LIMITE DE FUNCIONES

Límite de una función en un punto

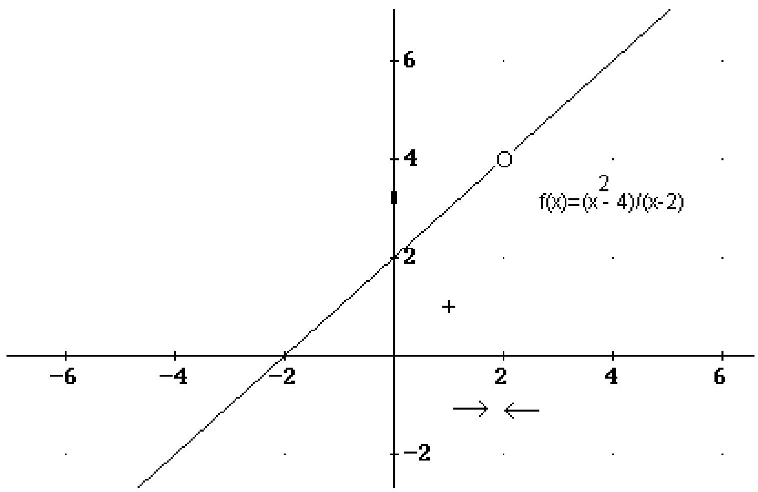
El concepto de límite de una función es una de las nociones fundamentales dentro del Cálculo. Por lo tanto es importante adquirir un buen manejo y conocimiento de los límites antes de ingresar a los demás temas del Cálculo, como son las derivadas e integrales.
El concepto de límite responde a la pregunta: ¿a qué valor tiende la variable dependiente (por ejemplo: y), cuando la variable independiente x, se aproxima suficientemente a un valor determinado x_o (x≠xo). Por supuesto, estas variables debe estar relacionadas por medio de una función, por ejemplo y =f(x).
A partir de varios ejemplos vamos a construir la noción de límite. Primeramente trataremos este concepto de manera informal o intuitiva, y una vez que se hay comprendido bien, se hará la formalización del mismo.

Ejemplo 1: Graficar la función f(x), apoyándose en la construcción de una tabla de valores.

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2} \quad \forall\, x \neq 2$$

Construimos una tabla para todo valor de x≠2, utilizando dos conjuntos de valores de x, uno que se acerque hacia el 2 por la izquierda y otro que se acerque a 2 por la derecha

x	$(x^2-4)/(x-2)$
1	3
1,5	3,5
1,98	3,98
1,99	3,99
.....	.....
2,01	4,01
2,02	4,02
2,05	4,05



Se puede observar, ya sea en la tabla como en el gráfico de la función, que si x tiende a 2 por izquierda, los valores de la función f(x) tienden a 4. Y si x tiende a 2 por la derecha, f(x) también tiende a 4.
Al marcar los puntos, resulta que la gráfica de f es una recta con un hueco en el punto (2;4). Aunque x no pueda tomar el valor 2, podemos ir tan cerca de 2 como queramos, y como consecuencia, f(x) se hace tan próximo a 4 como queramos.
Usando notación de límites, decimos que el limite de f(x) cuando x tiende a 2, es 4, y escribimos: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$

Como se observa, la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, es igual a la de g(x)=x+2, excepto que la primera presenta un hueco en el punto de coordenada x=2.

Definición informal de límite de una función en un punto

Si f(x) se aproxima suficientemente a un único número L, cuando x se aproxima al valor c, tanto por derecha como por izquierda (sin tomar el valor c), decimos que el límite de f(x) cuando x tiende a c, es L y escribimos: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

Obs.1: La frase: "si f(x) se aproxima suficientemente a L" , significa que $|f(x) - L|$ se puede hacer tan pequeña como se quiera, escogiendo x lo suficientemente cercano a x=c (con $x \neq c$).

Obs.2: Se usará la notación $x \to c^-$ para denotar que x tiende a c por la izquierda, y $x \to c^+$ para expresar que x tiende a c por la derecha.

Si se verifica que:

$\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$, se dice que:

existe el límite de f(x) cuando x tiende a c y se escribe: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

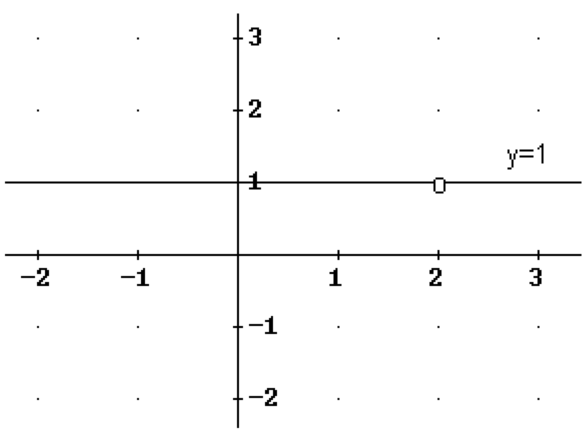
El $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$ se llama límite por derecha

El $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L$ se llama límite por izquierda.

Estos dos límites se llaman ***límites laterales***.

Obs.3: La existencia del límite de una función f en un punto c no depende de si f está realmente definida en c, sino solamente de si f está definida para los x cercanos a c.

Ejemplo 2: Hallar el límite, cuando x tiende a 2 de la función: $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq 2 \\ 0 \text{ si } x = 2 \end{cases}$

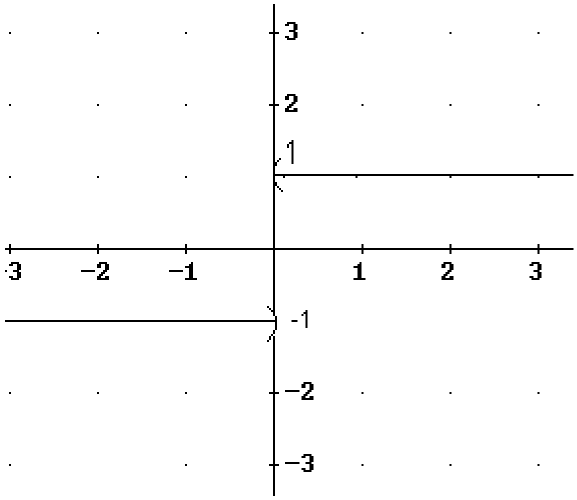


Como f(x)=1 para todo x≠2 y el valor f(2) no importa, entonces el límite de la función es igual a 1.

Es decir: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

Ejemplo 3: Hallar el límite cuando x tiende a 0, de la siguiente función: $f(x)=\frac{|x|}{x}$ si $x \neq 0$

Esta función resulta: $f(x)=\begin{cases} 1 \text{si } x>0 \\ -1 \text{si } x<0 \end{cases}$



Si x>0, se observa que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$

Si x<0, se observa que $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$

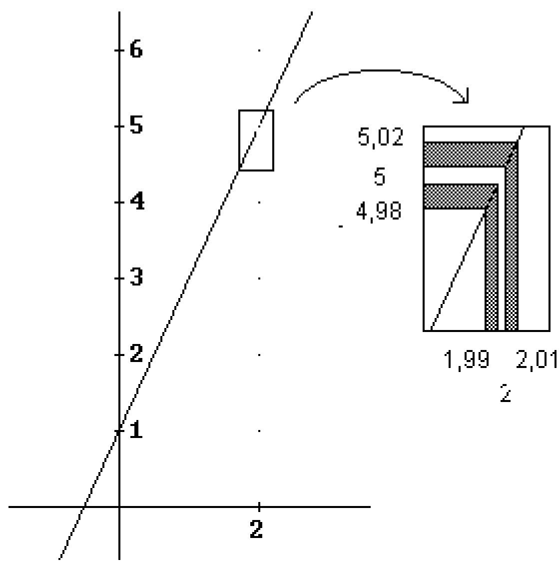
Entonces, como $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$ no existe el $\lim_{x\to 0} f(x)$

Ejemplo 4:

Consideremos $f(x)=\frac{2x^2-3x-2}{x-2}$

confeccionemos una tabla y calculemos valores muy próximos a 2.

x	$(2x^2-3x-2)/(x-2)$
1	3
1,25	3,5
1,5	4
1,75	4,5
1,9	4,8
1,99	4,98
1,999	4,998
1,9999	4,9998
....	....
2,0001	5,0004
2,001	5,002
2,01	5,02
2,1	5,2
2,25	5,5
2,5	6
3	7



En esta tabla se puede observar que podemos lograr que f(x) se aproxime al valor 5 tanto como queramos, tomando a x lo suficientemente cerca de 2. Vemos que si f(x) difiere de 5, en menos de 0,02 (4,98 < f(x) < 5,02), los x difieren de 2, en menos de 0,01 (1,99 < x <2,01). Podemos escribir lo dicho anteriormente de la siguiente manera: $|f(x)-5|<0{,}02$, siempre que $|x-2|<0{,}01$, pero sin tomar el valor x=2.

Si quisiéramos que los valores de f(x) difieran de 5, en menos de 0,002 ($4,998 < f(x) < 5,002$), los x deben diferir de 2, en menos de 0,001 ($1,999 < x < 2,001$). Es decir $|f(x)-5| < 0,002$ siempre que $|x-2| < 0,001$ con $x \neq 2$.
De esto se deduce que tomando cualquier número positivo tan pequeño como se quiera (Ej: 0,02; 0,002) al cual vamos a llamar ε (épsilon), va a existir otro número positivo δ (delta), tal que si:

$$0<|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-5|<\varepsilon$$

En nuestro ejemplo, tomando $\varepsilon = 0,02$, resulta un $\delta = 0,01$, lo que permite escribir:

$$0 < |x - 2| < 0,01 \Rightarrow |f(x) - 5| < 0,02.$$

Tomando $\varepsilon = 0,002$, resulta un $\delta = 0,001$, lo que permite escribir:

$$0 < |x - 2| < 0,001 \Rightarrow |f(x) - 5| < 0,002.$$

Cualquier número positivo menor que 0,001 se puede utilizar como δ, pues se verifica igualmente que: $|f(x) - 5| < 0,002$.

