Estadística
IDEI

Licenciatura en Sistemas + Licenciatura en Economía
+ Licenciatura en Gestión Empresarial

2020

Práctica N° 3
Distribuciones Continuas

1. Suponga que el tiempo máximo que se puede reservar una sala de conferencias grande de cierta empresa son cuatro horas. Con mucha frecuencia tienen conferencias extensas y breves. De hecho, se puede suponer que la duración de una conferencia tiene una distribución uniforme en el intervalo [0, 4].

   a) ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que cualquier conferencia determinada dure al menos 3 horas?

   c) ¿Cual es el tiempo promedio que la empresa puede reservar esa sala de conferencias?

   d) Si se sabe que el tiempo máximo que se reservó la sala no superó la media, ¿cuál es la probabilidad de que la conferencia haya durado entre una y dos horas?

2. La cantidad de café diario, en litros, que sirve una máquina que se localiza en el vestíbulo de un aeropuerto es una variable aleatoria X que tiene una distribución continua uniforme donde la mínima cantidad de litros que sirve la máquina es 7 y el máximo es 10, es decir: α=7 y β=10. Calcule la probabilidad de que en un día determinado la cantidad de café que sirve esta máquina sea:

   a) a lo sumo 8,8 litros.

   b) más de 7,4 litros, pero menos de 9,5 litros.

   c) al menos 8,5 litros.

3. En una cierta empresa se fabrican, cada día, en media 40 mil metros de cable. Unos días más, otros días menos. Aunque el mínimo seguro que siempre es 30 mil metros. La variable aleatoria que recoge es la cantidad de metros de cable fabricados en un día.

   a) ¿Cuál es el máximo de metros fabricados en un día?

   b) ¿Qué porcentaje de días se fabrican más de 34 mil metros de cable?

4. Los trenes de cierta línea de subterráneos corren cada media hora entre la medianoche y las seis de la mañana. ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre que entra a la estación a una hora al azar, durante ese período, tenga que esperar por lo menos 20 minutos?

5. Una cierta clase de aparato doméstico requiere una reparación en promedio una vez cada 2 años. Suponiendo que los tiempos entre reparaciones están distribuidos exponencialmente, ¿cuál es la probabilidad de que un aparato doméstico tal trabaje al menos 3 años sin requerir reparaciones?

6. Un elemento radiactivo emite partículas según una variable de Poisson con un promedio de 15 partículas por minuto. En ese caso, el tiempo, T, que transcurre entre la emisión de una partícula y la siguiente sigue una distribución exponencial de parámetro λ=15 partículas por minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que entre partícula y partícula pasen más de 10 segundos?

7. La distribución del tiempo durante el cual una cierta marca de computadoras opera de forma efectiva, es decir, las horas de operación efectiva antes de la primera descompostura, es exponencial, con esperanza β=360 hs.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la computadora opere efectivamente durante 180 hs. o menos?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la computadora opere efectivamente más de 720 hs.?

8. La distribución exponencial se aplica con frecuencia a los tiempos de espera entre éxitos en un proceso de Poisson. Si el número de llamadas que se reciben por hora en un servicio de respuesta telefónica es una variable aleatoria de Poisson con el parámetro λ=6, sabemos que el tiempo, en horas, entre llamadas sucesivas tiene una distribución exponencial con el parámetro β=1/6. ¿Cuál es la probabilidad de esperar más de 20 minutos entre cualesquiera 2 llamadas sucesivas?

9. Suponga que el tiempo que se tarda en cargar un camión en un muelle sigue una distribución exponencial. Si el tiempo promedio en cargarlo es de 15 minutos,

   a) ¿Cuá es la función de densidad, la esperanza y la varianza?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la carga del camión dure 6 minutos o menos?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que la carga del camión dure 18 minutos o menos?

   d) ¿Cuál es la probabilidad de que dure de 6 a 18 minutos?

10. El millaje (en miles de millas) que los dueños de automóviles obtienen con una cierta marca de neumático radial es una variable aleatoria que tiene una distribución exponencial con β=40. Encuentre las probabilidades de que uno de estos neumáticos durará:

    a) al menos 20.000 millas;

    b) cuando mucho 30.000 millas.

11. Para un determinado tipo de radar, en la zona de fallas por desgaste, la vida de las unidades se pueden representar por la distribución normal, con media 150 horas y desviación estándar de 10 horas. Se dispone de toda el área de tránsito aéreo de una zona del país de 40 radares. Se desea saber cuántos radares se espera que fallen entre las 131 y las 179 horas.

