Tp3- discretas

jueves, 4 de mayo de 2023 16:15

1) $\mathcal{E}$ = "Extraer aleatoriamente un boleto de una urna"

X = "nº de boleto observado al extraer de la urna"

$X \sim \mathcal{U}(\frac{1}{k})$, $k = 255$

$P(X = 255) = \frac{1}{255} = 3,9 \times 10^{-3}$ → Probabilidad de que salga el boleto nº 240

2) $\mathcal{E}$ = "Tomar una pieza producida por la máquina aleatoriamente y observar si es defectuosa o no"

Éxito = no defectuoso → 1

Fracaso = defectuoso → 0

$P(F) = 0,03$ $\qquad$ $X \sim Be(p)$, $p = 0,97$

$P(E) = 0,97$

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si } E \\ 0 & \text{si } F \ (\text{ó } E^c) \end{cases}$$

$E(X) = 1.p + 0.(1-p) = p$

$\boxed{E(X) = 0,97}$

$var(X) = p(1-p)$

$var(X) = 0,97(1-0,97)$

$\boxed{var(X) = 0,0291}$

3) $\mathcal{E}$ = "Tomar 15 semáforos aleatoriamente y observar si fallan o no"

X = "# de semáforos que fallan de 15"

$X \sim Bi(n,p)$, $n = 15$, $p = 0{,}09$

$P(E) = 0{,}09$ (éxito)

$P(E^c) = 0{,}91$ (fracaso)

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \text{con} \quad k = 0,1,2,\dots,n$$

a) $P(X=3) = \binom{15}{3} \cdot (0{,}09)^3 \cdot (1-0{,}09)^{15-3}$

$P(X=3) = 0{,}10$

b) $P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{15}{k} \cdot (0{,}09)^k \cdot (1-0{,}09)^{15-k}$

$$P(X\leq 2) = \binom{15}{0} \cdot (0{,}09)^0 \cdot (1-0{,}09)^{15-0} + \binom{15}{1} \cdot (0{,}09)^1 \cdot (1-0{,}09)^{15-1} + \binom{15}{2} \cdot (0{,}09)^2 \cdot (1-0{,}09)^{15-2}$$

$P(X \leq 2) = 0{,}24 + 0{,}36 + 0{,}25$

$P(X \leq 2) = 0{,}85$

c) $E(X) = n \cdot p$

$E(X) = 15 \cdot 0{,}09 = 1{,}35$

d) $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

$Var(X) = 15 \cdot 0{,}09 \cdot (1-0{,}09) = 1{,}23$

e) Extra → Cuál es la probabilidad de que fallen entre 2 y 4 semáforos dado que fallaron a lo sumo 2.

(Ej. tipo parcial)

$$P(2 \leq X \leq 4 / X \leq 2) = \frac{P[(2 \leq X \leq 4) \cap (X \leq 2)]}{P(X \leq 2)}$$

OBS: • $(2 \leq X \leq 4) \cap (X \leq 2) =$

$X = 2$

$$P(X=2 / X \leq 2) = \frac{P(2)}{P(0)+P(1)+P(2)}$$

CA: $P(0) = \binom{15}{0} \cdot (0{,}09)^0 \cdot (1-0{,}09)^{15-0} = 0{,}24$

$P(1) = \binom{15}{1} \cdot (0{,}09)^1 \cdot (1-0{,}09)^{15-1} = 0{,}36$

$P(2) = \binom{15}{2} \cdot (0{,}09)^2 \cdot (1-0{,}09)^{15-2} = 0{,}25$

$$P(X=2 / X \leq 2) = \frac{0{,}25}{0{,}24+0{,}36+0{,}25} = 0{,}3$$

4) $\mathcal{E} =$ "Tomar aleatoriamente 20 circuitos integrados y observar cuántos de ellos fallan y cuántos no"

$X =$ "# de chip integrados que fallan de 20"

$X \sim Bi\,(n,p)$, $n = 20$ y $p = 0{,}1$

$P(E) = 0{,}1$

$P(E^c) = 0{,}9$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$

CA

$P(X<1) = \binom{20}{0} \cdot (0{,}1)^0 \cdot (1-0{,}1)^{20-0}$

$P(X<1) = 0{,}12$

$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}12 = \boxed{0{,}88} \rightarrow$ Probabilidad de que falle como mínimo 1 chip integrado

