

MATEMÁTICA I - ICPA: PRELIMINARES
FERNANDO DOBARRO

ÍNDICE

| | |
|---|----|
| Glosario de Simbología Lógica y Matemática. | 1 |
| 1. Números reales y su representación en la recta. Valor absoluto. | |
| Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto. | 2 |
| 1.1. Conjuntos numéricos y sus estructuras. | 2 |
| 1.2. Intervalos. | 7 |
| 1.3. Inecuaciones. | 9 |
| 1.4. Valor absoluto o módulo. | 11 |
| 1.5. Ejercicios. | 15 |
| 2. Plano Cartesiano, Incrementos, Distancias y Ecuación de la Recta. | |
| Proporcionalidad y Porcentajes. | 19 |
| 2.1. El plano cartesiano. | 19 |
| 2.2. Incrementos y distancias. | 19 |
| 2.3. Distancia entre dos puntos. | 20 |
| 2.4. Gráficas. | 21 |
| 2.5. Rectas. | 21 |
| 2.6. Ecuación de la recta. | 22 |
| 2.7. Porcentajes. | 25 |
| 2.8. Ejercicios | 29 |

| | |
|--|-----------|
| 3. Funciones y sus Gráficas. | 33 |
| 3.1. Definiciones de función, dominio e imagen. | 33 |
| 3.2. Gráficos de funciones. | 36 |
| 3.3. Combinación de funciones para crear otras nuevas. | 42 |
| 3.4. Ejercicios | 49 |
| 4. Funciones Polinomiales y Racionales. | 52 |
| 4.1. Primeras definiciones. | 52 |
| 4.2. Algoritmo de división de polinomios. | 53 |
| 4.3. División de Polinomios utilizando el Método de Ruffini. | 53 |
| 4.4. Raíces y factores. | 55 |
| 4.5. Factorización de polinomios. | 56 |
| 4.6. Raíces y factores cuadráticos. | 57 |
| 4.7. Otras factorizaciones. | 59 |
| 4.8. Ejemplos de operaciones con funciones racionales. | 62 |
| 4.9. Ejercicios | 64 |

Glosario de Simbología Lógica y Matemática.

| | |
|--------------------|---|
| $/ : \text{ tq}$ | tal que |
| \wedge | y; conjunción |
| \vee | o; disjunción |
| $\underline{\vee}$ | o exclusivo |
| $\neg \sim$ | no; negación |
| \Rightarrow | implica; si, ... entonces; implicación material |
| \Leftrightarrow | equivale; si y sólo si |
| \in | pertenece |
| \ni | no pertenece |
| \subset | incluido |
| \subseteq | incluido o igual |
| \forall | cuantificador universal, para todo |
| \exists | cuantificador existencial, existe al menos un |
| $=$ | igual |
| $<$ | menor |
| $>$ | mayor |
| \leq | menor o igual |
| \geq | mayor o igual |
| \approx | aproximadamente |
| \mathbb{N} | conjunto de los números naturales |
| \mathbb{Z} | conjunto de los números enteros |
| \mathbb{Q} | conjunto de los números racionales |
| \mathbb{R} | conjunto de los números reales |
| \mathbb{C} | conjunto de los números complejos |
| \cup | unión de conjuntos |
| \cap | intersección de conjuntos |
| ϕ | conjunto vacío |

1. Números reales y su representación en la recta. Valor absoluto.

Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

1.1. **Conjuntos numéricos y sus estructuras.** El Cálculo se basa en las propiedades del sistema de los números reales . Los números reales se expresan mediante decimales .

Por ejemplo

$$\begin{aligned} -1 &= -1.000000 \dots \\ -\frac{3}{4} &= -0.750000 \dots \\ 0 &= 0.00000 \dots \\ \frac{1}{3} &= 0.3333 \dots \\ \sqrt{2} &= 1.4142 \dots \\ e &= 2.71828182845904523536 \dots \\ \pi &= 3.14159 \dots \\ 5 &= 5.0000 \dots \end{aligned}$$

Los puntos suspensivos \dots indican que las secuencias de dígitos decimales no finaliza nunca. En el caso de los precedentes cuatro primeros números y el último de ellos, el patrón que siguen los dígitos es obvio. Por tanto, podremos saber cuáles serán los dígitos siguientes. En el caso de $\sqrt{2}$, e y π no existe un patrón. Los números reales se pueden representar geométricamente como puntos en una recta que se denomina **recta real** como se muestra en la FIGURA 1. Para indicar tanto la recta real como el sistema de números reales se utiliza el símbolo \mathbb{R} .

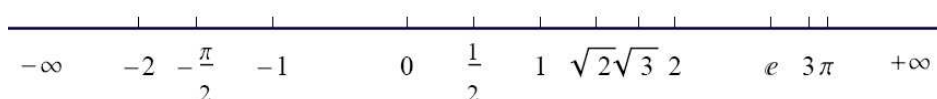


FIGURA 1. Recta real

Las propiedades de los números reales se pueden clasificar en tres categorías: algebraicas, de orden y completitud.

Propiedades 1.1. (Algebraicas para la adición)

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

- (1) Ley de cierre o clausura :

$$a + b \in \mathbb{R}$$

- (2) Conmutatividad

$$a + b = b + a$$

- (3) Asociatividad

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

- (4) Elemento neutro

$$\exists \text{ un } \text{único } 0 \in \mathbb{R} \text{ } / \text{ } a + 0 = 0 + a = a$$

- (5) Opuesto

$$\text{Para cada } a \in \mathbb{R} \text{ , } \exists \text{ el opuesto } -a \text{ } / \text{ } (-a) + a = 0$$

Propiedades 1.2. (Algebraicas para la multiplicación)

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

- (1) Ley de cierre o clausura :

$$a.b \in \mathbb{R}$$

- (2) Conmutatividad

$$a.b = b.a$$

- (3) Asociatividad

$$a.(b.c) = (a.b).c$$

- (4) Elemento neutro

$$\exists \text{ un } \text{único elemento en } \mathbb{R} \text{ , denominado } 1 \text{ tal que } a.1 = 1.a = a \text{ } \forall a \in \mathbb{R}.$$

(5) Inverso

Para cada $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, \exists el inverso a^{-1} / $(a^{-1}).a=1$

Propiedades 1.3. (Distributividad: conecta la adición con la multiplicación) Cualesquiera sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a(b + c) = ab + ac$$

Propiedades 1.4. (Propiedades de la igualdad) Cualesquiera sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

(1) Reflexiva

$$a = a.$$

(2) Simétrica

Si $a = b$, entonces $b = a$.

(3) Transitiva

Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

(4) Consistencia con la suma

Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

(5) Consistencia con la multiplicación

si $a = b$, entonces $a.c = b.c$.

Las propiedades de orden de los números reales se pueden observar en la representación geométrica que se hace de los mismos, eligiendo un punto arbitrario como cero y representando a la derecha los números llamados positivos (esto se hace por convención). En síntesis, si x está a la izquierda de 0 se dice que es negativo y si x está a la derecha se dice que es positivo. Esto nos permite definir que significa x menor que y :

$$x < y \Leftrightarrow y - x > 0.$$

La desigualdad $x \leq y$, que se lee "*x es menor o igual que y*", significa que $x < y$ o $x = y$ o ambas. Por ejemplo:

- la afirmación $1 < 1$ es falsa.
- la afirmación $1 = 1$ es verdadera.
- la afirmación $1 \leq 1$ es verdadera.
- la afirmación $1 \geq 1$ es verdadera.

Las propiedades de orden en los números reales se resumen en las siguientes reglas:

Propiedades 1.5. (de orden) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(1) Tricotomía

Es verdadera una y solo una de la siguientes afirmaciones

$$a < b, b < a, a = b.$$

(2) Transitividad

$$\text{Si } a < b \text{ y } b < c \Rightarrow a < c.$$

(3) Consistencia con la suma

$$\text{Si } a < b \Rightarrow a + c < b + c.$$

(4) Consistencia con la multiplicación

$$\text{si } a < b \text{ y } c > 0 \Rightarrow a.c < b.c.$$

De estas propiedades se deducen:

$$(1) a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0.$$

$$(2) a < b \text{ y } c < 0 \Rightarrow a.c > b.c.$$

En particular, recordando que $-a = (-1)a$, resulta $-a > -b$.

$$(3) 0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$$

Nótese especialmente las reglas para multiplicar (o dividir) una desigualdad por un número: si el número es positivo la desigualdad se mantiene, mientras que si el número es negativo, la desigualdad de invierte.

La propiedad de **completitud** del sistema de números reales es un poco más delicada, pero podríamos enunciarla de la siguiente manera: si A es un conjunto no vacío ($A \neq \emptyset$) de números reales (esto significa que A tiene al menos un número real), tal que existe y en \mathbb{R} verificando que si $x \in A$ entonces $x \leq y$, luego *existe* un $y_0 \in \mathbb{R}$ “mínimo” con la misma propiedad. Un tal y se denomina una cota superior de A y un tal y_0 el extremo superior o supremo de A .

Intuitivamente esto significa que *la recta real no tiene agujeros*. A todo punto de la recta le corresponde un único número real.

El conjunto de números reales tiene algunos subconjuntos especialmente importantes, a saber.

- (a) Los **números naturales** (\mathbb{N}), es decir 1,2,3...
- (b) Los **números enteros** (\mathbb{Z}), es decir 0, ± 1 , ± 2 , ± 3 ...
- (c) Los **números racionales** (\mathbb{Q}), es decir, números que se pueden expresar en forma de fracción $\frac{m}{n}$ siendo $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$.

Precisamente, los números racionales son números reales cuyo desarrollo decimal termina

- (i) con una secuencia de infinitos ceros, por ejemplo $\frac{3}{4} = 0.75000\dots$, o
- (ii) con una cadena de dígitos que se repiten indefinidamente, por ejemplo $\frac{1}{3} = 0.33333\dots = 0.\overline{3}$ (el arco indica la cadena de dígitos que se repite).

Cabe observar que \mathbb{Q} posee las mismas propiedades algebraicas y de orden de \mathbb{R} , pero **no** posee la propiedad de completitud, la cual será central en la cuestiones

del llamado Análisis Matemático. Los números reales que no son racionales se denominan **irracionales**.

Ejemplo 1.6. Demostrar que son racionales los números

$$(a) \ 0.323232 \dots = 0.\widehat{32}$$

$$(b) \ 0.3405405 \dots = 0.3\widehat{405}$$

Solución.

(a) Sea $x = 0.323232 \dots$ Entonces

$$100x = 32.323232 \dots$$

$$x = 0.323232 \dots \quad \text{restando miembro a miembro ambas igualdades}$$

$$99x = 32$$

$$99x = 32$$

$$x = \frac{32}{99}$$

(b) Sea $y = 0.3405405 \dots$ Entonces

$$10000y = 3405.405405 \dots$$

$$10y = 3.405405405 \dots \quad \text{restando miembros a miembro}$$

$$9990y = 3402$$

$$y = \frac{3402}{9990}$$

□

1.2. Intervalos. Un subconjunto de la recta real se denomina *intervalo* si contiene al menos dos números y contiene también todos los números reales que estén entre dos cualesquiera de sus elementos. Por ejemplo el conjunto de los números reales tal que $x > 6$ es un intervalo, mientras que el conjunto de los números reales tal que $y \neq 0$ no lo es.

Si a y b son dos números reales tal que $a < b$, entonces :

- (i) El **intervalo abierto** desde a hasta b , representado por (a, b) esta formado por todos los números reales x tales que $a < x < b$, o sea $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
- (ii) El **intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha** desde a hasta b , representado por $(a, b]$ esta formado por todos los números reales x tales que $a < x \leq b$, , o sea $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.
- (iii) El **intervalo cerrado a izquierda y abierto a derecha** desde a hasta b , representado por $[a, b)$ esta formado por todos los números reales x tales que $a \leq x < b$, , o sea $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.
- (iv) El **intervalo cerrado** desde a hasta b , representado por $[a, b]$ esta formado por todos los números reales x tales que $a \leq x \leq b$, o sea $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

Estos intervalos se muestran en la FIGURA 2 y los números a y b se llaman extremo izquierdo y derecho respectivamente. Nótese el uso de puntos vacíos para indicar los extremos de los intervalos que no están incluidos en ellos, y el uso de puntos llenos cuando si lo están.

