COMBINATORIA

Contar significa hallar el ***cardinal*** de un conjunto.

Si el conjunto es finito y no posee un número grande de elementos y ellos además no obedecen a una regla de formación, el único procedimiento viable para contar sus elementos es haciendo la enumeración de ellos.

Puede ser que el conjunto tenga muchos elementos para enumerarlos exhaustivamente, pero si sus elementos obedecen a una regla de formación fija, pueden construirse artificios que permiten conocer cuántos son, sin hacer la lista.

- Los problemas de la Combinatoria interesaron al hombre desde el principio. En uno de los libros más antiguos de la humanidad: ”I Ching” de los chinos, cuyo orígen se remonta al año 2300 a.C. con la presentación de los cuadrados mágicos y también en esos textos aparecen construcciones de ciertos grupos de elementos, que constituyen la primera elucubración combinatoria que se conserva.
- En la India se despierta fundamentalmente el interés por la Combinatoria en el siglo XII, Bhaskara escribe en su obra “Lilavati” sobre la utilidad de estas ideas para hallar las variaciones (con y sin repetición) y combinaciones, para analizar el esquema de las variaciones musicales; en medicina, para obtener a partir de distintos sabores todas las combinaciones posibles.
- En la Edad Media se desarrolló el interés por la Combinatoria a partir de la denominada Cábala, una forma de misticismo judío que trataba de relacionar los números con la Teología.

- Fueron los judíos españoles, los grandes cultivadores de la cábala, sobre todo con la obra conocida como el Libro del Esplendor (Sefer Hazohar) , que según se sabe ha sido escrito por Moisés de León en el siglo XIII.
- También se encuentra un novedoso tratamiento de la Combinatoria en una obra cabalística "Pardes Rimmonim"(Huerto de Granadas), publicada en el año 1552, en Salónica por el rabino Moisés Cordonero.
- El italiano Niccolo Tartaglia fue el primer matemático en disponer los números combinatorios formando un triángulo para analizar y resaltar sus propiedades. Se considera que el nacimiento de la Combinatoria Moderna nace con el francés Blas Pascal, quien casi un siglo después, en el año 1654, realizó un análisis de los combinatorios similar al que había hecho Tartaglia, además de llevar a cabo importantes estudios sobre las apuestas y los juegos de azar, lo que le valió también para ser considerado uno de los fundadores de la moderna Teoría de la Probabilidad. En honor a los trabajos de Tartaglia y de Pascal, el triángulo, de manera indistinta, lleva el nombre de los dos matemáticos.

La ***Combinatoria*** es el arte de contar sin hacer enumeraciones. Es *"contar usando la cabeza en lugar de los dedos".*

La ***Combinatoria*** surgió en el siglo XVI época que en Europa estaban de moda los juegos de azar (cartas, dados, loterías, etc), entre la gente de clase social alta.

Entonces al principio los problemas surgieron sobre juegos de azar, por ejemplo: "¿de cuántas maneras distintas puede obtenerse un determinado número de puntos al arrojar 2 ó 3 dados juntos?", o "¿de cuántas formas se pueden obtener 2 ases en el juego de cartas?".

Éste y otros problemas impulsaron el progreso de la Combinatoria y la Teoría de Probabilidades, que se desarrolló paralelamente.

Los que iniciaron el camino de la Combinatoria fueron Tartaglia, Fermat y Pascal (siglo XVII).

La ***Combinatoria*** es la parte de la Matemática que estudia los problemas sobre cuántas combinaciones diferentes sometidas o no a otras condiciones se pueden formar con objetos diferentes.

Vamos a estudiar algunos métodos para contar:

Primer método para contar

Consiste en establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto en cuestión y un conjunto de la forma {1, 2, 3, ….., n}; lo que permite afirmar que ambos conjuntos son coordinables, sabemos entonces que el cardinal del conjunto dado es n.

Definición: Un conjunto A se dice *coordinable* o *equipotente* con otro B, si existe una función biyectiva de A sobre B.

Se nota $A \cong B$, con $A, B \neq \emptyset$

$A \cong B$ sí y sólo si $\exists f: A \to B$ biyectiva

Los conjuntos coordinables tienen el mismo cardinal.

Ejemplo 1: ¿Cuántos números enteros hay entre 5 y 31 incluídos ambos?

