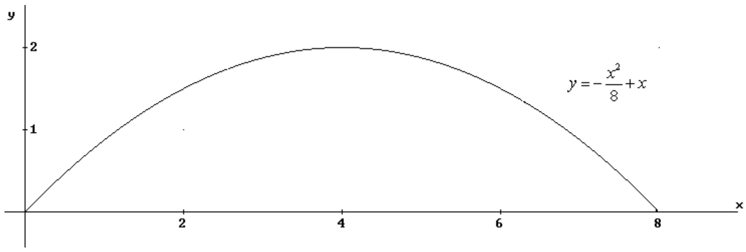
ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE UNA CURVA PLANA

Hasta ahora hemos determinado una gráfica a partir de una ecuación con dos variables. Estudiaremos ahora situaciones en las que se usan tres variables para graficar una curva en el plano.
Consideremos la trayectoria de un objeto que se lanza al aire. Dicha trayectoria parabólica está dada por la siguiente ecuación cartesiana:

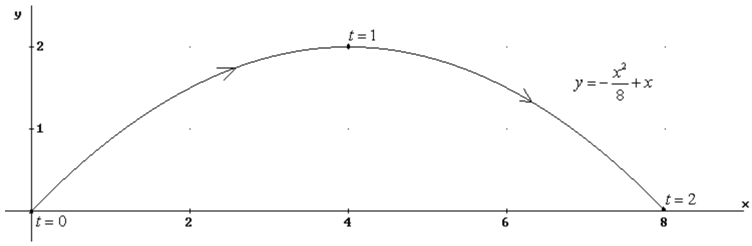
$$y=-\frac{x^2}{8}+x \quad \text{y su gráfica es:}$$



La ecuación dada "nos dice" *dónde* ha estado el objeto, pero no nos dice *cuándo* ha estado en un punto (x,y) dado.

Para poder determinar en qué instante el objeto ha estado en un punto determinado, se debe introducir una tercera variable t, llamada parámetro.
Expresando x e y como funciones de t, se obtienen las ecuaciones paramétricas. Esto es, en nuestro ejemplo:

$$x=4t \quad e \quad y=-2t^2+4t$$



Podemos corroborar que se trata de la misma gráfica anterior ya que si despejamos t de la primera ecuación y la reemplazamos en la segunda ecuación, resulta:

$$t=\frac{x}{4}\Rightarrow y=-2\left(\frac{x}{4}\right)^2+4\frac{x}{4}=-\frac{x^2}{8}+x$$

En este problema, x e y son funciones continuas de t, y la trayectoria resultante recibe el nombre de *curva plana*.

Definición de curva plana
Si f y g son funciones continuas de t en un intervalo I, las ecuaciones:
$x=f(t)$ *e* $y=g(t)$ *se llaman ecuaciones paramétricas con parámetro t. El conjunto de puntos (x,y) obtenidos cuando t recorre el intervalo I, constituye la gráfica de las ecuaciones paramétricas.*

Veamos otro ejemplo:
Sean:

$$\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2sent \end{cases} \quad \text{con } 0\le t\le 2\pi$$

Si elevamos al cuadrado y sumamos miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x^2=(2\cos t)^2 \\ y^2=(2sent)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+y^2=4\cos^2 t+4sen^2 t=4.\left(\cos^2 t+sen^2 t\right)=4 \Leftrightarrow x^2+y^2=4$$

obtenemos la ecuación cartesiana de la circunferencia: $x^2+y^2=4$, con centro en el origen y radio 2.
La curva que la representa se puede interpretar como la trayectoria de un punto que recorre la circunferencia en el sentido positivo o antihorario.

De la misma manera,

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=bsent \end{cases} \quad \text{con } 0\le t\le 2\pi \qquad\qquad (1)$$

si elevamos al cuadrado y sumamos miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x^2=(a\cos t)^2 \\ y^2=(bsent)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}=\cos^2 t \\ \dfrac{y^2}{b^2}=sen^2 t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$ obtenemos la ecuación cartesiana de la elipse, por lo tanto las ecuaciones (1), son las ecuaciones paramétricas de la misma.