Los intervalos de la FIGURA 2 tienen longitud finita $b - a$, estos se denominan **intervalos finitos** mientras que los intervalos siguientes son intervalos de longitud infinita con un único extremo:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}.$$

Nótese que la recta real \mathbb{R} en sí es un intervalo, que se indica $(-\infty, \infty)$ o $(-\infty, +\infty)$. El símbolo ∞ (infinito) no representa ningún número real por lo que no está permitido que sea un extremo del intervalo.



FIGURA 2. Intervalos finitos o acotados: en la figura se muestran los distintos tipos de intervalos con 1 como extremo izquierdo y 3 como extremo derecho.

1.3. Inecuaciones.

Ejemplo 1.7. Resolver las siguientes inecuaciones. Expresar la solución en forma de intervalos y graficar.

(a) $2x - 1 > x + 3$

(b) $-\frac{x}{3} \geq 2x - 1$

(c) $\frac{2}{x-1} \geq 5$

Solución. Utilizaremos las *Propiedades* 1.1, 1.2, 1.3 y 1.5.

(a)

$$2x - 1 > x + 3 \quad \text{se suma 1 en ambos miembros}$$

$$2x > x + 4 \quad \text{se resta } x \text{ en ambos miembros}$$

$$x > 4 \quad \text{la solución es el conjunto } (4, \infty)$$

(b)

$$-\frac{x}{3} \geq 2x - 1 \quad \text{se multiplica ambos miembros por } -3$$

$$x \leq -6x + 3 \quad \text{se suma } 6x \text{ en ambos miembros}$$

$$7x \leq 3 \quad \text{se divide ambos miembros por } 7$$

$$x \leq \frac{3}{7} \quad \text{la solución es el conjunto } \left(-\infty, \frac{3}{7}\right]$$

(c) Lo que deberíamos hacer es multiplicar ambos miembros por $x - 1$, observando primero que $x \neq 1$ y discriminando de acuerdo al signo de $x - 1$.

- Caso $x - 1 > 0$, o sea $x > 1$

$$\frac{2}{x-1} \geq 5 \quad \text{se multiplica ambos miembros por } x-1$$

$$2 \geq 5x - 5 \quad \text{se suma } 5 \text{ en ambos miembros}$$

$$7 \geq 5x \quad \text{se divide ambos miembros por } 5$$

$$\frac{7}{5} \geq x \quad \text{siendo } 1 < x, \text{ luego } x \in \left(1, \frac{7}{5}\right].$$

- Caso $x - 1 < 0$, o sea $x < 1$

$$\frac{2}{x-1} \geq 5 \quad \text{se multiplica ambos miembros por } x-1$$

$$2 \leq 5x - 5 \quad \text{se suma } 5 \text{ en ambos miembros}$$

$$7 \leq 5x \quad \text{se divide ambos miembros por } 5$$

$$\frac{7}{5} \leq x \quad \text{siendo } x < 1, \text{ o sea que } x \text{ debería verificar}$$

$$\frac{7}{5} \leq x < 1, \text{ contradicción.}$$

Luego, de ambos casos el conjunto de números que verifican la inecuación (c) es $\left(1, \frac{7}{5}\right]$.

Cabe observar que no existe un único modo de resolver inecuaciones (o ecuaciones). Por ejemplo la inecuación (c) se podría resolver de la siguiente manera:

en primer lugar $x \neq 1$, luego bajo esta condición,

$$\begin{array}{ll} \frac{2}{x-1} \geq 5 & \text{resto 5 de ambos lados} \\ \frac{2}{x-1} - 5 \geq 0 & \text{sacando denominador común} \\ \frac{-5x+7}{x-1} \geq 0 & \text{si sacamos factor común -5} \\ -5\frac{x-\frac{7}{5}}{x-\frac{1}{7}} \geq 0 & \text{ahora multiplicamos por } -\frac{1}{5} \text{ de ambos lados} \\ \frac{x-\frac{7}{5}}{x-\frac{1}{7}} \leq 0 & \end{array}$$

Analizando los signos del numerador y denominador, se deduce que las únicas alternativas factibles son:

$$x - \frac{7}{5} \geq 0 \quad \text{y} \quad x - 1 < 0$$

o

$$x - \frac{7}{5} \leq 0 \quad \text{y} \quad x - 1 > 0,$$

o equivalentemente

$$\frac{7}{5} \leq x < 1 \quad \text{o} \quad 1 < x \leq \frac{7}{5}$$

Notando que la primera afirmación es imposible, el conjunto de los x que verifican la inecuación es $\left(1, \frac{7}{5}\right]$.

□

1.4. Valor absoluto o módulo. El valor absoluto o módulo de un número x , que se escribe $|x|$, se puede definir geométricamente como la distancia de x al 0.

La igualdad $|x| = k$, se lee *módulo de x igual a k* y dice que x están a distancia k del 0, o sea que $x = k$ o $x = -k$.

Nótese que $|x|$ al representar una distancia es siempre mayor o igual a 0 y que $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Ejemplo 1.8. El conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| = 3$, es el conjunto de todos los x que están a distancia 3 del 0, o sea $x = 3$ o $x = -3$.

De forma más general el $|x - y|$ representa la distancia entre x e y , en efecto $|x - y|$ indica cuanto dista $x - y$ del 0, o sea que

$$x - y = |x - y| \quad \text{o} \quad x - y = -|x - y|,$$

o más aún que

$$x = y + |x - y| \quad \text{o} \quad x = y - |x - y|.$$

Ejemplo 1.9. Hallar todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - 2| = 3$.

Solución. Por la discusion precendente $x = 2 + 3 = 5$ o $x = 2 - 3 = -1$.

Geoméricamente podemos decir $|x - 2| = 3$ representa los x que distan 3 de 2. \square

Con la misma definición geométrica de distancia podemos interpretar algunas desigualdades. Por ejemplo, la inecuación $|x - a| < D$ (siendo $D > 0$), expresa que la distancia de x hasta a tiene que ser menor que D y por lo tanto x debe estar entre $a - D$ y $a + D$.

Ejemplo 1.10. : Resolver

- (1) $|x| < 3$ (se lee módulo de x menor a 3), son todos los x que están a distancia menor que 3 del 0, o sea $x < 3$ y $x > -3$, es decir tales que $-3 < x < 3$. O en otro modo $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 3\}$ es el intervalo $(-3, 3)$.
- (2) $|x| > 3$ (se lee módulo de x mayor a 3), son todos los x que están a distancia mayor que 3 del 0, o sea $x > 3$ o $x < -3$.

- (3) $|x - 2| < 3$. Esta inecuación representa todos los x tal que la distancia de x a 2 es menor a 3, o sea $-1 < x < 5$, o de otro modo el intervalo $(-1, 5)$.

Generalizando:

$$|x - a| = D \iff x = a - D \text{ o } x = a + D,$$

$$|x - a| < D \iff a - D < x < a + D,$$

$$|x - a| \leq D \iff a - D \leq x \leq a + D,$$

$$|x - a| \geq D \iff x \leq a - D \text{ o } x \geq a + D.$$

El módulo también puede definirse de la siguiente manera

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Propiedades 1.11. Sean $a, x, y \in \mathbb{R}$ y $a \geq 0$. Entonces,

- (1) $0 \leq |x| = |-x|$.
- (2) $|x| \leq a$ si y sólo si $-a \leq x \leq a$. Y en consecuencia $-|x| \leq x \leq |x|$.
- (3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
- (4) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$.
- (5) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdad triangular).
- (6) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
- (7) $|x| = \sqrt{|x|^2} = \sqrt{x^2}$.

Demostración. Las propiedades (1), (2), (3) y (7) se pueden comprobar considerando las distintas posibilidades de signo de x e y . Demostremos la desigualdad triangular.

Sabemos que $|x| \leq |x|$ y $|y| \leq |y|$, con lo cual

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad \text{e} \quad -|y| \leq y \leq |y|.$$

Sumando miembro a miembro, obtenemos

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

de donde,

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

La propiedad (6) es consecuencia de la desigualdad triangular, en efecto: $x = x - y + y$,

luego $|x| \leq |x - y| + |y|$, de donde

$$(1.1) \quad |x| - |y| \leq |x - y|.$$

Intercambiando x e y resulta

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$$

y multiplicando por -1

$$(1.2) \quad -|y| + |x| \geq -|x - y|.$$

De las ecuaciones (1.1) y (1.2) se obtiene

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$$

que es equivalente a

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

□

1.5. Ejercicios.

- (1) Convertir las siguientes expresiones decimales en fracciones

$0.\widehat{12}$

$3.2\widehat{7}$

$1.\widehat{45}$

- (2) ¿Pueden dos decimales diferentes representar el mismo número?

¿Qué número representa $0.\widehat{9}$?

- (3) En cada caso ordenar de menor a mayor según corresponda

(a) π 3.14 $3.\widehat{14}$ $\frac{1}{4}$ 0.25

(b) $\sqrt{2}$ $1.\widehat{41}$ $-\frac{2}{5}$ 1.41 $\sqrt{4}$

(c) 4.17 $e + 2$ $4.\widehat{17}$ $-4.\widehat{99}$ -5

- (4) Determinar cuál es la opción correcta. Justificar.

(a) $\forall a \in \mathbb{R} : a^2 a^3 a$ es igual a:

i) a^5 ii) $6a$ iii) a^6 iv) $6a^6$

(b) $\forall a \in \mathbb{R}$ y $\forall b \in \mathbb{R} : (a^2 b^3)^5$ es igual a:

i) $5a^2 5b^3$ ii) ab^5 iii) $(ab)^{25}$ iv) $a^{10} b^{15}$

(c) $\forall a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ entonces $(a^2) : (a^{\frac{1}{3}})$ es igual a:

i) $\sqrt[3]{a^2}$ ii) $a^{\frac{7}{3}}$ iii) $\sqrt[3]{a^5}$ iv) $a^{\frac{3}{5}}$

(d) El resultado de $\left(2^{-1} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{8}}$ es :

i) 2 ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ iii) $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ iv) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

(e) El resultado de $\left(\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\right)^{-1}$ es :

i) $(2^3)^2$ ii) 2^{-6} iii) 2^5 iv) $\left(\frac{1}{2}\right)^6$

(f) La expresión equivalente a $\left[\left(\frac{1}{25}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{3}}$ es:

i) $5^{\frac{4}{3}}$ ii) $25^{\frac{4}{3}}$ iii) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{4}{3}}$ iv) $\sqrt[3]{25}$

(g) $\forall a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ es $(a^{-1}a)^{10}$ igual a :

i) a^{11} ii) a^{-20} iii) 1 iv) 0

(h) La expresión racionalizada de $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}$ es :

i) $-\sqrt{5}+\sqrt{6}$ ii) $\sqrt{5}-\sqrt{6}$ iii) $-\sqrt{5}-\sqrt{6}$ iv) $\sqrt{5}+\sqrt{6}$

(i) Sea $a \in \mathbb{Q}$, entonces la expresión $\sqrt{\frac{1}{a}}\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$ es igual a:

i) $\sqrt[4]{a}$ ii) a iii) $\frac{1}{\sqrt[6]{a^5}}$ iv) $\frac{\sqrt[6]{a^5}}{a}$

(5) Obtener el conjunto de todos números x que satisfacen las condiciones dadas, expresándolos como intervalos o unión de intervalos

a) $x \geq 0$ y $x \leq 5$ c) $x > -5$ o $x < -6$ e) $x > -2$
 b) $x < 2$ y $x \geq 3$ d) $x \leq 1$ f) $x < 4$ o $x \geq 2$

(6) Resuelva las inecuaciones dadas, expresando las solución como intervalo o unión de intervalos

a) $-2x > 4$

e) $3(2 - x) < 2(3 + x)$

b) $3x + 5 \leq 8$

f) $\frac{1}{2 - x} < 3$

c) $5x - 3 \leq 7 - 3x$

g) $\frac{x + 1}{x} \geq 2$

d) $\frac{6 - x}{4} \geq \frac{3x - 4}{2}$

h) $\frac{2}{x - 4} + 1 < 5$

(7) Resolver las siguientes ecuaciones

a) $|x| = 3$

c) $|2t + 5| = 4$

e) $|8 - 3s| = 9$

b) $|x - 3| = 7$

d) $|1 - t| = 1$

f) $\left| \frac{s}{2} - 1 \right| = 1$

(8) Describir los intervalos definidos por las inecuaciones dadas.

a) $|x| < 2$

e) $|3x - 7| \leq 3$

b) $|x| \leq 2$

f) $\left| \frac{s}{2} - 1 \right| \leq 1$

c) $|s - 1| \leq 2$

g) $|5 - x| \geq 3$

d) $|t + 2| < 1$

h) $\left| 3 - \frac{s}{2} \right| \leq 3$

(9) Expresar la solución de las siguientes inecuaciones como intervalos o unión de intervalos cuando esto sea posible

a) $|x + 1| = |x - 3|$

b) $|x - 3| \leq 2|x|$

(10) No caiga en la trampa de aceptar que $|-a| = a$. ¿Cuándo es cierta y cuándo es falsa?.

