

Wolfgang Schneider
Berthold Heinrich

Praktische Regelungstechnik

Effektiv lernen durch Beispiele

4. Auflage



Springer Vieweg

Praktische Regelungstechnik

Wolfgang Schneider · Berthold Heinrich

Praktische Regelungstechnik

Effektiv lernen durch Beispiele

4., überarbeitete Auflage



Springer Vieweg

Wolfgang Schneider
FB Maschinenbau und Versorgungstechnik
Georg-Simon-Ohm-Hochschule Nürnberg
Nürnberg, Deutschland

Berthold Heinrich
Max-Born-Berufskolleg
Recklinghausen, Deutschland

ISBN 978-3-658-16992-3
DOI 10.1007/978-3-658-16993-0

ISBN 978-3-658-16993-0 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg
© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 1991, 1994, 2008, 2017
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.
Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Lektorat: Thomas Zipsner

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Vieweg ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Strasse 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort

Das vorliegende Lehrbuch der Regelungstechnik ist für den Maschinen – und Anlagenbauer gedacht, nicht für den Spezialisten aus der Elektrotechnik. Daher stammen die meisten Beispiele aus der Praxis des Planers oder Betreibers von Produktions- oder Versorgungsanlagen. Es werden weniger die mathematischen Verfahren erläutert, die man vor allem in der elektrischen Regelungstechnik findet, sondern es sollen eher praxisnahe, d. h. anlagennahe Kenntnisse und Fähigkeiten vermittelt werden.

Die Grundlagen der Regelungstechnik haben sich in den letzten Jahren wenig geändert, aber die Hochschullandschaft ist in Bewegung geraten. Mit der Einführung von Bachelor-Studiengängen ist eine Neuorientierung auch in der Regelungstechnik notwendig geworden. Durch die deutliche Reduzierung des Stundenumfangs musste auch die Regelungstechnik auf das Basiswissen und allgemein einsetzbare Fähigkeiten konzentriert werden. Aufbauend darauf werden dann weiterbildende Bücher der Regelungstechnik in Masterstudiengängen benötigt. Das vorliegende Buch ist vor allem für die Ausbildung zum Bachelor im Bereich Technik geeignet.

Das Besondere dieses Lehr- und Arbeitsbuches sind die zahlreichen ausführlich berechneten Übungsbeispiele, die meisten davon basieren auf realen Anlagen, die aus didaktischen Gründen aber vereinfacht wurden. Aus Klausuraufgaben wurden durch Erweiterung der Aufgabenstellung umfangreiche Übungsaufgaben, die insbesondere das Selbststudium unterstützen.

Der Aufbau des Buches richtet sich nach den Hauptkomponenten eines Regelkreises. Nach den Grundlagen der Regelungstechnik wird in Kap. 2 eine Übersicht über die Regelstrecken gegeben, Kap. 3 beschreibt die Regler. Der Aufbau und die Einstellung des analogen Regelkreises nach empirischen Verfahren werden in Kap. 4 erläutert. Abgerundet wird dieses Lehrbuch im Abschn. 4.7 durch die Vorstellung einiger besonderer Regelkreise, wie sie in der Praxis häufig zum Einsatz kommen.

Das Buch ist gegenüber der 3. Auflage von 2008 deutlich umstrukturiert worden. Neben dem Autorenwechsel war auch ein Grund das Erscheinen der DIN IEC 60050-351. Diese hat viele Begrifflichkeiten in der Steuerungs- und Regelungstechnik neu formuliert. Durch die Umstrukturierung des Buches kann es an einzelnen Stellen dazu kommen, dass auf Inhalte kommender Kapitel verwiesen wird. In diesen Fällen sollte das Sachwortverzeichnis benutzt werden.

Wichtige Elemente im Buch sind die durchgerechneten Beispiele, die das theoretisch Dargestellte in praxisbezogenen Kontexten anwenden. Als weiteres Element werden Aufgaben angeboten, deren Lösungen über einen QR-Code abgerufen und mit der eigenen verglichen werden können.

Besonderen Dank gilt den Mitarbeitern des Verlags Springer Vieweg, insbesondere Herrn Thomas Zipsner und Frau Imke Zander.

Wanne-Eickel, im Dezember 2016

Berthold Heinrich

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Grundlagen | 1 |
| 1.1 | Begriffe | 1 |
| 1.1.1 | Steuern | 1 |
| 1.1.2 | Regeln | 4 |
| 1.1.3 | Regelungssystem | 8 |
| 1.1.4 | Normierung | 12 |
| 1.1.5 | Arbeitspunkt | 14 |
| 1.1.6 | Linearisierung | 15 |
| 1.1.7 | Signale | 18 |
| 1.2 | Mathematische Beschreibungen | 22 |
| 1.2.1 | Mathematische Beschreibung im Zeitbereich | 22 |
| 1.2.2 | Mathematische Beschreibung im Frequenzbereich | 29 |
| 1.2.3 | Mathematische Beschreibung digitaler Signale | 31 |
| 1.2.4 | Mathematische Beschreibung stochastischer Signale | 33 |
| 1.3 | Wirkungsplan | 34 |
| 1.4 | Testfunktionen | 43 |
| 1.4.1 | Sprungantwort | 45 |
| 1.4.2 | Impulsantwort | 47 |
| 1.4.3 | Anstiegsantwort | 48 |
| 1.5 | Antwortfunktionen für elementare Zeitverhalten | 49 |
| 1.5.1 | P-Verhalten | 49 |
| 1.5.2 | I-Verhalten | 50 |
| 1.5.3 | D-Verhalten | 52 |
| 2 | Regelstrecken | 55 |
| 2.1 | Definition | 55 |
| 2.2 | Analyse des Verhaltens von Regelstecken | 55 |
| 2.3 | Klassen von Regelstrecken | 57 |
| 2.4 | Strecken mit oder ohne Rückwirkung | 58 |
| 2.5 | Statisches Verhalten von Regelstrecken | 59 |
| 2.5.1 | Grundlagen | 59 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2.5.2 | Kennlinien von Regelstreckenkomponenten | 62 |
| 2.6 | Zeitverhalten von Regelstrecken | 70 |
| 2.6.1 | Grundlagen | 70 |
| 2.6.2 | Totzeitverhalten | 70 |
| 2.6.3 | Zeitverhalten der P-T ₁ -Strecke | 75 |
| 2.6.4 | Nachbildung von P-Strecken höherer Ordnung | 81 |
| 2.6.5 | Kennwerte für schwingungsfähige P-Strecken | 101 |
| 2.6.6 | Strecken mit I-Verhalten | 115 |
| 3 | Regler | 125 |
| 3.1 | Allgemeines | 125 |
| 3.2 | Grundzeitverhalten des Reglers | 126 |
| 3.3 | P-Regler | 128 |
| 3.3.1 | Begriffe | 128 |
| 3.3.2 | Bleibende Regelabweichung | 129 |
| 3.3.3 | Kennlinie des P-Reglers | 131 |
| 3.4 | PI-Regler | 137 |
| 3.4.1 | Grundlagen | 137 |
| 3.4.2 | I-Teil des Reglers | 138 |
| 3.4.3 | Nachstellzeit T_i | 140 |
| 3.4.4 | PI-Regler in Parallelschaltung | 143 |
| 3.5 | PD-Regler | 145 |
| 3.5.1 | Der Verschwindeimpuls | 145 |
| 3.5.2 | Kennwerte des PD-Reglers | 147 |
| 3.5.3 | Vorhalt T_V | 147 |
| 3.6 | PID-Regler | 150 |
| 3.7 | Unstetige Regler | 154 |
| 3.7.1 | Arten von unstetigen Reglern | 154 |
| 3.7.2 | Erzeugen des Stellverhaltens eines Zweipunktreglers | 158 |
| 4 | Zusammenwirken von Regler und Strecken | 161 |
| 4.1 | Grundlagen | 161 |
| 4.2 | Regelkreisanalyse | 162 |
| 4.2.1 | Methodik der Analyse | 162 |
| 4.2.2 | Ablauf der Regelkreisanalyse | 164 |
| 4.3 | Spezielle Regelkreise | 169 |
| 4.3.1 | Regelkreis mit bleibender Regeldifferenz | 169 |
| 4.3.2 | Regelkreis ohne bleibende Regeldifferenz | 183 |
| 4.3.3 | Regelkreise mit schwingendem Verhalten | 192 |
| 4.4 | Empirische Einstellregeln | 198 |
| 4.4.1 | Stabilität | 199 |
| 4.4.2 | Einstellwerte aus der Sprungantwort | 203 |

| | | |
|------------------------|--|-----|
| 4.4.3 | Regelgüte | 205 |
| 4.4.4 | Regleroptimierung | 210 |
| 4.5 | Zeitverhalten von Regelkreisen mit Zweipunktreglern | 211 |
| 4.5.1 | P-T ₁ -Strecke mit Zweipunktregler und Hysterese | 211 |
| 4.5.2 | Zeitverhalten eines Zweipunktreglers ohne Hysterese an einer P-T _i -Strecke | 215 |
| 4.5.3 | Verbesserung des Regelverhaltens | 217 |
| 4.6 | Digitale Algorithmen | 217 |
| 4.6.1 | Kopplung der Regelstrecke mit dem digitalen Regler | 218 |
| 4.6.2 | Digitales Modell der Regelstrecke | 226 |
| 4.7 | Regelschaltungen | 230 |
| 4.7.1 | Beispiele für einschleifige Regelkreise | 231 |
| 4.7.2 | Grob-Fein-Regelung | 235 |
| 4.7.3 | Störgrößenaufschaltung | 236 |
| 4.7.4 | Führungsgrößenaufschaltung | 240 |
| 4.7.5 | Verhältnisregelung | 242 |
| 4.7.6 | Kaskadenregelung | 245 |
| Literatur | | 251 |
| Sachverzeichnis | | 253 |

1.1 Begriffe

Einer der ersten Regler der Neuzeit war der von James Watt erfundene Fliehkraftregler. Im Jahre 1784 verwendete er dieses Prinzip an der von ihm entwickelten Dampfmaschine, um die Drehzahl bei Belastungsschwankungen möglichst konstant zu halten.

Das Funktionsprinzip basiert im Wesentlichen auf einem Fliehkraftpendel (Abb. 1.1), das mit der Abtriebswelle der Dampfmaschine verbunden ist und das mittels Hebeln das Ventil (Drosselklappe) für den zuströmenden Dampf verstellt. Bei einer höheren Belastung der Dampfmaschine sinkt zunächst die Drehzahl. Das Fliehkraftpendel nimmt eine andere Gleichgewichtslage ein und verstellt dabei das Ventil so, dass mehr Dampf in den Zylinder strömt. Dadurch steigt die Drehzahl wieder an. Bei geringerer Belastung ist es umgekehrt. Der erste Drehzahlregler war erfunden.

Auch wenn die Regelungstheorie erst viel später erarbeitet wurde, verhalf dieser einfache mechanische Drehzahlregler der Dampfmaschine zum Durchbruch.

1.1.1 Steuern

Die Steuerung greift aufgrund von logischen Verknüpfungen (Kriterien) in den Prozess ein. Zum Teil werden auch Informationen verarbeitet, die durch Messungen dem Prozess entnommen werden (meist Grenzwerte). Oft kommen die Befehle von außen und werden mit bereits vollführten Aktionen verglichen. Aber nie werden die Einflussgrößen durch die Steuerung selbst merklich beeinflusst.

- **DIN IEC 60050-351** Die Steuerung ist ein Vorgang in einem System, bei dem eine oder mehrere variable Größen als Eingangsgrößen andere variable Größen als Ausgangsgrößen aufgrund der dem System eigenen Gesetzmäßigkeit beeinflussen.

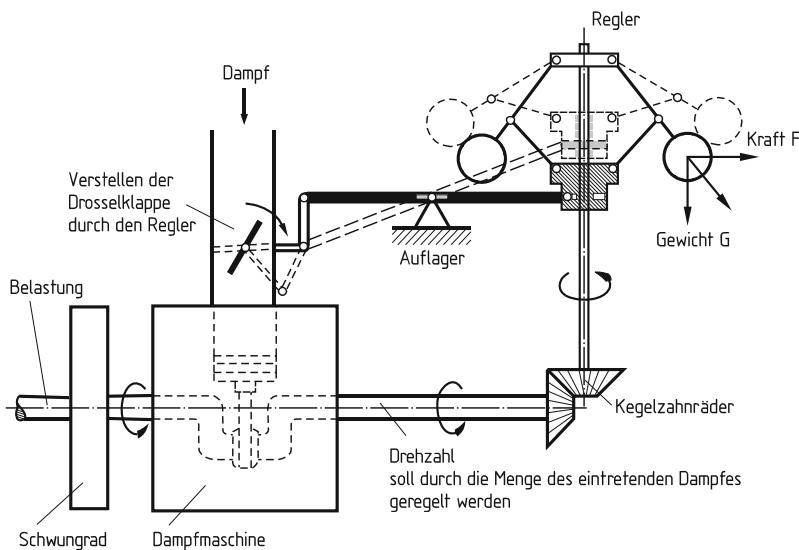


Abb. 1.1 Fliehkraftregler nach James Watt

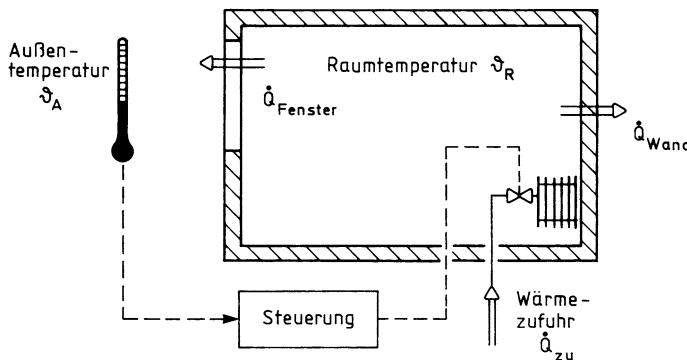


Abb. 1.2 Steuerung einer Raumtemperatur. Gerätetechnische Anordnung

Kennzeichen für das Steuern ist der offene Wirkungsweg oder ein geschlossener Wirkungsweg, bei dem die durch die Eingangsgrößen beeinflussten Ausgangsgrößen nicht fortlaufend und nicht wieder über dieselben Eingangsgrößen auf sich selbst wirken.

Am Beispiel einer über die Außentemperatur gesteuerten Heizungsanlage soll dies näher erläutert werden.

In Abb. 1.2 ist die gerätetechnische Anordnung für die Einhaltung der Raumtemperatur ϑ_R auf z. B. 20 °C gegeben. Dazu wird die Außentemperatur ϑ_A als Haupteinflussgröße auf die Raumtemperatur gemessen. Sinkt die Außentemperatur, so nehmen die Wärmeverluste über die Außenflächen (Wand, Fenster, ...) zu. Dies muss durch eine Vergrößerung

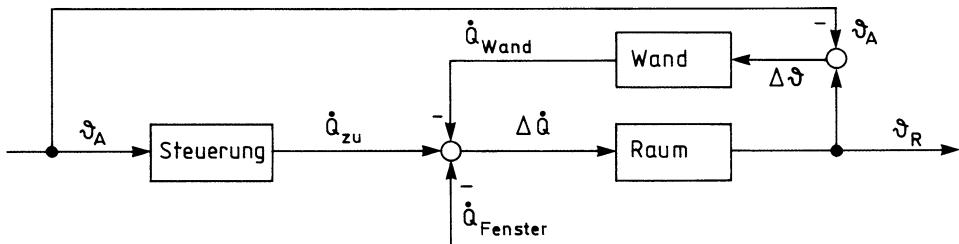


Abb. 1.3 Schematische Darstellung der Raumtemperatursteuerung

der Wärmezufuhr kompensiert werden. Umgekehrt proportional zur Außentemperatur ϑ_A verändert die Steuerung die Energiezufuhr der Heizung so, dass ϑ_R konstant bleibt.

Es ist unwahrscheinlich, dass durch die zugeführte Wärmeenergie die Messgröße ϑ_A verändert wird, d. h. die entstehende Raumtemperatur wirkt nicht auf die Außentemperatur zurück. Die Hauptstörgröße (Außentemperatur) wird bei der Steuerung erfasst und ausgeglichen. Die Raumtemperatur wird gesteuert.

Treten weitere Störgrößen auf, wird z. B. das Fenster geöffnet, so ist die Einhaltung der Raumtemperatur unbefriedigend. Der Außentemperaturfühler bekommt keine Information über das geöffnete Fenster.

Dies ist aus der schematischen Darstellung in Abb. 1.3 zu erkennen. Aufgrund der Außentemperatur ϑ_A wird die Wärmezufuhr \dot{Q}_{zu} gesteuert.

Durch die Energiebilanz $\Delta\dot{Q} = \dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{Wand} - \dot{Q}_{Fenster}$ ergibt sich die Einstellung der Raumtemperatur ϑ_R . Die Wärmeabfuhr durch die Wand \dot{Q}_{Wand} hängt von der Temperaturdifferenz

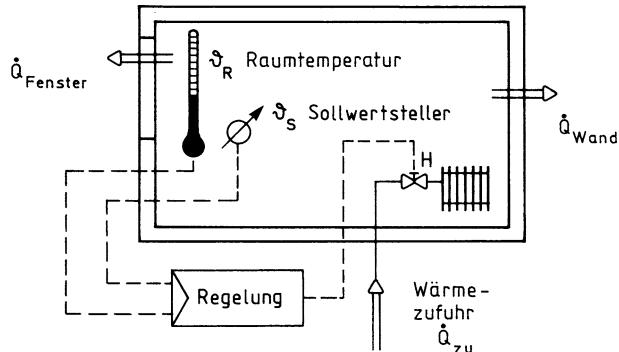
$$\Delta\vartheta = \vartheta_R - \vartheta_A$$

ab. Die Wärmeabfuhr durch das geöffnete Fenster $\dot{Q}_{Fenster}$ kühlt jedoch den Raum aus, ohne dass die Steuerung dies erfährt und durch erhöhte Wärmezufuhr ausgleichen kann.

Vorteil der Steuerung Der automationstechnische Aufwand ist geringer und eine Messung wird nur dann erforderlich, wenn einzelne Störeinflüsse erfasst und ausgeglichen werden sollen.

Eine Steuerung reagiert schon, ehe sich die Störung auf die Ausgangsgröße ausgewirkt hat oder sogar von ihr erkannt wird. Durch die frühzeitige Erfassung der Störung treten weder eine Verzugszeit noch Schwingungen auf. Eine Steuerung ist immer stabil.

Nachteil der Steuerung Kleinere Störungen werden nicht, auch nicht indirekt erfasst. Dazu wäre eine lückenlose Messung aller Störungen erforderlich. Eine Einhaltung von vorgegebenen Werten ist also nicht möglich. In der Steuereinrichtung muss die Auswirkung der erfassten Störung möglichst exakt nachgebildet werden. Dies ist nur selten gegeben.

Abb. 1.4 Regelung einer Raumtemperatur

1.1.2 Regeln

Die Regelung verarbeitet Größen, die auf einer Messung beruhen, vergleicht sie mit einer von außen kommenden Führungsgröße (Sollwert) und greift bei einer Abweichung in den Prozess ein. Das Stellen erfolgt dabei so, dass die von der Messung erfasste Prozessgröße an die Führungsgröße angeglichen wird. Dadurch entsteht ein geschlossener Regelkreis.

► **DIN IEC 60050-351** Die Regelung ist ein Vorgang, bei dem fortlaufend eine variable Größe, die Regelgröße, erfasst (gemessen), mit einer anderen variablen Größe, der Führungsgröße, verglichen und im Sinne einer Angleichung an die Führungsgröße beeinflusst wird.

Kennzeichen für das Regeln ist der geschlossene Wirkungsablauf, bei dem die Regelgröße im Wirkungsweg des Regelkreises fortlaufend sich selbst beeinflusst.

Ein Regelkreis besteht gerätetechnisch aus einer Messeinrichtung, einer Regeleinrichtung und einer Stelleinrichtung (siehe auch Abb. 1.10). Mit der Messeinrichtung werden die notwendigen Informationen aus dem Prozess in der zu regelnden Anlage übernommen. Die Regeleinrichtung versucht, Abweichungen von der Führungsgröße zu verringern. Die Stelleinrichtung verändert gezielt Massen- und Energieströme in der zu regelnden Anlage.

Die Regelung hat also die Aufgabe, trotz störender Einflüsse den Wert der Regelgröße an den durch die Führungsgröße vorgegebenen Wert anzugeleichen, auch wenn dieser Ausgleich im Rahmen der gegebenen Möglichkeiten nur unvollkommen geschieht.

Am Beispiel einer Raumtemperaturregelung wird der Regelkreis näher untersucht. Regelauflage ist die Einhaltung der Raumtemperatur ϑ_R . Dazu ist die gerätetechnische Anordnung in Abb. 1.4 gegeben. Die Raumtemperatur ϑ_R wird gemessen und mit dem per Hand eingestellten Sollwert ϑ_S verglichen; proportional zur Differenz (und ggf. zur Dauer dieser Differenz) bewirkt die Regelung eine Änderung der Wärmeenergie \dot{Q}_{zu} . Die Regelung muss so ausgelegt sein, dass mit steigender Temperatur ϑ_R die Wärmezufuhr vermindert wird. Im Regelkreis ist demnach einmal eine Wirkungsumkehr erforderlich.

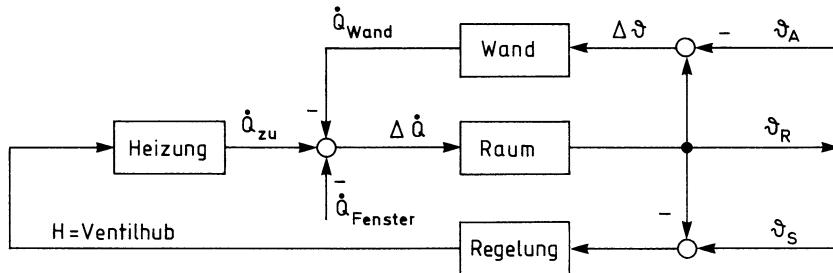


Abb. 1.5 Schematische Darstellung der Raumtemperaturregelung

Die Regelung wirkt über die Änderung der Wärmezufuhr \dot{Q}_{zu} auf die Raumtemperatur und damit auf die Anzeige des Raumthermometers zurück. Dazu ist jedoch als Ursache eine Abweichung vom Sollwert notwendig. Außerdem vergeht eine gewisse Verzugszeit bis die Regelung die Abweichung ausgeglichen hat.

Aus Abb. 1.5 erkennt man, dass die Raumtemperaturregelung im geschlossenen Kreis verläuft. Alle möglichen Störungen, die auf die Raumtemperatur Wirkung haben, z. B. ein Öffnen des Fensters oder die Wärmeabgabe von Personen, die sich im Raum aufhalten, werden berücksichtigt.

Vorteil der Regelung Es kann ein vorgegebener Wert einer gemessenen Größe so genau wie nötig eingehalten werden. Alle Störeinflüsse werden indirekt erfasst und ausgeglichen.

Nachteil der Regelung Dazu ist jedoch die zu regelnde Größe permanent zu messen; dies bedeutet einen höheren gerätetechnischen Aufwand. Weiterhin kann die Regelung erst dann reagieren, wenn eine Abweichung vorhanden ist. Die Wirkung der Abweichung auf eine genaue Fertigung von ebenen Werkstückoberflächen lässt sich leicht nachvollziehen, denn dort sind solche Abweichungen, genannt Oberflächenrauigkeit, meist nicht tolerierbar.

Beispiel 1.1 (Dosierung einer Gasmenge)

In einer Gasleitung soll die Gasmenge \dot{m}_G mit Hilfe eines Ventils dosiert und durch eine Düse in einen Behälter eingeblasen werden.

- Es wird der Druck p_1 hinter dem Ventil gemessen und mit einem Sollwert $p_{1,Soll}$ verglichen. Bei Veränderung des Vordruckes p_0 als Störgröße wird das (Regel-) Ventil so beeinflusst, dass der Störung entgegengewirkt wird (Abb. 1.6).

Zur Untersuchung der Anordnung entwerfen wir einen Wirkungsplan, in dem alle wesentlichen Elemente in Form von Blöcken enthalten sind (siehe Abb. 1.7).

Durch den Massenstrom \dot{m}_G entsteht ein Druckabfall am Regelventil und in den Rohrleitungen. Insgesamt steht das Druckgefälle $\Delta p_{ges} = p_0 - p_2$ zur Verfügung.

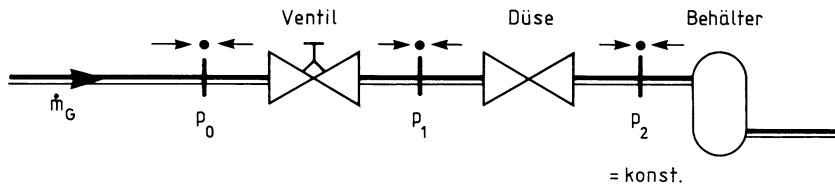


Abb. 1.6 Gerätefließbild einer Rohrleitungsstrecke mit Armaturen

Zieht man davon den Druckabfall Δp_V der Leitung bis zur Messstelle (also mit Ventil) ab, so berechnet sich die Regelgröße p_1 als physikalische Größe „Druck“ zu: $p_1 = \Delta p_{\text{ges}} - \Delta p_V = p_0 - p_2 - \Delta p_V$.

Durch die Messeinrichtung wird die Regelgröße p_1 als Signal erfasst und mit dem Sollwert $p_{1,\text{Soll}}$ durch Differenzbildung der Spannungen verglichen. Ein eingebautes Gerät erzeugt daraus eine Stellgröße y , die zum Stellantrieb weitergeleitet wird. Der Stellantrieb verändert am Ventil den Hub H , wodurch Massenstrom \dot{m}_G und damit auch Druck p_1 verändert werden. Der Kreis ist geschlossen (Abb. 1.7); es handelt sich um eine Regelung.

Ein- und Ausgangsgrößen des Reglers sind Spannungen, angegeben in Volt. Die notwendige Wirkungsumkehr wird realisiert, indem man die „Regeldifferenz“ $e = U_{\text{Soll}} - U_{\text{Ist}}$ berechnet. Mögliche Störungen, die auf die Regelstrecke einwirken, sind Änderungen des Vordruckes p_0 oder des Behälterdruckes p_2 . Steigt z. B. der Gegendruck p_2 , so steigt auch der Druck p_1 . Diese Größe wird als Spannungswert gemessen und über die Regelung im geschlossenen Wirkungsablauf an den Sollwert angepasst. Gleiches gilt für den Vordruck p_0 . Durch die Regelung kann eine Abweichung unabhängig von der Ursache behoben werden. Dazu muss jedoch die Abweichung zunächst vorhanden sein.

- b) Es wird der Druck p_0 vor dem Ventil gemessen. Bei Abweichungen vom Solldruck $p_{0,\text{Soll}}$ wird die Stellung des Ventils mit Hilfe einer Kennlinie so verändert, dass der Druck p_1 konstant bleibt (Abb. 1.7).

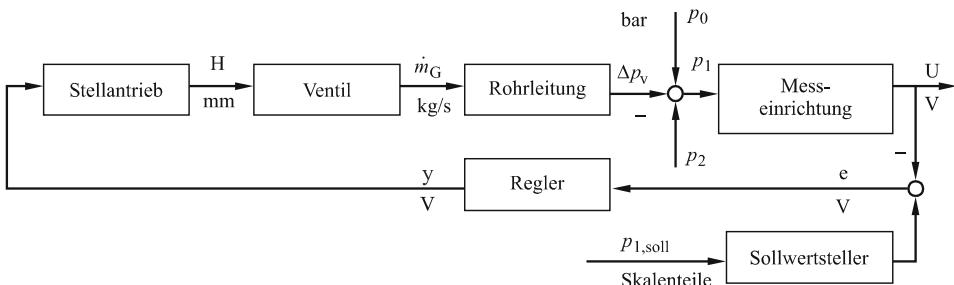
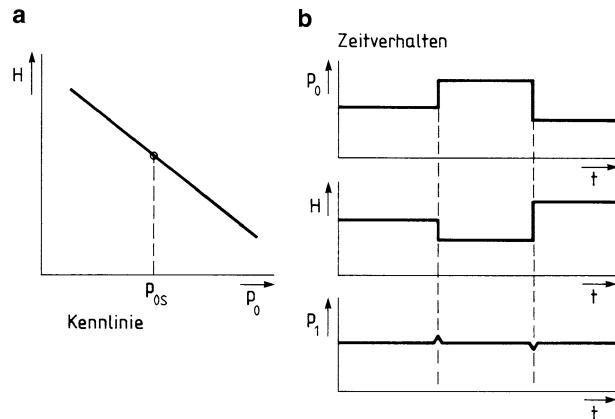


Abb. 1.7 Wirkschaltplan der Vordruckregelung

Abb. 1.8 a statisches Verhalten, b Zeitverhalten der Vordruckeinstellung



Auch durch diese Anordnung wird der Druck p_1 konstant gehalten. Die Einhaltung vorgegebener Werte p_1 ist gewährleistet, ehe sich eine Störung des Vordrucks p_0 ausgewirkt hat. Dazu muss das Übertragungsverhalten des eingebauten Ventils in Form einer linearisierten Kennlinie bekannt sein. Steigt der Vordruck p_0 sprunghaft an, so wird entsprechend der Kennlinie das Ventil sprunghaft geschlossen. Ist die Kennlinie optimal angepasst, so ist keine Änderung des Druckes p_1 zu erkennen (Abb. 1.8b).

Es wird der Anstieg des Vordrucks p_0 gemessen und entsprechend der Kennlinie Abb. 1.8a direkt (ohne Sollwert-Istwert-Vergleich) in den Hub H für das Ventil umgewandelt. Zur Untersuchung des Wirkungsablaufes entwerfen wir wieder einen Schaltplan (Abb. 1.9).

Die Steuerung hat eine „fallende Kennlinie“ (Vorzeichenumkehr). Durch eine Verringerung des Hubes wird der Massenstrom \dot{m}_G indirekt über eine Vergrößerung des Druckverlustes von Rohrleitung und Ventil Δp_V reduziert. Ist die Vergrößerung von Δp_V gleich groß wie der Druckanstieg p_0 , so ist keine Änderung des Druckes p_1 zu erwarten.

$$\Delta p_1 = \Delta(p_0) - \Delta(\Delta p_V) = 0$$

Der Druck p_1 wird also über eine Steuerkette im offenen Wirkungsablauf gesteuert. Es entsteht keine, auch nicht kurzzeitige Abweichung. Eine Rückwirkung des Druckes

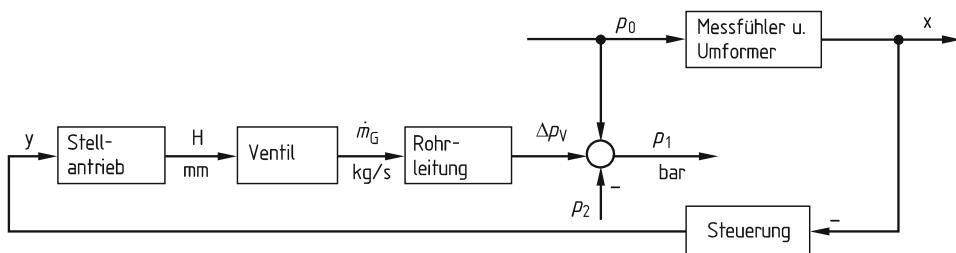


Abb. 1.9 Wirkschaltplan der Steuerung

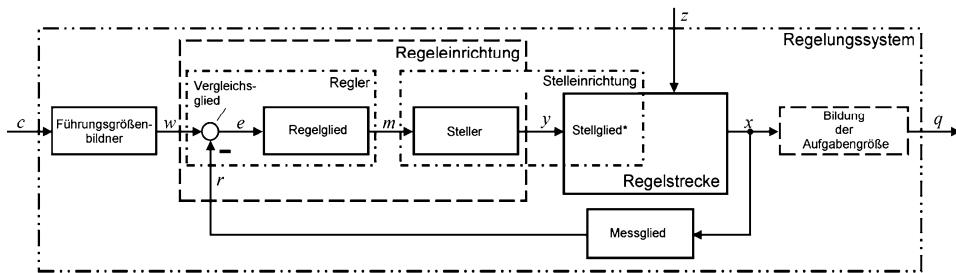


Abb. 1.10 Wirkungsplan mit typischen Elementen eines elementaren Regelungssystems

Tab. 1.1 Verwendete Größen in einem Regelungssystem (nach DIN IEC 60050-351)

| | |
|--------------------|---------------------|
| c | Zielgröße |
| w | Führungsgröße |
| e | Regeldifferenz |
| m | Reglerausgangsgröße |
| y | Stellgröße |
| z | Störgröße |
| x | Regelgröße |
| q | Aufgabengröße |
| r | Rückführgröße |
| \circlearrowleft | Summierungspunkt |
| \cdot | Verzweigungspunkt |

p_1 auf den Druck p_0 ist vernachlässigbar; eine Veränderung der Stellung eines Druckminderers einer Haus-Gasversorgungsanlage hat keinen Einfluss auf den Druck des Gasversorgungsnetzes.

Der Nachteil dieser Steuerung ist, dass sich Änderungen des Gegendruckes p_2 voll auf den Druck p_1 auswirken. $\Delta p_2 = \Delta p_1$ (bei Überschallströmung).

Steigt der Gegendruck p_2 an, so wird dies nicht von der Steuerung bemerkt; sie kann deshalb auch nicht reagieren.

1.1.3 Regelungssystem

Die oben beschriebenen Steuerketten und Regelkreise stellen die Zusammenschaltung einzelner Teilsysteme oder Systeme zu einem Wirkungsweg dar.

Die Teilsysteme (teils auch *Glieder* genannt) und die auftretenden Größen werden im Folgenden erläutert. Die nachfolgende Darstellung bezieht sich zunächst auf elementare Regelkreise.

Abb. 1.10 zeigt nach DIN IEC 60050-351 einen Wirkungsplan mit typischen Elementen eines elementaren Regelungssystems. Die verwendeten Größen werden in Tab. 1.1 benannt.

Die folgenden Begriffe sind der DIN IEC 60050-351 entnommen.

- Die **Zielgröße** (command variable) c ist eine von der betreffenden Regelung nicht beeinflusste variable Größe, die dem Regelkreis von außen zugeführt wird und der die Aufgabengröße in vorgegebener Abhängigkeit folgen soll.
- Der **Führungsgrößenbildner** (reference-variable generating element) ist eine Funktionseinheit, welche die Führungsgröße aus der Zielgröße bildet. Häufig sollen Führungsgrößenbildner sicherstellen, dass kritische Grenzwerte der Führungsgröße nicht überschritten werden.
- Die **Führungsgröße** (reference variable) w legt dabei den Sollwert der Regelgröße x fest. Dieser Sollwert muss nicht notwendig konstant sein, sondern kann sich zeitlich ändern.
- Das **Vergleichsglied** (comparing element) ist eine Funktionseinheit mit zwei Eingängen und einem Ausgang, deren Ausgangsgröße die Differenz der beiden Eingangsgrößen, die *Regeldifferenz* (control difference variable) e ist.

$$e = w - r$$

Je genauer geregelt werden soll, desto empfindlicher muss der Regler auf die Regeldifferenzen reagieren. Da die Abweichung sehr klein werden soll, ist es notwendig, das Signal durch Einsatz von Hilfsenergie zu verstärken.

Es ist von großer Bedeutung, wie der Regler bei einer Regelabweichung eingreifen soll. Dieser Eingriff kann schnell, langsam oder zunächst sehr schnell und dann langsam sein. Die Art des Eingriffes nennt man Zeitverhalten. Dieses Zeitverhalten wird im Regler künstlich erzeugt. Dabei werden die mathematischen Funktionen Multiplikation, Integration und/oder die Differentiation verwendet.

- Das **Regelglied** (controlling element) bildet aus der Regeldifferenz die *Reglerausgangsgröße* m . Der *Steller* (actuator) bildet die zur Betätigung des *Stellgliedes* (final controlling element) erforderliche *Stellgröße* (manipulated variable) y .

Ein elektrisch, pneumatisch oder hydraulisch angetriebener Stellantrieb erzeugt die Kräfte, die notwendig sind, um alle Widerstände und Reibungskräfte des Stellvorgangs zu überwinden. Zum Stellantrieb gehört in der Regel auch ein Stellungsregler, der die Reglerausgangsgröße als Stellungsregler-Sollwert in den Stellhub oder Stellwinkeln umwandelt. Gerätetechnisch gehören Stellantrieb und Stellglied zusammen zur Stelleinrichtung.

- Die **Stellgröße** ist Eingang derjenigen Funktionseinheit, die entsprechend der Regelungsaufgabe zu beeinflussen ist, der *Regelstrecke* (controlled system). Die Regelstrecke bildet die *Regelgröße* (controlled variable) x .

Von der Wirkung her wird der Teil der Stelleinrichtung, der die Funktion des Prozesses verändernd beeinflusst, unter dem Namen Stellglied oder Aktor der Regelstrecke zugeordnet. Eine eindeutige Trennung ist nicht möglich. Oft zählt man den Ventilsitz mit Ventilkegel zur Einrichtung, das übrige Ventilgehäuse zur Strecke.

► Das **Messglied** (measuring element) bildet aus der an ihm zugeführten Regelgröße die **Rückführungsgröße** (feedback variable) r .

Regelgrößen sind immer dimensionsbehaftet. Um diese Messaufgaben zu erfüllen, wählt man geeignete Größen, die man messtechnisch erfassen kann, z. B.:

- Wasserstand: Messung des Druckes der Wassersäule mit einem Drucksensor
- Druck: Messung des Federweges an einem Plattenfederanometer
- Temperatur: Messung des Widerstandes eines Pt-100 Widerstandsfühlers.

Einheitsmessumformer sind Einrichtungen, die unter Verwendung einer Hilfsenergie eine physikalische Eingangsgröße in eine Ausgangsgröße mit einheitlichem Bereich 0 bis 100 % umformen. Das Ziel dieser Umformung ist es, das Regelgrößensignal für die Weiterverarbeitung aufzubereiten.

Ebenfalls zum Regelungssystem wird die Funktion „Bilden der **Aufgabengröße**“ (final controlled variable) q gezählt.

Im praktischen Betrieb sind Regelungen von Störungen beeinflusst. Diese fasst man zu einer Größe, der **Störgröße** (disturbance variable) z zusammen. Diese ist eine unerwünschte, unabhängige und meistens unvorhersehbare Eingangsgröße, die von außen auf das System wirkt.

Beispiel 1.2 (Kursregelung)

Ein Schiff bewegt sich auf einem See (Abb. 1.11). Die Regelgröße x ist der Kurs des Schiffes bezogen auf die Himmelsrichtung, die Stellgröße y ist die Ruderverstellung.

Bei einer Kursabweichung durch z. B. eine Wasserströmung z_1 als Störgröße muss durch eine entgegenwirkende Ruderverstellung diese Strömung kompensiert werden.

a) *Zeichnen Sie den Wirkungsplan.*

Es handelt sich hier um einen Regelkreis, dessen Wirkungsablauf geschlossen ist (siehe Abb. 1.12). Die Regelstrecke ist das Schiff, die Regelgröße der Ist-Kurs. Der Soll-Kurs wird durch den Kompass vorgegeben. Der Regler wird durch den Steuermann ersetzt. Als Stellgröße wird die Ruderstellung relativ zur Schiffs-Längsachse verwendet.

b) *Welche weiteren Störgrößen sind möglich?*

Alle externen Kräfte, die auf das Schiff einwirken, sind Störgrößen. Wenn die Kräfte nicht im Schwerpunkt des Schiffes wirken, z. B. bei böigem Seitenwind, entsteht auf

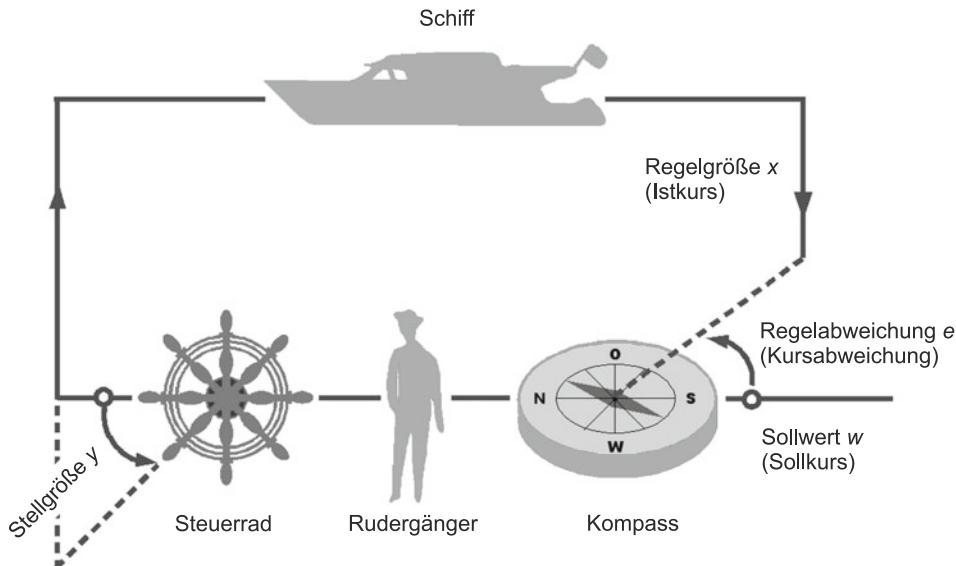


Abb. 1.11 Beispiel einer Kursregelung

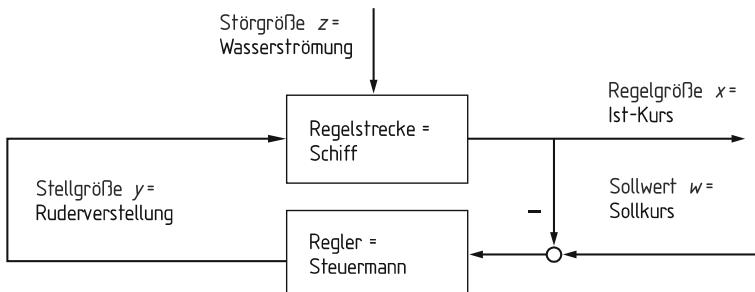


Abb. 1.12 Wirkungsplan der Kursregelung eines Schiffes

das Schiff ein Drehmoment, das durch ein entgegengerichtetes Rudermoment ausgeglichen werden muss.

Bei einer externen Störung (Strömung oder Wind) ist die von der Ruderstellung hervorgerufene Schrägstellung des Schiffes nicht identisch mit seinem absoluten Kurs.

- c) *Das Schiff fährt auf einem ruhenden See und ohne Seitenwind. Wie verhält sich das Schiff bei einem konstanten Ruderausschlag Δy ?*

Das Schiff fährt im Kreis. Wir werden dieses Verhalten später als I-Verhalten kennenlernen.

Aufgabe 1.1 (Glühofen)

In einem elektrisch beheizten Glühofen soll die Temperatur konstant gehalten werden. Dazu wird durch eine zu- und abschaltbare Heizspirale dem Ofen Wärme zugeführt.

- Benennen Sie die Regelgröße und erläutern Sie das Verhalten der Stellgröße.*
- Welche Störgrößen greifen auf die Ofentemperatur ein?*
- Zeichnen Sie vereinfacht den Wirkungsplan des Glühofens und die Störeingriffe.*

**1.1.4 Normierung**

In der Regelungstechnik arbeitet man bevorzugt mit normierten Größen. Diese erhält man, in dem man eine physikalische Größe, z. B. Temperatur, Druck, Durchfluss durch eine Konstante der gleichen Einheit teilt. Normierte Größen haben die Einheit „1“ oder „%“. Man bezeichnet sie auch als dimensionslos.

Dabei bezieht man

- die Regelgröße auf die Messspanne Δx
- die Stellgröße auf den Stellbereich y_H .

Zur Ermittlung der dimensionslosen Regelgröße x bezieht man die gemessene Regelgröße x_A auf den Messwertnullpunkt x_0 und auf den Messbereichsendwert x_{\max} bzw. auf einen im Messumformer einstellbaren Endwert

$$x = \frac{x_A - x_0}{\Delta x} \cdot 100 \, \%$$

Zahlenbeispiel

Regelgröße = Strom $I = 10 \text{ mA}$

Messbereichsnnullpunkt $I_0 = 4 \text{ mA}$ (siehe Tab. 1.2)

Messbereichsendwert $I_{\max} = 20 \text{ mA}$

Messbereich $I_M = I_{\max} - I_0 = 20 \text{ mA} - 4 \text{ mA} = 16 \text{ mA}$

$$i = \frac{I - I_0}{\Delta I} = \frac{I - I_0}{I_{\max} - I_0} = \frac{10 \text{ mA} - 4 \text{ mA}}{20 \text{ mA} - 4 \text{ mA}} = \frac{6 \text{ mA}}{16 \text{ mA}} = 0,375$$

Tab. 1.2 Einheitssignale

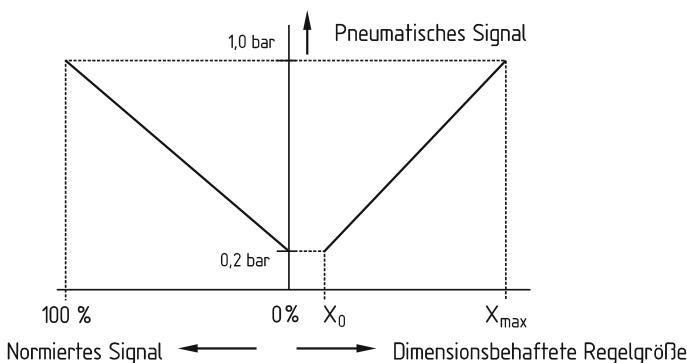
| | |
|--------------------------|-------------------|
| Relative Angabe | 0–100 % (0–1) |
| Eingeprägter Gleichstrom | 4–20 mA (0–20 mA) |
| Gleichspannung | 0–10 V |
| Pneumatischer Druck | 0,2–1 bar |

Für die physikalische Weiterverarbeitung in Einheitsreglern sind nach DIN IEC 60381 die Einheitssignale aus Tab. 1.2 definiert.

Gerätetechnisch wird dies im Messumformer realisiert (Abb. 1.13). Hier ist die Kennlinie eines pneumatischen Messumformers mit dem Eingang 0 bis 100 % des Messbereichs und dem Ausgang 0,2 bis 1 bar dargestellt.

Eine Besonderheit liegt in der Störgröße z . Störgrößen sind messtechnisch schwer erfassbare und sich zufällig verhaltene Größen, die als Last oder externe Beeinflussung auftreten. Diese Einflüsse verursachen die Abweichung der Regelgröße von der Führungsgröße und machen damit eine Regelung erst notwendig. Die Störgrößen greifen an den unterschiedlichsten Stellen in der Regelstrecke ein. Man muss sich dazu klarmachen, dass eine Regelstrecke aus einem einzelnen Bauteil bestehen kann, aber auch aus einer komplexen Anlage mit vielen unterschiedlichen Anlagenteilen. Für die analytische Betrachtung ist es notwendig, einen Störort zu definieren, auch wenn die Störung tatsächlich räumlich verteilt wirkt.

Dies hat zur Folge, dass alle Störgrößen dimensionslos bzw. in Form von Einheitssignalen vorliegen müssen. Die tatsächlichen Störgrößen werden deshalb über fiktive Umrechnungsglieder umgeformt (Abb. 1.14). Für die analytische Betrachtung ist eine weitere Vereinbarung hilfreich: Alle Störgrößen greifen am Eingang der erweiterten Regelstrecke ein. Diese Vereinbarung beeinflusst jedoch das Anfangsverhalten bei einem Störeingriff. Die Auswirkung muss dann im Einzelfall untersucht werden.

**Abb. 1.13** Schaltbild und Kennlinie eines pneumatischen Messumformers

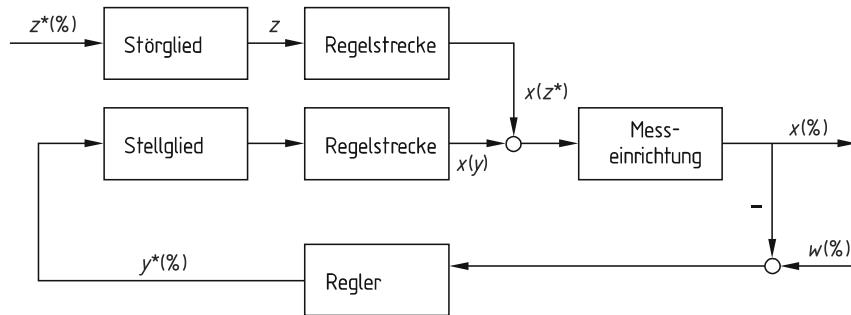
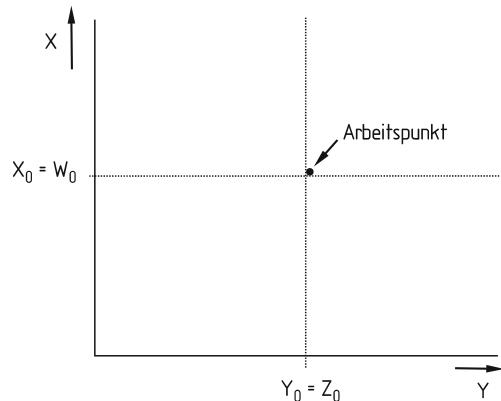


Abb. 1.14 Erweiterte Regelstrecke mit Stellteil und Störteil

Abb. 1.15 Definition des Arbeitspunktes



1.1.5 Arbeitspunkt

Die Regelung greift erst ein, wenn eine Abweichung oder eine Änderung auftritt. Deshalb wird in Schaltplänen meist nur die Änderung der physikalischen Größe von einem zunächst frei definierbaren Betriebspunkt untersucht.

Nehmen wir als Beispiel den Hub H des Ventils. Im Betriebspunkt beträgt der Hub H_0 . Bei einer Störung von außen stellt sich der Hub H_1 ein; H_1 setzt sich zusammen aus dem Wert im Betriebspunkt H_0 und der Änderung ΔH von diesem Wert.

$$H_1 = H_0 + \Delta H.$$

Für die regelungstechnische Betrachtung sind nur der Wert ΔH und die Richtung der Änderung von Bedeutung. Für den geschlossenen Regelkreis bekommt dieser Betriebspunkt eine besondere Bedeutung. Soll z. B. der Wasserstand auf einen festen Wert eingestellt werden, d. h. Sollwert = Istwert, dann kann dieser Wert durch einen bestimmten Hub H erreicht werden. Die dazu gehörige Störgröße wird dann als Arbeitspunktwert definiert (Abb. 1.15).

Der Betriebspunkt der Regelstrecke bei einer Störgröße z_0 , umgerechnet in die Einheit der Stellgröße, wird Arbeitspunkt genannt. Im Arbeitspunkt gilt:

$$x = w \text{ oder } \Delta x = \Delta w = 0 \quad \text{und} \quad y_0 = z_0 \text{ oder } \Delta y = \Delta z = 0.$$

1.1.6 Linearisierung

Nichtlineare Zusammenhänge zwischen Ursache und Wirkung sind in der Regelungstechnik sehr oft vertreten. Die beschreibenden Kennwerte von Regelstrecke ändern sich mit der aktuellen Störgröße z oder mit dem Sollwert w . Für die mathematische Behandlung eines Regelsystems ist es wesentlich einfacher, wenn alle Systemkennwerte konstant sind. Deshalb werden die einzelnen Systeme meist linearisiert und aus variablen Kennwerten werden Konstanten.

Dazu gibt es verschiedene Möglichkeiten:

a) Auswahl kompensierender Regeleinrichtungen Eine selten genutzte Möglichkeit der Linearisierung ist es, das nichtlineare Verhalten von Regelstreckenteilen durch bezüglich der Linearität ausgleichende Geräte durchzuführen. Dies kann erreicht werden, wenn man z. B. die Skalenstellung eines Messgliedes so wählt, dass bei gleichen Stellgrößenänderungen Δy proportionale Regelgrößenänderungen Δx entstehen.

Ähnliches kann man auch durch die Auswahl einer Stelleinrichtung erreichen, das durch ein Stellverhalten mit entgegen gerichteter Krümmung der Kennlinie ein nicht-lineares Verhalten der Regelstrecke ohne Stelleinrichtung ausgleicht. Siehe dazu auch Abschn. 2.5.

b) Statistische Linearisierung Die einfachste mathematische Linearisierung ist die Mittelwertbildung von streuenden Kennwerten.

$$\overline{K_p} = \frac{\sum_{i=1}^n K_{pi}}{n}$$

Weitere Möglichkeiten sind statistische Verfahren, die man bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet, z. B. Korrelationsanalyse oder Methode der kleinsten Fehlerquadrate.

c) Graphische Linearisierung Abb. 1.16 zeigt die Kennlinie eines nichtlinearen Regelkreisgliedes mit einer Eingangsgröße.

Man ersetzt nun in der Nähe des Arbeitspunktes A die gekrümmte Kennlinie durch eine Gerade, indem man die Tangente im Arbeitspunkt zeichnet.

Diese Tangente wird durch eine Gleichung beschreiben. Der Kennwert K_p ist zugleich die Steigung der Kennlinie im Arbeitspunkt.

$$x_a = x_a(A) + K_p \cdot \Delta x_e$$

Abb. 1.16 Graphische Linearisierung

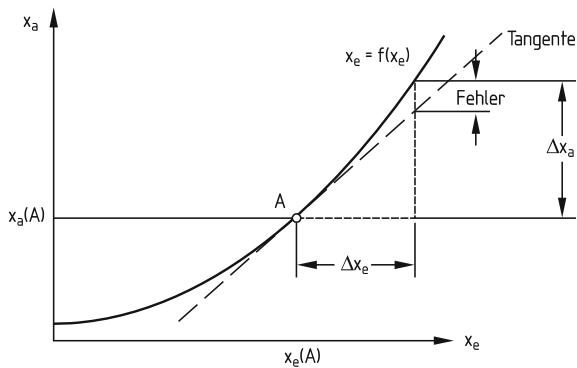
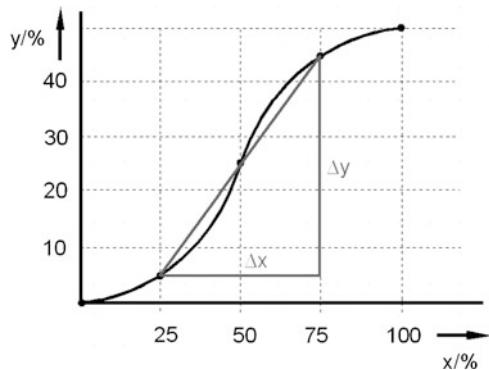


Abb. 1.17 Kennlinie nach Werten aus Tab. 1.3



d) *Linearisierung mit Tabellenwerten* In Tab. 1.3 sind die Messwerte einer nichtlinearen Regelstrecke gegeben. Die Kennlinie soll im Bereich $X = 25\%$ bis 75% linearisiert werden.

In Abb. 1.17 sind diese Wertepaare als Kennlinie gezeichnet. Man erkennt, dass die Kennlinie S-förmig verläuft. Durch zwei Messpunkte kann man eine Sekante legen, die den Verlauf linearisiert wiedergibt. Die linearisierte Steigung der Kennlinie ergibt sich aus:

$$K_p = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{45\% - 5\%}{75\% - 25\%} = \frac{40\%}{50\%} = 0,8$$

e) *Mathematische Linearisierung* Nichtlineare Zusammenhänge treten sowohl an Zusammenfassungsstellen, z. B. bei Multiplikation oder Division, als auch innerhalb eines Blockes auf, wenn der mathematische Zusammenhang eine quadratische Gleichung oder eine Wurzelbeziehung ist. Sie lassen sich ähnlich behandeln wie lineare Zusammenhänge, solange man sich auf kleine Änderungen beschränkt.

Tab. 1.3 Messwerte einer Regelstrecke

| | | | | | | |
|-----|---|---|----|----|----|-----|
| x | % | 0 | 25 | 50 | 75 | 100 |
| y | % | 0 | 5 | 25 | 45 | 50 |

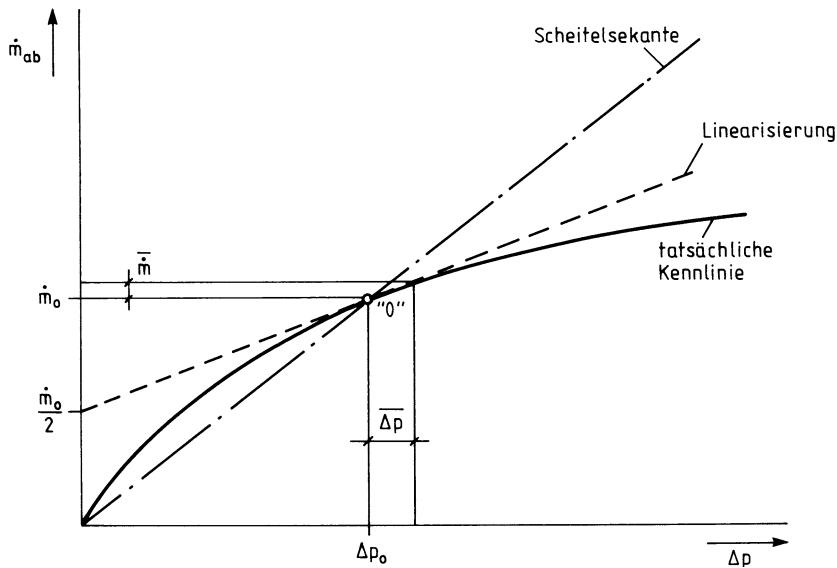


Abb. 1.18 Nichtlineare Kennlinie eines Abflussventils

Beispiel 1.3 (Abflussventil eines Behälters)

Nehmen wir die funktionale Abhängigkeit des Abflussventils eines Behälters, beschrieben durch $\dot{m} = K \cdot \sqrt{\Delta p}$. Dieser Zusammenhang ist in Abb. 1.18 graphisch dargestellt.

Die Ausströmgleichung

$$\dot{m}^2 = K^2 \cdot \Delta p$$

nimmt für kleine Änderungen um den Betriebspunkt „0“ folgende Form an:

$$\begin{aligned} (\dot{m}_0 + \overline{\dot{m}})^2 &= K^2 (\Delta p_0 + \overline{\Delta p}) \\ \dot{m}_0^2 + 2\dot{m}_0 \cdot \overline{\dot{m}} + \overline{\dot{m}}^2 &= K^2 \cdot \Delta p_0 + K^2 \cdot \overline{\Delta p} \end{aligned}$$

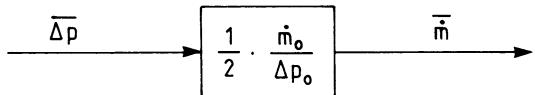
Im Betriebspunkt (alle kleinen Änderungen verschwinden) gilt für den Proportionalbeiwert:

$$K^2 = \frac{\dot{m}_0^2}{\Delta p_0}$$

Das Quadrat der kleinen Änderung wird vernachlässigt. Daraus ergibt sich:

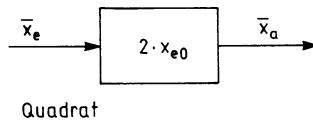
$$\begin{aligned} \dot{m}_0^2 + 2\dot{m}_0 \cdot \overline{\dot{m}} &= \frac{\dot{m}_0^2}{\Delta p_0} \cdot \Delta p_0 + \frac{\dot{m}_0^2}{\Delta p_0} \cdot \overline{\Delta p} \\ 2\dot{m}_0 \cdot \overline{\dot{m}} &= \frac{\dot{m}_0^2}{\Delta p_0} \cdot \overline{\Delta p} \\ \overline{\dot{m}} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{m}_0}{\Delta p_0} \cdot \overline{\Delta p} = K^2 \cdot \frac{1}{2\dot{m}_0} \cdot \overline{\Delta p} \end{aligned}$$

Abb. 1.19 Darstellung eines nichtlinearen Zusammenhangs

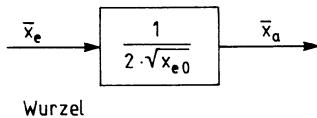


Da $\dot{m}_0/\Delta p_0 = \text{konst}$. die Neigung der Scheitelsekanten in Abb. 1.18 darstellt, beschreibt diese Gleichung, dass die Tangente halb so steil ist wie die Scheitelsekante im gleichen Punkt. In Abb. 1.19 ist der „linearisierte“ Proportionalbeiwert für das Abflussventil in dem Block eingetragen.

Es folgen Beispiele für die Linearisierung von nichtlinearen mathematischen Funktionen. Es wird eine allgemeine Darstellung der Linearisierung nichtlinearer Blöcke angegeben. In vielen Fällen treten zu den Koeffizienten in den Blöcken noch Proportionalbeiwerte (Konstanten) hinzu.



$$\begin{aligned} x_{a0} &= x_{e0}^2 = x_{e0} \cdot x_{e0} & \bar{x}_a &= x_{e0} \cdot \bar{x}_e + x_{e0} \cdot \bar{x}_e \\ &&& \bar{x}_a = 2 \cdot x_{e0} \cdot \bar{x}_e \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x_{a0} &= \sqrt{x_{e0}} & x_{a0} \cdot \bar{x}_a + x_{a0} \cdot \bar{x}_a &= \bar{x}_e \\ x_{a0}^2 &= x_{e0} & \bar{x}_a &= \frac{1}{2 \cdot x_{a0}} \cdot \bar{x}_e = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_{e0}}} \cdot \bar{x}_e \end{aligned}$$

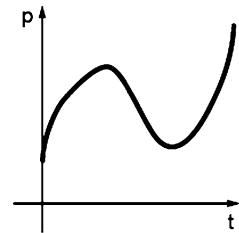
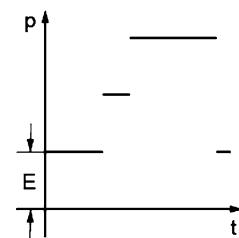
1.1.7 Signale

► Ein **Signal** ist die Darstellung einer Information. Es ist eine physikalische Größe, bei der ein oder mehrere Parameter (sog. Informationsparameter) Information über eine oder mehrere variable Größen tragen.

Beispiel

Ein Messsignal kann beispielsweise in Form einer sinusförmigen Spannung mit der Gleichung

$$u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Abb. 1.20 Analoges Signal**Abb. 1.21** Digitales Signal

vorliegen. Der Verlauf des Signals ist also von der Amplitude u_0 , der Kreisfrequenz ω und dem Phasenwinkel φ abhängig. Je nach Fragestellung können die Informationsparameter Amplitude, Kreisfrequenz oder Phasenwinkel ausgewertet werden.

- Kontinuierlich veränderliche physikalische Größen, z. B. Temperatur oder Druck liefern **analoge Signale** (Abb. 1.20).

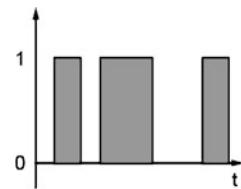
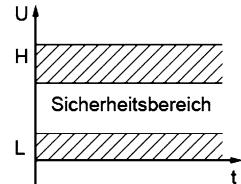
Analoge Signale können innerhalb gewisser Grenzen jeden beliebigen Wert annehmen. Bei analogen Signalen ist dem kontinuierlichen Werteverlauf des Informationsparameters Punkt für Punkt unterschiedliche Information zugeordnet. Aus Abb. 1.20 ist ersichtlich, dass zu jedem beliebigen Zeitpunkt dem Informationsparameter Druck (p) ein Wert (eine Information) zugeordnet werden kann.

- **Digitale Signale** (Abb. 1.21) sind diskrete Signale, deren Informationsparameter innerhalb bestimmter Grenzen nur eine endliche Zahl von Wertebereichen annehmen kann.

Der Wertebereich des Informationsparameters ist ein ganzzahliges Vielfaches der kleinsten Einheit (E).

Werden Informationen von analogen Signalen in digital arbeitenden Systemen genutzt, dann muss die analoge Darstellung der Information durch Analog-Digital-Wandler in eine digitale Darstellung gebracht werden. Der Analog-Digital-Wandler liefert eine dem digitalen Wert proportionale physikalische Größe, die umso genauer ist, je besser das Auflösungsvermögen des Wandlers ist.

- Signale, die nur zwei Informationszustände darstellen können, nennt man **binäre Signale** (Abb. 1.22).

Abb. 1.22 Binäres Signal**Abb. 1.23** Signalpegel binärer Signale

Ein binäres Signal ist ein Signal mit nur zwei Werten des Informationsparameters.

Wertebereiche eines binären Signals können sein: Druck EIN/Druck AUS, Ventil geöffnet/Ventil geschlossen oder Strom fließt/Strom fließt nicht. In der Mathematik und in der Steuerungstechnik werden diese beiden Zustände durch 0 und 1 beschrieben.

In der Praxis wird den logischen Zuständen (0, 1) des Informationsparameters ein entsprechender Signalpegel (H, L) zugeordnet. Zwischen dem oberen und dem unteren Bereich des Signalpegels muss ein Sicherheitsbereich (Abb. 1.23) liegen.

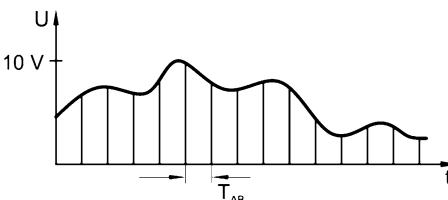
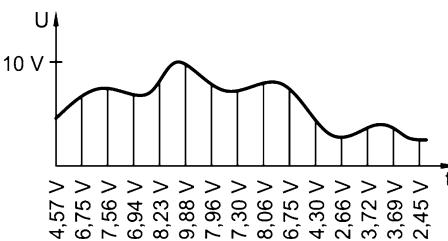
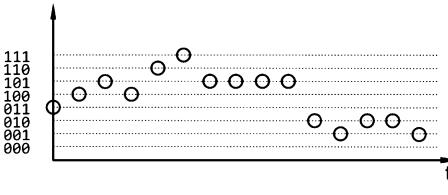
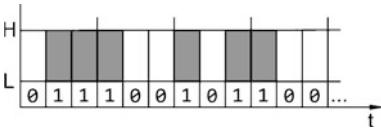
Ein typisches Beispiel für die Umwandlung eines analogen Signals in eine Abfolge binärer elektrischer Signale liefert Tab. 1.4.

Zum Schluss werden in Tab. 1.5 noch einige typische Bauelemente aufgeführt, die zur Signalverarbeitung eingesetzt werden.

Tab. 1.4 Umwandlung eines Analogsignals in eine Abfolge binärer elektrischer Signale

| | |
|--|--|
| | <p>Die Lautstärke einer akustischen Schwingung soll erfasst werden. Sie kann als Druck gemessen werden</p> |
| | <p>Durch einen Sensor wird es in ein analoges elektrisches Signal gewandelt. Dabei kann es auch verstärkt oder in ein normiertes Signal – hier in eine Spannung zwischen 0 und 10 V – umgewandelt werden</p> |

Tab. 1.4 (Fortsetzung)

|  | Nun wird zunächst die Zeit quantisiert. Der zeitliche Verlauf wird in äquitemporäre Abschnitte mit der Abtastzeit T_{AB} eingeteilt. Im Audiobereich wird dieser Vorgang auch sampling genannt. Dort ist eine typische Abtastfrequenz 48 kHz. In der Sensorik kommen auch längere Abtastzeiten von sich nur langsam verändernden Größen (z. B. Außentemperatur) vor. Dort kann die Abtastzeit auch Minuten betragen | | | | | | | | | | | | |
|--|---|------------------------------|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|-----|-----|--|
|  | Zu den diskreten Zeiten wird nun die aktuelle Spannung erfasst | | | | | | | | | | | | |
|  | Im nächsten Schritt wird die Amplitude quantisiert. Das Signal ist „diskretisiert“. Die Spannungswerte werden einer der Stufen zugeordnet. Die Signalqualität ist umso besser, je mehr Quantisierungsschritte zugelassen werden. Hier im Beispiel ist es sehr grob, nur 3 Bit. Im Audiobereich sind 16 Bit üblich, d. h., der Spannungsbereich wird in $2^{16} = 65.536$ Stufen eingeteilt. In der Sensorik ist das Auflösungsvermögen problemangepasst | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1" data-bbox="162 1030 467 1236"> <thead> <tr> <th>quantisierte Spannung in V</th> <th>digitalisierter Wert (3 bit)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>4,57</td><td>011</td></tr> <tr><td>6,75</td><td>100</td></tr> <tr><td>7,56</td><td>101</td></tr> <tr><td>6,94</td><td>100</td></tr> <tr><td>...</td><td>...</td></tr> </tbody> </table> | quantisierte Spannung in V | digitalisierter Wert (3 bit) | 4,57 | 011 | 6,75 | 100 | 7,56 | 101 | 6,94 | 100 | ... | ... | Den quantisierten Spannungen werden also digitalisierte Werte zugeordnet |
| quantisierte Spannung in V | digitalisierter Wert (3 bit) | | | | | | | | | | | | |
| 4,57 | 011 | | | | | | | | | | | | |
| 6,75 | 100 | | | | | | | | | | | | |
| 7,56 | 101 | | | | | | | | | | | | |
| 6,94 | 100 | | | | | | | | | | | | |
| ... | ... | | | | | | | | | | | | |
|  | Diese digitalen Werte können nun als binäres Signal in einer zeitlichen Abfolge gesendet werden | | | | | | | | | | | | |

Tab. 1.5 Bauelemente zur Signalverarbeitung

| Eingangssignale | | Ausgangssignale | |
|---|---|---|--|
| Berührrend | Berührungslos | Stellglieder | Aktoren |
| Schalter, Taster, Grenztaster, Piezoaufnehmer | Optische, induktive, kapazitive Näherungsschalter, Thermoelemente | Ventile, Schütze, Leistungstransistor, Leistungsthryistor | Meldeeinrichtungen, Motoren, Zylinder, Beleuchtungsanlagen, Heizelemente |

1.2 Mathematische Beschreibungen

1.2.1 Mathematische Beschreibung im Zeitbereich

Der Verlauf von Signalen und auch das Verhalten von Systemen in der Regelungstechnik wird auf zwei Arten beschrieben:

Sind die Signale als Funktion der Zeit angegeben, so bezeichnet man die Beschreibungsform als *Beschreibung im Zeitbereich*. Manchmal ist es (mathematisch) günstiger, sie als Funktion der Frequenz anzugeben, dann bezeichnet man die Beschreibungsform als *Beschreibung im Frequenzbereich*.

Im Zeitbereich wird das Systemverhalten vor allem durch Differentialgleichungen beschrieben. Diese verknüpfen die Variablen durch Differentialbeziehungen, die auch Nichtlinearitäten enthalten können. Vereinfacht man die Gleichungen auf ein System mit linearen, zeitinvarianten Beziehungen mit konstanten Kennwerten, so wird die Ermittlung dieser Kennwerte direkt im Zeitbereich bevorzugt. Dies trifft insbesondere auf Systeme zu mit langsam veränderlichen Signalen oder findet Anwendung bei Systemen, deren Störungen mit niedriger Frequenz auftreten: Größenordnung Sekunden bis Minuten. Solche Anwendungsbeispiele findet man als Temperaturverläufe, Druckschwankungen, Durchflussänderungen oder andere Zustandsgrößenverläufen in der Verfahrenstechnik.

Bei linearen, zeitinvarianten Systemen kann das Zeitverhalten statt durch die unhandliche Differentialgleichung durch die so genannten Antwortfunktionen (siehe Abschn. 1.4) beschrieben werden, wenn keine beliebigen Störungen als Eingangsgrößen zugelassen sind, sondern nur determinierte Verläufe (Sprung, linearer Anstieg, ...). Man erhält einfache Lösungen für Differentialgleichungen für diese Sonderfälle, wenn sich das System vor dem Eingreifen der Testfunktion im Beharrungszustand befunden hat.

Beispiel 1.4 (Beschreibung eines Zeitverlaufes im Zeitbereich)

Im Zeitbereich wird der Signalparameter u als Funktion der unabhängigen Variablen „Zeit“ dargestellt:

$$u = u(t)$$

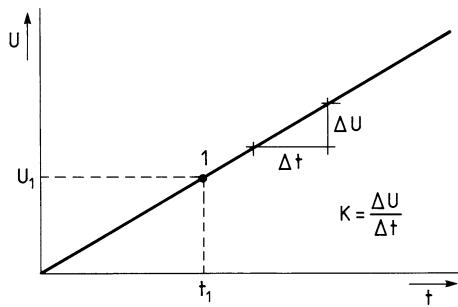
Oft ist es möglich, die Funktion $u(t)$ innerhalb eines Zeitintervalls analytisch zu beschreiben.

- a) Zeichnen Sie einen linearen Anstieg und beschreiben Sie diese Funktion mit Hilfe einer Zeitgleichung.

Der lineare Anstieg ist in Abb. 1.24 dargestellt.

$$0 \leq t \leq t_1 \rightarrow u(t) = K \cdot t$$

K = Konstante ($\hat{=}$ Geschwindigkeit), $u \hat{=}$ Weg, $t \hat{=}$ Zeit.

Abb. 1.24 Lineare Anstiegsfunktion im Zeitbereich

b) Stellen Sie eine harmonische Schwingung dar.

Der Zeitverlauf wird durch eine Kosinusfunktion beschrieben (Abb. 1.25):

$$u(t) = U_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \quad \text{für den Gültigkeitsbereich } -\infty < t < +\infty$$

ω_0 = Eigenfrequenz ; U_0 = Schwingungsamplitude; $\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} \hat{=} \text{Schwingungsperiode}$.

1.2.1.1 Fundamentalgleichung der Regelungstechnik

Die grundsätzliche Art der mathematischen Darstellung des Zeitverhaltens eines regelungstechnischen Systems ist:

$$v(t) = f(u(t), w(t), z_i(t), \dots)$$

$v(t)$ Ausgangsgröße des betrachteten Systems

$u(t)$ Einganggröße des betrachteten Systems

$w(t)$ Führunggröße

$z_i(t)$ Störgrößen

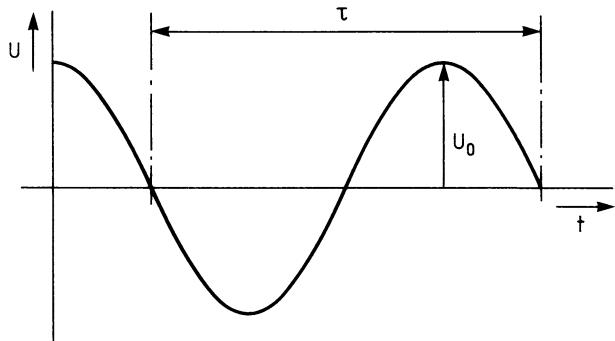
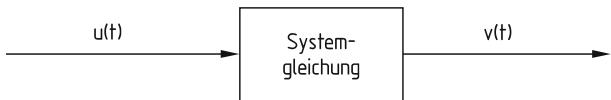
Abb. 1.25 Schwingungsfunktion im Zeitbereich

Abb. 1.26 Blockdarstellung der Fundamentalgleichung



Die funktionelle Abhängigkeit zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße kann durch die Fundamentalgleichung der Regelungstechnik beschreiben werden.

$$a_n \cdot v^{(n)} + \dots + a_2 \cdot \ddot{v} + a_1 \cdot \dot{v} + a_0 \cdot v = b_0 \cdot u + b_1 \cdot \dot{u} + b_2 \cdot \ddot{u} + \dots + b_m \cdot \overset{(m)}{u}$$

Die linke Seite der Fundamentalgleichung (für die Blockdarstellung s. Abb. 1.26) beschreibt das dem System eigene Verhalten, die rechte Seite beschreibt die Einwirkungen auf das System von außen. „n“ wird die Ordnung der Differentialgleichung genannt. Die Ordnung entspricht physikalisch der Anzahl der systeminternen Speicher, z. B. Massenspeicher, Energiespeicher, ...

Nebenbedingung: $m \leq n$.

In Kap. 2 wird beschrieben, wie das Fehlen der Parameter a_0 (I-Verhalten) oder b_0 (D-Verhalten) zu interpretieren ist.

1.2.1.2 Lösung der Differentialgleichung

Sind die Eingangsgröße $u(t = 0)$ und die weiteren Anfangsbedingungen $v(0^-)$, $\dot{v}(0^-)$, $\ddot{v}(0^-)$, ... bekannt, kann die Differentialgleichung gelöst werden. 0^- gilt für kleine Zeiten $t \rightarrow 0$, aber $t < 0$. 0^+ bedeutet $t \rightarrow 0$, aber $t > 0$.

Zunächst wird nur die linke Seite betrachtet, genannt homogene Gleichung oder Eigen-dynamik des Systems. Durch den Ansatz $v_h(t) = C \cdot e^{\alpha \cdot t}$ ergibt sich die charakteristische Gleichung des Systems.

$$a_n \cdot \alpha^n + a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + \dots + a_2 \cdot \alpha^2 + a_1 \cdot \alpha + a_0 = 0$$

Sind die n Lösungen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ reell und voneinander verschieden, ergibt sich die homogene Lösung:

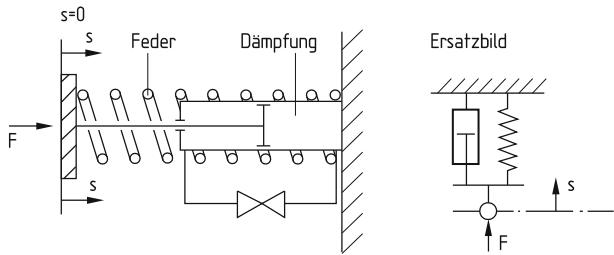
$$v_h(t) = C_1 \cdot e^{\alpha_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{\alpha_2 \cdot t} + \dots + C_n \cdot e^{\alpha_n \cdot t}$$

Die Integrationskonstanten C_i werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt.

Treten komplexe Lösungen der charakteristischen Gleichung auf, so müssen die Lösungen α_i paarweise konjugiert komplex sein. Für 2 konjugiert komplexe Lösungen ergeben sich aus dem Ansatz

$$v_h(t) = e^{\delta_1 \cdot t} \cdot [C_{11} \cdot e^{j\omega t} + C_{12} \cdot e^{-j\omega t}]$$

Abb. 1.27 Gerätetechnische Darstellung einer Fahrzeugfederung mit Ersatzschaltbild



die Lösung für einen Eingangssprung

$$v_h(t) = A \cdot e^{\delta_1 \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - D^2}}$$

ist die Schwingungsamplitude

$$\delta_1 = \frac{D}{T_0}$$

ist die Abklingkonstante der Schwingung

$$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1 - D^2}}{D}$$

ist die Phasenverschiebung der Schwingung

Die Gesamtlösung entspricht der Addition aus homogener Lösung und partikulärer Lösung

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t)$$

Dabei sind in der partikulären Lösung die Eingangsgrößen $u(t)$ verarbeitet, die bei der homogenen Lösung noch nicht verwendet wurden.

Beispiel 1.5 (Feder-Dämpfungs-System eines masselos gedachten Fahrzeugs)

Stoßdämpfer sollen die durch starke Bodenunebenheiten entstehenden Federschwingungen zwischen Fahrzeugaufbau und Radaufhängung dämpfen. Ein Kolben wird in einem Zylinder bewegt und verdrängt Öl durch enge Bohrungen (Abb. 1.27).

Bewegt sich der Kolben nach rechts (Einfedern) so wird das Öl in die linke Kammer gepresst; bewegt sich der Kolben nach links (Ausfedern), so strömt das Öl in die rechte Kammer zurück. Damit das System bei einer bleibenden Kraft F_0 nicht gegen den Anschlag gedrückt wird, ist zusätzlich eine Feder notwendig, die diese Kraft aufnimmt.

- a) Stellen Sie die Differenzialgleichung des Modells auf.

Eine Kraft F_0 als Eingangssignal $u(t)$ auf den Stoßdämpfer bewirkt eine Auslenkung s als Ausgangssignal $v(t)$, und zwar entgegen der Kraft der sich spannenden Feder.

Aus dem Kräftegleichgewicht ergibt sich die zugehörige Gleichung, das mathematische Modell dieses Gliedes:

$$F_0 = \underbrace{c \cdot s}_{F_c} + \underbrace{d \cdot \frac{ds}{dt}}_{F_d}$$

$F_0 = u(t) \dots$ zusätzliche externe Kraft in N

$c =$ Federkonstante in N/m

$s = v(t) \dots$ Auslenkung in m bezogen auf $s_0 = 0$ m

$d =$ Dämpfungskonstante in N s/m

$ds/dt =$ Geschwindigkeit in m/s

$$u(t) = c \cdot v(t) + d \cdot \dot{v}$$

Dieses mathematische Modell gilt nur mit Einschränkungen:

- Die Trägheitskraft wurde vernachlässigt; die Masse des Fahrzeugs wird als externe Kraft auf die Fahrzeugfederung übertragen.
- Der Dämpfungsgrad d wird als konstant angenommen, obwohl bei der realen Federung der Einschwingvorgang stärker gedämpft ist als der Ausschwingvorgang.
- Die externe Kraft F_0 ändert sich „sprunghaft“; für die Aussage des Modells ist dies der schlimmste anzunehmende Fall.

b) *Geben Sie die Lösung der Differenzialgleichung in einer Formel an.*

Differenzialgleichungen werden meist durch Integration gelöst. Allgemein gibt es bei einer Differenzialgleichung eine ganze Lösungsschar. Durch die Anfangsbedingungen wird daraus eine ganz bestimmte Lösung herausgegriffen.

Für die weitergehende numerische Verarbeitung ist die Lösungsgleichung besser geeignet als die Differenzialform der Gleichung.

Homogene Lösung:

$$d \cdot \dot{v} + c \cdot v_h(t) = 0$$

Substitution:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\frac{c}{d} \cdot v_h(t) = W & \rightarrow & \quad -\frac{c}{d} \cdot dv = dW & \rightarrow & \quad dv = -\frac{d}{c} \cdot dW \\ \dot{v} &= \frac{dv}{dt} = -\frac{d}{c} \cdot \frac{dW}{dt} = W & \rightarrow & \quad \frac{dW}{dt} = -\frac{c}{d} dt \end{aligned}$$

Integration:

$$\ln W = -\frac{c}{d} \cdot t + \ln K \quad \rightarrow \quad W = K \cdot e^{-\frac{c}{d} \cdot t}$$

Rücksubstitution:

$$-\frac{c}{d} \cdot v_h(t) = K \cdot e^{-\frac{c}{d} \cdot t} \rightarrow v_h(t) = -\frac{d}{c} \cdot K \cdot e^{-\frac{c}{d} \cdot t}$$

Die homogene Lösung $v_h(t)$ beschreibt die Eigenbewegung, die das System von beliebigen Anfangswerten ausführt, wenn es sich selbst überlassen wird ($u(t) = 0$). Die homogene Differentialgleichung ergibt sich aus den Eigenschaften und der Struktur des Systems.

Partikuläre Lösung:

Die partikuläre Lösung beschreibt hier den Beharrungszustand. Dies ist die Bewegung oder der Zustand, den das System unter dem Einfluss der Eingangsgröße nach Abklingen des Einschwingvorganges ausführt (erzwungene Bewegung). Dazu wählt man einen Ansatz in Form der Störfunktion, hier

$$u(t) = F_0 = \text{konst.}$$

Im Beharrungszustand $t \rightarrow \infty$ ergibt sich als Wirkung auf diese externe Kraft F_0 folgende Auslenkung:

$$d \cdot \dot{v} + c \cdot v_p(t) = F_0$$

Für $t = \infty$ erhält man für den Beharrungswert v_B

$$t \rightarrow \infty: \quad c \cdot v_B = F_0 \rightarrow v_B = \frac{1}{c} \cdot F_0 = v_p(t)$$

Allgemeine Lösung:

Durch Überlagerung der homogenen und partikulären Lösung ergibt sich die allgemeine Lösung

$$v(t) = v_p + v_h = \frac{1}{c} \cdot F_0 - \frac{d}{c} \cdot K \cdot e^{-\frac{c}{d} \cdot t}$$

Die in dieser Gleichung noch enthaltene Konstante K erhält man durch Einsetzen der Anfangswerte in die allgemeine Lösung $v(t)$. Hier wird wegen der Differentialgleichung erster Ordnung nur ein Anfangswert benötigt. Die Anfangsbedingung lautet: $u(0) = 0$.

Für $t = 0$ ergibt sich diese Form der allgemeinen Lösung:

$$\begin{aligned} e^{-0} &= 1 \rightarrow 0 = \frac{1}{c} \cdot F_0 - \frac{d}{c} \cdot K \cdot 1 \\ \text{daraus: } K &= \frac{1}{d} \cdot F_0 = \frac{c}{d} \cdot v_B \end{aligned}$$



Abb. 1.28 Vereinfachtes mathematisches Modell eines Stoßdämpfers, dargestellt als Block

Damit erhält man den gesuchten Verlauf:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{c} \cdot F_0 - \frac{d}{c} \cdot \frac{1}{d} \cdot F_0 \cdot e^{-\frac{c}{d} \cdot t} = v_B - v_B \cdot e^{-\frac{c}{d} \cdot t} \\ v(t) &= v_B \cdot \left(1 - e^{-\frac{c}{d} \cdot t}\right) \end{aligned}$$

Dieses mathematische Modell des Stoßdämpfers beschreibt die Auslenkung $v(t)$ als Funktion der externen Kraft $u(t) = F_0 = \text{konst.}$ in Form der Lösungsgleichung. Dargestellt als Block ergibt sich die Darstellung in Abb. 1.28.

c) Stellen Sie den Zeitverlauf des Modells auf.

Der durch das mathematische Modell beschriebene Zeitverlauf der Auslenkung bei einer sprunghaften Änderung der äußeren Kraft soll graphisch dargestellt werden.

Dazu gehen wir von folgenden Zahlenwerten aus:

$$\text{Federkonstante } c = 6 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

$$\text{Dämpfungskonstante } d = 1,2 \cdot 10^5 \text{ N s/m}$$

$$\text{Anfangsauslenkung } v_0 = 0 \text{ m}$$

$$\text{externe Kraftänderung } u_0 = 1,2 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Für sehr große Zeiten nimmt die Auslenkung den Beharrungswert an.

$$v_B = \frac{1}{c} \cdot u_0 = \frac{1,2 \cdot 10^3 \text{ N}}{6 \cdot 10^4 \text{ N/m}} = 0,02 \text{ m}$$

Im Exponenten taucht das Verhältnis c/d auf:

$$\frac{c}{d} = \frac{6 \cdot 10^4 \text{ N/m}}{1,2 \cdot 10^5 \text{ N s/m}} = 0,5 \frac{1}{\text{s}}$$

Das reziproke Verhältnis wird später als Zeitkonstante T eingeführt:

$$T = \frac{d}{c} = 2 \text{ s}$$

| t | s | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 |
|------------|-----|-------|-------|-------|------|-------|
| $e^{-t/T}$ | - | 0,607 | 0,368 | 0,135 | 0,05 | 0,018 |

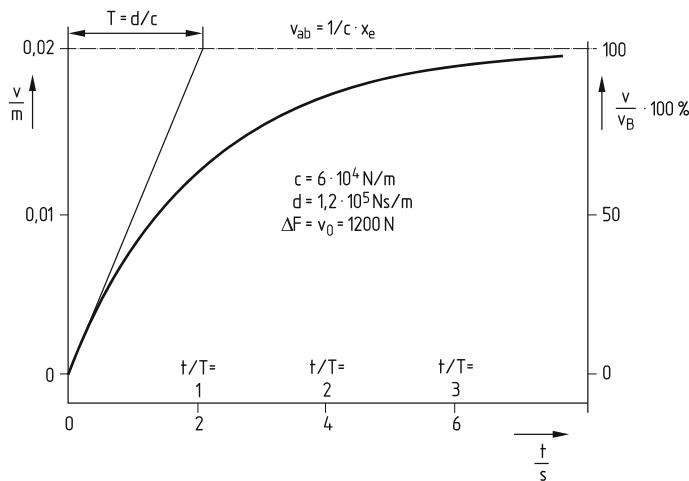


Abb. 1.29 Zeit-Weg-Diagramm des Stoßdämpfers bei sprunghafter Änderung der externen Kraft

Tragen wir diese zeitlichen Stützpunkte in ein Diagramm ein, so erhalten wir den Zeitverlauf in Abb. 1.29.

Eine gleich bleibende Kraftänderung von 1200 N bewirkt eine Auslenkungsänderung um 0,02 m. Nach etwa 8 bis 10 Sekunden wird der neue Beharrungswert erreicht. Der Zeitverlauf zwischen Anfangswert und Endwert entspricht einer e -Funktion. Der Anstieg der e -Funktion wird beschrieben durch die Zeitkonstante T .

1.2.2 Mathematische Beschreibung im Frequenzbereich

Viele technische Systeme sind entweder auf Grund ihres inneren Aufbaus oder durch Anregung von außen in der Lage, Schwingungen auszuführen. Solche Systeme nennt man „schwingungsfähige Systeme“. Die Übertragung des Schwingungsverhaltens aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich bietet einen neuen Einblick in die Systemeigenschaften. Durch die Transformation vom Zeitbereich in den Frequenzbereich werden keine neuen Signale erzeugt, sondern deren Beschreibung wird nur in eine auf einfachere Weise interpretierbare oder berechenbare Form gebracht (Abb. 1.30). Anstelle der Zeit wird die Frequenz als unabhängige Variable benutzt und der Signalverlauf als Summe von harmonischen oder gedämpften Teilschwingungen dargestellt.

Die Transformation lässt sich anschaulich deuten (Abb. 1.31). Das Zeitverhalten wird durch eine Summe von harmonischen Schwingungen unterschiedlicher Frequenz und Amplitude so zusammengesetzt (summiert), dass der tatsächliche Verlauf möglichst genau wiedergegeben wird (hier: Reihenentwicklung).

