FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

La ***función exponencial general con base b*** , está dada por la ecuación:
$f(x) = a.b^x$, con $b > 0 \ y \ b \neq 1$, $\forall x \in R$, $\forall a \in R$

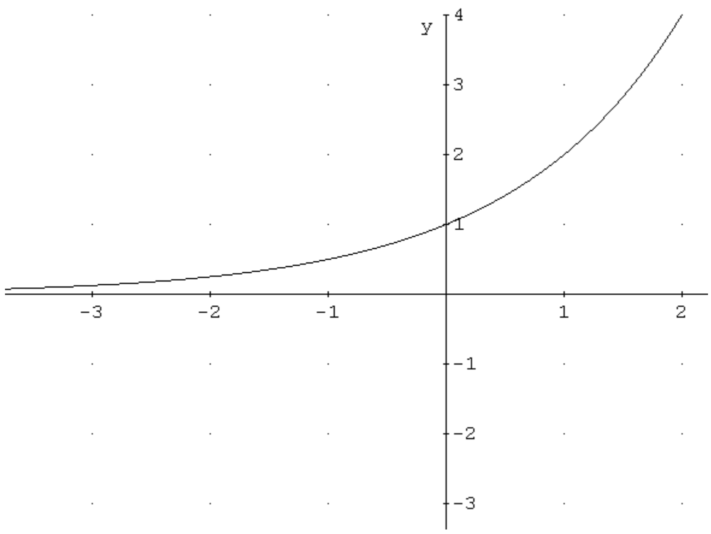
La base debe ser distinta de uno pues de lo contrario la función se transformaría en la función constante: $y = 1$. También la base debe ser mayor que cero, ya que si $b = 0$, la función tendría por ecuación $y = 0$, en el caso que $x \neq 0$; o no estaría definida en el caso que $x = 0$, ya que sería $y = 0^0$.

Tampoco b puede ser menor que 0 ya que, por ejemplo para $b = -4 \ y \ x = \frac{1}{2}$, la función no estaría definida en R.

Grafiquemos la función $y = 2^x$, $(a = 1)$

$y = 2^x$ ($b > 1$)

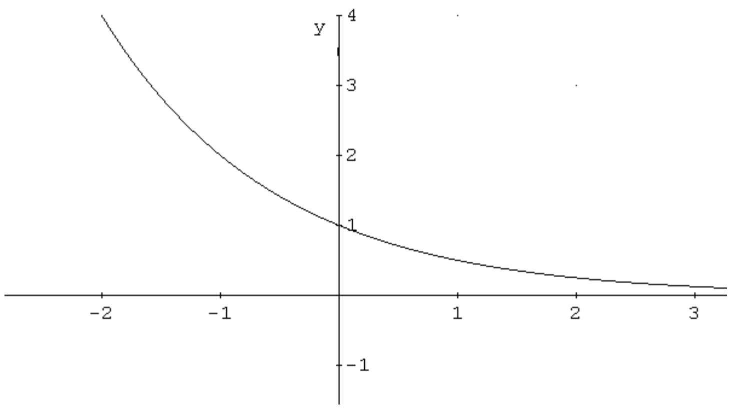
x	$y = 2^x$
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8



Grafiquemos la función:

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ = 2^{-x} ($a = 1$) $(0 < b < 1)$

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8



La gráfica de una función exponencial puede tener dos formas, dependiendo si $b > 1 \ o \ 0 < b < 1$, como se puede observar en los ejemplos anteriores.

Propiedades de la función exponencial:

La función exponencial $f(x)=b^x$, tiene las siguientes propiedades:

- ✓ El dominio es el conjunto de los números reales.
- ✓ La imagen es $(0,\infty)$.
- ✓ La gráfica intersecta al eje y en el punto $(0,1)$.
- ✓ El eje x es una asíntota horizontal para la gráfica de $f(x)$.
- ✓ $f(x)$ es creciente cuando $b>1$ y decreciente cuando $0<b<1$
- ✓ $f(x)$: $R\to(0,\infty)$ es biyectiva .

FUNCION LOGARITMICA

La función logarítmica con base b, se define como:

$$y=\log_b x \qquad \text{con} \quad b>0,\ b\neq 1,\ x>0$$

Es la inversa de la función exponencial con base b.