(11) Resuelva la ecuación

$$|x - 1| = 1 - x.$$

(12) Mostrar ejemplos en los cuales la siguiente desigualdad es estricta

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Plano Cartesiano, Incrementos, Distancias y Ecuación de la Recta.

Proporcionalidad y Porcentajes.

2.1. El plano cartesiano. La posición de un punto P del plano se puede medir con respecto a dos rectas reales perpendiculares entre sí que se cruzan en el origen. Estas rectas se denominan ejes coordenados del plano cartesiano. Generalmente denominaremos eje de las abscisas (o eje x) a una de esas rectas y la dibujaremos horizontalmente, con los números x creciendo hacia la derecha. La otra recta se denominará eje de las ordenadas (o eje y), y la dibujaremos verticalmente, con los números y creciendo hacia arriba. Estas rectas se denominan ejes coordenados. El punto de intersección de los mismos (es decir, el punto donde $x = y = 0$) se denomina origen, y se representa frecuentemente mediante la letra O .

Sea P un punto cualquiera del plano. Dibujemos una recta L perpendicular al eje x que pasa por el punto P . El valor de x donde la recta corta al eje x , se denomina coordenada x del punto P . Análogamente, la coordenada y de P es el valor de y donde la recta perpendicular al eje y que pasa por P corta al mismo. El par ordenado (x, y) identifica la posición del punto P dado.

Los ejes de coordenadas dividen el plano en cuatro regiones denominadas cuadrantes. Los cuadrantes se numeran del I al IV . El primer cuadrante es el superior derecho. Las dos coordenadas de los puntos pertenecientes al primer cuadrante son números positivos. Los números pertenecientes al cuadrante III tienen ambas coordenadas negativas. En el cuadrante II sólo la coordenada y es positiva, y en el cuadrante IV sólo la coordenada x es positiva.

2.2. Incrementos y distancias. Cuando una partícula se mueve de un punto al otro, los cambios netos en sus coordenadas se denominan incrementos. Se calculan restando

las coordenadas del punto inicial de las coordenadas del punto final. Un incremento en una variable es el cambio neto en los valores de dicha variable. Si x cambia de x_1 a x_2 , entonces el incremento de x es $\Delta x = x_2 - x_1$.

Ejemplo 2.1. : Calcular los incrementos de las coordenadas de una partícula que se desplaza desde $A = (3, -3)$ hasta $B = (-1, 2)$.

Solución. los incrementos son

$$\Delta x = -1 - 3 = -4 \text{ y } \Delta y = 2 - (-3) = 5$$

□

2.3. Distancia entre dos puntos. Sean $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ dos puntos del plano, el segmento PQ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden horizontal y verticalmente

$$|\Delta x| = |x_2 - x_1| \text{ y } |\Delta y| = |y_2 - y_1|,$$

respectivamente. Por el teorema de Pitágoras, la longitud de PQ es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las dos longitudes anteriores o sea:

$$D = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ejemplo 2.2. : La distancia desde $A = (3, -3)$ hasta $B = (-1, 2)$ es

$$\sqrt{(-1 - 3)^2 + (2 - (-3))^2} = \sqrt{(-4)^2 + (5)^2} = \sqrt{41}$$

Nótese que la distancia desde el origen hasta un punto $P = (x, y)$ es

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2.4. Gráficas. La gráfica de una ecuación (o inecuación) que relaciona las variables x e y es el conjunto de todos los puntos $P = (x, y)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (o inecuación).

Ejemplo 2.3. La ecuación $x^2 + y^2 = 4$ representa los puntos $P = (x, y)$ cuya distancia al origen es $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4} = 2$. Esos puntos están sobre una circunferencia de radio 2 centrada en el origen. Esta circunferencia es la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

Ejemplo 2.4. Los puntos del plano cuyas coordenadas (x, y) satisfacen la inecuación $x^2 + y^2 \leq 4$, están a distancia ≤ 2 del origen. La gráfica de esta inecuación, por tanto, es el círculo de radio 2 centrado en el origen.

Ejemplo 2.5. Los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2$ se encuentran sobre una curva que se denomina parábola. Algunos de sus puntos son: $(0, 0), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4)$, ya que ellos satisfacen la ecuación $y = x^2$.

2.5. Rectas. Dados dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ denominaremos a los incrementos $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$ desplazamiento y elevación, respectivamente, entre P_1 y P_2 . Estos dos puntos determinan una recta. Notar que tanto el desplazamiento como la elevación son con signo, o sea pueden ser positivos o negativos. Más explícitamente, desde un punto de vista gráfico, un desplazamiento negativo significa un corrimiento hacia la izquierda y una elevación negativa un corrimiento hacia abajo.

La recta tiene la propiedad que la relación

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

toma el mismo valor para dos puntos cualesquiera de la misma. Esta constante m se denomina **pendiente** de la recta. En otras palabras lo que indica la pendiente es cuanto

nos elevamos cuando nos desplazamos una unidad de longitud en el sentido positivo del eje x .

La pendiente de una recta nos indica la dirección de crecimiento (o decrecimiento). Una recta de pendiente positiva va creciendo hacia la derecha, mientras que una recta con pendiente negativa va decreciendo hacia la derecha. Cuanto mayor sea el valor absoluto de la pendiente más pronunciado será el crecimiento o decrecimiento de la recta.

Vale destacar que si $\Delta y = 0$ la pendiente es cero (recta horizontal), ya que al desplazarse sobre el eje x no hay elevación en el eje y . En tanto que si $\Delta x = 0$, se dice que la pendiente está indefinida (recta vertical), ya que no hay desplazamiento en x .

La dirección de una recta se puede medir también mediante un ángulo. La inclinación de una recta se define como el mínimo ángulo, medido en el sentido contrario a las agujas del reloj, formado entre la dirección positiva del eje x y la recta. La inclinación de una recta horizontal tiene ángulo cero y la inclinación de una recta vertical tiene un ángulo de $\frac{\pi}{2}$, o sea 90 grados.

Las rectas paralelas tienen la misma inclinación. Si no son verticales deberán tener, la misma pendiente. Lo contrario también es cierto: dos rectas con la misma pendiente tienen la misma inclinación y, en consecuencia son paralelas.

Si dos rectas no verticales L_1 y L_2 son perpendiculares, sus pendientes m_1 y m_2 cumplen la relación $m_1 m_2 = -1$, luego la pendiente de una de ellas es el *inverso cambiado de signo* de la pendiente de la otra

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

2.6. Ecuación de la recta. Las rectas son figuras particularmente simples y sus ecuaciones también son simples. Todos los puntos de una recta vertical que pasa por el punto $(a, 0)$ en el eje x , tienen sus coordenadas x igual a a . Por lo tanto, la ecuación de esa

recta es $x = a$. Análogamente, $y = b$ es la ecuación de la recta horizontal que corta al eje y en $(0, b)$.

Ejemplo 2.6. : Las ecuaciones de las rectas horizontal y vertical que pasan por el punto $(3, 1)$ son $y = 1$ y $x = 3$, respectivamente.

Para escribir la ecuación de una recta no vertical L , es suficiente conocer su pendiente m y las coordenadas de un punto P de dicha recta, sean estas (x_1, y_1) . Si $Q = (x, y)$ es otro punto cualquiera de la recta, entonces

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

y en consecuencia

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

o

$$y = m(x - x_1) + y_1,$$

que es la ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m .

Ejemplo 2.7. Obtener la ecuación de la recta de pendiente -2 que pasa por el punto $(1, 4)$.

Sustituyendo en la ecuación dada anteriormente nos queda

$$y = -2(x - 1) + 4$$

o

$$y = -2x + 6.$$

Ejemplo 2.8. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1, -1)$ y $(3, 5)$.

Solución. La pendiente de la recta en cuestión es $m = \frac{5 - (-1)}{3 - 1} = 3$. Podemos utilizar ahora esta pendiente con uno cualquiera de los dos puntos para obtener la ecuación de la recta. Si se usa el punto $(1, -1)$, por ejemplo, se obtiene

$$y = 3(x - 1) - 1 \text{ que simplificada queda } y = 3x - 4$$

y si se usa el punto $(3, 5)$ se obtiene

$$y = 3(x - 3) + 5 \text{ que simplificada queda } y = 3x - 4.$$

□

La coordenada y del punto donde una recta no vertical corta al eje y se denomina **ordenada al origen**. Análogamente, la **abscisa al origen** de una recta no horizontal es la coordenada x del punto donde la recta corta al eje x . Una recta de pendiente m y ordenada al origen b pasa por el punto $(0, b)$, por lo cual su ecuación es

$$y = m(x - 0) + b$$

o más simplemente

$$y = mx + b.$$

Esta ecuación se denomina **ecuación explícita de la recta** de pendiente m y ordenada al origen b .

Ejemplo 2.9. Calcular la pendiente, ordenada al origen y abscisa al origen de la recta de ecuación $8x + 5y = 20$.

Solución. Despejando y de la ecuación obtenemos

$$y = \frac{20 - 8x}{5} = -\frac{8}{5}x + 4.$$

Comparando la expresión anterior con la forma explícita $y = mx + b$, puede verse que la pendiente es $m = -\frac{8}{5}$ y la ordenada al origen es $b = 4$.

Para calcular la abscisa al origen se hace $y = 0$ en la ecuación de la recta y se despeja x , con lo que se obtiene $8x = 20$ o $x = \frac{5}{2}$. \square

2.7. Porcentajes. Comenzaremos con un ejemplo.

Ejemplo 2.10. La cría de la jirafa ha crecido 10 cm en el último mes, mientras que la cría del ratón ha crecido 4 mm. La jirafa medía 2.13 m y el ratón 80 mm. ¿Cuál ha crecido más en el último mes?

Solución. Como miden distinto, el crecimiento de la jirafa y del ratón se deben comparar porcentualmente, a saber

$$\left. \begin{array}{l} \text{La jirafa crece } \frac{10}{213} = 0.046 = 4.6\% \\ \text{El Ratón crece } \frac{4}{80} = 0.050 = 5.0\% \end{array} \right\}$$

Por lo tanto el ratón ha crecido más que la jirafa. \square

Para comparar proporciones dadas con fracciones de distinto denominador, expresamos las proporcionalidades en tantos por uno o en porcentajes.

Notar que si q es una cierta cantidad, su $\alpha\%$ es $\frac{\alpha}{100} q$. Por ejemplo,

$$\text{el } 5\% \text{ de } q \text{ es } .05 q$$

y

$$\text{el } 113\% \text{ de } q \text{ es } 1.13 q.$$

Ejemplo 2.11. Todos los artículos que están a la venta en un mercado tienen un descuento del 15 %. ¿Cuál será el precio final de cada artículo?

Solución. Para responder este problema es conveniente obtener una fórmula para hacer más rápidamente los cálculos.

Es conveniente identificar primeramente las variables presentes, a saber.

y : descuento

x : precio inicial del artículo

z : precio final del artículo

Es posible calcular el descuento de cada artículo como

$$(2.1) \quad y = \frac{15}{100}x \text{ o más simplemente } y = 0.15x.$$

Ahora bien, para calcular el precio final, es conveniente hacer el siguiente razonamiento:

$$z = x - y \quad \text{precio final} = \text{precio inicial} - \text{descuento}$$

$$z = x - 0.15x \quad \text{reemplazando } y \text{ por (2.1)}$$

$$z = (1 - 0.15)x \quad \text{factor común } x$$

$$z = 0.85x.$$

□

Ejemplo 2.12. Un comerciante quiere agregar el I.V.A (21%) a todos sus artículos, para esto precisa una fórmula para agilizar los cálculos. ¿Cuál sería conveniente sugerirle?