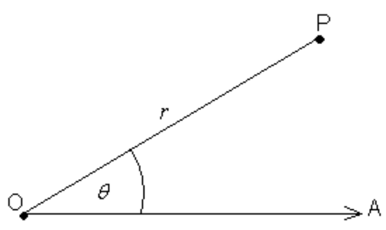
Ej: Representar la siguiente función dada en forma paramétrica y luego expresarla en forma cartesiana. Graficar con DERIVE, ingresando la expresión: $[1-t,1+2t]$

Graficar: $\begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \end{cases}$

ECUACIONES POLARES Y SUS GRÁFICAS

Hasta ahora se ha utilizado sólo el sistema coordenado rectangular para fijar la posición de puntos en el plano. Existe otro sistema coordenado que tiene ventajas particulares en ciertas situaciones. Es el sistema de coordenadas polares. Su importancia deriva del hecho de que proporciona ecuaciones más simples para algunas curvas.
Para formar un sistema de coordenadas polares en un plano, se inicia con un punto fijo O llamado *polo u origen*. Partiendo de ese punto se dibuja una semirrecta (generalmente horizontal y hacia la derecha), a la que se llama *eje polar*.

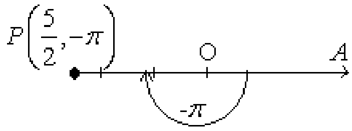
Las coordenadas polares consisten en una distancia y un ángulo.
Sea P un punto en el plano, entonces se le asocian las coordenadas polares (r,θ), como sigue:

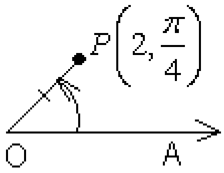


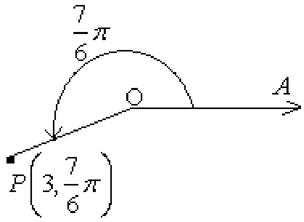
θ: es la medida del ángulo dirigido AOP, positiva cuando se mide en sentido contrario al de las agujas del reloj, y negativa cuando se mide en el mismo sentido.
r : es la distancia dirigida del polo al punto P

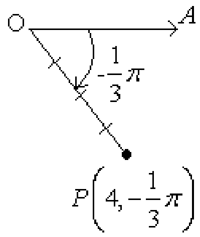
Ejemplos:
Localizar cada uno de los siguientes puntos, que corresponden a las coordenadas polares que se indican:

$$\left(2,\frac{\pi}{4}\right),\left(3,\frac{7}{6}\pi\right),\left(\frac{5}{2},-\pi\right),\left(4,-\frac{1}{3}\pi\right):$$

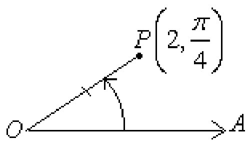


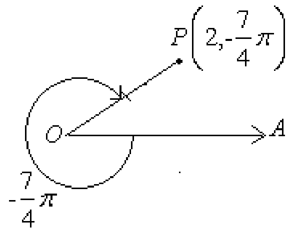






Observación 1: Consideremos el punto $P\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$. Cualquier otro punto de coordenadas $\left(2,\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$ donde n es cualquier número entero, produce el mismo punto P.

