NÚMEROS COMPLEJOS

Números complejos
Conjuntos numéricos

Conjuntos de números

1. El conjunto vacío: $\varnothing = \{\} = \{x \mid x \neq x\}$. Este es el conjunto sin elementos. Al igual que el número "0", juega un papel vital en las matemáticas.
2. Los números naturales: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ Los períodos de puntos suspensivos aquí indican que los números naturales contienen 1, 2, 3, 'y así sucesivamente'.
3. Los números naturales con cero: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ $(\mathbb{W})$
4. Los enteros: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
5. Los números racionales: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z} \text{ y } b \in \mathbb{Z}\right\}$. Los números racionales son las razones de los enteros (¡cuidado que el denominador no sea cero!)

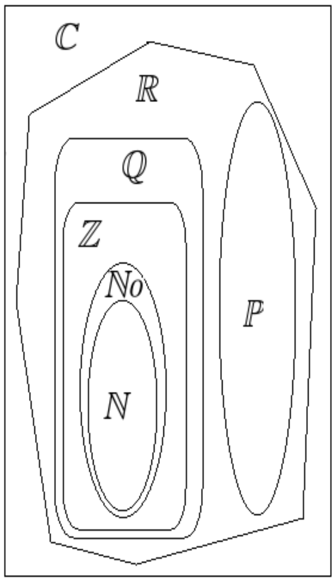
Otra forma de describir los números racionales es:

$\mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ posee una representación decimal repetitiva o de terminación}\}$.

6. Los números irracionales: $\mathbb{P} = \{x \mid x \text{ es un número real no racional.}\}$ Dicho de otra manera, un número irracional es un decimal que no se repite ni termina.

Ej: π, *e*, raíz cuadrada de un número primo, etc.

7. Los números reales: $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ posee una representación decimal}\}$.
8. Los números complejos: $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \wedge i = \sqrt{-1}\}$



Es importante tener en cuenta que cada número natural es un número entero. Cada número entero es un número racional (tome $b = 1$ en la definición anterior para $\mathbb{Q}$) y los números racionales son todos números reales, ya que poseen representaciones decimales. Si tomamos $b = 0$ en la definición anterior de $\mathbb{C}$, vemos que cada número real es un número complejo. En este sentido, los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ están 'anidados' como las muñecas Matryoshka.

INTRODUCCIÓN

La primera mención sobre números complejos, se da en el S XVI, por el matemático italiano G. Cardano. En su libro Ars Magna (1545) plantea la necesidad de definir y utilizar números que respondan a la forma $\sqrt{a}$ con $a<0$ con el siguiente problema: "dado un segmento de 10 unidades, dividirlo en dos partes de manera tal, que el área del rectángulo que se obtenga con esas dos partes sea de 40 unidades cuadradas".

La solución debía ser fácil. Si una parte es "x" la otra parte es "$y = x-10$", tal que $x.y = 40$.

Reemplazando: $x.(10-x) = 40$, operando $x^2 - 10x + 40 = 0$.

Al resolver la ecuación queda $x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-15}$. A tales soluciones, Descartes (1596-1650) las llamó ***imposibles o imaginarios***, y dedujo que las soluciones no eran números reales, sino de la forma $a+bi$, con a y b reales.

Pero el primero en utilizar los números complejos en forma realmente confiable y científica fue Carl Gauss (1777-1855).

Definición

Dados dos números reales a y b definiremos el número complejo z como,

$$z = a + bi \tag{1}$$

El número a se llama la **parte real** de z y el número b se llama la **parte imaginaria** de z.

Hay un par de casos especiales que debemos analizar antes de proceder. Primero, veamos un número complejo que tiene la parte real cero. En estos casos, lo llamamos **número imaginario puro**.

$$z = 0 + bi = bi$$

A continuación, veamos un número complejo que tiene una parte imaginaria cero.

$$z=a+0i=a$$

En este caso, podemos ver que el número complejo es, de hecho, **un número real**. Debido a esto, podemos pensar en los números reales como un subconjunto de los números complejos.