Auch die Beschreibung im Frequenzbereich gilt streng genommen nur für lineare, zeitinvariante Systeme. Eine Methode zur Ermittlung von Kennwerten im Frequenzbereich

Abb. 1.30 Schematische Darstellung des Übergangs vom Zeitbereich in den Frequenzbereich

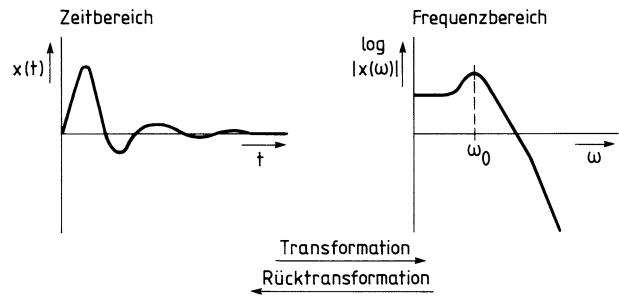
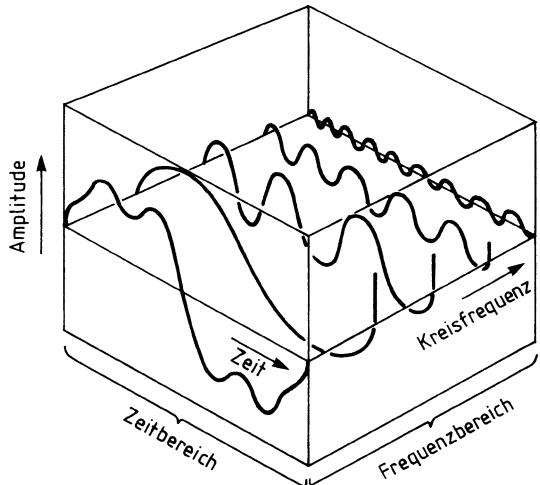


Abb. 1.31 Zerlegung des Zeitbereichs in homogene Schwingungen unterschiedlicher Kreisfrequenz und Amplitude durch eine Reihenentwicklung



(speziell Bode-Diagramm) wird in Abschn. 4.2 näher erläutert. Dort ist auch die zugehörige Theorie zur Transformation enthalten.

Ein mathematisches Beschreibungsverfahren (Laplace-Transformation) findet man ausführlich in vielen Lehrbüchern und im Internet.

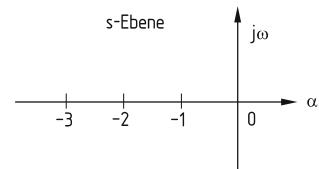
Übertragungsfunktion $F(s)$ Ersetzt man das Differential d/dt durch einen Operator, z. B. Operator $s = \alpha + j\omega$, so erhält man die Übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned} a_n \cdot s^n \cdot V(s) + \dots + a_2 \cdot s^2 \cdot V(s) + a_1 \cdot s \cdot V(s) + a_0 \cdot V(s) \\ = b_0 \cdot U(s) + b_1 \cdot s \cdot U(s) + b_2 \cdot s^2 \cdot U(s) + \dots + b_m \cdot s^m \cdot U(s) \\ F(s) = \frac{a_n \cdot s^n \cdot V(s) + \dots + a_2 \cdot s^2 \cdot V(s) + a_1 \cdot s \cdot V(s) + a_0 \cdot V(s)}{b_0 \cdot U(s) + b_1 \cdot s \cdot U(s) + b_2 \cdot s^2 \cdot U(s) + \dots + b_m \cdot s^m \cdot U(s)} \end{aligned}$$

Dabei ist s eine komplexe Variable.

Eine Möglichkeit der graphischen Abbildung bietet die komplexe s -Ebene mit dem Realteil α und dem Imaginärteil $j\omega$ (Abb. 1.32).

Abb. 1.32 Nicht schwingende Regelstrecke 2. Ordnung in der komplexen Ebene



Eine andere Darstellungsform ist die so genannte Ortskurve. (Abb. 1.33). Stellt man den Frequenzgang in Polarkoordinaten dar, dann können Amplitudengang $A(\omega)$ und Phasengang $\varphi(\omega)$ getrennt dargestellt werden.

$$F(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

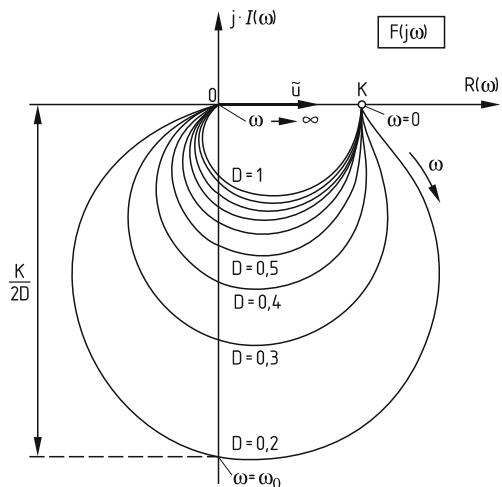
Trennt man bei der Darstellung den Amplitudengang vom Phasengang, so erhält man das Bode-Diagramm (Abb. 1.34), eine Darstellungsform, die vor allem bei rotatorischen Vorgängen, z. B. in Produktionsmaschinen, zum Einsatz kommt. Auch bei der Darstellung von Schallspektralen in der Akustik leistet das Bode-Diagramm gute Dienste.

1.2.3 Mathematische Beschreibung digitaler Signale

Digitale Systeme werden in der Praxis zunehmend eingesetzt. Diese Entwicklung wird begünstigt durch Mikrocomputer-Bausteine mit zunehmender Integrationsdichte und Verarbeitungsgeschwindigkeit. Die Formulierung von Signalen in digitaler Form wird deshalb immer wichtiger. Die digitale Regelung ist ausführlich in Abschn. 4.6 beschrieben.

Digitale Signale sind meist diskret und diskontinuierlich. Diskrete Signale werden durch die Auflösung gekennzeichnet. Dies ist der Wert, um den sich ein Signal ändern

Abb. 1.33 Ortskurvendarstellung einer schwingungsfähigen Strecke 2. Ordnung



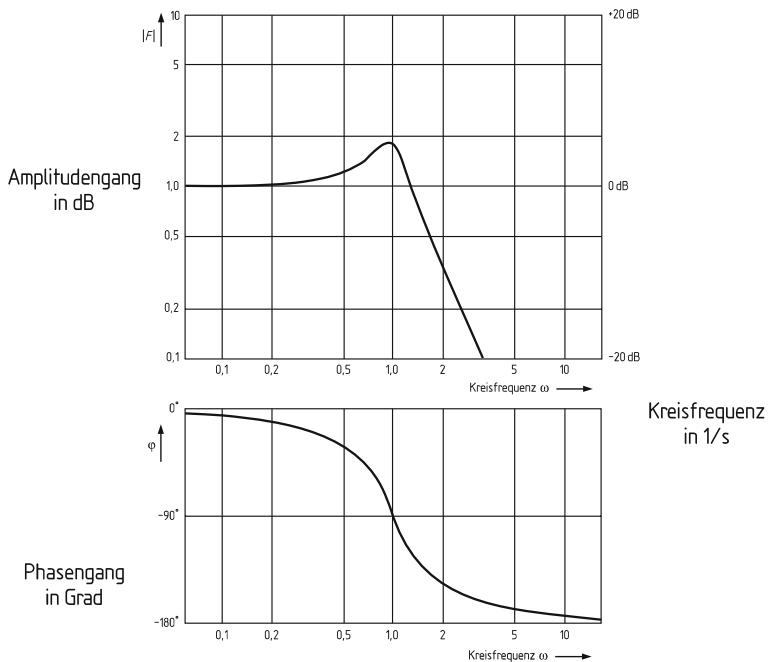


Abb. 1.34 Bode-Diagramm eines $P-T_2$ -Gliedes

muss, damit eine Stelle eines digitalen Datenwortes, gekennzeichnet durch die binären Zeichen 0 oder 1, verändert wird.

Ein weiterer Baustein ist u. a. für die Diskontinuität verantwortlich. Abtaster sorgen dafür, dass immer nur ein Messwert von der Anlage zum Mikrocomputer weitergeleitet bzw. nur eine Stellgröße vom Mikrocomputer zur Anlage ausgegeben wird. Dies führt zu einem „Abtasten“ der angeschlossenen Ein- und Ausgangssignale (Abb. 1.35). Die Wiederholung zweier Abtastpunkte des gleichen Signals wird Abtastzeit T_S ($S = \text{Sample}$) genannt.

Durch diese beiden Effekte geht die Differenzialgleichung

$$a_n \cdot v^{(n)} + \dots + a_2 \cdot \ddot{v} + a_1 \cdot \dot{v} + a_0 \cdot v = b_0 \cdot u + b_1 \cdot \dot{u} + b_2 \cdot \ddot{u} + \dots + b_m \cdot \overset{(m)}{u}$$

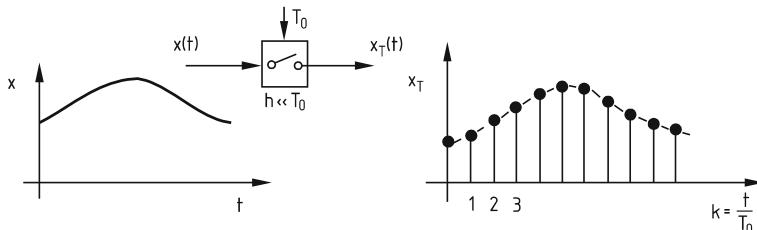


Abb. 1.35 Zeitdiskretes Signal, erzeugt durch Abtastung

in die Differenzengleichung über.

$$\begin{aligned} V(k) + \alpha_1 \cdot V(k-1) + \dots + \alpha_n \cdot V(k-n) \\ = \beta_0 \cdot U(k) + \beta_1 \cdot U(k-1) + \dots + \beta_m \cdot U(k-m) \end{aligned}$$

Der momentan abgetastete Wert des Ausgangssignals $v(k)$ zum Zeitpunkt k kann dann rekursiv aus vergangenen abgetasteten Eingangs- und Ausgangssignalen berechnet werden. Die Kennwerte α_i und β_i sind nicht identisch mit den Kennwerten a_i und b_i .

1.2.4 Mathematische Beschreibung stochastischer Signale

Bei der Entstehung stochastischer Signale wirkt der Zufall mit. Trotzdem sind die Signale nicht völlig regellos, sondern lassen sich mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung quantitativ erfassen.

Ähnlich wie bei analogen Signalen muss man auch hier für die einfache mathematische Behandlung vereinfachende Annahmen treffen:

- die statistischen Eigenschaften dürfen sich nicht signifikant ändern, wenn der Beobachtungsbereich verschoben wird (Linearität),
- die Übertragbarkeit auf ähnliche Prozesse muss gewährleistet sein (Ergodizität).

Kenngrößen stochastischer Signale müssen Durchschnittseigenschaften charakterisieren, also Mittelwerte sein.

Der arithmetische Mittelwert \bar{u} wird definiert zu:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad \text{für analoge Signale}$$

T = Beobachtungszeit, während der das Signal $u(t)$ aufgenommen wird

$$\bar{u} = \frac{1}{T_N} \sum_{k=1}^n u(k \cdot T_S) \cdot T_S \quad \text{für digitale Signale}$$

T_S = Abtastzeit

T_N = Beobachtungsintervall $T_N = n \cdot T_S$

Neben dem Mittelwert ist die Streuung eine wichtige Kenngröße für eine Zufallsgröße. Die Streuung S ist ein Maß dafür, in welchem Maße eine Zufallsgröße um ihren Mittelwert streut. Man verwendet als Maßgröße die quadratische Abweichung vom Mittelwert

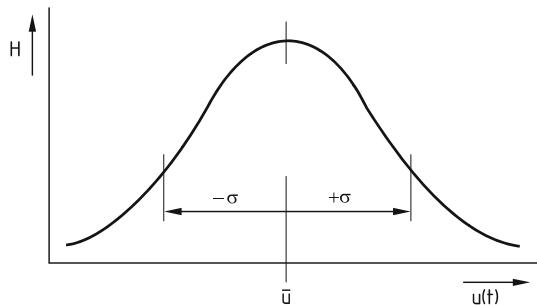
Abb. 1.36 Normalverteilung

eines konstanten stochasti-
schen Signals

H ... Häufigkeit eines Wertes
bzw. Anzahl pro Werteklasse

$\pm\sigma$... Wahrscheinlichkeit,
dass der Mittelwert innerhalb
 $\pm 68,3\%$ liegt

\bar{u} ... arithmetischer Mittelwert



und als Kenngröße den arithmetischen Mittelwert aller quadratischen Abweichungen:

$$S = \pm \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (u(t) - \bar{u})^2 dt}$$

bzw. für digitale Signale

$$S = \pm \sqrt{\frac{1}{T_N} \sum_{k=1}^n (u(k \cdot T_S) - \bar{u})^2 \cdot T_S}$$

Für genügend große Beobachtungsintervalle T bzw. T_N geht die Streuung S in die Standardabweichung σ über, die wegen der symmetrischen Eigenschaft nur mit positivem Vorzeichen angegeben wird.

In Abb. 1.36 sind die Kenngrößen eines stochastischen Signals dargestellt. Dabei ist vereinfachend vorausgesetzt, dass die physikalische Größe (Messgröße) während der Beobachtungszeit konstant bleibt.

1.3 Wirkungsplan

Die Aufgaben der modernen Regelungstechnik liegen nicht nur darin, für eine „vorgegebene“ Regelstrecke eine mehr oder weniger gut geeignete Regeleinrichtung zu entwerfen. Es gilt, das Verhalten der Regelstrecke schon im Planungsstadium so zu beeinflussen, dass das Gesamtsystem optimal wird. Dazu benötigt man tiefere Kenntnisse über das Verhalten der Regelstrecken.

Die Qualität einer Regelung hängt in erheblichen Maße von der Regelstrecke ab.

Die Zielsetzungen für technische Vorhaben werden ebenso komplexer wie die Techniken, die sie erforderlich machen. Dies bedeutet eine verstärkte Zusammenarbeit der verschiedenen Fachdisziplinen. Gerade in der von der Elektrotechnik geprägten Regelungstechnik haben sich Methoden und Verfahren herausgebildet, die für viele Ingenieure nur schwer

verständlich sind. Trotzdem bedarf es einer gemeinsamen „Sprache“, um die gestellten Aufgaben zum erwarteten Erfolg zu führen. Gerade hier kann der praxisorientierte Ingenieur seinen Beitrag leisten. Sein Ziel ist der regelungsgeeignete Prozess (Strecke). Dazu muss er jedoch verstehen, was jenseits des Zauns, im Regler, abläuft. Dann wird es ihm leicht fallen, eine geeignete Messeinrichtung und Stelleinrichtung schon in der Entwicklungsphase vorzusehen und den Prozess so zu modifizieren, dass das Gesamtsystem optimal wird.

Nachfolgen werden wichtige Darstellungsmethoden erläutert, die für die regelungstechnische Praxis wichtig sind:

- Wirkungsplan als Darstellung von Ursache-Wirkungsgefüchten
- Bildung von physikalischen Modellen zur Simulation des Zeitverhaltens
- Testfunktionen, die das Verhalten von Modellen bei definierten Eingangssignalen beschreiben
- Zustandsraumdarstellung zur übersichtlichen Darstellung von Modellen höherer Ordnung.

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit folgenden Themen:

- wie man komplexe Systeme in überschaubare Teilsysteme zerlegen kann, z. B. in Glieder mit elementarem Zeitverhalten (P-, I-, D-Verhalten)
- welche Verknüpfungsformen (Schaltungen) dieser Teilsysteme möglich sind
- welche Darstellungsformen der gerätetechnischen und wirkungsmäßigen Betrachtung möglich sind
- wie man den Wirkungsplan für eine konkrete Anlage aufbaut, d. h. aus elementaren Zeitverhalten und Verknüpfungen zusammensetzt.

Ein zu automatisierender Prozess ist meist in seinem Aufbau und seiner Wirkung komplex. Soll die Dynamik eines solchen Systems untersucht werden, so zerlegt man das System in möglichst rückwirkungsfreie Teilsysteme (Makros) und diese wiederum in Grundelemente, in denen sich der Prozess vollzieht. Dieses Vorgehen gilt sowohl für die physikalische Untersuchung als auch für die messtechnische Analyse (Abschn. 2). In beiden Fällen versucht man, das Verhalten der Grundelemente und die vorhandenen Kopplungen zu ermitteln. Dabei beschränkt man sich möglichst auf lineare, zeitinvariante Grundelemente, d. h. auf Elemente, die z. B. durch die konstanten Parameter K_I , K_P , K_D beschrieben werden, die weder vom physikalischen Zustand des Systems, noch von der Zeit abhängig sind. Ebenso werden möglichst lineare Kopplungen (Additions- bzw. Subtraktions-Verknüpfungen) eingesetzt.

Die Zerlegung des Prozesses kann auch nach gerätetechnischen Gesichtspunkten erfolgen. Dazu wird der Gesamtprozess in Teilanlagen zerlegt, die meist geometrisch oder funktionsmäßig unterschiedlich sind. Man unterscheidet also zwischen

- gerätetechnischer Betrachtung und
- wirkungsmäßiger Betrachtung.

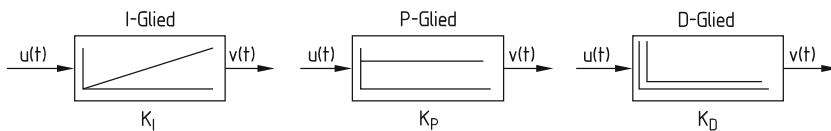


Abb. 1.37 Elementare Zeitverhalten/Übertragungsverhalten

Zerlegungen, die nach diesen unterschiedlichen Betrachtungen durchgeführt werden, unterscheiden sich oft erheblich. Dazu ein Beispiel:

Die Konstruktionszeichnung (geräte-technische Betrachtung) eines Getriebes enthält Angaben über Geometrie, Material sowie Bearbeitungshinweise für Einzelteile, eine Zusammenstellungszeichnung, Angaben zur Montage, Justierung etc. Man kann nach diesen Unterlagen komplizierte Getriebe fertigen, ohne die Fragen der dynamischen Wirkung, z. B. Beschleunigungsverhalten beantworten zu können. Dazu bedarf es der Zerlegung in P-, I- oder D-Glieder, d. h. der wirkungsmäßigen Betrachtung.

Trotz einer unüberschaubar großen Anzahl verschiedener Prozesse und Systeme lässt sich die wirkungsmäßige Betrachtung immer auf die 3 elementaren Zeitverhalten (Abb. 1.37) zurückführen:

I-Verhalten $\hat{=}$ Integration

P-Verhalten $\hat{=}$ Multiplikation mit einer Konstanten

D-Verhalten $\hat{=}$ Differentiation

Diese Grundbausteine entsprechen linearen Grundrechenoperationen.

Nach DIN IEC 60050-351 wird in den Blöcken die Sprungantwort eingetragen. Die zugehörige mathematische Beschreibung der einzelnen Blöcke lässt sich aus der Fundamentalgleichung ableiten:

$$\begin{aligned} \text{I-Verhalten} \quad & a_1 \cdot \dot{v} = b_0 \cdot u(t) \quad \text{oder} \quad \dot{v} = \frac{b_0}{a_1} \cdot u(t) = K_I \cdot u(t) \\ \text{P-Verhalten} \quad & a_0 \cdot v(t) = b_0 \cdot u(t) \quad \text{oder} \quad v(t) = \frac{b_0}{a_0} \cdot u(t) = K_P \cdot u(t) \\ \text{D-Verhalten} \quad & a_0 \cdot v(t) = b_1 \cdot \dot{u} \quad \text{oder} \quad v(t) = \frac{b_1}{a_0} \cdot \dot{u} = K_D \cdot \dot{u} \end{aligned}$$

Bei den Kopplungen gibt es drei verschiedene Grundarten (Abb. 1.38).

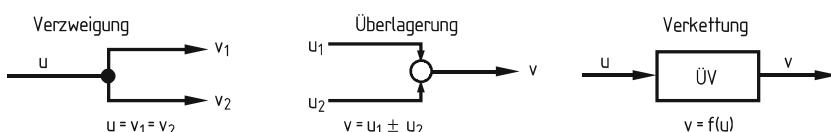
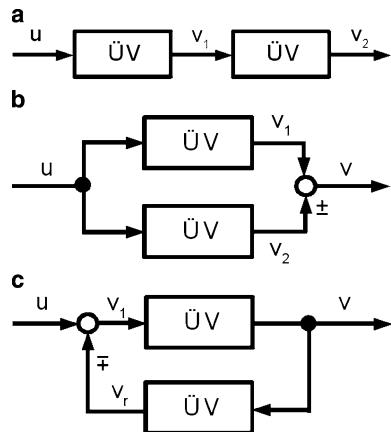


Abb. 1.38 Elementare Kopplungen

Abb. 1.39 Grundschaltungen des Wirkungsplans, ÜV = Übertragungsverhalten.
a Reihenschaltung, **b** Parallelschaltung, **c** Kreisschaltung



Bei der linearen wirkungsmäßigen Betrachtung können aus den drei linearen Grundrechenoperationen und den drei Kopplungen drei immer wieder auftretende Schaltungen aufgebaut werden (Abb. 1.39):

- Reihenschaltung
- Parallelschaltung
- Kreisschaltung

Für die regelungstechnische Betrachtung eines Systems ist der wirkungsmäßige Zusammenhang, also die Form der physikalischen Verknüpfungen von Bedeutung, nicht die geometrische Anordnung. Jedes Glied ist längs eines Wirkungsweges mit dem folgenden Glied verbunden. Die Größen wirken in einer vorgegebenen Richtung, *der Wirkungsrichtung*.

Block

► Nach DIN IEC 60050-351 ist der **Block** im Wirkungsplan die Darstellung eines Systems oder Übertragungsgliedes mit einer oder mehreren Eingangsgrößen und einer oder mehreren Ausgangsgrößen, vorzugsweise als Rechteck, in dem die funktionelle Beziehung zwischen den Eingangs- und Ausgangsgrößen angegeben wird. Dabei kann die funktionelle Beziehung durch eine arithmetische Gleichung, eine Übertragungsfunktion, eine Differenzial- oder Differenzengleichung, durch eine Kennlinie oder eine Kennlinienschar oder durch eine Schaltfunktion angegeben werden.

Der Block stellt die wirkungsmäßige Abhängigkeit der Ausgangsgröße $v(t)$ als **Wirkung** von der Eingangsgröße $u(t)$ als **Ursache** dar (Abb. 1.40). Ein Block kann aber auch komplexe Wirkungsgefüge enthalten, z. B. P-T₁-Verhalten, PI-Verhalten.

Abb. 1.40 Der Block als Element des Wirkungsschaltplans



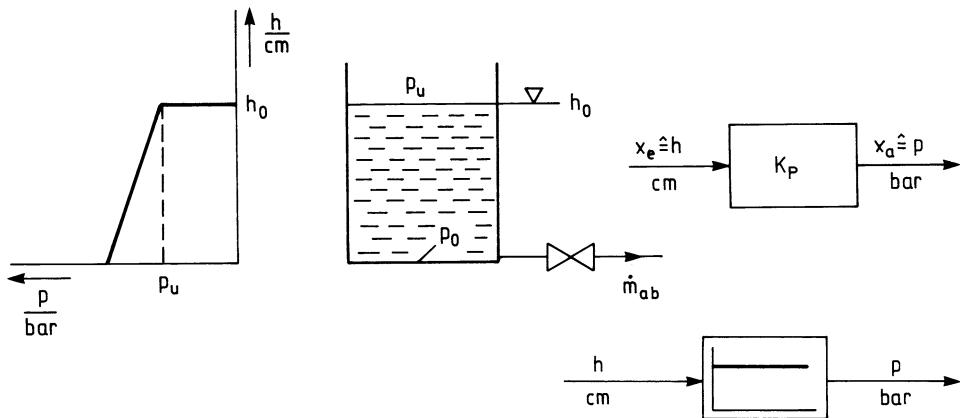


Abb. 1.41 Wasserbehälter als Blocksymbol, p_u = Umgebungsdruck, p_0 = Druck durch die Wassерhöhe h_0

Die Abhängigkeit, die in einem Block dargestellt wird, kann eine empirische Gerätefunktion (aus Messwerten) oder eine theoretische mathematisch-physikalische Funktion sein.

Blockkennzeichnungen:

- dynamisches Verhalten, Sprungantwort
- statisches Verhalten, Kennlinie
- mathematische Beschreibungsfunktion.

Ändert sich eine physikalische Größe in einem Wirkungsplan in eine andere, so ist auch dann ein Block einzuziehen, wenn kein Objekt vorhanden ist. Solche fiktiven Blöcke treten z. B. bei der Umrechnung in prozentuale Einheitssignale auf.

Beispiel 1.6 (Wasserbehälter als Block im Wirkungsplan)

Als einfaches Beispiel wählen wir einen Wasserbehälter mit Zufluss \dot{m}_{zu} und Abfluss \dot{m}_{ab} (Abb. 1.41).

a) Druck der Wassersäule dargestellt als P-Glied

Ausgangsgröße $v(t)$ = Wirkung sei der Druck am Boden des Behälters, Eingangsgröße $u(t)$ = Ursache die Wasserhöhe h .

Die Abhängigkeit des Drucks am Behälterboden von der Wasserstandshöhe wird durch die physikalische Gleichung

$$p = p_u + \rho \cdot g \cdot h = p_u + K_P \cdot h$$

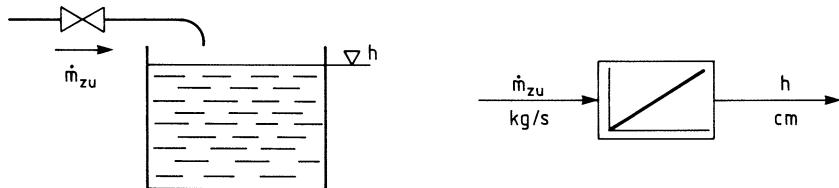


Abb. 1.42 Blockkennzeichnung durch die Sprungantwort (hier: integrierendes Verhalten des Behälters ohne Ablauf)

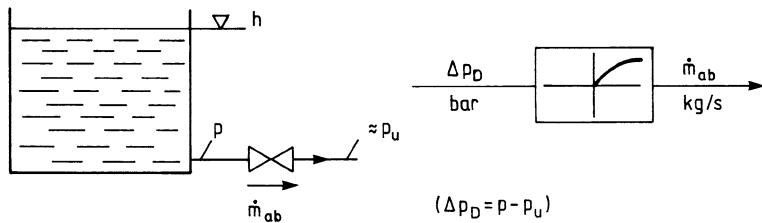


Abb. 1.43 Blockkennzeichnung durch die Kennlinie (hier: nichtlineares Verhalten des Abflussventils)

beschrieben. Da im Wirkungsgefüge nur Änderungen bezogen auf einen Betriebspunkt (z. B. Anfangsbedingung $h = h_0$; $p = p_u$) angegeben werden, kann die Angabe des Umgebungsdrucks p_u entfallen. Der Proportionalwert K_p ist: $K_p = \rho \cdot g$.

b) Wasserbehälter als I-Glied

Rüstet man den Wasserbehälter nur mit einem Wasserdurchfluss aus, so hat er integrierendes Zeitverhalten. Ist ein Zufluss \dot{m}_{zu} vorhanden, so steigt (bei zylindrischem Behälter) der Wasserstand h linear an; ist $\dot{m}_{zu} = 0$, so bleibt der Wasserstand unverändert. Dieser mit der Zeit linear ansteigende Wasserstand wird in Abb. 1.42 durch die Sprungantwort des I-Gliedes gekennzeichnet.

c) Wasserbehälter mit Rückwirkung

Für die Angabe des statischen Verhaltens verwendet man die Kennlinie. In einer Kennlinie wird die Ausgangsgröße über der Eingangsgröße aufgetragen. Der Wasserbehälter wird nur mit einer Ausflussschleuse als Ablauf ausgerüstet (Abb. 1.43). Die Ausgangsgröße als Wirkung ist dann der Massenstrom \dot{m}_{ab} durch diese Schleuse, die Eingangsgröße als Ursache ist die Druckdifferenz Δp_D vor und hinter der Schleuse. Die Kennlinie gibt also den Zusammenhang zwischen \dot{m}_{ab} als Funktion von Δp_D wieder (im Beharrungszustand!).

In den Block wird zur Kennzeichnung des statischen Verhaltens ein Koordinatenkreuz eingetragen. Nach dem Energiesatz der Strömungslehre (Bernoulli) und dem

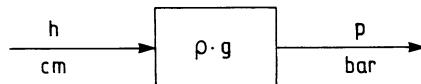


Abb. 1.44 Blockkennzeichnung durch eine mathematische Funktion. $p = f(h) \rightarrow \Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h$ mit $K_p = \rho \cdot g$

Massenerhaltungssatz (Kontinuitätsgleichung) ergibt sich ein nichtlinearer Zusammenhang:

$$\begin{aligned}\dot{m} &\sim A \cdot \sqrt{\rho} \cdot \sqrt{\Delta p_D} \quad (\text{Blendengleichung}) \\ \dot{m} &\sim K \cdot \sqrt{\Delta p_D}\end{aligned}$$

d) Mathematische Funktion als Blockkennzeichnung

Die dritte Kennzeichnungsart ist die mathematische Beschreibungsfunktion. Dazu wird in den Block direkt der K_p -Wert bzw. der funktionelle Zusammenhang des K_p -Wertes eingetragen (Abb. 1.44).

Wirkungslinie

Als Wirkungslinien werden diejenigen physikalischen Größen eingezeichnet, die Änderungen des Beharrungszustandes von Block zu Block weiterleiten. Die Wirkungslinie entspricht einem Signal. Die Wirkungsrichtung wird durch einen Pfeil unmittelbar am Eintritt in einen Block (oder in eine Zusammenfassungsstelle) gekennzeichnet. Wirkungsrichtungen können auch entgegen einem Stoff- oder Energiestrom verlaufen.

Der Wasserbehälter aus Beispiel 1.6 werde mit Wasserzulauf und Wasserablauf ausgerüstet (Abb. 1.45). Der Wasserstand h eines Behälters wird im Wesentlichen durch den Unterschied zwischen Zulauf- und Ablaufmenge beeinflusst. Beide Größen, Zu- und Ablauf, verändern den Wasserstand h , wirken also in Richtung Wasserstand als Ursachen.

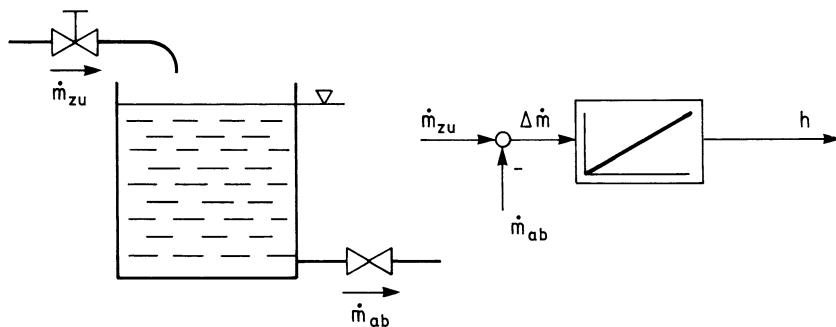
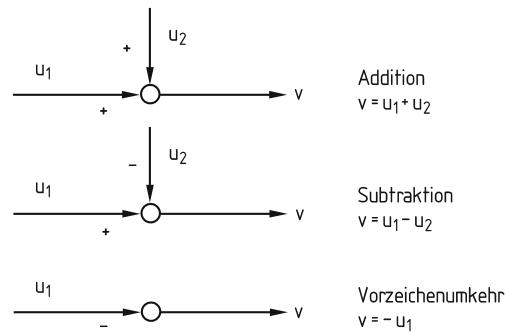
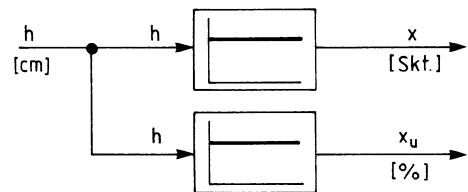


Abb. 1.45 Wirkungslinien mit Angabe der Wirkungsrichtung und des Wirkungssinns am Beispiel eines rückwirkungsfrei angenommenen Wasserbehälters

Abb. 1.46 Arten von Additionsstellen**Abb. 1.47** Verzweigungsstelle einer Wirkungslinie (hier Verzweigung des Wasserstandes zum Schreiber und zur Regelteinrichtung)

Additionsstelle

Wirkungslinien mit gleichen physikalischen Größen können an Additionsstellen addiert oder subtrahiert werden. Ein Beispiel ist in Abb. 1.45 angegeben: $\Delta\dot{m} = \dot{m}_{zu} - \dot{m}_{ab}$

Der Wirkungssinn wird durch „+“ oder „-“ gekennzeichnet. Das Vorzeichen „-“ kehrt den Wirkungssinn um. Wird \dot{m}_{ab} größer, so fällt der Wasserstand h .

In Abb. 1.46 sind einige Arten von Additionsstellen angegeben. Einige Regeln bei Additionsstellen:

- Das Vorzeichen wird stets rechts vom Pfeil in Pfeilrichtung der Wirkungslinie angetragen.
- Eine Wirkungssinn-Umkehr ist nur an Additionsstellen zulässig, nicht an Blöcken.
- Es können beliebig viele Wirkungslinien mit beliebigem Wirkungssinn zusammengefasst werden.

Verzweigungsstelle

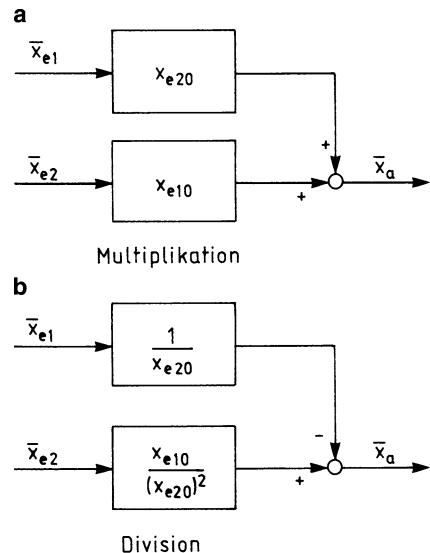
Wird eine Wirkungslinie für mehr als einen Block als Eingangsgröße benötigt, verwendet man Verzweigungsstellen.

Die physikalische Größe wird unverändert in Betrag und Dimension verzweigt. Bei prozentualen Aufteilungen verwendet man Subtraktionsstellen. Im Beispiel Abb. 1.47 wird der Wasserstand h des Wasserbehälters unverändert für die Verarbeitung im Schreiber und für die Verarbeitung in der Regeleinrichtung über den Messumformer weitergeleitet.

Multiplikationsstelle

Beeinflussen zwei Ursachen unterschiedlicher physikalischer Größen die gleiche Wirkung am gleichen Teilobjekt, dann sind zwei Blöcke einzulegen und mit einer Zusam-

Abb. 1.48 Algebraische Verknüpfungen und deren Linearisierung im Wirkungsschaltplan



menfassungsstelle zu verknüpfen. Häufig treten bei Teilobjekten an Regelstrecken zwei Ursachen als *Produkt* auf. Dies macht das Wirkungsgefüge für eine mathematische Behandlung unhandlich.

In der Regelungstechnik ist weniger die absolute Größe, sondern vielmehr deren Änderung von Bedeutung, denn dieser Änderung soll entgegengewirkt werden. So lange die Änderung klein ist, kann die Multiplikation nach dem Überlagerungssatz von Helmholtz durch eine Addition ersetzt werden.

Im Wirkungsschaltplan können bei Multiplikationen und bei Divisionen linearisierte Zusammenhänge verwendet werden, wenn

- nur Änderungen betrachtet und
- diese Änderungen klein gehalten werden.

Der Zusammenhang wird an algebraischen Verknüpfungen in Abb. 1.48 aufgezeigt.

$$x_{a0} = x_{e10} \cdot x_{e20}$$

$$x_{a0} + \bar{x}_a = (x_{e10} + \bar{x}_{e1}) : (x_{e20} + \bar{x}_{e2})$$

$$(x_{a0} + \bar{x}_a) \cdot (x_{e20} + \bar{x}_{e2}) = (x_{e10} + \bar{x}_{e1})$$

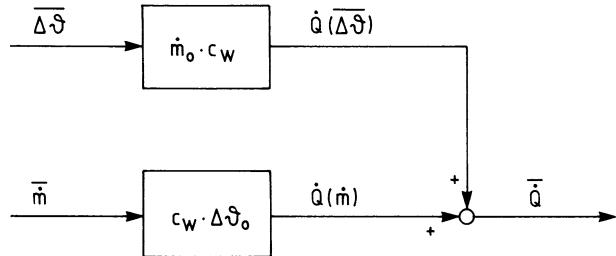
$$\underbrace{(x_{a0} \cdot x_{e20})}_{x_{e10}} + (x_{a0} \cdot \bar{x}_{e2}) + (\bar{x}_a \cdot x_{e20}) + \underbrace{(\bar{x}_a \cdot \bar{x}_{e2})}_{\approx 0} = (x_{e10} + \bar{x}_{e1})$$

$$(\bar{x}_a \cdot x_{e20}) = \bar{x}_{e1} - (x_{a0} \cdot \bar{x}_{e2})$$

$$\bar{x}_a = \bar{x}_{e1} \cdot \frac{1}{x_{e20}} - \bar{x}_{e2} \cdot \frac{x_{a0}}{x_{e20}} = \bar{x}_{e1} \cdot \frac{1}{x_{e20}} - \bar{x}_{e2} \cdot \frac{x_{e10}}{(x_{e20})^2}$$

$$\bar{x}_a = f(\bar{x}_{e1}) - f(\bar{x}_{e2})$$

Abb. 1.49 Ersatz einer Multiplikationsstelle im Wirkungsschaltplan durch eine Addition



$$x_{a0} = x_{e10} \cdot x_{e20}$$

$$x_{a0} + \bar{x}_a = (x_{e10} + \bar{x}_{e1}) \cdot (x_{e20} + \bar{x}_{e2})$$

$$x_{a0} + \bar{x}_a = \underbrace{x_{e10} \cdot x_{e20}}_{x_{a0}} + x_{e10} \cdot \bar{x}_{e2} + \bar{x}_{e1} \cdot x_{e20} + \underbrace{\bar{x}_{e1} \cdot \bar{x}_{e2}}_{\approx 0}$$

$$\bar{x}_a = x_{e10} \cdot \bar{x}_{e2} + \bar{x}_{e1} \cdot x_{e20} = f(\bar{x}_{e2}) + f(\bar{x}_{e1})$$

Beispiel 1.7 (Multiplikationsstelle am Beispiel eines Heizkörpers)

Die abgegebene Wärmeleistung eines Heizkörpers \dot{Q} ist vom Produkt aus Wasserdurchsatz \dot{m} , spezifischer Wärmekapazität c_w und Abkühlung $\Delta\vartheta$ abhängig (s. Abb. 1.49).

$$\dot{Q}_0 = \dot{m}_0 \cdot c_w \cdot \Delta\vartheta_0$$

Der Index „0“ gilt für einen beliebigen Beharrungszustand.

Eine Änderung der Durchflussmenge um \bar{m} und der Abkühlung um $\bar{\Delta\vartheta}$ liefert:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_0 + \bar{Q} &= (\dot{m}_0 + \bar{m}) \cdot c_w \cdot (\Delta\vartheta_0 + \bar{\Delta\vartheta}) \\ &= \dot{m}_0 \cdot c_w \cdot \Delta\vartheta_0 + \bar{m} \cdot c_w \cdot \Delta\vartheta_0 + \dot{m}_0 \cdot c_w \cdot \bar{\Delta\vartheta} + \bar{m} \cdot c_w \cdot \bar{\Delta\vartheta}\end{aligned}$$

Bei kleinen Änderungen kann das letzte Glied vernachlässigt werden; der Beharrungswert $\dot{Q}_0 = \dot{m}_0 \cdot c_w \cdot \Delta\vartheta_0$ kürzt sich weg. Damit bleibt:

$$\bar{Q} = \bar{m} \cdot c_w \cdot \Delta\vartheta_0 + \dot{m}_0 \cdot c_w \cdot \bar{\Delta\vartheta_0}$$

$$\bar{Q} = \dot{Q}(\bar{m}) + \dot{Q}(\bar{\Delta\vartheta})$$

1.4 Testfunktionen

Zur Analyse des dynamischen Verhaltens von Regelsystemen werden bevorzugt solche Testsignale verwendet, die mit den vorhandenen Stelleinrichtungen einfach erzeugt werden können und mathematisch einfach zu beschreiben sind. Dabei muss das Testsignal als Eingangsgröße



Abb. 1.50 Blockdarstellung der Antwortfunktion einer mathematischen Analyse

- deutlich größer sein als stochastische Störsignale (Rauschen),
- so klein sein, dass das Regelsystem nicht gegen funktionale Grenzen läuft, z. B. Messbereichsüberschreitungen oder unzulässige Betriebszustände der Anlage.

Die Beschränkung auf einige wenige Testfunktionen mit einfacher charakteristischer Signalform erleichtert dann die Vergleiche untereinander hinsichtlich des statischen, stationären und aperiodischen dynamischen Verhaltens. Die häufigsten Testfunktionen sind:

- Sprungfunktion $v = K \cdot 1(t)$
- Rechteckfunktion = Sprungfunktion mit zeitlicher Begrenzung
- Anstiegsfunktion $v = c \cdot t$
- Rampenfunktion = Anstiegsfunktion mit Amplitudenbegrenzung
- Impulsfunktion = Nadelfunktion
- Periodische Funktion, z. B. Sinus-Schwingung

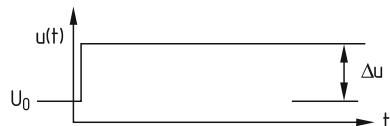
Jede Differenzialgleichung eines Systems lässt sich einfacher untersuchen, wenn die Analyse auf je eine Eingangs- und Ausgangsgröße beschränkt wird. Die mathematische Beschreibungsform, die sich gut mit der experimentellen Analyse vergleichen lässt, wird „*Antwortfunktion*“ genannt. Der sich ergebende Verlauf der Ausgangsgröße bei normierter Eingangsgröße ist dann ein charakteristisches Merkmal für das Übertragungsverhalten (ÜV) des untersuchten Systems (Abb. 1.50).

Voraussetzungen:

- Das System befindet sich ursprünglich ($t < 0$) im Beharrungszustand, also für $t(0^-)$ unmittelbar vor Zuschaltung der Testfunktion.
- Für die messtechnische Analyse schaltet man ein definiertes Eingangssignal zum Zeitpunkt $t(0^+)$ auf, also genau zu dem Zeitpunkt, zu dem die Testfunktion ausgelöst wird.
- Die Eingangsgröße verläuft entsprechend der gewählten Testfunktion.
- Alle übrigen Eingangsgrößen sind konstant bzw. Null; dieser Zustand wird als Betriebspunkt, beim geschlossenen Regelkreis als Arbeitspunkt ($x = w$) bezeichnet.
- Die Ausgangsgröße verläuft dann bei stabilen Systemen in einer für das System und für die jeweilige Testfunktion typischen Form in den durch die partikuläre Lösung (siehe Abschn. 1.2) vorgegebenen neuen Beharrungswert oder stationären Zustand.
- Zur besseren Vergleichbarkeit werden normierte Testfunktionen verwendet; alle Signale werden auf den Betriebspunkt im Beharrungszustand bezogen.

Abb. 1.51 Sprungfunktion:

$$u(t) = \begin{cases} U_0 & \text{für } t < 0 \\ U_0 + \Delta u & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$



Beispiele

| Testfunktion | Verlauf | Antwortfunktion |
|--------------|---------|----------------------|
| Impuls | | Impulsantwort g(t) |
| Sprung | | Sprungantwort h(t) |
| Anstieg | | Anstiegsantwort a(t) |
| Schwingung | | Frequenzgang G(s) |

1.4.1 Sprungantwort

Die häufigste Antwortfunktion ist die bezogene Sprungantwort.

- Sprünge lassen sich in der Praxis relativ leicht z. B. über Ein-Aus-Schalter erzeugen.
 - Ein Sprung ist für die Regelung das ungünstigste Signal, das praktisch auftreten kann. In allen anderen Fällen ist die Auswirkung auf das Ausgangssignal günstiger.
- Die **Sprungantwort** ist der zeitliche Verlauf des Ausgangssignals als Ergebnis einer Sprungfunktion am Eingang. Wird die Änderung des Ausgangssignals durch Quotientenbildung auf die Sprunghöhe des Eingangssignals bezogen, dann entsteht die bezogene Sprungantwort, genannt Übergangsfunktion.

Diese Testfunktion wird am häufigsten benutzt und deren Übergangsfunktion dient auch der symbolischen Darstellung des Systemverhaltens von Blöcken im Wirkungsplan (Abb. 1.51).

Wählt man als Startwert für den Testsprung den Wert im Arbeitspunkt U_0 und setzt die Sprunghöhe auf den Wert „1“, so erhält man die Einheits-Sprungfunktion, die mathematisch beschrieben wird durch:

$$\Delta u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

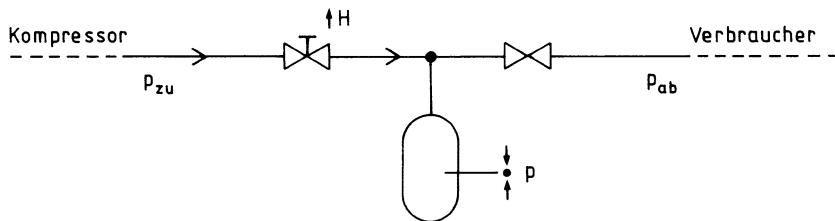
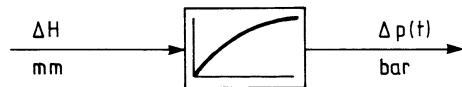


Abb. 1.52 Gerätebild eines einfachen Durchlaufspeichers zur Dämpfung von Schwankungen auf der Verbraucherseite

Abb. 1.53 Vereinfachter Wirkungsplan des Durchlaufspeichers



Die dimensionslose Form erleichtert die Verarbeitung der Signalverläufe und den Vergleich der unterschiedlichsten physikalischen Systeme. Hier wird der Eingangssprung $u(t)$ auf die Sprunghöhe Δu bezogen.

$$\sigma(t) = \frac{u(t)}{\Delta u} = 1(t) \quad (\text{dimensionslos})$$

Das zugehörige Ausgangssignal $v(t)$ wird als Sprungantwort bezeichnet. Bezieht man die Sprungantwort auf den Einheitssprung $\sigma(t)$, so entsteht die Einheitssprungantwort

$$h(t) = \frac{v(t)}{\Delta u \cdot \sigma(t)}$$

Die normierte Sprungantwort soll am Beispiel eines Durchlaufspeichers erläutert werden (Abb. 1.52).

Eingangsgröße (= Ursache) ist die Stellung des Zulaufventils vom Kompressor H in mm, Ausgangsgröße (= Wirkung) ist der Druck im Speicher p in bar. Die Blockdarstellung ist in Abb. 1.53 angegeben.

Ausgehend vom Betriebspunkt H_0 und p_0 wird der Hub H sprunghaft um ΔH_1 bzw. ΔH_2 verändert. Das zugehörige Zeitverhalten beider Größen ist in Abb. 1.54 dargestellt.

Vereinbarung Der Zeitpunkt $t = t_0$ und der Betriebspunkt H_0, p_0 werden als neuer Abszissen- bzw. Ordinatennullpunkt gewählt, d. h. nur die Differenzen, nicht die absoluten Werte werden in die Diagramme eingetragen. Es ist sinnvoll, nicht nur die Eingangsgröße $\Delta u = \Delta H$, sondern auch den Verlauf der Ausgangsgröße $v(t) = \Delta p(t)$ auf die Sprunghöhe zu beziehen.

$$h(t) = \frac{v(t)}{\Delta u} = \frac{\Delta p(t)}{\Delta H}$$

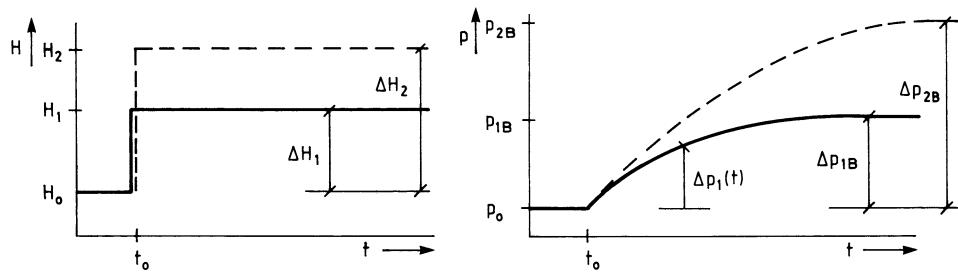


Abb. 1.54 Zeitverhalten des Durchlaufspeichers als Sprungantwort (Index B = Beharrung)

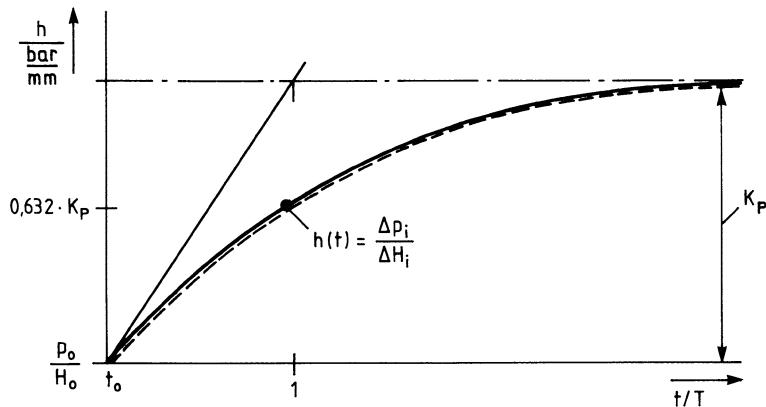


Abb. 1.55 Bezugene Sprungantwort des Durchlaufspeichers

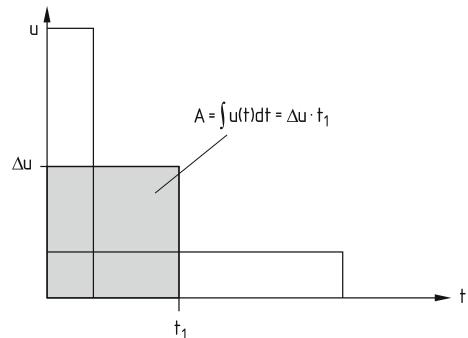
Man erhält damit bei linearen Systemen einen deckungsgleichen Verlauf aller Sprungantworten unterschiedlicher Höhe, die Übergangsfunktion $h(t)$ (Abb. 1.55). Die Dimension der Übergangsfunktion h entspricht der des Proportionalbeiwertes K_P .

$$K_P = \frac{\Delta p_B}{\Delta H} = h(t \rightarrow \infty)$$

1.4.2 Impulsantwort

Bei Prozessanlagen, die nur geringe Regelabweichungen tolerieren, besteht die Gefahr, dass die Ausgangsgröße bei einer Sprungfunktion so hoch ansteigt, dass kritische Grenzwerte überschritten werden und die Notausschaltung durchgeführt wird. Bei solchen Anlagen muss die Eingangsgröße nach kurzer Zeit wieder auf den Ausgangswert zurückgestellt werden. Man verwendet zweckmäßigerweise als normierte Testfunktion die Impulsfunktion zur Untersuchung dieser Prozesse.

Abb. 1.56 Impulsfunktion und Impulsflächen für 3 verschiedene Impulse



► Nach DIN IEC 60050-351 ist die **Impulsantwort** das Zeitverhalten eines linearen zeitinvarianten Systems, bewirkt durch Anwendung einer Impulsfunktion auf eine der Eingangsgrößen.

Für die Impulsfunktion $u(t)$ wird meist Einheitsimpulsfunktion, die durch die Dirac-Funktion $\delta(t)$ beschrieben wird, verwendet.

Für diese gilt

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0 \end{cases} \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Die Fläche unter der Kurve hat damit also den Wert 1.

Die Einheitsimpulsantwort $g(t)$ ist die Antwortfunktion auf die Einheitsimpulsfunktion (Abb. 1.56).

1.4.3 Anstiegsantwort

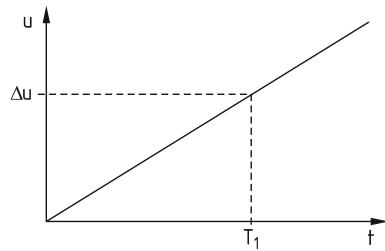
Bei technischen Anlagen, deren Trägheitswirkung die Änderungsgeschwindigkeiten begrenzen, verwendet man oft die Anstiegsfunktion. Gleiches gilt für die Untersuchung von D-Verhalten. Die Anstiegsantwort ist der zeitliche Verlauf des Ausgangssignals bei einer Anstiegsfunktion mit vorgegebener Änderungsgeschwindigkeit für das Eingangssignal. Zur Darstellung kann das Ausgangssignal auf die Anstiegsgeschwindigkeit des Eingangssignals bezogen werden. Es entsteht die „bezogene Anstiegsantwort“.

$$\text{Anstiegsfunktion: } u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ c \cdot t & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Wählt man die Steigung

$$c = \frac{\Delta u}{T_1}$$

Abb. 1.57 Normierte Anstiegsfunktion



so, dass c den Wert 1 s^{-1} hat, so erhält man nach Abb. 1.57 den Einheitsanstieg

$$\alpha(t) = \frac{u}{1/t}.$$

Anmerkung: Zwischen $\alpha(t)$ und $\varepsilon(t)$ (Einheitssprung) besteht der Zusammenhang

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \varepsilon(t)$$

Die bezogene Anstiegsantwort wird mit der Anstiegsgeschwindigkeit c normiert:

$$r(t) = \frac{v}{c} = \frac{v}{u/t}$$

1.5 Antwortfunktionen für elementare Zeitverhalten

Je nach Testfunktion zeigt die Antwortfunktion ein typisches Zeitverhalten. An diesem Zeitverhalten lässt sich die Struktur des untersuchten Systems ermitteln.

1.5.1 P-Verhalten

Ein typisches Beispiel für proportionales Zeitverhalten ist das Wasserventil (Abb. 1.58). Die allgemeine Differentialgleichung für P-Verhalten lautet: $v(t) = K_P \cdot \Delta u$

Beispiel für eine Sprungantwort: $\Delta \dot{V}(t) = K_P \cdot \Delta H(t)$

Als Impulsantwort eines P-Systems erhalten wir einen Impuls, als Anstiegsantwort einen proportionalen Anstieg.

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \rightarrow \infty & \text{für } t = 0 \end{cases} \quad (\text{Impulsantwort}) \quad V(t) = K_P \cdot c \cdot t \quad (\text{Anstiegsantwort})$$

Die Anstiegsgeschwindigkeit der Ausgangsgröße wird gegenüber der Eingangsgröße um K_P verstärkt (bzw. abgeschwächt).

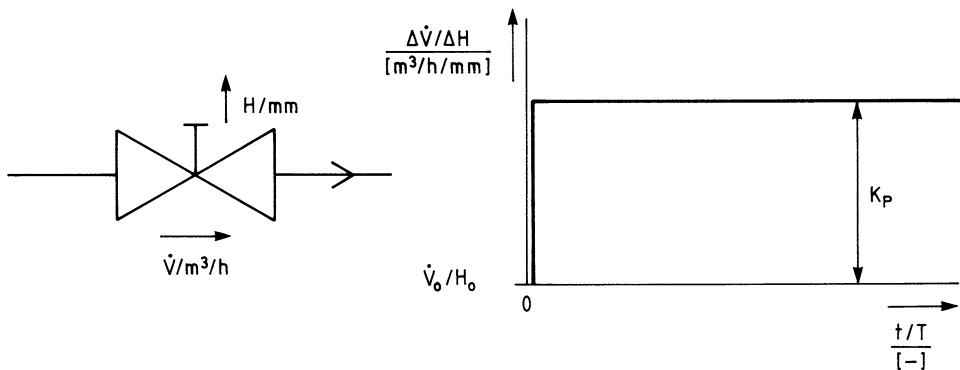


Abb. 1.58 Sprungantwort eines Wasserventils mit P-Verhalten

1.5.2 I-Verhalten

Ein typisches I-Glied ist der Wasserbehälter mit Zulauf, aber ohne Ablauf (Abb. 1.45). Am Anfang ist der Behälter leer ($h = 0$). Die allgemeine Differentialgleichung für I-Verhalten lautet:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= K_I \cdot u(t) \\ v &= K_I \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau + v_0\end{aligned}$$

oder für das Beispiel:

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= \frac{1}{A} \cdot \dot{V}(t) \\ h(t) &= \frac{1}{A} \cdot \int_0^t \dot{V}(\tau) d\tau + 0\end{aligned}$$

Als Sprungantwort vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\begin{aligned}v &= K_I \cdot \Delta u \cdot \int_0^t d\tau + v_0 \\ v &= K_I \cdot \Delta u \cdot t + v_0\end{aligned}$$

oder

$$h(t) = \frac{1}{A} \cdot \dot{V} \cdot t$$

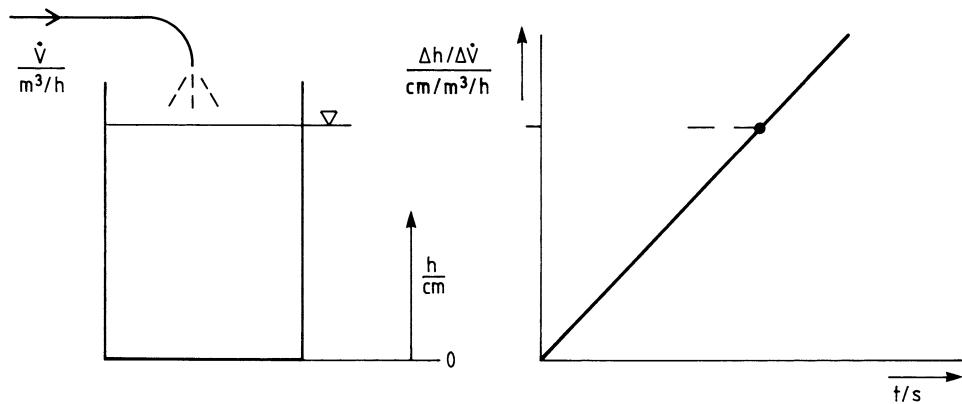


Abb. 1.59 Sprungantwort eines Wasserbehälters (I-Verhalten)

Die Sprungantwort des I-Gliedes (Abb. 1.59) ist ein linearer Anstieg mit der Anstiegs geschwindigkeit

$$K_I \cdot \Delta u = \frac{1}{A} \cdot \dot{V}$$

Haben Ein- und Ausgang die gleiche physikalische Größe, erhält K_I die Einheit einer reziproken Zeit:

$$K_I = \frac{1}{T_I}.$$

► T_I , die so genannte **Integrierzeit**, ist die Zeit, die abläuft, bis die Ausgangsgrößenänderung den gleichen Wert erreicht hat wie der Eingangsgrößensprung.

Für die Impulsantwort gilt:

$$v(t) = K_I \cdot \Delta u \cdot t_1 \cdot \int_0^t \delta(\tau) d\tau + v_0 = K_I \cdot \Delta u \cdot t_1 \cdot 1 + v_0$$

oder

$$h(t) = \frac{1}{A} \cdot \dot{V} \cdot t_1 = \frac{V_1}{A} = h_1 = \text{konst.}$$

Die Herleitung zeigt, was uns die Erfahrung lehrt: Durch den Impuls wird ein Volumenelement V_1 dem Behälter zugeführt, das den Behälterstand auf den Wert h_1 einstellt

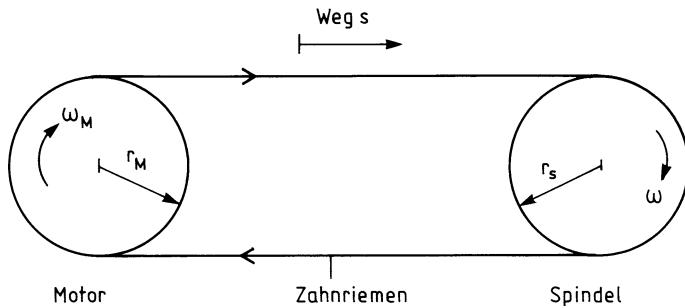


Abb. 1.60 Zahnriemenantrieb einer Spindel

($h_0 = 0!$). Für die Anstiegsantwort gilt:

$$v = K_I \cdot \int_0^t c \cdot \tau d\tau + v_0 = K_I \cdot c \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 + v_0$$

oder

$$h(t) = \frac{1}{A} \cdot \dot{V} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2$$

Es ergibt sich eine Gleichung, in der die Zeit quadriert wird. Der zugehörige Zeitverlauf ist eine Parabel.

1.5.3 D-Verhalten

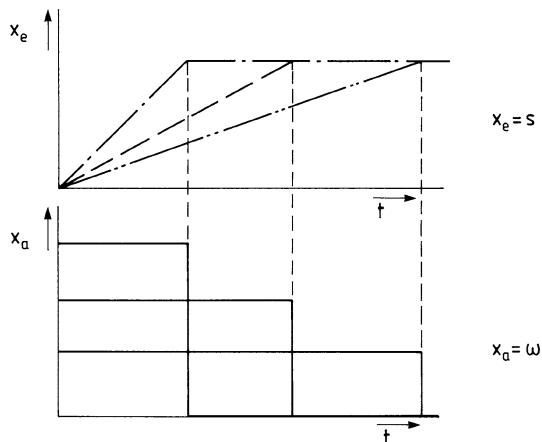
Differenzieren ist die inverse Operation zum Integrieren. Die Ausgangsgröße x_a ist nur vorhanden, wenn sich die Eingangsgröße zeitlich ändert. Nehmen wir als Beispiel eine Anwendung aus der Antriebstechnik. Die Drehzahl n einer Spindel zur Positionierung wird durch die Geschwindigkeit des ablaufenden Zahnriemens bestimmt (Abb. 1.60).

Die Ausgangsgröße ist die Kreisfrequenz ω (bzw. Drehzahl n) der Spindel, Eingangsgröße ist der Weg s . Nur wenn sich der Weg s zeitlich ändert, dreht sich die Spindel!

$$\frac{ds}{dt} = r \cdot \omega \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{ds}{dt} \quad \text{mit } K_D = \frac{1}{r}$$

Mathematisch kann diese Gleichung für eine Sprungfunktion nicht gelöst werden. Um zur Sprungantwort zu gelangen, machen wir einen Umweg über die „Rampenfunktion“, eine Kombination aus Anstieg und Sprung. Dies ist notwendig, da eine sprunghafte Änderung der Eingangsgröße (hier Weg s) wegen der Massenträgheit von Zahnriemen und Spindel praktisch nicht möglich ist.

Abb. 1.61 Rampenfunktion und Rampenantwort eines D-Gliedes



Die Rampenfunktion (Abb. 1.61) verhält sich wie eine Anstiegsfunktion, jedoch ist ein oberer Endwert vorgegeben; für kleine Zeiten ergibt sich die Antwort auf einen linearen Anstieg, für große Zeiten eine Sprungantwort.

Lassen wir den Anstieg immer steiler verlaufen, so ergibt sich bei einem D-Glied eine ebenso zunehmende Ausgangsgröße. Da der Endwert schneller erreicht wird und danach konstant ist (z. B. Endschalter der Spindel), steht das Ausgangssignal entsprechend kürzer an.

Die Antwort auf die zeitliche Änderung des Weges ds/dt bei unterschiedlichen steigenden Zahnriemengeschwindigkeiten ist eine sprunghafte Änderung der Kreisfrequenz ω mit zunehmender Höhe ($\omega_2 > \omega_1$) und abnehmender Breite (kürzere Zeiten t).

Der Grenzwert der Rampe ist ein Sprung. Als Antwort ergibt sich ein Impuls.

In Tab. 1.6 werden die unterschiedlichen Testfunktionen und die Antwortfunktionen für elementare Zeitverhalten dargestellt.

Als nächstes muss überprüft werden, ob die in Abb. 1.61 angegebene Anstiegsantwort auch mathematisch richtig ist. Gehen wir aus von der Gleichung $v(t) = K_D \cdot \dot{u}$.

Der Anstieg \dot{u} wird beschrieben durch

$$\dot{u} = c \cdot t.$$

Die Ableitung dieser Gleichung

$$\frac{du}{dt} = c$$

führt zu

$$x_a = K_D \cdot c.$$

Damit ist $v(t) = \text{konst.}$ ein konstanter Ausgangswert, wenn der Anstieg, gekennzeichnet durch die „Steilheit“ c , vorhanden ist, d. h. $c \neq 0$. Je größer die Anstiegs geschwindigkeit c ,

Tab. 1.6 Zusammenstellung der Antwortfunktionen für elementare Zeitverhalten und elementare Testfunktionen

| Testfunktionen | Antwortfunktionen elementarer Systemglieder | | |
|---|---|--|----------------------------|
| | I-Verhalten | P-Verhalten | D-Verhalten |
| Differentialgleichung $\dot{v} = K_I \cdot u$ $v(t) = K_I \cdot \int u(t) dt$ | | $v(t) = K_P \cdot \Delta u$ | $v = K_D \cdot \dot{u}$ |
| Anstiegsfunktion $u(t) = c \cdot \tau$ bzw. α (Einheitsanstieg) | $\dot{v} = K_I \cdot c \cdot \tau$ $v = 2 \cdot K_I \cdot c \cdot t^2$ | $v = K_P \cdot c \cdot \tau$ | $v = K_D \cdot c$ |
| Anstiegsantwort | | | |
| Übergangsfunktion $u(t) = \Delta u$ bzw. ε (Einheitssprung) | $\dot{v} = K_I \cdot \Delta u$ $v = K_I \cdot \Delta u \cdot t$ | $v = K_P \cdot \Delta u$ | $v = 0 \text{ für } t > 0$ |
| Sprungantwort (entspricht dem Blocksymbol im Wirkungsplan) | | | |
| Gewichtsfunktion $u = \Delta u \cdot T_0$ bzw. δ Nadelfunktion | $\dot{v} = 0 \text{ (für } t > 0)$ $v = K_I \cdot \Delta u \cdot T_0$ | $v = K_P \cdot \Delta u \cdot T_0$ $v = K_P \cdot \delta$ | - |
| Impulsantwort | | | |

desto höher ist die konstante Ausgangsgröße. Wird die Anstiegsgeschwindigkeit $c = 0$, so wird auch die Ausgangsgröße $v(t) = 0$.

Die Impulsantwort des D-Gliedes soll hier nicht näher untersucht werden, da diese Antwort unendlich groß wird. Trägheitslose D-Glieder reagieren sehr empfindlich bei impulsartigen Störungen!

2.1 Definition

- Nach DIN IEC 60050-351 ist die **Regelstrecke** diejenige Funktionseinheit, die entsprechend der Regelungsaufgabe beeinflusst wird (vgl. Abb. 1.10 i. V. m. Tab. 1.1).

Zur Regelstrecke gehört das Stellglied.

- Das **Stellglied** ist eine zur Strecke gehörende, am Eingang der Strecke angeordnete Funktionseinheit, die durch die Stellgröße beeinflusst wird und den Massenstrom oder Energiefluss beeinflusst.

Gerätetechnisch betrachtet ist die Regelstrecke der Anlagenteil zwischen Stellort, Einwirkung der Störgröße und Messort. Dabei soll der Verlauf der Stellgröße den Einwirkungen der Störgröße entgegenwirken.

2.2 Analyse des Verhaltens von Regelstrecken

Die Regelstrecke ist in der Regel fest vorgegeben und lässt sich bei der Inbetriebnahme in Hinblick auf ein optimales Regelverhalten nur geringfügig verändern. Bei der Analyse von Regelstrecken unterscheidet man zwei grundsätzliche Arten:

- Stellverhalten $x = f(y, t)$
- Störverhalten $x = f(z, t)$.

Das Stellverhalten der Regelstrecke lässt sich über den Handbetrieb testen. Bei den im Maschinen- und Anlagenbau häufigsten Strecken verwendet man als Testfunktion einen

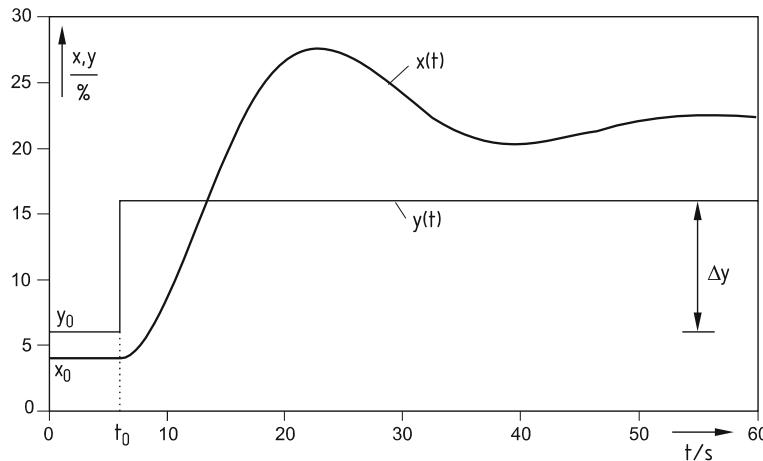


Abb. 2.1 Stellverhalten einer Regelstrecke

Eingangssprung. Man stellt dazu das Stellglied auf Handbetrieb so ein, dass die Regelgröße im Bereich eines vorher festgelegten Arbeitspunktes liegt und wartet den Beharrungszustand ab. Dann verändert man die Stellgröße per Hand sprunghaft um einen definierten Wert, z. B. $\Delta y \approx 10\%$, und beobachtet den Zeitverlauf der Regelgröße (Abb. 2.1).

Jeder Regelstreckentyp zeigt dann ein spezielles Verhalten. Vom Charakter her können zwei verschiedene Kennwerteigenschaften unterschieden werden:

- statische Kennwerte für $t \rightarrow \infty$, z. B. Proportionalbeiwert, Kennlinie, ...
- dynamische Kennwerte, z. B. Zeitkonstanten, Totzeit, ...

Das Störverhalten wird meist vom Nutzerverhalten geprägt. Deren Eingriffsgrößen können nur selten gemessen werden. Deshalb ist aus dem Regelgrößenverlauf rückwärts auf die Störgröße zu schließen. Dies geschieht, indem man die Auswirkung einer möglichst konstanten Störgröße durch eine gegengeschaltete Stellgröße kompensiert (Abb. 2.2).

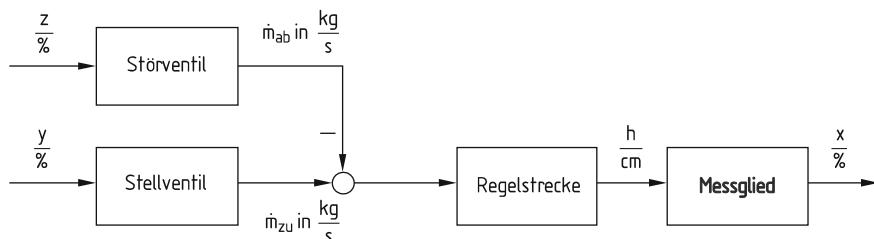


Abb. 2.2 Wasserstands-Regelstrecke als Beispiel für den realen Eingriff von Stell- und Störgröße. \dot{m} Zufluss oder Abfluss eines Wasserspeichers; h Wasserstand

2.3 Klassen von Regelstrecken

In der Regelstreckenübersicht von Abb. 2.3 sind typische Sprungantworten dargestellt. Die erweiterte Regelstrecke besitzt folgende klassifikatorische Merkmale:

- Strecke mit Ausgleich (P-Verhalten, beschrieben durch den Kennwert K_{PS})
- Strecke ohne Ausgleich (I-Verhalten, beschrieben durch den Kennwert K_{IS})
- schwingend oder nicht schwingend.

Zur Schwingung ist mindestens ein schwingungsfähiges System (z. B. Feder-Masse-Dämpfung) in der Regelstrecke notwendig. Das Schwingungsverhalten wird durch die Kennwerte Dämpfungsgrad D und die Schwingungsperiode τ beschrieben, aus denen sich die Kennzeitkonstanten T_0 und T_1 ermitteln lassen.

- mit oder ohne Totzeit.

Die Totzeit ist die Dauer des Zeitintervalls, um das die Ausgangsgröße gegen die Eingangsgröße verschoben wird.

- verzögerungsarm oder verzögerungsbehaftet
 - bei P-Strecken verzögerungsarm ohne Zeitkennwerte
 - bei P-Strecken mit Verzögerung 1. Ordnung beschrieben durch die Zeitkonstante T

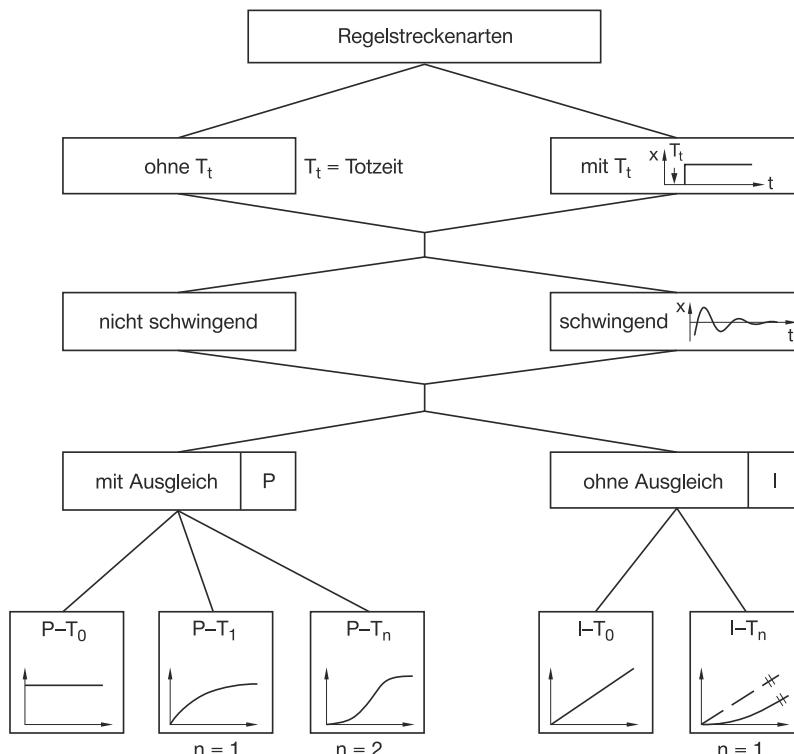


Abb. 2.3 Übersicht über das Zeitverhalten von Regelstrecken

- bei P-Strecken mit Verzögerung höherer Ordnung (ab 2. Ordnung) beschrieben durch die Verzugszeit T_u und die Ausgleichszeit T_g ; daraus lassen sich die Ordnung n der Regelstrecke und gleich große Zeitkonstanten T_i ermitteln
- bei I-Strecken verzögerungsarm ohne Zeitkennwert
- bei I-Strecken mit Verzögerung höherer Ordnung (ab 1. Ordnung) beschrieben durch die Zeitkonstantensumme $\sum T_i$.

2.4 Strecken mit oder ohne Rückwirkung

Das statische Verhalten von Regelstrecken kann nur für solche Systeme angegeben werden, die mehrere Beharrungswerte der Regelgröße innerhalb des Messbereichs der Regelgröße haben, also für Strecken mit proportionalem Verhalten (P-Verhalten). Unter mess-technischen Gesichtspunkten werden alle übrigen Strecken zu integrierenden Systemen gezählt, auch wenn sie von der Struktur her proportionales Verhalten zeigen. Dies soll an einem Wasserspeicher in unterschiedlicher Ausführung erläutert werden (Abb. 2.4).

Bei dem Wasserspeicher in Abb. 2.4a bleibt der Abfluss durch eine Kreiselpumpe mit konstantem Durchsatz \dot{m}_{ab} konstant. Ein Unterschied zwischen Zufluss und Abfluss $\Delta\dot{m} = \dot{m}_{zu} - \dot{m}_{ab}$ führt zu einem zeitlich konstanten Anstieg oder Abfall des Wasserstandes, bis der Behälter leer läuft oder überfließt. Dieser Speicher zeigt integrierendes Verhalten (I-Verhalten).

Bei dem Wasserspeicher in Abb. 2.4b hängt der Abfluss \dot{m}_{ab} vom Wasserstand ab. Ein Anstieg des Wasserstandes durch Zunahme des Zuflusses führt zu einer Vergrößerung des Abflusses. Bei kleinen Differenzen zwischen Zu- und Ablauf kommt es durch diese Rückwirkung zu einem neuen Beharrungszustand im Behälter. Dieser Speicher zeigt Proportionalverhalten (P-Verhalten).

Im Prinzip zeigt der Wasserspeicher in Abb. 2.4c das gleiche Verhalten wie Speicher b. Nur stellt sich der Beharrungszustand theoretisch außerhalb der Behälterhöhe ein. Da dieser Speicher sich zwar proportional verhält, innerhalb der Behälterhöhe jedoch einen nahezu linearen Anstieg zeigt (Rückwirkung vernachlässigbar klein), spricht man hier von partiell I-Verhalten.

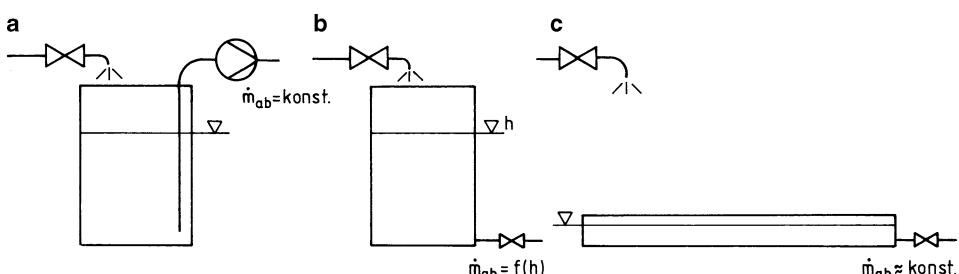


Abb. 2.4 Beispiele von Wasserspeichern mit gleichem Volumen.
a I-Verhalten, b P-Verhalten, c partielles I-Verhalten

2.5 Statisches Verhalten von Regelstrecken

2.5.1 Grundlagen

Das statische Verhalten von Regelkreiskomponenten wird durch Kennlinien und den dort ablesbaren Proportionalwerten beschrieben. Der Proportionalwert wird berechnet aus der Änderung der Ausgangsgröße $\Delta v(t)$ und der Eingangsgrößenänderung $\Delta u(t)$ im Beharrungszustand. Im Beharrungszustand verschwinden alle zeitlichen Ableitungen von u und v in der Fundamentalgleichung der Regelungstechnik.

$$\dot{v} = 0; \ddot{v} = 0; \dots; \dot{u} = 0; \ddot{u} = 0; \dots \rightarrow \Delta v_B = K_P \cdot \Delta u_B$$

Das statische Verhalten wird grafisch dargestellt durch die Kennlinie. Bei der Ermittlung der Kennlinie ist der Zeitverlauf von einem Beharrungszustand zum nächsten ohne Bedeutung. Wichtig ist nur der jeweilige Beharrungspunkt selbst. Dazu hält man die Eingangsgröße U konstant und wartet ab, bis sich auch die Ausgangsgröße V nach hinreichend langer Zeit nicht mehr ändert. Bei proportionalem Verhalten bedeutet dies, dass die Ausgangsgröße einen definierten Wert annimmt. Die Kennlinie ist eine Aneinanderfügung vieler Beharrungszustände, sie kann also nicht „durchfahren“ werden. Vereinbarungsgemäß wird die Ausgangsgröße V über der konstanten Eingangsgröße U aufgetragen (Abb. 2.5).

Geht man vom Beharrungswert der Sprungantwort einer Regelstrecke mit sog. P-T₁-Verhalten aus, so ergeben sich messtechnisch zwei Beharrungszustände, der Betriebspunkt 0 vor dem Sprung und der Beharrungswert 1, nachdem sich durch die Wirkung des Eingangssprungs Δy ein neuer Beharrungswert Δx_B eingestellt hat (Abb. 2.6).

Der Proportionalwert K_P kann aus den Differenzen der Kennlinie zwischen Betriebspunkt 0 und Betriebspunkt 1 berechnet werden nach

$$K_P = \frac{\Delta x_B}{\Delta y}$$

Die Kennlinie eines linearen Systems ist eine Gerade. Da jedoch lineare Kennlinien selten sind, hilft man sich, indem man eine nichtlineare Kennlinie in einem Betriebspunkt durch eine Gerade angleicht. Diesen Vorgang nennt man Linearisierung (Abb. 2.7). Der mit der Linearisierung verbundene Fehler ist bei kleinen Änderungen der Eingangsgröße meist

Abb. 2.5 Kennlinien eines Regelsystems

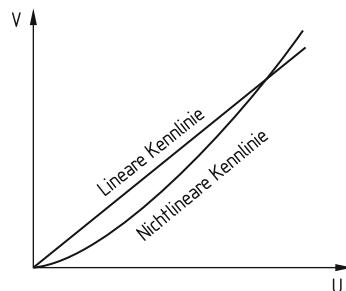
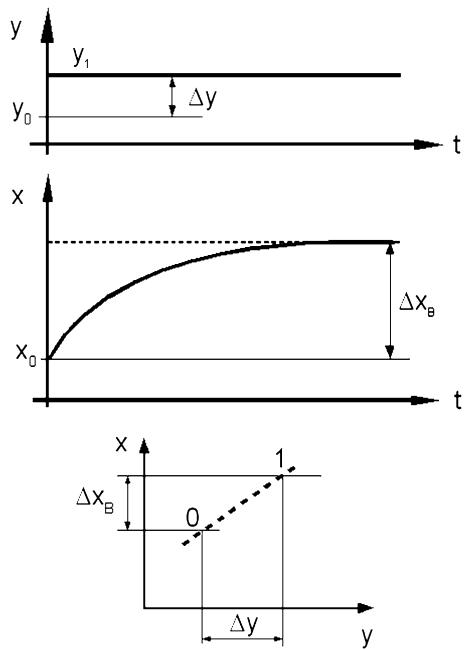


Abb. 2.6 Zeitverhalten und Kennlinie (Ausschnitt) einer P-T₁-Strecke



vernachlässigbar. Im Bedarfsfall wird bei messtechnischer Analyse eine abschnittsweise Linearisierung durchgeführt.

Ist die Kennlinie in grafischer Form gegeben, so wird eine Tangente in einem Betriebspunkt BP gezeichnet. Die Tangente gibt die Steigung der Kennlinie im Betriebspunkt an, entspricht also der ersten Ableitung der Ausgangsgröße nach der Eingangsgröße.

$$K_P = \frac{\partial v}{\partial u} \Big|_{\text{Tangente}} \quad \text{oder} \quad K_P = \frac{\Delta v}{\Delta u} \Big|_{\text{Sekante}}$$

Die lineare Näherung wird damit: $V = V_0 + K_P \cdot \Delta u$

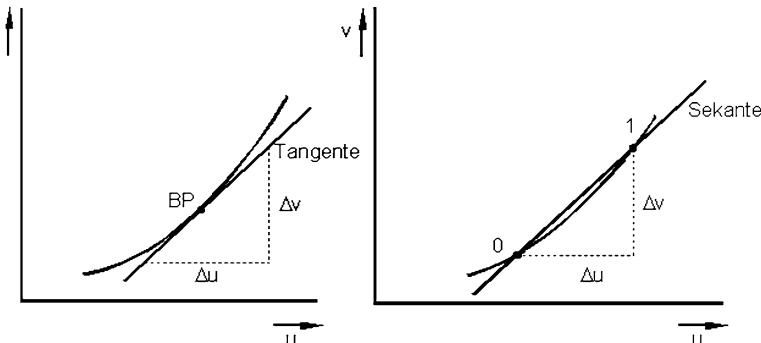
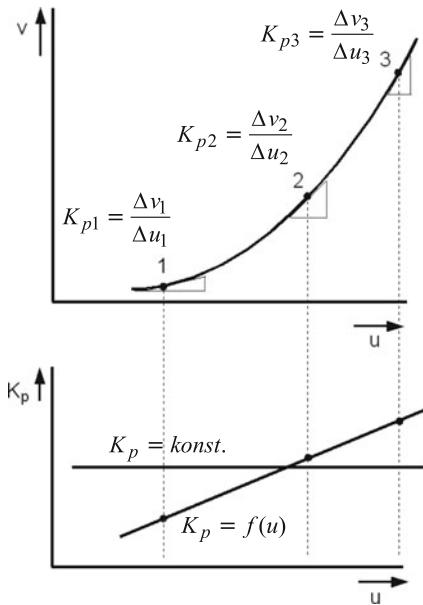


Abb. 2.7 Linearisierung einer nichtlinearen Kennlinie (BP = Betriebspunkt)

Abb. 2.8 Anhängigkeit der Proportionalwerte eines Regelsystems von der Eingangsgröße U



Geht die linearisierte Kennlinie durch den Nullpunkt, dann gilt $V_0 = 0$. Liegt die Kennlinie in Tabellenform vor, z. B. durch eine Reihe von Messwerten, wird für die Linearisierung die Sekante benutzt. Dies ist grafisch in Abb. 2.7 dargestellt. Die Steigung berechnet sich nach

$$K_P = \frac{V_1 - V_0}{U_1 - U_0} = \frac{\Delta v}{\Delta u}$$

Legt man an verschiedene Punkte einer nichtlinearen Kennlinie je eine Tangente an (Abb. 2.8), ermittelt daraus die zugehörigen Proportionalwerte und trägt diese über der Eingangsgröße U auf, dann kann man die Abhängigkeit der Proportionalwerte vom aktuellen Betriebspunkt ablesen. Bei linearisiertem Proportionalwert ergibt sich eine horizontale Gerade.

$$K_{P,\text{lin}} = \frac{K_{P1} + K_{P2} + K_{P3}}{3} = \text{konst.}$$

Sind mehrere Eingangsgrößen vorhanden, z. B. in Abb. 2.9 eine Störgröße und eine Stellgröße, so müssen auch mehrere Proportionalbeiwerte durch partielle Differentiation der Funktion nach den Eingangsgrößen bestimmt werden.

$$K_{P1} = \left. \frac{\partial v}{\partial u_1} \right|_{BP} \quad K_{P2} = \left. \frac{\partial v}{\partial u_2} \right|_{BP}$$

Für jede Eingangsgröße wird eine eigene Kennlinie benötigt. Die einzelnen Proportionalbeiwerte können unterschiedliche Dimensionen haben, wenn auch die Eingangsgrößen U_i physikalisch unterschiedlich sind.

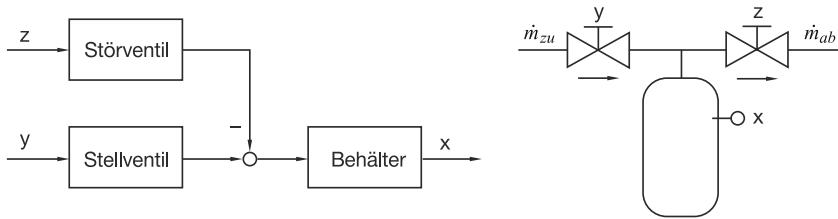
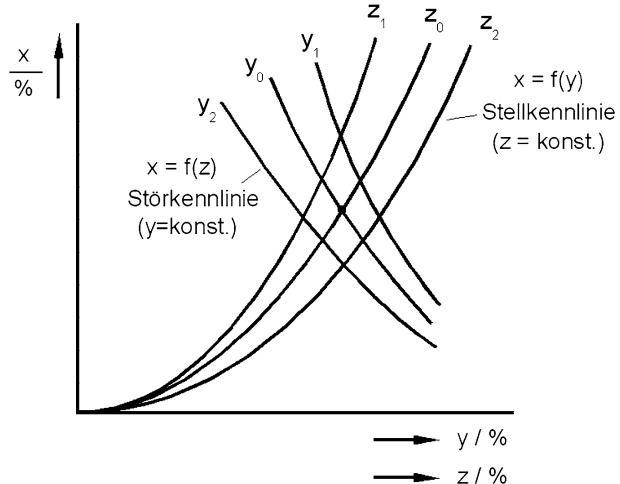


Abb. 2.9 Vereinfachtes Gerätefließbild und Wirkungsplan einer P-T1-Strecke

Abb. 2.10 Kennlinienschar einer P-T1-Strecke mit Stellverhalten und Störverhalten



Bei zwei wirkenden Eingangsgrößen in einer Regelstrecke, hier Zufluss- und Abflussventil für einen Behälter, entsteht eine Kennlinienschar (Abb. 2.10). Für jede einzelne Kennlinie der Kennlinienschar ergibt sich ein Proportionalwert:

$$K_{Py} = \frac{\Delta x_{By}}{\Delta y} \Big|_{z_i} \quad K_{Pz} = \frac{\Delta x_{Bz}}{\Delta z} \Big|_{y_i}$$

Wenn Stellventil und Störventil gleich groß sind, dann können diese Proportionalwerte durch Mittelwertbildung zu einem linearisierten Proportionalwert zusammengefasst werden.