Definición formal de límite

Cuando definimos informalmente el límite de una función dijimos que f(x) se aproxima suficientemente a un único valor L, siempre que tomemos a x suficientemente próximo al valor c (con $x \neq c$).
Vamos a utilizar ahora el lenguaje simbólico correspondiente a estas expresiones para dar una definición formal del límite de una función.
Para decir que f(x) se aproxima suficientemente a L, escribiremos que $|f(x)-L|<\varepsilon$, esto quiere decir que la distancia de f(x) al valor L, se puede hacer tan pequeña como se quiera, ya que el valor ε(épsilon) denota un número real positivo muy pequeño.
Y siguiendo con la definición, para expresar simbólicamente que se escoge a x suficientemente próximo al valor c, (con $x \neq c$), escribiremos: $0<|x-c|< \delta$, ya que esta expresión está indicando por un lado: que la distancia de x a c es menor que un valor δ(delta) suficientemente pequeño($|x-c| < \delta$), y por otro lado: que el valor de x es distinto de c ($0<|x-c|$).
Recordando las propiedades del valor absoluto sabemos que, escribir:
$|f(x) - L| < \varepsilon$, es equivalente a escribir:
$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$, y también a:
$L-\varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, lo que puede expresarse también en notación de intervalos de la siguiente manera:
$f(x) \in (L- \varepsilon, L+\varepsilon)$
Análogamente, la expresión:
$0 < |x - c| < \delta$ es equivalente a la expresión:
$c - \delta < x < c + \delta$, con $x \neq c$; y utilizando la notación de intervalos, podemos escribir: $x \in (c - \delta, c + \delta)$, con $x \neq c$.
Utilizando esta simbología, podemos dar la siguiente definición formal de límite:

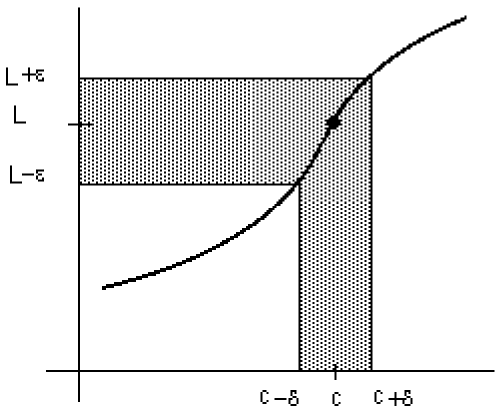
Def: Sea f una función definida para todo valor de x en un intervalo abierto que contiene al valor c, excepto, posiblemente, en el mismo valor c. El límite de f(x) cuando x tiende a c es L, y se escribe: $\lim_{x \to c} f(x) = L$, si se verifica que: para cualquier $\varepsilon>0$, sin importar lo pequeño que sea, existe un $\delta>0$, tal que si: $0 < | x - c | < \delta$, entonces: $|f(x) - L | < \varepsilon$

También podríamos utilizar la notación de intervalos y definir:

La expresión: $\lim_{x \to c} f(x) = L$, significa que para todo ε> 0, existe un δ> 0, tal que para cada x que pertenezca al entorno reducido (c-δ, c+δ) - {c}, entonces f(x) va a pertenecer al intervalo abierto (L-ε, L+ε).

En estas definiciones está claro que existe un orden, ya que la definición expresa que: "para todo ε>0, existe un δ>0". Esto indica que primero se debe establecer el ε y a partir de él, se debe encontrar el valor de δ correspondiente.

Vamos a interpretar la definición de límite, gráficamente. A partir de elegir un ε determinado, se establece en el eje vertical el intervalo (L-ε, L+ε), y las rectas horizontales y = L ± ε. Entonces si existe un intervalo abierto (c-δ, c+δ) tal que para todo x que pertenece a dicho intervalo ,excepto posiblemente para x=c, los f(x) se encuentran entre las rectas horizontales: L-ε y L+ε, entonces se puede decir que el: $\lim_{x \to c} f(x) = L$



Ejemplo 1:

Probar por definición que: $\lim_{x \to 1} 3x + 2 = 5$

Lo primero que hay que verificar es que la función $f(x) = 3x + 2$ esté definida para todo valor de algún intervalo abierto que contenga a 1, excepto posiblemente en dicho valor. Puesto que $f(x) = 3x + 2$ está definida para todos los números reales, cualquier intervalo abierto que contenga a $x = 1$ cumplirá este requisito.

Ahora hay que demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

si $0 < |x-1| < \delta$ entonces $|(3x+2)-5| < \varepsilon \qquad (1)$

Operando algebraicamente, resulta:

$|(3x+2)-5| = |3x-3| = 3.|x-1|$. Por lo tanto la expresión (1) es equivalente al enunciado:

si $0 < |x-1| < \delta$ entonces $3.|x-1| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow 0 < |x-1| < \delta$ entonces $|x-1| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{3}}$

Supongamos que $\varepsilon = 0{,}003 \Rightarrow \delta = 0{,}001$, entonces:

Si: $0<|x-1|<0{,}001 \Rightarrow -0{,}001<x-1<0{,}001 \Rightarrow 0.999<x<1{,}001$ con $x \neq 1$, entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$.

Tomemos por ejemplo: $x=0{,}9998 \Rightarrow |3.0{,}9998+2-5|=0{,}0006<0{,}003$. Por lo tanto se verifica el límite.

Ejemplo 2:

Probar por definición que: $\lim\limits_{x \to 2} x^2+1=5$

$$\lim_{x \to 2} x^2+1=5 \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists\ \delta(\varepsilon)/\ si\ 0<|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

Es decir:

si

$$0<|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|=\left|\left(x^2+1\right)-5\right|=\left|x^2-4\right|=\left|(x-2)(x+2)\right|=|x-2||x+2|<\varepsilon$$

En el ejemplo anterior pudimos despejar directamente $|x-1|$ y hallar el valor de δ. Aquí tendremos que usar otra técnica. Debemos imponer una restricción sobre δ de manera que produzca una desigualdad que incluya a $|x+2|$.

Para comenzar tomemos un valor $\boxed{\delta_1=1}$, entonces los x que vamos a considerar son los x del intervalo: $(1\ ,\ 3)$, ya que:

$$|x-2|<1 \Rightarrow -1<x-2<1 \Rightarrow 1<x<3.$$

De la desigualdad anterior se deduce: $3<x+2<5$, con lo cual puedo asegurar que también se va a cumplir la siguiente desigualdad: $|x+2|<5$

Tenemos entonces:

$$0<|x-2|<\delta \text{ y } |x+2|<5 \Rightarrow |x-2||x+2|<\delta.5$$

Recordando que nuestro objetivo es hacer que: $\left|(x-2)(x+2)\right|=|x-2||x+2|<\varepsilon$, concluimos que debe ser: $\delta.5=\varepsilon \Rightarrow \delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$. A este δ lo llamaremos δ_2. Es decir: $\boxed{\delta_2=\dfrac{\varepsilon}{5}}$

Para que se cumplan las dos restricciones, se toma a δ como el menor de los dos números : 1 y $\dfrac{\varepsilon}{5}$. Con símbolos, escribimos $\delta=\text{mín}\left(1\ ,\ \dfrac{\varepsilon}{5}\right)$. Con este δ se verifica la definición de límite.

Propiedades de los límites

1) Si $f(x)=b$, entonces para cualquier número x_0, se cumple:

$$\lim_{x \to x_0} b=b$$

El límite de una constante, es la misma constante.

2) Sean $f(x)$ y $g(x)$ tales que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L'$, entonces se verifica que:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L \pm L'$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x).g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x).\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L.L'$

En el caso particular de que $f(x) = b$

$$\lim_{x \to x_0} (b.g(x)) = b.\lim_{x \to x_0} g(x) = b.L'$$

c) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{L}{L'}$ siempre que $L' \neq 0$

d) Sea $n \in Z^+$, entonces:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^n = L^n$$

Formas de cálculo de límite de una función en un punto.

1) Sustitución directa:

Sabemos que el $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ no depende del valor de la función en $x = x_0$; pero si ocurre que el límite es precisamente $f(x_0)$, entonces decimos que el límite se puede calcular por sustitución directa. Esto es: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (sustituir la x por la x_0)

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 2} x^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$

Otros ejemplos teniendo en cuenta las propiedades anteriores:

1) $\lim\limits_{x \to 2} 6 = 6$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0} -2 = -2$

2) $\lim\limits_{x \to 4} (3x^2 + 5x + 2) = 3.\lim\limits_{x \to 4} x^2 + 5.\lim\limits_{x \to 4} x + \lim\limits_{x \to 4} 2 = 3.\ 4^2 + 5.\ 4 + 2 = 70$

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + x^2 + 6}{x + 3}$, como el límite del denominador es distinto de cero, se puede aplicar la propiedad 2c), es decir: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + x^2 + 6}{x + 3} = \dfrac{2^3 + 2^2 + 6}{2 + 3} = \dfrac{18}{5}$

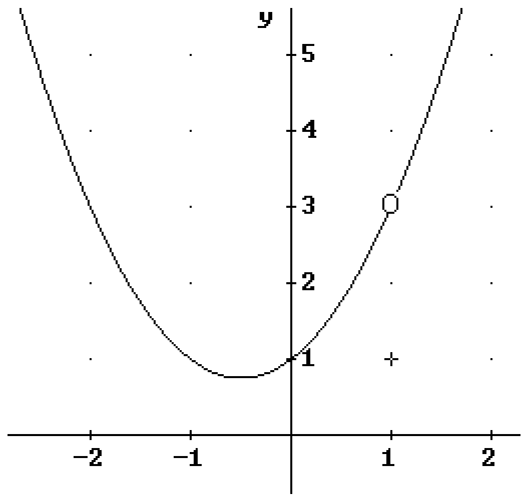
Las funciones que poseen este comportamiento se llaman continuas en x_0.

