Estadística
IDEI

Licenciatura en Sistemas + Licenciatura en Economía
+ Licenciatura en Gestión Empresarial

2020

# Práctica N° 3:
# Distribuciones Discretas

1. A menudo en las grandes ciudades, el funcionamiento de los semáforos y sus posibles fallas, se modela a través de simulación por computadoras de manera de encontrar la mejor solución para evitar accidentes de tránsito. Si una determinada zona de la ciudad cuenta con 15 semáforos, y la probabilidad de que uno falle es de 0,09.

   *a*) ¿Cuál es la probabilidad de que fallen 3 semáforos juntos?

   *b*) ¿Cuál es la probabilidad de que fallen a lo sumo 2 semáforos?

   *c*) ¿Cual es el número media esperado de semáforos que fallen?

   *d*) ¿Cuál es la varianza de la variable?

2. Suponga que, para un embarque muy grande de circuitos integrados, la probabilidad de que falle cualquier de ellos es de 0,1. Suponga que se cumplen los supuestos en que se basan las distribuciones binomiales y calcule la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 20 falle, como mínimo, 1 chip integrado.

3. Un auditor del departamento de impuesto sobre la renta, está inspeccionando una muestra de 18 declaraciones de impuestos para una posible auditoría. El contador sabe por experiencia que el 20 % de las declaraciones son incorrectas.

   *a*) ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre:

      I) ninguna declaración incorrecta?

      II) 5 declaraciones incorrectas?

      III) 2 o más declaraciones incorrectas?

      IV) entre 3 y 7 declaraciones incorrectas?

   *b*) ¿Cuál es el nº esperado de declaraciones incorrectas?

   *c*) ¿Cuál es el nº esperado de declaraciones incorrectas si se revisan 200 de ellas?

4. Si la probabilidad de que un cierto dispositivo de medición muestre una desviación excesiva es de 0.05, ¿cuál es la probabilidad de que

   *a*) el sexto de estos dispositivos de medición sometidos a prueba sea el primero en mostrar una desviación excesiva?

   *b*) el séptimo de estos dispositivos de medición sometidos a prueba, sea el primero que no muestre una desviación excesiva?.

5. Las imperfecciones en los tableros de circuitos y los microcircuitos de computadoras se prestan para un análisis estadístico. Un tipo particular de tablero contiene 200 diodos y la probabilidad de que falle alguno es de 0,03.

   *a*) ¿Cuál es el número esperado de fallas en los diodos?

   *b*) ¿Cuál es la varianza?

c) El tablero funciona si no tiene diodos defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que un tablero funcione?

6. La contaminación constituye un problema en la fabricación de discos de almacenamiento óptico. El número de partículas de contaminación que ocurren en un disco óptico tiene una distribución de Poisson y el número promedio de partículas por cm2 de superficie del disco es de 0,1. El área de un disco bajo estudio es 100.

    a) Encuentre la probabilidad de que ocurran 12 partículas en el área del disco bajo estudio.
    b) La probabilidad de que ocurran 0 partículas en el área del disco bajo estudio.
    c) Determine la probabilidad de que 2 o menos partículas ocurran en el área del disco bajo estudio.

7. Se supone que el número de clientes que llegan por hora a ciertas instalaciones de servicio automotriz sigue una distribución de Poisson con media $\lambda = 7$.

    a) Calcule la probabilidad de que lleguen más de 10 clientes en un periodo de dos horas.
    b) ¿Cuál es el número medio de llegadas durante un periodo de 2 horas?

8. Un fabricante de chips de silicio los empaqueta en lotes de 25. El comprador los inspecciona tomando 3 chips y acepta un lote si encuentra menos de 2 chips defectuosos.

    a) Calcular la probabilidad de que el comprador acepte un lote con 6 chips defectuosos.
    b) ¿Cuál es el número esperado y la varianza de chips defectuosos en los 3 inspeccionados?

9. Lotes con 40 componentes cada uno que contenga 3 o más defectuosos se consideran inaceptables. El procedimiento para obtener muestras del lote consiste en seleccionar 5 componentes al azar y rechazar el lote si se encuentra un componente defectuoso.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que, en la muestra, se encuentre exactamente un componente defectuoso, si en todo el lote hay 3 defectuosos?
    b) ¿Cuál es la esperanza de la variable bajo estudio?

