Estadística
IDEI

Érica Schlaps
eschlaps@untdf.edu.ar

2021

UNIDAD III: MODELOS PROBABILÍSTICOS PARA VARIABLES ALEATORIAS CUANTITATIVAS

1. Introducción

Hemos introducido algunos **Modelos Probabilísticos** a través de **Espacios Muestrales** bien simples, lo cual facilitó mucho la comprensión del concepto de **Probabilidad** y la obtención de algunas **Probabilidades**.

Necesitamos ampliar estos conceptos para tener Modelos Probabilísticos que representen los distintos tipos de variables y así, entender situaciones prácticas más generales que habitualmente aparecen en aplicaciones con datos reales. Para **Variables Aleatorias Cuantitativas**, el modelo $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se adapta muy bien.

Algunos modelos frecuentemente usados en las ciencias experimentales, serán estudiados en este capítulo, distinguiéndolos, por el tipo de variable (discreta o continua) para los que se definen.

Las **Variables Numéricas** a las cuales asociamos **Modelos Probabilísticos** son llamadas **Variables Aleatorias**.

Definición 1 *Una **Variable Aleatoria** X es una función que asigna un número real a cada resultado del espacio muestral Ω de un experimento aleatorio $\mathcal{E}$. Es decir, una variable aleatoria X es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ que a cada elemento $\omega \in \Omega$ le asocia un número real, $X(\omega) = x$.*

En general se representará a las variables aleatorias (v.a.) con letras mayúsculas: X, Y, Z, etc. y sus valores con letras minúsculas, es decir, x, y, z, etc.

Se define **rango**, **imagen** o **recorrido** de una v.a. X al conjunto de valores posibles de la v.a. X, y se denota R_X.

Las v.a. pueden clasificarse en **discretas** y **continuas**, en función del conjunto de sus valores posibles.

2. Modelos Probabilísticos para Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo 1 Consideremos un experimento que consiste en juntar los componentes de una pieza, las cuales son producidas por diferentes fábricas, digamos “Fábrica A” y “Fábrica B”. Se sabe que cada componente puede ser clasificada como “Buena (B)” (si entra dentro de las especificaciones correctas para el armado), “Larga” (si tiene un tamaño mayor a las especificaciones) y “Corta” (si tiene un tamaño menor a las especificaciones). Por otro lado, cada fabricante dio un precio \$5 (cinco pesos) por cada componente además de las probabilidades de producción con las características buena, larga o corta, las cuales se resumen en el Cuadro 1.

Producto	“Fábrica A”	“Fábrica B”
(B)	0.80	0.70
(L)	0.10	0.20
(C)	0.10	0.10

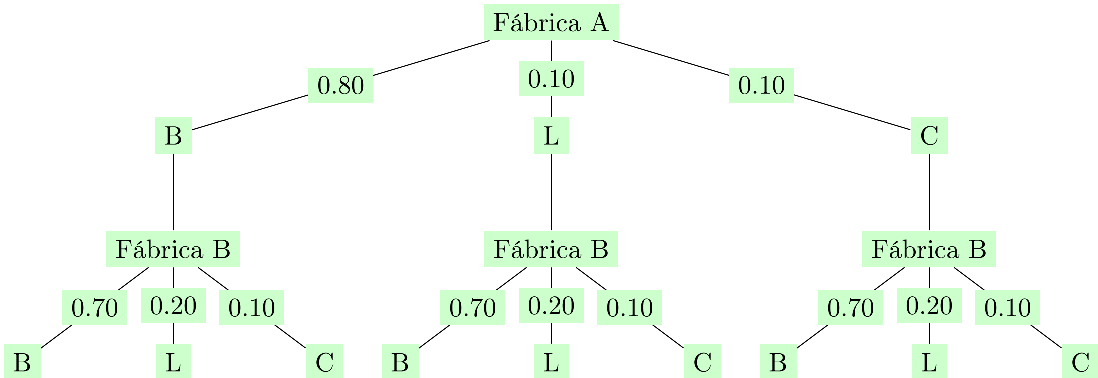
Cuadro 1: Distribución de la producción de las Fábricas A y B, de acuerdo con las medidas de las piezas producidas.

Además:

- Si el producto final tiene alguna componente con la característica Corta (C), el mismo es irrecuperable y la pieza en su conjunto se vende como “chatarra” en \$5 (pesos cinco);
- Si alguna de las componentes resulta mayor a las especificaciones (Larga (L)), la misma se recupera a razón de \$5 (pesos cinco) por unidad, y
- El precio de venta de cada pieza es de \$25 (pesos veinticinco).

El objetivo es conocer la distribución de frecuencias de la variable X: *“lucro por conjunto armado”*. El conjunto de todos los posibles resultados para el experimento realizado es:

$$\Omega = \{BB, BL, BC, CB, CL, CC, LB, LL, LC\}$$



Como las componentes provienen de fábricas diferentes, podemos suponer que la clasificación de éstas según sus características son **independientes**. Por lo tanto, tenemos las distribución de probabilidades que se muestra en el Cuadro 2, para los posibles montajes en el armado de la pieza.

Montaje	Probabilidad	X
(BB)	0.56	\$15
(BL)	0.16	\$10
(BC)	0.08	\$-5
(LB)	0.07	\$10
(LL)	0.02	\$5
(LC)	0.01	\$-5
(CB)	0.07	\$-5
(CL)	0.02	\$-5
(CC)	0.01	\$-5
Total	1	—

Cuadro 2: Distribución de Probabilidades de las posibles composiciones del armado de una pieza.

Así,

$$X \text{ asume los valores } \begin{cases} 15 & \text{si ocurre el evento } A_1 = \{BB\} \\ 10 & \text{si ocurre el evento } A_2 = \{BL, LB\} \\ 5 & \text{si ocurre el evento } A_3 = \{LL\} \\ -5 & \text{si ocurre el evento } A_4 = \{BC, LC, CB, CL, CC\} \end{cases}$$

Cada uno de los eventos anteriores tiene una probabilidad asociada, a saber:

$$\begin{cases} P(A_1) = 0.56 \\ P(A_2) = 0.16 + 0.07 = 0.23 \\ P(A_3) = 0.02 \\ P(A_4) = 0.08 + 0.01 + 0.07 + 0.02 + 0.01 = 0.19 \end{cases}$$

Entonces, podemos escribir la función de pares $(x, p(x))$ que se muestra en el Cuadro 3, que es un **modelo teórico** para la distribución de la variable X y que el empresario podrá usar para jugar la variablidad económica del proyecto que pretende realizar.

x	15	10	5	-5
$p(x)$	0.56	0.23	0.02	0.19

Cuadro 3: Modelo probabilístico para la variable X: "lucro por pieza armada".

