INTRODUCCIÓN
DESIGUALDADES EN LOS NÚMEROS REALES- INTERVALOS- VALOR ABSOLUTO-

DESIGUALDADES EN LOS REALES

Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son dos números reales cualesquiera, se dice que $\boldsymbol{a}$ es mayor que $\boldsymbol{b}$ $(a > b)$ si $a - b$ es positivo. De la misma manera $\boldsymbol{a}$ es menor que $\boldsymbol{b}$, si $a - b$ es negativo.
En símbolos, escribimos:

$$a)\ a > b \Leftrightarrow a - b > 0$$

$$b)\ a < b \Leftrightarrow a - b < 0$$

$$c)\ a = b \Leftrightarrow a - b = 0$$

Las desigualdades que usaremos son: $a < b;\ a > b;\ a \leq b;\ a \geq b$
Se dice que $"a$ es mayor o igual a $b": a \geq b \Leftrightarrow a > b$ o $a = b$
Se dice que $"a$ es menor o igual a $b": a \leq b \Leftrightarrow a < b$ o $a = b$

Para poder trabajar con desigualdades es necesario la presentación de algunas propiedades:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \text{Si } a < b \text{ y } b < c \Rightarrow a < c \\ 2)\ \text{Si } a < b \text{ y } c < d \Rightarrow a + c < b + d \\ 3)\ \text{Si } a < b \text{ y } k \text{ es cualquier numero real } \Rightarrow a \pm k < b \pm k \end{array}}$$

La tercera propiedad indica que si a ambos miembros de una desigualdad se suma o se resta un mismo número real, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que la dada.
Por ejemplo:

3 < 4, si se suma a ambos miembros el número 7, resulta: 3+7 < 4+7

3 < 4, si se resta a ambos miembros el número 7, resulta: 3-7 < 4-7

$$\boxed{4)\ \text{Si } a < b \text{ y } k > 0 \Rightarrow a.k < b.k}$$

Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican por un número real positivo, la desigualdad no varía su sentido.
Ejemplo:
3 < 4, si se multiplican ambos miembros por 5, resulta: 3.5 < 4.5

$$\boxed{5)\ \text{Si } a < b \text{ y } k < 0 \Rightarrow a.k > b.k}$$

Al multiplicar los dos miembros de una desigualdad por un número negativo, se invierte el sentido de la desigualdad.
Ejemplo:
3 < 4, si se multiplican ambos miembros por -5, resulta: 3.(-5) > 4.(-5)

RESOLVIENDO DESIGUALDADES
Hallar los valores de x que verifican la siguiente desigualdad:

$$3x-5<7$$

Usando las propiedades anteriores, tenemos:

$$3x-5+5<7+5 \quad \text{Sumar 5 en ambos miembros}$$

$$3x<12$$

$$\frac{1}{3}.3x<\frac{1}{3}.12 \text{ Multiplicar por } \frac{1}{3} \text{ en ambos miembros}$$

$$x<4$$

0 sea que todos lo números reales menores que 4 son solución de la desigualdad dada. Es conveniente, una vez resuelta la desigualdad, comprobar con algunos valores de x que son solución para ver si la satisfacen. De la misma manera se pueden tomar valores que no son solución para ver realmente que no cumplen la desigualdad. Por ejemplo: cuando x=1, ó x=0 se cumple la desigualdad, pero no cuando x=7.

Tomemos otro ejemplo:

$$-2x+8<12$$

$$-2x+8-8<12-8 \quad \text{Restar 8 en ambos miembros}$$

$$-2x<4$$

$$-\frac{1}{2}.(-2x)>4.\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{Multiplicar por } -\frac{1}{2} \text{ en ambos miembros.}$$

$$x>-2 \qquad \text{(Cambia el sentido de la desigualdad)}$$

Todos los números reales mayores que -2 son solución de la desigualdad dada.