12. Una empresa paga a sus empleados un salario promedio de \$300 por hora, con una desviación estándar de \$20. Si los salarios se distribuyen aproximadamente de forma normal y se redondean al centavo más cercano,

    a) ¿qué porcentaje de los trabajadores recibe salarios de entre \$250,75 y \$343,22 por hora?

    b) ¿el 5 % de los salarios más altos por hora de los empleados es mayor a qué cantidad?

13. La duración de los tubos eléctricos producidos por una empresa está normalmente distribuida con media μ=120 horas y una desviación estándar de 7 horas.

    a) Cuál es la probabilidad de que un tubo siga funcionando después de 130 horas?

    b) Cuál es la probabilidad de que los tubos funcionen menos de 100 horas?

14. El vicepresidente de personal de una compañía de seguros ha ideado un nuevo programa de capacitación cuyo ritmo es regulado por los propios participantes. Los nuevos empleados trabajan varias etapas a su ritmo personal. El programa finaliza cuando aprenden los contenidos. El programa ha dado buenos resultados sobre todo en la aceleración del proceso de capacitación, pues el sueldo durante ese periodo es apenas 67 % de lo que percibe al acabar el programa. En los últimos 12 años, la terminación promedio del programa dura 44 días, con una desviación estándar de 12 días.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado termine el programa entre 33 y 42 días ?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado termine el programa en menos de 30 días?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado termine el programa en menos de 25 o más de 60 días?

15. Un batallón del ejército que alistó 1.000 conscriptos, los sometió a un test mediante el cual evaluó el coeficiente intelectual. El histograma de frecuencias mostró una distribución bastante simétrica por lo que puede suponerse que el coeficiente intelectual de los conscriptos se distribuye normalmente con μ=100 y σ=10.

    a) ¿Cuál es la proporción de conscriptos que tienen un coeficiente intelectual de 100 a 105?
    b) ¿Qué cantidad de conscriptos tienen un coeficiente intelectual entre 100 y 105.7?
    c) ¿Cuál es la proporción de conscriptos que tienen un coeficiente intelectual entre 103 y 105.7?
    d) ¿Cuál es la proporción de conscriptos que tienen un coeficiente intelectual menor que 83.6?
    e) ¿Cuál es la proporción de conscriptos que tienen un coeficiente intelectual superior a 120?

16. La utilización de la tarjeta VISA en operaciones comerciales, en la población de una gran ciudad, sigue en porcentajes una distribución normal de media 4,5 y desviación típica 0,5. Se pide calcular las siguientes probabilidades:

    a) Que un ciudadano tomado al azar utilice la tarjeta más del 5 % en sus operaciones.
    b) Tanto por ciento de la ciudad que utiliza la tarjeta menos del 3,75 %.
    c) Porcentaje de operaciones con tarjeta. que utiliza el 20 % más alto de la población
    d) Porcentaje de operaciones con tarjeta. que utiliza el 10 % más bajo de la población
    e) Porcentaje de operaciones del 80 % más próximo a la media.

Soluciones

1. X: duración de una conferencia.
   X $\sim U[0;4]$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{si} \quad \alpha \leq x < \beta \\ 1 & \text{si} \quad x \geq \beta \end{cases}$$

   a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4-0} = \frac{1}{4} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{si} \quad o.c. \end{cases}$$

   b)

$$P(X \geq 3) = \int_3^4 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} x\Big|_3^4 = \frac{1}{4}(4-3) = \frac{1}{4}$$

   o bien,

$$P(X \geq 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{3-0}{4-0} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

   c) $E(X) = \frac{\alpha-\beta}{2} = 2$

   d)

$$P(1 < X < 2/X < 2) = \frac{P(1 < X < 2)}{P(X < 2)} = \frac{F(2) - F(1)}{F(2)} = \frac{0,5 - 0,25}{0,5} = 0,5$$

2. X: Cantidad de café diaria, en litros, que sirve una máquina. X $\sim U[7;10]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10-7} = \frac{1}{3} & \text{si} \quad 7 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{si} \quad o.c. \end{cases}$$

   a)

$$P(X \leq 8,8) = \int_7^{8,8} \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}(8,8-7) = 0,6$$

   b)

$$P(7,4 \leq X \leq 9,5) = \int_{7,4}^{9,5} \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}(9,5-7,4) = 0,7$$

   c)

$$P(X \geq 8,5) = \int_{8,5}^{10} \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}(10-8,5) = 0,5$$