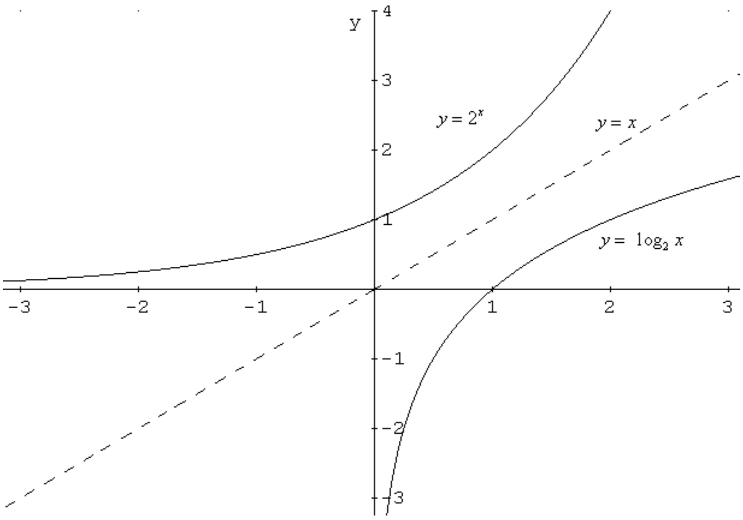
La función logarítmica es la inversa de la función exponencial, ya que si:

$y=\log_b x \Rightarrow b^y = x = f^{-1}(y) \Rightarrow f^{-1}(x)=b^x$

Grafiquemos las funciones:

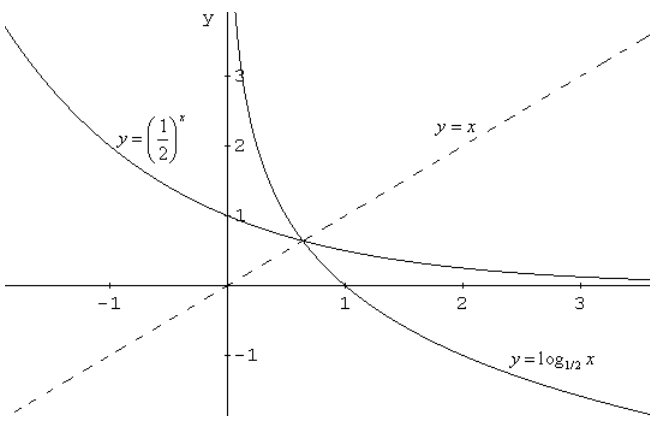
a) $y=2^x$ e $y=\log_2 x$

x	$y=\log_2 x$
1/8	-3
1/4	-2
1/2	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



b) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y=\log_{1/2} x$

x	$y=\log_{1/2} x$
1/8	3
1/4	2
1/2	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3



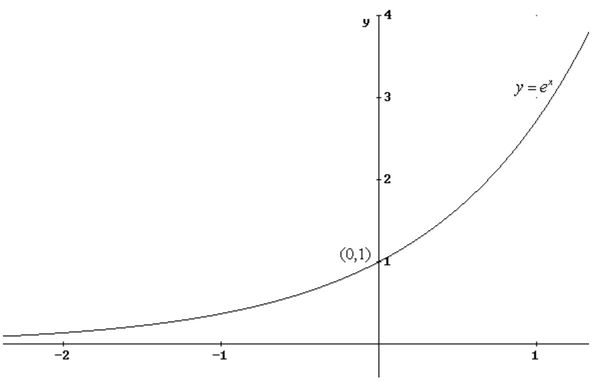
Propiedades de la función logarítmica:

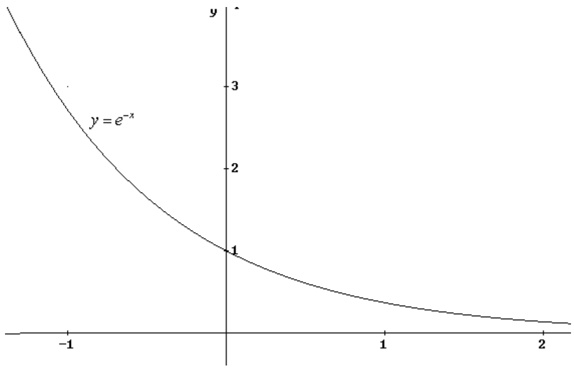
La función $y = \log_b x$, tiene las siguientes propiedades:

- ✓ El dominio es $(0,\infty)$.
- ✓ La imagen es el conjunto de los números reales.
- ✓ La gráfica intersecta al eje x en el punto $(1,0)$. La gráfica no intersecta al eje y.
- ✓ El eje y es una asíntota vertical para la gráfica de $f(x)$.
- ✓ $f(x)$ es creciente cuando $b > 1$ y decreciente cuando $0 < b < 1$
- ✓ $f(x)$: $(0,\infty) \to R$ es biyectiva .

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Veremos ahora combinaciones de las funciones exponenciales con base e, que se llaman funciones hiperbólicas. Combinaremos: $y = e^x \quad con \quad y = e^{-x}$:





Def: Se llaman funciones hiperbólicas a las siguientes funciones reales:

Seno hiperbólico: $Sh(x) = Senh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Coseno hiperbólico: $Ch(x) = Cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Tangente hiperbólica: $Th(x) = Tgh(x) = \dfrac{Sh(x)}{Ch(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Cotangente hiperbólica: $Coth(x) = \dfrac{Ch(x)}{Sh(x)} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \forall x \neq 0$

Secante hiperbólica: $Sch(x) = \dfrac{1}{Ch(x)} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Cosecante hiperbólica: $Co\sec h(x) = \dfrac{1}{Sh(x)} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}} \quad \forall x \neq 0$

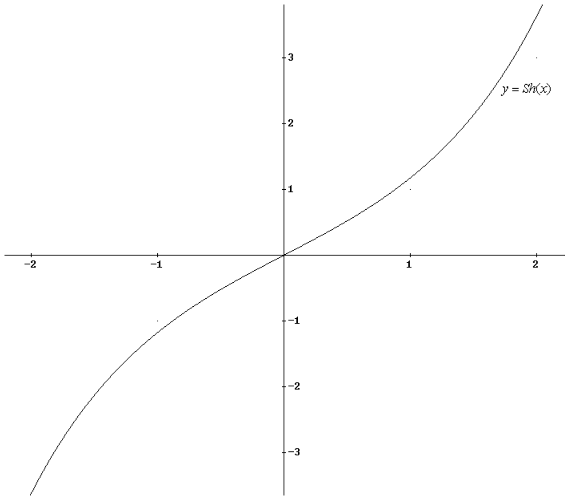
Las funciones hiperbólicas tienen las siguientes propiedades:

1) El seno hiperbólico es una función impar y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, que satisface:

$Sh(0)=0$; $Sh(x)>0, \forall x \in \mathbb{R}^+$; $\operatorname{Im}(Sh)=\mathbb{R}$

Demostremos que $Sh(x)$ es una función impar:

$$Sh(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2} \Rightarrow -Sh(-x)=-\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=Sh(x)$$

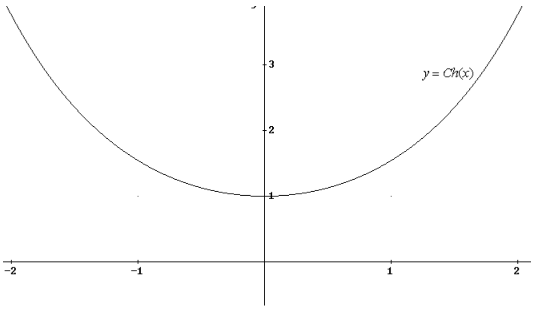


2) El coseno hiperbólico es una función par y estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, que satisface:

$Ch(0)=1$; $Ch(x)>1, \forall x \in \mathbb{R}^+$; $\operatorname{Im}(Ch)=[1,+\infty)$

Demostremos que $Ch(x)$ es una función par:

$$Ch(-x)=\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}=Ch(x)$$



3) La tangente hiperbólica es una función impar y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, que satisface:

$Th(0)=0$; $0<Th(x)<1, \forall x \in \mathbb{R}^+$; $\operatorname{Im}(Th)=(-1,1)$

Demostremos que $Th(x)$ es una función impar:

$$Th(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}} \Rightarrow -Th(-x)=-\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{-x}+e^{x}}=Th(x)$$