ESTADÍSTICA
IDEI

Érica Schlaps
eschlaps@untdf.edu.ar

2022

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE PROBABILIDADES

1. Introducción

- Hemos visto que la *Distribución de Frecuencias* de las observaciones de un fenómeno aleatorio es un recurso poderoso para entender la *Variabilidad* del mismo.
- Sin embargo, con suposiciones adecuadas y sin observar directamente el experimento, podemos crear un *Modelo Teórico* que reproduzca muy bien la distribución de frecuencias cuando el experimento es observado directamente. Tales modelos son llamados **MODELOS DE PROBABILIDADES**.
- La *Probabilidad* y la *Estadística* se relacionan de un modo bastante curioso. Esencialmente, la probabilidad constituye el vehículo que permite al estadístico utilizar las informaciones de una muestra para realizar inferencias respecto de la población, o describir una población de la cual la muestra es extraída.
  Ahora bien,

- En la **TEORÍA DE PROBABILIDADES**, La población se supone conocida y el problema consiste en calcular la probabilidad de observar una muestra particular.
- En la **TEORÍA ESTADÍSTICA** ocurre exactamente al revés: la población es supuestamente desconocida, la muestra es conocida y se desea realizar inferencias acerca de la población.

Por lo tanto:

La **PROBABILIDAD** razona de la **Población** a la **Muestra**

La **ESTADÍSTICA** parte de la **Muestra** a la **Población**

Para ilustrar ¿cómo la Teoría de Probabilidades es utilizada en Inferencia Estadística?, consideremos el siguiente:

Ejemplo 1 Se tira un dado 10 veces ($n = 10$) y se anota el resultado observado.
Este conjunto de resultados representa una *muestra* de (tamaño) 10 medidas extraídas de un conjunto mucho mayor de resultados –*la población*– lo cual podría generarse si así se lo desea.
Supongamos, ahora, que *TODAS* esas 10 medidas resultan ser iguales a "1"(i.e., la cara del dado observada es en 10 oportunidades el número 1).
Deseamos, entonces, utilizar esa información para realizar inferencia acerca del Total de resultados de la población, o en otras palabras, deseamos inferir si el dado es honesto o no.
Pero después de observar 10 tiros del dado, todos mostrando el número 1, podemos sospechar de la honestidad del dado, y por ende desear rechazar esta hipótesis.

- El razonamiento es el siguiente: Si el dado fuera honesto, sería bastante improbable observar 10 resultados iguales seguidos. Por lo tanto, u observamos un evento raro o la hipótesis es falsa (¡podemos inclinarnos por esta última!).

Ejemplo 2 Análogamente, para decidir la introducción de una nueva droga en el mercado, se experimenta en 25 cobayos y todos mueren. Este resultado extremo permite acercarnos a la decisión de que la probabilidad de lograr el objetivo de la nueva droga es imposible, si en realidad no se desea que los cobayos mueran.

Los ejemplos enfatizan la importancia de la **PROBABILIDAD** en relación a la realización de **INFERENCIAS ESTADÍSTICAS**.

- En lo que sigue, sobre la *Teoría de Probabilidades*, supondremos que:
  la población es conocida, deseando calcular la probabilidad de obtener diversas muestras.
- Así, estaremos eligiendo **UN MODELO** para una situación física ya que, *en la práctica, la composición real de la población rara vez es conocida*.
  Por lo tanto:
  LOS MODELOS PROBABILÍSTICOS modelan SITUACIONES FÍSICAS (las poblaciones) en la TEORÍA DE PROBABILIDADES.

Ejemplo 3 De un grupo de 2 mujeres (M) y 3 hombres (H), una persona será sorteada para presidir una reunión. ¿Cuál es la probabilidad de que quien presida sea una mujer?
Observemos que:

- sólo existen dos posibilidades: la persona sorteada es hombre o la persona sorteada es mujer.
- suponiendo que el método de sorteo es honesto, cada persona tendrá igual chance de ser sorteada.

Por lo tanto, tendremos el siguiente Modelo de Probabilidades para el experimento en cuestión.