2.5.2 Kennlinien von Regelstreckenkomponenten

Besteht ein Regelsystem aus mehreren Bauteilen, so kann für jede einzelne Systemkomponente mindestens eine Einzelkennlinie gezeichnet werden. Dazu müssen jedoch die Zwischengrößen messtechnisch verfügbar sein. Nehmen wir z. B. ein System aus Komponenten, so ergeben sich daraus Kennlinien mit Proportionalwerten. Übersichtlich lassen

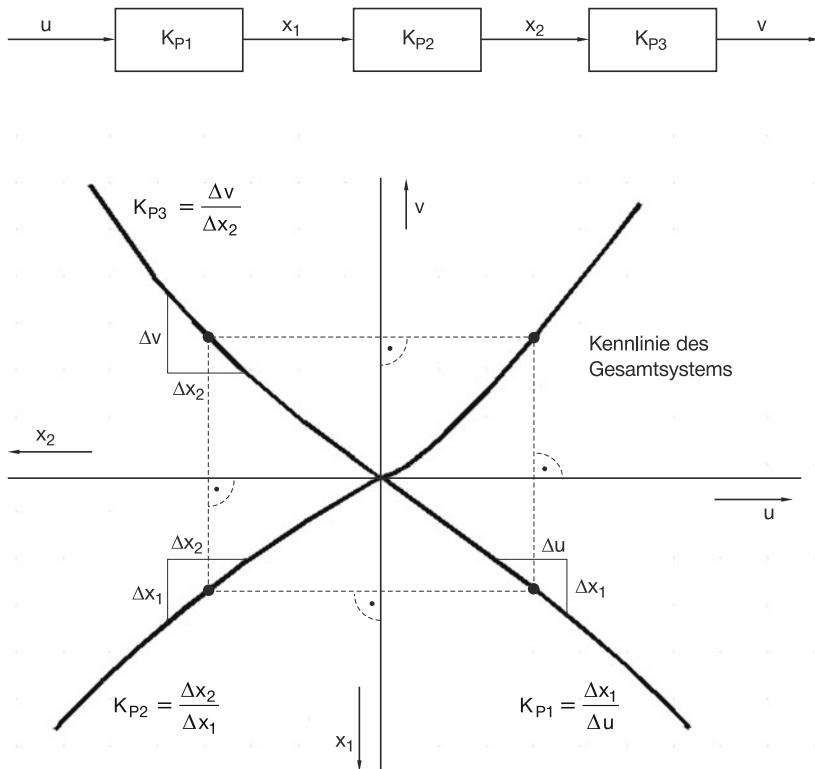


Abb. 2.11 Schematische Darstellung von Kennlinien mit Hilfe der Vier-Quadranten-Methode

sich die Kennlinien mehrerer Komponenten mit Hilfe der Vier-Quadranten-Methode darstellen (Abb. 2.11).

Im 1. Quadranten des rechtwinkligen Koordinatensystems wird die Kennlinie des Gesamtsystems eingetragen, gefolgt von den Einzelkennlinien der Komponenten im Uhrzeigersinn. Treten mehr als 3 Teilkennlinien auf, so können bis zu 4 Kennlinien auch in den Achsen aufgetragen werden, wobei die Eingangsgröße links auf einer Achse, die Ausgangsgröße rechts aufgetragen wird.

Der Betriebspunkt eines Systems mit seinen Teilwerten liegt auf Ordnern (gestrichelte Linien in Abb. 2.11), die senkrecht auf den Achsen stehen. Aus der Steigung der jeweiligen Kennlinie lässt sich der zugehörige Proportionalwert ermitteln.

$$K_{P1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta u} \quad K_{P2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \quad K_{P3} = \frac{\Delta v}{\Delta x_2}$$

Der K_P -Wert des Gesamtsystems K_{PS} ergibt sich durch Multiplikation der einzelnen K_P -Werte:

$$K_{PS} = K_{P1} \cdot K_{P2} \cdot K_{P3} = \frac{\Delta x_1}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x_2} = \frac{\Delta v}{\Delta u}$$

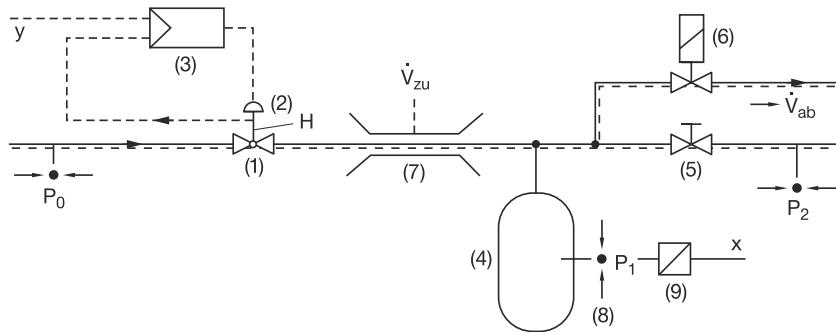


Abb. 2.12 Gerätefließbild eines Druckluftspeichers. (1) Stellventil, Nennhub 20 mm, (2) pneumatischer Stellantrieb, (3) Stellungsregler, (4) Druckluftbehälter, (5) Abflussventil, (6) Störventil, (7) Durchflussmesser, Angabe in l/s Luft, (8) Druckmessstelle im Behälter in bar, (9) Messumformer

Tab. 2.1 Messwerte von Einzelkennlinien der Anlage in Abb. 2.12

| Nr. | y | H | \dot{V} | p_1 | x |
|-----|----|------|-----------|-------|------|
| | | mm | l/s | hPa | % |
| 0 | 50 | 15,0 | 1,18 | 600 | 50,0 |
| 1 | 58 | 17,5 | 1,34 | 770 | 71,5 |
| 2 | 65 | 19,5 | 1,49 | 940 | 92,0 |
| 3 | 54 | 16,3 | 1,26 | 680 | 60,5 |
| 4 | 42 | 12,7 | 1,01 | 450 | 31,0 |
| 5 | 35 | 10,5 | 0,88 | 330 | 16,0 |
| 6 | 29 | 8,7 | 0,76 | 240 | 5,0 |

Beispiel 2.1 (Kennlinien einer Druckregelstrecke)

Ein Druckluft-Pufferspeicher wird aus einem konstanten Netz mit $p_0 = 9$ bar gespeist (Abb. 2.12).

Der Druckluftzufluss wird über ein lineares Stellventil (1) mit pneumatischem Stellantrieb (2) und Stellungsregler (3) dosiert und strömt in den Druckluftbehälter (4). Das Abflussventil (5) ist so eingestellt, dass der Druck im Behälter je nach Stellung des Stellventils 0 bis 9 bar beträgt. Über das Störventil (6) können Druckluftverbraucher simuliert werden.

a) Ermitteln Sie die Kennlinien des Stellgerätes

Ausgehend von diesem Betriebspunkt wird die Stellgröße y verstellt. Im Beharrungszustand ergeben sich die Messwerte nach Tab. 2.1.

Mit Hilfe der Vier-Quadranten-Methode werden die Einzelkennlinien und die Kennlinie der erweiterten Regelstrecke eingetragen (Abb. 2.13).

Folgende Kennlinien sind in Abb. 2.13 eingetragen:

- erweiterte Regelstrecke $x = f(y)$
- Stellantrieb $H = f(y)$

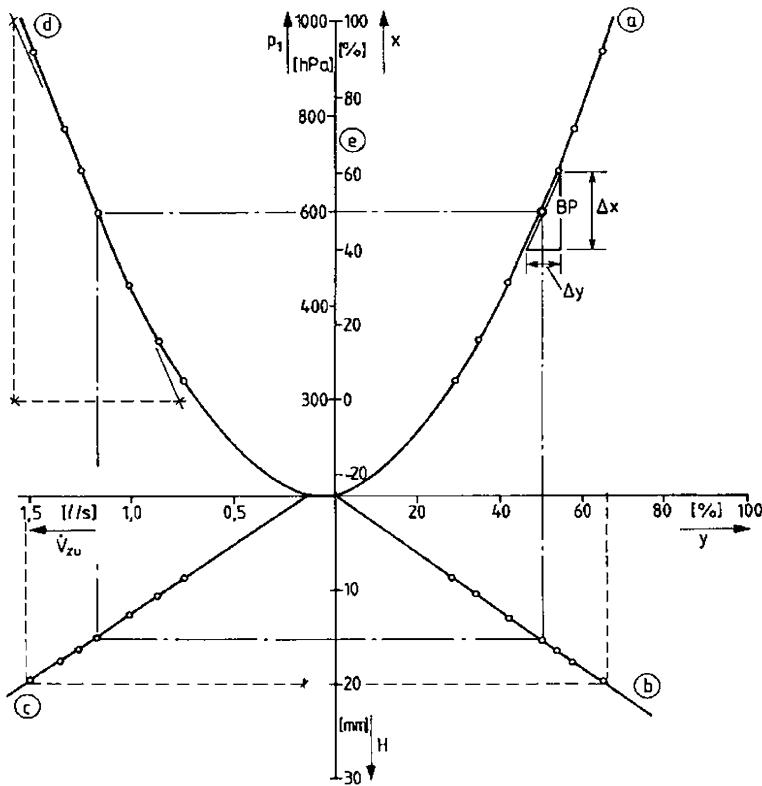


Abb. 2.13 Kennlinien der Druckluftanlage nach der Vier-Quadranten-Methode

- c) lineares Ventil $\dot{V} = f(H)$
- d) Druckbehälter $p_1 = f(\dot{V})$
- e) Messumformer $x = f(p_1)$

Mit Hilfe der Vier-Quadranten-Methode werden die Einzelkennlinien einer Regelstrecke übersichtlich dargestellt. Zusätzlich kann eine fehlende Kennlinie grafisch ermittelt werden. Da in der Messwerttabelle alle Messwerte eingetragen sind, ist dies hier nicht notwendig.

In den ersten Quadranten der Vier-Quadranten-Darstellung wird die dimensionslose Kennlinie der erweiterten Regelstrecke eingetragen, also die Regelgröße x über die Stellgröße y . Diese Kennlinie ist nicht linear. Die Nichtlinearität wird verursacht durch die Behälterkennlinie, die sich wie $p_1 \sim \dot{V}^2$ verhält (Abb. 2.13). Sowohl die Kennlinie des Stellantriebs als auch die Kennlinie des Ventils sind linear. Die Ventilkennlinie zeigt einen gerätebedingten Anlaufwert von theoretisch $0,1 l/s$. Der Druck im Behälter wird direkt als Einheitssignal verwertet. Deshalb ist die Kennlinie des Messumformers an der Achse abgetragen. Die Regelgröße x beträgt 0% bei $0,2$ bar. Da der Druck im

Tab. 2.2 Berechnete Proportionalwerte der Kennlinie der erweiterten Regelstrecke

| Y | Δx | Δy | K_{PSE} |
|-----|------------|------------|-----------|
| % | % | % | |
| 50 | 20 | 8 | 2,50 |
| 60 | 20 | 7 | 2,86 |
| 40 | 20 | 9 | 2,22 |
| 30 | 20 | 11 | 1,82 |

Behälter auch unter 0,2 bar fallen kann, kann die Regelgröße x auch negative Werte annehmen.

- b) Bestimmen Sie grafisch den Proportionalbeiwert der erweiterten Regelstrecke K_{PSE} für verschiedene Stellgrößen Y und tragen Sie diese in ein Diagramm $K_{PSE} = f(Y)$ ein.

Der Proportionalbeiwert der erweiterten Regelstrecke kann aus dem Steigungsdiagramm für die jeweilige Tangente an die Kennlinie Abb. 2.13 ermittelt werden:

$$K_{PSE} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Für verschiedene Stellgrößen Y ergeben sich wegen der Nichtlinearität der Stellgröße unterschiedliche Proportionalbeiwerte (Tab. 2.2).

Diese Proportionalbeiwerte K_{PSE} werden in Abb. 2.14 über der Stellgröße Y aufgetragen.

Durch die Ergebnispunkte kann eine Ausgleichsgerade gelegt werden. Der Verlauf einer solchen Geraden ist bei streuenden Punkten oft schwierig zu schätzen. Genaue Ergebnisse liefert die mathematisch-statistische Ermittlung der Regressionsgeraden: $X_a = X_{a0} + m \cdot Y$.

Für $i = 1$ bis n Wertepaare X_{ei} und X_{ai} lässt sich eine lineare Funktion angeben, bei der die Summe der Abstandsquadrate der Geraden von den Ergebnispunkten minimal wird.

Die Koeffizienten sind:

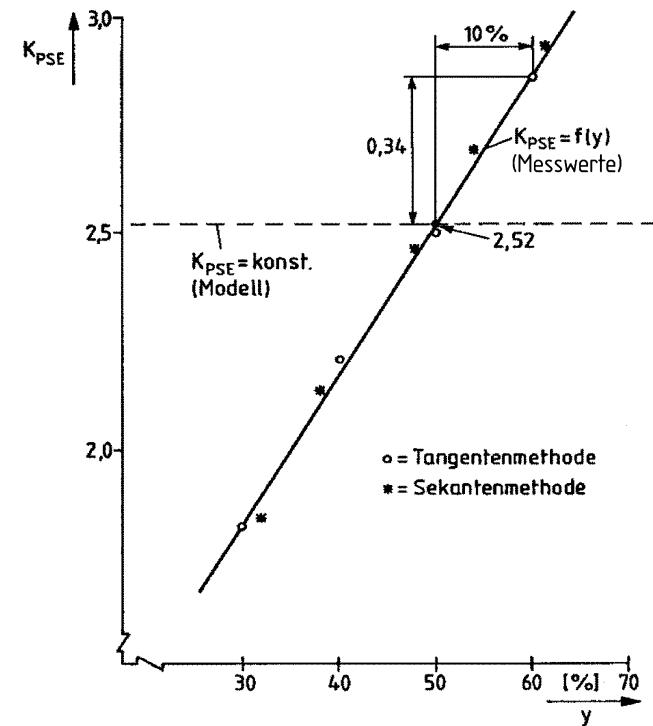
$$X_{a0} = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n X_{ai} - m \sum_{i=1}^n X_{ei} \right] \quad \text{und}$$

$$m = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n (X_{ei} \cdot X_{ai}) - \sum_{i=1}^n X_{ei} \cdot \sum_{i=1}^n X_{ai}}{n \cdot \sum_{i=1}^n X_{ei}^2 - (\sum_{i=1}^n X_{ei})}$$

Es ergibt sich mit den Werten aus Tab. 2.3:

$$m = \frac{4 \cdot 440 - 180 \cdot 9,40}{4 \cdot 8600 - 180^2} = 0,034 \frac{1}{\%} \quad \text{und} \quad X_{a0} = \frac{1}{4} [9,4 - 0,034 \cdot 180] = 0,82$$

Abb. 2.14 Auftragung der K_{PSE} -Werte aus der Kennlinie Abb. 2.13 über der Stellgröße y



Diese Ausgleichsgerade läuft durch den Arbeitspunkt mit

$$K_{PSE} = X_{a0} + m \cdot X_{ei} = 0,82 + 0,034 \frac{1}{\%} \cdot 50 \% = 2,52 \quad \text{bei } y = 50 \%$$

und hat die Steigung

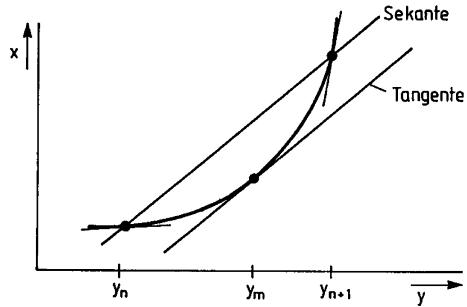
$$m = \frac{0,34}{10 \%}.$$

Die Kennlinie des Behälters ist wegen des Ausflussgesetzes $p \sim \dot{V}^2$ eine Parabel. Da die Nichtlinearität der Kennlinie der erweiterten Regelstrecke nur durch die Parabelform der Behälterkennlinie verursacht wird, ist auch diese Kennlinie parabelförmig. Die Ableitung einer quadratischen Gleichung (Parabel) ergibt eine Gerade.

Tab. 2.3 Rechenergebnis für die Koeffizienten der Geradengleichung

| i | – | 1 | 2 | 3 | 4 | Summe $i = 1$ bis 4 |
|-----------------------|---|-------|-------|------|------|---------------------|
| $X_{ei} = Y_i$ | | 50 | 60 | 40 | 30 | 180 |
| Y_i^2 | % | 2500 | 3600 | 1600 | 900 | 8600 |
| $X_{ai} = K_{PSEi}$ | – | 2,50 | 2,86 | 2,22 | 1,82 | 9,40 |
| $X_{ei} \cdot X_{ai}$ | % | 125,0 | 171,6 | 88,8 | 54,6 | 440 |

Abb. 2.15 Qualitativer Vergleich der K_p -Wert-Ermittlung durch Sekante bzw. Tangente



Da der Proportionalbeiwert K_{PSE} die erste Ableitung der Kennlinie über der Stellgröße darstellt, muss auch K_{PSE} aufgetragen über Y eine Gerade ergeben. Diese Regressionsgerade ist also im Rahmen der Messgenauigkeit eine physikalisch plausible Darstellung.

Linearisierung würde bedeuten, dass im gesamten Bereich der Stellgröße Y ein konstanter K_{PSE} -Wert gilt. Für den Betriebspunkt ergibt sich aus dem Abb. 2.14:

$$K_{PSE} = 2,52 \quad \text{bei } X_0 = Y_0 = 50\%.$$

Rechnen wir mit einem linearen Modell, d. h. $K_{PSE} = \text{konst.} \neq f(Y)$, dargestellt als gestrichelte Linie in Abb. 2.14, so liefert das Modell für $Y < 50\%$ größere Werte der Regelgröße X als Messwerte, für $Y > 50\%$ kleinere Werte X (alle Werte im Beharrungszustand).

$$\Delta x_B = K_{PSE} \cdot \Delta y \quad \text{mit } X = X_0 + \Delta x_B$$

Der Modell-Fehler wird umso größer, je größer die Entfernung vom Betriebspunkt ist.

- c) Vergleichen Sie das Ergebnis von b) mit berechneten Proportionalbeiwerten K_{PSE} , die aus der Messwerttabelle bestimmt werden. Tragen Sie diese Werte in Abb. 2.14 ein.

Der K_{PSE} -Wert, der sich für einen positiven Sprung von $Y = 50\%$ auf $Y = 58\%$ ergibt, muss gleichgroß dem negativen Sprung von $Y = 58\%$ auf $Y = 50\%$ sein. Grafisch werden solche Differenzen von Tabellenwerten als Sekanten dargestellt (Abb. 2.15). Bei Computerauswertungen wird meist das Sekantenverfahren verwendet.

Bei gleichmäßiger Krümmung wird der Proportionalbeiwert

$$K_{PSE} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

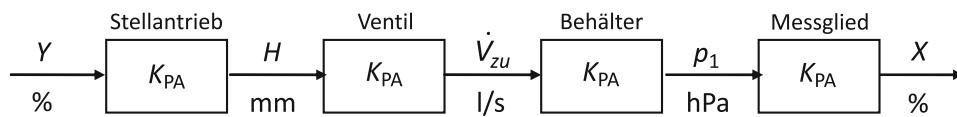
über dem Mittelwert der Stellgröße

$$Y_m = \frac{Y_n + Y_{n+1}}{2}$$

aufgetragen.

Tab. 2.4 Nach der Sekantenmethode berechnete Proportionalwerte (aus Tab. 2.1)

| Y | X | Δy | Δx | Y_m | K_{PSE} |
|-----|------|------------|------------|-------|-----------|
| % | % | % | % | % | |
| 50 | 50,0 | — | — | — | — |
| 58 | 71,5 | 8 | 21,5 | 54,0 | 2,69 |
| 65 | 92,0 | 7 | 20,5 | 61,5 | 2,93 |
| 54 | 60,5 | 11 | 31,5 | 59,5 | 2,86 |
| 42 | 31,0 | 12 | 29,5 | 48,0 | 2,46 |
| 35 | 16,0 | 7 | 15,0 | 38,0 | 2,14 |
| 29 | 5,0 | 6 | 11,0 | 32,0 | 1,83 |

**Abb. 2.16** Grundschaltplan der erweiterten Druckluft-Regelstrecke

Für die Werte aus Tab. 2.1 ergibt sich das Rechenergebnis in Tab. 2.4.

Die K_{PSE} -Werte sind mit *-Zeichen in Abb. 2.14 eingetragen.

- d) Bestimmen Sie im Betriebspunkt die Proportionalwerte der Einzelkennlinien und berechnen Sie daraus den K_{PSE} -Wert der erweiterten Regelstrecke. Vergleichen Sie diesen Wert mit dem K_{PSE} -Wert aus Abb. 2.14.

Zunächst werden an die Einzelkennlinien Abb. 2.13 im Betriebspunkt die Tangenten gezeichnet. Aus dem Steigungsdreieck lässt sich dann der jeweilige Proportionalwert bestimmen.

Der K_p -Wert der erweiterten Regelstrecke ist dann das Produkt der einzelnen K_p -Werte von allen Einzelgliedern, also

$$K_{PSE} = K_{PA} \cdot K_{PV} \cdot K_{PB} \cdot K_{PM}.$$

Dieser Zusammenhang ist auch in Abb. 2.16 als Reihenschaltung dargestellt. Bei einer Reihenschaltung von Regelstreckenteilen ist der gesamte Proportionalwert das Produkt der einzelnen Proportionalwerte.

Stellantrieb:

$$\Delta H = K_{PA} \cdot \Delta y \quad \rightarrow \quad K_{PA} = \frac{\Delta H}{\Delta y} = \frac{20 \text{ mm}}{66 \%} = 0,303 \frac{\text{mm}}{\%}$$

Ventil:

$$\Delta \dot{V} = K_{PV} \cdot \Delta H \quad \rightarrow \quad K_{PV} = \frac{\Delta \dot{V}}{\Delta H} = \frac{1,38 \text{ l/s}}{20 \text{ mm}} = 0,069 \frac{\text{l/s}}{\text{mm}}$$

Behälter:

$$\Delta p_1 = K_{\text{PB}} \cdot \Delta \dot{V} \quad \rightarrow \quad K_{\text{PB}} = \frac{\Delta p_1}{\Delta \dot{V}} = \frac{800 \text{ hPa}}{0,82 \text{ l/s}} = 976 \frac{\text{hPa}}{\text{l/s}}$$

Messeinrichtung:

$$\Delta x = K_{\text{PM}} \cdot \Delta p_1 \quad \rightarrow \quad K_{\text{PM}} = \frac{\Delta x}{\Delta p_1} = \frac{100 \%}{800 \text{ hPa}} = 0,125 \frac{\%}{\text{hPa}}$$

Erweiterte Regelstrecke:

$$\begin{aligned} K_{\text{PSE}} &= K_{\text{PA}} \cdot K_{\text{PV}} \cdot K_{\text{PB}} \cdot K_{\text{PM}} \\ &= 0,303 \frac{\text{mm}}{\%} \cdot 0,069 \frac{\text{l/s}}{\text{mm}} \cdot 976 \frac{\text{hPa}}{\text{l/s}} \cdot 0,125 \frac{\%}{\text{hPa}} = \underline{\underline{2,55}} \end{aligned}$$

Im Vergleich dazu der Proportionalbeiwert aus Abb. 2.14:

$$K_{\text{PSE}} = 2,52$$

2.6 Zeitverhalten von Regelstrecken

2.6.1 Grundlagen

► Unter dem **Zeitverhalten** versteht man die zeitlichen Änderungen von Regelgröße oder Stellgröße.

Das Zeitverhalten kann beschrieben werden durch eine parametrische Gleichung. Das dynamische Verhalten von Regelstrecken wird durch für das jeweilige Systemverhalten typische Zeitkennwerte beschrieben. In diesem Kapitel werden Ermittlungsverfahren für proportionale Regelstrecken mit Totzeit und/oder mit einer Zeitkonstanten vorgestellt. Die Kenntnis der Kennwerte

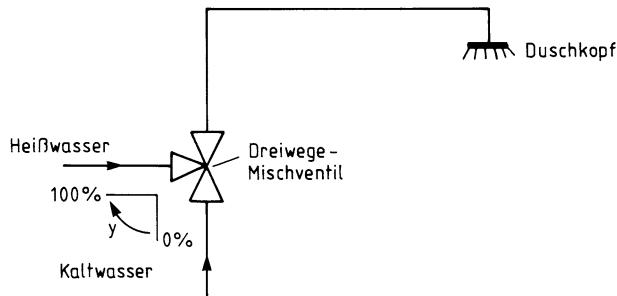
- Totzeit T_t
- Zeitkonstante T

sind notwendig, damit der Regler optimal eingestellt, d. h. an die vorhandene Regelstrecke angepasst werden kann.

2.6.2 Totzeitverhalten

Von allen Zeitverzögerungen hat die Totzeit das unangenehmste Verhalten, da nicht nur die Information über eine Änderung der Regelgröße x um die Totzeit verspätet gemessen wird, sondern auch die Reaktion der Stellgröße y um die Totzeit verspätet Wirkung zeigt.

Abb. 2.17 Schematische Darstellung einer Dusche mit 3-Wege-Mischventil



Vereinfacht kann man die Totzeit als die Signallaufzeit vom Stellort bis zum Messort bezeichnen. Gibt man z. B. Material auf den Anfang des Transportbandes, so erfasst man erst nach Ablauf der Totzeit dieses Material am Ende des Transportbandes.

Am Beispiel einer Dusche soll dies näher erläutert werden (Abb. 2.17). Ein 3-Wege-Mischer ist zunächst so eingestellt, dass nur kaltes Wasser ($y = 0\%$) fließt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Mischer auf reinen Heißwasserbetrieb ($y = 100\%$) umgeschaltet. Aus dem Duschkopf wird jedoch weiter kaltes Wasser fließen, bis der erste Tropfen vom Heißwasser den Weg vom Mischer bis zum Duschkopf zurückgelegt hat. Diese Zeitverzögerung ist die Totzeit.

Für dieses Beispiel gilt:

$$T_t = \frac{\text{Volumeninhalt der Rohrleitung}}{\text{Volumenstrom}} = \frac{l \cdot \pi \cdot D^2 / 4}{\dot{V}} = \frac{2m \cdot \pi \cdot 0,02^2 \cdot m^2 / 4}{10^{-4} m^3/s} = 6,3 \text{ s}$$

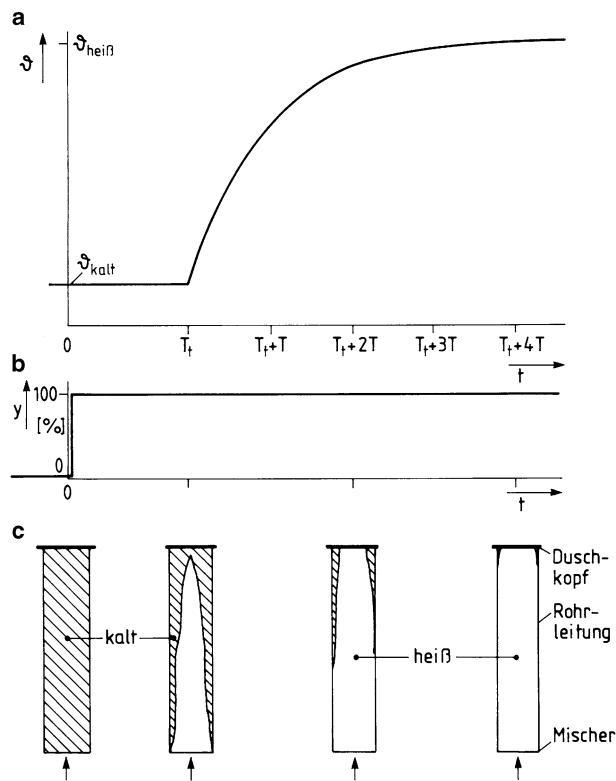
Erst nach 6,3 s ist der erste Tropfen Heißwasser am Duschkopf angekommen. Dies bedeutet jedoch noch nicht, dass Heißwasser aus dem Duschkopf fließt. Da die Rohrleitung zunächst noch kalt ist, wird die Wärmekapazität des Heißwassers teilweise genutzt, um diese Rohre aufzuheizen. Zusätzlich zu der Totzeit zeigt die Rohrleitung der Dusche noch eine Zeitverzögerung 1. Ordnung, gekennzeichnet durch die Zeitkonstante T (siehe Abb. 2.18). Bei dünnen Rohren mit geringer spezifischer Wärmekapazität ist die Zeitkonstante klein, bei dicken Gussrohren, die sich nur langsam aufheizen, ist die Zeitkonstante groß. Erst nach etwa der Zeit, die der vierfachen Zeitkonstanten zzgl. Totzeit entspricht, hat das Wasser, das aus dem Duschkopf austritt, die gleiche Temperatur wie das Heißwasser.

$$t_B > 4 \cdot T + T_t \quad \rightarrow \quad \vartheta = \vartheta_{\text{heiß}} \quad (B = \text{Beharrung})$$

An dem Beispiel kann man sich den Unterschied zwischen Totzeit T_t und Zeitkonstante T verständlich machen:

- die Zeitkonstante T ist ein Maß für die Speicherkapazität der die Regelgröße verursachenden Anordnung (hier Mischventil und Rohrleitungen → Wärmespeicherung)
- die Totzeit T_t gibt die Laufzeit der Flussgröße vom Stellort bis zum Messort an (Transport).

Abb. 2.18 Zeitverhalten der Duschkopf-Austrittstemperatur



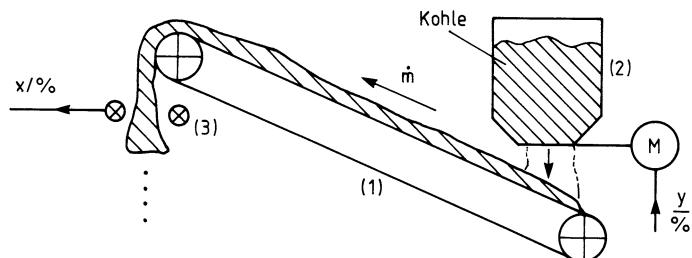
Beispiel 2.2 (Proportionale Strecken mit Totzeit)

Ein Transportband (1) für Kohlenstaub (Abb. 2.19) ist 36 m lang und wird mit einer Geschwindigkeit von 1,25 m/s bewegt. Der Kohlenstaub wird zugeführt aus dem Behälter (2) über eine verzögerungsarme Dosierklappe (Stellgröße y). Die Öffnung der Klappe beträgt 0 bis 30 cm $\hat{=} 0$ bis 100 %

Bei maximaler Öffnung wurde an einem linearen optischen Massenstrommessgerät (3) eine Anzeige von $x = 90 \%$ aufgenommen, bei geschlossener Klappe $x = 10 \% \hat{=} \dot{m} = 0 \text{ kg/s}$

Bei $x = 50 \%$ Anzeige wurde ein Massenstrom vom $\dot{m} = 60 \text{ kg/s}$ gemessen.

Abb. 2.19 Gerätefließbild einer Kohlenstaubförderung



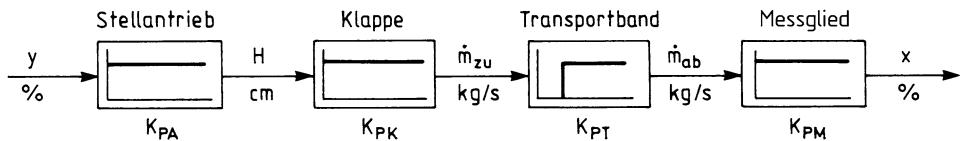


Abb. 2.20 Grundschaltplan der Kohlenstauförderung

- a) Welcher maximale Massenstrom stellt sich bei voller Öffnung der Dosierklappe ein? Zeichnen Sie dazu den Grundschaltplan der Anlage und ermitteln Sie die Proportionalbeiwerte der Einzelglieder.

Vereinfacht wird angenommen, dass alle Komponenten lineares Verhalten zeigen.

Die Förderanlage besteht wirkungsmäßig aus einer Reihenschaltung bestehend aus Stellantrieb, Öffnungsklappe, Transportband und Messglied (Abb. 2.20).

Der Proportionalbeiwert der gesamten Regelstrecke berechnet sich aus dem Produkt der einzelnen Glieder der Reihenschaltung:

$$K_{PSE} = K_{PA} \cdot K_{PK} \cdot K_{PT} \cdot K_{PM}$$

oder aus den Messwerten:

$$K_{PSE} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{(90 - 10) \%}{100 \%} = 0,8$$

Die Proportionalwerte der Einzelglieder werden berechnet aus den in der Aufgabenstellung angegebenen jeweiligen Ausgangsgrößenbereichen zu den Eingangsgrößenbereichen.

Proportionalbeiwert des Stellantriebes:

$$K_{PA} = \frac{\Delta H}{\Delta y} = \frac{30 \text{ cm}}{100 \%} = 0,3 \frac{\text{cm}}{\%}$$

In der Realität hat der Stellmotor der Dosierklappe I-Verhalten mit Dreipunkt-Ansteuerung. Die Stellzeit ist vernachlässigbar gegenüber der Totzeit, weshalb hier von verzögerungsarmen Verhalten des gesamten Stellgerätes gesprochen werden kann.

Proportionalbeiwert des Transportbandes:

$$K_{PT} = \frac{\Delta \dot{m}_{ab,B}}{\Delta \dot{m}_{zu,B}} = 1 \quad (B = \text{Beharrung})$$

Im Beharrungszustand ist die dem Transportband zugeführte Masse gleich der abgeführten Masse.

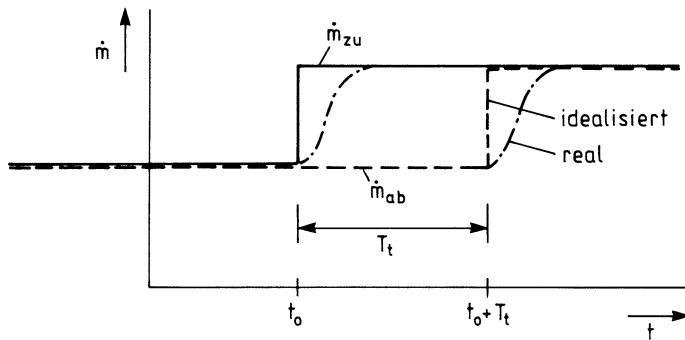


Abb. 2.21 Zeitverhalten der Massenströme am Transportband

Proportionalbeiwert des Messgliedes:

$$K_{PM} = \frac{\Delta x}{\Delta \dot{m}_{ab}} = \frac{(50 - 10)\%}{(60 - 0) \text{ kg/s}} = 0,67 \frac{\%}{\text{kg/s}}$$

Mit diesen Angaben lässt sich der Proportionalbeiwert der Öffnungsklappe bestimmen:

$$K_{PK} = \frac{\Delta \dot{m}_{zu}}{\Delta H} = \frac{K_{PSE}}{K_{PA} \cdot K_{PT} \cdot K_{PM}} = \frac{0,8}{0,3 \frac{\text{cm}}{\%} \cdot 1 \cdot 0,67 \frac{\%}{\text{kg/s}}} = 3,98 \frac{\text{kg/s}}{\text{cm}}$$

Bei voller Öffnung ($H = 30 \text{ cm}$) berechnet sich daraus der maximale Massenstrom zu:

$$\dot{m}_{ZU} = K_{PK} \cdot H = 3,98 \frac{\text{kg/s}}{\text{cm}} \cdot 30 \text{ cm} = 119,4 \text{ kg/s}$$

b) Nach welcher Zeit stellt sich dieser Massenstrom ein?

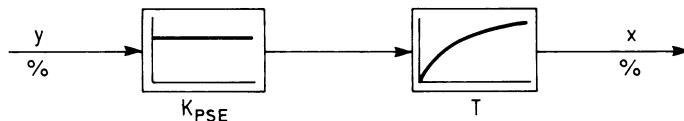
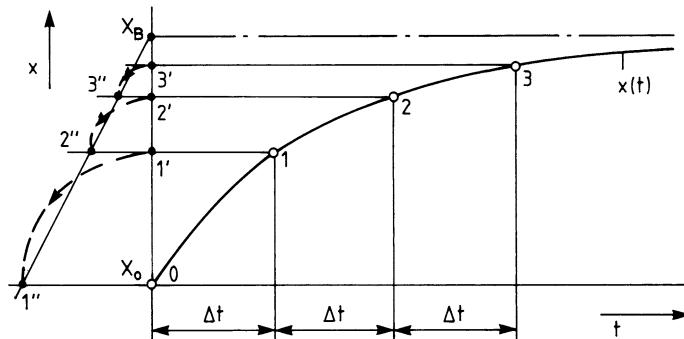
Nach Ablauf der Totzeit T_t zeigt der Massenstrom am Ende des Transportbandes \dot{m}_{ab} den gleichen Wert wie der Massenstrom am Anfang des Transportbandes \dot{m}_{zu} .

$$\dot{m}_{ab}(t) = \dot{m}_{zu}(t - T_t)$$

Diese Totzeit berechnet sich mit $s = \text{Weg}$ und $v = \text{Geschwindigkeit}$ zu:

$$T_t = \frac{s}{v} = \frac{36 \text{ m}}{1,25 \text{ m/s}} = 30 \text{ s}$$

Der Massenstrom \dot{m}_{ab} ist direkt proportional zum Massenstrom \dot{m}_{zu} , jedoch um die Totzeit $T_t = 30 \text{ s}$ verzögert. Dieser Vorgang ist idealisiert in Abb. 2.21 dargestellt. In Wirklichkeit ist der Übergang \dot{m} nicht sprunghaft sondern zusätzlich zeitverzögert. Dies gilt für den zugeführten Massenstrom und den abgeführten Massenstrom.

**Abb. 2.22** Parametrisches Modell einer P-T₁-Strecke**Abb. 2.23** Grafische Ermittlung des Beharrungswertes aus einem Messschrieb

2.6.3 Zeitverhalten der P-T₁-Strecke

Die Regelstrecke 1. Ordnung mit Ausgleich, die P-T_l-Strecke, lässt sich beschreiben durch einen Proportionalbeiwert K_p und durch die Zeitkonstante T . Diese Zeitkonstante wird physikalisch verursacht durch die Speicherwirkung von Material-, Energie- oder Trägheitsspeichern.

Bei der parametrischen Modellbildung mit Hilfe von Messschrieben werden P-Glied und T-Glied in Reihe geschaltet (Abb. 2.22) und getrennt nach statischen Verhalten und dynamischen Verhalten bestimmt.

Ermittlung des Beharrungswertes Für die grafische Ermittlung der Zeitkonstanten T muss der Beharrungswert bekannt sein. Nicht immer kann man bei der versuchstechnischen Durchführung warten, bis dieser Beharrungswert x_B erreicht ist. Er ist jedoch leicht aus dem Verlauf zu extrapolieren, wenn man mit Hilfe des Strahlensatzes die Änderungen der Regelgröße x_i aufträgt, die für gleiche Zeitabstände Δt vom Messschrieb zurückgelegt werden (Abb. 2.23).

Anleitung zur Ermittlung des Beharrungswertes Auf dem gegebenen Kurvenstück werden mindestens 3 Punkte gewählt, und zwar in zeitlich gleichen, aber möglichst großen Abständen Δt . Einer dieser Punkte kann auch der Nullpunkt sein, wenn die Strecke keine Totzeit hat. Durch Parallelen zur Zeitachse ergeben sich die Punkte 1', 3' und 2'. Der Abstand dieser Punkte $X_{2'} - X_{1'}$ und $X_{3'} - X_{2'}$ wird je um 90° gedreht. Die verlängerte Verbindung der Punkte 2'' und 3'' liefert X_B .

Je mehr Einzelpunkte gewählt werden und je größer der Zeitabstand Δt ist, desto genauer wird das grafische Ergebnis für den Beharrungswert sein.

Liegen diese Punkte als Tabellenwerte vor, so gibt es eine rechnerische Lösung. Auch hier ist Voraussetzung, dass die Messwerte in gleichen Zeitabständen Δt aufgetragen werden. Nach dem Strahlensatz ergibt sich aus Abb. 2.23:

$$\frac{X_2 - X_1}{X_B - X_1} = \frac{X_3 - X_2}{X_B - X_2}$$

Diese Gleichung gilt sowohl für die Differenzen Δx (sofern die Δ -Werte vom Nullpunkt aus gemessen werden) als auch für die absoluten Werte X . Aufgelöst nach dem Beharrungswert ergibt sich:

$$X_B = \frac{X_2^2 - X_3 \cdot X_1}{2X_2 - X_3 - X_1}$$

Die Gleichung kann statt für absolute Werte X auch für Differenzen Δx angegeben werden:

$$\Delta x_B = \frac{\Delta x_2^2 - \Delta x_3 \cdot \Delta x_1}{2\Delta x_2 - \Delta x_3 - \Delta x_1}$$

Bezogen auf den Nullpunkt X_0 für $t = 0$ ergibt sich:

$$\Delta x_B = \frac{\Delta x_1^2 - \Delta x_2 \cdot \Delta x_0}{2\Delta x_1 - \Delta x_2 - \Delta x_0} = \frac{\Delta x_1^2}{2 \cdot \Delta x_1 - \Delta x_2}$$

Beispiel 2.3 (Beharrungswert eines Kochtopfes)

Beim Abkühlvorgang eines Kochtopfes wurden folgende Temperaturen gemessen:

| | | | | |
|-------------|-----|----|------|------|
| t | min | 0 | 5 | 10 |
| ϑ | °C | 60 | 44,3 | 34,7 |
| Nr. | | 0 | 1 | 2 |

- a) Auf welche Temperatur kühlt sich der Kochtopf im Beharrungszustand ab?

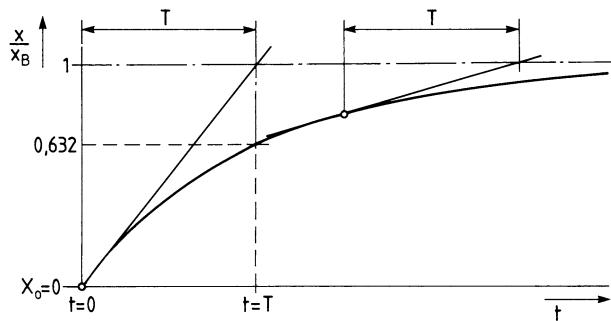
Die Antwort ist trivial: auf Umgebungstemperatur.

$$\vartheta_{\text{Umgebung}} = \vartheta_{\text{Beharrung}}$$

Bei den Messwerten ist die Forderung $\Delta t = \text{konst.}$ erfüllt; hier $\Delta t = 5 \text{ min}$.

$$\vartheta_B = \frac{\vartheta_1^2 - \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{2\vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_0} = \frac{(44,3^2 - 60 \cdot 34,7) \text{ °C}^2}{(2 \cdot 44,3 - 60 - 34,7) \text{ °C}} = 19,6 \text{ °C}$$

Abb. 2.24 Grafische Ermittlung der Zeitkonstanten T aus einem Messschrieb



b) Wiederholen Sie die Berechnung mit Temperaturdifferenzen.

$$\Delta \vartheta_1 = \vartheta_0 - \vartheta_1 = 15,7 \text{ K}; \quad \Delta \vartheta_2 = \vartheta_0 - \vartheta_2 = 25,3 \text{ K}$$

$$\Delta \vartheta_B = \frac{\Delta \vartheta_1^2}{2\Delta \vartheta_1 - \Delta \vartheta_2} = \frac{(15,7^2) \text{ K}^2}{(2 \cdot 15,7 - 25,3) \text{ K}} = 40,4 \text{ K}$$

$$\vartheta_B = \vartheta_0 - \Delta \vartheta_B = 60^\circ \text{C} - 40,4 \text{ K} = 19,6^\circ \text{C}$$

Das Ergebnis des Beharrungswertes ist unabhängig davon, ob man mit absoluten Werten oder mit Differenzen rechnet.

Ermittlung der Zeitkonstanten T Zur Ermittlung der Zeitkonstanten einer P-T₁-Strecke wird die Sprungantwort aufgenommen. Die Zeitkonstante T kann durch die Tangente im Startpunkt $t = 0$ des Messschriebes grafisch bestimmt werden. Legt man z. B. die Tangente in den Punkt X_0 , so schneidet diese Tangente die Parallele zur Zeitachse durch den Beharrungswert X_B . Die Zeitdifferenz zwischen diesem Schnittpunkt und dem Punkt X_0 entspricht der Zeitkonstanten. Weitere Zeitkonstanten erhält man, indem man Tangenten an beliebige Punkte des Messschriebes legt (Abb. 2.24) und die Zeitdifferenz am Beharrungswert abliest.

Der zeitliche Verlauf der e-Funktion kann steigend sein (Ladefunktion aus Abb. 2.25) oder fallend (Entladefunktion aus Abb. 2.25). Bei der Ladefunktion ist der Startwert $x = 0$ unten und der Beharrungswert oben im Diagramm eingetragen. Bei der Entladefunktion werden Startwert $x = 0$ und Beharrungswert x_B vertauscht. Da dies in der Praxis oft zu Verwirrungen führen kann, beschränken wir uns hier auf die mathematische Beschreibung in Form einer Ladefunktion.

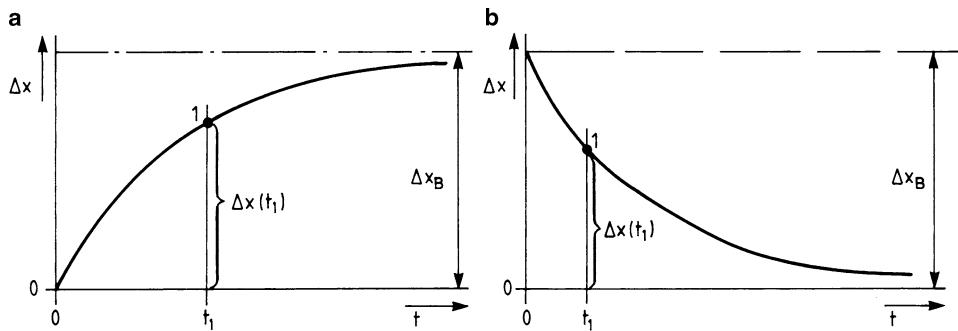
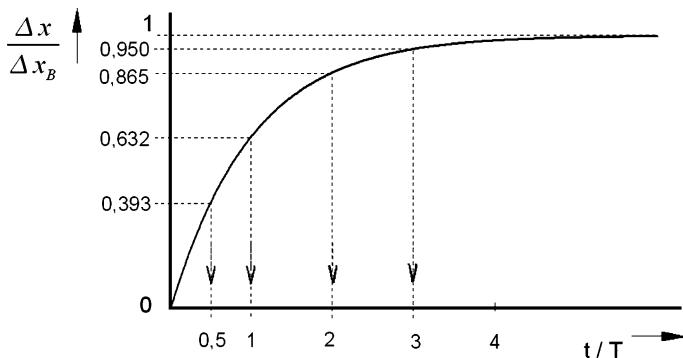
Die grafische Ermittlung der Zeitkonstanten durch Anlegen der Tangente an den Messschrieb ist nur ungenau durchzuführen und führt zu einer großen Streuung der Ergebnisse bei gleichen Parametern. Als Hilfskonstruktion verwendet man deshalb die Lösung der Differentialgleichung 1. Ordnung für konkrete Werte. Die Lösungsgleichung einer Sprungantwort der P-T₁-Funktion lautet:

$$\Delta x(t) = X(t) - X_0 = (X_B - X_0) \cdot (1 - e^{-t/T}) = \Delta x_B \cdot (1 - e^{-t/T})$$

$$\frac{\Delta x(t)}{\Delta x_B} = (1 - e^{-t/T})$$

Tab. 2.5 Berechnete Ausgleichsverhältnisse für ganzzahlige Werte der Zeitkonstante T

| t/T | 0,5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\Delta x/\Delta x_B$ | 0,393 | 0,632 | 0,865 | 0,950 | 0,982 |

**Abb. 2.25** Sprungantworten einer $P-T_1$ -Strecke, Definition der Differenzen; **a** Ladefunktion, **b** Entladefunktion**Abb. 2.26** Konkrete Werte einer $P-T_1$ -Sprungantwort

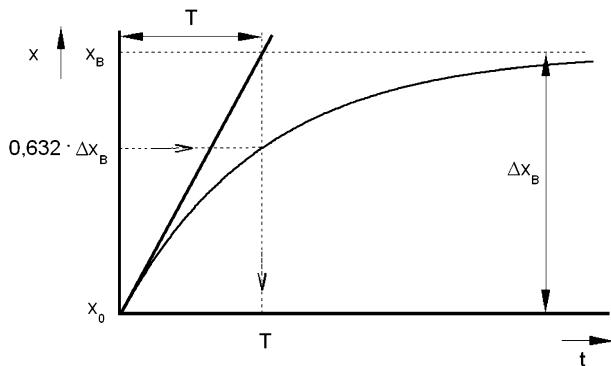
Diese Gleichung gibt auf der linken Seite das Verhältnis Regelgrößendifferenz zu Beharrungsdifferenz an und liegt zwischen 0 und 1. Die rechte Seite ist nur eine Funktion der Zeit t bezogen auf die Zeitkonstante T . Für konkrete Zeitpunkte ergeben sich die Werte in Tab. 2.5 (Abb. 2.26 und 2.27).

Als Sonderfall gelte

$$t = 1 \cdot T \quad \text{und damit} \quad (1 - e^{-1}) = 0,632 = \Delta x/\Delta x_B$$

Da bei $\Delta x/\Delta x_B = 0,632$ das Verhältnis t/T gleich 1 ist, kann man bei diesem Wert recht genau die Zeitkonstante T aus einer Sprungantwort ermitteln.

Abb. 2.27 Grafische Ermittlung der Zeitkonstanten T aus der Sprungantwort



Durch Umformung der Lösung der Differentialgleichung

$$(X(t) - X_0) = (X_B - X_0) \cdot (1 - e^{-t/T})$$

$$\frac{X(t) - X_0}{X_B - X_0} = 1 - e^{-t/T}$$

umgeformt:

$$e^{-t/T} = \frac{X_B - X(t)}{X_B - X_0}; \quad \frac{t}{T} = \ln \left(\frac{X_B - X_0}{X_B - X(t)} \right)$$

kann die Zeitkonstante berechnet werden:

$$T = \frac{t_1}{\ln \left(\frac{X_B - X_0}{X_B - X(t_1)} \right)}$$

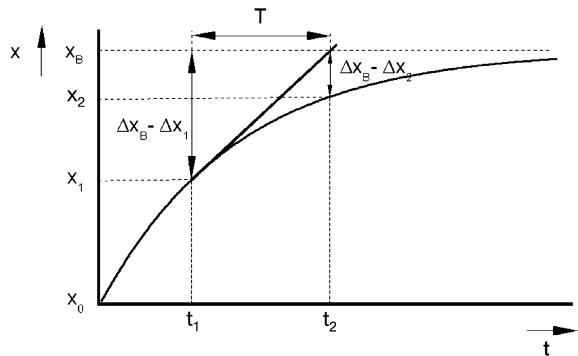
Ebenfalls kann man die Zeit t_2 beginnend mit $t = 0$ ausrechnen, zu der sich eine bestimmte Regelgröße $X(t_2)$ einstellt:

$$t_2 = T \cdot \ln \left(\frac{X_B - X_0}{X_B - X(t_2)} \right)$$

Für die Regelgrößendifferenzen bezogen auf $t = 0$ vereinfacht sich diese Lösungsgleichung. Die jeweilige Differenz ist bezogen auf $X_0 = 0$.

$$t_3 = T \cdot \ln \left(\frac{\Delta x_B}{\Delta x_B - \Delta x(t_3)} \right)$$

Abb. 2.28 Ausschnittsweise Berechnung der Zeitkonstanten T aus zwei Messpunkten



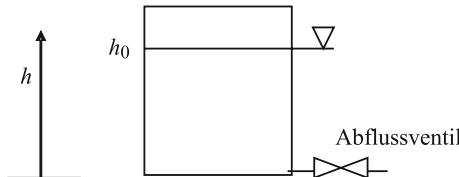
Die ausschnittsweise Berechnung der Zeitkonstanten für zwei Messpunkte x_1 bei t_1 und x_2 bei t_2 bei bekanntem Beharrungswert liefert (Abb. 2.28):

$$\Delta t = t_2 - t_1 = T \cdot \frac{\ln\left(\frac{\Delta x_B}{\Delta x_B - \Delta x_2}\right)}{\ln\left(\frac{\Delta x_B}{\Delta x_B - \Delta x_1}\right)} = T \cdot \ln\left(\frac{\Delta x_B - \Delta x_1}{\Delta x_B - \Delta x_2}\right)$$

$$T = \frac{t_2 - t_1}{\ln\left(\frac{x_B - x_1}{x_B - x_2}\right)}$$

Beispiel 2.4 (Freier Auslauf aus einem Wasserspeicher)

Bei einem mit $h_1 = 2 \text{ m}$ gefüllten Wasserspeicher ohne Zufluss wird zum Zeitpunkt $t_1 = 0$ das Abflussventil geöffnet. Der Speicher läuft leer bis $h_B = 0 \text{ m}$.



Zum Zeitpunkt $t_2 = 200 \text{ s}$ wird eine Wasserstand $h(t_2) = 1 \text{ m}$ gemessen.

- a) Ermitteln Sie die Zeitkonstante T des Wasserspeichers mit zugehörigem Abflussventil.

$$T = \frac{t_2 - t_1}{\ln \frac{h_B - h_1}{h_B - h(t_2)}} = \frac{200 \text{ s}}{\ln \frac{-2 \text{ m}}{-1 \text{ m}}} = \frac{200 \text{ s}}{0,693} = 288,5 \text{ s}$$

- b) Wie lange dauert es, bis der Wasserstand bis auf 10 cm gefallen ist?

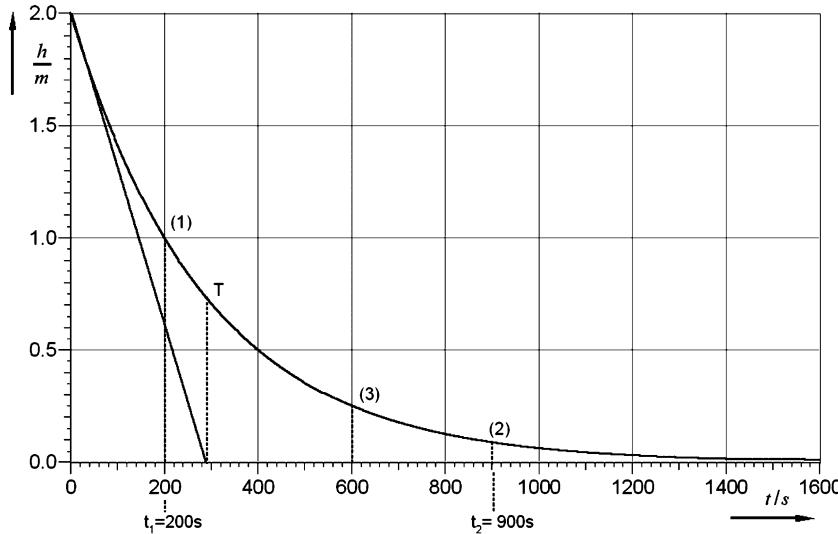
$$t_2 = T \cdot \ln \frac{h_B - h_1}{h_B - h(t_2)} - t_1 = 288,5 \text{ s} \cdot \ln \frac{-2 \text{ m}}{-0,1 \text{ m}}$$

$$= 288,5 \text{ s} \cdot \ln 20 = 864,3 \text{ s} = 14 \text{ min } 24 \text{ s}$$

c) Auf welchen Wasserstand ist der Behälter nach $t_3 = 10 \text{ min}$ gefallen?

$$h(t_3) - h_1 = (h_B - h_1) \cdot (1 - e^{-t_3/T}) = 0 - h_1 + h_1 \cdot e^{-t_3/T}$$

$$h(t_3) = h_1 \cdot e^{-t_3/T} = 2 \text{ m} \cdot e^{-600 \text{ s}/288,5 \text{ s}} = 2 \text{ m} \cdot 0,125 = 0,25 \text{ m}$$



Ermittlung der Halbwertzeit Die Halbwertzeit ist die Zeit, bei der der Startwert X_0 bezogen auf den Beharrungswert entweder um die Hälfte gefallen oder gestiegen ist.

$$t_H = t \cdot \ln \frac{X_B - X_0}{X_B - X(t_H)} = T \cdot \ln 2 = T \cdot 0,693$$

Damit kann die Zeitkonstante in die Halbwertzeit umgerechnet werden und umgekehrt.

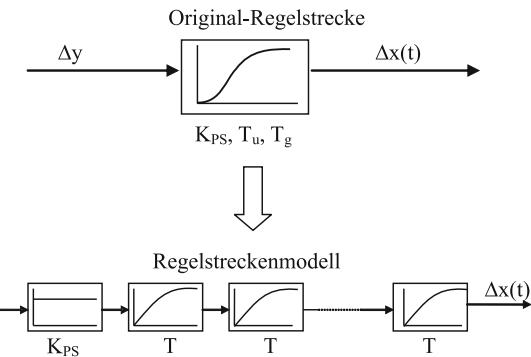
2.6.4 Nachbildung von P-Strecken höherer Ordnung

2.6.4.1 Grundlagen

Am Eingang einer Regelstrecke höherer Ordnung wird zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Testsprung Δy angelegt. Als Reaktion entsteht die Sprungantwort $\Delta x(t)$ mit einem typischen s-förmigen Verlauf. Aus diesem Zeitverhalten kann ein parametrisches Regelstreckenmodell ermittelt werden (Abb. 2.29).

Ab einer Strecke mit zwei Speichergliedern und Ausgleich bezeichnet man das mit n -P-T₁-Gliedern nachgebildete Modell als P-T_n-Modell. Der s-förmige Verlauf beginnt mit einer Anstiegsgeschwindigkeit $\dot{x}(0) = 0$, zeigt danach eine zunehmende Geschwindigkeit bis zum Wendepunkt, danach abnehmende Geschwindigkeit und läuft dann in den konstanten Beharrungswert.

Abb. 2.29 Von der Regelstrecke zum Regelstreckenmodell mit n gleichgroßen Zeitkonstanten



Der flache Anfangsverlauf einer Übergangsfunktion kann zwei Ursachen haben

- eine echte Totzeit
- mehrere in Reihe liegende Speicherglieder.

Mit zunehmender Zahl der Speicherglieder und mit zunehmender Größe der jeweiligen Zeitkonstanten wird der Anfangsverlauf immer flacher. Sprungantworten von $P-T_n$ -Strecken unterscheiden sich prinzipiell nur wenig von Strecken mit einem dominierenden Speicher und Totzeit bzw. Ersatztotzeit (Abb. 2.30). Der s-förmige Verlauf kann durch die Lage und Steigung der Wendetangente im Wendepunkt charakterisiert werden. Aus den beiden Zeitabschnitten $T_u = \text{Verzugszeit}$ und $T_g = \text{Ausgleichszeit}$ ergibt sich ein wichtiger Kennwert, mit dem die Regelbarkeit einer Regelstrecke angegeben werden kann.

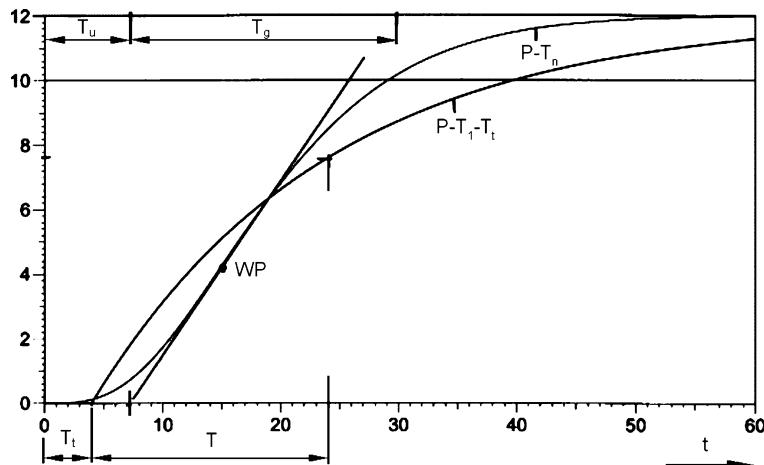


Abb. 2.30 Sprungantworten von proportionalen nicht schwingenden Regelstrecken höherer Ordnung

Tab. 2.6 Regelbarkeit von P-T_n-Modellen

| $S = T_u / T_g$ | Regelbarkeit | P-T _n -Modell (gleichgroße Zeitkonstanten) |
|-----------------|--------------|---|
| < 0,1 | Gut | $n = 1, 2$ |
| 0,1 bis 0,4 | Mäßig | $n = 3, 4$ |
| > 0,4 | Schlecht | $n = 5, \dots, 10$ |

Diesen Kennwert nennt man auch Schwierigkeitsgrad S .

$$S = \frac{T_u}{T_g} \quad \rightarrow \text{Regelbarkeit der Regelstrecke}$$

Je größer das Verhältnis aus Verzugszeit und Ausgleichszeit ist, desto schwerer ist die Strecke zu regeln.

In Analogie dazu wird der Schwierigkeitsgrad einer Strecke mit Ersatztotzeit und Ersatzzeitkonstanten (Abb. 2.30) beschrieben durch

$$S = \frac{T_t}{T}.$$

Es ist oft eine Frage des Gefühls, ob man eine Regelstrecke durch ein P-T₁-T_t-Modell oder durch ein P-T_n-Modell nachbildet. Immer dann, wenn der Verlauf oberhalb des Wendepunktes nur noch von einem dominierenden Speicherglied geprägt wird, bietet das P-T₁-T_t-Modell die bessere Approximation. Bei mehreren in Reihe geschalteten und etwa gleich großen Speichergliedern wählt man bevorzugt das P-T_n-Modell. Eine echte Totzeit kann immer rechnerisch oder grafisch durch Verschiebung des Achsen-Nullpunktes um diese Totzeit abgespalten werden.

Während der Verzugszeit T_u erhält ein Regler keine Informationen über Störungen, die schon seit $t = 0$ auf die Regelstrecke einwirken. Seine Reaktion auf diese Störungen kommt deshalb um diese Verzugszeit T_u zu spät. Es ist also für die Regelbarkeit von Vorteil, wenn nur eine geringe Verzugzeit durch die Strecke hervorgerufen wird.

Andererseits wird die Reaktion des Reglers auf eine Störung dann verbessert, wenn nach Ablauf der Verzugszeit die Regelgröße x nur langsam ansteigt, wenn also die Ausgleichszeit T_g groß ist. Das Ziel der Regelung ist die Störung zu beheben und damit die vorübergehende Regelabweichung e wieder aufzuheben ($e = 0!$).

Um die Regelbarkeit von Modellen (Tab. 2.6) mit einem Schwierigkeitsgrad $S > 0,4$ zu verbessern, wird in der Praxis die Strecke durch Regelschaltungen gemäß ergänzt. Die nachfolgenden Betrachtungen beziehen sich jedoch nur auf die Strecke (ohne Regler).

2.6.4.2 Zeitkonstantensummen-Verfahren

Bei dem P-T₁-T_t-Modell lässt sich die Zeitkonstante T_1 und die Totzeit T_t verhältnismäßig einfach aus der Lösung der Differentialgleichung 1. Ordnung berechnen. Bei einem P-T_n-

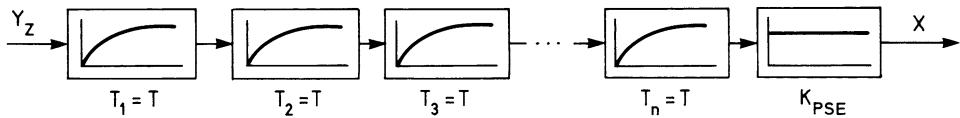


Abb. 2.31 P-T_n-Modell mit gleich großen Verzögerungsgliedern

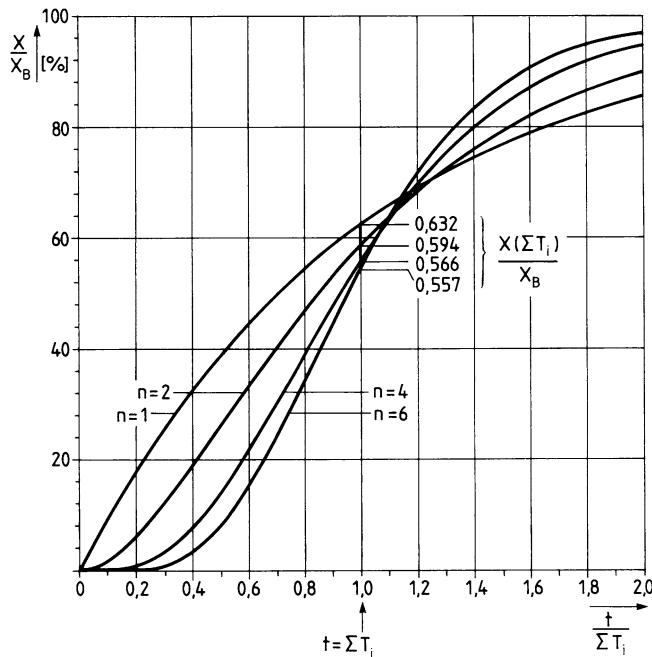


Abb. 2.32 Vergleich verschiedener P-T_n-Modelle bei gleicher Zeitkonstantensumme

Modell ist dies nur dann der Fall, wenn wir von gleich großen Zeitkonstanten für alle n Verzögerungsglieder ausgehen, die in Reihe geschaltet sind (Abb. 2.31).

Ein Näherungsverfahren mit Hilfe der Zeitkonstantensumme (Abb. 2.32) beruht darauf, dass die auf den Beharrungswert bezogenen Ordinatenwerte der Sprungantwort, die zur Summe

$$n \cdot T_i = \sum T_i$$

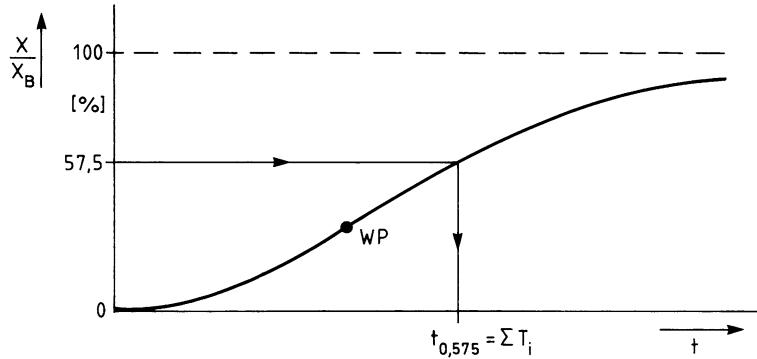
gehören, sich nur verhältnismäßig wenig mit der Ordnungszahl ändern.

Für ein Modell von $n = 2$ bis 6 Verzögerungsgliedern ergibt sich ein mittlerer Wert von

$$\left(\overline{\frac{\Delta x(t = \sum T_i)}{\Delta x_B}} \right) = 0,575 + 0,02$$

Tab. 2.7 Bezugene Regelgrößen für $t = \sum T_i$ mit gleichgroßer Zeitkonstantensumme

| n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\frac{\Delta x(t=\sum T_i)}{\Delta x_B}$ | 0,594 | 0,577 | 0,566 | 0,560 | 0,557 |

**Abb. 2.33** Bestimmung der Zeitkonstantensumme mit Hilfe des Ordinatenwertes 57,5 %**Tab. 2.8** Zeitkonstantensummen-Verfahren

| | |
|-----------------------|---|
| Ablesen aus Abb. 2.33 | $\rightarrow \Delta x_B$ |
| Berechnen | $\rightarrow x(t_{0,575}) = 0,575 \cdot \Delta x_B$ |
| Ablesen aus Abb. 2.33 | $\rightarrow t_{0,575} = \sum T_i$ |
| Ablesen aus Abb. 2.33 | $\rightarrow T_u, T_g$ |
| Berechnen | $\rightarrow T_u/T_g; n \approx 10 \cdot T_u/T_g + 1$ |
| Berechnen | $\rightarrow T = \sum T_i/n$ |

Dieses Ergebnis lässt folgenden Schluss zu: Nimmt man einen Fehler von 2 % in Kauf, dann entspricht die Zeitkonstantensumme der Zeit, bei dem die Regelgröße Δx ca. 57,5 % vom Beharrungswert Δx_B erreicht hat (Tab. 2.7).

Damit lässt sich die Zeitkonstantensumme gemäß Abb. 2.33 i. V. m. Tab. 2.8 ablesen: Dividieren wir die Zeitkonstantensumme $\sum T_j$ durch die Anzahl der Verzögerungen n , so erhalten wir die Größe der einzelnen Zeitkonstanten T_i :

$$T = \frac{\sum_{j=1}^n T_j}{n}$$

Theoretisch kann ein Modell durch eine bestimmte Anzahl n an Verzögerungsgliedern nachgebildet werden. Das beste Ergebnis liegt aber nur dann vor, wenn n gemäß der nachstehenden Gleichung berechnet wird:

$$n \approx \frac{T_u}{T_g} \cdot 10 + 1$$

T_u = Verzugszeit, T_g = Ausgleichszeit.

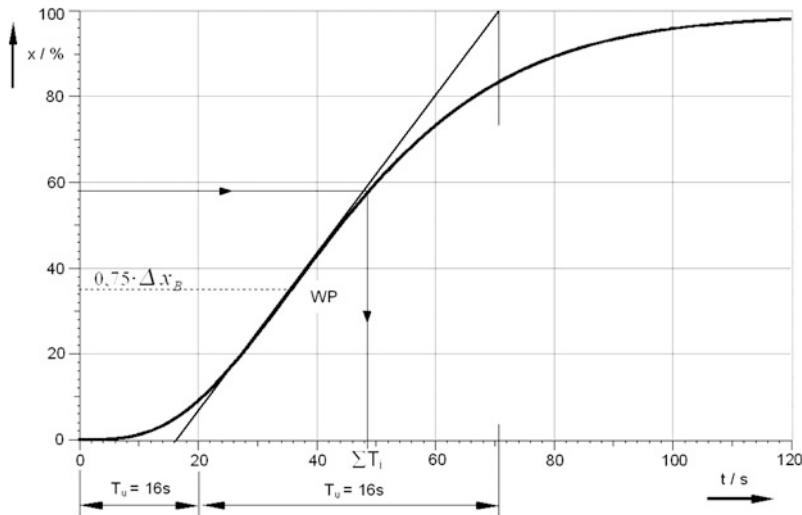


Abb. 2.34 Sprungantwort einer Druckregelstrecke (Original)

Beispiel 2.5 (P-T_n-Modell mit Hilfe einer Zeitkonstantensumme)

Die Sprungantwort einer Druckregelstrecke wurde gemessen (Abb. 2.34).

- a) Ermitteln Sie mit dem Zeitkonstantensummen-Verfahren ein P-T_n-Modell mit gleichgroßen Verzögerungsgliedern

Aus der Sprungantwort Abb. 2.34 der Druckregelstrecke kann man für $\Delta x / \Delta x_B = 57,5\%$ die Zeitkonstantensumme $\sum T_i = 49\text{ s}$ ablesen.

Grundsätzlich kann daraus ein beliebiges Modell mit $n = 1, 2, \dots$ aufgestellt werden. Nur eines dieser Modelle bildet das Anfangsverhalten gut nach. Dazu zeichnet man in die Sprungantwort des Originals die Wendetangente und ermittelt daraus die Verzugszeit T_u und die Ausgleichszeit T_g .

$$T_u = 16\text{ s}, T_g = 55\text{ s} \Rightarrow \frac{T_u}{T_g} = \frac{16}{55} = 0,291$$

Mit Hilfe der Näherungsformel ergibt sich:

$$n = \frac{T_u}{T_g} \cdot 10 + 1 = 0,291 \cdot 10 + 1 \approx 4$$

Das Ergebnis ist ein Modell mit 4 Verzögerungsgliedern, die in Reihe geschaltet sind und die alle die gleiche Zeitkonstante

$$T_i = \frac{\sum T_i}{n} = \frac{49\text{ s}}{4} = 12,25\text{ s}$$

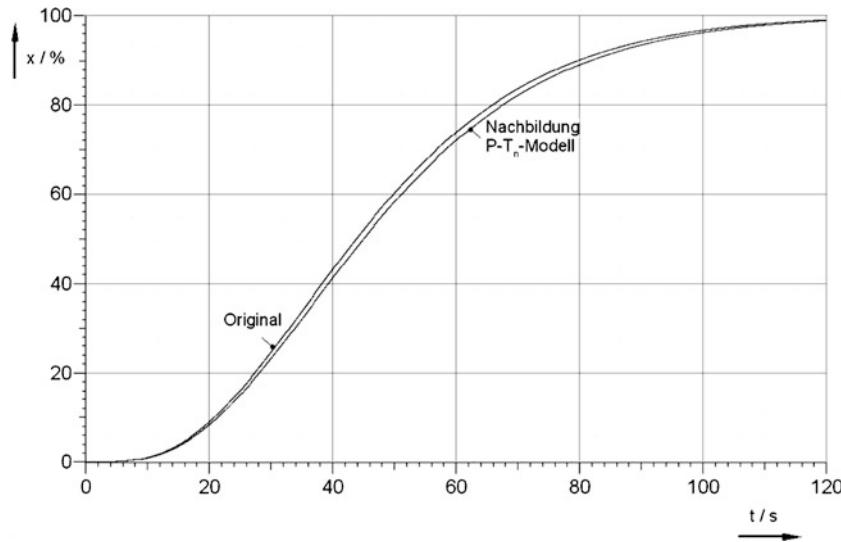


Abb. 2.35 Vergleich zwischen Original und verschiedenen Modellen einer $P-T_n$ -Strecke

aufweisen. In Abb. 2.35 erkennt man, dass das Modell gut den zeitlichen Verlauf des Originals wiedergibt.

b) *Bilden Sie die Regelstrecke durch Modelle mit 2 und 6 Zeitkonstanten nach*

Ein Modell mit $n = 2$ und 6 Speichergliedern ergibt (Abb. 2.36):

$$T_{1,2} = \frac{\sum T_i}{n} = \frac{49 \text{ s}}{2} = 24,5 \text{ s} \quad T_{1,2,3,4,5,6} = \frac{\sum T_i}{n} = \frac{49 \text{ s}}{6} = 8,2 \text{ s.}$$

Die Modelle schneiden sich alle im Punkt, der der Zeitkonstantensumme zugeordnet wird.

Mit der Lösungsgleichung für die Strecke n . Ordnung können einzelne Punkte überprüft werden:

$$\Delta x(t) = \Delta X_B \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t^{n-1}}{T^n (n-1)!} \right) \cdot e^{-t/T} \right]$$

2.6.4.3 Wendetangenten-Verfahren

Ist die Genauigkeitsanforderung höher oder liegt n , berechnet nach der Näherungsformel, zwischen zwei ganzen Zahlenwerten, geht man oft zum Wendetangenten-Verfahren über (Abb. 2.37). Unter der Voraussetzung n gleichgroßer Zeitkonstanten der Verzögerungsglieder ergeben sich die Werte aus Tab. 2.9.

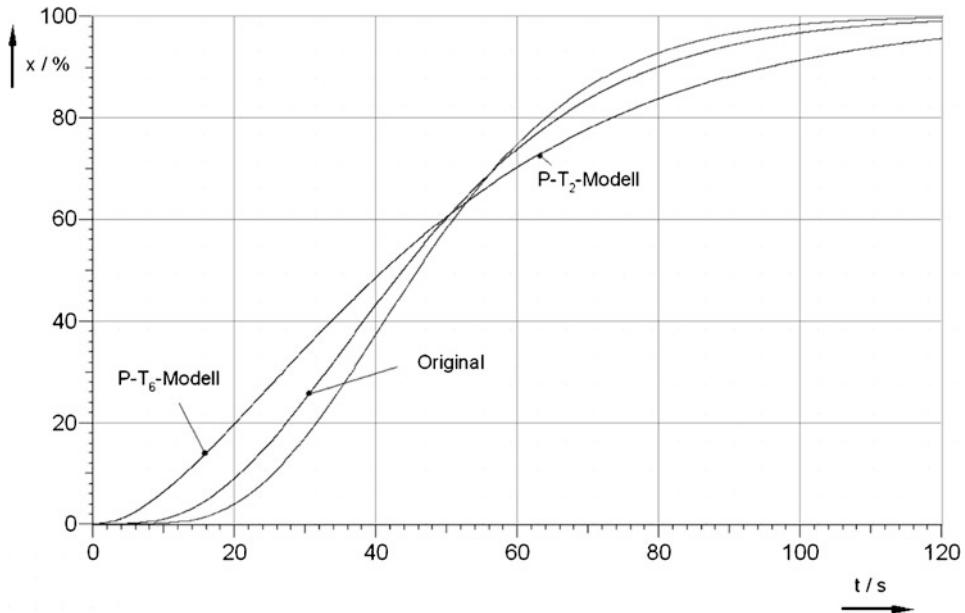


Abb. 2.36 Nachbildung durch alternative Modelle

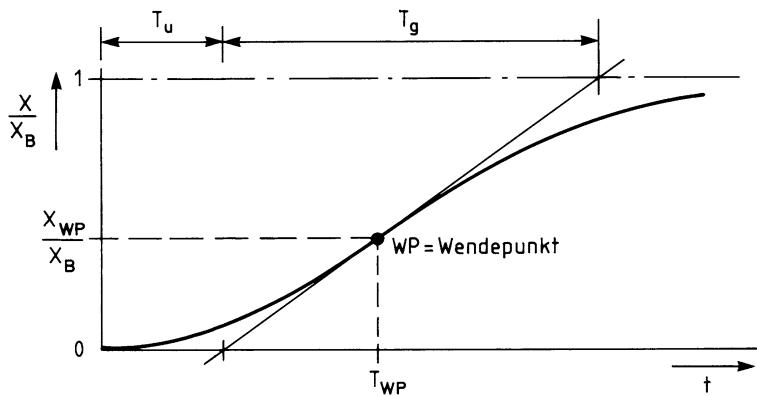


Abb. 2.37 Wendetangentes-Verfahren mit konstantem Wendepunkt

Das Wendetangentes-Verfahren beruht darauf, dass die gegebene Übergangsfunktion (Sprungantwort) durch ein Modell mit mehreren Verzögerungsgliedern gleicher Zeitkonstante (s. Abb. 2.38) angenähert wird, das im Wendepunkt mit der Originalstrecke übereinstimmt. Aus der gemessenen Sprungantwort der Original-Regelstrecke liest man die Kennwerte T_u und T_g ab und bildet das Verhältnis $S = T_u / T_g$. In Tab. 2.9 sucht man für den nächstgelegenen Wert die Zahl n der erforderlichen P-T₁-Glieder.

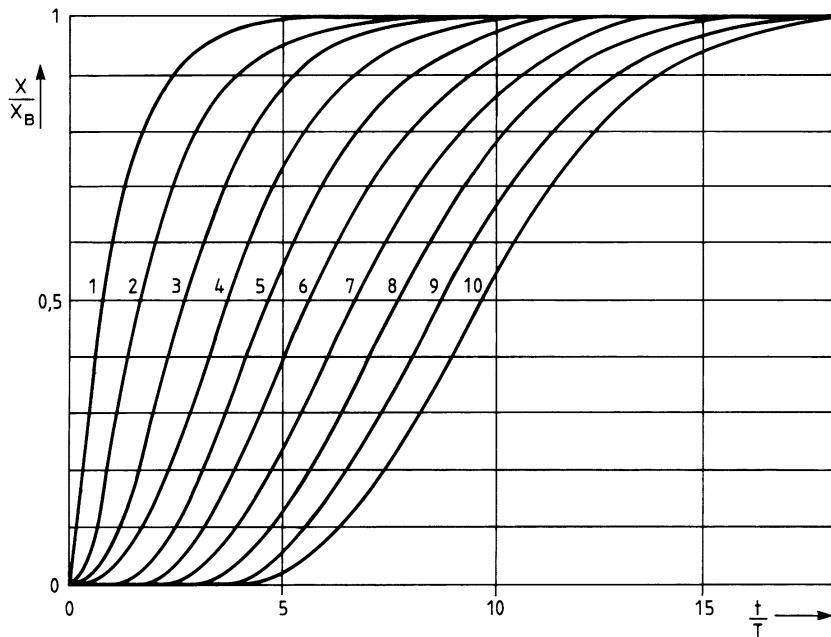


Abb. 2.38 Zeitverlauf verschiedener Modelle mit n gleichgroßen Zeitkonstanten

Tab. 2.9 Theoretische Zeitkennwerte für P-T_n-Strecken mit gleichgroßen Zeitkonstanten T

| n | T_u / T_g | T_{WP} / T | x_{WP} / x_B | T_u / T | T_g / T |
|-----|-------------|--------------|----------------|-----------|-----------|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0,104 | 1 | 0,264 | 0,282 | 2,718 |
| 3 | 0,218 | 2 | 0,323 | 0,805 | 3,695 |
| 4 | 0,319 | 3 | 0,353 | 1,425 | 4,463 |
| 5 | 0,410 | 4 | 0,371 | 2,100 | 5,119 |
| 6 | 0,493 | 5 | 0,384 | 2,811 | 5,699 |
| 7 | 0,570 | 6 | 0,394 | 3,549 | 6,226 |
| 8 | 0,642 | 7 | 0,401 | 4,307 | 6,711 |
| 9 | 0,709 | 8 | 0,407 | 5,081 | 7,164 |
| 10 | 0,773 | 9 | 0,413 | 5,869 | 7,590 |

Zur Ermittlung der Zeitkonstanten T stehen drei Verhältniszahlen zur Verfügung:

$$\frac{T_{WP}}{T}; \frac{T_u}{T}; \frac{T_g}{T}$$

In der Literatur wird meist die Ausgleichszeit T_g konstant gehalten. Bessere Nachbildungen erhält man, wenn die Wendepunktzeit T_{WP} konstant gehalten wird. Für die Zahl n ergibt sich der Ordinatenwert des Wendepunktes x_{WP} / x_B . Aus der Sprungantwort des Originals lässt sich dazu die Zeit T_{WP} ablesen und der zugehörige Wert T für n gleichgroße Verzögerungsglieder berechnen.

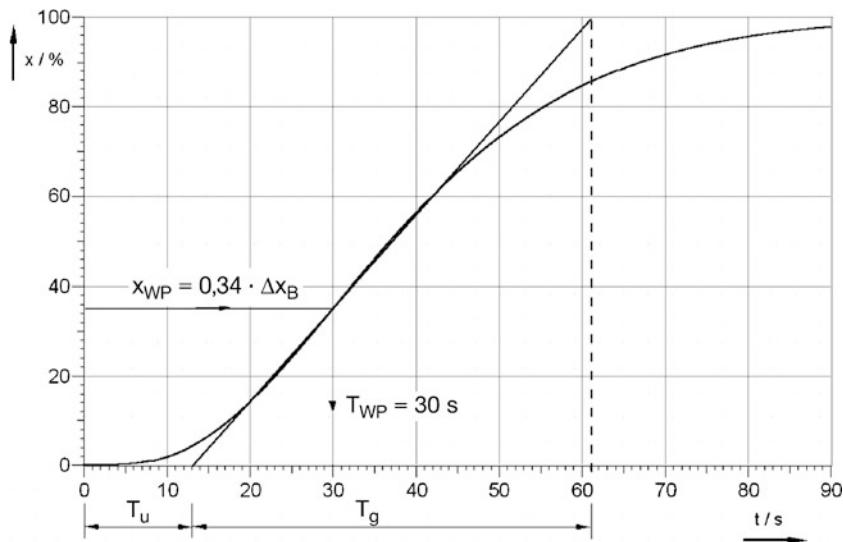


Abb. 2.39 Sprungantwort der Regelstrecke mit Wendepunkt

Beispiel 2.6 (P-T_n-Modell mit Hilfe des Wendetangenten-Verfahrens)

Die Nachbildung der Druckregelstrecke soll mit Hilfe des Wendetangenten-Verfahrens erstellt werden.

- a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Wendetangente ein P-T_n-Modell mit gleichgroßen Verzögerungsgliedern. Vergleichen Sie die Modellparameter bei verschiedenen Festpunkten.

Aus der Sprungantwort Abb. 2.39 lassen sich die Verzugszeit T_u und Ausgleichszeit T_g ablesen:

$$T_u = 13 \text{ s}, \quad T_g = 48 \text{ s}$$

Daraus ergibt sich:

$$S = T_u/T_g = 13 \text{ s}/48 \text{ s} = 0,271.$$

Die Regelstrecke lässt sich durch ein P-T₃-Modell oder durch ein P-T₄-Modell nachbilden.

- $x_{WP} = \text{konst.}$

$$n = 3 \rightarrow T = T_{WP}/n - 1 = 30 \text{ s}/3 - 1 = 10 \text{ s}; x_{WP} = 0,333$$

$$n = 4 \rightarrow T = 30 \text{ s}/4 - 1 = 7,5 \text{ s}; x_{WP} = 0,353$$

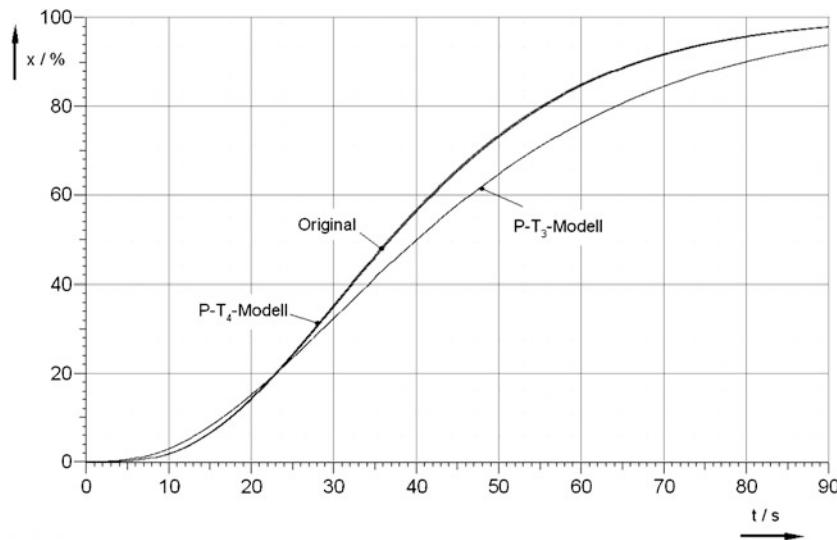


Abb. 2.40 Vergleich der Nachbildung nach dem Wendepunktverfahren

Die Abweichung des tatsächlichen Schwierigkeitsgrades $S = 0,271$ der Originalstrecke von dem der Modelle $S_3 = 0,218$ und $S_4 = 0,319$ resultiert aus der Drehung der Wendetangente um den Wendepunkt. Der Wendepunkt wandert mit geringerer Ordnung des Modells nach unten. Obwohl der Schwierigkeitsgrad des Originals etwa bei 3,5 liegt, ist die Nachbildung als P-T₄-Modell besser (Abb. 2.40). Daraus lässt sich schließen, dass im Zweifelsfall immer das nächstgrößere Modell gewählt werden sollte.

Mit Hilfe der Verhältnisse in Tab. 2.9, Spalte 5 und 6 gibt es weitere Möglichkeiten einer Nachbildung:

- $T_u = 13 \text{ s} = \text{konst. und } n = 4$

$$\frac{T_u}{T} = 1,425 \quad \rightarrow \quad T = \frac{T_u}{T_u/T} = \frac{13 \text{ s}}{1,425} = 9,1 \text{ s}$$

$$\text{aus Tabelle: } \frac{T_g}{T} = 4,463 \quad \rightarrow \quad T_g = 4,463 \cdot T = 4,463 \cdot 9,1 \text{ s} = 40,6 \text{ s}$$

- $T_g = 48 \text{ s} = \text{konst. und } n = 4$

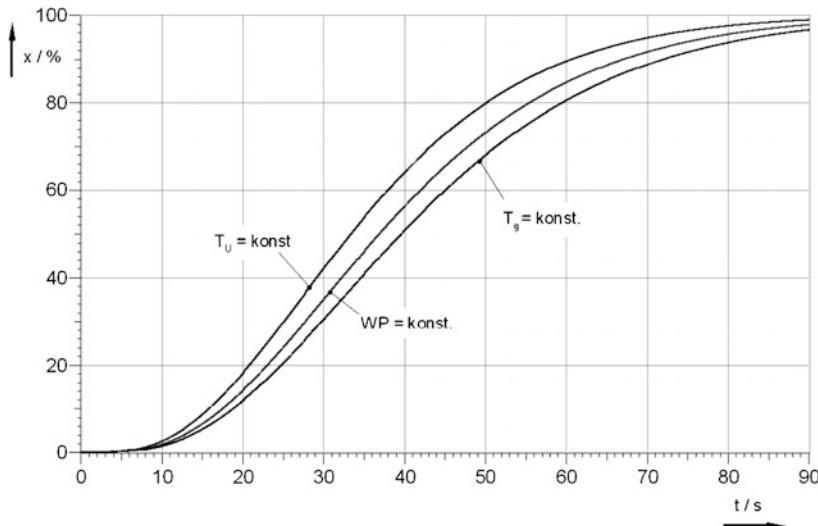
$$\frac{T_g}{T} = 4,463 \quad \rightarrow \quad T = \frac{T_g}{T_g/T} = \frac{48 \text{ s}}{4,463} = 10,8 \text{ s}$$

$$\frac{T_u}{T} = 1,425 \quad \rightarrow \quad T_u = 1,425 \cdot T = 1,425 \cdot 10,8 \text{ s} = 15,4 \text{ s}$$

Tab. 2.10 Zeitkennwerte für P-T₄-Modelle mit unterschiedlichen Festpunkten

| Modellart | T_u | T_g | T_{WP} | T |
|--------------------------|-------|-------|----------|------|
| Original | 13 | 48 | 30 | ? |
| $T_u = \text{konst.}$ | 13 | 50 | 33,6 | 9,1 |
| $T_{WP} = \text{konst.}$ | 15,5 | 49 | 30 | 10 |
| $T_g = \text{konst.}$ | 15,4 | 48 | 35,1 | 10,8 |
| $\sum T_i$ | 14,4 | 45,1 | 30,3 | 10,1 |

(alle Einheiten in s)

**Abb. 2.41** Vergleich verschiedener P-T₄-Modelle

In Abb. 2.41 ist das Zeitverhalten dieser Modelle mit der gemessenen Übergangsfunktion verglichen. Die beste Nachbildung ergibt das Wendepunkt-Modell. Das T_u -Modell eilt dem Original voraus, das T_g -Modell eilt etwas nach. Alle Modelle sind bei normalen Anforderungen an die Regelgenauigkeit so gut, dass damit eine Optimierung durchgeführt werden kann. Beim Einstellen wird also die Original-Regelstrecke nicht benötigt (vgl. auch Tab. 2.10).