Solución. Identificando las variables en juego, resulta

y : aumento

x : precio inicial

z : precio final

Luego

$$(2.2) \quad y = 0.21x.$$

Y en consecuencia

$$z = x + y \quad \text{precio final} = \text{precio inicial} + \text{aumento}$$

$$z = x + 0.21x \quad \text{reemplazando } y \text{ por (2.2)}$$

$$z = (1 + 0.21)x \quad \text{factor común } x$$

$$z = 1.21x$$

□

En síntesis:

- Para calcular un descuento se puede directamente multiplicar las cantidades que nos interesan por la unidad *menos* el tanto por uno.
- Para calcular un incremento se puede directamente multiplicar las cantidades que nos interesan por, la unidad *más* el tanto por uno.

Ejemplo 2.13. Una computadora que el año pasado costaba \$6000, sufrió un aumento este año del 20% y luego por una promoción fue rebajada un 15%. ¿Cuál es el precio actual p_a ?

Solución. Planteemos la situación:

$$\text{Aumento un 20\%} \longrightarrow \text{multiplicar por } (1 + 0,2) = 1,2$$

$$\text{Rebaja un 15\%} \longrightarrow \text{multiplicar por } (1 - 0,15) = 0,85$$

Entonces resulta:

$$p_a = 6000 \times 1,2 \times 0,85 = 6120.$$

□

Ejemplo 2.14. A una computadora la rebajaron un 15% y luego la aumentaron un 20% y actualmente cuesta \$ 10000. ¿Cuál era su precio original?

Solución. En este ejemplo, el dato es el precio final y se quiere calcular el precio inicial.

Si llamamos x al precio inicial resulta

$$10000 = x \times 0.85 \times 1.2$$

$$10000 = x \times 1.02$$

$$\frac{10000}{1.02} = x$$

$$9803,92 = x$$

□

2.8. Ejercicios.

- (1) Calcular los incrementos Δx y Δy de las siguientes coordenadas y la distancia desde A hasta B (graficar cada caso):

i) $A = (0, 3)$ $B = (4, 0)$

ii) $A = (-1, 2)$ $B = (4, -10)$

iii) $A = (3, 2)$ $B = (-1, -2)$

iv) $A = (.5, 3)$ $B = (2, 3)$

- (2) Una partícula inicia un movimiento en el punto $A = (-2, 3)$ y el cambio en sus coordenadas es de $\Delta x = 4$ y $\Delta y = -7$. Calcular su nueva posición.

- (3) Una partícula llega al punto $(-2, 2)$, después que sus coordenadas tengan un cambio de $\Delta x = -5$ y $\Delta y = 1$, cuál fue su posición original?

- (4) Dados los puntos del plano:

i) $A = \left(-2, \frac{5}{3}\right)$

ii) $A = \left(\sqrt{2}, -\frac{1}{3}\right)$

iii) $A = (3, e)$

iv) $A = \left(\pi, \frac{2}{5}\right),$

calcular

- (a) La recta vertical que pasa por ellos.

- (b) La recta horizontal que pasa por ellos.

- (5) Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto P y tiene pendiente m , donde:

i) $P = (-1, 1)$ $m = 1$

ii) $P = (-2, 2)$ $m = \frac{1}{2}$

iii) $P = (0, b)$ $m = 2$

iv) $P = (a, 0)$ $m = -2$

Graficar el punto en cuestión y la recta en cada caso.

(6) Indicar si el punto P está por encima, por debajo o sobre la recta dada.

i) $P = (2, 1)$ $2x + 3y = 6$

ii) $P = (3, -1)$ $x - 4y = 7$

iii) $P = (0, e)$ $2x + 3y = 3e$

iv) $P = (\pi - 4, 5)$ $x + y = \pi - 2$

(7) Escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados.

i) $(0, 0), (2, 3)$

ii) $(-2, 1), (2, -2)$

iii) $(4, 1), (-2, 3)$

iv) $(-2, 0), (0, 2)$

v) $(e - 1, 1), (-1, 2)$

vi) $(-2, \sqrt{3}), (1, 0)$

(8) Obtener las ecuaciones de las rectas que pasan por P y

(a) Son paralelas a las rectas dadas

(b) Son perpendiculares a las rectas dadas.

i) $P = (2, 1)$ $y = x + 2$

ii) $P = (-2, 2)$ $2x + y = 4$

iii) $P = (\sqrt{2}, 0)$ $y = \sqrt{2}x + 1$

iv) $P = (0, \pi)$ $2x + y = \pi + 5$

(9) Calcule el punto de intersección de las rectas

i) $3x - 4y = -6$ y $2x - 3y = -13$

ii) $2x + y = 8$ y $2x - 3y = 1$

(10) Una recta pasa por los puntos $(-2, 5)$ y $(k, 1)$ y su abscisa al origen vale 3. Calcular k . Graficar.

(11) Demostrar, calculando las longitudes de sus tres lados que el triángulo que tiene como vértice los puntos $A = (2, 1)$ $B = (6, 4)$ $C = (5, -3)$ es isósceles.

- (12) Demostrar, calculando las longitudes de sus tres lados que el triángulo que tiene como vértice los puntos $A = (0, 0)$ $B = (1, \pm\sqrt{3})$ $C = (2, 0)$ es equilátero.
- (13) Demostrar que $A = (2, -1)$ $B = (1, 3)$ $C = (-3, 2)$ son tres vértices de un cuadrado y calcular el cuarto vértice.
- (14) Para qué valores de k la recta $2x + ky = 3$ es perpendicular a la recta $4x + y = 1$.
Para qué valores de k son ambas rectas paralelas?
- (15) Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 2)$ y por el punto de intersección de las rectas $x + 2y = 3$ y $2x - 3y = -1$.
- (16) Un abrigo costaba \$ 1450 en temporada. Durante la liquidación valía \$ 1131.
¿Qué porcentaje de rebaja sufrió?
- (17) Un auto de segunda mano costaba Us\$8600 y paso a costar Us\$8200. ¿De qué porcentaje ha sido la rebaja?
- (18) Un comerciante compró un objeto a 120 pesos. Al ponerlo a la venta incrementó su precio en un 30 % sobre el precio al que lo compró. Posteriormente lo bajo un 20% sobre el precio de venta del público. ¿Qué *porcentaje* de beneficio tuvo?
¿Cuál fue el precio de venta?
- (19) En un prolífero país, el aumento de población es de un 5% anual. ¿En qué porcentaje habrá aumentado la población al cabo de 10 aos?
- (20) Un fabricante mayorista vende a un comerciante minorista un determinado producto a \$300 la unidad. El fabricante ofrece colocar una etiqueta de precio a cada producto, para conveniencia del minorista en períodos de estabilidad económica. Se necesita conocer el precio que se debe imprimir en la etiqueta para que el comerciante pueda reducir su precio en un 20%, en una oferta promocional, y obtener una utilidad del 15% sobre el costo del producto.

-
- (21) Si un comprador adquiere un determinado producto a $\$P$ y sabe que el comerciante recarga un $\alpha\%$ como margen de venta, se desea saber a qué valor el comerciante adquirió el producto en los siguientes casos:
- (a) $P = 1000, \alpha = 1, 5, 10$
 - (b) $P = 1100, \alpha = 1, 5, 10$
- (22) Una farmacia atiende a personas afiliadas a una obra social que paga un 50% del valor de los medicamentos, quedando el resto a cargo del afiliado. Si la farmacia hace un 10% de descuento extra sobre lo que el cliente paga, ¿cuál es el porcentaje del valor del medicamento que pagará el afiliado?
- (23) En una universidad una orientación de Ingeniería tiene 54 materias en total. En la grilla de evaluación de un concurso a Asistente Alumno de se cuentan como antecedente de formación académica del candidato 0.40 puntos por cada 1% de la totalidad de la carrera. Si un estudiante tiene 25 materias aprobadas, ¿cuántos puntos le corresponden como antecedente de formación académica?

3. Funciones y sus Gráficas.

3.1. Definiciones de función, dominio e imagen. El área de un círculo depende de su radio. El interés de una inversión depende del tiempo que se mantenga. La población humana del mundo depende del tiempo. El costo depende de la cantidad de unidades que se produzca.

Siempre que una cantidad dependa de otra, se dice que la primera es función de la segunda.

Ejemplo 3.1. El área A de un círculo depende de su radio r de acuerdo a la fórmula

$$A = \pi r^2$$

por lo que podemos decir que el área es una función del radio. La fórmula es una *regla* que indica como calcular un *único* valor de salida del área A dependiendo del valor del radio r . El conjunto de todos los posibles valores del radio r se denomina **dominio** de la función. El conjunto de todos los posibles valores del área A se denomina **imagen** de la función.

En términos generales podemos decir: Una **función** f es una *regla* que asigna a cada elemento x de un conjunto A determinado exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B .

Por lo común, consideraremos funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números (frecuentemente reales). El conjunto A se llama **dominio**. El número $f(x)$ es el valor **de f en x** y se lee " f de x ". La **imagen** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ conforme x varía en todo el dominio A . Un símbolo que represente un elemento arbitrario en el dominio de una función f se llama **variable independiente**, en tanto uno que represente un elemento en la imagen de f se llama

variable dependiente. En el ejemplo 3.1, r es la variable independiente y si $A(r)$ es la variable dependiente, mientras que A es la función.

Resulta útil concebir una función como una máquina. Si x está en el dominio de la función f , entonces x entra en la máquina, se acepta como entrada (o input) y la máquina produce una salida (o output) $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. De este modo podemos concebir, el dominio como todas las posibles entradas aceptadas por la máquina y la imagen como todas las posibles salidas. Las funciones preprogramadas de una calculadora son buenos ejemplos de esto. Por ejemplo, la tecla \sqrt{x} . Si oprimimos la tecla \sqrt{x} en la pantalla y luego intentamos introducir un $x < 0$, la calculadora nos emitirá un error, porque esta no es una entrada aceptable, ya que los $x < 0$ no están dentro del dominio de f . En cambio, si introducimos un $x \geq 0$, entonces aparecerá una *aproximación* para \sqrt{x} en la pantalla, este número estará en el conjunto imagen.

Hay varias formas de representar simbólicamente una función.

Ejemplo 3.2. La función cuadrática de un número, que transforma un número real x en su cuadrado x^2 , se puede indicar :

- (1) Mediante una fórmula como $y = x^2$, que utiliza una variable dependiente y para indicar el valor de la función.
- (2) Mediante una fórmula $f(x) = x^2$, que define un símbolo de función f para indicar la función.

En rigor para denotar una función deberíamos utilizar f en vez de $f(x)$, ya que esto último indica el valor de la función en el punto x . Sin embargo, como se trata de un uso común, a menudo indicaremos la función como $f(x)$ para nombrar explícitamente la variable de la que depende f .

Ejemplo 3.3. Sea f una función definida para todos los números reales t como

$$f(t) = 2t + 3.$$

Calcular los valores de salida de f que corresponden a los valores de entrada de $0, 2, x + 2$ y $f(2)$.

Solución. En cada caso se sustituye t en la definición de f por el valor de entrada

$$f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 0 + 3 = 3$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$f(x + 2) = 2 \cdot (x + 2) + 3 = 2x + 7$$

$$f(f(2)) = 2 \cdot f(2) + 3 = 2 \cdot 7 + 3 = 14 + 3 = 17.$$

□

Convenio para el dominio: Una función no queda bien definida hasta que se especifica su dominio. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ definida para todos los números reales $x \geq 0$, es diferente de la función $g(x) = x^2$ definida para todos los x reales, porque su dominio es diferente.

Cuando el dominio de una función no se indica explícitamente, asumiremos que este el mayor posible.

En la práctica, es generalmente sencillo determinar el dominio de una función $f(x)$ dada por una fórmula explícita.

Ejemplo 3.4. La función raíz cuadrada. El dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es el intervalo $[0, +\infty)$, ya que los números negativos no admiten una raíz cuadrada real. La función **raíz cuadrada** \sqrt{x} siempre indica la raíz *no negativa* de x .

