Integración

Antiderivada (primitiva) e integración indefinida

Hasta ahora, hemos tratado el siguiente problema: *dada una función, hallar su derivada.* Ahora vamos a estudiar el problema inverso: *dada la derivada de una función, hallar la función original.*

Por ejemplo, nos piden hallar una función $F(x)$ que tiene por derivada a $f(x)=4$. Con los conocimientos adquiridos en derivación, podemos decir que: $F(x)=4x$ porque: $\frac{d}{dx}\ 4x\ =4$. Diremos que $F(x)$ es una ***antiderivada o primitiva*** de $f(x)$, o simplemente F es una antiderivada de f.

> ***Def.:*** Una función F se llama ***antiderivada o primitiva*** de la función f, si se cumple que para todo x perteneciente al dominio de f:
> $F'(x)=f(x)$

Pero no existe una sola antiderivada de f, ya que: $4x;\quad 4x+1;\quad 4x-2;\quad 4x-3$, son antiderivadas de $f(x)=4$, puesto que:

$$\frac{d}{dx}\left(4x\right)=\frac{d}{dx}\left(4x+1\right)=\frac{d}{dx}\left(4x-2\right)=\frac{d}{dx}\left(4x-3\right)=4$$

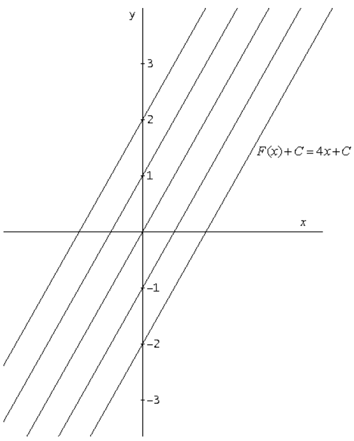
Este ejemplo indica que una función puede tener infinitas antiderivadas. Podemos generalizar y decir que si $F(x)$ es una *antiderivada o primitiva* de $f(x)$ y C es cualquier constante, entonces: $F(x)+C$ también es una antiderivada de $f(x)$ puesto que:

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)+C\right)=\frac{d}{dx}\left(F(x)\right)+\frac{d}{dx}\left(C\right)=f(x)+0=f(x)$$

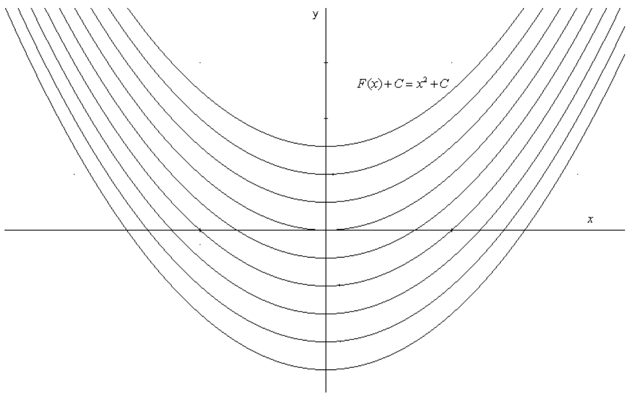
Teorema: Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, la antiderivada o primitiva general de $f(x)$ es $F(x)+C$, donde C es una constante arbitraria.

Gráficamente, la antiderivada o primitiva general es una familia de curvas trasladadas verticalmente:

Ejemplo: Si $f(x)=4 \Rightarrow F(x)+C=4x+C$



Si $f(x)=2x \Rightarrow F(x)+C=x^2+C$



Al proceso de encontrar antiderivadas se le llama *antiderivación o integración*.

Notación de antiderivada:
Si $y = F(x)$ es una antiderivada de f, entonces se dice que $F(x)$ es una solución de la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Cuando se resuelve una ecuación de este tipo, es conveniente escribirla en la forma diferencial equivalente:

$$dy = f(x)dx$$

La operación de encontrar todas las soluciones (la antiderivada general de f) de esta ecuación se denomina integración y se denota con el símbolo $\int$

La solución general de la ecuación $dy = f(x)dx$ se denota por:

$$(1) \qquad \int f(x)dx = F(x) + C$$

La notación $\int f(x)dx = F(x) + C$ (1) donde C es una constante arbitraria, significa que F es una primitiva de f. Esto es: $F'(x) = f(x),\ \forall x$ perteneciente al dominio de $f(x)$.

El símbolo $\int$ se llama *signo integral*, y la expresión (1), se lee: "la integral indefinida de $f(x)$ es igual a $F(x)$ más C". El adjetivo "indefinida" se usa porque el segundo miembro de (1) no es una función definida, sino más bien todo un conjunto de funciones posibles; la constante C se denomina *constante de integración.* El símbolo $\int$ fue introducido por Leibniz en el año 1675.

Nota: El símbolo dx sirve para identificar con respecto a qué variable se va a integrar. Por ejemplo $\int f(t)dt$ denota una función de t cuya derivada con respecto a t es $f(t)$.

El término *integral indefinida* es sinónimo de *primitiva general*

Se puede comprobar que la integración y la derivación son operaciones inversas:
A partir de la notación anterior $\int f(x)dx = F(x) + C$

si reemplazamos:

$F'(x)$ por $f(x)$ obtenemos: $\int f(x)dx = \int F'(x)dx = F(x) + C$

si derivamos obtenemos:

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = \frac{d}{dx}\left[F(x) + C\right] = F'(x) = f(x)$$

Con lo cual vemos que la derivación es la inversa de la integración. Entonces, cualquier fórmula de derivación produce una fórmula de integración. Por ejemplo:

$\frac{d}{dx}(senx) = \cos x$ da lugar a la fórmula de integración: $\int \cos x dx = senx + C$

Esta característica de inversas nos permite obtener fórmulas de integración a partir de las fórmulas de derivación.

Reglas básicas de integración:

1) $\int K dx = Kx + C$ porque $\frac{d}{dx}(Kx + C) = K$, $\quad \forall K \in \mathbb{R}$

Si $K=1 \Rightarrow \int 1dx = x+C$

2) $\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx$, porque $\frac{d}{dx}\left[K\int f(x)dx\right] = Kf(x)$

3) $\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$,porque:

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right] = \frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] \pm \frac{d}{dx}\left[\int g(x)dx\right] = f(x) \pm g(x)$$

4) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, porque: $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right] = x^n$, siempre que: $n \neq -1$

Obs.:Si $n=-1 \Rightarrow \int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$,porque

$\frac{d}{dx}\left[\ln|x| + C\right] = \frac{1}{x} \qquad \forall x \neq 0$

Demostremos:

Si $x>0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\ln|x| + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln x + C\right] = \frac{1}{x}$

Si $x<0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\ln|x| + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(-x) + C\right] = -\frac{1}{(-x)} = \frac{1}{x}$

5) $\int senxdx = -\cos x + C$, porque $\frac{d}{dx}\left[-\cos x + C\right] = senx$

6) $\int \cos xdx = senx + C$, porque $\frac{d}{dx}\left[senx + C\right] = \cos x$

7) $\int \sec^2 xdx = tgx + C$, porque $\frac{d}{dx}\left[tgx + C\right] = \sec^2 x$

8) $\int co\sec^2 xdx = -cotgx + C$, porque $\frac{d}{dx}\left[-cotgx + C\right] = \cos ec^2 x$

9) $\int \sec x.tgxdx = \sec x + C$, porque $\frac{d}{dx}\left[\sec x + C\right] = \sec x.tgx$

10) $\int co\sec x.cotgxdx = -co\sec x + C$, porque $\frac{d}{dx}\left[-co\sec x + C\right] = co\sec x.cotgx$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arc.senx + C$, porque $\frac{d}{dx}\left[arc.senx + C\right] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12) $-\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arc.\cos x + C$,porque $\frac{d}{dx}\left[arc.\cos x + C\right] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + C$, porque $\frac{d}{dx}\left[arc.tgx + C\right] = \frac{1}{1+x^2}$

