SERIES NUMERICAS INFINITAS

Una *serie infinita* es la suma de una sucesión infinita de números. Por ejemplo:

$$2+4+6+8+10+\ldots \qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots. \qquad 0,3+0,03+0,003+0,0003+\ldots$$

En general, se expresa:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots.+a_n+\ldots.$$

O en forma abreviada usando la notación de sumatoria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ , o simplemente, } \sum a_n$$

Los ejemplos anteriores se pueden expresar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 3.(0,1)^n$$

La serie geométrica

En el tercer ejemplo, vemos que cada término se obtiene multiplicando al anterior por 0,1. Dicha suma se llama serie geométrica. Una serie geométrica es aquella en la cual cada término es igual al anterior multiplicado por un factor constante llamado razón de la serie.

Una *serie geométrica finita* tiene la forma:

$$a+aq+aq^2+aq^3+\ldots\ldots..+aq^{n-1} \qquad \begin{cases} a : \text{primer termino} & a \neq 0 \\ q : \text{razon} \end{cases}$$

Una *serie geométrica infinita* tiene la forma:

$$a+aq+aq^2+aq^3+\ldots\ldots..+aq^{n-1}+aq^n+\ldots$$

Suma de una serie geométrica finita

Si representamos con S_n, la suma de los primeros n términos, tendremos:

$$S_n = a+aq+aq^2+aq^3+\ldots\ldots..+aq^{n-1}.$$

S_n es un ejemplo de una *suma parcial*. Las primeras cuatro sumas parciales son:

$$S_1 = a$$
$$S_2 = a+aq$$
$$S_3 = a+aq+aq^2$$
$$S_4 = a+aq+aq^2+aq^3$$

Si multiplicamos S_n por q :

$$q.S_n = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \text{.........} + aq^n$$

Luego restamos $q.S_n$ de S_n

$$S_n - q.S_n = a + a.q + a.q^2 + a.q^3 + \text{.......} + a.q^{n-1} - (a.q + a.q^2 + a.q^3 + \text{.......} + a.q^{n-1} + a.q^n)$$

Cancelando los términos correspondientes, resulta:

$$S_n - q.S_n = a - a.q^n \quad \Rightarrow \quad S_n(1-q) = a\left(1-q^n\right)$$

Si $q \neq 1$, podemos despejar S_n :

La **suma de una serie geométrica finita** está dada por

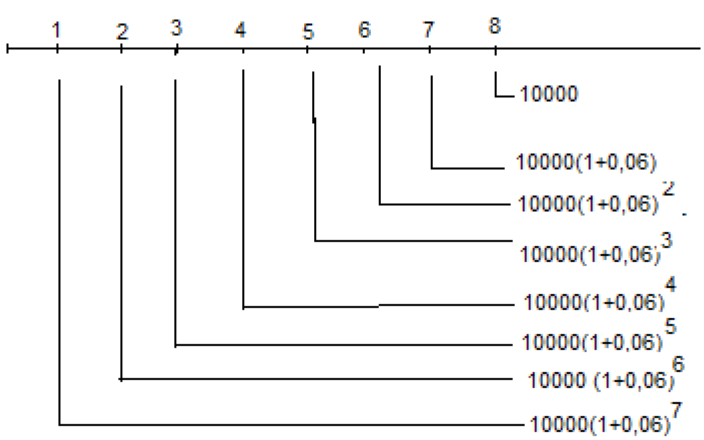
$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \text{.........} + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \qquad q \neq 1$$

Ejemplo 1

Se depositan 10.000 dólares al final de cada año en una cuenta de ahorros que da una ganancia de 6 % anual, compuesto anualmente. ¿Qué cantidad de dinero se obtiene en la cuenta de ahorros después del octavo depósito?

Solución

Haciendo un esquema de la situación:



La cantidad de dinero que se obtiene luego del octavo depósito, resultará de sumar cada una de las cifras anteriores, esto es:

$$S_8 = 10000 + 10000(1{,}06) + 10000(1{,}06)^2 + 10000(1{,}06)^3 + \ldots + 10000(1{,}06)^7$$

En esta expresión se observa que cada término de la suma, es igual al anterior multiplicado por un valor constante: 1,06. Con lo cual podemos asegurar que dicha expresión corresponde a una serie geométrica donde el primer término es 10000 y la razón es 1,06.

Podemos calcular S_8, utilizando la fórmula obtenida anteriormente:

$$S_8 = \frac{10000\left[1-(1{,}06)^8\right]}{1-1{,}06} = 98974{,}68$$

Suma de una serie geométrica infinita

Para hallar la suma de una serie geométrica infinita, partimos de la expresión de la suma parcial de los n primeros términos S_n.