Aritmética de complejos

Dados dos números complejos $z_1=a+bi$ y $z_2=c+di$ definimos la **suma** y el **producto** de la siguiente manera

Suma $\quad z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i \quad$ (2)

Producto $\quad z_1 \times z_2 = (ac - bd) + (ad + cb)i \quad$ (3)

Hemos visto que podemos pensar en los números reales como un subconjunto de los números complejos. Tenga en cuenta que las fórmulas para la suma y multiplicación de números complejos son también las fórmulas para números reales estándar. Por ejemplo, dados los dos números complejos $z_1=a+0i$ y $z_2=c+0i,$ las fórmulas son las vistas para números reales:

$$z_1 + z_2 = (a+c) + (0+0)i= a+c$$
$$z_1 \times z_2 = (ac - 0\times0) + (a\times0 + c\times0)i=a\cdot c$$

Puede demostrarse que $i^2 = -1$ es una consecuencia de la definición de multiplicación.
Sin embargo, antes de hacerlo, debemos reconocer que las **potencias** de los números complejos funcionan igual que para los números reales. En otras palabras, si n es un entero positivo, definiremos exponenciación como $z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot z\ldots z}_{n\ veces}$

Entonces, usando la definición de exponenciación y el uso de la definición de multiplicación,

$$i^2 = i \times i = (0 + 1i) \times (0 + 1i) = (0 \times 0 - 1 \times 1) + i\,(0 \times 1 + 0 \times 1) = -1$$

Entonces, al definir la multiplicación como lo hemos hecho anteriormente, obtenemos que $\boldsymbol{i^2 = -1}$ como consecuencia de la definición en lugar de simplemente afirmar que este es un hecho cierto. Si ahora tomamos raíces cuadradas, podemos ver que $\boldsymbol{i=\sqrt{-1}}$.
Sin embargo, generalmente no multiplicamos números complejos usando la definición. En la práctica, tendemos a simplemente multiplicar dos números complejos como si fueran binomios por aplicación de la propiedad distributiva y luego hacer uso del hecho de que sabemos que $i^2 = -1$.
Como ejemplo, hagamos una rápida adición y una multiplicación de números complejos.

a) $(58 - i) + (2 - 17i)$
b) $(6 + 3i) \times (10 + 8i)$
c) $(4 + 2i) \times (4 - 2i)$

Rta:

a) $(58 - i) + (2 - 17i) = 58 - i + 2 - 17i = 60 - 18i$
b) $(6 + 3i) \times (10 + 8i) = 60 + 48i + 30i + 24\, i^2 = 60 + 78i + 24\,(-1) = 36 + 78i$
c) $(4 + 2i) \times (4 - 2i) = 16 - 8i + 8i - 4i^2 = 16 + 4 = 20$

Es importante recordar que, a veces, al sumar o multiplicar dos números complejos, el resultado puede ser un número real, como se muestra en la parte c) del ejemplo anterior, que también proporciona una buena propiedad sobre números complejos.

$$(a + bi) \times (a - bi) = a^2 + b^2 \qquad (4)$$

$(a + bi)$ y $(a - bi)$ se llaman ***conjugados*** y el producto de dos complejos conjugados es un número real.
Veamos ahora la **resta** y **división** de dos números complejos. Recuerde que si tenemos dos números complejos, $z_1=a+bi$ y $z_2=c+di,$ luego los restamos como $z_1 - z_2 = (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$

Y la división de dos números complejos, $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a+bi}{c+di}$ (5)

se puede pensar simplemente como un proceso para eliminar la i del denominador y escribir el resultado como un nuevo número complejo $u + vi.$
Veamos un ejemplo de ambos para recordarnos cómo funcionan.

a) $(58 - i) - (2 - 17i)$
b) $(6 + 3i) \div (10 + 8i)$

c) $5i \div (1-7i)$

Rta:

a) Realmente no hay mucho que hacer aquí, así que aquí está el trabajo,
$(58 - i) - (2 - 17i) = 58 - i - 2 + 17i = 56 + 16i$

b) Recuerde que con la división sólo necesitamos eliminar la *i* del denominador y usando (4) sabemos cómo hacerlo. Todo lo que necesitamos hacer es multiplicar el numerador y el denominador por $(10\text{-}8i)$ y eliminaremos la *i* del denominador.

$$\frac{6+3i}{10+8i}=\frac{6+3i}{10+8i}\times\frac{10-8i}{10-8i}=\frac{60-48i+30i-24i^2}{100+64}=\frac{84-18i}{164}=\frac{21}{41}-\frac{9}{82}i$$

c) $\dfrac{5i}{1-7i}=\dfrac{5i}{1-7i}\times\dfrac{1+7i}{1+7i}=\dfrac{-35+5i}{1+49}=-\dfrac{7}{10}+\dfrac{1}{10}i$

Ahora, veremos una definición más precisa y matemática de ambos.