14) $\int e^x dx = e^x + C$, porque $\frac{d}{dx}\left[e^x + C\right] = e^x$

15) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, porque $\frac{d}{dx}\left[\frac{a^x}{\ln a} + C\right] = a^x$

16) $\int Senh(x)dx = Cosh(x) + C$, porque $\frac{d}{dx}\left[Cosh(x) + C\right] = Senh(x)$

17) $\int Cosh(x)dx = Senh(x)+C$, porque $\frac{d}{dx}\left[Senh(x)+C\right] = Cosh(x)$

18) $\int Sech^2(x)dx = Tgh(x)+C$, porque $\frac{d}{dx}\left[Tgh(x)+C\right] = Sech^2(x)$

Ejemplos:

a) $\int (3x^6 - 2x^2 + 7x + 1)dx = 3\int x^6 dx - 2\int x^2 dx + 7\int x dx + \int dx = 3\frac{x^7}{7} - 2\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} + x + C$

b) $\int \left(\frac{3}{4}\sqrt[5]{x^3} + 4e^x + \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = \frac{3}{4}\int x^{3/5}dx + 4\int e^x dx + \int x^{5/3}dx = \frac{3}{4}.\frac{5}{8}x^{8/5} + 4e^x + \frac{3}{8}x^{8/3} + C$

c) $\int\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int \frac{x}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{1/2}dx + \int x^{-1/2}dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C$

Soluciones particulares

Puede ser que nos pidan encontrar una solución particular. Por ejemplo, hallar una solución particular de $\int 2x dx$. La solución general es $G(x) = x^2 + C$, que es una familia de parábolas paralelas. Si nos piden hallar como solución particular que la curva pase por el punto $P(2,7)$, resulta: $7 = 2^2 + C \Rightarrow C = 3 \therefore$ la solución particular es $G(x) = x^2 + 3$

Hemos obtenido una tabla de integrales para un número limitado de funciones, sin embargo funciones sencillas como $tg(x);\ sen^2(x);\ x.e^x$ no figuran y no sabemos si tienen primitiva, ni tampoco un método constructivo para hallarlas. Veremos algunos:

Métodos de integración

Integración por sustitución

Este método consiste en transformar una integral no inmediata en otra que sí lo es, a través de una sustitución de variables. Por ejemplo:

$\int x.\sqrt{x^2+5}\ dx$. Esta integral no es inmediata y tampoco se la puede transformar en inmediata a través de procedimientos algebraicos.

En estos casos se simplifica la tarea cambiando de la variable x a una nueva variable.

Supongamos que $u = x^2 + 5$. Entonces la $du = 2xdx$. Reemplazando en la integral, nos queda:

$$\int x.\sqrt{u}.\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3} + C$$

En general este método se aplica cuando tenemos una integral de la forma: $\int f(g(x)).g'(x)dx$.

Teorema: Sea g una función derivable y sea la imagen de g un intervalo I . Supongamos que f es una función definida en I y que F es una antiderivada de f en I . Entonces:

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Demostración:

Sabemos por hipótesis que:

$$F'(g(x)) = f(g(x)) \quad (*)$$

Por medio de la regla de la cadena de la derivación:

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right] = F'(g(x)).g'(x)$$

Si sustituimos (*) en esta ecuación, resulta:

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right] = f(g(x)).g'(x)$$

Si integramos, resulta:

$$F(g(x)) + C = \int f(g(x)).g'(x)dx$$

que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplos:

a) $\int (x^2+1)^2.2x.dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\left(x^2+1\right)^3}{3} + C$ $\quad \begin{cases} u = x^2+1 \\ du = 2xdx \end{cases}$

b) $\int \cos(5x)dx = \int \cos u \frac{du}{5} = \frac{1}{5} sen(5x) + C$ $\quad \begin{cases} u = 5x \\ du = 5dx \end{cases}$

c) $\int tgxdx = \int \frac{senx}{\cos x}dx = -\int \frac{senx}{u}.\frac{du}{senx} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$ $\quad \begin{cases} u = \cos x \\ du = \text{-}senxdx \end{cases}$

Estrategia para integrar por sustitución

1) Elegir una $u = g(x)$
2) Hallar $du = g'(x)dx$
3) Reescribir la integral en términos de la variable u .
4) Evaluar la integral en términos de u .
5) Reemplazar u por $g(x)$, para obtener la primitiva en términos de x

Otro ejemplo:

$$\int x.\sqrt{2x-1}dx = \int x\sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{u+1}{2}\right)\sqrt{u}\;du = \frac{1}{4}\int(u\sqrt{u} + \sqrt{u})du =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int\left(u^{3/2} + u^{1/2}\right)du\right] = \frac{1}{4}.\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{10}\sqrt{(2x\text{-}1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(2x\text{-}1)^3}$$

$$\begin{cases} u = 2x\text{-}1 \Rightarrow x = \dfrac{u+1}{2} \\ du = 2dx \end{cases}$$

Integración por partes

A partir de la derivada del producto de dos funciones, se obtiene un método muy útil de integración denominado *integración por partes*.

Si f y g son funciones derivables, entonces:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right] = f´(x).g(x) + f(x).g´(x)$$

Al integrar ambos miembros, resulta:

$$f(x).g(x) = \int f´(x).g(x)dx + \int f(x).g´(x)dx$$

Reordenando esta ecuación, obtenemos:

$$\int f(x).g´(x)dx = f(x).g(x) - \int f´(x).g(x)dx$$

A esta ecuación se la llama fórmula de integración por partes. Se puede obtener una manera más adecuada de escribir esta fórmula al considerar: $u = f(x) \quad y \quad v = g(x)$, entonces resulta: $du = f´(x)\ dx \quad y \quad dv = g´(x)dx$

Con lo cual, la fórmula anterior se transforma en:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

El objetivo es transformar una integral no inmediata en la resta de un producto de funciones y una integral que debe ser inmediata o por lo menos más sencilla que la original.

Esta fórmula expresa la integral $\int udv$ en términos de otra integral $\int vdu$. Por medio de una elección adecuada de $u\ y\ dv$, la integral $\int vdu$ debe ser de resolución inmediata o por lo menos más sencilla que la original.

Ejemplos:

Evaluar:

1) $\int x^2.\ln xdx$

Para determinar las sustituciones para $u\ y\ dv$, hay que tener en cuenta que para hallar v debemos poder integrar dv. Esto sugiere que debemos hacer:

$$\begin{cases} u = \ln x & dv = x^2dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = \int x^2dx = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$\int x^2.\ln xdx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^3.\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

2) $\int x.senx\ dx$

Llamamos:

$$\begin{cases} u = x & dv = senxdx \\ du = dx & v = \int senxdx = -\cos x \end{cases}$$

$$\int x.senx\ dx = x.(-\cos x) + \int \cos xdx = -x.\cos x + senx + C$$

3) $\int e^x.senx\ dx$

Llamamos:

$$\begin{cases} u = e^x & dv = senxdx \\ du = e^x dx & v = \int senxdx = -\cos x \end{cases}$$

$$\int e^x.senx\ dx = -e^x.\cos x + \int \cos x.e^x dx$$

La integral del segundo miembro es similar a la primera , excepto que tiene $\cos x$ en vez de $senx$.

Aplicamos nuevamente la integración por partes estableciendo que:

$$\begin{cases} \bar{u} = e^x & d\bar{v} = \cos xdx \\ d\bar{u} = e^x dx & \bar{v} = \int \cos xdx = senx \end{cases}$$

De esta manera:

$$\int e^x.senx\ dx = -e^x.\cos x + \left[e^x senx - \int e^x senxdx \right]$$

La integral del segundo miembro es igual a la del primer miembro. Con lo cual, resulta:

$$2\int e^x.senx\ dx = -e^x.\cos x + e^x senx + C$$

$$\int e^x.senx\ dx = \frac{1}{2}\left[-e^x.\cos x + e^x senx \right] + C$$

Integración de funciones trigonométricas

Potencias de seno y coseno

Las integrales de la forma: $\int sen^m x.\cos^n x\ dx$ donde $m\ y\ n$ son enteros no negativos, se evalúan de distintas formas, según sean los valores de $m\ y\ n$.