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots\ldots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

¿Qué sucede con S_n cuando $n \to \infty$?. Depende del valor de q .

a) Si $|q| < 1$, entonces $q^n \to 0$. Por lo tanto, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q} = \frac{a(1-0)}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

Por lo tanto, siempre que $|q| < 1$, cuando $n \to \infty$ las sumas parciales S_n se acercan a un número límite: $\frac{a}{1-q}$. Cuando esto sucede, se define la suma de la serie geométrica infinita con el valor de ese límite y se dice que la *serie converge* a: $\frac{a}{1-q}$.

Para $|q| < 1$**, la suma de la serie geométrica infinita** está dada por:

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots\ldots + aq^{n-1} + aq^n + \ldots\ldots = \frac{a}{1-q}$$

b) Si $|q| > 1$, entonces q^n y las sumas parciales no tienen límite cuando $n \to \infty$ (con $a \neq 0$). En este caso, decimos que la serie diverge.

Si $q > 1$, los términos de la serie se hacen cada vez más grandes, y las sumas parciales divergen a $+\infty$ (si $a > 0$), o divergen a $-\infty$ (si $a < 0$) .

Cuando $q < -1$, los términos de la serie se hacen más grandes en valor absoluto, y las sumas parciales oscilan cuando $n \to \infty$, y la serie diverge.

c) ¿Qué ocurre cuando $q = 1$? La serie es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.q^{n-1} = a + a + a + ... + a + a + a + ...$$

como $a \neq 0$, las sumas parciales crecen o decrecen sin límite (respectivamente si $a > 0$ ó $a < 0$), y la serie no converge.

d) Si $q = -1$, la serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.q^{n-1} = a - a + a - .... + a - a + a - ....$$

y, como $a \neq 0$, las sumas parciales oscilan entre a y 0 (respectivamente, si n es par o impar), y la serie no converge .

Teorema

La serie geométrica infinita:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^{n-1} + ...$$

*Es **convergente** y su suma es $\dfrac{a}{1-q}$, si $|q| < 1$.

*Es **divergente** si $|q| \geq 1$

Ejemplo 2

Para cada una de las siguientes series geométrica infinitas, hallar su suma (si existe), y las primeras cinco sumas parciales.

a) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + ...$ b) $1 + 2 + 4 + 8 + ...$ c) $6 - 2 + \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{27} ...$

Solución

a) Ésta es una serie geométrica, en la cual: $\begin{cases} a = 1 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Como $|q| < 1$, la suma de la serie infinita es:

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Es decir que la serie converge al valor 2.

Vamos a comprobar este resultado, hallando las sumas parciales:

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2}$$
$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \qquad \rightarrow \qquad \frac{7}{4} = 2 - \frac{1}{4}$$
$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} \qquad \rightarrow \qquad \frac{15}{8} = 2 - \frac{1}{8}$$
$$S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16} \qquad \rightarrow \qquad \frac{31}{16} = 2 - \frac{1}{16}$$

La fórmula para S_n, es:

$$S_n = \frac{1.\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Por lo tanto, S_n tiende al valor 2, cuando $n \rightarrow \infty$

b) Ésta es una serie geométrica en la cual: $\begin{cases} a = 1 \\ q = 2 \end{cases}$

Como $q > 1$, no se puede hallar la suma de la serie.

Las sumas parciales crecen sin límite.

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + 2 = 3$$
$$S_3 = 1 + 2 + 4 = 7$$
$$S_4 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$
$$S_5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

La fórmula para S_n es:

$$S_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$$

Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2^n - 1\right) = \infty$

c) Se trata de una serie geométrica infinita, con: $\begin{cases} a = 6 \\ q = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Como $|q| < 1$, la serie converge al valor:

$$S = \frac{6}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{9}{2}$$

Vamos a comprobar este resultado, hallando las sumas parciales:

$$S_1 = 6$$
$$S_2 = 6 - 2 = 4$$
$$S_3 = 6 - 2 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3} = 4,\overset{\frown}{6}$$
$$S_4 = 6 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{40}{9} = 4,\overset{\frown}{4}$$
$$S_5 = 6 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2}{27} = \frac{122}{27} = 4,518518...$$

La fórmula para S_n, es:

$$S_n = \frac{6.\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{6.\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{2}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{9}{2} - \frac{9}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Entonces, calculando el límite:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{9}{2} - \left(\frac{9}{2}.\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{9}{2}$$

Ejemplo 3

Se puede hallar la suma de la siguiente serie?

$$0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + ... + \frac{3}{10^n} + ...$$

Solución

Vemos que es una serie geométrica donde: $\begin{cases} a = 0,3 \\ q = 0,1 \end{cases}$

Como $|q| < 1$, la serie converge y su suma es: $\frac{0,3}{1-0,1} = \frac{0,3}{0,9} = \frac{1}{3}$

Entonces $\frac{1}{3} = 0,3 + 0,03 + 0,003 + ... + \frac{3}{10^n} + ...$

Esto justifica la expresión decimal infinita: $\frac{1}{3} = 0,3333...$

Ejemplo 4

Escribir el número $2,4\overset{\frown}{15} = 2,4151515....$ como el cociente de dos números enteros.

