Tp3 - continuas

martes, 16 de mayo de 2023 16:32

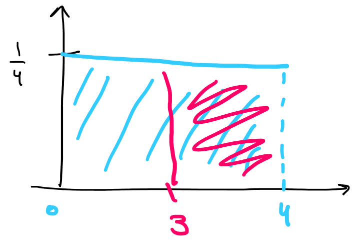
1) $\mathcal{E}$ = "Tomar una conferencia de manera aleatoria y observar la duración"

X = "duración de una conferencia"

$X \sim \mathcal{U}(\alpha, \beta)$ con $\alpha = 0$, $\beta = 4$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \text{si } \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{caso contrario (c.c)} \end{cases}$$

a) $$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$



b) $$P(X \geq 3) = \int_3^4 \frac{1}{4}\, dx = \frac{1}{4} \cdot x \Big|_3^4 =$$

$$\frac{1}{4} \cdot (4-3) = \frac{1}{4}$$

c) $$E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$E(X) = \frac{0+4}{2} = 2$$

d) $P(1 \leq x \leq 2 \mid x < 2) = \dfrac{P((1 \leq x \leq 2) \cap (x<2))}{P(x<2)} = \dfrac{P(1 \leq x < 2)}{P(x<2)}$

CA $\displaystyle\int_1^2 F(x)\,dx = \frac{1}{4} \cdot x \Big|_1^2 = \frac{1}{4}(2-1) = \frac{1}{4}$

$\displaystyle\int_0^2 F(x)\,dx = \frac{1}{4} \cdot x \Big|_0^2 = \frac{1}{4}(2-0) = \frac{1}{2}$

$P(1 \leq x \leq 2 \mid x<2) = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

2) X = " # de litros de café que sirve una máquina por diA"

$X \sim \mathcal{U}(\alpha, \beta)$ con $\alpha = 7$, $\beta = 10$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si} \quad \alpha \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

$$\boxed{F(a) = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}$$

a) $P(X \leq 8,8) = \displaystyle\int_7^{8,8} F(x)\,dx = \int_7^{8,8} \frac{1}{3}\,dx =$

$= \dfrac{1}{3} \cdot x \Big|_7^{8,8} = \boxed{\dfrac{1}{3}(8,8-7)} = \dfrac{1}{3} \cdot 1,8 = 0,6$

b) $P(7,4 < x < 9,5) = \displaystyle\int_{7,4}^{9,5} F(x)\,dx =$

b) $P(7{,}4 < x < 9{,}5) = \int_{7{,}4} F(x)\, dx =$

$$\int_{7{,}4}^{9{,}5} \frac{1}{4}\, dx = \frac{1}{4} \cdot x \Big|_{7{,}4}^{9{,}5} = \frac{1}{3}\,(9{,}5 - 7{,}4) = 0{,}7$$

c) $P(x \geq 8{,}5) = \int_{8{,}5}^{10} F(x)\, dx =$

$$\frac{1}{3} \cdot x \Big|_{8{,}5}^{10} = \frac{1}{3} \cdot (10 - 8{,}5) = 0{,}5$$

3

3. En una cierta empresa se fabrican, cada día, en media 40 mil metros de cable. Unos días más, otros días menos. Aunque el mínimo seguro que siempre es 30 mil metros. La variable aleatoria que recoge es la cantidad de metros de cable fabricados en un día.

a) ¿Cuál es el máximo de metros fabricados en un día?

b) ¿Qué porcentaje de días se fabrican más de 34 mil metros de cable?

$X =$ "# de metros de clable fabricados en un diA"

$X \sim \mathcal{U}(\alpha, \beta)$ con $\alpha = 30$, $\beta = ?$

$E(x) = 40$

a) $E(x) = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

$$40 = \frac{30 + \beta}{2}$$

$$40 \cdot 2 - 30 = \beta$$

$50 = \beta \rightarrow$ máx. de metros fabricados en un diA

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} & \text{si} \quad 30 \leq x \leq 50 \\ 0 & \text{si} \quad c.c. \end{cases}$$

b) $P(X > 34) = \int_{34}^{50} F(x)\, dx =$

$\frac{1}{20} \cdot x \Big|_{34}^{50} = \frac{1}{20}(50 - 34) = 0{,}8$

4)

4. Los trenes de cierta línea de subterráneos corren cada media hora entre la medianoche y las seis de la mañana. ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre que entra a la estación a una hora al azar, durante ese período, tenga que esperar por lo menos 20 minutos?

