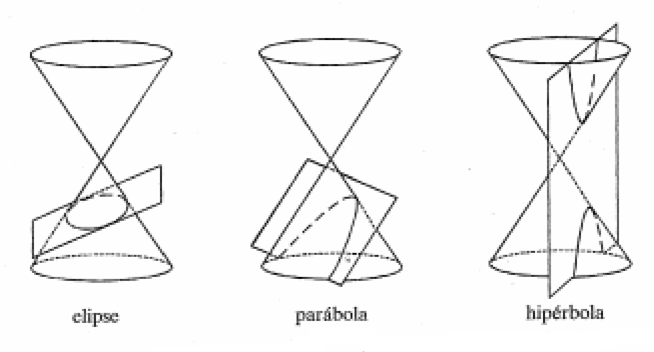
CÓNICAS

Aquellas curvas que pueden obtenerse al cortar un cono de dos mantos con un plano, se conocen como *secciones cónicas*.
Según la dirección en que el plano corta al cono, se pueden obtener las distintas cónicas:

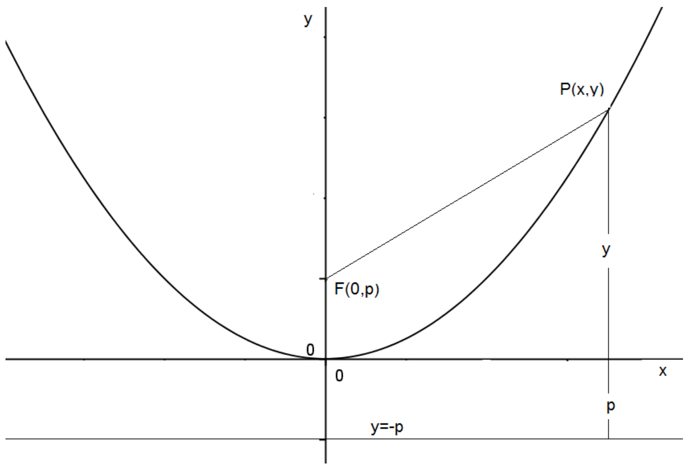
- parábola
- elipse
- hipérbola.



El círculo, al ser un caso particular de la elipse, también es una cónica. Se obtiene al cortar al cono con un plano perpendicular al eje del cono.

Parábola
Ya hemos trabajado anteriormente con parábolas y sus respectivas ecuaciones, ahora vamos a obtener las ecuaciones de estas curvas a partir de las fórmulas de distancia entre puntos, y entre un punto y una recta.

Def: Una parábola es el conjunto de puntos del plano, que equidistan de un punto fijo F (foco) y una recta fija (directriz). El punto que está a la misma distancia del foco que de la recta directriz se llama *vértice de la parábola*. La recta que pasa por el foco, perpendicular a la directriz se llama *eje de la parábola*.
Consideremos un caso particular de la parábola, colocando el vértice en el origen, y su directriz paralela al eje x.



Cuando el foco es el punto $F(0,p)$, la ecuación de la directriz es $y=-p$.
Si $P(x,y)$ es un punto de la parábola, la distancia de P al foco es:

$$dist.(P,F)=\sqrt{x^2+(y-p)^2}$$

Y la distancia de P a la directriz es $|y+p|$. Como de acuerdo a la definición de parábola, estas dos distancias deben ser iguales, podemos escribir:

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=|y+p|$$

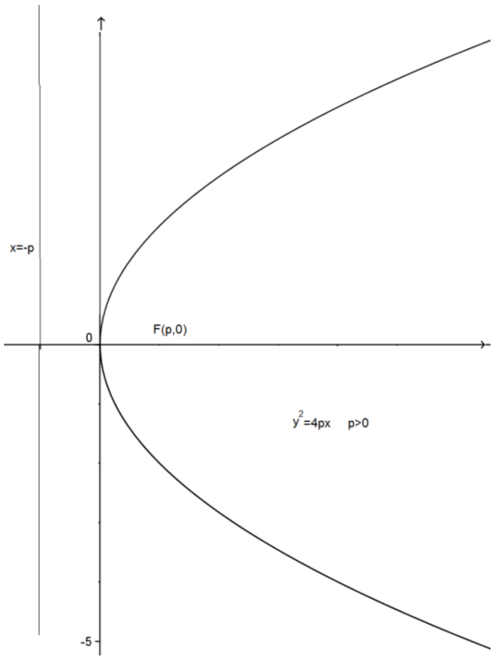
Elevamos al cuadrado, simplificamos y obtenemos una ecuación equivalente:

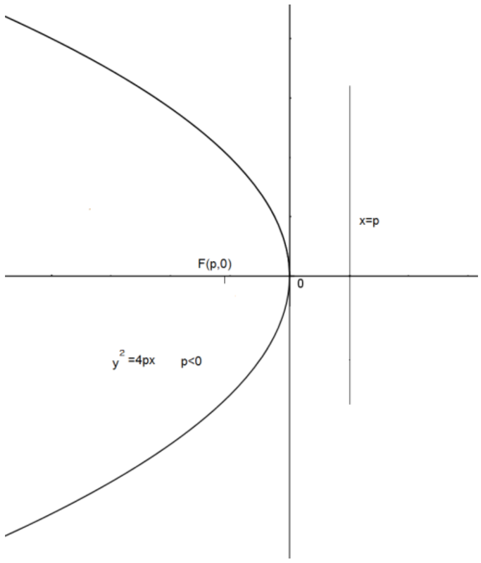
$$\begin{aligned}
x^2+(y-p)^2&=|y+p|^2\\
x^2+y^2-2yp+p^2&=(y+p)^2\\
x^2+y^2-2yp+p^2&=y^2+2yp+p^2\\
x^2&=4yp
\end{aligned}$$

La ecuación de una parábola con foco en $(0,p)$ y directriz $y=-p$, es: $x^2=4py$ (1)

Si reemplazamos $\frac{1}{4p}=a$, la ecuación (1) se transforma en $y=ax^2$. Si $p>0$, las ramas de la parábola se abren hacia arriba, si $p<0$, se abren hacia abajo.
$p<0$.

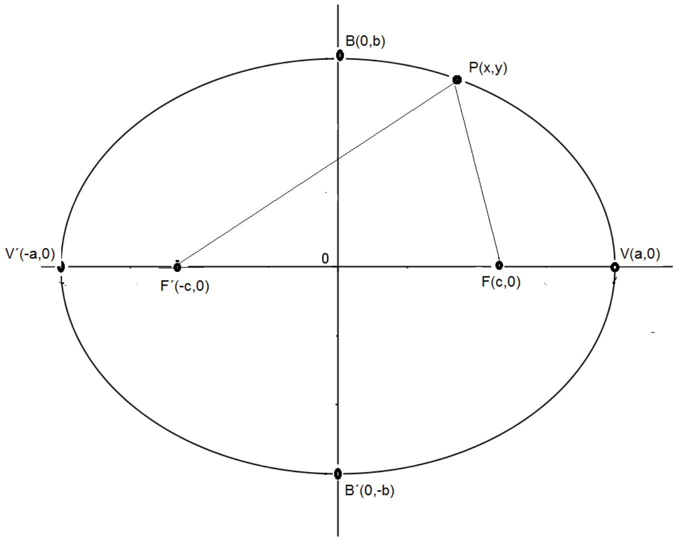
Si intercambiamos x e y, en la ecuación (1), obtenemos: $y^2=4px$, que es la ecuación de una parábola con foco en $(p,0)$ y directriz de ecuación $x=-p$. La parábola se abre a la derecha si $p>0$ y hacia la izquierda cuando $p<0$.





Elipse
La elipse es el conjunto de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. El punto medio de los focos es el centro de la elipse.

Elipse con centro en el origen: elipse horizontal.
Comencemos con el análisis de una elipse horizontal con centro en el origen de coordenadas, y con focos en el eje x.



Para que un punto $P(x, y)$ pertenezca a la elipse, debe satisfacer:

$$d\left(P,F\right)+d\left(P,F'\right)=k$$

Donde k es una constante y $k>0$.
Sustituimos las coordenadas de $P, F\ y\ F'$ en la fórmula de la distancia entre dos puntos y obtenemos:

$$\sqrt{\left(x-c\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}=k$$

Para eliminar los radicales, pasamos uno de ellos al otro miembro y elevamos al cuadrado:

$$\left(\sqrt{\left(x-c\right)^2+y^2}\right)^2=\left(k-\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}\right)^2$$

Operando, obtenemos:

$$\left(x-c\right)^2+y^2=k^2-2k\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}+\left(x+c\right)^2+y^2$$

$$x^2-2xc+c^2+y^2=k^2-2k\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}+x^2+2xc+c^2+y^2$$

