DETERMINANTES

Sea una matriz cuadrada de orden $n_x n$ definida sobre un cuerpo K. El determinante es una función que asigna un escalar a esta matriz cuadrada, es decir:

$$\text{Det}\, A : K^{n_x n} \to K$$

El determinante se define como la sumatoria de $n!$ términos donde cada término de la sumatoria resulta del producto de n elementos, donde cada uno de esos elementos pertenecen a filas y columnas distintas de la matriz original.

Trabajar la teoría de determinantes a partir de esta definición es bastante engorroso, por lo que es conveniente comenzar con el cálculo de determinantes para matrices cuadradas de $2_x 2$, luego de $3_x 3$ y así sucesivamente hasta el orden $n_x n$ para obtener una definición de determinantes que nos permita su generalización mucho más comprensible que la anterior.

Simbolizaremos el determinante de la siguiente manera $|A|$ o $\det A$

Determinante para una matriz $[A]_{2_x 2}$

Sea:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Definimos el determinante de esta matriz de la siguiente manera:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante para una matriz $[A]_{3_x 3}$

Sea:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Para definir el determinante de una matriz de $3_x 3$, utilizaremos la definición del determinante de una matriz de $2_x 2$, de la siguiente manera:

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

que resulta:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Es decir que hemos resuelto un determinante de $3_x 3$ desarrollándolo por la primer fila de la siguiente manera, multiplicamos el coeficiente a_{11} por el determinante que resulta de tachar la primer fila y primer columna, el segundo término que es negativo resulta de multiplicar a_{12} por el determinante obtenido al tachar la segunda fila y segunda columna, el tercer y último término resulta del producto de a_{13} por el determinante que surge de tachar la fila 3 y la columna 3.

Este determinante de 3_x3 que desarrollamos por la primer fila resulta de ir multiplicando los coeficientes de la primer fila por los determinantes que quedan de 2_x2, alternando sus signos empezando por un positivo, es decir que hemos resuelto un determinante de 3_x3 por tres determinantes de 2_x2 que hemos definido anteriormente.
Para resolver un determinante de 3_x3 tenemos una regla práctica conocida como Regla de Sarrus.

Regla de Sarrus:

Como hemos dicho la Regla de Sarrus nos permite resolver únicamente determinantes de 3_x3 de una manera práctica. La misma consiste en escribir nuevamente la fila 1 y 2 en el lugar de las filas 4 y 5 de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \end{vmatrix}$$

- (productos negativos)

+ (productos positivos)

Luego se multiplican las diagonales con tres elementos, con signo positivo las que tienen la dirección de la diagonal principal y signo negativo el producto de las otras diagonales de la siguiente manera:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Que es el mismo cálculo que vimos anteriormente.

La Regla de Sarrus es muy importante ya que los determinantes de 3_x3, tienen varias aplicaciones como el producto cruz entre vectores de $\mathbf{R}^3$, cálculo de volúmenes de paralelepípedos cuyos lados son vectores de $\mathbf{R}^3$, Ecuaciones de planos, etc.

Determinante para una matriz $[A]_{4_x4}$

Sea:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

No existe ninguna regla para resolver un determinante de 4_x4, por lo tanto lo debemos calcular por cuatro determinantes de 3_x3, desarrollándolo por la primer fila de la siguiente manera:

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Es decir que multiplicamos los coeficientes de la primer fila, por los determinantes de 3_x3 que resultan de tachar la fila y columna del coeficiente correspondiente, los signos se van alternando comenzando con un positivo.

Determinante para una matriz $[A]_{n_xn}$

Sea:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Para resolver el determinante de esta matriz A de orden n_xn, debemos desarrollar por la primer fila, multiplicando los coeficientes de la misma por los determinantes que nos quedan de tachar la fila y columna correspondientes a dichos coeficientes, alternando sus signos y comenzando con un positivo. Es decir que obtendremos n determinantes de orden $(n-1)_x(n-1)$ que también desarrollaremos cada uno por la primer fila, es decir que cada término estará formado por $(n-1)$ determinantes de orden $(n-2)_x(n-2)$ y así sucesivamente hasta llegar a determinantes de orden 3_x3 que podemos resolver mediante la Regla de Sarrus. Por supuesto que cuando el orden del determinante es mayor que 4_x4, resolverlo de esta manera es muy largo y engorroso, más adelante veremos más sencillo para resolver determinantes.
En primer lugar trataremos de formalizar lo visto hasta aquí lo que nos permitirá obtener una definición de determinantes alternativa a la vista al comienzo.