Técnicamente, las únicas operaciones aritméticas que se definen en números complejos son la suma y la multiplicación. Esto significa que tanto la resta como la división, de alguna manera, deberán verse incluidas en estas dos operaciones.

Primero necesitamos definir algo llamado inversión aditiva. Un ***inverso aditivo*** es un elemento típicamente denotado por $-z$, de modo que $z + (-z) = 0$ y así para un número complejo $z = a + bi$, el inverso aditivo, $-z$, viene dado por $-z = (-1)\, z = -a - bi$

Ahora podemos definir oficialmente la resta de dos números complejos. Dado dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ definimos la resta de ellos como:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) \qquad (6)$$

O, en otras palabras, al restar, realmente sólo estamos agregando el aditivo inverso, que se denota por $(-z_2)$, a z_1. Si además usamos la definición de los inversos aditivos para números complejos, podemos llegar a la fórmula dada arriba para la resta.

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (b - d)i$$

Pasemos a la división. Al igual que con la resta, primero debemos definir un inverso. Esta vez necesitaremos un ***inverso multiplicativo***. Un inverso multiplicativo para un número complejo *z* distinto de cero es un elemento denotado por z^{-1}, tal que: $z \times z^{-1} = 1$.

Tenga cuidado de no suponer que el superíndice -1 en la notación es un exponente. ¡No lo es! Es sólo una notación que se utiliza para denotar el inverso multiplicativo. Con números reales distintos de cero, es un verdadero exponente, por ejemplo $4^{-1} = ¼$. No es este el caso con números complejos. Comencemos con el número complejo $z = a + bi$ y llamemos inverso multiplicativo a $z^{-1} = u + vi$. Ahora, sabemos que debemos tener $z \times z^{-1} = 1$

Hagamos la multiplicación $z \times z^{-1} = (a + bi) \times (u + vi) = au + avi + ubi + bvi^2 = (au - bv) + i(av + ub) = 1$

Entonces, podemos extraer $(au - bv) = 1$ y que $(av + ub) = 0$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene $u=\dfrac{a}{a^2+b^2}$ y $v=-\dfrac{b}{a^2+b^2}$

Entonces, el inverso multiplicativo de *z* es $z^{-1}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i$ (7)

Como puede ver, en este caso, el superíndice -1 ¡no es un exponente!

Entonces, ahora que tenemos la definición del inverso multiplicativo, podemos finalmente definir la división de dos números complejos como: $\dfrac{z_1}{z_2}=z_1\times z_2^{-1}$ (8)

En otras palabras, la división se define como la multiplicación del numerador y el inverso multiplicativo del denominador. Tenga en cuenta también que esto realmente coincide con el proceso que utilizamos anteriormente. Veamos nuevamente uno de los ejemplos anteriores, sólo que esta vez, hagámoslo usando inversos multiplicativos. Entonces, comencemos con la división $\dfrac{6+3i}{10+8i}=(6+3i)\cdot(10+8i)^{-1}$

Usando (7), hallamos el inverso multiplicativo del denominador $(10+8i)^{-1}=\dfrac{10}{10^2+8^2}-\dfrac{8}{10^2+8^2}i=\dfrac{10-8i}{164}$

Ahora, multiplicamos $\frac{6+3i}{10+8i}=(6+3i)\cdot(10+8i)^{-1}=(6+3i)\cdot\left(\frac{10-8i}{164}\right)=\frac{60-48i+30i-24i^2}{164}=\frac{21}{41}-\frac{9}{82}i$

Tenga en cuenta que el penúltimo paso es idéntico a uno de los pasos de la resolución original de este problema y, por supuesto, la respuesta es la misma.

Como tema final, observemos que si no queremos memorizar la fórmula para el inverso multiplicativo, podemos obtenerlo utilizando el proceso que usamos en la multiplicación original, a través del conjugado. En otras palabras, para obtener el inverso multiplicativo podemos hacer lo siguiente:

$$(10+8i)^{-1}=\frac{1}{(10+8i)}\cdot\frac{(10-8i)}{(10-8i)}=\frac{10-8i}{10^2+8^2}$$

Como puede ver, este es esencialmente el proceso que usamos para hacer la división inicialmente.