10. De acuerdo con una encuesta de la *Administrative Management Society*, la mitad de las empresas estadounidenses da a sus empleados 4 semanas de vacaciones después de 15 años de servicio en la empresa. Calcule la probabilidad de que, de 6 empresas encuestadas al azar, el número que da a sus empleados 4 semanas de vacaciones después de 15 años de servicio es:

    a) cualquiera entre 2 y 5, inclusive ambos;
    b) menor que 3.

11. Una compañía de seguros garantiza pólizas de seguros individuales contra retrasos aéreos de más de doce horas. Una encuesta ha permitido estimar a lo largo de un año que cada persona tiene una probabilidad de cada de mil de ser víctima de un retraso aéreo que esté cubierto por este tipo de póliza y que la compañía aseguradora podrá vender una media de cuatro mil pólizas al año. Se pide hallar las siguientes probabilidades:

    a) Que el número de retrasos cubiertos por la póliza no pase de cuatro por año,
    b) Número de retrasos esperados por año,
    c) Que el número de retrasos sea superior a dos por año,
    d) Que ocurran doce retrasos por año.

12. Una empresa grande tiene un sistema de inspección para los lotes de compresores pequeños que compra a los vendedores. Un lote típico contiene 15 compresores. En el sistema de inspección se selecciona una muestra aleatoria de 5 compresores para someterlos a prueba. Suponga que en el lote de 15 hay 2 defectuosos.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra determinada haya un compresor defectuoso?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que la inspección descubra los 2 compresores defectuosos?

13. Una fuerza de tareas gubernamental sospecha que algunas fábricas infringen los reglamentos federales contra la contaminación ambiental en lo que se refiere a la descarga de cierto tipo de producto. Veinte empresas están bajo sospecha pero no todas se pueden inspeccionar. Suponga que 3 de las empresas infringen los reglamentos.

    *a*) ¿Cuál es la probabilidad de que si se inspeccionan 5 empresas no se encuentre ninguna infracción?

    *b*) ¿Cuál es la probabilidad de que la inspección de 5 empresas descubra a 2 que infringen el reglamento?

## Soluciones

1. X: cantidad de semáforos que fallan entre 15. $X \sim Bi(15; 0{,}09)$

   *a*)

$$\begin{aligned} P(X=3) &= \binom{15}{3} 0{,}09^3 0{,}91^{15-3} \\ &= \frac{15!}{3!12!} 0{,}09^3 0{,}91^{12} \\ &= 455(0{,}09^3)(0{,}91^{12}) = 0{,}107 \end{aligned}$$

   *b*)

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= \sum_{k=0}^{2} \binom{15}{k} 0{,}09^k 0{,}91^{15-k} \\ &= \binom{15}{0} 0{,}09^0 0{,}91^{15} + \binom{15}{1} 0{,}09^1 0{,}91^{14} + \binom{15}{2} 0{,}09^2 0{,}91^{13} \\ &= \frac{15!}{0!15!}(1)(0{,}91^{15}) + \frac{15!}{1!14!}(0{,}09)(0{,}91^{14}) + \frac{15!}{2!13!}(0{,}09^2)(0{,}91^{13}) \\ &= 0{,}91^{15} + 15(0{,}09)(0{,}91^{14}) + 105(0{,}09^2)(0{,}91^{13}) \\ &= 0{,}243 + 0{,}3605 + 0{,}2496 \\ &= 0{,}8531 \end{aligned}$$

   *c*)

$$E(X) = np = 15(0{,}09) = 1{,}35$$

   *d*)

$$Var(X) = npq = 15(0{,}09)(0{,}91) = 1{,}2285$$

2. X: cantidad de circuitos integrados que fallan en una muestra de 20.
   $X \sim Bi(20; 0{,}1)$

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \left[\binom{20}{0} 0{,}1^0 0{,}9^{20}\right] \\ &= 1 - (0{,}9^{20}) = 1 - 0{,}1216 = 0{,}8784 \end{aligned}$$

3. X: cantidad de declaraciones incorrectas entre las 18 seleccionadas.
   $X \sim Bi(18; 0{,}2)$

   a) I)

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \binom{18}{0}(0{,}2)^0(1-0{,}2)^{18} \\ &= (1)(1)(0,018) = 0,018 \end{aligned}$$

   II)

$$\begin{aligned} P(X=5) &= \binom{18}{5}(0{,}2)^5(1-0{,}2)^{13} \\ &= (8568)(0,0003)(0,055) = 0,1507 \end{aligned}$$

