TUTORATO 07

Scritto 0 ex 1

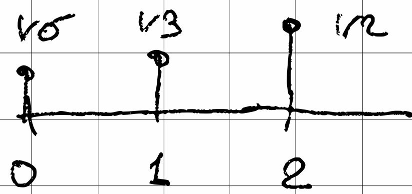
- Funzione VA discreta
- Funzione VA continua (notazione)

Scritto 0 bis ex 1

- Valore atteso VA uniforme
- Relazione fra $f(x)$ e $F(x)$ con un esempio

SCRITTO ⊙ EX 1

i)



$$\begin{cases} 0 & 1/6 \\ 1 & 1/3 \\ 2 & 1/2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{3\cdot 2}+\frac{2}{3\cdot 2}+\frac{1}{6}=1 \checkmark$$

$$E[X]=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot 1/3+2\cdot 1/2$$

$$Var[X]=E[X^2]-\left[E[X]\right]^2=$$

$$X^2 \sim \begin{cases} 0 & 1/6 \\ 1 & 1/3 \\ 4 & 1/2 \end{cases}$$

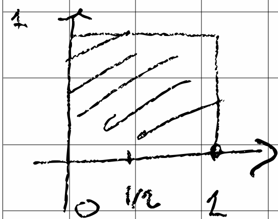
$$\left[\begin{array}{ll} X & y=f(x) \\ E[X]=\sum x\, p(x) & E[y]=E[f(x)]=\sum f(x)\, p(x) \end{array}\right]$$

$$E[X^2]=0\cdot 1/6+1\cdot 1/3+4\cdot 1/2$$

NB Mai più esercizi di questo tipo
(non ha senso)

$X = \sin(2\pi U) \quad U \sim \text{uniform } [0,1]$

$f(U)$



$f(x) = \frac{1}{1-0} = 1$

$\int_0^1 \quad = \frac{1}{2} x \Big|_0^1 = 1 - 0 = 1$

MA io ho X, la quale fa due cose
- prende i valori del supporto di U compreso fra 0 e 1 e applica la funzione $\sin \cdot 2\pi \cdot u$
- mantiene le stesse probabilità

Stesso cose di prima!

$$E[X] = E[\sin(2\pi U)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x)\, dx$$

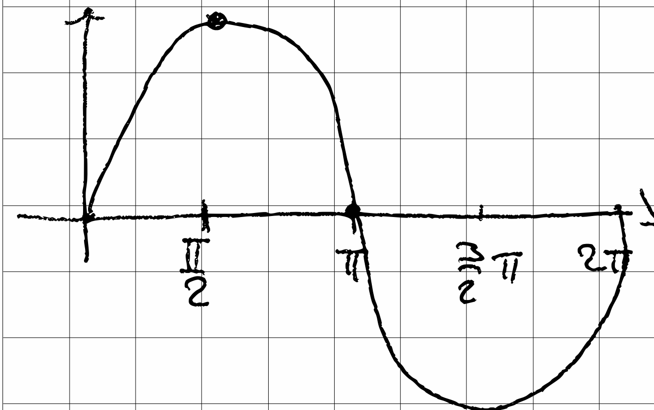
$$= \int_0^1 \underbrace{x}_{g(x)} f_X(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 \sin 2\pi x \, f_U(x)\, dx$$

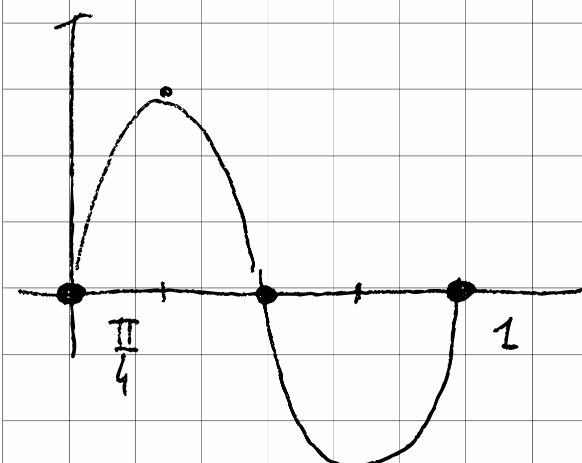
$$= \int_0^1 \sin 2\pi x \; 1 \cdot dx$$

$$= \int_0^1 \sin 2\pi x \, dx$$

$$\int_0^1 \sin 2\pi x \; 1 \, dx = -\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi x)\Big|_0^1$$



$\sin x$



$\sin 2\pi x$

DOE

$0 \to \sin(2\pi 0) = 0$

$1 \to \sin(2\pi) = 0$

$\frac{\pi}{2} \to \sin(2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \sin \pi = 0$

1) Occhio alla notazione!