Es evidente que al mismo Espacio Muestral del Cuadro 2 le podemos asociar otras variables aleatorias. Por ejemplo, si Y: "costo de recuperación de cada conjunto montado", tenemos:

$$Y \text{ asume los valores } \begin{cases} 0 & \text{si ocurre el evento } B_1 = \{BB, BC, CB, CC, CL, LC\} \\ 5 & \text{si ocurre el evento } B_2 = \{BL, LB\} \\ 10 & \text{si ocurre el evento } A_3 = \{LL\} \end{cases}$$

Así, la función de probabilidad de la variable Y está representada como en el Cuadro 4.

y	0	5	10
$p(x)$	0.75	0.23	0.02

Cuadro 4: Modelo probabilístico para la variable X: "costo de recuperación de cada pieza".

En resumen, una variable aleatoria discreta X, de tipo **discreto**, estará bien definida si se indicaran los posibles valores $x_1, x_2, \cdots, x_k$ que puede asumir y las respectivas probabilidades $p(x_1), p(x_2), \cdots, p(x_k)$, o equivalentemente, si conocemos su **función de probabilidad** $(x, p(x))$.

Definición 2 *Se llama* ***Función de Probabilidad Puntual*** *o* ***Función de Masa*** *de una v.a. discreta a la función $p_X(x_i)$ que a cada valor de x_i asocia su probabilidad de ocurrencia, esto es:*

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) \quad x \in R_X \tag{1}$$

La distribución de probabilidad de una v.a. debe satisfacer dos propiedades:

1. Dado que $P(X = x)$ es una probabilidad, debe asumir un valor $0 \leq P(X = x) \leq 1 \ \forall x \in R_X$.
2. La suma de todos los valores $P(X = x)$ para todos los valores de X debe ser igual a 1, es decir, $\sum_{x \in R_X} P(X = x) = 1$.

Observación 1 Dado $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ donde los A_i son eventos simples, y $P(\Omega) = \sum_{A_i \in \Omega} P(A_i) = 1$ por el axioma de Probabilidad, la sumatoria de $P(X = x)$ para todos los valores posibles de X es igual a 1 porque equivale a la sumatoria de las probabilidades de todos los eventos simples de Ω.

Definición 3 *La **Función de Distribución Acumulada** (f.d.a.) de una v.a. discreta X, con función de probabilidad puntual $p_X(x)$ se define $\forall x \in \mathbb{R}$, como:*

$$F_X(x) = P(X \leq x) \tag{2}$$

Es decir, $F_X(x)$ es la probabilidad de que la v.a. X tome valores menores o iguales que x.

Propiedad 1 *Propiedades de la Función de Distribución Acumulada*

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \in [0, 1]$.
2. *$F_X(x)$ es monótona no decreciente, es decir, $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.*
3. *$F_X(x)$ es continua a derecha, es decir, $\lim_{h \to 0^+} F_X(x) = F_X(x)$.*
4. $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$ *y* $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.

Ejemplo: Volvamos al problema del empresario, usando la función de probabilidad de la variable X, tenemos que la Función de Distribución está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -5 \\ 0.19 & \text{si } -5 \leq x < 5 \\ 0.21 & \text{si } 5 \leq x < 10 \\ 0.44 & \text{si } 10 \leq x < 15 \\ 1 & \text{si } x \geq 15 \end{cases}$$

Observe que $P(X = x)$ es igual al **salto** que de $F(x)$ dá en x_i.

2.1. Esperanza Matemática o Valor Medio de una variable aleatoria discreta

Definición 4 *Sea X una variable aleatoria discreta con rango R_X y función de probabilidad puntual $p_X(x)$, la **esperanza matemática** o **valor esperado** de X se define como:*

$$E(X) = \mu_X = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x) \tag{3}$$

siempre que $\sum_{x \in R_X} |x| \cdot p_X(x) < \infty$. Si la serie de los valores absolutos diverge, la esperanza no puede definirse y se dice que no existe.

Observación 2 *Interpretación de la Esperanza Matemática*
$E(X)$ es el centro de gravedad de la distribución de probabilidad. Si sobre cada valor posible de X, x_i, se coloca una masa $p_X(x_i)$, el punto de equilibrio del sistema es E(X). En este sentido, se puede decir que $E(X)$ es una medida del *centro* de la distribución.

Observación 3 La expresión (3) es muy parecida a aquella introducida para la **media aritmética** de un conjunto de datos, esto es:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_{r_i}$$

donde $f_{r_i} = \dfrac{f_i}{n}$

La distinción que debe realizarse es entre:

$$\begin{cases} p_i = p_X(x_i) & \text{la probabilidad de que la v.a. } X \text{ asuma los valores } x_i \\ f_{r_i} & \text{la frecuencia relativa de la ocurrencia del resultado } x_i \end{cases} \quad (4)$$

Dado que p_i y f_{r_i} tienen la misma interpretación, todas aquellas *medidas* y *gráficos* discutidos en la estadística descriptiva univariada, basados en la distribución empírica de f_{r_i}, poseen su correspondiente en la distribución de p_i.

Definición 5 *Dada una v.a. discreta X y la respectiva función de probabilidad $p_X(x)$, llamamos* ***Esperanza Matemática de la función*** *$h(X)$ a:*

$$E(h(x)) = \mu_{h(X)} = \sum_{x \in R_X} h(x) p_X(x) \quad (5)$$

si la serie es absolutamente convergente, es decir, $= \sum_{x \in R_X} |h(x)| p_X(x) < \infty$

Interpretación de la Esperanza: $E(X)$ es el centro de gravedad de la distribución de probabilidad. Si sobre cada valor posible de X, x_i, se coloca una masa $p_X(x_i) = p_i$, el punto de equilibrio del sistema es $E(X)$. En este sentido, se puede decir que $E(X)$ es una medida del *centro* de la distribución.

Volviendo al ejemplo, supongamos que el empresario desea saber ¿cuál es el "lucro medio" por conjunto montado?. Del Cuadro 3 observamos que:

$$\begin{cases} 56\,\% & \text{de los montajes deben producir un lucro de \$15} \\ 23\,\% & \text{de los montajes deben producir un lucro de \$10} \\ 2\,\% & \text{de los montajes deben producir un lucro de \$5} \\ 19\,\% & \text{de los montajes deben producir un lucro de \$-5} \end{cases}$$

Por lo tanto,
Lucro Medio $= E(X) = (0.56)15 + (0.23)10 + (0.02)5 + (0.19)(-5) = 9.85$.
Esto es, en le caso en que sean verdaderas las suposiciones realizadas para determinar la distribución de la variable aleatoria de interés, el empresario espera obtener, en promedio, una ganancia de $9.85 por conjunto armado.