DESIGUALDADES DOBLES
Dos desigualdades que se verifican simultáneamente se pueden escribir como una doble desigualdad. Por ejemplo: si $a<x$ y $x<c$, es natural escribir: $a<x<c$
Ejemplo: Hallar los valores de x que verifican:

$$-2\leq 4-3x\leq 16$$

esta desigualdad doble engloba estas dos desigualdades:

$$4-3x\geq -2 \quad \text{y} \quad 4-3x\leq 16$$

esto indica que se pueden resolver estas dos desigualdades por separado y luego intersecar las soluciones para encontrar la solución total, o tratarlas simultáneamente.
Primero la resolvemos en forma simultánea.
Restamos 4 en los tres miembros:

$$-2-4\leq 4-3x-4\leq 16-4 \Rightarrow -6\leq 3x\leq 12$$

Multiplicamos por $\left(-\frac{1}{3}\right)$, con lo cual se invierte la desigualdad, es decir:

$$\frac{-6}{-3}\geq \frac{3}{-3}x\geq \frac{12}{-3} \quad \text{(multiplicar por } -\tfrac{1}{3} \text{ es lo mismo que dividir por } -3\text{)}$$

$$2\geq x\geq -4$$

El conjunto solución lo forman los x que cumplen simultáneamente ser mayores o igual a -4 y menores o igual a 2.
Resolvemos ahora las desigualdades por separado:

a) $4-3x \geq -2$ y b) $4-3x \leq 16$

a) $4-3x \geq -2 \Leftrightarrow -3x \geq -6 \Leftrightarrow 3x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 2$

b) $4-3x \leq 16 \Leftrightarrow -3x \leq 12 \Leftrightarrow 3x \geq -12 \Leftrightarrow x \geq -4$

Es decir, por un lado se obtienen como solución los $x \leq 2$, y por el otro, los $x \geq -4$. Para encontrar la solución general, debemos hallar la intersección entre estas dos soluciones, con lo cual obtenemos que los x deben ser, a la vez, mayores o iguales que -4 y menores o iguales a 2, esto es: $-4 \leq x \leq 2$.

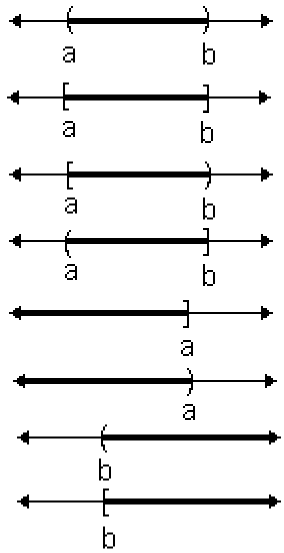
INTERVALOS

Existe una notación muy útil para expresar conjuntos de números que cumplen una determinada condición. Por ejemplo para denotar los números reales comprendidos entre 2 y 5, se usará el intervalo abierto: $(2;5)=\{x \in R / 2 < x < 5\}$. En general: $(a;b)=\{x \in R / a < x < b\}$, es el conjunto de todos los números reales mayores que a y menores que b. Los puntos a y b no están contenidos en el intervalo. Los intervalos que incluyen a los extremos, se llaman cerrados y se denotan por: $[a;b]=\{x \in B / a \leq x \leq b\}$.

Tipos de intervalos reales:

Intervalo	Notación de intervalo	Notación de conjuntos
abierto	$(a;b)$	$\{x \in R / a < x < b\}$
cerrado	$[a;b]$	$\{x \in R / a \leq x \leq b\}$
semi-abierto	$[a;b)$	$\{x \in R / a \leq x < b\}$
	$(a;b]$	$\{x \in R / a < x \leq b\}$
infinitos	$(-\infty;a]$	$\{x \in R / x \leq a\}$
	$(-\infty;a)$	$\{x \in R / x < a\}$
	$(b;\infty)$	$\{x \in R / x > b\}$
	$[b;\infty)$	$\{x \in R / x \geq b\}$

Gráfica



Volviendo a los ejemplos de desigualdades vistos anteriormente, podemos escribir las soluciones utilizando la notación de intervalos introducida recientemente.