- $f(x)$ prima è la trasformazione
- Adesso è la funzione di densità

STIAMO INDICANDO COSE DIVERSE

iii) $X = e^{Y}$ con Y $\exp(3)$

$$E[X] = E[e^{Y}] = \int_0^{+\infty} e^{x} \underbrace{f_Y(x)}_{\lambda}\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{y} \underbrace{f_Y(y)\, dy}$$ $\longrightarrow$ PORA NOTAZIONE!

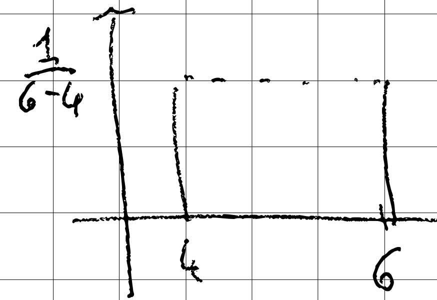
$$\begin{bmatrix} Y \sim Exp[\lambda] \to f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} \\ Y \sim Exp[3] \to f_Y(y) = 3 e^{-3y} \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{x}\, 3 e^{-3x}\, dx$$

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} (e^{x})^2\, 3 e^{-3x}\, dx$$

SCRITTO 0 BIS ESERCIZIO 1

i) $X \sim$ uniforme$[4,6]$



RISULTATO NOTO

$$E[X] = \frac{4+6}{2} = 5$$

$$V[X] = \frac{(6-4)^2}{12} = \frac{2^2}{12} = 1/3$$

SOL ANALITICA

$$\int_4^6 x \frac{1}{6-4}\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right|_4^6 = \frac{1}{4}(36-16) = \frac{20}{4} = 5$$

$$\int_4^6 x^2 \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right|_4^6 =$$

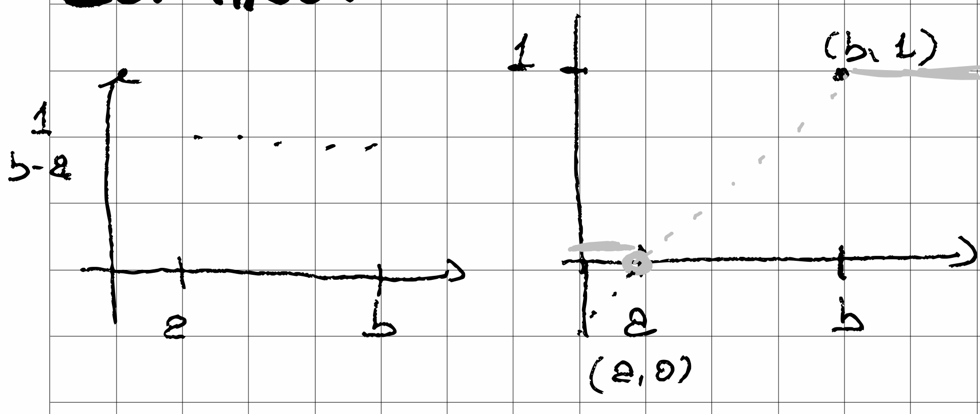
RIPARTIZIONE

ii $F(x) = \frac{x^3}{27} \mathbb{1}_{(0,3)}(x) + \mathbb{1}_{[3,\infty]}(x)$

GRAFICO

L'esercizio fornisce $F(x)$, ma a noi serve la $f(x)$. Come la ricaviamo?