III)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \left[\binom{18}{0}(0{,}2)^0(1-0{,}2)^{18} + \binom{18}{1}(0{,}2)^1(1-0{,}2)^{17}\right]$$
$$= 1 - [(1)(1)(0,018) + (18)(0{,}2)(0{,}0225) = 0{,}018 + 0{,}081] = 1 - 0{,}099$$
$$= 0,901$$

IV)

$$P(3 \leq X \leq 7) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7)$$
$$= (0,2297) + (0{,}2153) + (0{,}1507) + (0{,}0816) + (0{,}035) = 0{,}7123$$

b) $E(X) = n * p = 18(0,2) = 3{,}6$

c) Y: número de declaraciones incorrectas entre 200.
$Y \sim Bi(200; 0{,}2)$
E(Y)=(200)(0.2)=40

4. X: cantidad de productos revisados hasta encontrar el primero con una desviación excesiva. p=0,05 $\rightarrow$ 1-p=0,95

   a) X $\sim$ Geométrica(X; 0,05)

   $$P(X=6) = 0,05(0,95)^{6-1} = 0,0387$$

   b) X: cantidad de productos revisados hasta encontrar el primero que no tenga una desviación excesiva. p=0,95 $\rightarrow$ q=0,05
   X $\sim$ Geométrica(X; 0,95)

   $$P(X=7) = 0,95(0,05)^{7-1} = 0,000000014$$

5. X: cantidad de diodos que fallan en un tablero que contiene 200 diodos.
$X \sim Po(\lambda = np = 200(0{,}03) = 6)$

   a) $E(X) = \lambda = np = 200(0{,}03) = 6$

   b) $Var(X) = \lambda = np = 6$

   c)

   $$P(X=0) = \frac{e^{-6}6^0}{0!} = e^{-6} = 0{,}0025$$

6. X: número de partículas de contaminación que ocurren en un disco óptico.
$X \sim Po(\lambda = np = 100(0{,}1) = 10)$

   a)

   $$P(X=12) = \frac{e^{-10}10^{12}}{12!} = 0{,}0948$$

   b)

   $$P(X=0) = \frac{e^{-10}10^0}{0!} = e^{-10} = 0{,}00004$$

c)

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-10}10^k}{k!} \\ &= \frac{e^{-10}10^0}{0!} + \frac{e^{-10}10^1}{1!} + \frac{e^{-10}10^2}{2!} \\ &= e^{-10} + 10e^{-10} + 50e^{-10} \\ &= 0{,}00004 + 0{,}0004 + 0{,}0023 = 0{,}00274 \end{aligned}$$

7. X: número clientes que llegan en una hora a ciertas instalaciones de servicio automotriz.
   $X \sim Po(\lambda = 7)$

   a) Y: número de clientes que llegan en dos horas a ciertas instalaciones de servicio automotriz.
   $Y \sim Po(14)$

$$P(Y > 10) = P(Y \geq 11) = 1 - P(Y \leq 10) = 1 - \sum_{y=0}^{10} \frac{e^{-14}14^y}{y!}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - [(8,31529E-07) + (1,16414E-05) + (8,14898E-05) \\ &+ (0,000380286) + (0,001331) + (0,003726801) + (0,008695869) \\ &+ (0,017391737) + (0,03043554) + (0,047344174) + (0,066281843)] \\ &= 1 - 0{,}1757 = 0{,}8243 \end{aligned}$$

   b) El número medio de llegadas en dos horas es $\lambda = 14$.

8. X= número de chips defectuosos en una muestra de 3 de un lote de 25 unidades.

   a) $X \sim H(25; 6; 3)$

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= \frac{\binom{6}{0}\binom{25-6}{3-0}}{\binom{25}{3}} + \frac{\binom{6}{1}\binom{25-6}{3-1}}{\binom{25}{3}} \\ &= \frac{\frac{6!}{0!6!}\frac{19!}{3!16!}}{\frac{25!}{3!22!}} + \frac{\frac{6!}{1!5!}\frac{19!}{2!17!}}{\frac{25!}{3!22!}} \\ &= \frac{969}{2300} + \frac{6(171)}{2300} = 0{,}4213 + 0{,}4461 = 0{,}8674 \end{aligned}$$

   b) $E(X) = n\frac{M}{N} = 3\frac{6}{25} = 0{,}72$

$$\begin{aligned} Var(X) &= \frac{N-n}{N-1} n \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right) \\ &= \frac{25-3}{25-1} 3 \frac{6}{25}\left(1 - \frac{6}{25}\right) \\ &= \frac{22}{24} 3 \frac{6}{25}\left(1 - \frac{6}{25}\right) \\ &= (0{,}9167)(0{,}72)(0{,}76) = 0{,}5016 \end{aligned}$$