Sexo	H	M	Total
Frec. Teórica	3/5	2/5	1

De los ejemplos anteriores, observamos que los datos pueden ser obtenidos de experiencias no sujetas a control o por medio de experiencias sujetas a control. Entonces, definimos:

Definición 1 ***EXPERIENCIA*** *es el proceso por el cual cada observación (o medida) es obtenida.*
Existen dos tipos de experimentos:

- ***DETERMINÍSTICOS (D):*** *aquellos que repetidos bajo las mismas condiciones dan igual resultado, por lo tanto, son predecibles (por ejemplo, los fenómenos físicos o químicos).*
- ***ALEATORIOS (A):*** *aquellos que admiten dos o más resultados posibles, y si bien estos resultados se conocen, no puede predecirse con exactitud ¿cuál de ellos va a ocurrir?. Pueden repetirse bajo condiciones (casi) idéntidas indefinidamente.*

Los experimentos aleatorios son de interés para la estadística.
Observar que Experiencia (y por ende, Experimento) siempre se describe con una acción o verbo y sobre una unidad experimento.
Cuando la experiencia es repetida diversas veces resulta una Población de unidades; mientras que una Muestra debe representar los resultados de un número menor de experiencias, estos resultados extraídos de la población.

Vamos ahora a dirigir nuestra atención para un análisis cuidadoso de una experiencia a fin de elaborar un Modelo de Probabilidades capáz de describir la población.

Así:

- Todo **EXPERIMENTO** ($\mathcal{E}$) que envuelva un experimento casual tendrá su **MODELO PROBABILÍSTICO** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ establecido en el momento que especificamos:

1. Un **Espacio Muestral** (Ω) consiste, en el caso discreto, en la enumeración de todos los posibles resultados del experimento en cuestión.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots\}$$

donde ω_i son los puntos muestra.

2. **Una σ- álgebra de eventos** ($\mathcal{A}$): cualquier subconjunto de Ω ($A \subset \Omega$) será llamado EVENTO o SUCESO.
3. Una **Probabilidad** (P): será un número que asocia a cada punto muestra (ω) su probabilidad de ocurrencia, de manera que es posible encontrar la probabilidad $P(A)$ de cualquier subconjunto $A \subset \Omega$.

Ejemplo 4 $\mathcal{E} =$ "Lanzar una moneda dos veces".

$\longrightarrow \Omega = \{$(c,c), (c,x), (x,c), (x,x)$\}$, $\#\Omega = 4$, donde $\omega_1 =$ (c,c), $\omega_2 =$ (c,x), $\omega_3 =$ (x,c), $\omega_4 =$ (x,x).

$\longrightarrow A =$ "Se observa la misma faz de la moneda en los dos lanzamientos".
$A = \{$(c,c), (x,x)$\}$, $\#A = 2$.

$$\longrightarrow P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

- La expresión $\boxed{P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}}$ es conocida como **Regla de Laplace** y vale siempre que Ω sea un conjunto numerable de puntos muestra.

- En tal caso, y de un modo general, $\boxed{P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)}$.

  En el Ejemplo 4, $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Observación: Para un mismo experimento podemos tener varios espacios muestrales, dependiendo del objetivo que se quiera estudiar. Así, si $\mathcal{E} =$ "Tirar una moneda 5 veces", y estamos interesados en la secuencia de caras y cecas, es $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_i = \text{cara} \quad \text{ó} \quad x_i = \text{ceca}, i = 1, 2, \dots\}$. Pero si nos interesa el número de caras obtenidas, será: $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Ejemplo 5 Una fábrica produce jeringas para laboratorios. En una línea de producción son retiradas 3 jeringas y cada una es calificada como buena (B) o defectuosa (D).
Entonces el experimento sería:
$\mathcal{E} =$ "Retirar 3 jeringas de un lote y clasificarla como B o D".
$\Omega = \{(B, B, B), (B, B, D), (B, D, B), (D, B, B), (B, D, D), (D, B.D), (D, D, B), (D, D, D)\}$,
$\#\Omega = 8$.

Ejemplo 6 Un experimento consiste en anotar la fecha de cumpleaños de los estudiantes matriculados en el curso de Estadística Básica para Ciencias Naturales (EBCN).
$\mathcal{E} =$ "Anotar la fecha de cumpleaños de los 20 estudiantes matriculados en Estadística".
$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_{20}) : x_i \in \{1, 2, \dots, 365\}, i = \{1, 2, \dots, 20\}\}$, $x_i =$ día de cumple de la persona i.
$\#\Omega = 365^{20}$.