2.2. Varianza de una variable aleatoria discreta

Definición 6 *Sea X una v.a. discreta con función de probabilidad puntual $p_X(x)$ y esperanza $E(X) = \mu_X$, la* ***Varianza*** *de X, que se denotará $Var(X), \sigma_X^2, \sigma^2$, es:*

$$Var(X) = \sigma_X^2 = \sum_{x \in R_X} (x - \mu_X)^2 p_X(x) = E[(X - E(X))^2] \quad (6)$$

Se prueba desarrollando el cuadrado y aplicando propiedades de la esperanza, que:

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

El **Desvío Estándar de** X, es $DE(X) = +\sqrt{Var(X)}$, es decir, es la raíz cuadrada positiva de la varianza. Su ventaja sobre la varianza es que tiene las mismas unidades que la correspondiente variable aleatoria.

2.3. Propiedades de la Esperanza y de la Varianza

1. Si $h(X) = a = \text{constante} \Longrightarrow \begin{cases} E(h(X)) = a \\ Var(h(X)) = 0 \end{cases}$

2. Si $h(X) = aX + b,\ a \text{ y } b \text{ constantes} \Longrightarrow \begin{cases} E(h(X)) = aE(X) + b \\ Var(h(X)) = a^2 Var(X) \end{cases}$

3. Si $h(X,Y) = X \pm Y, X$ e Y variables aleatorias $\Longrightarrow$
$$\begin{cases} E(h(X,Y)) = E(X) \pm E(Y) \\ Var(h(X,Y)) = Var(X) + Var(Y) \pm 2Cov(X,Y) \quad \text{donde} \quad Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y). \end{cases}$$
Si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces $Var(h(X,Y)) = Var(X) + Var(Y)$.

4. Una expresión de cálculo más simple, y que produce menos errores de redondeo, para $Var(X)$ es $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Ejemplo 2 Supongamos que todos los precios determinados por el empresario estuvieran errados y que en realidad todos los valores, tanto costos como precio de venta, debieran ser duplicados. Esto corresponde a una transformación: $Y = 2X$.

x	$y = 2x$	$p(y) = p(x)$	$y \cdot p(y)$
15	30	0.56	16.80
10	20	0.23	4.60
5	10	0.02	0.20
-5	-10	0.19	-1.90

Cuadro 5: Distribución de la variable aleatoria $Y = 2X$.

En primer lugar, observamos que la función de probabilidad $f(y)$ de la variable Y es la misma que la de la variable X, pues a cada valor de X le corresponde un único valor de Y. La distribución de probabilidades se encuentra en el Cuadro 5. Por lo tanto,

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{4} y_i P(Y = y_i) = 16.80 + 4.60 + 0.20 - 1.90 = 19.70$$

o equivalentemente:

$$E(Y) = E(2X) = 2E(X) = 2(9.85) = 19.70.$$

2.4. Distribución Uniforme Discreta

Definición 7 *Una variable aleatoria discreta que asume los valores $x_1, x_2, \cdots, x_k$ tiene* ***Distribución Uniforme Discreta*** *de parámetro $1/k$ si y sólo si:*

$$P(X = x_i) = p(x_i) = \frac{1}{k} \quad \forall i = 1, 2, \cdots, k. \tag{7}$$

Notación: $X \sim \mathcal{U}(\frac{1}{k})$.

Propiedades:

$$E(X) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i.$$

$$Var(X) = \frac{1}{k} \left[\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i \right)^2}{k} \right]$$

Ejemplo 3 El experimento consiste en "arrojar un dado y anotar el número observado de la cara superior". El Modelo de probabilidad para la variable X: "número observado al arrojar un dado" se muestra en el Cuadro 6.

x	1	2	3	4	5	6	**Total**
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Cuadro 6: Modelo probabilístico para la variable X: "número observado al arrojar un dado".

Además,
$E(X) = \dfrac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \dfrac{1}{6}\dfrac{6*7}{2} = 3.5$
$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{6}[1+4+9+16+25+36] - 3.5^2 = \frac{1}{6}\frac{6*7*13}{6} - 3.5^2 = 2.91$
y
$DE(X) = \sqrt{2.91} = 1.71.$

2.5. Distribución Bernoulli

En este caso, el experimento consiste en **observar** o **no** una determinada característica. Por ejemplo:

- Se arroja una moneda, resulta *cara* o *ceca*.
- Una pieza se elige al azar de un lote de 500, resulta *defectuosa* o *no defectuosa*.
- Una persona es elegida al azar de entre 1000, resulta de sexo *femenino* o *masculino*.
- Una persona es elegida al azar de entre los habitantes de una ciudad y se le pregunta si está a *a favor* o en *en contra* de un proyecto municipal.

Definición 8 *Una variable aleatoria X que asume apenas los valores 1=ÉXITO y 0=FRACASO con probabilidad $p = P(X = 1)$ y $1 - p = P(X = 0)$, respectivamente, se dice tiene* ***Distribución Bernoulli de parámetro*** *p.*

Notación: *$X \sim \mathcal{B}er(p)$.*

Propiedades:

$E(X) = 1(p) + 0(1-p) = p.$

$Var(X) = p - p^2 = p(1-p).$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-p & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Observación: Experimentos que resultan de una variable aleatoria Bernoulli son llamados **Ensayos Bernoulli**.

2.6. Distribución Binomial

Supongamos que repetimos un ensayo Bernoulli n - veces, o en otras palabras, obtenemos una muestra aleatoria de tamaño n de una Distribución Bernoulli. Supongamos, además, que las repeticiones sean independientes, esto es, el resultado de que un ensayo no tiene ninguna influencia en el resultado de cualquier otro ensayo. Por lo tanto, una muestra estará constituida por una secuencia de **ÉXITOS** y **FRACASOS**, o si preferimos de 0 y 1.
Por ejemplo, supongamos que se realiza 5- veces un ensayo Bernoulli, observándose los sucesivos Éxitos (E) y Fracasos (F) con probabilidades p y $1-p$ como se muestra a seguir:

F	E	E	F	E
$(1-p)$	p	p	$(1-p)$	p

Para cualquier secuencia con 3 - Éxitos y 2 - Fracasos se tendrá la misma probabilidad $p^3(1-p)^2$.
Por lo tanto, resta saber: ¿cuántas secuencias con $k = 3$ - Éxitos y $(n-k) = 5-3 = 2$ - Fracasos podemos formar?
Es fácil saber que existen $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ de estas secuencias. De modo que:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

con $k = 0, 1, 2, \cdots, n$.
En el presente ejemplo, es $P(X = 3) = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2$.

Definición 9 *Se llama **Experimento Binomial** al experimento que:*

1. *consiste en n - ensayos Bernulli, independientes, y*
2. *la probabilidad de **éxito** en cada ensayo es siempre igual a p.*

Definición 10 *Una variable aleatoria X definida por "número de éxitos en n - ensayos Bernoulli independientes" se dice tiene **Distribución Binomial de parámetros** n y p si su función de probabilidad está dada por:*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \cdots, n. \tag{8}$$

Notación: $X \sim \mathcal{B}i(n, p)$.

Propiedades:

$E(X) = np$.