2) Aplicación del teorema: Funciones que coinciden salvo en un punto.

Teorema : Sea x_0 un número real y $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq x_0$. Si el límite de $g(x)$ cuando x tiende a x_0 existe, entonces también existe el límite de $f(x)$, y además se cumple que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Ejemplo: Calcular el $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$. (*Probar que las funciones:* $\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ y $g(x) = x^2 + x + 1$ *tienen los mismos valores para todo* $x \neq 1$).



Factoreando el numerador de f(x), obtenemos: $f(x)=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$, así para
$x\neq 1$, se pueden cancelar los factores iguales de modo que:

$$f(x)=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=x^2+x+1=g(x)$$

Por lo tanto, en todos los puntos distintos de x=1, las funciones f y g son iguales. Esto se ve en el gráfico.

El $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3=g(1)$
en consecuencia aplicando el teorema anterior, concluimos que el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$.

Lo tratado anteriormente nos permite establecer las siguientes ***estrategias para calcular límites:***

a) Reconocer si el límite planteado puede ser calculado por sustitución directa.

b) Si el límite de f(x) cuando $x\to c$ no puede calcularse por sustitución directa, intentar encontrar una función g(x) que coincida con f(x) en todos los puntos, salvo en x=c.

c)Aplicar el teorema anterior para deducir que: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} g(x)=g(c)$

Ejemplos:
Calcular los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to -1}(2x+4)=2.(-1)+4=2$

Este límite se puede calcular por sustitución directa, por lo tanto reemplazamos la x por el valor -1, y operamos.

b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{x+3}$

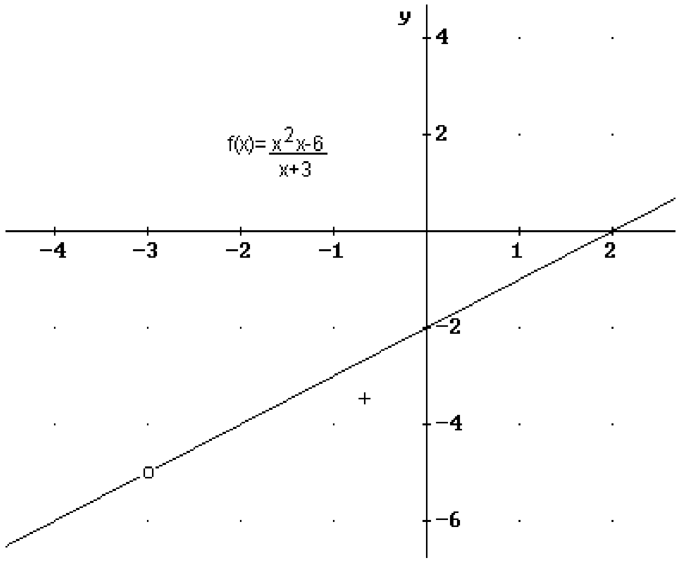
si efectuamos sustitución directa, obtenemos como resultado 0/0, a quien llamamos forma indeterminada porque no es posible determinar el límite. Por lo tanto debemos aplicar el teorema, para lo cual factoreamos el numerador:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-2)}{x+3}=\lim_{x\to -3}(x-2)=-5$$

En este caso aplicamos la técnica de factorización.

Se puede verificar que las funciones:

$f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x+3}$ y $g(x)=x-2$ son iguales salvo en el



punto x = -3

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Si efectuamos sustitución directa obtenemos la indeterminación 0/0. Por lo tanto cambiamos la forma de la función racionalizando:

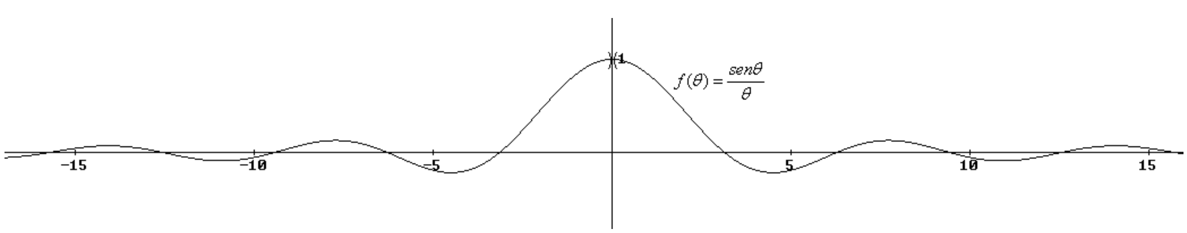
$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

Hemos aplicado la técnica de racionalización.

Límite especial

Vamos a demostrar que: $\boxed{\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{sen\theta}{\theta}=1}$

Consideremos la función $f(\theta)=\dfrac{sen\theta}{\theta}$.



Probemos que esta función es par:

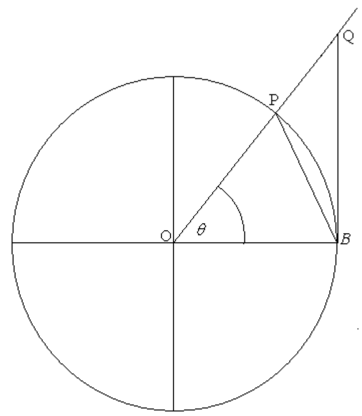
$$f(-\theta) = \frac{sen(-\theta)}{-\theta} = \frac{-sen\theta}{-\theta} = \frac{sen\theta}{\theta} = f(\theta)$$

Al ser par, el límite por derecha y por izquierda del cero es el mismo:

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{sen\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0^-} \frac{sen\theta}{\theta} = 1$$

Demostración:
Construimos un ángulo θ, que satisface:

$0^\circ < \theta < \frac{\pi}{2}$ en una circunferencia de radio 1.



$$OB = OP = 1$$

El lado final del ángulo θ, intersecta a la circunferencia en el punto P.
Veamos cuáles son las coordenadas de este punto.
Como estamos en una circunferencia de radio 1, las coordenadas son $P(\cos\theta, sen\theta)$.
El lado final también intersecta a la recta vertical que pasa por $B(1,0)$, en el punto Q, cuyas coordenadas son $Q(1, tg\theta)$.

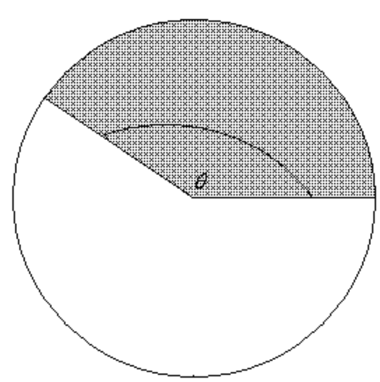
A partir de la figura, vamos a comparar áreas. El área del triángulo $\overset{\triangle}{OBP}$, con el área del sector circular OBP y el área del triángulo $\overset{\triangle}{OBQ}$.

Área $\overset{\triangle}{OBP} \leq$ Área sector $OBP \leq$ Área $\overset{\triangle}{OBQ}$ (1)

Vamos a hallar cada una de estas áreas:

Área $\overset{\triangle}{OBP} = \frac{base.altura}{2} = \frac{1.sen\theta}{2} = \frac{1}{2}.sen\theta$

Área del sector circular OBP:
Recordemos que un sector circular es la parte del círculo limitada por dos radios y el arco comprendido entre ellos.
Si $\theta = 2\pi$, entonces el sector correspondiente es el círculo completo que tiene área πr^2.
Lógicamente existe una proporcionalidad directa entre el área de un sector cualquiera con respecto a su ángulo central θ, con lo cual se puede escribir:



$$\frac{\acute{A}rea\ del\ c\acute{i}rculo}{\acute{A}rea\ del\ sector} = \frac{\acute{a}ng.\ central\ c\acute{i}rculo}{\acute{a}ng.\ central\ del\ sector}$$

$$\frac{\pi r^2}{Area\ del\ sector} = \frac{2\pi}{\theta} \Rightarrow \acute{A}rea\ del\ sector = \frac{\pi r^2 \theta}{2\pi} = \frac{r^2\theta}{2}$$

$$\acute{A}rea\ del\ \ sector = \frac{r^2\theta}{2}$$

Volviendo a nuestro gráfico de círculo de radio 1, tenemos:

$$\acute{A}rea\ del\ \ sector\ OBP = \frac{1.\theta}{2}$$

Vamos a hallar el área del triángulo $O\overset{\triangle}{B}Q$:

$$\acute{A}rea\ \ O\overset{\triangle}{B}Q = \frac{base.altura}{2} = \frac{1.tg\theta}{2}$$

Reemplazando en (1):

$$\frac{sen\theta}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{tg\theta}{2} \Leftrightarrow sen\theta \leq \theta \leq tg\theta$$

Dividimos por $sen\theta$:

$$\frac{sen\theta}{sen\theta} \leq \frac{\theta}{sen\theta} \leq \frac{tg\theta}{sen\theta} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{\theta}{sen\theta} \leq \frac{1}{\cos\theta}$$

Tomando los recíprocos, nos queda: $1 \geq \frac{sen\theta}{\theta} \geq \cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta \leq \frac{sen\theta}{\theta} \leq 1$

Tomando límites:

$$\lim_{\theta\to0^+} \cos\theta = 1 \quad ; \quad \lim_{\theta\to0^+} 1 = 1$$

Por el teorema de la constricción, de contracción o de encaje, resulta que:

$\lim_{\theta\to0^+} \frac{sen\theta}{\theta} = 1$ y como la función es par, resulta: $\lim_{\theta\to0^-} \frac{sen\theta}{\theta} = 1$, por lo tanto se puede asegurar: $\lim_{\theta\to0} \frac{sen\theta}{\theta} = 1$.