Ejemplo 7 En una heladera hay 10 manzanas de las cuales la mitad está machucada. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer 3 para hacer una compota, las 3 estén machucadas?
$\mathcal{E}$: "Extraer 3 manzanas entre 10 de la heladera donde 5 están machucadas".

$\longrightarrow \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \in \{m_1, m_2, \ldots, m_5, s_6, \ldots, s_{10}\}, s = \text{sana}, m = \text{machucada}, i = 1, 2, 3\}$.
$\#\Omega = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$.

$\longrightarrow A =$ "Las 3 manzanas están machucadas".
$A = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{m_1, m_2, \ldots, m_5\}, i = 1, 2, 3\}$.

$$\#A = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2} = 10.$$

$$\longrightarrow P(A) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{10}{120} \simeq 0.0833.$$

2. Definición de Probabilidad como frecuencia relativa (frecuentista o empírica)

La definición clásica (Laplace) se ve limitada a situaciones en las que no hay un número finito de resultados igualmente probables. Hay situaciones prácticas que no son de este tipo y esta definición no se puede aplicar.

Ejemplo:

- ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente se cure mediante cierto tratamiento médico?, o
- ¿Cuál es la probabilidad de que una determinada máquina produzca artículos defectuosos?

Observemos que, no es posible introducir igualmente probables. Para responder estas preguntas, se necesita un concepto más general de probabilidad. Una forma de dar respuestas a estas preguntas, es obtener algunos datos empíricos en un intento de estimar probabilidades.
Así:

- Si un experimento aleatorio se repite n veces bajo las mismas condiciones y n_A de estos resultados son favorables al atributo A, el límite de n_A/n conforme n aumenta, se define como la probabilidad del atributo A; i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} = \lim_{n\to\infty} (\text{frecuencia relativa de A}) = P(A)$$

  Esta definición se basa en el concepto de que el experimento muestra *regularidad estadística* o *estabilidad de las frecuencias relativas* cuando se repite muchas veces.

  $\therefore$ La probabilidad de un evento A, $P(A)$, puede aproximarse con la proporciónde veces que se observa el evento A cuando el experimento se repite un número grande de veces.

- Cuando se usa la definición frecuentista, es importante tener en cuenta los siguientes aspectos:
  (a) La probabilidad obtenida de esta manera es únicamente una estimación del valor real;
  (b) Cuanto mayor es el número de ensayos, tanto mejor será la estimación de la probabilidad; es decir, a mayor número de ensayos, mejor será la estimación.

3. Definición Axiomática de probabilidad

(Kolmogorov, 1933)
Las definiciones anteriores son netamente empíricas o experimental. Sin embargo, después de establecer una forma de determinar la probabilidad experimentalmente, se pueden deducir leyes o propiedades de la probabilidad en forma lógica o computacional, bajo ciertas suposiciones llamados AXIOMAS de Probabilidad.

Definición 2 *Dado un experimento $\mathcal{E}$ y un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, a cada evento $A \subset \Omega$ se le asocia un número, que se denotará por $P(A)$ y que se llamará probabilidad del evento A, que satisface los siguientes axiomas:*

(1) $P(A) \geq 0, \forall A \subset \Omega$.

(2) $P(\Omega) = 1$.

(3) Para toda sucesión de eventos disjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \cdots$ (i.e., $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$), se verifica:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Utilizando cualquiera de estas tres definiciones de probabilidad de un evento (o de eventos), podemos enumerar (y probar) una serie de propiedades para una probabilidad.

4. Propiedades de la Probabilidad

Propiedad 1 $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \subseteq \Omega$

Propiedad 2 $P(\Omega) = 1$, Ω : *evento cierto,* $P(\emptyset) = 0$, $\emptyset$: *evento imposible.*

Para las próximas propiedades, consideremos el siguiente:

Ejemplo 8 El siguiente cuadro representa el número de estudiantes discriminados por carrera y sexo.