$X =$ "tiempo de espera en minutos de una persona en el subterráneo"

$X \sim \mathcal{U}(\alpha, \beta)$ con $\alpha = 0$ y $\beta = 30$

$$F(x) \begin{cases} \frac{1}{30} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

$P(X \geq 20) = \int_{20}^{30} F(x)\, dx = \frac{1}{30} \cdot x \Big|_{20}^{30} = \frac{1}{30}(30-20)$

$= 0{,}33$

5)

5. Una cierta clase de aparato doméstico requiere una reparación en promedio una vez cada 2 años. Suponiendo que los tiempos entre reparaciones están distribuidos exponencialmente, ¿cuál es la probabilidad de que un aparato doméstico tal trabaje al menos 3 años sin requerir reparaciones?

X = " tiempo de trabajo de un aparato doméstico antes de requerir reparaciones"

$X \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{B}\right)$ con $\beta = 2$

$\mathcal{E}(X) = 2$

$\mathcal{E}(x) = \beta$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$P(x \geq 3) = \int_3^{\infty} F(x)\, dx = \int_3^{\infty} \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{\substack{b \to \infty \\ b \nrightarrow \infty}} \int_3^{b} e^{-\frac{x}{2}}\, dx$$

CA

$u = -\frac{x}{2}$

$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2}$

$-2 \cdot du = dx$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{b \to \infty} \int_3^{b} e^{u} \cdot -2\, du =$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(X \geq x) &= e^{-\frac{x}{B}} \\ P(X \leq x) &= 1 - P(X \geq x) \end{aligned}}$$

$$\frac{1}{2} \lim_{b \to \infty} -2 \cdot \left[e^{u} \Big|_3^b \right] =$$

$$-2 \cdot \frac{1}{2} \lim_{b \to \infty} \left[e^{-\frac{x}{2}} \Big|_3^b \right] =$$

$$-1 \cdot \lim_{b \to \infty} \left[e^{-\frac{b}{2}} - e^{-\frac{3}{2}} \right] = -\left[\lim_{b \to \infty} e^{-\frac{b}{2}} - \underbrace{\lim_{b \to \infty} e^{-\frac{3}{2}}}_{e^{-\frac{3}{2}}} \right] =$$

$$= -\lim_{b \to \infty} e^{\overset{\infty}{-\frac{b}{2}}} \to 0 + e^{-\frac{3}{2}} = 0 + e^{-\frac{3}{2}} = 0{,}22$$

OBS : $P(X \geq a) = e^{-\frac{a}{B}}$

$-\frac{a}{B}$

OBS : $P(X \geq a) = e^{-\frac{a}{B}}$

$P(X < a) = 1 - P(X \geq a) = 1 - e^{-\frac{a}{B}}$

6

6. Un elemento radiactivo emite partículas según una variable de Poisson con un promedio de 15 partículas por minuto. En ese caso, el tiempo, T, que transcurre entre la emisión de una partícula y la siguiente sigue una distribución exponencial de parámetro λ=15 partículas por minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que entre partícula y partícula pasen más de 10 segundos?

X = " # de partículas radioactivas por minuto "

$X \sim P(\lambda)$ con $\lambda = 15$

T = " tiempo que transcurre en minutos entre la emisión de una partícula y la siguiente "

Sé que $\lambda = \frac{1}{B} \Rightarrow B = \frac{1}{15}$

$\frac{1}{B} = \frac{1}{\frac{1}{15}} = 15$

$T \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{B}\right) = T \sim \mathcal{E}(15)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{15}} \cdot e^{-\frac{x}{\frac{1}{15}}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 15 \cdot e^{-15 \cdot x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$P\left(X > \frac{10}{60}\right) = \int_0^{\infty} F(x)\, dx = e^{-\frac{\frac{10}{60}}{\frac{1}{15}}} = 0{,}08$$

7. La distribución del tiempo durante el cual una cierta marca de computadoras opera de forma

7. La distribución del tiempo durante el cual una cierta marca de computadoras opera de forma efectiva, es decir, las horas de operación efectiva antes de la primera descompostura, es exponencial, con esperanza β=360 hs.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que la computadora opere efectivamente durante 180 hs. o menos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la computadora opere efectivamente más de 720 hs.?

en horas

X = "# de tiempo el cual una cierta marca de computadoras opera de forma efectiva"

$X \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\beta}\right)$ con $\beta = 360$

$\mathcal{E}(X) = 360$

$\mathcal{E}(X) = \beta$

a) $P(X \leq 180) = 1 - e^{-\frac{180}{360}} = 0{,}4$

b) $P(X > 720) = e^{-\frac{720}{360}} = 0{,}13$

8) 8. La distribución exponencial se aplica con frecuencia a los tiempos de espera entre éxitos en un proceso de Poisson. Si el número de llamadas que se reciben por hora en un servicio de respuesta telefónica es una variable aleatoria de Poisson con el parámetro λ=6, sabemos que el tiempo, en horas, entre llamadas sucesivas tiene una distribución exponencial con el parámetro β=1/6. ¿Cuál es la probabilidad de esperar más de 20 minutos entre cualesquiera 2 llamadas sucesivas?