Aufgabe 2.1 (Automatisierte Auswertung einer P-T_n-Strecke)

Das Zeitverhalten einer Regelstrecke höherer Ordnung nach einem Stellsprung $\Delta y = 50\%$ liegt in Form einer Messwerttabelle vor:

| t in s | < 0 | 5 | 15 | 25 | 35 | 90 | 120 |
|------------------------------------|-----|------|-------------|------|------|------|------|
| X in % | 10 | 11,5 | 25,2 | 46,8 | 64,0 | 90,0 | 90,0 |
| $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ in %/s | 0,3 | 1,37 | 2,16 = max. | 1,72 | 0,47 | 0 | |

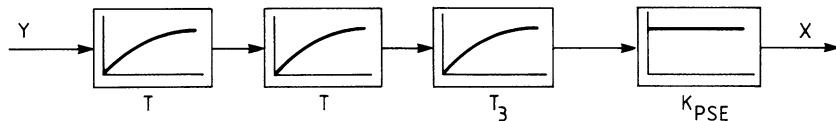


Abb. 2.42 P-T₃-Modell mit einer angepassten Zeitkonstanten T_3

- Bestimmen Sie abschnittsweise die mittleren Signalgeschwindigkeiten. In welchem Zeitintervall liegt der Wendepunkt?
- Berechnen Sie aus der Geschwindigkeit im Wendepunkt-Intervall die Ausgleichszeit T_g .
- Legen Sie den Wendepunkt näherungsweise in die Mitte des Wendepunktintervalls. Berechnen Sie mit Hilfe der Wendepunktzeit die Verzugszeit T_u .
- Bilden Sie die Regelstrecke durch ein Modell mit gleichgroßen Zeitkonstanten nach.



2.6.4.4 Sondermodell für P-T₃-Strecken

In seltenen Fällen liegt der Schwierigkeitsgrad der Strecke T_u / T_g so ungünstig, dass weder mit n , noch mit $n - 1$ gleichgroßen P-T₁-Gliedern eine befriedigende Näherung erzielt werden kann.

Dies tritt z. B. bei einem Modell 3. Ordnung auf, das weder mit zwei noch mit drei gleichgroßen P-T₁-Gliedern zufriedenstellend nachgebildet wird. Deshalb hilft man sich dadurch, dass man ein Modell aus 3 P-T₁-Gliedern aufbaut, wobei zwei gleiche Zeitkonstanten T und eine kleinere Zeitkonstante T_3 verwendet werden (Abb. 2.42).

Das Verhältnis T_3 / T kann mit Hilfe der Kurve Abb. 2.43 für ein vorgegebenes Verhältnis T_u / T_g bestimmt werden (s. Tab. 2.11).

Da n_{th} linear von T_u / T_g abhängt, gilt für die Berechnung nach Tab. 2.9:

$$n_{th} = 2 + \frac{T_u / T_g - 0,104}{0,218 - 0,104} = 1,088 + 8,77 \cdot T_u / T_g$$

Die zu n_{th} gehörige theoretische Zeitkonstante kann ebenfalls durch lineare Interpolation berechnet werden. Bei Strecken mit niedrigem Schwierigkeitsgrad wird bevorzugt die Ausgleichszeit T_g konstant gehalten. Für die Verhältnisse gilt nach Tab. 2.9:

$$\frac{T_g}{T_{th}} = (3,695 - 2,718) \cdot (n_{th} - 2) + 2,718 = 0,764 + 0,977 \cdot n_{th}$$

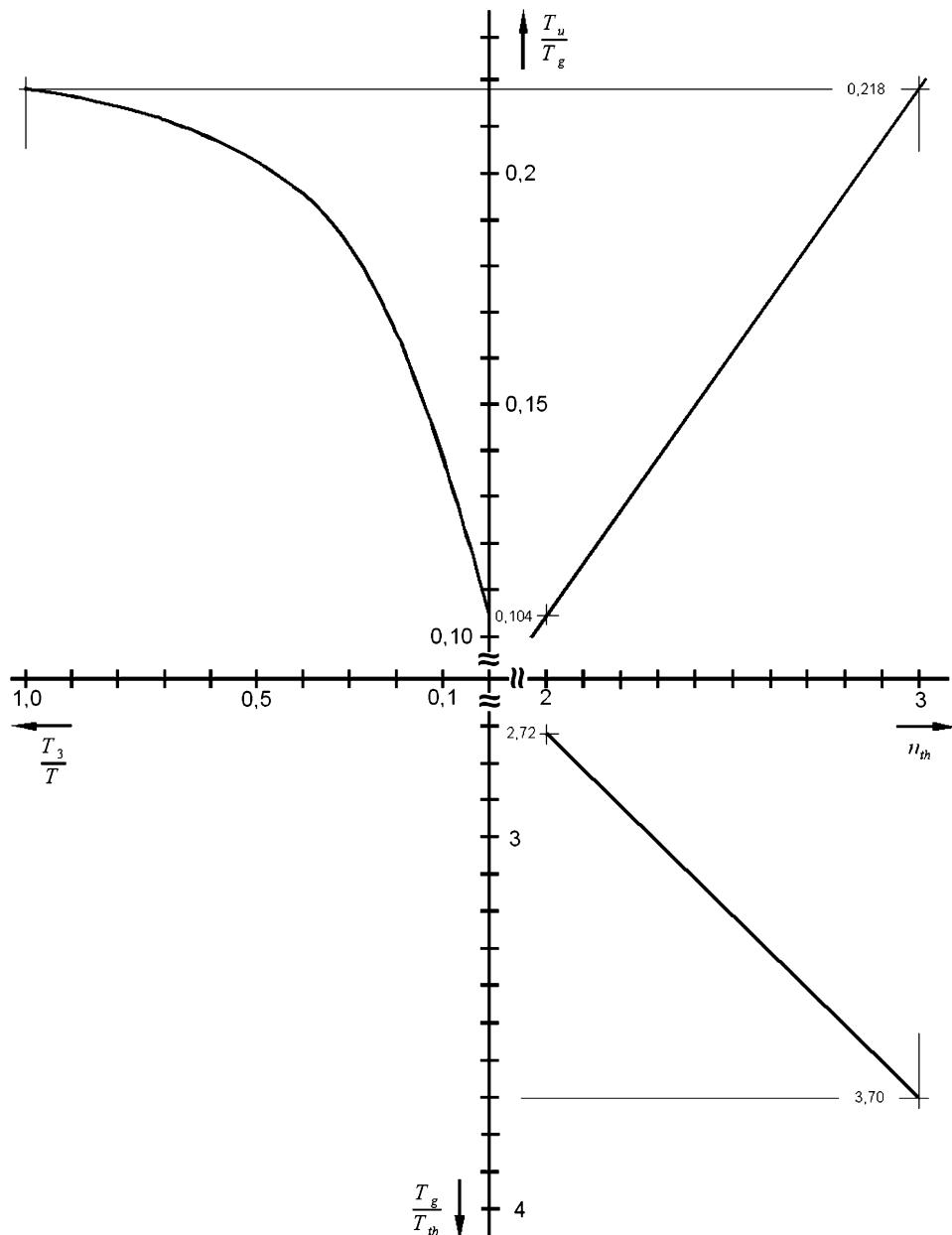


Abb. 2.43 Zeitkonstantenverhältnis T_3/T für ein Modell 3. Ordnung

Tab. 2.11 Ablauf der Nachbildung einer P-T₃-Strecke

| Bearbeitungsschritt | Berechnung |
|---|---|
| Mit Hilfe der Wendetangente aus der Sprungantwort ablesen | T_u, T_g |
| Berechnung des Schwierigkeitsgrades der Regelstrecke | $S = \frac{T_u}{T_g}$ |
| Berechnen oder ablesen aus Abb. 2.43 | $n_{th} = 1,088 + 8,77 \cdot \frac{T_u}{T_g}$ |
| Berechnen oder ablesen aus Abb. 2.43 | $\frac{T_g}{T_{th}} = 0,764 + 0,977 \cdot n_{th}$ |
| Berechnen | $T_{th} = \frac{T_g}{T_g/T_{th}}$ |
| Berechnen | $\sum T = n_{th} \cdot T_{th}$ |
| Berechnen oder Ablesen aus Abb. 2.43 | $\frac{T_3}{T} \approx \left(\frac{T_u}{T_g} - 0,104 \right)^4 \cdot 5921$ |
| Berechnen | $T = \frac{\sum T}{2 + \frac{T_3}{T}}$ |
| Berechnen | $T_3 = T \cdot \frac{T_3}{T}$ |

Für die theoretische Zeitkonstante gilt:

$$T_{th} = \frac{T_g}{T_g/T_{th}}$$

Die Zeitkonstantensumme soll unverändert bleiben. Für die Strecke mit ungleichen Zeitkonstanten gilt dann:

$$\sum T = n_{th} \cdot T_{th} = 2 \cdot T + T_3 = T \left(2 + \frac{T_3}{T} \right)$$

Der Wert T_3/T kann in Abb. 2.43 abgelesen oder nach der Formel berechnet werden:

$$\frac{T_3}{T} \approx \left(\frac{T_u}{T_g} - 0,104 \right)^4 \cdot 5921$$

Für die zwei großen Zeitkonstanten des P-T₃-Modells gilt:

$$T = \frac{n_{th} \cdot T_{th}}{2 + \frac{T_3}{T}}$$

und für die angepasste 3. Zeitkonstante:

$$T_3 = T \cdot \frac{T_3}{T}$$

Damit sind die 3 Zeitkonstanten des Modells bekannt.

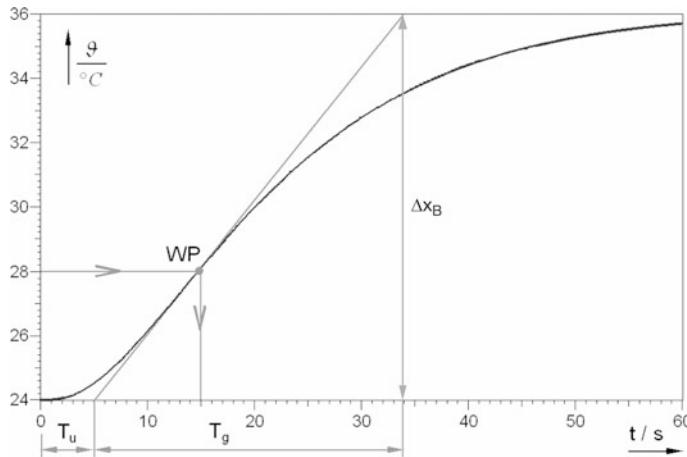


Abb. 2.44 Messwerte der Sprungantwort eines Wärmetauschers

Beispiel 2.7 (Modell eines Wärmetauschers)

Die Sprungantwort eines Wärmetauschers bei einer Stellgrößenänderung von $\Delta y = 20\%$ wurde aufgezeichnet.

- a) Ermitteln Sie Verzugszeit, Ausgleichszeit, Schwierigkeitsgrad und Proportionalwert.

Aus Abb. 2.44 kann abgelesen werden:

$$T_u = 5 \text{ s}; \quad T_g = 29 \text{ s}; \quad S = T_u/T_g = 0,172$$

$$K_{PS} = \frac{\Delta x_B}{\Delta y} = \frac{12 \text{ K}}{20 \%} = 0,6 \text{ K} / \%$$

- b) Bilden Sie das P-T₃-Modell mit einer angepassten dritten Zeitkonstanten T₃ nach.

$$n_{th} = 1,088 + 8,77 \cdot \frac{T_u}{T_g} = 1,088 + 8,77 \cdot 0,172 = 2,6$$

$$\frac{T_g}{T_{th}} = 0,764 + 0,977 \cdot n_{th} = 0,764 + 0,977 \cdot 2,6 = 3,3$$

$$T_{th} = \frac{T_g}{T_g/T_{th}} = \frac{29 \text{ s}}{3,3} = 8,8 \text{ s}$$

$$\sum T = n_{th} \cdot T_{th} = 2,6 \cdot 8,8 \text{ s} = 22,9 \text{ s}$$

$$\frac{T_3}{T} \approx \left(\frac{T_u}{T_g} - 0,104 \right)^4 \cdot 5921 = (0,172 - 0,104)^4 \cdot 5921 = 0,127$$

$$T = \frac{\sum T}{2 + \frac{T_3}{T}} = \frac{22,9 \text{ s}}{2 + 0,127} = 10,8 \text{ s}$$

$$T_3 = T \cdot \frac{T_3}{T} = 10,8 \text{ s} \cdot 0,127 = 1,4 \text{ s}$$

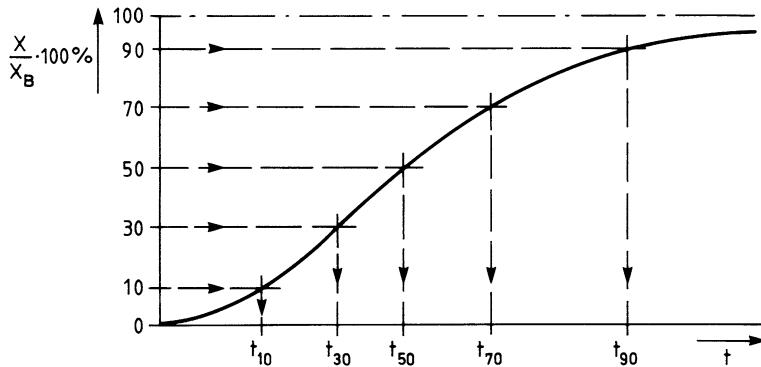


Abb. 2.45 Bestimmung der Zeitprozentkennwerte aus den auf den Endwert bezogenen prozentualen Werten x

2.6.4.5 Zeitprozentkennwert-Verfahren für P-T_n-Strecken

Das in Abschn. 2.6.4.3 beschriebene Wendetangentenverfahren hat den Nachteil, dass für das Einzeichnen der Wendetangente keine genaue Anweisung gegeben werden kann.

Die Wendetangente wird „nach Gefühl“ gezeichnet. Trotzdem erhält man in der Regel Modelle, die die tatsächliche Anlage genügend genau nachbilden. Die Linearisierung bedeutet dabei meist einen viel größeren Fehleranteil als die grafische Ungenauigkeit.

Ein anderer Nachteil der Wendetangente ist jedoch gravierender. Der Schrieb muss bei diesem grafischen Verfahren „mit der Hand“ ausgewertet werden. Aber wenn man den Prozess in seinem Zeitverhalten einmal erkannt hat, benötigt man ein numerisches Verfahren, mit dem Nichtlinearitäten oder Modellveränderungen quasi automatisch (d. h. adaptiv) erkannt werden. Deshalb wurde auch für Strecken höherer Ordnung die Zeitprozentkennwert-Methode entwickelt.

Bei dieser Methode werden durch die Auswertung keine zusätzlichen Fehler erzeugt. Zusätzlich können zur Kontrolle mehrere Punkte der Sprungantwort herangezogen werden. Zur Bestimmung der Zeitprozentkennwerte wird der Endwert x_B der Sprungantwort gleich 100 % gesetzt. Dann werden aus der Messwerttabelle der Sprungantwort numerisch, z. B. durch Interpolation, die zu den Werten 10 %, 30 %, 50 %, 70 % und 90 % des Endwertes gehörenden Zeiten t_{10} , t_{30} , t_{50} , t_{70} und t_{90} ermittelt. Dieser Vorgang ist in Abb. 2.45 grafisch dargestellt.

Für die Auswertung werden nur zwei prozentuale Werte x und der Endwert x_B benötigt. Zur Klassifizierung, d. h. Abschätzung der Ordnung n des Modells wird ein Verhältnis von

$$\left(\frac{t_{10}}{t_{90}} \right) \text{ oder } \left(\frac{t_{10}}{t_{70}} \right) \text{ oder } \left(\frac{t_{10}}{t_{50}} \right) \text{ oder } \left(\frac{t_{30}}{t_{70}} \right) \text{ oder } \left(\frac{t_{10}}{t_{30}} \right) \text{ oder } \left(\frac{t_{30}}{t_{50}} \right)$$

benötigt. Mit Hilfe von Abb. 2.46 lässt sich damit die Ordnung n des Modells bestimmen. Mit Rücksicht auf die Genauigkeit sind weiter auseinander liegende Wertepaare günstiger.

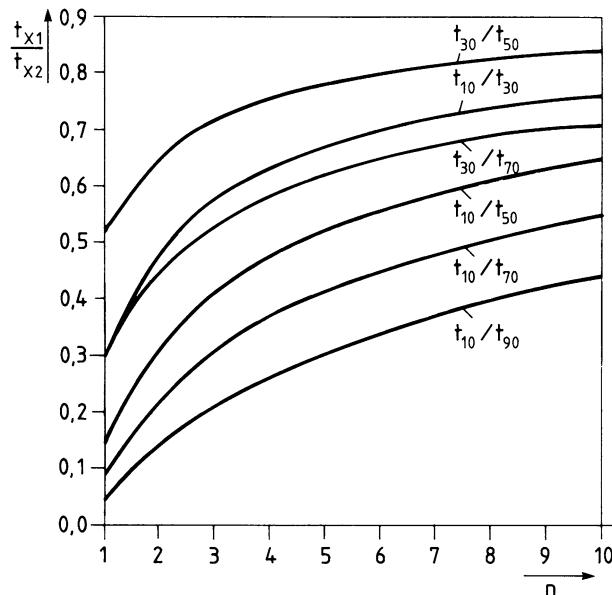


Abb. 2.46 Verhältnis der Zeitprozentkennwerte zur Abschätzung der Ordnung n eines $P-T_n$ -Modells

Man wählt bei nicht ganzzahligen Werten n üblicherweise den nächstgelegenen ganzzahligen Wert. Aus Tab. 2.12 lässt sich das zugehörige Verhältnis t_x/T ablesen und die n gleichen Zeitkonstanten für das Modell berechnen:

$$T = \frac{t_x}{t_x/T}$$

Tab. 2.12 Auf die Zeitkonstante T bezogene Zeitprozentkennwerte für die Ordnungszahlen $n = 1$ bis 10 eines $P-T_n$ -Modells mit gleichgroßen Zeitkonstanten

| n | t_{10}/T | t_{30}/T | t_{50}/T | t_{70}/T | t_{90}/T |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 0,11 | 0,36 | 0,69 | 1,20 | 2,30 |
| 2 | 0,53 | 1,10 | 1,68 | 2,44 | 3,89 |
| 3 | 1,10 | 1,91 | 2,67 | 3,62 | 5,32 |
| 4 | 1,74 | 2,76 | 3,67 | 4,78 | 6,68 |
| 5 | 2,43 | 3,63 | 4,67 | 5,89 | 7,99 |
| 6 | 3,15 | 4,52 | 5,67 | 7,01 | 9,27 |
| 7 | 3,89 | 5,41 | 6,67 | 8,11 | 10,5 |
| 8 | 4,66 | 6,31 | 7,67 | 9,21 | 11,8 |
| 9 | 5,43 | 7,22 | 8,67 | 10,3 | 13,0 |
| 10 | 6,22 | 8,13 | 9,67 | 11,4 | 14,2 |

Tab. 2.13 Messwerte der Raumtemperatur während einer Schnellaufheizung

| t (min) | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 90 |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| ϑ (°C) | 17,50 | 17,65 | 18,12 | 18,67 | 19,14 | 19,48 | 19,69 | 19,82 | 19,90 | 19,95 | 19,97 | 20 |

Tab. 2.14 Zeitprozentkennwerte, errechnet aus den Messwerten Tab. 2.13

| x | $\Delta\vartheta_x$ | ϑ_x | t_x |
|-----|---------------------|---------------|----------------------|
| % | K | °C | s |
| 10 | 0,25 | 17,75 | 435,6 |
| 30 | 0,75 | 18,25 | 805,1 |
| 50 | 1,25 | 18,75 | 1141,3 |
| 70 | 1,75 | 19,25 | 1556,5 |
| 90 | 2,25 | 19,75 | 2314,3 |
| 100 | 2,50 | 20,00 | $\rightarrow \infty$ |

Beispiel 2.8 (Modell einer Raumheizung nach der Zeitprozentkennwert-Methode)

Um die Dynamik der Heizung in einer Heizzone zu untersuchen, wurde der Temperaturanstieg des Leitraums (ohne Thermostatventil) nach einer Nachtabsenkung im Zeitabstand von 6 Minuten aufgeschrieben (Tab. 2.13).

- a) Ermitteln Sie daraus die Zeitprozentkennwerte t_{10} , t_{30} , t_{50} , t_{70} und t_{90} .

Anleitung: Zwischenwerte können durch lineare Interpolation ermittelt werden.

Die Temperatur zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt 17,5 °C, der Beharrungswert (100 %) für $t \rightarrow \infty$ 20 °C. Daraus ergibt sich die Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta_B = 2,5$ K $\cong 100$ %

Der 10 %-Wert ist: $\Delta\vartheta_{10} = 0,25$ K bzw. $\vartheta_{10} = 17,75$ °C

Den zugehörigen Zeitwert erhält man durch lineare Interpolation

$$x_{10} = \frac{17,75 - 17,65}{18,12 - 17,65} = 0,21$$

$$\Delta t = 0,21 \cdot 360 \text{ s} = 75,6 \text{ s}$$

$$t_{10} = 6 \cdot 60 \text{ s} + 75,6 \text{ s} = 435,6 \text{ s}$$

Die übrigen Ergebnisse sind in Tab. 2.14 zusammengestellt.

- b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Abb. 2.46 die Zahl n der Verzögerungsglieder eines P- T_n -Modells mit gleichgroßen Zeitkonstanten T .

Grundsätzlich werden nur zwei Werte benötigt. Hier sollen jedoch alle Verhältnisse, die ablesbar sind, bestimmt und mit theoretischen Werten verglichen werden.

Nach allen Verhältnis-Werten liegt die Ordnung der Strecke zwischen $n = 2$ und $n = 3$ (näher an $n = 3$). Die Heizzone kann also durch ein Modell mit 2 oder 3 gleichgroßen P- T_1 -Gliedern nachgebildet werden.

Tab. 2.15 Vergleich zweier Modelle, berechnet aus Zeitprozentkennwerten, mit der gemessenen Strecke

| | | Theoretisch aus Abb. 2.46 | |
|-----------------|----------|---------------------------|---------|
| | Gemessen | $n = 2$ | $n = 3$ |
| t_{10}/t_{90} | 0,188 | 0,14 | 0,21 |
| t_{10}/t_{70} | 0,280 | 0,22 | 0,31 |
| t_{10}/t_{50} | 0,382 | 0,32 | 0,41 |
| t_{30}/t_{70} | 0,517 | 0,45 | 0,53 |
| t_{10}/t_{30} | 0,541 | 0,48 | 0,58 |
| t_{30}/t_{50} | 0,705 | 0,65 | 0,72 |

Tab. 2.16 Berechnung der Zeitkonstanten für die Modelle 2. und 3. Ordnung

| Modell | $n = 2$ | $n = 3$ |
|---------------------|---|---|
| t_{10}/T | 0,53 | 1,10 |
| T in s | 822 | 396 |
| t_{30}/T | 1,10 | 1,91 |
| T in s | 732 | 422 |
| t_{50}/T | 1,68 | 2,67 |
| T in s | 679 | 427 |
| t_{70}/T | 2,44 | 3,62 |
| T in s | 638 | 430 |
| t_{90}/T | 3,89 | 5,32 |
| T in s | 595 | 435 |
| Mittelwert T in s | $693,2 \left\{ \begin{array}{l} +18,6\% \\ -14,2\% \end{array} \right.$ | $422,0 \left\{ \begin{array}{l} -6,2\% \\ +3,1\% \end{array} \right.$ |

c) Bestimmen Sie die Zeitkonstanten des Modells.

Mit Hilfe der Werte t_x/T aus der Tab. 2.15 für $n = 2$ und $n = 3$ kann die Zeitkonstante berechnet werden:

Anhand der Streuung um den Mittelwert, kann die Größenordnung des Modellfehlers abgeschätzt werden. Für $n = 2$ ist die Streuung zu groß. Wiederholt man das Verfahren für $n = 3$, so schwankt das Ergebnis um bis zu 6 %. Eine höhere Modellgenauigkeit kann nur erreicht werden, wenn ein Modell mit ungleichen Zeitkonstanten verwendet wird. In Abb. 2.47 ist ein Vergleich zwischen P-T₂-Modell, P-T₃-Modell und Original-Heizzone durchgeführt. Dabei sind P-T₃-Modell und Original fast deckungsgleich, wogegen das P-T₂-Modell erhebliche Abweichungen zeigt.

In der Heizungs-, Lüftungs- und Klimatechnik findet das beschriebene Modell Einsatz bei der „Optimierung“. Der „Heizungsoptimierer“ errechnet selbsttätig den optimalen Ausschaltpunkt einer Heizungszone für die Nachabsenkung und den spätestens möglichen Wiedereinschaltpunkt am Morgen. Dazu wird ein Mikrocomputer mit einem Simulationsprogramm benötigt, in dem die Heizzone mathematisch nachgebildet ist, z. B. durch ein P-T₃-Modell.

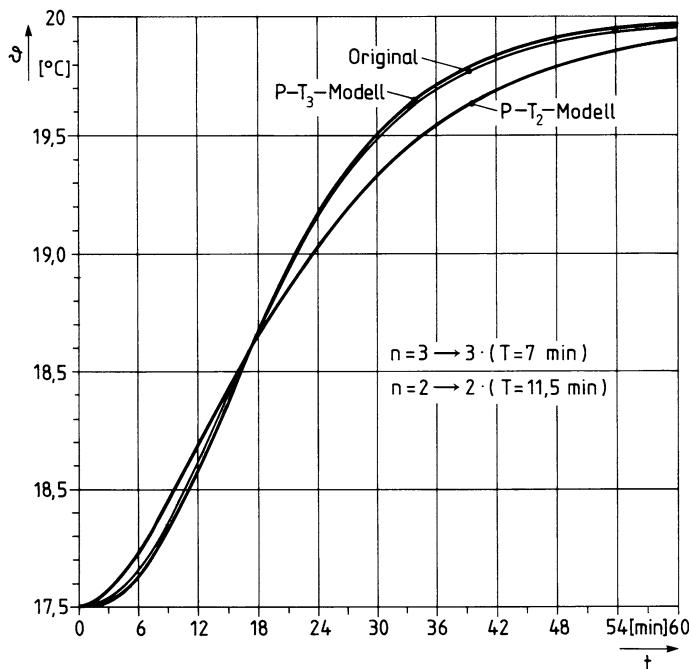


Abb. 2.47 Vergleich von Messwerten und Modellen für die Schnellaufheizung in einer Heizzone

2.6.5 Kennwerte für schwingungsfähige P-Strecken

2.6.5.1 Grundlagen

Bei Regelstrecken, die mehr als einen Speicher enthalten, können sich unter gewissen Bedingungen Schwingungen der Ausgangsgröße einstellen. Ausschlaggebend für die Schwingungsfähigkeit ist, dass die Speicher physikalisch unterschiedlich wirksam sind, und dass Energieverlust und damit Dämpfung des Systems nicht zu groß ist.

Beispiele:

- elektrischer Schwingkreis mit Energieaustausch zwischen elektrischem und magnetischem Feld (Elektromotor)
- mechanisches Feder-Masse-Dämpfungs-System (Fahrzeugfederung)
- mechanisches drehelastisches Massenträgheits-System (Spindel-Vorschubeinheit)
- Austausch zwischen kinetischer und potenzieller Energie (Gewicht an einem Kran).

Eine Regelstrecke mit einem Schwingungsglied ($P-T_{2S}$) ist nicht immer deutlich von einer solchen mit zusätzlichen Verzögerungsgliedern zu unterscheiden (Abb. 2.48).

Weist die zu klassifizierende und nachzubildende Sprungantwort ein deutlich schwingendes Verhalten auf, so versucht man zunächst die Nachbildung durch ein reines $P-T_{2S}$ -

Abb. 2.48 Zeitverlauf von Sprungantworten: **a** Reines Schwingungsglied ($P-T_{2S}$), **b** P-Schwingungsglied und zusätzliche Verzögerungsglieder ($P-T_n-T_{2S}$), $n = \text{Anzahl der Verzögerungsglieder}$

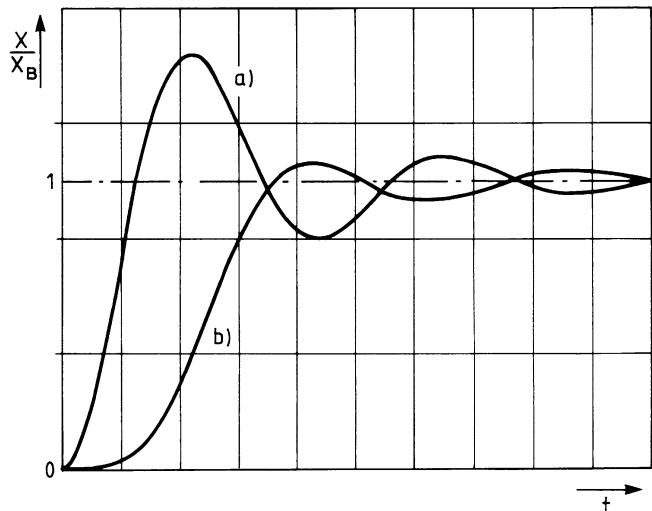
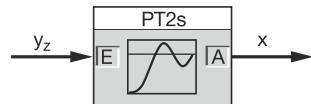


Abb. 2.49 Blockdarstellung eines Schwingungsgliedes



Glied zu erreichen. Eine Verbesserung kann durch Reihenschaltung weiterer Verzögerungsglieder erzielt werden. Schwingungsfähige Systeme, die einen aperiodischen Verlauf zeigen ($D \geq 1$), werden in der Regel durch $P-T_n$ -Modelle nachgebildet.

Die schwingungsfähige Regelstrecke wird gekennzeichnet durch die messbaren Parameter Dämpfungsgrad D und Schwingungsperiode τ . Diese Parameter werden umgerechnet in die Parameter T_0 und T_1 der Differenzialgleichung bzw. deren Lösung.

2.6.5.2 P-T_{2S}-Modell als reines Schwingungsglied

Ein reines Schwingungsglied kann durch ein Modell 2. Ordnung beschrieben werden (Abb. 2.49).

Die Sprungantwort eines P-T_{2S}-Gliedes wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$T_0^2 \cdot \ddot{x} + T_1 \cdot \dot{x} + \Delta x(t) = K_p \cdot \Delta y_z \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \ddot{x} + \frac{2D}{\omega_0} \cdot \dot{x} + x = K_p \cdot y_z$$

Die wichtigsten Eigenschaften lassen sich aus folgenden Kennwerten ablesen:

- Die Kennkreisfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{T_0}$ ist die Eigenkreisfrequenz des dämpfungsfreien Übertragungsgliedes.
- Der Dämpfungsgrad $D = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_1}{T_0}$ ist eine Maßzahl für das Abklingen der Schwingung (Tab. 2.17).

Tab. 2.17 Verhalten eines Systems bei verschiedenen Dämpfungsgraden

| D | Verhalten | Bemerkung |
|-----------|-------------------------|-----------------|
| > 1 | Aperiodisch kriechend | |
| = 1 | Aperiodischer Grenzfall | |
| 0 < D < 1 | Abklingendes Schwingen | |
| = 0 | Dauerschwingung | → τ_{\min} |
| < 0 | Aufklingendes Schwingen | |

- Die Eigenfrequenz der gedämpften Schwingung berechnet sich aus $\omega = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - D^2} = 2\pi \cdot f$.
- Die Zeit für eine volle Schwingung oder die Dauer einer Schwingungsperiode ist $\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ für $D = 0$ und $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ für $0 < D < 1$.
- Für den Proportionalbeiwert K_P gilt wie bei allen P-Strecken: $K_P = \frac{\Delta x_B}{\Delta y_z}$.

Für den Fall $D < 1$ lassen sich die Kennwerte τ und D aus den Messkurven einfach ermitteln.

Aus der Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung für einen Eingangssprung

$$\Delta x(t) = K_P \cdot \Delta y_z \cdot [1 - A \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)]$$

erkennt man an der Sinus-Funktion, dass es sich um eine homogene Schwingung mit Phasenverschiebung handelt. Die e-Funktion mit negativem Exponenten führt dazu, dass die Schwingung abklingt gegen den Wert

$$K_P \cdot \Delta y_z = \Delta x_B \quad (\text{da } e^{-\infty} = 0).$$

φ ist die Phasenverschiebung der Schwingung gegenüber der reinen Sinus-Schwingung.

$$\tan \varphi = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{1 - D^2}}{D}$$

Für die Amplitude A der abklingenden Schwingung um den Beharrungswert 1 (Abb. 2.50) gilt:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{1 - D^2}}$$

Abklingkonstantenverfahren Die Abklingkonstante δ berechnet sich nach

$$\delta = \frac{D}{T_0} = \frac{1}{T_A}$$

Ist die Schwingungsamplitude auf 36,8 % der ersten Amplitude gefallen, dann entspricht diese Zeit der Abklingzeit T_A .

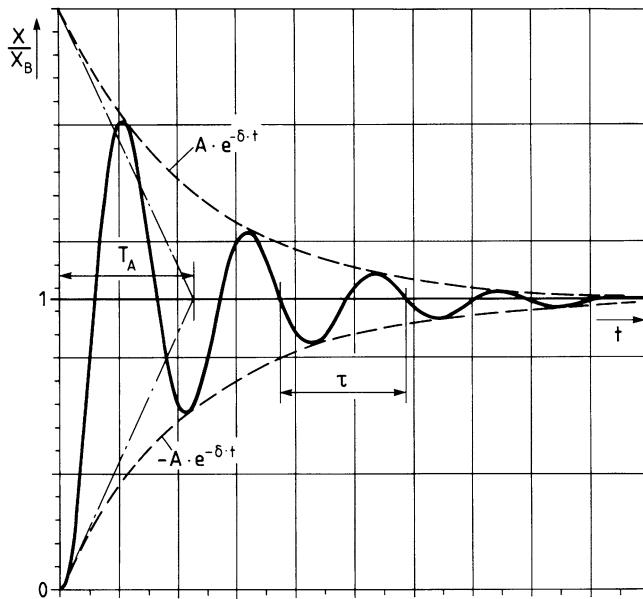


Abb. 2.50 Kennwerte der Differentialgleichung 2. Ordnung

Die Abklingkonstante δ stellt die reziproke Zeitkonstante der Hüllkurve der Übergangsfunktion dar, wobei die beiden Exponentiellkurven $\hat{x} = \pm A \cdot e^{-\delta \cdot t}$ die gedämpfte Schwingung einhüllen.

Aus der abgelesenen Schwingungsperiode τ und der Abklingzeit T_A ergibt sich:

$$D = \frac{\tau}{\sqrt{4\pi^2 \cdot T_A^2 + \tau^2}} \quad T_0 = D \cdot T_A; \quad T_1 = 2 \cdot D \cdot T_0$$

Dieses Verfahren ist schnell durchführbar, aber wegen möglicher Ablesefehler ungenau.

Logarithmisches Dekrement Mit Hilfe der Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung lassen sich alle Zeitpunkte des P-T_{2S}-Modells berechnen.

Insbesondere die erste Amplitude = Überschwingweite $x_{\ddot{U}}$ des Ausgangssignals über dem Beharrungswert nach sprunghafter Anregung ist interessant, da sie nur von dem Dämpfungsgrad D abhängt (Tab. 2.18). Dieser Zusammenhang ist in Abb. 2.51 dargestellt. Dieser Wert $x_{\ddot{U}}$ gibt auch das Verhältnis zweier beliebiger aufeinander folgender

Tab. 2.18 Zusammenhang zwischen $x_{\ddot{U}}$ und D

| D | 0,05 | 0,10 | 0,20 | 0,30 | 0,40 | 0,50 | 0,60 | 0,70 | 0,80 |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_{\ddot{U}}$ | 0,854 | 0,729 | 0,527 | 0,372 | 0,254 | 0,163 | 0,095 | 0,046 | 0,015 |

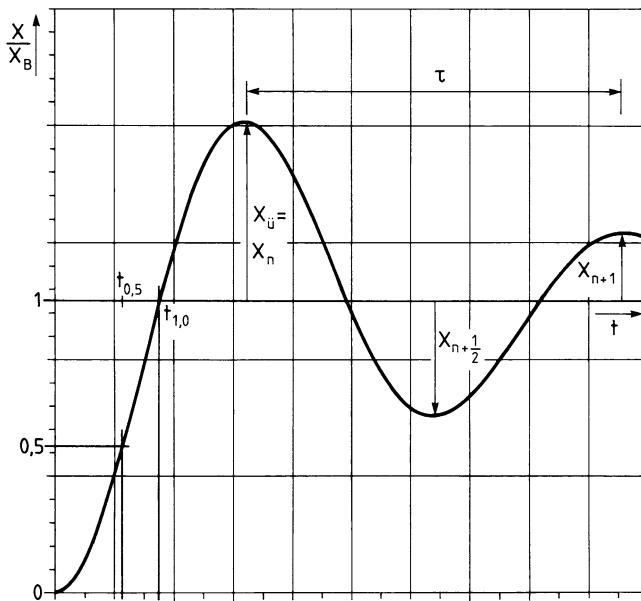


Abb. 2.51 Schwingungsamplituden des P-T_{2S}-Gliedes

Halbschwingungen an, wenn sich das System linear verhält:

$$\frac{\hat{x}_{n+1/2}}{\hat{x}_n}$$

Für eine halbe Schwingungsperiode zwischen t_1 und t_2 , also für

$$\frac{\tau}{2} = t_2 - t_1$$

ergibt sich:

$$\left| \frac{\hat{x}_{n+1/2}}{\hat{x}_n} \right| = e^{-\omega_0 \cdot D \cdot (t_1 - t_2)} = e^{+\omega_0 \cdot D \cdot \tau/2} = e^{-\frac{\pi \cdot D}{\sqrt{1-D^2}}}$$

Für die erste Halbschwingung von $t = 0$ aus lässt sich damit auch $x_{\dot{U}}$ berechnen.

$$\frac{x_{\dot{U}}}{1} = e^{-\frac{\pi \cdot D}{\sqrt{1-D^2}}}$$

Weitere Werte lassen sich in Abb. 2.52 ablesen.

Für die rechnerische Auswertung der Schwingung aus Messwerten bildet man das logarithmische Dekrement Λ zweier aufeinander folgender gleichgerichteter Amplituden.

$$\Lambda = \ln \left(\frac{\hat{x}_n}{\hat{x}_{n+1}} \right) = 2 \cdot \ln \left(\frac{\hat{x}_n}{\hat{x}_{n+\frac{1}{2}}} \right) = -2 \cdot \frac{D \cdot \pi}{\sqrt{1-D^2}}$$

Abb. 2.52 Überschwingweite in Abhängigkeit vom Dämpfungsgrad bezogen auf $\Delta x_B = 100\%$

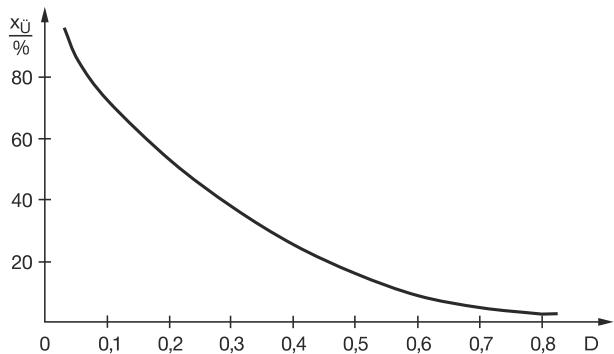
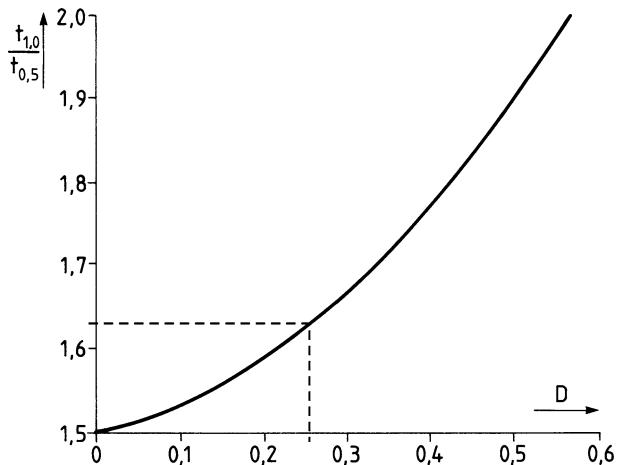


Abb. 2.53 Verhältnis $t_{1,0}/t_{0,5}$ in Abhängigkeit vom Dämpfungsgrad



Wird die o. g. Gleichung nach dem Dämpfungsgrad aufgelöst, so ergibt sich:

$$D = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}}$$

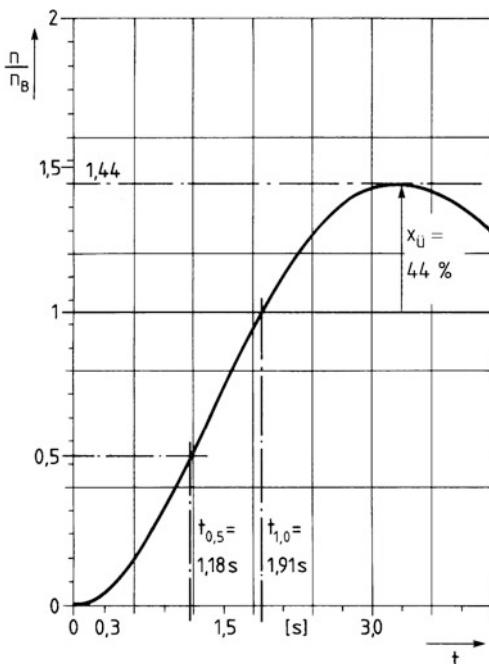
Anschwingverhalten Der Dämpfungsgrad D lässt sich auch aus dem Verhältnis von Zeit $t_{0,5}$ für das Erreichen von 50 % des Endwertes und Zeit $t_{1,0}$ für das erstmalige Erreichen des Endwertes bestimmen (siehe Abb. 2.51).

Bestimmt man mit dem logarithmischen Dekrement und aus dem Verhältnis $t_{1,0}/t_{0,5}$ jeweils den Wert D , so stimmen diese Werte bei einer reinen P-T_{2S}-Strecke überein. Ist der tatsächliche Wert $t_{1,0}/t_{0,5}$ kleiner als der, der er sich aus Abb. 2.53 ergibt, so ist mindestens ein zusätzliches Verzögerungsglied zur Nachbildung notwendig.

Beispiel 2.9 (Ermittlung der Kennwerte einer schwingungsfähigen Strecke ohne zusätzliche Verzögerungsglieder)

Ein Versuchsstand zur Drehzahlregelung besteht aus einem fremd erregten Gleichstrommotor, der mit einem konstanten Moment M_L belastet ist. Durch eine Einstellung

Abb. 2.54 Gemessener Anfangsverlauf des Gleichstrommotors



der Ankerspannung Y von 0 auf 2,5 V ändert sich die Drehzahl n entsprechend dem Messschrieb aus Abb. 2.54 und 2.55 von 0 auf 10 Umdrehungen pro Minute

- a) Bestimmen Sie den Dämpfungsgrad D nach verschiedenen Verfahren.

Aus dem Anfangsverlauf Abb. 2.54 liest man ab:

$$t_{0,5} = 1,18 \text{ s}, \quad t_1 = 1,91 \text{ s}$$

Daraus ergibt sich das Verhältnis:

$$\frac{t_1}{t_{0,5}} = \frac{1,91 \text{ s}}{1,18 \text{ s}} = 1,62$$

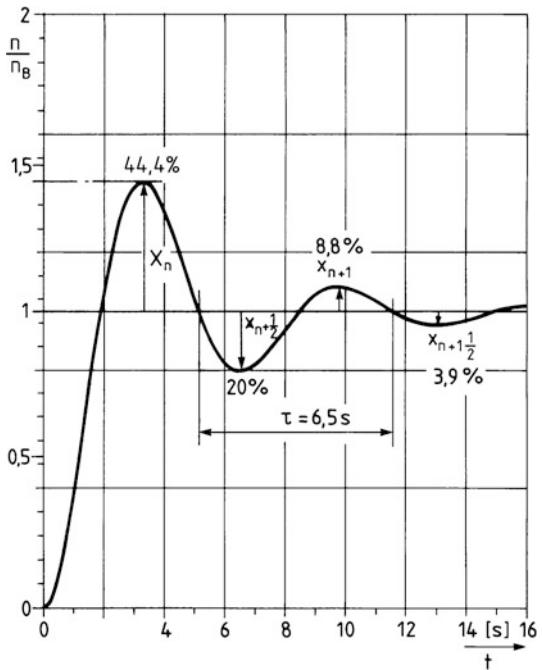
Für dieses Verhältnis kann man in Abb. 2.53 den theoretischen Dämpfungsgrad D ablesen.

$$\rightarrow D = 0,25$$

Mit der Überschwingweite $x_{\ddot{U}} = 44\%$ bezogen auf den Beharrungswert nach Abb. 2.54 entnimmt man aus Abb. 2.52:

$$\rightarrow D = 0,25$$

Abb. 2.55 Einschwingverhalten des Gleichstrommotors



Aus dem Einschwingverhalten über mehrere Perioden aus Abb. 2.55 lassen sich die einzelnen maximalen Amplituden ablesen, z.B. $x_n = 44,4\%$ und $x_{n+1} = 8,8\%$. Es ergibt sich das logarithmische Dekrement:

$$\Lambda = \ln \left(\frac{\hat{x}_n}{\hat{x}_{n+1}} \right) = \ln \left(\frac{44,4}{8,8} \right) = 1,618$$

Daraus lässt sich der Dämpfungsgrad berechnen:

$$D = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}} = \frac{1,618}{\sqrt{4\pi^2 + 1,618^2}} = 0,249$$

Das gleiche Verfahren kann auch für halbe Perioden eingesetzt werden:

$$\Lambda = 2 \cdot \ln \left(\frac{\hat{x}_n}{\hat{x}_{n+\frac{1}{2}}} \right)$$

Damit ergeben sich folgende Ergebnisse aus Tab. 2.19. Auch aus diesen Werten ergibt sich als Mittelwert $D = 0,25$.

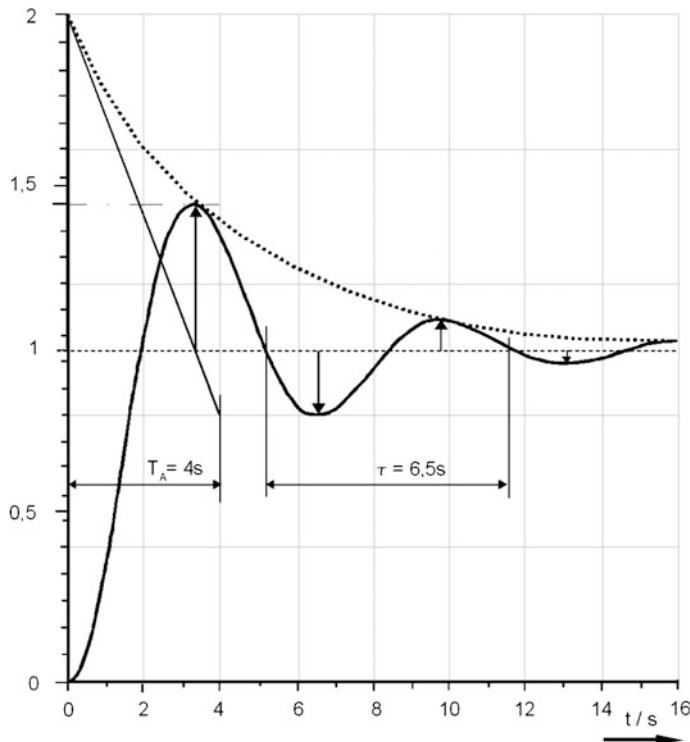


Abb. 2.56 Hüllkurve des Schwingungsvorgangs vom Gleichstrommotor

Tab. 2.19 Dämpfungsgrad, berechnet aus verschiedenen Halbschwingungen

| n | \hat{x}_n (%) | Λ | D |
|----------------|-----------------|-----------|-------|
| $\frac{1}{2}$ | 44,4 | | |
| 1 | 19,7 | 1,625 | 0,250 |
| $1\frac{1}{2}$ | 8,8 | 1,612 | 0,248 |
| 2 | 3,9 | 1,628 | 0,251 |

Aus der Hüllkurve des Schwingungsvorgangs in Abb. 2.56 kann man ablesen:

$$n/n_B(T_A) = 36,8 \% \quad \rightarrow \quad T_A = 4 \text{ s und } \tau = 6,5 \text{ s.}$$

Der Dämpfungsgrad berechnet sich mit diesen Werten zu:

$$D = \frac{\tau}{\sqrt{4\pi^2 \cdot T_A^2 + \tau^2}} = \frac{6,5 \text{ s}}{\sqrt{4\pi^2 \cdot 16 \text{ s}^2 + 42,25 \text{ s}^2}} = 0,25$$

Die Werte nach den unterschiedlichen Verfahren stimmen ausreichend überein. Es kann also ein reines P-T_{2S}-Modell ohne zusätzliche Verzögerungen verwendet werden.

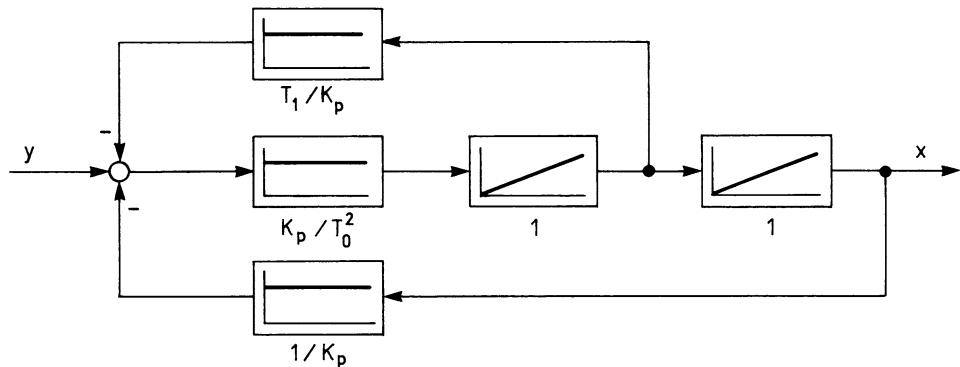


Abb. 2.57 Wirkungsplan einer Drehzahlregelstrecke

- b) Beschreiben Sie das Zeitverhalten der Drehzahlregelstrecke durch ein Modell. Geben Sie alle dazu notwendigen Parameter an.

Als Eingangssprung verwenden wir eine sprunghafte Änderung der Gleichspannung von 0 auf 2,5 V. Im Beharrungszustand stellt sich eine bleibende Drehzahländerung von $n_B = 10 \text{ min}^{-1}$ ein.

Eine Regelung der Strecke durch einen Drehzahlregler findet nicht statt.

Der Proportionalwert K_P -Wert des Modells berechnet sich wie folgt:

$$K_P = \frac{n_B}{y} = \frac{10 \text{ min}^{-1}}{2,5 \text{ V}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 0,067 \frac{1}{\text{V} \cdot \text{s}}$$

Aus dem Messschrieb (Abb. 2.55) kann folgende Schwingungsperiode $\tau = 6,5 \text{ s}$ abgelesen werden. Damit berechnet sich der Kennwert

$$T_0 = \frac{\tau}{2\pi} \cdot \sqrt{1 - D^2}.$$

Der Dämpfungsgrad D wurde bereits in Teilaufgabe a) ermittelt ($D = 0,25$).

$$T_0 = \frac{6,5 \text{ s}}{2\pi} \cdot \sqrt{1 - 0,25^2} = 1 \text{ s}$$

Der Kennwert T_1 beträgt:

$$T_1 = 2 \cdot D \cdot T_0 = 2 \cdot 0,25 \cdot 1 \text{ s} = 0,5 \text{ s}$$

Mit den ermittelten Kennwerten lässt sich die Differentialgleichung des P-T_{2S}-Modells angeben, die das Modell beschreibt:

$$\begin{aligned} T_0^2 \cdot \ddot{n} + T_1 \cdot \dot{n} + n &= K_P \cdot y \\ 1 \text{ s}^2 \cdot \ddot{n} + 0,5 \text{ s} \cdot \dot{n} + n &= 0,067 \frac{1}{\text{V} \cdot \text{s}} \cdot y \quad \text{mit } n \text{ in [1/s]} \end{aligned}$$

Der zugehörige Wirkungsplan ist in Abb. 2.57 dargestellt.

- c) Setzen Sie die Kennwerte in die Lösungsgleichung des P-T_{2S}-Modells ein.

Die Lösungsgleichung für die Sprungantwort einer Differentialgleichung 2. Ordnung lautet:

$$n = K_P \cdot y \cdot (1 - A \cdot e^{-t/T_A} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi))$$

Im Beharrungszustand für $t \rightarrow \infty$ gilt:

$$\begin{aligned} n_B &= K_P \cdot y = 10 \text{ min}^{-1} \\ (A \cdot e^{-\omega_0 \cdot D \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)) &= 0 \quad \text{da } e^{-\infty} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Für die Amplitude A gilt:

$$A = \sqrt{\frac{1}{1 - D^2}} = 1,033$$

Die Abklingfunktion wird beschrieben durch $e^{-t/T_A} = e^{-t/4s}$.

Die Sinusschwingung wird beschrieben durch

$$\omega \cdot t = \frac{2\pi}{\tau} \cdot t = 360^\circ \frac{t}{6,5 \text{ s}}$$

und hat die konstante Phasenverschiebung

$$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1 - D^2}}{D} = 75,5^\circ$$

Vergleich mit dem Messwert:

$$\varphi^* = \frac{t_{1,0}}{\tau} \cdot 2\pi = -\frac{1,91}{6,5} \cdot 360^\circ = -105,8^\circ$$

$$\varphi = 180^\circ - 105,8^\circ = 74,2^\circ$$

Die Lösungsgleichung mit allen Kennwerten lautet

$$n = 0,067 \frac{1}{\text{V} \cdot \text{s}} \cdot y \left[1 - 1,033 \cdot e^{-t/4s} \cdot \sin \left(360^\circ \cdot \frac{t}{6,5 \text{ s}} + 75,5^\circ \right) \right]$$

- d) Welcher Wert ergibt sich für n bei einer Spannungsänderung $y = 20 \text{ V}$ nach 4 s ?

$$n = 0,067 \frac{1}{\text{V} \cdot \text{s}} \cdot 20 \text{ V} \cdot \left(1 - 1,033 \cdot e^{-1} \cdot \sin \left(360^\circ \cdot \frac{4}{6,5} + 75,5^\circ \right) \right)$$

$$n = 1,34 \frac{1}{\text{s}} (1 + 0,338) = 1,79 \frac{1}{\text{s}} = 107,6 \frac{1}{\text{min}}$$

Aus dem Messschrieb ist abzulesen, für $t = 4$ s

$$\frac{n}{n_B} = 1,35 \quad \Rightarrow \quad n = 1,34 \frac{1}{s} \cdot 1,35 = 1,81 \frac{1}{s} = 108,5 \frac{1}{\text{min}}$$

- e) Nach welcher Zeit hat sich bei $y = 20$ V die Drehzahl bis auf 3 1/min an den neuen Beharrungswert angeglichen?

Zur Bestimmung der Zeit, nach der die Schwingungsamplituden kleiner sind als ein Grenzwert, verwendet man die umhüllende e-Funktion (Abb. 2.56). Für die Zeitkonstante dieser e-Funktion gilt:

$$T_A = \frac{1}{\omega_0 \cdot D} = \frac{T_2}{D} = \frac{1 \text{ s}}{0,25} = 4 \text{ s}$$

Diese e-Funktion läuft für $t \rightarrow \infty$ gegen den Beharrungswert.

$$n_B = 0,067 \frac{1}{\text{V} \cdot \text{s}} \cdot 20 \text{ V} = 1,34 \frac{1}{\text{s}} = 80,4 \frac{1}{\text{min}}$$

Der Grenzwert der Amplituden soll

$$n_H = 3 \frac{1}{\text{min}}$$

sein. Daraus ergibt sich:

$$\frac{n_H}{n_B} = \frac{3 \frac{1}{\text{min}}}{80,4 \frac{1}{\text{min}}} = 0,0375 \leq e^{-t/T_A}$$

Der gewünschte Grenzwert wird also nach 2 Schwingungsperioden oder nach vier Extremwerten erreicht. Aus dem Messschrieb entnimmt man, dass der vierte Extremwert $\hat{x}_{n+(1/2)}$ nur noch wenig über dem Grenzwert liegt.

2.6.5.3 Modell mit Schwingungsglied und Verzögerungsgliedern

Schwingungsfähige Regelstrecken haben oft zusätzliche, wenn auch meist kleinere, Verzögerungsglieder. Solche Strecken lassen sich nur schwer mit ausreichender Genauigkeit nachbilden. Es soll erwähnt werden, dass die messtechnische Analyse solcher Systeme im Frequenzbereich oder die digitale Identifikation bessere Ergebnisse liefert.

Solche Strecken lassen sich im Zeitbereich durch die Reihenschaltung eines P-T_{2S}-Gliedes und einem oder mehreren P-T₁-Gliedern nachbilden. Entscheidend für die Auswahl des P-T_{2S}-Gliedes ist, dass das Schwingungsverhalten erkennbar und auswertbar ist (Tab. 2.20). Dies ist nur für $D < 0,4$ möglich. Sonst ist es besser, das Zeitverhalten durch eine P-T_n-Strecke mit aperiodischen Verhalten nachzubilden, z. B. indem man eine

Tab. 2.20 Parameter für die Modellauswahl mit/ohne zusätzliche Verzögerung

| | |
|--|---|
| $D \geq 0,4$ | P-T _n -Modell |
| $\frac{0,5}{\omega_0 \cdot T_g} < D < 0,4$ | P-T _{2S} -T _n -Modell |
| $D \leq \frac{0,5}{\omega_0 \cdot T_g}$ | P-T _{2S} -Modell |

„Schmiegefunktion“ in die Restschwingung legt (Abb. 2.58). Der Einfluss dieser Schmiegefunktion sollte größer sein als der Einfluss des Schwingungsgliedes. Dies gilt immer dann für den Parameter b :

$$b = T \cdot \omega_0 > 2 \quad (\text{P-T}_1\text{-Schmiegefunktion})$$

$$b = T_g \cdot \omega_0 > 2 \quad (\text{P-T}_n\text{-Schmiegefunktion})$$

Zur **Ermittlung der Kennwerte** für das P-T_{2S}-T_n-Modell legt man zuerst die Schmiegefunktion als gedachte Mittellinie des Schwingungsverlaufs in die Messkurve. Damit lässt sich für den Bereich, in dem die Schmiegefunktion quasi in Beharrung ist, der Dämpfungsgrad D mit Hilfe des logarithmischen Dekrements bestimmen. Für diesen Dämpfungsgrad ergibt sich ein theoretisches Verhältnis $t_{1,0}/t_{0,5}$ aus Abb. 2.58 für eine Strecke mit reinem Schwingungsverhalten. Bei schwingenden Regelstrecken mit zusätzlicher Verzögerung

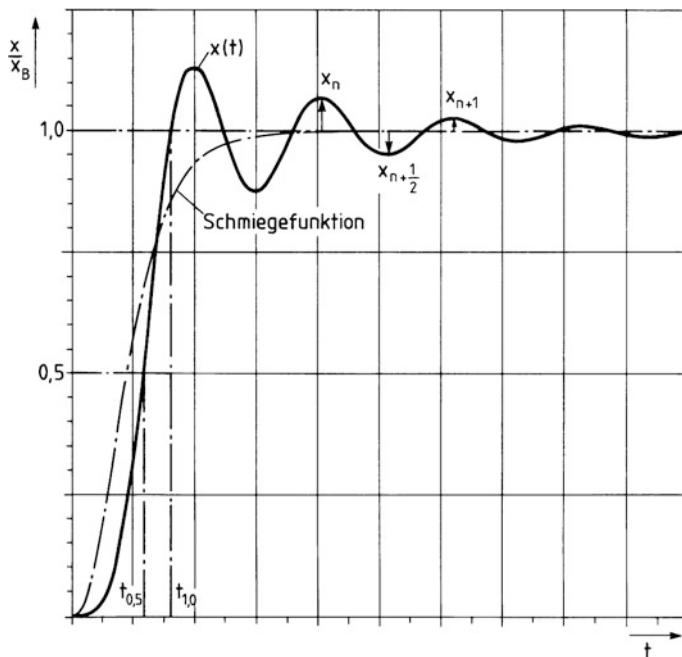


Abb. 2.58 Sprungantwort eines Schwingungsmodells höherer Ordnung mit Schmiegefunktion

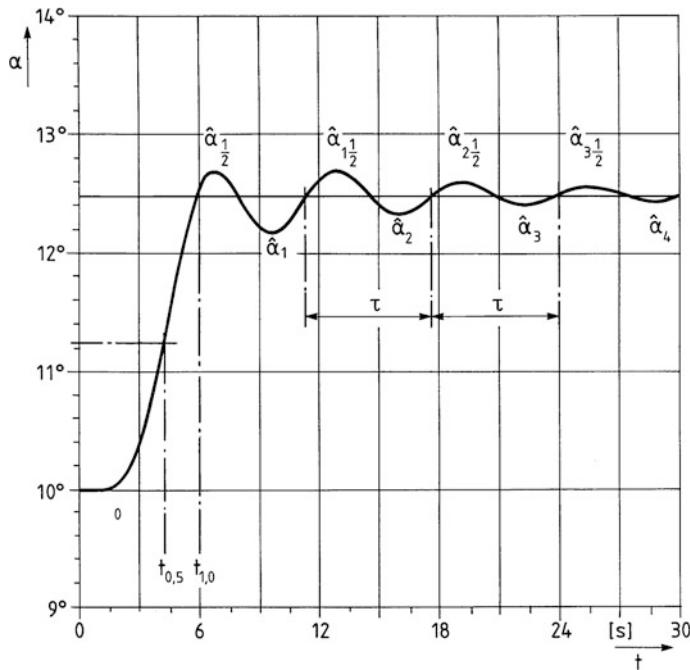


Abb. 2.59 Steigwinkel eines Flugzeuges, Sprungantwort als Messschrieb auf dem Flugschreiber. Ermittlung des Schwingungsverhaltens

gilt:

$$\left(\frac{t_{1,0}}{t_{0,5}} \right)_{\text{gemessen}} < \left(\frac{t_{1,0}}{t_{0,5}} \right)_{\text{theoretisch}}$$

Je weiter die beiden Verhältnisse auseinander liegen, desto stärker ist der Einfluss des P-T_n-Gliedes im Modell (z. B. nachbildungbar durch die Wendetangente).

Genügt eine Abschätzung mit Hilfe der Schmiegefunktion nicht, so kann das direkte Verfahren verwendet werden.

Aufgabe 2.2 (Lageregelung eines Flugzeuges, P-T_n-T_{2S}-Modell)

Bei der Längslagenbewegung eines Flugzeuges entstehen Auftriebs- und Vortriebskräfte, die zu einer Bewegungsgleichung höherer Form führen und mindestens eine Eigenschwingung enthalten. Für den Flugsimulator einer Flugschule soll ein vereinfachtes Modell für die Ermittlung des Steigwinkels des Flugzeugs erstellt werden. Aus dem Flugschreiber einer Schulungsmaschine ist der Zeitverlauf des Steigwinkels α nach einer sprunghaften Änderung der Stellung des Steuerknüppels bekannt (Abb. 2.59). Die hochfrequenten Störungen durch Turbulenzen und mechanische Vibratoren wurden

elektrisch herausgefiltert, so dass nur noch der Vorgang der Steigungswinkeländerung erfasst ist.

- Ermitteln Sie den Dämpfungsgrad D der Längslagenbewegung und die Kennkreisfrequenz ω_0 .*
- Ermitteln Sie näherungsweise mit Hilfe der Schmiegefunktion das Modell der sonstigen Verzögerungsglieder.*



2.6.6 Strecken mit I-Verhalten

2.6.6.1 Grundlagen

Ein wesentliches Merkmal bisher behandelter Regelstrecken ist die Tatsache, dass die Ausgangsgröße (Regelgröße x) nach einer sprungförmigen Änderung der Eingangsgröße (Stellgröße y) einem neuen, festen Endwert zustrebt und diesen dann beibehält. Oder anders ausgedrückt: Die Regelgröße bewegt sich nach einer Änderung der Ausgangsgröße auf einen neuen Beharrungswert zu.

Regelstrecken ohne Ausgleich dagegen besitzen (zumindest innerhalb des Messbereichs) keinen festen Endwert. Es besteht demnach keine Proportionalität zwischen der Eingangsgrößenänderung und der Ausgangsgrößenänderung. Eine Proportionalität besteht nur zwischen der Änderungsgeschwindigkeit der Ausgangsgröße und der Eingangsgrößenänderung selbst.

$$\dot{x} = K_{IS} \cdot \Delta y(t) \quad \text{oder} \quad X = X_0 + K_{IS} \cdot \int \Delta y(t) dt$$

Diese Kennzahl wird in der Regelungstechnik als Integrierbeiwert der Regelstrecke (K_{IS}) bezeichnet.

Ein einfaches Beispiel für eine solche Strecke stellt ein Eimer dar, der mit Wasser gefüllt werden soll. Sobald der Wasserhahn aufgedreht wird, steigt der Wasserstand mit der Zeit an. Wird der Wasserhahn nicht rechtzeitig abgedreht, so läuft der Eimer über.

Analog den Strecken mit Ausgleich können auch Strecken ohne Ausgleich Verzögerungen beinhalten. In Abb. 2.60 sind Übergangsfunktionen von Strecken ohne Ausgleich abgebildet, jeweils mit und ohne Verzögerung. Der zugehörige Integrierwert K_{IS} lässt sich grafisch aus der Asymptoten am Anstieg der I-Strecke ermitteln. Je größer die Steigung, desto größer ist K_{IS} . Wenn in der Reihenschaltung einer Regelstrecke ein Glied mit integrierendem Verhalten (I-Verhalten) ohne eine Rückwirkung vorhanden ist, zeigt die gesamte Regelstrecke ein Verhalten ohne Ausgleich.

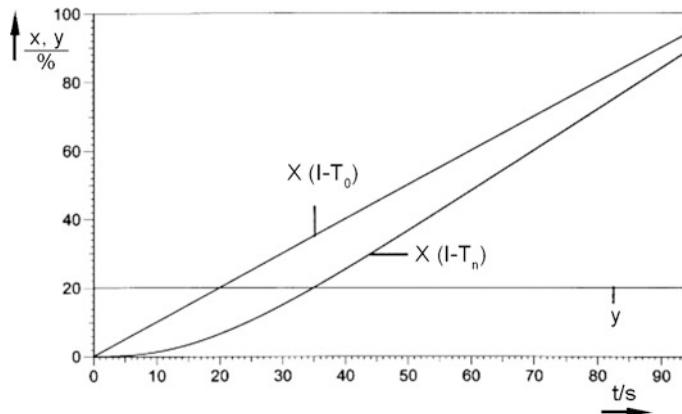
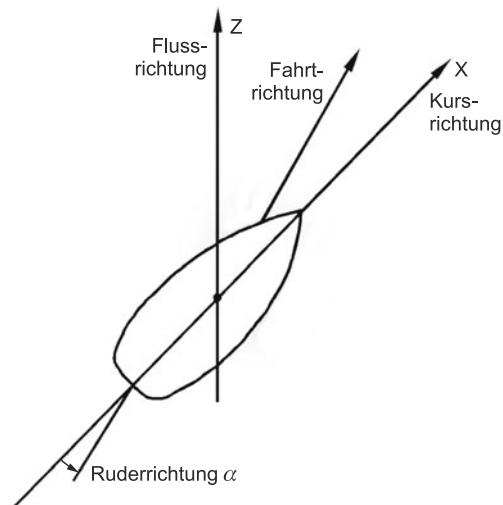


Abb. 2.60 Übergangsfunktionen von Strecken ohne Ausgleich mit und ohne Verzögerungen

Abb. 2.61 Kursregelung eines Schiffes



Ein Beispiel für eine I-Strecke ist die Kursregelung eines Schiffes (Abb. 2.61). Wird das Ruder eines Schiffes gegen die Längsachse um den Winkel α verstellt, so wird durch das Ruder auf das Schiff ein proportionales Drehmoment ausgeübt. Diesem Rudermoment wirken entgegen:

- das Trägheitsmoment des Schiffes
- eine der Geschwindigkeit v proportionales dämpfendes Reibungsmoment
- ein durch das strömende Wasser oder durch den Wind bewirktes externes Moment, ggf. als Rückstellmoment

Bleibt der Ruderausschlag ohne externe Störgröße konstant, dann fährt das Schiff im Kreis. Es ergibt sich I-Verhalten.

Tab. 2.21 Messwerte des Füllvorgangs eines Wasserspeichers

| h | cm | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 |
|----------------|-----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| t | s | 0 | 220 | 320 | 390 | 440 |
| \dot{V}_{zu} | m^3/h | 0,4 | 0,9 | 1,3 | 1,8 | |
| Nr. | – | 0–1 | 1–2 | 2–3 | 3–4 | |

2.6.6.2 Verzögerungsarme Strecken

Nur im Arbeitspunkt $Y_0 = Z_0$ ist eine I-Strecke in Beharrung, d. h. wenn die zugeführte Energie oder der zugeführte Massenstrom im Gleichgewicht ist mit der abgeführten Energie bzw. Massenstrom des Systems. Geht man von einer sprunghaften Änderung $\Delta y = \text{konst.}$ aus, so kann die Integration auf der rechten Seite der Gleichung durchgeführt werden und man erhält:

$$X(t) = X_0 + K_{IS} \cdot \Delta y \cdot t \quad \text{oder} \quad \Delta x(t) = K_{IS} \cdot \Delta y \cdot \Delta t$$

Bei einer Störgrößenänderung $\Delta z(t)$ auf der Entnahmeseite des Systems zeigt sich der für die I-Strecke typische Abfall der Regelgröße bis zum Wert $X = 0$. Bei Stellgrößenänderungen $\Delta y(t)$ auf der Zuführungsseite steigt die Regelgröße bis zu einer physikalischen oder messtechnischen Begrenzung, z. B. Behälteroberkante.

Der maximale Wert \dot{x}_{\max} ist dann vorhanden, wenn die Stellgröße Y ihren größten Wert annimmt. Dieser ist durch den Stellbereich Y_H vorgegeben. Messungen an realen Anlagen lassen die Bedingung $y = Y_H$ nur selten zu. Deshalb wird für die messtechnische Analyse meist mit geringeren Sprunghöhen gearbeitet.

$$\dot{x} = K_{IS} \cdot \Delta y(t) \quad \Rightarrow \quad K_{IS} = \frac{\dot{x}}{\Delta y(t)} = \frac{(\Delta x / \Delta t)}{\Delta y(t)} = \frac{1}{T_I}$$

Die Integrierzeit T_I ist als reziproker Integrierwert eines reinen I-Gliedes (mit $K_P = 1$) definiert. Aus der Sprungantwort kann der Integrierwert ermittelt werden:

$$K_{IS} = \frac{\Delta x}{\Delta t \cdot \Delta y}$$

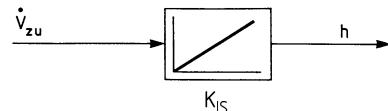
Beispiel 2.10 (Kennwerte einer verzögerungsarmen I-Strecke)

Für einen zylindrischen Wasserspeicher sollen die Kennwerte zur Modellbildung ermittelt werden. Dazu wurde der Abfluss abgesperrt ($\dot{V}_{ab} = 0!$) und zwischen den einzelnen Messpunkten jeweils ein konstanter Zufluss \dot{V}_{zu} eingestellt. Wenn der Wasserstand im Behälter um $\Delta h = 5 \text{ cm}$ angestiegen war, wurde die Zeit registriert und der Zufluss auf einen neuen konstanten Wert eingestellt (Tab. 2.21).

- a) Bestimmen Sie den gemittelten Integrierbeiwert K_{IS} .

Der Wasserspeicher ohne Abfluss zeigt I-Verhalten. Solange ein Zufluss vorhanden ist, steigt der Wasserstand an. Verzögerungsglieder sind nicht vorhanden, wenn die

Abb. 2.62 I-T₀-Modell des Wasserspeichers



Zuflussmessstelle nahe am Speicher angeordnet ist. Das Zeitverhalten kann also durch ein verzögerungsarmes I-Modell nach Abb. 2.62 beschrieben werden.

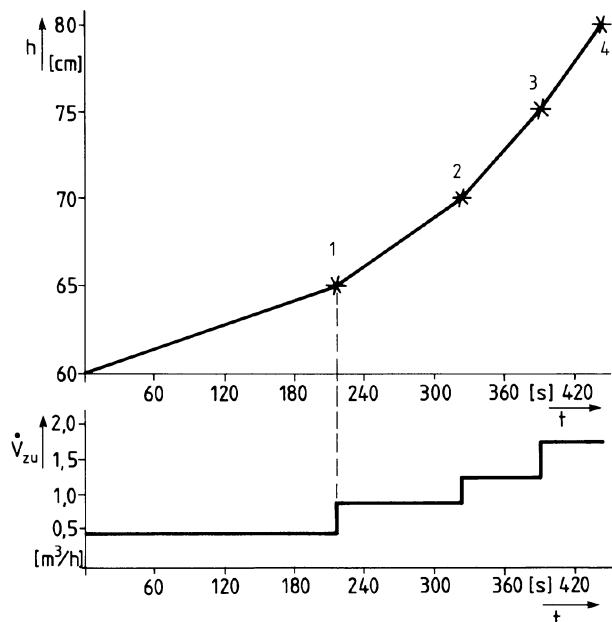
Ausgangsgröße ist der Wasserstand h , Eingangsgröße der Zufluss \dot{V}_{zu} .

Das Zeitverhalten gemäß den Messwerten ist in Abb. 2.63 dargestellt. Für jeden Messabschnitt lässt sich daraus ein Integrierwert entsprechend der Formel

$$K_I = \frac{\Delta h}{\dot{V}_{zu} \cdot \Delta t} \quad \text{z. B. } K_{I_{1-2}} = \frac{5 \text{ cm}}{0,9 \text{ m}^3/\text{h}} \cdot \frac{1}{100 \text{ s}} = 0,056 \frac{\text{cm}}{\text{m}^3/\text{h}} \cdot \frac{1}{\text{s}}$$

berechnen. Bei linearem Verhalten des Speichers (konstanter Querschnitt) ist der K_I -Wert in allen Messabschnitten gleich, trotz unterschiedlichem Zufluss (Tab. 2.22).

Abb. 2.63 Zeitverhalten des Wasserspeichers bei sprunghafter Änderung des Zuflusses



Tab. 2.22 Abschnittsweise Berechnung des K_I -Wertes

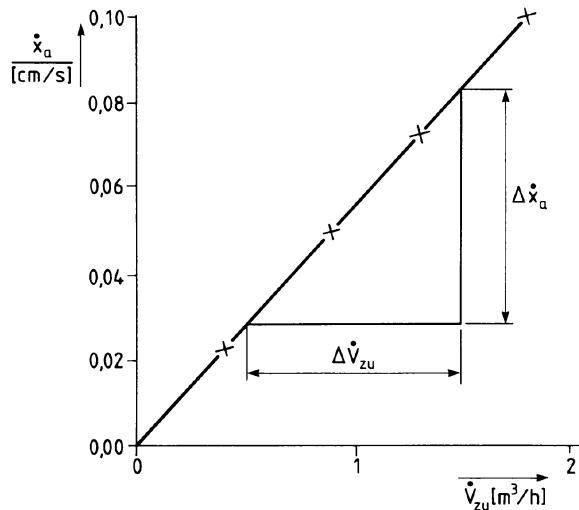
| Nr. | – | 0–1 | 1–2 | 2–3 | 3–4 | |
|----------------|---|-------|-------|-------|-------|--|
| \dot{V}_{zu} | m^3/h | 0,4 | 0,9 | 1,3 | 1,8 | |
| Δh | cm | 5 | 5 | 5 | 5 | |
| Δt | s | 220 | 100 | 70 | 50 | |
| K_I | $\frac{\text{cm}}{\text{m}^3/\text{h}}$ | 0,057 | 0,056 | 0,055 | 0,056 | Mittelwert: $\overline{K}_I = 0,056 \frac{\text{cm}}{\text{m}^3/\text{h}}$ |

Tab. 2.23 Berechnung der Anstiegsgeschwindigkeit

| | | | | | |
|---|-------------------|-------|-------|-------|------|
| \dot{V}_{zu} | m ³ /h | 0,4 | 0,9 | 1,3 | 1,8 |
| $\dot{x}_a = \frac{\Delta h}{\Delta t}$ | cm/s | 0,023 | 0,050 | 0,071 | 0,10 |

Abb. 2.64 Kennlinie 2. Art

des Wasserspeichers



Anmerkung: Da hier für die Störgröße $Z_0 = \dot{V}_{ab} = 0$ gilt, kann an Stelle der Differenz die absolute Größe des zugeführten Volumenstroms eingesetzt werden.

b) Zeichnen Sie die Kennlinie 2. Art und ermitteln Sie daraus den K_I -Wert

Bei der Kennlinie 2. Art trägt man die zeitliche Änderung der Regelgröße

$$\dot{x} = \frac{dh}{dt} = \frac{\Delta h}{\Delta t}$$

über die Eingangsgröße $Y = \dot{V}_{zu}$ auf (Tab. 2.23, Abb. 2.64).

Die berechneten Kennlinienpunkte können durch eine Gerade verbunden werden. Die Steigung dieser Geraden ist der Integrierbeiwert K_I .

$$K_I = \frac{\Delta \dot{x}}{\Delta \dot{V}_{zu}} = \frac{0,055 \text{ cm/s}}{1 \text{ m}^3/\text{h}} = 0,055 \frac{\text{cm/s}}{\text{m}^3/\text{h}}$$

c) Wie groß ist die Querschnittsfläche A und der Durchmesser d des zylindrischen Wasserspeichers?

Der Querschnitt des Wasserspeichers ist reziprok zum K_I -Wert.

$$A = \frac{1}{K_I} = \frac{1 \text{ m}^3/\text{h}}{0,055 \text{ cm/s}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \cdot \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 0,505 \text{ m}^2$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} = 0,8 \text{ m}$$

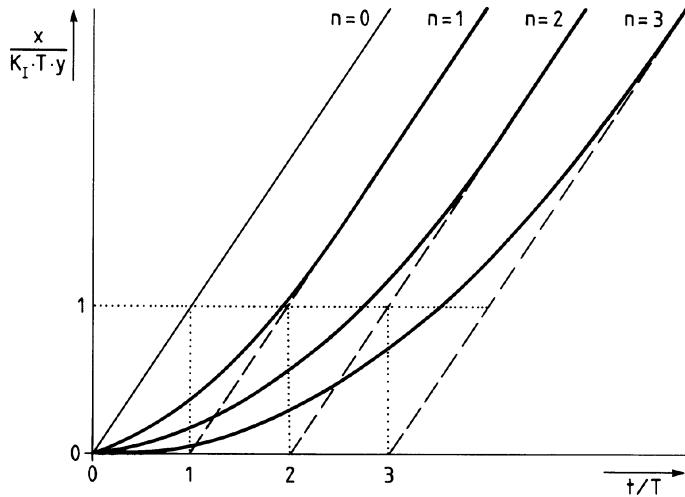


Abb. 2.65 Regelstrecken ohne Ausgleich mit n gleichgroßen Verzögerungsgliedern

2.6.6.3 Regelstrecken ohne Ausgleich mit Verzögerung

Nichtschwingende Regelstrecken ohne Ausgleich mit Verzögerung 1. bis n . Ordnung können durch Modelle nachgebildet werden, die aus einem Einzelglied mit integrierendem Verhalten und n Verzögerungsgliedern 1. Ordnung bestehen. Die Sprungantwort ist um die Verzögerung $\sum T_i$ nach rechts verschoben gegenüber dem reinen I-Glied. Die in Abb. 2.65 eingezeichneten Tangenten (gestrichelte Linien) schneiden auf der Zeitachse diese Zeitkonstantensumme $\sum T_i$ ab.

Der Integrierbeiwert K_I entspricht der Steigung der Sprungantwort. Um Fehler zu vermeiden, ist die Steigung dort zu ermitteln, wo sie einen geradlinigen Verlauf (Asymptote) angenommen hat.

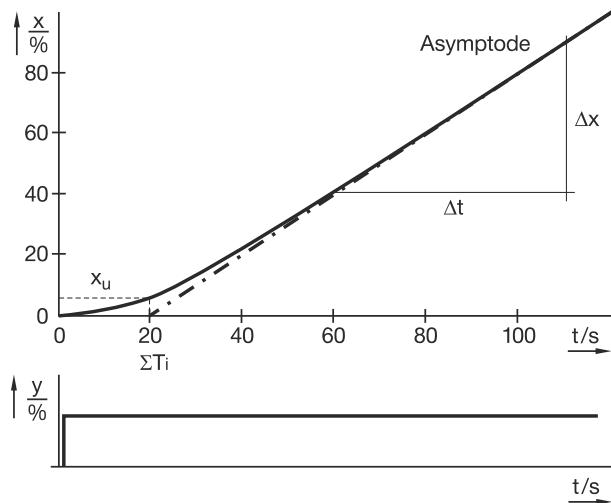
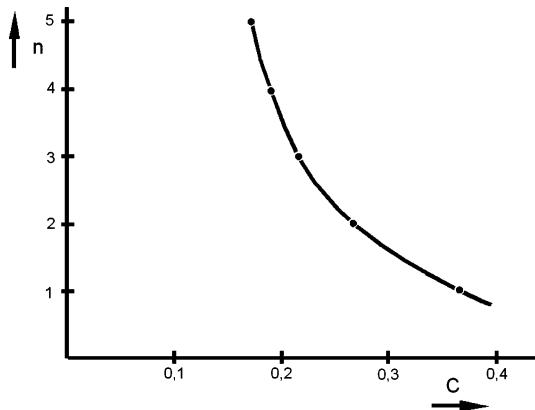
$$K_I = \frac{(\Delta x / \Delta t)_{\text{asympt}}}{\Delta y}$$

wobei Δy die konstante Stellgrößendifferenz bezogen auf den Beharrungszustand ist und Δx die Regelgrößenänderung im Zeitintervall Δt (Abb. 2.66).

Wie schon bei Regelstrecken mit Ausgleich muss auch bei den Regelstrecken ohne Ausgleich eine eventuell vorhandene echte Totzeit durch Verschiebung des Nullpunktes um diese Totzeit abgespalten werden. Mit Hilfe der Kennwerte X_U und $\sum T_i$ kann eine dimensionslose Integrier-Kennzahl C ermittelt werden, die nur von der Zahl n der Verzögerungsglieder abhängt (Tab. 2.24).

Der Ausdruck

$$C = \frac{X_U}{K_I \cdot \sum T_i \cdot \Delta y} = \frac{X_U}{\sum T_i} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Abb. 2.66 Sprungantwort einer I-Strecke höherer Ordnung**Abb. 2.67** Dimensionslose Kennzahl C zur Ermittlung der Ordnung der $I-T_n$ -Strecke

ist eine dimensionslose nur von der Zahl n der Verzögerungsglieder abhängige Größe (s. Abb. 2.67).

$$\sum T_i = \text{Zeitkonstantensumme}, \quad X_U = \text{zugehöriger Ordinatenwert}$$

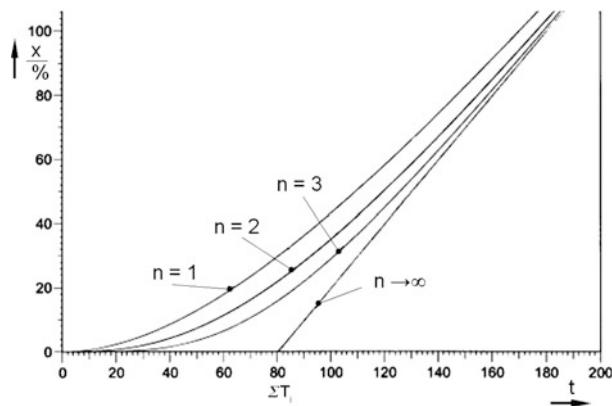
Für ein bekanntes Modell ergibt sich die Zeitkonstante für n gleichgroße Verzögerungsglieder zu:

$$T = \frac{\sum T_i}{n}$$

Tab. 2.24 Zusammenhang zwischen der Zahl n der P- T_1 -Glieder und der Integrier-Kennzahl C

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| C | 0,368 | 0,271 | 0,224 | 0,195 | 0,175 |

Abb. 2.68 Regelstrecke ohne Ausgleich mit gleicher Zeitkonstantensumme



Ähnlich wie bei der P-Strecke ist auch bei der I-Strecke bei gleicher Zeitkonstantensumme der Endverlauf unabhängig von der Anzahl der Verzögerungsglieder (Abb. 2.68). Das Anfangsverhalten nähert sich bei einer Zunahme der Ordnung der Regelstrecke ($n \rightarrow \infty$) immer mehr dem Verhalten einer reinen Totzeit.

Aufgabe 2.3 (Wasserspeicher mit $I-T_1$ -Verhalten)

Ein Wasserdurchlauftank wird über ein Stellventil mit motorischem Stellantrieb mit Frischwasser versorgt. Der Stellantrieb kann nur stillstehen ($y = 0$) oder mit konstanter Drehzahl n ($y = 1$) betrieben werden. Der Massenstrom im Ablauf hängt nur vom Wasserstand im Behälter ab (Abb. 2.69).

Ausgehend vom leeren Wasserbehälter wird das Stellventil mit konstanter Drehzahl geöffnet. Gleichzeitig werden der Hub H des Ventils und der Wasserstand h des Behälters über der Zeit aufgezeichnet (Abb. 2.70). Der Stellbereich des Ventils beträgt $Y_H = 20 \text{ mm}$, die Füllhöhe des Wasserspeichers beträgt $h_{\max} = 5 \text{ m}$.

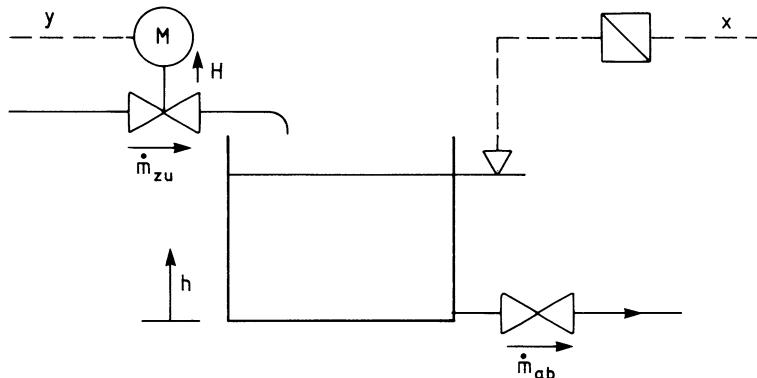


Abb. 2.69 Gerätefließbild eines Wasserdurchlauftankes mit motorischem Stellantrieb

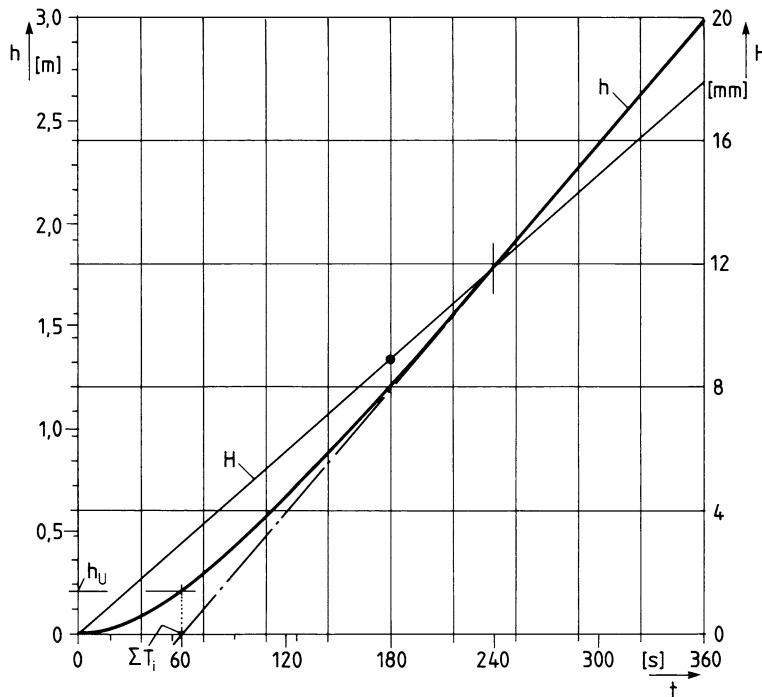


Abb. 2.70 Messschreibe des Ventilhubes H und des Wasserstandes h eines Durchlaufspeichers

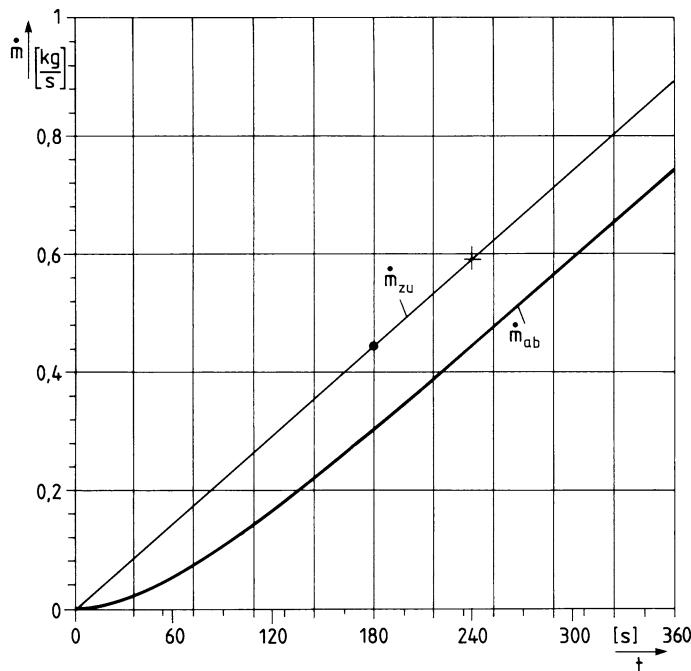


Abb. 2.71 Messschrieb für den Zulauf \dot{m}_{zu} und den Ablauf \dot{m}_{ab} des Wasserspeichers

- a) Zeichnen Sie den Wirkungsplan der Anlage mit allen im Gerätefließbild angegebenen Größen.
- b) Ermitteln Sie aus den Schrieben Abb. 2.70 und 2.71 alle Kennwerte, die für das I-T₁-Modell notwendig sind.
- c) Ermitteln Sie den Proportionalbeiwert der Drosselstelle am Ablauf.
- d) Ermitteln Sie den Behälterdurchmesser für dem zylindrischen Wasserspeicher.