Ejemplo 3.5. El dominio de $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ esta formado por todos los números reales, excepto $x = 2$ y $x = -2$. Esto se puede expresar como *unión* de intervalos: $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$. O como $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, donde \setminus significa la diferencia entre conjuntos, o sea en este caso los elementos que estan en \mathbb{R} y que no estan en $\{-2, 2\}$.

Ejemplo 3.6. El dominio de función $S(t) = \sqrt{1 - t^2}$ está formado por todos los números t tales que $1 - t^2 \geq 0$. Por lo tanto debe cumplirse que $t^2 \leq 1$, con lo cual $|t| \leq 1$ o equivalentemente $-1 \leq t \leq 1$. El dominio es entonces el intervalo $[-1, 1]$.

3.2. Gráficos de funciones. El método más común para visualizar un función es mediante su gráfica. Si f es una función con domino A , entonces su gráfica es el conjunto de las pares ordenados

$$\text{graf}(f) = \{(x, f(x)) / x \in A\}.$$

Observese que son pares *entrada-salida*. En otras palabras la gráfica de f consta de todos los puntos (x, y) en el plano de coordenadas tal que $y = f(x)$ y x está en el dominio de f . Notar que dada la condición de función para f , dado un $x \in A$, existe un único par ordenado en $\text{graf}(f)$ con primera coordenada x , en otras palabras cada x en el dominio genera un único output.

Desplazamientos: Para desplazar una gráfica c unidades a la derecha o a la izquierda basta sustituir en la ecuación x por $x - c$.

Si $c < 0$, el desplazamiento será a la izquierda.

Si $c > 0$, el desplazamiento será a la derecha

Para desplazar una gráfica c unidades hacia arriba o hacia abajo basta sustituir en la ecuación y por $y + c$.

Si $c < 0$, el desplazamiento será hacia abajo.

Si $c > 0$, el desplazamiento será hacia arriba.

Ejemplo 3.7. La gráfica de $y = (x - 3)^2$ es la parábola $y = x^2$ desplazada 3 unidades a la derecha. La gráfica de $y = (x + 1)^2$ es la de la parábola $y = x^2$ desplazada en una unidad a la izquierda (véase FIGURA 3).

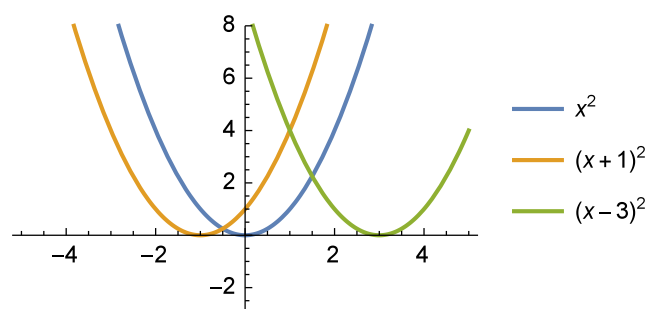


FIGURA 3. Corrimientos horizontales de x^2 .

Ejemplo 3.8. La gráfica de $y = x^2 + 1$ o $(y - 1 = x^2)$ es la de la parábola $y = x^2$ desplazada una unidad hacia arriba. La gráfica de $y = x^2 - 3$ o $(y - (-3) = x^2)$ es la parábola $y = x^2$ desplazada 3 unidades hacia abajo (véase FIGURA 4).

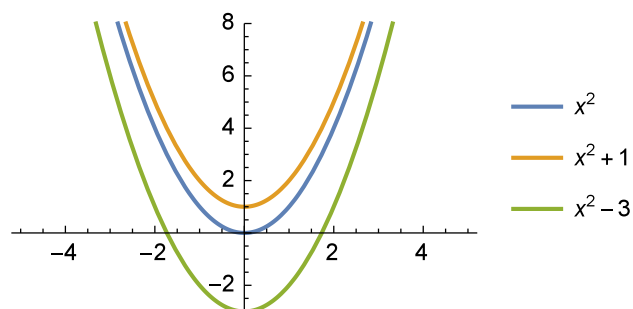


FIGURA 4. Desplazamientos verticales de x^2 .

Ciertas funciones aparecen frecuentemente en las aplicaciones, por lo que es conveniente familiarizarse con sus gráficas. Algunas de ellas se encuentran en la FIGURA 5.

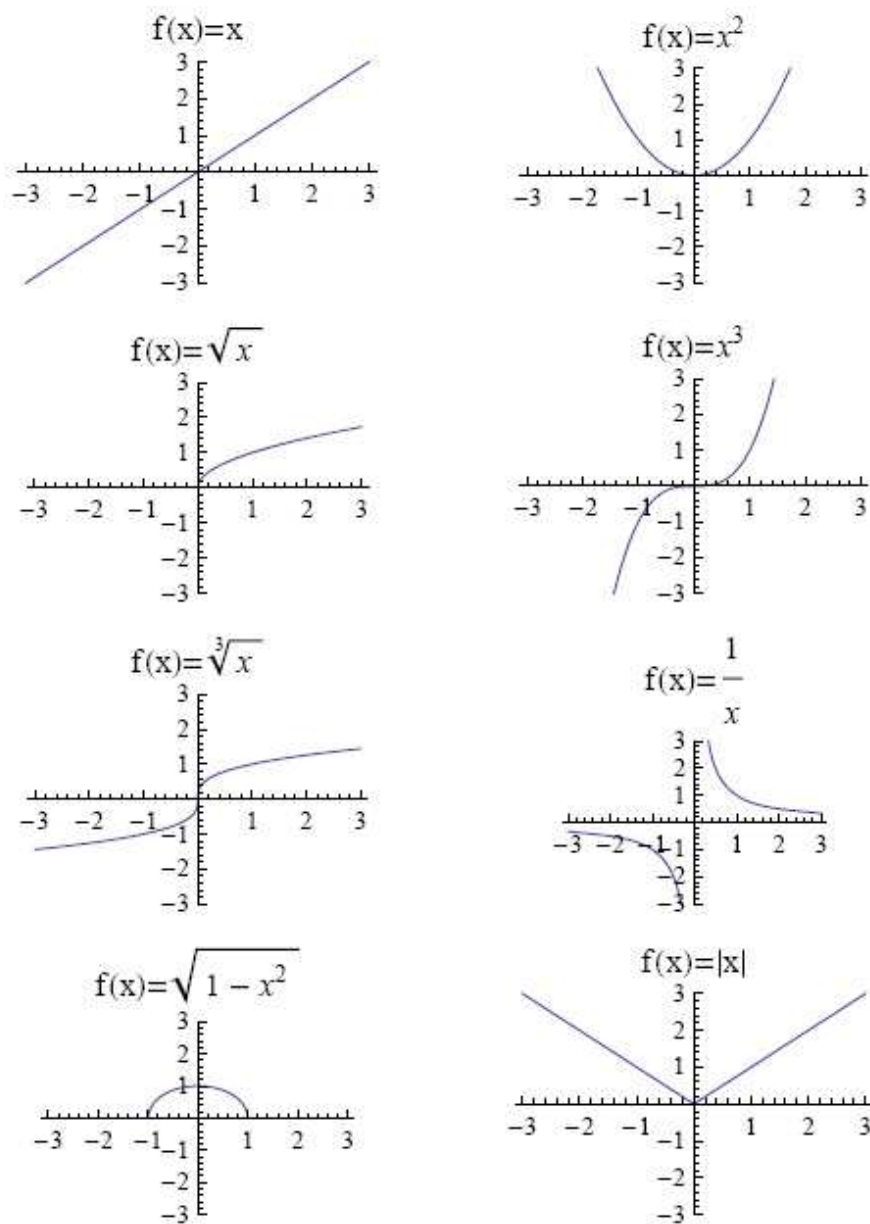


FIGURA 5. Algunas funciones

Ejemplo 3.9. Dibujar la gráfica de la función $y = 1 + \sqrt{x - 4}$

Solución. Se trata de la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ en la FIGURA 5, desplazada 4 unidades a la derecha (debido a que x se sustituye por $x - 4$) y una unidad hacia arriba (véase la FIGURA 6). \square

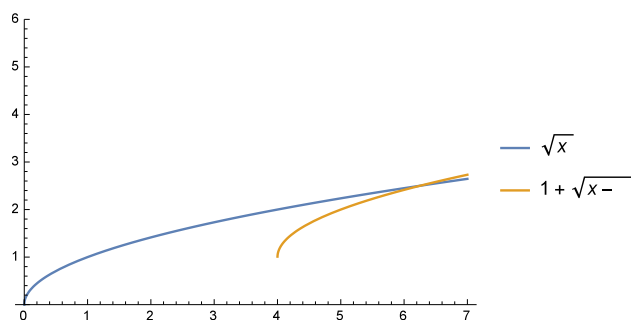


FIGURA 6. Desplazamientos verticales y horizontales de la raíz cuadrada.

Ejemplo 3.10. Dibuje la gráfica de $f(x) = \frac{2-x}{x-1}$.

Solución. No es inmediato observar que la gráfica es una versión desplazada de una gráfica conocida. Para ver que esto es así hacemos los siguientes cálculos

$$\frac{2-x}{x-1} = \frac{-x+1+1}{x-1} = \frac{-(x-1)+1}{x-1} = -1 + \frac{1}{x-1}.$$

Por lo tanto, la gráfica es la de la función $\frac{1}{x}$ de la FIGURA 5 desplazada una unidad a la derecha y una unidad hacia abajo (ver FIGURA 7). \square

Reflexiones especiales: Sea f una función con dominio $A \subseteq \mathbb{R}$.

- a:** La función definida por $g(x) = f(-x)$ tiene dominio $-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$ y como gráfica la reflejada respecto al eje y de la gráfica de f .
- b:** La función definida por $h(x) = -f(x)$ tiene dominio A y como gráfica la reflejada respecto al eje x de la gráfica de f .

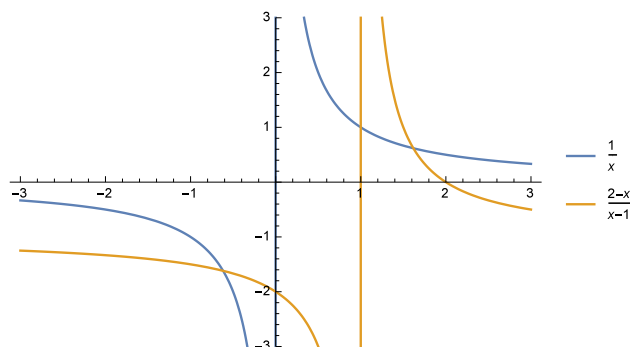


FIGURA 7. Desplazamientos horizontales y verticales de $\frac{1}{x}$.

c: La función definida por $r(x) = -f(-x)$ tiene dominio $-A$ y como gráfica la reflejada respecto al origen de la gráfica de f .

Ejemplo 3.11. Describir y dibujar la gráfica de $y(x) = \sqrt{2-x} - 3$.

Solución. Notemos que

$$\sqrt{2-x} - 3 = \sqrt{-x+2} - 3 = \sqrt{-1(x-2)} - 3.$$

Por lo tanto, la gráfica es la de $f(x) = \sqrt{x}$ (ver FIGURA 5), desplazada en primer lugar 2 unidades hacia la derecha, luego simetrizada respecto a la recta $x = 2$ (reflexión) y posteriormente desplazada 3 unidades para abajo (ver FIGURA 8).

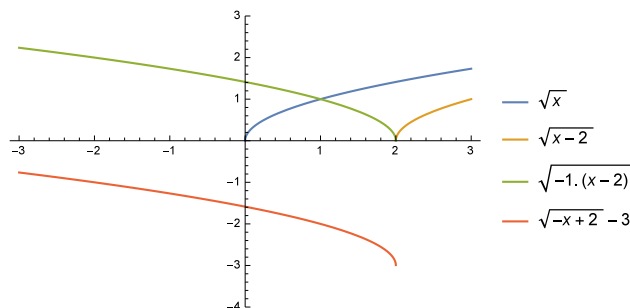


FIGURA 8. Reflexiones y corrimientos de funciones.

□

Ejemplo 3.12. Graficar la función $f(x) = 2 - |x + 3|$.