X = "número de llamadas que se reciben por hora en un servicio de respuesta telefónica"

$X \sim P(\lambda)$ con $\lambda = 6$

T = "tiempo, en horas, entre llamadas sucesivas"

$T \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\beta}\right)$ con $\beta = \frac{1}{6}$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{6}} \cdot e^{-\frac{x}{\frac{1}{6}}} & \text{si } x \geq 0 \\ & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{}{6} \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 6 \cdot e^{-6x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

OBS $\Rightarrow$ 20 min $= 0{,}3$ horas

$$P(X > 0{,}3) = e^{-\frac{0{,}3}{\frac{1}{6}}} = 0{,}13$$

9) 9. Suponga que el tiempo que se tarda en cargar un camión en un muelle sigue una distribución exponencial. Si el tiempo promedio en cargarlo es de 15 minutos,
a) ¿Cuá es la función de densidad, la esperanza y la varianza?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la carga del camión dure 6 minutos o menos? c) ¿Cuál es la probabilidad de que la carga del camión dure 18 minutos o menos? d) ¿Cuál es la probabilidad de que dure de 6 a 18 minutos?

X = "Tiempo que tarda en minutos en cargar un camión en un muelle"

$X \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\beta}\right)$ $\qquad E(X) = 15 \Rightarrow \beta = 15$ pq $E(X) = \beta$

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{15} \cdot e^{-\frac{x}{15}} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

$E(X) = 15$

$Var(X) = 15^2 = 225$

$\rightarrow P(X < k) = 1 - P(X \geq k)$

$Var(X) = 15$

b) $P(X \leq 6) = 1 - P(X > 6)$

$P(X \leq 6) = 1 - e^{-\frac{6}{15}} = 0{,}32$

$\left\{ \begin{array}{l} P(X < k) = 1 - P(X \geq k) \\ P(X \leq k) = 1 - P(X > k) \end{array} \right.$

c) $P(X \leq 18) = 1 - P(X > 18)$

$P(X \leq 18) = 1 - e^{-\frac{18}{15}} = 0{,}7$

d) $P(6 \leq X \leq 18) = F(18) - F(6)$

$= P(X \leq 18) - P(X \leq 6)$

$= 0{,}7 - 0{,}32$

$= 0{,}38$

10) 10. El millaje (en miles de millas) que los dueños de automóviles obtienen con una cierta marca de neumático radial es una variable aleatoria que tiene una distribución exponencial con β=40. Encuentre las probabilidades de que uno de estos neumáticos durará:

a) al menos 20.000 millas;

b) cuando mucho 30.000 millas.

X = "Cantidad de millas que los dueños de automóviles obtienen con una cierta marca de neumáticos"

$X \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\beta}\right)$ con $\beta = 40$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{40} \cdot e^{-\frac{x}{40}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a) $P(X \geq 20) = e^{-\frac{20}{40}} = 0{,}60$

a) $P(X \geq 20) = e^{-\frac{20}{40}} = 0{,}60$

b) $P(X \leq 30) = 1 - P(X \geq 30) = 1 - e^{-\frac{30}{40}} = 0{,}52$

vida útil
no falle

11) 11. Para un determinado tipo de radar, en la zona de fallas por desgaste, la vida de las unidades se pueden representar por la distribución normal, con media 150 horas y desviación estándar de 10 horas. Se dispone de toda el área de tránsito aéreo de una zona del país de 40 radares. Se desea saber cuántos radares se espera que fallen entre las 131 y las 179 horas.

