$$

Sumando (3) y (10) y despejando, se obtiene:

$$A = \frac{\sqrt{2}}{4} \qquad (11)$$

Sustituyendo (11) en (3) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$$C = -\frac{\sqrt{2}}{4} \qquad (9)$$

De tal manera que:

$$\frac{1}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)} \equiv \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1},$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\int\left[\frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{2x-2\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right]dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\int\frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx - \int\frac{2x-2\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\int\frac{2x+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx - \int\frac{2x-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx + \int\frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx + \int\frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx\right],$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln\left|x^2+\sqrt{2}x+1\right| + \int\frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - \ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right| - \int\frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}dx\right],$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln\left|x^2+\sqrt{2}x+1\right| + \sqrt{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right| - \sqrt{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}dx\right],$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln\left|x^2+\sqrt{2}x+1\right| + \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) - \ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right| - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right],$$

$$\therefore \quad \int\frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln\left|x^2+\sqrt{2}x+1\right| + 2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right) - \ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right| - 2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right)\right]+c.$$

(150 Puntos) Realice el estudio completo de la función $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^3} = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x}$.

5. **(80 Puntos) Calcule los siguientes limites**

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$

6. **(70 Puntos)** Dada $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

Se pide:

- Extremos locales, y absolutos en el intervalo $[1 \; .e^2]$
- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento del gráfico de *f*.

5. **(80 Puntos)Calcule los siguientes limites**

a) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x^5}{5e^{x^3}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$

6. **(70 Puntos)** Dada $f(x) = \dfrac{\ln(\frac{1}{x})}{x}$

Se pide:

- Extremos locales, y absolutos en el intervalo $[1/e \; .e^3]$
- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento del gráfico de *f*.

6. a) **(30 Puntos)** Calcule la ecuación de las asíntotas (si es que existen) de la función

$$f(x)= \frac{x^2-3x+2}{2x - 4}$$

(50 Puntos) Calcule la ecuación de las asíntotas (si existen) de la función

$$g(x)=\frac{x^3-1}{x^2-x}$$

6.a) **(50 Puntos)** Determine los extremos absolutos de la función $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ en el Intervalo $[0,1]$ ¿Por qué puede asegurar que estos valores existen?

b) **(50 Puntos)** Determine los puntos de Inflexión e intervalos de concavidad de $f(x)=x^5-10x^4+9x-5$

4. Realice el estudio completo de la función $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{x^3} = \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{1}{x}$.

5. Si $f(x) = \dfrac{\ln(x) + 1}{x^2 - 4}$ se pide:

   a) Dominio de *f.*
   b) Puntos de corte del gráfico de *f* con los ejes, si existen.

6. Dada $f(x) = \sqrt{6x - x^2}$

   Se pide:

   - Extremos locales, si existen.
   - Intervalos de crecimiento y de decrecimiento del gráfico de *f*.

(120 Puntos) Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3}{3x - \mathrm{sen}(3x)}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} x^5 \; e^{-x^3}$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 - x^2)^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \mathrm{tg}x)^{\frac{1}{2x}}$

4. **(150 Pts.)** Dada $f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2 - x}$ se pide:

   - Dominio, signos, y Asíntotas.
   - Extremos locales, si existen e intervalos de crecimiento y de decrecimiento del gráfico de *f.*
   - Puntos de inflexión, si existen, e intervalos de concavidad del gráfico de *f.*
   - Gráfica de *f* e Imagen de *f*.
   - Extremos absolutos, si existen.

5. **(90 Puntos)** Dada $f(x) = x\,\mathrm{Ln}(x)$, se pide:

   - Corte con los ejes coordenados
   - Extremos locales, si existen.
   - Intervalos de crecimiento y de decrecimiento del gráfico de *f*.

6. **(60 Puntos)** Dada $f(x) = e^{1 - x^2}$ Se pide:

   - Puntos de inflexión del gráfico de *f*, si existen.

- Intervalos de concavidad del gráfico de *f.*

$a)\quad \lim_{x \to \infty} x^4 \; e^{-(x)^2}$

$b)\quad \lim_{x \to 3} \dfrac{sen^2(x-9)}{\tan(x-3)}$

$c)\quad \lim_{x \to \infty} x\,(e^{1/x} - 1)$

.

---

1. **(120 Pts.)** Dada $f(x) = x - \dfrac{1}{x^3}$ se pide:

- Dominio, signos, y Asíntotas.
- Extremos locales, si existen e intervalos de crecimiento y de decrecimiento del gráfico de *f.*
- Puntos de inflexión, si existen, e intervalos de concavidad del gráfico de *f.*
- Gráfica de *f* e Imagen de *f*.
- Extremos absolutos, si existen.
- Ecuación de la recta tangente al grafico de f en el punto (1,0)

1- Calcule los siguientes límites **(20 pts)**

a) $\lim_{x \to 0} (1 - 2x)^{\frac{5}{sen(x)}}$ b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos(x^2))}{x^4}$

Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to \infty} x^4 \; e^{-(x)^2}$

b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{tg(x-1)}{x^3 - x^2}$

c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos(x^2))}{x^4}$

2- Dada la función *f(x)* = $\dfrac{2x-1}{\sqrt{x+1} - 2}$

a) Determine su dominio y expréselo como intervalo o como unión de intervalos. **(10 pts)**
b) Indique si el dominio es un conjunto acotado superior e inferiormente. En caso de existir encuentre el máximo, el mínimo el supremo y el ínfimo. **(5 pts)**
c) Determine analíticamente en que puntos, si existen, la grafica de la función corta a a los ejes coordenados **(5 pts)**

3- Calcule los siguientes límites **(20 pts)**

a) $\lim_{x \to 0} (1+3x)^{\frac{1}{sen(x)}}$ b) $\lim_{x \to 0} \frac{5\cos x - 5}{x(x+3)}$

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS 2012

UNIDAD 2: INTEGRACIÓN

Preparada por el Prof. Antonio Crivillero Rao

INTEGRALES INDEFINIDAS

MÉTODO DE INTEGRACIÓN

Ejercicios resueltos

a) **Integral Inmediata**

1)

$$\int x.\sqrt{x/\sqrt[4]{x^3}}\,dx = \int x(x)^{1/2}/(x)^{3/4}dx = \int x^{3/2}/x^{3/4}dx = \int x^{3/4}dx = \frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+C$$

2)

$$\int\left(-\frac{2}{3}e^3+\sqrt[3]{x^4}\right)dx = -\frac{2}{3}e^3x+\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+C$$

3)

$$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln(5)}+C$$

4)

$$\int \frac{\pi}{8(1+x^2)}dx = \frac{\pi}{8}arctg(x)+C$$

5)

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+x\sqrt[4]{x}\right)dx = \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}+\frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x}+C$$

6)

$$\int -\frac{8}{\cos^2 x}dx = -8tgx+C$$

7)

$$\int \frac{\left(sen^2x+\cos^2 x\right)}{sen^2x}dx = -ctgx+C$$

8)

$$\int\left(8y-\frac{2}{y^{\frac{1}{4}}}\right)dy = 4y^2-\frac{8}{3}y^{\frac{3}{4}}+C$$

b**) Integración por regla de cadena** (semi-inmediata) Sustitución Directa.

1)

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{adt}{\left(1+t^2\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}arctgt + C$$

Sustitución

$$t = \frac{x}{a}$$

$$dt = \frac{1}{a}dx$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

2)

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

3)

$$\int \cos\left(\ln(x)\right)\frac{1}{x}dx = sen\left(\ln(x)\right) + C$$

4)

$$\int \frac{\left(x^2+4\right)}{\left(x^3+12x+8\right)}dx = \frac{1}{3}\ln\left[\left(x^3+12x+8\right)\right] + C$$

5)

$$\int sen(5x)\sqrt{\cos(5x)}dx = -\frac{2}{15}\cos(5x)\sqrt{\cos(5x)}$$

6)

$$\int\left(\cos^3 x + x^3\right)\left(\cos^2 x.sen(x) - x^2\right) = -\frac{1}{6}\left(\cos^3 x + x^3\right)^2 + C$$

7)

$$\int \frac{e^{4x}}{1+e^{8x}};\int\left(\frac{e^{4x}}{1+e^{8x}}\right)dx = \frac{1}{4}arctg(e^{4x}) + C$$

8)

$$\int \frac{2^{\sqrt{w}}dw}{2\sqrt{w}} = \frac{2^{\sqrt{w}}}{\ln(2)} + C$$

9)

$$\int \frac{2tdt}{\sqrt{1-t^4}} = arcsen\left(t^2\right) + C$$

10)

$$\int\left(\frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}\right)dx=$$

$u=x^2+x+1$

$du=(2x+1)\,dx$

$$=\int\frac{\cancel{(2x+1)}}{\sqrt[3]{u}}\frac{du}{\cancel{(2x+1)}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}+C$$

11)

$$\int\sqrt[3]{2+\cos x}.senxdx=-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(2+\cos x\right)^4}+C$$

c) **Método de Integración por partes**

El método de integración por partes esta basado en el siguiente teorema:

Si f y g son dos funciones derivables y si f' y g' son funciones continuas, entonces: $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$ (1)

Observación:

I) A los fines prácticos se suele utilizar la siguiente fórmula para la integración por partes:

Si $u=f(x)\rightarrow du=f'(x)dx$

$v=g(x)\rightarrow dv=g'(x)dx$ sustituyendo todo esto en (1) obtenemos

$\int udv=uv-\int vdu$

II) El propósito de usar el método de integración por partes es el de realizar una integral más simple $\int vdu$ que la original $\int udv$

III) Procedimiento:

a. Se elige como $u=f(x)$ a la función que no sea tan complicada de calcular su derivada.
b. Se elige como $dv=g'(x)dx$ a la expresión que se pueda integrar fácilmente para obtener v
c. Se verifica si la elección es adecuada cuando al calcular la integral $\int vdu$ sea menos complicada que la integral original $\int udv$

Veamos algunos tipos en los que se pueda aplicar la fórmula para integrar por partes:

Tipo A

Función potencial x^m multiplicada por un exponencial e^{ax} ó por una función seno ó coseno.

Ejemplo 1)

$$\int xe^x dx \qquad u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$

$$\int xe^x dx = e^x \left(x-1\right) + C$$

Ejemplo 2)

$$\int xsenxdx \qquad u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = senxdx \rightarrow v = \int senxdx = -\cos x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xsenxdx = -x\cos x + \int \cos xdx$$

$$\int xsenxdx = -x\cos x + senx + C$$

Ejemplo 3)

$$\int x\cos xdx \qquad u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos xdx \rightarrow v = \int \cos xdx = senx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x\cos xdx = xsenx - \int senxdx$$

$$\int x\cos xdx = xsenx + \cos x + C$$

<u>Observación</u>:
La función potencial x^m multiplicada por una exponencial e^{ax} o por una función seno o coseno se integran por partes y la elección de u es siempre la función exponencial.

$$\int x^u e^{ax} dx \qquad u = x^u ; dv = e^{ax} dx$$

$$\int x^u senaxdx \qquad u = x^u ; dv = senaxdx$$

$$\int x^u \cos axdx \qquad u = x^u ; dv = \cos axdx$$

Calcular las siguientes integrales del **Tipo A**.

	<u>Integral</u>	<u>Respuesta</u>
1)	$\int x^3 e^x dx$	$e^x \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) + C$
2)	$\int x^2 e^{-x} dx$	$-e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + C$
3)	$\int xsen2xdx$	$\frac{1}{4}sen2x - \frac{1}{2}x\cos^2 x + C$

4) $\int x^3 senx dx$ $\qquad -x^3\cos x + 3x^2 senx + 6x\cos x - 6senx + C$

5) $\int x^2 \cos x dx$ $\qquad senx\left(x^2-2\right)+2x\cos x + C$

6) $\int x\cos(3x)dx$ $\qquad \frac{1}{3}\left(xsen3x+\frac{1}{3}\cos 3x\right)+C$

Tipo B

- Función logarítmica multiplicada por una exponencial x^n se integra por partes; donde se elige como $dv = x^m dx$
- Funciones trigonométricas inversas multiplicadas por una constante o por una identidad x se integra por partes, donde $dv = xdx$

Ejemplo 1)

$$\int x^4 \ln x dx \qquad u=\ln x \to du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = x^4 dx \to v = \frac{1}{5}x^5$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int \ln x x^4 dx = \ln x \frac{1}{5}x^5 - \int \frac{1}{5}x^5 \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{1}{5}x^5 \ln x - \frac{1}{5}\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 \ln x - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x^5\right)+C$$

$$= \frac{1}{5}x^5\left(\ln x - \frac{1}{5}\right)+C$$

Ejemplo 2)

$$\int arcsenx dx \qquad u = arcsenx \to du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$dv = dx \to v = x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int arcsenx dx = arcsenx x - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= xarcsenx - \left(-\sqrt{1-x^2}\right)+C$$

$$\int arcsenx dx = xarcsenx - \left(-\sqrt{1-x^2}\right)+C$$

Por sustitución

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad w=1-x^2 \qquad dw=-2xdx$$

$$=-\frac{1}{2}\int w^{-\frac{1}{2}}dw=-\frac{1}{2}\left(2w^{\frac{1}{2}}\right)=-\sqrt{w}=-\sqrt{1-x^2}$$

Ejemplo 3)

$$\int arctg\left(2x\right)dx \qquad u=arctg\left(2x\right)\to du=\frac{2}{1+\left(2x\right)^2}dx$$

$$dv=dx\to v=x$$

$$\int udv=uv-\int vdu$$

$$\int arctg\left(2x\right)dx=arctg\left(2x\right)x-\int x\frac{2}{1+4x^2}dx$$

$$=xarctg\left(2x\right)-\frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)+C$$

$$\int arctg\left(2x\right)dx=xarctg\left(2x\right)-\frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\int \frac{2x}{1+4x^2} \qquad w=1+4x^2\to dw=8xdx\to dx=\frac{dw}{8x}\\ \frac{1}{4}\int\frac{dw}{w}=\frac{1}{4}\ln w=\frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)\end{array}}$$

Calcular las siguientes integrales **Tipo B**

	Integral	Respuesta
1)	$\int \ln x^{-3}dx$	$-\frac{1}{2}x^{-2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)+C$
2)	$\int xarcsenxdx$	$\left(\frac{2x^2-1}{4}\right)arcsenx+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C$
3)	$\int xarctgxdx$	$\left(\frac{x^2+1}{2}\right)arctgx-\frac{x}{2}+C$

Tipo C

Función exponencial e^x multiplicada por la función seno o coseno se integra por partes y la elección de u y de dv es de cualquier forma. Es decir se puede elegir a u como la función trigonométrica, ver ejemplo 1) o se puede elegir u como la función exponencial, ver ejemplo 2).

Ejemplo 1) $\int e^x senxdx=$

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad u=senx\to du=\cos xdx;\ dv=e^x dx\to v=e^x$$

$$\int e^x senxdx=senxe^x-\int e^x\cos xdx$$

Dejemos por un momento e integremos $\int e^x \cos x dx$ lo hacemos por partes:

$u = \cos x \to du = -senxdx$

$dv = e^x dx \to v = e^x$

$\int e^x \cos x dx = \cos x e^x + \int e^x senxdx$

Volvemos donde habíamos quedado y reemplazamos

$\int e^x \cos x dx = \cos x e^x + \int e^x senxdx$

$\int e^x senxdx = senxe^x - \cos x e^x - \int e^x senxdx$

$2\int e^x senxdx = e^x senx - e^x \cos x \to \int e^x senxdx = \frac{1}{2} e^x \left(senx - \cos x\right) + C$

Ejemplo 2) $\int e^x \cos x dx$

$\int udv = uv - \int vdu \quad u = e^x \to du = e^x dx; dv = \cos x dx \to v = senx$

$\int e^x \cos x dx = e^x senx - \int senxe^x dx$

Dejemos por un momento e integremos $\int senxe^x dx$ lo hacemos por partes:

$u = e^x \to du = e^x dx$

$dv = senxdx \to v = -\cos x$

$\int senxe^x dx = e^x \left(-\cos x\right) + \int \cos x e^x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$

Donde habíamos quedado, reemplacemos

$\int senxe^x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$

$\int e^x \cos x dx = e^x senx - \int senxe^x dx = e^x senx - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\right)$

$= e^x senx + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$

$2\int e^x \cos x dx = e^x senx + e^x \cos x \to \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x \left(senx + \cos x\right) + C$

Calcular las siguientes integrales del **Tipo C**

	Integral	Respuesta
1)	$\int e^{3x} senxdx$	$\frac{1}{13} e^{3x} \left(3sen2x - \cos 2x\right) + C$
2)	$\int e^{3x} \cos 2x dx$	$\frac{1}{13} e^{3x} \left(3\cos(2x) + 2sen(2x)\right) + C$
3)	$\int e^{3x} \left(sen2x - \cos 2x\right) dx$	$\frac{e^{3x}}{13}\left(sen(2x) - 5\cos(2x)\right) + C$

Ejercicios varios de integrales por partes

Integral Respuesta

1) $\int xe^{-x}dx$ $\qquad -e^{-x}\left(x+1\right)+C$

2) $\int \left(x+1\right)^2 e^x dx$ $\qquad e^x\left(x^2+1\right)+C$

3) $\int \left(x^2+x\right)e^{-x}dx$ $\qquad e^{-x}\left(-x^2-3x-3\right)+C$

4) $\int \ln\left(x\right)dx$ $\qquad x\left(\ln x-1\right)+C$

5) $\int \ln^2\left(x\right)dx$ $\qquad x\left(\ln^2 x\right)+2x\left(1-\ln x\right)+C$

6) $\int x^{-\frac{1}{2}}\ln x dx$ $\qquad 2x^{\frac{1}{2}}\left(\ln x-2\right)+C$

7) $\int \left(x/\ln x\right)dx$ $\qquad \dfrac{1}{2}\left(\ln^2\left(x\right)\right)+C$

8) $\int arctg\left(3x\right)dx$ $\qquad xarctg\left(3x\right)-\dfrac{1}{6}\ln\left(1+9x^2\right)+C$

9) $\int e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(x/2\right)dx$ $\qquad e^{-\frac{x}{2}}\left(sen\left(x/2\right)-\cos\left(x/2\right)\right)+C$

10) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ $\qquad x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C$

11) $\int sen\left(\ln\left(x\right)\right)dx$ $\qquad \dfrac{x}{2}\left(sen\left(\ln\left(x\right)\right)-\cos\left(\ln\left(x\right)\right)\right)+C$

12) $\int \cos\left(\ln\left(x\right)\right)dx$ $\qquad \dfrac{x}{2}\left(\cos\left(\ln\left(x\right)\right)+sen\left(\ln\left(x\right)\right)\right)+C$

13) $\int e^{\sqrt{x}}dx$ $\qquad 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C$

14) $\int sen^2 x dx$ $\qquad \dfrac{x}{2}-\dfrac{sen2x}{4}+C$

d) **Integración de funciones alg. Racionales**

$\int \dfrac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}dx$ Donde $P\left(x\right)$ y $Q\left(x\right)$ son polinomios de grado “m” y “n” respectivamente. Es decir,

$$P\left(x\right)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+...+a_1x+a_0$$
$$Q\left(x\right)=b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1x+b_0$$

Consideremos los siguientes casos:

CASO I) El grado del numerador $P\left(x\right)$ es menor que el grado del denominador $Q\left(x\right)$; es decir: $m<n$

I. -1) **El grado de** $P\left(x\right)$ **es cero (polinomio constante**: $P\left(x\right)=a_0$. **El grado del** $Q\left(x\right)$ **es 1 (uno)** (**Polinomio lineal:** $Q\left(x\right)=b_1x+b_0$)

$\int \dfrac{a_0}{b_1x+b_0}dx$ Se resuelve por sustitución directa.

Ejemplo 1)

$$\int \frac{3}{4x+2}dx \quad \text{si } u = 4x+2 \rightarrow du = 4dx$$

$$\int \frac{3}{4x+2}dx = \frac{3}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{4}\ln|u| + C = \frac{3}{4}\ln|4x+2| + C$$

I. -2) **El denominador $Q(x)$ tiene raíces reales, simples y distintas. Se resuelve previamente aplicando "DESCOMPOSICIÓN en fracciones Simples; que consiste en descomponer $P(x)/Q(x)$ en suma de fracciones simples"**

Ejemplo 1)

$$\int \frac{x-5}{2x^2-10x+8}dx$$

a) Se calculan las raíces del denominador $2x^2-10x+8=0$ donde $x_1=1; x_2=4$ luego tenemos dos raíces reales y distintas; luego $2x^2-10x+8=2(x-1)(x-4)$

b) Aplicamos "Descomposición en fracciones simples"

$(x-5)/2x^2-10x+8 = k_1/2(x-1)+k_2/(x-4) \rightarrow (x-5)/2x^2-10x+8 =$

$\left[k_1(x-4)+k_2 2(x-1)\right]/2(x-1)(x-4);$

Luego $(x-5)=k_1(x-4)+k_2 2(x-1)$

si $x=1 \rightarrow -4 = k_1(-3) \rightarrow k_1 = \frac{4}{3}$

si $x=4 \rightarrow -1 = k_2(6) \rightarrow k_2 = -\frac{1}{6}$

Por consiguiente tenemos $(x-5)/2x^2-10x+8 = 4/3/2(x-1)+(-1/6)/(x-4)$

Finalmente integrando:

$\int (x-5)dx/2x^2-10x+8 = \int 4/3dx/2(x-1)+\int(-1/6)dx/(x-4)$

$\int (x-5)dx/2x^2-10x+8 = 2/3\,ln|x-1|-1/6\,ln|x-4|+C$

I. -3) **El denominador $Q(x)$ tiene raíces reales múltiples. También se resuelve aplicando previamente la "Descomposición en fracciones simples".**

Ejemplo 1)

$\int \frac{2x+3}{(x-2)^3}dx$ Las raíces del denominador son:

$(x-2)^3=0 \rightarrow (x-2)(x-2)(x-2)=0$

$x_1=x_2=x_3=2$ tres raíces reales e iguales.

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)^3}dx = \frac{k_1}{(x-2)^3} + \frac{k_2}{(x-2)^2} + \frac{k_3}{(x-2)} = \frac{k_1 + k_2(x-2) + k_3(x-2)^2}{(x-2)^3}$$

$$2x+3 = k_1 + k_2(x-2) + k_3(x-2)^2$$

si $x = 2 \to 7 = k_1$; si $x = 0 \to 3 = 7 - 2k_2 + 4k_3$

$-2k_2 + 4k_3 = -4$ si $x = 1 \to 5 = 7 - k_2 + k_3 \to -k_2 + k_3 = -2$

Resolviendo estas ecuaciones obtenemos que k_2 =2, k_3 =0.

Luego tenemos:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)^3}dx = \frac{7}{(x-2)^3} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

$$\therefore \int \frac{2x+3}{(x-2)^3}dx = \int \frac{7}{(x-2)^3}dx + \int \frac{2}{(x-2)^2} = -\frac{7}{2}\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right) - 2\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)^3}dx = \frac{-7}{2(x-2)^2} + \frac{-2}{x-2} + C$$

I. -4) **El numerador es un polinomio de grado cero. El denominador es un polinomio con raíces complejas simples**.

$\int \frac{1}{Q(x)}dx$ Se resuelve por sustitución directa previamente se completa en el denominador los cuadrados.

Ejemplo 1)

$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}$ Calculo de las raíces del denominador $x^2 - 2x + 5 = 0$, $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$

Completar los cuadrados en $x^2 \_ 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 4} \left\{ \text{llevan la forma } \int \frac{du}{u^2+1} \right.$$

$$\int \frac{\frac{1}{4}dx}{\frac{(x-1)^2 + 4}{4}} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1} \left\{ \begin{array}{l} \text{si } u = \dfrac{x-1}{2} \\ du = \dfrac{1}{2}dx \end{array} \right.$$

$$\frac{2}{4}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}arctgu = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) + C$$

I. -5) **El numerador es un polinomio lineal de la forma** $P(x)=a_1x+a_0$**. El denominador es un polinomio cuadrático de la forma** $Q(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$ **con raíces complejas simples**.

$\int\frac{3x-4}{x^2-4x+5}dx$ Calcular las raíces del denominador: $x^2-4x+5=0$

$x_1=2+i;x_2=2-i$

…Derivamos el denominador $\left(x^2-4x+5\right)'=2x-4$

…La derivada obtenida debe figurar en el numerador $3x-4=\frac{3}{2}(2x-4)+2$

$$\int\frac{3x-4}{x^2-4x+5}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x-4)+2}{x^2-4x+5}dx=\frac{3}{2}\underbrace{\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\int\frac{2}{x^2-4x+5}dx}_{\mathrm{II}}$$

I

$$\frac{3}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx=\begin{cases}u=x^2-4x+5\\ du=(2x-4)dx\end{cases}$$

$$\frac{3}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{3}{2}\ln|u|=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right|$$

II

Se resuelve como en el caso **I – 4).**

$$\int\frac{2}{x^2-4x+5}dx\begin{cases}x^2-4x+5=(x-2)^2+1\\ u=(x-2)\rightarrow du=dx\end{cases}$$

$$\int\frac{2du}{u^2+1}=2\int\frac{du}{u^2+1}=2arctgu=2arctg(x-2)$$

Resultado:

$$\int\frac{3x-4}{x^2-4x+5}dx=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right|+2arctg(x-2)+C$$

I. -6) **El denominador tiene raíces reales y complejas**.

$$\int\left(2x^3-4x-8\right)dx\big/x(x-1)\left(x^2-4\right)$$

Nos damos cuenta que el denominador tiene dos raíces reales y complejas conjugadas; luego tenemos:

$$\left(2x^3-4x-8\right)/x\left(x-1\right)\left(x^2-4\right)=k_1/x+k_2/\left(x-1\right)+\left(k_3x+k_4\right)/\left(x^2+4\right)$$

$$\left(2x^3-4x-8\right)=k_1\left(x-1\right)\left(x^2+4\right)+k_2x\left(x^2+4\right)+\left(k_3x+k_4\right)x\left(x-1\right)$$

si $x=0\rightarrow -8=k_1(-1)(4)+0+0\rightarrow k_1=2$

si $x=1\rightarrow -10=0+k_2(5)+0\rightarrow k_2=-2$

si $x=-1\rightarrow -6=2(-2)(5)+(-2)(-1)(5)+(-k_3+k_4)(-1)(-2)\rightarrow 2=-k_3+k_4$

si $x=2\rightarrow 0=2(1)(8)+(-2)(2)(8)+(2k_3+k_4)(2)(1)\rightarrow 8=2k_3+k_4$

Resolviendo este sistema

$2=-k_3+k_4$

$8=2k_3+k_4$

Obtenemos $k_3=2$ y $k_4=4$

$$\int\left(2x^3-4x-8\right)dx/x\left(x-1\right)\left(x^2-4\right)=\int\left(2/x-2/\left(x-1\right)+2x/\left(x^2+4\right)+4/x^2+4\right)dx=$$

$$=2\,ln|x|-2\,ln|x-1|+ln\left(x^2+4\right)+2arctg\left(x/2\right)+C$$

CASO II) EL Grado del polinomio numerador $P(x)$ es mayor o igual que el grado del denominador $Q(x)$; es decir $m\geq n$

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

En este caso se procede de la siguiente manera:

a) Se efectúa la división de polinomios $\begin{array}{c|c} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$

b) Se expresa $P(x)=C(x)Q(x)+R(x)$

c) En esta última expresión se divide por $Q(x)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{C(x)Q(x)+R(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

d) Integramos lo obtenido últimamente

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\left(C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}\right)dx=\int C(x)dx+\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

e) La primera integral al ser $C(x)$ un polinomio, e inmediata. En cambio la segunda integral se resuelve según el caso que tengamos.