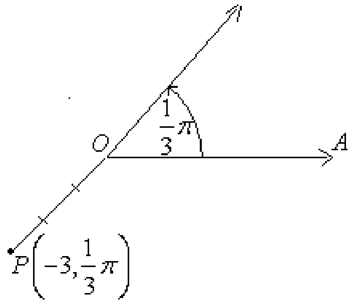


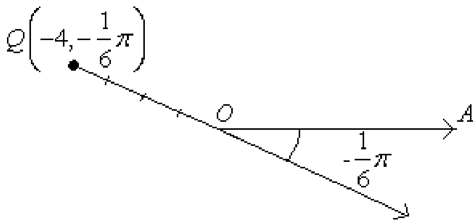


Por lo tanto, un punto dado tiene un número ilimitado de conjuntos de coordenadas polares. Esto no ocurre en el sistema de coordenadas rectangulares, pues existe una correspondencia uno a uno entre las coordenadas cartesianas rectangulares y la posición de los puntos en el plano, mientras que tal correspondencia no existe entre las coordenadas polares y la posición de los puntos del plano.

Observación 2: Consideremos ahora las coordenadas polares en las cuales r es negativo. Los puntos $(-r,\theta)$ y (r,θ), están en la misma recta que pasa por O y a la misma distancia $|r|$ de O, pero en semirrectas opuestas con respecto a O. Es decir, que, en lugar de que el punto se encuentre en el lado terminal del ángulo, se halla en la prolongación del mismo, en la dirección opuesta.

Ejemplo: Representar los puntos $P\left(-3,\frac{1}{3}\pi\right);Q\left(-4,-\frac{1}{6}\pi\right)$





Relación entre las coordenadas cartesianas y polares.

Las coordenadas cartesianas (x, y) y las polares (r, θ) de un punto P están relacionadas por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\ sen\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ tg\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Ejemplo: Hallar las coordenadas cartesianas del punto cuyas coordenadas polares son $\left(-6, \dfrac{\pi}{4}\right)$

Partimos de:

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = rsen\theta$$

$$x = -6\cos\frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad y = -6sen\frac{\pi}{4}$$

$$x = -6\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad y = -6\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = -3\sqrt{2} \quad \text{e} \quad y = -3\sqrt{2}$$

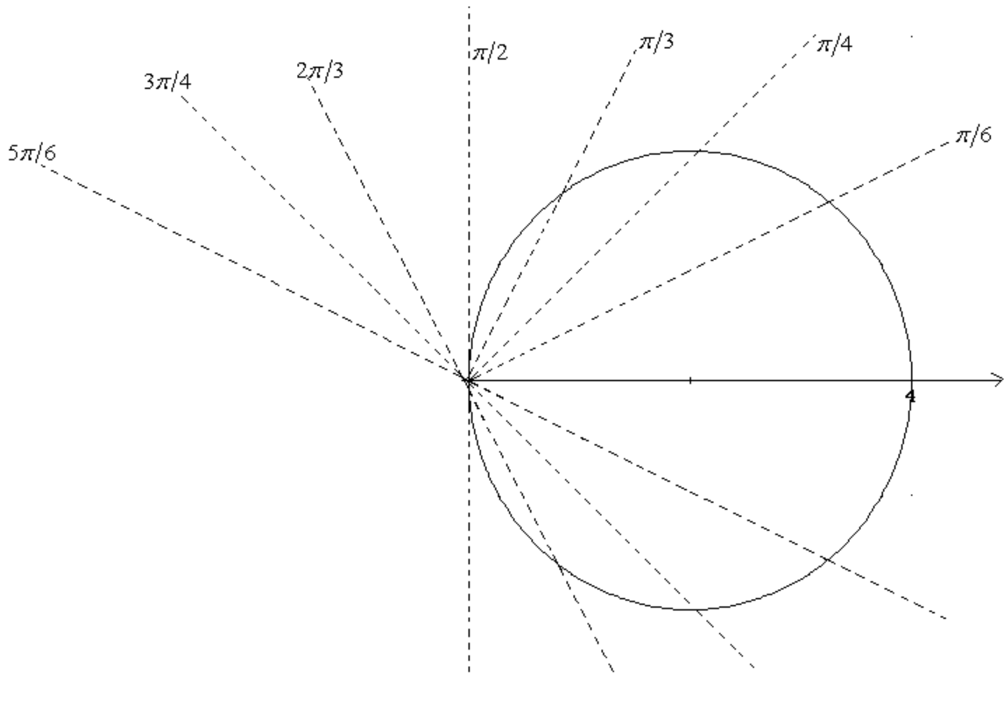
Por lo tanto, el punto es $\left(-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}\right)$

