Guía de desarrollo del TP Nº 1
SISTEMAS DE NUMERACIÓN

PROCEDIMIENTO PRACTICO PARA CAMBIAR DE BASE

Para convertir un número dado en una base r_1 a otra base r_2, puede recurrirse a los siguientes procedimientos prácticos:

a) El primer caso que consideramos es el de convertir un número expresado en una base cualquiera en su equivalente decimal: **(r_1 =2; r_2 =10)**
Se realiza la expansión (sumatoria de los productos de los dígitos del número por las sucesivas potencias de la base r_1) y luego las operaciones correspondientes en la base r_2.

Ejemplo: $(11001)_2$

sucesivas potencias de la base r_1:

4 3 2 1 0

$(N)_{10} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

dígitos del número:

$= 16+ 8+ 0+ 0+ 0+ 1 = (25)_{10}$

$(11001)_2 = (25)_{10}$

- Es muy corriente tener que pasar de base 2 a base 10.
Conviene recordar el "peso" de cada posición binaria y efectuar mentalmente las operaciones anteriores. Por ejemplo: el número $(1101)_2$ se quiere pasar a base 10:

1	1	0	1	
$x2^3$	$x2^2$	$x2^1$	$x2^0$	peso de cada posición binaria (pot. de la base 2)
x8	x4	x2	x1	$8 + 4 + 0 + 1 = (13)_{10}$

$(1102)_2 = (13)_{10}$

El desarrollo en potencias siempre es útil si se quiere pasar de cualquier base a la base 10.
En general:

$N_{r2=10} = b_k\, r_1^k + b_{k-1}\, r_1^{k-1} + ... + b_2\, r_1^2 + b_1\, r_1^1 + b_0\, r_1^0$
$b_0, b_1, ..., b_k$ = dígitos de la base $r_1 = 2$
y se efectúan las operaciones en la base $r_2 = 10$.

b) Se considera el caso de pasar de base 10 a otra base. **(r_1 = 10; r_2 = 2)**

Se efectúan divisiones sucesivas del número $N_{(r1)}$ y los sucesivos cocientes, por la base r_2.
Ordenando los restos obtenidos, comenzando por el último, se obtiene el número equivalente en la base r_2.

Ejemplo: $r_1 = 10$; $r_2 = 2$

```
26 | 2
    -----
 0  13 | 2
        -----
     1  6 | 2
           -----
        0  3 | 2
              -----
           1  1 | 2
                 -----
              1   0
```

- Las divisiones deben efectuarse hasta obtener un cociente = 0

Tomamos los restos y con ellos formamos el equivalente binario. El primer resto es el que se coloca a la derecha del número binario. El último resto se coloca a la izquierda. Resulta así:

$(26)_{10} = (11010)_2$

Generalizando:

N_{r1} | r_2 ⟹ $N_{r1} = q_1 \times r_2 + b_0$

b_0 q_1

q_1 | r_2 ⟹ $q_1 = q_2 \times r_2 + b_1$

b_1 q_2

q_{n-1} | r_2 ⟹ $q_{n-1} = q_n \times r_2 + b_n$

b_n q_n

Cuando $q_n = 0$ finaliza el procedimiento de conversión obteniéndose $N_{(r2)}$

$N_{r2} = b_n \ b_{n-1} \ ..... \ b_2 \ b_1 \ b_0$

Las operaciones se efectúan en la base r_1. = 10

Por tal motivo este método es práctico para el pasaje de base 10 a cualquier base.

Ejemplo: Pasar $(3706)_{10}$ a base 12 **($r_1 = 10; r_2 = 12$)**

```
3706 | 12
 106   308 | 12
  10    68    25 | 12
         8     1    2 | 12
                    2   0
```

luego: **$(3706)_{10} = (218A)_{12}$**

c) De la combinación de los métodos anteriores enunciados en **a)** y **b),** surge un método muy práctico para convertir números entre dos bases cualquiera, pues nos permite operar utilizando solo aritmética decimal:

$N_{r1} \longrightarrow N_{r2}$; **$r_1 \neq 10$ y $r_2 \neq 10$**

El método consiste en:

1) Convertir $N_{(r1)}$ a su equivalente decimal por el método indicado en **a).**