$X =$ "la vida en horas de un radar"

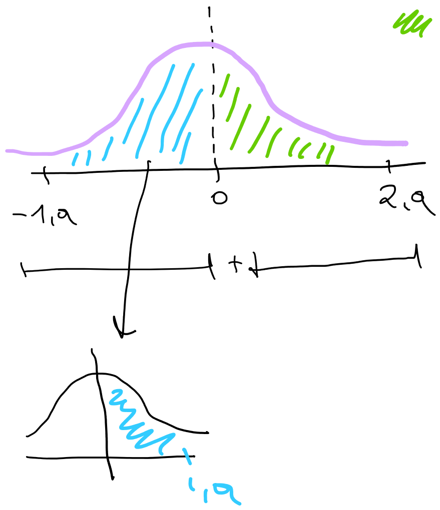
$X \sim N(\underset{\text{esperanza}}{\mu}, \underset{\text{desvío}^2}{\sigma^2})$ con $\mu = 150$ $\sigma^2 = 10^2 = 100$

$P(\overbrace{131}^{a} \leq X \leq \overbrace{179}^{b}) =$

Normalizo:

$$P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$P\left(\frac{131-150}{10} < Z < \frac{179-150}{10}\right) = P(-1{,}9 < Z < 2{,}9)$$



$P(0 \leq X \leq 1{,}9) + P(0 \leq X \leq 2{,}9)$

$0{,}47128 + 0{,}49813 =$

$0{,}96941$

$Y =$ "# de radares que fallan entre 131 y 179 hs"

Y = "# de radares que fallan entre 131 y 179 hs"

$Y \sim Bi(n, p)$ con $n = 40$, $p = 0{,}03$

E = Radares que fallan = $P(E) = 1 - P(E^c) = 0{,}03$

E^c = Radares que no fallan = $P(E^c) = 0{,}96941$

$E(y) = n \cdot p = 40 \cdot 0{,}03 = 1{,}2$

12)

12. Una empresa paga a sus empleados un salario promedio de \$300 por hora, con una desviación estándar de \$20. Si los salarios se distribuyen aproximadamente de forma normal y se redondean al centavo más cercano,
a) ¿qué porcentaje de los trabajadores recibe salarios de entre \$250,75 y \$343,22 por hora? b) ¿el 5 % de los salarios más altos por hora de los empleados es mayor a qué cantidad?

X = "salario en pesos de un empleado en una empresa"

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 300$, $\sigma = 20$

$P(250{,}75 \leq X \leq 343{,}22) =$

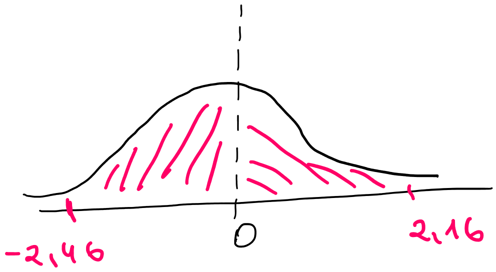
$P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) =$

$P\left(\frac{250{,}75 - 300}{20} < Z < \frac{343{,}22 - 300}{20}\right) =$

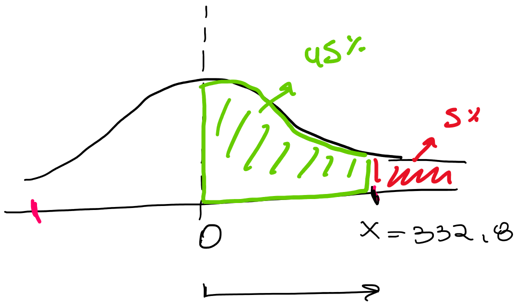
$P(-2{,}4625 < Z < 2{,}161) =$

$P(0 \leq X \leq 2{,}46) + P(0 \leq X \leq 2{,}16)$ a)

$0{,}49305 + 0{,}48461 = \boxed{0{,}977} \rightarrow 97{,}7\%$



b)



$X = 45\% = 0{,}45$

$50\% = X + 5\%$

$45\% = X \Rightarrow X = 0{,}45$

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = 1{,}64$$

$$X = 1{,}64 \cdot 20 + 300$$

$\boxed{X = 332{,}8}$ → El 5% de los salarios más altos se encuentra en los $X \geq 332{,}8$.

13

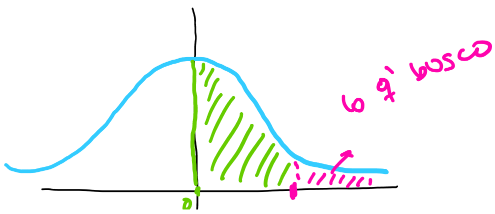
13. La duración de los tubos eléctricos producidos por una empresa está normalmente distribuida con media μ=120 horas y una desviación estándar de 7 horas.
a) Cuál es la probabilidad de que un tubo siga funcionando después de 130 horas? b) Cuál es la probabilidad de que los tubos funcionen menos de 100 horas?