Menor Complementario

Sea A una matriz de orden n_xn y sea (M_{ij}) la matriz de orden $(n-1)_x(n-1)$ que resulta de tachar la i-ésima fila y la j-ésima columna. A la matriz (M_{ij}) se la llama ij-ésimo menor complementario de A (algunos autores llaman solamente menor)

Cofactor

Sea A una matriz de orden n_xn, el ij-ésimo cofactor de A, denotado por $\operatorname{cof} a_{ij}$ está definido de la siguiente forma:

$$\operatorname{cof} a_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$$

Algunos autores para el cofactor, utilizan la nomenclatura A_{ij}
Con los conceptos vistos anteriormente daremos una definición de determinantes

Definición de determinante para una matriz $[A]_{n_x n}$

Lo definiremos en primer lugar desarrollándolo por la primer fila

$$\det A = |A| = a_{11} \text{ cof } a_{11} + a_{12} \text{ cof } a_{12} + \text{..........} a_{1n} \text{ cof } a_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \text{ cof } a_{1j}$$

Hay un Teorema cuya demostración se hace por inducción y es compleja que nos dice que el determinante de una matriz A de orden $n_x n$ se puede calcular desarrollándolo por cualquier fila o columna ya que su valor no cambia, por lo tanto se define:

Por la i-ésima fila

$$\det A = |A| = a_{i1} \text{ cof } a_{i1} + a_{i2} \text{ cof } a_{i2} + \text{..........} a_{in} \text{ cof } a_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \text{ cof } a_{ij}$$

Por la j-ésima columna

$$\det A = |A| = a_{1j} \text{ cof } a_{1j} + a_{2j} \text{ cof } a_{2j} + \text{..........} a_{nj} \text{ cof } a_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \text{ cof } a_{ij}$$

En definitiva calcular el determinante de una matriz A de orden $n_x n$, se desarrolla por una fila o columna y se obtienen n determinantes de orden $(n-1)_x (n-1)$ y así sucesivamente hasta llegar a uno de $3_x 3$ que resolvemos mediante la Regla de Sarrus. El signo de cada término será positivo si $(i+j)$ es par y será negativo si $(i+j)$ es impar y el coeficiente se obtiene al multiplicar el elemento a_{ij} por el determinante que resulta de tachar la fila i y la columna j

Basados en esta definición de determinante, veremos una serie de propiedades que nos resultarán de gran utilidad para el cálculo de los mismos en forma relativamente sencilla.

Propiedades de los determinantes

Propiedad 1
Si una matriz A de orden $n_x n$ tiene una fila o columna de ceros, su determinante es igual a cero

Demostración:

Supongamos que el renglón i de la matriz A, sean todos ceros. Es decir $a_{ij} = 0 \quad \forall j : 1, 2 \text{.......} n$, desarrollaremos el determinante de la matriz por el renglón i

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \text{ cof } a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} 0 \text{ cof } a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} 0 = 0$$

Propiedad 2

Si a una fila o columna de una matriz A de orden $n_x n$, la multiplicamos por una constante $c \in \mathbf{R}$ (esta es una operación de renglón), el valor del determinante resulta multiplicado por ese valor constante. Sean:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ ca_{i1} & ca_{i2} & . & . & . & ca_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Es decir que la matriz B, resulta de multiplicar la fila i de la matriz A por una constante $c \in \mathbf{R}$, entonces el $|B| = c\,|A|$

Demostración:

Desarrollemos el determinante de la matriz B por la fila i

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} c\ a_{ij}\ \text{cof}\ a_{ij} \overset{*}{=} c\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ cof\ a_{ij} = c\,|A|$$