9. X= número de componentes defectuosos en una muestra de 5 componentes de un lote de 40.

a) $X \sim H(40;3;5)$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{\binom{3}{1}\binom{40-3}{5-1}}{\binom{40}{5}} \\ &= \frac{\frac{3!}{1!2!}\frac{37!}{4!33!}}{\frac{40!}{5!35!}} = \frac{3(66045)}{658008} = 0{,}3011 \end{aligned}$$

b) $E(X) = n\frac{M}{N} = 5\frac{3}{40} = 0{,}375$

10. X= número de empresas que da a sus empleados 4 semanas de vacaciones después de 15 años de servicio, entre 6.
E= La empresa da a sus empleados 4 semanas de vacaciones, luego de 15 años de servicio.
P(E)= 0,5 $\quad X \sim Bi(6;0,5)$

a)

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 5) &= \sum_{k=2}^{5}\binom{6}{k}0{,}5^k 0{,}5^{6-k} \\ &= \binom{6}{2}0{,}5^2 0{,}5^4 + \binom{6}{3}0{,}5^3 0{,}5^3 + \binom{6}{4}0{,}5^4 0{,}5^2 + \binom{6}{5}0{,}5^5 0{,}5^5 \\ &= \frac{6!}{2!4!}(0{,}5^2)(0{,}5^4) + \frac{6!}{3!3!}(0{,}5^3)(0{,}5^3) + \frac{6!}{4!2!}(0{,}5^4)(0{,}5^2) + \frac{6!}{5!1!}(0{,}5^5)(0{,}5^1) \\ &= 0{,}2344 + 0{,}3125 + 0{,}2344 + 0{,}0938 \\ &= 0{,}8751 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(X<3) &= \sum_{k=0}^{2}\binom{6}{k}0{,}5^k 0{,}5^{6-k} \\ &= \binom{6}{0}0{,}5^0 0{,}5^6 + \binom{6}{1}0{,}5^1 0{,}5^5 + \binom{6}{2}0{,}5^2 0{,}5^4 \\ &= 0{,}0156 + 0{,}0938 + 0{,}2344 \\ &= 0{,}3438 \end{aligned}$$

11. X= número de retrasos aéres de más de 12 horas cubiertos por la póliza por año.
$X \sim Bi(4000; 0{,}0001)$ como n es grande y p pequeña $\rightarrow X \sim Po(\lambda = np = 4)$

a)

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= \sum_{k=0}^{4}\frac{e^{-4}4^k}{k!} \\ &= e^{-4}(1+4+8+10,667+10,667) = 0,6289 \end{aligned}$$

b) $E(X) = \lambda = 4$

c)

$$\begin{aligned}
P(X>2) &= 1-P(X\leq 2)\\
&= 1-\sum_{k=0}^{2}\frac{e^{-4}4^k}{k!}\\
&= 1-e^{-4}(1+4+8)\\
&= 1-0,381\\
&= 0,7619
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
P(X=12) &= \frac{e^{-4}4^{12}}{12!}\\
&= e^{-4}(0,035)=0,00064
\end{aligned}$$

12. X= número de compresores defectuosos en una muestra de 5 de un lote de 15.
N=15 n=5 M=2
$X \sim H(15;5;2)$

a)

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= \frac{\binom{2}{1}\binom{15-2}{5-1}}{\binom{15}{5}}\\
&= \frac{1430}{3003}=0,476
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
P(X=2) &= \frac{\binom{2}{2}\binom{13}{3}}{\binom{15}{5}}\\
&= \frac{286}{3003}=0,0952
\end{aligned}$$

13. X= número de empresas que infringen los reglamentos en una muestra de 5 empresas entre 20.
N=20 n=5 K=3
$X \sim H(5;3;20)$

a)

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= \frac{\binom{3}{0}\binom{20-3}{5}}{\binom{20}{5}}\\
&= \frac{(1)(6188)}{15504}\\
&= \frac{6188}{15504}=0,399
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
P(X=2) &= \frac{\binom{3}{2}\binom{20-3}{5-2}}{\binom{20}{5}}\\
&= \frac{(3)(680)}{15504}\\
&= \frac{2040}{15504}=0,1316
\end{aligned}$$