Recordemos el teorema del encaje:

Teorema: Sean $f, g\ y\ h$, funciones que satisfacen: $g(x) \leq f(x) \leq h(x),\ \forall x$ de algún intervalo abierto que contenga al punto a, con la posible excepción de que no es necesario que las desigualdades sean válidas en a. Si $g\ y\ h$ tienen el mismo límite cuando x tiende al valor a, se tiene:

$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, entonces f también tiene el mismo límite cuando x tiende al valor a, es decir: $\lim_{x\to a} f(x) = L$

Cuando es difícil encontrar directamente el límite de una función, en ocasiones es posible obtener el límite de una manera indirecta, "prensando" la función entre funciones más simples cuyos límites sean conocidos.

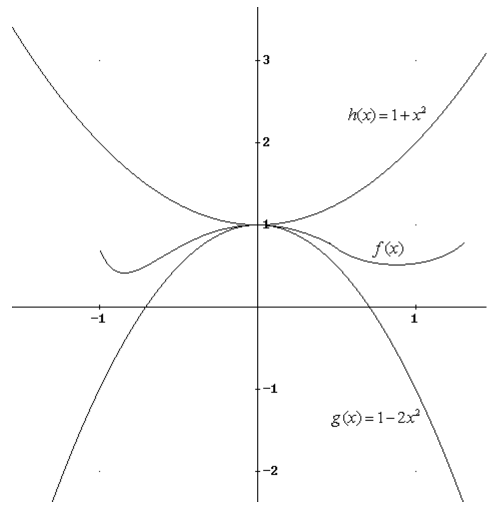
Por ejemplo, supóngase que no es posible calcular directamente el $\lim_{x\to0} f(x)$, pero que es posible "prensar" $f(x)$ entre $g(x) = 1 - 2x^2$ y $h(x) = 1 + x^2$ por medio de las desigualdades:

$$1-2x^2 \leq f(x) \leq 1+x^2$$

Puesto que $\lim\limits_{x\to 0} 1-2x^2 = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0} 1+x^2 = 1$, y puesto que el valor de $f(x)$ siempre está entre $1+x^2$ y $1-2x^2$, es intuitivamente evidente que $f(x)$ también debe tender a 1 cuando x tiende a 0, es decir: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

Este resultado también es evidente geométricamente puesto que las desigualdades:

$1-2x^2 \leq f(x) \leq 1+x^2$ implican que la gráfica de f está "prensada" entre las gráficas de $g(x) = 1-2x^2$ y $h(x) = 1+x^2$

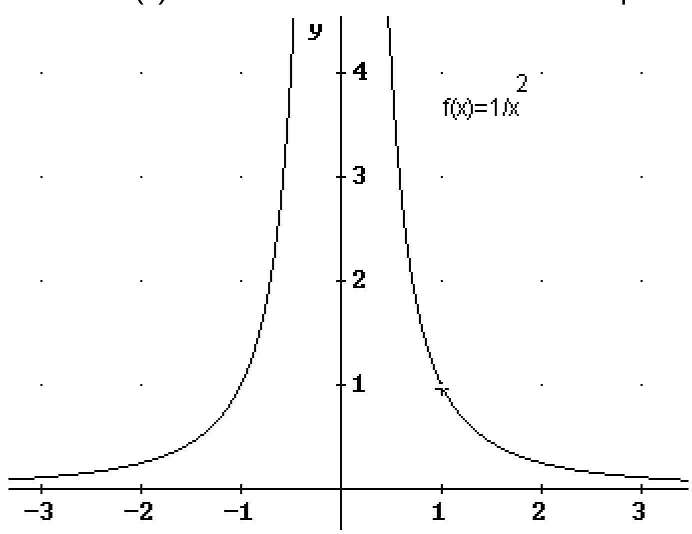


Límites infinitos

Consideramos la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Su dominio son todos los números reales a excepción del cero.

Vamos a investigar qué valores toma f(x) cuando x se acerca a cero tanto por derecha como por izquierda.

x	$y=1/x^2$
2	¼
1	1
½	4
¼	16
1/8	64
1/16	256
.....	....
-1/16	256
-1/8	64
-1/4	16
-1/2	4
-1	1

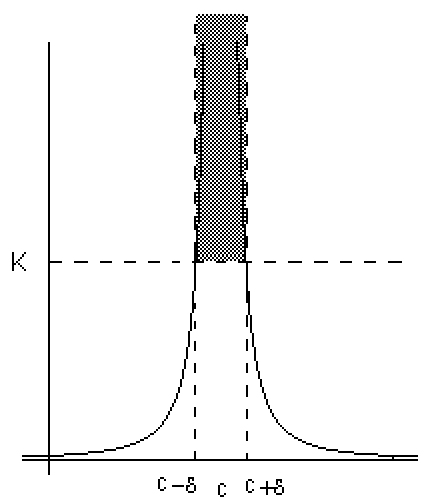


Como se puede observar en la tabla y en el gráfico, a medida que los valores de x se aproximan al cero, la función toma cada vez valores más grandes. Es decir que f(x) aumenta sin límite, no se aproxima a ningún valor. Diremos en este caso que cuando x se acerca a cero, por derecha y por izquierda, la función crece infinitamente, o, la función tiende a infinito, y lo expresamos así: $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

El signo igual en esta expresión ***no significa que exista el limite***, sino que indica que la función crece sin tope. Es decir, el símbolo $+\infty$ indica el comportamiento de los valores de la función $f(x)$ cuando x tiende 0.

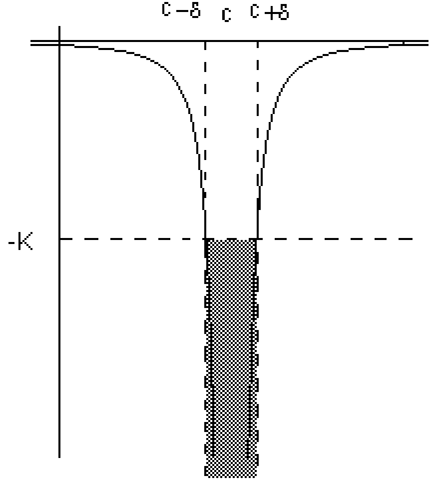
Al decir que $f(x)$ crece sin tope cuando x tiende a un valor determinado c, significa que para cada valor de K suficientemente grande y positivo, existe un valor de $\delta(K)$>0 tal que para todo x perteneciente al entorno reducido: (c-δ, c+δ) -{c}, resulta que $f(x) > K$, o dicho de otra manera: $f(x) \in (K, +\infty)$.Escribamos simbólicamente la definición de límite infinito:

Sea una función f definida para todo número de algún intervalo abierto que contenga a c, excepto, posiblemente en el número c. Diremos que f(x) crece sin límite cuando x tiende a c, y se escribe: $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$, si y sólo si: ∀K>0, ∃ δ(K)>0 / si 0<│x-c│<δ ⇒ f(x)>K



De manera análoga, si la función decrece infinitamente a medida que nos acercamos al valor c, por ambos lados diremos que el $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$, y lo definimos así:

Sea una función f definida para todo número de algún intervalo abierto que contenga a c excepto, posiblemente en el número c. Diremos que f(x) decrece sin límite cuando x tiende a c, y se escribe $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ Si y sólo si: ∀K>0, ∃ δ(K)>0 / si 0<│x-c│<δ ⇒ f(x)<-K



Ejemplo: Probar por definición: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$

$\forall$ k >0 (suficientemente grande), $\exists$ δ(k)>0 / si 0<│x-1│<δ $\Rightarrow$ $\frac{1}{(x-1)^2}>k$

Decir que $\frac{1}{(x-1)^2}>k$ es equivalente a expresar: $(x-1)^2<\frac{1}{k}$ de donde se deduce que: $|x-1|<\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Por lo tanto, tomando $\delta=\frac{1}{\sqrt{k}}$ se verifica dicho límite, porque si:

$$|x-1|<\frac{1}{\sqrt{K}}\Leftrightarrow(|x-1|)^2<\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)^2\Leftrightarrow(x-1)^2<\frac{1}{K}\Leftrightarrow K<\frac{1}{(x-1)^2}$$

Por ejemplo si tomamos un valor de $k=1000000\Rightarrow\delta=\frac{1}{1000}$. Por lo tanto si:

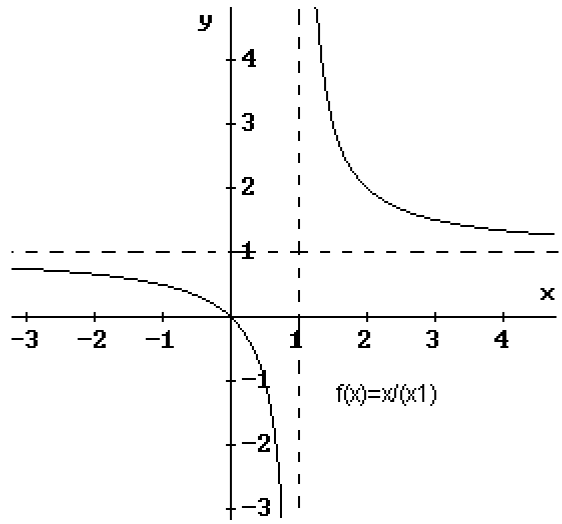
$$|x-1|<0{,}001\Leftrightarrow-0{,}001<x-1<0{,}001\Leftrightarrow 0{,}999<x<1{,}001$$

Por ejemplo tomando $x=0{,}9999\Rightarrow\frac{1}{(0{,}9999-1)^2}>1000000\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 100000000>1000000$$

Consideremos la función $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

En la gráfica de la función, se visualiza que cuando x tiende a 1 por derecha, los valores de la función crecen infinitamente, mientras que si nos acercamos por izquierda, los valores de la función disminuyen sin límite. Es decir: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=-\infty$



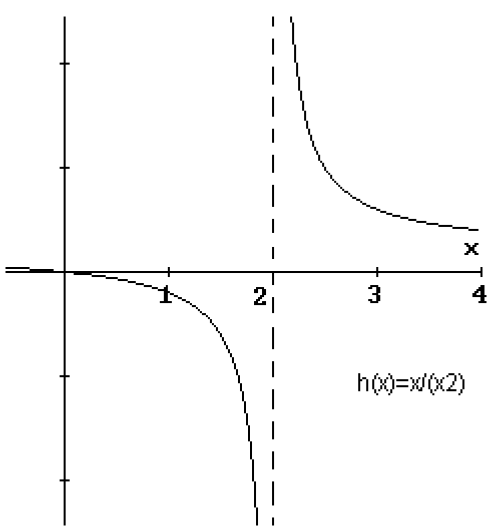
Tanto en este ejemplo de $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ como en el primero: $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, se observa que las gráficas de dichas funciones se acercan cada vez más a la recta $x=c$ ($x=1$ y $x=0$, respectivamente), cuando le asignamos valores a x muy cercanos a c. Es decir que si la función f(x) tiende a +∞ ó a -∞, cuando x tiende a c, ya sea por derecha o por izquierda, entonces la gráfica de la función tiene una asíntota vertical en $x=c$.

La recta x=c es una asíntota vertical de la gráfica de la función f, si por lo menos uno de los enunciados siguientes es verdadero:
$\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=-\infty$

Cómo podemos determinar analíticamente si existe una asíntota vertical?

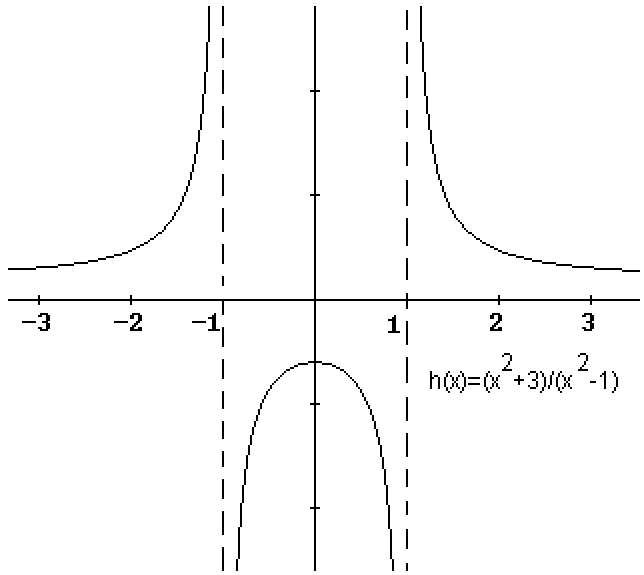
Teorema:
Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo abierto que contiene a c. Si f(c)≠0; g(c)=0, y g(x)≠0 para todos los x≠c de intervalo que contiene a c, entonces la gráfica de la función dada por: $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tiene una asíntota vertical en $x=c$

Ejemplos: determinar las asíntotas verticales de las siguientes funciones utilizando el teorema anterior:



1) $h(x)=\dfrac{x}{x-2}$

x=2 es la asíntota vertical, ya que la expresión del denominador se hace cero en x=2, mientras que el numerador es distinto de cero para dicho valor.

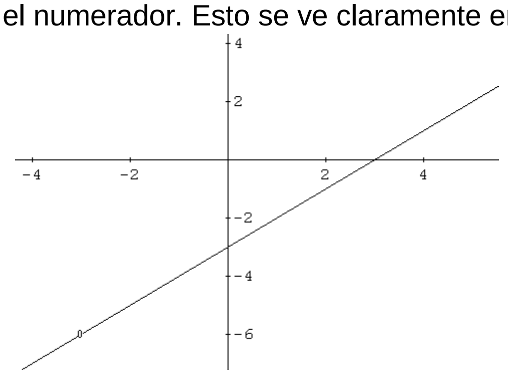


2) $h(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-1}$

Las asíntotas verticales son x=1 y x=-1, ya que en esos valores de anula el denominador, y el numerador es distinto de cero en dichos valores.

3) $g(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$

No tiene asíntota vertical, ya que si bien $x+3$ se anula en $x=-3$, en dicho valor también se anula el numerador. Esto se ve claramente en el gráfico:



Propiedades de los límites infinitos:

1) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{|f(x)|}=+\infty$

2) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$

3) Si:

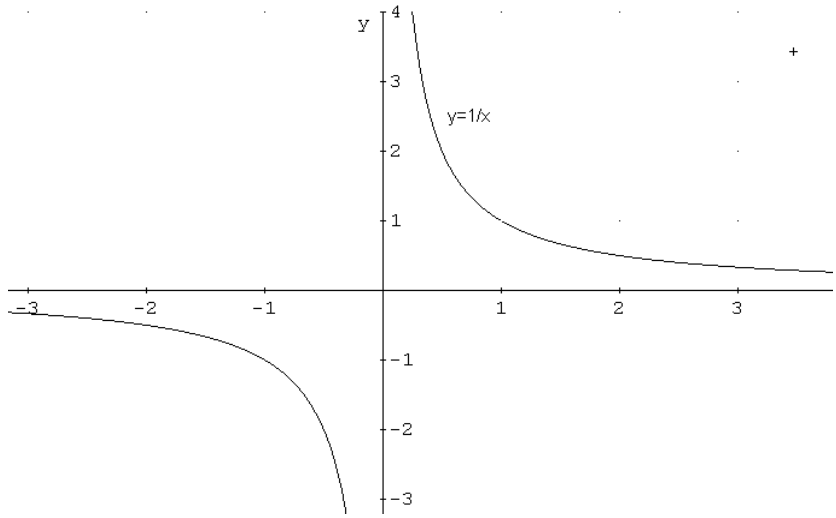
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \text{ y } \lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x).g(x)=\begin{cases} +\infty & si \quad L>0 \\ -\infty & si \quad L<0 \end{cases}$$

Límites para x tendiendo a infinito

Anteriormente estudiamos los límites infinitos, que es cuando los valores de las funciones crecen o disminuyen sin límite a medida que la variable independiente se acerca a un número real. Ahora vamos a estudiar qué pasa con los valores de las funciones cuando la variable independiente aumenta o disminuye sin límite esto es cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$

Consideremos la función: $f(x) = \frac{1}{x}$.



Gráficamente vemos que a medida que x crece, la función se acerca al valor L=0. Escribiremos: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Vamos a dar la siguiente definición:

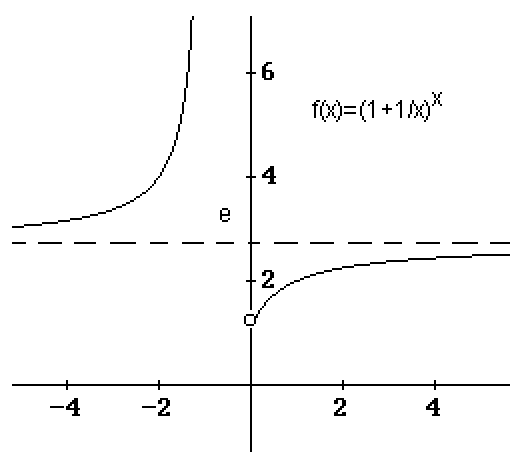
Def. 1:

Se dice que f(x) tiende a un valor L cuando $x \to +\infty$ y se indica: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists h(\varepsilon) > 0 \, / \, si \; x > h \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Estudiemos la función: $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ para valores reales positivos.

Construimos una tabla de valores:

x	$(1+1/x)^x$
0,0001	1,006
0,01	1,04
0,5	1,73
10	2,5937
100	2,7048
1000	2,7169
10000	2,7182



Se puede observar en la tabla, que para valores de x suficientemente grandes, la función va tomando valores que se acercan a un valor límite que es el número e.

