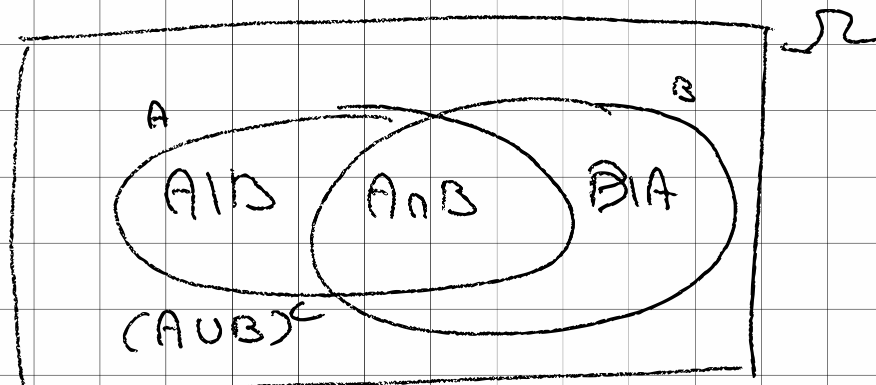
ESERCIZIO 13

- Sia $\Omega \neq \emptyset$, $A, B \subseteq \Omega$
costruire la più piccola σ-algebra in Ω che contiene sia A che B

- SIGMA ALGEBRA IN BREVE
$\mathcal{F}$ sigma algebra
1) $\emptyset \in \mathcal{F}$
2) $A \in \mathcal{F} \rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3) $A_1, A_2 \subset \mathcal{F} \rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$

- OBBIETTIVI
1) Costruire σ algebra
2) Dimostrare che è la più piccola

Dati $A, B \subseteq \Omega$ possiamo scrivere che:



DENOMINIAMO

$C_1 = A \setminus B$, $C_2 = A \cap B$

$C_3 = B \setminus A$, $C_4 = (A \cup B)^c$

NB $C_i \cap C_j = \emptyset$

Cioè tutte le coppie di C_i sono disgiunte

$$\mathcal{F} = \Big\{ \underbrace{\bigcup_{j \in J} C_j}_{\text{Unione di } C} : J \subseteq \underbrace{\{1, \dots, 4\}}_{\text{Tutti i } 2^4 \text{ sottoinsiemi}} \Big\}$$

CONVENZIONE $\bigcup_{j \in \emptyset} C_j = \emptyset$

Ossia, F contiene anche l'insieme vuoto

Vedremo che questo serve per completare la dimostrazione

CLAIM

1) $\mathcal{F}$ contiene A e B
2) $\mathcal{F}$ è una σ-algebra
3) $\mathcal{F}$ è la più piccola ?

PROOF

1) $\mathcal{F}$ contiene A e B

$$A = \underbrace{(A \setminus B)}_{C_1} \cup \underbrace{(A \cap B)}_{C_2} = C_1 \cup C_2$$

$$B = \underbrace{(B \setminus A)}_{C_3} \cup \underbrace{(A \cap B)}_{C_2} = C_3 \cup C_2$$

$\square$

Quindi esprimo A e B come unione di elementi di $\mathcal{F}$

2) $\mathcal{F}$ é una sigma Algebra
Devo dimostrare le tre proprietà

1) $\emptyset \in \mathcal{F}$, si vede convenzione iniziale

$\hookrightarrow \emptyset \in \mathcal{F} \rightarrow \emptyset^c \in \mathcal{F} \rightarrow \Omega \in \mathcal{F}$

è vero?

$$\Omega = \underbrace{(A \setminus B)}_{C_1} \cup \underbrace{(A \cap B)}_{C_2} \cup \underbrace{(B \setminus A)}_{C_3} \cup \underbrace{[(A \cup B)^c]}_{C_4}$$ OK

2) $E \in \mathcal{F} \rightarrow E^c \in \mathcal{F}$

3) $E_1, E_2 \in \mathcal{F} \rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathcal{F}$

Possiamo dimostrare 2) e 3) in modo generale mostrando che:

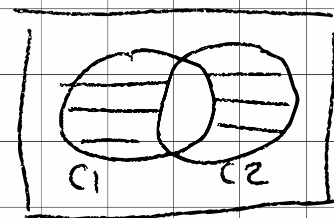
$$\bigcup C_j \in \mathcal{F} \rightarrow \left[\bigcup C_j\right]^c \in \mathcal{F}$$

Sia $\bigcup C_j \in \mathcal{F}$, quindi se prendo il complementare

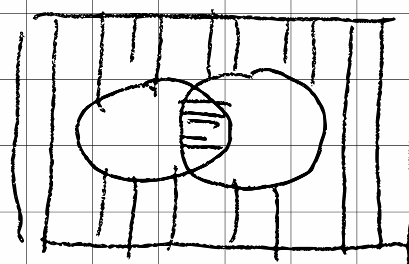
$$\left[\bigcup_{j\in J} C_j\right]^c = \bigcup_{j\in\{1,..4\}\setminus J} C_j$$

ESEMPIO

$$C_1 \cup C_3 = \bigcup_{j\in\{1,3\}} C_j$$



Il complementare di $C_1 \cup C_3$ è $C_2 \cup C_4$



Quindi $\left[\bigcup_{j\in\{1,3\}} C_j\right]^c = C_2 \cup C_4$

$$= \bigcup_{j\in\{2,4\}} C_j = \bigcup_{j\in\{1,2,3,4\}\setminus\{1,3\}} C_j$$

Dati $G \in \mathcal{F}$, possiamo dire che

$$G = \bigcup_{j \in J} C_j \quad \text{e che}$$

$$G^c = \bigcup_{j \in \{1,2,3,\ldots\} \setminus J} C_j$$

E poi dimostrare che l'unione dei due appartiene a $\mathcal{F}$

3) $\mathcal{F}$ é la più piccola
σ-algebra