* Por propiedad de la sumatoria

Observación

De la propiedad anterior se deduce claramente que $|c\,(A)| = c^n\,|A|$

Propiedad 3

Sean A, B y C tres matrices iguales de $n_x n$, excepto en la j-ésima columna (también vale para la i-ésima fila) y que la j-ésima columna de la matriz C, es la suma de las j-ésimas columnas de las matrices A y B, es decir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1j} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2j} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & a_{ij} & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nj} & . & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & b_{1j} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & b_{2j} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & b_{ij} & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & b_{nj} & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1j}+b_{1j} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2j}+b_{2j} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & a_{ij}+b_{ij} & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nj}+b_{nj} & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces el $|C| = |A| + |B|$

Demostración:

Desarrollemos el determinante de C por la columna j

$$|C| = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ij} + b_{ij}\right) \text{ cof } \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$$

pero el $\text{cof } \left(a_{ij} + b_{ij}\right) = \text{cof } \left(b_{ij}\right) = \text{cof } \left(a_{ij}\right)$ para $i : 1, 2, ...n$, entonces

$$|C| = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ij} + b_{ij}\right) \text{ cof } a_{ij} \overset{*}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \text{ cof } a_{ij} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \text{ cof } a_{ij} = |A| + |B|$$

* Por propiedad de la sumatoria

Propiedad 4

Si en una matriz A de orden $n_x n$, le intercambiamos dos filas (o columnas), el determinante cambia de signo (esta es una operación de renglón)

Demostración:

La demostración la haremos en primer lugar si intercambiamos dos filas adyacentes, es decir supongamos que intercambiamos los renglones i e $i+1$, es decir sean:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & . & . & . & a_{(i+1)n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & . & . & . & a_{(i+1)n} \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Desarrollemos el determinante de la matriz A por la i-ésima fila

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \text{ cof } a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(-1\right)^{i+j} \left|M_{ij}\right|$$

Desarrollemos el determinante de la matriz B por la (i+1)-ésima fila

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \text{ cof } a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(-1\right)^{i+1+j} \left|M_{ij}\right| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(-1\right)^{i+j} \left(-1\right)\left|M_{ij}\right| \overset{*}{=} -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(-1\right)^{i+j} \left|M_{ij}\right| = -|A|$$

* Por propiedad de la sumatoria

Ahora demostraremos cuando los renglones no son adyacentes

Supongamos que intercambiamos dos renglones que no son adyacentes, por ejemplo el i con el j siendo $i < j$, es decir que vamos a intercambiar el i con el j.

Para llevar el renglón j al renglón i, lo haremos cambiado por los renglones adyacentes, por lo tanto para llevar el renglón j al lugar del renglón i, se deben efectuar $j-i$ cambios adyacentes. Luego el renglón i quedó en el lugar $i+1$, que para llevarlo al lugar del renglón j debemos efectuar $\left[j-(i+1)\right]$ cambios entre renglones adyacentes. En realidad hemos hecho $(j-i)+\left[j-(i+1)\right]$ cambios entre renglones adyacentes, pero:

$$(j-i)+\left[j-(i+1)\right] = j-i+j-i-1 = 2j-2i-1 = 2(j-i)-1$$

Vemos que hemos hecho un número impar de cambios entre renglones adyacentes, por lo que el determinante de A se multiplica por (–1) un número impar de veces, lo que nos da un cambio de signo en el resultado del determinante.

Propiedad 5
Si una matriz A de orden $n_x n$, tiene dos filas (columnas) iguales entonces el determinante de dicha matriz es cero

Demostración:
Supongamos que en la matriz A, la fila i y la fila j son iguales, sin intercambiamos ambas la matriz sigue siendo la misma pero por la propiedad 4 resulta:

$$|A| = -|A| \quad \Rightarrow \quad 2|A| = 0 \quad \Rightarrow \quad |A| = 0$$

Propiedad 6
Sea una matriz A de orden $n_x n$ tal que una fila (columna) de dicha matriz es múltiplo de otra fila (columna) de dicha matriz, entonces el determinante es cero.