$Var(X) = npq$ con $q = 1 - p$.

Ejemplo 4 Se sabe que el 25 % de los niños expuestos a un particular agente infeccioso adquieren una particular enfermedad. Entre un grupo de 4 niños con igual exposición al agente infeccioso, ¿cuál es la probabildad de que por lo menos un niño enferme en el grupo?
Definamos la variable de interés por X: "número de niños, entre 4, que pueden enfermar en el grupo".
Los posibles valores que la variable X puede asumir son $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
Entonces, $X \sim \mathcal{B}i(4, 0.25)$.
Un Modelo probabilístico para la variable X definida previamente se muestra en el Cuadro 7.

x	$P(X = x)$
0	$P(X = 0) = \binom{4}{0}(0.25)^0(0.75)^4 = (0.75)^4 = 0.3164$
1	$P(X = 1) = \binom{4}{1}(0.25)^1(0.75)^3 = 4(0.25)(0.75)^3 = 0.4219$
2	$P(X = 2) = \binom{4}{2}(0.25)^2(0.75)^2 = 6(0.25)^2(0.75)^2 = 0.2109$
3	$P(X = 3) = \binom{4}{3}(0.25)^3(0.75)^1 = 4(0.25)^3(0.75) = 0.0469$
4	$P(X = 4) = \binom{4}{4}(0.25)^4(0.75)^0 = (0.25)^4 = 0.0039$

Cuadro 7: Distribución de Probabilidades de una variable aleatoria $X \sim \mathcal{B}i(n, p)$ con $n = 4$ y $p = 0.25$.

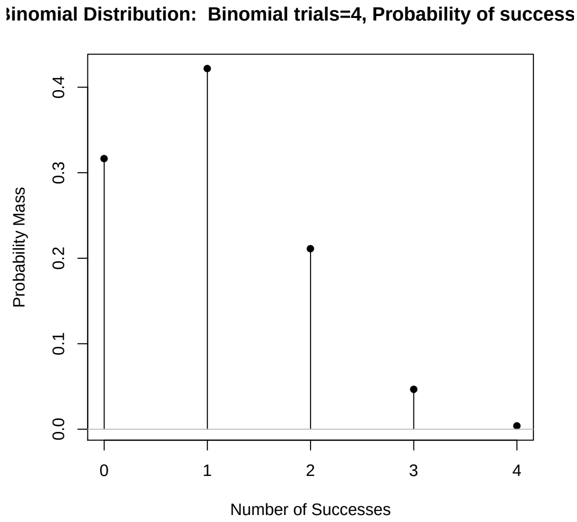


Figura 1: $X \sim \mathcal{B}i(4, 0.25)$

Por lo tanto, $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.3164 = 0.6836$.

Observación 4 Una variable aleatoria $X \sim \mathcal{B}i(n, p)$ puede asumir $(n+1)$ posibles valores, esto es, X asume los valores $\{0, 1, 2, \cdots, n\}$.

Observación 5 La Distribución Binomial se encuentra tabulada para distintos valores de n y p.

2.7. Distribución Geométrica

Definición 11 *Una variable aleatoria X definida por "número de ensayos Bernoulli independientes hasta que ocurre el primer éxito" se dice tiene **Distribución Geométrica** de parámetro p si su función de probabilidad está dada por:*

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p \quad \text{con}\, k = 1, 2, \cdots \tag{9}$$

Notación: $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Propiedades:

$E(X) = \dfrac{1}{p}$.

$Var(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

Observación 6 *La distribución Geométrica tiene falta de memoria, es decir:*
$P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$

Ejemplo 5 En un minucioso control de calidad se ha encontrado que sólo el 40 % de los elementos de un proceso son aceptados. Se desea calcular la probabilidad de que haya que inspeccionar cuatro elementos para aceptar únicamente el cuarto de ellos.
Definamos la variable aleatoria de interés X: "número de inspecciones hasta que se acepta un elemento del proceso". Luego: $X \sim \mathcal{G}(0.40)$.
Su función de probabilidad puntual está dada por:
$P(X = k) = (0.60)^{k-1}(0.40)$ con $k = 1, 2, 3, \cdots$.
Se realizan 4 pruebas. La probabilidad de tener que realizar 4 pruebas para obtener el primer éxito es: $P(X = 4) = (0.60)^{4-1}(0.40) = 0.0864$.

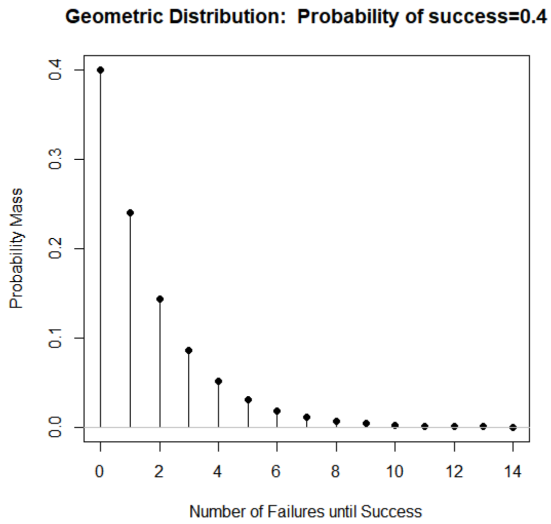


Figura 2: $X \sim \mathcal{G}(0.40)$

2.8. Distribución Hipergeométrica

Otro modelo para una variable aleatoria cuantitativa discreta es el Modelo Hipergeométrico. La situación en la que se define una variable aleatoria Hipergeométrica, tiene algunas similitudes con lo que vimos en el Modelo Binomial. Se trata de la elección de elementos de una población con dos posibles resultados, a los que podemos clasificar en una de dos categorías mutuamente excluyentes y exhaustivas, denominadas éxito y fracaso.
Sin embargo, el muestreo se realiza sin reemplazo por lo que la probabilidad de extraer un elemento de la población varía en cada prueba como veremos en el siguiente ejemplo.

Definición 12 *Una variable aleatoria X definida por "número de elementos con la característica de interés en una muestra de tamaño n extraída de una población de tamaño N sin reemplazo" se dice tiene **Distribución Hipergeométrica** de parámetros N, n, k si su función de probabilidad está dada por:*

$$P(X = x, n, K, N) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{con}\, x = 0, 1, 2, \cdots, \min(n, K) \tag{10}$$

Notación: $X \sim \mathcal{H}(n, K, N)$.

