LA LÓGICA Y SU HISTORIA

La Lógica es la ciencia que estudia la estructura de los razonamientos, y su objeto es de proveer métodos para distinguir los razonamientos válidos de los inválidos.

El creador de la Lógica fue Aristóteles (siglo VI A.C.), aunque pueden señalarse antecedentes. Zenón de Elea, Sócrates y Platón aportaron elementos decisivos, pero Aristóteles la sistematizó de tal manera que prácticamente no requirió modificaciones por más de 2000 años. El nombre de Lógica no fue utilizado por Aristóteles , sino que apareció luego en los escritos estoicos (siglos IV y III A.C.). Para Aristóteles la Lógica es el estudio de "**la razón como instrumento**" (Organon), capaz de hacernos conocer la filosofía y cualquier otra ciencia. De ahí que también entiende a la Lógica como la "ciencia de la demostración", como medio para alcanzar la verdad.

En la Edad media se destaca Santo Tomás de Aquino, para quien la Lógica es "el arte por el cual el hombre procede con orden, facilidad y sin error en el uso de la razón". Luego aparecen varias concepciones de la Lógica, como la Lógica Empírica, la Lógica Psicologista, la Lógica pura o Fenomenológica, Lógica Metodológica.

En el siglo XIX se produce una gran revolución en la materia, con lo que se inicia el segundo período en el desarrollo de la Lógica, al surgir la Lógica Matemática o Lógica Simbólica. La Lógica Clásica había permanecido alejada de la matemática, la ciencia que establece todas sus conclusiones por vía del razonamiento. Los cultores de la Lógica hacían Lógica y los de Matemática, Matemática, sin relacionar ambos campos de trabajo. La Lógica Simbólica es en sus orígenes obra de matemáticos que advirtieron la estrecha relación entre lógica y matemática, las dos disciplinas formales.

Leibniz (fines del siglo XVII) es un precursor en la historia de la Lógica Simbólica, quien pensaba que era posible extender el cálculo, el procedimiento matemático que utilizamos al efectuar con lápiz y papel cualquier operación aritmética, fuera del terreno de la cantidad. Que se podía crear un lenguaje simbólico tan perfecto que evitara las controversias entre los filósofos y redujera las disputas a meros errores de cálculo. Pero la obra de Leibniz permaneció desconocida en su época.

La Lógica Simbólica o Logística, concibe la Lógica como una disciplina estrictamente formal, que no hace referencia alguna a los objetos y que se expresa con un lenguaje simbólico a la manera matemática. La Lógica es concebida fundamentalmente como un cálculo de proposiciones, al margen de toda referencia a los objetos del pensamiento.

De 1847 datan el Análisis Matemático de la Lógica, de George Boole y la Lógica Formal, de August De Morgan. El desarrollo posterior de la Lógica Simbólica es la obra de Giusepe Peano (lógico italiano, 1910), C. S. Pierce, G. Frege, Bertrand Russel (1872) y A. Whitehead (1861 –1910), entre otros.

Tres son las características más importantes de la Lógica Simbólica:

- es una ampliación de la Lógica Clásica
- tiene sus simbolismos
- rechaza de su campo toda consideración psicológica o gnoseológica, para mantenerse en un plano estrictamente formal.

La Lógica Simbólica se utilizó ampliamente en la elaboración de la Teoría de Conjuntos, y encontró una aplicación importante en el análisis gramatical del lenguaje y la Semiótica(teoría general de los signos).

La Lógica Simbólica puede dividirse en distintas ramas, como la Lógica Proposicional, Lógica Cuantificacional , Lógica de Clases y Álgebra de Boole.

OBJETIVO DE LA LÓGICA

Podemos decir que el objetivo central de la lógica es la distinción entre el razonamiento correcto y el incorrecto.

El lógico se interesa por los razonamientos, sin tener en cuenta sus contenidos, lo que realmente le interesa saber es si el proceso que lleva de las premisas a la conclusión es correcto o no.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo Nº1 : Frente a un plato de comida Juan razonó de la siguiente forma:

Los salmones son apetitosos. Todo lo que es apetitoso levanta el ánimo. Lo que levanta el ánimo es bueno para la vida. **Por lo tanto**, los salmones son buenos para la vida.

Ejemplo Nº2 : Mientras Gonzalo leía el diario razonaba :

Si bajan las tasas de interés, se producirá un alza en las acciones de la bolsa. Pero las tasas no bajan. **En consecuencia** no se producirán alzas en la bolsa.

Hagamos un análisis de ambos razonamientos:

¿En primer lugar por qué decimos que ambos son razonamientos?

Porque se trata en ambos casos de un conjunto de afirmaciones, en la cual una de ellas (conclusión), se realizará sobre la base de las demás (premisas).

En segundo lugar cabe preguntar: son ambos razonamientos correctos?.

Esta noción es muy importante y la desarrollaremos más adelante extensamente. Por ahora debemos entenderlo como:

¿ ESTÁN BIEN ESTRUCTURADOS LOS DOS RAZONAMIENTOS?

Si bajan las tasas de interés, se producirá un alza en las acciones de la bolsa, pero las tasas no bajan. En consecuencia no se producirán alzas en la bolsa.

Anticipo la respuesta:
El 1º si, el 2º no. Veamos porqué:

Dijimos que la lógica es la ciencia que trata de discernir cuales son razonamientos correctos y cuales no, ahora daremos una sencilla demostración utilizando los conocimientos que seguramente ya poseemos.

El razonamiento de Juan puede simbolizarse así:

Todo A es B. Todo B es C. Todo C es D. Por lo tanto todo A es D

Esto puede demostrarse por el principio de inclusión que conocemos de la teoría de los conjuntos.

Veamos ahora que:
Si ahora reemplazamos en el mismo razonamiento
A: Musulmán
B: Vegetariano
C: Por flaco
D: mal alimentado

Podemos obtener un razonamiento similar al de Juan.
Los musulmanes son vegetarianos. Todo vegetariano es flaco, el que es flaco está mal alimentado, luego los musulmanes están mal alimentados.

Nos preguntamos ahora ¿es correcto este nuevo razonamiento?

Sí. **Es correcta su estructura**.

Luego si admitimos como válidas las afirmaciones de que partimos, debemos admitir la conclusión. Dicho en otras palabras
Si las premisas fueran verdaderas, la conclusión también lo sería.

Analicemos ahora el segundo.
Aquí hay dos premisas
Lo primero es de tipo condicional Si-Entonces , Si
se da lo primero entonces se dará lo segundo
(lo que no significa que si se da lo segundo, entonces se da lo primero)

Un ejemplo mas aclarará este punto.
Consideremos las siguientes afirmaciones.
Si Raúl se arroja del piso 20, entonces morirá.
Raúl muere si, y solo si se arroja del piso 20.
La 1º es verdadera.
La 2º es falsa.
Si generalizamos la manera de razonar de Gonzalo es:
Sí la primera, entonces la 2º. No se da lo primero entonces no se da lo segundo.
Si ahora reemplazamos lo primero por:
Raúl se arroja del piso décimo, y lo 2º por: Raúl muere, obtenemos el siguiente razonamiento similar al de Gonzalo.
Si Raúl se arroja del piso 20 entonces muere.
Raúl no se ha arrojado del piso 20. En consecuencia: Raúl no ha muerto.

Este nuevo razonamiento es incorrecto, al igual que el que formulara Gonzalo.
Notar que las premisas pueden ser verdaderas, y la conclusión puede no serlo.

Resumiendo podemos afirmar que: La lógica estudia la manera de distinguir los razonamientos correctos de los incorrectos, analiza y propone métodos para este fin, y discute los principios en que se basan esos métodos.

En un razonamiento correcto nunca puede suceder que las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa.

Podemos así ahora entender mas claramente cual es el objetivo de la lógica:

Como se ve en los dos razonamientos anteriores nos abocamos al estudio de la forma o estructura del razonamiento. En realidad no nos interesa el contenido o la materia de los razonamientos, pero sí determinar si son o no correctos.
Es la estructura lo que se juzga correcto o no.

Esto significa que para distinguir los razonamientos correctos de los incorrectos, la Lógica se coloca en el punto de vista formal: por eso se dice que la Lógica es una disciplina formal o se utiliza la palabra Lógica Formal Así como en aritmética es lo mismo
3 naranjas + 2 naranjas = 5 naranjas
3 pelotas + 2 pelotas = 5 pelotas
Pues lo que interesa es la ecuación 3+2 =5
En Lógica interesa las formas o estructuras, no los contenidos.

Al procedimiento por el cual se pasa de un razonamiento a su forma lógica se lo denomina abstracción.

Abstraer: es descubrir los elementos estructurales en un razonamiento, y de los cuales depende su corrección o incorrección.
El procedimiento inverso al de abstracción es la **interpretación**. La misma consiste en pasar de una forma de razonamiento a un razonamiento.
Abstracción e interpretación son dos procedimientos muy útiles para considerar o no la corrección de los razonamientos.

Por lo tanto nuevamente podemos afirmar que del razonamiento, la lógica solo se interesa por las relaciones formales que las premisas guardan con la conclusión.
También los ejemplos expuestos nos sirven para efectuar una distinción entre la lógica y la gramática.
La lógica es independiente del lenguaje, no admite algunas diferencias gramaticales y por el contrario establece otras que la gramática no considera.

Durante muchos siglos la lógica estuvo atada a las formas gramaticales, lo que impedía su progreso.

Los métodos que hemos empleado hasta ahora para decidir si un razonamiento es correcto o no, son primarios y carecen de fundamento, aunque sean intuitivamente admisibles.
Los ejemplos dados han sido al solo efecto de que el lector logre una caracterización de lo que es la lógica.

Pero para realizar un estudio con fundamentación se requiere un estudio de los componentes del razonamiento que es lo que haremos a lo largo del curso.
De entre la diversidad de cuestiones que estudia la lógica trataremos en este curso algunas de sus ramas, a saber:

- Lógica proposicional
- Lógica de predicados o cuantificacional
- Lógica de clases
- Lógica Matemática

Premisas, conclusiones, proposiciones y razonamientos

Comencemos con algunas definiciones fundamentales para introducirnos en el estudio de la lógica .

Definiremos **proposición** como aquellas expresiones linguísticas que poseen una función informativa:

Afirman o niegan algo, y tiene sentido decir que son verdaderas o falsas.

Ejemplo: Juan canta

Pedro corre a Juan

Y en esto difieren de otras expresiones tales como:

Las preguntas ¿hace frío?

Las órdenes ¡Estudien!. Alcánzame mi libro por favor.

Exclamaciones ¡Cómo nos divertimos! Ojalá llueva!

Notar que dos oraciones gramaticalmente distintas pueden expresar la misma proposición.

Ejemplo: Juan ama a María

María es amada por Juan

Conclusión: La conclusión de un razonamiento es la proposición que se afirma sobre la base de las otras proposiciones del mismo, llamadas premisas.

Tomado aisladamente, ninguna proposición en si misma es una premisa o una conclusión.

Así "premisas" y "conclusión" son términos relativos como "empleado" y "empleador".

En un razonamiento lo que primero debemos hacer es distinguir entre lo que es conclusión y lo que es premisa. La conclusión puede estar al principio como primer premisa o como última premisa.

Hay ciertas palabras o frases (llamadas expresiones derivativas) que sirven típicamente para diferenciar la premisa de la conclusión.

Entre los mas comunes se encuentran:
Las que se anteponen a la conclusión

1. Por lo tanto
2. Por ende
3. Luego
4. Así
5. Por consiguiente
6. Podemos inferir

Las que se anteponen a las premisas:

7. Ya que
8. Puesto que
9. Dado que

Pero en la vida real, no todo razonamiento tiene una expresión derivativa necesariamente.

Habiendo definido Proposición, Premisa y Expresión derivativa estamos en condiciones de definir razonamiento.

Un razonamiento es un conjunto de proposiciones (dos o mas) en el que una de ella llamada conclusión, se pretende que esté fundada sobre la/s otras llamadas premisas.

Ejemplo:
El ladrón tuvo que entrar o bien por la puerta o bien por la ventana.
Por la puerta no entró, como lo ha demostrado la investigación policial.
Por lo tanto, el ladrón tuvo que entrar por la ventana.

Este conjunto de proposiciones está relacionado de modo tal, que la última proposición se pretende que esté fundada en los otros enunciados. Es por lo tanto un ejemplo de razonamiento.

Consideremos ahora este otro conjunto de proposiciones:
Llueve mucho. Será mejor que no salgamos. Por lo tanto postergamos la excursión para mañana.

Si bien estas proposiciones están relacionadas en cuanto al contenido, no hay ninguna que se afirme sobre la base de las otras. Luego no se trata de un razonamiento.

Los razonamientos pueden dividirse es dos grandes grupos: Deductivos y No deductivos.

Deductivos: la conclusión se infiere necesariamente o se deduce de la premisa.
No deductivos: la conclusión se infiere en cierto grado de probabilidad no con necesidad.

Ejemplo de razonamiento deductivo:
Todos los pájaros vuelan
Los gorriones son pájaros .
Por lo tanto los gorriones vuelan.

Ejemplo de razonamiento no deductivo:
Hace varios meses que usa esta marca de tomates, y todos han salido buenos.
Por tanto la próxima lata de tomates será buena.

En este curso solo estudiaremos los razonamientos deductivos.

Resumiendo podemos decir que los componentes de un razonamiento son : Premisas- Conclusión- Expresiones derivativas.

Dado un razonamiento de tipo deductivo este puede ser válido o no válido.
En primer lugar, la validez no depende del contenido del razonamiento sino de su forma.
Diremos que un razonamiento es válido cuando su forma es válida, e inválido cuando su forma es inválida.
Si no depende del contenido, no dependerá en forma directa, de la verdad o falsedad de las premisas y la conclusión.

Es un error creer que razonamiento con conclusión verdadera son válidos y la de conclusión falsa inválidos. Esto no es así, y ya lo vimos en el ejemplo de los musulmanes .

Hay razonamientos válidos también con premisas y conclusiones falsas. También hay razonamientos inválidos con las mismas condiciones.

¿Pero como sabemos cuando una forma de razonamiento es válido y cuando inválido?

Lo que nos hace ver que el razonamiento es inválido es el hecho de que, siendo sus premisas verdaderas , su conclusión es falsa.

Esta característica nos permite definir razonamiento válido del siguiente modo:

Un razonamiento es válido cuando su forma es válida, y la forma de un razonamiento es válida, cuando no hay ningún razonamiento de esa forma, que tengo premisas verdaderas y conclusión falsa.

Por otro lado un razonamiento es inválido cuando su forma de razonamiento es inválida, y este sucede **cuando hay por lo menos un razonamiento de esa forma que tiene premisas verdaderas y conclusión falsa**.