Carrera—-Sexo	Hombres (H)	Mujeres (M)	Total
Economía (E)	4	1	5
Sistemas (S)	2	7	9
Gestión E. (GE)	0	3	3
Total	6	11	17

$P(\text{un alumno seleccionado al azar estudia Economía}) = P(E) = \dfrac{5}{17}$,
$P(\text{un alumno seleccionado al azar estudia Sistemas}) = P(S) = \dfrac{9}{17}$,
$P(\text{un alumno seleccionado al azar estudia Gestión E.}) = P(GE) = \dfrac{3}{17}$,
y
$P(\text{un estudiante seleccionado al azar es hombre}) = P(H) = \dfrac{6}{17}$,
$P(\text{un estudiante seleccionado al azar es mujer}) = P(M) = \dfrac{11}{17}$,

Por otro lado:

Dados dos eventos S y E podemos considerar:

- $S \cup M$ que ocurre cuando POR LO MENOS un de los eventos ocurre;
- $S \cap M$ cuando ocurre S y M simultáneamente acontecen.

En el ejemplo:

- $P(\underbrace{S}_{\text{el estudiante elegido estudia Sistemas}} \underbrace{\cap}_{\text{y}} \underbrace{M}_{\text{el estudiante elegido es mujer}}) = \dfrac{7}{17}$
  y además:
- $P(\underbrace{S}_{\text{el estudiante elegido estudia Sistemas}} \underbrace{\cup}_{\text{o}} \underbrace{M}_{\text{el estudiante elegido es mujer}}) = P(S) + P(M) = \dfrac{9}{17} + \dfrac{11}{17} = \dfrac{20}{17}$,
  ABSURDO!!!.

Esto es un absurdo pues $P(S \cup M) = \dfrac{20}{17} > 1$. Acontece que estamos sumando 2-veces $P(S \cup M)$. Por lo tanto, debemos restar una vez esta intersección a la expresión usada para determinar $P(S \cup M)$.

Por lo tanto, $P(S \cup M) = P(S) + P(M) - P(S \cap M) = \dfrac{9}{17} + \dfrac{11}{17} - \dfrac{7}{17} = \dfrac{13}{17} < 1$.

Análogamente,

$P(\underbrace{S}_{\text{estudia sistemas}} \underbrace{\cup}_{\text{o}} \underbrace{E}_{\text{estudia economía}}) = P(S) + P(E) - P(\underbrace{S \cap E}_{S\cap E=\emptyset})$
$\longrightarrow P(S \cup E) = P(S) + P(E) = \dfrac{9}{17} + \dfrac{5}{17} = \dfrac{14}{17}$.

Por lo tanto podemos enunciar la propiedad 3 que llamaremos **Regla de la Suma de Probabilidades**:

Propiedad 3 ***REGLA DE LA SUMA DE PROBABILIDADES:*** *Sean A y B dos eventos cualesquiera. Entonces:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

y se reduce a:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

si A y B son ***mutuamente excluyentes****.*

Propiedad 4 *Los eventos A y B son mutuamente excluyentes si $A \cap B = \emptyset$*

Supongamos ahora que, estamos interesados en saber si el estudiante elegido al azar está matriculado como estudiante de Economía, o de Sistemas, o de Gestión Empresarial y no nos interesa su sexo.

Observemos que:
$\Omega = E \cup S \cup GE \longleftrightarrow 1 = P(\Omega) = P(E \cup S \cup GE)$

y como:

G y $S \cup GE = C$ son sucesos **complementarios**, resulta:

$P(E) = \dfrac{5}{17}$
$P(C) = P(S \cup GE) \overset{\text{sucesos mutuamente excluyentes}}{=} P(S) + P(GE) = \frac{11}{17}$

y entonces

$$P(E) + P(C) = 1$$

siendo C el conjunto complementario de G.
Así, podemos enunciar la siguiente propiedad:

Propiedad 5 *Si A^c es el complemento de A, entonces $P(A^c) = 1 - P(A)$.*

Observación: Las operaciones de UNIÓN, INTERSECCIÓN y COMPLEMENTO entre eventos poseen propiedades análogas a aquellas válidas para operaciones entre conjuntos.