5) E = "Tomar 18 declaraciones de impuestos de manera aleatoria y observar cuántas son incorrectas"

X = "# de declaraciones incorrectas de 18"

$X \sim Bi\,(n,p)$ con $n = 18$, $p = 0{,}20$

$P(E) = 0{,}20 \rightarrow$ Éxito = declaraciones incorrectas

$P(E^c) = 0{,}80 \rightarrow$ Fracaso = declaraciones correctas

a) I) $P(X=0) = \binom{18}{0} \cdot (0{,}20)^0 \cdot (0{,}80)^{18-0}$

$P(X=0) = 0{,}018$

II) $P(X=5) = \binom{18}{5} \cdot (0{,}20)^5 \cdot (0{,}80)^{18-5}$

$P(X=5) = 0{,}15$

III) $P(X \geq 2) = 1 - P(X<2)$

CA $P(X<2) = \sum_{k=0}^{1} \binom{18}{k} \cdot (0{,}20)^k \cdot (0{,}80)^{18-k}$

$$= \binom{18}{0} \cdot (0{,}20)^{0} \cdot (0{,}80)^{18-0} + \binom{18}{1} \cdot (0{,}20)^{1} \cdot (0{,}80)^{18-1}$$

$$= 0{,}018 + 0{,}81$$

$$= 0{,}099$$

$$P(X \geq 2) = 1 - 0{,}099$$

$$P(X \geq 2) = 0{,}90$$

iv) $$P(3 \leq X \leq 7) = \sum_{k=3}^{7} \binom{18}{k} \cdot (0{,}20)^{k} \cdot (0{,}80)^{18-k}$$

$$= \binom{18}{3} \cdot (0{,}20)^{3} \cdot (0{,}80)^{18-3} + \binom{18}{4} \cdot (0{,}20)^{4} \cdot (0{,}80)^{18-4}$$

$$\binom{18}{5} \cdot (0{,}20)^{5} \cdot (0{,}80)^{18-5} + \binom{18}{6} \cdot (0{,}20)^{6} \cdot (0{,}80)^{18-6}$$

$$\binom{18}{7} \cdot (0{,}20)^{7} \cdot (0{,}80)^{18-7}$$

$= \boxed{0{,}71} \rightarrow$ Probabilidad de que se encuentren entre 3 y 7 declaraciones incorrectas

b) $E(X) = n \cdot p$

$E(X) = 18 \cdot 0{,}20 = 3{,}6$

c) Y = "# de declaraciones incorrectas entre 200"

$Y \sim Bi\,(n, p)$ con $n = 200$, $p = 0{,}20$

$E(Y) = 200 \cdot 0{,}20 = 40$

$E(Y) = 200 \cdot 0{,}20 = 40$

⑥ $\mathcal{E}$ = "observar aleatoriamente dispositivos de medición y ver cuál es el primero que presenta una desviación excesiva"

X = "número de dispositivo en presentar una desviación excesiva"

$X \sim G(p)$ con $p = 0{,}05$

$P(E) = 0{,}05$ → Prob. del éxito (desviación excesiva)

$P(E^c) = 0{,}95$ → Prob del fracaso (no tenga una desviación excesiva)

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad \text{con } k = 1, 2, \ldots$$

a) $P(X=6) = (1-0{,}05)^{6-1} \cdot (0{,}05)$ con $k = 6$

$P(X=6) = 0{,}039$

b) Y = "número de dispositivo que no muestre una desviación excesiva"

$X \sim G(p)$ con $p = 0{,}95$

$P(X=7) = (1-0{,}95)^{7-1} \cdot (0{,}95)$

$P(X=7) = 1{,}48 \times 10^{-8}$

⑦ $\mathcal{E}$ = "Tomar 200 diodos al azar y observar

7) $\mathcal{E}$ = "Tomar 200 diodos al azar y observar cuántos fallan"

X = "# de diodos que fallan entre 200"

