Unidad 3

domingo, 7 de mayo de 2023 12:03

Variable aleatoria

V.A

- Una variable aleatoria X es una función que asigna un número real a cada resultado del espacio muestral Ω de un experimento aleatorio ε.

  Una variable aleatoria X es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$, que a cada $\omega \in \Omega$ se le asigna un número real $X(\omega) = x$

- Se define la imágen de una V.A. X al conjunto** de valores posibles X y se denota R_X

- Se clasifican en **Discretas** y **continuas**

Modelo Probabilístico para V.A. Discretas

Función de Probabilidad total

- Se llama función de probabilidad total de una V.A. discreta a la función $p_X(x_i)$ que a cada valor de x_i asocia su probabilidad de ocurrencia:

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) \quad x \in R_X$$

- La distribución de probabilidad de una V.A debe satisfacer dos propiedades:

  1) Dado que $P(X=x)$ es una probabilidad, debe asumir un valor $0 \leq P(X=x) \leq 1 \quad \forall x \in R_X$

asumir un valor $0 \leq P(X=x) \leq 1 \quad \forall x \in R_x$

2) $\sum_{x \in R_x} P(X=x) = 1$

Si X asume los valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $k \in \mathbb{N}$

definimos la Función de Probabilidad Puntual (F.P.P)

$$P(X=x_k) = P(x_k) = \frac{1}{k}$$

$$X \sim \mathcal{U}\left(\frac{1}{k}\right)$$

"X sigue una distribución uniforme discreta de parámetro $\frac{1}{k}$"

OBS. 1

- Definir el modelo de probabilidad puntual

$P(x) = \frac{1}{k}$, $k = 1 \ldots n$

- Construir el modelo de probabilidad puntual

Hay que hacer la tabla.

Función de distribución acumulada (f.d.A)

la F.d.A de una V.A discreta X, con función de probabilidad puntual $P_X(x)$ se define $\forall x \in \mathbb{R}$ cómo:

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

la probabilidad de que la V.A X tome valores menores o iguales a x.

Propiedades

Propiedades

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) \in [0,1]$

2) $F_X(x)$ es monótona no decreciente, es decir,

$x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

3) $F_X(x)$ es continua a derecha, es decir, $\lim_{h \to 0^+} F_X(x) = F_X(x)$

4) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ y $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.

Ej:

$\mathcal{E}$ = "tirar un dado y observar la cara superior"

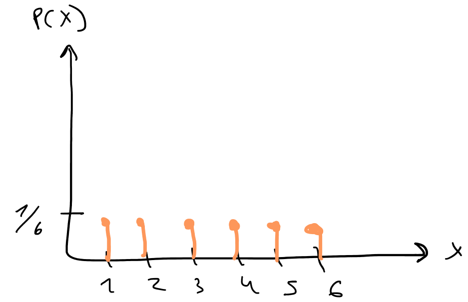
X = "número observado en la cara superior de un lado"

$P(X=1) = \frac{1}{6}$

$P(X=2) = \frac{1}{6}$

$\vdots$

$P(X=6) = \frac{1}{6}$



Probabilidad puntual $= \frac{1}{k}$

$$F(x) = \begin{cases} \boxed{0} & \text{si } x < 1 \\ \boxed{1/6} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \boxed{2/6} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \boxed{3/6} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ \boxed{4/6} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ \boxed{5/6} & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ \boxed{6/6} & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

"Todo lo que acumulé hasta 1 sin considerar el 1"

"Todo lo que acumulé $(\frac{0}{6}+\frac{1}{6})$ hasta el 2 sin el 2"

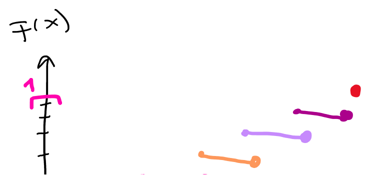
"$(\frac{0}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6})$"

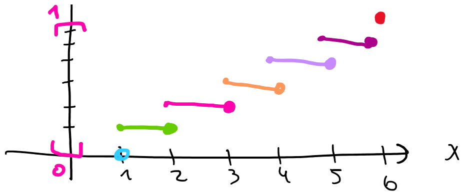
"$(\frac{0}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6})$"