Solución. Aquí tomaremos la gráfica de la función $f(x) = |x|$ (ver FIGURA 5). Primero obtendremos la gráfica de $f(x) = -|x|$, haciendo una reflexión con respecto al eje x , luego la desplazamos 3 unidades a la izquierda obteniendo el gráfico de $f(x) = -|x + 3|$ y por último la desplazamos 2 unidades hacia arriba obteniendo el gráfico buscado (ver FIGURA 9).

□

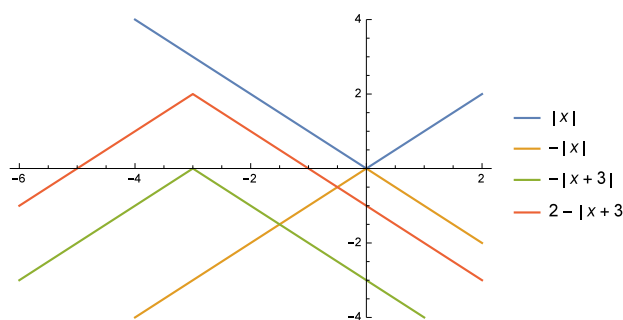


FIGURA 9. Reflexiones y corrimientos del módulo.

Definición 3.13. Una función f se dice par (respectivamente impar) si su dominio es simétrico con respecto al 0 y $f(-x) = f(x)$ (respectivamente $f(-x) = -f(x)$) $\forall x$ en su dominio.

Notar que si f es par su gráfico es simétrico con respecto al eje de las ordenadas, en tanto si es impar es simétrico respecto al origen de coordenadas. Ejemplos de funciones pares con dominio \mathbb{R} son el valor absoluto, $f(x) = x^2$ y en general $f(x) = x^n$ con n par. Y ejemplos de funciones impares con dominio \mathbb{R} son $f(x) = x^n$ con n impar, **particularmente importante** es el caso $n = 1$, la llamada **función identidad**, cuyo

gráfico es la bisectriz del primer y tercer cuadrante del plano cartesiano (ver el primer gráfico de la FIGURA 5).

3.3. Combinación de funciones para crear otras nuevas. Las funciones se pueden combinar de diversas formas para crear otras nuevas. En esta sección examinaremos las combinaciones que se obtienen

- (1) mediante operaciones algebraicas: sumando, restando, multiplicando y dividiendo funciones
- (2) mediante composición: es decir, construyendo funciones de funciones.

Sumas, diferencias, productos, cocientes y múltiplos. Como los números, las funciones se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (excepto donde el denominador es cero), para producir nuevas funciones.

Definición 3.14. Sean f, g funciones con dominio A . Para todo $x \in A$, las funciones $f + g, f - g, fg, f/g$ se definen mediante las fórmulas

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\(f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\\frac{f}{g}(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ si } g(x) \neq 0.\end{aligned}$$

Un caso especial en la regla para multiplicar funciones es el de la multiplicación de funciones por constantes. Si $c \in \mathbb{R}$, entonces la función

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x) \forall x \in A.$$

Ejemplo 3.15. Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$, con dominios $[0, +\infty)$ y $(-\infty, 1]$, respetivamente. Luego,

| función | evaluación en x | dominio |
|---------|---|----------------|
| f | $f(x) = \sqrt{x}$ | $[0, +\infty)$ |
| g | $g(x) = \sqrt{1-x}$ | $(-\infty, 1]$ |
| $3f$ | $(3f)(x) = 3\sqrt{x}$ | $[0, +\infty)$ |
| $f + g$ | $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ | $[0, 1]$ |
| $f - g$ | $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$ | $[0, 1]$ |
| fg | $(fg)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x(1-x)}$ | $[0, 1]$ |
| f/g | $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ | $[0, 1]$ |
| g/f | $(g/f)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ | $(0, 1]$ |

Nótese que la mayoría de las combinaciones de f y g tienen como dominio

$$(-\infty, 1] \cap [0, +\infty) = [0, 1],$$

es decir, es la intersección de los dominios de f y g . Sin embargo, los dominios de los cocientes f/g y g/f deben restringirse eliminando los puntos donde los denominadores se anulen.

Composición de funciones. Otra operación con funciones es la llamada composición, a saber.

Definición 3.16. Sean f y g funciones con dominios B y A , respectivamente. La función compuesta $f \circ g$ se define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \forall x \in A \text{ tal que } g(x) \in B.$$

El siguiente diagrama representa la situación de la composición de funciones:

$$\begin{array}{ccccc}
 \{x \in A : g(x) \in B\} & \xrightarrow{g} & B & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & f \circ g & &
 \end{array}$$

Notar que la imagen de g puede tener elementos que no esten en el dominio de f , por este motivo se define el dominio de $f \circ g$ como

$$\{x \in A : g(x) \in B\}.$$

En particular, si la imagen de g está incluida o es igual al dominio de f , entonces el dominio de $f \circ g$ coincide con el dominio de g , o sea

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{g} & g(A) \subseteq B & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & f \circ g & &
 \end{array}$$

Para calcular $f \circ g = f(g(x))$ primero se calcula $g(x)$ y al valor obtenido se le aplica la función f . La función g se denomina *función interna* y la función f , *función externa* de la composición (ver FIGURA 10).

A veces, también es posible plantear la composición $g \circ f$, donde f es entonces la función interna y g la externa. Las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ son en general bastante diferentes, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.17. Dadas $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 1$, calcular las cuatro funciones $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ y especificar los dominios de cada uno de ellas. Veremos los resultados en la

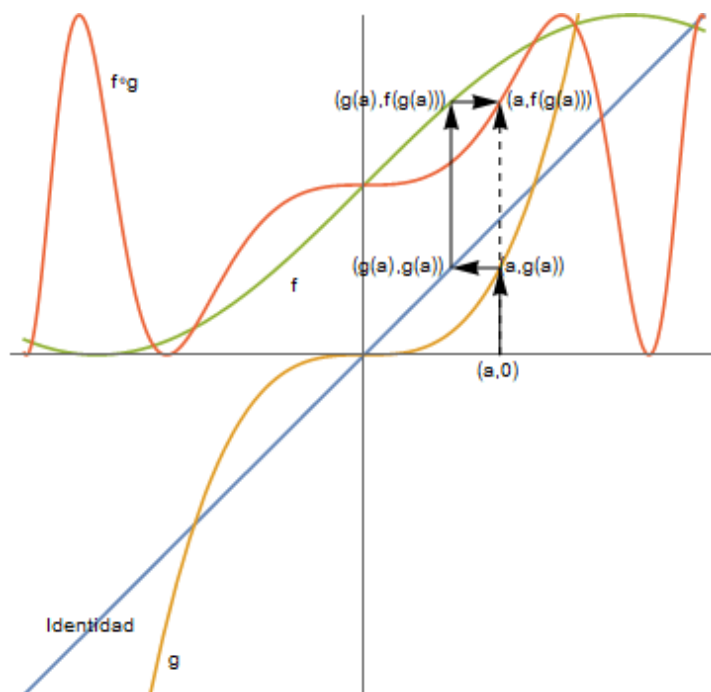


FIGURA 10. Composición de funciones.

siguiente tabla

| función | evaluación en x | dominio |
|-------------|--|----------------|
| f | $f(x) = \sqrt{x}$ | $[0, \infty)$ |
| g | $g(x) = x + 1$ | \mathbb{R} |
| $f \circ g$ | $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = \sqrt{x + 1}$ | $[-1, \infty)$ |
| $g \circ f$ | $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$ | $[0, \infty)$ |
| $f \circ f$ | $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$ | $[0, \infty)$ |
| $g \circ g$ | $g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x + 1) = (x + 1) + 1 = x + 2$ | \mathbb{R} |

Ejemplo 3.18. Dada $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$, calcular $g \circ g$ y especificar su dominio.

Solución.

$$g \circ g(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = \frac{1+x - 1+x}{1+x+1-x} = \frac{2x}{2} = x.$$

Dado que la función resultante, x , está definida para todos los números reales x uno podría pensar que el dominio de $g \circ g$ es todos los reales, pero esto es **INCORRECTO**, para pertenecer al dominio de $g \circ g$, x debe cumplir dos condiciones:

- (1) x debe pertenecer al dominio de g
- (2) $g(x)$ debe pertenecer al dominio de g

Pero en nuestro ejemplo tenemos que, el dominio de g es $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, entonces debemos excluir del dominio de $g \circ g$ al número -1 , para que se cumpla la condición (1). Luego, por la condición (2), debemos verificar si existen elementos del dominio de g en los cuales g tome el valor -1 , y de existir excluirlos del dominio de $g \circ g$. Obsérvese ahora que la ecuación $g(x) = -1$ no tiene solución, en efecto si tal x existiese tendríamos que

$$\begin{aligned}\frac{1-x}{1+x} &= -1 \\ 1-x &= -1(1+x) \\ 1-x &= -1-x \\ 1 &= -1,\end{aligned}$$

siendo esto una contradicción. En consecuencia, todos los números $g(x)$ pertenecen al dominio de g , y la condición (2) se satisface sin ninguna restricción sobre x . Consecuentemente, el dominio de $g \circ g$ es $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. □

Funciones definidas por tramos. Algunas veces es necesario definir una función utilizando diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio. Ejemplos importantes son

la **función valor absoluto** cuyo dominio es \mathbb{R}

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y la **función signo** cuyo dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \\ \text{indefinida} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

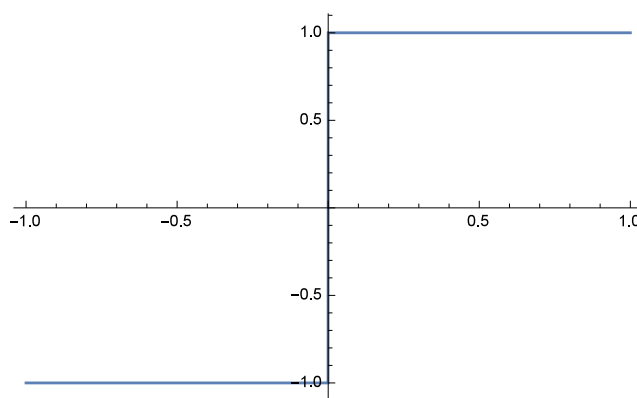


FIGURA 11. Función signo

Recordemos que la función valor absoluto es par y notemos que la función signo es impar.

Ejemplo 3.19. La función

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x < -1 \\ -x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

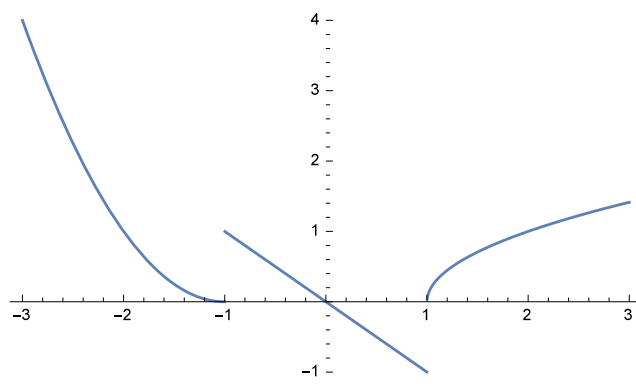


FIGURA 12. Función definida por tramos.

tiene dominio \mathbb{R} , pero sus valores están definidos por fórmulas diferentes en dependiendo de la posición de x . Su gráfica se muestra en la FIGURA 12.

3.4. Ejercicios.

(1) Dadas las siguientes funciones determinar dominio e imagen.

i) $f(x) = 1 + x^2$

ii) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

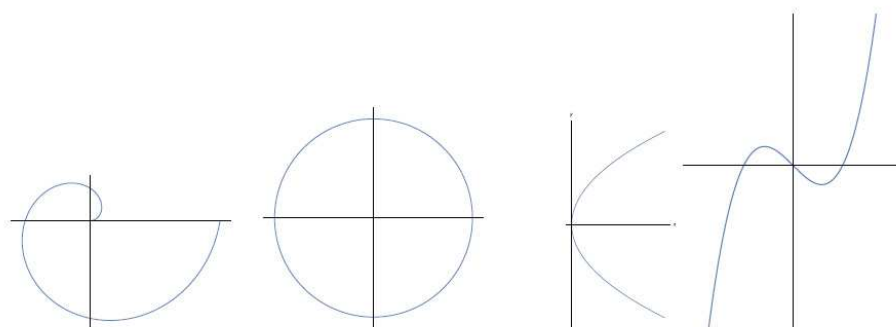
iii) $f(x) = \sqrt{8 - 2x}$

iv) $f(x) = \frac{1}{x - 1}$

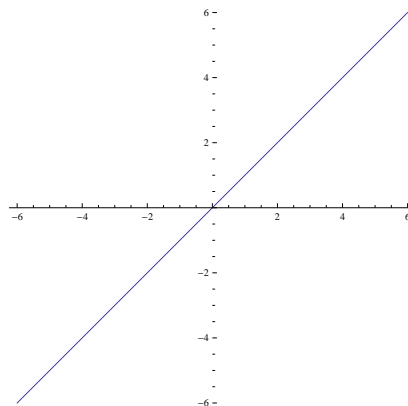
v) $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$

vi) $f(x) = \frac{t}{\sqrt{2 - t}}$

(2) Siendo el eje de las x el horizontal, cuáles de los siguientes gráficos corresponden a gráficas de funciones $y = f(x)$?