El siguiente cuadro esquematiza las posibles combinaciones de verdad y falsedad de premisas y conclusiones para razonamientos válidos o inválidos

Razonamientos Válidos

P\ C	**V**	**F**
V	**SI**	**NO**
F	**SI**	**SI**

Razonamientos Inválidos

P\ C	**V**	**F**
V	**SI**	**SI**
F	**SI**	**SI**

La forma usada hasta ahora para demostrar la validez de un razonamiento no es rigurosa.

La Lógica proposicional, la lógica cuantificacional y la de clases se encargan de fundar leyes y demostraciones para probar la validez o no de los razonamientos deductivos.

El método de analogía lógica

Si bien los distintos capítulos de la lógica proporcionan los métodos precisos de prueba de validez o invalidez de razonamientos, hay un método general, que no requiere conocimientos adicionales, aplicable a cualquier tipo de razonamiento, es el método de analogía lógica, que consiste en:

Dado un razonamiento o forma de razonamiento, tratamos de encontrar una de la misma forma, que tenga premisas verdaderas y conclusión falsa.

Si hallamos un ejemplo con esas características habremos encontrado que ese razonamiento tiene estructura no válida. La limitación de este método es la siguiente:
Si no encontramos un ejemplo tal, no podemos afirmar que el razonamiento es válido.

LÓGICA PROPOSICIONAL

Como ya definimos, la lógica puede ayudarnos a aprender una forma de razonamiento que es exacta y muy útil. Con el estudio de la lógica se persigue llegar a ser preciso y cuidadoso. La lógica tiene un lenguaje exacto. Construiremos un vocabulario para este lenguaje usando el lenguaje cotidiano. Para ello es necesario redactar una serie de reglas que sean claras y definidas, y que estén libres de ambigüedades que pueden hallarse en nuestro lenguaje corriente.

Para construir este lenguaje usaremos proposiciones. Las proposiciones son expresiones que tienen una función enunciativa, de las cuales se puede decir que son verdaderas o falsas, y que afirman o niegan algo. De esto, surge que una pregunta o una orden, por ejemplo, no serían proposiciones.

$$\text{Proposición} \begin{cases} \text{Atómica} \\ \text{Molecular} \end{cases}$$

<u>Proposición atómica</u>: es la proposición básica de forma más simple. Si junto proposiciones atómicas con términos de enlace obtengo proposiciones moleculares.

Ejemplo :

Las rosas han florecido.
Es invierno.

<u>Proposición molecular</u>: es la proposición que contiene dentro de sí a otras proposiciones, y está formada por la unión, mediante términos de enlace, de proposiciones atómicas.

Ejemplo:

Las rosas florecieron y es primavera.

“Y” es el término de enlace, y no forma parte de ninguna proposición.

$$\text{Términos de enlace} \begin{cases} \text{Y} \qquad \text{si...entonces} \\ \text{o} \\ \text{No} \qquad \text{si y sólo si} \end{cases}$$

<u>Términos de Enlace:</u> Se usan para enlazar proposiciones atómicas, generando las proposiciones moleculares.

Ejemplos:

Juan no estudia.
Iré al cine o al teatro.

Es invierno y hace mucho frío.
Si mañana es sábado entonces no hay clases.

Nota: Los términos de enlace pueden unir proposiciones moleculares, generando otras más complejas.

Marcelo está en la oficina y María no está en su casa.

Algunas frases de nuestro lenguaje sirven para remarcar cuál es el término del enlace dominante.

A la vez, $x > 0$ y $z \neq 0$ (remarca el y)

Él O puede aparecer 2 veces:

O voy al cine O voy al teatro.

En cambio, en las condiciones, a veces se obvia el entonces:

Si llueve, llevaré piloto.

Remarquemos que cuando hay un no, esa proposición es considerada molecular:

$X \neq 1$ es $\neg (x = 1)$

Ejemplo:

No ocurre que la lógica sea difícil.	La lógica no es difícil.
No ocurre que (x + y > 2)	No (x + y > 2)

En muchas proposiciones matemáticas suele aparecer el término $x \neq 1$, significa que x no es igual a 1.
O sea $x \neq 1$ es una proposición molecular, aunque no aparezca específicamente la palabra no.

Simbolización de proposiciones

Para trabajar más cómodamente simbolizaremos las proposiciones atómicas con letras mayúsculas.

Ejemplo:

P: “la nieve es blanca”
Q: “hace frío”
(P) y (Q) (R) o (S)

Al simbolizar una proposición molecular que contiene el término de enlace no, este término se escribe al principio:

No (Q)

Así como hemos simbolizado las proposiciones atómicas, también introduciremos símbolos para los términos de enlace; se dará un nombre especial a la proposición molecular que se forme utilizando cada uno de los términos de enlace.

Términos de enlace "Y": La unión de dos proposiciones con el enlace "Y" se denomina conjunción de las dos proposiciones. Usaremos el símbolo $\wedge$ para representarla.

(P) Y (Q)
(P) $\wedge$ (Q)

Términos de enlace "O": La unión de dos proposiciones con el término de enlace "o" se llama disjunción o disyunción. Usaremos el símbolo $\vee$ para representarla.

Ejemplo:

Estamos en el aula 4 o estamos en el aula 5. También puede escribirse como O estamos en el aula 4 o estamos en el aula 5.

P: estamos en el aula 4.
Q: estamos en el aula 5.

Se simboliza:

(P) $\vee$ (Q)

A la primera o la ignoramos para simbolizarla, ya que sólo sirve para reforzar el sentido de la disyunción.

Término de enlace "NO": Cuando a una proposición se le añade el término de enlace no, el resultado se denomina negación de la proposición.

Así ,una negación es una proposición molecular que utiliza el término de enlace no. Se distingue de los otros términos de enlace en el hecho que se usa o actúa en una sola proposición.

Para simbolizarla utilizaremos el símbolo $\neg$.

Ejemplo:

P: Juan es bueno. (proposición atómica).
$\neg$ P significa Juan no es bueno. (proposición molecular). También en castellano puede expresarse como:

No ocurre que Juan es bueno.

Término de enlace Si...entonces...: Cuando se unen dos proposiciones usando este término de enlace, la proposición molecular restante se denomina proposición condicional. Para simbolizarla utilizaremos el símbolo $\Rightarrow$.

Ejemplo:

P: llueve el jueves.
Q: se suspende el picnic.

Llueve el jueves $\Rightarrow$ se suspende el picnic.
(P) $\Rightarrow$ (Q)

A "P" se le llama antecedente.
A "Q" se le llama consecuente.

Si usamos la expresión si y solo si, se obtiene una oración condicional.
La bincondicionalidad P si solo si Q es equivalente a:

Sí P, entonces Q, y sí Q, entonces P.

Se utiliza el símbolo $\Leftrightarrow$.

Agrupamiento y Paréntesis

Es frecuente encontrar proposiciones que tienen más de 1 término de enlace. Vimos que los términos de enlace se pueden usar sobre proposiciones atómicas o moleculares. Si hay más de un término de enlace en una oración, siempre será 1 de ellos el que domine la oración, es decir que actúe sobre toda la proposición; a este término se lo llama mayor.

Juan no aprobó el examen y María aprobó el examen.

P: Juan aprobó el examen.
Q: María aprobó el examen.
$(\neg P) \wedge (Q)$ es lo mismo que $(\neg P) \wedge Q$

Consideremos el ejemplo:
A la vez $\underbrace{X = 1}_{P}$ o $\underbrace{X = 2}_{Q}$, y $\underbrace{X = 3}_{R}$

$(P \vee Q) \wedge R$

En el primer y segundo ejemplo se ve que el término de enlace dominante es $\wedge$.

Podemos decir que los paréntesis son los símbolos de puntuación de la lógica, pues muestran cómo está agrupada una proposición y por lo tanto señalan cuál es el término de enlace dominante.

En el lenguaje castellano la coma muestra cuál es el término de enlace dominante.
Por ejemplo, si en el ejemplo 2 escribimos:

$\underbrace{X = 1}_{P}$, o $\underbrace{X = 2}_{Q}$ y $\underbrace{X = 3}_{R}$ $\quad \Rightarrow P \vee (Q \wedge R)$

O sea, la coma muestra que el término de enlace dominante es $\vee$, en este caso.

Así como el paréntesis o la coma marcan cuál es el término de enlace predominante, existen palabras en castellano para marcar esto.

Estas son:
A la vez ( ) y ( ).
O ( ) o ( ).
Sí ( ) entonces ( ).
No ocurre ( ).

Ejemplo:

No ocurre que, el libro es o rojo o es azul.

P: el libro es rojo.
Q: el libro es azul.

$\neg (P \vee Q)$

Se ve aquí que el término de enlace dominante es $\neg$ (no).

Prioridad de los términos de enlace:

Adoptando algunas reglas simples acerca de la prioridad de los términos de enlace, se puede eliminar algunos de los paréntesis en las proposiciones simbolizadas.

El más potente o de mayor prioridad es $\Rightarrow$.
O sea , $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ puede escribirse como $P \wedge Q \Rightarrow R$
O $P \Rightarrow (Q \vee R)$ es lo mismo que $P \Rightarrow Q \vee R$
En el caso de $(P \Rightarrow Q) \vee R$ no es posible eliminar el paréntesis.

Prioridades de mayor a menor:
$\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$
$\vee$ $\wedge$ (igual prioridad)
$\neg$
Ejemplos:

La idea de inferencia se puede expresar de la siguiente manera: de premisa verdadera se obtiene sólo conclusiones que son verdaderas, entonces las conclusiones que se derivan de la regla de inferencia, han de ser verdaderas. $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ es igual a $P \wedge Q \Rightarrow R$
$P \Rightarrow (Q \vee R)$ es igual a $P \Rightarrow Q \vee R$
$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ acá son necesarios. Si se coloca $A \Rightarrow B \Rightarrow C$, hay ambigüedad. $(\neg P) \vee Q$ es igual a $\neg P \vee Q$
$(\neg P) \Rightarrow \neg Q$ es igual a $\neg P \Rightarrow \neg Q$
$\neg (Q \vee R)$ no puede eliminarse el paréntesis.
$P \vee (Q \wedge R)$ no puede eliminarse ya que $P \vee Q \wedge R$ hay ambigüedad.

Habiendo conocido ya distintas formas de proposiciones, términos de enlace y simbolización de proposiciones, podemos dirigirnos hacia una parte importante de la lógica formal o simbólica:

La Inferencia y Deducción.

Las reglas de inferencia que rigen el uso de los términos de enlace son muy simples. Aprenderemos estas reglas, así como se aprende las reglas de un juego. El juego se juega con proposiciones (o fórmulas lógicas, que es la proposición simbolizada). El juego tiene la siguiente fórmula:

Comenzaremos con un conjunto de fórmulas que llamamos premisas.
El objeto del juego es utilizar las reglas de inferencia, sobre las premisas y así obtener una conclusión.

El paso lógico que me lleva de la premisa a la conclusión se llama deducción. Se dice que la conclusión es una consecuencia lógica de las premisas, cada paso que se da para llegar a la conclusión tiene que estar permitido por las reglas del juego.

Antes de entrar en teoría, daremos un ejemplo para que quede claro (lo mismo sucede cuando se nos enseña un juego).

Ejemplo:

Supongamos que tenemos 2 premisas:

La fórmula $P \Rightarrow Q$
La fórmula P

Analicemos un poco nuestras premisas, tenemos:

$P \Rightarrow Q, \wedge P$

Evidentemente la conclusión es que verifica Q.
Se dice que la proposición Q es consecuencia lógica de las premisas P, $P \Rightarrow Q$.

Ejemplo:

Si son las 12, entonces termina la clase.

Si son las 12 , se obtiene como consecuencia lógica: termina la clase.

Reglas de inferencia:

1). Regla Modus Ponendo Ponens: Esta regla permite demostrar Q, dadas como ciertas las premisas (es la regla anterior):

$$\frac{\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ P \end{array}}{Q}$$

Esta regla de inferencia es el método (Modus) que afirma (Ponens) el consecuente, afirmando (Ponendo) el antecedente.

Quede claro que P y Q pueden ser moleculares o atómicas.

Ejemplos:

Si no hace frío, entonces la bahía no se helará. No hace frío. De aquí se infiere : La bahía no se helará.

P: hace frío
Q: la bahía se helará

$$\frac{\neg P \Rightarrow \neg Q \qquad \neg P}{\neg Q}$$

$$\frac{1)\ R \Rightarrow S \qquad 2)\ R}{S} \qquad \frac{1)\ P \qquad 2)\ P \Rightarrow \neg Q}{\neg Q} \qquad \frac{1)\ P \wedge Q \Rightarrow R \qquad 2)\ P \wedge Q}{R} \qquad \frac{1)\ (\neg P \vee R) \Rightarrow (S \wedge \neg Q) \qquad 2)\ (\neg P \vee R)}{S \wedge \neg Q}$$

Nota: el orden de las premisas no tiene importancia.

La demostración se suele esquematizar por:

1) $R \Rightarrow S$
2) R
3) S PP.(1,2)

2). Regla de Doble Negación: Es una regla simple que permite pasar de una única premisa a la conclusión.

O sea de $\neg\neg P$ se infiere P.

$$\frac{\neg\neg P}{P} \qquad \frac{P}{\neg\neg P}$$

Ejemplo:

No ocurre que Juan no es malo.

Evidentemente la conclusión es que Juan es malo.

La abreviatura es DN.

3). Regla Modus Tollendo Tollens: Se aplica también a proposiciones condicionales y significa:

Negando (tollendo) el consecuente, se puede negar (tollens) el antecedente condicional.

Ejemplo:

$P \Rightarrow Q$ (Premisa)
$\neg Q$ (Premisa)

$\neg P$ T.Tollens

si tiene luz propia entonces el astro es una estrella.
el astro no es una estrella.

T.T: no tiene luz propia.

1) $R \Rightarrow S$
2) $\neg S$
3) $\neg R$

1) $Q \wedge R \Rightarrow S$
2) $\neg S$
3) $\neg (Q \wedge R)$

1) $P \Rightarrow \neg Q$
2) $\neg \neg Q$
3) $\neg P$

4). <u>Regla de Adjunción:</u> Se suponen dadas dos proposiciones como premisas:

1) P
2) Q

Si ambas proposiciones son verdaderas, entonces $P \wedge Q$ o $Q \wedge P$ son ambas conclusiones verdaderas. El orden de las proposiciones es indiferente . Esta regla se abrevia con la letra (A).

Ejemplos:

1) P (P)
2) $\neg R$ (P)

$P \wedge \neg R$ (A)

1) $Q \wedge S$
2) $\neg P$

$(Q \wedge S) \wedge (\neg P)$

1) $P \vee Q$
2) $Q \vee R$

$(P \vee Q) \wedge (Q \vee R)$

5). <u>Regla de simplificación:</u> Es la regla opuesta de la anterior. Supongamos como cierta $P \wedge Q$, entonces podemos inferir por simplificación P o Q(cualquiera de ellas). Se abrevia con la latra S.