Establecemos la correspondencia:

5 6 7 8 9 10 11 ………………….. 25 26 27 28 29 30 31

1 2 3 4 5 6 7 …………………… 21 22 23 24 25 26 27

La función aplicada consiste en asignar a cada número del conjunto el número que se obtiene restándole 4. Luego hay 27 números.

En general si $m \leq n$, el conjunto $\{m, m+1, m+2, m+3, ..., n-1, n\}$ de los enteros comprendidos entre m y n, ambos incluídos se pueden poner en correspondencia con el conjunto $\{1, 2, 3, 4,...., n - m + 1\}$ mediante la relación "restar m – 1 unidades a cada elemento".

Entonces tenemos:

$m \rightarrow m - (m - 1) = m - m + 1 = 1$

$m+1 \rightarrow m + 1 - (m - 1) = m + 1 - m + 1 = 2$

$m+2 \rightarrow m + 2 - (m - 1) = m + 2 - m + 1 = 3$

…………………………………………………………….

$n - 1 \rightarrow n - 1 - (m - 1) = n - 1 - m + 1= n - m$

$n \rightarrow n - (m - 1) = n - m + 1$

Así entre m y n hay $n - m +1$ enteros o dicho de otra manera el conjunto

$\{m, m+1, ..., n - 1, n\}$ tiene $n - m + 1$ elementos.

<u>Ejemplo 2</u>: El cardinal del conjunto $\{-8, -7, -6, ..., 13\}$

Es $13- (-8 - 1) = 13 + 8 + 1= 22$

$13 - (-8) + 1=$

$n - m + 1$

<u>Ejemplo 3</u>: Determinar cuántos enteros hay entre 15708 y 75634 incluídos ambos.

$75634 - 15708 + 1 = 59927$

Aquí se nota la ventaja de tener un método.

<u>Ejemplo 4</u>: En un campeonato de tenis hay en las eliminatorias 39 inscriptos. ¿Cuántos partidos se jugaron?

Para simplificar vamos a suponer que son 9 los inscriptos.

1° ronda : x x x x x x x x x 4 partidos

2° ronda: x x x x x 2 partidos

3° ronda: x x x 1 partido

4° ronda: x x <u>1 partido</u>

x ganador 8 partidos

Así habiendo 9 inscriptos se han jugado 9 – 1 = 8 partidos.

¿Para qué se juega cada partido?

Para eliminar un jugador.

Todo jugador es eliminado en algún partido salvo el ganador.

Entonces a cada jugador se le asocia el partido en el que fue eliminado (es una función biyectiva).

Luego hay que jugar tantos partidos como jugadores se pretenden eliminar.

Si son 39 los inscriptos se juegan 38 partidos.

<u>En general</u>: si n son los inscriptos entonces se juegan n – 1 partidos.

<u>Segundo método para contar</u>

<u>Ejemplo 5:</u>

¿Cuántas palabras con o sin sentido (anagramas) pueden formarse con las letras de la palabra MATE, de modo que comiencen con vocal y tengan cuatro letras distintas?

1° Paso: A - - - E - - - 2 posibilidades

2° Paso: AM - - AT - - AE - - 3 posibilidades

3° Paso: AMT - AME - 2 posibilidades

4° Paso: AMTE 1 posibilidad

Luego hay dos anagramas que comiencen con AM, de igual modo que 2 que comiencen con AT y 2 con AE. Entonces hay 6 que comienzan con A.

Razonando análogamente resulta que hay 6 anagramas que comienzan con E, en total hay 12 anagramas que tienen las 4 letras distintas que pueden armarse con las letras de la palabra MATE.

Hemos podido contar los anagramas sin escribirlos a todos.

Todo consiste en anotar las bifurcaciones que se pueden elegir en cada paso.