2) El número decimal $N_{(r1=10)}$ obtenido se convierte a su equivalente $N_{(r2)}$ por el procedimiento indicado en **b).**

Ejemplo: Pasar $(1FA)_{16}$ a base 5 **(r1 = 16; r2 = 5)**

1) Se convierte $(1FA)_{16}$ a base 10:

$\mathbf{1FA_{16}} = 1x(16)^2 + 15x(16)^1 + 10x(16)^0 = \mathbf{506_{10}}$

2) Se convierte el número 506_{10} a base 5:

```
506 | 5
 06   101 | 5
  1     1   20 | 5
             0   4 | 5
                 4   0
```

$(506)_{10} = (4011)_5$, luego **$(1FA)_{16} = (4011)_5$**

d) Caso en que una base es potencia entera de la otra.

Dada la siguiente expresión decimal de un número en base 2, que se quiere pasar a base 8:

$N_{(2)} = d_{10}\, 2^{10} + d_9\, 2^9 + d_8\, 2^8 + d_7\, 2^7 + d_6\, 2^6 + d_5\, 2^5 + d_4\, 2^4 + d_3\, 2^3 + d_2\, 2^2 + d_1\, 2^1 + d_0$

$$N = 2^9\underbrace{(d_{10}\, 2 + d_9)}_{d'_3} + 2^6\underbrace{(d_8\, 2^2 + d_7\, 2 + d_6)}_{d'_2} + 2^3\underbrace{(d_5\, 2^2 + d_4\, 2 + d_3)}_{d'_1} + \underbrace{(d_2\, 2^2 + d_1\, 2 + d_0)}_{d'_0}$$

que también se puede escribir como:

$N'_{(8)} = d'_3\ 8^3 + d'_2\ 8^2 + d'_1\ 8^1 + d'_0$

siendo: $2^9 = 8^3$, $2^6 = 8^2$, $2^3 = 8$, $2^0 = 8^0$.

Como vemos, el número así obtenido cumple con la formulación general de un número en la nueva base; sólo basta con demostrar que los nuevos dígitos d' son dígitos válidos en la nueva base como para estar seguros de la validez del método. Para ello veremos que los valores máximos y mínimos de los dígitos d' sean tales que formen parte del conjunto de la nueva base (en este caso, la base 8).
El valor mínimo de un dígito d' es, evidentemente CERO y ello ocurre cuando todos los dígitos originales, son cero.

Por ejemplo:
Si d_8; d_7 y d_6 son cero: $d'_2 = 0x2^2 + 0x2^1 + 0x2$ resulta $\mathbf{d'_2 = 0}$
El valor máximo de un dígito d' se da cuando todos los dígitos que le dan origen adoptan el valor máximo posible y este es justamente el valor de la base menos uno. Para nuestro caso es: Si $d_8 = d_7 = d_6 = r - 1 = 2 - 1 = 1$, (máximo valor posible de un dígito de la base 2) $d_2' = 1x2^2 + 1x2 + 1 = 7$; ($r' - 1 = 8 - 1$, pues ahora 8 es la nueva base.); resulta $\mathbf{d'_2 = 7}$.

De acuerdo con lo anterior es: $\mathbf{0 < d'_i < 7}$ y siempre es parte del conjunto de dígitos de la nueva base.
Por lo tanto, para hallar los dígitos d'_i, basta con agrupar de a tres a partir de la derecha los dígitos en base 2 y hallar su valor según el cálculo indicado entre paréntesis. (pesos 4, 2 y 1).

Dadas una base r_1 y r_2 suponemos que r_2 es potencia entera de r_1: $r_1 = r_2^n$
Se agrupan los dígitos de N_{r1} en paquetes de n dígitos comenzando desde el punto decimal y se obtiene luego el equivalente N_{r2} de cada paquete. Agrupando los equivalentes obtenidos, tendremos el número N_{r2} correspondiente.
Suponiendo: $\mathbf{r_1 = 2}$ **y** $\mathbf{r_2 = 8}$, se quiere convertir el número $(10110001)_2$ a base 8.