3. X: n^o de metros de cable fabricados en un día.
   X$\sim U[30,\beta]$ $\qquad$ $E(X) = 40$

   a)

$$E(X) = \frac{\alpha - \beta}{2} = 40 \rightarrow \frac{30+\beta}{2} = 40 \rightarrow 30 + \beta = 80 \rightarrow \beta = 50.$$

   Entonces, $X \sim U[30;50]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} & \text{si} \quad 30 \leq x \leq 50 \\ 0 & \text{si} \quad o.c. \end{cases}$$

b)

$$P(X > 34) = \int_{34}^{50} \frac{1}{20} dx = \frac{1}{20}(50 - 34) = 0,8$$

El 80 % de los días.

4. X: tiempo de espera, en minutos, de un subterraneo. $X \sim U[0; 30]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{si} \quad o.c. \end{cases}$$

$$P(X \geq 20) = \int_{20}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{30}(30 - 20) = \frac{10}{30} = 0,33$$

5. T: tiempo, en años, entre reparaciones. $T \sim \mathcal{E}(1/2)$

$$P(T \geq 3) = \int_{3}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-t/2} dt = \frac{1}{2} \lim_{a \to \infty} \int_{3}^{a} e^{x}(-2) dx = \frac{-2}{2} \lim_{a \to \infty} e^{-t/2}\Big|_{3}^{a} = (-1)(-e^{-3/2}) = e^{-3/2}$$

donde: $-t/2 = x \to -1/2dt = dx \to dt = (-2)dx$

o bien,

$$P(T \geq 3) = 1 - [F(3)] = 1 - [1 - e^{-3/2}] = e^{-3/2}$$

6. X: cantidad de partículas de un elemento radioactivo, por minuto. $X \sim Po(\lambda = 15)$
T: tiempo, en minutos, entre la emisión de una partícula. $\beta = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{15} \to T \sim \mathcal{E}(1/\beta = 15)$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 - e^{-t/\beta} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

$$P\left(T > \frac{10}{60}\right) = 1 - \left[F\left(\frac{10}{60}\right)\right] = 1 - \left[1 - e^{-15 \cdot \frac{10}{60}}\right] = e^{-5/2}$$

7. T: Tiempo, en horas, durante el cual una computadora opera efectivamente. $T \sim \mathcal{E}(1/360)$

a)

$$P(T < 180) = 1 - e^{-180/360} = 1 - e^{-1/2} = 0,3935$$

b)

$$P(T > 720) = 1 - [1 - e^{-720/360}] = e^{-2} = 0,1353$$

8. X: número de llamadas que recibe un servicio de respuesta telefónica por hora. X $\sim$ Po(6)
T: tiempo de espera, en horas, entre llamadas sucesivas. $T \sim \mathcal{E}(1/\beta = 6)$

$$P(T > 20/60) = 1 - F(20/60) = 1 - [1 - e^{-\frac{20}{60} \cdot 6}] = e^{-2} = 0,1353$$

9. T: tiempo, en minutos, en cargar un camión. $T \sim \mathcal{E}(1/15)$

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{15} e^{-\frac{t}{15}} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad o.c. \end{cases}$$

$$E(T) = \beta = 15 Var(T) = \beta^2 = 225$$

b)
$$P(T<6)=1-e^{-6/15}=0,3297$$

c)
$$P(T<18)=1-e^{-18/15}=0,6988$$

d)
$$P(6<T<18)=F(T<18)-F(T<6)=0,6988-0,3297=0,3691$$

10. T: Millaje, en miles de millas, que un dueño de un automóvil obtiene con cierta marca de neumáticos radial.
$T\sim\mathcal{E}(1/\beta=1/40)$

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{40}e^{-\frac{t}{40}} & \text{si} \quad t\geq 0\\ 0 & \text{si} \quad o.c.\end{cases}$$

a)
$$P(T>20)=1-F(20)=1-[1-e^{-20/40}]=e^{-1/2}=0,6065$$

b)
$$P(T<30)=1-e^{-30/40}=0,5276$$

11. X: Vida útil, en horas, de un radar en al zona de fallas por desgaste.
$X\sim N(\mu=150;\sigma=10)$ n=40.

$$\begin{aligned}P(131<X<179)&=P\left(\frac{131-150}{10}<Z<\frac{179-150}{10}\right)=P(-1,9<Z<2,9)\\&=F(2,9)-F(-1,9)=0,49813+0,47128=0,9694\end{aligned}$$

