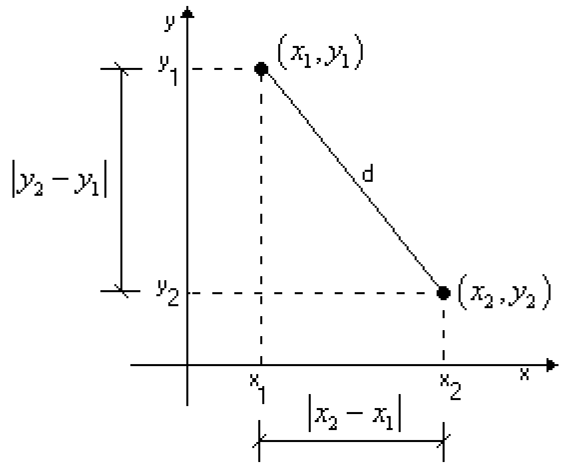
CIRCUNFERENCIA

Distancia en el plano

Hasta ahora hemos definido la distancia entre dos puntos de la recta real. Ahora lo haremos con dos puntos del plano. Según el Teorema de Pitágoras, en un triángulo rectángulo de hipotenusa a y catetos b,c , se tiene : $b^2+c^2=a^2$

Supongamos que queremos hallar la distancia d entre los puntos $(x_1,y_1)\ y\ (x_2,y_2)$ del plano, donde $x_1\neq x_2$ y $y_1\neq y_2$.

Formando con ellos un triángulo rectángulo como en la figura, se observa que el lado vertical tiene longitud $|y_2-y_1|$, y el lado horizontal tiene longitud $|x_2-x_1|$.



Por el teorema de Pitágoras:

$d^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2$

$d\ =\sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2}$

Como $|a|^2=a^2$, sustituyendo $|x_2-x_1|^2$ por su expresión equivalente $(x_2-x_1)^2$, y $|y_2-y_1|^2$ por $(y_2-y_1)^2$, se puede escribir

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.(tomando la raíz cuadrada positiva)

Por lo tanto se puede definir:

Fórmula de distancia

La distancia d entre los puntos $(x_1,y_1)\ y\ (x_2,y_2)$ del plano, viene dada por:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

En el caso particular que $y_1=y_2$, los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ se encuentran sobre la misma recta horizontal y resulta:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|$$

Análogamente , si $x_1=x_2$, los puntos P_1 y P_2 se encuentran sobre la misma recta vertical y resulta:

$$d=\sqrt{(y_2-y_1)^2}=|y_2-y_1|$$

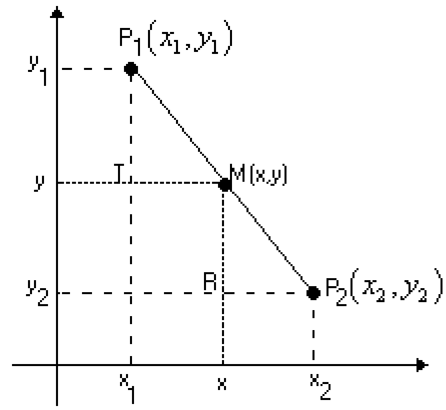
Estos son dos casos especiales de la fórmula de distancia.

Ejemplo:

Encontrar la distancia entre los puntos $(-3\ ;\ 5)\,y\,(-2\ ;-8)$

$$d=\sqrt{[-2-(-3)]^2+[(-8)-5]^2}=\sqrt{(-2+3)^2+(-8-5)^2}=\sqrt{1+(-13)^2}=\sqrt{170}$$

Punto medio



Sean dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ que determinan el segmento $\overline{P_1P_2}$. Vamos a obtener la fórmula para hallar el punto medio $M(x, y)$ de dicho segmento.

Como los triángulos P_1TM y MRP_2 son congruentes, se verifican las siguientes igualdades:

$x - x_1 = x_2 - x$ e $y_1 - y = y - y_2$

$2x = x_2 + x_1$ $\qquad$ $2y = y_1 + y_2$

$\boxed{x = \dfrac{x_2 + x_1}{2}}$ $\qquad$ $\boxed{y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}}$

Estas son las coordenadas del punto medio $M(x, y)$.

Fórmula del punto medio

El punto medio del segmento que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, es:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ejemplo 1:

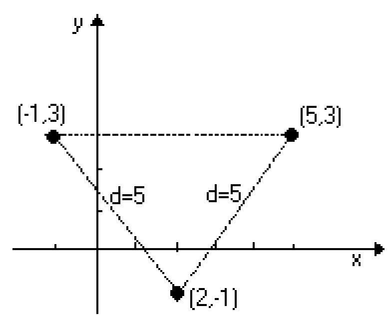
Hallar el punto medio del segmento recto que une los puntos $(-5\ ;\ -3)\, y\, (9\ ;3)$.