Ejemplo 1)

$$\int\frac{3x+2}{x+4}dx$$

$$\begin{array}{l|l} 3x+2 & x+4 \\ \hline -3x-12 & 3 \\ \hline \quad -10 & \end{array}$$

$$3x+2=3(x+4)-10$$

$$\frac{3x+2}{x+4}=\frac{3(x+4)-10}{x+4}=3-\frac{10}{x+4}$$

$$\int\frac{3x+2}{x+4}dx=\int\left(3-\frac{10}{x+4}\right)dx=3\int dx-10\int\frac{dx}{x+4}$$

$$\int\frac{3x+2}{x+4}dx=3x-10\ln|x+4|+C$$

Ejemplo 2)

$$\int\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^4}-\cancel{x^3}-x-1 & x^3-x^2 \\ \cline{2-2} -\cancel{x^4}+\cancel{x^3} & x \\ \hline \qquad -x-1 & \end{array}$$

$$x^4-x^3-x-1=x\left(x^3-x^2\right)+(-x-1)$$

$$\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}=\frac{x\left(x^3-x^2\right)-x-1}{\left(x^3-x^2\right)}=x+\frac{-x-1}{x^3-x^2}$$

$$\int\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx=\int\left(x+\frac{-x-1}{x^3-x^2}\right)dx=\int xdx+\int\frac{-x-1}{x^3-x^2}dx$$

Según el **Caso II**.

a) $x^3-x^2=0\rightarrow\begin{cases}x_{1,2}=0\\ x_3=1\end{cases}$

b) por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{-x-1}{x^3-x^2}=\frac{k_1}{x^2}+\frac{k_2}{x}+\frac{k_3}{x-1}\begin{cases}k_1=1\\ k_2=2\\ k_3=-2\end{cases}$$

$$\int xdx=\frac{x^2}{2}$$

$$\int\frac{-x-1}{x^3-x^2}dx=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+\frac{-2}{x-1}\right)dx=\int\frac{1}{x^2}dx+2\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x-1}=-\frac{1}{x}+2\ln|x|-2\ln|x-1|$$

$$\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+2\ln|x|-2\ln|x-1|+C$$

$$\therefore \int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+C$$

Ejercicios de Integración de Funciones Racionales

<u>Integral</u>	<u>Respuesta</u>
1) $\int \frac{-5}{-x+3}dx$	$5\ln\|-x+3\|+C$
2) $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$	$\frac{3}{11}\ln\|3x+1\|+\frac{2}{33}\ln\|2x-3\|-\frac{1}{3}\ln\|x\|+C$
3) $\int \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}$	$\ln\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}+C$
4) $\int \frac{xdx}{2x^2-3x-2}$	$\frac{1}{5}\ln\left\|(x-2)^2\sqrt{2x+1}\right\|+C$
5) $\int \frac{5x-7}{(x^2-x-2)(x-3)}dx$	$\ln\left\|\frac{(x-3)^2}{(x-2)(x+1)}\right\|+C$
6) $\int \frac{x-4}{2x^2-8x+6}dx$	$\frac{1}{4}\ln\left\|\frac{(x-1)^3}{x-3}\right\|+C$
7) $\int \frac{4x^2+9x-1}{x^3+2x^2-x-2}dx$	$\ln\left\|\frac{(x-1)^3(x+1)^2}{x+2}\right\|+C$
8) $\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}dx$	$\frac{1}{2}(x+3)^{-2}-2(x+3)^{-1}+C$
9) $\int \frac{(2x^2+1)}{(x-3)(x+1)^2}dx$	$\frac{13}{16}\ln\|(x-3)(x+1)\|+\frac{3}{4(x+2)}+C$
10) $\int \frac{x^3-3x+4}{(x-1)^3(x+1)}dx$	$\frac{1}{4}\ln\left\|\frac{(x-1)^7}{(x+1)^3}\right\|+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x-1)^2}+C$
11) $\int \frac{11/3}{x^2+4}dx$	$\frac{11}{6}arctg\left(\frac{1}{2}x\right)+C$
12) $\int \frac{-2/5}{-x^2-9}dx$	$\frac{2}{15}arctg\left(\frac{1}{3}x\right)+C$
13) $\int \frac{5x-11}{x^2+3x+7}dx$	$\frac{5}{2}\ln\|x^2+3x+7\|-\frac{37}{\sqrt{19}}arctg\left(\frac{2x+3}{\sqrt{19}}\right)+C$
14) $\int \frac{x+1}{x^2-2x+5}dx$	$\frac{1}{2}\left[\ln(x^2-2x+5)+2arctg\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)\right]+C$
15) $\int \frac{3x+2}{x+5}dx$	$3x-13\ln\|x+5\|+C$
16) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$	$x+3\ln\left\|\frac{x-3}{x-2}\right\|+C$

17) $\int \frac{x^3-2x}{x^3-2x^2+x}dx$ $\qquad x+\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|+C$

18) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$ $\qquad \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$

19) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$ $\qquad \frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln(2x+1)+C$

20) $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}dx$ $\qquad \frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}\right|+C$

e) **Sustitución Inversa**

1) Sustitución $1+e^x=u$

$$\int \frac{dx}{1+e^x}= \qquad e^x=(u-1) \qquad x=\ln(u-1) \qquad dx=\frac{du}{u-1}$$

1)

$$\int \frac{dx}{1+e^x}=\int \frac{du}{u(u-1)}$$

Y se resuelve como función racional

$$\frac{1}{u(u-1)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u-1}\Rightarrow\begin{Bmatrix}A=-1\\ B=1\end{Bmatrix}$$

$$\int \frac{du}{u(u-1)}=-\int\frac{du}{u}+\int\frac{du}{(u-1)}=-\ln(u)+\ln(u-1)+C$$

$$\int \frac{dx}{1+e^x}=-\ln(1+e^x)+\ln(e^x)=\ln\frac{(e^x)}{(1+e^x)}+C$$

2)

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)dx=2\left(\sqrt{x}sen\left(\sqrt{x}\right)+\cos\left(\sqrt{x}\right)\right)+C$$ Sustitución $\sqrt{x}=u$

3)

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}=arctg\left[e^x\right]+C$$ Sustitución $e^x=u$

4)

$$\int sen\sqrt{x+1}dx$$
$$=-\sqrt{x+1}\cos\left(\sqrt{x+1}\right)+sen\left(\sqrt{x+1}\right)+C$$

Sustituir $\sqrt{x+1}=u$

5)

$$\int \sqrt{1+senx}dx$$
$$=-\sqrt{1-senx}+C$$

Sustitución $(1+senx)=u^2$

6)

$$\int sen(3x+7)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=-\frac{2}{3}\left[-(3x+7)^{\frac{1}{2}}\cos(3x+7)^{\frac{1}{2}}+sen(3x+7)^{\frac{1}{2}}\right]+C$$

Sustituir $(3x+7)=u^2$

f) **Integrales de funciones trigonométricas**

1)

$$\int sen^5xdx=\int senx\left(sen^2x\right)^2dx=\int sen\left(1-\cos^2x\right)^2dx=$$

$$\int sen^5xdx=\int senx\left(1-2\cos^2x+\cos^4x\right)dx=\int senxdx-2\int senx\cos^2xdx+\int senx\cos^4xdx$$

$$\int sen^5xdx=-\cos x+\frac{2}{3}[\cos x]^3-\frac{1}{5}[\cos x]^5+C$$

2)

$$\int\cos^3\left(\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}sen\left(\frac{x}{2}\right)-2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{3}sen^3\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

3)

$$\int sen^2xdx=\int\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)dx=\int\frac{1}{2}dx-\int\frac{\cos(2x)}{2}dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}sen(2x)+C$$

4)

$$\int\cos^4xdx=\frac{3}{8}x+\frac{sen2x}{4}+\frac{sen4x}{32}+C$$

5)

$$\int sen^2x\cos^3xdx=\int sen^2x\cos x\cos^2xdx=\int sen^2x\cos x\left(1-sen^2x\right)dx=$$

$$=\int sen^2x\cos xdx-\int sen^4x\cos xdx$$

6) $\int sen^2x\cos^3xdx=\frac{sen^3x}{3}-\frac{sen^5x}{5}+C$

7)

$$\int\left(sen^{\frac{3}{5}}x\cos^3x\right)dx=\frac{5}{8}sen^{\frac{5}{8}}x-\frac{5}{18}sen^{\frac{18}{5}}x+C$$

8)

$$\int sen^2[4x]\cos^2[4x]dx=\frac{x}{8}-\frac{sen(16x)}{128}+C$$

9)

$$\int sen^2 x\cos^2 x dx = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx =$$

$$= \int \frac{1}{4}dx - \int \frac{1}{4}\cos^2(2x)\,dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}sen(4x) + C$$

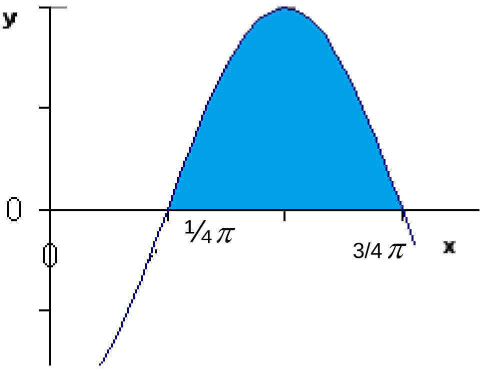
10)

$$\int\left(\sqrt[3]{\cos^5 x}\,sen^3 x\right)dx = -\frac{3}{8}\cos^{\frac{8}{3}} x + \frac{3}{14}\cos^{\frac{14}{3}} x + C$$

INTEGRALES DEFINIDAS

1)

$$\int_{1/4\pi}^{3/4\pi} -\cos(2x)dx$$



Sustitución

$u = 2x$

$$dx = \frac{1}{2}du$$

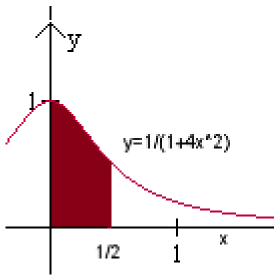
Al hacer el cambio de variable x por u, también cambian los límites de integración:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}\pi \text{ como } u = 2x = \frac{3}{2}\pi \\ x = \frac{1}{4}\pi \text{ como } u = 2x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{1/2\pi}^{3/2\pi}\cos u du = -\frac{1}{2}\left(sen\frac{3}{2}\pi . sen\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

2)

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1+4x^2} = \frac{\pi}{8}$$

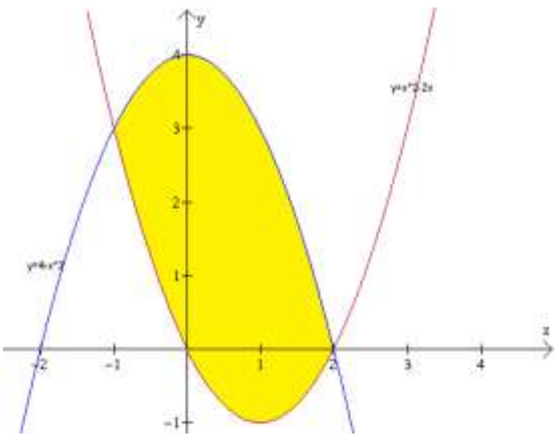


3) Hallar el área comprendida entre las parábolas

$y = 4 - x^2$

$y = x^2 - 2x$

$$|A| = \int_{-1}^{2}\left(x^2 - 2x - 4 + x^2\right)dx = |-9| = 9$$



Calcular la longitud del arco de $y = x^{\frac{3}{2}}$ que se extiende desde P=(1,1) y (4,4) = d con

5)

$$L = \int_{x1}^{x2} \sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\, dx$$
$$L = \int_{1}^{4} \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}\, dx \cong 7{,}63$$

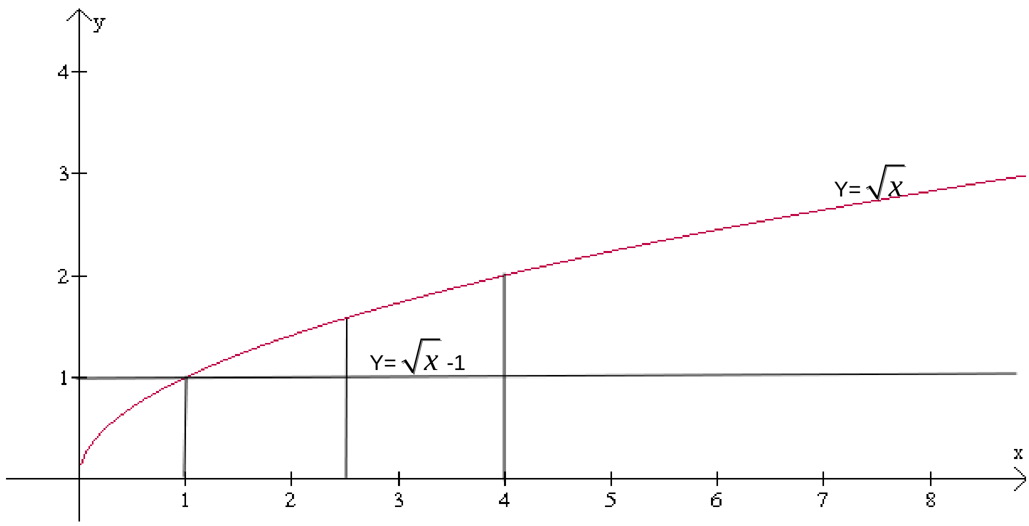
6)

$$\int_{1}^{3} \left(x^2 + 2x - 3\right) dx = \frac{32}{2}$$

7) Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por $y = \sqrt{x}$ y las rectas y=1; x=4 alrededor de la recta y=1

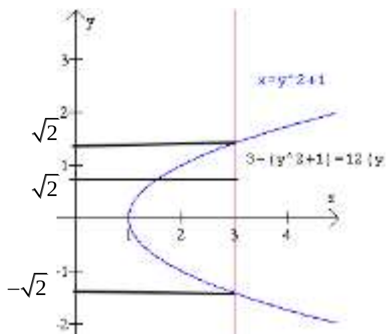
$$V = \int_{1}^{4} \pi \left[\sqrt{x} - 1\right]^2 dx = \frac{7}{6}\pi$$

Hallar los valores de α para que la integral converge o diverge



8) Hallar el volumen del sólido generado al girar la región entre la parábola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi \left[2 - y^2\right] dy = \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}$$



9) Hallar el área encerrada por la parábola $Y=-x^2+2$ y la recta $y=-x$

$$A=\int_{1}^{2}[f(x)-g(x)]dx=\int_{-1}^{2}\left(2+x-x^2\right)dx=\frac{9}{2}$$

Integración por el método de sustitución inversa.

1) $\int\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}dx$ Sustitución $e^x-1=u^2$

$$\int\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}dx=2arctg\left(\sqrt{e^x-1}\right)+C$$

2)

$\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ Sustitución $x+1=u^2$

$$\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-2(x+1)^{\frac{1}{2}}+C$$

3)

$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$ Sustitución $x=\frac{1}{u}$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)$$

Integración de funciones algebraicas racionales

a) Raíces Reales y distintas

1)

$$\int \frac{x}{\left(x^2-1\right)}dx =$$

Analizando integrando

$$\frac{x}{\left(x^2-1\right)} = \frac{A_1}{\left(x+1\right)} + \frac{A_2}{\left(x-1\right)}$$

$$\frac{x}{\cancel{\left(x^2-1\right)}} = \frac{A_1\left(x-1\right)+A_2\left(x+1\right)}{\cancel{\left(x+1\right)\left(x-1\right)}}$$

$$x = A_1\left(x-1\right)+A_2\left(x+1\right)$$

Si $x=1 \;\Rightarrow 1 = A_2 2 \quad \rightarrow A_2 = \frac{1}{2}$

Si $x=-1 \;\Rightarrow -1 = -2A_1 \quad \rightarrow A_1 = \frac{1}{2}$

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2-1\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x-1}\right| + C$$

2)

$$\int \left(\frac{x^2+2x-3}{x^3+5x^2+6x}\right)dx = -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{3}{2}\ln\left|\left(x+2\right)\right| + C$$

3)

$$\int \left(\frac{\left(2x-1\right)}{\left(x^2-x-2\right)}\right)dx = \ln\left|\left(x-2\right)\right| + \ln\left|\left(x+1\right)\right| + C = \ln\left|\left(x+1\right)\left(x-2\right)\right| + C$$

4)

$$\int \left(\frac{4x+3}{x^2-5x+6}\right)dx = 15\ln\left|\left(x-3\right)\right| - 11\ln\left|\left(x-2\right)\right| + C$$

5)

$$\int \left(\frac{x-1}{1-4x^2}\right)dx = \frac{1}{8}\ln\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)\right| + \left(-\frac{3}{8}\right)\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)\right| + C$$

6)

$$\int \left(\frac{2x-1}{x^2-3x+2}\right)dx = \ln\left|\frac{\left(x-2\right)^3}{x-1}\right| + C$$

7)

$$\int \left(\frac{\left(x-8\right)}{x^3-4x^2+4x}\right)dx = \frac{3}{x-2} + \ln\left|\frac{\left(x-2\right)^2}{x^2}\right| + C$$

Integración de funciones Racionales del seno y coseno

1)

$$\int \frac{dx}{1+senx+\cos x} = \qquad \frac{x}{2} = arctgu; \;\; x = 2arctgu$$

$$senx = \frac{2u}{1+u^2} \qquad dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\int \frac{dx}{1+senx+\cos x} = \int \frac{2}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{1}{1+u^2}du =$$

$$= \int \frac{2du}{\frac{1+u^2+2u+1-u^2}{\left(1+u^2\right)}}\frac{1}{\left(1+u^2\right)} = \int \frac{2du}{2\left(1+u\right)} = \ln\left|1+tg\,\frac{x}{2}\right| + C$$

2)

$$\int \frac{x}{sen^2x}dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{tg\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{2}tg\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

3)

$$\int \frac{dx}{3+\cos x+2senx} = arctg\left[tg\left(\frac{x}{2}\right)+1\right] + C$$

4)

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx = -tg\left(\frac{x}{2}\right)+\cancel{2}\frac{x}{\cancel{2}}+C$$

5)

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \ln\left|\frac{tg\,\frac{x}{2}+2}{tg\left(\frac{x}{2}\right)-2}\right|^{\frac{1}{4}} + C$$

<u>Teorema valor medio</u>

Hallar el valor de c, del **teorema de la media**, de la función f(x) = $3x^2$ en el intervalo [−4, −1].

Como la función es continua en el intervalo [−4, −1], se puede aplicar el **teorema de la media**.

$$\int_{-4}^{-1} 3x^2dx = \left[x^3\right]_{-4}^{-1} = -1+64 = 63$$

$$63 = \left[-1-(-4)\right]f(c)$$

$f(c)=21 \qquad 3c^2=21 \qquad c=-\sqrt{7}$

La solución positiva no es válida porque no pertenece al intervalo.

2. ¿Es aplicable el **teorema del valor medio del cálculo integral** a la siguiente función en el intervalo [0, 1]?

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Como la función es continua en [0, 1], se puede aplicar el **teorema de la media**.

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx=\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1=\sqrt{2}-1$$

$$f(c)=(1-0)\left(\sqrt{2}-1\right) \qquad f(c)=\sqrt{2}-1$$

$$\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}=\sqrt{2}-1 \qquad c=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

Calcular las siguientes integrales definidas aplicando la **regla de Barrow**.

Ejercicios Resueltos

1)

$$\int_{-1}^{1}\left(3x^3-x^2+x-1\right)dx$$

$$\int_{-1}^{1}\left(3x^3-x^2+x-1\right)dx=\left[\frac{3x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{8}{3}$$

2)

$$\int_1^e \frac{dx}{x}$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x}=[ln\,x]_1^e=ln\,e-ln1=1-0=1$$

3)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} senxdx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} senxdx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 0 + 1 = 1$$

4)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3 x \cos^4 x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3 x \cos^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} senx\left(1-\cos^2 x\right)\cos^4 x dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^4 x senx - \cos^6 x senx\right) dx = \left[-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$$

5)

$$\int_2^4 \log x dx$$

$$u = \log x \xrightarrow{derivar} u' = \frac{1}{x}\log e$$

$$v' = 1 \xrightarrow{integrar} v = x$$

$$\int_2^4 \log x dx = [x\log x]_2^4 - \int_2^4 \log e dx = [x\log x - x\log e]_2^4 =$$
$$= 4\log 2^2 - 4\log e - 2\log 2 + 2\log e =$$
$$= 8\log 2 - 4\log e - 2\log 2 + 2\log e = 6\log 2 - 2\log e$$

6)

$$\int_0^{\pi^2} sen\sqrt{x} dx$$

Calculamos la integral definida por cambio de variable.

$$\int sen\sqrt{x} dx$$
$$x = t^2$$
$$dx = 2tdt$$

Hallamos los nuevos límites de integración.

$x = 0 \qquad t^2 = 0 \qquad t = 0$

$x = \pi^2 \qquad t^2 = \pi^2 \qquad t = \pi$

$$\int sent2tdt = 2\int tsentdt$$

Integramos por partes.

$$u = t \xrightarrow{derivar} u' = 1$$

$$v' = \operatorname{sen} t \xrightarrow{integrar} v = -\cos t$$

$$2\int tsentdt = 2\left(-t\cos t + \int \cos tdt\right) = 2(-t\cos t + sent) + C$$

$$2\int_0^{\pi} tsentdt = 2[-t\cos t + sent]_0^{\pi} = 2\pi$$

También se puede hacer sin transformar los límites de integración y volviendo a la variable inicial.

$$t = \sqrt{x}$$
$$\int sen\sqrt{x}dx = 2\left(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + sen\sqrt{x}\right) + C$$

$$\int_0^{\pi^2} sen\sqrt{x}dx = 2\left[-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + sen\sqrt{x}\right]_0^{\pi^2} = 2\pi$$

7)

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \left[2\sqrt{1+x}\right]_0^3 = 2(2-1) = 2$$

8)

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\int_0^4 2x\left(x^2+9\right)^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{1}{3}\left(x^2+9\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{1}{3}\left[(25)^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{98}{3}$$

9)

$$\int_0^{\pi} sen^2xdx = \int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}sen2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

10)

$$\int_2^3 \frac{dx}{x\,ln^4 x} = \int_2^3 ln^{-4} x \frac{1}{x} dx = \left[-\frac{1}{3ln^3 x} \right]_2^3 = -\frac{1}{3ln^3 3} + -\frac{1}{3ln^3 2}$$

12)

$$\int_0^{\pi} cos\,x e^{senx} dx = \left[e^{senx} \right]_0^{\pi} = e^0 - e^0 = 0$$

13)

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

$x = t^2$ $\quad dx = 2tdt$ $\quad 4 = t^2$ $\quad t = 2$

$0 = t^2$ $\quad t = 0$

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2t}{1+t} dt = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = \quad R = 4 - -ln 9$$

Ejercicios a Resolver

	Integral	Respuesta
1)	$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3}$	$-5/72$
2)	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$	$2\sqrt{2}$
3)	$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx$	
4)	$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$	
5)	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$	
6)	$\int_0^{\pi} sen^2 x dx$	$\pi/2$
7)	$\int_0^{\pi} tg^2 x dx$	
8)	$\int_0^{\pi} senx\,cos\,x dx$	0
9)	$\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx$	$ln\left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$
10)	$\int_2^3 \frac{dx}{x\,ln^4 x}$	
11)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3 x dx$	
12)	$\int_0^{\pi} cos\,x e^{senx} dx$	0

13) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$

14) $\int_{-1}^{1} (\arccos x)^2 dx$

15) $\int_1^3 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx$ $\qquad \frac{38}{3}$

16) $\int_{-2}^{3} |x| dx$ $\qquad \frac{13}{2}$

17) $\int_0^4 \sqrt{3x} \left(\sqrt{x} + \sqrt{3} \right) dx$ $\qquad 8\sqrt{3} + 16$

18) $\int_0^{\pi} (x \cos 3x) dx$ $\qquad \frac{3}{8}$

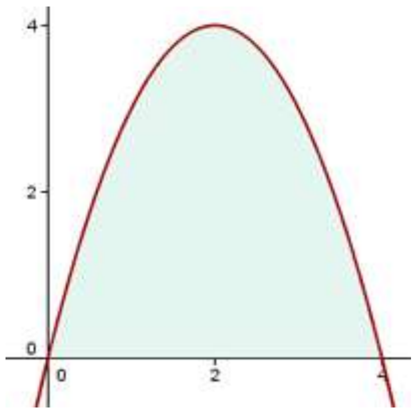
Aplicaciones de la Integral Definida

Ejercicios resueltos

1. Calcular el área del recinto limitado por la curva y = 4x − x^2 y el eje OX.

En primer lugar hallamos los puntos de corte con el eje OX para representar la curva y conocer los límites de integración.

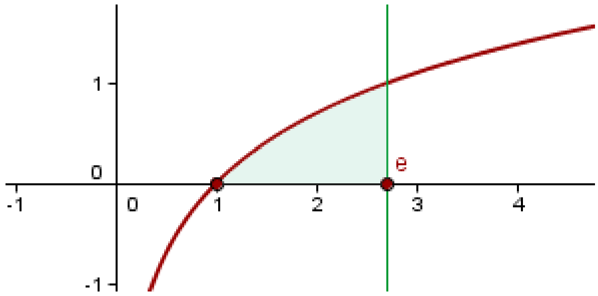
$$0 = 4x - x^2 \qquad x = 0 \qquad x = 4$$



En segundo lugar se calcula la integral:

$$A = \int_0^4 \left(4x - x^2 \right) dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{32}{3} u^2$$

2. Hallar el área de la región del plano encerrada por la curva y = ln x entre el punto de corte con el eje OX y el punto de abscisa x = e.



En primer lugar calculamos el punto de corte con el eje de abscisas.

$$ln\,x = 0 \qquad e^0 = 1 \qquad (1,0)$$

$$\int_1^e ln\,x dx$$

$$v = \ln x \xrightarrow{derivar} v' = \frac{1}{x}$$

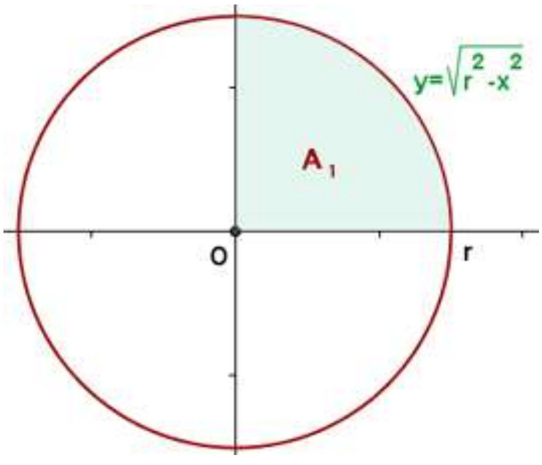
$$v' = 1 \xrightarrow{integrar} v = x$$

$$\int ln\,x dx = x\,ln\,x - \int dx = x\,ln\,x - x + C$$

$$\int_1^e ln\,x dx = \left[x(ln\,x - 1)\right]_1^e = 0 + 1 = 1u^2$$

2. Calcular el área del círculo de radio r.

Partimos de la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.



El área del círculo es cuatro veces el área del primer cuadrante.

$$A_1 = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

Calculamos la integral indefinida por cambio de variable.

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$
$$x = r sen t$$
$$dx = r \cos t dt$$

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{r^2 - r^2 sen t r \cos t}\,dt = \int \sqrt{r^2\left(1 - sen^2 t\right)}\, r \cos t dt =$$
$$= \int r^2 \cos^2 t dt = r^2 \int \cos^2 t dt = r^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = r^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} sen^2 2t\right] + C$$

Hallamos los nuevos límites de integración.

$$x = 0 \qquad 0 = r sen t \qquad sen t = 0 \qquad t = 0$$

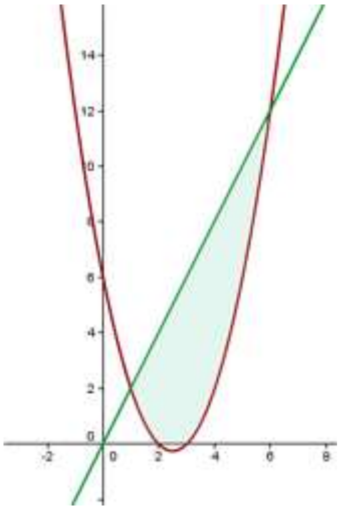
$$x = r \qquad r = r sen t \qquad sen t = 1 \qquad t = \frac{\pi}{2}$$

$$A_1 = r^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} sen^2 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{1}{4}\pi r^2$$
$$A = 4A_1 = \pi r^2$$

3. Calcular el área limitada por la curva y = x^2 -5x + 6 y la recta y = 2x.

En primer lugar hallamos los puntos de corte de las dos funciones para conocer los límites de integración.

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ y = 2x \end{cases} \qquad x_1 = 1 \qquad x_2 = 6$$



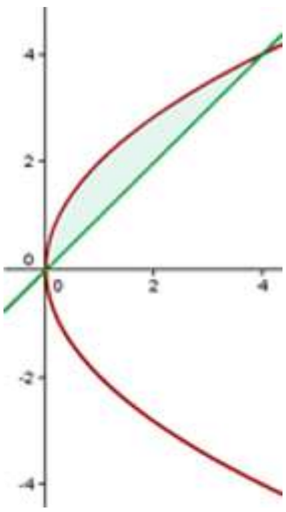
De x = 1 a x = 6, la recta queda por encima de la parábola.

$$A=\int_1^6\left(2x-x^2+5x-6\right)dx=\int_1^6\left(-x^2+7x-6\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{6}-6x\right]_1^6=$$

$$=\left(-\frac{6^3}{3}+\frac{(7)6^2}{2}-36\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{7}{2}-6\right)=\frac{125}{6}u^2$$

4. Calcular el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = x$.

$$\begin{cases} y^2=4x \\ y=x \end{cases} \qquad y^2=4y \qquad (0,0) \qquad (4,0)$$



De x = o a x = 4, la parábola queda por encima de la recta.

$$A=\int_0^4 \sqrt{4x}dx-\int_0^4 xdx=\int_0^4\left(\sqrt{4x}-x\right)dx=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\frac{8}{3}u^2$$

5 . Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones 3y =x^2 e y = −x^2 + 4x.

En primer lugar representamos las parábolas a partir del vértice y los puntos de corte con los ejes.

$$y=\frac{x^2}{3}$$

$$x_v=0 \qquad y_v=0 \qquad V(0,0)$$

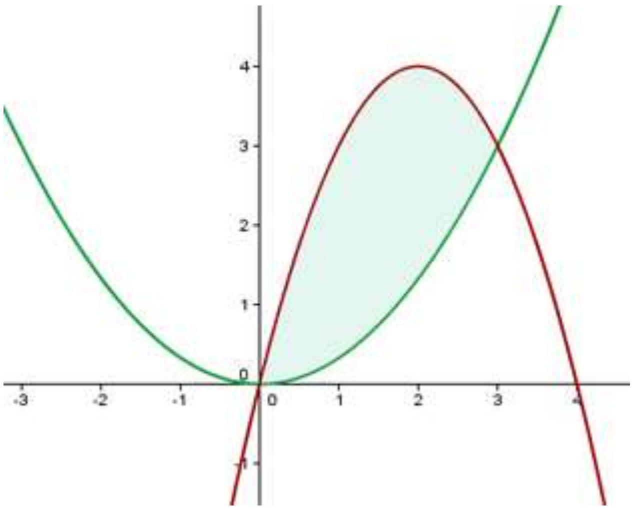
$$y=-x^2+4x$$

$$x_v=-\frac{4}{-2}=2 \qquad y_v=4 \qquad V(2,4)$$

$$-x^2+4x=0 \qquad x_1=0 \qquad x_2=4$$

Hallamos también los puntos de corte de las funciones, que nos darán los límites de integración.

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{3} \\ y=-x^2+4x \end{cases} \qquad (0,0) \qquad (3,3)$$



$$A=\int_0^3\left(-x^2+4x-\frac{x^2}{3}\right)dx=\int_0^3\left(-\frac{4}{3}x^2+4x\right)dx=$$

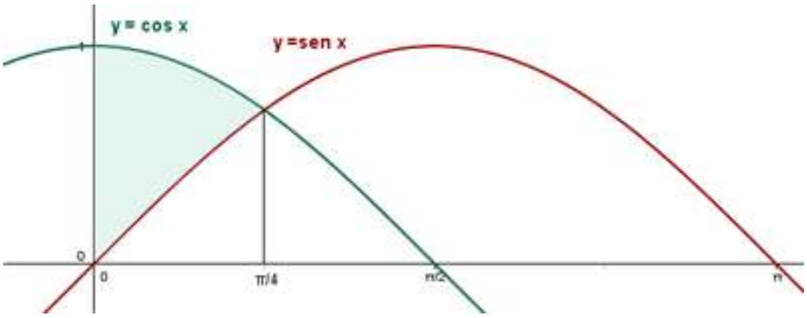
$$=\left[-\frac{4}{9}x^3+2x^2\right]_0^3=-12+18=6u^2$$

6. Hallar el área de de la región limitada por las funciones:

y = sen x, y = cos x, x = 0.

En primer lugar hallamos el punto de intersección de las funciones:

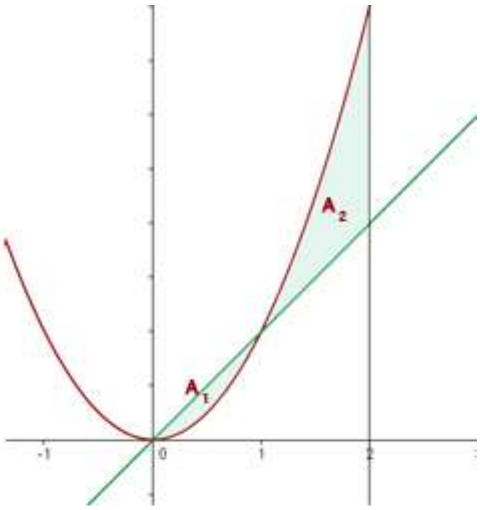
$$\begin{cases} y = sen x \\ y = \cos x \end{cases} \qquad sen x = \cos x \qquad x = \frac{\pi}{4}$$



Hallar el área de la figura limitada por: y = x^2, y = x, x = 0, x = 2

Puntos de corte de la parábola y la recta y = x.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases} \qquad x^2 = x \qquad x = 0 \qquad x = 1$$



De x = 0 a x = 1, la recta queda por encima de la parábola.

$$A_1 = \int_0^1 \left(x - x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6} u^2$$

De x = 1 a x = 2, la recta queda por debajo de la parábola.

$$A_2 = \int_1^2 \left(x - x^2\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{5}{6} u^2$$

$$A = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1 u^2$$

7. Hallar el área del recinto plano y limitado por la parábola y = 4x − x^2 y las tangentes a la curva en los puntos de intersección con el eje OX.