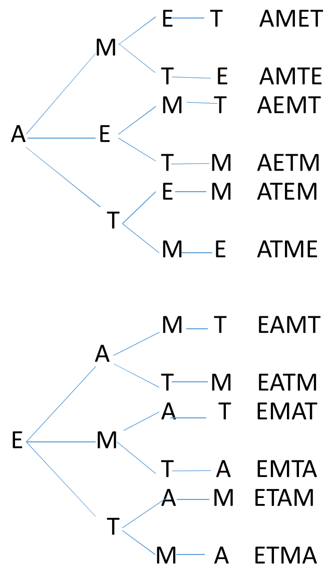
$$\left.\begin{array}{l}\text{Paso 1: 2 posibilidades}\\ \text{Paso 2: 3 posibilidades}\\ \text{Paso 3: 2 posibilidades}\\ \text{Paso 4: 1 posibilidad}\end{array}\right\} \quad 2 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 12 \text{ posibilidades}$$

Esto obedece a la regla de la multiplicación

<u>Regla de la multiplicación</u>: Si un conjunto A tiene **n** elementos y el conjunto B tiene **m** elementos el número de elecciones distintos de un elemento A y otro B es: **m . n**.

Para representar este proceso de confección o armado de los pasos es útil el diagrama de forma de "árbol".

Diagrama de árbol



2 . 3 . 2 . 1 = 12 anagramas

Ejemplo 6:

¿Cuántos números capicúas de 5 cifras pueden formarse?

9 10 10 1 1 900 n° capicúas de 5 cifras

¿Cuántos capicúas son impares? Terminan en 1-3-5-7-9

5 10 10 1 1 500 capicúas impares

Ejemplo 7:

¿ Dé cuántas maneras se pueden elegir 2 fichas de las 28 que hay en el juego de dominó, de manera que puedan aplicarse una sobre otra?

En el juego de dominó se tienen 7 fichas dobles y 21 simples.

Al elegir una ficha se puede hacer de 28 maneras distintas.

1°) En 7 casos la primer ficha puede ser doble.

2°) En 21 casos la primer ficha puede ser simple.

En el 1° caso la segunda ficha puede elegirse de 6 maneras distintas, entonces hay 7.6 = 42 posibles elecciones de una ficha doble y otra que se aplique sobre ella.

En el 2° caso la segunda ficha puede elegirse de 12 maneras distintas (6 para cada punta de la primer ficha), luego habrá 21.12 = 252 posibles elecciones de dos fichas simples que se aplique una sobre otra.

Luego el número total de posibles elecciones del par de fichas es

42 + 252 = 294.

Esto lleva a la regla de la suma:

Regla de la suma: Si cierto objeto A puede elegirse de **m** maneras y otro objeto B, puede elegirse de **n** maneras la elección de **"A o B"** se puede hacer de **m + n** maneras.

Debe cuidarse que ninguna forma de elegir A coincida con alguna forma de elegir B. Si existiera esa coincidencia la regla de la suma pierde validez y se obtienen **m + n – k** modos de elección distintos, siendo **k** el número de coincidencias.

Algunos modelos importantes

Los métodos anteriores permiten resolver una infinidad de problemas de recuentos; pero entre ellos hay algunos que se presentan con mucha frecuencia y por eso han merecido un nombre propio y una simbología particular.

Pero, ante un problema concreto **no** es conveniente tratar de ajustarse a uno de esos modelos, es preferible razonar directamente empleando el método constructivo y ajustándose al enunciado propuesto.

Permutaciones o sustituciones

Ejemplo 8: ¿De cuántas maneras distintas pueden colocarse 5 personas en una fila?

$\underline{5}\quad\underline{4}\quad\underline{3}\quad\underline{2}\quad\underline{1} = 120$

Ejemplo 9: Un padre compra para sus tres hijos un libro, una pelota y una caja de colores. ¿De cuántas maneras distintas puede repartirlos entre sus hijos?

P L C P C L L P C L C P C L P C P L} en total son 6 maneras de hacer el reparto esto es 3.2.1 = 6. Estas ordenaciones se denominan permutaciones o sustituciones.

Definición: Dado un conjunto de **m** elementos, se llama permutación de orden **m**, a cada uno de las distintas ordenaciones de esos **m** elementos.

Dos permutaciones son distintas cuando difieren en el orden en que han sido considerado al menos uno de sus elementos.

Indicaremos con P_m el número total de permutaciones de **m** elementos que calcularemos mediante el producto de enteros positivos consecutivos decreciente a partir de **m** y hasta 1.

Para simplificar la escritura se emplea la siguiente notación:

m! = m.(m-1).(m-2).(m-3)…….3.2.1

En nuestro ejemplo: 3! = 3.2.1 y 7! = 7.6.5.4.3.2.1

Entonces P_m= m! número de permutaciones de orden m.

