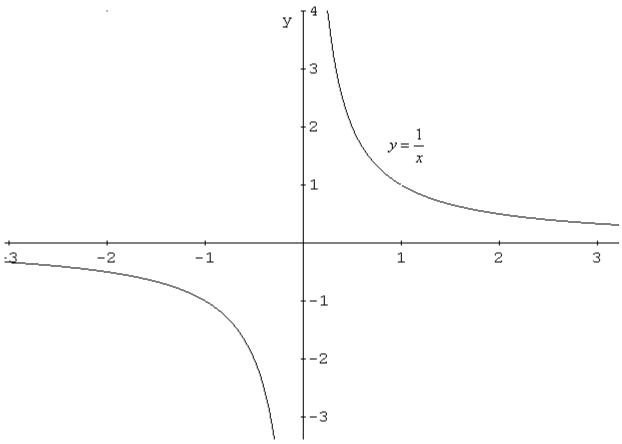
Recordemos que una función es fraccionaria cuando se puede expresar como cociente de dos polinomios. El grado del polinomio del denominador debe ser distinto de cero, es decir no debe ser una constante, ya que en ese caso pasaría a ser una función entera. Las funciones fraccionarias junto con las enteras forman el conjunto de las funciones racionales.
Dentro de las funciones fraccionarias vamos a considerar, por ahora, las de la forma:

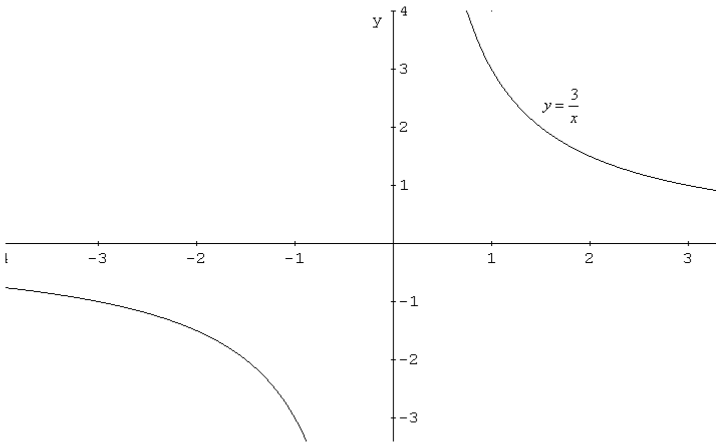
$y = \dfrac{r}{x}$ con $r \in R$ $\qquad y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ con $c \neq 0$ (función homográfica)

Más adelante, cuando hagamos estudios de función utilizando derivadas, vamos a considerar todo tipo de funciones racionales.

Empezaremos por la más sencilla: $y = \dfrac{r}{x}$. El dominio de esta función es: $R - \{0\}$.

Algunos ejemplos de funciones del tipo $y = \dfrac{r}{x}$:





En estas gráficas se observa que cuando x toma valores muy grandes o muy pequeños, los valores de la función se acercan al cero. 0 sea que la gráfica se aproxima al eje x a medida que $|x|$ aumenta. De la misma manera, cuando los valores de x se aproximan al cero, los valores funcionales correspondientes son grandes en valor absoluto. Por lo tanto la gráfica se aproxima al eje y, a medida que x se aproxima a cero.
Para indicar que x se aproxima a un número a, se utiliza la notación:

$x \to a^-$ para indicar que x se aproxima a a por la izquierda

$x \to a^+$ para indicar que x se aproxima a a por la derecha

También se utiliza la notación:

$x \to \infty$ para indicar que x crece sin límite, o también que x tiende a ∞

$x \to -\infty$ para indicar que x decrece sin límite, o también que x tiende a $-\infty$

En nuestros ejemplos se observa:

$\boxed{\begin{array}{l} Si\ x \to 0^{+} : f(x) \to \infty \\ Si\ x \to 0^{-} : f(x) \to -\infty \end{array}}$ $\to$ La recta $x = 0$ es la **asíntota vertical**

$\boxed{\begin{array}{l} Si\ x \to \infty : f(x) \to 0 \\ Si\ x \to -\infty : f(x) \to 0 \end{array}}$ $\to$ La recta $y = 0$ es la **asíntota horizontal**

Una recta **x = a** es una **asíntota vertical** de la gráfica de una función f(x), si se cumple que la función tiende a ∞ ó $-\infty$, cuando x tiende al valor a, ya sea por derecha o por izquierda. En símbolos:

$f(x) \to \infty$ a medida que $x \to a^{+}$ ó $x \to a^{-}$; o también:

$f(x) \to -\infty$ a medida que $x \to a^{+}$ ó $x \to a^{-}$

Una recta **y** = **b** es una **asíntota horizontal** de la gráfica de una función f(x), si se cumple que cuando x tiende a ∞ ó $-\infty$, la función tiende al valor b. En símbolos:

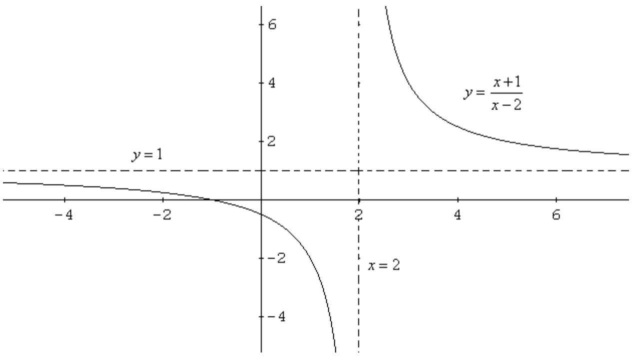
$f(x) \to b$ a medida que $x \to \infty$ ó $x \to -\infty$

La gráfica de las funciones de la forma $y = \dfrac{r}{x}$ es una hipérbola equilátera. Se denomina así porque sus asíntotas son perpendiculares entre sí.

Si el valor de r es positivo, las ramas de la hipérbola se encuentran en el primer y tercer cuadrante, mientras que si es negativo, las ramas estarán en el segundo y el cuarto.

Vayamos ahora a las funciones del tipo: $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ con $c \neq 0$, denominadas funciones homográficas, que son el cociente de dos funciones lineales.

Grafiquemos la función: $y = \dfrac{x+1}{x-2}$



En este gráfico se puede observar que $x = 2$ es la asíntota vertical, mientras que $y = 1$ es la asíntota horizontal.

Esto se puede corroborar dándoles valores cercanos a 2, tanto por derecha como por izquierda, y obteniendo el valor de la función correspondiente a ellos.

Lo mismo dándole a x valores muy grandes o muy chicos, y obteniendo los valores de función correspondientes, obtendremos el valor de la asíntota horizontal.

Sus asíntotas son perpendiculares entre sí, por lo tanto su gráfica es una hipérbola equilátera.

Además, las funciones homográficas presentan asíntotas que son paralelas a los ejes coordenados.

En general en una función homográfica: $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, la asíntota vertical ocurre cuando $cx+d=0$, o sea donde no está definida la función, esto es en $x=-\frac{d}{c}$, pero siempre teniendo en cuenta que $ax+b\neq 0$ en $x=-\frac{d}{c}$.

En nuestro ejemplo, la función $y=\frac{x+1}{x-2}$ no está definida para $x=2$, y además en ese valor el numerador : $x+1\neq 0$, por lo tanto $x=2$ es la asíntota vertical de la función.

En la función homográfica, la asíntota horizontal ocurre en $y=\frac{a}{c}$. Esto se puede verificar si dividimos numerador y denominador de dicha función por x:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{ax+b}{x}}{\frac{cx+d}{x}}=\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}}$$

A medida que $x\to\infty$ y $x\to-\infty$, entonces $\frac{b}{x}\to 0$ y $\frac{d}{x}\to 0$. Por lo tanto $f(x)\to\frac{a}{c}$

De acuerdo a la definición resulta que $y=\frac{a}{c}$ es una asíntota horizontal.

En nuestro ejemplo: $y=\frac{x+1}{x-2}$ dividiendo numerador y denominador por x, resulta que la asíntota horizontal es $y=1$.

Si se considera a las asíntotas como ejes coordenadas, la hipérbola correspondiente a la función homográfica, tiene sus ramas en el primer y tercer cuadrantes, si $a.d-b.c<0$. En este caso la función es decreciente en todo su dominio. Si $a.d-b.c>0$ la hipérbola tendrá sus ramas en el segundo y cuarto cuadrantes, y resultará una función creciente en todo su dominio.

También la ecuación de la función homográfica, se puede escribir de la siguiente manera: $(x-h).(y-k)=r$ en las que (h,k) es el centro de la hipérbola con respecto al cual es simétrica; $x=h$ es la asíntota vertical e $y=k$ es la asíntota horizontal.