Conjugado y módulo

Complejo conjugado

El primero que veremos es el complejo conjugado (o simplemente el ***conjugado***). Dado el número complejo $z = a + bi$, el complejo conjugado se denota por $\bar{z}$ y se define como, $\bar{z} = a\text{-}bi$ (9)

En otras palabras, simplemente cambiamos el signo en la parte imaginaria del número.

Aquí hay algunos hechos básicos sobre los conjugados.

Conjugado del conjugado $\bar{\bar{z}} = z$ (10)

Conjugado de la suma (resta) $\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$ (11)

Conjugado del producto $\overline{z_1\, z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$ (12)

Conjugado del cociente $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (13)

El primero sólo dice que si conjugamos dos veces, volvemos a lo que comenzamos originalmente. Los tres restantes dicen que podemos dividir la suma, las diferencias, los productos y los cocientes en términos individuales y luego conjugarlos.

Entonces, hagamos un par de ejemplos que ilustren los hechos anteriores

Ejemplo:

Calcule cada uno de los siguientes.

a) $\bar{\bar{z}}$ para $z = 3 - 15i$

b) $\overline{z_1 - z_2}$ para $z_1 = 5 + i$ y $z_2 = -8 + 3i$

c) $\overline{z_1} - \overline{z_2}$ para $z_1 = 5 + i$ y $z_2 = -8 + 3i$

Solución

a) Efectivamente, después de conjugar dos veces volvemos a nuestro número original.

b) $z_1 - z_2 = 13 - 2i \Rightarrow \overline{z_1 - z_2}=\overline{13-2i}=13+2i$

c) $z_1 - z_2 = \overline{5+i}-\overline{(-8+3i)}=13+2i$

Podemos ver que los resultados de *b)* y *c)* son los mismos.

Módulo

La otra operación que queremos analizar en esta sección es el módulo de un número complejo. Dado un número complejo $z = a + bi$, el módulo se denota y se define por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (14)

Tenga en cuenta que el módulo de un número complejo es siempre un número real y, de hecho, nunca será negativo, ya que las raíces cuadradas siempre devuelven un número positivo o cero, dependiendo de lo que esté debajo del radical.

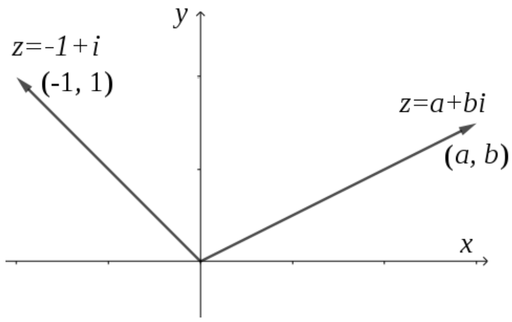
Tenga en cuenta que si z es un número real (es decir, $z = a + 0i$), entonces, $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$ donde el $|z|$ es el módulo del número complejo y el $|a|$ es el valor absoluto de un número real (recuerde que, en general, para cualquier número real a tenemos $\sqrt{a^2} = |a|$). Entonces, podemos ver que para los números reales el módulo y el valor absoluto son esencialmente lo mismo.

Podemos obtener un buen dato sobre la relación entre el módulo de un número complejo y sus partes reales e imaginarias. Para ver esto, elevamos al cuadrado ambos lados de (14) y usamos el hecho de que la parte real de $z = a$ y la parte imaginaria de $z = b$. Al hacer esto, llegamos a $z^2 = a^2 + b^2$, es decir $|z| \geq a$ y también $\geq b$

Existe una relación de igualdad entre el módulo de un número complejo y su conjugado. $|z| = |\bar{z}|$

Interpretación geométrica

Considere el número complejo $z = a + bi$. Podemos pensar en este número complejo en el sistema de coordenadas cartesianas estándar, como el punto de coordenadas (*a; b*) que define el vector posición que comienza en el origen y termina en el punto extremo como se muestra en la figura a la derecha.