Interpretación:
Para interpretar la f.p.p., obtendremos la probabilidad que en n pruebas aparezcan x éxitos, utilizando el enfoque clásico (Regla de Laplace).
Los **casos posibles** son la cantidad de combinaciones que se pueden formar tomando n elementos cualesquiera de entre las N que constituyen el total de elementos. Es decir $\binom{N}{n}$ por ejemplo.
Los **casos favorables** serán aquellas combinaciones que contienen x-éxitos y $n - x$ fracasos. Los éxitos deberán surgir entre los K éxitos que están en N y los $n - x$ fracasos saldrán entre los $N - K$ restantes.
Es decir, cada una de las combinaciones de éxitos podrá aparearse a cada una de las combinaciones de fracasos para constituir un caso favorable. En total habrá:

$$\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x} \text{casos favorables}$$

De acuerdo a eso, resulta la f.p.p. de la v.a. Hipergeométrica.

	POBLACIÓN	MUESTRA
Totalidad de elementos	N	n
Grupo considerado éxito	K	x
Grupo considerado fracaso	$N-K$	$n-x$

Cuadro 8: Caption

Propiedades:
Como la probabilidad no es constante, se expresa p como el cociente de éxitos en la población sobre el tamaño de la misma.
$E(X) = n\dfrac{K}{N}$.
Con igual razonamiento vamos a expresar la varianza de la variable Hipergeométrica, como:
$Var(X) = n\dfrac{K}{N}\left(\dfrac{N-K}{N}\right)\dfrac{N-n}{N-1}$
Observar que además de reemplazar a p y q por sus análogos, se ha agregado respecto de la varianza de la variable Binomial el factor de corrección para poblaciones finitas: $\dfrac{N-n}{N-1}$.
Con lo cual, vemos que la varianza de la Hipergeométrica es menor a la de la Binomial, ya que el factor resulta siempre menor a uno:

- Será prácticamente uno cuando la población sea muy grande (en términos estadísticos, infinita). También, si la muestra es pequeña respecto de la población, entonces la varianza es similar a la de la distribución Binomial.
- Si n es grande (cercano a N), la varianza tiende a cero, lo cual significa que no hay variabilidad cuando trabajamos con todos los elementos de la población.

Ejemplo 6 *En un paquete de 100 memorias USB hay cuatro que contienen un bono de descuento para la compra de un Netbook. Calcule la probabilidad de que en una compra de nueve memorias seleccionadas al azar de dicho paquete se encuentren dos bonos. Compare este resultado con el que se obtendría utilizando alguna aproximación de la distribución exacta.*

Solución:
X: *Nº de memorias con bono en una muestra de tamaño 9 extraída de una población de tamaño.*
Tenemos una población formada por $N = 100$ memorias USB dividida en dos subpoblaciones, las que tienen bono descuento ($k = 4$) y las que no lo poseen ($N - k = 96$).
La extracción de las $n = 9$ memorias se realiza sin reposición, de manera que estamos ante un experimento hipergeométrico.
La probabilidad solicitada:
$P(X=2) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{96}{9-2}}{\binom{100}{9}}$

Por otro lado:
Al ser N grande y $n/N < 0.01$, se puede aproximar a la distribución Binomial:

- $p = \frac{4}{100} = 0.04$, $q = 0.96$
- $n = 9$

Y resulta $P(X=2) = \binom{9}{2}(0.04)^2(0.96)^7 = 0.0433$

2.9. Distribución de Poisson

En el caso binomial, cuando <u>n es grande</u> y <u>p es pequeño</u> podemos aproximar

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \text{ por } \frac{e^{-np}(np)^k}{k!} \text{ con } k = 0,1,2,3,\cdots.$$

Definición 13 *Una variable aleatoria X definida "número de éxitos en un número grande de ensayos Bernoulli independientes"se dice tiene* ***Distribución de Poisson de parámetro*** λ *si su función de probabilidad está dada por:*

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad \text{con}\, k = 0,,1,2,\cdots \tag{11}$$

Notación: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Propiedades:

$E(X) = Var(X) = \lambda$.

Observación 7 *La Distribución de probabilidad de Poisson, así llamada en honor al matemático francés S.D. Poisson (1781-1840), proporciona un modelo para la frecuencia relativa del número de .^{ev}entos raros o poco comunes"que ocurren en un intervalo de tiempo o espacio (área, volúmen, peso, distancia, o cualquier otra unidad de medida dada). Ejemplos:*

- *número de accidentes por mes en una planta fabril;*
- *número de clientes que llegan a un banco en una hora;*
- *número de bacterias en un cultivo dado;*
- *número de partículas emitidas por una fuente radioactiva;*
- *número de defectos en un producto manufacturado;*
- *número de llamadas telefónicas que ingresan a una central por día;*
- *número de accidentes informados, por día, a una compañía de seguros.*

Ejemplo 7 En cierta población pequeña, cada año se diagnostica un promedio de 2 nuevos casos de cáncer esofágico. Si la incidencia anuall de este tipo de cáncer sigue una distribución de Poisson, calcule la probabilidad de que en un año el número de nuevos casos diagnosticados de cáncer sea:

(a) Exactamente 10,

(b) Al menos 8,

(c) No mas de 12,

(d) Entre 5 y 9, inclusive ambos,

(e) Menos de 3.

Definamos la variable de interés por X: "número de casos anuales de cáncer de esófago".
Los posibles valores que la variable puede asumir son $\{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, \}$.
Entonces, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
Un Modelo probabilístico para la variable $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ definida previamente se muestra en el Cuadro 9.

x	$P(X=x)$
0	$P(X=0)=\dfrac{e^{(-2)}2^0}{0!}=0.1353$
1	$P(X=1)=\dfrac{e^{(-2)}2^1}{1!}=0.2707$
2	$P(X=2)=\dfrac{e^{(-2)}2^2}{2!}=0.2707$
3	$P(X=3)=\dfrac{e^{(-2)}2^3}{3!}=0.1804$
4	$P(X=4)=\dfrac{e^{(-2)}2^4}{4!}=0.0902$
5	$P(X=5)=\dfrac{e^{(-2)}2^5}{5!}=0.0361$
6	$P(X=6)=\dfrac{e^{(-2)}2^6}{6!}=0.0120$
7	$P(X=7)=\dfrac{e^{(-2)}2^7}{7!}=0.0034$
8	$P(X=8)=\dfrac{e^{(-2)}2^8}{8!}=0.0009$
9	$P(X=9)=\dfrac{e^{(-2)}2^9}{9!}=0.0002$
≥ 10	$P(X\geq 10)=0.0001$
Total	1

Cuadro 9: Distribución de Probabilidades de una variable aleatoria $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ con $\lambda = 2$.