X = "Duración de Tubos eléctricos en horas"

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 120$ y $\sigma = 7$

a)

$$P(X > 130) = 0{,}5 - P(X \leq 130)$$
$$= 0{,}5 - P\left(Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$



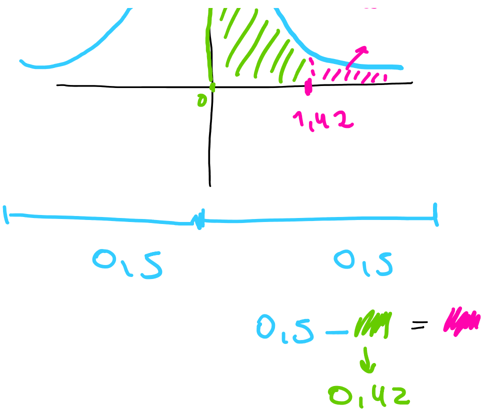
$= 0{,}5 - P\left(z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$= 0{,}5 - P(z < 1{,}43)$

$= 0{,}5 - P(0 \leq x \leq 1{,}43)$

$= 0{,}5 - \underline{0{,}42364}$

$= 0{,}07636$



b) $P(X \leq 100) = P\left(z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

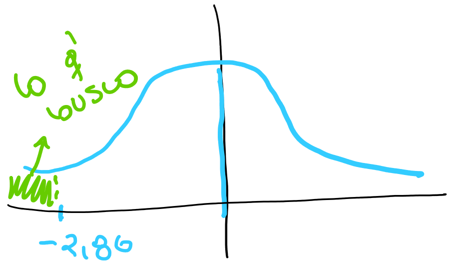
$P(X \leq 100) = P\left(z < \frac{100-120}{7}\right)$

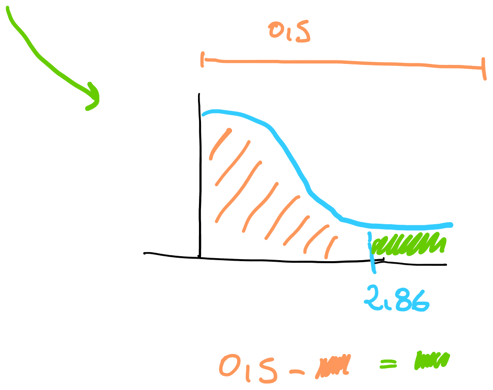
$P(X \leq 100) = P(z < -2{,}86)$

$P(X \leq 100) = P(0 \leq x \leq 2{,}86)$

$P(X \leq 100) = 0{,}5 - 0{,}49788$

$P(X \leq 100) = 0{,}00212 =$





14. El vicepresidente de personal de una compañía de seguros ha ideado un nuevo programa de capacitación cuyo ritmo es regulado por los propios participantes. Los nuevos empleados trabajan varias etapas a su ritmo personal. El programa finaliza cuando aprenden los contenidos. El programa ha dado buenos resultados sobre todo en la aceleración del proceso de capacitación, pues el sueldo durante ese periodo es apenas 67 % de lo que percibe al acabar el programa. En los últimos 12 años, la terminación promedio del programa dura 44 días, con una desviación estándar de 12 días.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado termine el programa entre 33 y 42 días ?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado termine el programa en menos de 30 días?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado termine el programa en menos de 25 o más de 60 días?

X = "tiempo medido en días que le lleva programa"

X = "tiempo medido en días que le lleva a un participante terminar el programa"

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 44$, $\sigma = 12$

a) $P(33 \leq X \leq 42) = P\left(\dfrac{33-44}{12} < Z < \dfrac{42-44}{12}\right)$