En el primer ejemplo donde habíamos obtenido como solución: $x < 4$, podemos decir que la solución son los $x \in (-\infty;4)$. En el segundo ejemplo, serán los $x \in (-2;\infty)$ mientras que en la desigualdad doble serán los $x \in [-4;2]$

Ejercicios propuestos:

Hallar el conjunto solución de las siguientes desigualdades y representar dicho conjunto en la recta numérica:

a) $4x+2 > x-7$

b) $\frac{3}{2}x-\frac{3}{4} \leq 0$

c) $5-x < 10+4x$

d) $-4 < 8-4x \leq 10$

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real x, expresado por $|x|$, se define como:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

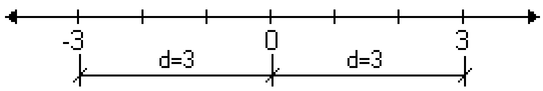
Si x es positivo o cero, el valor absoluto de x coincide con el valor de x; si x es negativo, el valor absoluto es el número positivo $-x$.

$|5| = 5; \quad |-3| = -(-3) = 3; \quad |0| = 0$

De la definición resulta que el valor absoluto de un número real es siempre un número no negativo: $\boxed{|x| \geq 0}$

Gráficamente, dado un número cualquiera x en la recta real, el valor absoluto de x da la distancia de dicho número hasta el cero

Si $|x| = 3 \Rightarrow x = 3$ o $x = -3$



Se deduce claramente que $\boxed{|x| = |-x|}$.

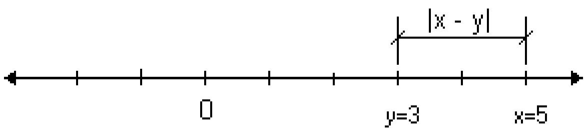
Sí necesitamos escribir la **distancia entre dos puntos** reales cualesquiera x e y, la misma puede ser expresada de la siguiente manera:

$\boxed{|x - y| = |y - x| \quad \text{distancia entre los puntos x e y}}$

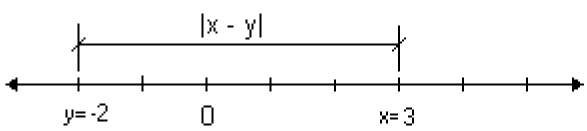
sin importar en qué lugar de la recta estén ubicados x e y. Esto se debe a que:

$$|x - y| = \begin{cases} x - y & \text{si } x - y \geq 0 \Leftrightarrow x \geq y \\ -(x - y) = y - x, & \text{si } x - y < 0 \Leftrightarrow x < y \end{cases} \qquad |y - x| = \begin{cases} y - x & \text{si } y - x \geq 0 \Leftrightarrow y \geq x \\ -(y - x) = x - y, & \text{si } y - x < 0 \Leftrightarrow y < x \end{cases}$$

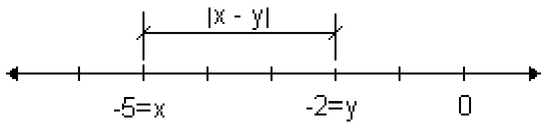
Ej. 1: La distancia entre 3 y 5, es $|5 - 3| = |3 - 5| = 2$



Ej. 2: La distancia entre –2 y 3, es $|3 - (-2)| = |-2 - 3| = 5$



Ej. 3: La distancia entre -5 y -2, es $|-2 - (-5)| = |-5 - (-2)| = 3$



Valor absoluto en ecuaciones y desigualdades

La relación entre el álgebra y la geometría es una herramienta muy importante cuando se trabaja con ecuaciones y desigualdades que incluyen el valor absoluto. Por ejemplo, el enunciado algebraico: $|x-1| = 2$ se puede interpretar geométricamente que los x que verifican esta ecuación son los que se encuentran a una distancia del 1 igual a dos unidades. Es decir la solución son los puntos: -1 y 3, que se escribe: $S = \{-1; 3\}$.