Por lo que escribiremos: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e}$

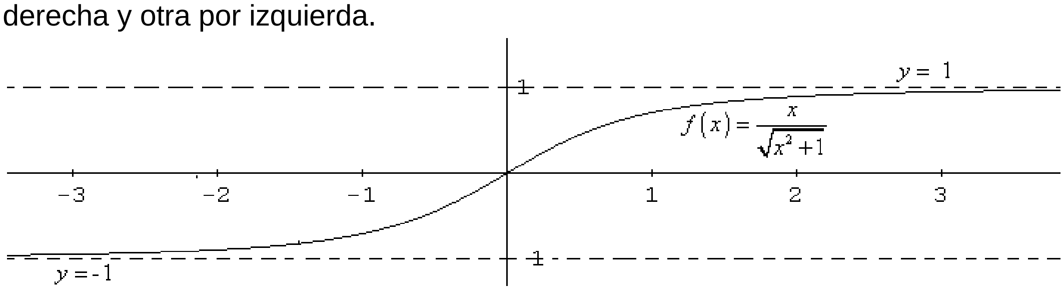
(Cuando se escribe x→+∞ se está indicando que x crece sin límite hacia valores positivos). Podemos acercar el valor de función al número e, tanto como queramos, tomando valores de x suficientemente grandes. O sea que se puede hacer la diferencia entre el valor de función y el número e tan chica como se quiera, siempre que se tomen valores de x suficientemente grandes.
Si hiciéramos una tabla para valores negativos de x, observaríamos que cuando x tiende a menos infinito, los valores de función tienden también al número e, es decir:

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

Si observamos la gráfica, veremos que la misma se acerca a la recta y=e, para valores muy grandes de x, en valor absoluto. Esta recta resulta ser la asíntota horizontal de la gráfica de la función.
La gráfica de esta función tiene una asíntota vertical en $x=-1$.
Analicemos el dominio de la función. Para que la expresión de la función dada: $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ sea un número real, se debe verificar que: $\left(1+\frac{1}{x}\right)>0$, ya que el exponente puede tomar cualquier valor real (por ej, si el exponente es $1/2$, la base no puede ser negativa). Partiendo, entonces de que $\left(1+\frac{1}{x}\right)>0$, el dominio resulta: $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$.

Se dice que la recta y=L es una ***asíntota horizontal*** de la gráfica de la función f, si se cumple que: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ ó $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$

La gráfica de una función puede tener a lo sumo dos asíntotas horizontales, una por derecha y otra por izquierda.

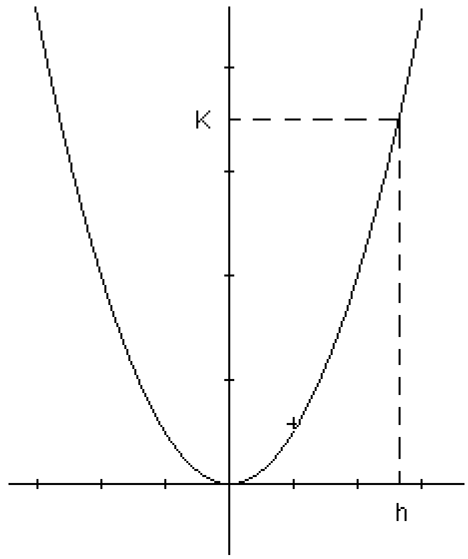


Hasta ahora vimos el caso en que límite de una función, cuando x tiende a infinito, es L.
También puede darse que los valores de función tiendan a ±∞, cuando x tiende a ∞. Por ejemplo en el caso de la función f(x)=x^2, se puede observar claramente que:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

Formalmente, diremos que:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0$ (suficientemente grande) $\exists h(K) > 0 / \forall x > h \Rightarrow f(x) > K$



Cálculo de límites en el infinito

Sabiendo que: $\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$, podemos calcular el límite de funciones como:

$(1 + 2/x)^x$, $(1 + 1/x)^{2.x}$, $(1 + 3/2x)^{4x}$,...

Ejemplo: calculemos el siguiente límite:

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$, debemos llevar esta expresión a la ya conocida que nos da como resultado el número e, para lo cual, operamos algebraicamente:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/2}\right)^x$$

El exponente debe ser de la forma x/2, para eso lo multiplicamos y lo dividimos por 2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/2}\right)^{2.x/2}$$

Reescribimos esta expresión de la siguiente forma:

$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x/2}\right)^{x/2}\right\}^2$ si x tiende a infinito, x/2 también tiende a infinito, por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x/2}\right)^{x/2}\right\}^2 = e^2$$

Otros límites en el infinito
Para poder calcular estos límites debemos usar el teorema que dice:

Si r es un número racional positivo, y c cualquier número real, entonces: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{c}{x^r} = 0$

Si además x^r está definida cuando x < 0, entonces: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{c}{x^r} = 0$

Ejemplos:
Calcular los siguientes límites, utilizando el teorema anterior:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^3} = 1+0 = 1$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{3x^2+1}\right)$

El numerador y el denominador tienden a ∞, cuando x tiende a ∞. Por lo tanto se llega a una forma indeterminada del tipo ∞/∞.
Una técnica para evitar esta indeterminación es: dividir numerador y denominador por la potencia más alta del denominador.
Dividimos, entonces, en nuestro caso por x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x/x^2+5/x^2}{3x^2/x^2+1/x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2/x+5/x^2}{3+1/x^2}\right) = \frac{0+0}{3+0} = 0$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+5}{3x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2/x^2+5/x^2}{3x^2/x^2+1/x^2}\right) = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3+8x}{9x^2+4}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3/x^2+8x/x^2}{9x^2/x^2+4/x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+8/x}{9+4/x^2}\right) = \frac{\infty+0}{9+0} = \infty$

Observando los ejemplos: 2, 3 y 4, podemos extraer algunas conclusiones sobre los límites de las funciones racionales cuando x tiende a infinito:

- En el ejemplo 2, el grado del numerador es menor que el del denominador, y el resultado es cero.
- En el ejemplo 3, los grados del numerador y denominador son iguales, y el límite resulta el cociente de los coeficientes principales de los polinomios del numerador y denominador, respectivamente.
- En el ejemplo 4, el grado del numerador es mayor que el del denominador, y el límite tiende a ∞.

Conclusión:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) = \begin{cases} \infty & \text{si el gr(p)} > \text{gr(q)} \\ 0 & \text{si el gr(p)} < \text{gr(q)} \\ a/b & \text{si el gr(p)} = \text{gr(q)} \end{cases}$$

Donde a y b son los coeficientes principales de p(x) y q(x), respectivamente.

En los ejemplos 2 y 3, los resultados obtenidos son las asíntotas horizontales de la función racional. En las funciones racionales, la asíntota derecha es la misma que la de la izquierda, pero no ocurre lo mismo generalmente en las funciones irracionales donde la asíntota derecha puede ser distinta de la izquierda.

Además de estas indeterminaciones del tipo ∞/∞, y 1^{∞} (esta última se obtiene de la expresión: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$, existen otras de la forma ∞-∞, en las cuales se multiplica y divide la expresión dada por otra cambiada de signo.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\infty-\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$$

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Veamos las siguientes gráficas:

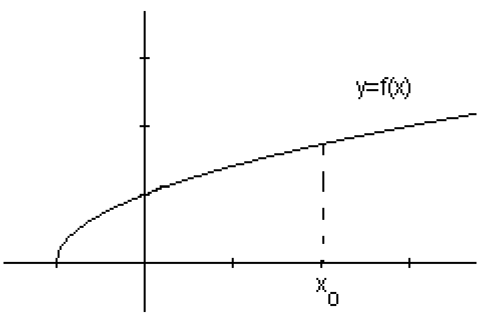


Gráfico 1

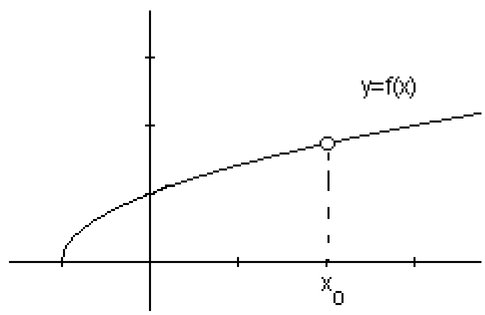
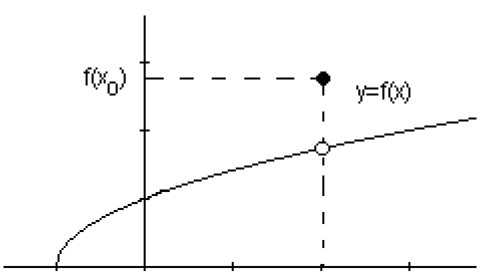


Gráfico 2



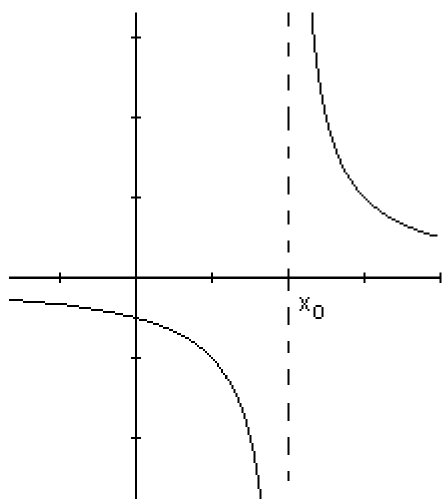


Grafico 4

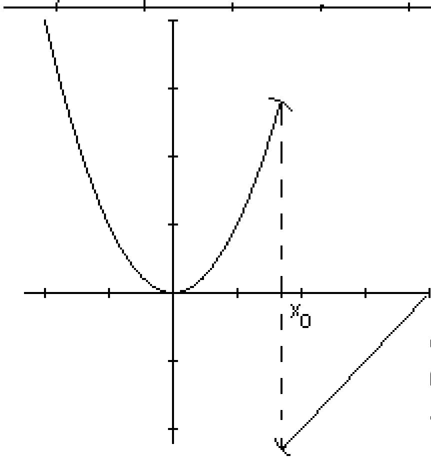


Grafico 5

Una función es continua en el punto x_0, siempre que su gráfica no sufra ninguna interrupción en x_0.