Cancelando y reordenando los términos:

$$-2xc=k^2-2k\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}+2xc$$

Haciendo pasaje de términos:

$$-4xc-k^2=-2k\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}$$

Multiplicamos por (-1) y elevamos al cuadrado:

$$\left(4xc+k^2\right)^2=\left(2k\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}\right)^2$$

Resolvemos los cuadrados:

$$16x^2c^2+8xck^2+k^4=4k^2\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$$

$$16x^2c^2+8xck^2+k^4=4k^2\left[(x+c)^2+y^2\right]$$

$$16x^2c^2+8xck^2+k^4=4k^2\left[x^2+2xc+c^2+y^2\right]$$

$$16x^2c^2+8xck^2+k^4=4k^2x^2+8k^2xc+4k^2c^2+4k^2y^2$$

Cancelamos el término: $8k^2xc$, y obtenemos:

$$16x^2c^2+k^4=4k^2x^2+4k^2c^2+4k^2y^2$$

Reordenamos los términos:

$$k^4-4k^2c^2=4k^2x^2-16x^2c^2+4k^2y^2 \qquad (1)$$

Vamos a hallar el valor de k, para luego reemplazarlo en la ecuación (1).

Cálculo de k

1º) Como el punto B pertenece a la elipse, se debe verificar que la suma de las distancias de este punto a los dos focos tiene que ser igual al valor k. Entonces, se puede escribir:

$$d(B,F)+d(B,F')=k$$

Sustituimos las coordenadas de B,F,F' y aplicamos la fórmula de distancia:

$$\sqrt{c^2+b^2}+\sqrt{c^2+b^2}=k$$

$$2\sqrt{c^2+b^2}=k \qquad (I)$$

2º) Como el punto V pertenece a la elipse, se debe verificar que la suma de las distancias de este punto a los dos focos tiene que ser igual al valor k. Entonces, se puede escribir:

$$d(V,F)+d(V,F')=k$$

Sustituimos las coordenadas de V,F,F' y aplicamos la fórmula de distancia, y obtenemos el valor de k:

$$a-c+a+c=k \Rightarrow 2a=k \qquad (II)$$

De (I) y (II), obtenemos además: $a^2=b^2+c^2$

Reemplazamos en la ecuación (1), $k=2a$, obtenemos:

$$(2a)^4-4(2a)^2c^2=4(2a)^2x^2-16x^2c^2+4(2a)^2y^2$$

$$16a^4-16a^2c^2=16a^2x^2-16x^2c^2+16a^2y^2$$

Cancelando el 16, resulta:

$$a^4-a^2c^2=a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2$$

Extraemos factor común:

$$a^2\left(a^2-c^2\right)=x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2$$

Reemplazamos $b^2=a^2-c^2$:

$$a^2b^2=x^2b^2+a^2y^2$$

Dividimos los dos miembros por: a^2b^2

$$\frac{a^2b^2}{a^2b^2} = \frac{x^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2}$$

Obtenemos así, la ecuación de la elipse:

Elipse horizontal con centro en el origen : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a \geq b > 0$
focos en $(\pm c, 0)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$, y vértices en $(\pm a, 0)$. (2)

Si de esta ecuación, queremos obtener una función, despejamos y, y restringimos el dominio y la imagen.

a) $f(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \;:\; [-a,a] \to [0,b]$

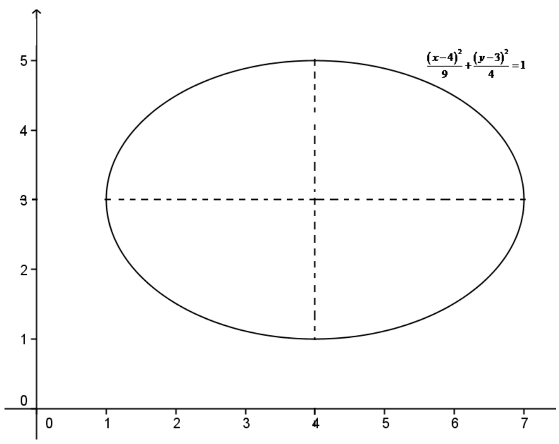
b) $g(x) = -\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \;:\; [-a,a] \to [-b,0]$

El dominio surge de considerar: $a^2 - x^2 \geq 0$, de donde se deduce que

$$a^2 \geq x^2 \Rightarrow |x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a,a]$$

Si la elipse está centrada en el punto (x_0, y_0), su ecuación es:

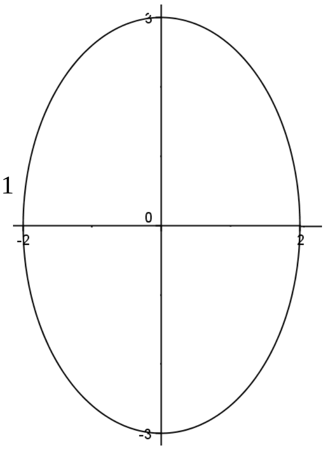
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$



Si los focos están sobre el eje y, en los puntos $(0, \pm c)$, se obtiene una elipse vertical cuya ecuación resulta de intercambiar x por y, en la ecuación (2).