5. Probabilidad Condicional e Independencia

Observemos de que un estudiante elegido al azar esté matriculado en Sistemas, la probabilidad de que éste sea mujer es $\frac{7}{9}$.
Esto es así porque del total de 9 estudiantes que estudian Sistemas, 7 son mujeres. Escribimos entonces:

$$P(M|S) = \frac{7}{9}$$

(la "barra" la leemos "dado") y entendemos que hemos reducido el espacio muestral a los estudiantes inscriptos en Sistemas. Así, tenemos la siguiente definición que enumeramos en forma correlativa con las propiedades ya enunciadas:

Definición 3 *Para dos eventos cualesquiera $A, B \subseteq \Omega$, con $P(B) > 0$, la* ***PROBABILIDAD CONDICIONAL de*** *A* ***dado*** *B es:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Del ejemplo anterior:

$$P(M|S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{7/17}{9/17} = \frac{7}{9}.$$

De la definición anterior resulta:

Propiedad 6 ***REGLA DEL PRODUCTO DE PROBABILIDADES***

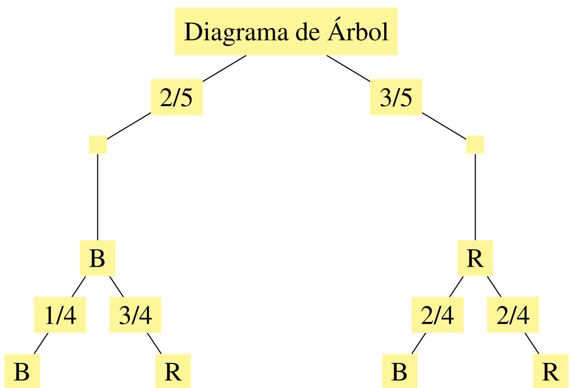
$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Vamos a considerar a seguir el:

Ejemplo 9 Supongamos que en un Bolillero hay 2 bolillas Blancas (B) y 3 bolillas Rojas (R).
El experimento es:
$\mathcal{E}$: "Extraer 2 bolillas del bolillero, sin reposición", i.e.

Extraer 1 bolilla, anotar su color, y dejarla fuera del bolillero y extraer la segunda bolilla y nuevamente anotamos su color.

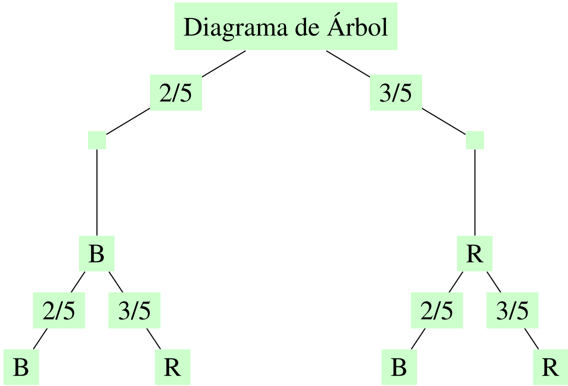
Recurrimos al **Diagrama de Árbol**



Así los elementos de Ω son: $\Omega = \{BB, BR, RB, RR\}$ y para el cálculo de las probabilidades de cada uno de estos puntos muestra recurrimos a la Regla del Producto:

ω_i	$P(\omega_i)$
BB	$P(B\|B)P(B) = 1/4 \cdot 2/5 = 2/20$
BR	$P(R\|B)P(B) = 3/4 \cdot 2/5 = 6/20$
RB	$P(B\|R)P(R) = 2/4 \cdot 3/5 = 6/20$
RR	$P(R\|R)P(R) = 2/4 \cdot 3/5 = 6/20$
Total	1

Si el experimento fuera:
$\mathcal{E}$: "Extraer 2 bolillas del Bolillero, con reposición", nuevamente usando el **Diagrama de árbol**, tendríamos:



y el Espacio Muestral es $\Omega = \{(B,B),(B,R),(R,B),(R,R)\}$.
(observe que los posibles elementos no han cambiado, pero sí sus probabilidades) y

ω_i	$P(\omega_i)$
BB	$P(B\|B)P(B) = 2/5 \cdot 2/5 = 4/25$
BR	$P(R\|B)P(B) = 2/5 \cdot 3/5 = 6/25$
RB	$P(B\|R)P(R) = 3/5 \cdot 2/5 = 6/25$
RR	$P(R\|R)P(R) = 3/5 \cdot 3/5 = 9/25$
Total	1

Observemos que, en estos casos, y para este ejemplo:

P(blanca en la 2° extracción|blanca en la 1° extracción) $=$ P(blanca en la 2° extracción)

o análogamente (para cualquiera de los puntos muestras)

P(roja en la 2° extracción|blanca en la 1° extracción) $=$ P(roja en la 2° extracción)

En otras palabras, el resultado de la Segunda extracción no depende de lo que ocurrió en la Primera extracción.