Gráfica de ecuaciones en coordenadas polares

Una ecuación polar es una ecuación en $r\ y\ \theta$. Una solución de una *ecuación polar* es un par ordenado (a,b) que al sustituirlo en la ecuación da por resultado una igualdad. La *gráfica de una ecuación polar* es el conjunto de todos los puntos (en el plano $r\theta$) que corresponden a soluciones de la ecuación.

Ejemplo 1: Graficar la ecuación polar: $r = 4\cos\theta$

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r	4	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	2	0	-2	$-2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{3}$	-4



Obs.: Se puede verificar esta gráfica con la ayuda del DERIVE, ingresando la expresión $\rho = 4\cos\theta$ y seleccionando el tipo de coordenadas (coordenadas polares).

Veamos cómo obtener la ecuación cartesiana correspondiente a la ecuación polar dada: $r = 4\cos\theta$

Partimos de la ecuación polar, y luego reemplazamos $\cos\theta$ por $\frac{x}{r}$, y r^2 *por* $x^2 + y^2$

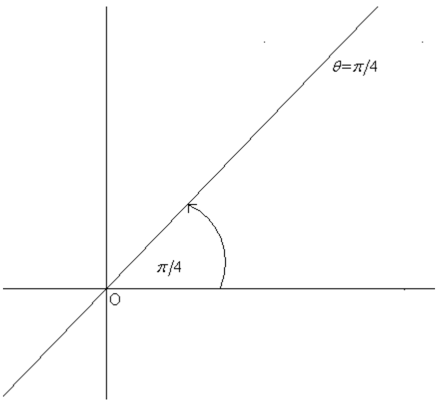
$r = 4\cos\theta \Rightarrow r = 4\frac{x}{r} \Rightarrow r^2 = 4x \Rightarrow x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0$,completando cuadrados, resulta: $(x-2)^2 + y^2 = 4$, o sea que la ecuación polar $r = 4\cos\theta$ representa una circunferencia de centro (2,0) y radio 2.

En general la ecuación polar de la forma: $r = 2a\cos\theta$ es equivalente a la ecuación cartesiana: $(x-a)^2 + y^2 = a^2$, que corresponde a una circunferencia de centro en (a,0) y radio a.

Ejemplo 2: La ecuación $r = 4$, corresponde a una circunferencia de centro en (0,0) y radio 4. Esto se corrobora fácilmente reemplazando a r por $\sqrt{x^2 + y^2}$, con lo cual resulta: $x^2 + y^2 = 4^2$

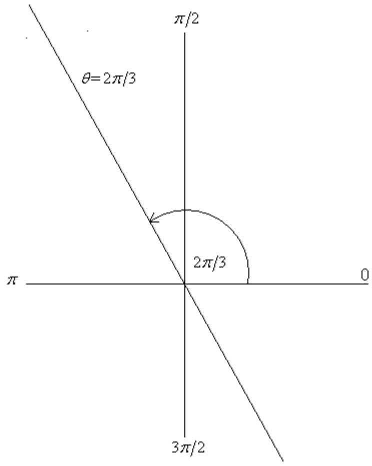
Ejemplo 3: En general la ecuación $\theta = c$, donde c es una constante, se satisface por todos los puntos que tienen coordenadas polares (r, c) independientemente del valor de r. Por lo tanto la gráfica es una recta que pasa por el polo, y forma un ángulo que mide c radianes con el eje polar.