Teniendo en cuenta esta ecuación, la hipérbola va a tener sus ramas en el primer y tercer cuadrantes si $r>0$; y en el segundo y cuarto, si $r<0$, siempre considerando las asíntotas como ejes coordenadas.

Podemos considerar que la hipérbola equilátera $y=\frac{r}{x}$, cuyas asíntotas son los ejes coordenadas, puede escribirse de la forma: $x.y=r$, donde $h=k=0$. Esta hipérbola tiene su centro en el origen, y es simétrica al mismo. Sus ramas están en el primer y tercer cuadrantes si $r>0$, y en el segundo y cuarto, si $r<0$.

Ejemplo:
Dada la ecuación $(x-2)(y-3)=4$, sabemos que, por lo planteado anteriormente: $x=2$ es la asíntota vertical e $y=3$ es la horizontal y como $r=4$ es mayor que cero, sus ramas estarán en el primer y tercer cuadrante.

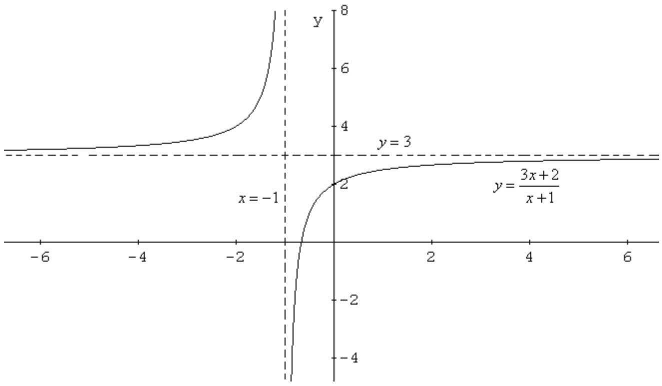
Podemos llevar esta expresión a la forma $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, ya que:

$$(x-2)(y-3)=4 \Leftrightarrow y-3=\frac{4}{x-2} \Leftrightarrow y=\frac{4}{x-2}+3 \Leftrightarrow y=\frac{4+3x-6}{x-2}=\frac{3x-2}{x-2}$$

Por lo tanto: $(x-2)(y-3)=4 \Leftrightarrow y=\dfrac{3x-2}{x-2}$

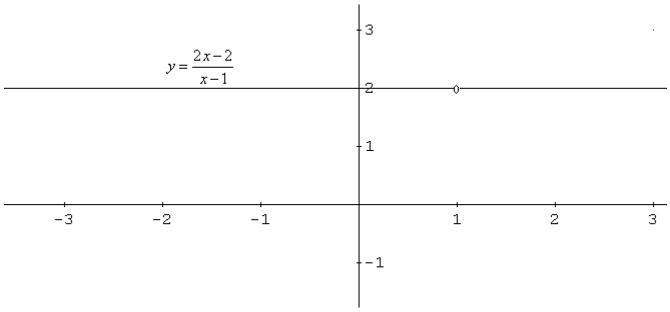
Podemos corroborar con esta última expresión las ecuaciones de las asíntotas y que las ramas están en el primer y tercer cuadrante ya que: $a.d-b.c<0$, esto es:
3.(-2) - (-2).1 <0

Otro ejemplo: Graficar la función $y=\dfrac{3x+2}{x+1}$



De acuerdo a lo dicho anteriormente, esta función tiene una asíntota vertical en $x=-1$ ya que en dicho valor la función no está definida, y además en dicho valor el numerador no se hace cero.
Y tiene una asíntota horizontal en $y=3$, ya que $\dfrac{a}{c}=3$.
Para hallar la asíntota vertical siempre se debe verificar que el numerador no se haga cero en el mismo valor que el denominador.

Veamos qué pasa si esto no ocurre, por ejemplo tomemos la función: $y=\dfrac{2x-2}{x-1}$.



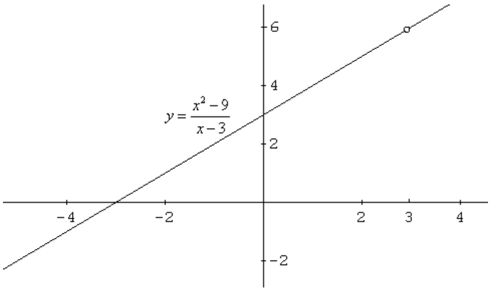
Esta función se hace cero en $x=1$, pero también en dicho valor se anula el numerador, por lo tanto en $x=1$ no hay una asíntota ya que si se grafica esta función resulta una recta $y=2$, paralela al eje x, que está definida para todos los valores de $x\neq 1$.
Cuando tengamos que hacer el gráfico de una función fraccionaria, es necesario determinar si el numerador y el denominador tienen factores comunes. En ese caso deben simplificarse, indicando la función con una nueva regla donde se aclare el dominio correspondiente.