ESEMPIO: VARIABILE ALEATORIA CONTINUA



$x_1\ (a,0) \rightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

$x_2\ (b,1)$

$\rightarrow \frac{x-a}{b-a} = \frac{y-0}{1-0} \rightarrow y = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a}$

$\rightarrow y = \frac{1}{b-a} x - \frac{a}{b-a}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} \cdot x & \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$f(x) = F'(x) = \left[\frac{1}{b-a} x\right]' = \frac{1}{b-a}$$

Riprendo $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{27} & x \in [0,3] \\ 1 & x > 3 \end{cases}$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{3}{27} x^2 = \frac{1}{9} x^2 \\ 0 \end{cases}$$

Ora possiamo calcolare il valore atteso

$$E[X] = \int_0^3 x\, f(x)\, dx = \int_0^3 x\, \frac{1}{9} x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{9} \int_0^3 x^3\, dx = \frac{1}{9}\, \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^3 = \frac{1}{36} \cdot 3^4$$

$$= \frac{81}{36} = \frac{9 \cdot 9}{9 \cdot 4} = \frac{9}{4}$$

$$Var[X] = E[X^2] - \left[E[X]\right]^2$$

iii

$X = Y^2 \qquad Y \sim N(0,1)$

$E[X] = \int_0^1 x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$

$= \int_0^1 x^2 \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} =$

Ma $E[Y] = 0 \quad VAR[Y] = 1$

$Var[Y] = E[Y^2] - [E[Y]]^2$

$\rightarrow 1 = E[Y^2] - [0] \rightarrow E[Y^2] = 1$

- $E[X] = E[Y^2] = 1$ un integrale in meno!

- $Var[X] = E[X^2] - [\overbrace{E[X]}^{1}]^2$
  $= E[Y^4] - 1$

$E[Y^4]$

RIASSUNTO

I Se l'esercizio chiede di calcolare MEDIA e VARIANZA di una VA A tale che
- $B = g(A)$
- A VA con distribuzione nota

RECALL
Data $E[X]$, possiamo calcolare $Var[X]$
- $Var[X] = E[X^2] - [E[X]]^2$

Se la VA è discreta

CASO DISCRETO

$$E[B] = \sum_{a \in \Omega} g(a)\, p_A(a) \qquad \text{con } b = g(a)$$

$$E[B^2] = \sum_{a \in \Omega} g(a)^2 \cdot p_A(a)$$

Se la VA è contin., definita su intervallo $[a,b]$

CASO CONTINUO

$$E[B] = \int_a^b g(a) \cdot f_A(a)\, da \qquad \text{con } b = g(a)$$

$$E[B^2] = \int_a^b g(a)^2 \cdot f_A(a)\, da$$

II

Se l'esercizio fornisce la funzione di RIPARTIZIONE $F(x)$, ci sono due passaggi

$$F(x) = g(x) \cdot \mathbb{1}_{[a,b)}(x) + \mathbb{1}_{[b,+\infty]}(x)$$

1) Trovare la funzione di DENSITÀ come derivata della funzione di ripartizione facendo attenzione all'intervallo in cui F è definita

Intervallo

$[a,b)$ $$f(x) = F'(x) = \left[g(x) \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{[a,b]}(x)}_{=1} + \underbrace{\mathbb{1}_{[b,+\infty)}(x)}_{=0} \right]'$$

$$= [g(x)]' = g'(x)$$

$[b,+\infty)$ $$f(x) = F'(x) = \left[g(x) \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{[a,b]}(x)}_{=0} + \underbrace{\mathbb{1}_{[b,+\infty)}(x)}_{=1} \right]'$$

$$= [\,1\,]' = 0$$

2) Calcolare $E[X]$ e $V[X]$ come nella prima

$$E[X] = \int_a^b x\, f(x)\, dx$$

$$E[X^2] = \int_a^b x^2 f(x)\, dx$$

$$Var[X] = E[X^2] - [E[X]]^2$$

COMMENTIAMO
SCRITTO 2 ESERCIZIO 1

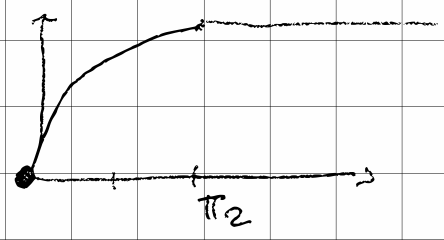
i) X assolutamente continua

$$F(x) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-4,3]}(x) + \frac{1}{3} \mathbb{1}_{[3,4]}(x)$$

È una variabile aleat

---

ii) ii) $F(x) = \sin(x)\, \mathbb{1}_{[0,\pi/2]} + \mathbb{1}_{(\pi/2, +\infty)}$



$$f(x) = [F(x)]' = \cos(x)$$

---

iii) iii

$X = \exp(Z)$ $\quad Z$ a uniforme $[0,2]$

$$E[X] = \int_0^2 e^x \frac{1}{2}\, dx$$