O sea de la premisa:

$P \wedge Q$

P O también Q

Ejemplo:

1) $(P \vee Q) \wedge R$

2) R (S)
o 2) $(P \vee Q)$ (S)

1) $T \wedge \neg V$

2) $\neg V$ (S)
o 2) T (S)

<u>Regla de Disyunción de premisas:</u> Hasta ahora hemos establecido leyes donde los términos de enlace dominantes eran: y, no, si...entonces; veremos ahora una ley para cuando el término de enlace dominante es O. Antes consideramos el significado de una condición lógica.En el lenguaje corriente hay dos maneras posibles de usa la palabra O. (O excluyente y O incluyente).

$P \vee Q$ será verdadera para el caso excluyente, si una de ellas es verdadera, pero no ambas, o sea una debe ser cierta y la otra falsa.El sentido incluyente sin embargo es más amplio. Aquí una de ellas pude ser verdadera, pero también ambas. O sea puede solamente que alguna sea verdadera, pudiéndolo ser ambas.En lógica utilizaremos solamente el O incluyente.

Definiremos ahora la siguiente regla:

6). <u>Modus Tollendo Ponens:</u> Negando (tollendo) un miembro de una disjunción se afirma (ponens) el otro miembro (TP).

Simbólicamente:

1) $P \vee Q$
2) $\neg P$

Q TP (1,2)

Note que si se tiene

1) $P \vee Q$
2) P

No puede inferirse nada respecto de Q, ésta puede ser verdadera o falsa.

Ejemplos:

1) $(P \wedge Q) \vee S$

2) $\neg S$

$P \wedge Q$ TP (1,2)

1) $\neg S \vee T$

2) $\neg T$

$\neg S$ TP (1,2)

7). <u>Regla Ley de Adición:</u> Si se tiene una proposición que es cierta, entonces la disjunción de aquella proposición y otra cualquiera ha de ser también cierta (LA).
O sea si se da la proposición P entonces la proposición $P \vee Q$ o $P \vee R$ o $P \vee$ cualquier proposición, es consecuencia .

Para justificarlo recordaremos el significado de la disjunción:
$P \vee Q$ es verdadero si alguno de ellos es verdadero.Si P es verdadera, entonces $P \vee Q$ es también verdadera, independientemente de cómo sea Q.

8). <u>Regla Ley de Silogismo Hipotético:</u> (SH) Supongamos dadas como premisas:

1) $D \Rightarrow S$
2) $S \Rightarrow H$

---

3) $D \Rightarrow H$ SH (1,2)

1) Si hace calor entonces Juana va a nadar.
2) Si Juana va a nadar entonces estudia después de comer.
3) Si hace calor entonces Juana estudia después de comer.

O sea que la conclusión es una proposición condicional. Ambas premisas son proposiciones condicionales.

<u>Nota:</u> la conclusión no dice que hace calor ni que Juana estudia después de comer. Sólo dice que ocurrirá si hace calor.

Consideremos dadas las dos premisas anteriores, e imaginemos que el antecedente de la primera premisa es cierto. Si esto pasa, entonces el consecuente de la segunda premisa, puede deducirse aplicando PP dos veces. Esto es exactamente lo que dice la condición final: ($D \Rightarrow H$).

Ejemplos:

1) $\neg P \Rightarrow \neg Q$
2) $\neg Q \Rightarrow \neg R$

---

3) $\neg P \Rightarrow \neg R$ (SH)

1) $\neg P \Rightarrow Q \vee R$
2) $Q \vee R \Rightarrow \neg T$

---

3) $\neg P \Rightarrow \neg T$

1) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$
2) $R \Rightarrow (Q \wedge T)$

---

3) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \wedge T)$

9). <u>Regla Ley del Silogismo Disyuntivo:</u> (SD) Se dan tres premisas: una disjunción y dos condicionales.

O llueve o el campo está seco
Si llueve, entonces jugaremos adentro
Si el campo está seco, jugaremos fútbol.

La conclusión que podemos sacar es que o jugaremos adentro o jugaremos fútbol.
Para mayor claridad lo simbolizaremos:

R: llueve
D: el campo está seco
P: jugaremos adentro
B: jugaremos fútbol

1) $R \vee D$
2) $R \Rightarrow P$
3) $D \Rightarrow B$

---

4) $P \vee B$ (SD)

<u>Nota:</u> los dos antecedentes de los dos condicionales son las proposiciones que aparecen en la disjunción, y la conclusión es precisamente de disjunción de los

dos consecuentes de los dos condicionales (si 1 es cierta entonces R es cierta o D es cierta entonces puede deducirse P o B en forma evidente).

Ejemplos:

1) $\neg P \vee Q$	1) $P \vee \neg Q$
2) $\neg P \Rightarrow \neg R$	2) $P \Rightarrow \neg R$
3) $Q \Rightarrow S$	3) $\neg Q \Rightarrow S$
4) $\neg R \vee S$(SD)	4) $\neg R \vee S$ (SD)

10). <u>Regla Ley de Simplificación Disyuntiva:</u> Si se da por válida la proposición $P \vee P$ se puede concluir P, esto es lo que dice la ley (Simp.Disy.).

Nota: la posibilidad de simplificar una disyunción es mucho más que la de simplificar una conjunción ($P \wedge Q$). En este caso las dos proposiciones deben ser las mismas.

Una aplicación muy importante de esta regla se presenta cuando un silogismo disyuntivo tiene la forma especial de:

1) $P \vee Q$
2) $P \Rightarrow R$
3) $Q \Rightarrow R$

---

4) $R \vee R$ (SD)
5) R (Simp.Disy.)

11). <u>Regla de las Leyes Conmutativas:</u> Estas leyes son muy triviales pero deben enunciarse, pues no se puede dar ningún paso como conocido, si no se tiene una regla explícita que lo permita (L.Conmut.).

1) $P \wedge Q$ (Premisa)	2) $P \vee Q$ (Premisa)
$Q \wedge P$ (L.Conmut.)	$Q \vee P$ (L.Conmut.)

Nota: las reglas conmutativas sólo se aplican a la conjunción y a la disyunción; pero no a las condicionales.

12). <u>Regla de Leyes de De Morgan:</u> En el lenguaje corriente ocurre a veces que hay proposiciones enunciadas de manera distinta y que significan lo mismo.

Ejemplo:

a) No llueve y no hay sol, también puede expresarse : No ocurre que llueve o que hay sol.

Si simbolizamos:

P: llueve Q: hay sol

Entonces

a) $\neg P \wedge \neg Q$ se deduce que $\neg (P \vee Q)$

b)

y sale la inversa o sea de:

c) $\neg (P \vee Q)$ se deduce $\neg P \wedge \neg Q$

Esta es una de las denominadas Leyes de De Morgan.
Enunciaremos las distintas Leyes de De Morgan como una regla que se aplicará a
cada una de las premisas en las que pueda utilizarse, y en todo caso se obtiene la forma de una conclusión deseada. Para encontrar este modelo examinaremos cuidadosamente las seis formas proposicionales dadas.

a) $\dfrac{\neg P \wedge \neg Q}{\neg (P \vee Q)}$ d) $\dfrac{\neg (P \wedge Q)}{\neg P \vee \neg Q}$

b) $\dfrac{\neg (P \vee Q)}{\neg P \wedge Q}$ e) $\dfrac{P \wedge Q}{\neg (\neg P \vee \neg Q)}$

c) $\dfrac{\neg P \vee \neg Q}{\neg (P \wedge Q)}$ f) $\dfrac{\neg (P \vee \neg Q)}{\neg P \wedge Q}$

13). Regla de Proposiciones Bicondicionales: Hasta aquí hemos analizado proposiciones moleculares utilizando sólo cuatro términos de enlace. Y ahora introduciremos otro término de enlace de proposiciones: Es el término de enlace sí solo sí.

Proposiciones bicondiconales: El símbolo que se usa es $\Leftrightarrow$.
La proposición bicondicional $P \Leftrightarrow Q$ tiene la misma fuerza que las proposiciones condicionales: la 1°) $R \Rightarrow Q$, la 2°) $Q \Rightarrow P$.

Ejemplo:

Patinarán si y solo si el hielo no es demasiado blando.

Esto significa:

Si patinarán entonces el hielo no es demasiado blando.
Si el hielo no es demasiado blando entonces patinarán.

Entonces hemos conseguido una nueva ley, la ley bicondicional presente en los siguientes razonamientos:

1) $\dfrac{P \Leftrightarrow Q \quad (P)}{P \Rightarrow Q \quad (LB)}$ 2) $\dfrac{P \Leftrightarrow Q \quad (P)}{P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P \quad (LB)}$

3) $P \Leftrightarrow Q$ (P)
$\overline{}$
$Q \Rightarrow P$ (LB)

4) $P \Rightarrow Q$ (P)
$Q \Rightarrow P$ (P)
$\overline{}$
$P \Leftrightarrow Q$ (LB)

Se adoptará como regla que este término de enlace es más potente que los anteriores (última prioridad).

Así sin paréntesis:

$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow S \wedge P$$

Se ejecutará así:

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (S \wedge P)$$

14). Regla de Premisas: Dice que una premisa se puede introducir en cualquier punto de una deducción(L.P).

Dada esta regla, hemos aprendido 14 reglas de inferencia, las suficientes para poder hacer deducciones largas y bastante complejas.

Certeza y Validez.

Hasta ahora hemos aprendido, que de premisas ciertas, aplicando reglas de inferencia válidas, se llega a conclusiones ciertas.

Se pueden encontrar algunos razonamientos en lenguaje corriente, en el que sabemos que las premisas son afirmaciones ciertas, y que la conclusión es también cierta. ¿Indica esto que la forma de inferencia que va de dichas premisas a la conclusión es lógicamente válida?.La respuesta es NO. Pueden presentarse otros razonamientos del mismo tipo, en que las premisas sean ciertas, y la conclusión NO.

Un caso aislado no es suficiente para demostrar que una inferencia es válida.Sólo se puede decir que un razonamiento es válido, cuando se puede justificar por una regla de inferencia, cada paso que se realiza para llegar a la conclusión.

¿Es posible que existan inferencias proposicionales válidas sin que las reglas dadas sean suficientes para apoyarlas?

Supongamos que alguna sugiere la siguiente regla de inferencia:

$P \Rightarrow Q$ Premisa
$\overline{}$
$\neg P \vee Q$ Deducción

O sea si $P \Rightarrow Q$ es cierta, también lo es $\neg P \vee Q$

La inferencia es válida (luego veremos por qué). Aunque si estudiamos las leyes dadas, veremos que no hay ninguna ley que justifique esto.

Hay muchos casos de este tipo, de inferencia válida, para lo que no se ha introducido ninguna regla específica.

Puesto que una inferencia puede ser válida o no, desearíamos poder demostrar la validez o no validez de la misma.

Hasta ahora sabemos que:
Si se puede llegar a la conclusión utilizando nuestras reglas, entonces sabemos que es válida. Si se puede encontrar un ejemplo, en que, de premisas verdaderas pasemos a una conclusión falsa, entonces se sabe que el razonamiento es no válido, que premisas verdaderas conducen únicamente a conclusiones verdaderas.

Pero supongamos que después de muchas tentativas no se ha podido encontrar una demostración. Esto no demuestra que el razonamiento no es válido. Y supongamos que después de mucho tiempo no hemos encontrado ningún ejemplo, que nos demuestre que el razonamiento no es válido, esto tampoco demuestra que es válido.

Necesitamos un método general para demostrar la verdad o no de la conclusión, cuando no hay una regla que la justifique. Eso es lo que hacemos, introducir un método que sea adecuado para tratar cada ejemplo posible de inferencia proposicional.

Valores de certeza y términos de enlace de certeza funcional.

Comenzaremos con la idea de que cada proposición tiene un valor de certeza: verdadero o falso. No importa si la proposición es atómica o molecular, siempre tiene uno de los dos valores posibles V o F.

La verdad o falsedad de una proposición molecular dependerá de:

1). La verdad o falsedad de las proposiciones atómicas que la forman.
2). El término de enlace que la forma.

Debemos estudiar la certeza funcional de cada término de enlace.

Conjunción: " Y " es un término de enlace funcional, que sirve para decidir el valor de certeza de la proposición $P \wedge Q$ si se conocen los valores de P y de Q.

La conjunción de dos proposiciones es cierta, si, y solo si, ambas proposiciones son ciertas.

De las cuatro combinaciones posibles obtenemos:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunción o Disyunción: Acá el "O" se usa en sentido incluyente.

La disjunción de dos proposiciones es cierta si, y solo si por lo menos una de las dos proposiciones es cierta.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

<u>Negación:</u> La negación de una proposición cierta es falsa, y la negación de una proposición falsa, es cierta.

P	$\neg P$
V	F
FV	

<u>Proposiciones Condicionales:</u> Aquí nuevamente hay cuatro combinaciones posibles. En el lenguaje ordinario, sólo dos combinaciones se presentan con frecuencia:

Si el antecedente es cierto y el consecuente es cierto, entonces $P \Rightarrow Q$ es cierto.

Si el antecedente es cierto y el consecuente es falso, entonces $P \Rightarrow Q$ es falso.

Que pasa si el antecedente es falso? En lógica, si el antecedente es falso, entonces toda la condición se considera VERDADERA (atención), sin tener en cuenta si el consecuente es falso o verdadero. Este criterio se sigue también en ciencia y en matemática.

Si la regla que se acaba de expresar parece rara, es porque se acostumbra a pensar que, en una proposición condicional, la verdad de hecho del consecuente depende en algún sentido de la verdad de hecho del antecedente. En lógica no ocurre así. El contenido del antecedente no necesita, estar relacionado en absoluto con el contenido del consecuente. Se puede por ejemplo, considerar el valor de certeza de:

Si el día es frío, entonces $3 + 3 = 6$.

A pesar de que efectivamente las dos proposiciones atómicas no tienen nada que ver una con la otra y puesto que en este ejemplo, el consecuente es cierto, la proposición condicional es cierta.

La regla es: Una proposición es falsa, si el antecedente es verdadero y el consecuente falso, en otro caso la proposición es verdadera.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

<u>Equivalencia: Proposiciones Bicondicionales:</u> estas proposiciones se denominan también equivalencias.

Recordemos que una proposición bicondicional $P \Leftrightarrow Q$, tiene en esencia el mismo significado que $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$. Luego si ambas proposiciones (P y Q) son ciertas, entonces la bicondicional es cierta. Por otra parte si uno de los miembros es falso, aunque el otro sea cierto, será falso.

La regla para equivalencia es: una proposición bicondicional es cierta sí, y solo si sus dos miembros son ciertos o falsos.