$X \sim Bi(n, p)$ con $n = 200$, $p = 0{,}03$

$P(E) = 0{,}03 \rightarrow$ Éxito

$P(E^c) = 0{,}97 \rightarrow$ Fracaso

a) $E(X) = n \cdot p$

$E(X) = 0{,}03 \cdot 200 = 6$

b) $var(X) = n \cdot p \cdot (1-p) =$

$= 200 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97$

$= 5{,}82$

c) $P(X=0) = \binom{200}{0} \cdot 0{,}03^{0} \cdot (1 - 0{,}03)^{200-0}$

$P(X=0) = 2{,}26 \times 10^{-3}$

8) $\mathcal{E}$ = "Tomar un disco aleatoriamente y observar la cantidad de partículas en 100 cm² del disco"

X = "# de partículas entre 100 cm² de un disco"

$X \sim P(\lambda)$ con $\lambda = 0{,}1$

a) $P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k}}{k!}$ con $k = 0, 1, 2, \ldots$

$k = 12$

$$P(X=12) = \frac{e^{-0,1} \cdot (0,1)^{12}}{12!}$$

$$P(X=12) = 1,88 \times 10^{-21}$$

b) $$P(X=0) = \frac{e^{-0,1} \cdot 0,1^{0}}{0!}$$

$$P(X=0) = 0,9$$

c) $$P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-0,1} \cdot (0,1)^{k}}{k!} =$$

$$\frac{e^{-0,1} \cdot (0,1)^{0}}{0!} + \frac{e^{-0,1} \cdot (0,1)^{1}}{1!} + \frac{e^{-0,1} \cdot (0,1)^{2}}{2!} =$$

$$0,9 + 0,09 + 4,5 \times 10^{-3} = 0,99$$

9) E = "Observar la cantidad de clientes que llegan por hora a ciertas instalaciones de servicio automotriz"

X = "# de clientes que llegan a las instalaciones de servicio automotriz por hora"

$X \sim P(\lambda)$ con $\lambda = 7$

$E(X) = \lambda$
$E(X) = 7 \Rightarrow \lambda = 7$

Y = "# de clientes que llegan a las instalaciones de servicio automotriz en dos horas"

$y \sim P(2.\lambda)$ con $2\lambda = 2.7 = 14$

a) $P(x>10) = 1 - P(x \leq 10)$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{10} \frac{e^{-\lambda} . \lambda^{k}}{k!}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{10} \frac{e^{-14} . 14^{k}}{k!}$$

$$= 1 - 0{,}17$$

$$= 0{,}82$$

b) $E(Y) = \lambda = 14$

(10) E = "Tomar 25 lotes al azar y observar si son aceptados o no"

X = "# de chips defectuosos entre 6"

$X \sim H(n, k, N)$
con $N = 25$, $n = 3$, $k = 6$

Acepto si
muestra < 2 def.

a) $P(X<2) = P(0) + P(1)$

$$P(X=x, n, k, N) = \frac{\binom{k}{x} . \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X=x,n,k,N) = \frac{\quad}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X<2) = \frac{\binom{6}{0}\cdot\binom{25-6}{3-0}}{\binom{25}{3}} + \frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{25-6}{3-1}}{\binom{25}{3}}$$

$$P(X<2) = 0{,}42 + 0{,}44 = 0{,}86$$

b) $E(x) = \frac{n.k}{N} = \frac{3.6}{25} = 0{,}72$

$$* \; Var(x) = n\cdot\frac{k}{N}\cdot\left(\frac{N-k}{N}\right)\cdot\frac{N-n}{N-1}$$

$$Var(x) = \frac{3.6}{25}\cdot\left(\frac{25-6}{25}\right)\cdot\frac{25-3}{25-1} =$$

$$= \frac{18}{25}\cdot\frac{19}{25}\cdot\frac{22}{24} = 0{,}50$$

11

E = " Seleccionar 5 componentes al azar y rechazar el lote si encuentra un componente defectuoso"

X = " # de componentes defectuosos"