Empecemos por los casos más sencillos, cuando $m = 0\ \acute{o}\ n = 0$, es decir tendremos las integrales de la forma: $\int sen^m x\ dx$ ó $\int \cos^n x\ dx$

I) ***Potencia par de seno o coseno***

Si $m = 2$, tendremos: $\int sen^2 x\ dx$

Podemos resolverla de dos maneras:

1º) Por partes y utilizando la identidad $sen^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$\int sen^2 x\ dx = \int (1 - \cos^2 x)\ dx = \int dx - \int \cos^2 x\ dx = x - \int \cos^2 x\ dx \ (1)$$

Para resolver $\int \cos^2 x\ dx$, hacemos:

$$\begin{cases} u = \cos x & dv = \cos xdx \\ du = -senxdx & v = \int \cos xdx = senx \end{cases}$$

(1)= $x - \left[\cos x.senx + \int sen^2 x\ dx \right] = x - \cos x\ senx - \int sen^2 x\ dx$

Pasando $\int sen^2 x\ dx$ al primer miembro, resulta:

$$2\int sen^2 x\ dx = x - \cos x\ senx \Rightarrow \int sen^2 x\ dx = \frac{1}{2}\left[x - \cos x.senx \right] + C$$

(Probar que no se puede resolver por partes sin considerar la identidad: $sen^2 x = 1 - \cos^2 x$)

2º) Utilizando otra identidad trigonométrica: $sen^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$$\int sen^2 x\ dx =$$

$$= \int \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right) dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen 2x + C$$

Siendo $u = 2x \quad du = 2dx$

Comprobar que: $\frac{1}{2}\left[x - \cos x . sen x\right] = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen 2x$, que son los resultados que hemos obtenido con los dos métodos.

Recordemos algunas identidades trigonométricas útiles para resolver estas integrales:

$$sen 2x = 2 sen x \cos x$$

$$\cos 2x = cos^2 x - sen^2 x \quad (1)$$

Si de la identidad $sen^2 x + cos^2 x = 1$, despejamos $sen^2 x = 1 - cos^2 x$ (2);
y de la identidad (1), despejamos $\cos^2 x = \cos 2x + sen^2 x$.
En (2), reemplazamos $\cos^2 x$ por su equivalente $\cos 2x + sen^2 x$, con lo cual obtenemos:

$$sen^2 x = 1 - \left(\cos 2x + sen^2 x\right) = 1 - \cos 2x - sen^2 x \Rightarrow$$

$$2 sen^2 x = 1 - \cos 2x \Rightarrow sen^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)$$

Si de la identidad $sen^2 x + cos^2 x = 1$, despejamos $\cos^2 x = 1 - sen^2 x$ (3);
y de la identidad (1), despejamos $sen^2 x = \cos^2 x - \cos 2x$.
En (3), reemplazamos $sen^2 x$ por su equivalente $\cos^2 x - \cos 2x$, con lo cual obtenemos:

$$\cos^2 x = 1 - \left(\cos^2 x - \cos 2x\right) = 1 - \cos^2 x + \cos 2x \Rightarrow$$

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right)$$

Si $n = 2$, tendremos: $\int \cos^2 x\ dx$

Podemos resolverla como en el caso anterior:

1º) Por partes y a partir de la identidad $\cos^2 x = 1 - sen^2 x$:

$$\int \cos^2 x\ dx = \int (1 - sen^2 x)\ dx = \int dx - \int sen^2 x\ dx = x - \int sen^2 x\ dx \quad (4)$$

Para resolver $\int sen^2 x\ dx$, hacemos:

$$\begin{cases} u = sen x & dv = \mathrm{sen} x dx \\ du = \cos x dx & v = \int sen x dx = -\cos x \end{cases}$$

(4)= $x-\left[senx\left(-\cos x\right)+\int \cos^2 x\ dx\right]=x+senx.\cos x\ -\int \cos^2 x\ dx$

Pasando $\int \cos^2 x\ dx$ al primer miembro, resulta:

$$2\int \cos^2 x\ dx = x+senx\cos x \Rightarrow \int \cos^2 x\ dx=\frac{1}{2}\left[x+senx\cos x\right]+C$$

2º) Utilizando otra identidad trigonométrica: $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$\int \cos^2 x\ dx=$

$$=\int \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int \cos 2xdx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\int \cos u\,\frac{du}{2}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sen2x+C$$

Siendo $u=2x \quad du=2dx$

Comprobar que: $\frac{1}{2}\left[x+senx\cos x\right]=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sen2x$, que son los resultados que hemos obtenido con los dos métodos.

En general para resolver estas integrales, lo más sencillo es utilizar las fórmulas del ángulo doble:

$$\begin{cases} sen^2 x=\frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right) \\ \cos^2 x=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right) \end{cases}$$

Sigamos con potencias pares de seno o coseno

Si $m=4$, tendremos: $\int sen^4 x\ dx$

$$\int sen^4 x\ dx=\int \left(sen^2 x\right)^2 dx=\int \left(\frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)\right)^2 dx=\int \frac{1}{4}\left(1-\cos 2x\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=$$

(**)

Aplicamos ahora la fórmula del ángulo doble:

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)\Rightarrow \cos^2 2x=\frac{1}{2}\left(1+\cos 4x\right)$$

$$(**)=\frac{1}{4}\left[x-2\int \cos 2xdx+\int \frac{1}{2}\left(1+\cos 4x\right)dx\right]=\frac{1}{4}\left[x-sen2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\int \cos 4xdx\right]=$$

$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}sen2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}sen4x+C=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}sen2x+\frac{1}{32}sen4x+C$$

Mediante un proceso similar se puede hallar:

$$\int \cos^4 x\ dx=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}sen2x+\frac{1}{32}sen4x+C$$

II) ***Potencia impar de seno o coseno***

Si $m=3$, tendremos: $\int sen^3 x\, dx$

En este caso, conviene escribir: $sen^3 x = senx.sen^2 x$, y luego reemplazar $sen^2 x$ por $1-\cos^2 x$, es decir:

$$\int sen^3 x\, dx =$$

$$= \int senx.sen^2 x\, dx = \int senx(1-\cos^2 x)dx = \int senxdx - \int senx \cos^2 xdx = -\cos x + \int u^2 du = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$$(u = \cos x \qquad du = -senxdx)$$

Si $n=3$, tendremos $\int \cos^3 x\, dx$

Procedemos como en el caso anterior, escribimos: $\cos^3 x = \cos x.\cos^2 x$, y luego reemplazamos $\cos^2 x$ por $1-sen^2 x$,es decir:

$$\int \cos^3 x\, dx =$$

$$= \int \cos x.\cos^2 x\, dx = \int \cos x(1-sen^2 x)dx = \int \cos xdx - \int \cos x\, sen^2 xdx = senx - \int u^2 du = senx - \frac{sen^3 x}{3} + C$$

$$(u = senx \qquad du = \cos xdx)$$

En general, para *potencias pares*, conviene expresar:

$$\boxed{\begin{array}{l} \int sen^{2k} x\, dx = \int \left(sen^2 x\right)^k dx = \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^k dx \\ \int \cos^{2k} x\, dx = \int \left(\cos^2 x\right)^k dx = \int \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^k dx \end{array}}$$

En general, para *potencias impares*, conviene expresar:

$$\int sen^{2k+1} x\, dx = \int sen^{2k} x.senx\, dx = \int \left(sen^2 x\right)^k .senx\, dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^k .senx\, dx$$