Si hacemos la tabla de posibilidades resulta:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

<u>Diagrama de valores de certeza:</u> Supongamos querer hallar el valor de certeza de una proposición molecular en la que están en juego varias proposiciones y varios términos de enlace. Una forma de hacer esto, es usando un diagrama de certeza.

Ejemplo:

Supongamos que tenemos como dato P Verdadera, Q Falsa y R Verdadera, y la proposición es $(P \vee Q) \wedge R$.

El diagrama tendrá la forma:

$(P \vee Q) \wedge R$

V   F   V

   V

      V

Ejercicio:

Queremos probar la no validez del razonamiento. Simbolicemos:

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ Q \\ \hline \quad P \end{array}$$

Si el razonamiento fuera no válido, esta forma podría permitir siempre deducir sólo conclusiones ciertas de premisas ciertas. Por lo tanto, si encontramos algún caso, en que esta forma permita deducir una conclusión falsa de premisas que son ciertas, entonces se probará que esta fórmula no es válida.

Para demostrar la no validez del razonamiento anterior, teniendo las siguientes proposiciones:

P: usted es un ciudadano de Ushuaia

Q: usted es un ciudadano de la Argentina

Entonces el razonamiento simbolizado anteriormente diría:

Si usted es un ciudadano de Ushuaia, entonces usted es un ciudadano argentino.

Usted es un ciudadano argentino.

Por lo tanto usted es un ciudadano de Ushuaia.

Para cada ciudadano de Ushuaia las premisas son ciertas. Pero si hay un ciudadano de Buenos Aires $P \Rightarrow Q$ es verdadero pues

P	Q	$P \Rightarrow Q$
F	V	V

Q siempre es cierta. Pero la conclusión no es válida.

Luego hemos demostrado que el razonamiento no es válido. El razonamiento que acabamos de considerar es un ejemplo de un error corriente: el error de afirmar el consecuente.

Lo importante en la interpretación anterior, no era el contenido de P y de Q, sino sus valores de certeza posibles. Por lo tanto, para mostrar que una inferencia no es válida, se da una interpretación por medio de valores de certeza, y no se consideran proposiciones particulares.

Para demostrar que un razonamiento no es cierto, el diagrama se hace así: Se empieza colocando el valor de cada proposición atómica y luego se va resolviendo los términos de enlace de izquierda a derecha, respetando el orden de prioridades de los mismos.

Ejemplos:

P	Q	R	S
V	V	F	F

Evaluar:

$(P \wedge Q \Rightarrow P) \wedge (R \vee S)$

V V V F F

V F

V

F

çEjemplo: A B C
V F F

$((A \lor B) \land \neg B) \Rightarrow \neg(C \Rightarrow A)$

V F F F V

V V V

V F

F

<u>Conclusiones no válidas:</u> hasta ahora sólo hemos probado la validez de proposiciones, nos interesaremos ahora en poder probar cuando una conclusión no es consecuencia lógica de las premisas, o sea cuando una inferencia particular no es válida.

Veamos un ejemplo complejo:

1) $(P \land Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \lor S$ (Propos.)
2) $P \land \neg R$ (Propos.)

$\neg P \lor \neg Q$ (Conclus.)

P	Q	S	R
V	V	V	F

$(P \land Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \lor S$

V V V F V

V F

V

V

$P \land \neg R$

V F

V

V

$\neg P \lor \neg Q$

V V

F F

F

El método de asignación de certeza sirve para demostrar la invalidez de un razonamiento.

<u>Demostración condicional</u>: Al llegar a este punto en el estudio de la lógica estamos en condiciones de realizar demostraciones bastantes complicadas. Sin embargo hay deducciones muy simples que no es posible deducirlas con las reglas introducidas.

Un ejemplo, de una conclusión obvia que no puede deducirse toda es la siguiente:

Si José gana, entonces Luis es segundo.
Si Carlos es segundo, entonces Luis no es segundo.
Por lo tanto si Carlos es segundo, entonces José no gana.

Si simbolizamos tenemos:

P: José gana
Q: Luis es segundo
R: Carlos es segundo

$P \Rightarrow Q$
$R \Rightarrow \neg Q$

$R \Rightarrow \neg P$

Las reglas conocidas no son suficientes para probar la validez del razonamiento. También es imposible encontrar una asignación de certeza de tal forma que las premisas sean ciertas y la conclusión sea falsa.

Note que para que las premisas sean ciertas y la conclusión falsa, debe ser R y P verdaderas, y así una de las premisas también resulta falsa.

Cuando una conclusión no es válida, procedemos así:

1). Simbolizar premisas y conclusiones.

2). Asignar valores de certeza posibles para las proposiciones atómicas, de tal forma que todas las premisas sean ciertas y la conclusión sea falsa.

En el ejemplo:

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ Q \\ \hline P \end{array}$$

P	Q
F	V

La conclusión debe ser falsa, entonces P debe ser falsa, pero Q por ser premisa debe ser cierta.

<u>Nota:</u> primero se dan los posibles valores de certeza a las premisas y luego se ve que pasa con la conclusión.

$P \Rightarrow Q$ resulta <u>cierta</u>

F V

V

$$\left.\begin{array}{ll} P \Rightarrow Q & V \\ Q & V \end{array}\right\} \text{premisas}$$

$$\left.\begin{array}{ll} P & F \end{array}\right\} \text{conclusión}$$

Hemos podido obtener valor de certeza de las premisas ciertas y valor de la conclusión falsa. Este método se denomina Asignación de certeza.

Otro menos frecuente con que se cuenta en la práctica, es negar el antecedente.

Ejemplo:

Si hoy es sábado, entonces mañana es domingo.
Hoy no es sábado.
Por lo tanto mañana no es domingo.

La condición es de hecho cierta cuando se afirma el antecedente. Pero si se niega, nada podemos decir del consecuente. El hecho de que sea cierta la conclusión en un ejemplo particular, no prueba la validez de la inferencia.

La forma del razonamiento es:

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \neg P \\ \hline \neg Q \end{array}$$

Demos valor de certeza y veamos que pasa:

P	Q
F	V

$\neg P$	$P \Rightarrow Q$
V	V

pero entonces $\neg Q$ es falsa

<u>La regla de las premisas:</u> (regla P) Permite introducir una nueva premisa en una demostración siempre que se desee. Esto en principio puede parecer falso, pues si se puede introducir cualquier premisa, en cualquier momento, pareciera que introduciendo las premisas convenientes, se podrá probar cualquier cosa que se desee.

La cuestión está, en que cada razonamiento lógico se apoya en todas las premisas que utiliza. Si se introduce una nueva premisa, la conclusión que se deduzca se apoyará sobre todas las premisas y no sólo de las originales.

Para ejemplificar un razonamiento de este tipo se utilizará el siguiente método: Cada vez que se introduzca una nueva premisa por la regla P, en la deducción, se moverá toda la demostración hacia la derecha. Esto mostrará que lo que se deduzca a partir de allí, dependerá de todas las premisas y no sólo de la original.

Volvamos al ejemplo anterior e introduzcamos por la regla P, la premisa R entonces:

1). $P \Rightarrow Q$
2). $R \Rightarrow \neg Q$
3). R se introduce esta proposición, a partir del 3, todo se corre hacia la derecha. Esto indica que R no es una premisa original.

---

4). $\neg Q$ PP (2,3)
5). $\neg P$ TT (1,4)

Vemos que si agregamos R, entonces por las leyes conocidas se puede inferir $\neg P$.

Entonces $\neg P$ se apoya sobre las premisas: $P \Rightarrow Q$, $R \Rightarrow \neg Q$ y R, y no sólo en 1) y 2).

La idea del razonamiento anterior podemos resumirla diciendo que: de las premisas originales, si se agrega R, entonces se deduce $\neg P$. O sea que lo que se intenta en definitiva es demostrar como cierta la proposición $R \Rightarrow \neg P$.

Así surge una nueva regla: la regla de la demostración condicional que se demuestra así:

Si es posible deducir una proposición S de otra proposición R y un conjunto de premisas, entonces se puede deducir del conjunto total de premisas la proposición condicional $R \Rightarrow S$.

En el ejemplo anterior se completa con:

1) $P \Rightarrow Q$
2) $R \Rightarrow \neg Q$
3) R

---

4) $\neg Q$PP (2,3)
5) $\neg P$TT (1,4)
6) $R \Rightarrow \neg P$ Condic. (3,5)

Si tenemos R y las premisas originales, entonces podemos deducir $\neg P$.

Otro ejemplo: demostrar $D \Rightarrow E$

1) $A \Rightarrow (B \Rightarrow E)$
2) $\neg D \vee A$
3) B

---

4)	D	P	a esto se lo llama demostración subordinada, pues si tenemos D, entonces demostraremos que:
5)	A	TP (2,4)	
6)	$B \Rightarrow E$	PP (1,5)	
7)	E	PP (3,6)	
8)	$D \Rightarrow E$	Cond.(4,7)	

Una proposición se puede introducir en cualquier momento de la demostración según la regla P.

Veamos el siguiente ejemplo: demostrar $P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow R)$

1) $S \wedge (\neg P \vee M)$
2) $M \wedge Q \vee R$

---

3)	$\neg P \vee M$	S (1)	
4)	P	P	
5)	M	TP (3,4)	
6)	$\neg Q$	P	
7)	$Q \vee R$	PP (2,5)	
8)	R	TP (6,7)	
9)	$\neg Q \Rightarrow R$	Cond (7,8)	
10)	$P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow R)$	Cond (4,9)	

primera demostración subordinada

segunda demostración subordinada a la primera demost.

Nota: después de la línea 9 no podrán utilizarse las líneas de 6 a 8, y después de 10, no podrán utilizarse las líneas de 4 a 9.

Consistencia: consideremos el siguiente ejemplo:

Juan es bueno y Juan no es bueno.

O sea $R \wedge (\neg R)$

Evidentemente una proposición de este tipo nunca puede ser cierta. A las proposiciones de este tipo se las denomina CONTRADICCIÖN.

Con diagramas de certeza se puede demostrar que una contradicción es lógicamente falsa.

$R \wedge \neg R$			$R \wedge \neg R$		
V		V	F		F
		F			V
	F			F	

Se dice que dos proposiciones son contradictorias si una es la negación de la otra.

Otro ejemplo de premisas que nunca pueden ser ciertas (las dos al mismo tiempo, o sea contradicciones) es:

$\neg(\neg S \vee S)$	P
$\neg\neg S \wedge \neg S$	DM

Notar que si en un momento de la demostración obtenemos una contradicción, entonces la deducción no puede ser lógicamente cierta.

Ejemplo:

1) $(S \Rightarrow R) \wedge \neg(\neg S \vee R)$	
2) $S \Rightarrow R$	S (1)
3) $\neg(\neg S \vee R)$	S (1)
4) $S \wedge \neg R$	DM (3)
5) S	S (4)
6) $\neg R$	S (4)
7) R	PP (2,5)
8) $R \wedge \neg R$	Adjunc.(7,6) contradicción

también hubiese podido $\neg S$ de TT de (2,6) y obtener la contradicción $S \wedge \neg S$.

Cada dos o más proposiciones que lógicamente no pueden ser ciertas a la vez se dice que son INCONSISTENTES.

En el ejemplo anterior, se dice que el conjunto de proposiciones obtenidas, es un conjunto inconsistente de premisas, y todas juntas implican una contradicción.

A veces es de interés deducir si un conjunto de proposiciones es consistente o inconsistente. Para demostrar que es inconsistente hay que llegar a una contradicción. El objetivo aquí es llegar a una expresión del tipo $\neg P \wedge P$.

<u>Demostración Indirecta:</u> Haciendo uso de demostración condicional y de la noción de contradicción se pude introducir un nuevo método de demostración, la demostración indirecta.

A esta demostración se la suele denominar demostración por contradicción o por reducción al absurdo.

Por Modus Tollendo Tollens se puede deducir la negación del antecedente de una condicional, cuando se sabe que el consecuente es falso. Si el consecuente es una contradicción, se sabe que es lógicamente falso. Así de $P \Rightarrow (Q \wedge \neg Q)$ se puede deducir $\neg P$. Esta es la ley del absurdo (Ab).

Ejemplo: supóngase que se desea demostrar $\neg P$.

1) $\neg Q \vee R$
2) $P \Rightarrow \neg R$
3) Q

---

4)	P	P
5)	$\neg R$	PP (2,4)
6)	$\neg Q$	TP (1,5)
7)	$Q \wedge \neg Q$	A (3,6)
8)	$P \Rightarrow Q \wedge \neg Q$	EP (4,7)
9)	$\neg P$	RAA

Esto es una demostración condicional. La premisa que se añade es la negación que se desea probar. En cada demostración indirecta, se deduce una contradicción (aquí en la línea 7) de la premisa añadida.

La regla de demostración indirecta se expresa por RAA: si se puede deducir una contradicción de un conjunto de premisas y de la negación de S (premisa que se agrega), entonces S puede deducirse del conjunto de premisas dado.

O sea que los pasos a seguir son:

1) Introducir la negación de la conclusión deseada como una nueva premisa.
2) De todo lo dado deducir una contradicción.
3) Sacar la conclusión deseada como una inferencia lógica deducida de las premisas originales.

Ejemplo: del siguiente conjunto de premisas demostrar $\neg B$.

1)	$Y \wedge B \Rightarrow S$	
2)	$\neg S \vee T$	
3)	$\neg T$	
4)	Y	
5)	B	P
6)	$Y \wedge B$	A (4,5)
7)	$\neg S$	TP (2,3)
8)	$\neg(Y \wedge B)$	TT (1,7)
9)	$(Y \wedge B) \wedge \neg(Y \wedge B)$	A (6,8)
10)	$\neg B$	RAA (5,9)

1)	$Y \wedge B \Rightarrow S$	
2)	$\neg S \vee T$	
3)	$\neg T$	
4)	Y	
5)	B	P
6)	$\neg S$	TP (2,3)
7)	$\neg(Y \wedge B)$	TT (1,6)
8)	$\neg Y \vee \neg B$	DL (7)
9)	$\neg B$	TP (8,4)
10)	$B \wedge \neg B$	A (5,9)
11)	$\neg B$	RAA (5,10)

Atención: en la línea 9 del segundo ejemplo, puede cortarse la demostración, pues hasta aquí la deducción depende de las premisas y no de la 8 y 4 solamente.

Aquí el mismo ejemplo se demostró de dos formas. También $\neg B$ se puede deducir de las cuatro primeras premisas en forma directa.

Hay distintas maneras para llegar a una conclusión, y ellas son válidas si se aplican las reglas permitidas. No existe ninguna regla general que nos diga exactamente cuándo se ha de usar una demostración directa y cuándo una indirecta.

En general se sugiere una indirecta, cuando de las premisas originales no se ve fácilmente el punto de partida para la demostración.