$X \sim H(n,k,N)$ con $n=5$, $k=3$, $N=40$

$$P(X=x,n,k,N) = \frac{\binom{k}{x}\cdot\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

a) $P(X=1,3,5,40)=\dfrac{\binom{3}{1}\cdot\binom{40-3}{5-1}}{\binom{40}{5}} = \dfrac{3\cdot 66.045}{658.008} = 0,30$

b) $E(X)=n\cdot\dfrac{k}{N} = 5\cdot\dfrac{3}{40} = 0,375$

12) X = "número de empresas que da a sus empleados 4 semanas de vacaciones después de 15 años de servicio"

$X\sim Bi\,(n,p)$ $n=6$, $p=0,50$

a) $P(2\le X\le 5) = \sum_{i=2}^{5}\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} = P(2)+P(3)+P(4)+P(5)$

$\binom{6}{2}\cdot(0,50)^2\cdot 0,50^4 + \binom{6}{3}\cdot 0,50^3\cdot 0,50^3 + \binom{6}{4}\cdot 0,50^4\cdot 0,50^2 +$

$\binom{6}{5}\cdot 0,50^5\cdot 0,50^1 = 0,81$

b) $P(X<3) = \sum_{i=0}^{2}\binom{n}{k}\cdot p^k(1-p)^{n-k} = P(0)+P(1)+P(2)$

$= \binom{6}{0}\cdot 0,50^0\cdot 0,50^6 + \binom{6}{1}\cdot 0,50^1\cdot 0,50^5 + \binom{6}{2}\cdot 0,50^2\cdot 0,50^4$

$= 0,34$

13) $\left.\begin{array}{l} p=0,001 \\ m=4000 \end{array}\right\} \lambda = mp = (0,001)(4000)$

$\lambda = 4$

X = "# de retrasos aéreos por un año"

$X\sim Bi\,(n,p)$ con $n=4000$ y $p=0,001$

Como n es muy grande y p muy chico puedo

$X \sim Bi(n, p)$ ...

Como n es muy grande y p muy chico puedo aproximar por Poisson

$$\lambda = n \cdot p = 4.000 \cdot 0{,}001$$
$$\lambda = 4$$

$X \sim P(\lambda)$ con $\lambda = 4$

a) $P(X \leq 4) = \sum_{k=0}^{4} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} =$

$$\frac{e^{-4} \cdot 4^0}{0!} + \frac{e^{-4} \cdot 4^1}{1!} + \frac{e^{-4} \cdot 4^2}{2!} + \frac{e^{-4} \cdot 4^3}{3!} + \frac{e^{-4} \cdot 4^4}{4!} = 0{,}62$$

b) $E(X) = 4$

c) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$

$$1 - 0{,}23 = 0{,}76$$

d) $P(X = 12) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{12}}{12!} = 6{,}4 \times 10^{-4}$

14 lote → 15 compresores → 2 son defectuosos

↓

muestra: 5 compresores

$\mathcal{E}$ = "seleccionar un lote de 5 compresores al azar y observar la # de compresores defectuosos"

$\mathcal{E}$ = "seleccionar un lote de 5 compresores al azar y observar la # de compresores defectuosos"

X = "# de compresores defectuosos entre 5"

$X \sim H(n,k,N)$ con $N=15$, $n=5$ $k=2$

a) $P(X=1, n, k, N) = \dfrac{\binom{k}{x} \cdot \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ con $n=5, k=2, N=15$

$P(X=1) = \dfrac{\binom{2}{1} \cdot \binom{15-2}{5-1}}{\binom{15}{5}} = \dfrac{2 \cdot 715}{3003} = 0{,}47$

b) $P(X=2) = \dfrac{\binom{2}{2} \cdot \binom{15-2}{5-2}}{\binom{15}{5}} = \dfrac{1 \cdot 286}{3003} = 0{,}09$

15) X = "# de empresas bajo sospecha"

$X \sim H(n,k,N)$ con $n=5$, $k=3$
$N=20$

a) $P(X=0) = \dfrac{\binom{3}{0} \cdot \binom{20-3}{5-0}}{\binom{20}{5}} = 0{,}4$

b) $P(X=2) = \dfrac{\binom{3}{2} \cdot \binom{20-3}{5-2}}{\binom{20}{5}} = 0{,}13$