(se aplica la sustitución $u = \cos x$)

$$\int \cos^{2k+1} x\, dx = \int \cos^{2k} x.\cos x\, dx = \int \left(\cos^2 x\right)^k .\cos x\, dx = \int \left(1-sen^2 x\right)^k .\cos x\, dx$$

(se aplica la sustitución $u = senx$)

III) ***Producto de potencias de seno y coseno con un exponente impar***

(Se utiliza la regla anterior)

Ejemplo:

$$\int sen^3 x.\cos^2 x\, dx = \int sen^2 x.senx.\cos^2 x\, dx = \int \left(1-\cos^2 x\right).senx.\cos^2 x\, dx =$$

$$= -\int \left(1-u^2\right).u^2 du = \int \left(u^4 - u^2\right) du = \frac{\cos^5}{5} - \frac{\cos^3}{3} + C$$

(siendo $u = \cos x \qquad du = -senxdx$)

IV) ***Producto de potencias de seno y coseno con los dos exponentes pares***

(Se utiliza la regla anterior)

Ejemplo:

$$\int sen^4 x.\cos^4 x\, dx = \int \left(sen^2 x\right)^2.\left(\cos^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^2.\left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2 dx =$$

$$= \int \frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2.\frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 2x)^2 (1+\cos 2x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int \left((1-\cos 2x).(1+\cos 2x)\right)^2 dx = \frac{1}{16}\int \left(1-\cos^2 2x\right)^2 dx = \frac{1}{16}\int \left(sen^2 2x\right)^2 dx = \frac{1}{16}\int sen^4 2x\, dx = (***)$$

Utilizando el resultado de $\int sen^4 x dx$, obtenemos:

$$(***) = \frac{3}{128}x - \frac{1}{128}sen 4x + \frac{1}{1024}sen 8x + C$$

Integración de funciones racionales

Vamos a integrar funciones del tipo:

$$\frac{3x}{x^2+1};\frac{x^2-3x+4}{(x-2)(x^2+4)};\frac{3x^4-3x^2+6x-2}{2x^3+2x-5}$$

Para esto vamos a introducir un procedimiento para descomponer una función racional en funciones racionales más simples, a las cuales se las puede integrar por medio de las reglas básicas de integración.

Veamos el siguiente ejemplo, donde se combinan varias fracciones en una sola:

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+2} = \frac{(x-1)(x+2)+3x(x+2)+2x(x-1)}{x(x-1)(x+2)} = \frac{6x^2+5x-2}{x^3+x^2-2x}$$

Si tuviéramos que integrar, es más fácil integrar el primer miembro y no el último. De este modo, es conveniente saber cómo obtener el primer miembro a partir del último. Este procedimiento se llama ***descomposición en fracciones simples***.

Revisemos algunos conceptos:

A una fracción racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$, se la llama *propia* si el grado de $P(x)$ es menor que el de $Q(x)$. Cualquier función racional propia puede expresarse como una suma de términos, llamados *fracciones parciales*, de la forma: $\frac{A}{(ax+b)^k}$ *ó* $\frac{Bx+C}{\left(ax^2+bx+c\right)^k}$.

El número exacto de términos de cada tipo depende de la manera en que se factorice el denominador $Q(x)$.

Sabemos que todo polinomio con coeficientes reales puede descomponerse en un producto de factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales. Por ejemplo:

$$x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2 = (x+1)(x-1)^2(x^2+2)$$

donde $(x+1)$ es un factor lineal, $(x-1)^2$ es un factor lineal repetido y (x^2+2) es un factor cuadrático irreducible. El factor (x^2+2) ya no puede descomponerse en más factores sin utilizar números imaginarios$\left[x^2+2 = \left(x-\sqrt{2}i\right)\left(x+\sqrt{2}i\right)\right]$. Por eso se dice que este factor cuadrático es *irreducible.*

Usando esta factorización, una función racional de la forma:

$$\frac{P(x)}{x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2}$$

donde el grado de $P(x)$ sea inferior a 5, puede escribirse descompuesto en fracciones simples, de la siguiente manera:

$$\frac{P(x)}{x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+2}$$

Veamos ahora los pasos para descomponer en fracciones simples:

I. Dividir si es impropia

Si $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es una fracción impropia (esto es, si el grado del numerador es mayor que el del denominador), se divide el numerador por el denominador para obtener:

$\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$, donde el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Luego se aplican los pasos II, III y IV a la expresión racional propia: $\frac{R(x)}{Q(x)}$.

II. Factorear el denominador

Factorear el denominador en factores de la forma:

$(ax+b)^m$ *y* $(ax^2+bx+c)^n$, donde ax^2+bx+c es irreducible.

III. Factores lineales

Por cada factor lineal de la forma $(ax+b)^m$, la descomposición en factores simples debe incluir la suma de m fracciones de la forma:

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+......+\frac{A_m}{(ax+b)^m}$$

donde $A_1, A_2, ..., A_m$ son constantes que deben determinarse.

IV. Factores cuadráticos

Por cada factor cuadrático de la forma $(ax^2+bx+c)^n$, la descomposición en factores simples debe incluir la suma de n fracciones de la forma:

$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2}+......+\frac{B_nx+C_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

donde $B_1, B_2, ..., B_n, C_1, C_2, ..., C_n$ son constantes que deben determinarse.

Ejemplos

1) Factores lineales diferentes

Evaluar:

$$\int \frac{1}{x^2+x-2}dx$$

Podemos escribir el integrando:

$$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

Según la regla anterior para factores lineales, debemos incluir una fracción simple por cada factor, entonces:

$$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

donde $A \ y \ B$ son constantes que deben determinarse de modo que esta expresión sea una identidad. Para encontrar estas constantes, procedemos algebraicamente:

$$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

así llegamos a la *ecuación básica*: $1=A(x+2)+B(x-1)$ (1)

Ahora debemos sustituir a x con valores adecuados a fin de obtener los valores de $A \ y \ B$. Lo más sencillo es darle valores a x de modo que los términos de la ecuación básica se hagan igual a cero.

Para hallar B, hacemos $x=-2$ en (1), de donde resulta.

$$1=-3B \Rightarrow B=-\frac{1}{3}$$

Para hallar A, hacemos $x=1$ en (1), con lo cual tendremos:

$$1=3A \Rightarrow A=\frac{1}{3}$$

Por lo tanto

$$\int\frac{1}{x^2+x-2}dx=\int\frac{1/3}{x-1}dx+\int\frac{-1/3}{x+2}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+2}dx=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|x+2|+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$$

2) Factores lineales repetidos

Evaluar:

$$\int\frac{2x^2+3}{x^3-2x^2+x}dx$$

Factoreamos el denominador:

$x^3-2x^2+x=x(x-1)^2$, con lo cual, según la regla anterior para factores lineales, debemos escribir:

$$\frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

Operando algebraicamente, llegamos a la ecuación básica:

$$2x^2+3=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$$

Para hallar A, hacemos $x=0$. Reemplazando en la ecuación, obtenemos:

$$3=A$$

Para calcular C , hacemos $x=1$.

$$5=C$$

Ahora, para poder hallar el valor de B, debemos sustituir a x por cualquier otro número siempre teniendo en cuenta los valores ya hallados para $A \ y \ C$.