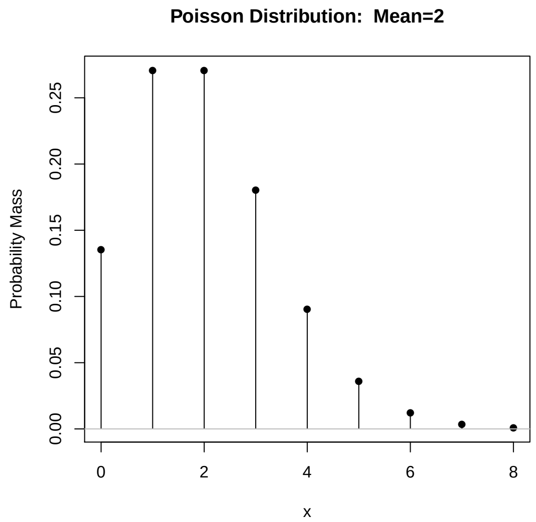


Figura 3: $X \sim \mathcal{P}(2)$

Por lo tanto,

(a) P(Exactamente 10)=$P(X=10)=0.0001$

(b) P(Al menos 8)=$P(X\geq 8)=0.0009+0.0002+0.0001=0.00012$

(c) P(No mas de 12)=$P(X\leq 12)=1$

(d) P(Entre 5 y 9, inclusive ambos)=$P(5\leq X\leq 9)=0.0361+0.0120+0.0034+0.0009+0.0002=0.0526$

(e) P(menos de 3)=$P(X<3)=0.1353+0.2707+0.2707=0.6767$

Observación 8 *La distribución de Poisson se encuentra tabulada para diferentes valores de* λ.

3. Modelos Probabilísticos para Variables Aleatorias Continuas

Ejemplo: Consideremos un reloj antiguo, y definamos la variable X como *'el ángulo que la aguja del reloj forma con un eje imaginario, pasando por el centro del reloj y el número XII'.*

Midiendo el ángulo X en grados y teniendo en cuenta que:

1. la aguja del reloj debe dar 60 *saltos* (da un salto por segundo) para completar una vuelta; y
2. la aguja tiene la misma probabilidad de parar en cualquier punto,

tenemos que la variable X tiene distribución Uniforme Discreta con función de probabilidad dada en el siguiente cuadro:

x	0°	6°	12°	18°	24°	$\cdots$	348°	354°	Total
$p(x)$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\cdots$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	1

Trasladando el problema de un reloj eléctrico, donde la aguja del reloj se mueve de forma continua (sin dar saltos), necesitamos otro modelo para representar la variable aleatoria X. Entonces, tenemos:

1. el conjunto de valores posibles de X es $[0, 360) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 360\}$ (o sea, ya no se trata de un conjunto enumerable de valores); y
2. no existe un lugar de preferencia para que la aguja se detenga.

Como existen infinitos puntos en los cuales la aguja puede detenerse, cada uno con igual probabilidad, cada punto tendría probabilidad **cero** de ocurrir. Por lo tanto, no tiene sentido preguntar: ¿Cuál es la probabilidad de que la variable tome un determinado valor, o equivalentemente, la aguja se pare en determinado número?, ya que esta probabilidad será siempre cero.
Sin embargo, podemos determinar la probabilidad de que el ángulo X esté comprendido entre dos valores cualesquiera. Por ejemplo,

P(el puntero pare entre XII y el III)= $P(0 \leq X \leq 90) = \dfrac{1}{4}$

P(el puntero pare entre IV y el V)= $P(120 \leq X \leq 150) = \dfrac{1}{12}$

Por lo tanto, por menor que sea el intervalo, siempre podemos encontrar la probabilidad de que la aguja pare en un punto cualquiera de ese intervalo, esto es:

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \leq a < b < 360 \Rightarrow P(X \in [a, b)) = P(a \leq X < b) = \dfrac{(b-a)}{360}$.

Si dividimos el intervalo [0,360°) en pequeños subintervalos podemos construir un **histograma** para las probabilidades de la variable aleatoria X. Haciendo que el ancho de esos intervalos tienda a cero, tenemos el histograma (alisado). El histograma corresponde a la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{360} & \text{si } 0 \leq x < 360 \\ 0 & \text{si } x \geq 360 \end{cases}$$

El área correspondiente al intervalo $[a, b)$ debe indicarse por $P(a \leq X < b)$. Matemáticamente, esto es expresado con la integral de la función entre a y b, o sea:

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{360}\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)}{360}$$

ya que la integral de una función entre dos puntos determina el área bajo la curva comprendida entre dos puntos.

Definición 14 *La función $f(x)$ es llamada* ***Función de densidad de probabilidad.***

Teóricamente, cualquier función $f(.)$ que sea no negativa y cuyo área total bajo una curva sea igual a la unidad , caracteriza una variable aleatoria continua.

Observación 9 *La función de densidad de probabilidad* ***no*** *representa la probabilidad de ocurrencia de un evento, sino que el área bajo la curva entre dos puntos dá la probabilidad.*

En resumen:

1. Cualquier función $f(x)$ no negativa y tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ define una variable aleatoria continua. Esto crea un **Modelo Probabilístico** para una variable aleatoria continua que quedará definido cuando se conozca el **Rango** de la variable (por lo general, $\mathbb{R}$) y una **función de densidad de probabilidad**.
2. El área comprendida entre dos valores a y b, de abcisa x y curva $f(x)$, dá la probabilidad de que la variable tome valores entre dos dos valores, esto es: $P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Veamos ahora, ¿cómo puede ser definido el concepto de **Esperanza Matemática** para una variable aleatoria continua? Para ello, vamos a usar un artificio semejante al usado para calcular la media de las variables aleatorias cuantitativas con los datos agrupados en intervalos de clase. Recordemos que, para definir la media de un conjunto de datos agrupados, sustituimos todos los valores observados en una clase por el punto medio de dese intervalo y trabajamos como si la variable fuera discreta. Por lo tanto:

Sea X una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f(x)$ y sean a y b dos puntos bien próximos de manera tal que la diferencia $h = b - a$ es pequeña y consideremos x_0 el punto medio del intervalo $[a, b)$. Entonces, $P(a \leq X < b) \simeq hf(x_0)$ significa aproximar el área bajo la curva al área del rectánguo con base h y altura $f(x_0)$ y la aproximación mejora a medida que $h \longrightarrow 0$.
Dividamos ahora el intervalo $[a, b]$, con $f(x) > 0$, en partes de igualdad de amplitud $h = \frac{b-a}{n}$ y consideremos los puntos medios, digamos $x_1, x_2, \cdots, x_n$, de cada una de las clases.

Consideremos entonces la variable discreta Y_n que asume los valores $x_1, x_2, \cdots, x_n$ con las probabilidades $p_i = P(Y_n = x_i) \simeq hf(x_i)$. Entonces,

$$E(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \simeq \sum_{i=1}^{n} x_i h f(x_i) \simeq E(X).$$

Para determinar E(X) con mayor precisión, podemos aumentar el número de intervalos, disminuyendo la amplitud h de los mismos. En el límite, esto cuando $h \longrightarrow 0$, tendríamos la esperanza. Por lo tanto,

$$E(X) = \lim_{n\to\infty} E(Y_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

.

Definición 15 *Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$, por ser $f(x)$ no negativa, $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Ejemplo: En el caso del reloj,
$E(X) = \int_0^{360} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{360} x \frac{1}{360} \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{360} = \frac{360^2}{(360)(2)} = 180.$

Definición 16 *Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$, la varianza es:*

$$Var(X) = E[X - E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

.