3.1 Allgemeines

In diesem Kapitel wird die Funktionsweise der Regler dargestellt. Dazu werden die Reglerkennwerte und deren Ermittlung aus Messschrieben erläutert. Mit dem Verständnis für Reglerkennwerte ergibt sich die Fähigkeit, immer den richtigen Regler auszuwählen und eine verbesserte Reglereinstellung zu finden.

- ▶ Die **Regeleinrichtung** ist eine Funktionseinheit, die die Stellgröße (y) aus der Führungsgröße (w) und der Rückführgröße (r) bildet.
- ▶ Der **Regler** ist eine Funktionseinheit aus Vergleichsglied und Regelglied zur Durchführung einer festgelegten Regelungsaufgabe.

In der Abb. 1.10 werden diese Größen im Regelkreis dargestellt.

Die Aufgabe der Regeleinrichtung besteht also darin, eine zeitlich veränderliche Rückführungsgröße $r(t)$ laufend mit einer fest vorgegebenen oder zeitveränderlichen Führungsgröße $w(t)$ zu vergleichen und beim Auftreten einer Abweichung $e(t)$ eine zeitlich veränderliche Stellgröße $y(t)$ zu liefern, die geeignet ist, die Abweichung zu verringern oder ganz zu beseitigen.

Bei digitalen Reglern werden Vergleicher und die Bauteile des Zeitverhaltens durch einen Prozessor ersetzt, in dem digitale Algorithmen ablaufen.

Hinsichtlich der Aufgabenstellung unterscheidet man:

- Festwertregler mit konstanter, aber einstellbarer Führungsgröße $W = \text{konst.}$
- Folgeregler, bei der die Führungsgröße eine Funktion einer anderen messbaren Größe oder der Zeit ist.

Der strukturelle Aufbau eines Regelkreises ist in Abb. 1.10 dargestellt. Je nach Art des Reglers können einzelne Baugruppen der Regeleinrichtung entfallen. In der Praxis ordnet

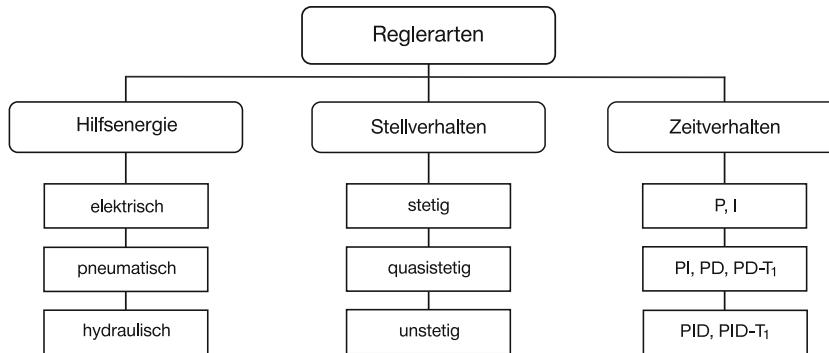


Abb. 3.1 Übersicht über Reglerarten

man oft die Mess- und Stelleinrichtung der Regelstrecke zu. Man erhält dann bei „Einheitsreglern“ dimensionsgleiche Regel- und Stellgrößen, die das Schnittstellenproblem erleichtern. Da heute vorwiegend digitale Regler zum Einsatz kommen, wird nachfolgend auf die Beschreibung der technischen Realisierung von elektrischen, pneumatischen und hydraulischen Reglern verzichtet. Ziel ist es, die in der Praxis verwendeten Reglerkennwerte zu beschreiben.

Die Einteilung von in der Praxis eingesetzten Reglern lässt sich nach unterschiedlichen Gesichtspunkten vornehmen, z. B. nach der Art der verwendeten Hilfsenergie, nach dem Stellverhalten der Ausgangsgröße oder nach dem Zeitverhalten (Abb. 3.1). Nicht aufgeführt sind Regler mit Sonderzeitverhalten, wie Regler für endliche Einstellzeit, Regler mit zur Regelstrecke reziprokem Zeitverhalten (Kompensationsregler) oder sich selbst einstellende (adaptive) Regler.

Das wichtigste Kennzeichen eines Reglers ist sein Zeitverhalten. Zusätzlich unterscheidet man, ob der Regler die Ausgangsgröße stufenlos erzeugt (stetig) oder in einer oder mehreren Stufen (unstetig). Ein Sonderfall sind die quasistetigen Regler, die so viele Stufen aufweisen, dass man das Stellverhalten von einem stetigen Regler kaum unterscheiden kann. Dazu gehört auch die immer wichtiger werdende Gruppe von Digitalreglern, bei denen zwar die Ausgangs- und Eingangsgröße abgetastet werden, die aber wegen der guten Auflösung heutiger AD- bzw. DA-Umsetzer und schnellen Abtastung quasi stetig sind. Hinsichtlich der Hilfsenergie wird heute außer im Ex-Schutz-Bereich nur noch eine elektrische Niederspannungsstromversorgung verwendet, in der Regel 24 V.

3.2 Grundzeitverhalten des Reglers

Die Aufgabe des Reglers, den Istwert x an den Sollwert w heranzuführen, d. h. die auftretende Regeldifferenz $e = W - X$ möglichst zu vermeiden, kann nur dann erfolgreich verlaufen, wenn die Stellgröße Y an die Störgröße Z angepasst wird. Die Stellgröße muss

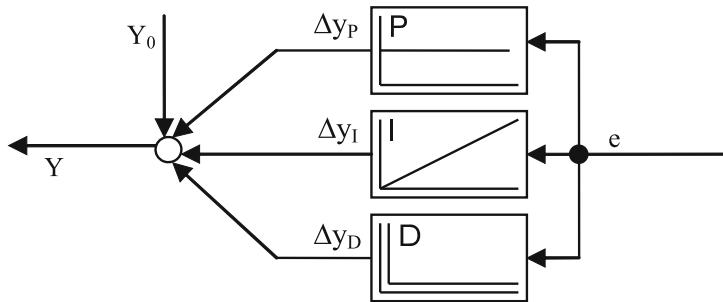


Abb. 3.2 Aufbau eines PID-Reglers in Parallelschaltung

demzufolge jeden beliebigen Wert innerhalb eines bestimmten Bereichs annehmen können.

Diesen Bereich nennt man Stellbereich Y_H . Des Weiteren ist erwünscht, dass der Zusammenhang zwischen Reglereingang (= Regeldifferenz e) und Reglerausgang (= Stellgröße y) innerhalb des Stellbereichs linear verläuft. Der Regler hat dann eine lineare stetige Kennlinie $Y = f(e)$ und konstante Kennwerte.

Das Zeitverhalten des Reglers kann proportionalen, integralen oder differentiellen Charakter haben. Man spricht dann von einem

- P-Teil des Reglers
- I-Teil des Reglers
- D-Teil des Reglers.

Eine übliche Form des Regleraufbaus ist die Parallelschaltung (Abb. 3.2).

Reglergleichung zu Struktur Abb. 3.2:

$$Y = Y_0 + \Delta y_P + \Delta y_I + \Delta y_D = Y_0 + K_{PR} \cdot e + K_{IR} \cdot \int e dt + K_{DR} \cdot de/dt$$

Der Regler ersetzt die Fähigkeit des Menschen, eine durch die Sinnesorgane (Messtechnik) erkannte Abweichung durch einen Handeingriff (Stelltechnik) zu ersetzen. Der Mensch setzt dabei Muskeln (P), Gehirn (I) und Tastorgane (D) ein. Die gleiche Funktion kann auch ein Regler haben. Die Richtung von Δy ist dabei abhängig vom Vorzeichen von e .

Verstärkung: $P \hat{=} \text{Kraft}$; je größer die Regeldifferenz e , desto größer ist die Reaktion Δy_P

Speicherung: $I \hat{=} \text{Gedächtnis}$; je länger die Regeldifferenz e vorliegt, desto größer wird die Reaktion Δy_I

Änderungsgeschwindigkeit: $D \hat{=} \text{Gefühl}$; je schneller sich die Regeldifferenz ändert, desto größer ist die Reaktion Δy_D

Der D-Baustein ist als alleiniger Regler ungeeignet, weil er nur auf Änderungsgeschwindigkeiten der Regelabweichung anspricht, konstante Regelabweichungen jedoch nicht erkennt. In der Praxis haben sich Regler bewährt, die als Kombination verschiedener Grundzeitverhalten wirken, insbesondere PI-Regler oder PID-Regler. Ein reiner P-Regler oder PD-Regler hat den Nachteil einer bleibenden Regelabweichung außerhalb des Arbeitspunktes.

Der Regler ist dann optimal eingestellt, wenn er nach Einwirkung einer Störung oder nach einer Veränderung des Sollwertes innerhalb kürzester Zeit mit möglichst geringen Ausschlägen, den neuen Beharrungszustand erreicht. Bei Reglern mit I-Verhalten wird die Regeldifferenz e zu Null.

Im Auslegungszustand und nach Inbetriebnahme nimmt der Regler zunächst seinen Arbeitspunkt ein (s. Abb. 3.6).

$$X_0 = W_0 \quad \text{und} \quad Y_0 = Z_0$$

Bei Störungen Δz oder Sollwertänderungen Δw ändert sich der Betriebszustand des Reglers in Abhängigkeit von den Regelparametern.

$$\begin{aligned} Y &= Y_0 + \Delta y && \text{für } \Delta y = 0 &\Rightarrow Y &= Y_0 \\ Z &= Z_0 + \Delta z && \text{für } \Delta z = 0 &\Rightarrow Z &= Z_0 \\ X &= X_0 + \Delta x && \text{für } \Delta x = 0 &\Rightarrow X &= X_0 \\ W &= W_0 + \Delta w && \text{für } \Delta w = 0 &\Rightarrow W &= W_0 \end{aligned}$$

Dazu wird z. B. eine zur Störgrößenänderung proportionale Stellgrößenänderung Δy_1 erzeugt, die diese Störgrößendifferenz kompensiert.

3.3 P-Regler

3.3.1 Begriffe

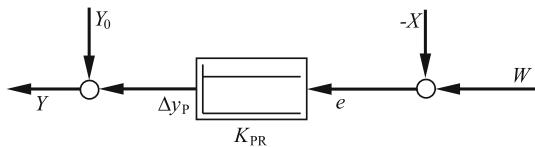
Der Wirkungsplan eines P-Reglers mit den Eingangsgrößen X , W und Y_0 ist in Abb. 3.3 dargestellt. Bei einem proportional wirkenden Regler oder Reglerteil ist die Stellgröße $Y(t)$ direkt (ohne Zeitverzug) proportional zur Regeldifferenz $e(t) = W(t) - X(t)$. Mit Hilfe eines definierten Eingangssprungs Δx oder Δw kann der eingestellte Proportionalwert K_{PR} des Reglers ermittelt werden.

$$K_{PR} = \frac{\Delta y_P}{e} = \frac{Y_H}{X_P} \quad \text{mit } e = \Delta w - \Delta x$$

Daraus ergibt sich die Reglergleichung eines P-Reglers:

$$Y_P = Y_0 + K_{PR} \cdot e$$

Abb. 3.3 Darstellung eines P-Reglers im Wirkungsplan



- Y_P P-Anteil der Regelgrößenausgangsgröße
- Y_0 Offsetwert (Stellgröße im Arbeitspunkt)
- Y_H Stellbereich
- K_{PR} Proportionalwert des Reglers
- X_P Proportionalbereich (regelbarer Bereich der Regelgröße)
- e Regeldifferenz
- X dimensionsbehafteter Istwert der Regelgröße
- W Sollwert in der Einheit der Regelgröße

3.3.2 Bleibende Regelabweichung

Der Nachteil eines reinen P-Reglers ist die bleibende Regelabweichung. Die Arbeitsweise des P-Reglers soll am Beispiel eines einfachen Wasserstandsreglers erläutert werden (Abb. 3.4).

Die Regelstrecke besteht aus Zulaufventil, genannt Stellventil, Wasserbehälter und Ablaufventil (Störventil). Die Messaufgabe übernimmt ein Schwimmer, der die Höhe des Wasserstandes an das Gestänge (P-Regler) weiterleitet. Der Bereich der Regelgröße wird begrenzt durch die Höhe des Wasserbehälters:

$$\begin{array}{lll} \text{leer} & \hat{=} 0 \% & \hat{=} 0 \text{ m} \\ \text{voll} & \hat{=} 100 \% & \hat{=} \text{z. B. } 1,2 \text{ m} \end{array}$$

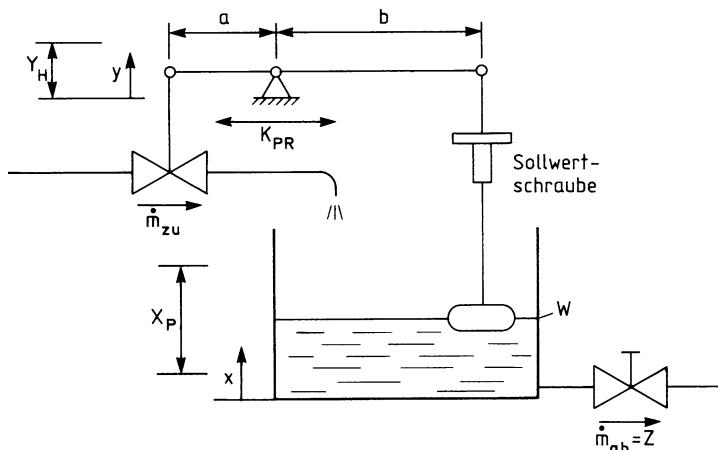
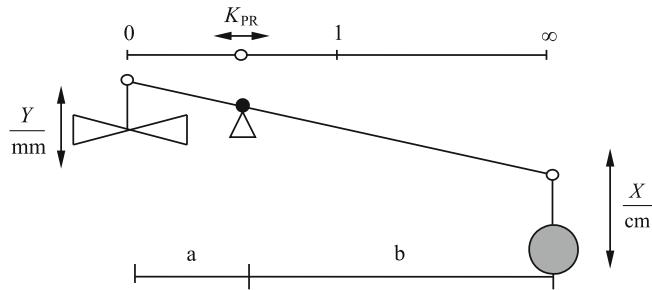


Abb. 3.4 Gerätfließbild eines Wasserstandsreglers mit P-Verhalten

Abb. 3.5 Der Drehpunkt des Gestänges als einstellbarer Proportionalwert



Der Sollwert kann durch eine Gewindestange in Richtung der Schwimmerbewegung eingestellt werden. Die Einstellung des Sollwertes ist jedoch wegen der bleibenden Regelabweichung des P-Reglers nicht unabhängig von der Stellgröße Y des Stellventils.

Die horizontale Hebelstange dient als proportionaler Umsetzer. Je nach Lage des Drehpunktes kann eine Abweichung des rechten Endes der Hebelstange verstärkt oder abgeschwächt werden.

Der Schwimmer gibt den aktuellen Wasserstand als Regelgröße direkt und ohne Hilfenergie über ein Gestänge auf den Ventilkegelhub als Stellgröße und beeinflusst damit direkt die durch das Ventil strömende Wassermenge. Bei einer Änderung des Wasserstandes X ändert sich der Hub Y des Stellventils proportional gemäß dem Hebelgesetz (Abb. 3.5):

$$K_{PR} = \frac{\Delta y/\text{mm}}{\Delta x/\text{cm}} = \frac{a}{b} \quad \text{oder} \quad \frac{\text{Ventilhub}}{\text{Wasserhöhe}}$$

Anmerkung: Bitte nicht die Dimensionen mm gegen cm kürzen.

Ein Wert $K_{PR} = 0,1 \text{ mm/cm}$ bedeutet zum Beispiel: bei 10 cm Änderung des Wasserstandes ändert sich der Ventilhub um 1 mm .

Im Gleichgewichtszustand ist der zugeführte Massenstrom gleich dem abgeführten Massenstrom.

$$\dot{m}_{zu} = \dot{m}_{ab} = 0,01 \text{ kg/s}$$

Ist dieser Massenstrom der Auslegungsmassenstrom, dann gehört zur Regelgröße X_0 eine Stellgröße Y_0 , nur abhängig von der Lage des Drehpunktes vom Gestängehebel. Nur in diesem Punkt stimmt der Sollwert W_0 mit der Regelgröße X_0 überein, d.h. die Regeldifferenz wird zu Null. Diesen Punkt nennt man Arbeitspunkt.

Der zugehörige Hub Y_0 des Stellventils gibt einen Zufluss $\dot{m}_{zu,0}$ frei, der dem Abfluss $\dot{m}_{ab,0}$ entspricht. Da \dot{m}_{ab} die Störgröße Z_0 des Behälters ist, ist hier die Störgrößenabweichung $\Delta z = 0$.

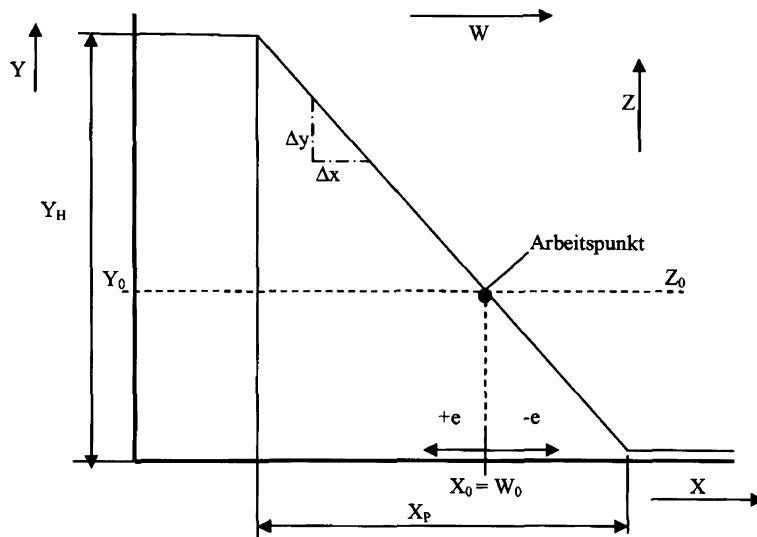


Abb. 3.6 Kennlinie und Kennwerte des P-Reglers

Der Arbeitspunkt eines P-Reglers wird also durch zwei voneinander unabhängige Parameter festgelegt:

$$X = W \quad \text{in cm} \quad e = 0 \quad (\text{keine Regeldifferenz})$$

und $Y_0 = Z_0 / K_{PV}$ in mm $\Delta z = 0$ (Auslegungsstörgröße)

K_{PV} = Proportionalbeiwert des Stellventils in kg/s Massenstrom je mm Hub

Ändert sich die Wasserentnahme der Verbraucher $\dot{m}_{ab} = Z_0$ entsprechend 50 % des Stellbereiches Y_H um die Störgrößenabweichung $\Delta z = 0,002$ kg/s entsprechend 10 % von Y_H , muss auch der Zufluss \dot{m}_{zu} in gleicher Größe geändert werden, damit stationäre Verhältnisse erhalten bleiben. Dies ist nur möglich durch eine bleibende Veränderung des Hubes Y um Δy . Nach dem Hebelgesetz ändert sich damit auch der Wasserstand X um Δx , obwohl der Sollwert W unverändert ist. Diese Abweichung $e_{bl} = W - X$ nennt man **bleibende Regeldifferenz des P-Reglers**.

3.3.3 Kennlinie des P-Reglers

Das statische Übertragungsverhalten des P-Reglers ist in Abb. 3.6 gezeichnet. Anstelle der Differenzen $\Delta y = f(\Delta e)$ stellt man bei linearen Kennlinien durch den Nullpunkt oft den Gesamtbereich des linearen Verlaufs $Y = f(X, W)$ dar.

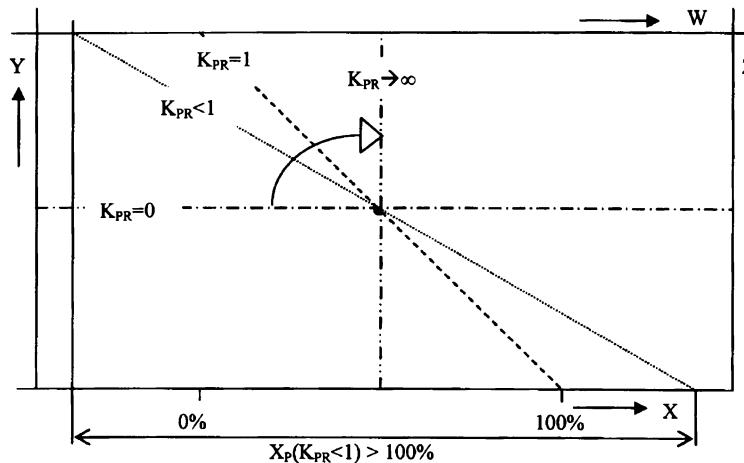


Abb. 3.7 Variation des Proportionalwertes eines P-Reglers

Der Proportionalwert K_{PR} des Reglers entspricht der Steigung der Kennlinie:

$$K_{PR} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Y_H}{X_P} \quad \text{oder} \quad \frac{\text{Stellbereich}}{\text{Proportionalbereich}}$$

Er ergibt sich entweder aus dem Steigungsdreieck an einer beliebigen Stelle der linearen Kennlinie oder aus den Kennwerten Stellbereich und Proportionalbereich. Der Stellbereich Y_H des Reglers wird meist angegeben mit 100 %, hier jedoch zu 20 mm.

Der Proportionalbereich X_P ist ein vor allem bei Kompaktreglern verwendeter Reglerparameter. Er ist der Bereich, um den die Regelgröße X (bei konstantem Sollwert W) geändert werden muss, damit sich die Stellgröße über den gesamten Stellbereich $Y_H = 100\%$ ändert. Der Proportionalbereich definiert die maximale bleibende Regelabweichung, die vom System auftreten kann.

Dieser Wert wird oft als kennzeichnender Parameter für den Regler verwendet, stellvertretend für den Proportionalbeiwert K_{PR} .

$$X_P = Y_H \cdot \frac{1}{K_{PR}} = \frac{100\%}{K_{PR}}$$

Ein Proportionalbereich $X_P > 100\%$ tritt immer dann auf, wenn der Proportionalwert $K_{PR} < 1$ ist.

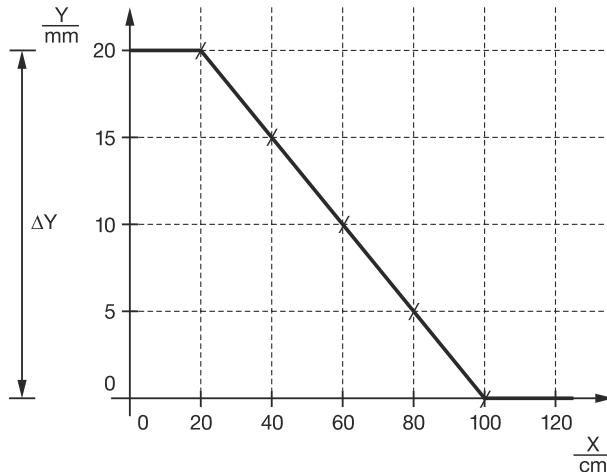
Beim Einbau der Stelleinrichtung auf der Zuführungsseite der Regelstrecke ergibt sich eine fallende Kennlinie.

Der Wertebereich des Proportionalwertes bei fallender Kennlinie ist in Abb. 3.7 dargestellt: $0 < K_{PR} < \infty$, d. h. durch Drehung der Kennlinie im Arbeitspunkt lässt sich jeder Proportionalwert von 0 bis $+\infty$ erzeugen. Eine waagerechte Kennlinie ($K_{PR} = 0$)

Tab. 3.1 Messwerttabelle des Wasserstandsreglers

| | | | | | | |
|---|----|-----|----|----|----|----|
| X | cm | 100 | 80 | 60 | 40 | 20 |
| Y | mm | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 |

Abb. 3.8 Gemessene Kennlinie der Wasserstandsregelung



bedeutet, dass bei jeder Regeldifferenz e die Stellgröße unverändert auf dem Wert Y_0 stehen bleibt, d.h. der Regler ist ausgeschaltet (Abb. 3.7). Eine senkrechte Kennlinie ($K_{PR} \rightarrow \infty$) ist für $X = W$ im Gleichgewicht. Dies ist zugleich das Verhalten eines I-Reglers.

Beispiel 3.1 (Kennlinien des Wasserstandsreglers nach Abb. 3.4)

Das Stellventil hat einen Stellbereich $Y_H = 20$ mm und bei voller Öffnung einen Volumenstrom $\dot{V}_{zu} = 0,5$ l/s. Die nutzbare Behälterhöhe des Wasserspeichers beträgt $X_{max} = 120$ cm.

Es wurden bei konstantem Hebelverhältnis die in Tab. 3.1 aufgeführten Gleichgewichtszustände gemessen.

- a) Zeichnen Sie die Kennlinie $Y = f(X)$

Ergebnis: lineare fallende Kennlinie (Abb. 3.8)

- b) Ermitteln Sie die Reglerkennwerte K_{PR} , X_P und das Hebelverhältnis a/b .

$$K_{PR} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{20 \text{ mm}}{80 \text{ cm}} = 0,25 \frac{\text{mm}}{\text{cm}}$$

$$X_P = Y_H \cdot \frac{1}{K_{PR}} = \frac{20 \text{ mm} \cdot \text{cm}}{0,25 \text{ mm}} = 80 \text{ cm}$$

$$K_{PR} = \frac{a}{b} = 0,25 \frac{\text{mm}}{\text{cm}} \quad \rightarrow \quad a = 0,025 \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \cdot b$$

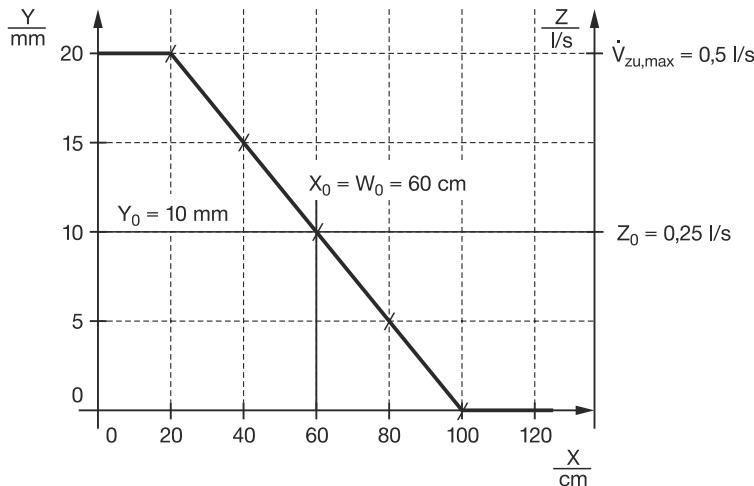


Abb. 3.9 Der Arbeitspunkt des Wasserstandsreglers

c) Welcher Volumenstrom ergibt sich im Arbeitspunkt für den Sollwert $W_0 = 60 \text{ cm}$?

Annahme: Stellventil mit linearer Kennlinie

Berechnung der Abweichung vom Arbeitspunkt:

$$\begin{aligned} X_0 = W_0 = 60 \text{ cm} &\rightarrow \Delta x = X_{100} - X_0 = 100 \text{ cm} - 60 \text{ cm} = 40 \text{ cm} \\ &\rightarrow \Delta y = K_{PV} \cdot \Delta x = 0,25 \text{ mm/cm} \cdot 40 \text{ cm} = 10 \text{ mm} = Y_0 \end{aligned}$$

Umrechnung der Stellgröße in die Störgröße:

$$\begin{aligned} K_{PV} &= \frac{Z_{\max}}{Y_H} = \frac{0,5 \text{ l/s}}{20 \text{ mm}} = 0,025 \frac{\text{l/s}}{\text{mm}} \\ Z_0 &= Y_0 \cdot K_{PV} = 10 \text{ mm} \cdot 0,025 \text{ l/(s mm)} = 0,25 \text{ l/s} \end{aligned}$$

Erläuterung: $Y_0 = 10 \text{ mm}$ entspricht 50 % von Y_H ; $Z_0 = 0,25 \text{ l/s}$ entspricht 50 % von $\dot{V}_{zu} = 0,5 \text{ l/s}$

In der einheitenfreien Darstellung gilt für den Arbeitspunkt $Y_0 = Z_0$ (Abb. 3.9)

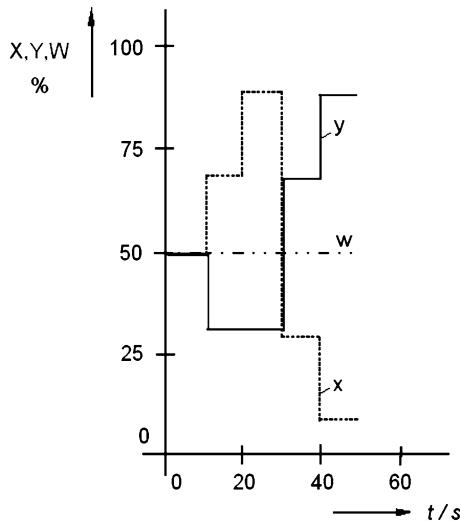
d) Welche Stellgröße des Wasserstandsreglers stellt sich bei unveränderten Hebelverhältnissen ein, wenn der Abfluss auf $Z_1 = 0,11 \text{ l/s}$ sinkt?

Der Nullpunkt der Störkennlinie liegt bei $Z = 0,01 \text{ l/s}$. Dazu muss im Beharrungszustand das Ventil geschlossen sein, d.h. $Y = 0 \text{ mm}$. Da die Kennlinie bei $X = 100 \text{ cm}$ durch den Nullpunkt geht, kann hier mit absoluten Werten gerechnet werden.

$$Y = \frac{Z}{K_{PV}} = \frac{0,11 \text{ l/s} \cdot \text{mm}}{0,025 \text{ l/s}} = 4 \text{ mm}$$

(entspricht dem abgelesenen Wert aus Abb. 3.9)

Abb. 3.10 Messschrieb eines P-Reglers (Einstellwert $K_{PR} = 1$)



Alternativ: Rechnung mit relativen Werten bezogen auf den Arbeitspunkt

$$\Delta z = Z_1 - Z_0 = (0,1 - 0,25) \text{ l/s} = -0,15 \text{ l/s}$$

$$\Delta y = \frac{\Delta z}{K_{PV}} = \frac{-0,15 \text{ l/s} \cdot \text{mm}}{0,025 \text{ l/s}} = -6 \text{ mm}$$

$$\rightarrow Y = Y_0 + \Delta y = 10 \text{ mm} - 6 \text{ mm} = 4 \text{ mm}$$

e) Wie groß ist die bleibende Regeldifferenz e ?

fallende Kennlinie:

$$\Delta x = \frac{\Delta y}{K_{PR}} = -\frac{-6 \text{ mm} \cdot \text{cm}}{0,25 \text{ mm}} = -24 \text{ cm}$$

$$X = X_0 - \Delta x = 60 \text{ cm} + 24 \text{ cm} = 84 \text{ cm}$$

$$e = W_0 - X = 60 \text{ cm} - 84 \text{ cm} = -24 \text{ cm}$$

Aufgabe 3.1 (Ermittlung der Kennlinien eines Einheits-Reglers)

Die Genauigkeit der Skale des Proportionalwertes eines Einheitsreglers mit $Y_H = 100\%$ soll untersucht werden. Am Eingang des Reglers werden X und W für den Arbeitspunkt auf je 50% eingestellt. Der Offsetwert Y_0 wird direkt am Regler auf 50% eingestellt: 0 bis 10 V entsprechen 0 bis 100 %

An einem Linienschreiber werden X , W und Y aufgeschrieben. Nach Einstellung eines K_{PR} -Wertes im Arbeitspunkt wird die Eingangsgröße X sprunghaft verändert.

Daraus ergibt sich beispielhaft der Schrieb in Abb. 3.10.

- a) Ermitteln Sie die Kennlinie des P-Reglers
 b) Es werden weitere Messwerttabellen für unterschiedliche Proportionalwerte aufgenommen. Zeichnen Sie die Kennlinien $y = f(W, X)$
 Messwerttabelle eines P-Reglers

| K_{PR} | X (%) | W (%) | Y (%) | K_{PR} | X (%) | W (%) | Y (%) |
|----------|-------|-------|-------|----------|-------|-------|-------|
| 3 | 50 | 50 | 50 | 0,4 | 50 | 50 | 50 |
| 3 | 55 | 50 | 35 | 0,4 | 70 | 50 | 42 |
| 3 | 65 | 50 | 5 | 0,4 | 100 | 50 | 30 |
| 3 | 40 | 50 | 80 | 0,4 | 20 | 50 | 62 |
| 3 | 35 | 50 | 95 | 0,4 | 0 | 50 | 70 |

- c) Es werden Messwerttabellen für einen konstanten Wert $K_{PR} = 2$ für unterschiedliche Sollwerte W aufgenommen.
 Messwerttabelle eines P-Reglers

| K_{PR} | X (%) | W (%) | Y (%) | K_{PR} | X (%) | W (%) | Y (%) |
|----------|-------|-------|-------|----------|-------|-------|-------|
| 2 | 50 | 50 | 50 | 2 | 90 | 70 | 10 |
| 2 | 70 | 50 | 10 | 2 | 50 | 30 | 12 |
| 2 | 30 | 50 | 90 | 2 | 30 | 30 | 50 |
| 2 | 50 | 70 | 90 | 2 | 10 | 30 | 90 |
| 2 | 70 | 70 | 50 | - | - | - | - |



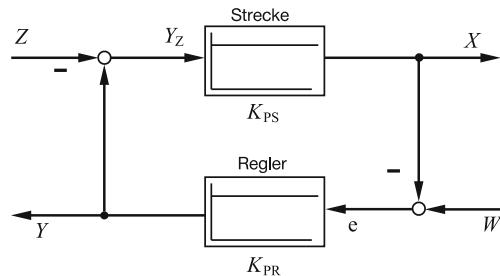
Aufgabe 3.2 (Einfluss der Störgröße auf den Betriebspunkt eines P-Reglers)

Gegeben ist ein Einheitsregler mit dem Proportionalwert $K_{PR} = 0,5$.

- a) Zeichnen Sie die Reglerkennlinie $Y = f(X)$ im Arbeitspunkt $Y_0 = 40\%$ und $X_0 = 60\%$. Tragen Sie an die Reglerkennlinie den Proportionalwert X_P an.
 b) Zeichnen Sie in das Diagramm eine lineare Streckenkennlinie mit $K_{PS} = 2$ durch den Arbeitspunkt $X_0 = W_0$ und $Y_0 = Z_0$ gemäß dem Wirkungsplan des Regelkreises nach Abb. 3.11.
 c) Zeichnen Sie die Streckenkennlinien für je einen Störung $\pm 10\%$.
 d) Zeichnen Sie die Reglerkennlinie für je eine Sollwertänderung $\pm 10\%$.



Abb. 3.11 Wirkungsplan des einmaschigen Regelkreises



3.4 PI-Regler

3.4.1 Grundlagen

Der in der Praxis am häufigsten eingesetzte Regler ist der PI-Regler. Er vereinigt die Vorteile des P-Reglers, direkte Reaktion auf Abweichungen und des I-Teils, Vermeidung einer bleibenden Regeldifferenz. Außerdem ist der PI-Regler relativ einfach einzustellen, d. h. an unterschiedliche Regelstrecken anzupassen.

Die unerwünschte bleibende Regeldifferenz des P-Reglers führt von dem starren Zusammenhang zwischen Regelabweichung und Stellgröße her. Dies kann vermieden werden, indem nicht die Stellgröße, sondern die Stellgrößengeschwindigkeit von der Regeldifferenz abhängig gemacht wird. Ein solcher Regler ist nur in Beharrung, d. h. dy/dt wird zu Null, wenn keine bleibende Regeldifferenz mehr vorhanden ist.

I-Regler haben den Nachteil der größeren Schwingungsneigung beim Regelvorgang, da das I-Glied eine zusätzliche Verzögerung in den Regelkreis bringt. Deshalb wird der I-Regler nur für untergeordnete Regelkreise (Folgeregler) verwendet oder wenn der Regelkreis nur zur langsamen Korrektur von Regelgrößen dient. Vorwiegend werden hydraulische und elektromechanische Reglerbausteine verwendet, die von sich aus bereits I-Verhalten haben.

Im Gegensatz zum P-Regler, bei dem die Stellgröße Y_0 im Arbeitspunkt ($X = W$) immer einen festen Wert annimmt, kann die Stellgröße beim I-Regler bei Regelabweichung Null jeden beliebigen Betrag haben, der von der Vorgeschiede abhängt. Aus der Gleichung des I-Gliedes

$$\dot{y}_I = \frac{dy_I}{dt} = K_{IR} \cdot e = K_{IR} \cdot (W - X) \quad \text{bzw.}$$

$$\Delta y_I = K_{IR} \cdot \int_0^t e dt \quad \text{und} \quad Y_I = Y_{I0} + \Delta y_I$$

sieht man, dass die Stellgröße abhängig ist von der Fläche zwischen Sollwert W minus Regelgröße X und der Zeit abhängt (Abb. 3.12).

Abb. 3.12 Führungssprungantwort einer Regelstrecke mit I-Regler

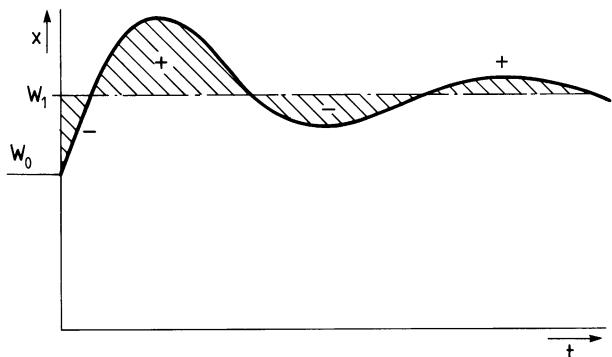
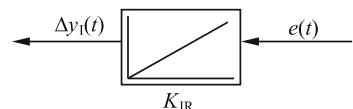


Abb. 3.13 Blocksymbol eines I-Reglers



3.4.2 I-Teil des Reglers

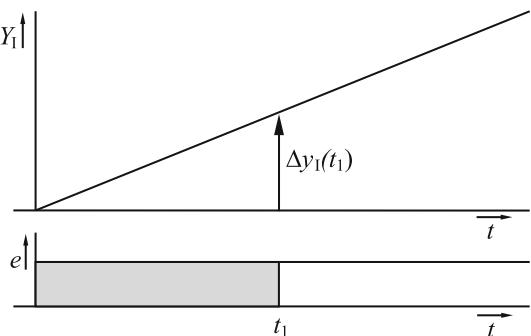
Beim integrierenden Reglerteil (Abb. 3.13) ändert sich die Reglerausgangsgröße = Stellgröße so lang, bis die Regeldifferenz e zu Null wird.

Das Zeitverhalten der Stellgröße lässt sich am besten durch eine Sprungantwort darstellen. Der I-Regler zeigt als Sprungantwort eine linear von der Zeit t abhängige Ausgangsgröße, wie sie in Abb. 3.14 aufgetragen ist.

Für einen Sprung der Regeldifferenz $e = \text{konst.}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt:

$$\Delta y_I = K_{IR} \int_0^t e dt = K_{IR} \cdot e \cdot t$$

Abb. 3.14 Sprungantwort eines idealen I-Reglers



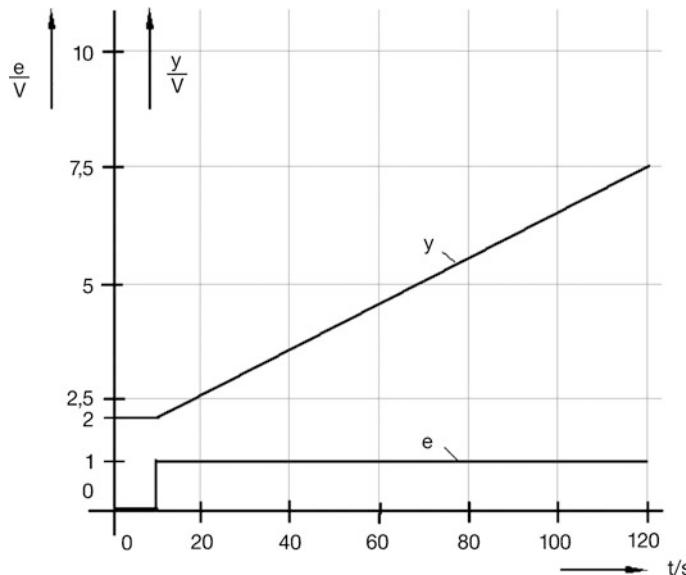


Abb. 3.15 Gemessene Sprungantwort eines I-Reglers

Die Regelparameter des I-Reglers, der das dynamische Verhalten beschreibt, ist der Integratorbeiwert des Reglers K_{IR} .

$$K_{IR} = \frac{\dot{y}}{e} = \frac{dy/dt}{e}$$

Je größer K_{IR} , desto schneller greift der I-Regler ein, aber desto größer wird auch die Schwingungsneigung (kleinere Dämpfung).

Beispiel 3.2 (Kennwerte des I-Reglers)

Gegeben ist die Sprungantwort eines I-Reglers (Abb. 3.15).

a) Ermitteln Sie den eingestellten Integratorbeiwert K_{IR} .

$$K_{IR} = \frac{\Delta y / \Delta t}{\Delta e} = \frac{5,5 \text{ V} / 110 \text{ s}}{1 \text{ V}} = 0,05 \frac{1}{\text{s}}$$

b) Ermitteln Sie den Stellgrößenverlauf für folgenden Verlauf der Regeldifferenz (Abb. 3.16 und 3.17)

Startwert der Ausgangsstellgröße $Y_{I0} = 5\%$; Integratorbeiwert aus Teil a

$$Y_I(50 \text{ s}) = Y_{I0} + \Delta y_I = Y_{I0} + K_{IR} \cdot \Delta e \cdot \Delta t = 5\% + 0,05 \frac{1}{\text{s}} \cdot 20\% \cdot 50 \text{ s} = 55\%$$

$$Y_I(70 \text{ s}) = Y_I(50 \text{ s}) = 55\%$$

$$Y_I(120 \text{ s}) = Y_I(70 \text{ s}) + 0,05 \frac{1}{\text{s}} \cdot (-10\%) \cdot 50 \text{ s} = 55\% - 25\% = 30\%$$

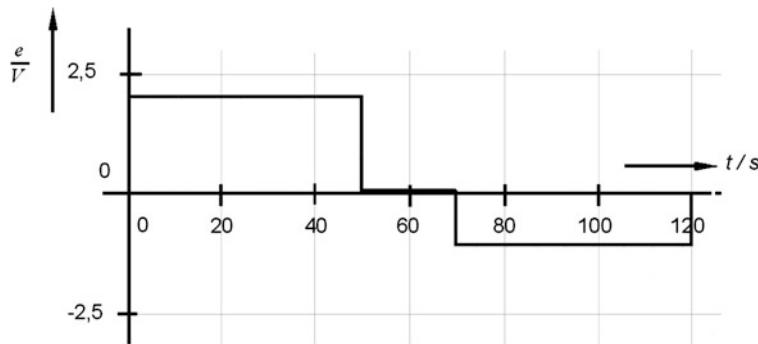


Abb. 3.16 Zeitverlauf der Regelabweichung als Eingangsgröße eines I-Reglers; Einheitsregler: 0 bis 10 V entsprechend 0 bis 100 %

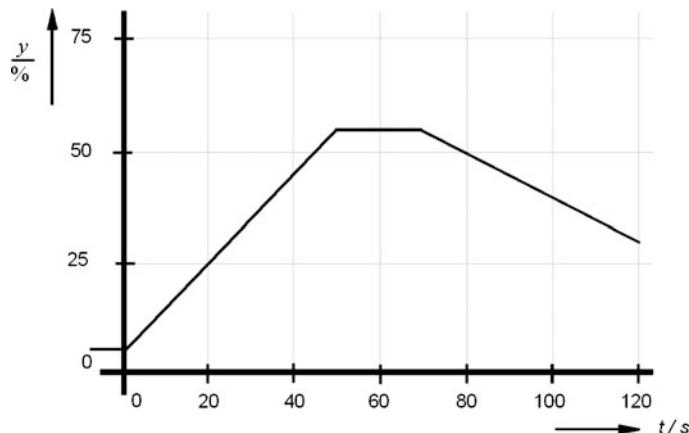


Abb. 3.17 Stellgrößenverlauf eines I-Reglers

c) Ermitteln Sie die Integratorzeit T_I (Abb. 3.18).

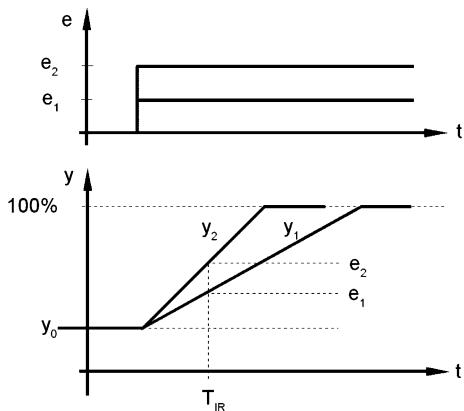
Beim reinen I-Einheitsregler gilt:

$$T_{IR} = \frac{1}{K_{IR}} = \frac{1}{0,05 \text{ l/s}} = 20 \text{ s}$$

3.4.3 Nachstellzeit T_i

An I-Reglern wird oft anstelle des K_{IR} -Wertes die Nachstellzeit T_i eingestellt, da sie leichter handhabbar ist.

Abb. 3.18 Die Integrationszeit bei unterschiedlichen Sprüngen der Regeldifferenz Δe



► Die **Nachstellzeit** ist für ein Proportionalglied plus Integrierglied, dessen Eingangsgröße sprungartig verändert wird, die Dauer der Zeitspanne, die erforderlich ist, damit die Ausgangsgröße das Doppelte der Änderung erreicht, die sie unmittelbar nach dem Anlegen hatte.

Aus Abb. 3.19 ergibt sich:

$$K_{IR} = \frac{\dot{y}_{PI}}{e} = \frac{\Delta y_P}{\Delta t} \cdot \frac{1}{e}$$

oder bei $\Delta t = T_i$ folgt

$$T_i = \frac{\Delta y_{PI}}{K_{IR} \cdot e} = \frac{K_{PR} \cdot e}{K_{IR} \cdot e} = \frac{K_{PR}}{K_{IR}} \quad \Rightarrow \quad K_{IR} = \frac{K_{PR}}{T_i}$$

Je größer der K_{IR} -Wert des Reglers oder je kleiner die Nachstellzeit T_i eingestellt wird, desto schneller reagiert der I-Teil des Reglers auf Änderungen der Regeldifferenz e .

Abb. 3.19 Sprungantwort eines PI-Reglers

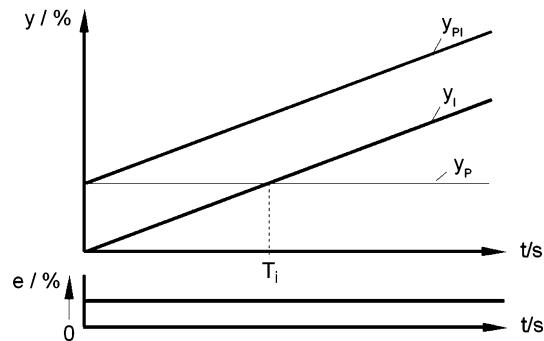


Abb. 3.20 Stellgrößenverlauf eines PI-Reglers im Kennliniendiagramm

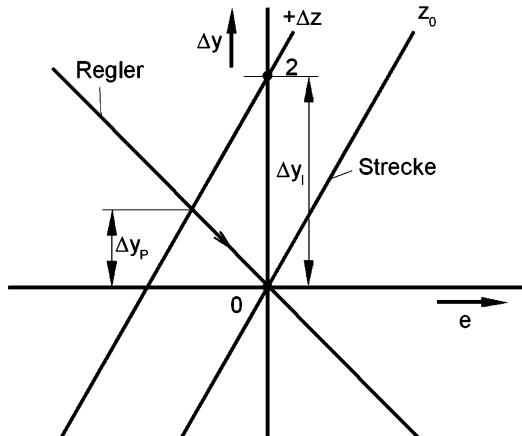
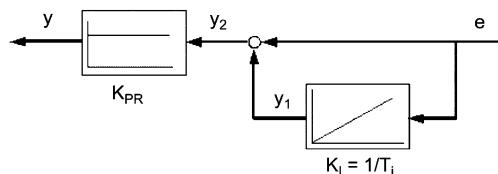


Abb. 3.21 PI-Regler mit nachgeschaltetem P-Teil



In Beharrung befindet sich der PI-Regler nur, wenn $e = 0$ ist, d. h. wenn ΔY_P wieder den Wert Null erreicht hat. Dazu muss der I-Anteil durch Integration den gesamten Stellgrößenanteil übernehmen. Diesen Vorgang kann man in dem Kennlinien-Diagramm des Reglers verfolgen:

Zum Zeitpunkt $t = 0$ tritt z. B. eine Störung Z_1 auf. Der P-Anteil des Reglers wird dann direkt reagieren und den Zustand 1 in Abb. 3.20 annehmen. Durch die Integration wandert der I-Anteil senkrecht nach oben in Richtung Zustand 2 und kompensiert dabei gleichzeitig den P-Anteil, der sich in Richtung auf Zustand 0 bewegt. Im Beharrungszustand hat der I-Anteil den Zustand 2, der P-Anteil den Zustand 0 angenommen.

Bei einem idealen PI-Regler muss die Nachstellzeit T_i unabhängig von Proportionalwert des P-Teils einstellbar sein. Dies erreicht man durch die Reglerstruktur in Abb. 3.21.

Daraus ergibt sich folgende Differentialgleichung:

$$y_1 = \frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e \, dt$$

$$y_2 = y_1 + e = \frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e \, dt + e$$

$$y = K_{PR} \cdot \left(\frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e \, dt + e \right) \Rightarrow \dot{y} = \frac{K_{PR}}{T_i} \cdot e + K_{PR} \cdot \dot{e}$$

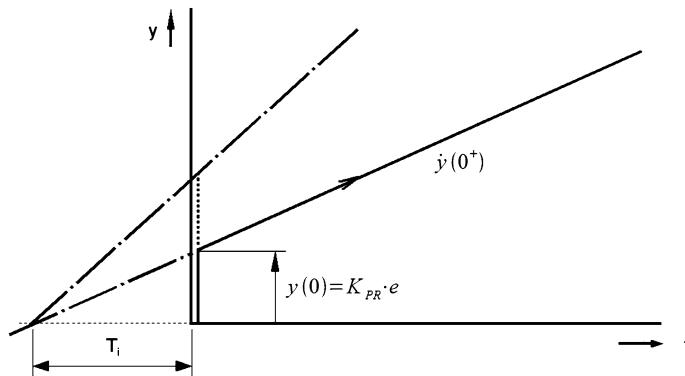
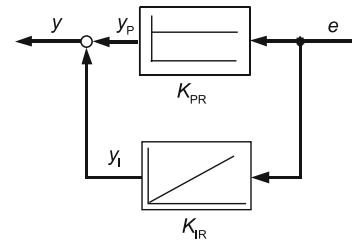


Abb. 3.22 Anfangsverhalten der Sprungantwort eines PI-Reglers

Abb. 3.23 PI-Regler in Parallelschaltung



Anfangsverhalten: $t \rightarrow 0$

$$y(0) = K_{PR} \cdot e$$

$$\dot{e}(0^+) = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{y}(0^+) = \frac{1}{T_i} \cdot y(0)$$

In Abb. 3.22 erkennt man, dass die Nachstellzeit einfach durch die rückwärtige Verlängerung der Sprungantwort abzulesen ist. Dabei bleibt dieser Zeitabschnitt T_i unabhängig von der Eingangssprunghöhe e oder vom Proportionalwert K_{PR} des Reglers.

3.4.4 PI-Regler in Parallelschaltung

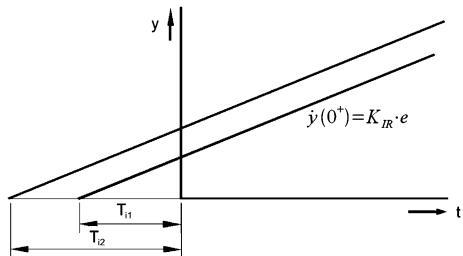
Insbesondere bei digitalen Reglern wird als Regelparameter der Integrierbeiwert K_{IR} gegenüber der Nachstellzeit T_i bevorzugt (s. Abb. 3.23).

$$y_I = K_{IR} \cdot \int_0^t e dt \quad y_P = K_{PR} \cdot e \rightarrow y = y_P + y_I = K_{PR} \cdot e + K_{IR} \int_0^t e dt$$

Anfangsverhalten: $y(0) = K_{PR} \cdot e$ (wie in Struktur nach Abschn. 3.4.3)

$$\dot{y}(0^+) = K_{IR} \cdot e$$

Abb. 3.24 Sprungantwort des PI-Reglers in Parallelschaltung



In Abb. 3.24 ist die Anstiegsgeschwindigkeit $\dot{y}(0^+)$ konstant. Bei einem geänderten K_{PR} -Wert verändert sich der Verlauf der Anstiegslinie durch Parallelverschiebung.

Beispiel 3.3 (Kennwerte des PI-Reglers)

Die Kennwerte eines PI-Einheitsreglers sollen ermittelt werden. Als Struktur wird die Darstellung von Abb. 3.21 gewählt.

Nach einer sprunghaften Änderung der Regeldifferenz e ergab sich der Schrieb in Abb. 3.25.

- a) Lesen Sie aus dem Schrieb die geeigneten Stellgrößenanteile und Zeitanteile ab und berechnen Sie daraus die Reglerparameter.

$$K_{PR} = \frac{\Delta y_P}{e} = \frac{5\%}{10\%} = 0,5 \quad K_{IR} = \frac{\Delta y_I}{\Delta t} \cdot \frac{1}{e} = \frac{10\%}{20\text{ s} \cdot 10\%} = 0,05 \frac{1}{\text{s}}$$

$$T_i = \frac{K_{PR}}{K_{IR}} = \frac{0,5}{0,05 \cdot 1/\text{s}} = 10 \text{ s}$$

$$y_I = K_{IR} \cdot \int_0^t e dt = K_{IR} \cdot e \cdot \Delta t = 0,05 \frac{1}{\text{s}} \cdot 10\% \cdot 60 \text{ s} = 30\%$$

Abb. 3.25 Messschrieb für einen PI-Regler

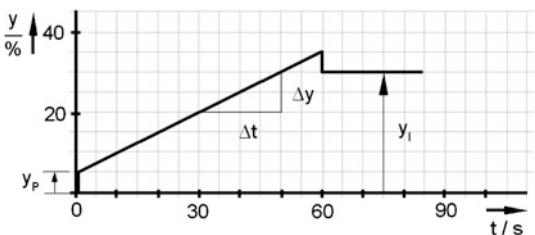
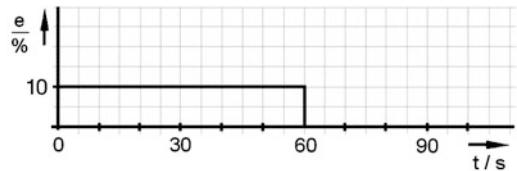


Abb. 3.26 Ausgewerteter Messschrieb

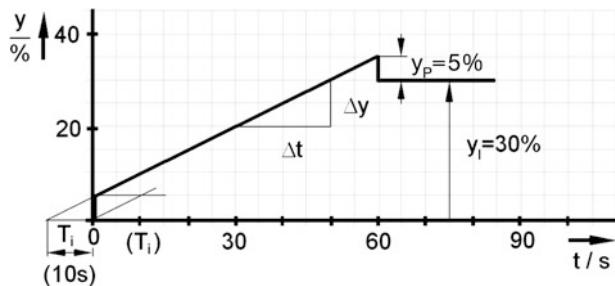
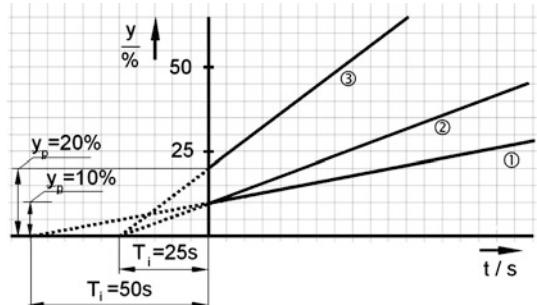


Abb. 3.27 Sprungantwort des PI-Reglers für verschiedene Reglereinstellungen



b) Vergleichen Sie die berechneten Werte mit abgelesenen Werten (Abb. 3.26)

Ergebnis: $T_i = 10 \text{ s}$; $y_p = 5 \%$; $y_I = 30 \%$

c) Vergleichen Sie die Sprungantworten (Abb. 3.27) des PI-Reglers bei $e = 10 \%$ für folgende Einstellungen:

| | | | |
|----------|------|------|------|
| K_{PR} | 1,0 | 1,0 | 2,0 |
| T_i | 50 s | 25 s | 25 s |
| Nr. | 1 | 2 | 3 |

Man erkennt deutlich, dass die Nachstellzeit T_i unabhängig vom Proportionalwert K_{PR} ist.

3.5 PD-Regler

3.5.1 Der Verschwindeimpuls

In manchen Fällen kann es erwünscht sein, dass der Regler zuerst sehr stark eingreift, dann aber das Verhalten eines P-Reglers zeigt. Diesen Reglertypen nennt man PD-Regler.

Der D-Teil des Reglers reagiert proportional zur Geschwindigkeit der Regeldifferenz e .

Abb. 3.28 Sprungantwort eines reinen D-Teils

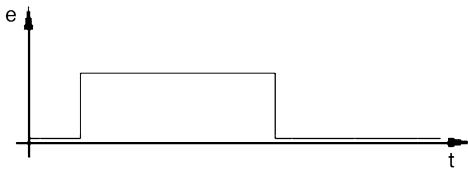
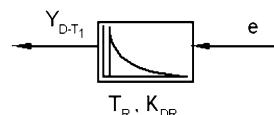


Abb. 3.29 D-T₁-Glied einer Regeleinrichtung



Ein schneller Anstieg der Regelgröße – beispielsweise in der physikalischen Form einer Wassersäule – führt zu einer schnellen Reaktion des Reglers.

Problematisch wird das D-Verhalten bei einem Eingangssprung, da der Sprung theoretisch eine unendlich hohe Geschwindigkeit aufweist. Die Stellgröße reagiert auf den Eingangssprung ebenfalls mit einem Ausgangssprung, entsprechend der positiven Regelabweichung, die wiederum Folge eines Sollwertsprunges sein kann. Der Ausgangssprung kann dabei Werte bis zum oberen Anschlag, bei einem positiven Sollwertsprung und Werte bis zum unteren Anschlag der Regeleinrichtung bei einem negativen Sollwertsprung annehmen (Abb. 3.28).

Dieser unerwünschte Impuls lässt sich durch ein D-T₁-Verhalten, auch *Verschwindeimpuls* genannt, vermeiden (Abb. 3.29).

Verwendet wird der Verschwindeimpuls als Baustein eines Reglers mit P- und/oder I-Verhalten. Zur Vermeidung einer bleibenden Regeldifferenz kann der Verschwindeimpuls in Form einer Störgrößenaufschaltung auf den Reglereingang geschaltet werden.

Analyse der Sprungantwort:

$$\begin{aligned} T_R \cdot \dot{y} + y &= K_{DR} \cdot \dot{e} \rightarrow T_R \cdot y + \int y \, dt = K_{DR} \cdot e \\ t \rightarrow 0: y(0) &= \frac{K_{DR}}{T_R} \cdot e \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Sprungantwort zum} \\ \text{Zeitpunkt } t = 0 \end{array} \right\}$$

Weiterer Verlauf der Stellgröße nach dem Anfangssprung:

$$\dot{e}(0^+) = 0 \rightarrow T_R \cdot \dot{y}(0^+) + \frac{K_{DR}}{T_R} \cdot e = 0 \rightarrow \dot{y}(0^+) = -\frac{K_{DR}}{T_R^2} \cdot e$$

Beharrungswert der Stellgröße für $t \rightarrow \infty$: $y_B = 0$

Abb. 3.30 Sprungantwort eines D-T₁-Gliedes mit gleichem Sprung Δe

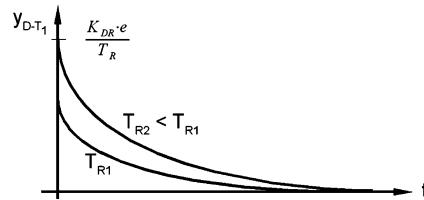
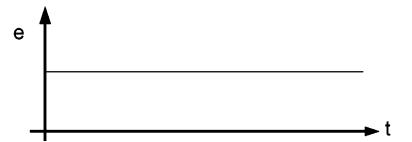
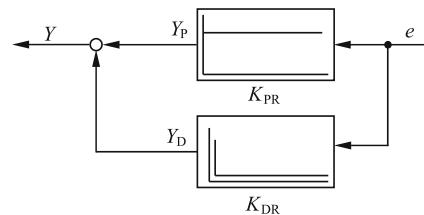


Abb. 3.31 Wirkungsplan des PD-Reglers



Je größer T_R , desto mehr wird der Anfangsimpuls gedämpft. Nach einem Zeitintervall, der dem vierfachen von T_R entspricht, ist der Vorgang abgeklungen.

3.5.2 Kennwerte des PD-Reglers

Zur Analyse eines reinen PD-Reglers (Abb. 3.31) verwendet man die Anstiegsantwort.

$$y = y_P + y_D = K_{PR} \cdot e + K_{DR} \cdot \dot{e}$$

Bei einem linearen Anstieg (konstante Geschwindigkeit) steigt der P-Teil proportional zu K_{PR} . Der D-Teil des Reglers zeigt für die konstante Eingangsgeschwindigkeit eine konstante Ausgangsgröße (Abb. 3.32).

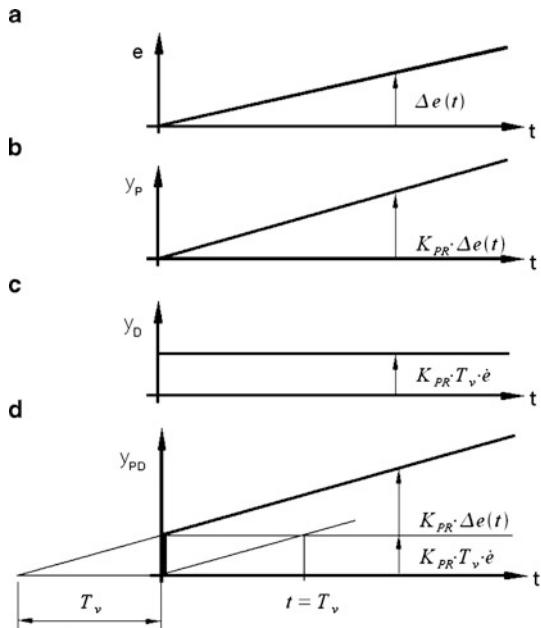
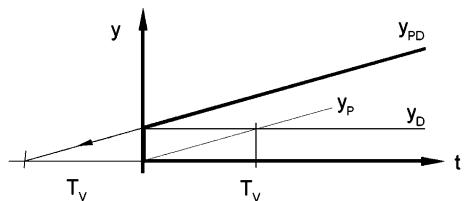
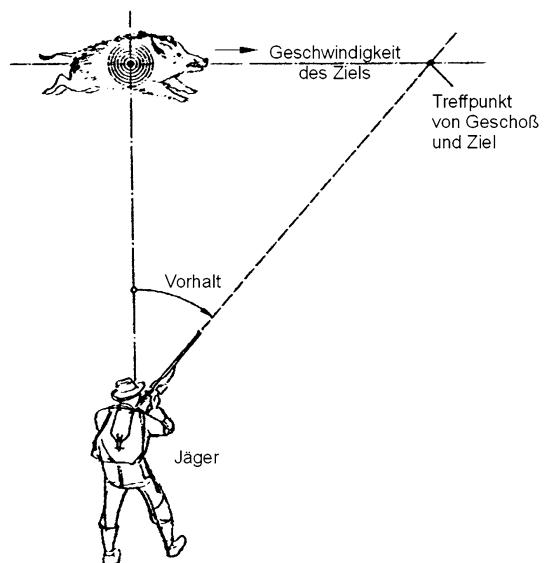
3.5.3 Vorhalt T_V

Der Vorhalt (s. Abb. 3.33), die Vorhaltzeit T_V , ist die Zeit, bei der der D-Teil des Reglers eine Stellgrößenänderung früher erzeugt als ein zugehöriger Einheits-P-Regler. Anders ausgedrückt: Die Antwortfunktion des D-Anteils auf einen Eingangssprung eilt der gleichen Antwort des P-Anteils um T_V -Zeiteinheiten voraus.

Anmerkung Nachstellzeit $T_i \rightarrow$ I-Teil verzögert, Vorhaltzeit $T_V \rightarrow$ D-Teil vorauseilend.

Abb. 3.32 Anstiegsantwort eines idealen PD-Reglers.

a $\dot{e} = 1\%/\text{s}$, **b** $\dot{y}_P = K_{PR} \cdot \dot{e}$,
c $y_D = K_{DR} \cdot \dot{e}$, **d** $y_{PD} = y_P + y_D$

**Abb. 3.33** Der Vorhalt des PD-Reglers**Abb. 3.34** Der Vorhalt bei der Jagd

Zum Verständnis des Vorhaltes verwendet man die Analogie zur Jagd (Abb. 3.34). Wenn ein Jäger auf flüchtendes Wild schießen will, muss er die Fluchtgeschwindigkeit schätzen und mit einem bestimmten Winkel vorhalten, damit das Geschoss genau ins Ziel trifft. Eine vom Jäger abgeschossene Kugel fliegt mit der Geschwindigkeit von 200 m/s. Sie benötigt für den Flug zu einem Ziel in 200 m Entfernung also 1 Sekunde. Der Keiler als Zielobjekt bewegt sich mit der Geschwindigkeit von 10 m/s, er hat nach 1 s dann 10 m zurückgelegt. Eine direkt auf den Keiler abgefeuerte Kugel verfehlt das Ziel also um 10 m. Der Jäger muss also um 10 m vorhalten.

Aufgabe 3.3 (Kennwerte des PD-Reglers)

Gegeben ist ein Messschrieb der Sprungantwort eines PD-T₁-Reglers in Parallelschaltung (s. Abb. 3.35).

- Ermitteln Sie aus dem Messschrieb die Vorhaltzeit T_V.
- Zeichen Sie die Anstiegsantwort dieses Reglers für $\dot{e} = 1\%/\text{s}$.

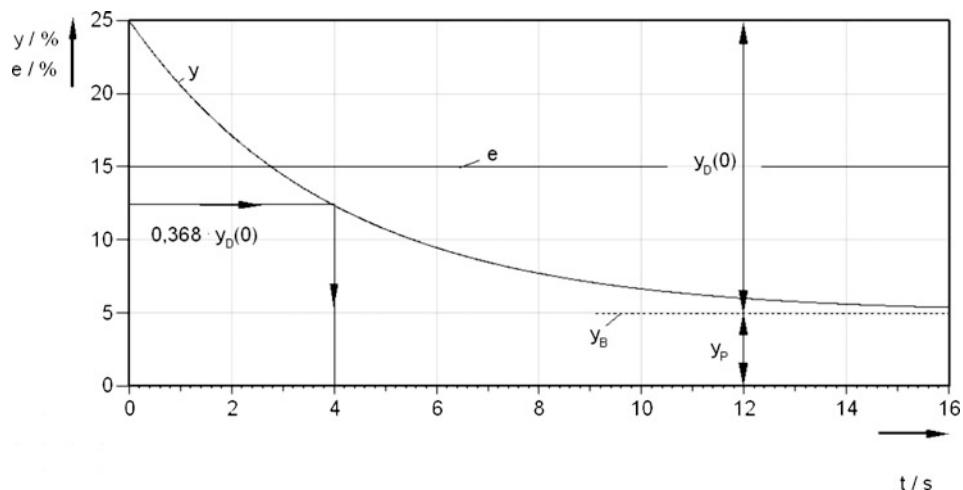


Abb. 3.35 Messschrieb eines PD-T₁-Reglers

3.6 PID-Regler

Der PID-Regler (Abb. 3.36 und 3.37) vereinigt alle Formen der Reaktion von der

- einfühlsamen (verzögerten) Differentiation mit Trenderkennung
- über die direkte Multiplikation in Abhängigkeit zur Abweichung
- bis zur nachhaltigen Integration (= inverse Funktion zur Differentiation)

$$y_1 = y_D + y_I = T_V \cdot \dot{e} + e + \frac{1}{T_i} \cdot \int e dt$$

$$\rightarrow T_V \cdot \dot{y} + y = K_{PR} \left[T_V \cdot e + e + \frac{1}{T_i} \cdot \int e dt \right]$$

Bei dieser Schaltung lassen sich D-Teil über T_V und I-Teil über T_i separat einstellen. Eine Übersicht über Regelkennwerte liefert Tab. 3.2.

Abb. 3.36 Wirkungsplan eines PID-T₁-Reglers

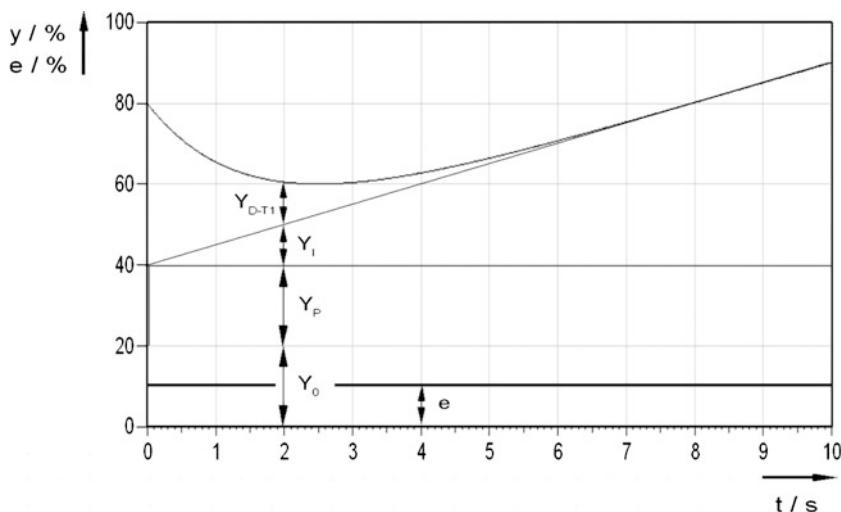
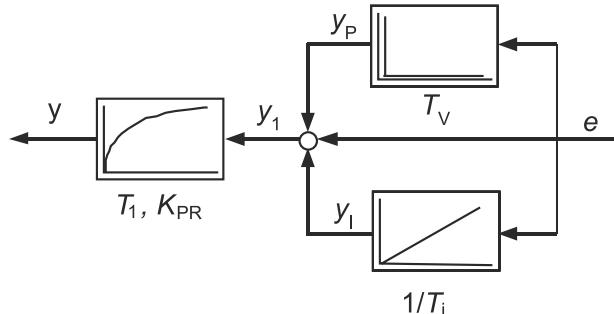


Abb. 3.37 Sprungantwort eines PID-T₁-Reglers

Tab. 3.2 Zusammenstellung der Reglerkennwerte

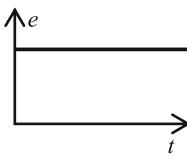
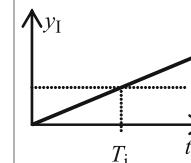
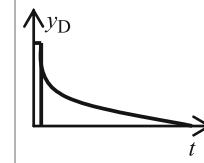
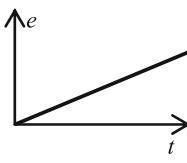
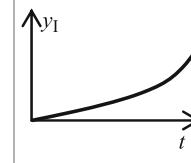
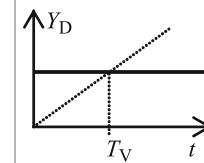
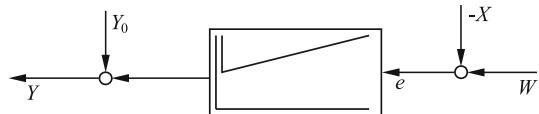
| Typ | I | P | D |
|-----------------|---|---|--|
| Funktion | Gedächtnis | Kraft | Gefühl |
| Math. Gleichung | $\dot{y}_I = K_{IR} \cdot e$ $y_I = K_{IR} \cdot \int e dt$ | $y_P = K_{PR} \cdot e$ | $T_1 \cdot \dot{y}_D + y_D = K_{DR} \cdot \dot{e}$ |
| Kennwert | $K_{IR} = \frac{K_{PR}}{T_i}$ | $K_{PR} = \frac{Y_H}{X_p} = \frac{y_P}{e}$ | $K_{DR} = K_{PR} \cdot T_V$ |
| Sprungantwort | | | |
| |  |  |  |
| Anstiegsantwort | | | |
| |  |  |  |

Abb. 3.38 Alternative Schaltungsvariante des PID-Reglers

Anmerkung Neben der abgebildeten Schaltung in Abb. 3.36 gibt es weitere Schaltungsvarianten des PID-Reglers (Abb. 3.38).

Stellungsalgorithmus: $Y = Y_0 + Y_P + Y_D$

Beispiel 3.4 (Kennwerte eines PID-Reglers)

An einem PID-T₁-Regler soll die Genauigkeit der Einstellwerte getestet werden. Dazu wurde folgende Sprungantwort aufgenommen (Abb. 3.39).

Regler-Einstellwerte:

Proportionalbereich $X_P = 200\%$ Nachstellzeit $T_i = 16\text{ s}$

Vorhaltzeit $T_V = 18\text{ s}$ Parasitäre Zeitkonstante $T_{VZ} = 4\text{ s} = T_1$

- a) Berechnen und vergleichen Sie den Proportionalwert K_{PR} mit dem eingestellten Wert.

Aus der Sprungantwort des Reglers Abb. 3.39 kann abgelesen werden:

$$e = 10\%; \quad y_P = 5\%$$

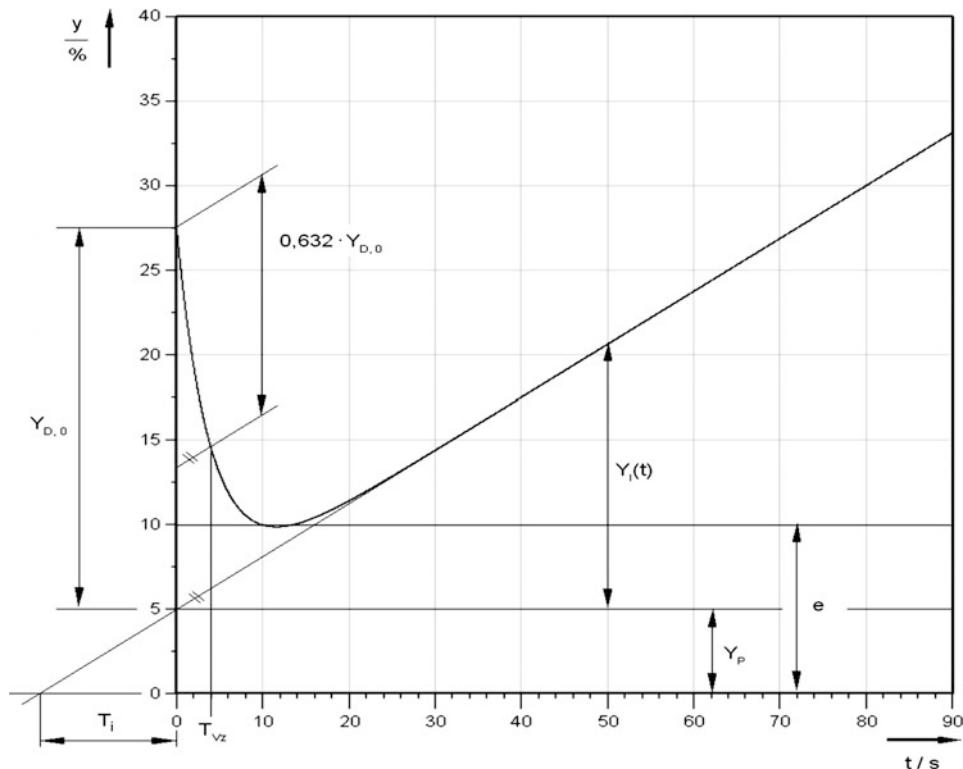


Abb. 3.39 Gemessene Sprungantwort eines PID- T_1 -Reglers

Daraus errechnet sich:

$$K_{PR} = \frac{y_P}{e} = \frac{5\%}{10\%} = 0,5$$

An der Reglerskala war eingestellt:

$$X_P = 200\%$$

Umgerechnet:

$$K_{PR} = \frac{Y_H}{X_P} = \frac{100\%}{200\%} = 0,5$$

- b) Vergleichen Sie den abgelesenen Integrierwert des Reglers mit dem eingestellten Wert

Aus dem Anstieg ergibt sich nach $t = 90$ s ein Wert $y(90)$ = 32,5 %

$$\Delta y_I = 32,5\% - 5\% = 27,5\%$$

Daraus errechnet sich:

$$K_{\text{IR}} = \frac{\Delta y_{\text{I}}}{\Delta t \cdot e} = \frac{27,5 \%}{90 \text{ s} \cdot 10 \%} = 0,031 \frac{1}{\text{s}}$$

An der Reglerskala war eingestellt: $T_i = 16 \text{ s}$

Am Schrieb Abb. 3.39 kann durch rückwärtige Verlängerung des Anstieges abgelesen werden: $T_i = 15 \text{ s}$

Umgerechnet ergibt sich:

$$K_{\text{IR}} = \frac{K_{\text{PR}}}{T_i} = \frac{0,5}{16 \text{ s}} = 0,031 \frac{1}{\text{s}} \quad \text{oder} \quad \frac{0,5}{15 \text{ s}} = 0,033 \frac{1}{\text{s}}$$

Kontrollrechnung:

abgelesen: $y(50 \text{ s}) = 22 \% ; e = 10 \%$

$$\begin{aligned} Y &= Y_0 + y_p + y_I = Y_0 + K_{\text{PR}} \cdot e + K_{\text{IR}} \cdot e \cdot \Delta t \\ Y &= 0 \% + 0,5 \cdot 10 \% + 0,032 \text{ s}^{-1} \cdot 10 \% \cdot 50 \text{ s} = 21 \% \end{aligned}$$

c) Ermitteln Sie aus der Sprungantwort des Reglers die parasitäre Zeitkonstante

Zeitkonstanten lassen sich aus Schrieben mit Hilfe des 63,2 %-Wertes ermitteln.

$$Y(T_1) = (1 - 0,632) \cdot y_D(0)$$

Für den Anfangssprung $y_D(0)$ wird abgelesen: $y_D(0) = 27,5 \% - 5 \% = 22,5 \%$

Daraus berechnet sich: $y_D(T_1) = 0,368 \cdot 22,5 \% = 8,3 \%$

Das D-T₁-Glied schmiegt sich im Beharrungszustand an den I-Anstieg des Reglers an. Deshalb wird der 63,2 %-Wert über eine Parallele zum I-Anstieg abgelesen. Aus dem Schnittpunkt mit dem Messschrieb Abb. 3.39 lässt sich ablesen: $T_{Vz} = 4 \text{ s}$

d) Ermitteln Sie den Differenzierbeiwert K_{DR} .

Für den Anfangssprung gilt:

$$y_D(0) = \frac{K_{\text{PR}} \cdot T_V}{T_1} \cdot e = \frac{K_{\text{DR}} \cdot e}{T_1} = 22,5 \%$$

Umgerechnet ergibt sich:

$$K_{\text{DR}} = \frac{y_D(0) \cdot T_1}{e} = \frac{22,5 \% \cdot 4 \text{ s}}{10 \%} = 9 \text{ s}$$

An der Reglerskala war eingestellt: $T_V = 18 \text{ s}$

Daraus errechnet sich

$$K_{\text{DR}} = K_{\text{PR}} \cdot T_{\text{V}} = 0,5 \cdot 18 \text{ s} = 9 \text{ s}$$

Kontrollrechnung für $y(4 \text{ s})$ und $e = 10 \%$:

$$\begin{aligned} Y &= Y_0 + y_{\text{P}} + y_{\text{I}} + y_{\text{D}} = Y_0 + K_{\text{PR}} \cdot e + K_{\text{IR}} \cdot \Delta t \cdot e + \frac{K_{\text{DR}} \cdot e}{\Delta t} \cdot \left(e^{-\frac{\tau}{T_{\text{I}}}} \right) \\ Y &= 0 \% + 0,5 \cdot 10 \% + 0,032 \frac{1}{\text{s}} \cdot 4 \text{ s} \cdot 10 \% + \frac{9 \text{ s} \cdot 10 \%}{4 \text{ s}} \cdot 0,368 = 14,6 \% \end{aligned}$$

Abgelesen: $Y = 14,5 \%$

3.7 Unstetige Regler

Unstetige Regler sind in ihrem Aufbau einfach und damit preiswert. Ursprünglich wurden sie für Aufgaben verwendet, bei denen keine hohen Anforderungen an die Regelgenauigkeit gestellt wurden. Mit zunehmender Digitalisierung hat sich gezeigt, dass unstetige Regler, insbesondere Regler mit abtastenden Zeitverhalten, in manchen Punkten dem kontinuierlichen Regler überlegen und preislich deutlich günstiger sind.

3.7.1 Arten von unstetigen Reglern

Die unstetige Arbeitsweise beruht auf der Verwendung von Schaltern, mit denen das gewünschte Stellverhalten erzeugt wird. Unter Schaltern sind mechanische, elektromechanische oder elektronische Bauelemente zu verstehen.

Abtastregler Abtastregler teilen die Stellgröße in m Stufen auf (Abb. 3.40). Die Anzahl m errechnet sich aus der Anzahl n der binären Ausgänge eines Digital-Analog-Umsetzers nach $m = 2^n$.

Diese Art der Regelung wird in Abschn. 4.6 beschrieben.

Schrittregler Alternativ sind pulsweitenmodulierte, amplitudenmodulierte Ausgaben oder Dreipunkt-Schrittausgaben als Frequenzsignal zur Ansteuerung von motorischen Stellgliedern möglich.

Wird beim Auftreten einer größeren Regeldifferenz e der Stellmotor eingeschaltet, dann wird gleichzeitig auch die Rückführung betätigt. Die Rückführung wird wegen eines Verzögerungsgliedes nur allmählich größer und täuscht, da sie e entgegengeschaltet ist, eine Verkleinerung vor, bis die Unempfindlichkeitszone erreicht wird und der Schalter y auf Null steht. Dadurch werden Stellmotor und Rückführung abgeschaltet.

Abb. 3.40 n -Bit Digital-Analog-Umsetzer

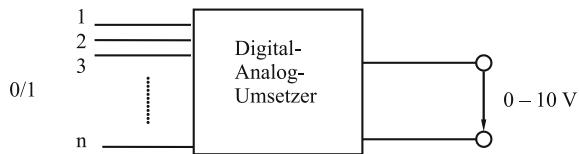
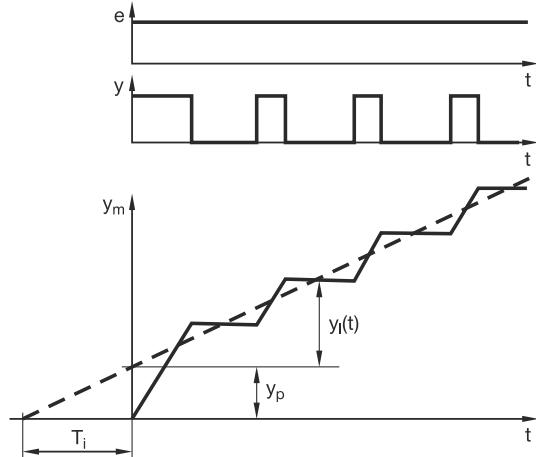


Abb. 3.41 Zeitverhalten eines Schrittreglers



Entsprechend der Entladefunktion der Strecke wird die verzögerte Rückführung kleiner, bis der Kippunkt des Dreipunktschalters wieder erreicht ist. Motor und Rückführung werden wieder eingeschaltet. Als Sprungantwort ergibt sich die Treppenkurve in Abb. 3.41, die der Sprungantwort eines PI-Reglers ähnlich ist.

Alternativ ist eine Stellimpulsfolge möglich, wie sie in Abb. 3.42 dargestellt ist. Die Messschaltung des Reglers verarbeitet den stetig gemessenen Istwert im Vergleich zum fest eingestellten Sollwert. Überschreitet die Regeldifferenz e eine bestimmte einstellbare Toleranz, dann spricht ein Ausgangsrelais für die richtige Stellrichtung an.

Damit das Relais nicht zu lange betätigt wird und dadurch der Stellantrieb zu weit gefahren wird, sorgt der Regler für die von e abhängige Stellimpulslänge.

Dreipunktregler Grundelement ist ein Dreipunktschalter, der in seiner Arbeitsweise einem positiven und einem negativen Schaltausgang entspricht (Abb. 3.43). Die kann z. B. bei einem Elektromotor zu folgenden Betriebsarten führen:

- 1 Linkslauf
- 0 Stillstand
- +1 Rechtlauf

Den Bereich zwischen den beiden Schaltpunkten bezeichnet man als Empfindlichkeit, Hysteresis oder tote Zone des Dreipunktschalters. Der Dreipunktschalter wird bevorzugt benutzt für die Überwachung von Größen, wie Temperatur, Druck, Drehzahl auf maximale und minimale Werte.

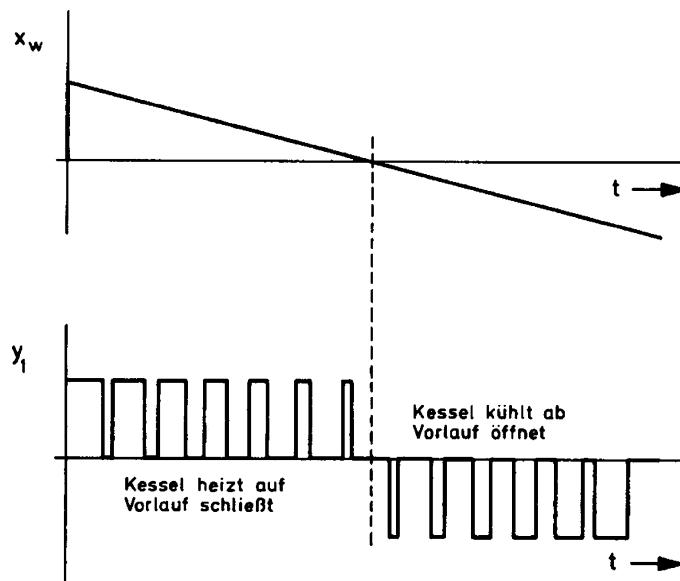
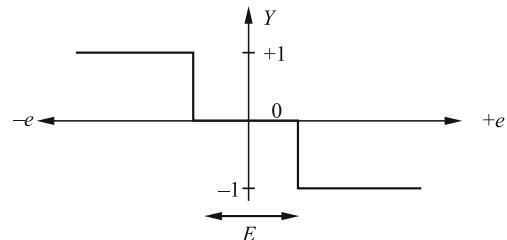


Abb. 3.42 Stellimpulsfolge eines Schrittreglers

Abb. 3.43 Kennlinie eines Dreipunktreglers



Zweipunktregler Ein Zweipunktregler ist ein unstetiger Regler, der nur folgende Schaltzustände kennt:

$$\text{EIN} = 1 \quad \text{und} \quad \text{AUS} = 0$$

Bei 1 wird die Stellgröße eines Stellgerätes z. B. auf den voreingestellten Wert $Y_H = 100\%$ gesetzt, bei 0 ist das Stellgerät geschlossen (Abb. 3.44).

Zur Erzeugung eines eindeutigen Schaltpunktes und zur Steuerung der Schalthäufigkeit wird symmetrisch um den Sollwert W eine Schaltdifferenz X_D gelegt, genannt Hysterese. Die Funktion des Zweipunktreglers lässt sich am besten am Bimetall-Temperaturregler erkennen, der in vielen Hausgeräten (Bügeleisen, Waschmaschine, ...) eingebaut ist (Abb. 3.45). Dieser Bimetallstreifen ist bei Raumtemperatur etwa eben, krümmt sich aber zunehmend mit steigender Temperatur. Diese Krümmung wird verursacht durch zwei aufeinander geschweißte Metalle unterschiedlicher Wärmedehnung.