Puntos de intersección:

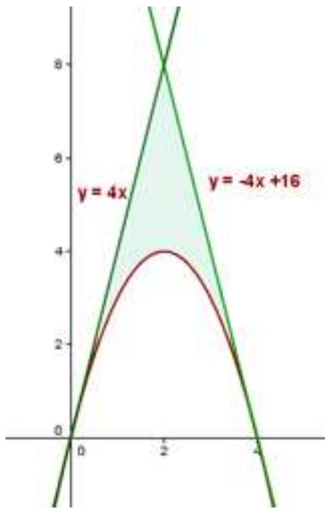
$$4x - x^2 = 0 \qquad x(4 - x) = 0 \qquad (0,0) \qquad (4,0)$$

Ecuación de la tangente a la parábola en el punto (0, 0):

$$y' = 4 - 2x \qquad m = f'(0) = 4$$
$$y - 0 = 4(x - 0) \qquad y = 4x$$

Ecuación de la tangente a la parábola en el punto (4, 0):

$$y' = 4 - 2x \qquad m = f'(4) = -4$$
$$y - 0 = 4(x - 4) \qquad y = -4x + 16$$



$$A = \int_0^2 \left[4x - \left(4x - x^2\right)\right] dx + \int_2^4 \left[(-4x + 16) - \left(4x - x^2\right)\right] dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 16x\right]_2^4 = \frac{16}{3} u^2$$

Si la función es negativa

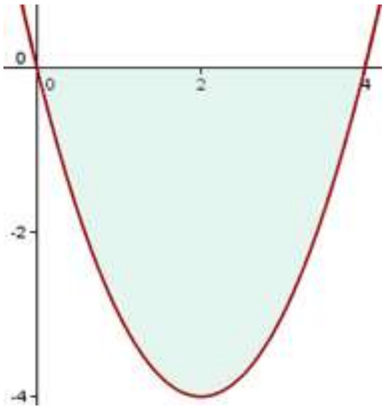
Si la función es negativa en un intervalo [a, b] entonces la gráfica de la función está por debajo del eje de abscisas. El **área de la función** viene dada por un viene dada por:

$$A = -\int_a^b f(x)dx \qquad\qquad A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

Ejemplos

1. Calcular el área del recinto limitado por la curva y = x^2 − 4x y el eje OX.

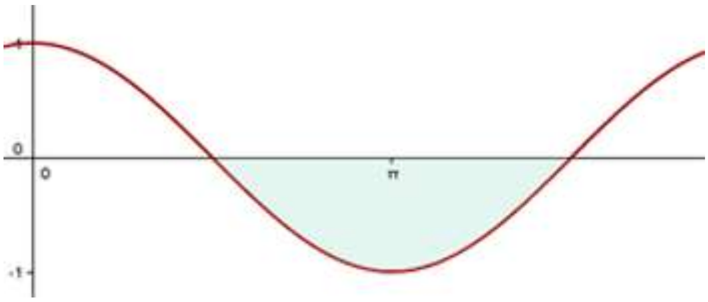
$$0 = x^2 - 4x \qquad x = 0 \qquad x = 4$$



$$A = \int_0^4 \left(x^2 - 4x\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_0^4 = -\frac{32}{3}$$

$$|A| = \frac{32}{3}u^2$$

2. Hallar el área limitada por la curva y = cos x y el eje Ox entre π/2 y 3π/2.



$$A=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\,dx=\left[senx\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=sen\frac{3\pi}{2}-sen\frac{\pi}{2}=-1-1=-2$$

$$|A|=2u^2$$

<u>**Si la función toma valores positivos y negativos**</u>

En ese caso el recinto tiene zonas por encima y por debajo del eje de abscisas. Para calcular el **área de la función** seguiremos los siguientes pasos:

1º Se calculan los puntos de corte con el eje OX, haciendo f(x) = 0 y resolviendo la ecuación.

2º Se ordenan de menor a mayor las raíces, que serán los límites de integración.

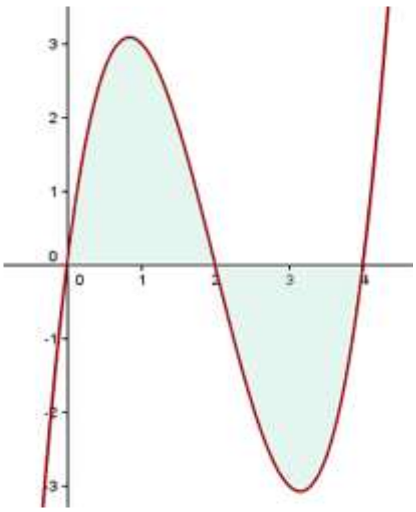
3º El **área** es igual a la **suma de las integrales definidas** en valor absoluto de cada intervalo.

Ejemplos

1. Calcular el área de las regiones del plano limitada por la curva f(x) = $x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX.

$$x^3-6x^2+8x=0 \qquad x\left(x^2-6x+8\right)=0$$

$$x=0 \qquad x=2 \qquad x=4$$



$$A=\int_0^2\left(x^3-6x^2+8x\right)dx+\left|\int_2^4\left(x^3-6x^2+8x\right)dx\right|$$

El área, por razones de simetría, se puede escribir:

$$A = 2\int_0^2 \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)dx = 2\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 = 8u^2$$

4. Calcula el área de la figura plana limitada por las parábolas y= $x^2 - 2x$, y = $-x^2 + 4x$.

Representamos las parábolas a partir del vértice y los puntos de corte con los ejes.

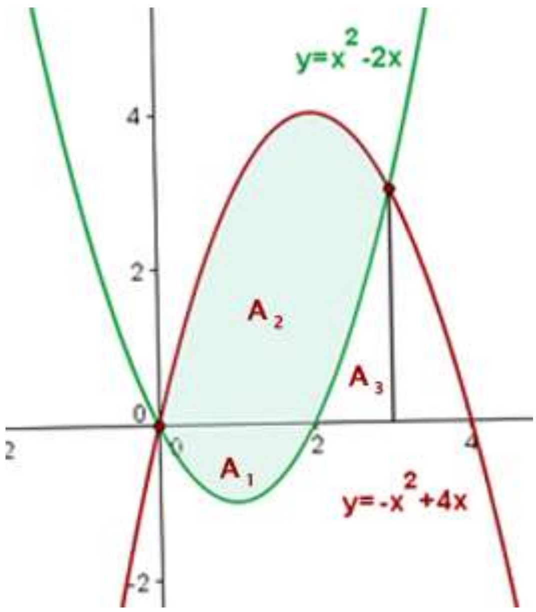
$x_v = \frac{2}{2} = 1$ $\quad y_v = 1^2 - 2 \bullet 1 = -1$ $\quad V(1,-1)$

$0 = x^2 - 2x$ $\quad 0 = x(x-2)$ $\quad (0,0)$ $\quad (2,0)$

$x_v = \frac{-4}{-2} = 2$ $\quad y_v = -2^2 + 4 \bullet 2 = 4$ $\quad V(2,-4)$

$0 = -x^2 + 4x$ $\quad 0 = x(-x+4)$ $\quad (0,0)$ $\quad (4,0)$

$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = -x^2 + 4x \end{cases}$ $\quad x^2 - 2x = -x^2 + 4x$ $\quad (0,0)$ $\quad (3,3)$



$$A_1 = \int_0^2 \left(x^2 - 2x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = -\frac{4}{3} \qquad \left|A_1\right| = \frac{4}{3} u^2$$

$$A_2 = \int_0^3 \left(-x^2 + 4x\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^3 = 9 \qquad A_2 = 9u^2$$

$$A_3 = \int_2^3 \left(x^2 - 2x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^3 = \frac{4}{3} \qquad A_3 = \frac{4}{3} u^2$$

$$A = \left|A_1\right| + A_2 - A_3 \qquad A = \frac{4}{3} + 9 - \frac{4}{3} = 9u^2$$

Ejercicios no Resueltos

1. Hallar el área limitada por la recta x + y = 10, el eje OX y las ordenadas de x = 2 y x = 8.

2. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 9 - x^2$ y el eje OX.

3. Calcular el área del triángulo de vértices A(3, 0), B(6, 3), C(8, 0).

4. Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $y^2 = 4x$ e $y = x^2$.

5. Calcular el área limitada por la curva xy = 36, el eje OX y las rectas: x = 6, x = 12.

6. Calcular el área limitada por la curva $y = 2(1 - x^2)$ y la recta y = −1.

7. Calcular el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 + 2$ y la recta que pasa por los puntos (−1, 0) y (1, 4).

8. Hallar el área limitada por la recta $y = \dfrac{3x - 6}{2}$, el eje de abscisas y las ordenadas correspondientes a x = 0 y x = 4.

9. Calcular el área limitada por la curva $y = 6x^2 - 3x^3$ y el eje de abscisas.

10. Hallar el área de la región del plano limitada por las curvas $y = ln\, x$, y = 2 y los ejes coordenados.

11. Calcular el área de la región del plano limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 9$.

12. Hallar el área de una elipse de semiejes a y b.

13. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva: $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ y el eje OX.

14. Hallar el área de la figura limitada por: $y = x^2$, $y = x$, $x = 0$, $x = 2$

15. Hallar el área del recinto plano y limitado por la parábola $y = 4x - x^2$ y las tangentes a la curva en los puntos de intersección con el eje OX.

Calculo del volumen de revolución

Ejercicios Resueltos

1. Hallar el volumen engendrado por las superficies limitadas por las curvas y las rectas dadas al girar en torno al eje OX:

$$y = senx,\quad x = 0,\quad x = \pi$$

$$V = \pi\int_0^\pi sen^2x dx = \pi\int_0^\pi\left(\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]\right)dx = \frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}sen2x\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}u^3$$

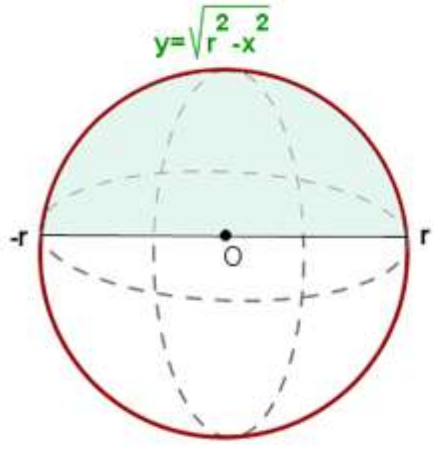
2. Calcular el volumen del cilindro engendrado por el rectángulo limitado por las rectas y = 2, x = 1 y x = 4, y el eje OX al girar alrededor de este eje.

$$V = \pi\int_1^4 2^2 dx = 4\pi[x]_1^4 = 4\pi(4-1) = 12\pi u^3$$

3. Calcular el volumen de la esfera de radio r.

Partimos de la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.

Girando un semicírculo en torno al eje de abscisas se obtiene una esfera.



$$V=\pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\,dx=\pi\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)\,dx=$$

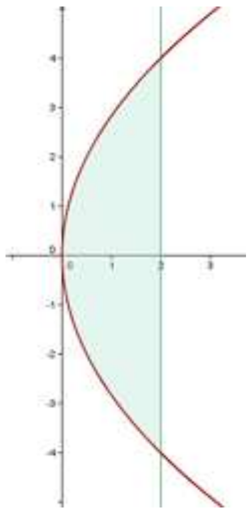
$$=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=\pi\left(\frac{2r^3}{3}+\frac{2r^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi r^3$$

4. Calcular el volumen engendrado por la rotación del área limitada por la parábola $y^2 = x$ y la recta $x = 2$, alrededor del eje OY.

Como gira alrededor del eje OY, aplicamos:

$$V=\pi\int_a^b x^2dy$$

El volumen será la diferencia del engendrado por la recta y el engendrado por la parábola entre los extremos $y = -4$ e $y = 4$.



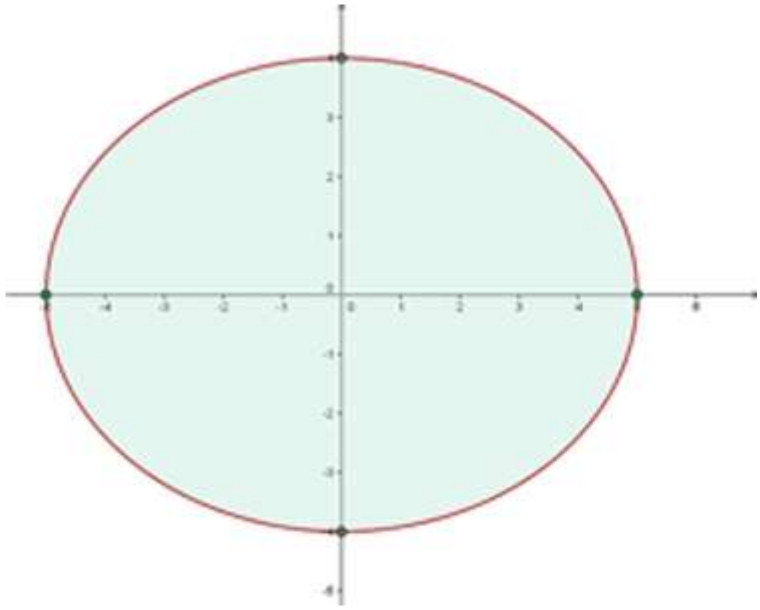
Como la parábola es simétrica con respecto al eje OX, el volumen es igual a dos veces el volumen engendrado entre $y = 0$ e $y = 4$.

$$V=2\pi\int_0^4 2^2\,dy-2\pi\int_0^4\left(\frac{y^2}{8}\right)^2dy=2\pi\left[4y-\frac{y^5}{320}\right]_0^4=\frac{128}{5}u^3$$

5. Hallar el volumen del elipsoide engendrado por la elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$, al girar:

1 Alrededor de su eje mayor.

2 Alrededor de su eje menor.



Como la elipse es simétrica al respecto de los dos ejes el volumen es el doble del engendrado por la porción de elipse del primer cuadrante en ambos casos.

$$16x^2 + 25y^2 = 400 \qquad y^2 = \frac{400 - 16x^2}{25} \qquad (5,0)$$

$$V_1 = 2\pi \int_0^5 \left(\frac{400 - 16x^2}{25} \right) dx = 2\pi \left[16x - \frac{16}{75} x^3 \right]_0^5 = \frac{320}{3} \pi u^3$$

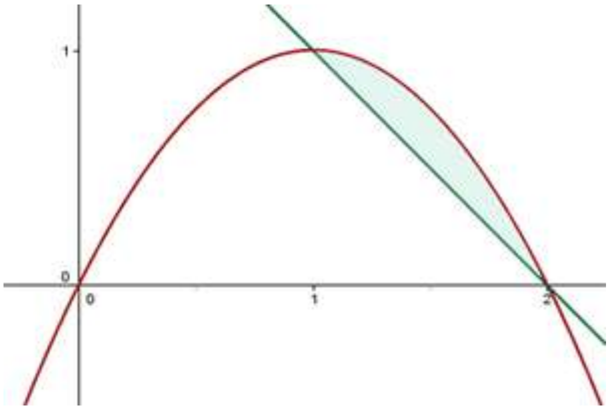
$$16x^2 + 25y^2 = 400 \qquad y^2 = \frac{400 - 25y^2}{16} \qquad (0,4)$$

$$V_2 = 2\pi \int_0^4 \left(\frac{400 - 25y^2}{16} \right) dy = 2\pi \left[25y - \frac{25}{48} y^3 \right]_0^5 = \frac{400}{3} \pi u^3$$

6. Calcular el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de y = 2x − x^2, y = −x + 2.

Puntos de intersección entre la parábola y la recta:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \qquad 2x - x^2 = -x + 2 \qquad (1,1) \qquad (2,0)$$



La parábola está por encima de la recta en el intervalo de integración.

$$V = \pi\int_1^2 \left[\left(2x - x^2\right)^2 - (-x+2)^2\right]dx = \pi\int_1^2 \left(x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4\right)dx =$$

$$= \pi\left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x\right]_1^2 = \frac{\pi}{5}u^3$$

Ejercicios no Resueltos

1. Hallar el volumen del tronco de cono engendrado por la rotación alrededor OX del área limitada por y = 6 − x, y = 0, x = 0, x = 4.

2. Calcular el volumen que engendra un triángulo de vértices A(3, 0), B(6, 3), C(8, 0) al girar 360° alrededor del eje OX.

3. Hallar el volumen del tronco de cono engendrado por el trapecio que limita el eje de abscisas, la recta y = x + 2 y las coordenadas correspondientes a x = 4 y x = 10, al girar alrededor de OX.

4. Calcular el volumen engendrado por una semionda de la sinusoide y = sen x, al girar alrededor del eje OX.

5. Calcular el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$.

6. Hallar el volumen del cuerpo revolución engendrado al girar alrededor del eje OX, la región determinada por la función f(x) = 1/2 + cos x, el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = π.

7. Calcular el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de $y = 6x - x^2$, $y = x$.

8. Hallar el volumen engendrado por el círculo $x^2 + y^2 - 4x = -3$ al girar alrededor del eje OX.

9. Hallar el volumen de la figura engendrada al girar la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ alrededor del eje OX.

Calculo de la longitud de una cuerda

Ejercicios Resueltos

1. Hallar la **longitud del arco** de curva $y = x^{\frac{3}{2}}$ en el intervalo [0, 1].

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$$

$$1+\frac{9}{4}x = t^2$$

$$\frac{9}{4}dx = 2tdt \qquad dx = \frac{8}{9}tdt$$

$$x = 0 \qquad t = 1$$

$$x = 1 \qquad t = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$L = \int_1^{\frac{\sqrt{13}}{2}} t\frac{8}{9}tdt = \frac{8}{9}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8}-1\right) \qquad \text{U.L.}$$

Ejercicios no Resueltos

1. Encuentre la longitud de una curva $y^2=(2x-1)^3$ interceptada por la recta x=5 R=54,56 U.L.

2. Calcular la longitud de la circunferencia de radio r=4 R=8π U.L.

3. Calcular la longitud del arco
$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ *entre* $-1\le x\le 1$ $\qquad R=(e-e^{-1})$ U.L.

Calculo de área de revolución

1. Hallar el área de revolución al girar sobre el eje el segmento de recta
   $y = 1.x \ \ entre \ \ x = 0 \, y \, x = 1$ $R = \frac{\pi}{6}(3\sqrt{5} - 1) \ \ U.A.$

2. Calcular el área de revolución de la esfera de radio r
   $R = 4\pi r^2 \quad U.A.$

3. Calcular el área de revolución de la superficie generada al rotar el arco de curva

$$y = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) \ \ alrededor \ del \ eje \ x \ entre \ -1 \le x \le 1 \qquad R = 2\pi(\frac{e^{2} - e^{-2}}{4} - 1) = 5{,}6268\pi U.A.$$

Aplicaciones físicas, mecánicas, química

1. La integral que se aplica para resolver el problema de la caída libre de un cuerpo sometido a la gravedad de la tierra. En la Tierra, la aceleración de la gravedad es aproximadamente *g* = 9,81 m/s². Por lo tanto un cuerpo que cae libremente empezando su caída con velocidad nula tiene una velocidad que viene dada por la siguiente función:

$$v = -g \cdot t$$

El signo negativo es debido a que la gravedad es hacia el centro de la tierra y los sistemas de referencia normalmente se eligen de forma que la dirección positiva es hacia arriba.

Si se quiere saber la distancia que ha recorrido el cuerpo durante un tiempo dado T se puede razonar que en torno a cada instante t la velocidad es constante salvo variaciones infinitesimales, por lo tanto el espacio recorrido en este instante durante un periodo de tiempo infinitesimal dt es v(t)dt, la suma de todos los espacios recorridos durante todos los instantes desde t=0 hasta t=T (el momento en que se quiere saber la distancia recorrida) y se calcula con la integral:

$$l = \int_0^T (-g \cdot t dt)$$

El resultado de esta integral es:

$$l = -\left(\frac{g}{2} \cdot T^2\right)$$

2. En mecánica clásica la energía cinética se puede calcular a partir de la ecuación del trabajo y la expresión de una fuerza *F* dada por la segunda ley de Newton:

$$E_c = W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2} m v^2$$

3. El trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}$ durante un desplazamiento elemental de la partícula sobre la que está aplicada es una magnitud escalar, que podrá ser positiva, nula o negativa

Si la partícula P recorre una cierta trayectoria en el espacio, su desplazamiento total entre dos posiciones A y B puede considerarse como el resultado de sumar infinitos desplazamientos elementales $\mathrm{d}\mathbf{r}$ y el trabajo total realizado por la fuerza $\mathbf{F}$ en ese desplazamiento será la suma de todos esos trabajos elementales; o sea

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

si consideramos un fluido que se encuentra sometido a una presión externa p_{ext} y que evoluciona desde un estado caracterizado por un volumen V_1 a otro con un volumen V_2, el trabajo realizado será:

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p_{ext} \, dV$$

En un proceso cuasiestático y sin fricción la presión exterior (p_{ext}) será igual en cada instante a la presión (p) del fluido, de modo que el trabajo intercambiado por el sistema en estos procesos se expresa como

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV$$

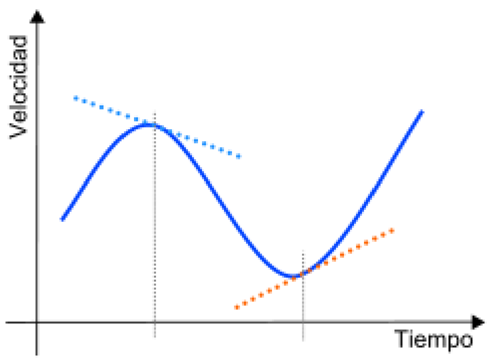
En el caso que la presión del sistema permanezca constante durante el proceso, el trabajo viene dado por:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1) = p\Delta V$$

4. Se puede definir la velocidad instantánea a partir de la aceleración como:

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) dt \qquad \mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{a} dt + \mathbf{v}_0$$

5. Movimiento rectilíneo acelerado



En el Movimiento Rectilíneo Acelerado, la aceleración instantánea queda representada como la pendiente de la recta tangente a la curva que representa gráficamente la función *v*(*t*).

Si se aplican las fórmulas anteriores al movimiento rectilíneo, en el que sólo existe aceleración tangencial, al estar todos los vectores contenidos en la trayectoria, podemos prescindir de la notación vectorial y escribir simplemente:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

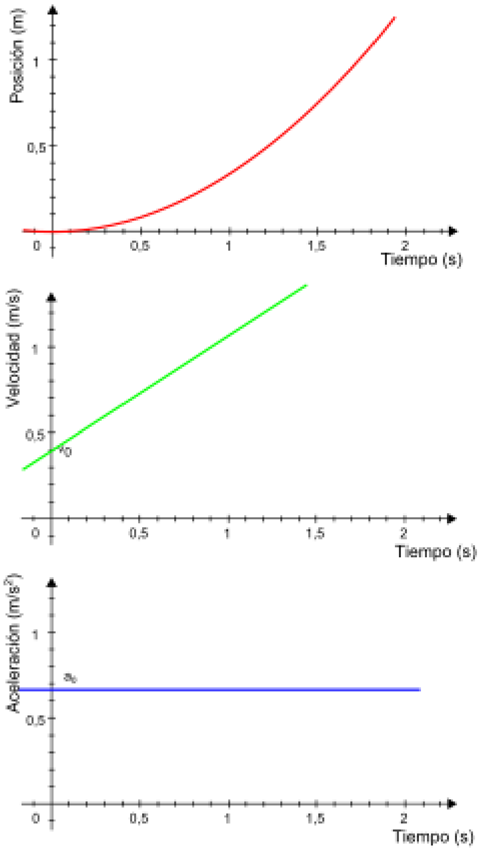
Ya que en ese tipo de movimiento los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos, satisfaciendo también la relación:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(\tau)\, d\tau$$

Las coordenadas de posición vienen dadas en este caso por:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \int_0^t (t-\tau) a(\tau)\, d\tau$$

6. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado



Variación en el tiempo de la posición, la velocidad y la aceleración en un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

En éste movimiento la aceleración es constante, por lo que la velocidad de móvil varía linealmente y la posición cuadráticamente con tiempo. Las ecuaciones que rigen este movimiento son las siguientes:

$$a = a_0 = \text{const.}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a dt \Rightarrow v = v_0 + at$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_0 + at)dt \Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

7. Dado un sistema de partículas y un eje arbitrario, el momento de inercia del mismo se define como la suma de los productos de las masas de las partículas por el

cuadrado de la distancia *r* de cada partícula a dicho eje. Matemáticamente se expresa como:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Para un cuerpo de masa continua, se generaliza como:

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 \, dV$$

En un campo **gravitatorio uniforme**, es decir, uno en que el vector de campo gravitatorio $\mathbf{g}$ es el mismo en todos los puntos, la definición anterior se reduce a la definición del centro de masas:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{c.m.}} = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r} \, \rho(\mathbf{r}) dV$$

Ejercicios Calculo Momento de Inercia

1. Calcular el Momento de Inercia del cuerpo de revolución de densidad ρ engendrado por $y = \frac{\sqrt{x}}{2}$ al girar alrededor del eje x entre x=0 y x=8

$I = \frac{\pi\rho}{2} \int_0^8 (\frac{\sqrt{x}}{2})^4 \, dx$ $\qquad R = \frac{16\pi\rho}{3}$

2. Ídem $y = x^2 + 3$, $\quad x = -2 \; y \; x = 2$ $\qquad R = \frac{45758}{63}\pi\rho$

3. Ídem $y = \sqrt{4x}$ *entre* $x = 0 \;\; y \;\; x = 4$ $\qquad R = \frac{512}{3}\pi\rho.$

Ejercicios Cálculo de trabajo

1. Hallar el trabajo realizado al estirar 8 cm. Un resorte helicoidal suponiendo una fuerza de 50 kg para estirarlo 2 cm.

F=kx si F=50 kg entonces k=50/2=25

$\int^8 25x dx = 8 \; J.$

2. Un cilindro provisto de un émbolo móvil se halla encerrado un gas. Partiendo de la Ley de Boyle, pv=k, hallar el trabajo realizado por la presión del gas al empujar el {embolo para comprimir 1640 cm3 (a la presión atmosférica) al volumen de 164 cm3 R= 39 J.

3. Un acuario tiene base rectangular de 0,6 m de ancho y 1,2 m de largo y lados rectos de 0,9 m de altura. Si el acuario está lleno de agua, cuanto trabajo se necesita para vaciarlo bombeando el agua por la parte superior. $R = 2{,}916 x 10^4 \;\; J$

4. Hallar la presión ejercida por el agua sobre un semicírculo cuyo radio es de rm situado en un plano vertical y cuyo diámetro horizontal coincide con la superficie libre del líquido. $R=\frac{250}{3}\rho \quad Pa$

Ejercicios Calculo Cinemática

1. Un cuerpo se mueve a lo largo de una line recta de acurdo a la ley $v=t^3-t^2+5$ m/s. Si en el instante $t_0=2s \quad x_0=4m$ Determinar la posición del móvil en cualquier instante. $R \ \ x=\frac{t^4}{4}-\frac{4}{3}t^3+5t \ \ m$
2. La aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de una línea recta es $a=4-t^2 \quad m/s^2$. Si en el instante $t_0=3 \ v_0=2 \ m/s$. Determinar la velocidad del móvil en cualquier instante. $R \ \ v=4t-\frac{t^3}{3}+1 \ m/s$

Ejercicios de Química

Reacciones de primer orden $\quad V=-\frac{d[A]}{dt} \quad \Rightarrow \quad -\frac{d[A]}{dt}=kA$

V=Velocidad de desaparición de la sustancia A

$$-\int_{A_0}^{A_t}\frac{dA}{A}=\int_0^t kdt \qquad \Rightarrow \qquad [LnA]_{A_0}^{A_t}=-[kt]_0^t \quad \Rightarrow Ln\frac{A_t}{A_0}=-kt$$

1. La descomposición del peróxido de hidrógeno en presencia del ión hidróxido es reacción de primer grado y posee una constante de velocidad $k=i{,}08x10^3$ a la temperatura de 22° C. Partiendo de una concentración inicial igual o,42 M., determinar:
   a) Cuál es la concentración H_2O_2 después de 2 horas y media.
   b) El tiempo necesario para que la concentración de H_2O_2 alcance el valor 0,18 M.
   c) Cuanto tiempo tarde en descomponerse el 85 % del reactivo inicial.

   R= a) $A_t=e^{-1{,}029}$ b) $784{,}5\min$ c) 175,65 min.

INTEGRALES IMPROPIAS

Ejercicios Resueltos

Ejemplo 1

Evalúe $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$

Solución:

Si existe $\int_t^b f(x)dx$ para todo número $t \le b$, entonces

$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$ siempre que haya este límite (como un número finito)

Las integrales impropias de $\int_a^\infty f(x)dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ se llaman **convergentes** si hay tal límite y **divergentes** si no existe.

Tenemos que:

$$\int_{-\infty}^0 xe^x dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 xe^x dx$$

Integramos por partes, haciendo $u = x, dv = e^x dx$, de modo que $du = dx$ y $v = e^x$:

$$\int_{-\infty}^0 xe^x dx = xe^x\Big]_t^0 - \int_t^0 e^x dx$$

$$= -te^t - 1 + e^t$$

Sabemos que $e^t \to 0$ cuando $t \to -\infty$, de acuerdo con la regla de l'Hopital

$$\lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to-\infty}\frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{-e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty}\left(-e^t\right) = 0$$

Por consiguiente

$$\int_{-\infty}^0 xe^x dx = \lim_{t\to-\infty}\left(-te^t - 1 + e^t\right) = -0 - 1 + 0 = -1$$

Ejemplo 2

Evalúe $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$

Solución: Conviene elegir $a = 0$ en la definición 1 (c):

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$$

Ahora debemos evaluar por separado las integrales del lado derecho:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty}\tan^{-1}x\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\tan^{-1}t - \tan^{-1}0\right) = \lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t = \frac{\pi}{2}$$

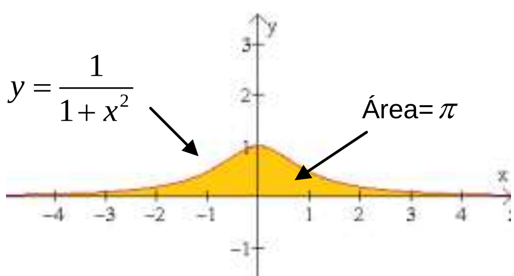
$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty}\tan^{-1}x\Big]_t^0$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left(\tan^{-1}0 - \tan^{-1}t\right) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Como ambos son convergentes, la integral original es convergente y

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

En vista de que $1/(1+x^2) > 0$, la integral impropia dada se puede interpretar como el área de la región infinita bajo la curva $y = 1/(1+x^2)$ y arriba del eje x.



Ejemplo 3

¿Para qué valores de p la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ es convergente?

Solución: sabemos que si $p=1$, la integral es divergente, así que supongamos que $p \neq 1$. Entonces

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^p}dx$$
$$= \lim_{t\to\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_{x=1}^{x=t}$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{t^{p-1}}-1\right]$$

Si $p>1$, entonces $p-1>0$, y así $t\to\infty, t^{p-1}\to\infty$ cuando $1/t^{p-1}\to 0$. Por lo tanto,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{p-1} \text{ si } p>1$$

Y la integral converge. Pero si $p<1$. Pero si $p<1$, entonces $p-1<0$ y así $\frac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p} \to \infty$ cuando $t\to\infty$ y la integral diverge.

Resumiremos el resultado del ejemplo 3 como referencia para el futuro:

Integrando discontinuos

$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ es convergente si $p>1$, y diverge si $p\le 1$

Ejemplo 4

Indique si $\int_0^{\pi/2} \sec x dx$ converge o diverge.

Solución: notará que la integral dada es impropia pues $\lim_{x\to(\pi/2)} \sec x = \infty$. Al emplear el inciso (a) de la definición 3 tenemos que

$$\int_0^{\pi/2} \sec x dx = \lim_{x\to(\pi/2)^-}\int_0^t \sec x dx$$
$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \ln\left|\sec x+\tan x\right|\Big]_0^t$$
$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-}\left[\ln(\sec t+\tan t)-\ln 1\right]=\infty$$

Ya que $\sec t\to\infty$ y $\tan\to\infty$ cuando $t\to(\pi/2)^-$; así pues, la integral impropia original es divergente.