$= P(-0{,}92 < Z < -0{,}17)$

$= P(0 \leq x \leq 0{,}92) + P(0 \leq x \leq 0{,}17)$

$= 0{,}32121 + 0{,}06749$

$= \boxed{0{,}3887}$

b) $P(X < 30) = P\left(Z < \dfrac{30-44}{12}\right)$

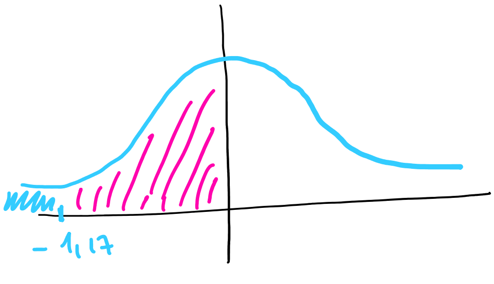
$= P(Z < -1{,}17)$

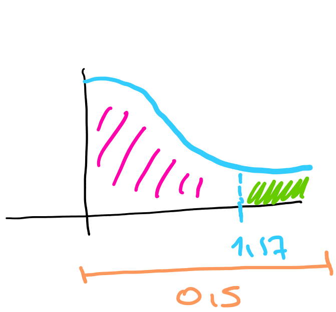
$= P(Z > 1{,}17)$

$= 0{,}5 - P(0 \leq x \leq 1{,}17)$

$= 0{,}5 - 0{,}37900$

$= \boxed{0{,}1121}$



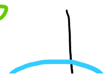


$\Rightarrow$ 0,5 − =

c) $P(X < 25) + P(X > 60) =$

$P\left(Z < \dfrac{25-44}{12}\right) + P\left(Z > \dfrac{60-44}{12}\right) =$

$Z < -1{,}58$ $Z > 1{,}33$



$$P\left(Z < \frac{25-44}{12}\right) + P\left(Z > \frac{60-44}{12}\right) =$$

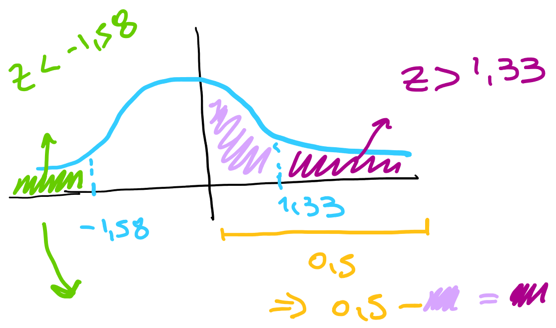
$$P(Z < -1{,}58) + P(Z > 1{,}33) =$$

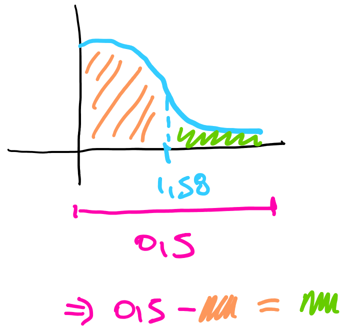
$$0{,}5 - P(0 \le x \le 1{,}58) + 0{,}5 - P(0 \le x \le 1{,}33)$$

$$0{,}5 - 0{,}44295 + 0{,}5 - 0{,}40824 =$$

$$0{,}05705 + 0{,}09176 =$$

$$\boxed{0{,}14881}$$





15

15. Un batallón del ejército que alistó 1.000 conscriptos, los sometió a un test mediante el cual evaluó el coeficiente intelectual. El histograma de frecuencias mostró una distribución bastante simétrica por lo que puede suponerse que el coeficiente intelectual de los conscriptos se distribuye normalmente con μ=100 y σ=10.

a) ¿Cuál es la proporción de conscriptos que tienen un coeficiente intelectual de 100 a 105?
b) ¿Qué cantidad de conscriptos tienen un coeficiente intelectual entre 100 y 105.7?
c) ¿Cuál es la proporción de conscriptos que tienen un coeficiente intelectual entre 103 y 105.7?
d) ¿Cuál es la proporción de conscriptos que tienen un coeficiente intelectual menor que 83.6?
e) ¿Cuál es la proporción de conscriptos que tienen un coeficiente intelectual superior a 120?

X = "Coeficiente intelectual de un conscripto a un batallón del ejército"

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 100$ y $\sigma = 10$

a) $P(100 \le x \le 105) =$

$$P\left(\frac{100-100}{10} < Z < \frac{105-100}{10}\right) =$$

$$P(0 < Z < 0{,}5) =$$

$P(0 \leq x \leq 0{,}5) = 0{,}19146$

b) $P(103 \leq x \leq 105{,}7) =$

$P\left(\frac{103-100}{10} < z < \frac{105{,}7-100}{10}\right) =$

$P(0{,}3 < z < 0{,}57) =$

$P(0 \leq x \leq 0{,}3) + P(0 \leq x \leq 0{,}57) =$

$0{,}11791 + 0{,}21566 = 0{,}33357$

c) $P(x < 83{,}6) = P\left(z < \frac{83{,}6 - 100}{10}\right)$

$= P(z < -1{,}64)$

$= P(0 \leq x \leq 1{,}64)$

$= 0{,}5 - 0{,}44950$

$= 0{,}0505$