Solución

$$2,4151515.... = 2,4 + 0,0151515... = 2,4 + \underbrace{\frac{15}{10^3} + \frac{15}{10^5} + \frac{15}{10^7} + ...}_{\text{serie geometrica}}$$

A partir del segundo término se tiene una serie geométrica, donde: $\begin{cases} a = \frac{15}{10^3} \\ q = \frac{1}{10^2} \end{cases}$

Por lo tanto, como $|q| < 1$, la suma de esta serie geométrica es: $s = \dfrac{\frac{15}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{15}{990}$

Con lo cual, podemos escribir:

$$2,4151515.... = 2,4 + 0,0151515... = 2,4 + \underbrace{\frac{15}{10^3} + \frac{15}{10^5} + \frac{15}{10^7} + ...}_{\text{serie geometrica}} = 2,4 + \frac{15}{990} = \frac{24}{10} + \frac{15}{990} = \frac{2391}{990}$$

$2,4\overset{\frown}{15} = \frac{2391}{990}$ (comprobar con la regla dada para números periódicos mixtos)

Las sumas parciales y Convergencia de las Series

Como vimos anteriormente, se define la suma parcial Sn, de los n primeros términos de una serie como: $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

Para investigar la convergencia de la serie, tenemos en cuenta la sucesión de sumas parciales

$$S_1, S_2, S_3, \ldots S_n, \ldots$$

Si S_n tiene límite cuando $n \to \infty$, entonces podemos definir la suma de la serie por ese límite.

Si la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ converge; es decir si $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ (s es un número real), entonces decimos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es *convergente (*o converge) .El límite s, se llama *suma* de la serie, y se escribe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Si el $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ no existe, la serie es *divergente* (o diverge).

Una serie infinita divergente no tiene suma.

Si escribimos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, estamos indicando que si sumamos la cantidad suficiente de términos de la serie, podemos acercarnos todo lo que queramos, al número s . Es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Observación: Si suprimimos un número finito de términos de una serie, no cambia la convergencia o divergencia de la serie.

Ejemplo 5

Demostrar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ es convergente y hallar su suma.

Solución

Calculamos la suma de los primeros n primeros términos.

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots\ldots.. + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}$$

Podemos escribir cada uno de estos términos, descompuestos en fracciones simples. En particular el término enésimo se escribe:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \text{(descomposición en fracciones simples)}$$

Por lo tanto, la enésima suma parcial de la serie, se puede escribir como:

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+........+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Al cancelar, resulta:

$$S_n = 1-\frac{1}{n+1}$$

Calculando el límite cuando $n \to \infty$ del término general de la sucesión de sumas parciales, se obtiene:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

Es decir que la serie converge y el valor de la suma es uno.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, se llama *retráctil o telescópica*, porque al escribir S_n utilizando la descomposición en fracciones simples, los términos se cancelan quedando sólo $S_n = 1-\frac{1}{n+1}$.

Ejemplo 6

Demostrar que la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}$ converge. Hallar su suma.

Solución

Podemos expresar:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

Donde el término general de la sucesión de sumas parciales, es:

$$S_n = \left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+........+\left(\frac{1}{2(n-1)-1}-\frac{1}{2(n-1)+1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$S_n = \left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+........+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

Al cancelar, resulta:

$$S_n = 1 - \frac{1}{2n+1}$$

Luego la serie converge a uno, porque:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = 1$$

Es decir que la serie converge y el valor de la suma es uno.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} = 1$$

Ejemplo 7

Demostrar que la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ es divergente.

Solución

Esta serie se llama *oscilante*, pues las sumas parciales dan 1 o 0 en forma alternada según que el exponente sea par o impar. Si hacemos la sucesión de sumas parciales, resulta:

$$\begin{aligned}
&S_1 = 1\\
&S_2 = 1-1 = 0\\
&S_3 = 1-1+1 = 1\\
&S_4 = 1-1+1-1 = 0\\
&\ldots\\
&\ldots\\
&S_n = 1-1+1-1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Vemos que el término general de la sucesión de sumas parciales, no tiende a un valor definido cuando $n \to \infty$. O sea que no existe el $\lim_{n\to\infty} S_n$. Es decir $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ es divergente.