Ejemplo 5

Evalúe $\int_0^1 \ln x dx$

Solución: Sabemos que la función $f(x)=\ln x$ tiene una asíntota vertical en 0 porque $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$; por lo tanto, la integral dada es impropia y entonces

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln x dx$$

Ahora integramos por partes, con $u=\ln x$, $dv = dx, du = dx/x$ y $v = x$:

$$\int_t^1 \ln x dx = x\ln x\big]_t^1 - \int_t^1 dx$$
$$= 1\ln 1 - t\ln t - (1-t)$$
$$= -t\ln t - 1 + t$$

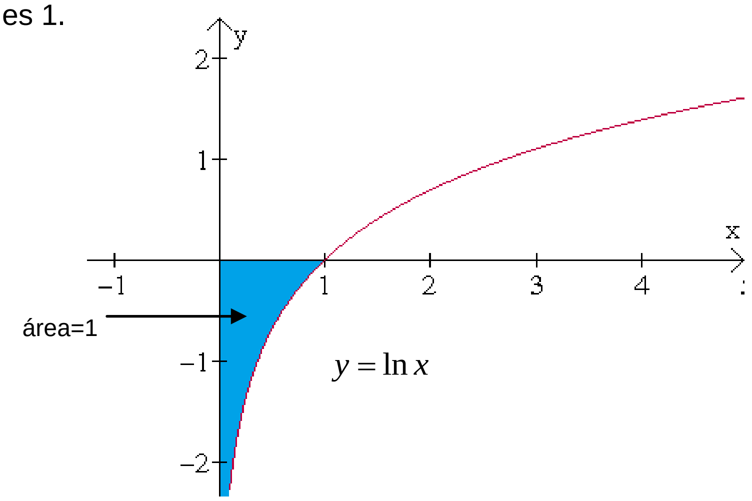
Para determinar el límite del primer término, aplicamos la regla del l'Hopital:

$$\lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t\to 0^+} (-t) = 0$$

Por consiguiente, $\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0^+} (-t\ln t - 1 + t)$

$$= -0 - 1 + 0 = -1$$

Interpretación geométrica de este resultado. El área de la región sombreada sobre $y = \ln x$ y abajo del eje x es 1.



Ejercicios

Integral	Respuesta
1) $\int_1^\infty \frac{1}{(3x+1)^2} dx$	$\frac{1}{12}$
2) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-w}} dw$	D.
3) $\int_0^\infty e^{-x} dx$	1
4) $\int_{-\infty}^\infty x^3 dx$	D.
5) $\int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2} dx$	0
6) $\int_0^\infty \frac{1}{(x+2)(x+3)} dx$	$-\ln\frac{2}{3}$
7) $\int_0^\infty \cos dx$	D.

8) $\int_{-\infty}^{1} xe^{2x}dx$ $e^2/4$

9) $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx$ D.

10) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$ D.

11) $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$ 1

12) $\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ $2\sqrt{3}$

13) $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}dx$ D.

14) $\int_{0}^{\pi/4} \csc^2 t dt$ D.

15) $\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^4}dx$ D.

16) $\int_{0}^{\pi} \sec x dx$ D.

17) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2-1}dx$ D.

18) $\int_{0}^{2} z^2 \ln z dz$ $\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9}$

19) Hallar valores de α para que la integral converge o diverge

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{d\alpha}{x^{\alpha}} \;/\alpha \neq 1$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{d\alpha}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{(1-\alpha)}(b^{1-\alpha}-1)$$

$\alpha > 1$ $\int_{1}^{+\infty} \frac{d\alpha}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha-1}$ Integral Converge

$\alpha < 1$ $\int_{1}^{+\infty} \frac{d\alpha}{x^{\alpha}} = \infty$ Integral Diverge

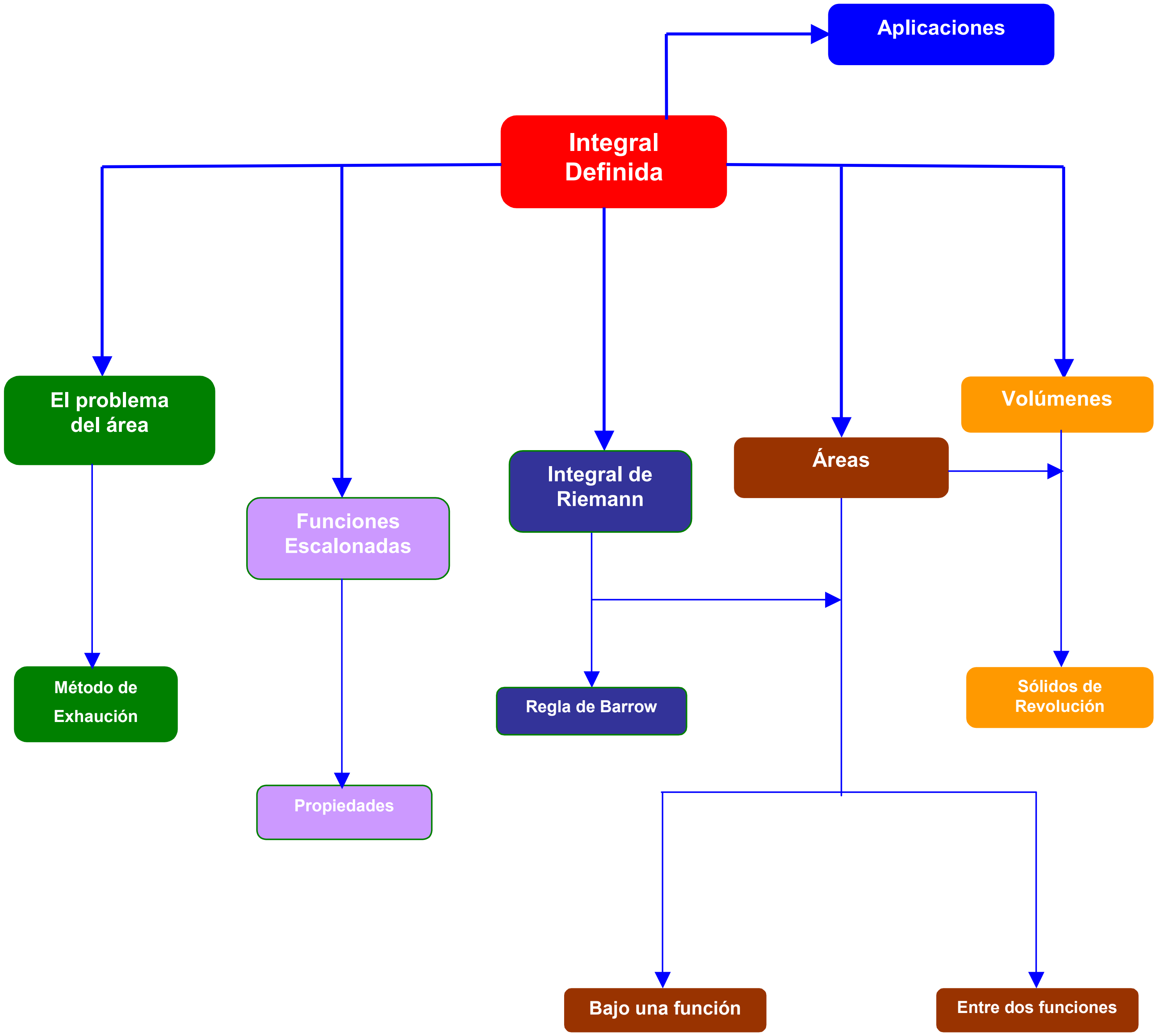
20)

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ Integral Converge

LA INTEGRAL DEFINIDA Y SUS APLICACIONES

Autores: Paco Martínez (jmartinezbos@uoc.edu), Patrici Molinàs (pmolinas@uoc.edu), Ángel A. Juan (ajuanp@uoc.edu).

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

En este *math-bock* trataremos el problema del cálculo del Área y su importancia en otras ramas de la ciencia para la resolución de situaciones reales, tales como puede ser el cálculo del espacio recorrido por un móvil en Física.

Le daremos un enfoque histórico y veremos algunos ejemplos que surgieron hace más de 2.000 años, cuando los griegos inventaron el método de exhaución para calcular áreas de figuras planas. Veremos la relación que hay entre el área y la integral definida y la regla de Barrow, conexión entre el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral.

Calcularemos también volúmenes de revolución, además de áreas, por medio de integrales definidas.

OBJETIVOS

1. Conocer y aplicar el método de exhaución.
2. Calcular integrales definidas de funciones escalonadas y saber sus propiedades.
3. Calcular el área encerrada por una función y el eje OX en un determinado intervalo.
4. Hallar la superficie encerrada entre dos curvas.
5. Saber utilizar la regla de Barrow para calcular integrales definidas y conocer la relación entre las derivadas y las integrales.
6. Calcular volúmenes de revolución engendrados por el giro alrededor del eje OX del recinto limitado por una o dos funciones.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

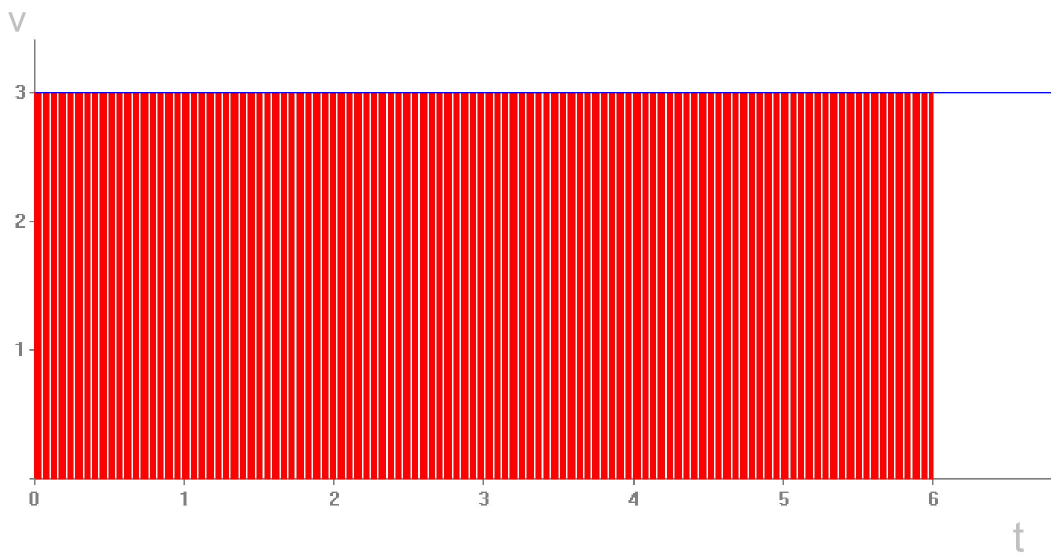
A fin de poder aprovechar al máximo esta unidad es recomendable tener conocimientos básicos sobre funciones de una variable, derivación e integración indefinida, y uso del programa Mathcad.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

El problema del cálculo del área

Uno de los problemas que más repercusión ha tenido en la historia de las matemáticas es el del estudio del área encerrada bajo una curva, pues tiene una aplicación inmediata en algunos problemas de física.

Ejemplo: Consideremos un cuerpo que se mueve con una velocidad constante de 3m/s. La gráfica velocidad-tiempo del cuerpo es la representada en el dibujo. Calcular el espacio recorrido por el cuerpo entre $t = 0$ y $t = 6$, con las fórmulas de física conocidas. Estudiar la relación que existe entre este resultado y el área encerrada por las rectas $t = 0$, $t = 6$, $v = 0$ y $v = 3$.

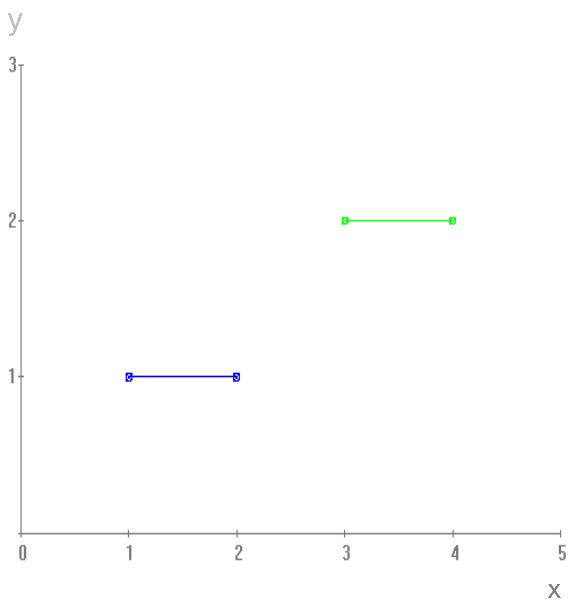


Solución:

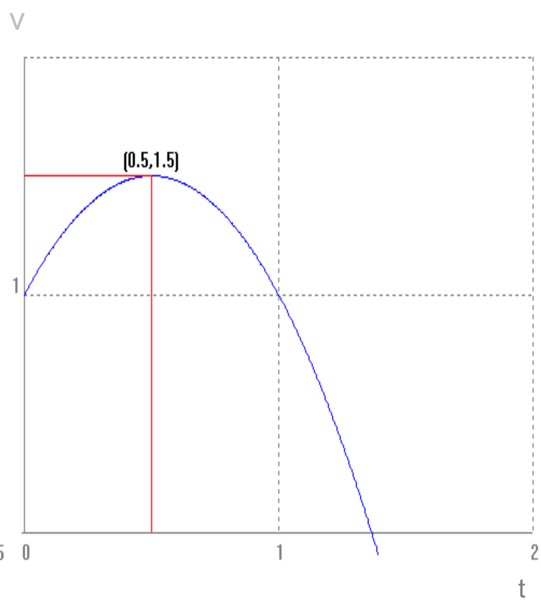
El hecho de que la velocidad sea constante nos indica que estamos en un caso de MRU, por lo que deberemos usar la fórmula e = v*t que nos da el espacio recorrido por el cuerpo si conocemos su velocidad y el tiempo transcurrido t. Por lo tanto, para calcular el espacio recorrido por el cuerpo desde t = 0 hasta t = 6 hacemos e = 3*6 = 18, que coincide con el área del rectángulo coloreado, y que es al mismo tiempo el área encerrada por las rectas:
t = 0, t = 6, v = O y v = 3.

Hasta ahora hemos calculado el área encerrada por funciones continuas pero ¿qué haríamos para calcular el área encerrada bajo la función del dibujo 1 entre x = 1 y x = 4?, ¿es siempre posible descomponer la figura encerrada bajo una curva en figuras cuya área conocemos?

Para investigarlo, consideremos la gráfica velocidad-tiempo del dibujo 2, y calculemos el espacio recorrido entre t = 0 y t = 1. ¿Cómo calcularíamos, aproximadamente, el área encerrada bajo esta función entre t = 0 y t = 1?. Acotaremos dicha área superior e inferiormente, utilizando rectángulos. ¿Cómo podríamos hacer que estas acotaciones fuesen cada vez más exactas?



Dibujo 1. Gráfica función escalonada



Dibujo 2. Gráfica $v(t) = -2t^2 + 2t + 1$

Es intuitivo que el área encerrada por la función del dibujo 1 se calcula sumando las áreas de los rectángulos que define la función entre dichos puntos. Este tipo de funciones cuya gráfica en un intervalo son tramos de rectas paralelas al eje de las x, se llaman funciones escalonadas, y las estudiaremos con más detalle más adelante.

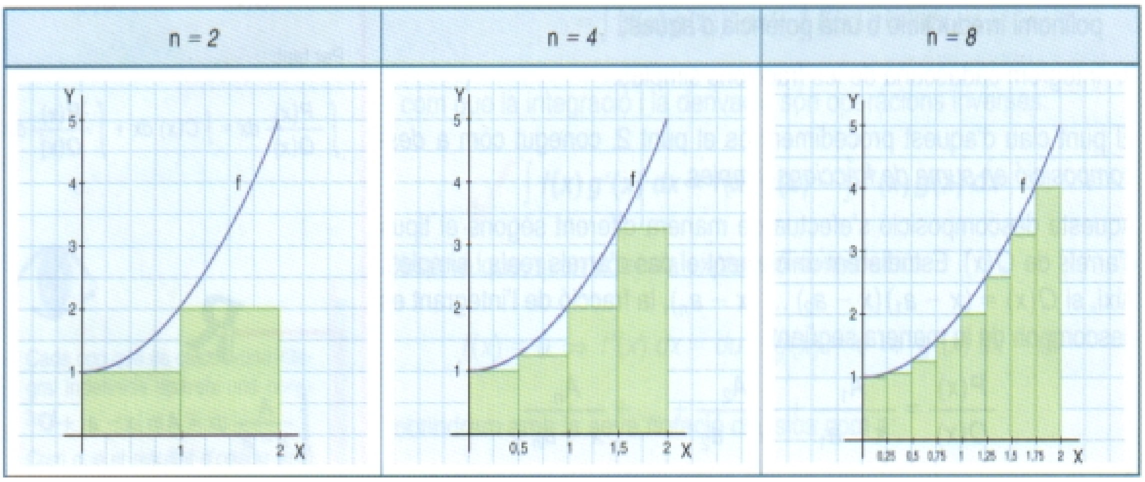
Como se ve en el dibujo 2, no siempre es posible descomponer el área encerrada bajo una curva, en figuras geométricas simples. En el caso del ejercicio, dicha área se encuentra comprendida entre un rectángulo de base 1 y altura 1, y un rectángulo de base 1 y altura 1.5, por lo tanto sabemos que se encuentra entre uno y uno y medio, pero no podemos decir con exactitud cuál es su valor. Para estos casos precisamente es para los que se ideó el método de exhaución.

El método de Exhaución.

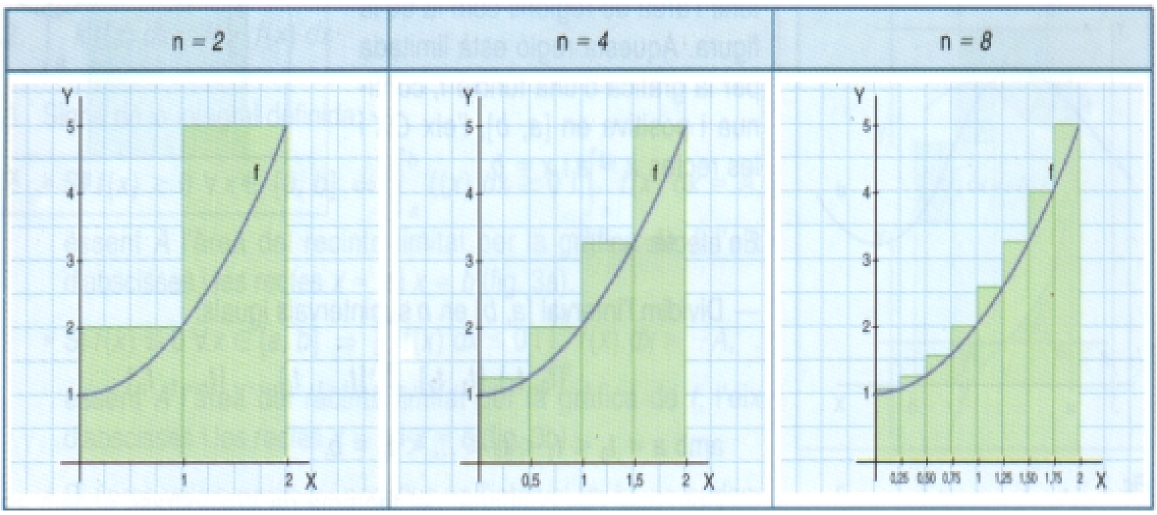
El **método de exhaución** fue ideado por el matemático griego Arquímedes para determinar el área de un recinto. Este método consiste en inscribir y circunscribir el recinto considerado en regiones poligonales cada vez más próximas a él, tendiendo a llenarlo y cuyas áreas se pueden calcular fácilmente. Así se obtienen valores mayores y menores que el área que deseamos calcular y que se aproximan, tanto más a dicho valor, cuanto mayor sea el número de lados de regiones poligonales inscritas y circunscritas.

Según el método de exhaución, para aproximar el área encerrada entre la función, el eje OX, y las rectas x = 0, x = 2, tomamos poligonales que inscriban y circunscriban dicho recinto. En este caso dichas poligonales son rectángulos y es evidente que el área se conocerá con mayor exactitud cuanto menor sea la base de los rectángulos tomados.

Consideremos primero rectángulos inscritos en el recinto. En este caso la suma de las áreas de los rectángulos es menor que el área del recinto, pero se van aproximando más a su valor según vayamos tomando rectángulos de menor base, como podemos ver en las aproximaciones de los dibujos.



Si consideramos ahora rectángulos que circunscriban al recinto, es evidente que la suma de las áreas de dichos rectángulos es mayor que el área que encierra la función, pero a medida que vamos tomando rectángulos cuyas bases sean menores, nuestra aproximación será más exacta.

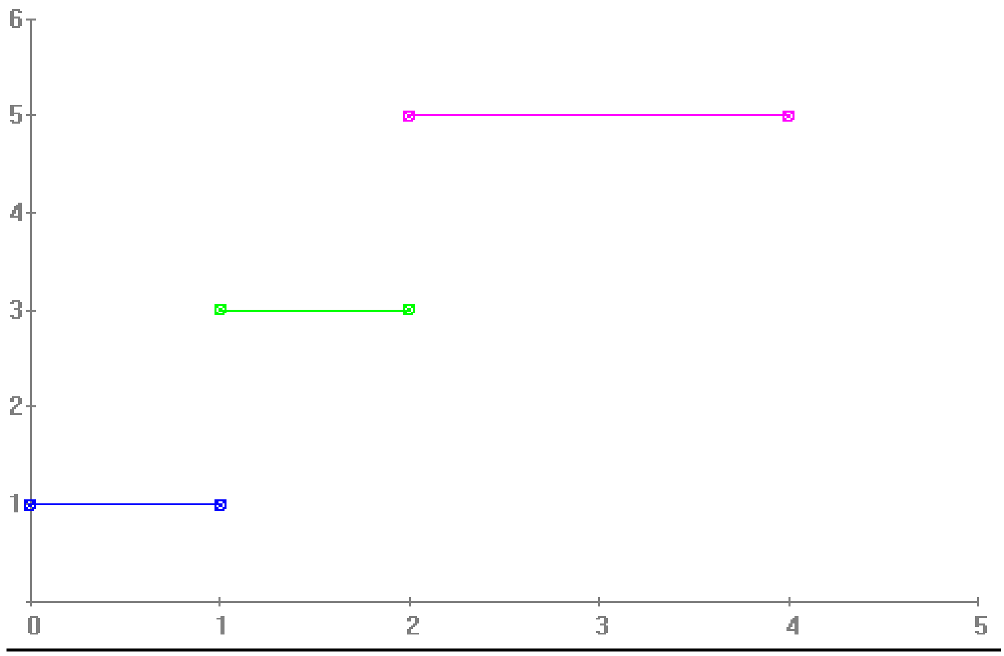


Todo ello pone de manifiesto que al dividir el intervalo [0,2] en un número infinitamente grande de intervalos iguales, el área por defecto coincide con el área por exceso y ambas con el área del recinto que se está calculando.

Integral de una función escalonada. Propiedades.

Nos parece interesante, antes de definir la integral de una función cualquiera, estudiar la integral de funciones escalonadas, por dos razones: primera, y siguiendo nuestro principio de dar los conceptos de forma gradual según su nivel de dificultad, que son más intuitivas y fáciles, y todas las propiedades de estas integrales son las mismas que las de las integrales de funciones generales; y segunda, porque la definición que daremos de integral de una función general, será a partir de estas funciones. Las funciones escalonadas hacen de nexo entre el método de exhaución y las integrales definidas de cualquier función.

Ejemplo: Dada la función del dibujo, calcular a mano el área que delimitan f(x), las rectas x = 0, x = 5 y el eje OX.



Como vimos en el apartado 1, este tipo de funciones se llaman escalonadas. Nos interesa calcular el área que delimitan f(x), las rectas x = 0, x = 5 y el eje OX.

El área que nos interesa se puede descomponer en tres rectángulos: el "rectángulo" A cuya base es el intervalo [0,1], y altura 1; el rectángulo B de base [1,2], y altura 3; y el rectángulo C de base [2,4], y altura 5. Por lo tanto, para calcular el área total hemos de sumar el área de estos tres rectángulos. Si denotamos por x_0, x_1, x_2, x_3 los puntos que delimitan las bases de los rectángulos y por r_1, r_2, r_3 las alturas de dichos rectángulos tenemos que:

$A_a = (1\text{-}O) * 1 = 1 = (x_1\text{-}x_0) * r_1$

$A_b = (2\text{-}1) * 3 = 4 = (x_2\text{-}x_1) * r_2$

$A_c = (4\text{-}2) * 5 = 2 = (x_3\text{-}x_2) * r_3$

Luego: $A = A_a + A_b + A_c = (x_1\text{-}x_0) * r_1 + (x_2\text{-}x_1) * r_2 + (x_3\text{-}x_2) * r_3 = \sum_{k=1}^{3}(x_k - x_{k-1}) \cdot r_k$

<u>Definición</u>:

Una **función** f, definida en un intervalo [a, b], es **escalonada** cuando existe una partición del intervalo [a, b] de modo que f toma valores constantes en el interior de cada uno de los intervalos de la partición. Una **Partición** del intervalo [a, b] es una colección de intervalos contenidos en [a, b], disjuntos dos a dos (sin ningún punto en común) y cuya unión es [a,b]. Se denota por *P*: $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$.

Por lo tanto, en una función escalonada cualquiera, el área vendrá dada por la siguiente fórmula:

$$A = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \cdot r_k$$

Se define la <u>integral desde a hasta b</u> de la función escalonada f, y se denota $\int_a^b f(x)dx$, al número real

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \cdot r_k$$

Como se puede ver, la integral de una función escalonada desde a hasta b coincide con el área encerrada por dicha función, el eje OX y las rectas x = a, x = b.

<u>Propiedades</u>:

Veamos a continuación las propiedades que verifican las integrales de las funciones escalonadas. Estas propiedades son consecuencia inmediata de las propiedades del área de un conjunto, debido a la definición que hemos dado de integral de una función escalonada.

1. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad \forall k \in R$

3. Si $f(x) \geq 0 \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
4. Si $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
6. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
7. $\int_a^a f(x)dx = 0$

Estas propiedades las verificará también la integral de una función cualquiera.

Integral de Riemann.

Vamos a definir la integral de una función cualquiera, f(x), en un intervalo [a, b], con la única condición de que esté acotada. Se toman todas las funciones escalonadas g(x) por defecto, y todas las funciones escalonadas h(x) por exceso, es decir, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ cuando $x \in [a, b]$. En estas condiciones, si existe un único número I que cumpla $\int_a^b g(x)dx \leq I \leq \int_a^b h(x)dx$, a este número I se le llama **integral de f(x) entre a y b**.

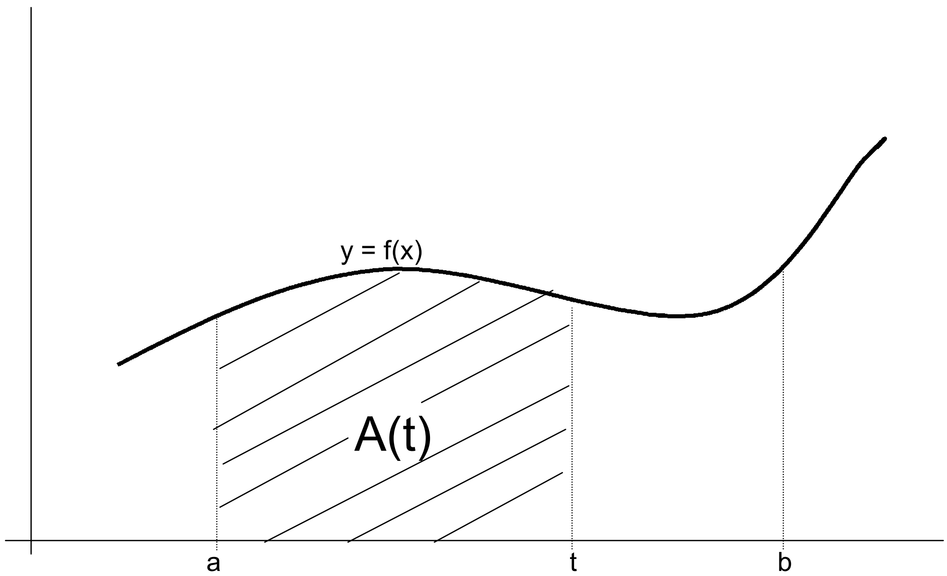
Se representa: $I = \int_a^b f(x)dx$ y se lee "integral desde a hasta b, de f(x), diferencial de x".

<u>Teorema</u>:

Toda función continua en un intervalo es integrable en dicho intervalo.

<u>Teorema Fundamental del Cálculo</u>

Si f(x) es integrable en el intervalo [a, b], su **función área**, A(t), se define de la siguiente forma: $A(t) = \int_a^t f(x)dx \quad \forall t \in [a,b]$. En estas condiciones, si f es continua en [a, b], la función A es una primitiva de la función f en [a, b].



Regla de Barrow:

Si f(x) es una función continua en [a, b], y F(x) una primitiva de f(x), es decir, F '(x) = f(x) para cualquier x ∈ (a, b), entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

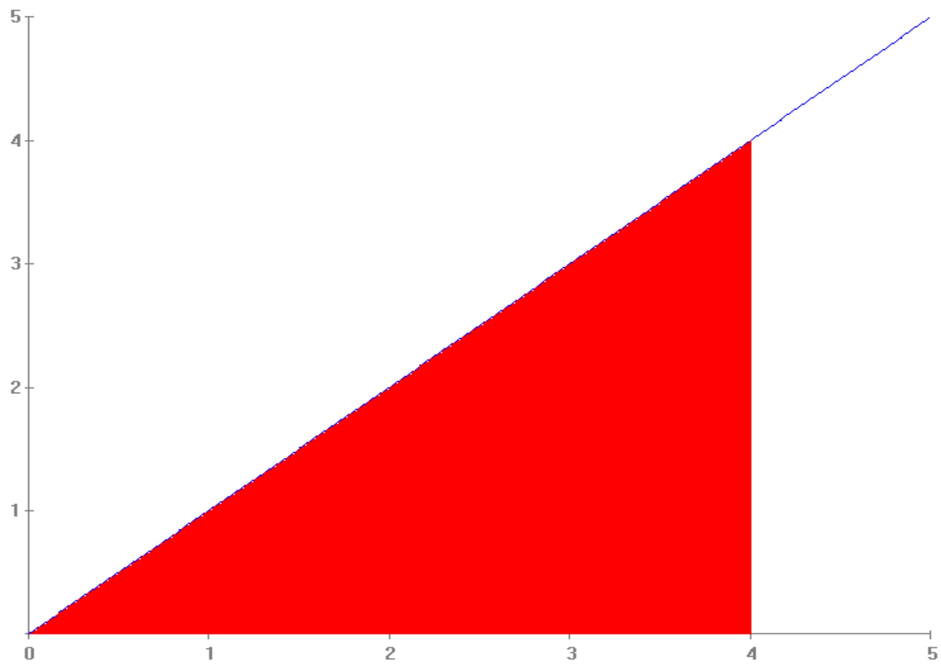
La importancia de la regla de Barrow es doble: Por una parte, es un método de cálculo de integrales definidas que no exige hallar funciones escalonadas; por otro lado, representa una conexión entre el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral.