De acuerdo a la fórmula anterior, resulta:

$$\left(\frac{-5+9}{2}; \frac{-3+3}{2}\right) = (2\ ;\ 0)$$

Ejemplo2:

Hallar x de modo que la distancia entre $(x,3)\, y\ (2,-1)$ es 5



Según la fórmula de distancia:

$d = 5 = \sqrt{(x-2)^2 + (3+1)^2}$

$25 = \left(x^2 - 4x + 4\right) + 16$

$0 = x^2 - 4x - 5 \Rightarrow x = 5 \ o\ x = -1$

Por lo tanto los puntos $(5,3)\, y\, (-1,3)$ están a 5 unidades del punto $(2,-1)$

Circunferencia
Una aplicación directa de la fórmula de distancia permite definir la circunferencia:
Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo. Al punto fijo se lo llama centro y la distancia constante se llama radio.

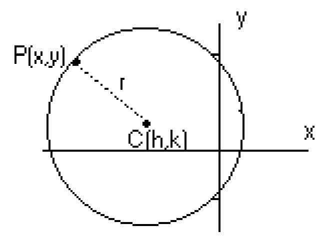
Sea (h,k) un punto del plano y sea $r>0$. El conjunto de los puntos (x,y) cuya distancia al punto (h,k) es r, se llama *circunferencia de centro* (h,k) *y radio* r.

Podemos utilizar la fórmula de distancia para escribir la ecuación de dicha circunferencia como:

Distancia entre (h,k) y (x,y)= $r \Rightarrow \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$

De esta última expresión surge la ***ecuación canónica de la circunferencia***:

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2}$$



Si el centro de la circunferencia corresponde al origen, entonces $h=0$ y $k=0$, por lo tanto su ecuación es:

$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$

Ejemplo 1:
Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $C(-2,3)$ y que pasa por el punto $P(4,5)$
De acuerdo a la fórmula de distancia:

$$r=\sqrt{(-2-4)^2+(3-5)^2}=\sqrt{40}$$

Usando la ecuación de la circunferencia con $h=-2$, $k=3$ y $r=\sqrt{40}$, se obtiene:

$$(x+2)^2+(y-3)^2=40$$

Ejemplo 2:
Obtener la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro corresponde a los puntos extremos $A(-2,3)\ y\ B(4,5)$

El punto medio del segmento de A a B es el centro de la circunferencia. Si $C\ (h,k)$ es el centro de la circunferencia, entonces:

$$h=\frac{-2+4}{2} \qquad k=\frac{3+5}{2} \quad \therefore\ C(1,4)$$

El radio puede calcularse como la distancia desde el centro al punto A, ó desde el centro al punto B. Por lo tanto:

$$r=\sqrt{(1+2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{10}$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es:

$$(x-1)^2+(y-4)^2=10$$

Partiendo de la ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, si se efectúan los cuadrados se obtiene:

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$$

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

Si se establece que: $-2h=D$ $\quad -2k=E$ $\quad h^2+k^2-r^2=F$, la expresión se transforma en:

$\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0}$ que es la ***forma general de la ecuación de una circunferencia.***

Para convertir esta ecuación a la forma canónica $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, se usa el proceso de completar cuadrados.

Ejemplo:

Obtener el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2+y^2+6x-2y-15=0$$

Esta ecuación se puede escribir como: $(x^2+6x)+(y^2-2y)=15$

Completando los cuadrados, se tiene:

$$(x+3)^2-9+(y-1)^2-1=15$$

$$(x+3)^2+(y-1)^2-10=15$$

$$(x+3)^2+(y-1)^2=25$$

Obs.: Existen ecuaciones de la forma: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ cuyas gráficas no son circunferencias, por ejemplo: $x^2+y^2+4x+6y+20=0$, completando cuadrados resulta:

$$(x+2)^2-4+(y+3)^2-9+20=0$$

$$(x+2)^2+(y+3)^2=-7$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación canónica correspondiente a: $x^2+y^2-4x+10y+29=0$

Esta ecuación puede escribirse, completando cuadrados:

$$(x-2)^2-4+(y+5)^2-25+29=0$$

$$(x-2)^2+(y+5)^2=0$$

Como los únicos valores reales de x e y que satisfacen esta ecuación son $x=2$ e $y=-5$, la gráfica es el punto $(2,-5)$