En el ejemplo anterior $y=\dfrac{2x-2}{x-1}=\dfrac{2(x-1)}{x-1}=2 \quad \forall\ x\neq 1$

Ejemplo 2: Graficar : $y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$

$$y=\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x-3).(x+3)}{x-3}=x+3 \quad \forall x\neq 3$$

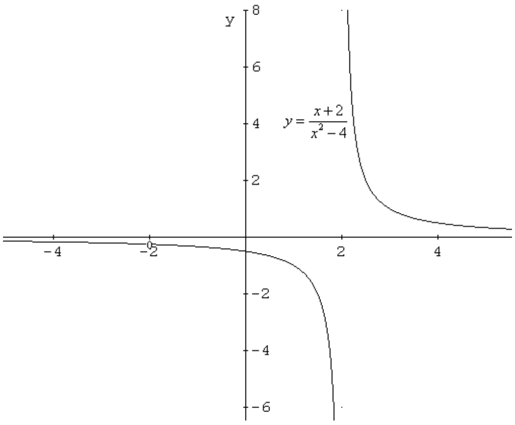
El gráfico es la recta de ecuación $y=x+3$, donde se excluye el punto $(3,6)$.



Ejemplo 3: Graficar : $y=\dfrac{x+2}{x^2-4}$

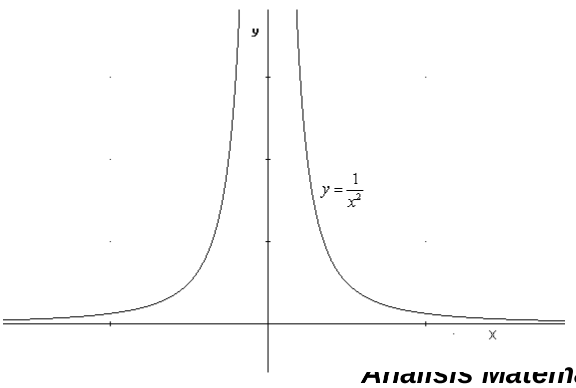
$$y=\frac{x+2}{x^2-4}=\frac{x+2}{(x-2).(x+2)}=\frac{1}{x-2} \quad \forall x\neq -2$$

El gráfico es una hipérbola de ecuación $y=\dfrac{1}{x-2}$, donde se excluye el punto $\left(-2,-\dfrac{1}{4}\right)$



Veamos otros ejemplos de funciones fraccionarias:

a) $y=\dfrac{1}{x^2}$. El dominio de esta función es: $\mathbb{R}-\{0\}$. Además es una función par, ya que: $f(-x)=\dfrac{1}{(-x)^2}=\dfrac{1}{x^2}=f(x)$, por lo tanto su gráfica es simétrica al eje y.



Su gráfica también es una hipérbola equilátera, ya que sus asíntotas son perpendiculares (x=0 e y=0)

b) $y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}$.

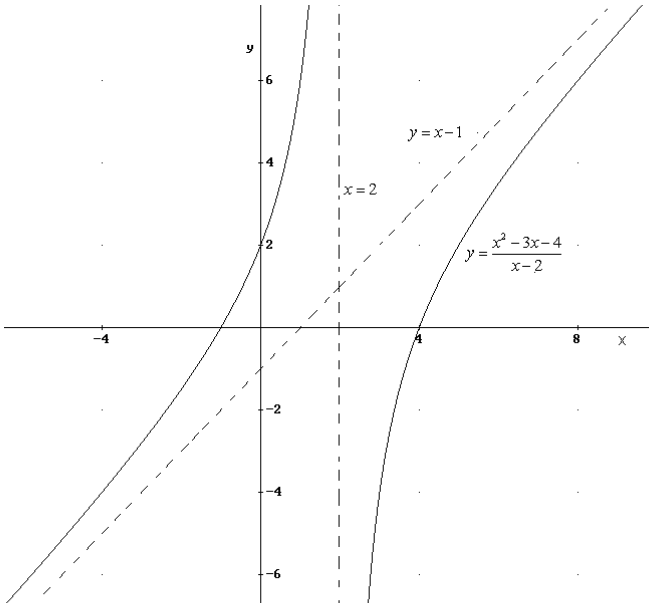
Vamos a determinar su comportamiento a partir de la expresión algebraica dada:

- ✓ El dominio de esta función es $\mathbb{R} - \{2\}$.
- ✓ La gráfica intersecta al eje x en: $x_1 = -1$ y $x_2 = 4$, ya que en dichos valores se anula el numerador: $x^2 - 3x - 4 = 0$
- ✓ La gráfica corta al eje y en: $y = 2$.
- ✓ Presenta una discontinuidad en $x = 2$. Dicha recta es la asíntota vertical ya que cuando $x \to 2^+$: $f(x) \to -\infty$, y cuando $x \to 2^-$: $f(x) \to +\infty$.
- ✓ No tiene asíntota horizontal. Pero podemos obtener información de la gráfica para cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$ si efectuamos la división entre: $x^2 - 3x - 4$ y $x - 2$. De esta división se obtiene: Cociente: $x - 1$ .Resto: -6

A partir de este resultado podemos escribir:

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x - 2} = x - 1 - \frac{6}{x - 2}$$

Cuando $x \to +\infty$ ó $x \to -\infty$, la gráfica de $y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}$ se aproxima a la recta $y = x - 1$. Esta recta se denomina ***asíntota oblicua*** de la gráfica de $y = f(x)$.



Asíntotas oblicuas y funciones racionales:

Si $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y el grado de $p(x)$ es uno más que el grado de $q(x)$, entonces $f(x)$ se puede expresar:

$$f(x) = mx + b + \frac{r(x)}{q(x)}$$ donde el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $q(x)$. La recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua de la gráfica de $f(x)$. Esto es: $\left[f(x) - (mx + b) \right] \to 0$ cuando $x \to +\infty$ ó $x \to -\infty$

Retomaremos este concepto cuando veamos límites en el infinito.

FUNCIONES IRRACIONALES

Algunos ejemplos de estas funciones:

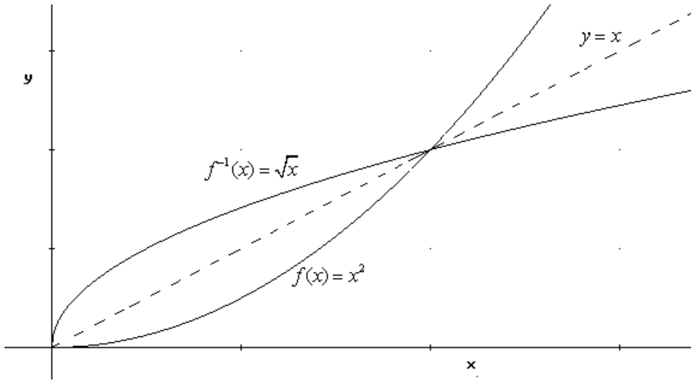
$y=\sqrt[3]{x^2+2x-7}$; $y=\sqrt{x-4}$; $y=\sqrt{x^2-4}$

Graficaremos la función $y=\sqrt{x}$ teniendo como dato que es la inversa de la función $y=x^2$.

Si consideramos: $f(x):\mathbb{R}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}\,/\,f(x)=x^2$, esta función así definida es biyectiva, entonces podemos asegurar que existe la función inversa:

$$f^{-1}(x):\mathbb{R}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}\,/\,f^{-1}(x)=\sqrt{x}$$

Hagamos el gráfico de $f^{-1}(x)$, teniendo en cuenta que es simétrica a $f(x)=x^2$ con respecto a $y=x$. Su gráfico resulta:



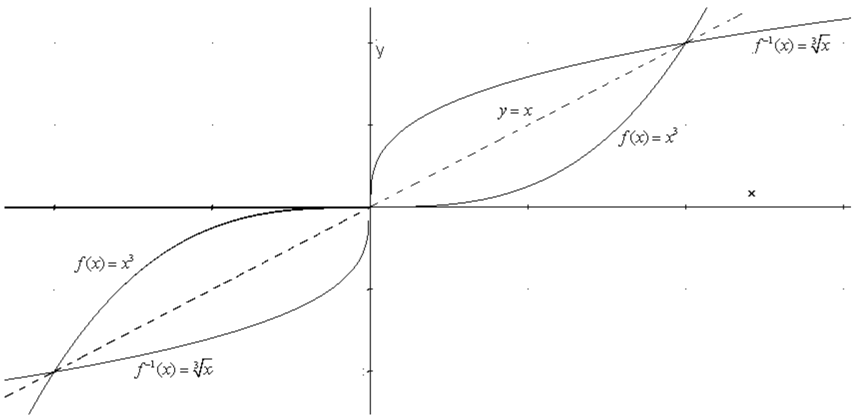
Graficaremos la función: $f(x)=\sqrt[3]{x}$ como inversa de la función: $y=x^3$.