Demostración:
Sea el renglón j múltiplo del renglón i, es decir:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{j1} & a_{j2} & . & . & . & . & a_{jn} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ ca_{i1} & ca_{i2} & . & . & . & . & ca_{in} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{prop.2}{=} c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{prop.5}{=} c.0 = 0$$

Propiedad 7
Si al múltiplo de un renglón (columna) de una matriz A de orden $n_x n$, se suma a otro renglón (columna) de dicha matriz el valor del determinante no cambia (esta es una operación de renglón).

Demostración:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{j1}+ca_{i1} & a_{j2}+ca_{i2} & . & . & . & . & a_{jn}+ca_{in} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{prop.3}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{j1} & a_{j2} & . & . & . & . & a_{jn} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ ca_{i1} & ca_{i2} & . & . & . & . & ca_{in} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| + \overset{prop.6}{0} = |A|$$

Propiedad 8

Sea A de orden $n_x n$, una matriz triangular superior (inferior). Entonces el determinante de dicha matriz es el producto de los elementos de su diagonal

Demostración:

La demostración la haremos por inducción

1) Verificamos si cumple para $n=2$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - 0a_{12} = a_{11}a_{22}$$ Cumple para $n=2$

2) Suponemos cierto para $n-1$, es decir cumple:

$$|A_{n-1}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & . & . & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & . & . & a_{3n} \\ 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & . & . & a_{4n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{55} & . & . & a_{5n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}\ldots\ldots a_{nn}$$

3) Debemos probar que cumple para n

$$|A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & . & . & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & . & . & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & . & . & a_{4n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & . & . & a_{5n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Desarrollemos este determinante por la primer fila, es decir:

$$|A_n| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & . & . & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & . & . & a_{3n} \\ 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & . & . & a_{4n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{55} & . & . & a_{5n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & . & . & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & . & . & a_{3n} \\ 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & . & . & a_{4n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{55} & . & . & a_{5n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} 0 & a_{22} & a_{24} & a_{25} & . & . & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{34} & a_{35} & . & . & a_{3n} \\ 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & . & . & a_{4n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{55} & . & . & a_{5n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} - .....+ a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & . & . & a_{2(n-1)} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & . & . & a_{3(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & . & . & a_{4(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & . & a_{5(n-1)} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}$$

Vemos que salvo el primer determinante los restantes tienen una columna de ceros, por lo tanto el valor de los determinantes del segundo al final valen cero, es decir:

$$|A_n| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & . & . & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & . & . & a_{3n} \\ 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & . & . & a_{4n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{55} & . & . & a_{5n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + 0 + ... + 0 = a_{11}|A_{n-1}| = a_{11}a_{22}a_{33}.......a_{nn}$$

Es decir:

$$|A_n| = a_{11}a_{22}a_{33}.......a_{nn}$$

Observación 1

El determinante de una matriz diagonal, también es el producto de los elementos de la diagonal ya que es una matriz triangular

Observación 2

El determinante de la matriz identidad es uno, ya que es diagonal y todos los elementos de la diagonal valen 1. Es decir $|I_n| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Propiedad 9

Sea A una matriz de orden $n_x n$, entonces el determinante de esta matriz y de su traspuesta son iguales, es decir $|A| = |A^t|$

Demostración:

La demostración la haremos por inducción

1) Verificamos si cumple para $n = 2$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$|A_2^t| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Como $|A_2| = |A_2^t|$ cumple para $n = 2$

2) Suponemos cierto para $n-1$, es decir cumple: $|A_{n-1}| = |A_{n-1}^t|$

3) Debemos probar que cumple para n, sean:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad |B| = |A^t| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & . & . & . & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & . & . & . & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & . & . & . & a_{n3} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Desarrollaremos el determinante de A por la primer fila y el determinante de B por la primer columna utilizando la notación de letras mayúsculas para los cofactores