$8 = 2^3$; $\mathbf{r_2 = r_1^3}$; n = 3 (se agrupa en paquetes de 3 dígitos)

0 1 0	1 1 0	0 0 1
4x0 + 2x1 + 1x0	4x1 + 2x1 + 1x0	4x0 + 2x0 + 1x1
2	6	1

$\mathbf{(10110001)_2 = (261)_8}$

Para hallar los dígitos equivalentes, basta con agrupar de a "tres" a partir de la derecha los dígitos en base 2 y hallar su valor de acuerdo a los "pesos", en este caso 4, 2 y 1 (2^2,2^1,2^0). El proceso inverso es válido; se convierte cada dígito de N_{r1} en paquetes de n dígitos de r_2 (teniendo la precaución de completar con ceros si fuera necesario).

Ejemplo: $(235)_8 = \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{011}_{3}\ \underbrace{101}_{5}$

Para pasar de base 16 a base 2 o viceversa, se usa el mismo procedimiento, teniendo en cuenta que $16 = 2^4$.

Por lo tanto, se agrupa el número original en paquetes de 4 dígitos.

```
(2FA)16 = (0 0 1 0   1 1 1 1   1 0 1 0)2
           ---------  ---------  ---------
           8 4 2 1    8 4 2 1    8 4 2 1    potencias de base 2
           ---------  ---------  ---------
              2          F          A
```

El pasaje de base 8 a 16, conviene hacerlo pasando por base 2.
Por ejemplo: $(2734)_8$; se pasa primero a base 2.

```
  2     7     3     4
----- ----- ----- -----
010 111 011 100; como 16 = 2^4, se reagrupa de a 4 dígitos:

0101 1101 1100 = (5 D C)16
------- ------- -------
   5       D       C
```

EJEMPLOS DEL DESARROLLO DE LOS EJERCICIOS

I) Realizar la expansión de un número:

La expansión se realiza, efectuando la suma de cada dígito por su valor posicional.

Ejemplos: 3457;   49135

$3457 = 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 7 \times 10^0$
$= 3000 + 400 + 50 + 7$

$49135 = 4 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0$
$= 40000 + 9000 + 100 + 30 + 5$

II) Conversión de números a distintas bases.

a) Convertir números en el sistema decimal a números en el sistema binario.

Se divide el numeral decimal sucesivamente por 2 hasta llegar al cociente 0. El numeral binario se obtiene con el ultimo resto 1 al que se agregan todos los restos de las divisiones (de atrás para delante).

Pasar $(47)_{10}$ a base 2:

47	2					
7	23	2				
1	3	11	2			
-	1	1	5	2		
	-	-	1	2	2	
			-	0	1	2
				-	1	0
					-	

El binario correspondiente a $(47)_{10}$ es $(101111)_2$: $(47)_{10} = (101111)_2$

Si se tratara de un número decimal, se consideran en forma separada la parte entera de la fraccionaria.

$(27{,}125)_{10}$ a base 2

Parte entera

27	2				
07	13	2			
1	1	6	2		
-	-	0	3	2	
		-	1	1	2
			-	1	0

Parte fraccionaria

0.125 x 2 ----- 0.25
0.25 x 2 ----- 0.5
0.5 x 2 ----- 1

$(27.125)_{10} = (11011{,}001)_2$

b) Convertir números del sistema decimal a una base cualquiera.

Se divide el numeral decimal sucesivamente por la base hasta llegar al cociente 0.

Ejemplo: $(11{,}30)_{10}$ a base 3

Parte entera

```
11 |_3
 2   3 |_3
 -   0   1 |_3
     -   1   0
             -
```

Parte fraccionaria

0.30 x 3 ---- 0.90
0.90 x 3 ---- 2.70
0.70 x 3 ---- 2.10
0.10 x 3 ---- 0.30

$(11{,}30)_{10} = (102{,}022)_3$

Ejemplo: $(26{,}15)_{10}$ a base 16

Parte entera

```
26 |_16
10    1 |_16
--    1    0
      -
```

Parte fraccionaria

0.15 x 16 ---- 2.4
0.4 x 16 ---- 6.4
0.4 x 16 ---- 6.4

$(26{,}15)_{10} = (1A{,}266)_{16}$

c) Convertir a decimal numerales expresados en base 2.

Se realiza el desarrollo en potencias de 2. Como el número tiene 7 dígitos, el primer dígito tendrá valor posicional 2 a la sexta.