Consideremos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,f(x)=x^3$. Esta función es biyectiva, por lo tanto se puede hallar su inversa.

Si $y=x^3\Rightarrow x=\sqrt[3]{y}=g(y)$.

Al hacer cambio de variable, resulta:

$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$



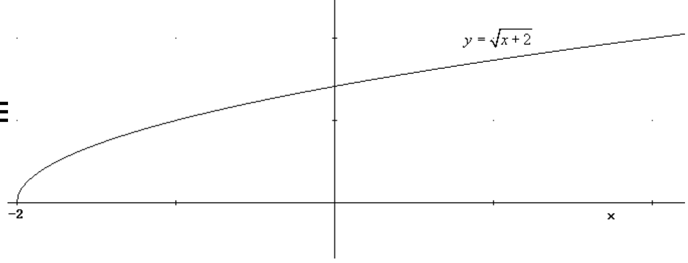
En general, las funciones de la forma $f(x)=\sqrt[n]{x}$

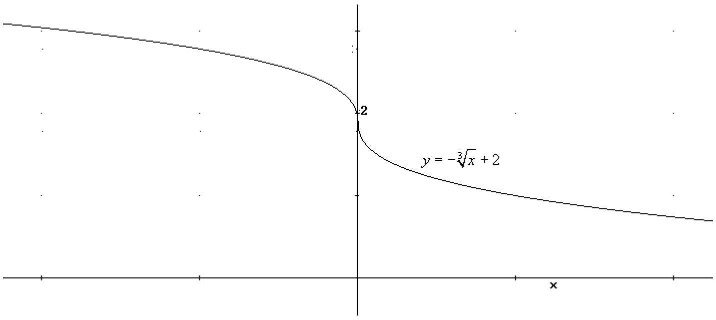
a) Si *n es par*, entonces $f:\mathbb{R}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ y tienen la forma de $y=\sqrt{x}$

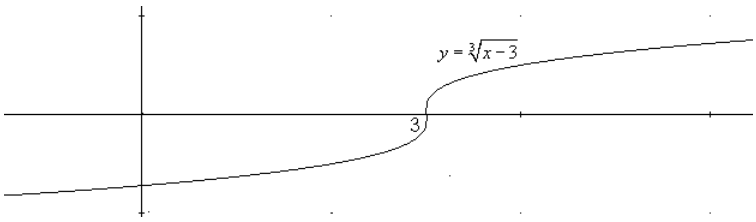
b) Si *n es impar*, entonces $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y tienen la forma de $y=\sqrt[3]{x}$

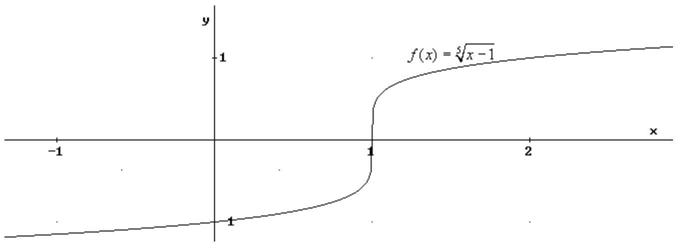
Estas gráficas también pueden desplazarse y reflejarse.

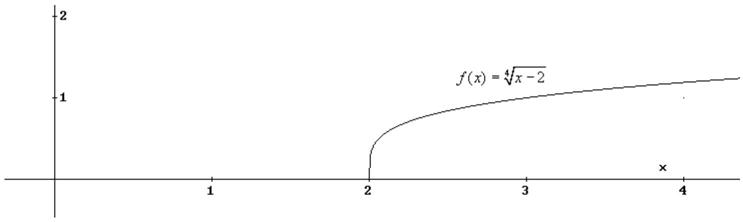
Ejemplos:


$y = \sqrt{x+2}$
−2
x


2
$y = -\sqrt[3]{x} + 2$
x


$y = \sqrt[3]{x-3}$
3


y
1
$f(x) = \sqrt[5]{x-1}$
x
−1
1
2
1


2
1
$f(x) = \sqrt[4]{x-2}$
x
1
2
3
4