(3) Dado el siguiente gráfico,



determinar el gráfico de las siguientes funciones:

i) $f(x) + 2$

ii) $f(x) - 1$

iii) $f(x + 2)$

iv) $f(x - 1)$

v) $-f(x)$

vi) $f(-x)$

v) $f(4 - x)$

vi) $1 - f(1 - x)$

(4) Determinar los gráficos de las siguientes funciones,

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = x^3, \quad f(x) = |x|, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

y utilizando los mismos mostrar los gráficos de:

i) $f(x) = -x^2$

ii) $f(x) = 1 - x^2$

iii) $f(x) = (x - 1)^2$

iv) $f(x) = (x - 1)^2 + 1$

v) $f(x) = 1 - x^3$

vi) $f(x) = (x + 2)^3$

vii) $f(x) = \sqrt{x} + 1$

viii) $f(x) = \sqrt{x + 1}$

ix) $f(x) = -|x|$

x) $f(x) = |x| - 1$

xi) $f(x) = |x - 2|$

xii) $f(x) = 1 + |x - 2|$

xiii) $f(x) = \frac{1}{x + 1}$

xiv) $f(x) = \frac{2}{2 - x}$

xv) $f(x) = \frac{1}{x + 1} + 3$

(5) Observando los gráficos del ejercicio anterior determinar, siempre que sea posible, la preimagen del conjunto $\{0, 2, 3, 4, \sqrt{2}, e\}$.

(6) Expresar las fórmulas y luego calcular el dominio de $f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}, \frac{g}{f}$, siendo f y g las funciones dadas por las siguientes fórmulas:

$$\text{i) } f(x) = x \qquad g(x) = \sqrt{x-1}$$

$$\text{ii) } f(x) = \sqrt{1+x} \qquad g(x) = \sqrt{1-x}$$

$$\text{iii) } f(x) = x+2 \qquad g(x) = -x+1$$

(7) Si $f(x) = x+5$ y $g(x) = x^2-3$. Calcular:

$$\text{i) } f \circ g(0) \qquad \text{ii) } g(f(0)) \qquad \text{iii) } f(g(x))$$

$$\text{iv) } g \circ f(x) \qquad \text{v) } f \circ f(-5) \qquad \text{vi) } g(g(-2))$$

$$\text{vii) } g(f(x)) \qquad \text{viii) } g \circ g(x) \qquad \text{ix) } f(f(x))$$

(8) Graficar las siguientes funciones

i)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } ; 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & \text{si } ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

ii)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } ; 0 \leq x \leq 2 \\ 2-x, & \text{si } ; 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

iii)

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } ; x \leq 2 \\ -x+3, & \text{si } ; 2 < x \end{cases}$$

iv)

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } ; |x| < 1 \\ x^2, & \text{si } ; |x| \geq 1 \end{cases}$$

4. Funciones Polinomiales y Racionales.

4.1. Primeras definiciones. Los polinomios se encuentran entre las funciones más sencillas de tratar en el cálculo. Son sumas de términos consistentes en una constante multiplicada por una potencia no negativa de la variable independiente.

Un **polinomio** es una expresión P cuyo valor en x se expresa como

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde las constantes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ se denominan **coeficientes** del polinomio. La máxima potencia con coeficiente no nulo se denomina grado del polinomio. No se define el grado del polinomio nulo. Por ejemplo

$$\begin{array}{ll} 3 & \text{es un polinomio de grado } 0 \\ 2 - x & \text{es un polinomio de grado } 1 \\ x^2 - 2x + 4 & \text{es un polinomio de grado } 2 \end{array}$$

Salvo mención explícita, en este curso asumiremos que los polinomios de los cuales nos ocuparemos tienen coeficientes reales.

Propiedades 4.1. Sean P, Q polinomios. Luego,

(1) $T(x) = P(x) + Q(x)$ es un polinomio y si $T \neq 0$ entonces

$$\text{grado } T \leq \max\{\text{grado } P, \text{grado } Q\}.$$

(2) $T(x) = P(x).Q(x)$ es un polinomio y si $T \neq 0$ entonces

$$\text{grado } T = \text{grado } P + \text{grado } Q.$$

El cociente de dos polinomios no siempre es un polinomio, en general un cociente de polinomios se denomina una **función racional**. Por ejemplo

$$(4.1) \quad \frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1}$$

es una función racional.

4.2. Algoritmo de división de polinomios. Sean P, D polinomios de grado m, n , respectivamente tales que $m > n$, entonces existen únicos polinomios $Q(x)$ (cociente) y $R(x)$ (resto) tales que

$$P(x) = D(x).Q(x) + R(x) \text{ con } 0 \leq \text{grado } R < n.$$

Si $R(x)$ es el polinomio nulo, se dice que el polinomio $D(x)$ **divide** al polinomio $P(x)$.

Otra forma de expresar este resultado sería:

$$\frac{P(x)}{D(x)} = \frac{D(x).Q(x) + R(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}.$$

Si hacemos la división (4.1) resulta el cociente $Q(x) = 2x - 3$ y el resto $R(x) = x + 7$, o equivalentemente

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1} = 2x - 3 + \frac{x + 7}{x^2 + 1}.$$

4.3. División de Polinomios utilizando el Método de Ruffini. Este método solo puede utilizarse para dividir un polinomio $P(x)$ por $D(x) = x - a$ donde $a \in \mathbb{R}$. Para explicar los pasos a seguir vamos a desarrollar un ejemplo.

Sean $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ y $D(x) = x - 3$. Queremos hacer la división

$$P(x) : D(x) = (x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3).$$

- (1) En primer lugar notemos que $P(x) = 1x^4 + 0x^3 + (-3)x^2 + 0x + 2$ y que $D(x) = x - a$ con $a = 3$.

- (2) Trazamos el siguiente esquema

$$\begin{array}{c|c}
 & \text{primera fila} \\
 a & \text{segunda fila} \\
 \hline
 & \text{tercera fila}
 \end{array},$$

donde a es el definido en el paso (1).

- (3) En la primera fila a la derecha de la línea vertical ponemos los coeficientes de $p(x)$ en orden decreciente (de izquierda a derecha) de las potencias de x , incluso los coeficientes nulos.
- (4) El primer término, a la derecha de la línea vertical, en la tercera fila es el primer término de la primera fila.

$$\begin{array}{c|c}
 & 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 2 \\
 3 & \\
 \hline
 & 1
 \end{array}$$

- (5) El segundo término de la tercera fila se obtiene sumando al segundo término de la primera el producto del primer término de la tercera por a .

$$\begin{array}{c|c}
 & 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 2 \\
 3 & \quad 3 \\
 \hline
 & 1 \quad 3
 \end{array}$$

- (6) El tercer término de la tercera fila se obtiene sumando al tercer término de la primera el producto del segundo término de la tercera por a .

$$\begin{array}{c|c}
 & 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 2 \\
 3 & \quad 3 \quad 9 \\
 \hline
 & 1 \quad 3 \quad 6
 \end{array}$$

- (7) El cuarto término de la tercera fila se obtiene sumando al cuarto término de la primera el producto del tercer término de la tercera por a .

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\
 3 & & 3 & 9 & 18 & \\
 \hline
 & 1 & 3 & 6 & 18 &
 \end{array}$$

- (8) El quinto (y último) término de la tercera fila se obtiene sumando al quinto término de la primera el producto del cuarto término de la tercera por a .

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\
 3 & & 3 & 9 & 18 & 54 \\
 \hline
 & 1 & 3 & 6 & 18 & \mathbf{56}
 \end{array}$$

El último número obtenido, **56**, es el **resto** de la división de $P(x)$ por $D(x)$. Notar que las segundas filas obtenidas en cada paso son resultados intermedios del procedimiento. Como era de esperarse, el polinomio cociente $Q(x)$ es un polinomio cuyo grado es inferior en una unidad al grado del dividendo $D(x)$. En conclusión:

$$Q(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 18 \text{ y } R = 56.$$

En términos del Algoritmo de División podemos expresar que

$$P(x) = (x^3 + 3x^2 + 6x + 18) \cdot (x - 3) + 56.$$

4.4. Raíces y factores. Se dice que un número r es una raíz de un polinomio P si $P(r) = 0$. Por ejemplo $P(x) = x^3 - 4x$ tiene tres raíces : $0, 2, -2$. Pues al sustituir x por cualquiera de esos tres números se cumple que $P(x) = 0$. El *Teorema Fundamental del Álgebra* indica que todo polinomio de grado mayor o igual que 1 tiene una raíz, dicha

raíz puede ser un número complejo, no real (aunque estos números no serán tratados en este curso).

Los polinomios reales no tienen por qué tener raíces reales. Por ejemplo, $P(x) = x^2 + 4$ no tiene raíces reales, ya que una tal raíz debería verificar

$$\begin{aligned}x^2 + 4 &= 0 \\x^2 &= -4,\end{aligned}$$

lo cual es imposible, siendo el cuadrado de cualquier número real un número ≥ 0 .

4.5. Factorización de polinomios. Factorizar un polinomio significa escribirlo como producto de polinomios de grados inferiores, especialmente de polinomios de grado cero o uno.

Observación: *En este curso nos ocuparemos solo de factorizar polinomios con coeficientes reales como producto de polinomios de menor grado pero también con coeficientes reales. En sede oportuna se tratará la factorización compleja.*

Teorema 4.2. (de factorización) Sea P un polinomio de grado ≥ 1 . Luego, $a \in \mathbb{R}$ es raíz de P si y sólo si $x - a$ es un factor de $P(x)$, o equivalentemente $x - a$ divide a $P(x)$.

Demostración. Por el algoritmo de división, existen únicos polinomios Q (cociente) y R (resto) con grado $R < \text{grado}(x - a)$, o sea grado $R = 0$, o equivalentemente:

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R \text{ donde } R \in \mathbb{R}.$$

De donde $P(a) = 0 \Leftrightarrow R = 0$, o equivalentemente $P(x) = (x - a)Q(x)$. □

A partir del Teorema de Factorización y el Teorema Fundamental del Álgebra se deduce que todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene n raíces, pues si es un polinomio de grado $n \geq 2$, entonces tiene una raíz a , $P(x) = (x - a)C(x)$, siendo $C(x)$ un polinomio de grado

$n - 1 \geq 1$, que a su vez tiene una raíz, etc. Por supuesto no es necesario que las raíces de un polinomio sean todas diferentes. El polinomio $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x - 1)^3$ tiene cuatro raíces; una de ellas es 0 y las otras tres valen 1. Se dice que la raíz 1 tiene multiplicidad 3, ya que se puede dividir a $P(x)$ tres veces por $(x - 1)$ obteniendo en cada división resto cero.

Todo *polinomio real* se puede descomponer en un producto de factores lineales reales (que pueden estar repetidos, dependiendo de la multiplicidad de la raíz) y un producto de factores cuadráticos sin raíces reales (que pueden estar repetidos).

4.6. Raíces y factores cuadráticos. Dado $P(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, busquemos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $P(x) = 0$, o sea las llamadas raíces de P . Consideremos

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dividiendo por a resulta

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

y completando cuadrados

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad 1$$

¹El \pm tiene un significado correcto si $b^2 - 4ac \geq 0$, ya que la raíz cuadrada está tomada como la raíz cuadrada no negativa. Si $b^2 - 4ac < 0$ las dos raíces serán complejas y su expresión correcta es $x = \frac{-b \pm i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}$, donde i es la unidad imaginaria compleja.

resultando

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La expresión $D = b^2 - 4ac$ que se encuentra bajo el símbolo de raíz cuadrada se denomina **discriminante** de la resolución de la ecuación cuadrática. La naturaleza de las raíces del polinomio depende del signo del discriminante.