Der Bimetallstreifen wirkt als Messwerk. Durch das Anbringen einer einstellbaren Kontaktschraube und eines Gegenkontaktes am Metallstreifen wird der Vergleicher rea-

Abb. 3.44 Kennlinie eines Zweipunktreglers

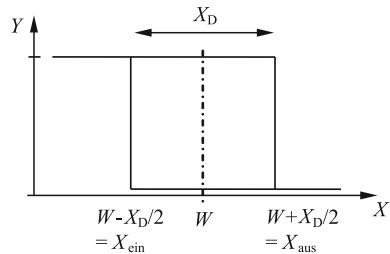
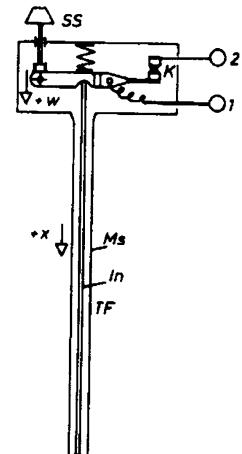


Abb. 3.45 Bimetall-Regler



lisiert. Der Kontakt bildet gleichzeitig das Stellglied. Bei zu hoher Temperatur wird der Kontakt geöffnet und die Stromversorgung unterbrochen. Durch innere mechanische Reibung oder äußere Federkräfte wird zwangsläufig ein Unterschied zwischen Ein- und Ausschaltwert bewirkt. Diese erwünschte Hysteresis verringert die Schalthäufigkeit.

Die Schaltdifferenz X_D ergibt sich aus der Differenz des Schaltpunktpaares

$$X_D = X_{\text{aus}} - X_{\text{ein}}$$

mit dem Sollwert

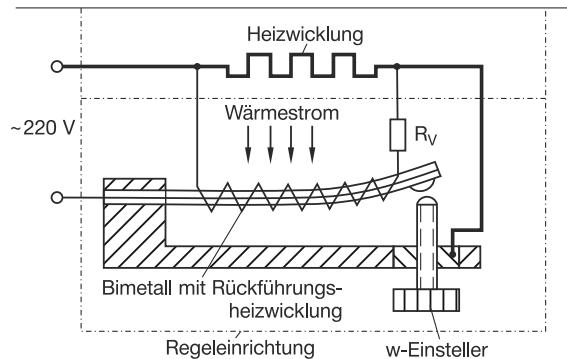
$$W = \frac{X_{\text{aus}} + X_{\text{ein}}}{2}.$$

Charakteristisch für alle Zweipunktregler ist, dass sich kein Beharrungswert im Sinne des stetigen Reglers ausbilden kann. Die Stellgröße pendelt ständig um einen Mittelwert und zwingt allen anderen Kreisgrößen diese Schwingung auf.

Zweipunktregler mit Rückführung Die Amplitude dieser Schwingung ist ein Maß für die Genauigkeit des Zweipunktreglers. Wünscht man einen engeren Schwankungsbereich, dann setzt man einen Zweipunktregler mit Rückführung ein (Abb. 3.46).

Bringt man zusätzlich auf den Bimetallstreifen eine kleine Heizwicklung parallel zur Stellspannung an, so wird früher eine Temperaturerhöhung vorgetäuscht als in der Realität

Abb. 3.46 Zweipunktregler mit thermischer Rückführung



vorhanden ist. Durch einen einstellbaren Vorwiderstand kann somit ein größeres Über- schwingen vermieden werden.

3.7.2 Erzeugen des Stellverhaltens eines Zweipunktreglers

Obwohl der Zweipunktregler nur zwei Schaltpunkte der Stellgröße kennt, kann er trotzdem jede beliebige gemittelte Stellgröße Y_m im Regelkreis erzeugen. Dies geschieht durch ein an den Betriebszustand des Gerätes angepasstes Zeitverhalten (Abb. 3.47).

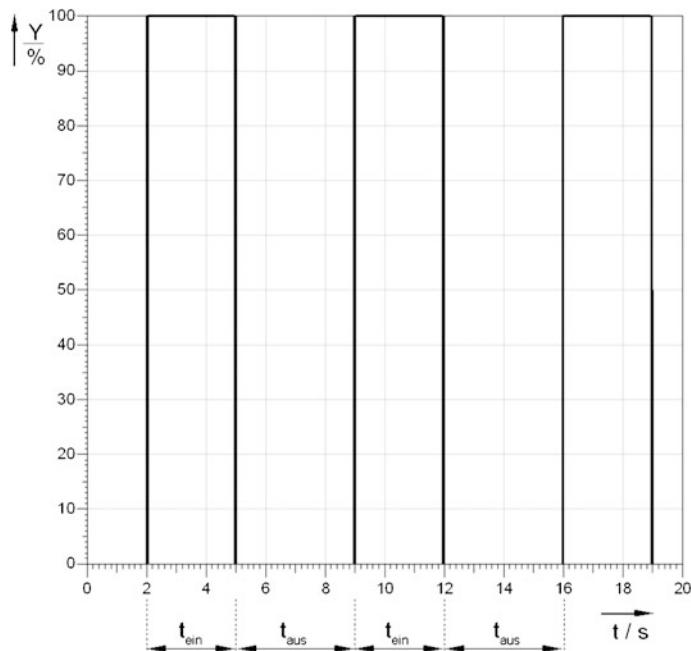


Abb. 3.47 Zeitverhalten des Zweipunktschalters

Die Schaltperiode beträgt $\tau = t_{\text{ein}} + t_{\text{aus}}$. Die Frequenz $f = 1/\tau$ gibt die Schalthäufigkeit des Schalters an. Damit lässt sich die mittlere Stellgröße berechnen:

$$Y_m = \frac{t_{\text{ein}}}{t_{\text{ein}} + t_{\text{aus}}} \cdot 100 \% = \frac{t_{\text{ein}}}{\tau} \cdot 100 \%$$

Geht man davon aus, dass der Sollwert des Regelkreises in der Mitte des Regelbereiches liegt, so schaltet das Stellglied doppelt so viel Energie als zum Erreichen des Sollwertes notwendig wäre. Es steht also 100 % Leistungsüberschuss $L_{\dot{U}}$ zur Verfügung. Der zugehörige Kennwert ist ebenfalls aus dem Zeitverhalten des Schalters zu berechnen:

$$L_{\dot{U}} = \frac{t_{\text{aus}}}{t_{\text{ein}}} \cdot 100 \%$$

Ist der Leistungsüberschuss größer als 100 %, d.h. liegt nur geringe Störungen vor, so ist die Einschaltzeit kürzer als die Ausschaltzeit.

4.1 Grundlagen

Der normale Aufbau eines Regelkreises ist die einschleifige Struktur. Diese einfache Regelschaltung hat den Vorteil, dass das Verhalten leicht überschaubar ist und gängige empirische Einstellregeln verwendet werden können. Im geschlossenen Regelkreis wird die Ausgangsgröße x der Regelstrecke als Regelgröße zur Eingangsgröße der Regeleinrichtung. Die Ausgangsgröße y der Regeleinrichtung als Stellgröße bewirkt eine Angleichung der Regelgröße x an den Sollwert w .

Zur Beschreibung des Zeitverhaltens haben sich zwei Arten durchgesetzt:

- Zusammensetzung der Differenzialgleichung im Zeitbereich
- Laplace-Transformation und Rücktransformation in den Zeitbereich.

Am Beispiel des einschleifigen Regelkreises (Abb. 4.1) soll zunächst das Verständnis für das Zusammenwirken von Regler und Regelstrecke mit Hilfe der Methode der Differenzialgleichungsanalyse geweckt werden. Vermischte Regelkreise lassen sich nur mit hohem mathematischen Aufwand analysieren. Hier kommt die Methode der Laplace-Transformation zum Einsatz.

Bei der Analyse des Regelkreisverhaltens unterscheidet man:

- Störverhalten, d. h. einen Eingriff der Störgröße am Regelstreckeneingang
- Führungsverhalten, d. h. Eingriff der Führungsgröße am Eingang des Reglers.

Man versucht bei der Analyse eines Signals, die Einflüsse der jeweils anderen Eingangsgröße des Regelkreises konstant zu halten. Am Ende werden die Auswirkungen von Störungen und Führungsgrößen überlagert (Superposition).

Die Störgrößen z_i sind in Wirklichkeit regellose stochastische Signale. Für diese Analyse werden jedoch grundsätzlich Eingangssprünge Δz_i verwendet.

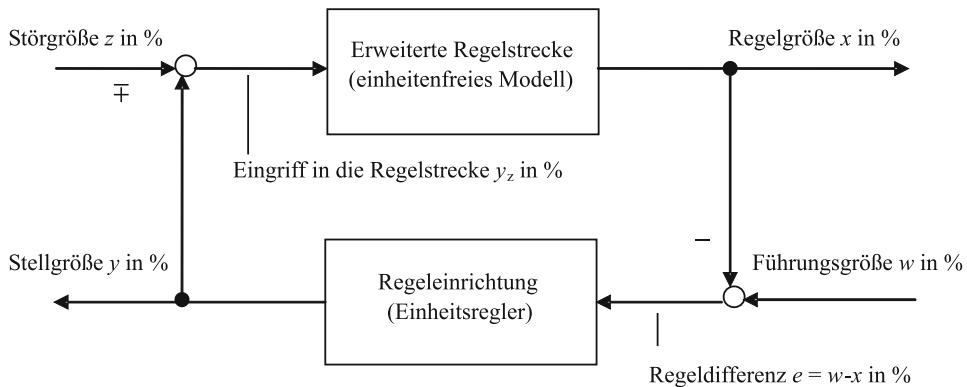


Abb. 4.1 Einheitenfreie Darstellung des einmaschigen Regelkreises

Anmerkung Zur Vereinfachung der Darstellung der Gleichungen werden in Kap. 4 an Stelle der Differenzen Δx , Δy , Δz , Δw die kleinen Buchstaben x , y , z , und w verwendet. Die genannten Differenzen beziehen sich auf den Arbeitspunkt.

Beim Führungsverhalten wird der Sollwert w auf eine konstant einstellbare Führungsgröße eingestellt; ausgehend von einer im Arbeitspunkt optimal eingestellten Regelung spricht man dann von einer Festwertregelung. Schwerer einzustellen sind Regelkreise, die mit veränderlichen Führungsgrößen arbeiten:

- Folgeregelung nach einem Zeitplan
- Folgeregelung nach externen Zuständen.

Hier gilt wie schon beim Störverhalten die Beschränkung auf einen konstanten Eingangssprung Δw .

4.2 Regelkreisanalyse

4.2.1 Methodik der Analyse

Die Analyse von Regelkreisen mit Hilfe der Methode der Differenzialgleichung liefert schnelle, aber leider nur grundsätzliche Aussagen über das Zeitverhalten. Typische Fragen sind:

- Welche Störgrößenänderung bezogen auf den Arbeitspunkt verkraftet eine vorgegebene Regelstrecke mit definiertem Regler?
- Wie schnell reagiert die Regelstrecke nach einer Sollwertänderung?
- Wie scharf kann ich den Regler einstellen, dass er bei definierter „Normstörung“ nicht in eine Begrenzung $< 0\%$ oder $> 100\%$ läuft?

Tab. 4.1 Checkliste der Regelkreisanalyse**A) Ansatz**

1. Gleichung der Regelstrecke oder Gleichungen von Regelstreckenteilen
2. Gleichung des Reglers oder Gleichungen von Reglerbauteilen
3. Gleichung der Summenpunkte
4. Auswahl einer Ausgangsgröße (x, y, e, y_z); Eliminieren der anderen Größen, die nicht als Ausgangsgrößen gewählt wurden
5. Ordnen, d. h. Ausgangsgrößen und deren Ableitungen auf die linke Seite der Differenzialgleichung, Eingangsgrößen w oder z_i und deren Ableitungen auf die rechte Seite der Differenzialgleichung bringen
6. Den Parameter bei der niedrigsten Ableitung auf der linken Seite (= Ausgangsseite) zu „1“ machen; dadurch entsteht die Standardform der Differenzialgleichung in *MSR-Form*

B) Auswertung (nicht Lösung)

1. Nur eine Eingangsgröße auf der linken Seite (z_i oder w) auswählen, die anderen Eingangsgrößen werden zu „0“ gesetzt; als Testfunktion wird der Eingangssprung gewählt
2. Beharrungszustand untersuchen; alle zeitlichen Ableitungen der Differenzialgleichung werden zu „0“ → x_{Bw}, x_{Bz}, \dots
3. Beginn der Sprungantwort untersuchen; → $\dot{x}(t \rightarrow 0); \dots$
4. Schwingungsverhalten untersuchen; → D, τ
5. Wirkung aller Ausgangsgrößen auf die gewählte Ausgangsgröße addieren

Das Vorgehen ist wie folgt: Ausgehend von einer Reglerstruktur (hier einmaschiger Regelkreis) mit gegebenen Parametern für Strecke und Regler wird die Differenzialgleichung des Systems aufgestellt und in die MSR-Form umgewandelt. Das gleiche Vorgehen wird auch gewählt, wenn nur eine Regelkreiskomponente untersucht werden soll.

Die Analyse dieser Ergebnisgleichung wird dann getrennt nach Beharrungsverhalten, Anfangsverhalten und Schwingungsverhalten durchgeführt. Der Ablauf der Analyse der Differenzialgleichung ist in Tab. 4.1 nach Art eines Kochrezeptes aufgestellt.

Zur Lösung der Differenzialgleichung wird auf Abschn. 1.2.1 verwiesen.

Zur Vereinfachung der Schreibweise der Gleichung werden oft typische Regelkreiskennwerte eingeführt:

- Kreisverstärkung V_0 als Produkt aller Proportionalwerte längs des Regelkreises

$$V_0 = K_{PS} \cdot K_{PR}$$

mit $K_{PS} = K_{P1} \cdot K_{P2} \cdot K_{P3} \cdot \dots$

- Integratorverstärkung V_I

$$V_I = K_{PS} \cdot K_{IR} \quad \text{oder} \quad V_I = K_{IS} \cdot K_{PR}$$

- Regelfaktor R : $0 < R < 1$

$$R = \frac{1}{1 + V_0} = \frac{x_B \text{ mit Regler}}{x_B \text{ ohne Regler}}$$

Tab. 4.2 Differenzialgleichung von Regelstecken und Reglern (Auswahl); zugehörige Regelkreisstruktur siehe Abb. 4.1

| Verhalten | Gleichung |
|---|---|
| Differenzialgleichungen von Regelstrecken | |
| P | $x = K_{PS} \cdot y_z$ |
| P-T ₁ | $T \cdot \dot{x} + x = K_{PS} \cdot y_z$ |
| P-T ₂ | $T_0^2 \cdot \ddot{x} + T_1 \cdot \dot{x} + x = K_{PS} \cdot y_z$ |
| I | $\dot{x} = K_{IS} \cdot y_z$ oder $x = K_{IS} \cdot \int y_z dt$ |
| I-T ₁ | $T \cdot \ddot{x} + \dot{x} = K_{IS} \cdot y_z$ |
| Differenzialgleichungen von Reglern | |
| P | $y = K_{PR} \cdot e [+Y_0]$ |
| I | $\dot{y} = K_{IR} \cdot e$ |
| D-T ₁ | $T \cdot \ddot{y} + \dot{y} = K_{DR} \cdot \dot{e}$ |
| PID | $\dot{y} = K_{PR} \cdot \dot{e} + K_{IR} \cdot e + K_{DR} \cdot \ddot{e}$ oder $y = K_{PR} \cdot e + K_{IR} \cdot \int e dt + K_{DR} \cdot \dot{e}$ |

In Tab. 4.2 sind einige in der Praxis häufig vorkommenden Gleichungen von Strecken und Reglern zusammengestellt.

4.2.2 Ablauf der Regelkreisanalyse

An einigen ausgewählten Beispielen von Regler-Strecken-Kombinationen soll das Zusammenwirken der Blöcke im geschlossenen Regelkreis gezeigt werden.

4.2.2.1 Ansatz der Differenzialgleichung

Als Beispiel wird ein einmaschiger Regelkreis gewählt, der aus einer reinen P-Strecke und einem P-Regler besteht. Es wird nur das Störverhalten berücksichtigt, d. h. $w = 0$.

A 1. Gleichung der Regelstrecke (P-Verhalten) $x = K_{PS} \cdot y_z$

A 2. Gleichung des Reglers (P-Verhalten) $y = K_{PR} \cdot e$

A 3. Gleichung des Summenpunktes $y_z = y - z$

Das Vorzeichen der Störgröße z kann positiv und negativ sein. Ist die Störgröße z. B. eine Entnahme aus einem Wasserspeicher, dann wirkt z negativ. Wird bei einer Zunahme der Störgröße die Regelgröße x größer, so gilt am Summenpunkt das Plus-Zeichen, wird die Regelgröße kleiner, dann wird das Minus-Zeichen rechts vom Richtungspfeil angetragen.

Da nur die Störgröße geändert wird, der Sollwert w jedoch konstant bleibt, gilt:

$$e = w - x \quad \text{mit } w = 0 \rightarrow e = -x$$

Anmerkung In jedem Regelkreis muss genau eine Vorzeichenumkehr vorhanden sein, damit einem Anstieg der Regelgröße durch Verkleinerung der Streckeneingangsgröße y_z entgegengewirkt wird. Diese Vorzeichenumkehr ist hier am Vergleicher realisiert.

A 4. Auswahl der Ausgangsgröße

In den vier Gleichungen (Differentialgleichungen Nullter Ordnung) sind fünf Variable enthalten, davon eine Eingangsgröße, und zwar die Störgröße z . Alle vier „Kreisgrößen“ können theoretisch als Ausgangsgröße gewählt werden, z. B.

$$\begin{array}{ll} \text{Regelgröße} & x = f(z, w, t) \\ \text{Stellgröße} & y = f(z, w, t) \\ \text{Regeldifferenz} & e = f(z, w, t) \\ \text{Stell-/Stördifferenz} & y_z = f(z, w, t) \end{array}$$

Hier wird die Regelgröße x als Ausgangsgröße gewählt.

Eliminieren von e , y und y_z :

$$\begin{aligned} x &= K_{PS} \cdot (y - z) \quad \text{und} \quad y = K_{PR} \cdot e \\ x &= K_{PS} \cdot K_{PR} \cdot e - K_{PS} \cdot z = -K_{PS} \cdot K_{PR} \cdot x - K_{PS} \cdot z \end{aligned}$$

In dieser Gleichung sind nur die Variable x als Ausgangsgröße und die Variable z als Eingangsgröße enthalten. [$x = f(z, w = \text{konst.}, t)$]

Wählt man als Ausgangsgröße die Stellgröße y , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} y &= K_{PR} \cdot e = -K_{PR} \cdot x \quad \text{und} \quad x = K_{PS} \cdot y_z \\ y &= -K_{PR} \cdot K_{PS} \cdot y_z = -K_{PR} \cdot K_{PS} \cdot y + K_{PR} \cdot K_{PS} \cdot z \end{aligned}$$

A 5. Ordnen

In einer geordneten regelungstechnischen Differentialgleichung steht die gewählte Ausgangsgröße eines Systems auf der linken Seite, alle Eingangsgrößen des Systems auf der rechten Seite. Dazu gehören auch, wenn vorhanden, alle Ableitungen nach der Zeit.

$$\begin{aligned} x \cdot (1 + K_{PS} \cdot K_{PR}) &= -K_{PS} \cdot z \\ y \cdot (1 + K_{PS} \cdot K_{PR}) &= K_{PS} \cdot K_{PR} \cdot z \end{aligned}$$

A 6. Bilden der MSR-Form

Das Zeitverhalten regelungstechnischer Systeme wird unabhängig von deren technischer Realisierung durch gleichartige Kennwerte beschrieben. Diese Kennwerte sollen auch für den Regelkreis gelten. Dazu muss die Differentialgleichung in eine typische Form gebracht werden, aus der sich die Kennwerte direkt ablesen lassen. Diese Form nennt man auch MSR-Form (Messen-Steuern-Regeln). Das Besondere dieser Form ist, dass die niedrigste Ableitung auf der linken Seite, d. h. die gewählte Ausgangsgröße, zu „1“ gemacht

wird. Damit haben die einzelnen Terme der Gleichung die Dimension der Ausgangsgröße. Die Parameter zu den übrigen Termen nehmen kennzeichnende Bedeutung an.

$$x = \frac{K_{PS}}{1 + K_{PS} \cdot K_{PR}} \cdot z = \frac{K_{PS}}{1 + V_0} \cdot z = R \cdot K_{PS} \cdot z \quad \text{und}$$

$$y = -\frac{K_{PSE} \cdot K_{PR}}{1 + K_{PSE} \cdot K_{PR}} \cdot z = -R \cdot V_0 \cdot z$$

4.2.2.2 Auswertung der Differenzialgleichung

Um einen Überblick über das Zeitverhalten des Kreises zu bekommen, reicht es oft, nur einzelne Zeitbereiche (Anfang, Beharrung, ...) des Verhaltens zu untersuchen. Die Lösung der Differenzialgleichung wird erst benötigt, wenn es um die Ermittlung konkreter Zwischenzustände geht.

B 1. Testfunktion

Meist wählt man als Testfunktion einen Eingangssprung. Das Zeitverhalten wird getrennt nach Störverhalten (sprunghafte Änderung der Störgröße z) und Führungsverhalten (sprunghafte Änderung der Führungsgröße w) untersucht. Bei linearem Verhalten aller Kreisglieder ist eine einfache Überlagerung der Ergebnisse der Einzelsprünge aller Eingangsgrößen zum Gesamtverhalten des Kreises zulässig, z. B.:

$$x_B(\text{Gesamt}) = x_B(\text{Störung}) + x_B(\text{Führung}); \quad \text{Index B ... Beharrung}$$

Δz ist eine zusätzliche Störung, die auf den in Beharrung befindlichen Regelkreis einwirkt. Dieser Beharrungszustand für $t < 0$ muss nicht, sollte jedoch möglichst identisch mit dem Arbeitspunkt AP sein.

$$\text{AP} \rightarrow X_0 = W_0 \text{ und } Y_0 = Z_0$$

B 2. Beharrungsverhalten

Unter Beharrungsverhalten versteht man das Zeitverhalten des Regelkreises (bzw. Regelkreisgliedes) für sehr große Zeiten ($t \rightarrow \infty$) nach Einwirken der Testfunktion.

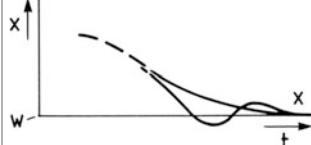
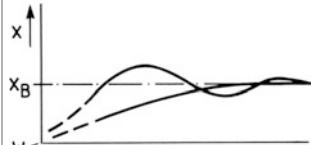
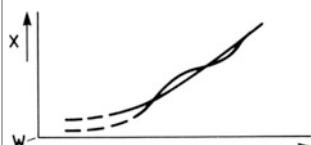
In der Differenzialgleichung der allgemeinen Form (Fundamentalgleichung)

$$\begin{aligned} a_n \cdot \overset{(n)}{\dot{x}} + \dots + a_2 \cdot \ddot{x} + a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x \\ = b_0 \cdot y + b_1 \cdot \dot{y} + b_2 \cdot \ddot{y} + \dots + c_0 \cdot z + c_1 \cdot \dot{z} + \dots \end{aligned}$$

verschwinden dann alle zeitlichen Ableitungen

$$\dot{x}, \ddot{x}, \dots, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, \dot{z}, \ddot{z}, \dots \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Tab. 4.3 Zusammenstellung der drei möglichen Beharrungsverhalten bei einer Sprungantwort

| Differenzialgleichung in Beharrung | Sprungantwort | Zeitverhalten |
|------------------------------------|---|--|
| $a_0 \neq 0; b_0 = 0$ | $x_B = 0$ keine bleibende Regeldifferenz |  |
| $a_0 \neq 0; b_0 \neq 0$ | $x_B = \frac{b_0}{a_0} y$ bleibende Regeldifferenz |  |
| $a_0 = 0; b_0 = 0$ | $0 = y$ kein Beharrungswert |  |

Es können dabei nur drei Fälle auftreten (Tab. 4.3):

- Die nullte Ableitung auf der rechten Seite fehlt, dies bedeutet, dass keine bleibende Regeldifferenz auftritt, z. B. $x_B = 0$.
- Die nullten Ableitungen auf beiden Seiten sind vorhanden; es tritt eine bleibende Regeldifferenz auf, z. B.

$$x_B = \frac{b_0}{a_0} \cdot y = K_{P1} \cdot y \quad \text{oder} \quad x_B = \frac{c_0}{a_0} \cdot z = K_{P2} \cdot z.$$

- Die nullte Ableitung auf der linken Seite fehlt; der Beharrungswert ist unendlich groß, z. B. $0 = K_{P2} \cdot z$.

B 3. Anfangsverhalten

Das Anfangsverhalten untersucht die Reaktion des Regelkreises (bzw. des Regelkreisgliedes) für kleine Zeiten $t \rightarrow 0$ oder zum Zeitpunkt $t = 0$, zu der der Eingangssprung auf das System wirkt. Auch hier unterscheiden wir drei Fälle (Tab. 4.4):

- Die höchste Ordnung der Ableitung n auf der linken Seite der Differenzialgleichung ist gleich der höchsten Ordnung der Ableitung m rechts; dann zeigt das System als Sprungantwort für $t = 0$ ebenfalls einen Sprung der Ausgangsgröße mit nachfolgender Sprungantwort, z. B. $x(0) = K_P \cdot z$.

Tab. 4.4 Zusammenstellung der drei möglichen Anfangsverhalten bei einer Sprungantwort (Systeme mit $m > n$ sind physikalisch nicht realisierbar)

| Differenzialgleichung $a_n \cdot \overset{(n)}{\dot{x}} + \dots = \dots + b_m \cdot \overset{(m)}{y} [0, 1]$ | Sprungantwort | Zeitverhalten |
|---|---|---------------|
| $n = m$ | $x(0) = \frac{b_m}{a_n} \cdot y$ | |
| $n = m + 1$ | $\dot{x}(0) = \frac{b_m}{a_n} \cdot y$ $x_a(0) = 0$ | |
| $n = m + i, i \geq 2$ | $\overset{(m)}{\dot{x}}(0) = 0$ \vdots $\dot{x}(0) = 0$ $x(0) = 0$ | |

- Die höchste Ordnung n links ist um einen Grad höher als m rechts; als Sprungantwort zeigt das System für $t = 0$ eine endliche Anstiegsgeschwindigkeit der Ausgangsgröße, z. B. $\dot{x}(0) = K_p \cdot z; x(0) = 0$
- Die höchste Ordnung n links ist um mehr als einen Grad höher als m auf der rechten Seite; das System hat zum Zeitpunkt $t = 0$ keine zeitliche Änderung der Ausgangsgröße und auch keine Anstiegsgeschwindigkeit, also horizontale Tangente, $\dot{x}(0) = 0; x(0) = 0$

B 4. Schwingungsverhalten

Das Schwingungsverhalten wird durch den Dämpfungsgrad

$$D = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_1}{T_0}$$

und die Schwingungsperiode

$$\tau = 2\pi \cdot T_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - D^2}}$$

beschrieben.

4.3 Spezielle Regelkreise

4.3.1 Regelkreis mit bleibender Regeldifferenz

Regelstecken, die mit einfachem P-Regler geregelt werden, haben den Nachteil der bleibenden Regeldifferenz im Beharrungszustand. Mit Hilfe der Differenzialgleichung kann die Größe der bleibenden Regeldifferenz abgeschätzt werden.

Beispiel 4.1 (Durchflussregelstrecke mit P-Regler)

Ein Durchflussregelkreis besteht aus einem näherungsweise verzögerungsfreien Stellantrieb mit flinkem Stellungsregler, einem gleichprozentigen Stellventil, einer Durchflussmessstelle direkt hinter dem Stellventil mit eingebautem Messumformer und einem verzögerungsfreien P-Regler (Abb. 4.2).

Bei verschiedenen Vordrücken $p_0 = \text{konst.}$ wurde die Kennlinienschar der erweiterten Regelstrecke aufgenommen (Abb. 4.3). Dabei ist der Vordruck p_0 umgerechnet als Störgröße z in Einheiten der Stellgröße y aufgetragen.

Für den Arbeitspunkt gilt:

$$X_0 = W_0 = 50 \%$$

$$Y_0 = Z_0 = 50 \%$$

Im Arbeitspunkt soll die Kennlinie eines P-Reglers mit $X_P = 50 \%$ in dieses Diagramm eingetragen werden.

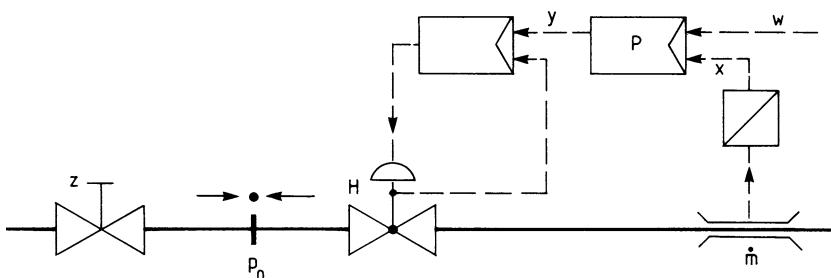
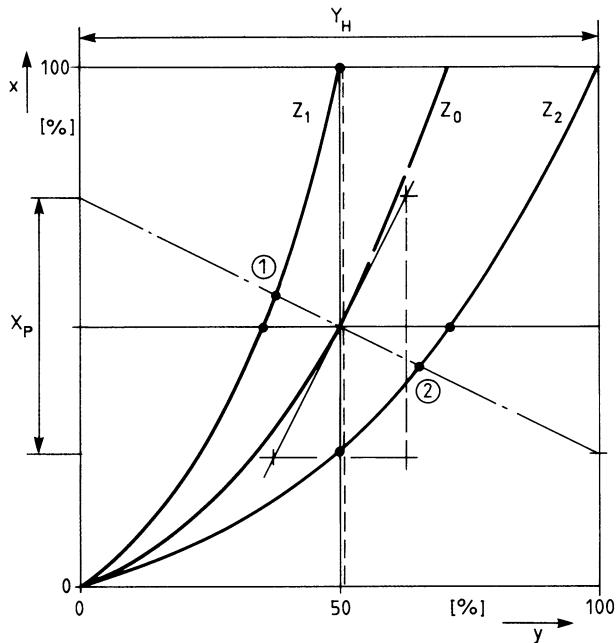


Abb. 4.2 Gerätefließbild einer Durchflussregelstrecke mit P-Regler

Abb. 4.3 Kennlinienschar der Durchflussregelstrecke nach Messwerten, Reglerkennlinie $X_P = 50\%$



- a) Ermitteln Sie aus dem Diagramm Abb. 4.3 die bleibende Regeldifferenz der Regelstrecke ohne Regler und als geschlossener Regelkreis, wenn vom Arbeitspunkt ausgehend die Vordrücke Z_1 bzw. Z_2 eingestellt werden.

Als Stellbereich des Ventils gilt:

$$Y_H = 100$$

Mit der Angabe des Proportionalbereichs des P-Reglers

$$X_P = 50\%$$

ist der Anstieg der Regelkennlinie festgelegt.

$$K_{PR} = \frac{Y_H}{Y_P} = 2 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Die Reglerkennlinie muss durch den Arbeitspunkt laufen. In Abb. 4.3 ist diese Kennlinie als strichpunktiertere Gerade eingetragen. Zur Kontrolle lässt sich der zu Y_H gehörige Wert X_P an der x -Achse ablesen.

Wird jetzt die Störgröße von Z_0 auf Z_1 geändert, so erhalten wir den neuen Betriebspunkt des geschlossenen Regelkreises als Schnittpunkt zwischen der Reglerkennlinie

(strichpunktiert) und der durchgezogenen Streckenkennlinie für Z_1 . Aufgrund der Störung

$$\Delta z_1 = Z_0 - Z_1 = 50\% - 36\% = 14\%$$

verändert der Regler seine Stellgröße um

$$\Delta y_1 = Y_1 - Y_0 = 38\% - 50\% = -12\%$$

kann jedoch bei dieser Einstellung die Regelabweichung

$$\Delta x_1 = X_1 - W_0 = 56\% - 50\% = 6\%$$

nicht vermeiden.

Für die Störgröße Z_2 ergibt sich:

$$\Delta z_2 = -22\% \Delta y_2 = 15,5\% \Delta x_2 = -8\%.$$

Man kann erkennen, dass die bleibende Regelabweichung nur vermieden werden kann, wenn ein Regler mit einem Proportionalbereich $X_P = 0\%$ oder einem Proportionalwert $K_{PR} \rightarrow \infty$ eingesetzt wird, der die Störgrößenänderung durch eine Stellgrößenänderung in gleicher Größe kompensiert. Dies werden wir noch unter Punkt d) näher behandeln.

Ist der Regler ausgeschaltet, betrachten wir also die Regelstrecke ohne Regler, so wird sich Y_0 nicht ändern. Tritt jetzt eine Störung Z auf, so verschiebt sich der Betriebspunkt auf einer Linie $y = \text{konst}$. (Abb. 4.3 gestrichelt).

Für die bleibende Regeldifferenz lesen wir ab:

$$x_1 \text{ (ohne Regler)} = 50\% \quad x_2 \text{ (ohne Regler)} = -25\%.$$

Durch den P-Regler mit $X_P = 50\%$ wird die Regeldifferenz $\Delta x = e = X_0 - W_0$ von z. B. 25 % auf -8 % reduziert. Nur im Arbeitspunkt tritt gemäß Definition $X_0 = W_0$ keine Differenz auf.

b) Zeichnen Sie den Wirkungsplan des Regelkreises. Stellen Sie die lineare Differenzialgleichung des Regelkreises auf.

Der Massenstrom durch das Ventil wird durch den Hub H und/oder durch den Vordruck p_0 beeinflusst. Das Ventil wird also im Wirkungskreislauf durch zwei Blöcke und einen Summenpunkt dargestellt (Abb. 4.4). Durch die Blöcke

Stellantrieb, Vordrosselung und Fühler/Umformer

werden aus den dimensionsbehafteten Größen dimensionslose Größen erzeugt, indem z. B. die Messwerte auf den Messbereichsendwert bezogen werden.

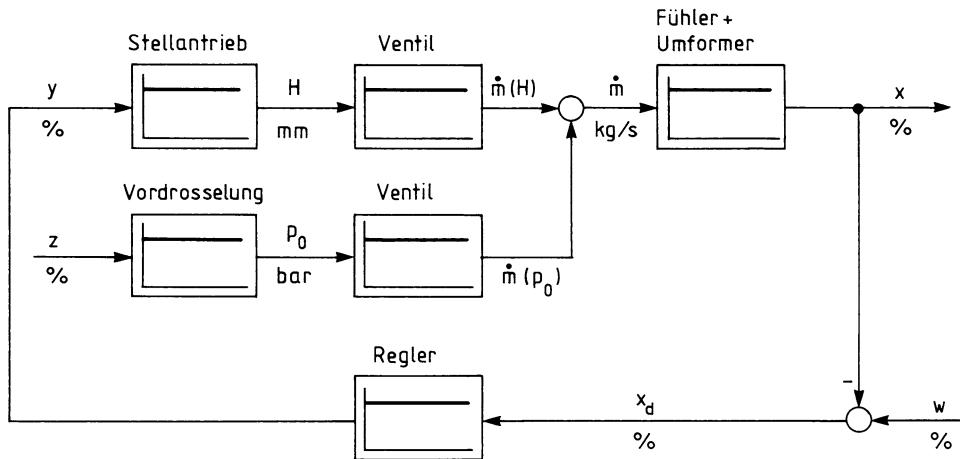


Abb. 4.4 Wirkungsplan der Durchflussregelung

Da sowohl die Störgröße z als auch die Stellgröße y verzögerungsfrei eingreifen, kann die Störung an den Eingang der erweiterten Regelstrecke verlegt werden. Das Vorzeichen von z muss positiv sein; wenn der Vordruck steigt, steigt auch der Durchfluss. In der dimensionslosen Darstellung dieses Regelkreises ergibt sich:

Gleichung der erweiterten Regelstrecke:

$$x = K_{PS} \cdot y_z = K_{PS} \cdot y + K_{PS} \cdot z$$

Gleichung des Reglers:

$$y = K_{PR} \cdot e = K_{PR} \cdot w - K_{PR} \cdot x$$

Die Vorzeichenenumkehr ist im Regler realisiert (fallende Kennlinie). In einem einmaalschigen Regelkreis kann immer nur eine Ausgangsgröße gewählt werden, hier die Regelgröße x . Alle übrigen Kreisgrößen e und y_z werden eliminiert:

$$x = K_{PS} \cdot z + K_{PS} \cdot K_{PR} \cdot w - K_{PS} \cdot K_{PR} \cdot x$$

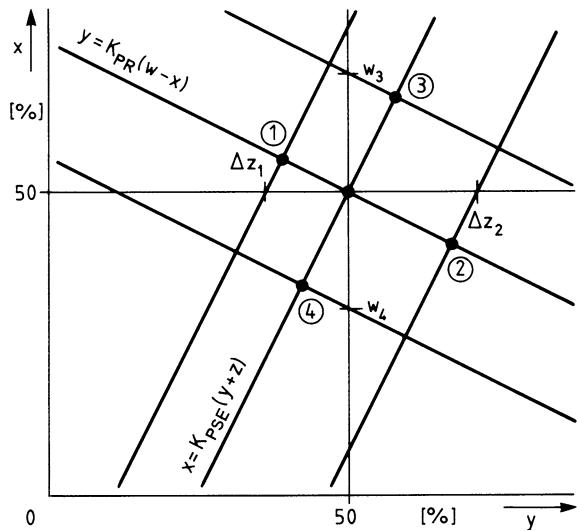
Sortieren, d. h. die gewählte Ausgangsgröße x auf die linke Seite der Differenzialgleichung (nullter Ordnung), die Eingangsgrößen w und z auf die rechte Seite:

$$x + K_{PS} \cdot K_{PR} \cdot x = K_{PS} \cdot z + K_{PS} \cdot K_{PR} \cdot w$$

In der MSR-Form wird die niedrigste Ableitung auf der linken Seite zu 1 gemacht:

$$x = \frac{K_{PS}}{1 + K_{PS} \cdot K_{PR}} \cdot z + \frac{K_{PS} \cdot K_{PR}}{1 + K_{PS} \cdot K_{PR}} \cdot w$$

Abb. 4.5 Kennlinienschar der Durchflussregelstrecke mit Hilfe der linearen Differenzialgleichung, Reglerkennlinie eines P-Reglers



Mit Hilfe der Definitionen der Kreisverstärkung

$$V_0 = K_{PS} \cdot K_{PR} \quad \text{sowie} \quad R = \frac{1}{1 + V_0} \quad (\text{Regelfaktor})$$

ergibt sich:

$$x = R \cdot K_{PS} \cdot z + R \cdot V_0 \cdot w$$

Wählen wir y als Ausgangsgröße, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} y &= K_{PR} \cdot w - K_{PR} \cdot x \\ y &= K_{PR} \cdot w - K_{PR} \cdot K_{PS} \cdot y - K_{PR} \cdot K_{PS} \cdot z \\ (1 + V_0) \cdot y &= K_{PR} \cdot w - V_0 \cdot z \\ y &= -R \cdot V_0 \cdot z + R \cdot K_{PR} \cdot w \end{aligned}$$

- c) Vergleichen Sie die rechnerischen Werte aus der linearen Differenzialgleichung mit den gemessenen Werten aus Abb. 4.3.

Durch Anlegen der Tangente an die Streckenkennlinie für Z_0 im Arbeitspunkt erhalten wir den Proportionalbeiwert der erweiterten Regelstrecke (Abb. 4.5)

$$K_{PS} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{50\%}{25\%} = 2.$$

In einer linearen Differenzialgleichung bleibt dieser Wert konstant; anstelle der gekrümmten Kennlinien aus Abb. 4.5 ergeben sich rechnerisch Geraden, die in Abb. 4.5 eingetragen sind.

Die Gerade $x = K_{PS} \cdot (y + Z_0)$ geht durch den Arbeitspunkt mit der Steigung z . Eine andere Störgröße bedeutet eine Parallelverschiebung der Kennlinie. In Abb. 4.5 ist dies für $\Delta z_1 = +14\%$ und $\Delta z_2 = -22\%$ eingetragen (siehe Punkt a dieser Übungsaufgabe).

In gleicher Weise wird die Gerade für den Regler $y = K_{PR} \cdot (w_0 - x)$ einge tragen. Hier führt die Änderung des Sollwertes w zu einer Parallelverschiebung; in diesem Beispiel für $\Delta w_3 = +20\%$ und $\Delta w_4 = -20\%$. Die Kennlinienscharen für die Streckengleichung und die Reglergleichung dienen nur der Veranschaulichung der Ergebnisse der linearen Differenzialgleichung. Im Folgenden wird deshalb die rechnerische Lösung verwendet.

Zahlenwerte:

$$K_{PS} = 2 \quad K_{PR} = \frac{100\%}{X_P} = \frac{100\%}{50\%} = 2$$

$$V_0 = K_{PS} \cdot K_{PR} = 2 \cdot 2 = 4 \quad R = \frac{1}{1 + V_0} = \frac{1}{1 + 4} = 0,2$$

Störverhalten, d. h. $\Delta w = 0$ (R = Rechnung, M = Messung):

$$\begin{array}{ll} \Delta x_1(R) = K_{PS} \cdot R \cdot \Delta z_1 = 0,2 \cdot 2 \cdot 14\% = 5,6\% & \Delta x_1(M) = 6\% \\ \Delta y_1(R) = -R \cdot V_0 \cdot \Delta z_1 = -0,2 \cdot 4 \cdot 14\% = -11,2\% & \Delta y_1(M) = -12\% \\ \Delta x_2(R) = 0,2 \cdot 2 \cdot (-22\%) = -8,8\% & \Delta x_2(M) = -8\% \\ \Delta y_1(R) = -0,2 \cdot 4 \cdot (-22\%) = 17,6\% & \Delta y_1(M) = 15,5\% \end{array}$$

Die Abweichungen zwischen Messung und Rechnung resultieren nicht aus den Ablesefehlern, sondern sie werden durch die Linearisierung bei der Rechnung verursacht.

Zur Erinnerung: Die Analyse der Regelstrecke und die Auslegung des Reglers erfolgt in der Regel um den Bereich des Arbeitspunktes. Ausgehend vom Arbeitspunkt wird entweder das Störverhalten oder das Führungsverhalten untersucht. Über die Sprungantwort wird der Proportionalwert der Strecke bestimmt. Dieser Proportionalwert wird für alle nachfolgenden Betrachtungen als konstant angesetzt. Zeichnet man jedoch die Kennlinie der Regelstrecke auf, so stellt man fest, dass in den allermeisten Fällen die Kennlinie der Strecke nicht linear ist – und damit auch der Proportionalwert der Strecke nicht konstant sein kann. Je nichtlinearer die Strecke ist, umso stärker schwankt der Betrag des Proportionalwertes.

Mit der Annahme eines konstanten Proportionalwertes wird diese Kennlinie linearisiert. Je weiter man sich bei der Auslegung vom Arbeitspunkt entfernt, desto größer wird der Linearitätsfehler.

- Führungsverhalten: (d. h. $\Delta z = 0$)

$$\begin{aligned} \Delta x_3(R) &= R \cdot V_0 \cdot \Delta w_3 = 0,2 \cdot 4 \cdot 20\% = 16\% \\ \Delta y_3(R) &= R \cdot K_{PR} \cdot \Delta w_3 = 0,2 \cdot 2 \cdot 20\% = 8\% \end{aligned}$$

$$\Delta x_4(R) = 0,2 \cdot 4 \cdot (-20\%) = -16\%$$

$$\Delta y_4(R) = 0,2 \cdot 2 \cdot (-20\%) = -8\%$$

- Überlagerung von Störgröße und Führungsgröße

$$\Delta x_5(R) = \Delta x_3 + \Delta x_1 = 16\% + 5,6\% = 21,6\%$$

$$\Delta y_5(R) = \Delta y_3 + \Delta y_1 = 8\% + 12\% = -4\%$$

- d) Stellen Sie die Differenzialgleichung der gleichen Strecke mit I-Regler auf. Berechnen Sie damit die Stellgröße, die notwendig ist, einer Störung Δz_1 ohne bleibende Regeldifferenz entgegenzuwirken.

Zu der Strecke $x = K_{PS}(z + Y)$ wird der ideale I-Regler $\dot{y}_R = K_{IR}(w - x)$ geschaltet. In der Differenzialgleichung für die Regelgröße wird die Stellgröße y eliminiert:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= K_{PS} \cdot \dot{z} + K_{PS} \cdot \dot{y} = K_{PS} \cdot \dot{z} + K_{PS} \cdot K_{IR} \cdot w - K_{PS} \cdot K_{IR} \cdot x \\ \dot{x} + K_{PS} \cdot K_{IR} \cdot x &= K_{PS} \cdot \dot{z} + K_{PS} \cdot K_{IR} \cdot w\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{K_{PS} \cdot K_{IR}} \cdot \dot{x} + x = \frac{1}{K_{IR}} \cdot \dot{z} + w}$$

Wählt man die Stellgröße als Ausgangsgröße, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= K_{IR} \cdot w - K_{IR} \cdot K_{PS} \cdot z - K_{IR} \cdot K_{PS} \cdot y \\ \dot{y} + K_{IR} \cdot K_{PS} \cdot y &= K_{IR} \cdot w - K_{IR} \cdot K_{PS} \cdot z\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{K_{IR} \cdot K_{PS}} \cdot \dot{y} + y = K_{IR} \cdot w - z}$$

Die Systemgleichung zeigt ein Zeitverhalten 1. Ordnung, bei dem im Beharrungszustand

- keine bleibende Regelabweichung vorhanden ist $\rightarrow x_B = w$
- und die Stellgröße bei Störverhalten die Störgröße aufhebt $\rightarrow y_B = -z$.

Bei Führungsverhalten ist die Stellgröße

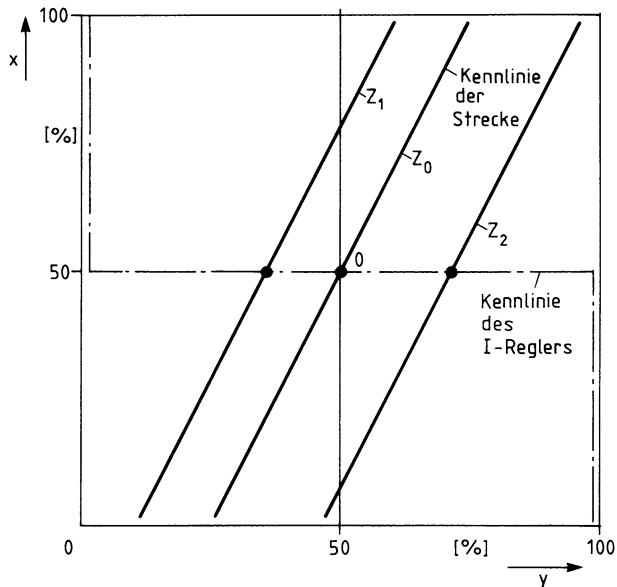
$$y_{BW} = \frac{1}{K_{PS}} \cdot w.$$

Das Anfangsverhalten kann graphisch durch die Kreis-Zeitkonstante

$$T_x = T_y = \frac{1}{K_{PS} \cdot K_{IR}}$$

angegeben werden.

Abb. 4.6 Kennlinienschar der Durchfluss-Regelstrecke (lineare Differenzialgleichung) mit Reglerkennlinie eines I-Reglers



Das Beharrungsverhalten ist in Abb. 4.6 dargestellt; die Kennlinie des I-Reglers ist eine Parallelle zur y -Achse durch den Arbeitspunkt „0“. Sie entspricht der linearen Kennlinie eines P-Reglers für $X_P \rightarrow 0$.

Auf den Zeitverlauf soll hier nicht näher eingegangen werden.

Beispiel 4.2 (Druckregelstrecke mit P-T₁-Verhalten, geregelt durch einen P-Regler)

Eine Druckregelstrecke (Abb. 4.7) besteht aus einem Stellventil V1 mit verzögerungsarmem Stellantrieb, einem Druckluftspeicher B1 und einem konstanten Verbraucher V2. Über ein Magnetventil V3 kann ein weiterer Verbraucher sprunghaft zugeschaltet werden.

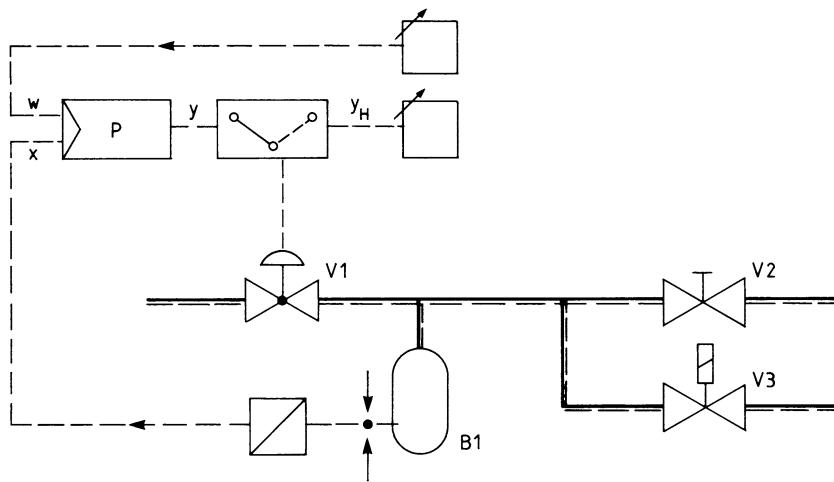
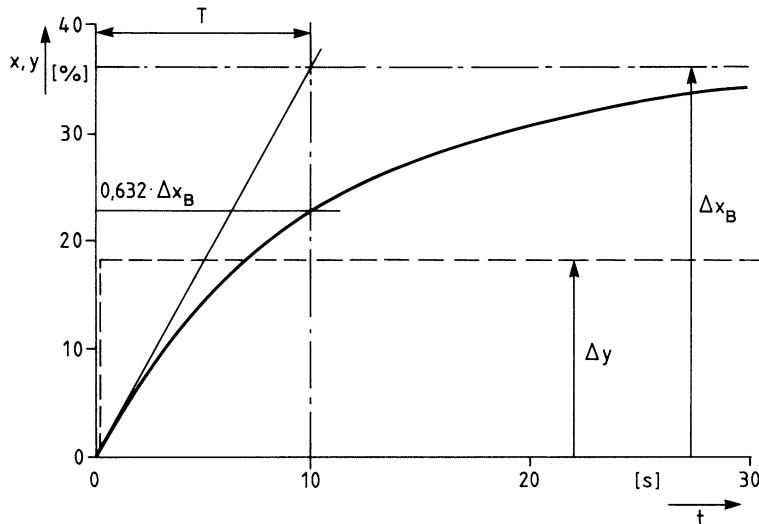
$$\text{Störsprung } \Delta z = -10 \text{ \%}.$$

Der Druck im Speicher als Regelgröße wird durch den nachgeschalteten Messumformer dimensionslos gemacht. Dies ist nicht notwendig, wenn der Druckmessbereich im Einheitssignalbereich 0,2 bis 1 bar liegt.

- a) Ermitteln Sie die in der linearen Differenzialgleichung enthaltenen Kennwerte der Regelstrecke. Arbeitspunkt $X_0 = W_0 = 50 \text{ \%}$ und $Y_0 = Z_0 = 50 \text{ \%}$

Die Handstellgröße Y_{Hand} wurde sprunghaft verstellt und der Zeitverlauf $y(t)$ und $x(t)$ als Einheitssignal in % aufgeschrieben (Abb. 4.8).

Auf die Nichtlinearitäten, die in jeder realen Regelstrecke vorhanden sind, wird hier nicht weiter eingegangen. Das Zeitverhalten der Regelstrecke wird aus der Sprungantwort eindeutig als proportionales Verhalten mit Zeitverzögerung 1. Ordnung erkannt.

**Abb. 4.7** Gerätefließbild eines Druckluftregelkreises**Abb. 4.8** Messschrieb der Stellsprungantwort der dimensionslosen Druckluftregelstrecke

Dieses Verhalten wird durch folgende Differenzialgleichung beschrieben:

$$T \cdot \dot{x} + x = K_{PS} \cdot y.$$

Neben der Regelgröße x und der Stellgröße y , die dem Messschrieb zu entnehmen sind, benötigt man für die mathematische Beschreibung der Regelstrecke die Kennwerte

- Proportionalbeiwert K_{PS} und
- Zeitkonstante T .

Der Proportionalwert wird aus dem Beharrungszustand bestimmt.

Aus Abb. 4.8 liest man ab:

$$K_{\text{PS}} = \frac{x_B}{y} = \frac{36\%}{18\%} = 2.$$

Die Zeitkonstante wird bei 63,2 % vom Beharrungswert abgelesen:

$$x(t = T) = 0,632 \cdot x_B = 22,8\%.$$

Aus dem Schrieb (Abb. 4.8) liest man damit ab: $T = 10 \text{ s}$.

- b) Der Regelkreis wird durch einen P-Regler geschlossen. Stellen Sie die Differenzialgleichung des Regelkreises für Regel- und Stellgröße auf.

Gleichung der Strecke: $T_S \cdot \dot{x} + x = K_{\text{PS}}(z + y)$

Gleichung des Reglers: $y = K_{\text{PR}}(w - x)$

Kreisgleichung der Regelgröße:

$$\begin{aligned} T_S \cdot \dot{x} + x &= K_{\text{PS}} \cdot z + \underbrace{K_{\text{PS}} \cdot K_{\text{PR}}}_{V_0} \cdot w - \underbrace{K_{\text{PS}} \cdot K_{\text{PR}}}_{V_0} \cdot x \\ T_S \cdot \dot{x} + \underbrace{(1 + V_0)}_{1/R} \cdot x &= K_{\text{PS}} \cdot z + V_0 \cdot w \\ \underbrace{R \cdot T_S}_{T_x} \cdot \dot{x} + x &= R \cdot K_{\text{PS}} \cdot z + R \cdot V_0 \cdot w \end{aligned}$$

Kreisgleichung der Stellgröße:

$$\begin{aligned} w - \frac{1}{K_{\text{PR}}} \cdot y &= x \quad \rightarrow \quad \dot{w} - \frac{1}{K_{\text{PR}}} \cdot \dot{y} = \dot{x} \\ T_S \cdot \dot{w} - \frac{T_S}{K_{\text{PR}}} \cdot \dot{y} + w - \frac{1}{K_{\text{PR}}} \cdot y &= K_{\text{PS}} \cdot z + K_{\text{PS}} \cdot y \\ \frac{T_S}{K_{\text{PR}}} \cdot \dot{y} + \underbrace{\left(K_{\text{PS}} + \frac{1}{K_{\text{PR}}} \right)}_{= \frac{1}{R \cdot K_{\text{PR}}}} \cdot y &= K_{\text{PS}} \cdot z + w + T_S \cdot \dot{w} \\ \underbrace{R \cdot T_S}_{T_y} \cdot \dot{y} + y &= -R \cdot V_0 \cdot z + R \cdot K_{\text{PR}} \cdot w + R \cdot T_S \cdot K_{\text{PR}} \cdot \dot{w} \end{aligned}$$

Beide Differenzialgleichungen beschreiben das Verhalten mit Zeitverhalten 1. Ordnung. Die Kreis-Zeitkonstante ist in beiden Fällen gleich ($T_x = T_y$).

Tab. 4.5 Zahlenwerte für das Beharrungsverhalten (P-T₁-Strecke mit P-Regler)

| Zahlenwerte für | $X_P = 200 \%$ | $X_P = 50 \%$ |
|-----------------------------------|--|-----------------|
| $K_{PR} = \frac{100\%}{X_P}$ | $K_{PR} = \frac{100\%}{200\%} = 0,5$ | $K_{PR} = 2$ |
| $V_0 = K_{PR} \cdot K_{PS}$ | $V_0 = 0,5 \cdot 2 = 1$ | $V_0 = 4$ |
| $R = \frac{1}{1+V_0}$ | $R = \frac{1}{1+1} = 0,5$ | $R = 0,2$ |
| $x_{Bz} = R \cdot K_{PS} \cdot z$ | $x_{Bz} = 0,5 \cdot 2 \cdot (-10\%) = -10\%$ | $x_{Bz} = -4\%$ |
| $y_{Bz} = -R \cdot V_0 \cdot z$ | $y_{Bz} = -0,5 \cdot 1 \cdot (-10\%) = +5\%$ | $y_{Bz} = +8\%$ |

- c) Skizzieren Sie das Zeitverhalten nach einer sprunghaften Störung $z = -10\%$ für Regel- und Stellgröße ausgehend vom Arbeitspunkt $X_0 = W_0$ für die Reglereinstellungen $X_{P1} = 200\%$ und $X_{P2} = 50\%$.

Bei linearen Differenzialgleichungen gilt das Superpositionsprinzip, d. h. erst wird der Zeitverlauf der Störung untersucht und anschließend das Führungsverhalten. Die Wirkung der beiden Verhalten lässt sich dann linear überlagern (z. B. durch Addition der Beharrungswerte).

Für das Störverhalten vereinfachen sich die Gleichungen für Regel- und Stellgröße zu:

$$R \cdot T_S \cdot \dot{x} + x = R \cdot K_{PS} \cdot z \quad \text{und} \quad R \cdot T_S \cdot \dot{y} + y = -R \cdot V_0 \cdot z.$$

Beharrungsverhalten (Tab. 4.5) (d. h. $t \rightarrow \infty$, somit $\dot{x}, \dot{y} = 0$):

$$x_{Bz} = R \cdot K_{PS} \cdot z \quad \text{und} \quad y_{Bz} = -R \cdot V_0 \cdot z$$

Die Werte aus der Tab. 4.5 sind in Abb. 4.9 eingetragen. Um die Wirkung einer Änderung des Proportionalbereichs zu demonstrieren, sind zusätzlich die Werte der Strecke ohne Regler eingetragen:

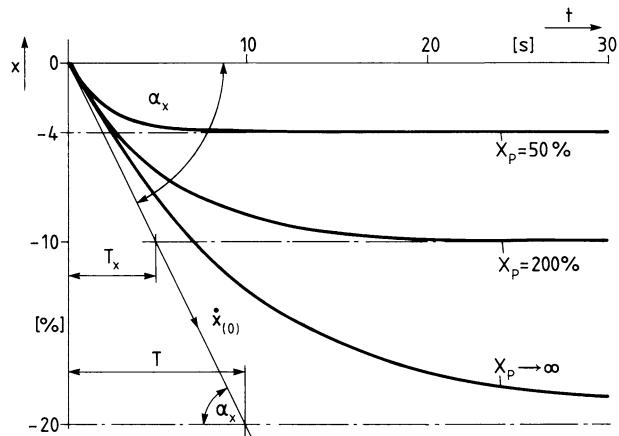
$$x_B(\text{o. R.}) = K_{PS} \cdot z = 2 \cdot (-10\%) = -20\%$$

$$y_B(\text{m. R.}) = 0\%$$

Anfangsverhalten: Die Anstiegsgeschwindigkeit für $t \rightarrow \infty$ kann aus den Gleichungen der Stellgröße und Regelgröße ermittelt werden. Dazu wird jeweils $x(0) = 0$ und $y(0) = 0$ gesetzt, denn zu diesem Zeitpunkt ist zwar schon die Störung z vorhanden, hat sich jedoch noch nicht als Änderung auf die beiden Größen ausgewirkt.

$$\begin{aligned} R \cdot T_S \cdot \dot{x}(0) + 0 &= R \cdot K_{PS} \cdot z \quad \rightarrow \quad \dot{x}(0) = \frac{R \cdot K_{PS}}{R \cdot T_S} \cdot z = \frac{K_{PS}}{T_S} \cdot z \\ R \cdot T_S \cdot \dot{y}(0) + 0 &= -R \cdot V_0 \cdot z \quad \rightarrow \quad \dot{y}(0) = \frac{-R \cdot V_0}{R \cdot T_S} \cdot z = \frac{-V_0}{T_S} \cdot z \end{aligned}$$

Abb. 4.9 Störsprungantwort des Regelkreises ($P-T_1$ -Strecke, P -Regler, $z = -10\%$) für Regelgröße



Man erkennt, dass die Anstiegsgeschwindigkeit der Regelgröße unabhängig von der Reglereinstellung ist. Die Kreis-Zeitkonstante $T_x = R \cdot T_S$ kann jeweils am Beharrungswert $R \cdot K_{PS}$ angetragen werden. Daraus ergibt sich folgender Anstiegswinkel:

$$\tan \alpha_x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{R \cdot K_{PS} \cdot z}{R \cdot T_S} = \dot{x}(0).$$

Zur Berechnung des Winkels α_x wird zusätzlich ein Maßstabsfaktor benötigt, der die unterschiedliche Skalierung von Zeitachse und Ordinate berücksichtigt.

$$\alpha_x = \arctan(\dot{x}(0) \cdot F_x) \quad \text{mit } F_x = \frac{t \text{ (s)}}{10 \text{ cm}} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{x \text{ (%)}},$$

Damit wird die Anstiegsgeschwindigkeit dimensionslos gemacht.

$$\alpha_y = \arctan(\dot{y}(0) \cdot F_y)$$

Die rechnerischen Ergebnisse lassen sich leicht im Zeitverlauf Abb. 4.9 skizzieren und vergleichen. Nach ca. $4 \cdot T_x$ hat die Regelgröße (bis auf 2 %) den Beharrungswert erreicht. Ein kleinerer Proportionalbereich bedeutet also nicht nur eine geringere bleibende Regelabweichung, sondern zusätzlich noch eine schnellere Einstellung dieses Beharrungswertes. Man erkennt außerdem, dass der Zeitverlauf der Regelgröße mit dem der Stellgröße korreliert ist.

- d) Skizzieren Sie das Zeitverhalten nach einem Führungssprung $w = +10\%$ für Regel- und Stellgröße für die Reglereinstellungen ($X_{P1} = 200\%$ und $X_{P2} = 50\%$)

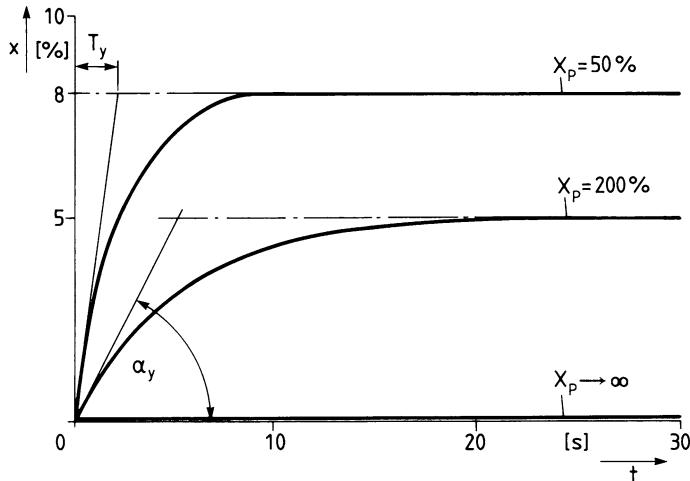
Beim Führungsverhalten ergeben sich folgende Gleichungen:

$$R \cdot T_S \cdot \dot{x} + x = R \cdot V_0 \cdot w$$

$$R \cdot T_S \cdot \dot{y} + y = R \cdot K_{PR} \cdot w + R \cdot T_S \cdot K_{PR} \cdot \dot{w}$$

Tab. 4.6 Zahlenwerte für das Anfangsverhalten (P-T₁-Strecke mit P-Regler)

| Zahlenwerte für | $X_P = 200 \%$ | $X_P = 50 \%$ |
|--|--|---------------------------------------|
| $T_x = T_y = R \cdot T_S$ | $T_x = 0,5 \cdot 10 \text{ s} = 5 \text{ s}$ | $T_x = 2 \text{ s}$ |
| $\dot{x}(0) = \frac{K_{PS}}{T_S} \cdot z$ | $\dot{x}(0) = \frac{2}{10 \text{ s}} \cdot (-10 \%) = -2 \frac{\%}{\text{s}}$ | $\dot{x}(0) = -2 \frac{\%}{\text{s}}$ |
| $\dot{y}(0) = -\frac{V_0}{T_S} \cdot z$ | $\dot{y}(0) = -\frac{1}{10 \text{ s}} \cdot (-10 \%) = +1 \frac{\%}{\text{s}}$ | $\dot{y}(0) = 4 \frac{\%}{\text{s}}$ |
| $F(x) = \frac{t (\text{s})}{10 \text{ cm}} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{x (\%)}$ | $F_x = \frac{20 \text{ s}}{20 \%} = 1 \frac{\text{s}}{\%}$ | $F_x = 1 \frac{\text{s}}{\%}$ |
| $F(y) = \frac{t (\text{s})}{10 \text{ cm}} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{y (\%)}$ | $F_y = \frac{20 \text{ s}}{10 \%} = 2 \frac{\text{s}}{\%}$ | $F_y = 2 \frac{\text{s}}{\%}$ |
| $\alpha_x = \arctan(\dot{x}(0) \cdot F_x)$ | $\alpha_x = \arctan(-2 \frac{\%}{\text{s}} \cdot 1 \frac{\text{s}}{\%}) = -63,4^\circ$ | $\alpha_x = -63,4^\circ$ |
| $\alpha_y = \arctan(\dot{y}(0) \cdot F_y)$ | $\alpha_y = \arctan(1 \frac{\%}{\text{s}} \cdot 2 \frac{\text{s}}{\%}) = +63,4^\circ$ | $\alpha_y = 82,9^\circ$ |

**Abb. 4.10** Störsprungantwort des Regelkreises (P-T₁-Strecke, P-Regler, $z = -10 \%$) für Stellgröße

Beharrungsverhalten:

$$x_{Bw} = R \cdot V_0 \cdot w \quad \text{und} \quad y_{Bw} = R \cdot K_{PR} \cdot w$$

Das Beharrungsverhalten ist identisch mit dem eines Kreises, der aus einer verzögungssarmen Regelstrecke und P-Regler aufgebaut ist (siehe Beispiel 4.1). Auch beim Führungsverhalten zeigt dieser Regelkreis eine bleibende Regeldifferenz $w - x_{Bw}$, die umso kleiner wird, je kleiner der Proportionalbereich X_p oder je größer der Proportionalwert K_{PR} eingestellt ist (Abb. 4.10).

Anfangsverhalten: Die Regelgröße im geschlossenen Kreis zeigt das Verhalten der e-Funktion für Verzögerung 1. Ordnung, wie es schon für das Störverhalten beschrieben wurde. Nur wird jetzt das Anfangsverhalten (s. Tab. 4.6) abhängig von der Reglereinstellung.

$$\dot{x}(0) = \frac{V_0}{T_S} \cdot w; \quad \alpha_x = \arctan(\dot{x}(0) \cdot F_x)$$

Tab. 4.7 Zahlenwerte für Führungssprung (P-T_S-Strecke mit P-Regler)

| | | |
|-----------------------------------|---|----------------|
| Zahlenwerte für | $X_P = 200\%$ | $X_P = 50\%$ |
| $x_{Bw} = R \cdot V_0 \cdot w$ | $x_{Bw} = 0,5 \cdot 1 \cdot 10\% = 5\%$ | $x_{Bw} = 8\%$ |
| $e_{bl} = w - x_{Bw}$ | $e_{bl} = 10\% - 5\% = 5\%$ | $e_{bl} = 2\%$ |
| $y_{Bw} = R \cdot K_{PR} \cdot w$ | $y_{Bw} = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 10\% = 2,5\%$ | $y_{Bw} = 4\%$ |

Die Gleichung der Stellgröße muss zunächst umgeformt werden. Man geht immer davon aus, dass das System für $t < 0$ in Beharrung ist. In der Gleichung ist mit w eine zeitliche Ableitung der Führungsgröße vorhanden, die dieser Forderung widerspricht. Ein Sprung zum Zeitpunkt $t = 0$ führt zu einer Unstetigkeitsstelle. Diesem Problem können wir aus dem Weg gehen, indem wir die Gleichung einmal integrieren. Die Integrationskonstanten werden alle zu Null, wenn wir die Anfangsbedingungen zu Null wählen:

$$R \cdot T_S \cdot y + \int_0^t y \, dt = R \cdot K_{PR} \int_0^t w \, dt + R \cdot T_S \cdot K_{PR} \cdot w.$$

Für $t \rightarrow 0$ ergibt sich daraus:

$$\int_0^t dt = 0 \text{ eingesetzt: } R \cdot T_S \cdot y(0) = R \cdot T_S \cdot K_{PR} \cdot w$$

und daraus:

$$y(0) = K_{PR} \cdot w.$$

Die Stellgröße zeigt (Abb. 4.11) zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Sprung, dessen Höhe abhängig von der Reglereinstellung ist. Wenn die Eingangsgröße w eines verzögerungsfreien P-Reglers sprunghaft verändert wird, muss sich auch die Ausgangsgröße y sprunghaft verändern und zwar proportional zum Verstärkungsfaktor K_{PR} (s. Tab. 4.7).

In Abschn. 4.2.2 wurde gezeigt, dass die Ausgangsgröße als Sprungantwort einen Sprung zeigt, wenn die höchste Ableitung der rechten und der linken Seite der Differenzialgleichung von gleicher Ordnung sind. Dies ist auch hier zu erkennen.

Der weitere Verlauf kann mit der ursprünglichen Form der Differenzialgleichung beschrieben werden, wenn wir die Anfangsbedingung $y(0)$ in die Gleichung einsetzen.

Anfangsverhalten für $t \rightarrow 0$, aber $t \neq 0$: Nach einem Sprung $w(t = 0)$ ändert sich die Führungsgröße anschließend zeitlich nicht mehr: $\dot{w}(t = 0) = 0$

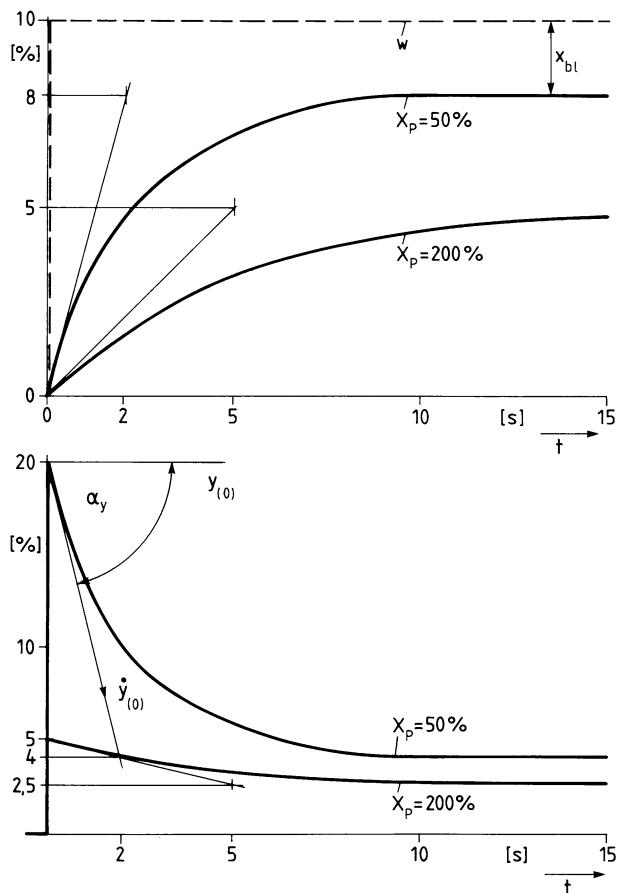
$$R \cdot T_S \cdot \dot{y}(t = 0) + y(0) = R \cdot K_{PR} \cdot w$$

$$R \cdot T_S \cdot \dot{y}(0) + K_{PR} \cdot w = R \cdot K_{PR} \cdot w$$

und daraus das Anfangsverhalten:

$$\dot{y}(0) = \frac{R \cdot K_{PR} - K_{PR}}{R \cdot T_S} \cdot w = \frac{y_{Bw} - y(0)}{R \cdot T_S}.$$

Abb. 4.11 Führungssprungantwort des Regelkreises (P-T₁-Strecke, P-Regler, $\Delta w = 10\%$) für Regel- und Stellgröße



Nach einem positiven Sprung verläuft die Stellgröße mit endlicher Stellgeschwindigkeit nach unten ($y(0) > y_{Bw}$). Auch hier gilt wieder, wie im Steigungsdreieck in Abb. 4.11 abzulesen ist (s. dazu auch Tab. 4.8):

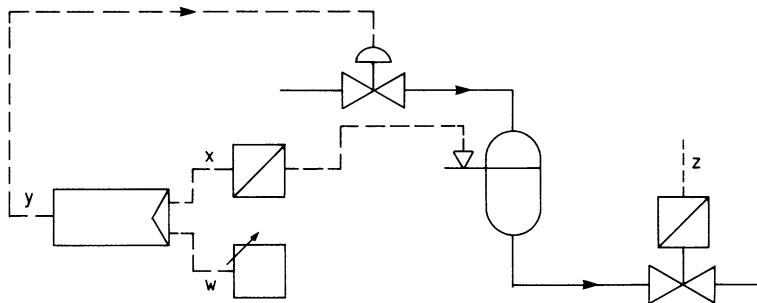
$$\alpha_y = \arctan(\dot{y}(0) \cdot F_y)$$

4.3.2 Regelkreis ohne bleibende Regeldifferenz

Der Vorteil eines Reglers mit I-Anteil ist, dass die bleibende Regeldifferenz e vermieden wird. Der I-Teil kommt erst dann zu Ruhe, wenn $\int e dt$ zu Null wird. Dazu muss aber $e = 0$ sein.

Tab. 4.8 Anfangsverhalten bei Führungsverhalten ($P-T_1$ -Strecke mit P -Regler)

| Zahlenwerte: | $X_P = 200 \%$ | $X_P = 50 \%$ |
|---|---|---------------------------------------|
| $\dot{x}(0) = \frac{V_0}{T_S} \cdot w$ | $\dot{x}(0) = \frac{1}{10\text{s}} \cdot 10\% = 1 \frac{\%}{\text{s}}$ | $\dot{x}(0) = 4 \frac{\%}{\text{s}}$ |
| $y(0) = K_{PR} \cdot w$ | $y(0) = 0,5 \cdot 10\% = 5\%$ | $y(0) = 20\%$ |
| $\dot{y}(0) = \frac{R \cdot K_{PR} - K_{PR}}{R \cdot T_S} \cdot w$ | $\dot{y}(0) = \frac{0,5 \cdot 0,5 - 0,5}{0,5 \cdot 10\text{s}} \cdot 10\% = -0,5 \frac{\%}{\text{s}}$ | $\dot{y}(0) = -8 \frac{\%}{\text{s}}$ |
| $F_x = \frac{t(\text{s})}{10\text{cm}} \cdot \frac{10\text{cm}}{x(\%)}$ | $F_x = \frac{10\text{s}}{10\%} = 1 \frac{\text{s}}{\%}$ | $F_x = 1 \frac{\text{s}}{\%}$ |
| $F_y = \frac{t(\text{s})}{10\text{cm}} \cdot \frac{10\text{cm}}{y(\%)}$ | $F_y = \frac{10\text{s}}{20\%} = 0,5 \frac{\text{s}}{\%}$ | $F_y = 0,5 \frac{\text{s}}{\%}$ |
| $\alpha_x = \arctan(\dot{x}(0) \cdot F_x)$ | $\alpha_x = \arctan(1 \frac{\%}{\text{s}} \cdot 1 \frac{\text{s}}{\%}) = 45^\circ$ | $\alpha_x = 76^\circ$ |
| $\alpha_y = \arctan(\dot{y}(0) \cdot F_y)$ | $\alpha_y = \arctan(-0,5 \frac{\%}{\text{s}} \cdot 0,5 \frac{\text{s}}{\%}) = -14^\circ$ | $\alpha_y = -76^\circ$ |

**Abb. 4.12** Gerätefließbild der Wasserstandsregelung**Beispiel 4.3 (Wasserstandsregelung mit PI-Regler)**

Ein Wasserhochbehälter (Abb. 4.12) mit einer Füllhöhe $h = 4 \text{ m}$ und mit Rückwirkung des Abflusses auf den Wasserstand habe näherungsweise lineares $P-T_1$ -Verhalten.

Aus Messungen ist bekannt:

Proportionalbeiwert: $K_{PS} = 4$ (dimensionslos); Zeitkonstante: $T = 600 \text{ s}$

Der Behälter wird durch ein (gleichprozentiges) Ventil mit näherungsweise P -Verhalten gespeist:

Stellbereich: $Y_H = 20 \text{ mm} \hat{=} 100 \%$

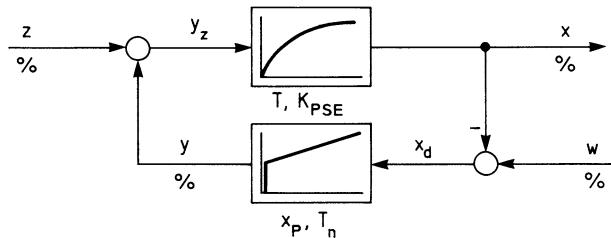
- a) Stellen Sie die Differenzialgleichung des Regelkreises für die Regelgröße x auf.

Als Arbeitspunkt wird festgelegt:

$X_0 = W_0 = 80\% (\hat{=} 3,2 \text{ m}) \quad Y_0 = 50\% (\hat{=} 10 \text{ mm}); \quad Z_0 = 50\% (\hat{=} 10 \text{ Skt.})$

Der Wirkungsplan der Wasserstandsregelung ist in Abb. 4.13 dargestellt.

Abb. 4.13 Wirkungsplan der Wasserstandsregelung



Vereinfachend wird angenommen, dass die Störgröße z am Eingang der Regelstrecke wirke. Der abfließende Massenstrom \dot{m}_{ab} , der maßgeblich für die Störgröße verantwortlich ist, muss dann in Einheiten der Stellgröße y (hier in %) ausgedrückt werden. Nur dann dürfen z und y zu y_z zusammengefasst werden.

Mathematisch käme dies einer Reduktion von z auf y gleich. In der Praxis kann dazu bei vorhandener Störung die Stellgröße so lange verändert werden bis der Zustand vor dem Einwirken der Störung erreicht ist. Die Änderung von y entspricht betragsmäßig der Störgröße in Einheiten der Stellgröße. Die Vorzeichenumkehr liegt im Vergleicher des Reglers mit der Regeldifferenz $e = w - x$.

Gleichung der Regelstrecke:

$$T \cdot \dot{x} + x = K_{PS} \cdot y$$

Gleichung des Reglers:

$$y = K_{PR} (w - x) + K_{IR} \cdot \int_0^t (w - x) dt$$

Eingesetzt:

$$T \cdot \dot{x} + x = K_{PS} \cdot z + K_{PS} \cdot K_{PR} \cdot (w - x) + K_{PS} \cdot K_{IR} \int (w - x) dt$$

Durch einmalige Differentiation erhält man daraus:

$$T \cdot \ddot{x} + \dot{x} = K_{PS} \cdot \dot{z} + V_0 \cdot \dot{w} - V_0 \cdot \dot{x} + K_{PS} \cdot K_{IR} \cdot w - K_{PS} \cdot K_{IR} \cdot x$$

Sortieren, d. h. Ausgangsgröße x und deren Ableitungen nach links, Eingangsgrößen z, w und deren Ableitungen nach rechts:

$$T \cdot \ddot{x} + (1 + V_0) \cdot \dot{x} + K_{PS} \cdot K_{IR} \cdot x = K_{PS} \cdot \dot{z} + K_{PS} \cdot K_{IR} \cdot w + V_0 \cdot \dot{w}$$

Daraus ergibt sich die MSR-Form

$$\underbrace{\frac{T}{K_{PS} \cdot K_{IR}}}_{T_0^2} \cdot \ddot{x} + \underbrace{\frac{1}{R \cdot K_{PS} \cdot K_{IR}}}_{T_1} \cdot \dot{x} + x = \frac{1}{K_{IR}} \cdot \dot{z} + w + \frac{K_{PR}}{K_{IR}} \cdot \dot{w}$$

b) Werten Sie das Zeitverhalten aus.

Beharrungsverhalten, d. h. alle Ableitungen verschwinden:

$$x_B = w \quad (\text{Index B} = \text{Beharrung})$$

Wie zu erwarten, zeigt die Regelgröße im geschlossenen Regelkreis mit PI-Regler weder bei Störverhalten noch bei Führungsverhalten eine bleibende Regelabweichung.

Anfangsverhalten ($t \rightarrow 0$): Durch Integration erhält man:

$$T_0^2 \cdot \dot{x} + T_1 \cdot x + \int x dt = \frac{1}{K_{IR}} \cdot z + \int w dt + \frac{K_{PR}}{K_{IR}} \cdot w$$

Diese Gleichung beschreibt das Anfangsverhalten, wenn die Integrationen vernachlässigt werden. Da sich x für kleine Zeiten t nur wenig vom Arbeitspunkt unterscheidet, ergibt sich:

$$\frac{T}{K_{PS} \cdot K_{IR}} \cdot \dot{x}(0) = \frac{1}{K_{IR}} \cdot z + \frac{K_{PR}}{K_{IR}} \cdot w$$

Sowohl für Stör- als auch für Führungsverhalten steigt die Regelgröße mit endlicher Geschwindigkeit an:

$$\dot{x}(0)_z = \frac{K_{PS}}{T} \cdot z; \quad \dot{x}(0)_w = \frac{V_0}{T} \cdot w$$

In beiden Fällen entspricht dies dem Anfangsverhalten des Regelkreises mit P-Regler.

Schwingungsverhalten: Der Dämpfungsgrad D wird berechnet nach

$$D = \frac{T_1}{2 \cdot T_0} = \frac{1}{2 \cdot R \cdot K_{PS} \cdot K_{IR}} \cdot \sqrt{\frac{K_{PS} \cdot K_{IR}}{T}} = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{1}{T \cdot K_{PS} \cdot K_{IR}}}$$

- c) Der I-Teil des Reglers wird so eingestellt, dass für die Nachstellzeit $T_i = T$ gilt.
Auf welchen Wert muss der P-Teil des Reglers eingestellt werden, damit der Dämpfungsgrad $D = 1,25$ wird?

Zur Ermittlung des Dämpfungsgrades D müssen die Einstellwerte des Reglers bekannt sein. Beim Einheitsregler gilt für den Proportionalbeiwert des Reglers:

$$K_{PR} = \frac{Y_H}{X_P} = \frac{100\%}{X_P} \quad X_P = \text{Proportionalbereich des Reglers in \%}$$

Integrierbeiwert des Reglers

$$K_{IR} = \frac{Y_H}{X_P \cdot T_i} = \frac{100\%}{X_P \cdot T_i} \quad T_i = \text{Nachstellzeit des Reglers in s}$$

X_P und T_i sind häufig verwendete Einstellwerte am analogen Einheitsregler. Die Beiwerte der Gleichung des Dämpfungsgrades werden durch die Einstellwerte ersetzt.

$$D = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{T_i \cdot X_P}{T \cdot K_{PS} \cdot 100\%}} = \frac{1 + V_0}{2} \sqrt{\frac{T_i}{T} \cdot \frac{1}{V_0}}$$

Aufgelöst nach V_0 ergibt sich die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} V_0^2 + \left(2 - 4D^2 \cdot \frac{T}{T_i}\right) \cdot V_0 + 1 &= 0 \\ V_0 &= \left(2D^2 \cdot \frac{T}{T_i} - 1\right) \pm \sqrt{\left(2D^2 \cdot \frac{T}{T_i} - 1\right)^2 - 1} \end{aligned}$$

Für $T = T_i$ und $D = 1,25$ errechnet sich:

$$V_0 = 2,125 \pm 1,875 \begin{cases} +0,25 \\ +4,00 \end{cases}$$

Für den Einstellwert X_P erhalten wir also zwei Lösungen ($K_{PS} = 4$):

$$X_P = \frac{K_{PSE}}{V_0} \cdot 100\% = \begin{cases} 1600\% \\ 100\% \end{cases}$$

Sehen wir davon ab, dass der Wert 1600 % bei den meisten Reglern nicht einstellbar ist, sind beide Lösungen zulässig. Für beide Einstellwerte erhalten wir $D = 1,25$. Zwischen diesen beiden Werten muss der Dämpfungsgrad ein Minimum haben, und zwar genau dort, wo der Ausdruck unter der Wurzel 0 wird.

$$\left(2D_{\min}^2 \cdot \frac{T}{T_i}\right)^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad D_{\min} = \sqrt{\frac{T_i}{T}}$$

Der minimale Dämpfungsgrad wird nur durch das Verhältnis T_i/T bestimmt; je kleiner die Nachstellzeit T_i eingestellt wird, desto stärker wird das Schwingungsverhalten des Regelkreises. Setzen wir beispielsweise $T_i = T$, wird $D_{\min} = 1$ bei $V_0 = 1$ bzw. $X_P = 400\%$.

- d) Skizzieren Sie das Zeitverhalten der Regelgröße nach einem Störsprung z und einem Führungssprung w von jeweils 10 %.

Für die Reglereinstellung $X_P = 100\%$ und für den Proportionalbeiwert der Strecke $K_{PSE} = 4$ errechnet sich die Kreisverstärkung zu:

$$V_0 = K_{PSE} \cdot \frac{100\%}{X_P} = 4$$

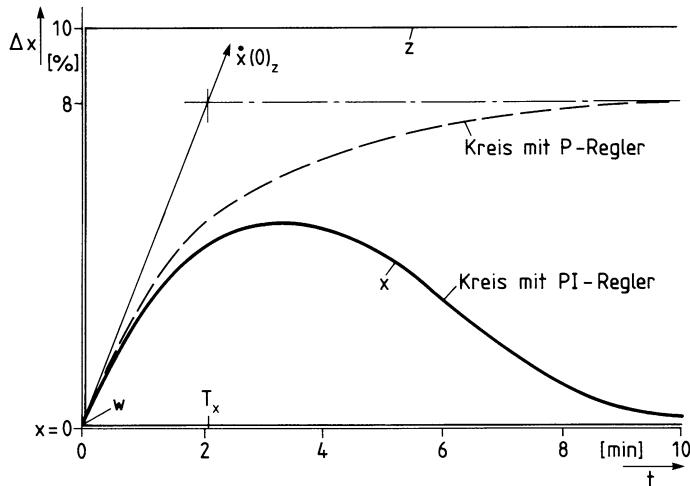


Abb. 4.14 Zeitverhalten der Regelgröße nach einem Störsprung $z = 10\%$ im Regelkreis mit P-T₁-Strecke und PI-Regler; $K_{PS} = 4$; $T = 600\text{ s} = T_i$; $X_P = 100\%$

und der Regelfaktor zu

$$R = \frac{1}{1 + V_0} = 0,2.$$

Die nachfolgenden Werte des Störverhaltens werden in Abb. 4.16 eingetragen.

Bei einer Störgröße $z = 10\%$ ist der Beharrungswert $x_{Bz} = 0$ und die Anstiegsgeschwindigkeit am Anfang

$$\dot{x}(0)_z = \frac{K_{PS}}{T} \cdot z = \frac{4}{600\text{ s}} \cdot 10\% = 0,067 \frac{\%}{\text{s}}.$$

Dies entspricht der Anstiegsgeschwindigkeit der Strecke ohne Regler und des Regelkreises mit P-Regler. Der Regelkreis mit PI-Regler verhält sich also am Anfang ähnlich wie diese beiden Systeme. Deshalb ist in Abb. 4.14 auch das Zeitverhalten mit P-Regler eingetragen.

$$x_{Bz} (\text{P-Regler}) = R \cdot K_{PS} \cdot z = 8\%$$

Wegen $D = 1,25$ ist die Strecke nicht schwingend.

Die maximale Regelabweichung bleibt kleiner als $8\% \hat{=} 32\text{ cm}$ Wasserstand.

Die Kreis-Zeitkonstante T_x (Kreis mit P-Regler) wird berechnet nach

$$T_x = R \cdot T = 0,2 \cdot 600\text{ s} = 120\text{ s}$$

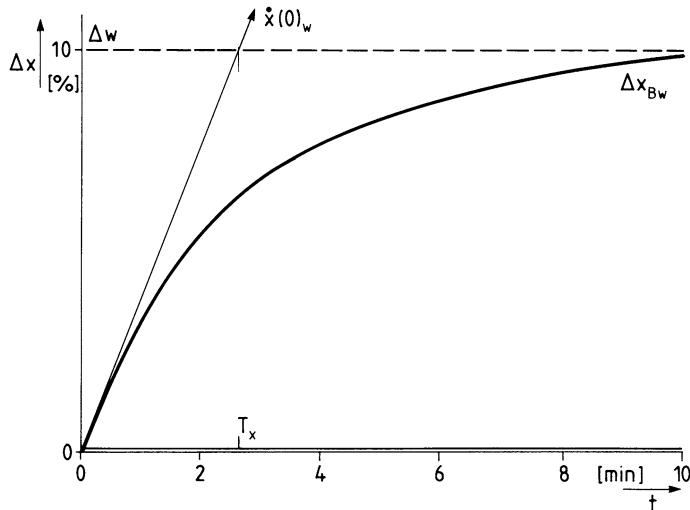


Abb. 4.15 Zeitverhalten der Regelgröße nach einem Führungssprung $w = 10\%$ im Regelkreis mit P-T₁-Strecke und PI-Regler: $K_{PS} = 4$; $T = 600\text{ s} = T_i$; $X_P = 100\%$

Der Wert kann in Abb. 4.14 am Beharrungswert abgelesen werden. Der Kreis mit P-Regler hat nach ca. $4 \cdot T_x = 480\text{ s}$, der Kreis mit PI-Regler nach $5 \cdot T_x = 600\text{ s}$ den jeweiligen Beharrungswert erreicht.

Das Führungsverhalten ist in Abb. 4.15 dargestellt. Der Beharrungswert beträgt

$$x_{Bw} = w = 10\% \hat{=} 40\text{ cm Wasserstand}$$

und das Anfangsverhalten

$$\dot{x}(0) = \frac{V_0}{T} \cdot w = \frac{4}{600\text{ s}} \cdot 10\% = 0,067 \frac{\%}{\text{s}}$$

Nach ca. $4 \cdot 150\text{ s} = 600\text{ s}$ wird der Beharrungswert erreicht.