"$(\frac{0}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6})$"

"$(\frac{0}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6})$"

"$(\frac{0}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6})$"





Esperanza matemática o valor medio de una V.A discreta

Def: Sea X una V.A discreta con Rango R_x y función de probabilidad puntual $PX(x)$, la **esperanza matemática** o **valor esperado** de X se define cómo:

$$\boxed{E(X) = \mu_X = \sum_{x \in R_x} x \cdot PX(x)}$$

la $E(x)$ es el centro de gravedad de la distribución de probabilidad, es decir, es una medida del **centro** de la distribución

Varianza de una V.A discreta

Def: sea X una V.A. discreta con función de probabilidad puntual $PX(x)$ y esperanza $E(X) = \mu_X$, la varianza de X:

$$Var(X) = \sigma^2_X = \sum_{x \in R_x} (x - \mu_X)^2 \cdot PX(x) = E[(X - E(X))^2]$$

$$\boxed{Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

Desvío estándar → $DE(X) = +\sqrt{Var(X)}$

Propiedades de la esperanza y de la varianza

1) Si $h(x) = a$, $a = cte$

$$\Rightarrow \begin{cases} E(h(x)) = a \\ var(h(x)) = 0 \end{cases}$$

2) Si $h(x) = a.X + b$, $a, b = ctes$

$$\Rightarrow \begin{cases} E(h(x)) = a.E(x) + b \\ var(h(x)) = a^2 . var(x) \end{cases}$$

3) Si $h(x,y) = X \pm Y$, x, y = variables aleatorias

$$\Rightarrow \begin{cases} E(h(x,y)) = E(x) \pm E(y) \\ var(h(x,y)) = var(x) + var(y) \pm 2. cov(x,y) \end{cases}$$

$$cov(x,y) = E(x.y) - E(x).E(y)$$

- Si x, y son V.A Independientes

$$\Rightarrow var(h(x,y)) = var(X) + var(Y)$$

Distribuciones

1) Distribución Uniforme Discreta (D.U.D)

↳ Una V.A discreta que asume los valores $x_1, x_2, \dots, x_k$ tiene D.U.D de parámetro $\frac{1}{k}$

$$\Leftrightarrow P(X = x_i) = P(x_i) = \frac{1}{k} \quad \forall i = 1, 2, \dots, k.$$

$\Leftrightarrow \quad P(X=x_i) = P(x_i) = \frac{1}{k} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k.$

$\rightarrow X \sim \mathcal{U}(\frac{1}{k})$ "X sigue una distribución uniforme discreta de parámetro $\frac{1}{k}$"

$\rightarrow$ Cuando la probabilidad de cada variable X del experimento es la misma $\left(P(x_i) = \frac{1}{k} \, , \, x_i \in 1 \ldots n \right)$

$\rightarrow$ * $E(X) = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i$

* $var(X) = \frac{1}{k} \cdot \left[\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i \right)^2}{k} \right]$

OBS

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$ $\rightarrow$ suma de los n primeros términos.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$ $\rightarrow$ suma de los primeros n-términos al cuadrado

2) Distribución de Bernoulli

$\rightarrow$ Una V.A X que asume los valores 1 = Éxito y 0 = Fracaso con probabilidad $P = P(X=1)$ y $1-P = P(X=0)$, respectivamente se dice que tiene Distribución Bernoulli de parámetro P.

$\rightarrow X \sim Ber(P)$

$\rightarrow$ * $E(X) = 1 \cdot (P) + 0 \cdot (1-P) = P$

* $var(X) = P - P^2 = P(1-P)$

* $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-P & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

OBS: los experimentos que resultan de una V.A Bernoulli son llamados ensayos Bernoulli

3) Distribución Binomial

- Se usa cuando se repite un ensayo Bernoulli n-veces y además las repeticiones son independientes
- La muestra estará formada por una secuencia de éxitos y fracasos (1 y 0)
- La probabilidad de éxito de cada ensayo es siempre igual a p.
- $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

  con $k = 0, 1, 2, \ldots, n$
- $X \sim Bi(n, p)$
- * $E(X) = n \cdot p$
  * $Var(X) = n \cdot p \cdot q$ con $q = 1-p$