Ejemplo: $(1010101)_2 = (?)_{10}$

$$(1010101)_2 = 1x2^6 + 0x2^5 + 1x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0$$
$$= 64 + 0 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1$$
$$= (85)_{10}$$

d) Convertir numerales de distintas bases, al sistema decimal.

Se realiza la expansión, es decir, la sumatoria de los productos de los dígitos del número por las sucesivas potencias de la base r1, y luego las operaciones correspondientes en base 10.

Ejemplo: $(21403)_5$.

Aquí la base r1=5, por eso usamos potencias de 5 para escribir el desarrollo en potencias del número. Como el número tiene 5 dígitos, el primer dígito tendrá valor posicional 5 a la cuarta.

$$(21403)_5 = 2x5^4 + 1x5^3 + 4x5^2 + 0x5^1 + 3x5^0$$
$$= 1250 + 125 + 100 + 0 + 3$$
$$= (1478)_{10}$$

Ejemplo: $(3E7B)_{16}$.

La base r1=16, los dígitos E y B denotan los números (decimales) 14 y 11 respectivamente. De acuerdo con esto:

$$\begin{aligned}(3E7B)_{16} &= 3x16^{3} + 14x16^{2} + 7x16^{1} + 11x16^{0}\\ &= 12288 + 3584 + 112 + 11\\ &= (126595)_{10}\end{aligned}$$

e) Convertir numerales de distintas bases, pasando por base 10.

Ejemplo: $(32,12)_{12} = (?)_4$

- En primer lugar se realiza el desarrollo en potencias del número, para pasar de base 12 a base 10.

$$(32,12)_{12} = 3x12^{1} + 2x12^{0} + 1x12^{-1} + 2x12^{-2} = (38,097)_{10}$$

- Se realizan sucesivas divisiones del número en base 10, por la base 4 a la que se quiere pasar.

Parte entera	Parte fraccionaria
38 ⌊ 4	0.097 x 4 ---- 0.388
2 9 ⌊ 4	0.388 x 4 ---- 1.552
- 1 2 ⌊ 4	0.552 x 4 ---- 2.208
- 2 0	
-	

$(32,12)_{12} = (212,012)_4$

f) Convertir números de distintas bases, donde una de las bases es potencia entera de la otra.
-Ejemplo 1: convertir el binario 1111001011,10011 en sus equivalentes octal y hexadecimal.

1) De base 2 a base 8; en este caso $8=2^3$.
Se distribuye el número binario en grupos de 3 bits procediendo hacia la izquierda y derecha del punto binario; luego, se reemplaza cada grupo de 3 bits por su dígito octal equivalente.

001	111	001	011.	100	110
1	7	1	3 .	4	6

$(1111001011,10011)_2 = (1713,46)_8$

2) De base 2 a base 16; en este caso $16=2^4$.
Se divide el número binario en paquetes de 4 bits y se emplean los dígitos hexadecimales correspondientes.

0011	1100	1011.	1001	1000
3	C	B .	9	8

$(1111001011,10011)_2 = (3CB,98)_{16}$

-Ejemplo 2: $(2312003)_4 = (?)_{16}$; en este caso $16=4^2$.

Se divide el número en paquetes de 2 dígitos y se reemplazan por sus equivalentes en la base mayor.

0 2	3 1	2 0	0 3	
0x4+2x1	3x4+1x1	2x4+0x1	0x4+3x1	(4 y 1 son los pesos de la base 4)
2	D	8	3	

$(2312003)_4 = (2D83)_{16}$

-Ejemplo 3: $(E1A)_{16} = (?)_2$; en este caso $16=2^4$

Se reemplaza cada dígito de la base mayor (16) por su equivalente en la base menor (2).

E	1	A	
8 4 2 1	8 4 2 1	8 4 2 1	(pesos de la base 2)
1 1 1 0	0 0 0 1	1 0 1 0	

$(E1A)_{16} = (111000011010)_2$

-Ejemplo 4: $(2D83)_{16} = (?)_4$; en este caso $16=4^2$.

2	D	8	3
4x0+1x2	4x3+1x1	4x2+1x0	4x0+1x3
0 2	3 1	2 0	0 3

$(2D83)_{16} = (2312003)_4$.