Tomando $x=-1$, resulta:

$$5 = 3.(-2)^2 + B.(-1).(-2) + 5(-1)$$
$$5 = 12 + B.2 - 5 \Rightarrow B = -1$$

Por lo tanto, podemos escribir:

$$\int \frac{2x^2+3}{x^3-2x^2+x}dx = \int \frac{3}{x}dx - \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{5}{(x-1)^2}dx = 3\ln|x| - \ln\|x-1\| - \frac{5}{x-1} + C =$$
$$= \ln\left|\frac{x^3}{x-1}\right| - \frac{5}{x+1} + C$$

3) Factores cuadráticos repetidos

Evaluar:

$$\int \frac{x^3+x}{\left(x^2+2\right)^2}dx$$

Debemos escribir una fracción simple por cada potencia de x^2+2:

$$\frac{x^3+x}{\left(x^2+2\right)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+2\right)^2}$$

Multiplicamos por le mínimo común múltiplo y obtenemos la *ecuación básica*:

$$x^3 + x = (Ax+B)\left(x^2+2\right) + Cx + D$$

Desarrollamos esta ecuación y agrupamos los términos del mismo orden:

$$x^3 + x = Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx + D$$
$$x^3 + x = Ax^3 + Bx^2 + (2A+C)x + (2B+D)$$

Igualamos los coeficientes de los términos del mismo grado:

$$1 = A$$
$$0 = B$$
$$1 = 2A + C \Rightarrow C = -1$$
$$0 = 2B + D \Rightarrow D = 0$$

Por lo tanto podemos escribir:

$$\int \frac{x^3+x}{\left(x^2+2\right)^2}dx = \int \frac{x}{x^2+2}dx - \int \frac{x}{\left(x^2+2\right)^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right| + \frac{1}{2\left(x^2+2\right)} + C$$

Caso de funciones racionales impropias

Como señalamos al principio, la descomposición en fracciones parciales sólo si se aplica a funciones racionales propias. En el caso de tener que hallar la integral de una función racional impropia, debemos efectuar primeramente la división y luego trabajar con la función racional propia que resulta de dicha división.

Ejemplo:

Evaluar:

$$\int \frac{3x^4+3x^3-5x^2+x-1}{x^2+x-2}dx$$

Al efectuar la división, resulta:

$$3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1 = \left(3x^2+1\right)\left(x^2+x-2\right) + 1$$

De donde:

$$\frac{3x^4+3x^3-5x^2+x-1}{x^2+x-2} = \frac{\left(3x^2+1\right)\left(x^2+x-2\right)}{x^2+x-2} + \frac{1}{x^2+x-2},$$

podemos escribir:

$$\frac{3x^4+3x^3-5x^2+x-1}{x^2+x-2}=\left(3x^2+1\right)+\frac{1}{x^2+x-2}$$

Por lo tanto:

$$\int\frac{3x^4+3x^3-5x^2+x-1}{x^2+x-2}dx=\int\left(3x^2+1\right)dx+\int\frac{dx}{x^2+x-2}$$

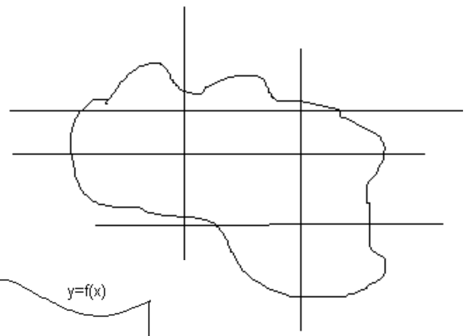
La segunda integral de la derecha, contiene una función racional propia y por lo tanto puede resolverse mediante la descomposición en fracciones parciales. Utilizando el resultado del primer ejemplo, podemos escribir:

$$\int\frac{3x^4+3x^3-5x^2+x-1}{x^2+x-2}dx=x^3+x+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$$

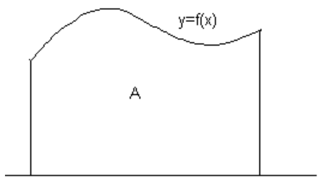
Integral definida

Area

En geometría elemental aprendimos a calcular áreas de figuras con lados rectos o circulares (triángulos, cuadrados, rectángulos, círculos, sectores circulares, etc)
Vamos a analizar el problema de calcular el área de una figura con un contorno curvo.
Supongamos ahora una figura como la siguiente:



Podemos dividirla mediante líneas rectas de tal manera que cada una de las partes obtenidas tenga una forma del siguiente tipo.



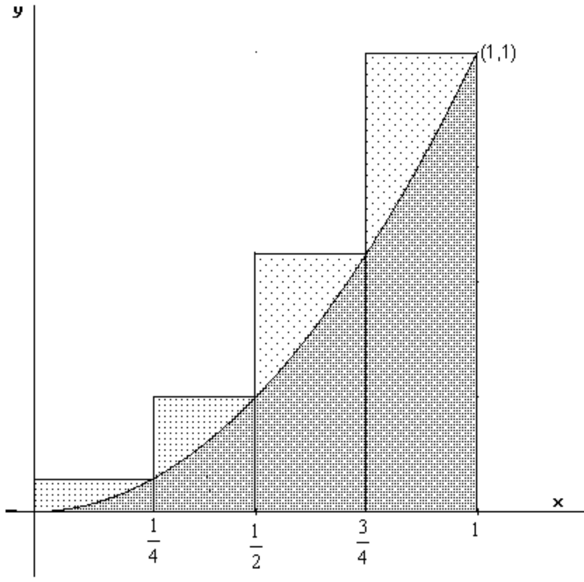
Hallar el área total de la figura se reduce a saber calcular el área A de cada una de los sectores en que fue dividida y sumar los resultados correspondientes.

Para llegar a una definición exacta de área de una región con contornos curvos, vamos a aproximar el área de dicha región por medio de polígonos y luego calcularemos el límite de sus áreas.

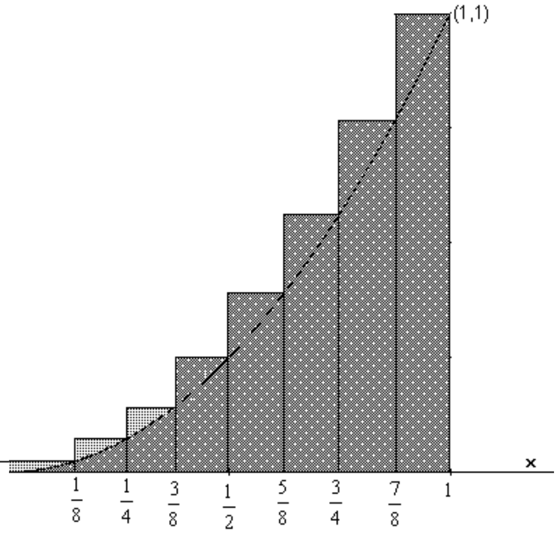
Veamos con un ejemplo*: Determinar el área bajo la parábola* $y=x^2$*, de 0 a 1.*

Para aproximar el área que necesitamos, vamos a dividir el intervalo $[0,1]$ en subintervalos de igual longitud y luego vamos a hallar el área de los rectángulos cuyas bases son esos subintervalos y cuyas alturas son los valores de la función en los extremos derechos de esos subintervalos.

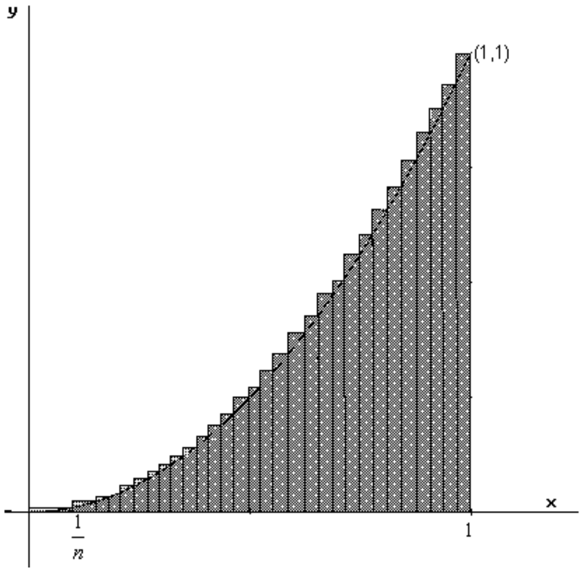
a)



b)



c)



Sea S_n la suma de las áreas de los n rectángulos en la figura c).