Área del recinto limitado por una función en [a,b]

- **Área del recinto limitado por una función positiva en [a,b]**

Sabemos que la integral de una función escalonada entre x = a y x = b coincide con el área encerrada por dicha función, el eje y = 0, y las rectas x = a y x = b. Veamos que esta relación se cumple también con la integral definida de una función cualquiera, para ello, plantearemos el cálculo de áreas encerradas por funciones no escalonadas, y que se pueden calcular geométricamente, y la posterior comprobación de que dicha área coincide con el valor de la integral.

Ejemplo: Hallar el área del triángulo determinado por la bisectriz del primer cuadrante, el eje OX y la recta x = 4. Calcular esta área geométricamente, y comprobar que coincide con la integral entre x = 0 y x = 4 de la función f(x) = x (bisectriz).



Geométricamente tenemos un triángulo, cuya área vale: $A_T = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$

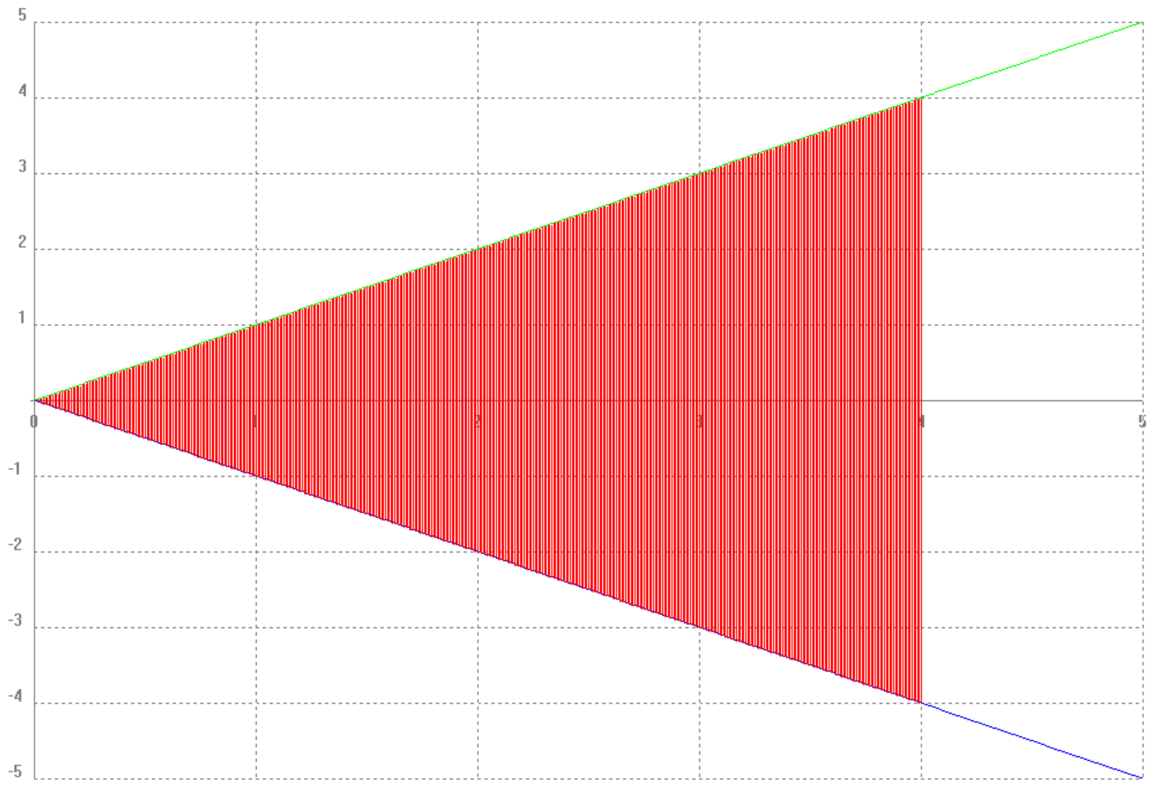
La integral entre 0 y 4 de la función f(x) = x vale: $\int_0^4 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 8$

Luego si una función positiva f(x), definida en un intervalo [a,b], es integrable, la integral $\int_a^b f(x)dx$ representa el área del recinto delimitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas x = a y x = b.

- **Área del recinto limitado por una función negativa en [a,b]**

Veamos la relación que hay entre los recintos limitados por las gráficas de f(x) (siendo ésta negativa) y -f(x), por medio de un ejemplo sencillo y calcularemos, en este ejemplo, el área del recinto determinado por dicha función negativa.

Ejemplo: Sea f(x) = -x y [a,b] = [0,4]. Hemos calculado, en el apartado anterior, el área que encierra f(x) = x entre 0 y 4.



Vemos, claramente, que el área del recinto limitado por una función negativa f(x) en [a,b] es la misma que la limitada por la gráfica de -f(x), cuya función es ya positiva y podemos calcular el área mediante una integral como en el apartado anterior.

La integral entre 0 y 4 de la función f(x) = -x vale:

$$\int_0^4 -xdx = -\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = -\left[\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = -8$$

Comprobamos que si cambiamos el signo de la función, la integral simplemente cambia de signo, pero el valor absoluto es el mismo.

Luego, para funciones negativas: $Área = -\int_a^b f(x)dx$.

Conviene tener presente lo anterior para que los resultados sean correctos; esto pone de manifiesto que los conceptos de integral definida y área de un recinto son distintos.

En definitiva, tanto para funciones positivas como para las negativas, el área o superficie vendrá dada por: $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

- **Área del recinto limitado por una función que cambia de signo en [a,b]**

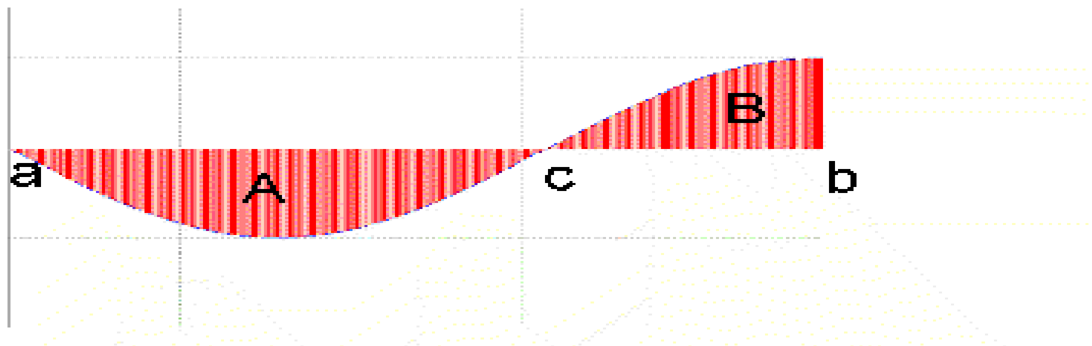
  Finalmente, si la gráfica de una función queda parte por encima, y parte por debajo del eje de abscisas, la integral se descompondrá en varios sumandos cuando se quiera calcular el área de la región que delimita con el eje de abscisas en el intervalo [a, b].

  Sabemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Ahora bien, el área de la región A es $S_A = -\int_a^c f(x)dx$, y el área de la región B es $S_B = \int_a^b f(x)dx$. De todo esto se desprende que el área de la región rayada es:

$$S = S_A + S_B = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

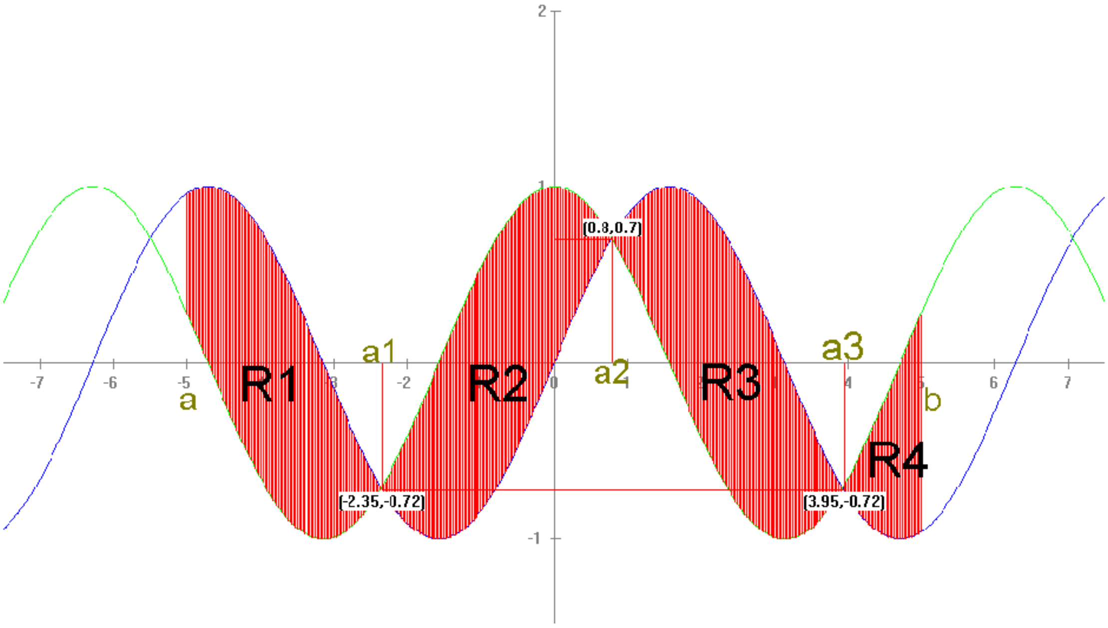


Si la función f se anula y cambia de signo en más puntos, se procede de forma análoga, calculando las áreas de cada uno de los recintos.

Área del recinto limitado por dos funciones

En este apartado vamos a calcular el área de recintos planos más generales que los estudiados en los apartados anteriores.

Uno de los problemas que suele plantearse es la determinación exacta de la región cuya área queremos calcular. Como norma conviene, siempre que sea posible, hacer una representación lo más aproximada posible de dicha región o recinto.



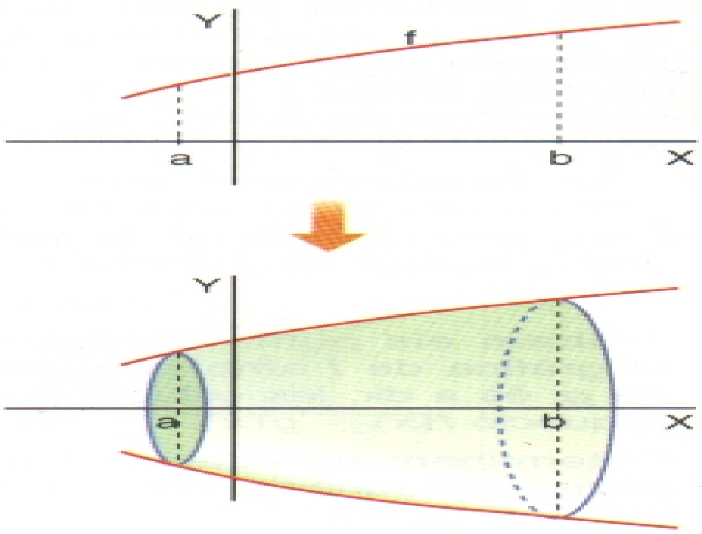
Sean f y g dos funciones continuas en [a,b]. Supongamos que sus gráficas se cortan en [a,b] para $x = a_1$, $x = a_2$, ..., $x = a_n$, con lo que determinan n+1 regiones $R_1, R_2, \ldots, R_{n+1}$.

El área de cada región R_i es $\left|\int_{a_{i-1}}^{a_i} (f(x)-g(x))dx\right|$, luego el área limitada por las dos funciones en el intervalo [a,b] vale:

$$Área = R_1 + R_2 + \cdots + R_{n+1} = \left|\int_a^{a_1} (f(x)-g(x))dx\right| + \left|\int_{a_1}^{a_2} (f(x)-g(x))dx\right| + \cdots + \left|\int_{a_n}^{b} (f(x)-g(x))dx\right|$$

Cálculo de volúmenes

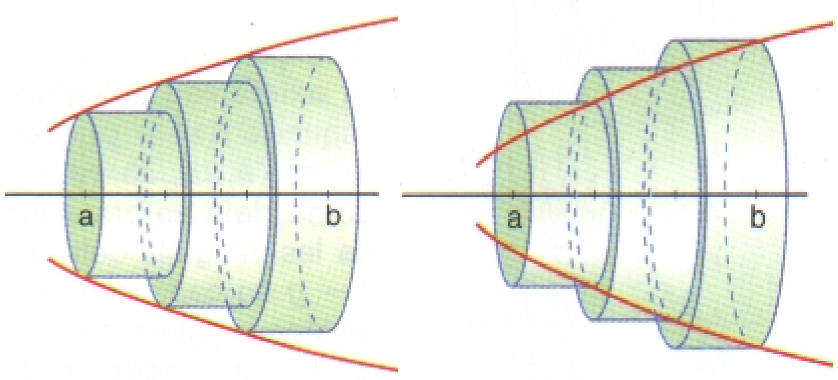
Dada una función f continua y R el recinto limitado por la gráfica de f y las rectas de ecuaciones x = a, x = b, y = 0, hacemos girar dicho recinto alrededor del eje OX, engendrando un cuerpo sólido de revolución.



Se trata ahora de hallar el volumen de este cuerpo engendrado por R. Para ello hay que seguir un proceso completamente análogo al realizado en la definición de integral definida.

Consideremos una partición cualquiera de [a,b]: $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$, y sea V(f;a,b) el volumen del sólido de revolución.

Tal como se observa en la figura el volumen V(f;a,b) del cuerpo de revolución está comprendido entre la suma de los volúmenes de los cilindros interiores y la suma de los volúmenes de los cilindros exteriores.



Teniendo en cuenta que el volumen de un cilindro es $\Pi r^2 h$, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n}\pi m_i^2(x_i-x_{i-1})\le V(f;a,b)\le\sum_{i=1}^{n}\pi M_i^2(x_i-x_{i-1})$$

donde $m_i=mín\{f(x)/x_{i-1}\le x\le x_i\}$ y $M_i=máx\{f(x)/x_{i-1}\le x\le x_i\}$, los cuales existen por ser la función f continua.

Si el número de puntos de la partición aumenta, las sumas inferiores y superiores tienden a la integral definida de la función Πf^2 en el intervalo [a,b]. Parece, pues, natural asignar al **volumen del sólido de revolución** la integral definida

$$\int_a^b \pi f^2(x)dx$$

es decir,

$$V(f;a,b)=\int_a^b \pi f^2(x)dx$$

Podemos hacer esta integral porque al ser f continua, también lo es Πf^2.

Nota: Si consideramos dos funciones f y g tales que f(x) ≥ g(x) ≥ 0 en [a,b], el volumen del sólido de revolución que generan al girar alrededor del eje OX es:

$$V=V(f;a,b)-V(g;a,b)=\int_a^b \pi f^2(x)dx-\int_a^b \pi g^2(x)dx=\int_a^b \pi\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx$$

Si la región R determinada por dos funciones no cumple las condiciones del enunciado siempre se podrán elegir intervalos en que sí se verifiquen; hecho esto, se calcularían por separado los volúmenes y se sumarían.

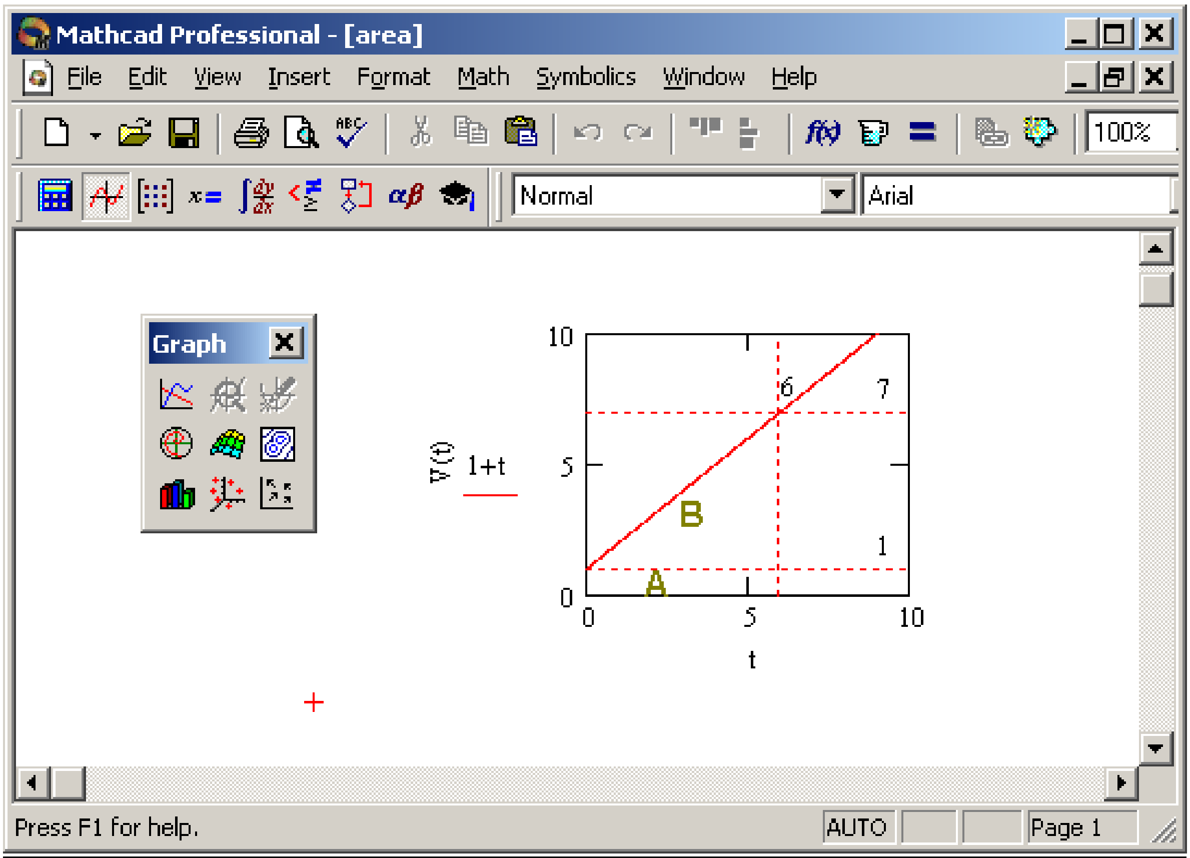
- **Ejemplo de relación área-espacio recorrido**

Calcular el espacio recorrido desde t = 0 hasta t = 6 por un cuerpo cuya gráfica v-t viene dada por la función v(t) = 1 + t.

Sabemos que el espacio recorrido coincide con el área encerrada por las rectas t = 0, t = 6, v = 0 y v = 1+ t.

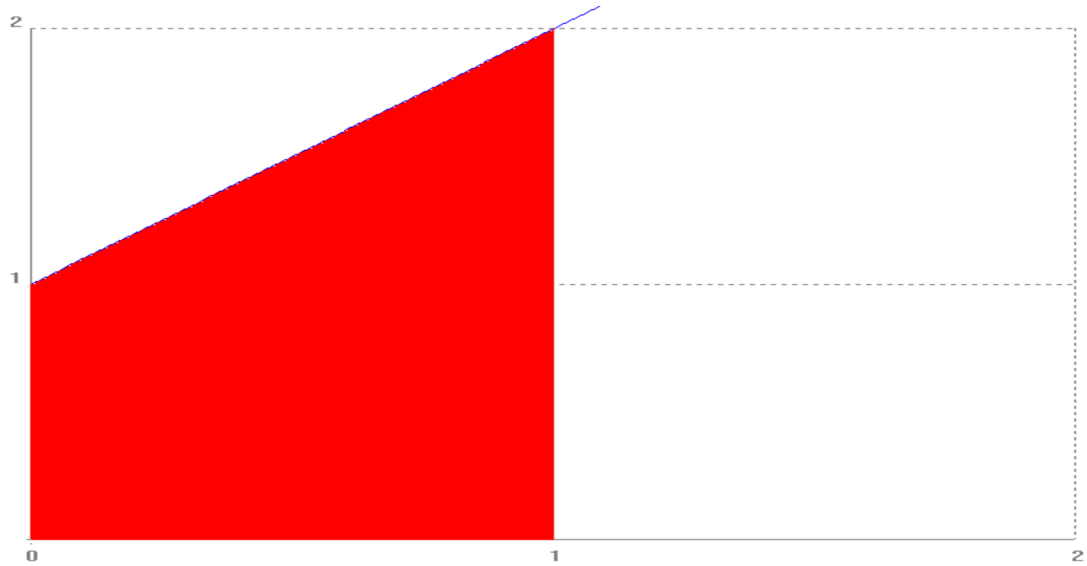
Para calcularla, descomponemos la figura en dos partes: A y B. Como se observa en la imagen, A es un rectángulo de base 6 y altura 1. Por lo tanto, su área es $A_a = 6*1 = 6$. Por su parte, B es un triángulo de base 6 y altura 6 y, consiguientemente, su área es $A_b = 1/2(6*6) = 36/2 = 18$.

Finalmente, el área total –i.e., el espacio recorrido- es la suma de dichas áreas $A_T = A_a + A_b = 6+18 = 24$.



Ejemplo de relación área-integral definida

Hallar el área del trapecio determinado por la recta de ecuación y = x + 1, el eje OX, la recta x = 0 y x = 1. Calcular esta área geométricamente y comprobar que coincide con el valor de la integral definida $\int_0^1 (x+1)dx$.

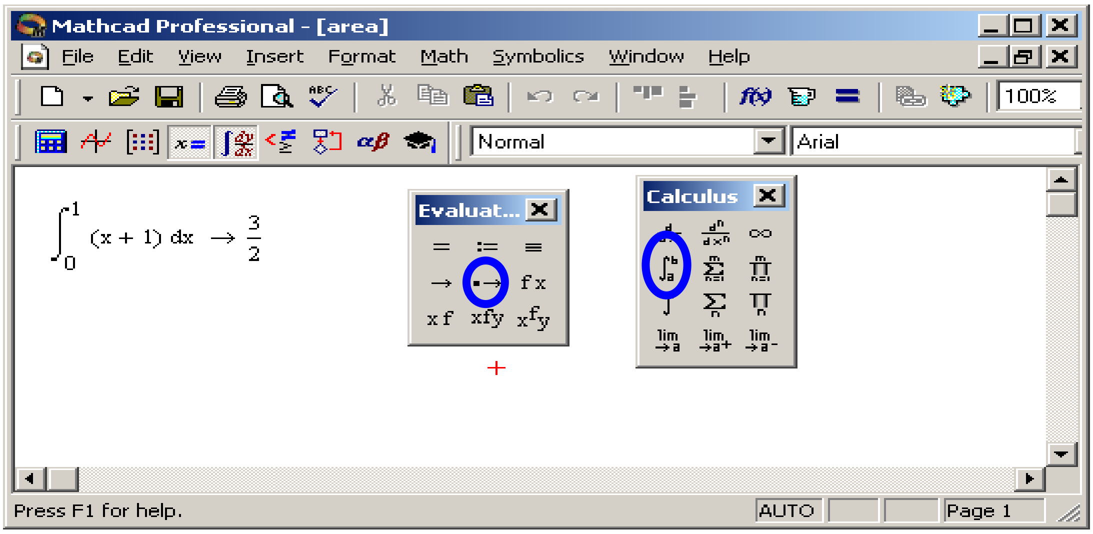


Geométricamente tenemos un trapecio, cuya área vale: $A_T = 1 \cdot 1 + \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$.

La integral entre 0 y 1 de la función f(x) = x + 1 vale:

$$\int_0^1 (x+1)dx = \left.\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = \left[\frac{1^2}{2} + 1\right] - \left[\frac{0^2}{2} + 0\right] = \frac{3}{2}$$

Con el Mathcad:



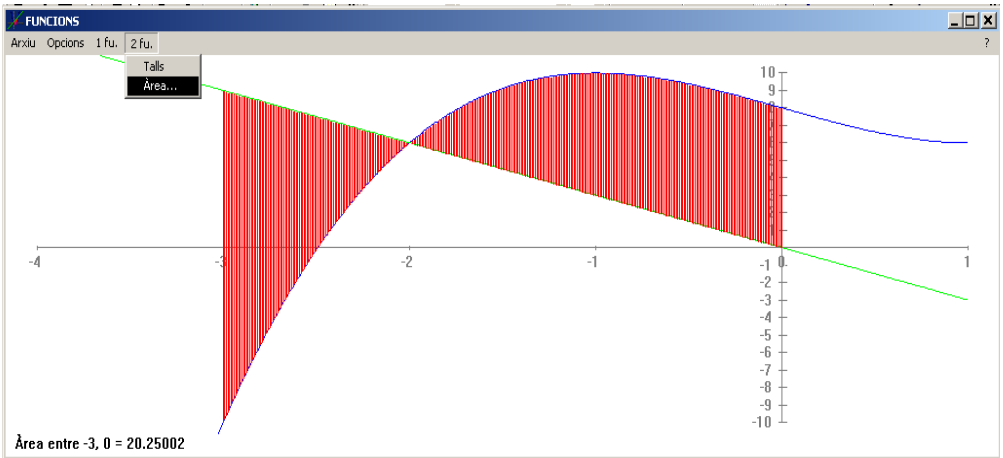
Ejemplo de área entre dos funciones

Determinar el área del recinto limitado por las curvas $f(x) = x^3 - 3x + 8$ y $g(x) = -3x$ en el intervalo [-3,0].

Averigüemos si las dos curvas se cortan en algún punto del intervalo [-3,0]:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 3x + 8 \\ y = -3x \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 - 3x + 8 = -3x \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow x = -2 .$$

La figura nos muestra el recinto considerado (esta figura es una pantalla de un programa que se llama **funciones para windows**).

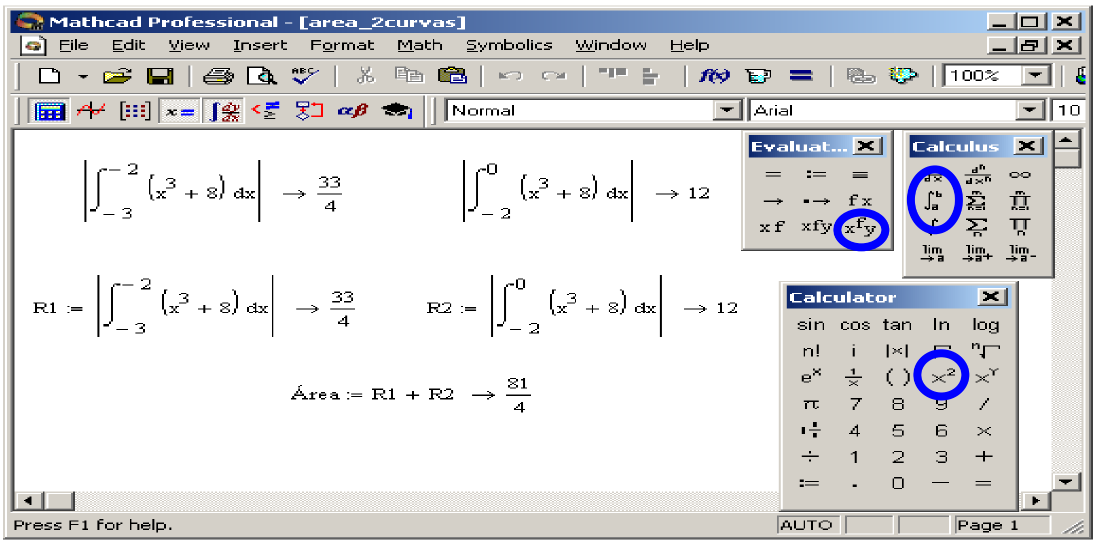


Tenemos dos regiones, así que:

$$Área = R_1 + R_2 = \left| \int_{-3}^{-2} (f(x) - g(x))dx \right| + \left| \int_{-2}^{0} (f(x) - g(x))dx \right| =$$

$$= \left| \int_{-3}^{-2} (x^3 + 8)dx \right| + \left| \int_{-2}^{0} (x^3 + 8)dx \right| == \left| \left[\frac{x^4}{4} + 8x \right]_{-3}^{-2} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} + 8x \right]_{-2}^{0} \right| = \left| -12 + \frac{15}{4} \right| + |12| = \frac{81}{4} = 20.25$$

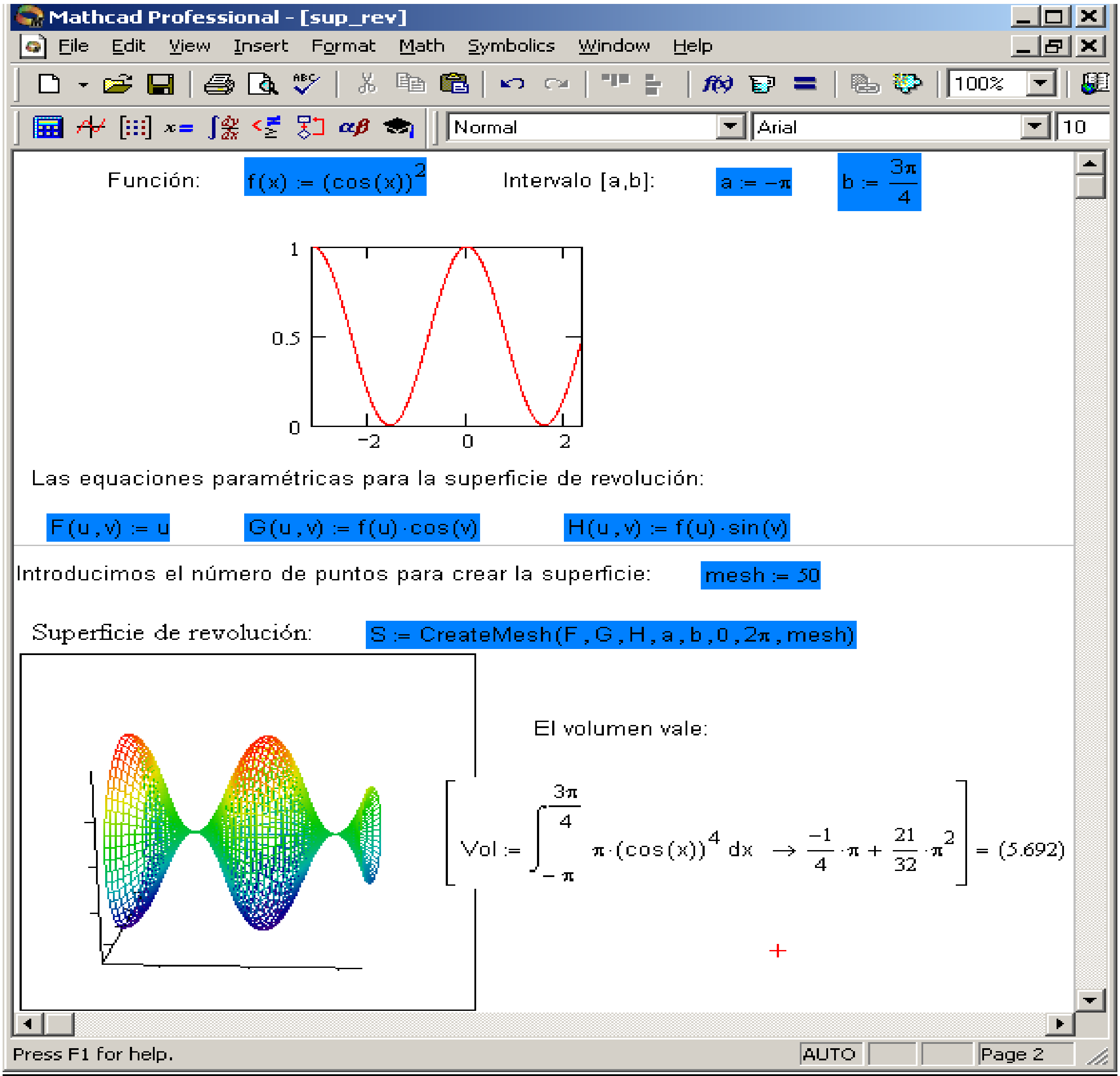
Con el Mathcad:



Ejemplo de cálculo de volúmenes

Calcular el volumen del sólido de revolución engendrado al girar -alrededor del eje OX- la gráfica de la función f(x) = $\cos^2(x)$ en el intervalo [-Π, 3Π/4].