OBS: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

4) Distribución geométrica

- Una V.A X definida por "número de ensayos Bernoulli independientes hasta que ocurre el primer éxito" se dice que tiene distribución geométrica de parámetro p si su función de probabilidad está dada por:

  $P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$ con $k = 1, 2, \ldots$
- $X \sim G(p)$
- * $E(X) = \frac{1}{p}$

OBS: k = cant. de ensayos hasta obtener el 1° éxito.

→ * $E(X) = \frac{1}{p}$

* $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

5) Distribución Hipergeométrica

→ Una variable aleatoria X definida por "número de elementos con la característica de interés en una muestra de tamaño n extraída de una población de tamaño N **sin reemplazo**" se dice tiene distribución hipergeométrica de parámetros N, n, k si su función de probabilidad está dada por:

$$P(X = x, n, k, N) = \frac{\binom{k}{x} \cdot \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{con } x = 0, 1, 2, \dots \min(n, k)$$

→ $X \sim H(n, k, N)$

→ * $E(x) = n \cdot \frac{k}{N}$

* $Var(x) = n \cdot \frac{k}{N} \cdot \left(\frac{N-k}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$

6) Distribución de Poisson

→ Una V.A X definida "número de éxitos en un número grande de ensayos Bernoulli independientes" se dice tiene distribución de Poisson de parámetro λ si su función de probabilidad está dada por

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots,$$

→ $X \sim P(\lambda)$

→ * $E(X) = Var(X) = \lambda$

Modelos probabilísticos para variables aleatorias continuas

Def: 1) Cualquier función F(x) no negativa y tal que $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = 1$ define una variable aleatoria continua. Esto crea un **modelo probabilístico** para una variable aleatoria continua que quedará definido cuando se conozca el rango de la variable (por lo general $\mathbb{R}$) y una **función de densidad de probabilidad**

2) El área comprendida entre dos valores a y b, de abcisa x y curva F(x), da la probabilidad de que la variable tome valores entre dos: $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b F(x)\,dx$

* **Esperanza matemática**

↳ $E(x) = \lim_{n \to \infty} E(Y_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} x_i . P_i$

Def: Si X es una V.A. continua con función de densidad de probabilidad F(x), por ser

Def: Si X es una V.A. continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$, por ser $f(x)$ no negativa, $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$

Def: Si X es una V.A. continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$, la varianza es:

$$Var(X) = E\left[X - E(X)\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - E(x)\right]^2 \cdot f(x)\, dx$$

Def: Si X es una V.A. continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$, la función de distribución acumulada es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Propiedades de la función de distribución

1) $0 \leq F(x) \leq 1 \quad \forall x$
2) $F(x)$ es una función no decreciente
3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
4) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
5) $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
6) $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$

OBS: Función de densidad de probabilidad = FDP

Distribuciones

1) Distribución Uniforme Continua (D.U.C)

Una V.A continua X tiene Distribución Uniforme con parámetro α y β $(\alpha < \beta)$ si su F.D.P está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \text{si } \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{caso contrario (C.C)} \end{cases}$$

$$X \sim \mathcal{U}(\alpha, \beta)$$

Propiedades

- $E(x) = \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot \frac{1}{(\beta-\alpha)} \, dx = \frac{1}{\beta-\alpha} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{\beta-\alpha} \cdot \frac{(\beta^2-\alpha^2)}{2}$

$$\boxed{E(x) = \frac{\alpha+\beta}{2}}$$

- $\operatorname{var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 \cdot \frac{1}{\beta-\alpha} \, dx - \left[\frac{\alpha+\beta}{2}\right]^2$

$$\boxed{\operatorname{Var}(x) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}}$$

- $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} F(T) \, dT = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{si } \alpha \leq x < \beta \\ 1 & \text{si } x \geq \beta \end{cases}$

2) Distribución Exponencial

Una V.A continua X, definida en $\mathbb{R}^+$, tiene Distribución exponencial de Parámetro β, ($\beta > 0$) si su FDP está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$X \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\beta}\right)$