Aquí tal vez añadiendo una premisa, (la negación de la conclusión que se espera) se puede encontrar un lugar por donde empezar.

La teoría de la inferencia, de la que nos hemos ocupado hasta ahora, es la teoría Proposicional de la Inferencia.

Consistencia e Inconsistencia de Premisas:

Se dice que un conjunto de premisas es consistente si existe al menos una asignación de certeza tal que todas las premisas puedan ser ciertas al mismo tiempo. O sea si esto pasa, decimos que las premisas no son inconsistentes.

Decimos que un conjunto de premisas es inconsistente si no existe ninguna posibilidad de que todas las premisas sean ciertas al mismo tiempo.

A veces lo que interesa al tratar de probar la validez o invalidez de un razonamiento, es probar la consistencia o inconsistencia de las premisas.

Para demostrar que un conjunto de premisas es inconsistente, se debe llegar a una contradicción.

El método para saber si un conjunto de premisas es consistente, es el método d asignación de certeza.

Ejemplo: ver si es o no consistente el siguiente conjunto de premisas.

Si Juana es joven, entonces Rosa es vieja.
Si Rosa es vieja, entonces Marta es Joven.
Marta no es joven.

$J \Rightarrow L$
$L \Rightarrow M$
$\neg M$

Intentamos primero dar valores de certeza, para ver si todas ellas pueden ser verdaderas.

$\neg M$ debe ser cierta, entonces M es falsa.
Para que $L \Rightarrow M$ sea cierta debe ser L falsa.
Para que $J \Rightarrow L$ sea cierta debe ser J falsa.

M	J	L
F	F	F

Todas las premisas son ciertas, y luego el conjunto es consistente.

Certeza Lógica.

Una certeza lógica es una expresión que es cierta siempre, independientemente de la verdad de cada premisa particular. (ejemplo: las tautologías). Un ejemplo de certeza lógica es la identidad de una cosa respecto de sí misma.

Surge así la última regla.

Regla de certeza lógica (L): Una certeza lógica puede ser introducida en cualquier momento de una deducción. No depende de las premisas.

Así, añadir una certeza lógica en una demostración no es, pues, añadir una premisa, y está justificada por la regla lógica.

La necesidad de la regla de certeza lógica se ve en el siguiente ejemplo:

Demostrar: 2 + 1 = (1+1) +1

1) 2= 1+1
2) 2+1 = 2+1L (ley de certeza lógica)
3) 2+1 = (1+1) +1 I (2,1) (Identidad)

En 2 se introduce la identidad, 2+1=2+1, este término es uno de los que figura en la conclusión.

La regla L se puede usar también en la lógica proposicional.
Estúdiese esta demostración.

Demostrar $Q \vee R$:

1) $P \Rightarrow Q$
2) $\neg P \Rightarrow R$

---

3) $P \vee \neg P$ L (ley de certeza lógica,se ingresa una certeza lógica)
4) $Q \vee R$ SD (1,2,3)

En 3) se usa la tautología $P \vee \neg P$.

Tablas de Certeza.

Un método en general más conveniente que el diagrama para analizar los valores de certeza de proposiciones, es el de poner todas las posibilidades de certeza o falsedad en forma de una tabla.

Las tablas indican fácilmente si una proposición molecular es cierta o falsa si se conoce la certeza o falsedad de sus proposiciones atómicas.

Las tablas básicas ya fueron dadas anteriormente.

Negación

P	$\neg P$
V	F
F	V

Conjunción

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunción

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	V

Bicondicional

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Recordemos que: si una inferencia es válida, entonces en cada posible asignación de certeza, si las premisas son ciertas, la conclusión del razonamiento debe ser también cierta. Luego las tablas de certeza proporcionan todas las posibles asignaciones de certeza, y el método para comprobar la validez de cualquier inferencia es el siguiente:

1) Se escriben todas las combinaciones posibles de valores de certeza para las proposiciones atómicas incluidas en el ejemplo.
2) Se determinan los valores de certeza para todas las premisas, y para la conclusión del razonamiento.
3) Se buscan las líneas que presentan todas las premisas con proposiciones ciertas, si la conclusión es también cierta, para toda la línea, entonces el razonamiento es válido. Pero si hay alguna línea, para la cual todas las premisas son ciertas y la conclusión es falsa, el razonamiento no es válido, y la conclusión no es consecuencia lógica de las premisas .

Ejemplo: se utiliza una tabla de certeza para confrontar la validez de la regla del Modus Tollendo Ponens. Las premisas son de forma $P \vee Q$ y $\neg P$.

Luego hagamos la tabla:

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$
V	V	F	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

Primero se anotan todas las posibles combinaciones de las proposiciones atómicas que forman las proposiciones moleculares.

Si hay 2 proposiciones atómicas hay 2^2 combinaciones.

Si hay N proposiciones atómicas hay 2 a la N combinaciones.

Luego se da el valor posible a las proposiciones moleculares. A continuación se seleccionan las líneas, en que todas las premisas son ciertas. En nuestro caso las premisas son $P \vee Q$ y $\neg P$, entonces se selecciona la línea 3. Para que el razonamiento sea válido la conclusión debe ser cierta; la conclusión del razonamiento es Q.

Ejemplo: consideramos ahora el error de afirmar el consecuente en:

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ Q \\ \hline P \end{array}$$

P	Q	P⇒Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Nota: en la línea 1 y 3 las premisas son ciertas, pero en 1, P es V y en 3 es F, por lo tanto la inferencia es errónea.

Consideremos otro ejemplo:

De la proposición P ⇒ Q, queremos inferir la proposición ¬P ∨ Q. Se puede comprobar la validez de esta inferencia construyendo la tabla de certeza apropiada.

P	Q	P⇒Q	¬P	¬P ∨ Q
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Donde la premisa es cierta, la conclusión también es cierta, entonces la inferencia es válida.

Tautología: una proposición molecular es una tautología, si es cierta, cualesquiera que sean los valores de certeza de las proposiciones atómicas que la componen.

Ejemplo: la proposición P ∨ ¬P es una tautología, pues es cierta cualesquiera que sean los valores de verdad de P. Se puede ver esto mediante una tabla de verdad.

P	¬P	P∨¬P
V	F	V
F	V	V

Implicación tautológica y Equivalencia tautológica:

Definición: una proposición P, se dice que implica tautológicamente una proposición Q, si y sólo si la condicional P ⇒ Q es una tautología. Así una implicación tautológica es una tautología, cuando su forma es la de una proposición condicional.

Ejemplo: P ∧ Q ⇒ P es una implicación tautológica, pues cualesquiera que sean los valores de las proposiciones P y Q, P ∧ Q ⇒ P es siempre V , entonces es una tautología.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \Rightarrow P$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

La noción de implicación tautológica es importante en el estudio de inferencia, pues cada ejemplo de inferencia proposicional puede expresarse como una implicación tautológica.

En especial podemos presentar las 14 leyes vistas en la teoría de inferencia, como implicaciones tautológicas, donde el antecedente de la condicional se forma con la conjunción de todas las premisas dadas y el consecuente es por ende, la conclusión.

Ejemplo: Modus Tollendo Tollens: $(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$

$\neg P$	P	Q	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$
F	V	V	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	V	V	V	V

Por lo tanto, para cualquier valor de las premisas, la condicional es cierta, entonces es una tautología.

De la misma manera se pueden presentar las otras leyes con implicaciones tautológicas (o tautologías).

Otro ejemplo es cualquier razonamiento válido: demostrar $R \wedge S$

1) P
2) $P \Rightarrow Q$
3) $\neg Q \vee (R \wedge S)$

---

4) Q PP (1,2)
5) $R \wedge S$ TP (3,4)

Se puede construir la siguiente implicación tautológica:
$P \wedge (P \Rightarrow Q) \wedge (\neg Q \vee R \wedge S) \Rightarrow R \wedge S$.

De todo lo dicho surge que: a cada razonamiento proposicional corresponde una condicional y a cada condicional corresponde un razonamiento.

Luego podemos inferir de lo anterior lo siguiente: El razonamiento es válido, si y sólo si la condicional correspondiente es una tautología.

Hemos encontrado un método para ver si un ejemplo cualquiera de inferencia es o no válido: se construye la condicional como una conjunción de las premisas, y el consecuente es el resultado que se desea probar. Luego se hace una tabla de certeza, si la implicación es una tautología (o sea que para cualquier valor de certeza de las premisas la implicación resulta cierta), entonces la inferencia es válida. Si no es una tautología, es inválida.

Contingencia: es aquella cuya tabla de verdad tienen por lo menos un verdadero y por lo menos un falso.

Equivalencia de dos proposiciones: se dice que dos proposiciones son lógicamente equivalentes, si para cualquier posible asignación de certeza, las dos tienen el mismo valor de certeza. Para probar si dos proposiciones son equivalentes se usa una tabla de certeza.

Ejemplos de equivalencias:

a) P y $\neg\neg P$

P	$\neg P$	$\neg\neg P$
V	F	V
F	V	F

b) $A \wedge \neg B$ y $\neg(\neg A \vee B)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee B$	$\neg(\neg A \vee B)$	$A \wedge \neg B$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F

Examinemos la tabla de certeza para la bicondicional $P \Leftrightarrow Q$.

	P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1)	V	V	V
2)	V	F	F
3)	F	V	F
4)	F	F	V

Se ve que la bicondicional es cierta en las líneas 1 y 4, y es cuando P y Q tienen el mismo valor de certeza.

Esto conduce a la siguiente información: P $\Leftrightarrow$ Q es cierta si ambas proposiciones son equivalentes, y falsa si no lo son. Por esto a la bicondición se la suele llamar equivalencia. Pero como si P y Q son equivalentes, P $\Leftrightarrow$ Q es cierta siempre, entonces es una tautología; por eso también se suele llamar a la equivalencia o bicondicional, Equivalencia Tautológica.

TÉRMINOS Y PREDICADOS

La lógica de términos y predicados es también una lógica de las proposiciones, pero aquí la unidad de análisis no es el tipo de proposición (si es atómica o molecular), sino cada uno de los términos que estructuran a la proposición atómica.

La lógica de los términos constituye así un análisis mas profundo y detallado de las proposiciones, en especial de las que han sido consideradas como atómicas en la lógica proposicional.

Resumiendo, hasta ahora hemos examinado la forma lógica o estructura de las proposiciones moleculares, pero no se ha analizado la estructura de una proposición atómica.

Es fácil ver un ejemplo, que las leyes de inferencia vistas hasta ahora no permiten hacer todas las inferencias y deducir todas las conclusiones que se pueden pensar como válidas.

Ejemplo:

P	todos los B son A	P
Q	todos los A son C	P
R	todos los B son C	C

Con las leyes vistas hasta ahora no puede probarse la validez del razonamiento anterior.

Se necesitan nuevas reglas.

Nuestro estudio estará ahora concentrado en ver la estructura de una proposición atómica.

Hasta ahora no hay modo de simbolizar nombres propios, comunes, verbos, adjetivos o adverbios. Con lo conocido, no es posible indicar las distinciones gramaticales más comunes.

Introduciremos tres clases de expresiones, correspondientes a las muchas clases que se distinguen en la gramática de un lenguaje.

Consideraremos : - TERMINOS (individuos)

- PREDICADOS (propiedades de los individuos)

- CUANTIFICADORES

Nos ocuparemos de ver hasta qué punto podemos traducir oraciones del lenguaje cotidiano a un lenguaje que consiste únicamente en conectivos oracionales (términos de enlace), término, predicados, cuantificadores y paréntesis.

Nos interesaremos también en comparar la gramática de nuestro simbolismo lógico con la del lenguaje cotidiano.

DEFINICIÓN:

Término: Un término es una expresión con la que se nombra o designa un único objeto, también llamado individuo.

Consideremos las siguientes proposiciones atómicas:

a) Pedro trabaja
b) Mendoza es una provincia de la Argentina

c) El Amazonas es impenetrable

Los términos o individuos, son en estos ejemplos los denotados por los nombres propios Pedro, Mendoza, Amazonas, que son los sujetos gramaticales de las proposiciones correspondientes.

Mas adelante veremos que podemos ampliar la definición de termino

Veremos entonces que un termino puede ser un nombre (Ej. María) o una frase (Ej. “este libro”, “3+2”) o los pronombres (palabras yo, tu, este, aquel), que se refieren a un individuo o cosa particular.

Veamos otros ejemplos

Brasil es el mayor productor de café
Este paquete es pesado
1+1=2

Aquí los nombres son: Brasil y los números arábicos 1 y
2 Son descripciones “El mayor productor de café”
1+1
Este paquete.

Utilizaremos letras minúsculas para simbolizar los individuos o términos: a, b, c, etc.

Si simbolizamos algunos ejemplos anteriores tendremos

a) a trabajo
b) b es una provincia de la Argentina
c) c es impenetrable.

DEFINICION:

Predicado: Generalmente en proposiciones atómicas el sujeto de la proposición es un termino, y el predicado es el resto de la proposición que dice algo sobre el sujeto.

Ej. Sócrates es sabio
SUJETO PREDICADO

Desde el punto de vista gramatical es posible formar predicados de varios modos:

a) Un verbo solo
b) Un verbo con un adverbio
c) El verbo ser con un sustantivo o adjetivo

Ejemplos: a) Corre
b) Está nadando rápidamente
c) Es un hombre / Es pendenciero

Desde el punto de vista de la lógica no interesa la forma que tiene el predicado, y no hará diferencia para simbolizarlos.

Ejemplo: María es modista
Carlos lee
Inés es una alumna muy destacada
El Mississippi es un río de llanura

Para simbolizarlos se usan letras mayúsculas H, F, G, etc. Más adelante veremos que son también predicados desde el punto de vista lógico, expresiones que desde el punto de vista gramatical son sujetos y no predicados.

No todos los predicados desde el punto de vista lógico son predicados gramaticales.

Diremos que *predicado* es la parte de la proposición atómica que nos da una o más propiedades o características del término. La lógica de términos introduce una nueva calificación para las proposiciones.

Veremos ahora como simbolizar una proposición atómica:

Ejemplo: Juan es nadador
j = Juan S = nadador

Se simboliza Sj (que se lee S de j)

Las proposiciones atómicas pueden estar negadas
Ejemplo: Juan no es nadador $\neg$ Sj

En el caso de otras moleculares como:
Juan ríe y María está seria, que en la lógica proposicional se simboliza por $p \wedge q$, en la lógica cuantificacional se simboliza por $Fa \wedge Gb$

Ej. Si Mercedes es elegida capital del distrito, entonces Las Palmas y Maldonado perderán su importancia ($p \Rightarrow q \wedge r$) se simboliza por $Fa \Rightarrow (Gb \wedge Gc)$

Esteban es estudioso o inteligente $Fa \vee Ga$

Resumiendo: Lo que es muy importante y hay que tener muy en claro es la distinción en Términos y Predicados.
Recordemos que:
Términos: Son expresiones que nombran o describen algún objeto único. O sea se sabe qué objeto es, lo describe completamente.
Predicados: No nombran objetos pero dicen algo acerca de ellos, también suele decirse que los predicados describen objetos, pero lo hacen sólo parcialmente.
Son términos “este libro”, “aquella niña”, etc. aunque aquí hay nombres comunes (libro, niña, etc.) formando parte del término.
Un nombre común puede formar parte de un término cuando se lo usa para describir una cosa particular.El predicado no identifica a algo particular.