En la siguiente pantalla se muestran los cálculos realizados con ayuda de Mathcad y el resultado final:



BIBLIOGRAFÍA

[1] Benker, H. (1999): "Practical use of Mathcad. Solving mathematical problems with a computer algebra system", Springer-Verlag New York, Inc.

[2] Moreno, J.A.; Ser, D. (1999): "Mathcad 8. Manual de usuario y guía de referencia de Mathcad 8", ediciones Anaya Multimedia, S.A.

[3] Agulió, F.; Boadas, J.; Garriga, E.; Villalbí, R. (1991): “Temes clau de càlcul”. Barcelona: UPC.

[4] Courant, R.; John, F. (1971): “Introducción al cálculo y al análisis matemático”. México: Limusa.

[5] Vaquero, A.; Fernández, C. (1987): “La Informática Aplicada a la Enseñanza”. Eudema S.A. Madrid.P 37.

[6] Ortega J. (1990): “Introducció a l’anàlisi matemática”. Barcelona: Publicacions de la Universitat Autónoma de Barcelona.

[7] Tang, S. (1986): “Applied Calculus”. PWS Publishers.

[8] Burbulla, D.(1993): “Self-Tutor for Computer Calculus Using Maple”. Prentice Hall.

[9] Hunt, R. (1994): "Calculus". Ed. Harper Collins.

ENLACES

[W1] http://www.xtec.es/~jlagares/manualwinfun.cat/estractemanualfuncionsperawindows.htm

Página web sobre un articulo que ganó el segundo premio en el "*concurso de programas educativos para ordenador*", organizado por el M.E.C. en el año 1993. Trata sobre el programa “**funciones para windows**”, e incluye ejemplos gráficos. Este programa es capaz de representar funciones, calcular los puntos de corte entre ellas, hallar el área que encierran, etc. Un programa muy completo, interesante y fácil de manejar.

[W2] http://www.sectormatematica.cl/educsuperior.htm

Página web con ejercicios sobre todos los aspectos que abarca la integración definida, desde las funciones escalonadas hasta las aplicaciones de las integrales al cálculo de áreas y volúmenes. La página está estructurada en una guía de ejercicios, un enlace para resolver integrales en línea (INTEGRATOR) y otros contenidos que trata.

[W3] http://www.okmath.com/Catego2.asp?clave=17

Página web con problemas resueltos sobre la regla de Barrow y área bajo una función.

[W4] http://planetmath.org/encyclopedia/RiemannIntegral.html

Página web de la enciclopedia de PlanetMath.org sobre Integral de Riemann. También se pueden buscar en http://planetmath.org/encyclopedia otros conceptos como Partición, etc.

[W5] http://batllo.informatica.uma.es/matap/svera/docs/apuntesitt.html

Página web de Salvador Vera Ballesteros, profesor del Departamento de matemáticas aplicada de la universidad de Málaga. Contiene problemas, exámenes y apuntes sobre la integral definida y sus aplicaciones.

[W6] http://cariari.ucr.ac.cr/~cimm/calculo.html

Página web que trata sobre un curso de cálculo diferencial. Se introduce el concepto de área en el capitulo 4.3. En el capitulo 9.2 habla de la integración y la antiderivación. Hay teoría y ejercicios.

[W7] http://www.dma.fi.upm.es/docencia/primerciclo/calculo/grupo13m/

Página web del Departamento de matemáticas aplicada de la Universidad Politécnica de Madrid. Contiene ejercicios y exámenes sobre integración.

[W8] http://www.uco.es/organiza/departamentos/quimica-fisica/quimica-fisica/CD/CD0.htm

Página web que trata sobre un curso de aprendizaje de Mathcad. Hay ejemplos sobre funciones de varias variables.

[W9] http://www.terra.es/personal/jftjft/Home.htm

Página completa sobre todo lo relacionado con las matemáticas. Aparecen matemáticos famosos y aplicaciones de las matemáticas a diversos campos.

Integrales Impropias

En la sección anterior hemos estudiado el concepto de integral definida según Riemann y establecimos algunas de sus propiedades. El Teorema Fundamental y su corolario la Regla de Barrow permiten el cálculo de $\int_a^b f(x)dx$ de una manera relativamente sencilla. La aplicación de la Regla de Barrow exige conocer una primitiva de f, para lo cual se han desarrollado métodos de cálculo de primitivas.
Si intentáramos obtener el valor de $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx$ usando la Regla de Barrow ello no es posible ya que la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ no es acotada en el intervalo $[-1, 1]$.
También podría ocurrir que la función sea acotada y que quisiéramos calcular la integral de la misma en un intervalo no acotado. Ambas situaciones no están contempladas en la definición de integral de Riemann.
Extenderemos ahora la definición de integral definida a los casos mencionados.

Integrales Impropias de Primera Clase

Queremos atribuir significado a las expresiones $\int_a^{\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

(a) Sea f integrable sobre $[a,t]$ para todo $t \geq a$, por lo tanto existe $\varphi(t) = \int_a^t f(x)dx$ para todo $t \in [a,\infty)$. Si

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx = L$$

a la expresión $\int_a^{\infty} f(x)dx$ le asignamos el valor L y diremos que la integral impropia de primera clase $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge a L.
Si $\lim_{t\to\infty} \varphi(t)$ no existe (ya sea porque oscila o tiende a infinito), diremos que $\int_a^{\infty} f(x)dx$ no es convergente (o diverge).

Ejemplo. Sea $f(x) = e^{-x}$ y consideremos calcular $\int_1^{\infty} f(x)dx$. Para $t \geq 1$

$$\varphi(t) = \int_1^t e^{-x}dx = [-e^{-x}]_1^t = e^{-1} - e^{-t}$$

y es claro que $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = e^{-1}$, por lo tanto $\int_1^{\infty} e^{-x}dx$ converge y

$$\int_1^{\infty} e^{-x}dx = e^{-1}$$

(b) De manera análoga definimos $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$. Sea f integrable sobre $[t,b]$ para todo $t \leq b$, por lo tanto

existe $\varphi(t) = \int_t^b f(x)dx$ para todo $t \le b$.
Si

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx = L$$

a la expresión $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ le asignamos el valor L y diremos que la integral de primera clase $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ converge a L. Al igual que en el caso anterior, si $\lim_{t\to-\infty} \varphi(t)$ no existe, diremos que $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ no es convergente.

(c) La integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ se define como $\int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$ siempre que $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ y $\int_a^{\infty} f(x)dx$ sean ambas convergentes, donde $a \in \mathrm{R}$.

Si $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ o $\int_a^{\infty} f(x)dx$ divergen, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ es divergente.

Si $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ es convergente, entonces la definición es independiente de la elección de $a \in \mathrm{R}$. En efecto, sea $c \in \mathrm{R}$ y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a < c$.
Asumamos que $\int_{-\infty}^a f(x)dx$, $\int_a^{\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^c f(x)dx$ y $\int_c^{\infty} f(x)dx$ convergen, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

y

$$\int_{-\infty}^c f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^c f(x)dx$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^c f(x)dx - \int_a^c f(x)dx + \int_a^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Ejemplo.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 \frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \lim_{t\to-\infty}[\arctan(0) - \arctan(t)] + \lim_{t\to\infty}[\arctan(t) - \arctan(0)] \\
&= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi
\end{aligned}$$

Ejemplo.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

Por un lado

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{t\to-\infty}\left([\ln(1+e^x)]_t^0\right) = \lim_{t\to-\infty}(\ln(2) - \ln(1+e^t)) = \ln(2)$$

y por otro lado

$$\int_{0}^{t} \frac{e^x}{1+e^x}dx = \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{t\to\infty}([\ln(1+e^x)]_0^t) = \lim_{t\to-\infty}(\ln(1+e^t) - \ln(2)) = \infty$$

por lo tanto $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^x}dx$ diverge.

Integrales Impropias de Segunda Clase

(a) Supongamos que f es continua en $[a,b)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ (Se dice que f tiene un punto singular en b), la integral $\int_a^b f(x)dx$ se denomina integral impropia de segunda clase. Como f es continua en $[a,t]$ para todo $t \in [a,b)$ podemos calcular $\varphi(t) = \int_a^t f(x)dx$. Si existe $\lim_{t\to b^-}\varphi(t)$ y es igual a L entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\varphi(t) = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx = L$$

y diremos que la integral impropia de segunda clase converge a L y al igual que en las integrales de primera clase, si el límite no existe, dicha integral diverge.

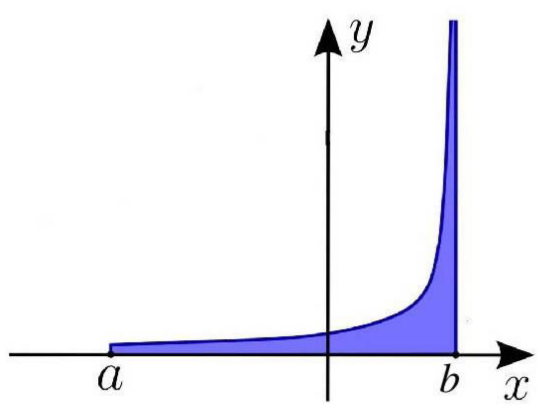


Figura 5

(b) Análogamente, si f es integrable en $(a,b]$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

donde $t \in (a,b]$.

(c) Si f tiene puntos singulares en ambos extremos del intervalo $[a,b]$, esto es, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ y las integrales impropias $\int_a^c f(x)dx$ y $\int_c^b f(x)dx$ ambas convergen, donde $c \in (a,b)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

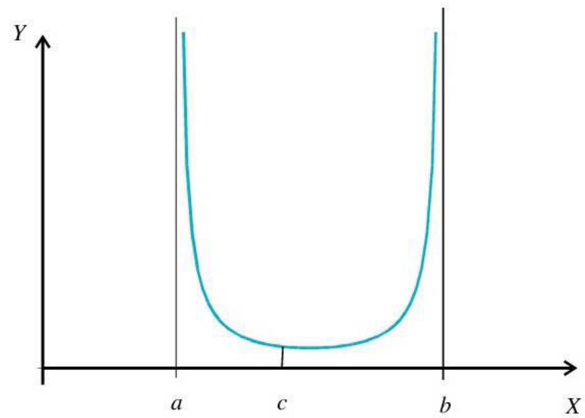


Figura 6

(d) Si f tiene un punto singular en un el interior de $[a,b]$, esto es, si $c \in (a,b)$ y $\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$. En este caso, si existen $\lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)dx$ y $\lim_{t\to c^+} \int_t^b f(x)dx$, entonces definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t\to c^+} \int_t^b f(x)dx$$

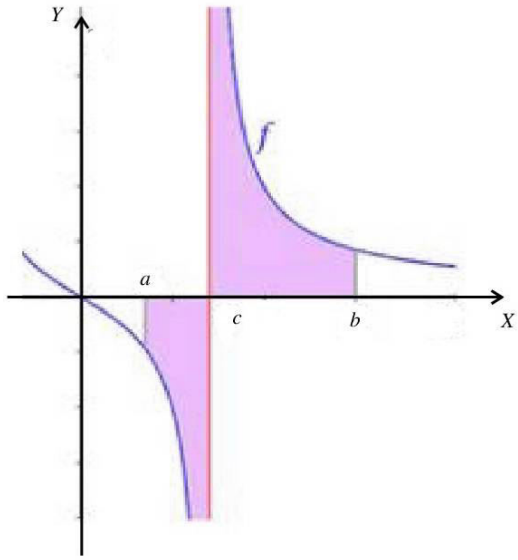


Figura 7

2.4 Ejemplo. Consideremos calcular $I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx$.

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to 0^-} \int_{1}^{t} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to 0^-} \left(\left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{t} \right) = \lim_{t \to 0^-} \left(-1 - \frac{1}{t} \right) = \infty$$

luego la integral diverge.
Si aplicamos la regla de Barrow para la misma obtenemos

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{1} = -2$$

¿Como se explica esta aparente contradicción?

Observación. En general pueden presentarse integrales impropias que sean combinación de distintas clases, por ejemplo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{x^2} dx + \int_{a}^{0} \frac{1}{x^2} dx + \int_{0}^{b} \frac{1}{x^2} dx + \int_{b}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

donde $a < 0 < b$. Sabemos que $\int_{-\infty}^{a} \frac{1}{x^2} dx$ diverge, de modo que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ diverge.

¿Para qué sirven las integrales impropias?

- Si $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$, la integral $\int_{a}^{\infty} f(x) dx$ representa el área de la región no acotada del plano limitada por el gráfico de f, la recta vertical de ecuación $x = a$ y el eje horizontal. Si dicha integral es convergente tenemos la paradójica situación que una curva de longitud infinita limita una región de área finita.

• Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$ se denomina absolutamente integrable y constituyen un subespacio V del espacio de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con la suma y multiplicación por escalar habituales.
Se define un producto interno φ en V por

$$\varphi(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$$

Por la absoluta integrabilidad de las funciones f y g se ve que este producto interno está bien definido, es decir, $\varphi(f,g) \in \mathbb{R}$.

• Muchas funciones utilizadas en estadística se definen mediante integrales impropias. Por ejemplo, si f es no negativa y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, se dice que f es una función de densidad de probabilidad.

Ejemplo. Sea $k > 0$ y

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x < 0 \\ ke^{-kx} & \text{si } \; x \geq 0 \end{cases}$$

entonces f es una función de densidad de probabilidad. En efecto

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{0}^{\infty} ke^{-kx}dx = \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} ke^{-kx}dx = \lim_{t\to\infty}\left([-e^{-kx}]_0^t\right) \\ &= \lim_{t\to\infty}(1 - e^{-kt}) = 1 \end{aligned}$$

Propiedades de las Integrales impropias

Sea $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, entonces, mediante el cambio de variable $u = \frac{1}{x-a}$, la integral impropia $I = \int_a^b f(x)dx$ toma la forma

$$I = \int_{\infty}^{\frac{1}{b-a}} f\left(a + \frac{1}{u}\right)\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(a + \frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^2}du$$

esto es, el cambio de variable permite transformar la integral impropia de segunda clase I en una de primera clase.

Si $I = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$, haciendo el cambio de variable $x = -u$ con $u \geq -a$, I toma la forma

$$I = \int_{\infty}^{-a} f(-u)(-du) = \int_{-a}^{\infty} f(-u)du$$

que es una integral impropia de primera clase.

Para el caso $I = \int_a^b f(x)dx$, donde $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$, sea $u = \frac{1}{b-x}$, entonces

$$I = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(b - \frac{1}{u}\right) \frac{1}{u^2} du$$

que es también una integral de primera clase.

En resumen, toda integral impropia puede transformarse en una de primera clase del tipo $\int_a^{\infty} f(x)dx$, por lo que basta enunciar sus propiedades básicas sólo para este caso.

(1) Si $f, g : [a, \infty) \to \mathrm{R}$ están acotadas y $\int_a^{\infty} f(x)dx$ y $\int_a^{\infty} g(x)dx$ convergen, entonces $\int_a^{\infty} (f \pm g)(x)dx$ converge y

$$\int_a^{\infty} (f \pm g)(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx \pm \int_a^{\infty} g(x)dx$$

(2) Si $f : [a, \infty) \to \mathrm{R}$ es acotada y $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge, entonces $\int_a^{\infty} (cf)(x)dx$ converge para todo $c \in \mathrm{R}$ y

$$\int_a^{\infty} (cf)(x)dx = c \int_a^{\infty} f(x)dx$$

(3) Si $f : [a, \infty) \to \mathrm{R}$ es continua, existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 enero-marzo de 2004

Integrales impropias.

Ejercicios sugeridos para :

los temas de las clases del 4 y 9 de marzo de 2004.

Temas :
Otras formas indeterminadas. Integrales impropias.

1.- Calcule los siguientes límites aplicando (cuando sea conveniente) la regla de L'Hopîtal :

1a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\text{-sen}(x)}{x^3}$; **1b**) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\text{-sen}(x)}{(\text{tg}(x))^3}$; **1c**) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{arcsen}(x)\text{-}x}{x^3}$;

1d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln(x)$; **1e**) $\lim\limits_{x\to\infty} x.e^{-x}$; **1f**) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$;

1g) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+\frac{1}{x})^x$; **1h**) $\lim\limits_{x\to -\infty} (1+\frac{1}{x})^x$; **2i**) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x).\ln(x+1)}{x.(1+\text{sen}(x))}$;

2j) $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\text{tg}(x))^{\text{ctg}(x)}$; **1k**) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x\text{-}1}{x}$; **1m**) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \text{sen}(t^2)\, dt}{x\text{-sen}(x)}$.

2.- Calcule los siguientes límites aplicando (cuando sea conveniente) la regla de L'Hopîtal :

2a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \text{tgh}(x)$; **2b)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \text{tgh}(x)$; **2c)** $\lim\limits_{x\to +\infty} (1\text{-tgh}(x)^{(1/x)}$;

2d) $\lim\limits_{x\to -\infty} (1\text{-tgh}(x)^{(1/x)}$; **2e)** $\lim\limits_{x\to +\infty} (a.\cosh(cx))^{(b/x)}$; **2f)** $\lim\limits_{x\to -\infty} (a.\cosh(cx))^{(b/x)}$.

3.- Explique cual es el error en el siguiente procedimiento :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x)+\text{sen}(x)}{1+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)\text{-}2\text{sen}(x)}{0+2} = \frac{1}{2} \quad .$$

4.- Considere el siguiente procedimiento :

f(x)= 5+x+ 2.sen(x) ; g(x) = 1+7x-cos(x) ;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5+x+2.\text{sen}(x)}{1+7x\text{- }\cos(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f\,'(x)}{g\,'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+2.\cos(x)}{7+\text{sen}(x)} = \text{no existe ?}$$

Explique!

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 enero-marzo de 2004

Integrales impropias.

5.- Calcule las siguientes integrales impropias (o demuestre que son divergentes) :

5a) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$; **5b**) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; **5c**) $\int_{e}^{e^4} \frac{dx}{2x-x.\ln(x)}$ dx; **5d**) $\int_{2}^{+\infty} \frac{3x^2-1}{x^4-x^2}$ dx ;

5e) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x}$; **5f)** $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x dx}{1+e^x}$; **5g)** $\int_{0}^{+\infty}(1- tgh(x))$ dx ; **5h)** $\int_{-\infty}^{0}(tgh(x)+1)$ dx ;

5i) $\int_{-\infty}^{+\infty}(1 - |tgh(x)|)$ dx ; **5j)** $\int_{2\pi/3}^{7\pi/3} ctg(x)dx$ [vea el ejercicio 2f de la práctica de la semana V].

6)- Para cada una de las siguientes integrales impropias, averigüe si es convergente o no:

6a) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{3+x^2+sen(x)}$; **6b**) $\int_{0}^{+\infty} \frac{sen^2(x)}{\sqrt{2}+x^2}$ dx ; **6c**) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x.e^x}$;

6d) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x.e^x}$; **6e**) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x.e^x}$; **6f**) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$.

7) Para cada una de las siguiente integrales impropias, halle, si posible, un valor de la constante k para el cual la integral sea convergente (y calcule la integral con el valor de k hallado) :

7a) $\int_{2}^{+\infty} (\frac{kx+1}{x^2+1} - \frac{x-3}{x^2-1})$ dx ; **7b)** $\int_{0}^{+\infty} \frac{1+k.e^x}{1+3.e^x}$ dx ; **7c)** $\int_{1}^{+\infty} \frac{k\sqrt{x^2+1} - x}{x.\sqrt{x^2+1}}$ dx .

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 enero-marzo de 2004

Integrales impropias.

Respuestas

1a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\text{-sen}(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1\text{-cos}(x)}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{6x} = \frac{1}{6}$;

1b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\text{-sen}(x)}{(\text{tg}(x))^3} = (\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\text{-sen}(x)}{x^3})(\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{(\text{tg}(x))^3}) = \frac{1}{6}.1 = \frac{1}{6}$;

1c) poniendo u=arcsen(x), x=sen(u) se tiene : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{arcsen}(x)\text{-}x}{x^3} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{u\text{-sen}(u)}{(\text{sen}(u))^3} =$

$= (\lim\limits_{u\to 0} \frac{u\text{-sen}(u)}{u^3})(\lim\limits_{u\to 0} \frac{u^3}{(\text{sen}(u))^3}) = \frac{1}{6}.1 = \frac{1}{6}$;

1d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0$;

otra manera de proceder podría ser la siguiente, poniendo $u=\frac{1}{x}$:

$\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln(x) = \lim\limits_{u\to +\infty} \frac{\ln(1/u)}{u} = \lim\limits_{u\to +\infty} \frac{-\ln(u)}{u} = \lim\limits_{u\to +\infty} \frac{-1/u}{1} = 0$;

1e) $\lim\limits_{x\to\infty} x.e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$;

1f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1/(x+1)}{1} = 1$;

1g,h) poniendo $u=\frac{1}{x}$, se tiene : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (1+\frac{1}{x})^x$; $\lim\limits_{u\to 0\pm}(1+u)^{1/u} = \lim\limits_{u\to 0} e^{(1/u)\ln(1+u)} = e^1 = e$;

2i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x).\ln(x+1)}{x.(1+\text{sen}(x))} = \lim\limits_{x\to 0} (\frac{\ln(x+1)}{x})(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1+\text{sen}(x)}) = 1$;

2j) $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\text{tg}(x))^{\text{ctg}(x)} =$ NO existe [tg(x) y ctg(x) son funciones periódicas] ;

1k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x\text{-}1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$;

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 enero-marzo de 2004

Integrales impropias.

1m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \mathrm{sen}(t^2)\,dt}{x-\mathrm{sen}(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sen}(x^2)}{1-\cos(x)} = \left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sen}(x^2)}{x^2}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos(x)}\right) = 2$;

2a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{tgh}(x) = 1$; **2b)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{tgh}(x) = -1$ [calcule estos dos límites poniendo u= e^x] ;

2c) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1-\mathrm{tgh}(x))^{(1/x)} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{(1/x).\ln(1-\mathrm{tgh}(x))} = e^{-2}$, ya que $\lim\limits_{x\to +\infty} (1/x).\ln(1-\mathrm{tgh}(x)) =$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1-\mathrm{tgh}(x))}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{e^{-x}}{\cosh(x)}\right)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x-\ln(\cosh(x))}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-1-\mathrm{tgh}(x)}{1} = -2 \text{ ;}$$

2d) $\lim\limits_{x\to -\infty} (1-\mathrm{tgh}(x))^{(1/x)} = 2^0 = 1$;

2e) $\lim\limits_{x\to +\infty} (a.\cosh(cx))^{(b/x)} = e^{bc}$, ya que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{b.\ln(a.\cosh(cx))}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{bc.\mathrm{tgh}(cx)}{1} = bc$;

2f) $\lim\limits_{x\to -\infty} (a.\cosh(cx))^{(b/x)} = e^{-bc}$.

3). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos(x)+\mathrm{sen}(x)}{1+2x} = 2$ [ya que la función, f(x), de la cual se calcula el límite es continua en x=0, por lo cual su límite es f(0)];

ojo : la regla de L'Hopîtal se aplica a límites cuyo tipo de indeterminación es 0/0 o ∞/∞ .

4). La regla de L'Hopîtal permite calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ en el caso que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ **exista**;

como en el caso considerado el límite del cociente de las derivadas no existe, no es aplicable la regla de L'Hopîtal . Sin embargo se puede calcular directamente el límite dado :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5+x+2.\mathrm{sen}(x)}{1+7x-\cos(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x}+1+\frac{2.\mathrm{sen}(x)}{x}}{\frac{1}{x}+7-\frac{\cos(x)}{x}} = \frac{0+1+0}{0+7+0} = \frac{1}{7} \text{ .}$$

5a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \lim_{a\to -1^+} \int_{a}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \lim_{a\to -1^+} [\mathrm{arsen}(0)-\mathrm{arcsen}(a)] = 0-\mathrm{arcsen}(-1) = \frac{\pi}{2}$.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 enero-marzo de 2004

Integrales impropias.

5b) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}[\text{arctg}(b)-\text{arctg}(1)] = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$;

5c) $\displaystyle\int_e^{e^4}\frac{dx}{2x-x.\ln(x)}$ dx; esta integral es impropia, debido a que $\displaystyle\lim_{x\to(e^2)^-}\left(\frac{dx}{2x-x.\ln(x)}\right) = +\infty$

[y además $\displaystyle\lim_{x\to(e^2)^+}\left(\frac{dx}{2x-x.\ln(x)}\right) = -\infty$] . La integral dada es convergente si y sólo si existen (finitos) los dos límites : $\displaystyle L_1 = \lim_{b\to(e^2)^-}\int_e^{b}\frac{dx}{2x-x.\ln(x)}$ dx , $\displaystyle L_2 = \lim_{a\to(e^2)^+}\int_a^{e^4}\frac{dx}{2x-x.\ln(x)}$ dx y en tal caso se tiene $\displaystyle\int_e^{e^4}\frac{dx}{2x-x.\ln(x)}$ dx = L_1+L_2 .

Como $\displaystyle L_1 = \lim_{b\to(e^2)^-}\int_e^{b}\frac{dx}{2x-x.\ln(x)}$ dx = $\displaystyle\lim_{b\to(e^2)^-}[-\ln|2-\ln(b)|+\ln|2-\ln(e)|] = +\infty$, la integral impropia dada **no es convergente**;

5d) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{3x^2-1}{x^4-x^2}$ dx ; como $\displaystyle\frac{3x^2-1}{x^4-x^2} = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$, se tiene :

$$\int_2^{+\infty}\frac{3x^2-1}{x^4-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{3x^2-1}{x^4-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}+\ln\left|\frac{b-1}{b+1}\right|+\frac{1}{2}-\ln\left|\frac{2-1}{2+1}\right|\right] = \frac{1}{2}+\ln(3)\ ;$$

5e) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+e^x} = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\frac{dx}{1+e^x} = \lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)\right]_0^b = \ln(1)-\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$;

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 enero-marzo de 2004

Integrales impropias.

5f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x dx}{1+e^x} = \lim_{a\to-\infty} [\ln(e^x+1)]_a^0 = \ln(2)$;

5g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\text{tgh}(x))\,dx = \lim_{b\to\infty} [x-\ln(\cosh(x))]_0^b = \ln(2)$; **5h)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} (\text{tgh}(x)+1)\,dx = \ln(2)$;

5i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (1-|\text{tgh}(x)|)\,dx = \int_{-\infty}^{0} (\text{tgh}(x)+1)\,dx + \int_0^{+\infty} (1-\text{tgh}(x))\,dx = 2.\ln(2)$;

5j) $\displaystyle\int_{2\pi/3}^{7\pi/3} \text{ctg}(x)dx$ es integral impropia debido a que $\displaystyle\lim_{x\to\pi} |\text{ctg}(x)| = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to2\pi} |\text{ctg}(x)| = \infty$;

esta integral impropia es convergente (e igual a $L_1+L_2+L_3+L_4$), sólo en el caso que las siguientes cuatro integrales impropias existan :

$$L_1 = \int_{2\pi/3}^{\pi} \text{ctg}(x)dx,\ L_2 = \int_{\pi}^{3\pi/2} \text{ctg}(x)dx,\ L_3 = \int_{3\pi/2}^{2\pi} \text{ctg}(x)dx,\ L_4 = \int_{2\pi}^{7\pi/3} \text{ctg}(x)dx\ ;$$

$$L_1 = \lim_{b\to\pi^-} \int_{2\pi/3}^{b} \text{ctg}(x)dx;\ L_2 = \lim_{a\to\pi^+} \int_{a}^{3\pi/2} \text{ctg}(x)dx;\ L_3 = \lim_{b\to2\pi^-} \int_{3\pi/2}^{b} \text{ctg}(x)dx;\ L_4 = \lim_{a\to2\pi^+} \int_{a}^{7\pi/3} \text{ctg}(x)dx;$$

como L_1 no es convergente, sigue que la integral $\displaystyle\int_{2\pi/3}^{7\pi/3} \text{ctg}(x)dx$ no es convergente.

En efecto : $\displaystyle\lim_{b\to\pi^-} \int_{2\pi/3}^{b} \text{ctg}(x)dx = \lim_{b\to\pi^-} [\ \ln|\text{sen}(x)|\ ]_{2\pi/3}^{b} = \lim_{b\to\pi^-} (\ \ln|\text{sen}(b)| - \ln(\sqrt{3}/2)\ ) = -\infty$.

6a) Como $3+x^2+\text{sen}(x) \geq 1+x^2$, se tiene, para todo b :

$0 \leq \displaystyle\int_1^b \frac{dx}{3+x^2+\text{sen}(x)} \leq \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}(b) - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$ y de esto sigue, [tomando en cuenta que

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 enero-marzo de 2004

Integrales impropias.

$F(b) = \int_1^b \frac{dx}{3+x^2+\text{sen}(x)}$ es función creciente de b] , $\lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{3+x^2+\text{sen}(x)}$ = existe finito;

6b) $\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}^2(x)}{\sqrt{2}+x^2} dx$ es convergente , ya que $0 \leq \frac{\text{sen}^2(x)}{\sqrt{2}+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ etc.

6c) como e^x es función creciente, se tiene que para todo $x\in[0, 1]$ resulta $1=e^0\leq e^x \leq e^1< 3$,

luego, para todo $x\in[0, 1]$: $0 \leq x.e^x \leq 3x$, $\frac{1}{3x} \leq \frac{1}{x.e^x}$; de esto sigue, para todo $a\in(0,1]$,

$\int_a^1 \frac{1}{3x} \leq \int_a^1 \frac{dx}{x.e^x}$ y por consiguiente $\lim\limits_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{x.e^x} = +\infty$,

ya que $\lim\limits_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{3x} = \lim\limits_{a\to 0^+} \frac{-1}{3} \ln(x) = +\infty$. Por lo tanto $\int_0^1 \frac{dx}{x.e^x}$ es divergente.

6d) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x.e^x}$ es convergente, ya que para $x \geq 1$ se tiene $0 \leq \frac{1}{x.e^x} \leq \frac{1}{e^x}$ etc.

6e) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x.e^x} = \int_0^1 \frac{dx}{x.e^x} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x.e^x}$ es divergente ya que $\int_0^1 \frac{dx}{x.e^x}$ es divergente.

6f) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim\limits_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim\limits_{a\to 1^+} \int_a^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} =$

$\lim\limits_{b\to 1^-} 3[\sqrt[3]{x-1}]_0^b + \lim\limits_{a\to 1^+} 3[\sqrt[3]{x-1}]_a^2 = 3[0-(-1)]+3[1-0] = 6$; la integral es convergente.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 enero-marzo de 2004

Integrales impropias.

7a) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\left(\frac{kx+1}{x^2+1} - \frac{x-3}{x^2-1}\right)dx = \int_2^{+\infty}\left(\frac{k}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1}\right)dx =$

$\displaystyle = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{k}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}(x) + \ln|x-1| - 2.\ln|x+1|\right]_2^b =$

$\displaystyle = \lim_{b\to\infty}\left[\operatorname{arctg}(x) + \ln\left((x^2+1)^{k/2}|x-1|(x+1)^{-2}\right)\right]_2^b = ?$ para que este límite sea finito, el límite del argumento del logaritmo debe ser finito, así que debe ser : $2.\frac{k}{2}+1-2 = 0 \Rightarrow k=1$.