- e) Stellen Sie die Regelkreisgleichung für die Stellgröße auf (Annahme: $T = T_i$). Skizzieren Sie das Zeitverhalten der Stellgröße für die Kennwerte aus c).

In die Reglergleichung

$$\dot{y} = K_{PR} \cdot \dot{w} - K_{PR} \cdot \dot{x} + K_{IR} \cdot w - K_{IR} \cdot x$$

wird die umgeformte Streckengleichung eingesetzt.

$$x = K_{PS} \cdot z + K_{PS} \cdot y - T \cdot \dot{x}$$

$$\dot{y} = K_{PR} \cdot \dot{w} - K_{PR} \cdot \dot{x} + K_{IR} \cdot w - K_{IR} \cdot K_{PS} \cdot z - K_{PS} \cdot y + T \cdot \dot{x}$$

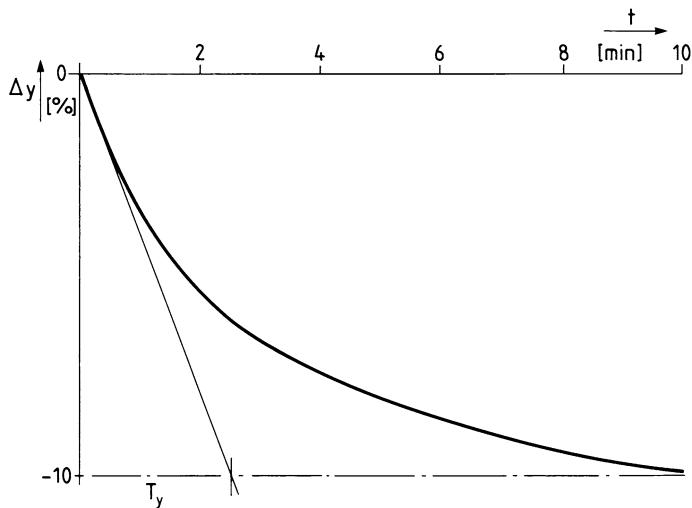


Abb. 4.16 Zeitverhalten der Stellgröße nach einem Störsprung $z = 10\%$ im Regelkreis mit P-T₁-Strecke und PI-Regler: $K_{PS} = 4$; $T = 600\text{ s} = T_i$, $X_P = 100\%$

Die beiden Terme, die noch die Geschwindigkeit der Regelgröße enthalten, können nur für $T = T_i$ eliminiert werden:

$$\begin{aligned} K_{PR} \cdot \dot{x} &= K_{IR} \cdot T_S \cdot \dot{x} \\ \frac{100\%}{X_P} \cdot \dot{x} &= \frac{100\%}{X_P \cdot T_i} \cdot T \cdot \dot{x} \rightarrow T_i = T \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Laplace-Transformation wird später noch ein Verfahren vorgestellt, bei dem diese Einschränkung nicht mehr notwendig ist.

Sortiert $\dot{y} + K_{IR} \cdot K_{PS} \cdot y = K_{IR} \cdot w + K_{PR} \cdot \dot{w} - K_{IR} \cdot K_{PS} \cdot z$ und in die MSR-Form gebracht

$$\underbrace{\frac{1}{K_{IR} \cdot K_{PS}}}_{T_y} \cdot \dot{y} + y = \frac{1}{K_{PS}} \cdot w + \frac{K_{PR}}{K_{PS} \cdot K_{IR}} \cdot \dot{w} - z$$

ergibt sich eine Differenzialgleichung 1. Ordnung. Das Störverhalten ist in Abb. 4.16 dargestellt, das Führungsverhalten in Abb. 4.17.

Mit den Kennwerten aus d) ergibt sich:

Beharrungswert:

$$y_{Bz} = -z = -10\% \quad \text{und} \quad y_{Bw} = \frac{1}{K_{PS}} \cdot w = \frac{10\%}{4} = 2,5\%$$

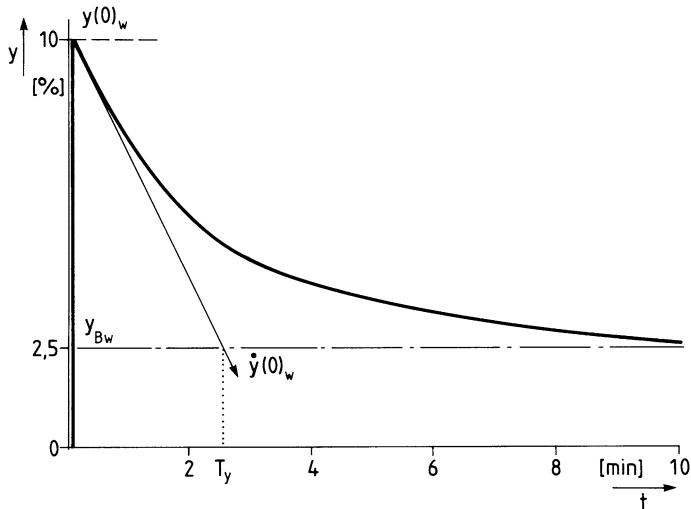


Abb. 4.17 Zeitverhalten der Stellgröße nach einem Führungssprung $w = 10\%$ im Regelkreis mit P-T₁-Strecke und PI-Regler: $K_{PS} = 4$, $T = 600\text{ s} = T_i$, $X_P = 100\%$

Anfangsverhalten:

$$T_y = \frac{1}{K_{PS} \cdot K_{IR}} = \frac{X_P \cdot T_n}{100\% \cdot K_{PSE}} = \frac{100\% \cdot 600\text{ s}}{100\% \cdot 4} = 150\text{ s}$$

Störsprung

$$T_y \cdot \dot{y}(0)_z + 0 = -z \rightarrow \dot{y}(0)_z = -\frac{1}{T_y} \cdot z = -\frac{10\%}{150\text{ s}} = -0,067 \frac{\%}{\text{s}}$$

Das Anfangsverhalten der Stellgröße (Abb. 4.17) nach einem Sollwertsprung muss ebenfalls ein Sprung sein, da die höchste Ableitung links von gleichem Grad ist wie die höchste Ableitung rechts. Durch Integration der Gleichung für die Stellgröße ergibt sich:

$$T_y \cdot y + \int y \, dt = \frac{1}{K_{PSE}} \cdot \int w \, dt + T_y \cdot K_{PR} \cdot w$$

$$\text{Für } t \rightarrow 0 \text{ gilt } y(0) = K_{PR} \cdot w = 1 \cdot 10\% = 10\%$$

Nachfolgend fällt die Stellgröße wie eine Entladefunktion auf den Wert y_{Bw} ab.

$$T_y \cdot \dot{y}(0) + y(0) = \frac{1}{K_{PS}} \cdot w = y_{Bw} \quad (\text{s. o.})$$

$$\dot{y}(0) = \frac{y_{Bw} - y(0)}{T_y} = \frac{\frac{1}{K_{PS}} - K_{PR}}{T_y} \cdot w = \frac{2,5\% - 10\%}{150\text{ s}} = -0,05 \frac{\%}{\text{s}}$$

Die Stellgröße im Regelkreis zeigt D-T₁-Verhalten. Nach ca. $4 \cdot T_y = 600\text{ s}$ erreicht die Stellgröße Beharrungszustand.

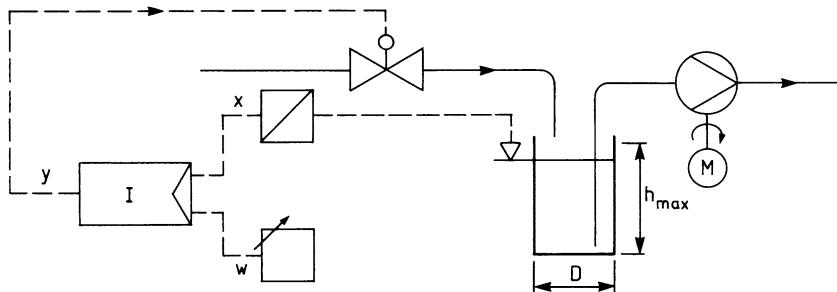


Abb. 4.18 Gerätefließbild einer Wasserstandsregelung

4.3.3 Regelkreise mit schwingendem Verhalten

Ab einer Systemgleichung 2. Ordnung kann sich der einmaschige Regelkreis gedämpft schwingend ($0 < D < 1$ und $D \geq 1$) verhalten. Die Analyse des Regelkreises gibt Auskunft, welches Schwingungsverhalten dann im geschlossenen Kreis vorliegt.

Beispiel 4.4 (Wasserstandsregelung mit strukturinstabiler Regelung)

Aus einem Wasserspeicher wird das Wasser nicht durch freies Ausströmen, sondern über eine drehzahlregelbare Pumpe entnommen. Dadurch erhält der Wasserspeicher I-Verhalten (Abb. 4.18).

Der Wasserbehälter hat zylindrische Form mit einem Durchmesser $D = 1,6\text{ m}$ und einer Höhe $h_{\max} = 4\text{ m}$. Der Zulauf wird durch ein motorisch angetriebenes Stellventil gestellt ($K_{PV} = 2\text{ m}^3/\text{h}/\%$). Die Pumpe im Ablauf hat einen Proportionalbeiwert von $K_{Pz} = 2,3\text{ m}^3/\text{h}/\%$. Die Regelgröße wird über eine Bohrung im Behälterboden als statischer Druck erfasst und über einen Messumformer in ein Einheitssignal umgewandelt ($K_{PM} = 0,25\text{ \%}/\text{cm}$). Der Regelkreis wird geschlossen durch einen I-Regler ($K_{IR} = 0,02\text{ l/s}$).

a) Bestimmen Sie den dimensionslosen Integrierbeiwert der Regelstrecke.

Der Integrierbeiwert der erweiterten Regelstrecke wird nach dem Wirkungsplan Abb. 4.19 als Produkt der Einzelglieder berechnet (Reihenschaltung).

$$K_{IS} = K_{PV} \cdot K_{IB} \cdot K_{PM}$$

Darin ist der Integrierbeiwert des Behälters reziprok zum Behälterquerschnitt:

$$K_{IB} = \frac{1}{A_B} = \frac{4}{\pi \cdot D^2} = \frac{4}{\pi \cdot 1,6^2 \text{ m}^2} = 0,5 \frac{1}{\text{m}^2}.$$

Der Beiwert wird umgerechnet auf die Dimension der Ausgangsgröße (hier cm), bezogen auf die Dimension der Eingangsgröße (hier m^3/h).

$$K_{IB} = 0,5 \frac{1}{\text{m}^2} \cdot \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 0,014 \frac{\text{cm}}{\text{m}^3/\text{h}} \cdot \frac{1}{\text{s}}$$

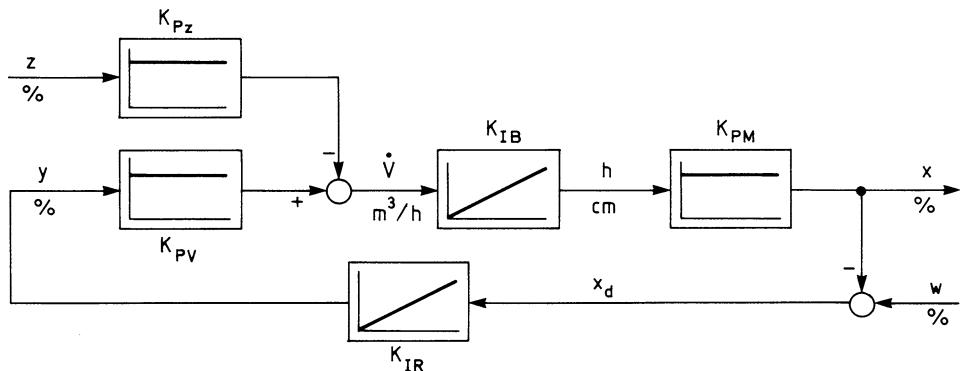


Abb. 4.19 Wirkungsschaltplan der Wasserstandsregelung mit I-Strecke und I-Regler

Da die Proportionalbeiwerte bekannt sind, gilt für den Integratorbeiwert der erweiterten Strecke für die Stellgrößenänderung:

$$K_{IS}(y) = 2 \frac{m^3/h}{\%} \cdot 0,014 \frac{cm}{m^3/h} \cdot \frac{1}{s} \cdot 0,25 \frac{\%}{cm} = 0,007 \frac{1}{s}$$

und für die Störgrößenänderung:

$$K_{IS}(z) = 2,3 \frac{m^3/h}{\%} \cdot 0,014 \frac{cm}{m^3/h} \cdot \frac{1}{s} \cdot 0,25 \frac{\%}{cm} = 0,008 \frac{1}{s}.$$

- b) Stellen Sie die Differenzialgleichung des Regelkreises für die Regelgröße x und für die Stellgröße y auf.

Ausgehend von der jeweils gewählten Ausgangsgröße werden die Gleichungen der Einzelglieder eingesetzt (bevorzugt entgegen der Wirkungsrichtung).

Gleichung für den Messumformer:

$$x = K_{PM} \cdot h \quad \rightarrow \quad \dot{x} = K_{PM} \cdot \dot{h}$$

Gleichung des Behälters:

$$\dot{h} = \frac{dh}{dt} = K_{IB} (\dot{V}_{zu} - \dot{V}_{ab}) \quad \rightarrow \quad \dot{x} = K_{PM} \cdot K_{IB} \dot{V}_{zu} - K_{PM} \cdot K_{IB} \cdot \dot{V}_{ab}$$

Gleichung des Ventils und der Pumpe:

$$\dot{V}_{zu} = K_{PV} \cdot y \text{ und } \dot{V}_{ab} = K_{Pz} \cdot z$$

$$\dot{x} = K_{PM} \cdot K_{IB} \cdot K_{PV} \cdot y - K_{PM} \cdot K_{IB} \cdot K_{Pz} \cdot z = K_{IS}(y) \cdot y - K_{IS}(z) \cdot z$$

Gleichung des Reglers:

$$\dot{y} = K_{\text{IR}} \cdot w - K_{\text{IR}} \cdot x$$

Eingesetzt:

$$\ddot{x} = K_{\text{IS}}(y) \cdot K_{\text{IR}} \cdot w - K_{\text{IS}}(y) \cdot K_{\text{IR}} \cdot x - K_{\text{IS}}(z) \cdot \dot{z}$$

Sortiert:

$$\ddot{x} + K_{\text{IS}} \cdot (y) \cdot K_{\text{IR}} \cdot x = K_{\text{IS}}(y) \cdot K_{\text{IR}} \cdot w - K_{\text{IS}}(z) \cdot \dot{z}$$

MSR-Form für die Regelgröße x :

$$\frac{1}{K_{\text{IS}}(y) \cdot K_{\text{IR}}} \cdot \ddot{x} + x = w - \frac{K_{\text{IS}}(z)}{K_{\text{IS}}(y)} \cdot \frac{1}{K_{\text{IR}}} \cdot \dot{z}$$

Wählt man als Ausgangsgröße die Stellgröße, so erhält man:

$$\frac{1}{K_{\text{IS}}(y) \cdot K_{\text{IR}}} \cdot \ddot{y} + y = \frac{1}{K_{\text{IS}}(y)} \cdot \dot{w} + \frac{K_{\text{IS}}(z)}{K_{\text{IS}}(y)} \cdot z$$

- c) Skizzieren Sie das Zeitverhalten des Regelkreises nach einem Störsprung $z = 10\%$ bzw. nach einem Führungssprung $w = 10\%$.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Regelkreis im Arbeitspunkt in Ruhe. Dies erreicht man z. B. durch kurzfristiges Zuschalten eines P-Reglers. Tritt ein Störsprung bzw. ein Führungssprung auf, so liefert die Differenzialgleichung für $t \rightarrow \infty$ das Ergebnis:

$$x_B = w; \quad y_B = z.$$

Dies bedeutet, dass keine bleibende Regelabweichung erwartet wird (I-Regler!) und dass die Störgröße durch die Stellgröße kompensiert wird.

Das Schwingungsverhalten wird durch die Kennwerte T_1 und T_0 beschrieben:

$$T_0 = \sqrt{\frac{1}{K_{\text{IS}}(y) \cdot K_{\text{IR}}}} = \sqrt{\frac{1}{0,007 \text{ 1/s} \cdot 0,02 \text{ 1/s}}} = 84,5 \text{ s} = \frac{1}{\omega_0}$$

$$T_1 = 0$$

Damit wird der Dämpfungsgrad D unabhängig von der Einstellung des Reglers

$$D = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_1}{T_0} = 0.$$

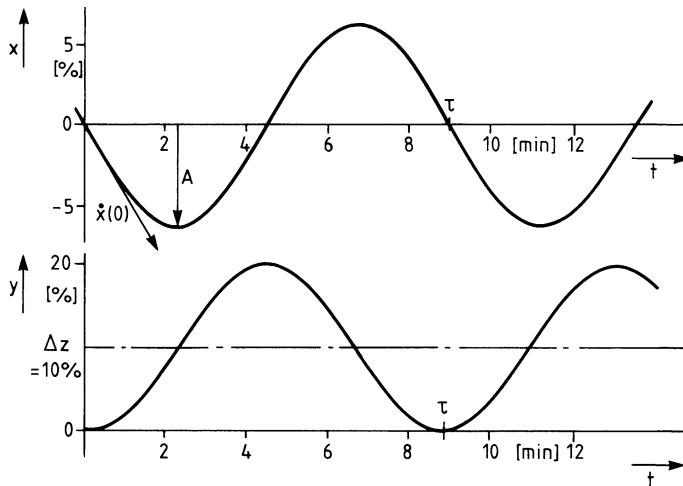


Abb. 4.20 Störverhalten des Regelkreises mit I-Strecke und I-Regler: $K_{IR} = 0,2 \text{ s}^{-1}$; $z = 10\%$

$D = 0$ bedeutet Dauerschwingung mit konstanter Amplitude symmetrisch um den Be- harrungswert. Schon bei kleinsten Störungen oder Führungsgrößenänderungen zeigt der Regelkreis mit I-Strecke und I-Regler Dauerschwingungen, der Regelkreis ist strukturinstabil.

Die Schwingungsperiode der Dauerschwingung kann berechnet werden nach:

$$\tau = 2\pi \cdot T_0 = 2\pi \cdot 84,5 \text{ s} = 531 \text{ s}$$

Dies ist die Dauer einer Schwingung für Regel- und Stellgröße, für Stör- und Führungs- verhalten.

Störverhalten: Die Phasenlage der Schwingung wird schon im Anfangsverhalten erkennbar. Betrachten wir zunächst das Störverhalten.

Anfangsverhalten:

$$\begin{aligned} T_0^2 \cdot \dot{x} + \int x dt &= -\frac{K_{IS}(z)}{K_{IS}(y)} \cdot \frac{1}{K_{IR}} \cdot z \\ \dot{x}(0)_z &= -\frac{K_{IS}(z)}{K_{IS}(y)} \cdot \frac{1}{T_0^2 \cdot K_{IR}} \cdot z \\ &= -\frac{0,0081/\text{s}}{0,0071/\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ s}}{84,5^2 \text{ s}^2 \cdot 0,02} \cdot 10\% = -0,08 \frac{\%}{\text{s}} \\ \dot{y}(0)_z &= 0 \end{aligned}$$

Das Zeitverhalten nach einem Störsprung $z = 10\%$ ist in Abb. 4.20 skizziert. Die Regelgröße x zeigt den Verlauf einer Sinusschwingung. Zum Zeitpunkt $t = 0$ fällt

der Wasserstand (= Regelgröße) mit einer Geschwindigkeit $\dot{x}(0) = -0,08\% (\cong -3,2 \text{ mm/s})$. Diese Phasenverschiebung von 180° (Vorzeichenumkehr) wird verursacht durch die sprunghafte Vergrößerung des abfließenden Volumenstroms \dot{V}_{ab} .

Die Anfangsgeschwindigkeit bestimmt auch die Amplitude der Schwingung. Mit dem Lösungsansatz:

$$\begin{aligned}x &= A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \\ \dot{x} &= \omega_0 \cdot A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) - \omega_0 \cdot B \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)\end{aligned}$$

kann über die Anfangsbedingungen die Amplitude der Schwingung berechnet werden:

$$\begin{aligned}t = 0 &\rightarrow x = x_0 = 0 = A \cdot 0 + B \cdot 1 \Rightarrow B = 0 \\ t = 0 &\rightarrow \dot{x} = \dot{x}(0) = -0,08\%/\text{s} = \omega_0 \cdot A \cdot 1 - \omega_0 \cdot B \cdot 0 \\ &\Rightarrow A = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} = -0,08 \frac{\%}{\text{s}} \cdot 84,5 \text{ s} = -6,76\%\end{aligned}$$

Die Sinusschwingung wird beschrieben durch

$$x = -6,76\% \cdot \sin\left(0,012 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) \quad \text{oder} \quad x = 6,76\% \cdot \sin\left(0,012 \frac{1}{\text{s}} \cdot t + \pi\right).$$

Der Störsprung $z = 10\%$ vergrößert den Abfluss um

$$\Delta \dot{V}_{\text{ab}} = 2,3 \text{ m}^3/\text{h}/\% \cdot 10\% = 23 \text{ m}^3/\text{h}.$$

Dadurch schwankt der Wasserstand unabhängig von der Lage des Arbeitspunktes um

$$\begin{aligned}\Delta x_{\text{max}} &= \pm 6,76\% \\ h_{\text{max}} &= \pm 6,76\% \cdot \frac{400 \text{ cm}}{100\%} = \pm 27 \text{ cm}\end{aligned}$$

Die Stellgröße y schwingt als Kosinusfunktion um den Beharrungswert z . Der Startwert dieser Schwingung ist $y(0) = -z$; $\dot{y}(0) = 0$.

Daraus ergibt sich

$$y = -10\% \cdot \cos\left(0,012 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) \quad \text{oder} \quad y = -10\% \cdot \cos\left(0,012 \frac{1}{\text{s}} \cdot t + \pi\right).$$

Der Ventilhub schwankt ausgehend vom Arbeitspunkt zwischen 0 und 20%, entsprechend

$$\dot{V}_{\text{zu}} = 0 \text{ bis } 40 \text{ m}^3/\text{h}.$$

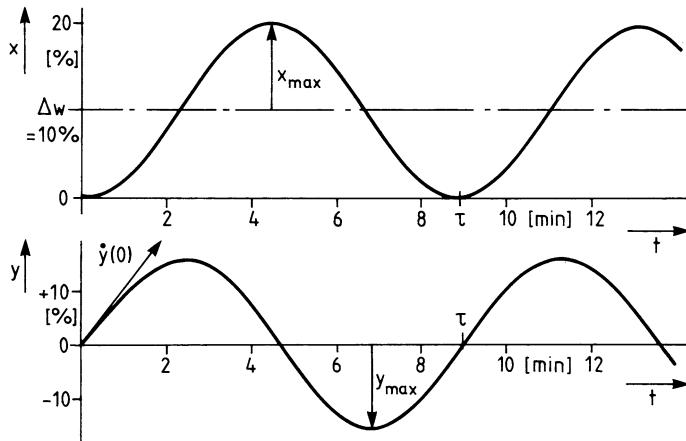


Abb. 4.21 Führungsverhalten des Regelkreises mit I-Strecke und I-Regler: $K_{\text{IR}} = 0,02 \text{ s}^{-1}$; $w = 10\%$

Führungsverhalten: Für das Anfangsverhalten nach einem Sollwertsprung gilt:

$$\begin{aligned}\dot{x}(0)_w &= 0 \\ T_0^2 \cdot \dot{y} + \int y dt &= \frac{1}{K_{\text{IS}}(y)} \cdot w \\ \dot{y}(0)_w &= \frac{1}{K_{\text{IS}}(y) \cdot T_0^2} \cdot w = \frac{1}{0,007 \frac{1}{\text{s}} \cdot 84,5^2 \text{s}^2} \cdot 10\% = 0,2 \frac{\%}{\text{s}}\end{aligned}$$

Das Zeitverhalten nach einem Sollwertsprung $w = 10\%$ ist in Abb. 4.21 dargestellt. Die Regelgröße schwingt symmetrisch um den neuen Sollwert.

Die Amplitude der Schwingung ist $x_{\max} = w = 10\%$, die Phasenverschiebung $\varphi = -\pi/2$.

Die Stellgröße schwingt symmetrisch um die Ausgangsgröße Y_0 im Arbeitspunkt.

Die Amplitude ist

$$y_{\max} = \dot{y}(0) \cdot T_0 = 0,2 \frac{\%}{\text{s}} \cdot 84,5 \text{s} = 16,9\%,$$

die Phasenverschiebung beträgt: $\varphi = 0$.

Aufgabe 4.1 (Wasserstandsregelung eines I-Behälters mit P-Regler)

Ein kleiner Vorratsbehälter in einer Laboranlage hat P-T₁-Verhalten. Er wird über ein Ventil mit einem motorischen Stellantrieb mit I-Verhalten versorgt. Daraus ergibt sich für die Strecke I-T₁-Verhalten. Durch Messung an der erweiterten Regelstrecke ergaben sich folgende Kennwerte: Streckenzzeitkonstante $T = 31 \text{ s}$; Integrierbeiwert $K_{\text{IS}} = 0,02 \text{ 1/s}$.

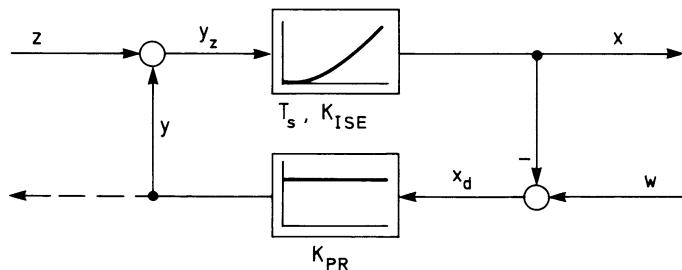


Abb. 4.22 Wirkungsplan einer $I-T_1$ -Strecke mit P-Regler

Die Störgröße greift näherungsweise am Eingang der Regelstrecke ein (Abb. 4.22).

- Stellen Sie die Differenzialgleichung des Regelkreises nach Abb. 4.2 für die Regel- und Stellgröße auf.
- Auf welchen Wert wird der Regler eingestellt, damit der Dämpfungsgrad $D = 0,35$ wird?
- Skizzieren Sie das Zeitverhalten von Regel- und Stellgröße für einen Störsprung $z = 10\%$.
- Skizzieren Sie das Zeitverhalten von Regel- und Stellgröße für einen Führungsprung.



4.4 Empirische Einstellregeln

Ziel aller regelungstechnischen Aufgaben ist es, den Regler oder die Regeleinrichtungen so auszuwählen und einzustellen, dass die vorgegebene Regelaufgabe mit einer zulässigen Regelabweichung und in möglichst kurzer Zeit erfüllt wird. Diesen Vorgang bezeichnet man auch als Entwurf oder Synthese von Regelkreisen.

Die Synthese von Regelkreisen beinhaltet

- Auswahl einer geeigneten Regelschaltung (z. B. einfacher einmaschiger Regelkreis, Regler mit Störgrößenaufschaltung, Kaskadenregelung)
- gerätetechnische Auslegung von Mess- und Stelleinrichtungen mit geeigneter Auswahl von Messort und Stellort
- Parametrierung der Reglerbausteine, Sollwertführung, Zeitschaltprogramm.

In diesem Abschnitt werden Entwurfsverfahren präsentiert, die experimentell für standardisierte Regelkreise ermittelt wurden und eine einfache Auslegung für geschlossene Regelkreise ermöglichen.

Nachfolgend wird erläutert,

- wie man für eine vorgegebene Regelstrecke einen geeigneten Regler auswählt,
- wann sich der geschlossene einmaschige Regelkreis stabil verhält,
- wie man die Güte einer Regelung beurteilen kann,
- nach welchen Verfahren die Parameter des Reglers eingestellt werden können.

In den vorangegangenen Abschnitten wurde deutlich gemacht, dass praktische Regelstrecken immer auch Nichtlinearitäten enthalten, mindestens in Form von Begrenzungen. Wenn wir uns im Folgenden auf lineare, zeitinvariante Systeme beschränken, so leistet dieses idealisierte System gute Dienste zur Erklärung der Wirkungsweise der verschiedenen Regler und liefert zumindest näherungsweise zuverlässige Reglereinstellwerte. Es entbindet den Betreiber der Anlage jedoch nicht, zyklisch die Qualität des Regelablaufes zu beobachten und insbesondere bei extremen Teillastzuständen die Stabilität zu überprüfen.

Die wichtigsten Gesichtspunkte bei der Auslegung einer Regelung sind

- Stabilität, d. h. Erreichen eines Ausgleichsvorgangs innerhalb einer zulässigen Zeit,
- Genauigkeit im Gleichgewichtszustand oder Beharrungszustandes,
- Güte beim Einschwingen (Anregelzeit und Ausregelzeit),
- Einhalten von Grenzen während des Regelungsvorgangs (begrenztes Überschwingen),
- Empfindlichkeit gegenüber Parameteränderungen.

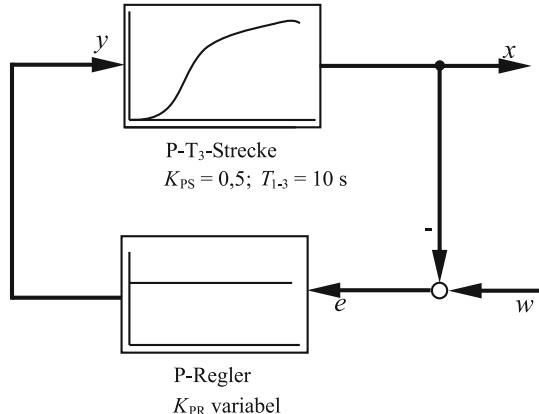
Ein nichtlineares System ist im Bereich definierter Abweichungen vom Arbeitspunkt stabil, wenn das zugehörige linearisierte System unter Berücksichtigung einer ausreichenden *Stabilitätsreserve* stabil ist. In diesem Abschnitt werden ausschließlich Regelkreise betrachtet, die zu einem Beharrungszustand führen.

4.4.1 Stabilität

Jeder Regelkreis (ab 3. Ordnung) kann aufgrund der Rückführungsstruktur instabil werden, d. h. es können Schwingungen auftreten, deren Amplituden anwachsen. Wird ein solcher falsch eingestellter Regelkreis z. B. durch eine Störung angestoßen, so kann ein Aufschaukeln der Amplituden zur Zwangsabschaltung oder sogar zur Zerstörung der Anlage führen. Diesen Vorgang nennt man *oszillatorische Instabilität* (Abb. 4.23 für $D < 0$).

Bei instabil eingestellten Regelkreisen ist ein gleichförmiges Anwachsen bzw. Abnehmen der Regelgröße nach einer Störung möglich, bis der Wert z. B. durch Anschläge zur Ruhe kommt (monotone Instabilität). Bei strukturstabilen Regelkreisen ist es immer möglich, durch eine geeignete Einstellung der Reglerparameter

Abb. 4.23 Regelkreisstruktur zur Analyse des Führungsverhaltens



- P-Teil des Reglers X_P bzw. K_{PR} und Offsetwert Y_0
- I-Teil des Reglers T_i bzw. K_{IR} und Integrierwert Y_I
- D-Teil des Reglers T_V bzw. K_{DR} und Verzögerungszeit T_D

einen stabilen Verlauf zu erreichen. So wird ein stabil eingestellter Regelkreis nach einer einmaligen sprunghaften Störung für große Zeiten auf einen Beharrungswert laufen, der innerhalb des Messbereichs der Regelgröße x liegt.

Ein Regelkreis arbeitet genau dann stabil, wenn er z. B. nach einer sprungförmigen Änderung eines Eingangssignals (Störungs- oder Führungsgröße) für $t \rightarrow \infty$ eine Ruhelage einnimmt.

Am Beispiel einer P-T₃-Strecke mit P-Regler nach Abb. 4.23 wird für verschiedene Reglereinstellungen die Abhängigkeit von der Dämpfung gezeigt (Abb. 4.24 und 4.25).

Für kleine Proportionalwerte K_{PR} (große Proportionalbereiche X_P) ergibt sich ein aperiodischer Verlauf ($D \geq 1$). Bei mittleren K_{PR} -Werten zeigt die Regelgröße im geschlossenen Regelkreis eine gedämpfte Schwingung ($0 < D < 1$). Bei einer bestimmten Einstellung des Reglers, hier bei $K_{PR} = 16$, zeigt der Regelkreis gerade Dauerschwingung ($D = 0$). Diese Einstellung nennt man auch *kritischen Zustand*. Diese Grenze darf nicht überschritten werden, denn bei noch größeren Proportionalwerten entstehen aufklingende Schwingungen. Die Einstellwerte eines P-Reglers, die zum Dauerschwingen führen, werden als kritischer Proportionalwert $K_{PR\text{ Krit}} = 16$ bezeichnet. Die Schwingungsperiode, die sich bei dieser Einstellung ergibt, heißt τ_{Krit} . Hier ergibt sich für die Einstellung $K_{PR} = 16$ ein Wert $\tau_{\text{krit}} = 36 \text{ s}$.

Unter $V_{0\text{ Krit}}$ versteht man die kritische Kreisverstärkung, die als Produkt der Proportionalwerte von Strecke und des kritisch eingestellten Regler berechnet wird, hier:

$$V_{0\text{ Krit}} = K_{PR\text{ Krit}} \cdot K_{PSE} = 16 \cdot 0,5 = 8.$$

Aus den Abb. 4.24 und 4.25 ist die bleibende Regeldifferenz abzulesen; das ist der Abstand des Beharrungswertes der Regelgröße vom Sollwert $e_{\text{bl}} = w - x_B$. Mit steigen-

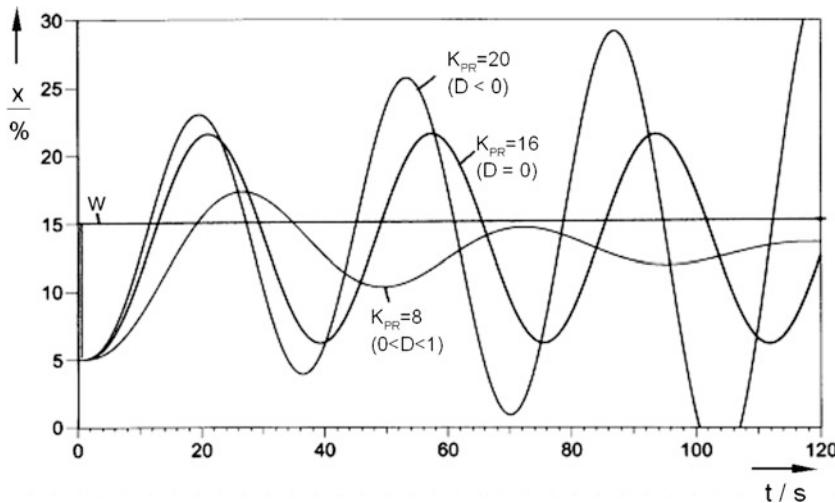


Abb. 4.24 Führungsverhalten des Regelkreises nach Abb. 4.23 für verschiedene Einstellungen des P-Reglers im kritischen Bereich

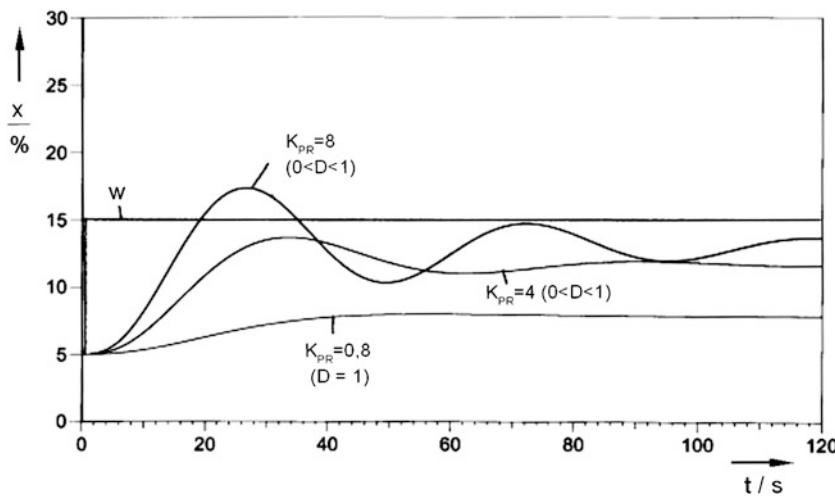


Abb. 4.25 Führungsverhalten des Regelkreises nach Abb. 4.23 für verschiedene Einstellungen des P-Reglers im aperiodischen Bereich

dem Proportionalwert nimmt die bleibende Regeldifferenz immer mehr ab; aber erst für $K_{PR} \rightarrow \infty$ wird diese Differenz zu Null. Auch die Anregelzeit τ_{an} wird mit steigendem Proportionalwert immer kürzer, dafür dauert es länger, bis die Regelgröße den Beharrungswert innerhalb eines vorgegebenen Toleranzbandes erreicht hat, d. h. die Ausregelzeit τ_{aus} wird größer.

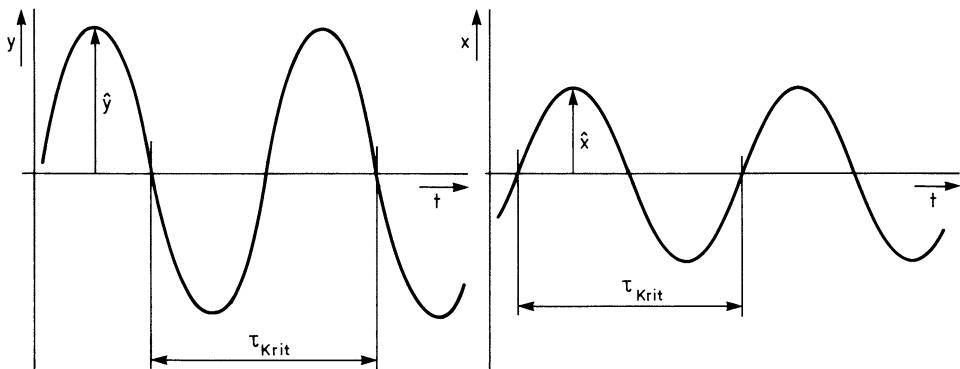


Abb. 4.26 Dauerschwingungsversuch eines einmaschigen Regelkreises mit P-Regler

Viele Einstellkriterien von Regelkreisen basieren darauf, dass man sich gezielt, d. h. in Richtung kleinerer Proportionalwerte, von diesem Stabilitätsrand entfernt hält. Für diese Verfahren ist die Kenntnis der Lage des Stabilitätsrandes unbedingt erforderlich. Es wird nachfolgend eine Methode gezeigt, wie man den kritischen Zustand ermitteln kann.

Stabilitätsrand Ziel ist die messtechnische Ermittlung der kritischen Kennwerte. Dazu wird die Regelstrecke mit einem (reinen) P-Regler geregelt. Ausgehend von einem kleinen Proportionalwert K_{PR} des Reglers wird der Wert K_{PR} ständig vergrößert. Dadurch wird die Dämpfung D des Regelkreises geringer, was sich in zunehmender Schwingungsneigung zeigt. Bei einer bestimmten Einstellung des P-Reglers erhält man gerade Dauerschwingung ($D = 0$). Der Stabilitätsrand ist erreicht.

In der Praxis wird gelegentlich statt des Proportionalwertes K_{PR} der Proportionalbereich X_P angegeben. Dieser ist oft dimensionsbehaftet (gleiche Einheit wie die Regelgröße) und gibt die maximal möglich bleibende Regeldifferenz an. Der Proportionalbereich wird wie folgt berechnet:

$$X_P = \frac{Y_H}{K_{PR}} = \frac{100\%}{K_{PR}} \quad \text{oder} \quad X_{PKrit} = \frac{Y_H}{K_{PR\text{Krit}}} \quad \text{mit } Y_H \text{ als Stellbereich.}$$

Da die Ablesung am Regler sehr ungenau ist, wird in der Praxis die Auswertung des Schriebes durchgeführt (Abb. 4.26). Mit Hilfe der Amplituden der Regelgröße \hat{x} und der Stellgröße \hat{y} lässt sich der kritische Proportionalbereich wie folgt berechnen:

$$X_{PKrit} = \frac{\hat{x}}{\hat{y}} \cdot Y_H$$

Ebenfalls aus dem Schrieb kann die Schwingungsperiode der Dauerschwingung abgelesen werden zu τ_{Krit} .

Tab. 4.9 Regler-Einstellwerte für Störverhalten zum Schwingungsversuch nach Ziegler und Nichols

| Regler | $K_{PR}/K_{PR\text{ Krit}}$ | $X_P/X_{P\text{ Krit}}$ | T_i/τ_{Krit} | T_V/τ_{Krit} |
|--------|-----------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| P | 0,5 | 2 | – | – |
| PI | 0,455 | 2,2 | 0,85 | – |
| PID | 0,588 | 1,7 | 0,5 | 0,125 |

Einstellregeln nach dem kritischen Zustand Eine der ältesten und einfachsten Methoden zur experimentellen Ermittlung des Stabilitätsrandes wurde von Ziegler und Nichols vorgeschlagen. Der Einsatzbereich liegt hauptsächlich in der Verfahrenstechnik für Festwertregler. Es lassen sich Einstellwerte für optimales Störverhalten definieren, die zwar keine optimales, jedoch eine stabiles Regelverhalten ergeben. In Tab. 4.9 sind diese Einstellwerte für verschiedene Reglertypen angegeben.

4.4.2 Einstellwerte aus der Sprungantwort

Es leuchtet schnell ein, dass der Dauerschwingungsversuch an realen Anlagen selten durchführbar ist. Zum einen ist die Gefahr, dass unzulässige Grenzwerte überschritten werden, sehr groß. Zum anderen ist es kaum möglich, während des Versuches keine zusätzlichen Störungen auf die Anlage einwirken zu lassen. Deshalb wurden die Regelstrecken im Labor mit Hilfe von Simulationsmodellen nachgebildet und getestet. Da für die Nachbildung die Kenntnis der Streckenkennwerte, z. B. T_u , T_g und K_{PSE} notwendig ist, bietet es sich an, diese Kennwerte direkt für ein Einstellkriterium zu verwenden.

Einstellregeln für schnelle Regelkreise Von Chien, Hrones und Reswick wurden günstigste Einstellwerte mittels eines Analogrechners für verschiedene Übergangsfunktionen ermittelt. Diese Einstellregeln kommen vor allem bei elektrischen Regelstrecken oder mechanisch-elektrischem Antrieb zum Einsatz. Als Optimierungskriterium wählten sie Regelvorgänge aus, bei denen entweder geringes Überschwingen auftrat ($D \approx 1$) oder bei denen der Dämpfungsgrad D den Wert 0,45 hat (nach Abb. 2.52 $\approx 20\%$ Überschwingen). In allen Fällen wurde als günstigste Einstellung die gewählt, die die kürzeste Ausregelzeit τ_{aus} ergab (Tab. 4.10).

Es ist berücksichtigt, dass der Regler umso schwächer (kleinerer K_{PR} -Wert) eingestellt werden muss, je größer der Schwierigkeitsgrad der Regelstrecke $S = T_u/T_g$ ist.

Die empirisch ermittelten Werte sind so vorgegeben, dass bei kleineren Proportionalwerten des Reglers bzw. bei kleineren Kreisverstärkungen sich eine größere Dämpfung D ergibt.

In Tab. 4.10 sind die Einstellwerte nicht nur für Störverhalten, sondern auch für Führungsverhalten angegeben. Ein Regler muss unterschiedlich eingestellt werden, je nachdem, ob eine Störung möglichst rasch ausgeglichen werden soll oder ob er einem zeitlich

Tab. 4.10 Reglereinstellwerte für Störverhalten und Führungsverhalten aus der Sprungantwort nach Chien, Hrones und Reswick

| Regler | | $D \approx 1,0\%$ Überschwingung | | $D \approx 0,45, 20\%$ Überschwingung | |
|--------|-----------------------------|----------------------------------|-----------------|---------------------------------------|------------------|
| Typ | Parameter | Störung | Führung | Störung | Führung |
| P | $V_0 \cdot \frac{T_u}{T_g}$ | 0,3 | | 0,7 | |
| PI | $V_0 \cdot \frac{T_u}{T_g}$ | 0,6 | 0,35 | 0,7 | 0,6 |
| | T_i | $4 \cdot T_u$ | $1,2 \cdot T_g$ | $2,3 \cdot T_u$ | $1 \cdot T_g$ |
| PID | $V_0 \cdot \frac{T_u}{T_g}$ | 0,95 | 0,6 | 1,2 | 0,95 |
| | T_i | $2,4 \cdot T_u$ | $1 \cdot T_g$ | $2 \cdot T_u$ | $1,35 \cdot T_g$ |
| | $\frac{T_v}{T_u}$ | 0,42 | 0,5 | 0,42 | 0,47 |

Tab. 4.11 Empirische Einstellwerte nach Samal

| Kennwerte | | $V_0 \cdot T_u / T_g$ | | T_i / T_g | | T_v / T_g | |
|-----------|------------|-----------------------|--------------------|----------------|--------------------|----------------|--------------------|
| Regler | | Stör-verhalten | Führungs-verhalten | Stör-verhalten | Führungs-verhalten | Stör-verhalten | Führungs-verhalten |
| P | Kriechend | 0,11 | 0,13 | — | — | — | — |
| | Schwingend | 0,22 | 0,25 | — | — | — | — |
| PI | Kriechend | 0,16 | 0,10 | 0,51 | 0,57 | — | — |
| | Schwingend | 0,37 | 0,18 | 0,41 | 0,46 | — | — |
| PID | Kriechend | 0,68 | 0,38 | 0,60 | 0,51 | 0,68 | 0,60 |
| | Schwingend | 0,70 | 0,55 | 0,70 | 0,65 | 0,81 | 0,75 |

veränderlichen Sollwert möglichst gut folgen soll. Insbesondere greift die Führungsgröße direkt am Regler ein und zeigt als Sprungantwort einen Sprung der Stellgröße, wogegen der Störeingriff durch das Zeitverhalten der Strecke gemildert wird. Soll der Einschwingvorgang optimal verlaufen, muss bei Führungsverhalten eine kleinere Nachstellzeit T_i eingestellt werden.

Einstellregeln für langsame Regelkreise Gerade für Regelstrecken im Anlagenbau führen die Einstellwerte von Chien, Hrones und Reswick zu unbefriedigenden Ergebnissen. Hier werden die Einstellregeln verwendet, die unter Leitung von Samal aufgestellt wurden (Tab. 4.11).

Umwandlung von kritischen Werten Einstellwerte, die aus der Sprungantwort entnommen werden, können mit Abb. 4.27 in kritische Werte umgewandelt werden.

Richtwert:

$$V_{0 \text{ Krit}} \cdot \frac{T_u}{T_g} = 1,85$$

Dazu wird die Sprungantwort der proportionalen Regelstrecke höherer Ordnung aufgenommen und ausgewertet (T_u , T_g , K_{PS}). Aus dem Verhältnis $T_u/T_g = 0,218$ für eine

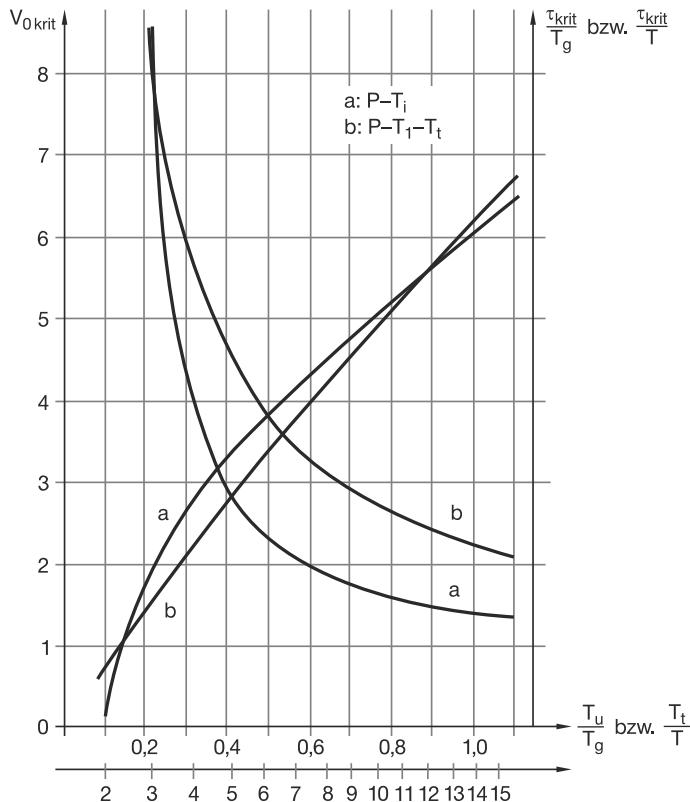


Abb. 4.27 Kritische Kreisverstärkung und Schwingungsdauer von Regelkreisen mit P-Regler

Regelstrecke 3. Ordnung lässt sich an Kurve *a* der Wert $V_{0\text{ krit}} = 8$ ablesen. Das gleiche Diagramm lässt sich auch dann verwenden, wenn eine Regelstrecke mit Totzeit T_t und einer Zeitkonstanten T vorliegt (Kurve *b*).

Beispiel

Bei einer Regelstrecke 3. Ordnung mit Ausgleich beträgt nach Abb. 4.27 der Schwierigkeitsgrad $S = T_u/T_g = 0,21$. Ebenfalls lässt sich für ein Regelstreckenmodell mit drei gleichgroßen Zeitkonstanten ablesen:

$$V_{0\text{ krit}} = 0 \quad \text{und} \quad \tau_{\text{krit}}/T_g = 1$$

4.4.3 Regelgüte

Bei ungünstiger Wahl der Regelparameter können Regelkreise im Teillastfall instabil werden. Die tatsächlich gewählten Kennwerte müssen deshalb von den kritischen Werten

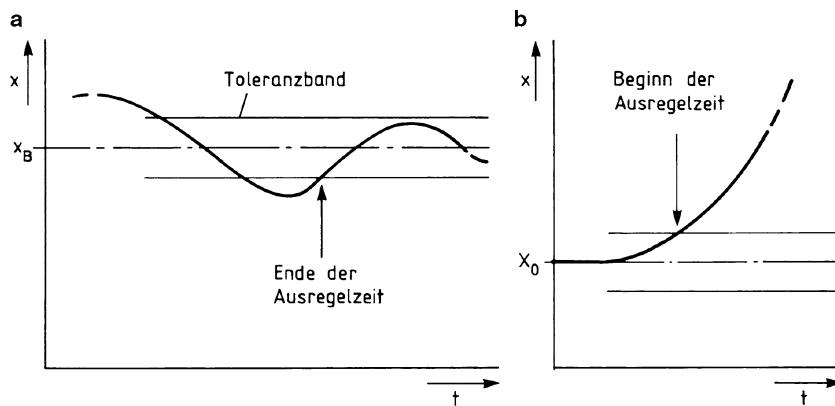


Abb. 4.28 Definition des Toleranzbandes für Führungs- und Störverhalten

genügend weit wegliegen. Je weiter man von dem Stabilitätsrand entfernt ist, umso besser ist der Regelsprung gedämpft. Dies bedeutet aber, dass es immer länger dauert, bis die Regelgröße wieder in den Bereich seines Beharrungswertes kommt. Genau das ist ebenso unerwünscht wie die Instabilität. Irgendwo in der Mitte muss es einen Kompromiss geben, der ausreichende Dämpfung garantiert und trotzdem schnelle Regelsprünge ermöglicht. Was als „günstigste“ Einstellung bezeichnet wird, ist Ansichtssache. Mit persönlichen Anschauungen des Bearbeiters kommt man jedoch nicht weiter. Wir benötigen konkrete Kriterien, mit denen die Güte eines Regelsprungs numerisch bewertet werden kann.

Toleranzband In der Fertigungstechnik ist es üblich, enge Toleranzen für die geometrischen Maße vorzugeben. Bei den Toleranzen für die Einhaltung der Regelmässigkeit ist man deutlich großzügiger. Eine absolut genaue Regelung kann es nicht geben. Da Störungen stochastischer Natur sind, also regelmäßig und zufällig auftreten, wird das Regelsignal immer verrauscht sein. Beharrung bedeutet, dass das Signal innerhalb eines definierten Bandes von Werten bleibt. Dazu legt man um die Signalschwankungen ein Toleranzband.

Bei der Wahl des Toleranzbandes gilt:

- Je kleiner die Toleranz, umso größer wird der gerätetechnische Aufwand, diesen Bereich einzuhalten.

Dieses Toleranzband sollte abhängig sein von der Ursache, die zu der Abweichung geführt hat. So wählt man beim Störverhalten ein Band von $\pm 5\%$ des Störsprungs, umgerechnet auf die Stellgröße y oder beim Führungsverhalten $\pm 3\%$ einer Sollwertrampe, umgerechnet auf die Dimension der Regelgröße x (Abb. 4.28). Nur so ist ein Vergleich der Gütwerte des Regelsprungs möglich. Zusätzlich wird gefordert, dass die Antwort auf eine Testfunktion, im Allgemeinen die Sprungantwort, aufgenommen wird.

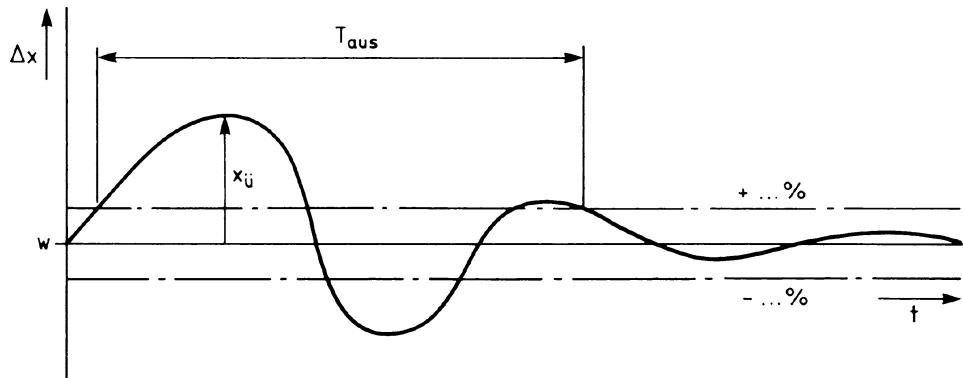


Abb. 4.29 Störsprungantwort eines Regelkreises mit PI-Regler; Ermittlung der Regelgüte

Da in den seltensten Fällen die Störgröße mitgeschrieben wird, sollte zur Ermittlung des Anfangszeitpunktes der Störung auch um den Startwert X_0 für $t \leq 0$ ein Toleranzband gelegt werden (Abb. 4.28b).

Gütemaß im Zeitbereich Aus der Störsprungantwort eines einfachen Regelkreises lassen sich typische Kennwerte ablesen, die eine zahlenmäßige Bewertung der Regelgüte zulassen (Abb. 4.29).

- Die Überschwingweite X_U gibt den Betrag der größten Regelabweichung an, der nach dem Störsprung auftritt. Dieser Wert ist aus Sicherheitsgründen oft begrenzt. Ist z. B. kein Überschwingen zulässig, muss der Regler auf den Dämpfungsgrad $D = 1$ eingestellt werden.
- Als Ausregelzeit T_{aus} , ist die Zeitspanne definiert, die beginnt, wenn der Wert der Regelabweichung nach dem Störsprung das vorgegebene Toleranzband verlässt, und die endet, wenn er in das Toleranzband des Beharrungswertes zum dauernden Verbleib wieder eintritt. Insbesondere Regelvorgänge mit kurzfristigen Störungen werden oft so ausgelegt, dass eine kurze Ausregelzeit vorhanden ist. Dazu muss man jedoch eine schwach gedämpfte Schwingung in Kauf nehmen (Abb. 4.29).

Insbesondere bei Führungsverhalten soll die Regelgröße mit nur geringer Überschwingweite folgen (Abb. 4.30, Einstellung 2). Dabei wird oft eine längere Ausregelzeit in Kauf genommen.

Bei einem Regelkreis mit P-Regler tritt die bleibende Regeldifferenz x_{bl} auf. Damit diese so klein wie möglich wird, muss der Proportionalwert des Reglers K_{PR} so groß wie möglich eingestellt werden, aber mit gerade noch ausreichender Dämpfung (Abb. 4.31).

Oft wird zur Beschreibung der Regelgüte die Anregelzeit T_{an} verwendet. Darunter versteht man die Zeitspanne, die beginnt, wenn der Wert der Regelgröße nach einem Sprung das Toleranzband verlässt, und die endet, wenn er erstmalig in den Bereich des Toleranz-

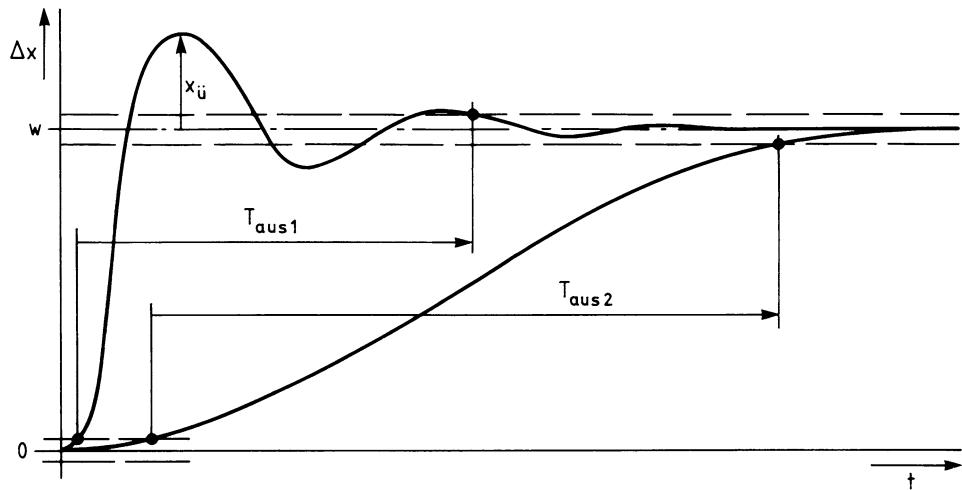


Abb. 4.30 Führungssprungantwort eines Regelkreises mit PI-Regler; Ermittlung der Regelgüte

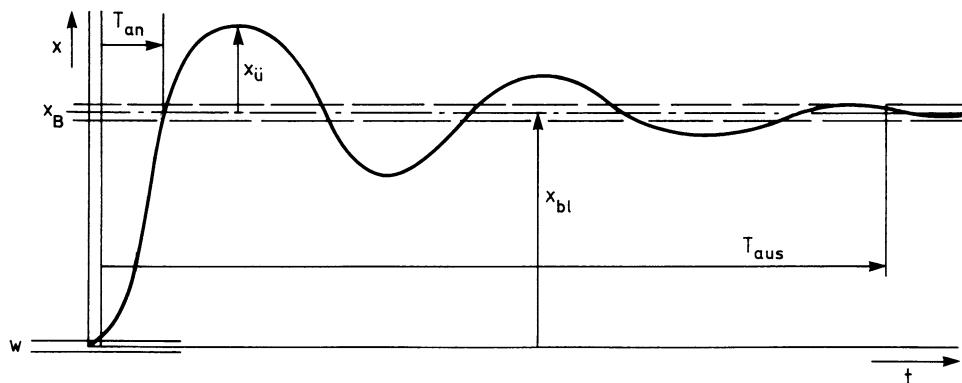


Abb. 4.31 Störsprungantwort eines Regelkreises mit P-Regler; Ermittlung der Regelgüte

bandes um den Beharrungswert wieder eintritt. Da eine kurze Anregelzeit auch eine große Überschwingweite $x_{\ddot{u}}$ bedingt, reicht normalerweise die Angabe eines der beiden Werte.

Integralkriterien Die im vorherigen Abschnitt eingeführten Kennwerte für das Gütemaß sind zwar für die Beurteilung des Ergebnisses geeignet, sind jedoch für die Auslegung im Zeitbereich zu wenig konkret. Selbst die gewichtete Funktion für die Regelgüte

$$RG = K_1 \cdot T_{an} + K_2 \cdot T_{aus} + K_3 \cdot x_{\ddot{u}} = \text{MIN!}$$

bereitet wegen der subjektiven Wahl der Gewichtungsfaktoren K_i Schwierigkeiten. Deshalb wurden als Gütemaß die Integralkriterien eingeführt. Bei einer digitalen Regelung ist

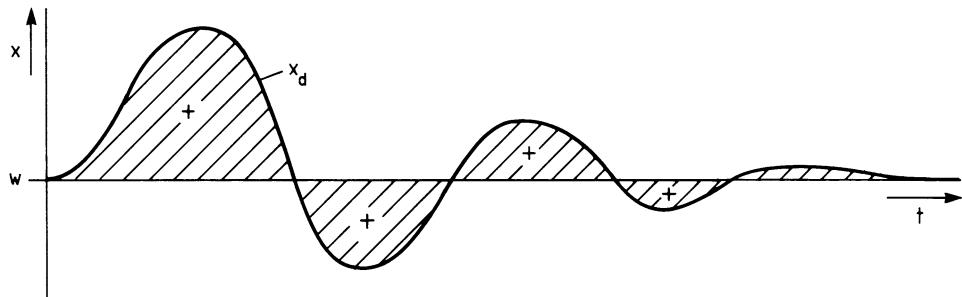


Abb. 4.32 Regelfläche $\int_0^{T_{\text{aus}}} |e| dt$ als Gütemaß im Zeitbereich (Betragsoptimum)

es heute kein Problem mehr, die Regelfläche

$$\int_0^{T_{\text{aus}}} |e| dt$$

zu berechnen (Abb. 4.32) und zwar vom Zeitpunkt $t = 0$ bis zur Ausregelzeit T_{aus} . Dazu verwendet man einen Absolut-Block und einen Integralblock aus dem Funktionsvorrat des digitalen Reglers. Als Testfunktion ist auch nicht mehr die Sprungfunktion notwendig. Optimales Regelverhalten liegt dann vor, wenn die lineare Regelfläche, z. B. bezogen auf die Störfäche, minimal wird. Multipliziert man die lineare Regelfläche mit dem Integrierbeiwert K_I , so erhält man die bleibende Stellgrößenänderung y_I durch den I-Teil des Reglers.

Allgemein gilt für das Integral:

$$I = \int_0^{T_{\text{aus}}} f[e(t)] dt \stackrel{!}{=} \text{MIN},$$

wobei $f[e(t)]$ eine beliebige Funktion sein kann. Aufgrund der verschiedenartigen Anforderungen, die an das Regelverhalten von Regelkreisen gestellt werden können, ist es nicht möglich, ein universell geeignetes Gütemaß festzulegen. Möchte man z. B. möglichst kurze Ausregzeiten τ_{aus} haben, wählt man als Funktion die zeitbeschwere betraglineare Regelfläche

$$f[e(t)] = |e(t)| \cdot t \cdot dt.$$

In sehr vielen Fällen hat sich das Minimum der quadratischen Regelfläche als Gütekriterium bewährt (Abb. 4.33)

$$I = \int_0^{T_{\text{aus}}} e^2 dt.$$

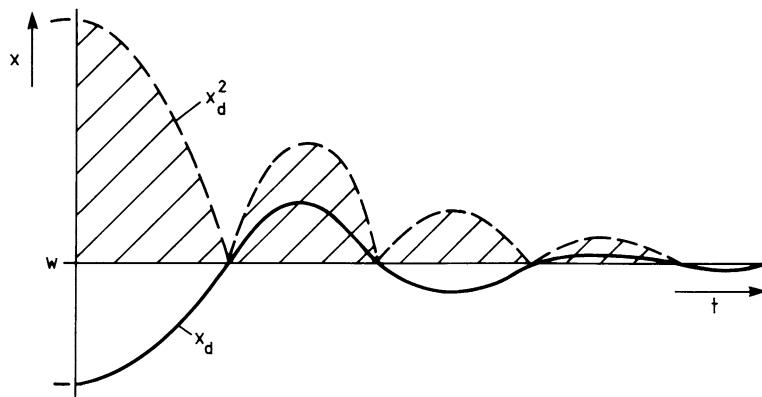


Abb. 4.33 Integral der quadratischen Regelfläche als Gütemaß im Zeitbereich

Der Vorteil ist, dass die jeweilige Fläche leicht berechnet werden kann. Da das Integral nicht bis $t \rightarrow \infty$, sondern nur bis zur Ausregelzeit T_{aus} berechnet wird, ist es möglich, auch Regelvorgänge mit bleibender Regelabweichung zu optimieren.

Hofmeister hat diese mathematischen Kriterien in verbale Beschreibungen umgewandelt:

- Anforderungskriterium Nr. 1:
Kleinste Überschwingung nach einmaliger sprunghafter Störung bei noch ausreichender Dämpfung des Ausregelvorganges (zeitbeschwere betragslineare Regelstrecke)
- Anforderungskriterium Nr. 2:
Möglichst kleine Überschwingungen sowohl nach unregelmäßigen sprunghaften als auch nach langsam periodischen Störungen (Betragsoptimum)
- Anforderungskriterium Nr. 3:
Stark gedämpftes Einschwingverhalten, insbesondere geringe Überschwingungen im Führungsverhalten (Quadratische Regelfläche).

4.4.4 Regleroptimierung

Nach den empirischen Einstellregeln ergibt sich ein Verhalten des Regelkreises, das zumindest stabil, meist auch nach dem gewählten Kriterium zufrieden stellend ist.

Verbesserungsrichtungen für Störverhalten (siehe Abb. 4.34):

- Bei aperiodischem Verhalten und wenn das erste Überschwingen nach einer sprunghaften Störung zu groß ist, wird der Proportionalwert K_{PR} vergrößert.
- Hat man eine schleichende Annäherung an den Sollwert, die zu langsam ist, dann wird der Integrierwert K_{IR} des Reglers vergrößert oder die Nachstellzeit T_i verkleinert.

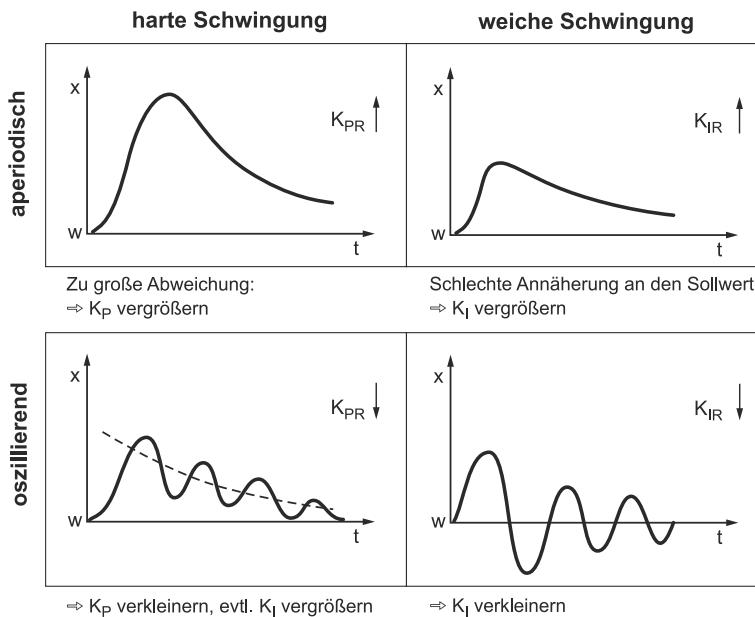


Abb. 4.34 Verbesserung der Einstellung bei PI-Reglern; obere Reihe: D zu groß, untere Reihe: D zu klein

- Bei oszillierendem Regelsprung um eine asymmetrische Schmiegefunktion wird der Proportionalwert des Reglers verkleinert und ggf. der Integrierwert geringfügig vergrößert.
- Bei einer symmetrischen Schwingung, die aber zu langsam ist, wird der Integrierwert verkleinert.

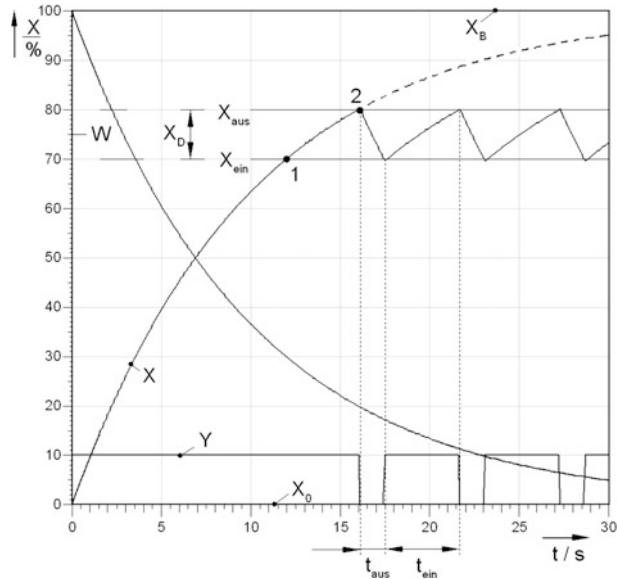
4.5 Zeitverhalten von Regelkreisen mit Zweipunktreglern

Das Zeitverhalten von Regelkreisen mit unstetigen Reglern wird in Anlaufverhalten, Anstiegsverhalten und Abfallverhalten aufgeteilt. Da während jeder Phase die Stellgröße Y konstant ist, zeigt sich jeweils die Stellsprungantwort der Regelstrecke.

4.5.1 P-T₁-Strecke mit Zweipunktregler und Hysterese

Da die reine P-T₁-Strecke keine Verzugszeit oder Totzeit aufweist, kehrt sich das Zeitverhalten im Schaltpunkt direkt um (Abb. 4.35). Der Zeitverlauf läuft in Analogie zur Anstiegsfunktion und zur Abfallfunktion.

Abb. 4.35 Zeitverhalten der P-T₁-Strecke mit Zweipunktregler und Hysterese ($L_{\ddot{U}} < 100 \%$)



Beim Leistungsüberschuss unter 100 % für $w > 50 \%$ ist der Anstieg flacher als der Abfall (Abb. 4.35) und führt zu einer Einschaltzeit t_{ein} , die größer ist als die Ausschaltzeit t_{aus} . Die Regelgröße pendelt zwischen X_{aus} und X_{ein} ohne Überschwingen.

Der Sollwert berechnet sich nach

$$W = \frac{X_{\text{aus}} + X_{\text{ein}}}{2}.$$

Die Schaltdifferenz beträgt

$$X_D = X_{\text{aus}} - X_{\text{ein}}.$$

Für die Zeitkonstante gilt

$$T = \frac{t_1}{\ln \frac{X_B - X_0}{X_B - X_1}}.$$

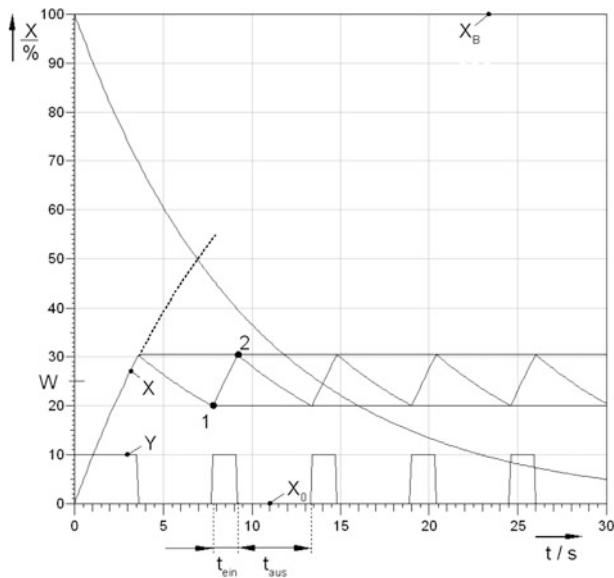
Der Proportionalwert berechnet sich nach

$$K_{\text{PS}} = \frac{X_B - X_0}{\Delta Z} = \frac{\Delta X_B}{\Delta Z}.$$

Einschaltzeiten und Ausschaltzeiten lassen sich nach der Formel für P-T₁-Modelle berechnen:

$$t_{\text{ein}} = T \cdot \ln \frac{X_B - X_1}{X_B - X_1 - X_D} \quad \text{und} \quad t_{\text{aus}} = T \cdot \ln \frac{X_2 - X_0}{X_2 - X_0 - X_D}.$$

Abb. 4.36 Zeitverhalten einer P-T₁-Strecke mit Zweipunktregler und Hysterese ($L_{\ddot{U}} > 100 \%$)



Die mittlere Stellgröße ergibt sich zu

$$Y_m = \frac{t_{\text{ein}}}{t_{\text{ein}} + t_{\text{aus}}}.$$

Beim Leistungsüberschuss über 100 % oder $w < 50 \%$ ist der Anstieg steiler als der Abfall (Abb. 4.36). Die Einschaltzeit ist kleiner als die Ausschaltzeit. Auch hier kehrt der Verlauf der Regelgröße X direkt im Schaltpunkt um, da keine Verzugszeit oder Totzeit vorliegt.

Beispiel 4.5 (Ermittlung der Kennwerte eines Regelkreises mit P-T₁-Strecke und Zweipunktregler mit Hysterese)

Für einen Zweipunkt geregelten elektrischen Luftheritzer wurde das Regelverhalten gemäß Abb. 4.37 gemessen. Die Stellgröße des Regelkreises beträgt $P_{\text{el}} = 1 \text{ kW}$ bei 100 %.

- a) Ermitteln Sie die Streckenkennwerte.

Für einen konstanten Zeitabstand $\Delta t = 8 \text{ s}$ kann man ablesen:

$$\vartheta_0 = 10^\circ\text{C} \quad \vartheta_1 = 26,5^\circ\text{C} \quad \vartheta_2 = 37,5^\circ\text{C}$$

Daraus ergibt sich für den Beharrungswert:

$$\vartheta_B = \frac{\vartheta_1^2 - \vartheta_2 \cdot \vartheta_0}{2 \cdot \vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_0} = \frac{26,5^2 - 37,5 \cdot 10}{2 \cdot 26,5 - 37,5 - 10} {}^\circ\text{C} = 59,5 {}^\circ\text{C}.$$

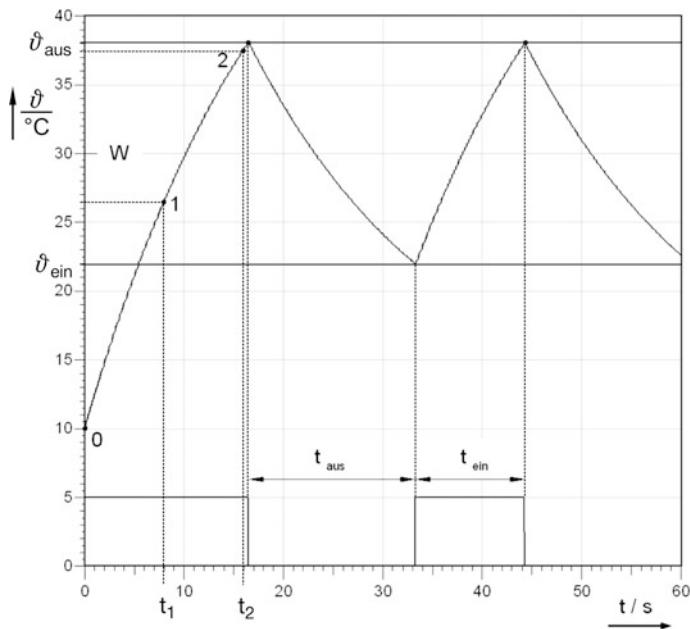


Abb. 4.37 Messschrieb des Zeitverhaltens eines Luftheritzers

Der Proportionalwert hat folgenden Wert:

$$K_{PS} = \frac{\vartheta_B - \vartheta_0}{P_{el}} = \frac{59,5^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C}}{1 \text{ kW}} = 49,5 \frac{\text{K}}{\text{kW}}$$

Für die Zeitkonstante ergibt sich:

$$T = \frac{t_2}{\ln \frac{\vartheta_B - \vartheta_0}{\vartheta_B - \vartheta_2}} = \frac{16 \text{ s}}{\ln \frac{59,5 - 10}{59,5 - 37,5}} = 19,7 \text{ s}$$

b) Ermitteln Sie den Sollwert der Regelung und die Schaltdifferenz.

Aus dem Schrieb lässt sich ablesen:

$$\vartheta_{aus} = 38^\circ\text{C} \quad \vartheta_{ein} = 22^\circ\text{C}.$$

Der Sollwert W liegt in der Mitte zwischen Einschalttemperatur und Ausschalttemperatur.

$$W = \frac{\vartheta_{aus} + \vartheta_{ein}}{2} = \frac{38^\circ\text{C} + 22^\circ\text{C}}{2} = 30^\circ\text{C}.$$

Die Schaltdifferenz (Hysterese) wird berechnet zu:

$$\vartheta_D = 38^\circ\text{C} - 22^\circ\text{C} = 16\text{ K}.$$

c) Berechnen Sie die mittlere Stellgröße

Für die mittlere Stellgröße ist die Kenntnis der Einschaltzeit und der Ausschaltzeit notwendig.

$$t_{\text{aus}} = T \cdot \ln \frac{\vartheta_{\text{aus}} - \vartheta_0}{\vartheta_{\text{aus}} - \vartheta_0 - \vartheta_D} = 19,7\text{ s} \cdot \ln \frac{28}{12} = 16,7\text{ s}$$

Abgelesen wird: $t_{\text{aus}} \approx 17\text{ s}$.

$$t_{\text{ein}} = T \cdot \ln \frac{\vartheta_B - \vartheta_{\text{ein}}}{\vartheta_B - \vartheta_{\text{ein}} - \vartheta_D} = 19,7\text{ s} \cdot \ln \frac{37,5}{21,5} = 11,0\text{ s}$$

Abgelesen wird: $t_{\text{ein}} \approx 11\text{ s}$.

Daraus ergibt sich die mittlere Stellgröße

$$Y_m = \frac{t_{\text{ein}}}{t_{\text{ein}} + t_{\text{aus}}} \cdot 100\% = \frac{11\text{ s}}{27,7\text{ s}} \cdot 100\% \approx 40\%.$$

4.5.2 Zeitverhalten eines Zweipunktreglers ohne Hysterese an einer P-T_i-Strecke

Durch Totzeit oder Verzugszeit einer Regelstrecke kommt es zu Überschwingen über den Schaltpunkt hinaus. Daraus ergibt sich die Schwankungsbreite $X_S = X_{\text{oben}} - X_{\text{unten}}$, ein wichtiges Maß für die Qualität eines unstetigen Regelkreises.

Bei Regelstrecken mit Verzugszeit oder Totzeit kann die Schaltdifferenz des Reglers gegen Null gehen. Dadurch wird der Schwankungsbreitenanteil durch die Hysterese vernachlässigbar klein und nur noch durch das Über- und Unterschwingen verursacht (Abb. 4.38 und 4.39).

Durch Über- und Unterschwingen tritt das Phänomen der bleibenden Regeldifferenz e_{bl} eines Zweipunktreglers auf. Die Sollwertlinie ist nicht mehr Mittelachse der Regelschwingerung. Die bleibende Regeldifferenz hängt von der Lage des Sollwertes im Regelbereich bzw. vom Leistungsüberschuss $L_{\dot{U}}$ ab. Nur bei $L_{\dot{U}} = 100\%$ gibt es keine Regeldifferenz.

$$L_{\dot{U}} = \left(\frac{\Delta X_B}{W} - 1 \right) \cdot 100\%$$

Die Schwankungsbreite X_S wird verursacht von dem Verhältnis von Verzugszeit T_u und Ausgleichszeit T_g :

$$X_S = \frac{T_u}{T_g} \cdot \Delta X_B.$$

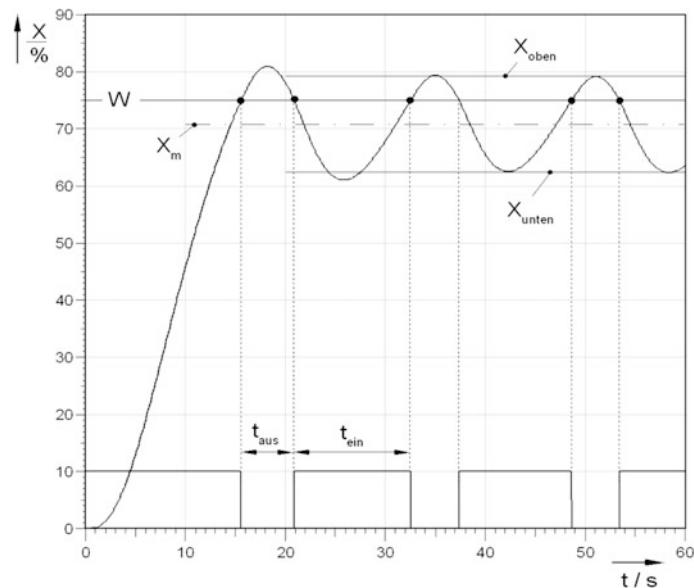


Abb. 4.38 Zweipunktregler ohne Hysterese mit Strecke höherer Ordnung ($L_U < 100\%$)

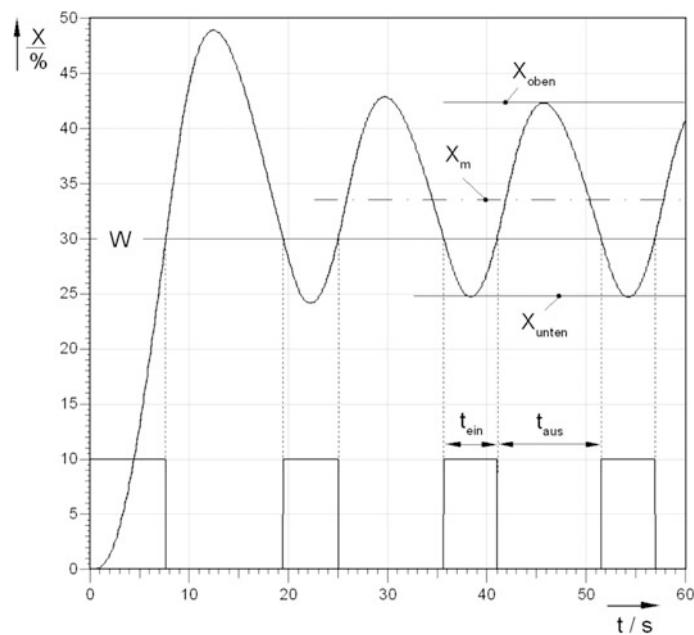


Abb. 4.39 Zweipunktregler ohne Hysterese mit Strecke höherer Ordnung ($L_U > 100\%$)

Für die bleibende Regeldifferenz gilt:

$$e_{\text{bl}} = \frac{T_u}{T_g} \cdot \left(W - \frac{\Delta X_B}{2} \right)$$

Die Frage, ob an einer Strecke höherer Ordnung ein Zweipunktregler mit zusätzlicher Hysterese notwendig ist, kann nur durch die Schaltfrequenz f beantwortet werden.

Die Schaltfrequenz berechnet sich zu:

$$f = \frac{1}{T_u} \cdot \left(\frac{W}{\Delta X_B} - \left[\frac{W}{\Delta X_B} \right]^2 \right)$$

Die kleinste Schaltfrequenz f_{\min} liegt bei $L_U = 100\%$.

4.5.3 Verbesserung des Regelverhaltens

Der unstetige Regler hat auf Grund seiner preisgünstigen Herstellung einen festen Einsatzbereich in der Massenproduktion.

- Das Regelergebnis ist im Verhältnis zum Aufwand zu sehen. Ein einfacher Zweipunktregler kann für die Aufgabenstellung zufriedenstellende Ergebnisse schaffen. Minimale Toleranzen sind nur mit hohem Aufwand zu erreichen. Oft reicht eine Regelgenauigkeit in einem Toleranzbereich $X \pm \Delta x$.
- Beim Zweipunktregler wird oft die große Schwankungsbreite bemängelt. Durch eine Rückführung kann diese Breite angepasst reduziert werden.
- Eine bleibende Regelabweichung ist zu erwarten, wenn der Leistungsüberschuss nicht 100 % beträgt. Durch Anpassung der Stellgröße auf einen anderen Wert als 100 % kann der Sollwert W immer in die Mitte des Regelbereiches gelegt werden. Damit wird auch die bleibende Regeldifferenz vermieden.

4.6 Digitale Algorithmen

In vielen Regelgeräten hat heute der Mikroprozessor Einzug gehalten, oftmals ohne dass man dies überhaupt weiß. Die Reglerfirmen bieten Geräte an, die äußerlich wie konventionelle Regler aufgebaut sind und teilweise die Eingabe von Sollwerten etc. wie bisher üblich über Drehköpfe ermöglichen. Intern werden die Signale jedoch digital verarbeitet.

Die digitale Regelung erfasst Mess- und Regelgrößen nur diskontinuierlich. Im Gegensatz zur analogen Regelung wird ein momentaner Wert gemessen, anschließend im Rechner verarbeitet und dann zu einem Stellglied ausgegeben. Erst nach der Ausgabe kann ein neuer Wert gemessen werden. Diesen Vorgang nennt man *Abtastung*. Da aber

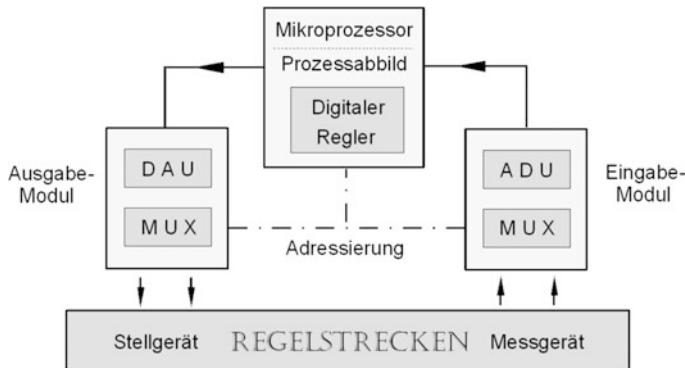


Abb. 4.40 Mikroprozessor als digitaler Regler mit Ein- und Ausgangsmodulen

der Vorgang schnell abläuft, ist das Zeitverhalten eines digital geregelten Kreises von dem eines analogen Regelkreises kaum zu unterscheiden.

Ein dezentraler digitaler Regler, genannt DDC-Regler, hat die Aufgabe, die Reglerfunktionen zu erfüllen, die dort in Form eines Programms mit digitalem Algorithmus vorliegen. Zusätzlich werden Steuerfunktionen übernommen oder Optimierungskriterien ausgewertet.

Vorteile des digitalen Reglers:

- Hochintegrierte elektronische Bausteine sind auf kleinstem Raum unterzubringen.
- Die Bauteile sind wegen standardisierter Massenproduktion kostengünstig herzustellen.
- Die Reglerparameter sind langzeitstabil, d. h. sie können nicht driftieren.
- Der Algorithmus ist durch Block-Parametrierung für viele Regelkreise verwendbar.
- Mess- und Stellgrößen lassen sich über beliebig große Entfernungen transportieren.
- Damit kann die Regelung in ein übergeordnetes Automationssystem eingebunden werden.
- Führungsgrößen und Parameter lassen sich im laufenden Betrieb lokal, per Hand, aus der Ferne oder automatisch ändern.

4.6.1 Kopplung der Regelstrecke mit dem digitalen Regler

Ein digitaler Regelkreis kann selbsttätig Messwerte und Sollwerte einlesen, Stellgrößen ausgeben und dabei in Echtzeit, also in der Geschwindigkeit des Prozesses, in der zu regelnden Anlage alle notwendigen Berechnungen durchführen. Neben dem Mikroprozessor sind weitere Bauteile erforderlich, die die Verbindung zur Regelstrecke aufbauen und die dort aufgenommenen Größen in die „Sprache“ des Rechners übersetzen (Abb. 4.40).

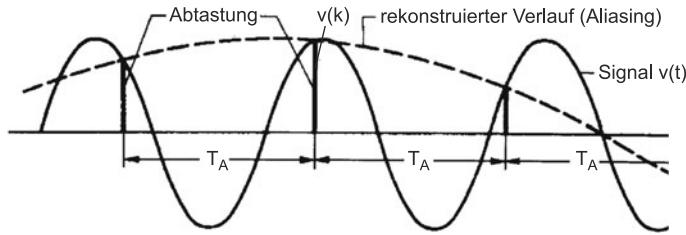


Abb. 4.41 Vergleich des kontinuierlichen Signalverlaufs mit einem rekonstruierten Verlauf, der fehlerhaft abgetastet wurde (Aliasing)

Der Messstellenumschalter, auch Multiplexer (MUX) genannt, wird vom Adressbus des Mikrocomputers gezielt angesteuert. Durch eine besondere Steuerlogik ist gewährleistet, dass immer nur ein Kanal eingeschaltet ist und alle anderen Kanäle ausgeschaltet sind. So vermeidet man „Datensalat“. Da der Multiplexer den Messwert nur kurze Zeit abtastet, der nachgeschaltete Umsetzer etwas länger benötigt, wird zwischen diesen beiden Elementen meist eine Zwischenspeicherung des Analogwertes eingebaut. Den Vorgang der Abtastung und Zwischenspeicherung nennt man „Sample & Hold“. Damit ändert sich der Wert während des Umsetzungsvorganges nicht, man hat einen definierten Abtastzeitpunkt.

Der Rechnerbus teilt sich aus regelungstechnischer Sicht in drei Teile auf:

- Der Adressbus steuert gezielt das Abtastglied an.
- Der Steuerbus legt den Abtastzeitpunkt fest.
- Der Datenbus überträgt den aktuellen Wert zum Speicher des Prozessabbildes.

Ein Analog-Digital-Umsetzer (ADU) wandelt die analogen Signale der Regelstrecke in die binären Signale des Mikroprozessors um und speichert sie dort als Prozessabbild ab. Diese Informationen werden mit einem programmierten und parametrierbaren Algorithmus weiter verarbeitet.