Esta ecuación también se puede resolver a partir de la definición de valor absoluto:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \;\; x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & si \;\; x-1 < 0 \end{cases}$$

1º) Si $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, se puede asegurar que $|x-1| = x-1$, con lo cual reemplazando en la ecuación resulta: $x-1 = 2 \Rightarrow \boxed{x=3}$

2º) Si $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$, se puede asegurar que $|x-1| = -(x-1) = -x+1$, con lo cual reemplazando en la ecuación resulta: $-x+1 = 2 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

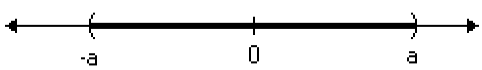
Ejercicios propuestos: Resolver

$$a) \; |4x+3| = 7 \quad Sol.: \; \left\{-\frac{5}{2};\, 1\right\} \;;\; b) \; |3x-8| = 4 \quad Sol.: \; \left\{\frac{4}{3}; 4\right\}$$

Propiedades del valor absoluto

La desigualdad $|x| < a$, con $a > 0$ indica que en la recta real, la distancia desde x al origen es menor que a unidades; esto es : $-a < x < a$, que es equivalente a decir que x pertenece al intervalo abierto $(-a; a)$. Esto se puede formalizar en la siguiente propiedad:

$$\boxed{\forall x \in R, \forall a > 0, \text{ se verifica que: } |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a} \quad (1)$$



Teniendo en cuenta la definición de valor absoluto, podemos demostrar esta propiedad, ya que:

1º. Si $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$, reemplazando esta última expresión en el primer miembro de la desigualdad (1), resulta $x < a$, de donde obtenemos una primera parte de la solución total:
$S_1 = \{x \in R \,/\, x \geq 0 \wedge x < a\} = [0; a)$

2º. Si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, reemplazando en la desigualdad (1), resulta que $-x < a \Leftrightarrow x > -a$, de donde obtenemos la segunda parte de la solución total:
$S_2 = \{x \in R \,/\, x < 0 \wedge x > -a\} = (-a; 0)$

La solución de $|x| < a$ estará dada por la unión de los conjuntos S_1 y S_2 , es decir:

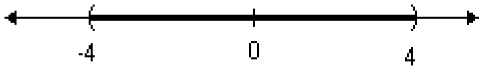
$S = S_1 \cup S_2$

$S = \{x \in R / -a < x < a\} = (-a; a)$

Ejemplo:

Hallar los x que verifican: $|x| < 4$

Gráficamente, esta expresión está representando a los x de la recta real cuya distancia al origen es menor que 4.

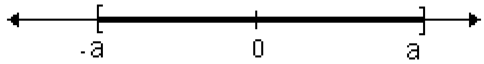


Los x que se encuentran entre -4 y 4, representan la solución. Es decir: $x \in R(-4; 4) \Leftrightarrow -4 < x < 4$

La desigualdad inicial puede ser resuelta también, utilizando la propiedad (1), esto es: $|x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$

Esta propiedad también es válida para: "$\leq$", en este caso tendremos:

$\boxed{\forall x \in R, \forall a > 0, \text{ se verifica que: } |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a}$ (2)

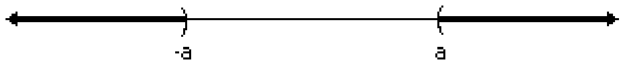


La desigualdad $|x| > a$, con $a > 0$, indica que en la recta real, la distancia desde x al origen es mayor que a, esto indica que $x > a \vee x < -a$, lo que es equivalente a decir que $x \in (-\infty; -a) \cup (a; \infty)$.

Esto se formaliza en la siguiente propiedad:

$\boxed{\forall x \in R, \forall a > 0, \text{ se verifica que: } |x| > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a}$ (3)

Gráficamente será:



Procediendo como en el caso anterior, resulta que:

1º. Si $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$, reemplazando esta última expresión en el primer miembro de la desigualdad (3), resulta $x > a$, de donde obtenemos una primera parte de la solución total:

$S_1 = \{x \in R / x > a\} = (a; \infty)$

2º. Si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, reemplazando en la desigualdad (3), resulta que $-x > a \Leftrightarrow x < -a$, de donde obtenemos la segunda parte de la solución total:

$S_2 = \{x \in R / x < -a\} = (-\infty; -a)$

La solución estará dada por la unión de los conjuntos S_1 y S_2, es decir:

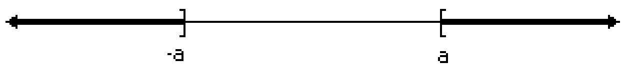
$S = S_1 \cup S_2$

$S = \{x \in R / x < -a \vee x > a\} = (-\infty; -a) \cup (a; \infty)$

Esta propiedad también es válida para: "$\geq$", en este caso tendremos:

$\boxed{\forall x \in R, \forall a > 0, \text{ se verifica que: } |x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a}$ (4)

Gráficamente:



$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$$

Ejemplo:

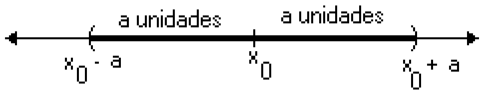
Hallar los x que verifican: $|x| \geq 3$

Gráficamente, marcamos en la recta real los x cuya distancia al origen es mayor o igual a 3.

La solución estará dada por los x que sean mayores o igual a 3, ó por los x que sean menores o igual a -3. Es decir $S = \{x \in R / x \geq 3 \vee x \leq -3\} = (-\infty; -3] \cup [3; \infty)$.

Como vimos, cuando escribimos $|x| < a$, estamos indicando los x que se encuentran a una distancia del origen menor que a : $|x - 0| < a$.

Si quisiéramos expresar que los números x se encuentran a menos de a unidades de distancia de un número fijo x_0, escribiremos: $|x - x_0| < a$.



Teniendo en cuenta la propiedad vista anteriormente (1), resulta que:

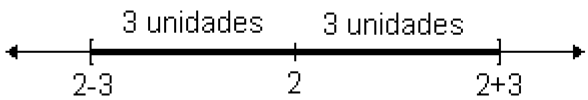
$$\boxed{|x - x_0| < a \Leftrightarrow -a < x - x_0 < a \Leftrightarrow x_0 - a < x < x_0 + a} \quad (5)$$

Ejemplo 1:

Hallar los x que verifican que:

$|x - 2| \leq 3$

Gráficamente, esta expresión representa todos los x de la recta real cuya distancia al 2 es menor o igual a 3.



La solución estará dada por los x que sean menores o igual a 5 y mayores o igual a -1. Es decir:

$-1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow x \in [-1; 5]$

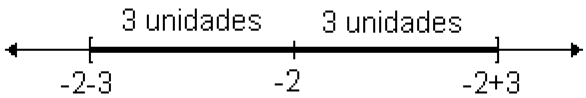
Si aplicamos la propiedad (5), con el signo $\leq$, tendremos que:

$|x - 2| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x - 2 \leq 3 \Leftrightarrow -3 + 2 \leq x \leq 3 + 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5$

Ejemplo 2:

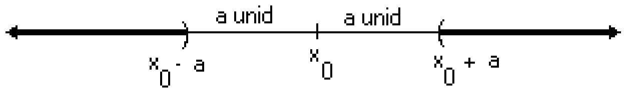
Hallar los x que verifican: $|x + 2| \leq 3$

Recordar que cuando hablamos de distancia entre dos números x e y, se expresa $|x - y|$. Por lo tanto en este caso: $|x + 2|$ se debe expresar como $|x - (-2)|$. 0 sea que gráficamente la solución estará dada por todos los x de la recta real cuya distancia al -2 sea menor o igual a 3.



La solución estará dada por los x menores o igual a 1 y simultáneamente mayores o igual a -5. Es decir $x \in [-5;1]$.
Aplicando la propiedad (5) con el signo $\leq$, debemos llegar al mismo resultado:
$|x+2| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x+2 \leq 3 \Leftrightarrow -3-2 \leq x \leq 3-2 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 1$

De manera análoga, con la expresión: $|x - x_0| > a$, estamos indicando los x que se encuentran a más de a unidades de distancia de un número fijo x_0.

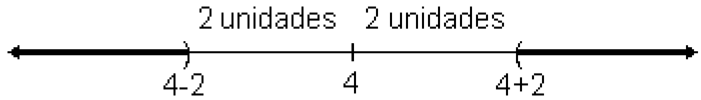


Teniendo en cuenta la propiedad (3), resulta:

$$\boxed{|x - x_0| > a \Leftrightarrow x - x_0 > a \vee x - x_0 < -a \Leftrightarrow x > x_0 + a \vee x < x_0 - a} \quad (6)$$

Como siempre, si reemplazamos el < ó > por $\leq$ ó $\geq$, debemos incluir los extremos en los intervalos que representan la solución.