a) Graficar la ecuación: $\theta = \pi/4$



Es la recta que pasa por el polo y forma un ángulo de 45º con el eje polar. Esta misma recta está dada por las ecuaciones: $\theta = 5\pi/4$; $\theta = 9\pi/4$; $\theta = -3\pi/4$

b) Graficar la recta $\theta = 2\pi/3$



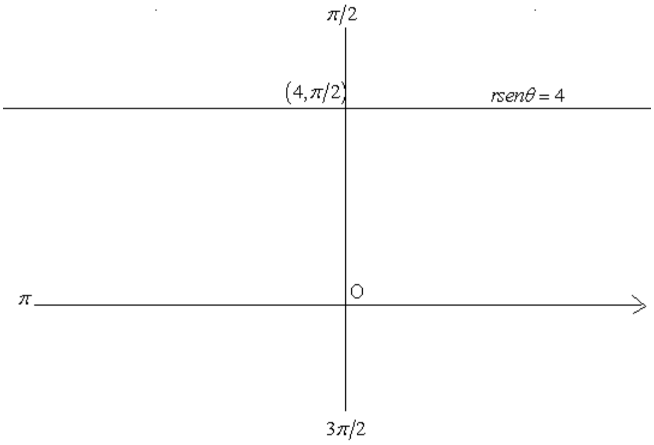
Es la recta que pasa por el polo y forma un ángulo de $2\pi/3$ radianes con el eje polar. Otras ecuaciones de esta recta son: $5\pi/3$; $8\pi/3$; $-\pi/3$

Ejemplo 4: En general, la forma polar de la ecuación de la recta no es tan simple como la forma cartesiana. Pero si la recta es paralela al eje polar o al eje $\pi/2$, la ecuación es muy simple.

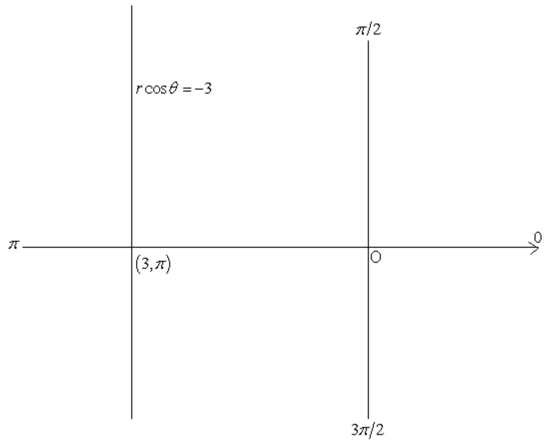
a) Si la recta es paralela al eje polar y pasa por el punto $(b, \pi/2)$, entonces como su ecuación cartesiana es: $y = b$, si se sustituye y por $r\ sen\theta$, resulta:

$r\ sen\theta = b$ que es la ecuación de cualquier recta paralela al eje polar.

Si b es positiva, la recta está por encima del eje polar. Si es negativa, la recta está por debajo del eje polar. Ejemplo cuando b es positivo: $r\ sen\theta = 4$.



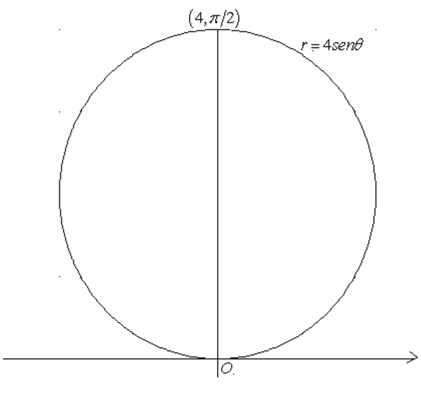
b) Si la recta es paralela al eje $\pi/2$, entonces su ecuación cartesiana es: $x = a$, si se sustituye x por $r\cos\theta$, resulta: $r\cos\theta = a$, que es la ecuación de cualquier recta perpendicular al eje polar. Si a es positivo la recta está a la derecha del eje $\pi/2$. Si a es negativo, la recta está a la izquierda del eje $\pi/2$.