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + ... + a_{1n}A_{1n}$$

$$|B| = |A^t| = a_{11}B_{11} + a_{12}B_{21} + a_{13}B_{31} + ... + a_{1n}A_{n1}$$

Como los coeficientes son iguales solo debemos probar que $A_{1k} = B_{k1} \quad \forall k : 1, 2, \ldots. n$

$$A_{1k} = (-1)^{1+k} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2(k-1)} & a_{2(k+1)} & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & . & . & a_{3(k-1)} & a_{3(k+1)} & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{n(k-1)} & a_{n(k+1)} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+k} |M_{1k}|$$

$$B_{k1} = (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} & . & . & . & . & . & . & a_{n1} \\ a_{22} & a_{32} & . & . & . & . & . & . & a_{n2} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{2(k-1)} & a_{3(k-1)} & . & . & . & . & . & . & a_{n(k-1)} \\ a_{2(k+1)} & a_{3(k+1)} & . & . & . & . & . & . & a_{n(k+1)} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{2n} & a_{3n} & . & . & . & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{k+1} |N_{k1}|$$

pero $|M_{1k}| = |N_{k1}|$ por ser $(M_{1k}) = (N_{k1})^t$ matrices de orden $(n-1)_x (n-1)$ que lo hemos supuesto cierto. Por lo tanto cumple $\forall n \in \mathbb{N}$

Propiedad 10

Sea A una matriz de orden $n_x n$ singular,(es decir que no tiene inversa), si y solo si su determinante es cero, es decir:

$$A \text{ es singular } \left(\nexists A^{-1}\right) \Leftrightarrow |A| = 0$$

Propiedad 11

Sea A una matriz de orden $n_x n$ no singular,(es decir que tiene inversa), si y solo si su determinante es distinto de cero, es decir:

$$A \text{ es no singular } \left(\exists A^{-1}\right) \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Propiedad 12

Sean A y B dos matrices de orden $n_x n$, entonces:

$$|AB| = |A||B|$$

Propiedad 13

Sea A una matriz de orden $n_x n$ no singular,(es decir que tiene inversa, $\exists A^{-1}$)

Entonces el determinante de la matriz inversa es el inverso multiplicativo del determinante de la matriz. Es decir $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$

Demostración:

Por existir la matriz inversa de A sabemos que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{I}_n \Rightarrow \left|AA^{-1}\right| = \left|A^{-1}A\right| = \left|\mathrm{I}_n\right| = 1$$

por propiedad 14 resulta:

$$|A|\left|A^{-1}\right| = \left|A^{-1}\right||A| = 1 \Rightarrow \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

Veremos ahora como calcular el determinante de una matriz A de orden $n_x n$

REGLA DE CHIO:

Esta regla utiliza las propiedades 2, 7 y 4. Es decir que si queremos calcular el determinante de una matriz A de orden $n_x n$, con estas propiedades hacemos $a_{11} = 1$ y el resto de la primer columna cero, es decir que aplicamos Gauss-Jordan. Si desarrollamos por la primer columna nos queda para calcular un solo determinante de orden $(n-1)_x (n-1)$ y repetimos este proceso hasta obtener un solo determinante de orden $3_x 3$ que resolvemos mediante la regla de Sarrus. Veremos un ejemplo:

Ejemplo

Calcular el siguiente determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

En primer lugar intercambiamos la columna 3, con la 1 que por propiedad 4, el determinante cambia de signo. Luego por propiedad 2, multiplicamos la fila 1 por la constante -1 para tener un

1 en la posición a_{11}. Al final aplicamos la propiedad 7 para hacer ceros en el resto de la columna 1.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{prop.4}{=} -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{prop.2}{=} -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{array}{c} 2 \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{prop7}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -7 \\ -2 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Ya este determinante lo podemos resolver por la regla de Sarrus

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -7 \\ -2 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 8 + 28 + 6 - (84 - 2 - 8) = -32$$

Algunos autores utilizan las mismas propiedades y llevan el determinante a triangular superior o inferior y luego calculan el determinante multiplicando los elementos de la diagonal, como lo indica la propiedad 8.