Entonces, sea Y: nº de radares que fallan entre las 131 y 179 horas. Entonces, la probabilidad de que falle un radar es $1-P(131<X<179)=1-0,9694=0,03059$. Donde Y $\sim$ Bi(40;0,03059). Por lo tanto, $E(Y)=40(0,03059)=1,2236$

12. X: salario, en pesos, de un empleado de una empresa. $X\sim N(300;20)$

a)
$$P(250,75<X<343,22)=P(-2,46<Z<2,16)=0,48461+0,49305=0,97766$$

Entonces, el 97,77 % de los trabajadores.

b)
$$P(X>x')=0,95\rightarrow\frac{x'-300}{20}=1,64\rightarrow x'=332,8$$

13. X: duración, en horas, de un tubo eléctrico producido por una empresa. $X\sim N(120;7)$

a)
$$\begin{aligned}P(X>130)&=1-P(X<130)=1-P\left(Z<\frac{130-120}{7}\right)\\&=1-P(Z<1,4286)=1-F(1,4286)=1-0,92364=0,07636\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}P(X<100)&=P\left(Z<\frac{100-120}{7}\right)\\&=P(Z<-2,86)=F(-2,86)=0,5-0,49788=0,00212\end{aligned}$$

14. X: Días hasta la terminación de un programa por un participante. $X\sim N(44;12)$

a)

$$P(33 < X < 42) = P(\frac{33-44}{12} < Z < \frac{42-44}{12}) = P(-0,91 < Z < -0,16) = 0,31859 - 0,06356 = 0,25503$$

b)

$$P(X < 30) = P(Z < -1,17) = 0,5 - 0,379 = 0,121$$

c)

$$\begin{aligned} P(X < 25) + P(X > 60) &= P(Z < -1,58) + P(Z > 1,33) = (0,5 - 0,44295) + (0,5 - 0,40824) \\ &= 0,05705 + 0,09176 = 0,14881 \end{aligned}$$

15. X: coeficiente intelectual de un conscripto de un batallón del ejercito. $X \sim N(100; 10)$

a)

$$P(100 < X < 105) = P\left(\frac{100-100}{10} < Z < \frac{105-100}{10}\right) = P(0 < Z < 0,5) = 0,19146$$

b)

$$P(100 < X < 105,7) = P\left(\frac{100-100}{10} < Z < \frac{105,7-100}{10}\right) = P(0 < Z < 0,57) = 0,21566$$

Y: número de conscriptos con un coeficiente intelectual entre 100 y 105.7
Y $\sim$ Bi(1000;0,21566)
E(X)=1000(0,21566)=215,66

c)

$$\begin{aligned} P(103 < X < 105,7) &= P\left(\frac{103-100}{10} < Z < \frac{105,7-100}{10}\right) \\ &= P(0,3 < Z < 0,57) = 0,21566 - 0,11791 = 0,09775 \end{aligned}$$

d)

$$P(X < 83,6) = P\left(Z < \frac{83,6-100}{10}\right) = P(Z < -1,64) = 0,5 - 0,4495 = 0,0505$$

e)

$$P(X > 120) = P\left(Z > \frac{120-100}{10}\right) = P(Z > 2) = 0,5 - 0,47725 = 0,02275$$

16. X: Utilización en operaciones comerciales de una tarjeta VISA en la población de una gran ciudad. $X \sim N(4,5; 0,5)$

a)

$$P(X > 5) = P\left(Z > \frac{5-4,5}{0,5}\right) = P(Z > 1) = 0,5 - 0,34134 = 0,15866.$$

b)

$$P(X < 3,75) = P\left(Z < \frac{3,75-4,5}{0,5}\right) = P(Z < -1,5) = 0,5 - 0,43319 = 0,06681.$$

c)

$$P(X < x') = 0,8 \rightarrow \frac{x'-4,5}{0,5} = 0,84 \rightarrow x' = 4,92$$

d)

$$P(X < x') = 0,1 \rightarrow \frac{x'-4,5}{0,5} = -1,28 \rightarrow x' = 3,86$$

e)

$$P(a' < X < b') = 0,8 \rightarrow P(X < b') = 0,9 \rightarrow \frac{b'-4,5}{0,5} = 1,28 \rightarrow b' = 5,14$$

luego,

$$P(X < a') = 0,1 \rightarrow P(X < a') = 0,1 \rightarrow \frac{a'-4,5}{0,5} = -1,28 \rightarrow a' = 3,86$$