Definición: Sea m ∈ $\mathbb{Z}$, m≥ 0 se llama factorial de m y se representa por m! al número definido por recurrencia de la siguiente manera:

0! = 1

m! = m. (m-1)!

(m-1)! = (m-1). (m-2)!

…………………………….

m! = m.(m-1).(m-2)…….3.2.1

Ejemplo 10: Si el padre tuviera para repartir entre sus tres hijos 2 libros idénticos y 1 pelota. ¿De cuántas maneras haría el reparto?

L L P   L P L   P L L } 3 maneras distintas esto es $\frac{3!}{2!} = \frac{3.2.1}{2.1}$= 3 pues hay dos elementos idénticos.

En general:

Permutaciones con repetición

Una colección de **m** objetos, clasificados en grupos de objetos idénticos entre sí, el primero con k_1 objetos, el segundo con k_2 objetos, etc, se puede ordenar de:

$$\frac{m!}{k_1!.k_2\,!k_3!......k_n!} = P_m^{k_1,k_2,k_3,.......k_n} \text{ maneras distintas.}$$

En este caso estamos frente a permutaciones con repetición de m objetos, con k_1…. k_n iguales entre sí.

Ejemplo 11: ¿Cuántas palabras distintas pueden obtenerse reordenando las letras de la palabra MATEMÁTICA.

$$P_{10}^{3,2,2} = \frac{10!}{3!.2!.2!} = \frac{10.9.8.7.\cancel{6}.5.\cancel{4}.3.2.1}{\cancel{3.2}.1.\cancel{2}.1.\cancel{2}.1} = 151200$$

Variaciones o subconjuntos ordenados

Ejemplo 12: En una carrera de 7 atletas, ¿de cuántas maneras distintas pueden adjudicarse las medallas doradas, de plata y de bronce?

1° 2° 3°

7 6 5 = 210 formas distintas de adjudicarlas.

El atleta que recibirá la medalla dorada puede ser cualquiera se los 7 atletas, adjudicadas éstas para el segundo lugar o sea la medalla de plata puede obtenerla cualquiera de las 6 restantes y la de bronce algunos de los 5 restantes.

Obsérvese que son 7! los órdenes de llegada de los 7 atletas, pero para los efectos de la adjudicación de las medallas, los 4 últimos da lo mismo que lleguen en el cuarto lugar que en el séptimo. Entonces todas las listas de llegada se pueden dividir en grupos de 4! obtenidos éstos de permutar los cuatro últimos nombres.

Entonces el número de listas con diferencias en la entrega de medallas es:

$$\frac{7!}{4!} = \frac{7.6.5.\cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 7.6.5$$

En general:

Dado un conjunto A de **m** elementos, el número de subconjuntos ordenados de **r** elementos que pueden elegirse entre los **m** es: $\frac{m!}{(m-r)!}$

Notación:

Indicaremos las Variaciones de **m** elementos de orden **r,** siempre que m>r como $V_{m,r} = V_m^r = \frac{m!}{(m-r)!}$=m.(m-1).(m-2)….(m-r+1)

$V_{m,r} = \frac{P_m}{(m-r)!} = \frac{m.(m-1).(m-2).......(m-r+1).\cancel{(m-r)}!}{\cancel{(m-r)}!}$

= m.(m-1).(m-2)……(m-r+1)

es el número total de variaciones de m elementos tomados de a r

Ejemplo 13: Consideremos el conjunto {1, 2, 3, 4} las variaciones de esos 4 elementos de orden 2 o tomados de a dos son: $V_{4,2} = \frac{4!}{2!} = \frac{4.3.2!}{2!}$=12 o

$V_{4,2}$= 4.3 = 12

Entonces son:

12	21	31	41
13	23	32	42
14	24	34	43

Y si tenemos que obtener las variaciones de los 4 elementos de orden 3 tendremos $V_{4,3}$= 4.3.2 = 24

Si las queremos construir debemos agregar un elemento a las anteriores.

Esto es:

$$12 \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases} \qquad 13 \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases} \qquad 14 \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

Entonces se observa que para cada una de las anteriores habrá dos nuevas:

$V_{4,3} = V_{4,2}.2 = 4.3.2 \longrightarrow$ m-r+1

Demostremos que $V_{m,r}$= m.(m-1).(m-2).....(m-r+1), por inducción sobre r.