Propiedades:

- $E(x) = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} \, dx$

$$\boxed{E(x) = \beta}$$

- $var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} \, dx - \beta^2$

$$\boxed{var(x) = \beta^2}$$

3) Distribución Normal

Una V.A continua X, definida en $\mathbb{R}$, se Dice Tiene una Distribución Normal de Parámetros μ y σ, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma^2 > 0$ si su FDP es:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Propiedades

1. $E(X) = \mu$.
2. $Var(X) = \sigma^2$.
3. $f(x) \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow \pm\infty$.
4. $(\mu - \sigma)$ y $(\mu + \sigma)$ son puntos de inflexión de $f(x)$.
5. $x = \mu$ es el punto máximo de $f(x)$ y el valor máximo es $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.
6. $f(x)$ es simétrica en torno de μ, esto es, $f(x+\mu) = f(x-\mu)$, $\forall -\infty < x < \infty$.
7. Media=Moda=Mediana.
8. Si $\mu = 0$ y $\sigma = 1 \longrightarrow X \sim N(0,1)$ se denomina **Distribución Normal Estándar** y esta distribución se encuentra tabulada.
9. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.
10. Siempre es posible calcular $P(a < X < b)$ a partir de las estandarización de la variable aleatoria, esto es:
$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$.

OBS: Toda distribución normal tiene forma de campana pero no toda distribución en forma de campana es normal

Relación entre Distribución Poisson y Exponencial

- Poisson: en el caso Binomial cuando n es grande y p es pequeño podemos aproximar

$$\binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{k-n} \text{ por } \frac{e^{-n \cdot p} \cdot (np)^k}{k!} \text{ con } k = 0,1,2,\ldots$$

Def: Una V.A X definida "número de éxitos en un número grande de ensayos Bernoullie independientes" se dice tiene Distribución de Poisson de parámetro λ si su función de probabilidad está dada por λ si su función de probabilidad está dada por:

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$X \sim P(\lambda)$

- **Distribución exponencial:**

Una V.A continua X, definida en $\mathbb{R}^+$, tiene distribución exponencial de parámetro β, (β>0) si su FDP está dada por:

$$\frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} \, I_{[0,+\infty)} \quad ; \quad X \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

- **La relación entre Poisson y Exponencial**

↳ Recordemos que Poisson es una distribución con un sólo parámetro λ, donde λ representa el número medio de eventos por unidad de tiempo.

- Consideremos X = tiempo que se requiere para que ocurra el 1° evento

- Haciendo uso de la distribución de Poisson, encontramos que la probabilidad de que no ocurra algún evento, en el período hasta el tiempo τ, tiene una distribución $X \sim P(\lambda \cdot \tau)$

y está dada por:

$$P(0) = P(X=0) = \frac{e^{-\lambda.\tau} \cdot (\lambda\tau)^0}{0!} = e^{-\lambda.\tau}$$

Podemos utilizar lo anterior y pensar la v.a. X como:

X = tiempo para el primer evento de Poisson

Luego, la probabilidad de que la duración del tiempo hasta el 1° evento exceda x es la misma que la probabilidad de que no ocurra algún evento de Poisson en x

$$\Rightarrow P(X>x) = e^{-\lambda x}$$

- Así la función de Distribución acumulada para X está dada por:

$$P(X\leq x) = P(0 \leq X \leq x) = 1 - P(X \geq x) = 1 - e^{-\lambda.x}$$

$\Rightarrow$ la función de densidad está dada por

$$\frac{dF}{dx} = (1 - e^{-\lambda.x}) = \lambda.e^{-\lambda.x}$$

que es la función de densidad acumulada de $\mathcal{E}$ con $\boxed{\lambda = \frac{1}{\beta}}$

- Relación → la distribución exponencial describe el tiempo hasta la primera ocurrencia de un evento de Poisson

→ En la distribución de Poisson λ es el número promedio de eventos por unidad de tiempo, mientras que en la distribución exponencial es la taza de ocurrencia de un evento por unidad de tiempo