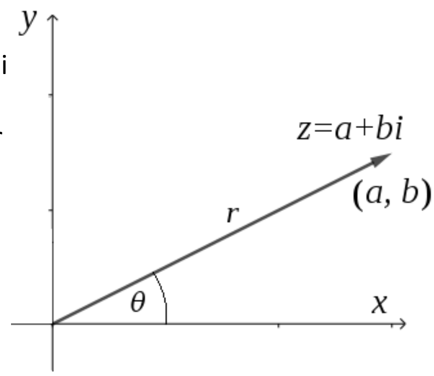


En esta interpretación, llamamos *eje x* al eje real y *eje y* al eje imaginario. A menudo llamamos al plano xy en esta interpretación como plano complejo.

Tenga en cuenta también que ahora podemos obtener una interpretación geométrica del módulo. De la imagen de arriba podemos ver que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ no es más que la longitud del vector que estamos usando para representar el número complejo $z = a + bi$. Esta interpretación también nos dice que la desigualdad $|z_1| < |z_2|$ significa que z_1 está más cerca del origen (en el plano complejo) que z_2

Forma polar

Veamos ahora la primera forma alternativa para un número complejo. Si pensamos en el número complejo distinto de cero $z = a + bi$ como el punto (a, b) en el plano xy, también sabemos que podemos representar este punto mediante las coordenadas polares (r, θ), donde r es la distancia del punto desde el origen y θ es el ángulo, en radianes, desde el eje x positivo al rayo que conecta el origen con el punto.



Cuando trabajamos con números complejos suponemos que r es positivo y que puede ser cualquiera de los ángulos posibles (tanto positivos como negativos) que terminan en el rayo. Tenga en cuenta que esto significa que hay literalmente un número infinito de opciones para θ. Hemos excluido ya que no está definido para el punto $(0,0)$. Por lo tanto, sólo consideraremos la forma polar de números complejos distintos de cero.

Tenemos las siguientes fórmulas de *conversión* para convertir las coordenadas polares (r, θ), a las correspondientes coordenadas cartesianas del punto, (a, b)

$$a = r \cos\theta \qquad\qquad b = r \operatorname{sen}\theta$$

Si sustituimos estos en $z = a + bi$ en el correspondiente y factoreamos r, llegamos a la forma polar del número complejo, $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ fórmula de Moivre (14)

Tenga en cuenta también que también tenemos la siguiente fórmula a partir de coordenadas polares que relacionan r con a y b. $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ pero, el lado derecho no es más que la definición del módulo y entonces vemos que, $r = |z|$ (15)

Entonces, a veces la forma polar se escribirá como, $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ (16)

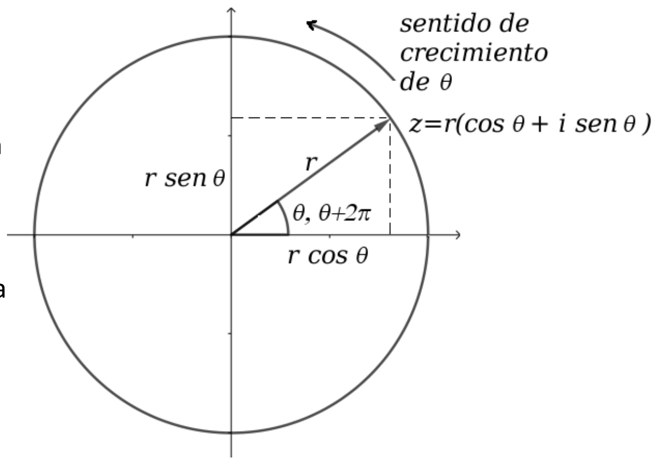
El ángulo θ se llama el argumento de z y se denota por $\theta = \arg z$

El argumento de z puede ser cualquiera de los infinitos valores posibles de θ, cada uno de los cuales se puede encontrar resolviendo $\theta = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$ (17)

y asegurándose de que esté en el cuadrante correcto (a través de los signos de a y b).

Tenga en cuenta también que cualquiera de los valores del argumento diferirá entre sí por un múltiplo entero de 2π. Esto tiene sentido cuando se considera lo siguiente.