Si r = 1 $V_{m,1}$= m = $\frac{m!}{(m-1)!}$=$\frac{m.\cancel{(m-1)}!}{\cancel{(m-1)}!}$= m

Supongamos que vale para r > 1: r – 1 > 0,

$V_{m,r-1}$= m.(m-1).(m-2)……(m-(r-1)+1)=m.(m-1).(m-2)……(m-r+2) (HI)

Demostremos que vale para r, o sea dpq: $V_{m,r}$=m.(m-1).(m-2)……(m-r+1)

$V_{m,r} = V_{m,r-1}$.(m-r+1) es como en el ejemplo, formadas las variaciones de orden (r-1) para formar las de orden r, agregamos un nuevo elemento elegido entre los restantes m-(r-1).

Entonces: $V_{m,r}$= m.(m-1).(m-2)……(m-r+2).(m-r+1) cqp.

$V_{10,4}$=10.9.8.7 $V_{5,3}$=5.4.3

Variaciones con repetición

Ejemplo 14: ¿Cuántas sucesiones de tres elementos pueden formarse con los elementos 0 y 1?

000 001 010 011

100 101 110 111

$\underline{2}\ \underline{2}\ \underline{2}$ = 8 = 2^3 $V'_{2,3}$= 2^3

Proposición: el número de variaciones con repetición de **m** elementos tomados de a **r**, está dado por la expresión $V'_{m,r}$= m^r.

Demostración: Por inducción sobre r

Para r = 1 es inmediato $V'_{m,1}$= m = m^1

Sea r>1 y supongamos que la expresión es verdadera para (r-1) elementos

$V'_{m,r-1}= m^{r-1}$

Probemos que es verdadera para r, esto es: $V'_{m,r}= m^{r}$

$V'_{m,r}$ = $V'_{m,r-1}$.m= m^{r-1}.m = m^{r-1+1}= m^{r} por lo tanto es válida para r.

Combinaciones o subconjuntos

Ejemplo 15: Con las cinco vocales del abecedario, ¿cuántos subconjuntos de tres vocales diferentes podemos formar?.

m = 5 r = 3

aei aeo aeu aio aiu

aou eio eiu eou iou

Combinaciones de 5 elementos tomados de a 3 es $C_{5,3}$= 10

Para cada una de las combinaciones obtenidas antes, permutando sus elementos obtenemos todas las variaciones de orden 3, luego

$V_{5,3} = C_{5,3} \,.\, P_3$ entonces $C_{5,3}=\frac{V_{5,3}}{P_3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = 10$

En general: el número de combinaciones de **m** elementos tomados de a **r**, está dado por la expresión:

$$C_{m,r}=\frac{V_{m,r}}{P_r} = \frac{m!}{(m-r)!r!}$$

Como el número $C_{m,r}$, aparece con frecuencia en muchos tipos de cálculos existe una notación especial para indicarlo, que llamamos número combinatorio.

$C_{m,r}=\binom{m}{r}$

<u>Definición</u>: Se llama número combinatorio **m** sobre **r** al número que indicamos $\binom{m}{r}=\frac{m!}{(m-r)!r!}$; **m** se denomina numerador y **r** denominador,

Por ejemplo: $\binom{6}{4}=\frac{6!}{(6-4)!4!}=\frac{6.5.4!}{2!4!}=15$

$\binom{12}{5}=\frac{12!}{(12-5)!5!}=\frac{12.11.10.9.8.\cancel{7!}}{\cancel{7!}5!}=\frac{\cancel{12}.11.\cancel{10}.9.8}{\cancel{5}.\cancel{4}.\cancel{3}.\cancel{2}.1}=792$

Propiedades de los números combinatorios:

Los números combinatorios verifican interesantes propiedades y relaciones entre ellos.

1) $\binom{m}{r}=\binom{m}{m-r}$ estos se llaman números combinatorios complementarios,

<u>Definición</u>: Dos números combinatorios se dicen complementarios si tienen igual numerador y sus denominadores suman ese numerador.

2) $\binom{m}{r}=\binom{m-1}{r}+\binom{m-1}{r-1}$ Regla de Stieffel

3) $\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}=2^n$ o sea $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots\ldots\ldots+\binom{n}{n}=2^n$