O sea, si A es un evento independiente de otro B, entonces

$$P(A|B) = P(A)$$

(o equivalentemente, $P(B|A) = P(B)$).
Utilizando la Regla del Producto tenemos la siguiente definición:

Definición 4 *Dos eventos A y B son* ***INDEPENDIENTES*** *si*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Observación: Si A es independiente de B, entonces B es independiente de A.

Vamos a extender ahora la Regla del Producto a 3 - eventos.

Ejemplo 10 Consideremos el bolillero con la misma composición ya dada: 2 bolillas blancas y 3 rojas. Ahora:
$\mathcal{E}$ =“Extraer 3 bolillas del Bolillero, sin reposición”.

Entonces se podrá realizar el correspondiente Diagrama de Árbol (a.c.l.).

Así, $\Omega = \{BBR, BRB, BRR, RBB, RBR, RRB, RRR)\}$ y sus probabilidades:

ω_i	$P(\omega_i)$
BBR	$3/3 \cdot 1/4 \cdot 2/5 = 6/60$
BRB	$1/3 \cdot 3/4 \cdot 2/5 = 6/60$
BRR	$2/3 \cdot 3/4 \cdot 2/5 = 12/60$
RBB	$1/3 \cdot 2/4 \cdot 3/5 = 6/60$
RBR	$2/3 \cdot 2/4 \cdot 3/5 = 12/60$
RRB	$2/3 \cdot 2/4 \cdot 3/5 = 12/60$
RRR	$1/3 \cdot 2/4 \cdot 3/5 = 6/60$
Total	1

De un modo general, dado 3 - eventos A_1, A_2, A_3 se tiene:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1)$$

6. TEOREMA de la PROBABILIDAD TOTAL y TEOREMA DE BAYES

Definición 5 *Supongamos que $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ es una PARTICIÓN del Espacio Muestral. Esto es, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$.*
Sea B un evento cualquiera, $B \subseteq \Omega$.
Supongamos además que $P(B|A_i)$ y $P(A_i)$ son conocidos, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Teorema 1 ***TEOREMA de la PROBABILIDAD TOTAL:*** *Sea $A_1, A_2, \cdots, A_n$ una partición de Ω y $B \subseteq \Omega$.*
Entonces

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i) \tag{1}$$

siendo $P(B|A_i)$ y $P(A_i)$ para $i = 1, 2, \cdots, n$ probabilidades conocidas.

Del teorema anterior y de la definición de Probabilidad Condicional, rápidamente se deduce:

Teorema 2 ***TEOREMA DE BAYES:*** *Bajo las misma condiciones que el Teorema 1, se tiene:*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)} \tag{2}$$

Ejercicio 1 *Los desechos industriales que se arrojan a un río que atraviesa una cidudad altamente industrial son producidos en un 20 % por papeleras y en un 30 % por las curtiembres. En resto de los desechos son debidos a otras causas. La Secretaria de Medio Ambiente realiza un estudio sobre las aguas del río y encuentra que analizando las sustancias contaminantes el 20 % proviene de las papeleras, el 5 % de las curtiembres y el 2 % de otras causas. ¿Cuál es la probabilidad de que la Secretaria de Medio Ambiente multe a las papeleras porque encontró altos índices de contaminación?*

Ejercicio 2 *El porcentaje de alcohólicos en la población de Málaga es, aproximadamente de un 10 %, no obstante en los reporters médicos de la Seguridad Social difícilmente se encuentre el diagnóstico de alcoholismo. Aparecen, sin embargo, diagnósticos de hepatopatías, lumbalgias, etcétera, que pueden hacer sospechar alcoholismo subyacente. Se realizó un estudio que puso de manifiesto que el 85 % de los individuos alcohólicos y el 7 % de los no-alcohólicos sufrían tales patologías. Se desea saber ¿cuál es la probabilidad de que un individuo diagnosticado con esas patologías sea realmente alcohólico?*