Cada rectángulo tiene $\frac{1}{n}$ de base y la altura es el valor de la función $f(x) = x^2$ en cada uno de los puntos: $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, ..., \frac{n}{n}$

Entonces, se puede escribir:

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + ... + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + ... + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{1}{n^2}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2\right) = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

Recordando que: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, podemos escribir la expresión anterior como:

$$S_n = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Podemos calcular, a partir de esta fórmula, la suma de las áreas de los cuatro rectángulos de la figura a):

$$S_4 = \frac{5.9}{6.16} = 0,46875$$

y también la suma de las áreas de los ocho rectángulos de la figura b):

$$S_8 = \frac{9\ .\ 17}{6.\ 64} = 0{,}3984375$$

Podríamos seguir calculando la suma de las áreas de más rectángulos, por ejemplo tomando cien rectángulos, tendríamos:

$$S_{100} = \frac{101\ .\ 201}{6.\ 10000} = 0{,}338350$$

tomando mil rectángulos, tendríamos:

$$S_{1000} = \frac{1001\ .\ 2001}{6.\ (1000)^2} = 0{,}333834$$

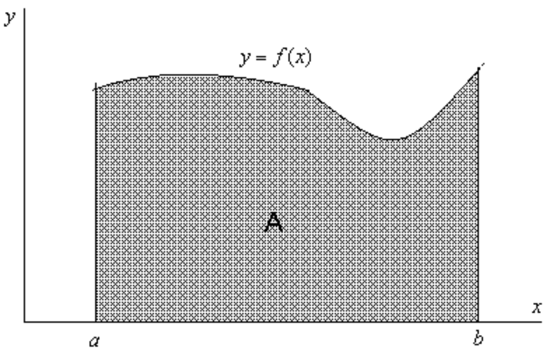
Se ve claramente que S_n se acerca cada vez más a $\frac{1}{3}$ cuando n aumenta. Podemos corroborar esto, ya que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}.\left(\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\right) = \frac{1}{3}$$

Se puede asegurar que cuando n aumenta, S_n es una aproximación cada vez mejor del área buscada. Por lo tanto podemos definir el área A buscada, como el límite de las sumas de las áreas de los rectángulos trazados, es decir:

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$$

Vamos a generalizar este problema, calculando el área A, de la región que se encuentra por debajo de la función $y = f(x)$ en el intervalo $[a,b]$



Consideremos el segmento $[a,b]$, lo dividimos en n subintervalos determinando los puntos de división: $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}$, de tal manera que :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < .... < x_{n-1} < x_n = b$$

Los n subintervalos son:

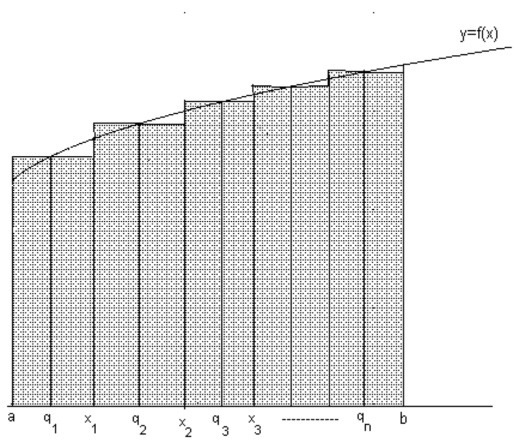
$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], ..., [x_{n-1}, x_n]$$

Esta división en subintervalos se llama ***partición*** de $[a,b]$. Vamos a utilizar la notación Δx_i, para denotar la longitud del i-ésimo subintervalo: $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

La longitud del subintervalo más largo se llama ***norma de la partición*** y se la denota con $\|\Delta\|$.

En el caso que todo subintervalo sea de igual longitud, se dice que la partición es regular y se puede expresar:

$$\|\Delta\| = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$



En cada uno de los intervalos parciales se eligen q_i puntos cualesquiera, es decir: $x_0 \le q_1 \le x_1;\ x_1 \le q_2 \le x_2; ......;\ x_{n-1} \le q_n \le x_n$; y en esos puntos se calculan $f(q_i)$.

El producto $\left[x_i - x_{i-1}\right] f(q_i)$ mide el área del rectángulo de base $\left[x_i - x_{i-1}\right]$ y altura $f(q_i)$. Sumando las áreas de todos estos rectángulos se tendrá un valor aproximado del área buscada, la cual estará dada por:

Area aprox.(A_n) =

$$= \left(x_1 - x_0\right). f(q_1) + \left(x_2 - x_1\right). f(q_2) + ...+ \left(x_n - x_{n-1}\right). f(q_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_{i-1}\right). f(q_i) =$$

$$= \Delta x_1 f(q_1) + \Delta x_2 f(q_2) + ...+ \Delta x_n f(q_n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(q_i)$$

Si se hace que n se incremente, el ancho de los rectángulos se hará cada vez más pequeño, de manera que la aproximación de A por A_n será mejor. Por lo tanto el *área exacta A* puede definirse como el límite de las áreas de las regiones de aproximación cuando n tiende a más infinito:

$$\boxed{Area(A) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i . f(q_i)}$$

Es decir que tomando el límite cuando el número de intervalos tiende a infinito y cada uno de los intervalos tiende a cero, el número obtenido es por definición el área buscada.

La integral definida

Hemos visto que podemos hallar el área de una región en el plano por medio del límite de la suma:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i . f(q_i) = Area(A) \text{ con la condición de que } f(x) \ge 0$$

Definición

Sea f definida en el intervalo $\left[a,b\right]$, sea P una partición de $\left[a,b\right]$ cuyos puntos de partición son $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}$, donde: $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < .... < x_{n-1} < x_n = b$. Se eligen puntos $c_i \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$ y se define $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Entonces, ***la integral definida*** de f, de a a b es:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i). \Delta x_i .$$

Siempre que este límite exista, se dice que f es integrable en el intervalo $\left[a,b\right]$.

¿Qué condiciones debe cumplir f para que existe dicho límite?, o sea ¿en qué condiciones es integrable una función f?. La respuesta a esta pregunta la da el siguiente teorema:

<u>Teorema</u>: Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$

Nota 1: El símbolo $\int$ fue introducido por Leibniz y se denomina signo integral. Es una S alargada, y lo escogió porque la integral es un límite de sumas. El número a es el ***límite inferior*** de integración y el número b es el ***límite superior*** de integración. $f(x)$ se denomina ***integrando.***

Nota 2: La suma: $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ se denomina ***suma de Riemann***, en honor al matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866).

Nota 3: Si la función f es positiva, la suma de Riemann, se puede interpretar como una suma de áreas de rectángulos de aproximación. Si f toma valores positivos y negativos, la suma de Riemann, es la suma de las áreas de los rectángulos que están sobre el eje x y los negativos de las áreas de los rectángulos abajo del eje x.

Nota 4: ***Una integral definida no necesariamente representa un área.*** Sólo cuando la función es positiva, la integral se puede interpretar como un área.

En el caso en que $f(x) \geq 0$:

$\int_a^b f(x)dx =$ área bajo la gráfica de f entre a a b

Teorema Fundamental del cálculo

Si una función f es continua en el intervalo $[a,b]$, entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)} \qquad (1)$$

donde F es una antiderivada de f en $[a,b]$

La diferencia $F(b) - F(a)$ por lo general se denota por $F(x)\Big|_a^b$, de modo que (1) puede escribirse:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Observación:

La constante de integración C puede ser eliminada de la integral definida ya que:

$$\int_a^b f(x)dx = (F(x)+C)\Big|_a^b = (F(b)+C) - (F(a)+C) = F(b) - F(a)$$

Ejemplo:
Evaluar:

a) $\int_1^4 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64-1}{3} = \frac{63}{3} = 21$

Como $f(x) = x^2$, entonces el valor 21, es el área de la región que se encuentra por debajo de dicha curva entre las rectas $x = 1$ y $x = 4$

b) $\int_{-1}^2 (x^2 - 4)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-1}^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 4.2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 4.(-1)\right) = -9$

Las integrales definidas pueden ser positivas, negativas o nulas.