En lógica tenemos dos partes distintas de una proposición, en las que pueden aparecer nombres comunes. Estos pueden usarse para constituir términos (aquella niña) y para constituir predicados (es una niña).

FÓRMULAS ATÓMICAS Y VARIABLES

Consideremos las siguientes proposiciones atómicas:

a) Carlos es mecánico
b) Jorge es mecánico
c) Raúl es mecánico

Los tres tienen algo en común, afirman que un cierto individuo tiene la propiedad de ser mecánico. Para formular eso que tienen en común, podemos recurrir a la expresión:

d) x es mecánico

Donde a x se la denomina variable individual.

a), b) y c) eran proposiciones (pues eran verdaderas o falsas). En cambio d) no es una proposición, no podemos decir si es verdadera o falsa porque x no es ningún objeto particular.

A la expresión d) se la denomina formula atómica, ó función proposicional (ó cuasi proposición) y para simbolizarla usamos una letra mayúscula para el predicado y una minúscula para la variable. Ejemplo: M es mecánico $\Rightarrow$ Mx (se lee M de x)

Las formas Ma, Mb, y Mc que simboliza, por ejemplo las proposiciones a), b) y c), son casos de sustitución de Mx.

Un modo de convertir una función proposicional en una proposición es sustituyendo la variable por un nombre propio o algo que identifique un objeto determinado. O dicho de otro modo una función proposicional se transforma en una proposición si se sustituye una variable por una constante.

Ejemplo: x es par
Si reemplazamos x por 4 obtengo una proposición VERDADERA
Si reemplazamos x por 5 obtengo una proposición FALSA
Si reemplazamos x por 4+2 obtengo una proposición VERDADERA Si reemplazamos x por Juan obtengo una proposición FALSA.

Resumiendo: Podemos decir que, cada término dará lugar en la fórmula atómica o función proposicional a una proposición atómica, verdadera o falsa.
Usaremos para las variables las letras minúsculas z, y, z o x1, x2, etc., para no confundirla con la de los términos (a, b, c).
Para la lógica cuantificacional las variables se consideran también como términos, a pesar de no nombrar ni referirse a ningún objeto único.
Las variables son la clase de términos más importantes de la lógica matemática.

Ejemplo: x + y = y + x
TERMINO TERMINO

Por eso ampliaremos la definición de término a

DEFINICION:

Término: Un término es una expresión con la que se nombra o designa un único objeto, o es una variable que puede ser sustituida por una expresión que nombre o designe a un objeto único.

TERMINOS
- Variables
- Constantes
  - Nombres propios
  - Descripciones definidas

Constantes: Designan o nombran a un ente.

Variables: No nombran nada en particular.

Daremos ahora también una definición más rigurosa de fórmula atómica o función proposicional .

DEFINICION:

Fórmula atómica o función proposicional: Es un predicado solo, junto con un número apropiado de términos unido al mismo.

Antes de aclarar esta definición, haremos algunas consideraciones. Las funciones proposicionales pueden aparecer negadas. Ej.: x no es par, que se simboliza por $\neg$ Fx.

También pueden aparecer unidas por términos de enlace. Ej.: x es número par y y es negativo, que se simboliza por $Fx \wedge Gy$

Llamaremos ***formas cuantificacionales*** a las formas que contengan letras de predicado y letras de términos.

Vimos que: Fórmulas atómicas cuyos términos no utilizan variables son proposiciones atómicas, con términos de enlace, forman proposiciones moleculares, igual que en lógica proposicional. Fórmulas atómicas con variables también pueden cambiarse con términos de enlace, y se las llama fórmulas moleculares.

Ejemplos:

a) Si Miguel Angel fue un artista del Renacimiento, entonces Leonardo Da Vinci fue un artista del Renacimiento.
Simbolizado: Rx = x fue un artista del Renacimiento
m = Miguel Angel
l = Leonardo Da Vinci

$$Rm \Rightarrow Rl$$

b) Si x es mayor que 2 y 2 es mayor que z, entonces x es mayor que z
$x > 2 \wedge 2 > z \Rightarrow x > z$
Aquí al igual que antes, podemos simbolizar de esta manera (para expresiones matematicas)

CUANTIFICADORES UNIVERSALES Y EXISTENCIALES

Vimos que ciertas fórmulas que contienen variables no son verdaderas ni falsas.
Ej. 1) x es mecánico.

Si reemplazamos la variable por una constante obtenemos una proposición. Pero uno de los hechos más profundos de la lógica es que no solamente reemplazando variables por constantes obtendremos proposiciones que son verdaderas o falsas. Otro método igualmente importante es el de anteponer a 1) frases como “Para todo x” ó “Existe un x tal que”.

Así, de la formula “x es un avaro” (que no podemos decir si es verdadero o falso) podemos obtener una oración verdadera: “Existe una x tal que x es un avaro”, que tiene el mismo significado y aspecto menos extraño que “Hay avaros” y también podemos obtener la oración falsa “Para todo x, x es un avaro”, que tiene el mismo significado que “Todos son avaros”.

La frase “para todo x” ó “para cada x”, recibe el nombre de cuantificador universal.

La frase “existe un x”, “algún x”, etc. recibe el nombre de cuantificador existencial. Trataremos cada uno de ellos en forma particular.

CUANTIFICADOR UNIVERSAL:

El símbolo para el cuantificador Universal es una A al revés: $\forall$
Ejemplo: $(\forall x)\ (x > 0)$ y a este tipo de proposición se la denomina *proposición universal.*

Hay distintas formas de expresarlo gramaticalmente en castellano:

- Para todo x
- Para cada x
- Cada x
- Todo
- Cualquiera o cualquier cosa
- Sólo (Sólo insectos son las hormigas)

En una expresión del tipo $(\forall x)\ (x > 5)$, se da por supuesto que x es un número. El cuantificador universal en este caso, no se refiere a todas las cosas, sino sólo a todos los números. En la mayoría de los casos para los cuantificadores universales existe un Dominio de referencia.

Ciertas expresiones de cuantificación universal se utilizan para expresar simultáneamente una negación.

Ejemplo: Ninguno quiere víboras venenosas, que significa $(\forall x)$ (x **no** quiere víboras venenosas); simbolizando completamente sería $(\forall x)\ (\neg Lx)$.

La negación en este tipo de enunciados es una negación que surge del análisis de la estructura interna de las proposiciones.

Para la lógica proposicional “Ninguno es mecánico”, es simbolizado mediante P, sólo surge la negación al analizar sus componentes internos, o sea su estructura cuantificacional. Del mismo modo se simbolizan enunciados como “Nadie llega”, “Nada es útil” .

La siguiente lista resume las expresiones más comunes utilizadas para expresar a la vez un cuantificador y una negación:

- Para ningún x
- Ninguno
- Nadie
- Nada

CUANTIFICADOR EXISTENCIAL:

En el lenguaje cotidiano y en matemáticas, algunas proposiciones precedidas por las palabras:

- Algún
- Algunas cosas
- Algunos
- Algo
- Hay
- Hay cosas
- Existe
- Ciertas cosas, etc.

Ejemplo: Algo es rojo
Hay cosas rojas
Algunos son seres vivos
Hay cuanto menos una x tal que x = 0

Estas expresiones se llaman *cuantificadores existenciales* y se identifican por ∃.

Así pues la fórmula x > 0 se convierte en una oración verdadera cuando se le antepone el *cuantificador existencial* (∃x) (x > 0), y a este tipo de proposición se la denomina *proposición existencial*.

Como ocurre con el cuantificador universal, un cuantificador existencial antepuesto a la forma de una función proposicional, la convierte en la forma de una proposición.

Una proposición existencial es verdadera cuando hay por lo menos un caso de sustitución de la función proposicional que involucra a que sea verdadera, y son falsas cuando no hay ningún caso de sustitución que las haga verdaderas.

Las proposiciones existenciales pueden estar negadas, como por ejemplo “No es cierto que hay fantasmas”; esta proposición se simboliza por ¬P (en la lógica proposicional), y en ¬(∃x) (Fx).

Análogamente, a lo que ocurre con los cuantificadores Universales, hay proposiciones existenciales con negaciones internas, como por ejemplo “Algo no es mortal” (∃x) ¬(Fx).

Es importante notar que hay fórmulas que para convertirse en una proposición verdadera, necesitan más de un cuantificador. Ej.: (∃x) (x + y = z + 2), así dicha fórmula no es verdadera ni falsa, en cambio si colocamos: (∃x) (∃y) (∃z) (x + y = z + 2), obtenemos una proposición verdadera.

Se denominan proposiciones generales simples, las proposiciones que tienen un único predicado y son universales o existenciales. Las proposiciones generales simples pueden unirse mediante conectivas oracionales diádicas con proposiciones simples (atómicas), con funciones proposicionales y con otras proposiciones generales.

Simbolizamos los siguientes ejemplos:

a) Si la tierra gira, todo está en
movimiento Fa ⇒ (∀x) (Gx)

b) Si algo cae, todo se
moverá $(\exists x)\ Fx \Rightarrow (\forall x)\ Gx$

c) Si ninguno viene, Carlos se
irá $(\forall x)\ (\neg Fx) \Rightarrow Ga$

d) Todo está en movimiento y x está en
equilibrio $(\forall x)\ (Fx) \wedge Gx$

Esto es un ejemplo de una función proposicional, ya que Gx es una función, pues $(\forall x)$ no lo abarca.

Las proposiciones generales complejas son aquellas proposiciones universales o existenciales que poseen más de una letra de predicado bajo el alcance de un cuantificador universal o existencial.

Nosotros nos ocuparemos solamente de un tipo de estas proposiciones generales complejas, que son las llamadas Proposiciones categóricas. Hay cuatro tipos de proposiciones categóricas:

- 1er. Tipo: Universales afirmativas: Son ejemplos de este tipo los siguientes enunciados, que poseen un mismo significado:
-

a) Todas las hormigas son insectos
b) Cualquier hormiga es insecto
c) Las hormigas son insectos
d) Si algo es hormiga, entonces es insecto
e) Sólo insectos son las hormigas.

Pueden darse también enunciados equivalentes. Tomemos otro ejemplo de este tipo y analicémoslo.

"Cada hombre es un animal" (1)

Aquí hay 2 nombres comunes (hombre y animal), pero ninguno de ellos se usa para construir un término. Aquí hay 2 predicados en juego: Ser hombre, Ser animal (Hx Ax).

Todos estos ejemplos pueden expresarse por: "Para todo x, si x es hombre, entonces x es animal", "Para todo x, si x es hormiga, entonces x es insecto" y se simboliza por

$$(\forall x)\ (Hx \Rightarrow Ax)$$

La expresión (1) parecía una proposición general simple, pero hemos visto que analizando la estructura interna, se transforma en una molecular, y el motivo es que: Analizando la expresión vemos que hay 2 predicados, luego no puede ser una fórmula atómica, pues una fórmula atómica tiene 1 solo predicado. Las proposiciones de este tipo son verdaderas cuando todos los casos de sustitución de la función proposicional molecular $Fx \Rightarrow Gx$ son verdaderas; y son falsas cuando hay por lo menos un caso de sustitución que es falsa.

Nota: en este tipo de enunciados, así como en los que seguiremos presentando, no coincide el predicado gramatical con el predicado lógico, pues ser hormiga (por ejemplo, es para la lógica un predicado, tanto como ser insecto, mientras que gramaticalmente hormiga es sujeto).

La lógica tradicional simboliza este tipo de enunciados mediante el esquema:

Todo S es P

Al igual que las proposiciones generales simples, los enunciados de tipo A pueden darse negados, como por ejemplo: “No todos los elefantes son africanos” que se simboliza por $\neg(\forall x)$ $(Fx \Rightarrow Gx)$
NOTA: El termino de enlace utilizado es el *si… entonces*, y no otro. No confundir empleando y.

- 2er. Tipo: Universales negativas: Son ejemplos de este tipo
-

a) Ninguna hormiga es insecto
b) Las hormigas no son insectos
c) Nada que sea hormiga es insecto

y otros equivalentes. Todos ellos pueden escribirse como “Para todo x, si x es hormiga, entonces x no es insecto” y se simboliza por $(\forall x)$ $(Fx \Rightarrow \neg Gx)$

Tanto la condicional como la negación surgen del análisis interno de las proposiciones.

Como con los del tipo A, estos enunciados son verdaderos cuando todos los casos de sustitución de la función proposicional $Fx \Rightarrow \neg Gx$ son verdaderos, y son falsos cuando hay por lo menos un caso de sustitución falso.

La lógica tradicional los simboliza en la forma de:

Ningún S es P

También estos enunciados pueden darse negados, como por ejemplo “No es cierto que ningún elefante es asiático” $\neg(\forall x)$ $(Fx \Rightarrow \neg Gx)$

- 3er. Tipo: Existenciales afirmativas: Son ejemplos de este tipo
-

a) Algunos perros son negros
b) Ciertos perros son negros
c) Algún perro es negro
d) Hay perros negros

y otras posibles del mismo tipo. Todas ellas pueden expresarse como: “Existe por lo menos un x tal que x es negro” y se simboliza por $(\exists x)$ $(Fx \wedge Gx)$ (1)

Son casos de la cuantificación existencial de la función molecular “$Fx \wedge Gx$”

Notar que la conjunción es la conectiva oracional correcta pues registra más adecuadamente el significado de este tipo de proposición y no el condicional, pues el sentido de estos enunciados no es de afirmar que: “Existe por lo menos un x tal que x es perro, entonces x es negro”.

Estas expresiones serán verdaderas cuando hay al menos un caso de sustitución de la función proposicional $Fx \wedge Gx$ que es verdadera, y falso cuando no hay ningún caso de sustitución que las haga verdaderas.

La lógica tradicional los representa mediante:
Algún S es P.

Pueden aparecer negados como en el enunciado "No es cierto que hay vacas rojas" que se simboliza por $\neg(\exists x)\ (Fx \wedge Gx)$

- 4er. Tipo: Existenciales negativas: Son ejemplos de este tipo:

a) Algunos perros no son negros
b) Ciertos perros no son negros
c) Algún perro no es negro
d) Hay perros que no son negros

y algunas de otras formas que pueden expresarse por "Existe por lo menos un x tal que x es perro y x no es negro" y se simboliza $(\exists x)\ (Fx \wedge \neg Gx)$, donde tanto la conjunción como la negación surgen del análisis interno de los enunciados.