Condición necesaria de convergencia

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Esta condición es *necesaria pero no suficiente* para que exista la convergencia. Podría pensarse que si el término general de la sucesión es cero, la serie es convergente. Veremos que esto no es así con un ejemplo.

Ejemplo 8

Sea la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}..........+\frac{1}{n}+.........$$

Si calculamos el límite del término general de la sucesión, es cero. Es decir: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

Pero, escribiendo las sumas parciales:

$$\begin{aligned}
&S_1=1\\
&S_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1,5\\
&S_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}\cong 1,8\\
&S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}\cong 2,08\\
&...\\
&S_{100}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{100}\cong 5,19\\
&S_{1000}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{1000}\cong 7,49
\end{aligned}$$

se puede observar que las mismas crecen sin límite, por lo que la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge a más infinito, es decir que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$. Esta serie es conocida como serie *armónica*.

La **serie armónica** es la serie infinita **divergente**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}..........+\frac{1}{n}+.........$$

Teniendo en cuenta la condición necesaria de convergencia enunciada anteriormente, si ocurre que el $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ (o no existe), se puede asegurar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ no converge.

Prueba del enésimo término para la divergencia

Si el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (o no existe), entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

Ejemplo 9

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3$ diverge, porque $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 = \infty$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2}$ diverge, porque $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2} = 1 \neq 0$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-3)^n$ diverge, porque $\lim\limits_{n\to\infty} (-3)^n$ no existe.

Propiedades de las series convergentes

Siempre que se tienen dos series convergentes, se las puede sumar o restar término a término, o multiplicarlas por constantes para crear nuevas series convergentes.

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series convergentes, entonces

1. *Regla de la suma* : $\sum a_n + \sum b_n = \sum (a_n + b_n)$ es convergente
2. *Regla de la diferencia* : $\sum a_n - \sum b_n = \sum (a_n - b_n)$ es convergente
3. *Regla del múltiplo constante* $k.\sum a_n = \sum k.a_n$ es convergente $(\forall k \in R)$

Corolarios

1. Si $\sum a_n$ converge y $\sum b_n$ diverge, tanto $\sum (a_n + b_n)$ como $\sum (a_n - b_n)$ divergen.
2. Si una serie divergente se multiplica por cualquier número real distinto de cero, diverge.

Ejemplo 10

Hallar las sumas de las siguientes series

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}}$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{4}{2^n}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{n(n+1)}$

Solución

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{6^{n-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^{n-1}}$ (regla de la diferencia)

Es la resta de dos series geométricas cuyo primer término es 1, y sus razones son:

$q_1=\frac{1}{2}$ y $q_2=\frac{1}{6}$, respectivamente.

Se puede asegurar, entonces que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^{n-1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=2-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}$$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{2^n}=4.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ (regla del múltiplo constante)

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, es una serie geométrica cuyo primer término es 1, y su razón es: $q=\frac{1}{2}$.

Se puede asegurar, entonces que:

$$4.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=4.\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=8$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}=3.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ (regla del múltiplo constante)

Ya probamos que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$, por lo tanto: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}=3.1=3$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Series geométricas- Sumas parciales- Propiedades de las series

1) Hallar la suma de cada una de las series geométricas.

a) $2+2(0,1)+2(0,1)^2+....+2(0,1)^{25}$ b) $2(0,1)+2(0,1)^2+....+2(0,1)^{10}$

c) $2(0,1)^5+2(0,1)^6+....+2(0,1)^{13}$ d) $\sum_{n=4}^{20}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

2) I) Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes. En caso de convergencia, calcular la suma.

a) $3+\frac{3}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{3}{4^3}+...+\frac{3}{4^{n-1}}+...$ b) $0,27+0,0027+...+\frac{27}{100^n}+...$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{7}{6^{n-1}}$ e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n+2}}{7^{n-1}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}.8^{n+1}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}.3^{n-1}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2(0,1)^n+(0,2)^n\right)$ j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$

k) $3+\frac{3}{2}+1+\frac{3}{4}+...+\frac{3}{n}+...$ l) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^n}-\frac{2}{5^{n-1}}\right)$

ll) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+\frac{1}{n}\right)$ m) $\frac{2}{3}-\frac{2}{9}+\frac{2}{27}-\frac{2}{81}+...$

II) En los incisos a) y h) hallar las cinco primeras sumas parciales, y comparar con los resultados hallados en I).

3) Expresar cada uno de los números decimales periódicos como una serie geométrica infinita y hallar el número racional que representa.

a) 1,24123123123… b) 3,1444444…

4) Hallar los valores de x, para los cuales converge cada una de las series geométricas. Determinar la suma de cada serie (como función de x) para esos valores de x.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}(x-3)^n$ c) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n$