DEF.: Una función $y = f\left(x\right)$ ***es continua en el punto x_0*** si se verifican las siguientes condiciones:

1. Existe $f(x_0)$
2. Existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$
3. $f(x_0) = L$

Una función es continua en el intervalo (a;b) si es continua $\forall x \in$ (a;b)
Un punto x_0 donde la función f(x) no es continua, es un punto de discontinuidad.

TIPOS DE DISCONTINUIDAD

1) ***Discontinuidad evitable***: Se da cuando existe el valor del $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ y no existe el valor de función o el valor de función no coincide con el límite (o sea es evitable cuando no se cumplen las condiciones 1 ó 3 de la definición).
Se llama evitable porque la función puede ser redefinida para hacerla continua.
Los gráficos 2 y 3 corresponden a discontinuidades evitables. El 1 corresponde a una función continua.

2) ***Discontinuidad inevitable o esencial***: Es cuando no existe el límite, es decir que $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, ó alguno de los límites laterales es infinito.
Esta discontinuidad puede ser de dos tipos:

- ***Primera especie o salto finito***: Cuando los límites laterales son distintos y finitos.
- ***Segunda especie o salto infinito***: cuando al menos uno de los límites laterales es infinito.

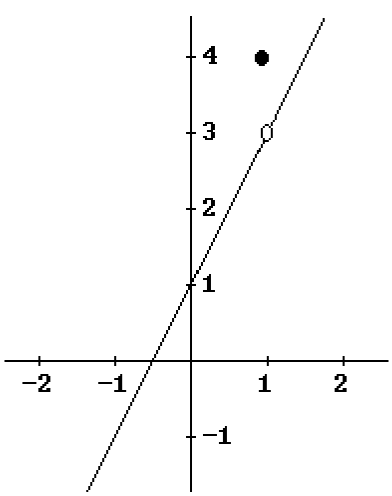
En el gráfico 4, la discontinuidad es inevitable de segunda especie ya que los límites laterales son infinitos. En el gráfico 5, la discontinuidad es inevitable de primera especie, ya que los límites laterales son distintos y finitos.

Ejemplos:

a) Sea la función f definida así: $f\left(x\right) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x \neq 1 \\ 4 & si\ x = 1 \end{cases}$

Determinar qué tipo de discontinuidad presenta en $x = 1$

Grafiquemos la función:



Verificamos cuáles de las condiciones de continuidad no se cumplen:

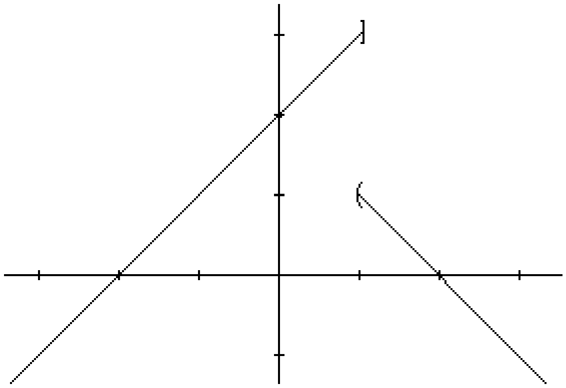
1) $\exists\, \mathrm{f}(1) = 4$
2) $\exists \lim\limits_{x\to 1}(2x+1) = 3$
3) $L \neq f(1)$

Al no cumplirse la condición 3, la función presenta una discontinuidad evitable en x=1.

Otro ejemplo:

Sea la función f definida así: $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x\leq 1 \\ -x+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$ determinar que tipo de discontinuidad presenta en x=1

Graficamos la función:



1) $\exists\, f(1)=3$;

2) $\lim_{x\to 1^-}(x+2)=3 \qquad \lim_{x\to 1^+}(-x+2)=1$

Como los límites laterales son distintos y finitos, entonces la función presenta una discontinuidad inevitable de primera especie.

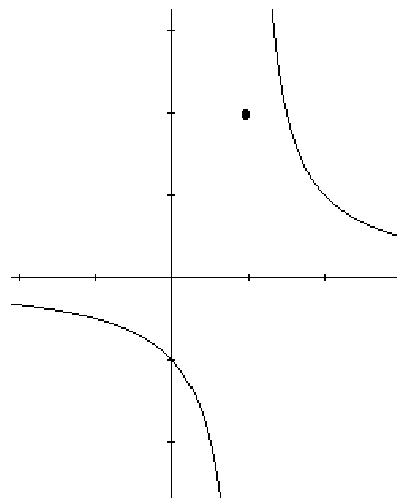
Sea la función f, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ 2 & \text{si } x=1 \end{cases}$$

determinar qué tipo de discontinuidad presenta en x=1

1) $\exists\, f(1)=2 \quad \lim_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty \qquad \lim_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$

Como los límites laterales son infinitos, la función presenta una discontinuidad
inevitable de segunda especie en x=1.

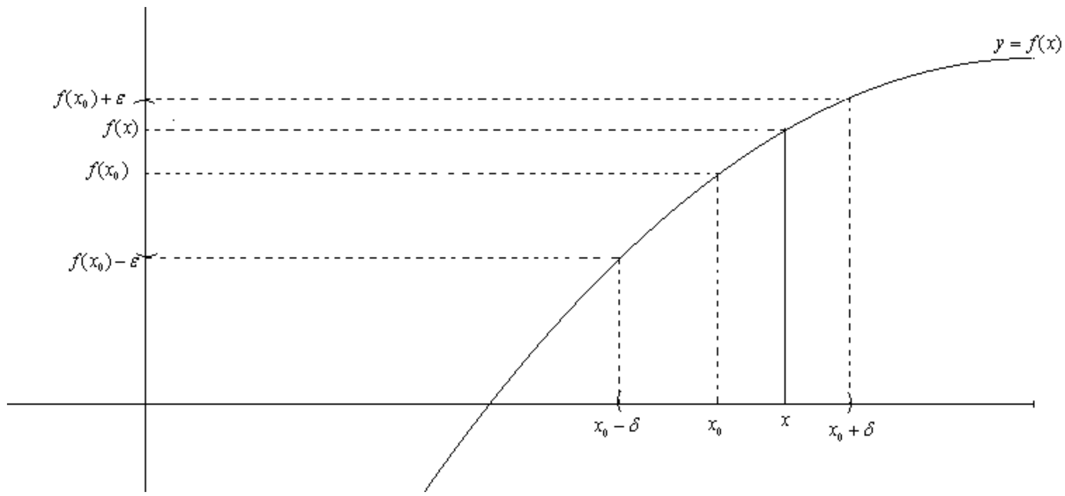


Teoremas sobre continuidad

I. Teorema de la permanencia de signo

Sea $f:A\to B$, tal que $y=f(x)$ sea continua en un punto $x_0\in A$, con $f(x_0)\neq 0$. Entonces existe un entorno de x_0 y amplitud δ, tal que para todo x perteneciente a dicho entorno, se verifica que $f(x)$ y $f(x_0)$ tienen el mismo signo.

Demostración:
Supondremos que $f(x_0)\neq 0$, en particular consideraremos $f(x_0)>0$ (si fuera $f(x_0)<0$ se demuestra en forma similar).
Grafiquemos:



Como la función es continua en x_0, entonces se verifica que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

y teniendo en cuenta la definición de límite de una función en un punto, podemos escribir:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta(\varepsilon) / si\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (1)$$

Como la definición es válida para cualquier valor de ε, también lo es, en particular para $\varepsilon = |f(x_0)| = f(x_0)$ (esto es válido ya que supusimos que $f(x_0) > 0$)

Reemplazando esta igualdad en (1), podemos escribir:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta(\varepsilon) / si\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < f(x_0)$$

Aplicando propiedades del valor absoluto, resulta:

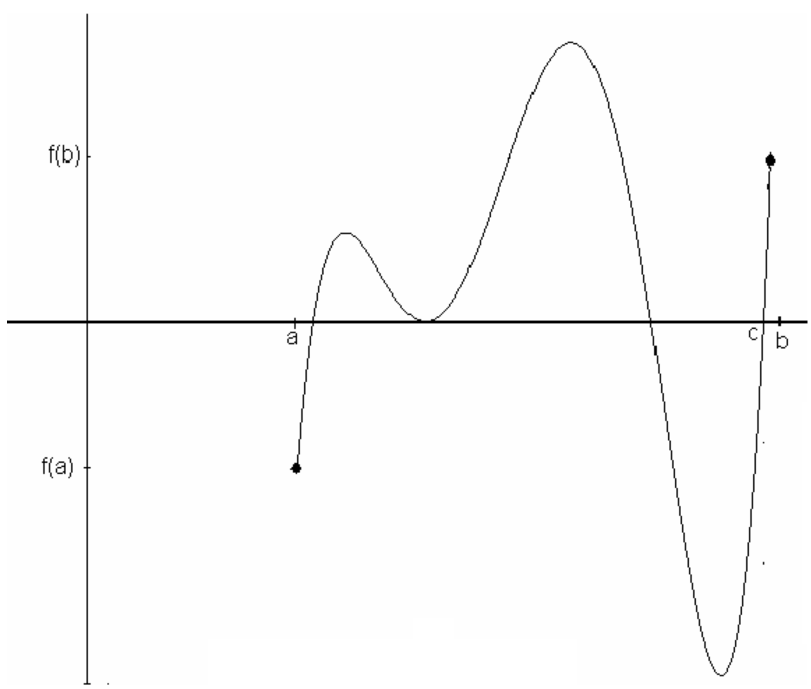
$$|f(x) - f(x_0)| < f(x_0) \Leftrightarrow -f(x_0) < f(x) - f(x_0) < f(x_0) \Leftrightarrow 0 < f(x) < 2f(x_0)$$

Hemos llegado así a probar que: $f(x) > 0$ en el entorno de x_0

II. Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, y se verifica que $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, entonces existe al menos un punto c en (a,b), tal que $f(c) = 0$.

