Unidad 2

viernes, 7 de abril de 2023 18:42

Modelos de Probabilidades

* La Probabilidad y la estadística se relacionan de la siguiente manera: La Probabilidad es un medio que le permite a la estadística utilizar la información de una muestra para realizar inferencias respecto de la población

* Teoría de Probabilidades → La población se supone conocida y el problema consiste en calcular la probabilidad de observar una muestra particular.

  → Los modelos probabilísticos modelan situaciones físicas (las poblaciones)

* Teoría estadística → La población es desconocida, la muestra conocida, y se desea realizar inferencias sobre la población.

Definiciones:

1) Experiencia: es el proceso por el cuál cada observación es obtenida. Existen dos tipos de experimentos:

   a) Determinísticos (D): aquellos que repetidos

a) Deterministicos (D): aquellos que repetidos bajo las mismas condiciones dan igual resultado, por lo tanto, son predecibles (Fenómenos físicos o químicos)

b) Aleatorios (A): aquellos que admiten dos o más resultados posibles, si bien esos resultados se conocen, no pueden predecirse con exactitud.

(*) Modelo de Probabilidades

Todo Experimento ($\mathcal{E}$) Tendrá su modelo probabilístico (Ω, A, P) establecido en el momento que especifiquemos:

1) Espacio muestral (Ω): en el caso discreto consiste en enumerar todos los posibles resultados del experimento

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots \omega_i\}$$

con ω_i = puntos de la muestra

OBS: Cada elemento de Ω se denomina suceso elemental

2) Una σ- Algebra de eventos (A): Cualquier subconjunto de Ω ($A \subset \Omega$) será llamado evento o suceso.

3) una Probabilidad (P): un número que asocia a cada punto muestra (w) su probabilidad de ocurrencia, de manera que es posible encontrar la probabilidad $P(A)$ de cualquier subconjunto $A \subset \Omega$

- $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#\text{ casos faborables}}{\#\text{ casos posibles}}$ } → Regla de Laplace

- De manera general:

$$P(A) = \sum_{w_i \in A} P(w_i)$$

* Probabilidad como Frecuencia Relativa

↳ la definición de Laplace se ve limitada a situaciones en las que no hay un número finito de resultados igualmente probables, por lo tanto esta definición no se puede aplicar.

↳ Si un experimento aleatorio se repite n veces bajo las mismas condiciones y n_A de esos resultados son faborables al atributo A, el límite de n_a/n conforme n aumenta, se define como la probabilidad del atributo A:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n} = \lim_{n \to \infty} (\text{frecuencia relativa de } A) = P(A)$$

∴ la $P(A)$, puede aproximarse con la proporción de veces que se observa el evento A cuando el experimento se repite un número grande de veces.

OBS

- En este caso la probabilidad obtenida es una estimación del valor real
- a mayor número de ensayos, mejor será la estimación.

Definición axiomática de probabilidad

Def: Dado un experimento $\mathcal{E}$ y un espacio de probabilidades (Ω, A, P), a cada evento $A \subset \Omega$ se le asocia un número que se denotará por $P(A)$, y que se llamará probabilidad del evento A que satisface los siguientes

Axiomas:

1) $P(A) \geq 0, \forall A \subset \Omega$
2) $P(\Omega) = 1$
3) Para toda sucesión de eventos disjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se verifica:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Propiedades de la probabilidad

1) $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \subseteq \Omega$
2) $P(\Omega) = 1$, Ω: evento cierto
$P(\emptyset) = 0$, $\emptyset$: evento imposible

3) Dados dos eventos A y B podemos considerar:

- $A \cup B$ ocurre si por lo menos uno de los eventos ocurre

↳ suma de probabilidades:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

si A y B son mutuamente excluyentes: $(A \cap B = \emptyset)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- $A \cap B$ cuando ocurre S y M simultaneamente

4) si A^c es el complemento de A, entonces $P(A^c) = 1 - P(A)$

Probabilidad condicional e independencia

↳ $P(A|B) =$ ------ se lee "la probabilidad de que algo sea A tal que B".

↳ Para dos eventos cualesquiera $A, B \subseteq \Omega$, con $P(B) > 0$

la probabilidad condicional de A dado B es:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

↳ Regla del producto de probabilidades

- $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$ si los eventos NO son independientes
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ si los eventos son independientes

OBS: Si tenemos 3 eventos A, B y C no independientes

OBS: Si tenemos 3 eventos A, B y C **NO independientes**

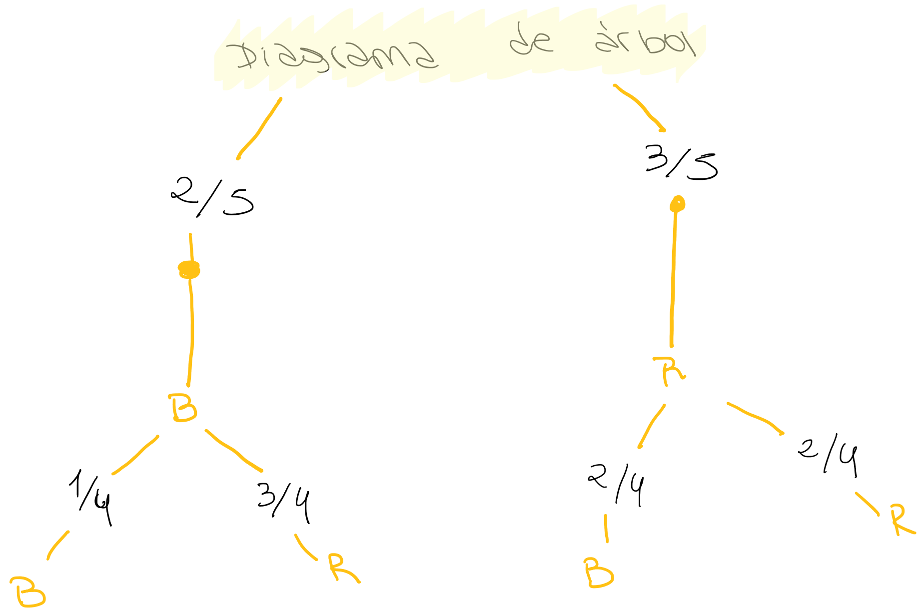
$$P(A \cap B \cap C) = P(C \mid A \cap B) \cdot P(B \mid A) \cdot P(A)$$

Diagrama de árbol

Ej:

Tengo un Bolillero dónde hay 3 Bolillas Rojas y 2 Blancas.

$\mathcal{E}$ = "Extraer 1 bolilla, anotar su color, dejarla fuera del Bolillero y extraer nuevamente anotando su color".



Teorema de la Probabilidad Total y Teorema de Bayes

Def: Supongamos que $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es una Partición del espacio muestral. Esto es $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall\, i \neq j$.

Sea B un evento cualquiera, $B \subseteq \Omega$

Supongamos además que $P(B|A_i)$ y $P(A_i)$ son conocidos

Para todo $i = 1, 2, \ldots, n$

* Teorema 1: Teorema de la Probabilidad Total.

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición de Ω y $B \subseteq \Omega$

Entonces:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

Siendo $P(B|A_i)$ y $P(A_i)$ para $i=1,2,\ldots,n$ probabilidades conocidas

* Teorema 2: Bajo las mismas condiciones que el teorema 1, se deduce:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$