ESERCIZIO 10

Ω = insieme finito $\{\omega_1 \dots \omega_n\}$

$H: \Omega \to \mathbb{R}$

$\beta > 0$

$$P_\beta(\omega) = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta H(\omega)} \quad , \omega \in \mathbb{R}$$

$$Z_\beta = \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta H(\omega)}$$

ESEMPIO $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

$\omega_1 \quad , \quad \omega_2 \quad , \quad \omega_3$ ESITI

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$H(\omega_1) \quad H(\omega_2) \quad H(\omega_3)$ FUNZIONE

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$r_1 \qquad r_2 \qquad r_3$ VALORI REALI

$$P_\beta(\omega_1) = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta H(\omega_1)} = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta r_1}$$

$$P_\beta(\omega_2) = \quad = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta r_2}$$

$$P_\beta(\omega_3) = \quad = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta r_3}$$

$$Z_\beta = e^{-\beta r_1} + e^{-\beta r_2} + e^{-\beta r_3}$$

$$\rightarrow \frac{1}{e^{-\beta r_1} + e^{-\beta r_2} + e^{-\beta r_3}} \cdot e^{-\beta r_L}$$

NORMALIZZAZIONE

PROPRIETÀ LIMITI

- $\lim f() \cdot g() = \lim f() \cdot \lim g()$
- $\lim f() + g() = \lim f() + \lim g()$

In generale, se il numero di operandi è finito, il limite della somma è la somma dei limiti.

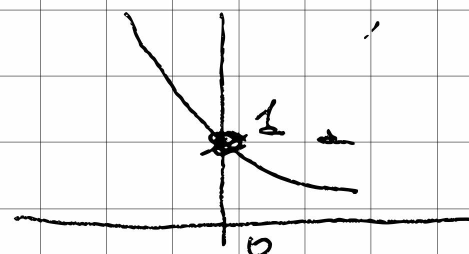
DOMANDA A

$$\lim_{\beta \to 0} P(\omega) = ?$$

$$\lim_{\beta \to 0} P_\beta(\omega) = \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{Z_\beta} \cdot e^{-\beta H(\omega)}$$

$$= \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{Z_\beta} \cdot \lim_{\beta \to 0} e^{-\beta H(\omega)}$$

- $\lim_{\beta \to 0} e^{-\beta H(\omega)} = 1$



NB $e^{0} = e^{1-1} = e^{1} \cdot e^{-1} = \frac{e}{e} \cdot 1$

$$\lim_{\beta \to 0} Z_\beta = \lim_{\beta \to 0} \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta H(\omega)}$$

se è finito

$$= \sum_{\omega \in \Omega} \lim_{\beta \to 0} e^{-\beta H(\omega)}$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} 1 = |\Omega|$$

$$\Rightarrow \lim_{\beta \to 0} P_\beta(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{|\Omega|}$$

DISTRIBUZIONE UNIFORME

DOMANDA B

$$\lim_{\beta \to \infty} P_\beta(\omega) = ?$$

INSIEME A: SPIEGAZIONE

$$A = \{ \omega \in \Omega : H(\omega) \leq H(\tilde{\omega}) \ \forall \tilde{\omega} \in \Omega \}$$

Punti 1

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
H_ω	5	3.5	10	3.5

$$A = \{ \omega_2, \omega_4 \}$$

Poniamo $v_* = \min_{\omega \in \Omega} H(\omega)$ minimo di H

$$A = \{ \omega \in \Omega : H(\omega) = v_* \}$$

$$P_\beta(\omega) = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta H(\omega)}$$

1) RISCRIVIAMO $P_{\beta}\omega$

$$P_{\beta}(\omega) = \frac{1}{Z_{\beta}} e^{-\beta H(\omega)} = \frac{e^{-\beta H(\omega)}}{\sum_{\tilde{\omega}\in\Omega} e^{-\beta H(\tilde{\omega})}} \cdot \frac{e^{\beta V_*}}{e^{\beta V_*}}$$

$$= \frac{e^{-\beta(H(\omega)-V_*)}}{\sum e^{-\beta(H(\tilde{\omega})-V_*)}}$$

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{e^{-\beta(H(\omega)-V_*)}}{\sum e^{-\beta(H(\tilde{\omega})-V_*)}}$$ COME PRIMA

come prima, calcoliamo i due limiti

2) CALCOLO LIMITI

2.1 $\lim_{\beta\to\infty} e^{-\beta(H(\omega)-V_*)}$ DUE CASI

$\omega \in A$ o $\omega \notin A$

1) $\omega \in A \to H(\omega) = V_* \to H(\omega) - V_* = 0$

$\to \lim_{\beta\to\infty} e^{\underbrace{-\beta\, 0}_{=0}} = \lim_{\beta\to\infty} 1 = 1$

NB il limite di una costante è la costante stessa

2) $\omega \notin A \rightarrow H(\omega) > V_* \rightarrow H(\omega) - V_* > 0$

$$\lim_{\beta \to \infty} e^{-\beta(\underset{>0}{*})} = \lim_{\beta \to \infty} \frac{1}{e^{\beta(*)}} = 0$$

2.2
$$\lim_{\beta \to \infty} \sum_{\tilde{\omega} \in \Omega} e^{-\beta(H(\tilde{\omega}) - V_*)} =$$

$$= \sum_{\tilde{\omega} \in \Omega} \lim_{\beta \to \infty} e^{-\beta(H(\tilde{\omega}) - V_*)}$$

$$\forall a \quad \tilde{\omega} \notin A \rightarrow \lim_{\beta \to \infty} e^{-\beta(H(\tilde{\omega}) - V_*)} = 0$$

$$= \sum_{\substack{\tilde{\omega} \in \Omega \\ \omega \in A}} + \underbrace{\sum_{\substack{\tilde{\omega} \in \Omega \\ \omega \notin A}}}_{=0}$$

$= |A|$

NB Il valore è una costante

$$\lim_{\beta \to \infty} p_\beta(\omega) = \frac{1}{|A|} \cdot e^{-\beta(H(\omega) - v_*)}$$

se $\omega \notin A$ $= 0$

se $\omega \in A$ $= \frac{1}{|A|}$

Distribuzione uniforme sui minimi assoluti di H