Axiomas y Teoremas – Álgebra de Boole

Axioma I: Ambas operaciones son conmutativas (Ley Conmutativa)

a+b = b+a	a·b = b·a

Axioma II: Ambas operaciones tienen un elemento neutro (Ley de Identidad)

a+0 = 0+a = a	a·1 = 1·a = a

Axioma III: Ambas operaciones son distributivas respecto a la otra (Ley Distributiva)

a·(b+c) = a·b+a·c (b+c)·a = b·a+c·a	a+(b·c) = (a+b)·(a+c) (b·c)+a = (b+a)·(c+a)

Axioma IV: Para cada elemento existe su complemento (Leyes de Complemento)

a+a' = 1	a·a' = 0

Teorema I: Leyes de Idempotencia

a+a = a		**a·a = a**	
a = a+0 = a+(a·a') = (a+a)·(a+a') = (a+a)·1 = (a+a)	A2 Izq. A4 Der. A3 Der. A4 Izq. A2 Der.	a = a·1 = a·(a+a') = (a·a)+(a·a') = (a·a)+0 = (a·a)	A2 Der. A4 Izq. A3 Izq. A4 Der. A2 Izq.

Teorema II: Leyes de Acotamiento

a+1 = 1		a·0 = 0	
1 = a+a' = a+(a'·1) = (a+a')·(a+1) = 1·(a+1) = a+1	A4 Izq. A2 Der. A3 Der. A4 Izq. A2 Der.	0 = a·a' = a·(a'+0) = (a·a')+(a·0) = 0+(a·0) = a·0	A4 Der. A2 Izq. A3 Izq. A4 Der. A2 Izq.

Teorema III: Ley de absorción

a+(a·b) = a		a·(a+b) = a	
a+(a·b) = (a·1)+(a·b) = a·(1+b) = a·1 = a	A2 Der. A3 Izq. T2 Izq. A2 Der.	a·(a+b) = (a+0)·(a+b) = a+(0·b) = a+0 = a	A2 Izq. A3 Der. T2 Der. A2 Izq.

Teorema IV: Ley Asociativa

a·(a+(b+c)) = a·((a+b)+c)		a+(a·(b·c)) = a+((a·b)·c)	
a·(a+(b+c)) = a = a+(a·c) = (a·(a+b))+(a·c) = a·((a+b)+c)	T3 Der. T3 Izq. T3 Der. A3 Izq.	a+(a·(b·c)) = a = a·(a+c) = (a+a·b)·(a+c) = a+((a·b)·c)	T3 Izq. T3 Der. T3 Izq. A3 Der.

Teorema V: Unidad del Complemento

Por x complementario de a: 1) a+x = 1 2) a·x = 0	A4 Izq. A4 Der.	Por y complementario de a: 3) a+y = 1 4) a·y = 0	A4 Izq. A4 Der.
x=1·x = (a+y)·x = (a·x)+(y·x) = 0+(y·x) = (a·y)+(y·x) = (y·a)+(y·x) = y·(a+x) = y·1 = y Luego ambos complementarios, x e y, son iguales. Por tanto hay un solo complementario de a, que llamamos a'.			A2 Der. (3) A3 Izq. (2) (4) A1 Der. A3 Izq. (1) A2 Der.

$$\text{Si } a + x = 1 \text{ y } a * x = 0, \text{ entonces } x = a'$$

Teorema VI: Ley de Involución

$$(a')' = a$$

Teorema VII: Los términos neutros de las operaciones + y * son complementarios entre sí

$0' = 1$	$1' = 0$

Teorema VIII: Leyes de DeMorgan

(a+b)' = a'·b'		**(a·b)' = a'+b'**	
Sea x = (a+b)' Entonces: 1) (a+b)·x=0 y 2) (a+b)+x=1 Probamos x=(a'·b') en 1): (a+b)·(a'·b') = (a·a'·b')+(b·a'·b') = (a·a'·b')+(b·b'·a') = (0·b')+(0·a') = 0+0 = 0 Probamos x=a'·b' en 2): (a+b)+(a'·b') = a+(b+(a'·b')) = a+(b+a')·(b+b') = a+(b+a')·1 = a+b+a' = a+a'+b = 1+b = 1 Luego x = (a+b)' = a'·b'	A4 Der. A4 Izq. A3 Izq. A1 Der. A4 Der. T2 Der. T1 Izq. T4 Izq. A3 Der. A4 Izq. A2 Der. A1 Izq. A4 Izq. T2 Izq. T5	Sea x = (a·b)' Entonces: 1) (a·b)·x=0 y 2) (a·b)+x=1 Probamos x=(a'+b') en 1): (a·b)·(a'+b') = (a·b·a')+(a·b·b') = (a·a'·b)+(b·b'·a) = (0·b)+(0·a) = 0+0 = 0 Probamos x=(a'+b') en 2): (a·b)+(a'+b') = (a'+b')+(a·b) = a'+(b'+(a·b)) = a'+(b'+a)·(b'+b) = a'+(b'+a)·1 = a'+b'+a = a'+a+b' = 1+b' = 1 Luego x = (ab)' = a'+b'	A4 Der. A4 Izq. A3 Izq. A1 Der. A4 Der. T2 Der. T1 Izq. A1 Izq. T4 Izq. A3 Der. A4 Izq. A2 Der. A1 Izq. A4 Izq. T2 Izq. T5