Ejemplo: Hallar los x que verifican: $|x-4| > 2$
Gráficamente marcamos los x de la recta real cuya distancia al 4 sea mayor que 2:

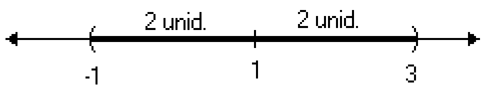


La solución estará dada por los $x \in (-\infty; 2) \cup (6; \infty)$
Aplicando la propiedad (6), obtenemos:

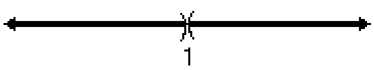
$$|x-4| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 > 2 \Leftrightarrow x > 2+4 \Leftrightarrow x > 6 \\ \text{o} \\ x-4 < -2 \Leftrightarrow x < -2+4 \Leftrightarrow x < 2 \end{cases}$$

Con lo cual llegamos a la misma solución.

Entorno reducido
Ejemplo: Hallar los x que verifiquen $0 < |x-1| < 2$
Podemos desdoblar esta desigualdad en dos desigualdades: $|x-1| < 2$ y $|x\text{-}1| > 0$, que deben cumplirse simultáneamente. Gráficamente resulta:



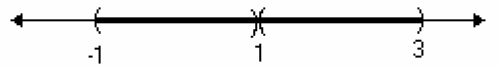
$|x-1| < 2$



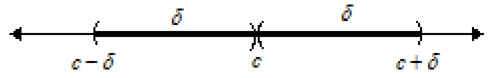
$|x-1| > 0$

La intersección de estos conjuntos, es la solución a la inecuación: $0<|x-1|<2$, es decir:

Sol: $(-1\ ;\ 1)\cup(1\ ;\ 3)$ ó Sol: $(-1\ ;\ 3)-\{1\}$



El entorno reducido se representa por la expresión general: $0<|x-c|<\delta$, que indica que está formado por todos los valores reales cuya distancia al valor c es menor que δ, sin tomar el valor c.
Es decir que es: $|x-c|<\delta$, con $x\neq c \Rightarrow c-\delta<x<c+\delta$, con $x\neq c$. También se puede escribir: $x\in(c-\delta, c+\delta)\ y\ x\neq c$.
Gráficamente:



Ejercicios propuestos:
Aplicando las propiedades del valor absoluto, obtener el conjunto solución de las desigualdades siguientes y representar dicho conjunto en la recta numérica.

a) $|x+8|<9$ b) $|2x-4|\leq 6$ c) $|2x-5|>3$ d) $|6-2x|\geq 7$

Respuestas:

a) $(-17;1)$ c) $(-\infty;1)\cup(4;\infty)$ d) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{13}{2};\infty\right)$

b) $[-1;5]$

Otras propiedades del valor absoluto:
$\forall x\in R, \forall y\in R,$ se cumple:

$$|x|=\sqrt{x^2}$$
$$|x.y|=|x|.|y|$$
$$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}\ \text{, con } y\neq 0$$
$$|x^n|=|x|^n\ \text{, con } n\in Z$$

Demostraciones:
a) ¿Por qué se puede asegurar que $|x|=\sqrt{x^2}$?, porque:

Si $x\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2}=x$

Si $x<0 \Rightarrow \sqrt{x^2}=-x$

Ejemplos:
$\sqrt{5^2}=5$ $\sqrt{(-3)^2}=|-3|=3$

Es muy común escribir $\sqrt{x^2} = x$. Esta igualdad es correcta cuando x es positiva, pero es falsa si x es negativa.

b) $|x.y| = |x|.|y|$

$$|x.y| = \sqrt{(x.y)^2} = \sqrt{x^2.y^2} = \sqrt{x^2}.\sqrt{y^2} = |x|.|y|$$

Esta propiedad también se puede demostrar teniendo en cuenta los signos de x e y, es decir:

1. $x > 0 \quad y > 0 \Rightarrow \begin{cases} |x.y| = x.y \\ |x|.|y| = x.y \end{cases}$

2. $x > 0 \quad y < 0 \Rightarrow \begin{cases} |x.y| = -x.y \\ |x|.|y| = -x.y \end{cases}$

3. $x < 0 \quad y > 0 \Rightarrow \begin{cases} |x.y| = -x.y \\ |x|.|y| = -x.y \end{cases}$

4. $x < 0 \quad y < 0 \Rightarrow \begin{cases} |x.y| = x.y \\ |x|.|y| = x.y \end{cases}$

c) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ (la demostración es similar a la anterior).

d) $|x^n| = |x|^n$

$$|x^n| = \underbrace{|x.x.x.......x|}_{n} = \overbrace{|x||x|.....|x|}^{n} = |x|^n$$

Teorema: La desigualdad triangular

$\boxed{\forall x \in R, \forall y \in R, \text{ se cumple que: } |x+y| \le |x| + |y|}$

Para demostrar esta propiedad nos debemos basar en otra propiedad que establece que: $-|x| \le x \le |x|$. Esta propiedad nos dice que cualquier número real está comprendido entre su valor negativo y su valor positivo. Su demostración es muy sencilla, teniendo en cuenta la definición de valor absoluto.

Ahora sí, basándonos en esta propiedad podemos demostrar la desigualdad triangular. Partimos de que:

$$-|x| \le x \le |x|$$

Además:

$$-|y| \le y \le |y|$$

Si sumamos miembro a miembro estas desigualdades, resulta:

$$-(|x| + |y|) \le x + y \le |x| + |y|$$

Por lo tanto, de acuerdo a la propiedad (1) se deduce que:

$$|x+y| \le |x| + |y|$$

Este teorema tiene dos corolarios importantes:

Corolario 1:

$$\boxed{\forall x \in R, \forall y \in R, \text{ se cumple que: } |x-y| \le |x|+|y|}$$

Demostración:

$$|x-y| = |x+(-y)| \le |x|+|(-y)| = |x|+|y|$$

Esta desigualdad expresa que la distancia entre los puntos x e y en la recta, es menor o igual que la suma de la distancia de x al origen más la distancia de y al origen.

Veamos cuándo se da la igualdad: $|x-y| = |x|+|y|$. Claramente se puede observar que esto ocurre cuando x e y tienen distinto signo, como en el ejemplo 2 de la pág.1 en que $x=3$ e $y=-2$. Comprobamos:

$$|3-(-2)| = |3|+|-2| \Rightarrow |5| = |3|+|-2| \Rightarrow \ 5=3+2$$

La desigualdad $|x-y| < |x|+|y|$ se da cuando los dos números x e y son positivos o los dos son negativos. Comprobamos con el ejemplo1 de la pág.1:

Si $x=5$ e $y=3$, tenemos:

$$|5-3| < |5|+|3|$$

$$2 < 5+3$$

Si $x=-5$ e $y=-2$, tenemos:

$$|5-(-2)| < |-5|+|-2|$$

$$|-3| < |-5|+|-2|$$

$$3 < 5+2$$

Corolario 2:

$$\boxed{\forall x \in R, \forall y \in R, \text{ se cumple que: } |x-y| \ge |x|-|y|}$$

Demostración:

$$|x| = |(x-y)+y| \le |x-y|+|y| \text{ , es decir:}$$

$$|x| \le |x-y|+|y|$$

Si restamos en esta desigualdad $|y|$, en ambos miembros, obtenemos:

$$|x|-|y| \le |x-y|$$

Esta desigualdad expresa que la distancia entre los puntos x e y en la recta, es mayor o igual que la diferencia entre la distancia de x al origen, y la distancia de y al origen.

La igualdad $|x-y| = |x|-|y|$ se da cuando x e y son los dos positivos o los dos negativos. Esto ocurre en el primer y tercer ejemplo de la pág.1. En el caso en que uno de los dos sea negativo se dará la desigualdad estricta, es decir: $|x-y| > |x|-|y|$, como en el segundo ejemplo.