Definición 17 *Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$, la Función de Distribución Acumulada es:*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

.

Ejemplo 8 Consideremos la función de densidad de probabilidad definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Entonces:

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t = 0 & \text{si } x < 0 \\ \displaystyle\int_{0}^{x} 2t\,\mathrm{d}t = x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \displaystyle\int_{0}^{1} 2t\,\mathrm{d}t = 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Propiedades de la Función de Distribución:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$, $\forall x$.
2. F(x) es una función no decreciente.
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.
4. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
5. $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.
6. $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$.

3.1. Distribución Uniforme Continua

Definición 18 *Una variable aleatoria continua, X, tiene* ***Distribución Uniforme con parámetros*** *α* ***y*** *β ($\alpha < \beta$) si su función de densidad de probabilidad está dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \text{si } \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{caso contrario (c.c.)} \end{cases} \tag{12}$$

Notación: $X \sim \mathcal{U}(\alpha, \beta)$.

Propiedades: $E(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{1}{(\beta-\alpha)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{\beta-\alpha}\frac{(\beta^2-\alpha^2)}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 \frac{1}{\beta-\alpha}\,\mathrm{d}x - [\frac{\alpha+\beta}{2}]^2 = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$.

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{si } \alpha \leq x < \beta \\ 1 & \text{si } x \geq \beta \end{cases}$

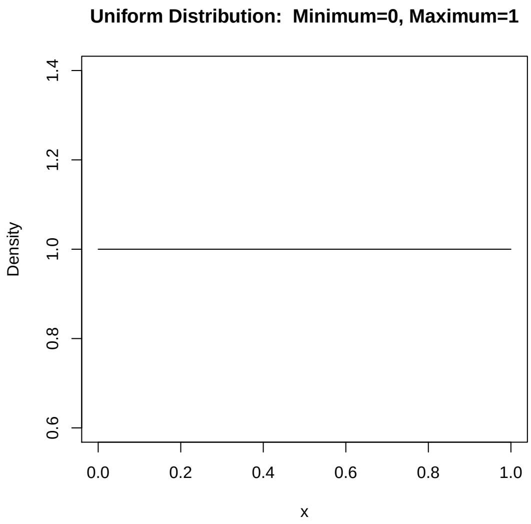


Figura 4: $X \sim \mathcal{U}(0,1)$

3.2. Distribución Exponencial

Definición 19 *Una variable aleatoria continua* X*, definida en* $\mathbb{R}^+$*, tiene* ***Distribución Exponencial de parámetro*** β*,* ($\beta > 0$)*, si su función de densidad de probabilidad está dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{13}$$

Notación: $X \sim \mathscr{E}(1/\beta)$.

Propiedades:

$E(X) = \int_0^\infty x \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}\, \mathrm{d}x = \beta$.

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}\, \mathrm{d}x - \beta^2 = \beta^2$.

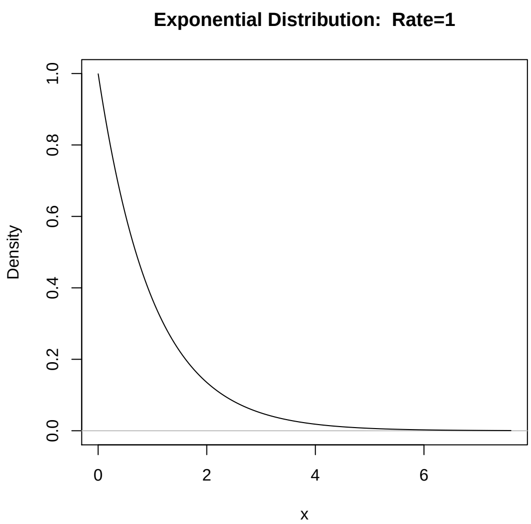


Figura 5: $X \sim \varepsilon(1)$

Ejemplo 9 El tiempo de vida (en horas) de una transitor es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad dada por:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{500} e^{-\frac{1}{500}t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, la vida media del transitor es $E(T) = 500$ horas y la probabilidad de que su tiempo sea mayor a la media es:
$P(X \geq 500) = \displaystyle\int_{500}^{\infty} \frac{1}{500} e^{-\frac{t}{500}}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{500} \lim_{b \to \infty} \int_{500}^{b} e^{-\frac{t}{500}} = \frac{1}{500} \lim_{b \to \infty} -500 e^{-\frac{t}{500}} \Big|_{500}^{b} = \frac{1}{500} 500 e^{-\frac{500}{500}} =$ $e^{-1} = 0.3678$.

3.3. Distribución Normal

Definición 20 *Una variable aleatoria continua X, definida en $\mathbb{R}$, se dice tiene una* ***Distribución Normal de parámetros*** μ ***y*** σ, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma^2 > 0$, *si su función de densidad de probabilidad está dada por:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty. \tag{14}$$

Notación: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Propiedades:

1. $E(X) = \mu$.
2. $Var(X) = \sigma^2$.
3. $f(x) \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow \pm\infty$.
4. $(\mu - \sigma)$ y $(\mu + \sigma)$ son puntos de inflexión de $f(x)$.
5. $x = \mu$ es el punto máximo de $f(x)$ y el valor máximo es $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.
6. $f(x)$ es simétrica en torno de μ, esto es, $f(x + \mu) = f(x - \mu)$, $\forall - \infty < x < \infty$.
7. Media=Moda=Mediana.
8. Si $\mu = 0$ y $\sigma = 1 \longrightarrow X \sim N(0, 1)$ se denomina **Distribución Normal Estándar** y esta distribución se encuentra tabulada.
9. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.
10. Siempre es posible calcular $P(a < X < b)$ a partir de las estandarización de la variable aleatoria, esto es:
    $P(a < X < b) = P\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma} < Z < \dfrac{b-\mu}{\sigma}\right)$.

Ejemplo 10 Los caudales medios anuales de un río se distribuyen normalmente, con media $1.5 \frac{m^3}{seg}$ y desvío estándar $0.6\ \frac{m^3}{seg}$. Determine:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca un caudal medio igual o menor a $1\ \frac{m^3}{seg}$ en cualquier año?
$P(X \leq 1) = P(Z \leq \frac{1-1.5}{0.6}) = (Z \leq -\frac{0.5}{0.6}) = P(Z \leq -0.83) = 0.20327$.