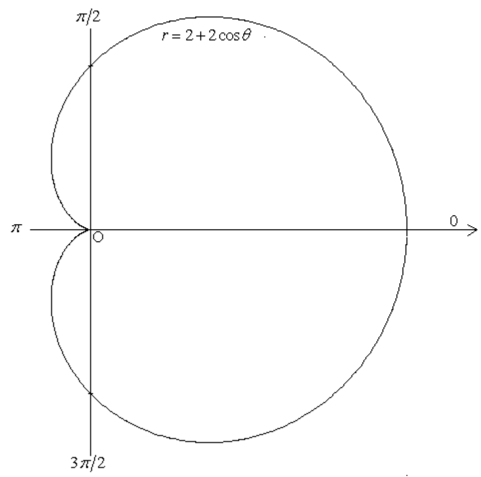
Ejemplo 5:

Otras gráficas de ecuaciones en coordenadas polares:

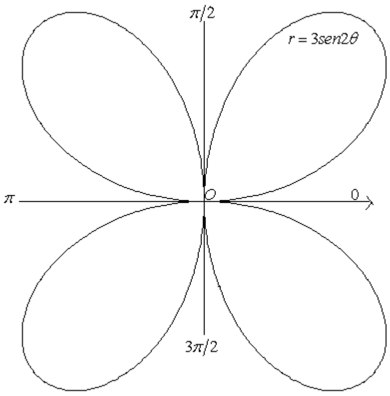
a) $r = 4sen\theta$



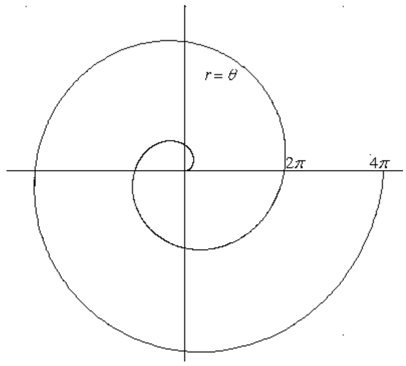
b) $r = 2 + 2\cos\theta$



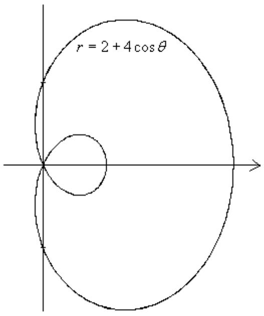
c) $r = 3sen2\theta$



d) $r = \theta$



e) $r = 2 + 4\cos\theta$



a) La ecuación $r = 4sen\theta$, representa una **circunferencia** de centro (0,2) y radio 2, ya que si reemplazamos $sen\theta$ por $\frac{y}{r}$, obtenemos:

$$r = 4\frac{y}{r} \Rightarrow r^2 = 4y \Rightarrow x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0 \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 4$$

b) Las gráficas con forma de corazón se llaman **cardiodes.** En general, todas las ecuaciones polares de cualquiera de estas formas:

$$\begin{matrix} r = a(1+\cos\theta); & r = a(1+sen\theta) \\ r = a(1-\cos\theta); & r = a(1-sen\theta) \end{matrix}$$ donde a es un número real, son cardiodes.

c) La gráfica de la ecuación: $r = 3sen2\theta$ es una **rosa de cuatro pétalos**.

En general una ecuación de la forma:

$r = a\ sen(n\theta)$; $r = a\cos(n\theta); \forall n \in \mathbb{Z}^+ / n > 1 \quad \wedge \quad \forall a \in \mathbb{R}$, siempre tiene una gráfica que consta de bucles que se unen en el origen. Si n es par, entonces hay 2n bucles y si n es impar, entonces hay n bucles.

d) La gráfica de la ecuación polar $r = a\theta,\ \forall a \in \mathbb{R}$, es una **espiral de Arquímedes.**

e) La gráfica de la ecuación de la forma:

$r = a + b\cos\theta$ ó $r = a + bsen\theta$ donde $a \neq b$, se llama **caracol.** La gráfica es similar a la del cardiode.