(Geométricamente, esto significa que la gráfica de una función continua que empieza por debajo (ó por encima) del eje horizontal y termina por encima (ó por debajo) del mismo, debe cruzar a este eje en algún punto, como en el gráfico)



Demostración
Vamos a suponer que $f(a)<0$ y $f(b)>0$.
Definimos un conjunto X, tal que:

$X=\{x\in[a,b]/ f(x)\leq 0\}$, es decir que este conjunto está formado por todos los elementos del $[a,b]$, cuyos transformados son menores o iguales que cero.

Podemos asegurar que el conjunto $X\neq\varnothing$, ya que $a\in X$ porque supusimos que $f(a)<0$.
Además el conjunto X está acotado ya que los elementos de este conjunto son menores que b, donde $f(b)>0$. Por ser $X\neq\varnothing$ y acotado, el conjunto X tiene un supremo, que es la menor de las cotas superiores.
Si c es el supremo, vamos a probar que $f(c)=0$ y así habremos demostrado el teorema.

1) Veamos si $f(c)>0$
Si $f(c)>0$, por el teorema de la permanencia de signo, existe un entorno de c y amplitud δ, en el cual $f(x)$ y $f(c)$ tienen el mismo signo (ambos positivos), quiere decir que a la izquierda de c hay puntos que también son cota superior de X, por lo tanto c no puede ser el supremo. Entonces $f(c)$ no es mayor que cero.

2) Veamos si $f(c)<0$
Si $f(c)<0$, por el teorema de la permanencia de signo, existe un entorno de c y amplitud δ, en el cual $f(x)$ y $f(c)$ tienen el mismo signo (ambos negativos). En particular, a la derecha de c hay elementos de X cuyo transformados son negativos, entonces c no puede ser cota superior, con lo cual $f(c)$ no puede ser menor que cero.

Podemos asegurar entonces que $f(c)=0$, ya que $f(c)$ no es mayor ni menor que cero.
Además, como $f(a)<0$ resulta que $c\neq a$, y como $f(b)>0$, resulta que $c\neq b$, por lo tanto $c\in(a,b)$. Así queda demostrado el teorema.

Ejemplo:

1) *Dada la función $f(x)=x^3+3x-5$, determinar si existe un valor de x, tal que: $f(x)=0$.*

   Debemos determinar cuándo la gráfica corta al eje x.
   La función dada, crece a medida que x aumenta, entonces la ecuación $f(x)=0$, no puede tener más de una solución real.
   Utilicemos el teorema de Bolzano. Para ello, busquemos dos números en que $f(x)$, tenga valores opuestos. Por ejemplo, $f(1)=-1$ y $f(2)=9$. Como $f(x)$ es continua en el segmento $[1,2]$, existe un valor de $x\in(1,2)$, tal que $f(x)=0$.
   El valor $x=1$, se puede tomar como una aproximación de la solución, porque $f(1)$ está más cerca del cero que $f(2)$.
   Si deseamos una aproximación de la solución con un error menor que 0,1; dividimos el segmento $[1,2]$, en diez partes y hallamos los valores de $f(x)$ en dos décimas sucesivas, de tal manera que dichos valores tengan signos opuestos.

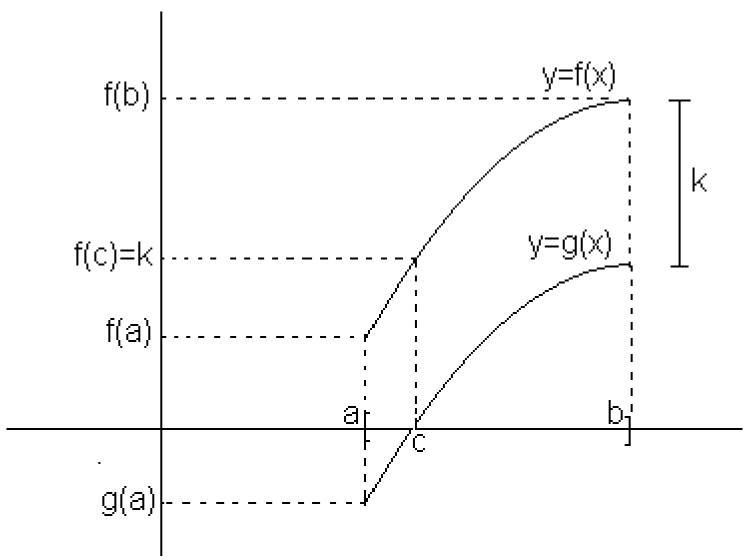
Haciendo los cálculos, obtenemos que $f(1,1) = -0,369$ y $f(1,2) = 0,328$. La solución de la ecuación $f(x) = 0$, se encuentra entonces entre $1,1\; y\; 1,2$. Como $\left| f(1,1) \right| > \left| f(1,2) \right|$, podemos tomar $1,2$ como el valor aproximado de la solución y esta aproximación es correcta dentro de un error de 0,1. Si queremos una aproximación mejor reiteramos el procedimiento.

2) Demostrar que la ecuación: $4x^3 - 2x - 1 = 0$, *tiene una solución entre 0 y 1.*

Consideremos la función $f(x) = 4x^3 - 2x - 1$. Es continua en $[0,1]$, verificándose que $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$. Por el teorema de Bolzano, va a existir un $x \in (0,1)$, tal que en dicho valor $f(x) = 0$.
Si queremos aproximar la solución con un error menor que 0,1; dividimos el segmento $[0,1]$ en diez partes iguales y hallamos dos décimas sucesivas donde los valores de $f(x)$ sean de signos opuestos.
Efectuando los cálculos resulta que: $f(0,8) = -0,552 < 0$ y $f(0,9) = 0,116 > 0$. La solución se encuentra, entonces entre 0,8 y 0,9. Podemos tomar 0,9 como el valor aproximado de la solución dentro de un error de 0,1.

III. Teorema del valor intermedio

Si $f(x)$ *es una función continua en* $[a,b]$ *y* k *un valor que verifica:* $f(a) < k < f(b)$ *entonces existe algún* c *en* (a,b), *tal que* $f(c) = k$



Demostración:
Debemos probar que siendo $f(x)$ continua en el intervalo $[a,b]$ y $f(a) < k < f(b)$, debe existir un valor $c \in (a,b) / f(c) = k$.
Definimos una nueva función: $g(x) = f(x) - k$, que es continua ya que $f(x)$ es continua y está desplazada en la dirección del eje y.
Sabemos que $f(a) < k < f(b)$, entonces:

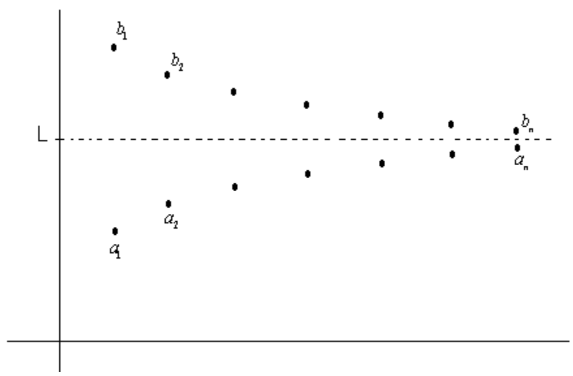
$g(a) = f(a) - k < 0$ porque $f(a) < k$ $\qquad$ $g(b) = f(b) - k > 0$ porque $f(b) > k$

Por ser $g(x)$ continua y además ser $g(a) < 0 \ y \ g(b) > 0$, estamos en las condiciones del teorema de Bolzano, por lo tanto: $\exists \, c \in (a,b) / g(c) = 0$. Y como además sabemos que: $g(c) = f(c) - k$, resulta que $f(c) = k$, con lo cual queda demostrado el teorema.

Intervalos encajados

Sea una sucesión $\{a_n\}$ creciente, y una sucesión $\{b_n\}$ decreciente, tal que $a_n < b_n \ \forall n$. Es decir que se verifica:

$$\underbrace{a_1 \le \underbrace{a_2 \le a_3 \le .... \le \underbrace{a_n \le ...... \le b_n}_{I_n} \le b_{n-1} \le ...... \le b_2}_{I_2} \le b_1}_{I_1}$$



Si calculamos el $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$, y lo mismo ocurre si calculamos el $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = L$. Es decir que si tenemos intervalos encajados, cuando calculamos el límite cuando $n \to \infty$, entonces $\{a_n\} \ y \ \{b_n\}$ tienden a un único valor.

Teorema de Weirstrass

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$, existen dos valores $m \, y \, \mathrm{M}$ pertenecientes al $[a,b]$ tal que: $f(m) \le f(x) \le f(M)$

Vamos a demostrar que $f(x)$ tiene una cota superior por ser continua.

Supongamos que $f(x)$, no tenga cota superior (por el absurdo). Dividamos $[a,b]$ en dos intervalos iguales, donde uno de ellos al menos, no es acotado. Luego a este nuevo intervalo lo dividimos por la mitad donde al menos uno, es no acotado y así sucesivamente. Seguimos haciendo intervalos encajados que cuando $n \to \infty$, nos queda solamente un punto donde la función no es acotada superiormente, por lo tanto la función no es continua en dicho punto, lo que contradice la hipótesis de que $f(x)$ es continua en $[a,b]$. Por lo tanto $f(x)$ tiene un supremo $f(M)$.

Con un razonamiento similar se puede ver que $f(x)$ tiene un ínfimo $f(m)$.