Con k=1 se tiene : $\displaystyle\int_2^{+\infty}\left(\frac{kx+1}{x^2+1} - \frac{x-3}{x^2-1}\right)dx = \lim_{b\to\infty}\left[\operatorname{arctg}(x) + \ln\left((x^2+1)^{1/2}|x-1|(x+1)^{-2}\right)\right]_2^b =$

$\displaystyle = \frac{\pi}{2} + \ln(1) - \operatorname{arctg}(2) - \ln\left(\frac{\sqrt{5}}{9}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(2) - \frac{1}{2}.\ln(5) + 2.\ln(3)$.

7b) Poniendo $u=e^x$ se tiene : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1+k.e^x}{1+3.e^x}dx = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{u} - \frac{1-\frac{k}{3}}{u+\frac{1}{3}}\right)du = \lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(\frac{u}{(u+1/3)^{1-k/3}}\right)\right]_1^b$.

Este límite es finito si y sólo si k = 0 . Con k= 0 se tiene : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+3.e^x}dx = \ln(1)-\ln(3/4) =$

$=2.\ln(2)-\ln(3)$.

7c) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{k\sqrt{x^2+1}-x}{x.\sqrt{x^2+1}}dx = \int_1^{+\infty}\left(\frac{k}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(\frac{x^k}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)\right]_1^b$.

Este límite es finito si y sólo si k =1 . Con k= 1 se tiene : $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(\frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)\right]_1^b =$

$\displaystyle = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln(3/2)$.

a) $\int x^2 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx$ b) $\int_1^e \ln(x)\, dx$

c) $\int_0^{?} \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x)+4}\, dx$ d) $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2-3x}$

5) **(60 Pts.)** Calcule y grafique el área de la región limitada por las curvas gráfico de

$y = -x+3 \ ; \ \ y = x^2+1$

4. **(200 Pts.)**: Calcule:

$a) \int \frac{x^2+\ln(x)}{x^3}\, dx$ $b) \int_1^{?} \frac{dx}{x^3 \ e^{\frac{1}{x^2}}}$

$c) \int_1^e \frac{x^2+\ln(x)}{x^3}\, dx$ $d) \int_{-1}^{3} \frac{dx}{x^2+2x}$

5. Calcule el área de la región limitada en el primer cuadrante por las curvas gráfico de $f(x) = -3x+12 \quad y \quad g(x) = 4-x^2$ y el eje *y*. Grafique **(100 Pts.)**

a) $\int \frac{\sqrt{x}\ln(x)+\sqrt[3]{1+\ln(x^3)}}{x} dx$ b) $\int_0^2 \frac{x+1}{4+x^2}\, dx$

c) $\int \frac{x^2 dx}{(x^2-x-12)}$ d) $\int_1^{?} \frac{dx}{3x^2}$

5. **(100 Pts.)** Calcule el área de la región limitada por las curvas gráfico de $f(x) = 9 - x^2$, la recta tangente al grafico de dicha función en el punto a=2 y el eje *x*. Grafique

(240 Pts.): Calcule:

a) $\int \frac{x^2+\ln(x)}{3\sqrt{x}}\,dx$ b) $\int \frac{x+1}{x^2+4}\,dx$

c) $\int_1^e \frac{1}{x^2+2x}\,dx$ d $\int_4^6 \frac{1}{\sqrt[5]{(5-x)^2}}\,dx$

5. **(60 Pts.)** Calcule el área de la región limitada en el primer y segundo cuadrante por los gráficos de las funciones $f(x)= x^2-6$; $g(x)=3$ y el eje x. Grafique

. **(240 Pts.)**: Calcule:

a) $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ b) $\int \frac{1-3x}{x^2+4}\,dx$

c) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x-6}\,dx$ d $\int_5^7 \frac{1}{\sqrt[5]{(6-x)^2}}\,dx$

5. **(60 Pts.)** Calcule el área de la región limitada en el primer y segundo cuadrante por los gráficos de las funciones $f(x)= 9 - x^2$; $g(x)=5$ y el eje x. Grafique

4. **(200 Pts.)**: Calcule:

a) $\int^{3} \left(\frac{9}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{5}{x^6} \right) dx$ b) $\int_1^{?} \frac{3}{x^3 \; e^{\frac{1}{x^2}}}\,dx$ c) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx$ d) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x}$

5. Calcule el área de la región limitada por las curvas gráfico de $f(x)= -(x-1)^2+8$ y $g(x) = (x-1)^2$. Grafique **(100 Pts.)**

Teoremas del Cálculo Integral

La idea fundamental del concepto de integral definida fué la de calcular el área de una región R en $\mathbb{R}^2$ delimitada por la curva dada por el gráfico de una función continua $f : [a,b] \to (0,\infty)$, el eje horizontal y las rectas verticales con ecuaciones $x = a$ y $x = b$. (Figura 1)

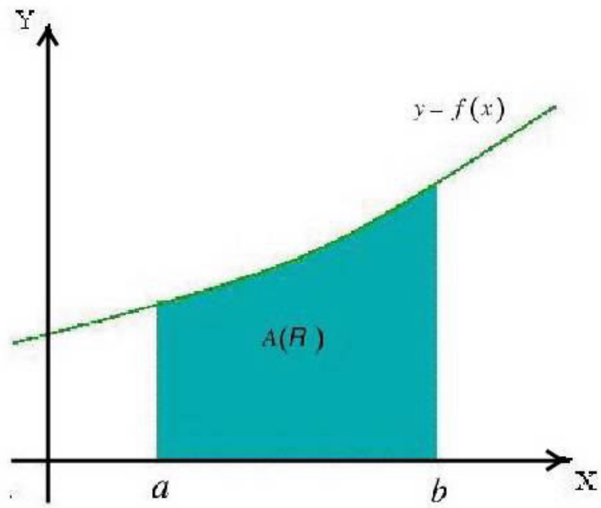


Figura 1

Observaciones

- En su oportunidad exigimos que la función fuese no negativa en el intervalo. Esto no fué por razones conceptuales, sino para basarnos en la idea intuitiva de área, pero la definición dada por Riemann es independiente de este concepto.
- Si la función toma valores positivos y negativos en el intervalo de integración, el valor calculado representa la diferencia entre el área de la región por encima y por debajo del eje horizontal.
- La definición es aplicable a funciones no necesariamente continuas en el intervalo, basta que estén acotadas y que presenten a lo sumo un número finito de puntos de discontinuidad en el intervalo.

Propiedades. Sean f y g integrables en los intervalos que correpondan. Entonces

(1) $\int_a^a f = 0$

(2) $\int_a^b f = -\int_b^a f$

(3) $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ donde $c \in [a,b]$

(4) $\int_a^b cf = c\int_a^b f$ donde $c \in \mathbb{R}$

(5) $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

(6) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

(7) $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

Teorema (Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral). Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

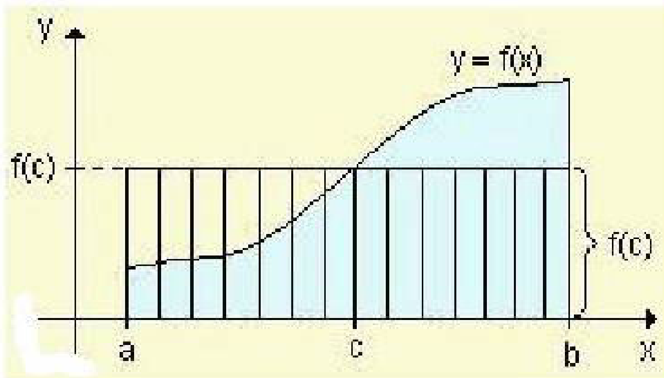


Figura 2

Geométricamente, el teorema garantiza que existe un punto $c \in [a,b]$ tal que su imagen $f(c)$ es la altura de un rectángulo de base $b-a$, tal que su área es la misma que la de la región limitada por el eje horizontal, las rectas de ecuación $x = a$, $x = b$ y el gráfico de f.

Demostración. Por ser f continua en $[a,b]$, el teorema de Bolzano - Weierstrass garantiza la existencia de puntos x_1 y x_2 en $[a,b]$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces por la propiedad (6)

$$f(x_1)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(x_2)(b-a)$$

Dividiendo estas desigualdades por $b-a > 0$ tenemos

$$f(x_1) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq f(x_2)$$

Aplicando ahora el teorema de los valores intermedios$^{(*)}$ (recordar que f es continua), existe un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

o equivalentemente

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

como se quería demostrar.

Teorema Sean $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas y tal que $g(x) \geq 0$ (o $g(x) \leq 0$) para todo $x \in [a,b]$.

Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)$$

Demostración. Sea $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(u) = \int_a^b f(x)g(x)dx - f(u)\int_a^b g(x)dx$$

Es claro que h es continua en $[a,b]$ por ser suma y producto de funciones continuas y además por la propiedad (3)

$$h(u) = \int_a^b [f(x) - f(u)]g(x)dx$$

Como f es continua en $[a,b]$, existen $x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a,b]$. Valuando h en x_1 y x_2 se tiene

$$h(x_2) \leq 0 \leq h(x_1)$$

ya que $f(x) - f(x_2) \leq 0$ y $f(x) - f(x_1) \geq 0$, entonces, por el teorema de los valores intermedios$^{(1)}$ existe $c \in (a,b)$ tal que $h(c) = 0$, esto es,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx - f(c)\int_a^b g(x) = 0$$

de donde

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)$$

lo que concluye la demostración.

Observación. Es evidente que el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral (Teorema 1.1) es un caso particular del teorema 1.2 tomando $g(x) = 1$ para todo $x \in [a,b]$.

Definición. Sea $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ continua. Para cada $x \in [a,b]$ la integral

$$\int_a^x f(t)dt$$

asigna un valor bien definido. Esto nos permite definir una nueva función $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

que llamaremos función área o función integral.

Observación. Cuando f es positiva, la función área representa desde un punto de vista geométrico, el valor del área (de ahí su nombre) de la región limitada por el eje horizontal, el gráfico de f y las rectas de ecuaciones $t = a$ y $t = x$. (Figura 3).

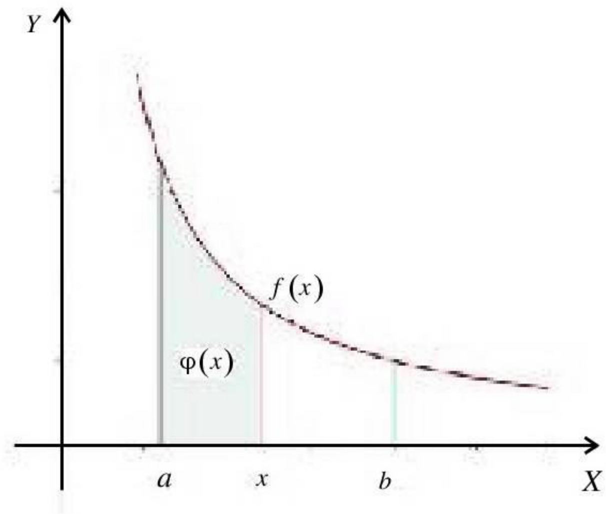


Figura 3

Ejemplo. Calculemos la función área de $f(t) = 2t + 1$ para $2 \leq t \leq 4$

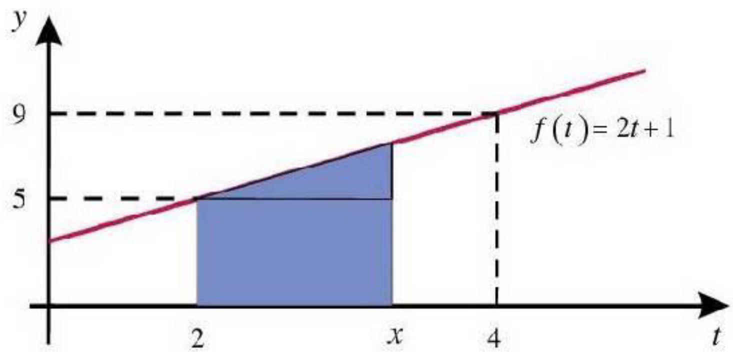


Figura 4

Por geometría elemental vemos que el área sombreada en la figura 4 es

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 5(x-2) + \frac{1}{2}(x-2)(2x-4) \\ &= x^2 + x - 6\end{aligned}$$

Aunque hemos dado una interpretación geométrica de la integral definida, no tenemos una manera sencilla de calcularla. Veremos a contiuación un teorema que nos brindará una herramienta para el cálculo de dichas integrales sin tener que emplear la definición.

Observación. El área calculada en el ejemplo anterior es el valor de la función integral $\varphi(x) = \int_2^x (2t+1)dt$ para $x \in [2,4]$. Observemos que $\varphi'(x) = 2x+1 = f(x)$. Este resultado no es un hecho aislado, el teorema que veremos a continuación establece esta relación de manera general.

Teorema. (Teorema Fundamental del Cálculo Integral) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y sea $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$. Entonces φ es derivable en $[a,b]$ y $\varphi'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

Demostración. Sea $x \in [a,b]$ y sea $h \neq 0$ tal que $x+h \in [a,b]$ (Figura 5),

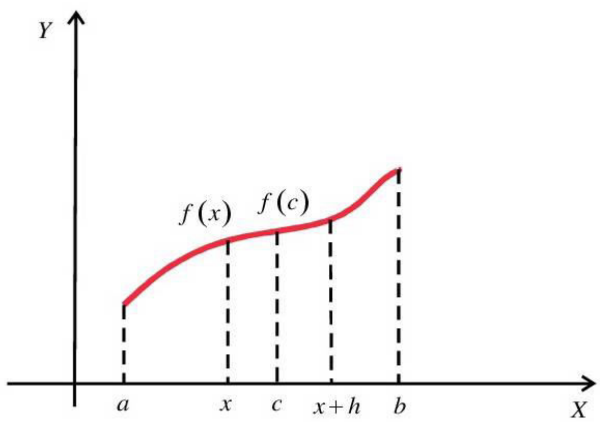


Figura 5

entonces

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right]\\ &= \frac{1}{h}\left[\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right]\\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt\end{aligned}$$

y por el teorema del valor medio del cálculo integral esta última integral puede escribirse $f(c)h$ con c entre x y $x+h$. Luego

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \frac{1}{h}f(c)h = f(c)$$

Cuando $h \to 0$ tenemos que $c \to x$, entonces tomando límite para h que tiende a cero en la última expresión tenemos

$$\varphi'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$$

Observación. Entre otras cosas, este teorema establece que toda función continua en $[a,b]$ admite una función primitiva. Combinando este hecho con el que dos primitivas de una función difieren en una constante tenemos el resultado siguiente.

Corolario. (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Integral - Regla de Barrow) Sea $f : [a,b] \to \mathsf{R}$ continua y sea $P : [a,b] \to \mathsf{R}$ tal que $P'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = P(b) - P(a)$$

Demostración. Por el teorema anterior, la función $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$ es también una primitiva de f, de modo que φ y P difieren en una constante$^{(2)}$, esto es, $\varphi(x) = P(x) + c$ para todo $x \in [a,b]$. Valuando en $x = a$ tenemos $0 = P(a) + c$, de donde $c = -P(a)$, luego

$$\int_a^x f(t)dt = P(x) - P(a)$$

y valuando en $x = b$ se obtiene $\varphi(b) = P(b) - P(a)$, pero $\varphi(b) = \int_a^b f(x)dx$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = P(b) - P(a)$$

La importancia de este resultado radica en que nos permite calcular el valor de una integral definida de una función con una simple sustracción en caso de conocer una primitiva de ella, lo que proporciona una manera sencilla de atacar el problema.

Ejemplo. Sea $f(x) = \sin(3x)$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, entonces

$$\int_0^{\pi/3} \sin(3x)dx = \left[-\frac{1}{3}\cos(3x)\right]_0^{\pi/3} = -\frac{1}{3}[\cos(\pi) - \cos(0)] = -\frac{1}{3}(-2) = \frac{2}{3}$$

$(*)$ Sea f continua en el intervalo $[a,b]$ con $f(a) \neq f(b)$, entonces para todo q comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = q$.

Análisis Matemático I

Sucesiones y Series - Guía de Trabajos Prácticos 2012

1. Calcule los diez primeros términos de las sucesiones:

a) $n \to (-1)^n$

b) $n \to \dfrac{\cos(n\text{®})}{n}$

c) $n \to 2^n sen\left(n\,\frac{\text{®}}{2}\right)$

d) $n \to \dfrac{n}{n+2}$

e) $a_n = 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

f) $b_n = \dfrac{n}{n!}$

g) $c_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}$

h) $a_n = 1 + (-1)^n$

i) $a_n = (1 + \dfrac{1}{2n})^n$

2. Determine si las sucesiones del ejercicio 1 son o no convergentes.

3. Una sucesión $\{\boldsymbol{a_n}\}$ está definida por **recurrencia**, si dados los primeros k términos, los valores de los a_n para $n \geq k$, se expresan como una función de los términos anteriores. Se llama relación de recurrencia a la expresión mediante la cual a_n se calcula mediante los términos anteriores .

Escriba en cada los cinco primeros términos de las sucesiones

a) $a_1 = 1 \qquad a_n = a_{n-1} + 2$

b) $a_1 = a_2 = 1 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

c) $a_1 = 2 \qquad a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$

4. Si q es un número real no nulo y se define $\{S_n\}$ como la sucesión de las siguientes sumas

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + q$

$S_3 = 1 + q + q^2$

$\vdots$

$S_n = 1 + q + q^2 + \dots\dots\dots + q^{n\text{-}1}$

a) ¿Qué interpretación daría a S_n ?

b) ¿Podría calcular S_n sin hacer explícitamente la suma?. (Ayuda: Calcule $S_n - qS_n$)

5. Si K es un número positivo, la sucesión definida por $a_1 = 1$, $\quad a_n = \dfrac{1}{2}(a_{n-1} + \dfrac{K}{a_{n-1}})$ $\;con\; n \geq 2$ brinda aproximaciones de $\sqrt{K}$ .Utilice los primeros 5 términos de la sucesión para obtener una aproximación de $\sqrt{5}$.¿Con cuántos términos se logra una aproximación a tres cifras decimales?

6. Una sucesión se denomina **aritmética** si cada término de la misma , se obtiene del término anterior sumándole un número constante, que se denomina razón.

Así si se denomina r, entonces el término general de la sucesión aritmética es $a_n = a_1 + (n-1)\, r$

Escriba en cada uno de los siguientes casos los cinco primeros términos de la sucesión

a) $a_{22} = 1$ y $r = \frac{1}{2}$

b) $a_1 = -1$ y $r = 2$

c) $a_1 = 2$ y $r = \frac{1}{3}$

d) $a_1 = 7$ y $r = 2$

7. . Sabiendo que la suma de los "n "primeros términos de una sucesión aritmética es $S_n = n\dfrac{a + (a + (n-1)r)}{2}$ donde n es el número de términos r es la razón y a es el primer término ¿Cuál es la suma de todos los números de tres cifras que terminan en 3?

8. Calcule $\sum_{k=0}^{200}(1 + 3k)$

9. Calcule la suma de todos los números impares menores que 100.

10. Una sucesión se denomina **geométrica** si cada término de la misma , se obtiene del término anterior **multiplicado** por un número constante, que se denomina razón.

Así si se denomina r a la razón , entonces el término general de la sucesión geométrica es $a_n = a\, r^{n-1}$

Escriba en cada uno de los siguientes casos los cinco primeros términos de la sucesión

a) $a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{2}$

b) $a_1 = 3$ y $r = 2$

c) $a_1 = 5$ y $r = \frac{1}{2}$

d) $a_1 = -1$ y $r = -1$

11. Sabiendo que la suma de los "n "primeros términos de una sucesión geométrica es $S_n = a\,\dfrac{1 - r^n}{1 - r}$ donde ***n*** es el número de términos ***r*** es la razón y ***a*** es el primer término , calcule las siguientes sumas:

a) $\sum_{k=1}^{100} 3.2^{k-1}$ b) $\sum_{k=-1}^{100} \dfrac{1}{3^{k+2}}$ c) $\sum_{k=4}^{50} \dfrac{1 + 2^k}{3^{k+2}}$

12. Demuestre que si $|r| < 1$, entonces la sucesión $\{nr^n\}$ converge a cero.

13. 13.Si la sucesión $\{a_n\}$ es divergente, ¿es necesariamente el $\lim a_n = \infty$?Justifique claramente.

14. a) Determine si la sucesión definida por $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ es convergente.

b) Indique a partir de que valor de n los a_n se encuentran del $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ a una distancia mayor de £ $= 0,1$.

15. Considerando que para valores muy grandes de *n,* puede afirmarse que
$\ln(n) < n^{\sim} < a^n < n! < n^n$ si ~ > 0 y $a > 1$, Calcule

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln(n)}{n^3}$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3^n}{2n!}$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^{\frac{3}{2}}}{3^n}$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^3}{100^n}$

e) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3^n \sqrt{2n}}{5^n}$

f) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n^5}{\ln(n^5)}$

g) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3^{2n}}{n^n}$

h) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n! + n^3}{2\, n^n}$

i) $\lim\limits_{n \to \infty} n^2\, e^{-n}$

16. Determine si las siguientes sucesiones convergen o no, en caso de convergencia encuentre el límite:

a) $a_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$

b) $a_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n+1}$

c) $a_n = sen$ (*n*®)

d) $a_n = \sin$ (*n*®)

e) $a_n = \sqrt{n^2} - n$

f) $a_n = \dfrac{n^2 - 1}{2 + n^2 + \sqrt{n}}$

g) $a_n = \dfrac{2^n}{3^n + 1}$

h) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{3n^2+10}}$

i) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^4+n+2}}{n^2}$

j) $a_n = \dfrac{sen\,(n®)}{n}$

k) $a_n = \sqrt[n]{n}$

l) $a_n = 2^{-1/n^3}$

m) $a_n = \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$

n) $a_n = \sqrt[n]{n^3+1}$

o) $a_n = n\ sen(2n)$

p) $a_n = (\sqrt{n^2+2n-1}-n)$

q) $a_n = \dfrac{3^n}{5^n+10^6}$

r) $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$

s) $a_n = \dfrac{sen(n)}{\sqrt[3]{n}}$

t) $a_n = \dfrac{\sqrt{1+n}-1}{n}$

u) $a_n = \dfrac{n-\ln(n)+\cos(n)}{n-\sqrt{n}\ln(n^2)}$

17. Demuestre que las sucesiones $\left\{\dfrac{n^2}{n+3}\right\}$ y $\left\{\dfrac{n^2}{n+4}\right\}$ son ambas divergentes, pero que la sucesión $\left\{\dfrac{n^2}{n+3}-\dfrac{n^2}{n+4}\right\}$ converge.

18. Determine para que valores de la constante c la sucesión $\left\{\dfrac{n}{c^n}\right\}$ resulta convergente.

19. 10. Determine si las siguientes series convergen o no

a) $\sum \dfrac{k}{k^4+3}$

b) $\sum \dfrac{1}{k+3}$

c) $\sum \dfrac{\ln k}{k^3}$

d) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{k^2-k}}$

e) $\sum \dfrac{(2)^{-k}}{3}$

f) $\sum \dfrac{1}{k\ln k}$

g) $\sum \dfrac{1}{(k+3)(k+2)(k+1)}$

h) $\sum \dfrac{\ln\sqrt{k}}{k}$

i) $\sum \dfrac{2}{k(\ln k)^2}$

j) $\sum \dfrac{7k+2}{2k^5+7}$

k) $\sum ke^{-k^2}$

l) $\sum k^2 2^{-k^2}$

m) $\sum \dfrac{3^k}{k!}$

n) $\sum \dfrac{k!}{100^k}$

o) $\sum \dfrac{1}{k2^k}$

p) $\sum \left(\dfrac{k}{3k+1} \right)^k$

q) $\sum \dfrac{(\ln k)^2}{k}$

r) $\sum k \left(\dfrac{3}{2} \right)^{-k}$

s) $\sum \dfrac{1}{(\ln k)^k}$

t) $\sum \dfrac{3}{2+\sqrt[3]{k}}$

u) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{k^3-1}}$

v) $\sum \dfrac{3^k}{k^k} k!$

w) $\sum \dfrac{\ln k}{e^k}$

x) $\sum \dfrac{\ln(k)}{k^2}$

y) $\sum \dfrac{k^k}{k!}$

z) $\sum \dfrac{k!}{k^k}$

20. Determine si las siguientes series convergen o no. En caso afirmativo indique si lo hacen en forma absoluta o condicional.

a) $\sum \dfrac{(-1)^k \ln k}{k}$

b) $\sum \dfrac{\cos(n\text{®})\, 2^k}{3^{k+1}}$

c) $\sum \dfrac{(-1)^k}{3k+1}$

d) $\sum (-1)^k \dfrac{3^k}{k}$

e) $\sum (-1)^k \dfrac{3^k}{k}$

f) $\sum (-1)^k \dfrac{k^2}{2^k}$

g) $\sum (-1)^k \dfrac{k!}{2^k}$

h) $\sum sen\left(\dfrac{k\text{®}}{4} \right)$

i) $\sum sen\left(\dfrac{\text{®}}{4k^2} \right)$

j) $\sum (-1)^k \dfrac{4^{k-2}}{e^k}$

k) $\sum (-1)^k k e^{-k}$

l) $\sum (-1)^k \dfrac{1}{k-3\sqrt{k}}$

m) $\sum (-1)^k \dfrac{k+5}{k^2+k}$

ñ) $\sum (-1)^k \left(\dfrac{2}{5} \right)^{2k}$

o) $\sum (-1)^k \dfrac{k}{k^4-5}$

p) $\sum \dfrac{\sqrt{k}+5}{k^2+k+2}$

q) $\sum \dfrac{1}{\text{®}^k-2}$

r) $\sum \dfrac{k^2}{1+k\sqrt{k}}$

s) $\sum \frac{k^{100} 5^k}{\sqrt{k!}}$

t) $\sum \frac{k!}{k^2 e^k}$

u) $\sum (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{\ln(k)}$

v) $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k^2 + \ln(k)}$

w) $\sum \frac{(-1)^k (k^2 - 1)}{k^2 + 1}$

21. Determine cuales de las siguientes series converge y cuales divergen. Para cada serie convergente estudie si lo hace en forma absoluta o condicional

a) $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$

b) $\sum (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$

c) $\sum_{2}^{\infty} (-1)^n \log_n(2)$

d) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \;\; sen(\frac{1}{n})$

e) $\sum_{2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n)}$

f) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{10^n}{n^{10}}$

g) $\sum_{2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{\ln(n^3)}$

h) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \ln(1+\frac{3}{n})$

i) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n (0.1)^{n+1}$

j) $\sum_{2}^{\infty} (-1)^n \frac{2+n}{7+n}$

k) $\sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

l) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$

m) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

n) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)}{n^2 + 2n + 1}$

ñ) $\sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{100^n}{n!}$

o) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right]$

p) $\sum_{0}^{\infty} \frac{\cos(n®)}{n\sqrt{n}}$

q) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{sen(n)}{n^2}$

r) $\sum_{2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n^3}$

s) $\sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+1}$

t) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

u) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$

v) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\ \sqrt[n]{10}$

w) $\sum_{2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\ln(n)}$

x) $\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

y) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-n+2}{6n^6+n^2}$

z) $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$

a1) $\sum_{2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(5n+3)^{\frac{3}{2}}}$

b1) $\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+10}$

c1) $\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$

d1) $\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$

e1) $\sum_{1}^{\infty}\frac{5n^2+2n}{3n(n^2+1)}$

22. Demuestre usando los criterios de convergencia para series Geométricas que

$$\frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n \qquad si \quad 0<t<1$$

23. Muestre con un ejemplo que $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ puede ser divergente aun cuando $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ son ambas convergentes.

24. Encuentre el radio e intervalo de convergencia para las siguientes series de potencias. Si el radio de convergencia es finito verifique si la serie es o no convergente en los extremos del intervalo

a) $\sum_{0}^{\infty}x^n$

b) $\sum_{0}^{\infty}n^2x^n$

c) $\sum_{0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}$

d) $\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

e) $\sum_{0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$

f) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{n^2}$

g) $\sum_{0}^{\infty} \frac{e^n x^n}{(2n+1)}$

h) $\sum_{0}^{\infty} n^n x^n$

i) $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

j) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{n}$

k) $\sum_{o}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x+6)^n}{n!}$

l) $\sum_{0}^{\infty} \frac{(5)^n (x-3)^n}{n!}$

m) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{\sqrt{n}}$

n) $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}3^n}$

o) $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$

p) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n(x+1)^n}{\sqrt{n}}$

q) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(x)^n}{\sqrt{n^2+3}}$

r) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n$

s) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1+3^n}{n!} x^n$

t) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{2n^2+2}$

u) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n$

25. Calcule la suma de la serie de potencias $\sum_{0}^{\infty} \frac{(5x+2)^n}{n!}$

26. Encuentre la serie de Taylor con centro en a=0 para las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = \cos(x)$

c) $f(x) = sen(x)$

d) $f(x) = \ln(1+x)$

e) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$

f) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \mathrm{senh}(x)$

27. Encuentre el intervalo de convergencia de cada una de las series del ejercicio 16.

28. Encuentre el polinomio de Taylor de cuarto grado de $f(x) = e^{x^2}$ alrededor de a=1, y use este polinomio para aproximar $f(1{,}1)$. Encuentre una cota del error que se comete con tal aproximación.

29. Encuentre el polinomio de Taylor de cuarto grado de $f(x) = e^{-x}$ alrededor de a=1, y use este polinomio para aproximar $e^{-0.99}$. Encuentre una cota del error que se comete con tal aproximación.

30. Use un polinomio de Taylor centrado en $a = \frac{\text{®}}{4}$ para aproximar cos (42°) con una precisión de 10^{-6}..

31. a) Encuentre la serie de Taylor de la función $f(x) = \ln(x)$ centrada en $a = e$ y determine el intervalo de convergencia.

b) Determine de que grado debe ser el polinomio de Taylor centrado en para $a = e$ obtener una aproximación de ln(3) con una precisión de 10^{-4}.

32. Use un polinomio de Taylor de grado cuatro de la función $f(x) = \ln(1+x)$, para aproximar ln(1,1) y estime el error que comete con tal aproximación.

Derivación e integración de series de Potencias

Según este teorema las series de potencias se pueden derivar e integrar término a término dentro del intervalo de convergencia.

Teorema:

- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias de radio R y supongamos que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ para todo x $\in$ (-R, R). Entonces las serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, obtenida de derivar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ término a término, también tiene radio de convergencia R y además

  $$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \forall x \in (-R, R).$$

Esto es, la serie derivada término a término converge a la derivada de f para todo x $\in$ (-R, R).

- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias de radio R y supongamos que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ para todo x $\in$ (-R, R). Entonces las serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$,, obtenida de integrar

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ término a término, también tiene radio de convergencia R y además

$\int f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad \forall x \in (-R,R)..$

Esto es la serie integrada término a término converge a la integral de f para todo x $\in$ (-R, R).

En particular, si $a,b \in (-R,R)$ se tiene que $\int_a^b f(x)dx = \sum_0^{\infty} a_n (\int_a^b x^n dx)$

33. a) Encuentre un desarrollo en serie de potencias de la función $f(x) = \frac{1}{1+x}$ y determine el intervalo de convergencia.

b) Derive término a término el desarrollo en serie obtenido en el inciso anterior para obtener un desarrollo en serie de la función $g(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ y especifique en que intervalo vale este desarrollo

c) A partir del desarrollo en serie de potencias de la función $f(x) = \frac{1}{1+x}$, determine un desarrollo en serie de potencias centrado en el origen de la función $f(x) = \ln(1+x)$ e indique en que intervalo es válida esta representación.