Son verdaderos cuando hay al menos un caso de sustitución de la función $Fx \wedge \neg Gx$ que es verdadero, y son falsos cuando no hay ninguno de ellos que sea verdadero.

En la lógica tradicional se traduce por

Algún S no es P

También pueden ser negados como el enunciado "No hay pájaros que no vuelan", que se simboliza por $\neg(\exists x)\ (Fx \wedge \neg Gx)$.

Las conectivas proposicionales binarias pueden unir estos distintos tipos de enunciados (1, 2, 3 y 4) entre sí, con las otras formas de proposiciones o fórmulas señaladas hasta ahora en múltiples combinaciones, como en los ejemplos siguientes:

a) Si todos los perros son vertebrados, Duque también es vertebrado
$((\forall x)\ (Fx \Rightarrow Gx)) \Rightarrow Ga$
Donde Fx: x es perro
Gx: x es vertebrado
a: Duque.
b) Si todos los perros son blancos, entonces no hay perros que no sean blancos. $((\forall x)\ (Fx \Rightarrow Gx)) \Rightarrow \neg(\exists x)\ (Fx \wedge \neg Gx)$

c) O la tierra es un planeta, o los planetas no tienen órbitas elípticas.
$Fa \vee (\forall x)\ (Fx \Rightarrow \neg Gx)$
Donde Fx: x es planeta
Gx: x tiene una órbita elíptica
a: tierra

ALCANCE DE UN CUANTIFICADOR - VARIABLES LIBRES Y LIGADAS

Hasta ahora hemos usado la expresión “Alcance de un cuantificador” en forma intuitiva, entendiendo por ella algo así como el área de influencia de un cuantificador o dominio de referencia.

Vamos ahora a dar una definición más precisa, mejor dicho, una regla.: Si un cuantificador no va seguido de un signo de puntuación ((, [, {), su alcance llega hasta la(s) variable(s) correspondiente(s) a la primera letra de predicado a su derecha.

$(\forall x)$ Fx
$(\forall x)$ $(Fx \Rightarrow Gx)$
$(\exists x)$ $[(Fx \vee Gx) \wedge Hx]$
$(\exists x)$ Fx $\wedge$ Gx

Las variables que caen bajo el alcance de un cuantificador se llaman *variables ligadas*.

Se llaman *variables libres* aquellas que, o bien no caen bajo el alcance de un cuantificador, o no tiene un cuantificador correspondiente.

DEFINICION:

Función proposicional: es aquella forma cuantificacional que tiene, por lo menos una variable libre.

Notemos que una variable puede ser tanto libre como ligada en la misma fórmula. Ej.: $(\exists x)$ Fx $\vee$ Gx

Cualquier incidencia dada de la variable es ligada o libre, pero no ambas cosas al mismo tiempo.

Las proposiciones generales complejas no categóricas:

La lógica tradicional limitaba su estudio al de las categóricas, sin embargo la lógica moderna reconoce otras formas cuantificacionales diferentes a las categóricas y que son:

- Mas de dos predicados:

a) Los gatos blancos son tranquilos, que se simboliza por $(\forall x)$ $(Gx \wedge Bx \Rightarrow Tx)$
Donde G: ser gato
B: ser blanco
T: ser tranquilo

b) Los gorriones tienen alas y pico, que se simboliza por $(\forall x)$ $(Gx \Rightarrow (Ax \wedge Px))$

c) Algunos líquidos, si son rojos son brillantes, se simboliza $(\exists x)$ $(Lx \wedge (Rx \Rightarrow Bx))$

- Cuando para simbolizarlas es necesario utilizar otras conectivas distintas a condicionales, conjunciones y negaciones. Pudiendo tener 2 o más predicados:

a) Todo está en movimiento si y sólo si es espacial $(\forall x)$ $(Mx \Leftrightarrow Ex)$

b) Todo es rojo o azul $(\forall x)$ $(Rx \vee Ax)$

c) Los animales son vertebrados o invertebrados $(\forall x)$ $(Ax \Rightarrow Vx \vee Ix)$

En algunos enunciados, hay predicados que al darse junto con otros, forman una unidad, y es incorrecto simbolizarlos con letras de predicados distintas. Ej.: Los buenos alumnos serán becados $(\forall x)$ $(Ax \Rightarrow Bx)$ Donde A: ser buen alumno. Aquí bueno no es un predicado independiente, sino que depende del predicado Alumno; ambos forman una unidad. Para más claridad, comparemos los enunciados.

a) Ciertos grandes dibujantes han sido famosos.
b) Ciertas mesas verdes son decorativas.
c)

Si bien aparentan ser de la misma forma, difieren en que mientras en a) *grandes dibujantes* deberá tomarse como un único predicado, en b) *mesa* y *verde*, son predicados separados:

a) $(\exists x)\ (Dx \wedge Fx)$
b) $(\exists x)\ ((Mx \wedge Vx) \wedge Dx)$

Hay algunos casos en que es difícil determinar si ciertos predicados forman una unidad, o si pueden tomarse por separado. Esto se debe a que el lenguaje ordinario no es demasiado preciso. La simbolización en esos casos dependerá de los propósitos que se persigan. Por ejemplo, si se trata de justificar la validez de un razonamiento, dependerá de la forma de las otras premisas y la conclusión.

LEYES LÓGICAS

Dijimos que las leyes lógicas son formas de enunciados cuyos casos de sustitución son siempre enunciados verdaderos.

En la lógica proposicional las únicas leyes eran la tautología; en la cuantificacional, las leyes son:

- En primer lugar, son las leyes de la lógica proposicional, pero para formas cuantificacionales.

Ej.: Ley de identidad

$p \Rightarrow p \qquad p \Leftrightarrow p \qquad p \wedge p \qquad p \vee p$

que en la lógica cuantificacional se expresa por:

$Fa \Rightarrow Fa \qquad (\forall x)\ (Fx \Rightarrow Fx) \qquad (\exists x)\ (Fx \Rightarrow Fx)$

$Fa \Leftrightarrow Fa \qquad (\forall x)\ (Fx \Leftrightarrow Fx) \qquad (\exists x)\ (Fx \Leftrightarrow Fx)$

- En segundo lugar están las leyes propias de la lógica cuantificacional que no se corresponden con ninguna ley proposicional y son las que involucran como parte esencial a los cuantificadores.

Enumeramos a continuación las más importantes:

a) Leyes de intercambio de cuantificadores:

1) $(\forall x)\ Fx \Leftrightarrow \sim(\exists x) \sim Fx$
2) $(\exists x)\ Fx \Leftrightarrow \sim(\forall x) \sim Fx$
3) $\sim(\forall x)\ Fx \Leftrightarrow (\exists x) \sim Fx$
4) $\sim(\exists x)\ Fx \Leftrightarrow (\forall x) \sim Fx$
5) $(\forall x)\ (Fx \Rightarrow Gx) \Leftrightarrow \sim(\exists x)\ (Fx \wedge \sim Gx)$
6) $(\forall x)\ (Fx \Rightarrow \sim Gx) \Leftrightarrow \sim (\exists x)\ (Fx \wedge Gx)$
7) $(\exists x)\ (Fx \wedge Gx) \Leftrightarrow \sim (\forall x)\ (Fx \Rightarrow \sim Gx)$

8) $(\exists x)\ (Fx \wedge \sim Gx) \Leftrightarrow \sim (\forall x)\ (Fx \Rightarrow Gx)$

b) Leyes de distributividad de cuantificadores:

1) $(\forall x)\ (Fx \wedge Gx) \Leftrightarrow (\forall x)\ Fx \wedge (\forall x)\ Gx$
2) $(\exists\ x)\ (Fx \vee Gx) \Leftrightarrow (\exists x)\ Fx \vee (\exists x)\ Gx$
3) $(\forall x)\ Fx \vee (\forall x)\ Gx \Rightarrow (\forall x)\ (Fx \vee Gx)$
4) $(\exists x)\ (Fx \wedge Gx) \Rightarrow (\exists x)\ Fx \wedge (\exists x)\ Gx$

c) Ley de subalternación

$(\forall x)\ Fx \Rightarrow (\exists x)\ Fx$

Veamos ahora algunos ejemplos de intercambio de cuantificadores:

En general las primeras cuatro reglas pueden enunciarse así:

- 1º Una proposición universal es equivalente a otra existencial con una negación a la izquierda y otra a la derecha del cuantificador que afecta a toda la expresión.

Ej. $(\forall x)\ Fx \Leftrightarrow \neg(\exists x)\ \neg Fx$
$(\forall x)\ (Fx \Rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg(\exists x)\ \neg(Fx \Rightarrow Gx)$
$\vee$
$\wedge$
$\Leftrightarrow$

Ej. “Todo es espacial” es equivalente a “No hay cosas que no sean espaciales”.

- 2º Una proposición existencial es equivalente a otra universal con una negación a la izquierda y otra a la derecha del cuantificador que afecta a toda la proposición.

Ej. $(\exists x)\ Fx \Leftrightarrow \neg(\forall x)\ \neg Fx$
$(\exists x)\ (Fx \wedge Gx) \Leftrightarrow \neg(\forall x)\ \neg(Fx \wedge Gx)$

Ej. “Hay cosas espaciales” es equivalente a “No es cierto que nada es espacial”

- 3º Una proposición universal negada es equivalente a otra existencial con una negación a la derecha del cuantificador que afecta a toda la expresión que le sigue.

Ej.$\neg(\forall x)\ Fx \Leftrightarrow (\exists x)\ \neg Fx$
$\neg(\forall x)\ [(Fx \wedge Gx) \Rightarrow Hx] \Leftrightarrow (\exists x)\ \neg[(Fx \wedge Gx) \Rightarrow Hx]$

Ej. “No todo es espacial” es equivalente a “Algunas cosas no son espaciales”

- 4º Una proposición existencial negada equivale a otra universal con una negación a la derecha del cuantificador, que afecta a toda la expresión siguiente.

Ej.$\neg(\exists x)\ Fx$ es equivalente a $(\forall x)\ (\neg Fx)$
$\neg(\exists x)\ (Fx \wedge Gx) \Rightarrow (\forall x)\ \neg(Fx \wedge Gx)$

Ej. “No hay cosas espaciales” equivale a “Ninguna cosa es espacial” ó
“No hay niños malos” es equivalente a “Ningún niño es malo”.

<u>Razonamientos con predicados monádicos:</u>

Son del tipo	**Los gorriones son aves**	p
	<u>Las aves tienen pico</u>	<u>q</u>
	Los gorriones tienen pico	r

En la lógica proposicional se simbolizará:

$(\forall x)\ (Fx \Rightarrow Gx)$
$\underline{(\forall x)\ (Gx \Rightarrow Hx)}$
$(\forall x)\ (Fx \Rightarrow Hx)$

Veremos ahora los procedimientos de prueba propios de la lógica cuantificacional.

Método demostrativo: O sea se usarán todas las reglas vistas en la lógica proposicional y se agregarán otras, y se podrán usar las equivalencias vistas hasta ahora.

Tomaremos un par de ejemplos y trataremos de dar demostraciones de razonamientos:

Ejemplo a: $(\forall x)\ (Fx \Rightarrow Gx)$ implica $\neg(\exists x)\ (Fx \wedge \neg Gx)$

Demostración:
1) $\underline{(\forall x)\ (Fx \Rightarrow Gx)}$
2) $\neg(\exists x)\ \neg(Fx \Rightarrow Gx)$ Ley de intercambio de cuantif. (1)
3) $\neg(\exists x)\ \neg(\neg Fx \vee Gx)$ Ley 15 (2)
4) $\neg(\exists x)\ (Fx \wedge \neg Gx)$ Ley De Morgan (3)

Ejemplo b: $\neg(\exists x)\ (Fx \wedge \neg Gx)$ implica $(\forall x)\ (Fx \Rightarrow Gx)$

Demostración
1) $\underline{\neg(\exists x)\ (Fx \wedge \neg Gx)}$
2) $(\forall x)\ \neg(Fx \wedge \neg Gx)$ Ley de intercambio de cuantif. (1)
3) $(\forall x)\ (\neg Fx \vee Gx)$ Ley De Morgan (2)
4) $(\forall x)\ (Fx \Rightarrow Gx)$ Ley 15 (3)

Ejemplo c: Si todo es fácil y agradable, María no estudiará.
No hay cosas que no sean agradables.
Todo es fácil.
Luego, María no estudiará.

Demostración
1) $(\forall x)\ (Fx \wedge Ax) \Rightarrow \neg Ea$
2) $\neg(\exists x)\ \neg Ax$
3) $\underline{(\forall x)\ Fx}$
4) $(\forall x)\ Ax$ Intercambio de cuantificadores (2)
5) $(\forall x)\ Ax \wedge (\forall x)\ Fx$ Conjunción (3,4)
6) $(\forall x)\ (Ax \wedge Fx)$ Ley Distrib de cuantificadores
7) $\neg\ Ea$ Ponendo ponens (6,1)

Ejemplo d: Todos los cuervos son negros y tienen pico.
Luego, todos los cuervos son negros y todos los cuervos tienen pico.

Demostración:
1) $\underline{(\forall x)\ (Cx \Rightarrow Nx \wedge Px)}$
2) $(\forall x)\ (\neg Cx \vee (Nx \wedge Px)$ Ley 15 (1)
3) $(\forall x)\ ((\neg Cx \vee Nx) \wedge (\neg Cx \vee Px))$ Ley Distrib.
4) $(\forall x)\ (\neg Cx \vee Nx) \wedge (\forall x)\ (\neg Cx \vee Px))$ Ley Distrib.
5) $(\forall x)\ (Cx \Rightarrow Nx) \wedge (\forall x)\ (Cx \Rightarrow Px)$.

REGLAS DE EJEMPLIFICACIÓN Y GENERALIZACIÓN

Restan agregar otras cuatro a la lista de reglas del método demostrativo para la lógica cuantificacional.

1) **Ley de ejemplificación Universal (EU)**: Cualquier cosa que sea cierta para todo objeto dentro de un dominio, es cierto para cualquier objeto dado de ese dominio. O sea, dado un enunciado que sea cuantificador universal de una función proposicional, se infiere cualquier caso de sustitución de la misma (variables o constantes).

Ej. $\dfrac{(\forall x)\ Fx}{Fy}$ $\qquad \dfrac{(\forall x)\ Fx}{Fa}$ $\qquad \dfrac{(\forall x)\ (Fx \Rightarrow Gx)}{Fb \Rightarrow Gb}$ $\qquad \dfrac{(\forall x)\ (Fx \Rightarrow Gx)}{Fx \Rightarrow Gx}$

2) **Ley de generalización universal (GU)**: De una verdad aplicable a un objeto arbitrariamente elegido en un cierto dominio, puede inferirse una verdad aplicable a todos los objetos de un cierto dominio. O sea, a partir de una función proposicional que tenga cualesquiera de sus casos de sustitución verdaderos, se infiere la cuantificación universal de dicha función.