Para un número complejo dado, elija cualquiera de los valores posibles del argumento, por ejemplo θ. Si ahora aumenta el valor de θ, es decir se aumenta el ángulo que forma el vector con el eje *x* positivo, el efecto es que el punto está girando sobre el origen en sentido antihorario. Como se necesitan 2π radianes para hacer una revolución completa, volveremos al punto de partida inicial cuando alcancemos θ +2π y tengamos un nuevo valor del argumento. Vea la figura a la derecha.



Si seguimos aumentando el ángulo volveremos a estar en el punto de partida cuando alcancemos θ+4π, que es un nuevo valor del argumento.

Continuando de esta manera, podemos ver que cada vez que alcanzamos un nuevo valor del argumento, simplemente agregaremos múltiplos de 2 π sobre el valor original del argumento.

Del mismo modo, si comenzamos en θ y reducimos el ángulo, rotaremos el punto sobre el origen en el sentido de las agujas del reloj y volveremos al punto de partida original cuando alcancemos θ - 2π.

Continuando de esta manera, volvemos a ver que cada nuevo valor del argumento se encontrará restando un múltiplo de 2 π del valor original del argumento. Así podemos ver que si θ_1 y θ_2 son dos valores de *arg z*, entonces para algunos enteros *k* tendremos, $\theta_1 - \theta_2 = 2\,k\,\pi$ (18)

Ejemplo:

Escribir en forma polar los siguientes números complejos:

a) $z = -1 + i\sqrt{3}$

b) $z = -9$

c) $z = 12\,i$

Rta:

a) Primero, hallamos *r* a partir de $r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$

Ahora, hallamos el argumento de *z*. Este puede ser cualquier ángulo que satisfaga la expresión (17) pero es usualmente más sencillo encontrar el ***valor principal*** del argumento. Este es el ángulo que se encuentra en el intervalo [-π;π], es decir $-\pi \le \theta \le \pi$.

En este caso $\theta = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = arctg\left(-\sqrt{3}\right) = 120^o \; o \; \frac{2\pi}{3}$ Se trata de un ángulo del cuadrante II, que es donde se localiza el número en el plano complejo.

Cuando utilice la calculadora, tenga en cuenta que la misma le devuelve un valor en el rango $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, Ud deberá ubicar el ángulo correcto teniendo en cuenta los signos de las componentes del complejo.

Ahora, podemos escribir el complejo en forma polar $z = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,sen\frac{2\pi}{3}\right)$

Recordando que $arg\ z = \theta + 2k\pi$, podemos encontrar muchas formas polares equivalentes, simplemente variando *k*.

Para *k*=1 $z = 2\left(\cos\frac{8\pi}{3} + i\,sen\frac{8\pi}{3}\right)$

Para *k*=2 $z = 2\left(\cos\frac{16\pi}{3} + i\,sen\frac{16\pi}{3}\right)$

etc.

b) En este caso, ya hemos notado que el argumento principal de un número real negativo es π, por lo que no es necesario calcularlo. Para completar, aquí están todos los valores posibles del argumento de cualquier número negativo: $arg\ z = \pi + 2\,k\,\pi = \pi\,(1 + 2\,k)$ con *k*= 0; ±1; ±2;….

Ahora $r = |z| = \sqrt{81+0} = 9$, así la forma polar es $z = 9\ (\cos\ \pi + i \text{ sen } \pi)$
Note que para cualquier número real positivo, el *arg* $z = 0$

c) Este es otro caso especial muy parecido a los números reales. Si tuviéramos que usar (17) para encontrar el argumento, tendríamos problemas ya que la parte real es cero y aparecería una división por cero. Sin embargo, todo lo que necesitamos hacer para obtener el argumento es pensar dónde está este número complejo en el plano complejo.
En el plano complejo, los números puramente imaginarios están en el eje *y,* sector positivo o sector negativo dependiendo del signo de la parte imaginaria.
Para nuestro caso, la parte imaginaria es positiva, por lo que este número complejo estará en el eje y positivo. Por lo tanto, el valor principal y el argumento general para este número complejo es *arg z* = π/2 y los correspondientes ángulos de más de una vuelta: $\pi/2 + 2\,k\,\pi = \pi(½ + 2\,k)$ con $k= 0; \pm1; \pm2;\ldots$
Así, $r = |z| = \sqrt{0+144} = 12$ y la forma polar del complejo es $z=12\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\,sen\frac{\pi}{2}\right)$

