ESERCIZIO 11

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$\mathcal{F}$ è una sigma algebra è una famiglia di sotto insiemi di Ω

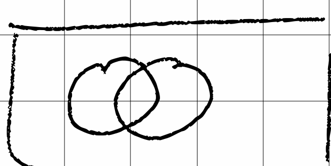
- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- $A_1 \, e \, A_2 \in \mathcal{F} \rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$

CHIUSURA RISPETTO ALLE DUE OPERAZIONI

- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ ESEMPIO
  $A_1, A_2, A_3 \subset \mathcal{F}$

$P(A_n) = 0 \ \forall n \rightarrow P(\bigcup A_n) = 0$

Sol 11.1 UNION BOUND



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\geq 0}$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

QUINDI

$$P\left(\bigcup A_n\right) \le \underbrace{\sum \underbrace{P(A_n)}_{=0}}_{=0} = 0$$

$$P\left(\bigcup A_n\right) \le 0$$

MA' $P\left(\bigcup A_n\right) \ge 0$ perché prob

$\rightarrow P\left(\bigcup A_n\right) = 0.$

11.2 $P(A_n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad P\left(\bigcap A_n\right) = 1$

- $P(A_n^c) = 1 - \underbrace{P(A_n)}_{=1} = 1 - 1 = 0$

(1)

$\rightarrow P\left(\bigcup A^c\right) = 0$ [usando il risultato di prima]

- $P\left(\bigcap A_n\right) = 1 - P\left[\left(\bigcap A_n\right)^c\right]$

$= 1 - \underbrace{P\left[\left(\bigcup A_n^c\right)\right]}_{=0} = 1 \quad \square$

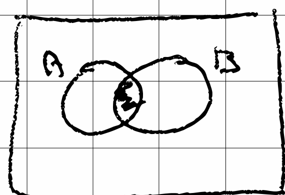
PER DE MORGAN

$[A \cap B]^c = A^c \cup B^c$

1.1.3 $P(B) = 0 \quad P(B \cap A) = 0 \quad \forall A \in F$

(Spiegazione intuitiva, B è impossibile)
Quindi stiamo chiedendo che B accade insieme ad un altro evento, ma non ha senso!

$A \cap B \subseteq B \rightarrow P(A \cap B) \leq P(B)$

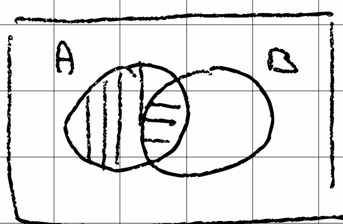


Ma $P(B) = 0 \rightarrow P(A \cap B) \leq 0$
Come abbiamo visto prima $P(A \cap B) \geq 0$
quindi $P(B) = 0$

11.4 $P(B) = 1 \quad P(A \cap B) = P(A)$

Di nuovo, spiega intuitivamente, B succede quando tutto dipende da come si comporta A

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \setminus B)$$



GOAL: dimostrare $P(A \setminus B) = 0$

$A \setminus B = A \cap B^c$, ma $P(B^c)$
$= 1 - P(B) = 0$

Quindi per 3) $\to P(A \cap B^c) = 0$

$\to P(A \setminus B) = 0$