- (1) Si $D > 0$, tendremos dos raíces reales dadas por

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- (2) Si $D = 0$, habrá una única raíz dada por $x = \frac{-b}{2a}$, la cual es denominada raíz doble o de multiplicidad 2.

- (3) Si $D < 0$, la ecuación **no** posee raíces en \mathbb{R} , pero posee dos raíces complejas de las cuales no nos ocuparemos a este nivel.

Ejemplo 4.3. : Calcular las raíces de los siguientes polinómios de segundo grado y expresar dichos polinomios como productos de factores lineales.

(1) $x^2 + x - 1$

(2) $9x^2 - 6x + 1$

(3) $2x^2 + x + 1$

Solución. Se utiliza la fórmula de la ecuación de segundo grado para obtener las raíces de los polinomios como producto de sus factores lineales.

- (1) $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$

$$x = x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x^2 + x - 1 = \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$(2) \ a = 9, b = -6, c = 1$$

$$x = x_1, x_2 = \frac{6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4 \cdot 9}}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3}$$

$$9x^2 - 6x + 1 = 9 \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)$$

$$(3) \ a = 2, b = 1, c = 1$$

$$x = x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-7}}{4}$$

No tiene solución real por lo tanto no lo puede factorizar en reales.

□

4.7. Otras factorizaciones. Veamos algunas de las muchas formas en las que se pueden factorizar algunos polinomios con coeficientes reales.

- (1) Factor común : Un factor común de un polinomio es un divisor común menor de todos los términos.

$$\text{Ejemplo 4.4. } P(x) = 4x^4 - 6x^3 + 2x = 2x(2x^3 - 3x^2 + 1).$$

- (2) Diferencia de cuadrados: Toda diferencia de cuadrados se puede transformar en el producto de la suma de las bases por la diferencia de las mismas. O sea,
- $$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

$$\begin{aligned} \text{Ejemplo 4.5. } P(x) &= x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) \\ &= (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 1) \end{aligned}$$

- (3) Diferencia de cubos: $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$.

Ejemplo 4.6. $P(x) = x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Notar que, como 1 es raíz de $P(x)$, resulta que $x - 1$ divide a $x^3 - 1$. Cuando buscamos las raíces de $P(x)$ tratamos de resolver $x^3 = 1$, y esto inmediatamente dice que 1 es una solución de tal ecuación, pero no es la única, las otras dos son complejas. Por este motivo la factorización completa de $x^3 - 1$ con polinomios con coeficientes reales es $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Podemos decir además que 1 es una raíz de multiplicidad 1 de $x^3 - 1$.

- (4) Polinomio de segundo grado : Si $P(x) = ax^2 + bx + c$ tiene raíces reales x_1 y x_2 , lo podemos factorizar como $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ver ejemplo 4.3
- (5) Polinomios de grados mayor que 2 con alguna raíz entera: utilizaremos los resultados del Teorema de factorización de polinomios enunciado anteriormente.

Ejemplo 4.7. Factorizar

(a) $P(x) = x^3 - 3x + 2$

(b) $P(x) = 2x^4 + 2x^3 + 4x + 4$

Solución.

- (a) $P(x) = x^3 - 3x + 2$, para poder usar el Teorema de factorización debemos buscar una raíz, en este caso $x = 1$ es raíz de P ya que $P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$, por lo tanto sabemos que $(x - 1)$ será un factor de $P(x)$, para encontrar el cociente debemos efectuar la división. Usando el método de Ruffini resulta

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

con lo que el cociente $c(x) = x^2 + x - 2$ y $R = 0$. Luego, por el algoritmo de división $P(x) = (x^2 + x - 2) \cdot (x - 1)$ y calculando las raíces de $x^2 + x - 2$ (a saber $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$), se obtiene la factorización deseada

$$P(x) = \underbrace{(x - 1) \cdot (x + 2)}_{c(x)} \cdot (x - 1).$$

(b) Factoricemos ahora $P(x) = 2x^4 + 2x^3 + 16x + 16$. Buscamos una raíz de $P(x)$.

Como $P(-1) = 0$, $x = -1$ es raíz de P , por lo tanto dividimos a $P(x)$ Por $(x + 1)$, usando el método de Ruffini y resulta:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 2 & 0 & 16 & 16 \\ -1 & & -2 & 0 & 0 & -16 \\ \hline & 2 & 0 & 0 & 16 & 0 \end{array}$$

con lo que el cociente sería $c(x) = 2x^3 + 16$, $R = 0$ y $P(x) = (2x^3 + 16) \cdot (x + 1)$.

Ahora debemos factorizar, si es posible, a $c(x) = 2x^3 + 16$. Esto nos lleva a buscar al menos una raíz de $c(x)$. Notemos que $c(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 16 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$. Dividiendo $P(x)$ por $(x + 2)$ mediante el método de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & 0 & 16 \\ -2 & & -4 & 8 & -16 \\ \hline & 2 & -4 & 8 & 0 \end{array}.$$

Luego, $c(x) = (x + 2)(2x^2 - 4x + 8)$. Observamos ahora que $2x^2 - 4x + 16$ es un polinomio de segundo grado que no tiene raíces reales. En consecuencia, $P(x) = (2x^2 - 4x + 8)(x + 2)(x + 1)$.

□

4.8. Ejemplos de operaciones con funciones racionales. Cabe aclarar que solo desarrollaremos unos pocos ejemplos al respecto, siendo el tema de funciones racionales mucho más amplio.

Ejemplo 4.8. : (Sumas y restas) Resolver

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2} \\ \text{(b)} \quad & \frac{a+1}{2a-2} - \frac{a-1}{2a+2} + \frac{a^2+1}{a^2-1} - \frac{4a}{a^2-1} \end{aligned}$$

Solución. Lo primero que debemos tener en cuenta es el dominio sobre el cual estamos trabajando. En el caso (a) sería $\mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$ y en el caso (b) $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{2(x+2) + 2(x-2)}{(x-2).(x+2)} = \frac{2x+4+2x-4}{(x-2).(x+2)} = \frac{4x}{x^2-4} \\ \text{(b)} \quad & \frac{a+1}{2a-2} - \frac{a-1}{2a+2} + \frac{a^2+1}{a^2-1} - \frac{4a}{a^2-1} \end{aligned}$$

Para efectuar esta operación primero debemos factorizar todos los denominadores, para luego sacar un denominador común.

- $2a+2 = 2(a+1)$
- $2a-2 = 2(a-1)$
- $a^2-1 = (a+1)(a-1)$

De donde resulta

$$\begin{aligned}
 \frac{a+1}{2(a-1)} - \frac{a-1}{2(a+1)} + \frac{a^2+1}{(a-1)(a+1)} - \frac{4a}{(a-1)(a+1)} \\
 &= \frac{(a+1)^2 - (a-1)^2 + 2(a^2+1) - 8a}{2(a+1)(a-1)} \\
 &= \frac{a^2 + 2a + 1 - (a^2 - 2a + 1) + 2a^2 + 2 - 8a}{2(a+1)(a-1)} \\
 &= \frac{2a^2 - 4a + 2}{2(a+1)(a-1)} \\
 &= \frac{2(a^2 - 2a + 1)}{2(a+1)(a-1)} \\
 &= \frac{(a-1)(a-1)}{(a+1)(a-1)} \\
 &= \frac{a-1}{a+1}.
 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.9. : (Multiplicación y división) Resolver:

$$\frac{1 + \frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y} - y}.$$

Solución.

$$\frac{1 + \frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y} - y} = \frac{\frac{y+x}{y}}{\frac{x^2 - y^2}{y}} = \frac{y+x}{y} \cdot \frac{y}{x^2 - y^2} = \frac{y+x}{(x+y)(x-y)} = \frac{1}{x-y}.$$

□

4.9. Ejercicios.

- (1) Dados los polinomios $P(x), Q(x)$, hallar $a \in \mathbb{R}$ de manera que P divida Q y calcular el cociente de la división de Q por P .

i) $P(x) = x + 1$

$$Q(x) = x^6 - a$$

ii) $P(x) = x + 3$

$$Q(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + a$$

iii) $P(x) = x - a$

$$Q(x) = x^5 - 32$$

iv) $P(x) = x^2 - 4$

$$Q(x) = x^3 + x^2 - ax - a$$

- (2) Dados los siguientes polinomios, analizar si es posible escribirlos como producto de polinómios de grado 1.

i) $f(x) = x^2 + 7x + 10$

ii) $f(x) = x^2 - 3x - 10$

iii) $f(x) = x^2 + 2x + 2$

iv) $f(x) = x^2 - 6x + 13$

v) $f(x) = 16x^4 - 8x^2 + 1$

vi) $f(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2$

vii) $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

viii) $f(x) = x^5 - x^4 - 16x + 16$

ix) $f(x) = x^5 + x^3 + 8x^2 + 8$

x) $f(x) = x^9 - 4x^7 - x^6 + 4x^4$

- (3) Resolver la ecuación $R(x) - 3 = 0$, siendo $R(x)$ el resto de dividir a $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ por $Q(x) = x^2 - 3x$.

- (4) Dado $P(x) = 2x^4 - x^2 + ax - a$, hallar $a \in \mathbb{R}$ tal que la diferencia de los restos de su división por $(x + a)$ y por $(x - a)$, en ese orden, sea -1 .

- (5) En cada caso hallar $k \in \mathbb{R}$ que verifique las condiciones dadas:

- a) $P(x) = 8x^2 + 2x + k$ tenga dos raíces reales distintas.
- b) $P(x) = x^2 - (2k - 3)x + k$ tenga una única raíz.
- c) $P(x) = (k - 6)x^2 + (2k + 3)x + k + 4$ tenga una única raíz.
- (6) Expresar las funciones racionales siguientes como suma de un polinomio con otra función racional cuyo numerador sea o bien cero, o bien de menor grado que el denominador

$$\text{i) } f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2}$$

$$\text{ii) } f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 5x + 3}$$

$$\text{iii) } f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 3}$$

$$\text{iv) } f(x) = \frac{x^4 + x^2}{x^3 + x^2 + 1}$$

- (7) Dados las siguientes funciones racionales, calcular el dominio y luego simplificar.

$$\text{i) } f(x) = \frac{(x^2 + 2x + 1)(x^3 - 1)}{(x^2 + x + 1)(x^2 - 1)}$$

$$\text{ii) } f(x) = \frac{6(4 - x^2)}{(x^2 + 4x + 4)(2x - 4)}$$

$$\text{iii) } f(x) = \frac{x - 6}{(x^2 - 3x + 9)} - \frac{x^3}{x^3 + 27} + 1$$

$$\text{iv) } f(x) = \frac{3x^3}{x^2 - 4} - \frac{24x}{(x - 2)(x + 2)} + \frac{48}{x^3 - 8}$$

$$\text{v) } f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{(x + 2)^4} + \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{2x + 2}{2x - 2}$$

$$\text{vi) } f(x) = \frac{12}{x^2 + 2x} - \frac{2}{x} + \frac{6}{x + 2}$$

- (8) Hallar, si existen, los valores de $x \in \mathbb{R}$ que cumplan las siguientes igualdades.

$$\text{i) } \frac{4}{x^2 - x - 2} + \frac{2}{x + 1} - \frac{7,5}{x^2 - 4} = 0$$

$$\text{ii) } \frac{x + 5}{x + 1} + \frac{3x + 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{iii) } \frac{14}{x^2 - 9} + \frac{4 - x}{3 + x} = \frac{7}{x + 3} - \frac{1}{3 - x}$$

$$\text{iv)} \quad 5 + \frac{96}{x^2 - 16} = \frac{2x - 1}{x + 4} - \frac{3x - 1}{4 - x}$$

$$\text{v)} \quad \frac{11}{x^2 - 4} + \frac{x + 3}{2 - x} = \frac{2x - 3}{x + 2}$$

$$\text{vi)} \quad \frac{12}{1 - 9x^2} = \frac{1 - 3x}{1 + 3x} + \frac{1 + 3x}{3x - 1}$$