Propiedades de la integral definida

1. Si f está definida en $x = a$, entonces:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2. Si f es integrable en $[a,b]$, entonces: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Veamos:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$-\int_b^a f(x)dx = -[F(a) - F(b)] = F(b) - F(a)$$

3. Si $c \in (a,b)$ y $f(x)$ es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$, entonces $f(x)$ es integrable en $[a,b]$ y se cumple: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

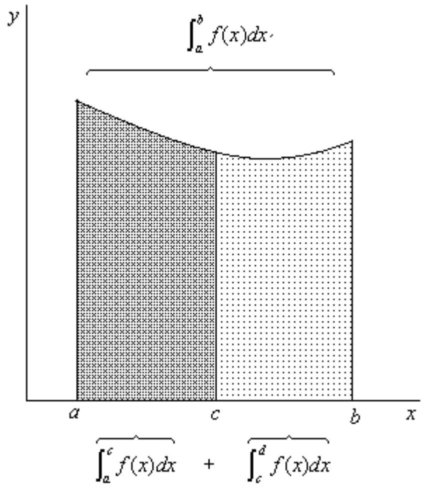
Lo demostramos:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Veamos gráficamente esta situación:

Sea $f(x)$ continua y positiva en $[a,b]$.

A partir de la figura se puede observar que la región mayor puede ser dividida en $x = c$ en dos subregiones. El área de la región mayor es igual a la suma de las áreas de las dos regiones menores.



4. Si f es integrable en $[a,b]$, y $k \in \mathbb{R}$, entonces se verifica:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Demostremos esta propiedad:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\,F(x)\Big|_a^b = kF(b) - kF(a) = k\left[F(b) - F(a)\right]$$
$$k\int_a^b f(x)dx = k\left[F(x)\Big|_a^b\right] = k\left[F(b) - F(a)\right]$$

5.Si f y g son integrables en $[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Demostremos:

Desarrollando el primer miembro, resulta:

$$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \left[F(x) + G(x)\right]\Big|_a^b = F(b) + G(b) - \left(F(a) + G(a)\right) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a)$$

Desarrollando el segundo miembro:

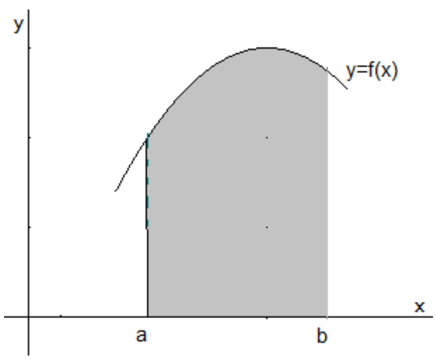
$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = F(x)\Big|_a^b + G(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) + G(b) - G(a)$$

Aplicaciones de la integral definida

Cálculo de áreas

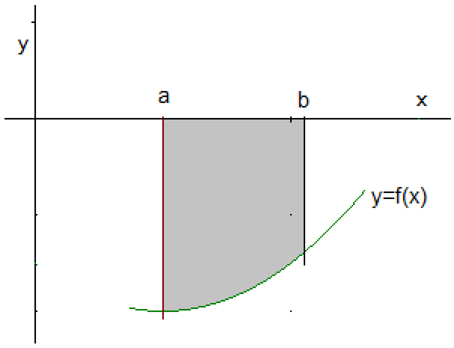
La integral definida como área de una región

Si f <u>es continua y no negativa</u> en el intervalo $[a,b]$ entonces el área de la región limitada por f, el eje x, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ viene dada por : $Area = \int_a^b f(x)\,dx$.

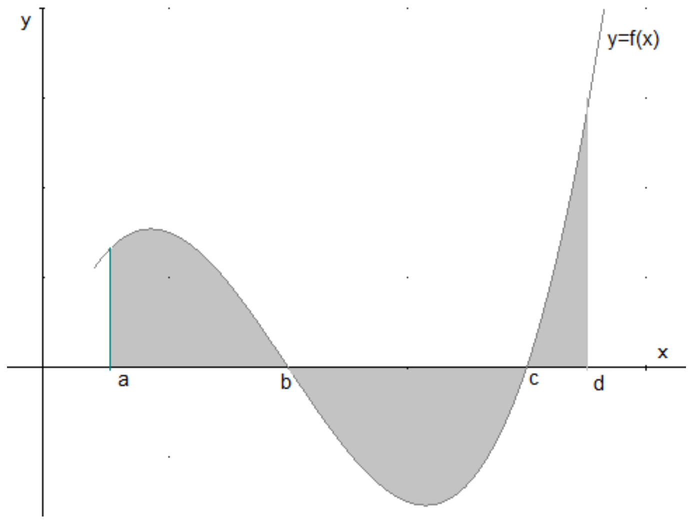


Si $f(x)$ es continua y negativa en $[a,b]$, la $\int_a^b f(x)\,dx$ va a dar por resultado un número negativo, ya que $f(x)<0$; entonces definiremos el área de la figura comprendida entre la gráfica de $f(x)$, el eje x y las rectas $x=a$ y $x=b$, como:

$$Area=-\int_a^b f(x)\,dx$$

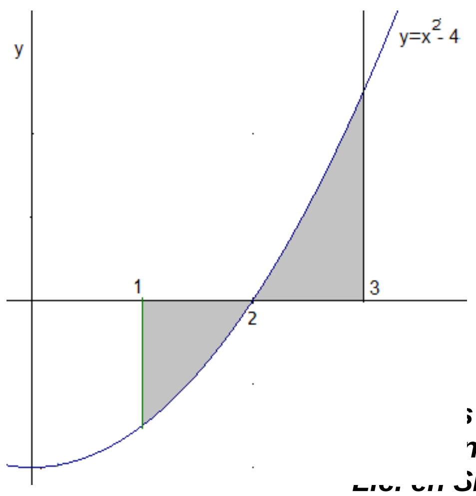


Si la función $f(x)$ cambia de signo un número finito de veces en el intervalo $[a,b]$, el área se obtiene considerando los casos anteriores y sumando:



$$Area=\int_a^b f(x)\,dx-\int_b^c f(x)\,dx+\int_c^d f(x)\,dx$$

Ejemplo: Hallar el área de la región limitada por las curva $y=x^2-4$, el eje x y las rectas : $x=1\,y\,x=3$.

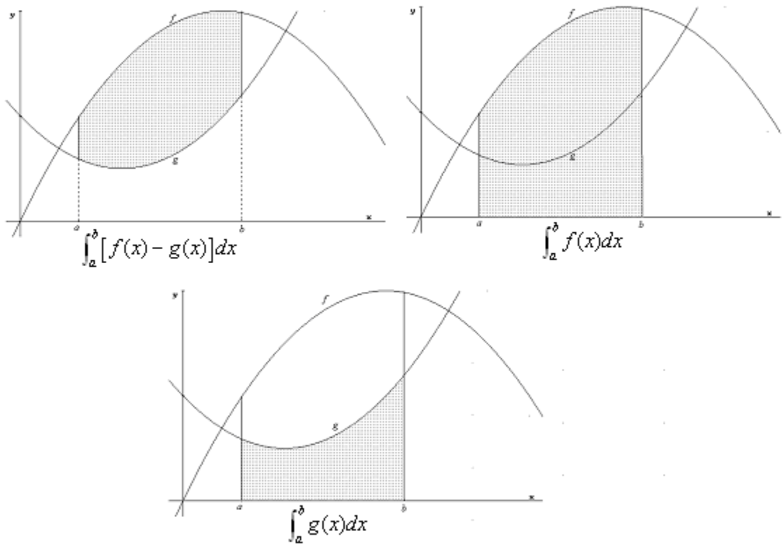


$$A=-\int_1^2\left(x^2-4\right)dx+\int_2^3\left(x^2-4\right)dx=4$$

Área de la región entre dos curvas

Como vimos, podemos calcular el área de la región bajo una curva por medio de una integral definida. También podremos calcular por medio de una integral definida, el área de la región comprendida entre dos curvas.