34. a) Encuentre un desarrollo en serie de potencias de la función $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ y a partir de éste determine un desarrollo en serie centrado en el origen para la función $f(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$. Indique en que intervalo es válido este desarrollo.

35. a) Use la identidad $sen^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$,para obtener un representación en serie centrado en el origen para $sen^2(x)$

b) Diferencie la serie obtenida para obtener un desarrollo en serie para la función $2sen(x)\cos(x)$

c) Verifique que esta serie es el desarrollo en serie con centro en el origen de $sen(2x)$.

36. Partiendo de la representación de $\frac{1}{1+t} = 1+t+t^2+t^3+$........... si $0 < t < 1$ considere la representación en serie de las siguientes funciones

a) $\frac{1}{3-x}$

b) $\dfrac{1}{(3-x)^2}$

37. Determine una representación en serie de potencias de la función f(x) = ln(x) en potencias de (x-4).

38. Idem para la función de $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

Criterio del Cociente

Teorema. (Criterio del cociente o criterio de D'Alembert). Sea $\sum a_k$ una serie de términos positivos. Si existe $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ y $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L$ podemos afirmar lo siguiente:

(a) Si $L < 1$ la serie $\sum a_k$ es convergente

(b) Si $L > 1$ la serie $\sum a_k$ diverge

(c) Si $L = 1$ el criterio no decide el comportamiento de $\sum a_k$

Demostración.

(a) Por una propiedad de los números reales, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ implica que existe $q \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < q < 1$, lo que nos permite afirmar que existe un número real positivo N tal que $\frac{a_{k+1}}{a_k} < q$ para todo $k \geq N$ o equivalentemente

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < \frac{q^{k+1}}{q^k}$$

para todo $k \geq N$, que podemos reescribir

$$\frac{a_{k+1}}{q^{k+1}} < \frac{a_k}{q^k}$$

para todo $k \geq N$. Esta última desigualdad indica que la sucesión $\left\{\frac{a_k}{q^k}\right\}$ es decreciente para $k \geq N$ y por consiguiente está acotada, esto es, existe $b \in (0,\infty)$ tal que

$$\frac{a_k}{q^k} \leq b$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ o equivalentemente

$$a_k \leq bq^k$$

y por el criterio de comparación $\left(\sum bq^k \text{ es una serie geométrica convergente}\right)$ podemos concluir que $\sum a_k$ es convergente.

(b) Si $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$ existe un número real positivo M tal que $\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$ para todo $k \geq M$, por lo tanto $a_{k+1} > a_k$ para todo $k \geq M$, esto es, $\{a_k\}$ es una sucesión creciente, por consiguiente $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$ y la serie $\sum a_k$ no converge por condición necesaria.

(c) Si $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$ puede ocurrir que $\sum a_k$ sea convergente o no.

La serie armónica $\sum \frac{1}{k}$ es divergente y

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

Por otro lado, para la serie $\sum \frac{1}{k^2}$ tenemos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1$$

sin embargo la misma convege por ser una p –serie con $p > 1$.

Ejemplo. Consideremos la serie geométrica $\sum aq^k$. Si aplicamos este criterio a la misma tenemos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|aq^{k+1}|}{|aq^k|} = \lim_{k\to\infty} |q| = |q|$$

de modo que la serie es convergente si $|q| < 1$ lo que concuerda con lo estudiado en la serie geométrica.

Serie Geométrica

Definición. Una serie donde cada término se obtiene al multiplicar el anterior por un número fijo se denomina serie geométrica y dicho número fijo recibe el nombre de razón de la serie. Su expresión es

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} aq^k$$

El número $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ es el primer término y $q \in \mathbb{R}$ la razón.

Queremos estudiar el comportamiento de esta serie y demostraremos que su convergencia depende del valor de la razón q.

(a) Si $q = 1$ tenemos

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a1^{k-1} = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ términos}} = na$$

de modo que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} na = \pm\infty$$

dependiendo del signo de a, por lo tanto $\sum_{k=1}^{n} aq^{k-1}$ diverge si $q = 1$.

(b) Si $q = -1$,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a(-1)^{k-1} = \underbrace{a - a + a - a + \cdots \pm a}_{n \text{ términos}} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ a & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

por lo tanto no existe $\lim_{n\to\infty} s_n$ y $\sum_{k=1}^{n} aq^{k-1}$ diverge si $q = -1$.

(c) Supongamos que $|q| \neq 1$, entonces

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$$

y multiplicando ambos miembros por q se tiene

$$qs_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^n$$

y al restar miembro a miembro

$$s_n - qs_n = a - aq^n$$

de donde

$$s_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \begin{cases} \frac{a}{1-q} & \text{si } |q|<1 \\ \pm\infty & \text{si } |q|>1 \end{cases}$$

de modo que la serie converge a $s = \frac{a}{1-q}$ si $|q| < 1$ y es divergente si $|q| > 1$.

Resumiendo, la serie geométrica $\sum aq^k$ converge si $|q| < 1$ y no converge si $|q| \geq 1$. En el caso de la convergencia tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}$$

y decimos que la suma de la serie es $\frac{a}{1-q}$.

Ejemplos.

(1) Sea la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 2(\frac{3}{4})^{k-1} = 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \cdots$

Observemos que la misma puede escribirse de varias formas, esto es,

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \sum_{k=p}^{\infty} 2\left(\frac{3}{4}\right)^{k-p} = \sum_{k=0}^{\infty} 2\left(\frac{3}{4}\right)^{k}$$

por lo que no es necesario que se presente en la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$$

En este caso, como $|q| = \frac{3}{4} < 1$ podemos afirmar que $\sum_{k=1}^{\infty} 2(\frac{3}{4})^{k-1}$ converge y además es posible calcular su suma ya que

$$s = \frac{a}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{3}{4}} = 8$$

(2) Consideremos la serie

$$1 - \frac{4}{3} + \frac{16}{9} - \frac{64}{27} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{4}{3}\right)^k$$

En este caso $a = 1$ y $|q| = \frac{4}{3} > 1$, por lo que la serie diverge.

(3) Estudiemos la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-\ln(3))^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \ln^{k+1}(3) = -\ln(3) + \ln^2(3) - \ln^3(3) + \cdots$$

Vemos aquí que $a = -\ln(3)$ y $q = -\ln(3)$. Como $|q| = \ln(3) > 1$, la serie diverge.

(4) Sea la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{k-1}2^2}{3^{k-1}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 4\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 4\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 6\left(-\frac{2}{3}\right)^k$$

de modo que tenemos $a = 6$ y $q = -\frac{2}{3}$, por consiguiente la serie converge y su suma es

$$s = \frac{6}{1-(-\frac{2}{3})} = \frac{6}{\frac{5}{3}} = \frac{18}{5}$$

(5) ¿Para qué valores de x la siguiente serie representa una serie geométrica convergente?

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(x-2)^k = -1 + (x-2) - (x-2)^2 + (x-2)^3 - (x-2)^4 + \cdots$$

Podemos pensar que $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(x-2)^k$ es una serie geométrica de razón $q = -(x-2)$ por lo que será convergente si $|-(x-2)| < 1$ o equivalentemente si $|x-2| < 1$, de modo que la serie converge si x pertenece al intervalo $(1,3)$, que recibe el nombre de intervalo de convergencia. Como $a = -1$ y $q = -(x-2)$ su suma es

$$s = \frac{a}{1-q} = \frac{-1}{1-(-(x-2))} = \frac{-1}{1+x-2} = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$

Observación. Las series geométricas convergentes siempre son absolutamente convergentes.

Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Guía de Ejercicios Resueltos[1]
Series (Criterios de Convergencia)
MAT-022

1. Analice la convergencia de las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{2}{n}\right), \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^5+1}, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}.$$

Solución:

(a) Diverge, pues

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{2}{n}\right) = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}} = 2 \neq 0.$$

(b) Converge. Compare con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. Alternativamente se puede usar el criterio de comparación al límite con la sucesión $b_n = \frac{1}{n^4}$.

(c) Converge. Aplique el criterio del cuociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 e^{-(n+1)}}{n^2 e^{-n}} = \frac{1}{e}\ .$$

2. Estudie la convergencia de las siguientes series

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}, \qquad \text{c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \mathrm{e}^{-2n}}{n^2+1}$$

Solución:

(a) Aplicar el criterio de la raíz,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} &= \lim_{n\to\infty} \left(2^{-n-(-1)^n}\right)^{\frac{1}{n}} && (0.1)\\
&= \lim_{n\to\infty} 2^{-1} 2^{\frac{(-1)^{n+1}}{n}} && (0.2)\\
&= 2^{-1} 2^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}} && (0.3)\\
&= 2^{-1} 2^0 = \frac{1}{2} < 1 && (0.4)
\end{aligned}$$

Nótese que $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$, el cual se deduce utilizando el teorema de acotamiento.

[1] Printed in LaTeX. EOP/eop. 21st August 2006

(b) Para todo $n \geq 1$, $\sqrt{n} \geq 1$. Luego $\dfrac{\sqrt{n}}{n+1} \geq \dfrac{1}{n+1}$. Ahora, dado que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ es divergente, se tiene que la serie en cuestión también es divergente.

(c) Utilice criterio de comparación al límite. En efecto, sea $a_n = e^{-2n}$, entonces la siguiente es una serie geométrica convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-2}\right)^n = \frac{1}{e^2 - 1}.$$

Defínase $b_n = \dfrac{n^2}{1+n^2} a_n$, entonces, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1$ luego, por comparación al límite la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \mathrm{e}^{-2n}}{n^2+1}$ converge.

3. Calcular la suma de las siguientes series:

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$, $b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n$ (para $x < \frac{1}{2}$) , $c)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$

Solución:

(a) Es necesario reescribir convenientemente la serie para poder aplicar la propiedad telescópica; a saber:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\right].$$

Y, por propiedad telescópica, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\,.$$

(b) Definamos $s(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n$. Derivando esta función (supongamos que se puede derivar término a término), se tiene:

$$\frac{d}{dx}\, s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{n-1} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)}\,.$$

De donde se deduce que

$$s(x) = \ln\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| + \mathcal{C}$$

donde $\mathcal{C}$ es una constante a determinar. Claramente, a partir de la definición se tiene que $s(0) = 0$, con lo cual se tiene que $\mathcal{C} = 0$.

(c) Usando el hecho que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - (e-1) = e - (e-1) = 1$$

4. (a) Demuestre que para todo número real p, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{pn}}{n!}$ converge.

(b) Estudie la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{10}{n}\right)^{n^2}}{n!}$.

Solución:

a) En este problema usamos el criterio del cuociente con $a_n = \dfrac{e^{np}}{n!}$ y $a_{n+1} = \dfrac{e^{(n+1)p}}{(n+1)!}$. De este modo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^p}{n+1} \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

En consecuencia, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{pn}}{n!}$ converge para todo p real.

b) En este problema se utilizará el criterio de comparación. En efecto, es bien conocido que

$$\left(1+\frac{10}{n}\right)^n \leq e^{10},$$

por lo que el término n-ésimo de la serie en cuestión es acotado superiormente por

$$\frac{e^{10n}}{n!},$$

y como esta sucesión genera una sucesión convergente (ver ejercicio anterior), entonces la serie estudiada converge.

5. Demuestre que la serie $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \cdots$ converge y calcule su valor.

Solución: Nótese que el término de la general de la serie $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \cdots$ es $\dfrac{k}{(k+1)!}$. Para analizar convergencia se puede usar el criterio del cuociente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} \frac{(n+1)!}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n(n+2)} = 0 < 1.$$

Dado que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, se deduce que la serie converge.

Para hallar su valor, notemos que la suma parcial s_n se puede reescribir como:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right]$$

La última suma obtenida coresponde a una telescópica, luego

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

De donde se deduce que la serie converge y su valor es 1, pues $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.

6. Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^4)}{\sqrt{n^4+1}}$.

   Solución: Para resolver este problema podemos utilizar el criterio de comparación. En efecto, nótese que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^4)}{\sqrt{n^4+1}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \le \frac{1}{n^2}.$$

   Luego, dado a que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, se concluye que la serie en cuestión también converge.

7. Para estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$$

   calcule primero $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, con esto justifique por qué para x grande $x^{\ln x} \le e^x$ y luego aplíquelo al análisis de la serie.

   Solución: Como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = 2\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0,$$

   se deduce la existencia de $M > 0$ tal que

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \le 1, \qquad \forall x > M$$

   esto es

$$\ln x \le \sqrt{x}, \qquad \forall x > M$$

elevando al cuadrado (se escoge $M > 1$ para que $\ln x > 0$)

$$(\ln x)^2 \leq x, \qquad \forall x > M$$

pero

$$(\ln x)^2 = \ln(x^{\ln x})$$

de modo que tomando exponencial a ambos lados de la desigualdad se obtiene

$$x^{\ln x} \leq e^x, \qquad \forall x > M.$$

De lo anterior, con $x = \ln n$ se obtiene

$$(\ln n)^{\ln(\ln n)} \leq e^{\ln n} = n, \qquad \text{para } \ln n > M$$

esto es

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} \geq \frac{1}{n}, \qquad \text{para } n > e^M$$

de modo que por comparación la serie pedida diverge ya que la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge.

1.

a) $\{-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1\}$

b) $\{-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{5},\frac{1}{6},-\frac{1}{7},\frac{1}{8},-\frac{1}{9},\frac{1}{10}\}$

c) $\{2,0,-8,0,32,0,-128,0,512,0\}$

d) $\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{7}{9},\frac{4}{5},\frac{9}{11},\frac{5}{6}\}$

e) $\{3,2,\frac{4}{3},\frac{8}{9},\frac{16}{27},\frac{32}{81},\frac{64}{243},\frac{128}{729},\frac{256}{2187},\frac{512}{6561}\}$

f) $\{1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{24},\frac{1}{120},\frac{1}{720},\frac{1}{5040},\frac{1}{40320},\frac{1}{362880}\}$

g) $\{1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},-\frac{1}{32},\frac{1}{64},-\frac{1}{128},\frac{1}{256},-\frac{1}{512}\}$

h) $\{0,2,0,2,0,2,0,2,0,2\}$

i) $\{\frac{3}{2},\frac{25}{16},\frac{343}{216},\frac{6561}{4096},\frac{161051}{100000},\frac{4826809}{2985984},\frac{170859375}{105413504},\frac{6975757441}{4294967296},\frac{322687697779}{198359290368},\frac{16679880978201}{10240000000000}\}$

2.

a) No converge. (Oscilante)

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos(n\pi)}{n}=0$

c) Diverge.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+2}=1$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}=0$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n!}=0$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=0$

h) No converge. (Oscilante)

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n}=\sqrt{e}$

3.

a) $\{1,3,5,7,9\}$

b) $\{1,1,2,3,5\}$

c) $\{2,1,\frac{1}{3},\frac{1}{12},\frac{1}{60}\}$

4.

a) Es el término general de una nueva sucesión, generada por las sumas parciales

b) Para $q\neq 1$, $s_n - qs_n = 1-q^n$, de donde $s_n=\dfrac{1-q^n}{1-q}$ y si $q=1$, $s_n=n$.

5. $\{1,3,\frac{7}{3},\frac{47}{21},\frac{2207}{987}\} = \{1.,3.,2.33333,2.2381,2.23607\}$. La aproximación 2.23607 tiene 5 decimales exactos.

6.

a) $\{1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3\}$
b) $\{-1,1,3,5,7\}$
c) $\{2,\frac{7}{3},\frac{8}{3},3,\frac{10}{3}\}$
d) $\{7,9,11,13,15\}$

7. Usando la fórmula con $a=103$, $r=10$ y $n=90$ obtenemos $45(206+890)=49320$.

8. En este caso $a=1$, $r=3$ y $n=201$, entonces $\sum_{k=0}^{200}(1+3k)=60501$.

9. $\sum_{k=0}^{49}(2k+1)=2500$

10.

a) $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}\}$
b) $\{3,6,12,24,48\}$
c) $\{5,\frac{5}{2},\frac{5}{4},\frac{5}{8},\frac{5}{16}\}$
d) $\{-1,1,-1,1,-1\}$

11.

a) $2^{100}-1$
b) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{102}}\right)$
c) $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{729}-\frac{1}{3^{53}}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{16}{81}-\frac{2^{51}}{3^{51}}\right)$

12. Recordemos que dada una sucesión $\{s_n\}$, si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right|<1$, entonces $\lim_{n\to\infty}s_n=0$. En este caso $s_n=nr^n$, de modo que $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)r^{n+1}}{nr^n}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}|r|\right)=|r|<1$, por lo tanto $\lim_{n\to\infty}nr^n=0$.

13. No, analice $\{a_n\}$ con $a_n=(-1)^n n$.

14.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

b) $|a_n - 0| < 0.1 \Leftrightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < 0.1 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < 0.1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{0.1} = 10$, de modo que si $n > 10$, entonces $d(a_n, 0) < 0.1$.

15.

a) $\ln(n) < n^2 \Leftrightarrow \frac{\ln(n)}{n^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{\ln(n)}{n^3} < \frac{1}{n}$, entonces $0 \le \frac{\ln(n)}{n^3} < \frac{1}{n}$ y de aquí $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n^3}$ ya que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

b) $0 < 3^{n-1} < (n-1)! \Leftrightarrow 0 < \frac{3^{n-1}}{(n-1)!} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{3^n}{n!} < \frac{3}{n} \Leftrightarrow 0 < \frac{3^n}{2(n!)} < \frac{3}{2n}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{2(n!)} = 0$.

c) $0 < n^{\frac{5}{2}} < 3^n \Leftrightarrow 0 < \frac{n^{\frac{5}{2}}}{3^n} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{n^{\frac{5}{2}}}{n3^n} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow 0 < \frac{n^{\frac{3}{2}}}{3^n} < \frac{1}{n}$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{3^n} = 0$.

d) $0 < n^4 < (100)^4 \Leftrightarrow 0 < \frac{n^4}{(100)^n} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{n^3}{(100)^n} < \frac{1}{n}$, de modo que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{(100)^n} = 0$.

e) $0 < n^{3/2} < \left(\frac{5}{3}\right)^n \Leftrightarrow 0 < \sqrt{2}n^{3/2} < \sqrt{2}\left(\frac{5}{3}\right)^n \Leftrightarrow 0 < n\sqrt{2}\sqrt{n} < \sqrt{2}\frac{5^n}{3^n} \Leftrightarrow$ $0 < n\sqrt{2n} < \frac{\sqrt{2}5^n}{3^n} \Leftrightarrow 0 < \frac{n\sqrt{2n}3^n}{5^n} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{3^n\sqrt{2n}}{5^n} < \frac{\sqrt{2}}{n}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n\sqrt{2n}}{5^n} = 0$.

f) Para $n > 1$, $0 < \ln(n) < n^4 \Leftrightarrow 0 < 5\ln(n) < 5n^4 \Leftrightarrow 0 < \ln(n^5) < 5n^4 \Leftrightarrow$ $1 < \frac{5n^4}{\ln(n^5)} \Leftrightarrow \frac{n}{5} < \frac{n^5}{\ln(n^5)} \Leftrightarrow \frac{3n}{5} < \frac{3n^5}{\ln(n^5)}$, entonces $\frac{3n^5}{\ln(n^5)} \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

g) $0<9^{n-1}<(n-1)^{n-1}<n^{n-1} \quad \Rightarrow \quad 0<9^{n-1}9<n^{n-1}9 \quad \Rightarrow \quad 0<9^n<9n^{n-1} \quad \Rightarrow$

$0<\left(3^2\right)^n<\dfrac{9n^n}{n} \;\Rightarrow\; 0<\dfrac{3^{2n}}{n^n}<\dfrac{9}{n}$, y de aquí, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n}}{n^n}=0$.

h) $0<n!<n^{n-1}$ (use inducción) y por otro lado $0<n^4<n^n$ de donde $0<n^3<n^{n-1}$. Sumando miembro a miembro esta última desigualdad y la primera tenemos $0<n!+n^3<n^{n-1}+n^{n-1}=2n^{n-1}$. Dividiendo por n^n nos queda $0<\dfrac{n!+n^3}{n^n}<\dfrac{2}{n}$,

por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+n^3}{n^n}=0$.

i) $0<n^3<e^n \;\Rightarrow\; 0<\dfrac{n^3}{e^n}<1 \;\Rightarrow\; 0<\dfrac{n^2}{e^n}<\dfrac{1}{n}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{e^n}=0$.

16.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n+3}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(-1)^n\dfrac{\ln(n)}{n+1}\right]=0$

c) $\sin(n\pi)=0$ si $n\in\mathbb{N}$, de modo que $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin(n\pi)\right]=0$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}(n-n)=0$.

e) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2+n^2+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}+\frac{\sqrt{n}}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^{3/2}}\right)}=1.$$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{3^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{3^n\left(1+\frac{1}{3^n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{3^n}}\right)\right]=0$, ya que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$ y

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{3^n}}=1$.

g) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{3n^2+10}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2\left(3+\frac{10}{n^2}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{3+\frac{10}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3+\frac{10}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

h) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+n+2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4\left(1+\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^4}\right)}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sqrt{\left(1+\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^4}\right)}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^4}\right)}=1$$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n\pi)}{n} = 0$.

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

k) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-1/n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^{1/n^3}} = \dfrac{1}{2^0} = 1$.

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}3} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3 = \left[\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3 = e^3$.

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[n]{n^3}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{n^3}}\right] = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^3\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\dfrac{1}{n^3}}\right) = 1$

n) $\{n\sin(2n)\}$ no converge.

o) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n-1}-n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{n^2+2n-1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n-1}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n-1}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n-1-n^2}{\sqrt{n^2+2n-1}+n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{\sqrt{n^2\left(1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\left(2-\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}+1\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(2-\dfrac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}+1\right)} = \dfrac{2}{2} = 1$

p) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{5^n+10^6} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^n}{5^n\left(1+\dfrac{10^6}{5^n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{10^6}{5^n}}\right)\right] = 0$

q) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1-2}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1-\dfrac{2}{n+1}\right)^{\frac{-(n+1)}{2}}\right]^{\frac{-2n}{n+1}} =$

$\left[\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{n+1}\right)^{\frac{-(n+1)}{2}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-2n}{n+1}\right)} = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$

r) $-1 \le \sin(n) \le 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{-1}{\sqrt[3]{n}} \le \dfrac{\sin(n)}{\sqrt[3]{n}} \le \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n)}{\sqrt[3]{n}} = 0$ ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$.

s) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+n}-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{1+n}-1\right)\left(\sqrt{1+n}+1\right)}{n\left(\sqrt{1+n}+1\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+n-1}{n\left(\sqrt{1+n}+1\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n\left(\sqrt{1+n}+1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+n}+1} = 0$.

t) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-\ln(n)+\cos(n)}{n-\sqrt{n}\ln\left(n^2\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n-\ln(n)}{n-2\sqrt{n}\ln(n)}+\dfrac{\cos(n)}{n-2\sqrt{n}\ln(n)}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(1-\dfrac{\ln(n)}{n}\right)}{n\left(1-\dfrac{2\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)}+$

+

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(n)}{n\left(1-\dfrac{2\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{\ln(n)}{n}}{1-\dfrac{2\ln(n)}{\sqrt{n}}}+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(n)}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\dfrac{2\ln(n)}{\sqrt{n}}}\right)=1+0\cdot1=1$$

17. $\dfrac{n^2}{n+3}\to\infty$ y $\dfrac{n^2}{n+4}\to\infty$ cuando $n\to\infty$, pero $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+3}-\dfrac{n^2}{n+4}\right)$ = $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+3}-\dfrac{n^2}{n+4}\right)$ = $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n^2+7n+12}\right)$ = $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2\left(1+\dfrac{7}{n}+\dfrac{12}{n^2}\right)}$ = $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{7}{n}+\dfrac{12}{n^2}}=1.$

18. $|c|>1$

19.

a) $\dfrac{k}{k^4+3}<\dfrac{k}{k^4}<\dfrac{1}{k^3}$, entonces $\sum\dfrac{k}{k^4+3}$ es convergente por el criterio de comparación.

b) No converge (serie armónica).

c) $\dfrac{\ln(k)}{k^3}<\dfrac{1}{k^2}$, entonces $\sum\dfrac{\ln(k)}{k^3}$ es convergente por el criterio de comparación.

d) $\dfrac{1}{\sqrt{k^2-k}}>\dfrac{1}{k}$ para $k\geq3$, entonces $\sum\dfrac{1}{\sqrt{k^2-k}}$ es divergente.

e) $\sum\dfrac{2^{-k}}{3}=\dfrac{1}{3}\sum\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$, serie geométrica convergente.

f) $\int_2^\infty\frac{1}{x\ln(x)}\,dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int_2^b\frac{1}{x\ln(x)}\,dx=\lim\limits_{b\to\infty}\left[\ln(\ln(b))-\ln(\ln(2))\right]=\infty$, entonces, por el criterio de la integral, $\sum\dfrac{1}{k\ln(k)}$ es divergente.

g) $\dfrac{1}{(k+3)(k+2)(k+1)}<\dfrac{1}{(k+1)^3}$, entonces $\sum\dfrac{1}{(k+3)(k+2)(k+1)}$ es convergente por el criterio de comparación.

h) $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{2x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{\ln(x)}{2x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{\ln^2(b)}{4}\right] = \infty$, entonces, por el criterio de la integral, la serie $\sum \frac{\ln\left(\sqrt{k}\right)}{k}$ es divergente.

i) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^2(x)}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^{b} \frac{1}{x\ln^2(x)}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(b)}\right] = \frac{1}{\ln(2)}$. Por el criterio de la integral tenemos que $\sum \frac{1}{k\ln^2(k)}$ es convergente.

j) $7k^3 + 2k^2 < 7k^3 + 2k^3 = 9k^3 < 2k^5 < 2k^5 + 7$ para $k \geq 3$, entonces tenemos $k^2(7k+2) < 2k^5 + 7$, ó equivalentemente $\frac{7k+2}{2k^5+7} < \frac{1}{k^2}$, y por el criterio de comparación, la serie $\sum \frac{7k+2}{2k^5+7}$ es convergente.

k) $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)e^{-(k+1)^2}}{ke^{-k^2}}\right| = 0$, entonces $\sum ke^{-k^2}$ es convergente.

l) $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{3^k}{k!}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k!3^{k+1}}{(k+1)!3^k} = \lim_{k\to\infty}\frac{3}{k+1} = 0$, de modo que $\sum \frac{3^k}{k!}$ es convergente.

m) $100^k < k! < k!k$, entonces $\frac{1}{k} < \frac{k!}{100^k}$ y comparando con la serie armónica, tenemos que $\sum \frac{k!}{100^k}$ es divergente.

n) $\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}}{\frac{1}{k2^k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{k2^k}{(k+1)2^{k+1}} = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{2(k+1)} = \frac{1}{2}$, en consecuencia $\sum \frac{1}{k2^k}$ es convergente.

o) $\lim_{k\to\infty}\frac{\left(\frac{k+1}{3(k+1)+1}\right)^{k+1}}{\left(\frac{k}{3k+1}\right)^k} = \frac{1}{3}$, entonces $\sum\left(\frac{k}{3k+1}\right)^k$ es convergente.

p) $\int_1^{\infty} \frac{\ln^2(x)}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{\ln^2(x)}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{\ln^3(b)}{3} = \infty$, entonces $\sum \frac{\ln^2(k)}{k}$ es divergente.

q) $\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{-(k+1)}}{k\left(\frac{3}{2}\right)^{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2(k+1)}{3k} = \frac{2}{3}$, por lo tanto $\sum k\left(\frac{3}{2}\right)^{-k}$ es convergente.

r) $\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln^{k+1}(k+1)}}{\frac{1}{\ln^{k}(k)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln^{k}(k)}{\ln^{k+1}(k+1)} = 0$, entonces $\sum \frac{1}{\ln^{k}(k)}$ converge.

s) Si $k \geq 9$, $2+\sqrt[3]{k} < 2\sqrt[3]{k}$, entonces $\frac{3}{2\sqrt[3]{k}} < \frac{3}{2+\sqrt[3]{k}}$ para $k \geq 9$, de modo que $\sum \frac{3}{2+\sqrt[3]{k}}$ diverge por el criterio de las $p-$series.

ANALISIS MATEMATICO 1 – 1^er^ Prueba espejo

Teórico

1. 120 puntos a) Enuncie y demuestre el teorema del valor medio del cálculo diferencia. Proponga un ejemplo de aplicación y realice un gráfico.
b) ¿Se puede aplicar el teorema de Lagrange a: $f(x) = 1/x^2$ en el intervalo [0, 2]?

2. 80 puntos a) Enuncie y demuestre el teorema de Rolle.
b) Proponga un ejemplo donde se aplique dicho teorema. Realice los gráficos correspondientes
c) ¿Es aplicable este teorema a la función $|x-1|$ en el intervalo $[0;2]$?

3. 100 puntos a) Enuncie y demuestre el Teorema de L' Hopital.
b) Indique cómo se puede aplicar dicho teorema para calcular los límites indeterminados del tipo $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty-\infty$ y $0.\infty$.

Práctico

4. Calcular un punto del intervalo [1, 3] en el que la tangente a la curva: $f(x) = x^3 - x^2 + 2$ sea paralela a la recta determinada por los puntos A = (1, 2) y B = (3, 20). ¿Qué teorema garantiza la existencia de dicho punto?

5. Calcular: a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{senx}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{(Lnx)^3+2x}$

6. Calcular: a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{senx}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0}x^{tgx}$

ANALISIS MATEMATICO 1 – 1era Prueba Espejo

Indicaciones generales:

- Tiempo estimado para su realización: 1 hora
- No se puede usar calculadora
- Cuando la termine, si desea puede enviarla al docente para que le devuelva la corrección.

Teórico

1. a) Defina función no decreciente sobre un Intervalo J. Proponga un ejemplo y realice un gráfico.
b) Enuncie y demuestre el teorema que relaciona los valores de la derivada primera de la función con la condición de no creciente de dicha función.

2 a) Defina máximo absoluto y máximo relativo de una función en un conjunto A. Ejemplifique cada caso.
b) Enuncie y demuestre el teorema que relaciona la derivada segunda de una función en un punto con la condición de máximo de dicho punto.

3. a) Defina concavidad y convexidad. Realice un gráfico para explicar dicha definición.
b) Enuncie una condición suficiente para que un punto (*c, f(c)*), sea un punto de inflexión de una función f.

4. Defina asíntota de una función. Deduzca las ecuaciones de los diferentes tipos de asíntotas

Práctico

5. Calcule y grafique las asíntotas para la función: $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ Además estudie los intervalos de concavidad

6. Realice el estudio completo de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

7. Realice el estudio completo de la siguiente función:

$$f(x) = x^4 - 4x^3$$

8. Realizar el estudio completo de la siguiente función:

$$f(x) = x^2 Ln(x)$$

PRUEBA ESPEJO Nº2

1) Enuncie y demuestre el teorema que permite caracterizar un máximo de una función utilizando la derivada segunda de la misma. De una interpretación gráfica del mismo. Proponga un ejemplo de aplicación

2) Enuncie y demuestre el Teorema que utiliza la derivada segunda para caracterizar la concavidad de la curva de una función. Realice una interpretación gráfica del mismo.

Analice los intervalos de concavidad de la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

3) Defina **"asíntota de una curva".** Indique cuántos tipos puede haber realizando una interpretación gráfica.

Analice las asíntotas de la siguiente función: $f(x)=\dfrac{3-x}{x+2}$

4) Realice el estudio completo de la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^3-8x+12}{x^2+1}$$

5) Realice el estudio completo de la siguiente función

$$f(x)=\frac{2x-2}{x^2-x-6}$$