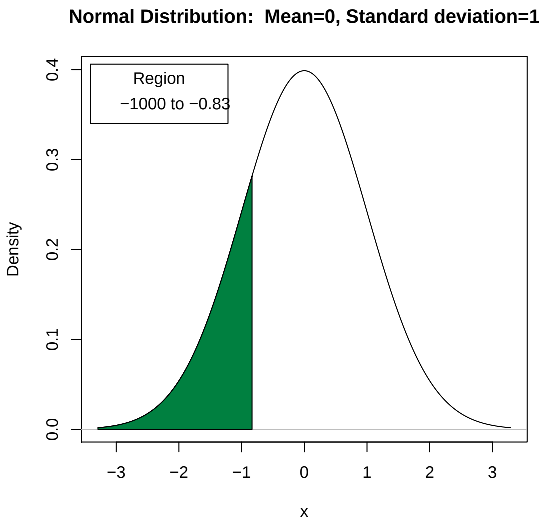


Figura 6: Área bajo la curva de la función de la variable aleatoria $Z \sim N(0,1)$.

Observar la Figura 6 y la Figura 7 que brinda la información de la Tabla.

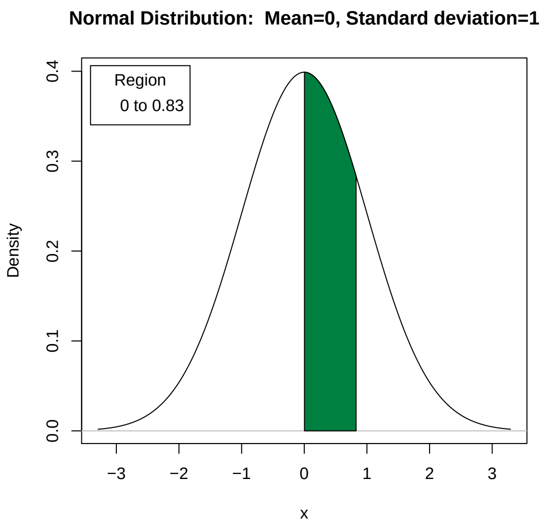


Figura 7: Área bajo la curva de la función de la variable aleatoria $Z \sim N(0,1)$, tabulada.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca un caudal medio entre 0.5 $\frac{m^3}{seg}$ y 2 $\frac{m^3}{seg}$?

$P(0.5 \leq X \leq 2.5) = P\left(\frac{0.5-1.5}{0.6} \leq Z \leq \frac{2.5-1.5}{0.6}\right) = P(-1.67 \leq Z \leq 1.67) = 2P(0 \leq Z \leq 1.67) = 2(0.452540) = 0.90508$.

Observar la Figura 8.

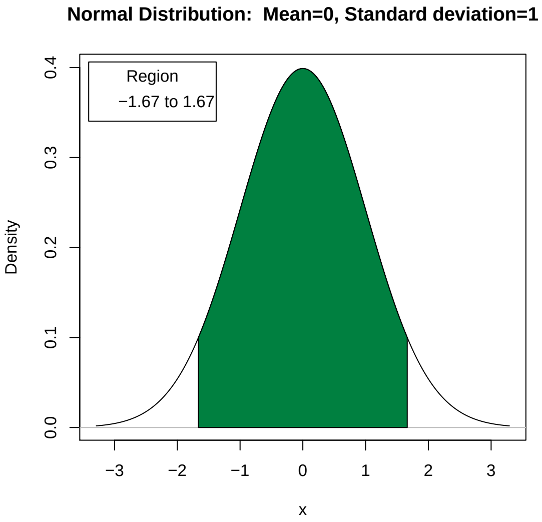


Figura 8: Área bajo la curva de la función de la variable aleatoria $Z \sim N(0,1)$

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca un caudal medio entre 0.5 $\frac{m^3}{seg}$ y 1 $\frac{m^3}{seg}$?

$P(0.5 \leq X \leq 1) = P\left(\frac{0.5-1.5}{0.6} \leq Z \leq \frac{1-1.5}{0.6}\right) = P(-1.67 \leq Z \leq -0.83) = P(0 \leq Z \leq 1.67) + P(0 \leq Z \leq 0.83) = 0.452540 - 0.203169 = 0.249371$.

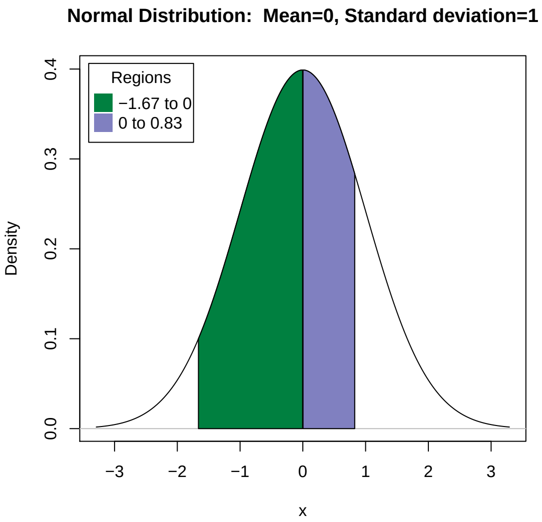


Figura 9: Área bajo la curva de la función de la variable aleatoria $Z \sim N(0,1)$ tabulada

Observar la Figura 9.

Observación 10 *Tener en cuenta que:*

- *La función de densidad de probabilidad de una Distribución Normal con σ pequeño tiene un pico alto, y es más concentrada alrededor de la media μ, mientras que la función de densidad de probabilidad con σ grande es más achatada sobre el eje horizontal x.*

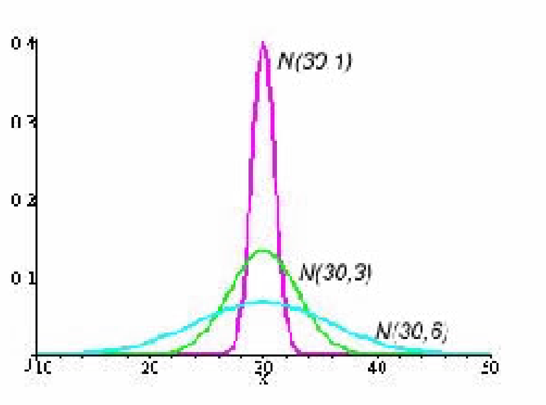


Figura 10: Distintas curvas de variable aleatoria $Z \sim N(30, \sigma)$, para distintos valores de σ.

- *Toda Distribución Normal, contiene, dentro de un desvío estándar de su media, la misma cantidad de área, dentro de dos desvíos estándar de su media, la misma cantidad de área y en general, dentro de cualquier número fijo de desvíos estándares de la media se tiene la misma cantidad de área. En otras palabras,*

  Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *y* $X \sim N(0,1) \Longrightarrow \forall k; p_k = P(|X-\mu| \le k\sigma) = P(|Z| \le k)$.
  Lo cual puede ser expresado en el siguiente cuadro:

k	p_k
1	*0.6826*
2	*0.9544*
3	*0.9974*
4	*0.99994*
5	*0.999996*
6	*0.00* x 10^-25

- *Toda Distribución Normal tiene forma de campana, pero no toda distribución en forma de campana es Normal.*