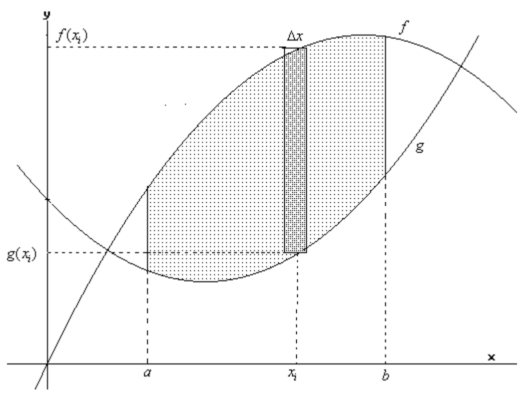
Si las gráficas de f y g están por encima del eje x, como se muestra en la figura, podemos interpretar el área de la región comprendida entre ellas como la diferencia entre el área de la región bajo la gráfica de f y la que está por debajo de g .



Si f y g son continuas en $[a,b]$ y $g(x) \leq f(x)\ \forall x \in [a,b]$, entonces el área de la región limitada por las gráficas de f y g, y las líneas verticales $x = a$ y $x = b$ es: $$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

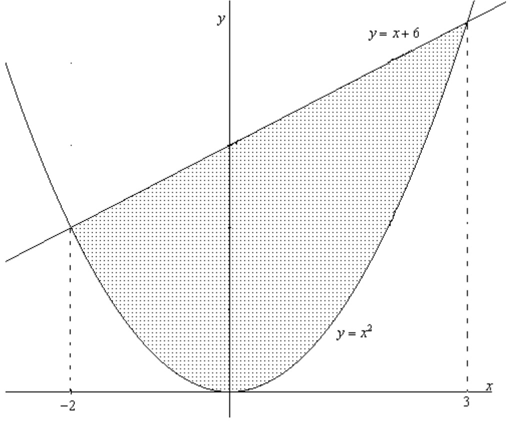
Demostración:

Dividimos el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos, cada uno de ancho Δx y dibujamos un intervalo representativo de ancho Δx y de altura $f(x_i) - g(x_i)$, donde x_i está en el pésimo intervalo.



El área de este rectángulo es:

$$Area(A_i) = \Delta x_i . [\, f(x_i) - g(x_i)]$$

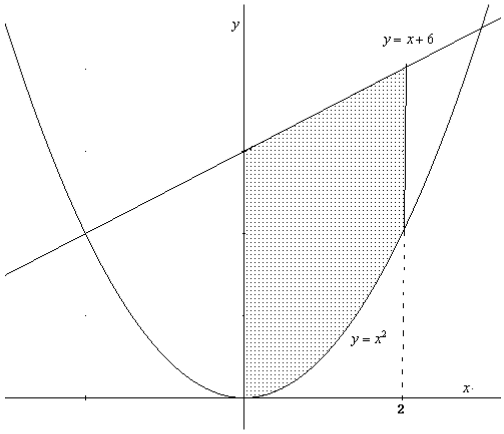


Sumando las áreas de los n rectángulos y tomando el límite cuando $n \to \infty \; (\Delta x \to 0)$, tenemos: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i . [f(x_i) - g(x_i)]$

Por ser $f \; y \; g$ continuas en el $[a,b]$, $f-g$ también es continua en dicho intervalo y el límite existe. Por lo tanto el área de la región dada es:

Área= $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i . [f(x_i) - g(x_i)] = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$

Observación: Las gráficas de $f \; y \; g$ pueden estar ubicadas de cualquier manera con respecto al eje x, sólo es necesario que $f \; y \; g$ sean continuas y que $g(x) \le f(x) \;\; \forall x \in [a,b]$



Ejemplos:

1) Encontrar el área de la región limitada por $y = x+6$ e $y = x^2$, entre las rectas $x = 0 \; y \; x = 2$
De acuerdo a la fórmula anterior, podemos escribir:

$$\int_0^2 \left[(x+6) - x^2 \right] dx = \left. \frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{34}{3}$$

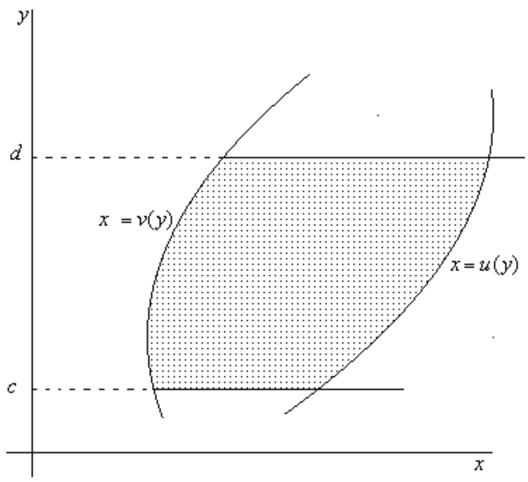
2) Hallar el área de la región encerrada entre las curvas: $y = x+6$ e $y = x^2$
En el gráfico se puede observar que dichas curvas se cortan en dos puntos.
Para hallar las coordenadas x de estos puntos, igualamos $f(x)$ con $g(x)$:

$$x^2 = x+6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Por lo tato el área estará dada por:

$$\int_{-2}^{3} \left[x + 6 - x^2 \right] dx = \frac{125}{6}$$

A veces es necesario hallar el área de una región limitada arriba y abajo por rectas horizontales, y a la izquierda y a la derecha por las gráficas de dos funciones en la variable y. En este caso, definimos:
Si $u \; y \; v$ son funciones continuas tales que: $u(y) \ge v(y), \;\; \forall y \in [c,d]$, entonces el área de la región limitada a la derecha y la izquierda por las curvas $x = u(y) \; y \; x = v(y)$, y abajo y arriba por las rectas $y = c, y = d$, es:



$$\boxed{A = \int_c^d \left[u(y) - v(y)\right] dy}$$

Ejemplo:

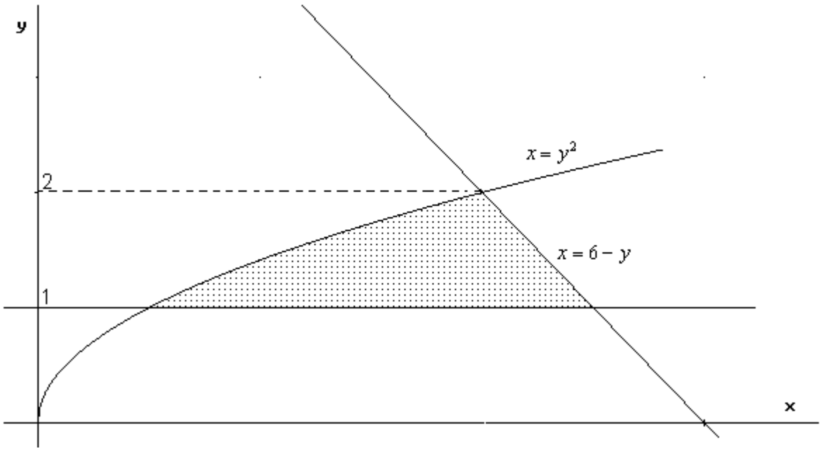
Hallar el área de la región limitada por las curvas: $y = \sqrt{x}$, $y = -x + 6$ e $y = 1$

Para hallar el área de la región sombreada, escribimos:

$$\int_1^2 \left[(6 - y) - y^2\right] dy = \frac{13}{6}$$

donde el valor del límite superior $y = 2$, se obtiene de igualar las dos funciones.

El integrando debe escribirse en función de la variable y, es decir:



$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$; $y = -x + 6 \Rightarrow x = 6 - y$