Elipse vertical con centro en el origen : $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \qquad a \geq b > 0$
focos en $(0, \pm c)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$, y vértices en $(0, \pm a)$.

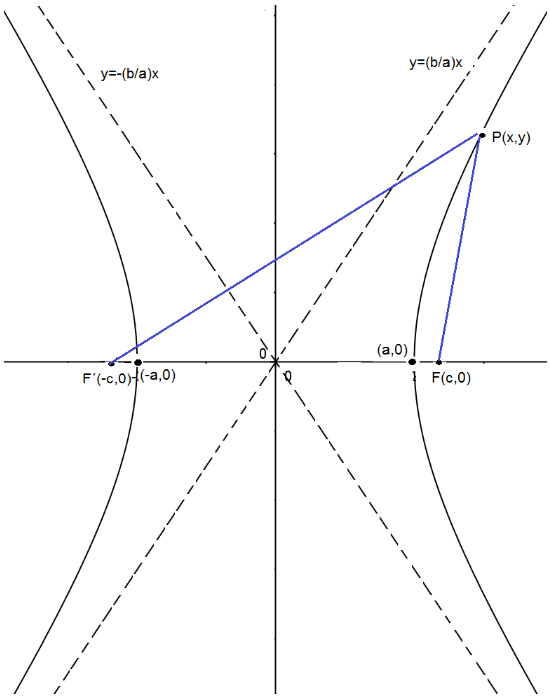
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$



Hipérbola
Una hipérbola es el conjunto de puntos en el plano cuyas distancias a dos puntos fijos (focos) tienen una diferencia constante. El punto medio entre los focos se llama centro de la hipérbola.

Hipérbola con centro en el origen: hipérbola horizontal.
Comencemos con el análisis de una hipérbola horizontal con centro en el origen de coordenadas, y con focos en el eje x.
Supongamos que las coordenadas de los focos son $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$. Para que un punto $P(x,y)$ pertenezca a una hipérbola, debe satisfacer:

$$d(P,F)-d(P,F')=k \quad \text{o} \quad d(P,F')-d(P,F)=k$$



Si procedemos en forma similar a lo trabajado en la elipse, llegaremos a la ecuación de la hipérbola.

Hipérbola horizontal con centro en el origen :	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	(3)
con focos en $(\pm c,0)$, donde $c^2=a^2+b^2$, vértices en $(\pm a,0)$, y asíntotas $y=\pm\dfrac{b}{a}x$.		

Si de esta ecuación, queremos obtener una función, despejamos y, y restringimos el dominio y la imagen.

a) $f(x)=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ :\ (-\infty,-a]\cup[a,+\infty)\to[0,+\infty)$

b) $g(x)=-\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ :\ (-\infty,-a]\cup[a,+\infty)\to(-\infty,0]$

El dominio surge de considerar: $x^2-a^2\geq 0$, de donde se deduce que

$$x^2\geq a^2 \Rightarrow |x|\geq a \Leftrightarrow x\in(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$$

Asíntotas de la hipérbola
Si de la ecuación de la hipérbola, despejamos y, obtenemos:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Observamos que si $|x|$ es muy grande, $x^2 - a^2$ es "casi igual" a x^2, y, por lo tanto, $\sqrt{x^2 - a^2}$ es casi igual a $|x|$, es decir, para x grande (positivo o negativo), y es "casi igual" a $\pm \frac{b}{a}x$, o sea que las ramas de la hipérbola se aproximan a las rectas:

$$y = \frac{b}{a}x \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{b}{a}x$$

……………….

Si los focos de la hipérbola están en el eje y, e invertimos las variables x e y, en la ecuación (3), obtenemos la ecuación:

Hipérbola vertical con centro en el origen : $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ (3)

con focos en $(0, \pm c)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$, vértices en $(0, \pm a)$, y asíntotas $y = \pm \dfrac{a}{b}x$.