Ej.: $\dfrac{Fy}{(\forall x)\ Fx}$ $\qquad \dfrac{Fx \Rightarrow Gx}{(\forall x)\ Fx \Rightarrow Gx}$

De estas dos leyes se da una idea, pues una formulación exacta escapa de los alcances de este curso.

Ejemplo a: Todos los gatos maúllan.
Pompón es un gato.
Luego, Pompón maúlla.

Demostración:

1) $(\forall x)\ (Gx \Rightarrow Mx)$.	
2) $\underline{Ga}$	
3) $Ga \Rightarrow Ma$	EU (1)
4) Ma	PP (2,3)

Ejemplo b: Todos los porteños son argentinos
Todos los argentinos son americanos
Luego, todos los porteños son americanos

Demostración:

1) $(\forall x)\ (Px \Rightarrow Ax)$	
2) $\underline{(\forall x)\ (Ax \Rightarrow Mx)}$	
3) $Px \Rightarrow Ax$	EU (1)
4) $Ax \Rightarrow Mx$	EU (2)
5) $Px \Rightarrow Mx$	S.H. (3,4)
6) $(\forall x)\ (Px \Rightarrow Mx)$	G.U. (5)

3) **Ejemplificación existencial (EE)**: Dado un enunciado, que sea la cuantificación existencial de una función proposicional, se infiere de él un caso de sustitución de la función proposicional, con la restricción de que se utilicen constantes que no hayan aparecido antes.

Ej.: $\dfrac{(\exists x)\ Fx}{Fw}$ $\qquad$ $\dfrac{(\exists x)\ (Fx \wedge \neg Gx)}{Fw \wedge \neg Gw}$

donde w es una constante ambigua, que denota a un individuo determinado, pero no lo especifica.
La restricción indicada tiene la función de evitar la siguiente inferencia inválida:

Ej. Algunos hombres son inteligentes
Luego, Pedro es inteligente

Demostración: 1) $\underline{(\exists x)\ (Hx \wedge Ix)}$
2) $Fa \wedge Ia$ No es válido ejemplificar por a (Pedro), la

puesto que la constante *a* ya ha aparecido en la conclusión, la restricción impide que se la utilice en el paso 2).

4) **Generalización existencial (GE)**: A partir de una cuantificacional (función o proposición) se puede inferir la cuantificación existencial de la misma.

Ej.: $\dfrac{Fy}{(\exists x)\ Fx}$ $\qquad$ $\dfrac{Fx}{(\exists x)\ Fx}$ $\qquad$ $\dfrac{Fa}{(\exists x)\ Fx}$ $\qquad$ $\dfrac{Fa \vee \neg Ga}{(\exists x)\ (Fx \vee \neg Gx)}$

Veremos algunos ejemplos de razonamiento en cuya prueba se utilizan estas reglas.

Ejemplo a: Algunas cosas rojas son profundas.
Puesto que algunas cosas rojas son flores
Todas las flores son perfumadas.

Demostración:

1) $(\exists x)\ (Rx \wedge Fx)$	
2) $\underline{(\forall x)\ (Fx \Rightarrow Px)}$	
3) $Rw \wedge Fw$	EE (1)
4) $Fw \Rightarrow Pw$	EU (2)
5) Fw	Simp (3)
6) Pw	PP (4,5)
7) Rw	Simp (3)
8) $Rw \wedge Pw$	Conj (5,7)
9) $(\exists x)\ (Rx \wedge Px)$	GE (8)

NOTA: Siempre que en la prueba de un razonamiento haya que aplicar EE y EU como en este caso, se debe aplicar primero EE que es la que tiene restricciones y luego EU.

Ejemplo b: Los perros son vertebrados y mamíferos.
Algunos perros son guardianes.
Luego, algunos vertebrados son guardianes.

Demostración:

1) $(\forall x)\ (Px \Rightarrow Vx \wedge Mx)$	
2) $(\exists x)\ (Px \wedge Gx)$	
3) $Pw \wedge Gw$	EE (2)
4) $Pw \Rightarrow Vw \wedge Mw$	EU (1)

5) Pw	Simp (3)
6) $Vw \wedge Mw$	PP (4,5)
7) Vw	Simp (4)
8) Gw	Simp (3)
9) $Vw \wedge Gw$	Conj (7,8)
10) $(\exists x)\ (Vx \wedge Gx)$	GE (9)

Ejemplo c: Cada número positivo es mayor que cero.
1 es positivo.
3 es positivo.
Por tanto, 1 y 3 son mayores que cero.

Demostración:

1) $(\forall x)\ (Px \Rightarrow x > 0)$		
2) P1		
3) P3		
4) $P1 \Rightarrow 1 > 0$	EU (1)	
5) $1 > 0$		PP (2,4)
6) $P3 \Rightarrow 3 > 0$	EU (1)	
7) $3 > 0$		PP (3,6)
8) $(1 > 0) \wedge (3 > 0)$		Adj (5,7)

En este ejemplo no sólo se puede reemplazar x por un número, también se puede reemplazar por una expresión , 2+1, 4-1, etc. (siempre que la expresión denote un número) .

Ejemplo d: Ningún pato quiere bailar.
No hay marinero que no quiera bailar.
Todas las aves de mi corral son patos.
Luego, ninguna de las aves de mi corral es marinero.

Demostración:

1) $(\forall x)\ (Px \Rightarrow \neg Bx)$		
2) $(\forall x)\ (Mx \Rightarrow Bx)$		
3) $(\forall x)\ (Ax \Rightarrow Px)$		
4) $Px \Rightarrow \neg Bx$		EU (1)
5) $Mx \Rightarrow Bx$		EU (2)
6) $Ax \Rightarrow Px$		EU (3)
7)	Ax	Ley premisa
8)	Px	PP (6,7)
9)	$\neg Bx$	PP (4,8)
10)	$\neg Mx$	TT (9,5)
11) $Ax \Rightarrow \neg Mx$		L. condicional
12) $(\forall x)\ (Ax \Rightarrow \neg Mx)$ GU (11)		

Las reglas elegidas son como en la lógica proposicional, sobreabundantes. Es posible reducirlas a un conjunto más limitado, pero en la medida en que se dispone de más reglas, más fácilmente se construyen las pruebas de validez.

Hay distintas formas de demostrar la validez de un razonamiento, dependiendo de cómo se combinen las leyes a usar.

La limitación del método demostrativo, es la misma en la lógica proposicional que en la cuantificacional, y es que: si no logramos demostrar que un razonamiento es válido mediante el método demostrativo, eso no nos permite inferir que sea inválido. Para demostrar la invalidez, se puede usar el método de analogía lógica.

PREDICADOS MONADICOS Y POLIADICOS. GRADO DE UN PREDICADO

Los predicados vistos hasta ahora eran monádicos.

- Predicado monádico: es aquel predicado que se aplica a un único individuo, ya sea constante, variable libre o variable cuantificada.

- Predicado poliádico: es aquel que involucra 2 o más individuos.

Nos ocuparemos ahora de éstos últimos.Consideremos los siguientes ejemplos:

a) Pedro admira a Inés.
b)Quilmes está entre Buenos Aires y La Plata.
c)Marta cuida a sus hijos.
d)La Tierra gira alrededor del Sol.
e)Asia está más poblada que Europa.

En a) "admirar a" es un predicado que involucra a 2 individuos, en este caso Pedro e Inés.
Todos los demás casos son ejemplos de predicados que involucran a 2 individuos. Se llaman diádicos.
En el ejemplo "Carlos y Daniel son hermanos", se simboliza por Carlos es hermano de Daniel y viceversa.

f) Carlos viajará de Buenos Aires a Mar del Plata.
g) La maestra lee El Quijote a sus alumnos.

Los predicados que involucran a 3 términos se llaman triádicos.

h) Juan, Carlos, Pepe y José juegan juntos.

Los predicados que involucran 4 términos se llaman tetrádicos. Si algún predicado involucra a más de 4 términos, se llama n-ádico.

Se llama *grado de un predicado* al número de individuos a que se aplica dicho predicado.

En cuanto a la simbolización, los predicados poliádicos se simbolizan de la misma forma que los monádicos, y los individuos se representan igualmente por constantes o variables, según corresponda.

Es muy importante el orden en que figuran las letras que representan a los individuos.

Ej.: Juan es mayor que Rodolfo
a: Juan
b: Rodolfo
F: Ser mayor
que $Fab \neq Fba$

Ej.: Luis no ama a Carmen $\neg Flc$
Jorge es más joven que Luis y Luis es más joven que Darío $Fjl \wedge Fld$

Hasta ahora hemos visto sólo proposiciones con predicados poliádicos. Veremos ahora funciones.

FUNCIONES PROPOSICIONALES Y PROPOSICIONES GENERALES

Habíamos definido función proposicional como aquella expresión que contenga por lo menos una variable libre.

También podemos tener funciones con predicados poliádicos.

Ej.:	Ana ama a x	Fax
	Fulano visita a Mengano	Fxy
	x > a	Fxa
	x > y	Fxy

También las variables pueden estar afectadas por cuantificadores. Aquí vale lo mismo que antes: Si todas las variables caen bajo el alcance de un cuantificador, representará un enunciado general. Si en cambio, hay por lo menos una variable libre, será función proposicional.

Ej.:	a) Todos admiran a Pedro	$(\forall x)$ Fxa
	b) Pedro admira a alguien	$(\exists x)$ Fax
	c) Todos los matemáticos admiran a Euclides	$(\forall x)$ (Mx $\Rightarrow$ Axe)
	d) Daniel aprende de algún profesor	$(\exists x)$ (Px $\wedge$ Fdx)
	e) Todos aman u odian a Luis	$(\forall x)$ (Fxa $\vee$ Gxa)

<u>Dos o más cuantificadores</u>

No se pueden hacer muchas matemáticas y otros razonamientos matemáticos utilizando sólo un cuantificador en cada proposición, pues en matemática siempre se trabaja con relaciones entre dos o más objetos. Es extremadamente sencillo extender todo lo que ha hecho, incluyendo proposiciones que contengan más de un cuantificador universal o existencial, siempre que los cuantificadores se encuentren al principio de la proposición.

Ej.: Para cada x e y, si x > y entonces no ocurre que y sea mayor que x.
$(\forall x)\ (\forall y)\ (x > y \Rightarrow \neg(y > x))$

Ej.: Cada hombre es más viejo que cada muchacho.
$(\forall x)\ (\forall y)\ (Hx \wedge My \Rightarrow Vxy)$

Ej.: Sólo un tonto alimentaria a un oso salvaje.
Cristina alimenta a Nicolás, pero no es tonta.
Luego, Nicolás no es un oso salvaje.

1) $(\forall x)\ (\forall y)\ (Axy \wedge Oy \Rightarrow Tx)$
2) $\underline{Acn \wedge \neg Tc}$

3) $Acn \wedge On \Rightarrow Tc$	EU (1) x/c y/n
4) $\neg Tc$	Simp (2)
5) $\neg(Acn \wedge On)$	TT (3,4)
6) $\neg Acn \vee \neg On$	De Morgan (5)
7) Acn	Simp (2)
8) $\neg On$	TP (6,7)

No está limitado a 2 cuantificadores, se pueden usar más, tantos como sea necesario.

Ej.: Demostrar: 3 > 1

1) $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (x > y \wedge y > z \Rightarrow x > z)$
2) $2 > 1$
3) $\underline{3 > 2}$
4) $3 > 2 \wedge 2 > 1 \Rightarrow 3 > 1$ EU (1) x/3 y/2 z/1
5) $3 > 2 \wedge 2 > 1$ Adj (2,3)
6) $3 > 1$ PP (4,5)

Ej. La hermana de la madre de cada muchacho es su tío

$(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (\ Fxy \wedge Hxz \wedge My \Rightarrow Tzy)$

LÓGICA DE IDENTIDAD

En castellano se suelen poner formas del verbo **ser** entre dos términos para indicar que nombran o se refieren a la misma cosa.

Ej. Menem es el presidente de Argentina.
Carlos VI es el rey de España.

Es decir, a) Menem nombra o indica la misma cosa que "presidente de Argentina".
h) Menem es la misma cosa que el presidente de los argentinos

Se simboliza por a = p. *El signo = se denomina en lógica, signo de identidad.*

En la identidad hay que ser muy cuidadosos, pues el verbo ser también se utiliza para otras formas.

Ej. : Menem es un hombre.
Las mujeres son personas inteligentes.

Para decidir cuándo el verbo *ser* da una identidad, conviene traducirla en la forma a) o b) y ver qué pasa.

Hay que recordar que el signo de identidad se coloca sólo entre dos términos que nombran o describen la misma cosa, o expresiones que se refieren a una misma cosa. Por lo tanto, 2 cosas distintas no pueden ser una misma cosa.

Ej.: 2 lápices de la misma caja (Este lápiz = a este otro lápiz : **falso**)

La identidad juega un papel importante en la lógica matemática .

Ej.:
1) $2 > 1$
2) $2 = 1 + 1$
3) $1 + 1 > 1$ Ident (1,2)

La línea 3) se obtiene sustituyendo 2 por 1 + 1, pues se hace uso de la regla de identidad que dice que 2 y 1 + 1 es la misma cosa.

Ej.: 1) $(\forall x)\ (\forall y)\ (x > y \Rightarrow x + 1 > y)$
2) $1 > 0$
3) $\underline{2 = 1 + 1}$
4) $1 > 0 \Rightarrow 1 + 1 > 0$ EU (1) x/1, y/0
5) $1 + 1 > 0$ PP(2,4)
6) $2 > 0$ Ident (3,5)

Definición: Si se tiene la identidad a = c, entonces a puede sustituirse por c o viceversa en cualquier fórmula o expresión que aparezca.

Ej.: El agente que encontró la carta estaba en el departamento.
Ahora, cualquiera que estaba en el departamento, estaba en la ciudad.
Si alguien estaba en México no estaba en la ciudad.
En efecto, Higinio estaba en México.
Por tanto, Higinio no es el agente que encontró la carta.

1) Da
2) $(\forall x)\ (Dx \Rightarrow Cx)$
3) $(\forall x)\ (Mx \Rightarrow \neg Cx)$
4) $\underline{Mh}$
5) $Mh \Rightarrow \neg Ch$ EU (3) x/h
6) $\neg Ch$ PP (4,5)
7) $Dh \Rightarrow Ch$ EU (2) x/h
8) $\neg Dh$ TT (6,7)
9) $h = a$ Ley premisa
10) $\neg Da$ Ident (8,9)
11) $Da \wedge \neg Da$ Adj (1,10)
12) $h \neq a$