Potencias y raíces de complejos en forma polar (Fórmula de Moivre)
Veamos cómo queda la expresión para el cálculo de la potencia enésima de un número complejo que viene expresado en forma trigonométrica. Consideramos el producto de *n* números complejos en forma polar:
$(|z|\cdot[\cos\alpha+i\cdot sen\alpha])^n=\underbrace{(|z|\cdot[\cos\alpha+i\cdot sen\alpha])\cdot\ldots\cdot(|z|\cdot[\cos\alpha+i\cdot sen\alpha])}_{n}=|z|^n\cdot[\cos(n\,\alpha)+i\,sen(n\,\alpha)]$ (teorema de Moivre, su resolución al final del apunte)
Ejemplo:
$[5\ (\cos 60^o + i \text{ sen } 60^o)]^3 = 5^3\ [\cos(3\cdot60^o) + i \text{ sen}(3\cdot60^o)]=125\ (\cos 180^o + i \text{ sen } 180^o) = 125\ (-1+ 0)= -125$
Dado un número complejo, todo otro número complejo que elevado a la potencia enésima dé un resultado igual al primero, se dice que es una raíz enésima de éste.
Vemos que dado un número complejo cualquiera cuyo módulo y argumento representaremos por *r* y θ respectivamente, siempre tiene raíces enésimas, y precisamente el número de éstas es *n*.
En virtud de la definición, la condición para que $|z|\ (\cos\alpha + i\ sen\ \alpha)$ sea una raíz enésima es:

$$[|z|\ (\cos\alpha + i\ sen\ \alpha)]^n = r\ (\cos\theta + i\ sen\ \theta)$$

Entonces, si los dos números representados por el primer y segundo miembro de esta igualdad son iguales, deberán tener el mismo módulo y sus argumentos deberán diferir en un número exacto de vueltas, es decir:

$$|z|^n = r \quad \text{y} \quad n\,\alpha = \theta + 2k\pi$$

Operando con estas expresiones $|z|=\sqrt[n]{r}$ y $\alpha=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}$

A primera vista podría parecer que *α* tiene infinitos valores, pero en realidad, para *k* = 0 hasta *k* = *n*-1 obtendremos argumentos diferentes, y a partir de los siguientes *k* obtendremos los mismos números complejos que ya habíamos encontrado, con algunas vueltas enteras más.

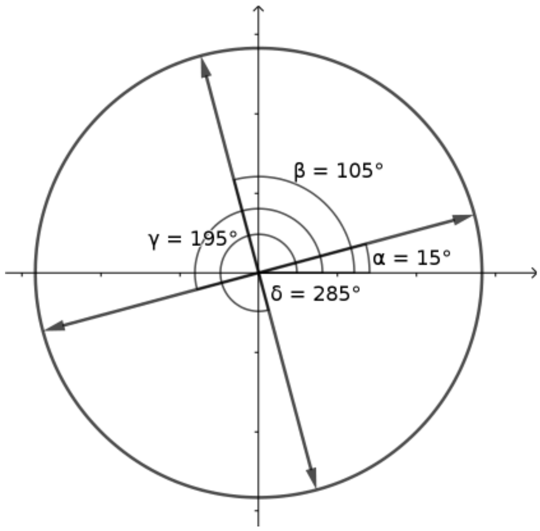
En resumen, todo número complejo no nulo $r\ (\cos\theta + i\ sen\ \theta)$ tiene *n* raíces enésimas distintas, cuyo módulo es el mismo para todas (raíz enésima aritmética del módulo *r*) y cuyos argumentos (salvo múltiplos de $2k\pi$) son: $\frac{\theta}{n};\frac{\theta+2\pi}{n};\frac{\theta+4\pi}{n};\ldots;\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}$

Ejemplo

a) Calcular las raíces cuartas de $4\ (\cos 60^o + i \text{ sen } 60^o)$

Buscamos el módulo: $|z|^4=4 \Rightarrow |z|=\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$

Y los argumentos serán: $\frac{60^o}{4};\frac{60^o+360^o}{4};\frac{60^o+2\times360^o}{4};\frac{60^o+3\times360^o}{4}=15^o;105^o;195^o;285^o$



b) Encuentre todas las raíces de $z^3 = 2$

Debemos escribir *z* en su forma polar: como 2 queda sobre la parte positiva del eje real, su argumento principal es cero y su módulo es 2:

Si $z = 2$, entonces $Arg(2) = \theta = 0$, $|2| = 2$

Para *k* = 0: Raíz cúbica principal $z_0=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{0}{3}+i\,sen\frac{0}{3})=\sqrt[3]{2}$

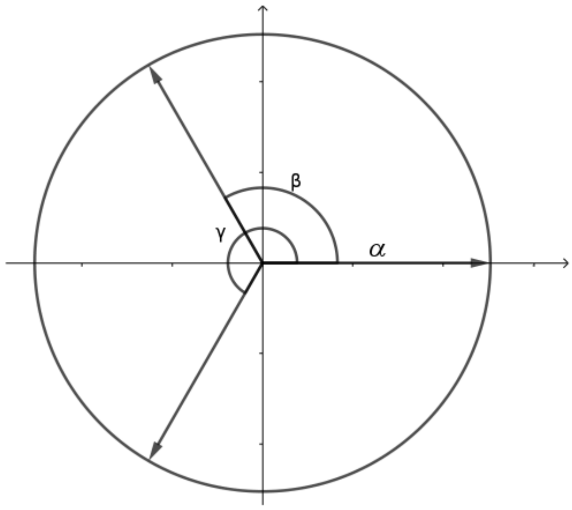
Para *k* = 1: Segunda raíz cúbica

$$z_1=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{0+1\times 360^o}{3}+i\,sen\frac{0+1\times 360^o}{3})=\sqrt[3]{2}(\cos 120^o+i\,sen\,120^o)=\sqrt[3]{2}(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}+i\frac{\sqrt[6]{2^5}}{2}$$

Para *k* = 2: Tercera raíz cúbica

$$z_2=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{0+2\times 360^o}{3}+i\,sen\frac{0+2\times 360^o}{3})=\sqrt[3]{2}(\cos 240^o+i\,sen\,240^o)=\sqrt[3]{2}(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}-i\frac{\sqrt[6]{2^5}}{2}$$

Representación gráfica de las 3 raíces cúbicas de *z* = 2



Teorema de Moivre

La fórmula de Moivre, nombrada así por Abraham de Moivre, afirma que para cualquier número complejo (y en particular, para cualquier número real) *x* y para cualquier entero *n* se verifica que:

$$(|z|\cdot[\cos\alpha+i\cdot sen\,\alpha])^n=|z|^n\cdot[\cos(n\,\alpha)+i\,sen(n\,\alpha)]$$

Demostración por inducción:

Debe ser válida para *n*=1 $(|z|\cdot[\cos\alpha+i\cdot sen\,\alpha])^1=|z|\cdot[\cos(1\times\alpha)+i\,sen(1\times\alpha)]=|z|\cdot(\cos\alpha+i\cdot sen\,\alpha)$

Hipótesis: es válida para $k\in\mathbb{N}$ $(|z|\cdot[\cos\alpha+i\cdot sen\,\alpha])^k=|z|^k\cdot[\cos(k\,\alpha)+i\,sen(k\,\alpha)]$

Tesis: es válida para *k*+1

$$\begin{aligned}(|z|\cdot[\cos\alpha+i\cdot sen\,\alpha])^k+1 &=|z|^k\cdot[\cos(\alpha)+i\,sen(\alpha)]^k\cdot|z|[\cos(\alpha)+i\,sen(\alpha)]\\ &=|z|^{k+1}\cdot[\cos(k\,\alpha)+i\,sen(k\,\alpha)]\cdot[\cos(\alpha)+i\,sen(\alpha)] \quad \text{por hipótesis}\\ &=|z|^{k+1}\cdot\{\cos(k\,\alpha)\cos\alpha-sen(k\,\alpha)sen\,\alpha+i[\cos(k\,\alpha)sen\,\alpha+sen(k\,\alpha)\cos\alpha]\}\\ &=|z|^{k+1}\{\cos[(k+1)\alpha]+i\,sen[(k+1)\alpha]\} \quad \text{por identidad trigonométrica}\end{aligned}$$

Las identidades trigonométricas en juego en la demostración son las de funciones de la suma de ángulos:

sen($\alpha\pm\beta$) =sen α cos β ± cos α sen β

cos($\alpha\pm\beta$) = cos α cos β ∓ sen α sen β