Beim Digital-Analog-Umsetzer (DAU) wird das Prozessabbild der Stellgröße vom Binärwert in den Analogwert umgeformt und als reale Stellgröße z.B. als eingeprägte Gleichspannung zur Anlage ausgegeben.

Bei Eingabe-/Ausgabe-Modulen werden Multiplexer, Analog-Digital-Umsetzer bzw. Digital-Analog-Umsetzer sowie einige weitere elektrische Bauteile zur Messwertaufbereitung auf einer Platine vereinigt. Diese Platine wird auf den BUS des Rechners oder an die Buserweiterung als E-/A-Modul gesteckt.

Abtastung Digitale Automationssysteme sind dadurch gekennzeichnet, dass sie Messwerte nur zu diskreten Zeitpunkten abtasten (Abb. 4.41). Der Abtaster ist ein schneller elektronischer Schalter, der zum Zeitpunkt k aus dem kontinuierlichen analogen Signal $v(t)$ den aktuellen Wert einliest. Aus dem stetigen Verlauf wird eine Treppenfunktion.

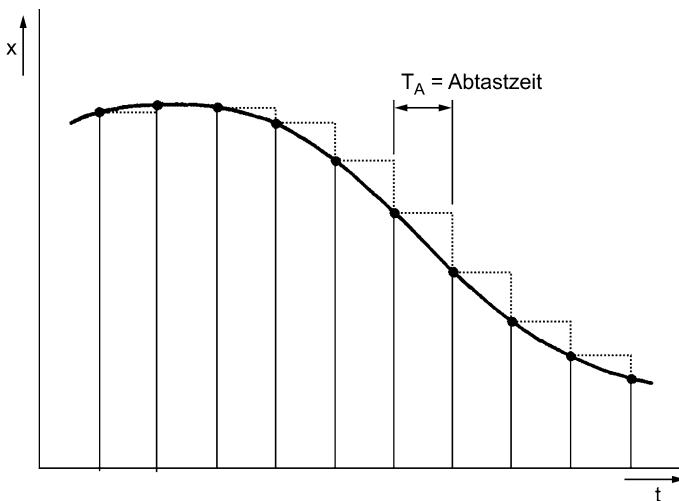


Abb. 4.42 Abtastung eines kontinuierlichen Signals mit Signalspeicherung

Der Wert k ist eine Laufvariable mit $k = 0, 1, 2, \dots$. Die Zeit zwischen zwei Abtastpunkten mit dem Abstand $\Delta k = 1$ wird Abtastzeit T_A genannt. Der abgetastete Wert $v(k)$ bleibt bis zum nächsten Abtastvorgang des gleichen Messpunktes konstant.

Bei genügend kleiner Abtastzeit T_A kann ein eindeutiger Signalverlauf durch eine Folge von Impulsen hinreichend genau angenähert werden. Das diskontinuierliche Signal $v(k)$ entspricht nur zu den Tastzeiten k dem jeweiligen Momentanwert des Signals $v(t)$. Die Genauigkeit der Annäherung wird umso besser, je kleiner die Abtastzeit gewählt wird. Damit nimmt aber der Rechenaufwand entsprechend zu. Andererseits darf der Messwertverlauf nicht durch ein zu langsames Abtasten verfälscht werden.

Die obere Grenze, d. h. die größte zulässige Abtastzeit wird durch das Shannon'sche Abtasttheorem festgelegt. Danach wird ein Signal nicht verfälscht, wenn pro Schwingungsperiode mindestens zweimal abgetastet wird.

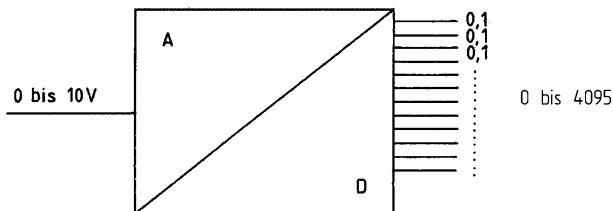
$$T_A < \frac{1}{2 \cdot f_{\max}}$$

f_{\max} ist die Frequenz der kleinsten im Modell zu berücksichtigenden Schwingung.

Der in Abb. 4.41 dargestellte Aliasing-Fehler täuscht nicht existente niederfrequente Signalverläufe vor. Dieser Fehler kann vermieden werden, wenn nicht relevante hohe Frequenzen durch ein vorgeschaltetes analoges P-T₁-Glied als Tiefpass, das hohe Frequenzen sperrt (Anti-Alias-Filter), unterdrückt wird.

Bei aperiodischen Zeitverläufen muss die Abtastzeit so gewählt werden, dass sie kleiner ist als die Hälfte der kleinsten relevanten Zeitkonstanten. Automationssysteme, die in der Antriebstechnik eingesetzt werden, erfordern, aufgrund niedriger Zeitkonstanten der Strecken, niedrige Abtastzeiten (Abb. 4.42). Dies führt zu hohen Kosten in der Anschaf-

Abb. 4.43 Analog-Digital-Umsetzer mit 12 Bit Auflösung



fung. Automationssysteme, die im Bereich der Versorgungstechnik zur Temperaturregelung in Klimaanlagen eingesetzt werden, haben größere Abtastzeiten, da die Temperaturen in Räumen sich langsam ändern und damit große Zeitkonstanten aufweisen. Im Durchschnitt betragen die Abtastzeiten zwischen 0,1 Sekunde und 1 Minute.

Das Betriebssystem entkoppelt in Form von Multitasking die Abtastung der Messwerte von den einzelnen Regel- und Steuerprogrammen. Ein Systemprogramm tastet zyklisch alle Messwerte nacheinander ab und schreibt das Ergebnis in ein so genanntes Prozessabbild, vergleichbar mit einer Tabelle, in der die Daten hinterlegt sind. Steuerungs- und Regelungsprogramme greifen nur auf das Prozessabbild zu. Ergebnisse, die vom Automationssystem ausgegeben werden sollen, werden erst im Prozessabbild abgespeichert und dann über das Ausgangsmodul zur Anlage übergreifen.

Die Arbeitsweise eines digitalen Systems lässt sich wie folgt zusammenfassen:

- Messwerte einlesen
- Messwerte digitalisieren
- Messwerte im Prozessabbild zyklisch abspeichern
- Programme im Automationssystem (DDC) abarbeiten
- Ergebnisse im Prozessabbild abspeichern
- Stellgrößen aus dem Prozessabbild zyklisch ausgeben.

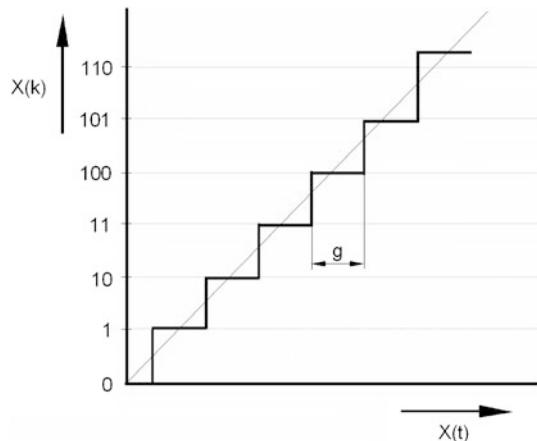
Auflösung Der Rechner verarbeitet nur binäre Signale. Der analoge Messwert wird deshalb in einen binären Code übertragen. Sehr häufig findet man in der Praxis eine so genannte 12-Bit-Auflösung, d. h. es werden Zahlen mit 12 „0“- oder „1“-Signalen in entsprechenden parallelen Leitungen dargestellt (Abb. 4.43).

Da die Binärzahl als Ausgangsgröße nur schwer verständlich ist, gibt man oft die zugehörige Dezimalzahl als Rohwert an, z. B.

$$\begin{aligned}
 011001100110 &\rightarrow 1638 \\
 0 \cdot 2^{11} + 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\
 &= 1024 + 512 + 64 + 32 + 4 + 2 = 1638
 \end{aligned}$$

Im Analog-Digital-Umsetzer erfolgt die Wandlung des analogen Wertes, z. B. als eingeprägte Gleichspannung $0 \div 10\text{ V}$ automatisch in eine Binärzahl oder in einen Rohwert.

Abb. 4.44 Quantisierungsfehler g bei der Abtastung



Der Proportionalbeiwert berechnet sich für eine maximale Eingangsspannung von 10 V und 12-Bit-Auflösung (Abb. 4.3) nach:

$$K_{P\text{ADU}} = \frac{2^{12} - 1}{U_{\max}} = \frac{4095}{10\text{ V}} = 409,5 \frac{1}{\text{V}}.$$

Das abgetastete analoge Signal wird in ein Signal mit endlicher Stellenzahl als Bits = Binärsignal umgewandelt. Der maximale Quantisierungsfehler entspricht $g/2$ aus Abb. 4.44, d. h. der Analogwert muss sich um q ändern, damit sich der Binärwert um 1 Bit erhöht.

Je nach Stellenzahl, die beim Umsetzungsprozess von analog in binär oder umgekehrt genutzt wird, unterscheidet man die Ausführungen in Tab. 4.12. Es ist besonders darauf zu achten, dass sich der Zeitaufwand beim Wandlungsprozess mit Zunahme der Stellenzahl erheblich vergrößert, die Abtastzeit dadurch vergrößert werden kann.

Bei größeren Entfernungen der Messstelle von der Umformung wird wegen des Fehlers durch Spannungsabfall der unveränderliche Gleichstrom verwendet. Dazu wird direkt vor dem Multiplexer der Gleichstrom in eine Spannung umgewandelt werden. Verwendet man einen $500\ \Omega$ -Widerstand in Parallelschaltung, so erhält man nach dem Ohm'schen Gesetz:

$$U = R \cdot I = 500\ \Omega \cdot 20\text{ mA} = 10\text{ V}.$$

Tab. 4.12 Auflösung einer Analog-Digital-Umsetzung

| Parallele Leitungen | Größter Rohwert | Auflösung | |
|---------------------|-----------------|-----------------------|----------------|
| | | in % bez. Messbereich | in V bez. 10 V |
| 8 Bit | 256 | 0,391 | 0,039 |
| 10 Bit | 1024 | 0,0977 | 0,00977 |
| 12 Bit | 4096 | 0,0244 | 0,00244 |
| 13 Bit | 8192 | 0,0122 | 0,00122 |
| 16 Bit | 65.536 | 0,00153 | 0,000153 |

Skalierung Die Binärzahl als Prozessabbild steht im Rechner zur beliebigen Verarbeitung zur Verfügung, kann also dort einer Variablen zugewiesen werden. Der Wert dieser Variablen sollte für den Benutzer einfach verständlich sein. Man spricht hier von einer Nutzeradressierung oder „Bedienen und Beobachten“. Der Nutzer bevorzugt die Angabe des Zahlenwertes, den eine analoge Messeinrichtung anzeigen würde. Dazu werden im Automationssystem Programmbausteine in Form von Software verwendet, die man als „Kennlinienanpassung“ oder Skalierung bezeichnen kann.

$$MW = (RW/DZ) \cdot MB$$

MW = Messwert als Anzeigewert

RW = aktueller Rohwert

DZ = maximaler Rohwert

MB = Messbereich des Fühlers

Ein weiterer Softwarebaustein wandelt die vorgegebene Stellgröße aus dem Prozessabbild in die Eingangsgröße des Analog-Digital-Umsetzers um. Dieser erwartet einen Binärwert entsprechend seiner Auflösung. Die Variable Y1 wird umgerechnet in eine Binärzahl Z2, angegeben als Rohwert.

$$RW = (Y1/SB) \cdot DZ$$

RW = Eingangswert zum DAU

Y1 = Stellgröße als Anzeigewert

SB = Stellbereich der Stellgröße

DZ = maximaler Rohwert

Beispiel 4.6 (Analog-Digital-Umsetzung)

Ein Temperaturfühler mit einem Messbereich von 20 bis 100 °C befindet sich in einem Flüssigkeitsbad mit einer Temperatur von 40 °C. Das Automationssystem mit einem eingebauten 12-Bit-A/D-Umsetzer, an welches der Fühler angeschlossen ist, liefert einen Rohwert von 1638.

- a) Berechnen Sie den Anzeigewert für den Bildschirm.

Ein 12-Bit-Analog-Digital-Umsetzer wandelt das Signal in $2^{12} - 1 = 4095$ Stufen um. Der Messbereich beträgt 80 K. Der Nullpunkt der Temperaturmessung beträgt 20 °C. Der berechnete Messwert lautet: $MW = 20 + (1638/4095) \cdot 80 = 52$

- b) Berechnen Sie den Rohwert für ein Stellsignal. Ein Dreiegeventil wird zu 45° bezo gen auf 90° maximalen Öffnungswinkel geöffnet.

Der Digital-Analog-Umsetzer hat ebenfalls 12-Bit-Auflösung. Damit ergibt sich für den Rohwert: $RW = (45/90) \cdot 4095 = 2048$

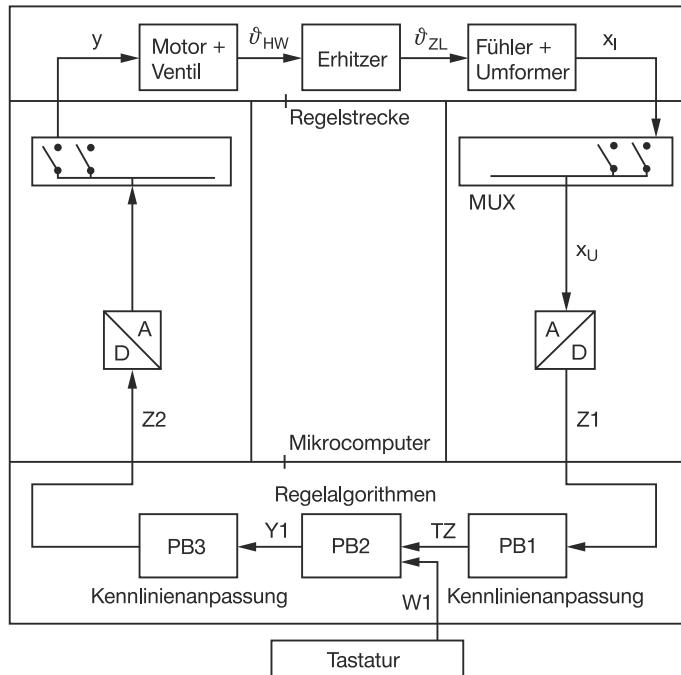


Abb. 4.45 Luftheritzer mit digitaler Regeleinrichtung

- c) Berechnen Sie den Signalverlauf im digitalen Regelkreis mit den oben genannten Werten.

Den Ablauf der Umformungen im digitalen Regelkreis kann man in Abb. 4.45 verfolgen. Als Beispiel wird die Temperaturregelung eines Erhitzers einer Klimatisierungsanlage gewählt. Die Zulufttemperatur wird im Luftkanal hinter dem Erhitzer gemessen, z. B. mit einem Pt-100-Fühler als temperaturabhängigen Widerstand.

Dieser Fühler, eingebaut in eine mit elektrischer Hilfsenergie versorgten Messbrücke, liefert als Ausgangssignal (Gleichstromsignal) die Regelgröße x . Bei einer Zulufttemperatur von 25 °C und einem Messbereich von -20 °C bis +80 °C fließt folgender elektrischer Strom:

$$x_I = \frac{\vartheta_{ZL} + \vartheta_0}{\vartheta_{MB}} \cdot I_G = \frac{25 + 20}{100} \cdot 20 \text{ mA} = 9 \text{ mA}$$

ϑ_0 Temperatur bei 0 mA $\hat{=}$ Nullpunkt

ϑ_{MB} Temperatur-Messbereich (hier: 100 K)

I_G maximaler Stromausgang 20 mA

Tab. 4.13 Umwandlung eines Rohwertes in eine Binärzahl

| n | | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
|-------|------|------|------|-----|-----|-----|----|----|----|---|---|---|---|
| 2^n | | 2048 | 1024 | 512 | 256 | 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |
| Bit | | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Rest | 1843 | 1843 | 819 | 307 | 51 | 51 | 51 | 19 | 3 | 3 | 3 | 1 | 0 |

Direkt vor dem Messstellenumschalter ist ein $500\text{-}\Omega$ -Widerstand parallel geschaltet, der aus dem Strom die Spannung erzeugt.

$$x_U = x_1 \cdot 500 \Omega = 4,5 \text{ V}$$

Ein 12-Bit-Analog-Digital-Umsetzer wandelt diese Spannung in die Dualzahl um.

$$Z_1 = x_U \cdot 409,5 \frac{1}{\text{V}} = 1843$$

Der zugehörige binäre Code ist (s. Tab. 4.13): 011100110011 (niedrigstes Bit auf der rechten Seite).

Der Programmbaustein PB1 macht daraus den digitalen Anzeigewert:

$$TZ = (1843/4095) \cdot 100 - 20 = 25.$$

Ein einfacher P-Regelalgorithmus berechnet die Stellgröße zu $Y_1 = 40$, die einem Öffnungswinkel von 40° am Stellventil entspricht.

Über den Programmbaustein PB3 (meist identisch mit PB1) wird aus dem Stellwinkel die Dualzahl als Dezimalwert berechnet: $Z_2 = (40/90) \cdot 4095 = 1820$.

$$(1820 \hat{=} 011100011100)$$

Der Digital-Analog-Umsetzer macht daraus einen Spannungswert

$$y = (1820/4095) \cdot 10 \text{ V} = 4,44 \text{ V},$$

der vom Rechner gesteuert über den Multiplexer auf die Ansteuerung des Motors geht und dort das Ventil auf die Position stellt.

$$y = (4,44 \text{ V}/10 \text{ V}) \cdot 90^\circ = 40^\circ$$

Dabei ist lineares Verhalten des Stellantriebs vorausgesetzt. Entsprechend der hydraulischen Schaltung und der Vorlauftemperatur stellt sich eine Flüssigkeitsbadtemperatur ϑ_{HW} ein, die durch Wärmeübertragung die Zulufttemperatur ϑ_{ZL} im Erhitzer verändert kann. Der Regelkreis ist damit geschlossen.

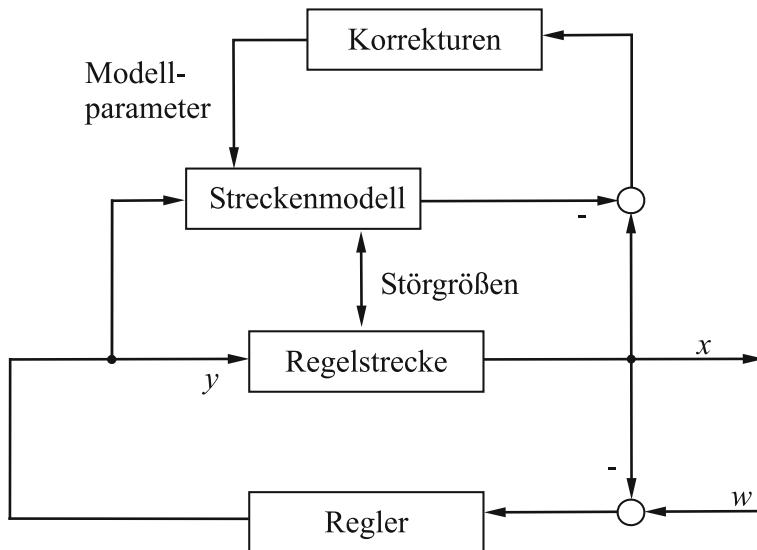


Abb. 4.46 Regelkreis mit Beobachter in Form eines digitalen Modells

4.6.2 Digitales Modell der Regelstrecke

Im Kap. 2 wurde die Regelstrecke durch ein stetiges physikalisches oder parametrisches Modell nachgebildet (Abb. 4.46).

Differenzengleichung Bei digitalen Modellen liegt die Übergangsfunktion nicht mehr in Form einer Differenzialgleichung vor.

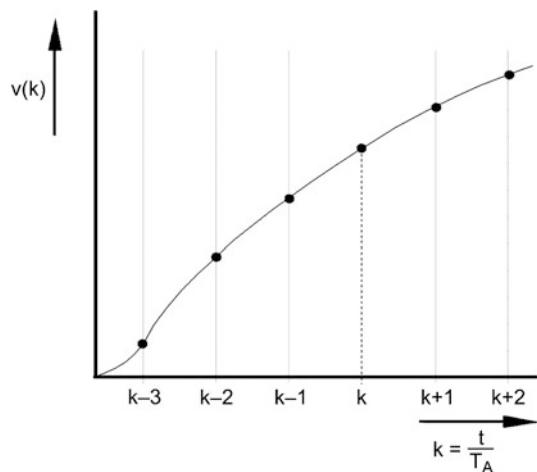
$$a_n \cdot \overset{(n)}{v} + \dots + a_2 \cdot \ddot{v} + a_1 \cdot \dot{v} + a_0 \cdot v = b_0 \cdot u + b_1 \cdot \dot{u} + b_2 \cdot \ddot{u} + \dots + b_m \cdot \overset{(m)}{u}$$

Der Differenzialquotient dv/dt wird durch den Differenzenquotienten $\Delta v/\Delta t$ ersetzt. Das Modell liegt als Differenzengleichung vor. Diese wird oft in rekursiver Form angegeben. Damit kann der „Beobachter“ fortlaufend berechnet und die zugehörigen Parameter in Form einer Adaption ständig an den aktuellen Anlagenzustand angepasst werden.

$$\begin{aligned} \alpha_0 \cdot v(k) + \alpha_1 \cdot v(k-1) + \dots + \alpha_m \cdot V(k-m) \\ = \beta_0 \cdot u(k) + \beta_1 \cdot u(k-1) + \dots + \beta_m \cdot u(k-m) \end{aligned}$$

Es ist zu beachten, dass die Parameter α_i und β_i nicht identisch sind mit den Parametern a_i und b_i .

Abb. 4.47 Zeitdiskretes Signal



Die Differenzenquotienten werden in Funktion aktueller und früherer Werte ausgedrückt (Abb. 4.48):

$$\frac{\Delta v}{T_A} = \frac{v(k) - v(k-1)}{T_A}; \quad \frac{\Delta^2 v}{T_A^2} = \frac{v(k) - 2 \cdot v(k-1) + v(k-2)}{T_A^2};$$

$$\frac{\Delta^3 v}{T_A^3} = \frac{v(k) - 3 \cdot v(k-1) + 3 \cdot v(k-2) - v(k-3)}{T_A^3}$$

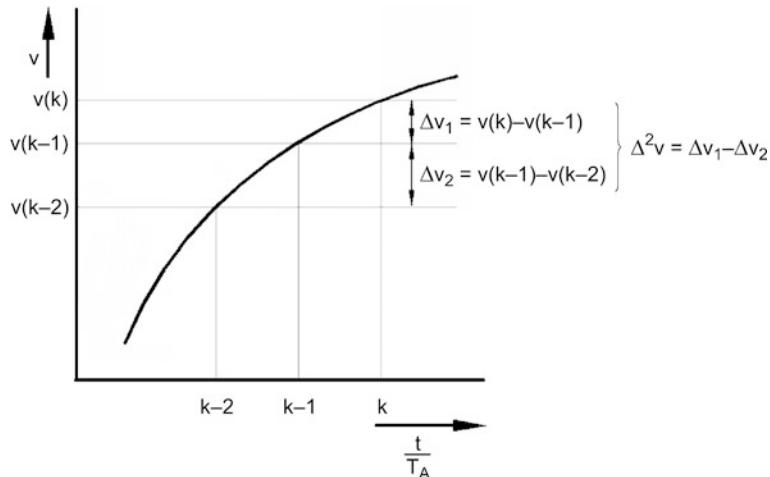


Abb. 4.48 Nachbildung des Zeitverlaufs eines Systems durch Differenzenquotienten

Beispiel

Differenzialgleichung

$$a_2 \cdot \ddot{v} + a_1 \cdot \dot{v} + a_0 \cdot v = b_0 \cdot u + b_1 \cdot \dot{u}$$

nachgebildet durch eine Differenzengleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{a_2 \cdot [v(k) - 2v(k-1) + v(k-2)]}{T_A^2} + \frac{a_1 [v(k) - v(k-1)]}{T_A} + a_0 \cdot v(k) \\ &= b_0 \cdot u(k) + \frac{b_1 [u(k) - u(k-1)]}{T_A} \end{aligned}$$

umgeformt in eine Rekursionsgleichung:

$$\begin{aligned} v(k) \cdot \left[\frac{a_2}{T_A^2} + \frac{a_1}{T_A} + a_0 \right] &= v(k-1) \cdot \left[\frac{2 \cdot a_2}{T_A^2} + \frac{a_1}{T_A} \right] - v(k-2) \cdot \left[\frac{a_2}{T_A^2} \right] \\ &\quad + u(k) \cdot \left[b_0 + \frac{b_1}{T_A} \right] - u(k-1) \cdot \left[\frac{b_1}{T_A} \right] \\ v(k) \cdot [\alpha_0] &= v(k-1) \cdot [\alpha_1] - v(k-2) \cdot [\alpha_2] \\ &\quad + u(k) \cdot [\beta_0] - u(k-1) \cdot [\beta_1] \end{aligned}$$

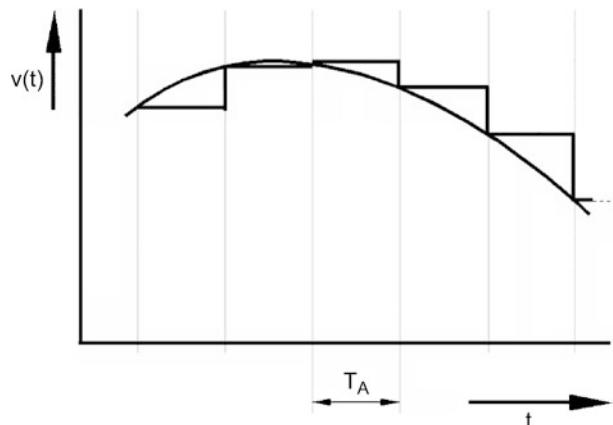
Bei zeitlich varianten Abtastsignalen lassen sich diese fünf Rekursionskoeffizienten durch fünffaches Aufstellen der Gleichung mit Hilfe der Matrizenrechnung ermitteln. Aus fünf unabhängigen Gleichungen kann man die fünf unbekannten Rekursionskoeffizienten des Modells ermitteln. Dazu müssen der aktuelle Abtastwert $v(k)$ und $u(k)$ sowie bei einer Strecke 2. Ordnung sechs vergangene Werte bekannt sein.

$$\begin{aligned} v(k) \cdot [\alpha_0] - v(k-1) \cdot [\alpha_1] - v(k-2) \cdot [\alpha_2] &= u(k) \cdot [\beta_0] - u(k-1) \cdot [\beta_1] \\ v(k-1) \cdot [\alpha_0] - v(k-2) \cdot [\alpha_1] - v(k-3) \cdot [\alpha_2] &= u(k-1) \cdot [\beta_0] - u(k-2) \cdot [\beta_1] \\ v(k-2) \cdot [\alpha_0] - v(k-3) \cdot [\alpha_1] - v(k-4) \cdot [\alpha_2] &= u(k-2) \cdot [\beta_0] - u(k-3) \cdot [\beta_1] \\ v(k-3) \cdot [\alpha_0] - v(k-4) \cdot [\alpha_1] - v(k-5) \cdot [\alpha_2] &= u(k-3) \cdot [\beta_0] - u(k-4) \cdot [\beta_1] \\ v(k-4) \cdot [\alpha_0] - v(k-5) \cdot [\alpha_1] - v(k-6) \cdot [\alpha_2] &= u(k-4) \cdot [\beta_0] - u(k-5) \cdot [\beta_1] \end{aligned}$$

z -Transformation Eine andere Methode der Bildung digitaler Modelle ist die z -Transformation der stetigen Übertragungsfunktion. Die Lösung von Differenzialgleichungen mit kontinuierlichen Eingangsgrößen wird mit der Laplace-Transformation vereinfacht. Für die Berechnung von Impulsfolgen, wie sie bei der Abtastung digitaler Systeme entstehen, hat die z -Transformation die gleiche Bedeutung. Die z -Transformierte wandelt eine Impulsfolge δ in eine Funktion $f(z)$ der komplexen Variablen z . Das Ziel ist es, digitale Modelle durch einfachere Berechnungen im Bildbereich der Transformation zu ermitteln.

Bei zeitdiskretem Verhalten werden Signale als Treppenfunktionen dargestellt.

Abb. 4.49 Treppenfunktion eines digitalen Systems



Statt dem stetigen Zeitverlauf entsteht bei digitalen Systemen eine Treppenfunktion, das ist eine Folge von Rechteckimpulsen (s. Abb. 4.49). Der Rechteckimpuls lässt sich mathematisch darstellen durch:

$$\bar{v}_1(t) = v_1 \cdot \sigma(t) - v_1 \cdot \sigma(t - T_A) \quad \text{mit } \sigma = \text{Einheitssprung.}$$

Die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1 - e^{-T_A \cdot s}}{s}$$

bewirkt, dass der Wert des digitalen Signals über eine Abtastperiode konstant gehalten wird. Für die Treppenfunktion ergibt sich daraus:

$$\bar{v}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} v_i \cdot e^{-k \cdot T_A \cdot s} = \sum_{k=0}^{\infty} v_i \cdot (e^{T_A \cdot s})^{-k}.$$

Ersetzt man $e^{T_A \cdot s}$ durch z , dann entsteht die z -Transformierte

$$v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \cdot z^{-k}.$$

Beispiel

$$\text{stetige Funktion} \quad x(t) = e^{-\frac{t}{T}}$$

$$\text{zeitdiskrete Funktion} \quad (k) = e^{-\frac{k \cdot T_A}{T}}$$

$$z\text{-Transformierte} \quad z \left[e^{-\frac{k \cdot T_A}{T}} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{k \cdot T_A}{T}} \cdot z^{-k}$$

4.7 Regelschaltungen

In der Praxis ist der einschleifige Regelkreis die am häufigsten verwendete Regelschaltung. Ein solcher einschleifiger Regelkreis hat eine übersichtliche Struktur mit genau einer Regelgröße und einer Stellgröße. Er lässt sich mit vorgegebenen Einstellregeln verhältnismäßig einfach einstellen, d. h. parametrieren.

Es gibt jedoch Regelstrecken, bei denen diese einschleifige Schaltung nicht mehr zu zufriedenstellenden Ergebnissen führt. Dies gilt insbesondere

- wenn sich zwischen Stellort und Messort große Verzögerungen oder Totzeiten ergeben,
- bei Regelstrecken mit kurzen Ausgleichzeiten, die zu großem Schwierigkeitsgrad $S = T_u/T_g$ führen, i. A. ab $S > 0,3$,
- bei schwach gedämpften Regelstrecken,
- wenn Regelstrecken durch ein physikalisches Allpassverhalten kurzfristig ein vom Wirkungssinn her umgekehrtes Verhalten zeigen,
- für Regelstrecken mit nichtlinearem oder zeitvariantem Verhalten,
- wenn außergewöhnlich große Störungen auf die Regelstrecken einwirken,
- bei besonders hohen Anforderungen an die Regelgüte in Form der Anregelzeit, des Überschwingens oder der Ausregelzeit.

Eine Verbesserung lässt sich erzielen, wenn die Signalwege zwischen Stelleingriff und Störung verkürzt werden, oder wenn Störungen bereits vor Eintritt in eine Regelstrecke weitgehend durch besondere Maßnahmen beseitigt werden. Hierzu müssen allerdings die Störungen messbar und über ein Stellglied beeinflussbar sein.

Nachfolgend wird eine Auswahl der verschiedensten Möglichkeiten zur Verbesserung des Regelungstechnischen Verhaltens aufgezeigt. Diese Maßnahmen haben eine strukturelle Erweiterung des Grundregelkreises zur Folge und führen damit zu einem vermaschten Regelsystem oder zu mehrschleifigen Regelkreisen. Bei mehrschleifigen Regelkreisen gibt es grundsätzlich zwei Erweiterungsmöglichkeiten, die miteinander kombinierbar sind:

- es werden mehrere Messgrößen erfasst und durch eine geeignete Regelschaltung verknüpft (Mehrkomponentenregelung, s. Abb. 4.50),
- von einer Regelschaltung aus gibt es mehrere Stellausgänge (Mehrgrößenregelung, s. Abb. 4.50).

Damit kann der Regelablauf wesentlich verbessert werden, da zusätzliche Informationen aus der Regelstrecke ermittelt werden und an mehreren Stellorten die Regelstrecke beeinflussen können. Je nach Art der Beeinflussung spricht man von Störgrößenaufschaltung, Führungsgrößenaufschaltung, Verhältnisregelung, Kaskadenregelung oder Bereichsaufschaltung.

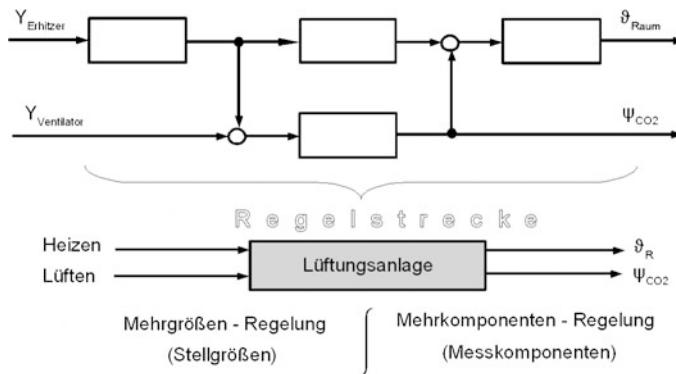


Abb. 4.50 Beispiel einer Mehrgrößen- und Mehrkomponentenregelung

Eine Besonderheit der mehrschleifigen Regelkreise ist die so genannte Adaption. Hierbei werden durch einen mathematischen Algorithmus Kennwerte von Strecken oder Reglern während des laufenden Betriebes verändert. Dies ist insbesondere bei nichtlinearen Regelkreisen vor Vorteil.

4.7.1 Beispiele für einschleifige Regelkreise

Es werden einige Anwendungsbeispiele für den einschleifigen Regelkreises vorgestellt. In Abb. 4.51 ist die einschleifige Struktur dargestellt. Ein einschleifiger Regelkreis besitzt grundsätzlich nur eine Regelgröße und eine Stellgröße.

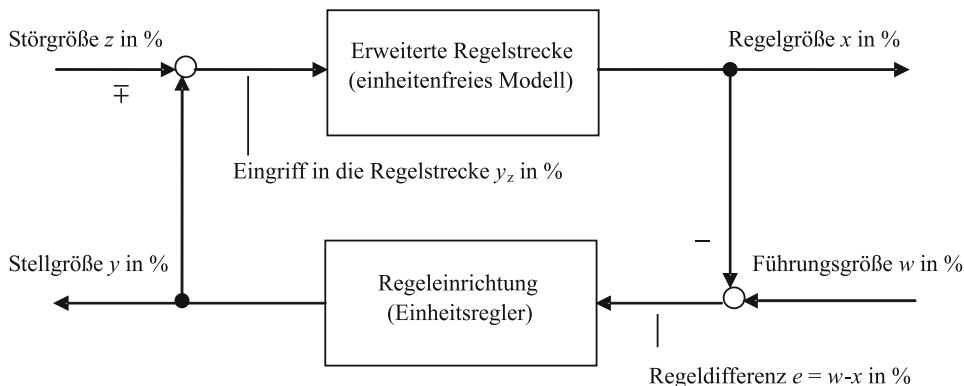
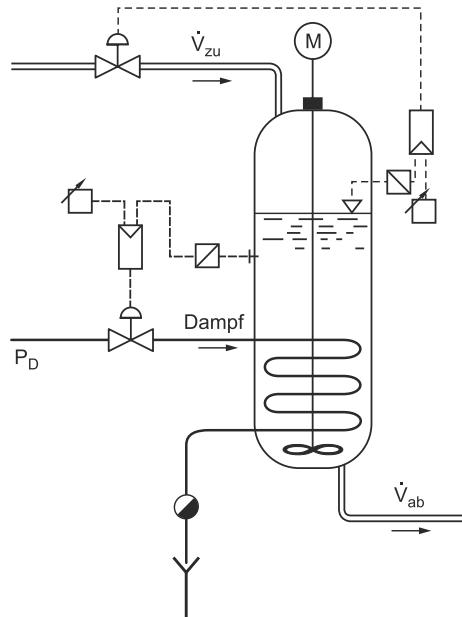


Abb. 4.51 Wirkungsplan des einschleifigen Regelkreises

Abb. 4.52 Gerätefließbild eines dampfbeheizten Behälters mit einschleifiger Temperaturregelung und einschleifiger Standregelung des zu beheizenden Mediums



Temperaturregelung eines dampfbeheizten Behälters In einem Behälter soll die Temperatur eines durchfließenden Mediums konstant gehalten werden. Die Beheizung geschieht mittels Wasserdampf, der in einer Rohrschlange kondensiert (s. Abb. 4.52).

Regelgröße x ist die Flüssigkeitstemperatur ϑ , die im Behälter gemessen wird. Stellgröße y ist der Hub H des Stellventils in der Dampfleitung. Die Regelgröße x wird mit einem konstant eingestellten Sollwert w für die Flüssigkeitstemperatur verglichen und durch den Regler in die Stellgröße y gemäß dessen Struktur und Parametrierung umgeformt und auf das Stellventil gelegt.

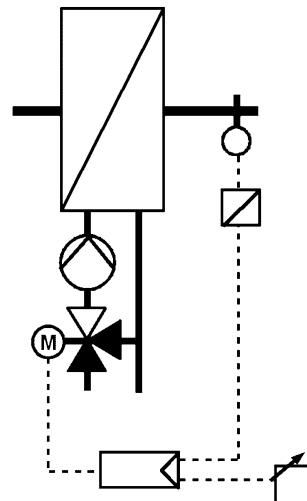
Weitere mögliche Messgrößen, die später bei den Regelschaltungen z. B. als Störgrößen Verwendung finden, sind:

- Stand h des Mediums im Behälter in cm
- Dampfdruck p_D vor dem Dampfventil in bar
- Dampfmenge \dot{m}_D durch die Rohrschlangen in m^3/h
- Zugeführte und abgeföhrte Frischwassermengen $\dot{m}_{w,zu}$ bzw. $\dot{m}_{w,ab}$ in kg/h
- Zulauftemperatur ϑ_{zu} in °C
- Temperatur der Rohrschlange ϑ_R in °C

Weitere mögliche Stellgrößen sind:

- Frischwasserventil
- Abflussventil
- Vordruck-Dampfventil
- Kondensat-Rückstauventil

Abb. 4.53 Temperaturregelung eines Lufterhitzers, Gerätefließbild



Die Standregelung des Mediums kann z. B. durch den Stand h des Mediums als Regelgröße und die Stellgröße des Frischwasserventils realisiert werden. Daraus ergeben sich zwei einschleifige und voneinander unabhängige Regelkreise.

Temperaturregelung eines Lufterhitzers Als Regelgröße x wird die Lufttemperatur hinter einem Lufterhitzer (Abb. 4.53) gemessen.

Die Regelgröße wird mit einem konstanten Sollwert verglichen und beeinflusst das Dreiegeventil als Stellgröße ($y = 0\text{--}90^\circ$) so, dass bei sinkender Temperatur mehr Heizwasser aus dem Heizkreis entnommen wird. Die hydraulische Schaltung, bei der der Heizwasserstrom durch den Erhitzer konstant ist, nennt man Beimischschaltung.

Weitere Messgrößen bzw. potenzielle Störgrößen sind:

- Außentemperatur ϑ_A vor dem Lufterhitzer,
- Luftstrom \dot{m}_L durch den Lufterhitzer,
- Vorlauftemperatur ϑ_V des Heizkreises,
- Heizwasserstrom \dot{m}_W durch den Erhitzer.

Als weitere Stellgröße kann die Drehzahl n der Heizwasserpumpe verwendet werden, mit der der Heizwasserstrom verändert wird.

Raumtemperaturregelung Bei Klimasystemen (s. Abb. 4.54) dient die bewegte Luft gleichzeitig der Frischluftzufuhr als auch dem Energie- und Feuchtentransport. Die Luft ist also gleichzeitig Austauschmedium und Energieträger. Eine Klimazentrale besteht z. B. aus folgenden Bauteilen und Betriebsmitteln:

- Sensoren für die Außentemperatur ϑ_{AU} und die relative Luftfeuchtigkeit φ_{AU} der Außenluft

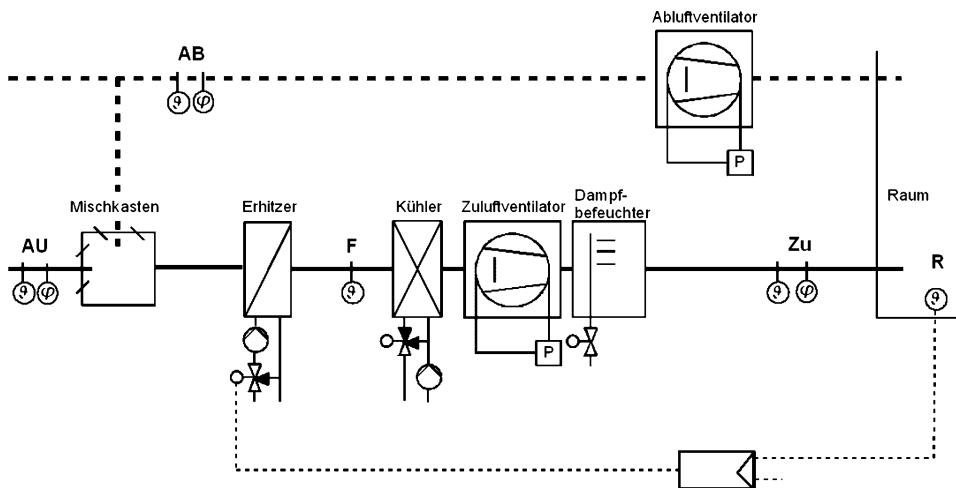


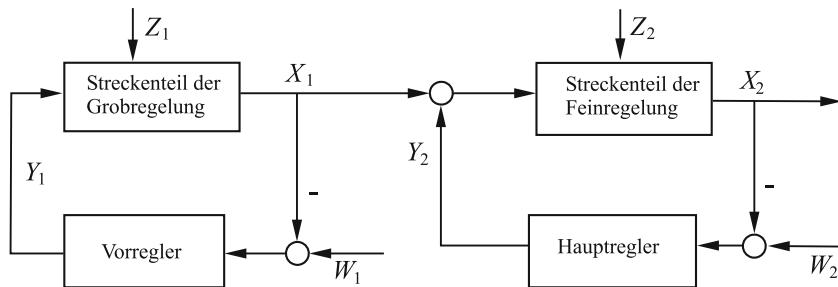
Abb. 4.54 Gerätefließbild einer Klimazentrale mit einfacher Raumtemperaturregelung

- Mischkasten zur Beimischung von Abluft zur Frischluft mit dem Ziel der Energie- und Feuchterückgewinnung
- Sensoren für die Temperatur ϑ_{AB} und relative Feuchte φ_{AB} der Abluft mit dem Ziel der Enthalpieschaltung
- Lufterhitzer in Beimischschaltung zur Erwärmung der Mischluft
- Temperatursensor ϑ_F für die Frostschutzregelung
- Luftkühler in Verteilschaltung für die Abkühlung und Entfeuchtung der Luft
- Zuluftventilator und Abluftventilator zur Luftförderung
- elektrischer Dampfbefeuchter zur Befeuchtung der Luft
- Sensoren für die Zulufttemperatur ϑ_{ZU} und die Feuchte der Zuluft φ_{ZU}
- Sensor für die Raumtemperatur ϑ_R
- Luftverteilssysteme über Luftkanäle bis zum Luftauslass in den Räumen.

Die Außentemperatur als Frischluft wird über unterschiedliche Luftbehandlungsverfahren aufbereitet und als Zuluft in das Luftkanalnetz geleitet. Nach dem Einleiten und Durchströmen des zu klimatisierenden Raumes wird die Luft als Abluft abgesaugt und teilweise als Fortluft an die Umgebung zurückgegeben. Dabei ist die Außenluftmenge gleich der Fortluftmenge.

Als Regelgrößen stehen zur Verfügung:

- Frostschutztemperatur ϑ_F
- Zulufttemperatur ϑ_{ZU}
- Zuluftfeuchte φ_{ZU}
- Raumtemperatur ϑ_R bzw. Ablufttemperatur ϑ_{AB} .

**Abb. 4.55** Wirkungsplan einer Grob-Fein-Regelung

Zur Störgrößenaufschaltung können weiterhin verwendet werden:

- Vorlauftemperatur des Heizmediums $\vartheta_{V,H}$
- Vorlauftemperatur der Kühlmediums $\vartheta_{V,K}$
- Außentemperatur ϑ_{AU} .

Stelleingriffe in das Klimasystem sind:

- Stellung der Luftklappen am Mischkasten
- Dreiegeventil am Luftheritzer
- Drehzahl der Heizmittelförderpumpe
- Dreiegeventil am Luftkühler
- Drehzahl von Zuluft- und Abluftventilator
- Dampfmengen-Dosierventil
- Drosselklappe am Raumeinlass.

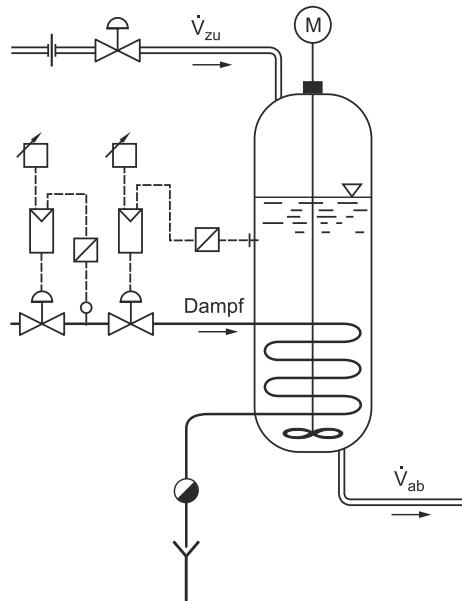
4.7.2 Grob-Fein-Regelung

Die Grob-Fein-Regelung (Abb. 4.55) setzt sich aus zwei in Reihe geschalteten einschleifigen Regelkreisen zusammen. Bei der Grobregelung als Vorregelung reicht grundsätzlich ein einfacher P-Regler aus. Damit lassen sich große Störungen, die von der Versorgungsseite des Mediums her kommen, glätten. Beispiele sind:

- Druckminderer bei allen technischen Gasen
- Durchflussvorregelung bei Wasserwerken
- Speichertemperaturregelungen in Wärmeversorgungssystemen

Die Besonderheit ist, dass ein mit einem groben P-Regler geregelter Puffer verwendet wird und damit Auswirkungen der Störungen auf die nachgeschaltete Regelkreiseinheit, die Feinregelung, gemindert werden.

Abb. 4.56 Grob-Fein-Regelung der Temperaturregelung eines dampfbeheizten Behälters



Dampfdruck-Temperaturregelung Bei der Grob-Fein-Regelung für den Dampf beheizten Behälter (Abb. 4.56) mindert der Vorregler die Druckschwankungen auf der Frischdampfseite. Die Temperaturregelung als Hauptregelung entspricht einer einmaschigen Temperaturregelung.

4.7.3 Störgrößenaufschaltung

Die Störgrößenaufschaltung dient der Minderung der Auswirkung der Störgröße auf die Regelgröße. Das Prinzip besteht darin, die Störung weitgehend durch ein Steuerglied ohne einen zusätzlichen Regelkreis zumindest im eingeschwungenen Zustand zu kompensieren. Dazu muss wiederum die zu kompensierende Hauptstörgröße messbar sein.

Ein solcher Kompensationseingriff aufgrund einer gemessenen Störgrößenänderung kann entweder auf den Stelleingang der Strecke oder auf den Reglereingang vorgenommen werden, so dass zwischen diesen zwei Fällen unterschieden werden muss.

Kompensationsregler Bei der Störgrößenaufschaltung in Form eines Kompensationsreglers (Abb. 4.57) wird stetig eine gegen die Störauswirkung gerichtete zusätzliche Störgröße berechnet und auf den Reglerausgang geschaltet. Ausgehend von Arbeitspunkt $Y_0 = Z_0$ wird die Störgröße $\Delta z(t)$ gemessen und entsprechend dem Streckenverhalten der Regelstrecke in die gegengerichtete Stellgröße $\Delta y(t)$ umgewandelt. Greift die Störgröße (vereinfacht) am Eingang der Regelstrecke ein, dann weist die Störgrößenaufschaltung proportionales Verhalten auf.

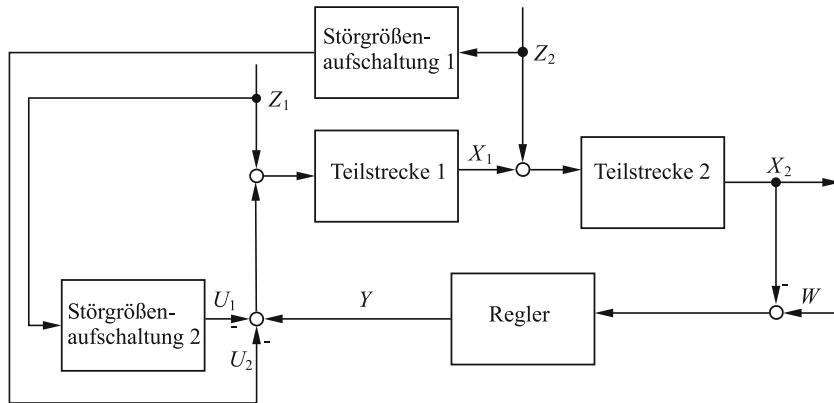
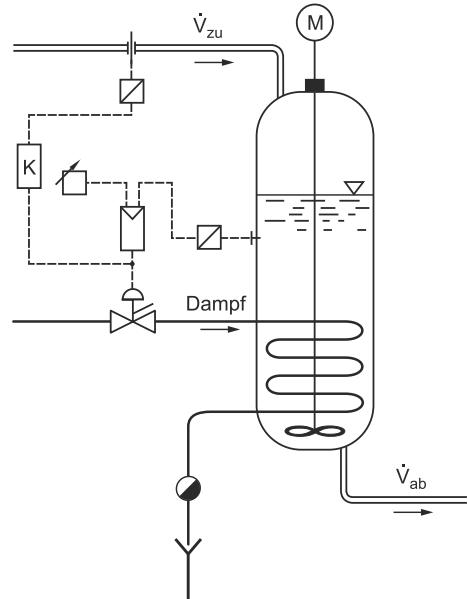


Abb. 4.57 Störgrößenaufschaltung auf den Reglerausgang (Kompensation)

Abb. 4.58 Störgrößen-
aufschaltung auf den
Reglerausgang beim dampf-
beheizten Behälter



An dem Beispiel des Behälters (Abb. 4.58) wird die prinzipielle Wirkungsweise der Störgrößenaufschaltung dargestellt. Eine Störgröße bei dieser Anordnung ist die momentan aktuelle Zuflussmenge in den Erhitzer. Diese wird gemessen und kann nun auf den Stelleingang der Strecke (Reglerausgang) geschaltet werden.

Beispiel 4.7 (Temperaturregelung mit Störgrößenaufschaltung auf den Reglerausgang)

Einen wichtigen Störeinfluss auf die Temperaturregelung haben die Schwankungen der kalten Frischwassermenge. Durch die Zufuhr von kaltem Wasser in den aufgeheizten Behälter sinkt die zu regelnde Temperatur schlagartig ab. Um dies zu verhindern,

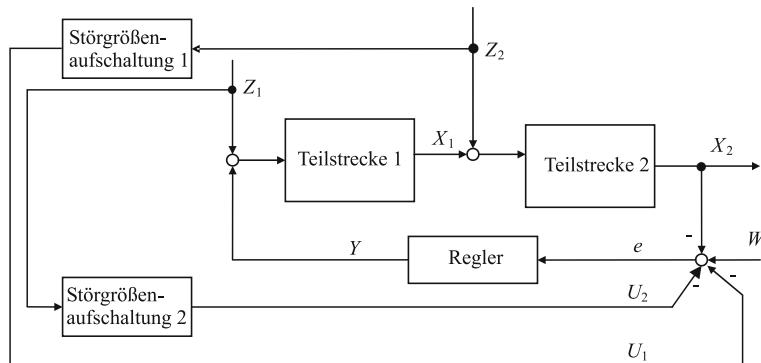
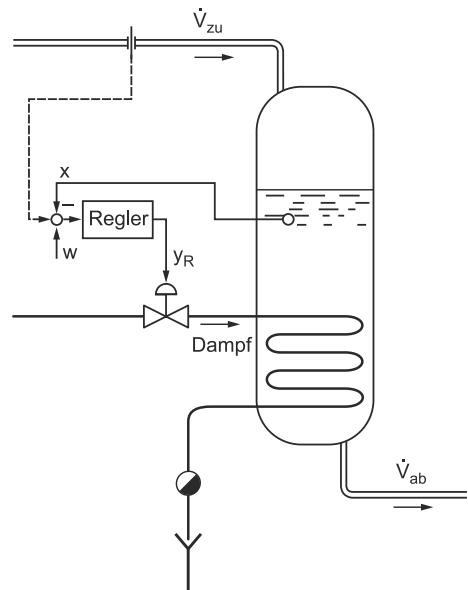


Abb. 4.59 Störgrößenaufschaltung auf den Reglereingang

Abb. 4.60 Gerätefließbild einer Störgrößenaufschaltung auf den Reglereingang



muss möglichst zeitgleich die über den Dampfstrom zugeführte Heizwärme vergrößert werden. Die Kompensationsaufschaltung K wird zeitlich und von der Größe her so gesteuert, dass die Dampfmenge proportional zur zusätzlichen Frischwassermenge verläuft.

Störgrößenaufschaltung auf den Reglereingang Wird die Störgröße mit dem richtigen Vorzeichen auf den Reglereingang geschaltet, so kann das Signal am Reglereingang als Sollwertänderung interpretiert werden. Die Störgrößenaufschaltung meldet dem Regler jede Störgrößenänderung. Der Regler kann somit sofort reagieren; es muss nicht gewartet werden, bis eine Änderung der Durchflussmenge sich in einer Änderung der Temperatur (Regelgröße) niederschlägt (Abb. 4.59 und 4.60).

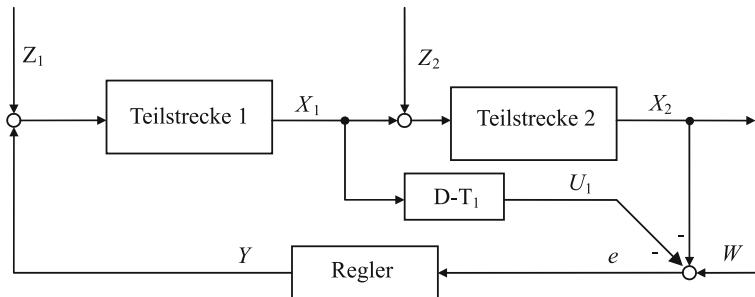


Abb. 4.61 Wirkungsplan einer Hilfsregelgrößenaufschaltung

Da der Regler nur die Regeldifferenz als Eingangssignal erhält, hier also das Mischsignal von Regelgröße, Sollwert und Störgrößen, erfolgt bei einer Störgrößenänderung eine Änderung der Regeldifferenz e , die ebenso gut von einer Sollwertänderung herrühren könnte. Bei einem P-Regler wird dadurch bei richtiger Einstellung die bleibende Regeldifferenz kompensiert. Ein Regler mit I-Anteil würde auf eine neue Regelgröße hinfahren. Das jeweilige Steuerglied muss D-T₁-Verhalten (Verschwindeimpuls) zeigen, da wegen

$$e = W - X - U_1 - U_2$$

eine bleibende Regelabweichung entsteht. Im Beharrungszustand zeigt das D-T₁-Glied den Wert Null.

Regelung mit Hilfsregelgröße An Stelle einer Störgröße kann auch eine sonstige Regelgröße auf den Reglereingang gelegt werden (Abb. 4.61 und 4.62). So meldet bei Strecken höherer Ordnung ein „vorgeschobener Beobachter“ dem Regler frühzeitig, dass eine Störgröße die Regelstrecke beeinflusst hat. Diese Hilfsregelgröße muss ebenfalls als Verschwindeimpuls auf den Reglereingang geschaltet werden.

Da die Ausgangsgröße des D-T₁-Gliedes proportional zur Änderungsgeschwindigkeit der Hilfsregelgröße ist, ergeben sich zwei Vorteile:

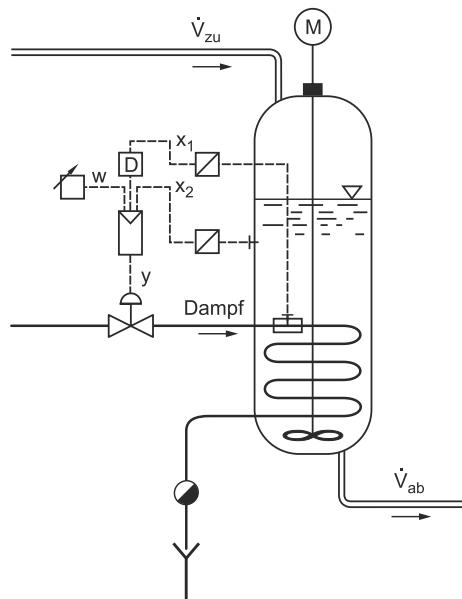
- Im Beharrungszustand ergibt sich keine Beeinflussung des Reglers.
- Hohe Änderungsgeschwindigkeiten der Hilfsregelgröße führen zu einem stärkeren Eingreifen des Reglers.

Nachteil:

- Bei stochastischen Störgrößen ist diese Schaltung nicht brauchbar, da dadurch zusätzliche Unruhe in den Regelkreis gebracht wird.

Als Hilfsregelgröße könnte z. B. auch die Dampfmenge hinter dem Stellventil (Abb. 4.60) herangezogen werden.

Abb. 4.62 Gerätefließbild einer Hilfsregelgrößenaufschaltung



4.7.4 Führungsgrößenaufschaltung

Bei einer Folgeregelung ist die Führungsgröße W eine Funktion

- der Zeit,
- einer internen Messgröße, z. B. Ofentemperatur oder Ist-Position,
- einer externen Messgröße, z. B. Außentemperatur,
- einer Vorgabe des Bedieners der Anlage.

Man kann hierbei auch von einer Vorsteuerung sprechen, da die Führungsgröße nach externen oder internen Kriterien variiert wird, ohne dass es zu Rückwirkungen auf die gemessene Größe kommt. Die Aufgabe der Regelung ist es, den Verlauf der Regelgröße X möglichst genau an den Verlauf der Führungsgröße anzupassen.

Bei einer Zeitplanregelung wird der Sollwert der Regeleinrichtung von einer übergeordneten Instanz (Personal, Funktionsbaustein einer Steuerung, ...) nach einem Zeitschaltplan vorgegeben.

Anwendungsbeispiele:

- Batch-Prozess in der Verfahrensindustrie,
- Positionierung in der Fertigung,
- Temperaturregelung von Industrieöfen oder Trocknern,
- Anfahr- oder Lastwechselvorgänge.

Abb. 4.63 Chemischer Reaktor mit Zeitschaltplan

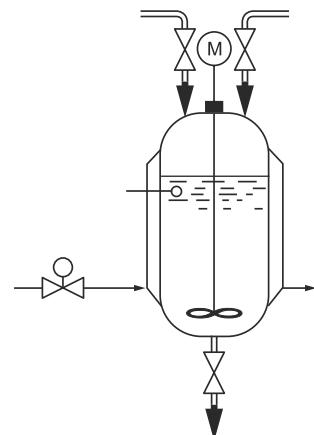
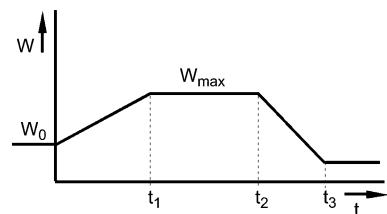


Abb. 4.64 Zeitgeführter Sollwert der Reaktortemperatur



Zeitplanregelung Oft wird zur zeitlichen Steuerung von Positionierzögängen oder Trocknungsvorgängen in Industrieöfen ein konkretes Solltemperaturprofil mit einzelnen Anstiegen zur Änderung von Sollwerten verwendet (Abb. 4.63). Da der Sollwerteingang direkt auf den P-Teil eines Reglers wirkt, lässt sich damit das Zeitverhalten verbessern.

Ist bei der Reaktion zweier Komponenten der Umsetzungsgrad im chemischen Reaktor nicht messbar, kann man den Temperatursollwert nach dem Aufheizen so lange konstant halten, bis die Umsetzung entsprechend theoretischen Berechnungen garantiert erfolgt ist (Abb. 4.64). Anschließend wird das Reaktionsprodukt gezielt abgekühlt.

Heizkurve (Abb. 4.65 und 4.66)

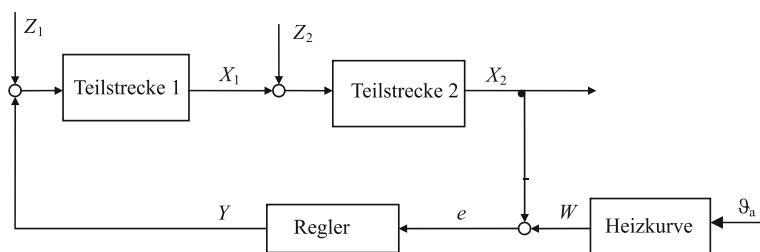
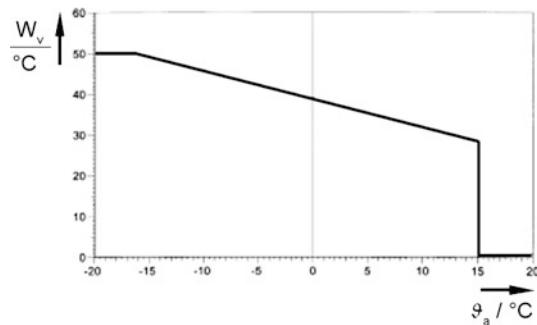


Abb. 4.65 Wirkungsplan eines Regelkreises mit außentemperaturabhängiger Sollwertführung

Abb. 4.66 Heizkurve in Abhängigkeit von der Außentemperatur ϑ_a



Anfahrvorgang Um den Anfahrvorgang sanfter für die Stelleinrichtung zu gestalten, wird eine Anfahrrampe verwendet. Dadurch wird der harte Eingriff des Reglers auf die Regelstrecke gemildert. Die Rampe besteht aus einem linearen Anstieg von W_0 bis zu einem maximalen Führungsgröße W_1 (Abb. 4.67). Der Anstieg a kann eingestellt werden über die Laufzeit t_A , die der Sollwert von W_1 bis W_0 benötigt.

$$W(t) = W_0 + a \cdot t|_{t=0}^{t_A} \quad \text{mit } a = \frac{W_1 - W_0}{t_A} \text{ und } W_1 = W_{\max}$$

4.7.5 Verhältnisregelung

Manchmal wird als gutes Regelergebnis nicht ein konkreter Wert sondern ein exaktes Verhältnis zweier Größen gefordert. Die Verhältnisregelung wird vor allem bei der Mischung

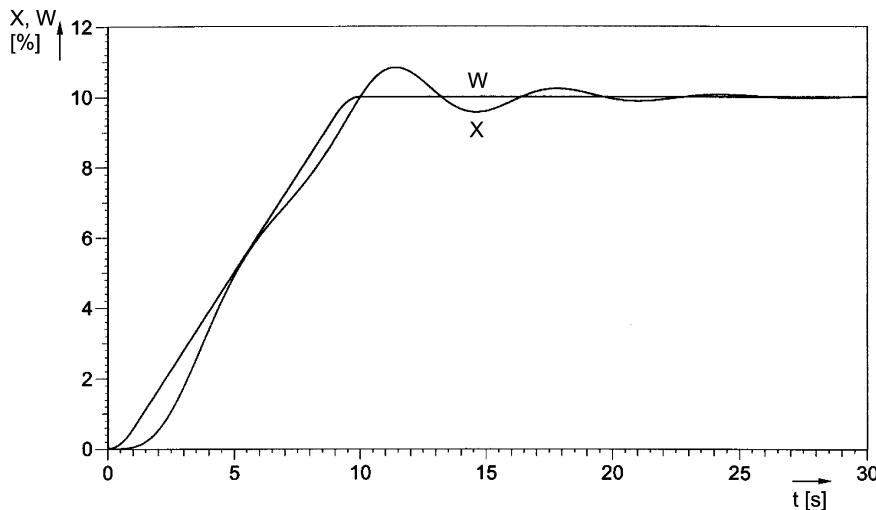
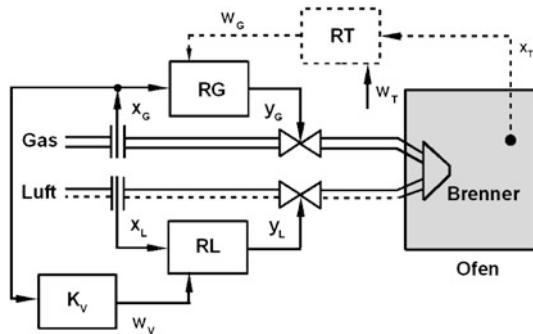


Abb. 4.67 Anfahrvorgang einer Drehzahlregelung

Abb. 4.68 Brennerregelung als Verhältnisregelung



zweier Mengenströme eingesetzt, die in einem festen Verhältnis zueinander stehen, z. B. bei einer Feuerung mit konstantem Verhältnis von Brenngas oder Heizöl zu Verbrennungsluft. Während der Mengenstrom des Brenngases nach äußeren Gesichtspunkten geregelt wird, z. B. nach der momentan geforderten Heizleitung, stellt die Verhältnisregelung die dafür erforderliche Luftmenge zur Verfügung. Die Luftmengenregelung ist dann eine Folgeregelung, Führungsgröße ist die Stellgröße der Regelung des Brennstoffes.

$$Y_{\text{Führung}} = W_{\text{Folge}}$$

λ-Regelung Das Gas-Luft-Gemisch für einen Brennofen soll geregelt werden. Gas und Luft werden dem Brenner des Ofens zugeführt. Die Gaszufuhr x_G kann von Hand über den Sollwert w_G vorgegeben oder in Abhängigkeit von der Temperatur x_T im Ofen über den Temperaturregler verstellt werden (gestrichelt eingetragen in Abb. 4.68).

Um eine möglichst gute Verbrennung zu erreichen, muss die Luftzufuhr x_L in einem bestimmten Verhältnis zum Gasverbrauch x_G stehen. Es soll gelten:

$$x_L = K_V \cdot x_G.$$

Dies geschieht durch den Verhältnisregler, einem P-Regler, der den Sollwert

$$w_L = K_V \cdot x_G$$

für den Luftregler vorgibt. Durch diese Verhältnisregelung werden die beiden Regelkreise für Gas- und Luftzufuhr verkoppelt.

Mengenverhältnis-Regelung Das Verhältnis von Frischwasser und Dampfmenge soll konstant gehalten werden (Abb. 4.69). Die Verhältnisregelung sorgt dafür, dass die Heizdampfmenge bereitgestellt wird, die für die schwankende Frischwassermenge erforderlich ist.

Die Dampfmenge wird geregelt, die Temperatur wird gesteuert, da sie nicht gemessen und auf den Regler geschaltet wird. Solange keine sonstigen Störgrößen, wie Dampfdruckänderungen oder Frischwassertemperaturschwankungen auftreten, ist das Regelergebnis zufriedenstellend. Trifft dies nicht zu, so muss die Regelschaltung um die Hauptregelgröße, d. h. Behältertemperatur, erweitert werden.

Abb. 4.69 Gerätefließbild einer Verhältnisregelung

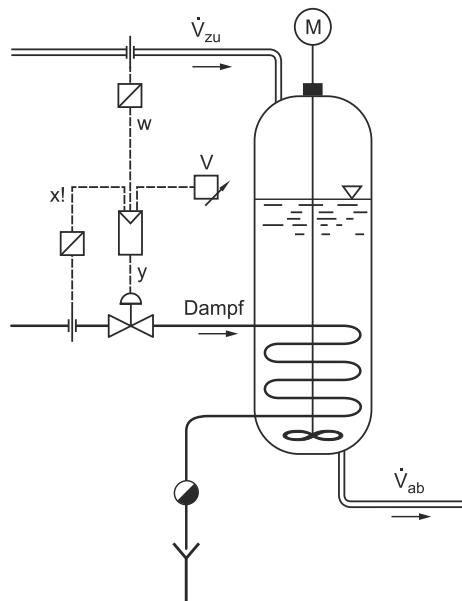
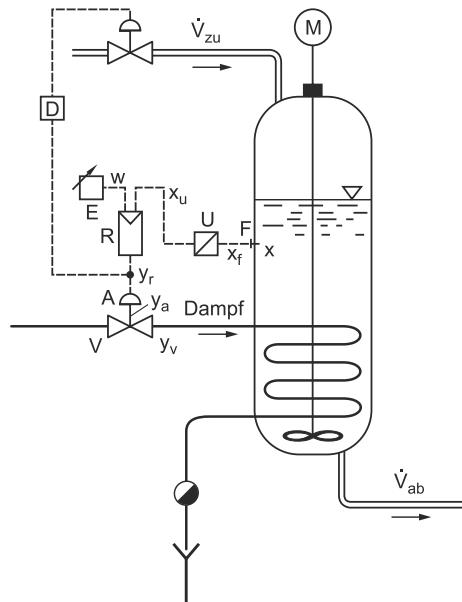


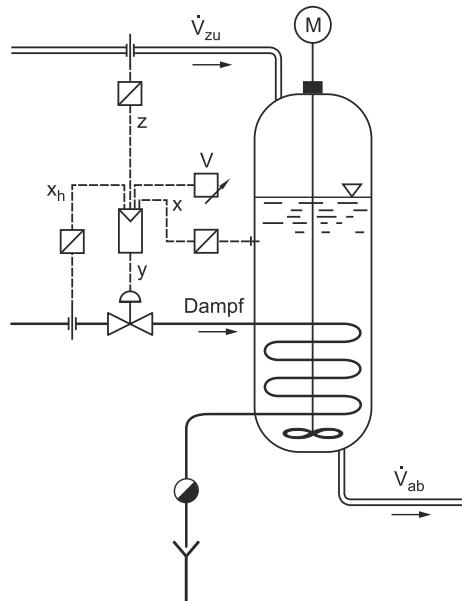
Abb. 4.70 Regelung mit Hilfsstellgröße



Regelung mit Hilfsstellgröße Bei der HilfsstellgröÙenregelung wird das Stellsignal nicht nur auf das zugehörige Stellglied gegeben, sondern es beeinflusst auch vorübergehend ein zweites Stellventil, das evtl. eine stärkere Wirkung auf die Regelgröße aufweist.

Bei der in Abb. 4.70 eingezeichneten Regelung wird bei fallender Temperatur im Behälter das Dampfstellventil weiter geöffnet und gleichzeitig vorübergehend über einen

Abb. 4.71 Gerätefließbild einer Dreikomponentenregelung



Verschwindeimpuls ($D-T_1$) der Frischwassermengenstrom verkleinert. Durch diese zweite Maßnahme wird die Temperaturabsenkung abgefangen, bis sich der vergrößerte Dampfstrom durch erhöhten Wärmeübergang in den Rohrschlägen bemerkbar macht.

Dreikomponentenregelung Bei der Dreikomponentenregelung (Abb. 4.71) handelt es sich um eine Schaltung, mit der auch bei schwer zu regelnden Strecken noch gute Ergebnisse erzielt werden können. Sie hat weiterhin den großen Vorteil, dass sie relativ leicht einzustellen ist, da sich zwei der Messgrößen kompensieren.

Hierbei sind mindestens zwei Regelaufgaben zu formulieren:

- Das von der Temperatur beeinflusste Verhältnis der beiden Mengenströme ist konstant zu halten.
- Durch Aufschaltung der Störgröße „Frischwassermenge“ wird die Temperatur vorbeugend geregelt.
- Durch Aufschaltung der Hilfsregelgröße „Dampfmenge“ erhält die Temperaturregelung einen vorausschauenden Beobachter.

4.7.6 Kaskadenregelung

Bei einer Kaskadenregelung (Abb. 4.72) wird die Regelstrecke in mehrere Teilstrecken zerlegt. Die Ausgangsgröße einer jeden Teilstrecke muss messbar sein.

Eine Hilfsregelgröße X_1 wird zur Bildung eines zweiten unterlagerten Regelkreises herangezogen. Der Führungsregler wirkt nicht direkt auf die Stellgröße Y_1 , sondern liefert

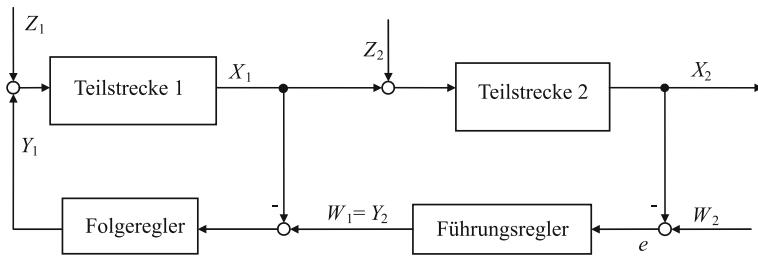


Abb. 4.72 Wirkungsplan einer Kaskadenregelung

den Sollwert für den unterlagerten Folgeregler ($W_1 = Y_2$). Durch diese Schaltung entsteht ein unterlagerter Regelkreis, der sehr schnell auf Störungen der 1. Teilstrecke reagieren kann, z. B. auf die Störung Z_1 .

Der Hauptregelkreis regelt alle Störungen aus der 2. Teilstrecke aus und ist für das Führungsverhalten zuständig. Die schnellere Teilstrecke wird normalerweise mit einem PI-Regler, die langsamere Teilstrecke mit einem P-Regler geregelt. Aus Abb. 4.72 wird ersichtlich, dass zuerst der Hilfsregelkreis losgelöst vom Hauptregelkreis ausgelegt werden kann. Anschließend wird dann der Hauptregler optimiert, wobei das Verhalten des Hilfsregelkreises bei der Auslegung berücksichtigt werden muss.

Zusammenfassend gilt bei der Kaskadenregelung:

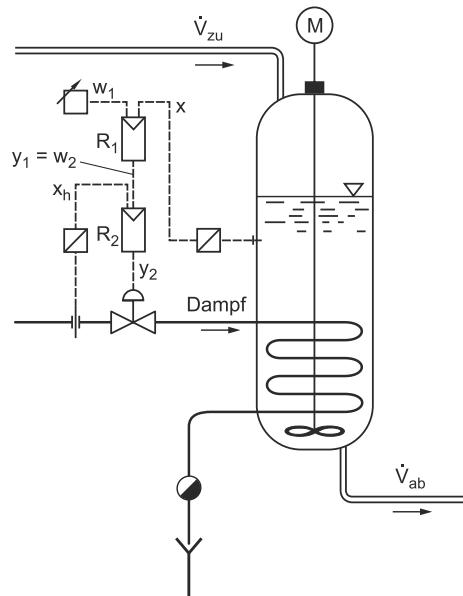
- Das Störverhalten bezüglich Störungen im ersten Streckenabschnitt wird verbessert.
- Die Dämpfung des Regelkreises wird erhöht und damit die Stabilitätsgüte verbessert.
- Bei Verwendung von P-Reglern an Strecken mit Ausgleich wird der statische Regelkoeffizient gegenüber dem einschleifigen Regelkreis erhöht.

Bei der Inbetriebnahme wird zuerst der Hilfsregelkreis, dann der Hauptregelkreis optimiert.

Kaskadenregelung für einen dampfbeheizten Behälter In dem Beispiel des Wärmetauschers (Abb. 4.73) können Störgrößen, die vom Dampfdruck oder von der Temperatur des Dampfes herrühren, sofort über den unterlagerten Folgeregelkreis ausgeregelt werden. Temperaturänderungen im Behälter, hervorgerufen durch Mengenstrom- oder Temperaturschwankungen im Zulauf bewirken über den Hauptregler eine Sollwertänderung für den unterlagerten Regelkreis. Dieser sorgt dann für eine schnelle Verstellung der Dampfzufuhr.

Hierbei können jetzt Störungen, die im ersten Regelstreckenteil einwirken, durch den Hilfsregler bereits soweit ausgeregelt werden, dass sie sich im zweiten Regelstreckenteil gar nicht oder nur stark reduziert bemerkbar machen. Der Führungsregler muss dann in diesem Falle nur noch geringfügig eingreifen. Damit nicht zu viele Reglerparameter optimiert werden müssen, versucht man oft den Hauptregler als PI- und den Hilfsregler nur als P-Struktur auszuführen.

Abb. 4.73 Gerätefließbild einer Kaskadenregelung



Kaskadenregelung eines Klimasystems Ein einmaschiger Regelkreis zur Raumtemperaturregelung führt zu einem sehr langsamem Regelvorgang bei Klimasystemen. Bei einer Luftwechselzahl $n = 3 \text{ h}^{-1}$ wird die behandelte Luft erst nach über 20 Minuten zu einer merklichen Messwertänderung am Abluftventilator bewirken. Störgrößen am Eingang des Klimasystems, z. B. Außentemperatur, führen zu einer großen Verzugszeit T_u . Deshalb wird die Regelstrecke des Klimasystems mindestens in zwei Teilstrecken aufgeteilt (Abb. 4.74):

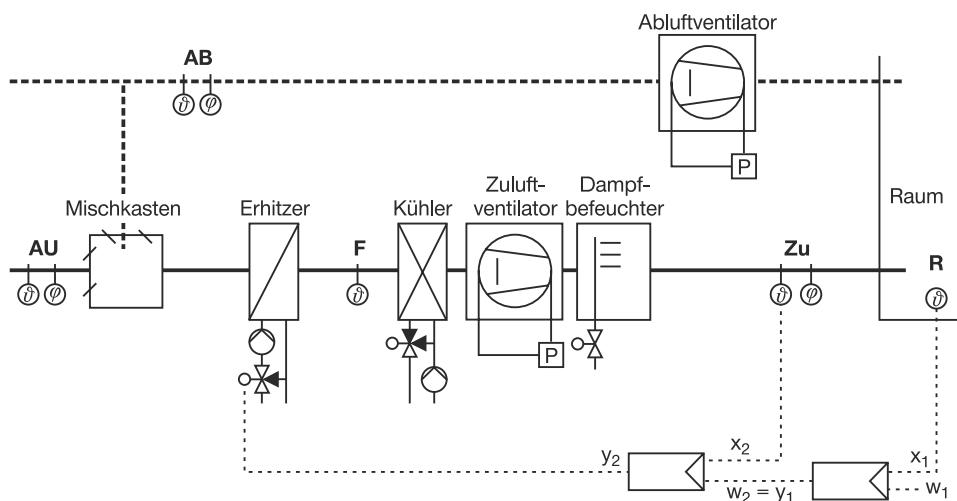


Abb. 4.74 Kaskadenregelung eines Klimasystems

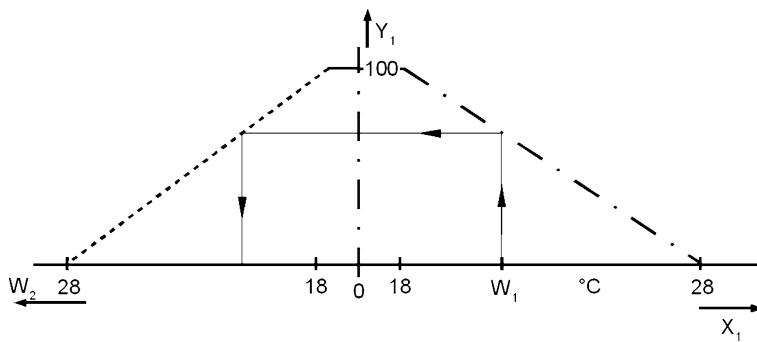


Abb. 4.75 Stellcharakteristik des Führungsreglers

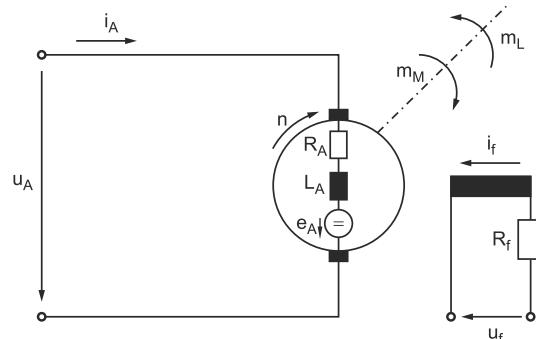
- Regelstreckenteil 1 vom Einlass der Frischluft bis zur Zuluftmessung als Hilfsregelgröße
- Regelstreckenteil 2 von der Zuluftmessung aus bis zur Raumtemperatur erfassung. Da die Festlegung eines geeigneten Messortes im Raum schwierig ist, wird oft die Ablufttemperatur als Hauptregelgröße verwendet.

Da die Raumluftheizung zu einer großen Verzugszeit im zweiten Teil der Regelstrecke führt, wird der Regler als reiner P-Regler eingestellt. Der Stellbereich dieses P-Reglers wird auf den Messbereich der Zulufttemperatur begrenzt (Abb. 4.75).

Der Folgeregler vergleicht die Führungsgröße W_2 mit der gemessenen Zulufttemperatur X_2 . Der als PI-Regler konfigurierte Folgeregler bestimmt die auf den Luftherzter wirkende Stellgröße Y_2 , die so geregelt wird, dass keine bleibende Regeldifferenz e_{bl} zwischen Raumtemperatur und Raumtemperatursollwert entsteht. In der Reihe von Kaskadenreglern, die auf ein Stellgerät einwirken, reicht ein I-Teil, um die bleibende Regelabweichung zu vermeiden.

Drehzahlregelung Für die Drehzahlregelung werden meist Gleichstrommotoren mit Permanentmagneten eingesetzt. Das Feld, welches durch Anlegen einer Feldspannung u_F

Abb. 4.76 Ersatzschaltbild eines Gleichstrommotors



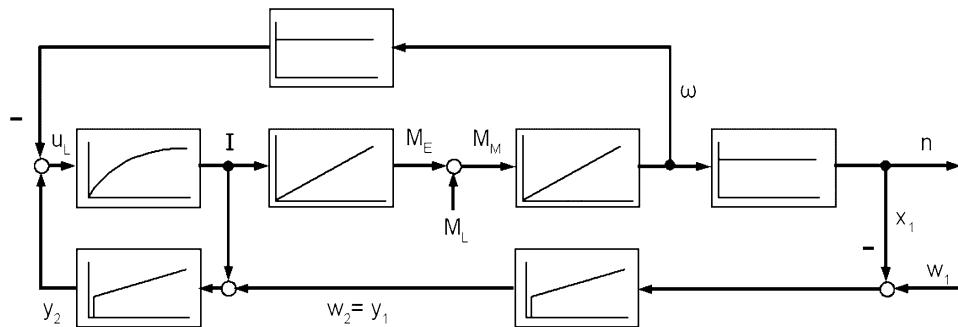


Abb. 4.77 Wirkungsplan der Drehzahlregelung in Form einer Kaskadenregelung

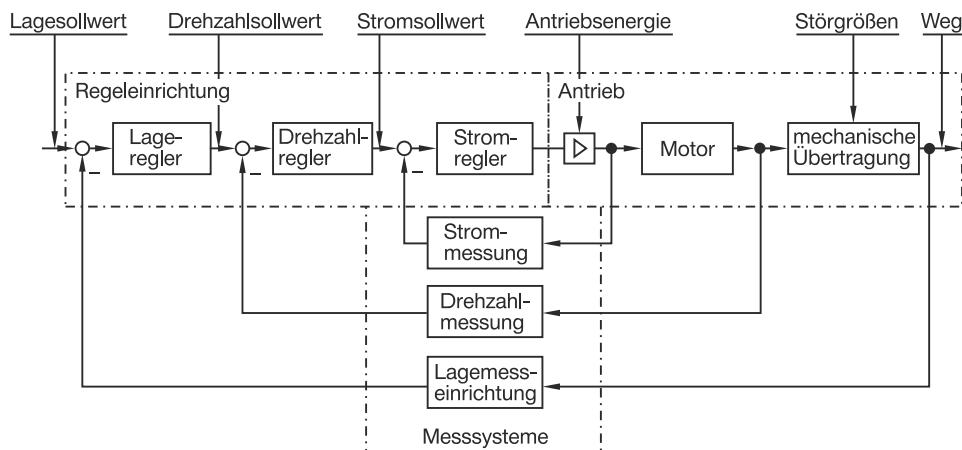


Abb. 4.78 Kaskadierung einer Positioniereinrichtung

erzeugt wird, kann als konstant angesehen werden. Für die Gleichstrommaschine kann das Ersatzschaltbild nach Abb. 4.76 angegeben werden.

Bei der Drehzahlregelung von elektrischen Antrieben kommt grundsätzlich die Kaskadenregelung zum Einsatz (Abb. 4.77). Sowohl zur Stromregelung als auch zur Drehzahlregelung wird jeweils ein PI-Regler verwendet. Der Folgeregler ist dabei der Stromregler.

Der Führungsregler liefert ein Ausgangssignal, dass dem zur Erreichung einer gewünschten Drehzahl geforderten Drehmoment proportional ist. Diese wiederum entspricht bei konstantem Feld gleichzeitig dem Sollwert des Ankerstromes.

Positionierregelung Durch Hinzufügen einer weiteren Kaskade kann der Drehzahlregelkreis zu einem Lageregelkreis erweitert werden (Abb. 4.78).

Die Positionierregelung besteht aus einer Kaskadierung von

- Stromregler
- Drehzahlregler
- Lagerregler.

Literatur

1. Ackermann, J.: Abtastregelung. Springer (1972)
2. Hagl, R.: Elektrische Antriebstechnik. Hanser (2015)
3. Heinrich, B., Linke, P., Glöckler, M.: Grundlagen Automatisierung. Springer Vieweg (2014)
4. Lunze, J.: Regelungstechnik 1, 11. Aufl. Springer Vieweg (2016)
5. Schröder, D.: Elektrische Antriebe – Regelung von Antriebssystemen, 4. Aufl. Springer Vieweg (2015)
6. Unbehauen, H.: Regelungstechnik 1, 15. Aufl. Vieweg + Teubner (2008)
7. Walter, H.: Grundkurs Regelungstechnik, 3. Aufl. Springer Vieweg (2013)
8. DIN IEC 60050-351, Internationales Elektrotechnisches Wörterbuch – Teil 351. Beuth, Berlin (2013)
9. DIN IEC 60381-1, Analoge Signale für Regel- und Steueranlagen. Beuth, Berlin (1985)

Sachverzeichnis

A

- Abklingkonstante, 103
- Abklingkonstantenverfahren, 103
- Abklingzeit, 103
- Abtaster, 32
- Abtastregler, 154
- Abtastung, 217, 219
- Abtastzeit, 33
- Abweichung, 5
- Additionsstelle, 41
- Adressbus, 219
- Aktor, 10, 21
- Analog-Digital-Umsetzer, 219
- Analog-Digital-Umsetzung, 223
- analoges Signal, 19, 33
- Anfahrvorgang, 242
- Anfangsverhalten, 163, 167, 168, 179, 181, 186, 191
- Angleichung, 4
- Anregelzeit, 207
- Anschwingverhalten, 106
- Anstiegsantwort, 48, 49, 52, 54, 148, 149, 151
- Anstiegsfunktion, 44, 48, 54
- Antwortfunktion, 49, 54
- aperiodischer Grenzfall, 103
- Arbeitspunkt, 15, 44, 67, 128
- Aufgabengröße, 8–10
- Auflösung, 221
- Ausgangsgröße, 1, 23, 37–39, 44, 165
- Ausgangssignal, 21, 46, 48
- Ausgleich, 57, 115
- Ausgleichsgerade, 67
- Ausgleichszeit, 58, 82, 83, 86, 96
- Ausregelzeit, 207, 210

B

- Beharrungsverhalten, 163, 166, 167, 181, 186
- Beharrungswert, 43, 75–77, 103, 146, 190
- Beharrungszustand, 44, 111, 120, 128
- Beispiel Abflussventil eines Behälters, 17
- Beispiel Analog-Digital-Umsetzung, 223
- Beispiel Beharrungswert eines Kochtopfes, 76
- Beispiel Beschreibung eines Zeitverlaufes im Zeitbereich, 22
- Beispiel Dosierung einer Gasmenge, 5
- Beispiel Druckregelstrecke mit P-T₁-Verhalten, geregelt durch einen P-Regler, 176
- Beispiel Durchflussregelstrecke mit P-Regler, 169
- Beispiel Ermittlung der Kennwerte einer schwingungsfähigen Strecke ohne zusätzliche Verzögerungsglieder, 106
- Beispiel Ermittlung der Kennwerte eines Regelkreises mit P-T₁-Strecke und Zweipunktregler mit Hysterese, 213
- Beispiel Feder-Dämpfungs-System eines masselos gedachten Fahrzeugs, 25
- Beispiel Freier Auslauf aus einem Wasserspeicher, 80
- Beispiel Kennlinien des Wasserstandsreglers, 133
- Beispiel Kennlinien einer Druckregelstrecke, 64
- Beispiel Kennwerte des I-Reglers, 139
- Beispiel Kennwerte des PI-Reglers, 144
- Beispiel Kennwerte einer verzögerungssarmen I-Strecke, 117
- Beispiel Kennwerte eines PID-Reglers, 151
- Beispiel Kursregelung, 10
- Beispiel Modell einer Raumheizung nach der Zeitprozentkennwert-Methode, 99
- Beispiel Modell eines Wärmetauschers, 96

- Beispiel Multiplikationsstelle am Beispiel eines Heizkörpers, 43
- Beispiel Proportionale Strecken mit Totzeit, 72
- Beispiel P-T_n-Modell mit Hilfe des Wendetangenten-Verfahrens, 90
- Beispiel P-T_n-Modell mit Hilfe einer Zeitkonstantensumme, 86
- Beispiel Wasserbehälter als Block im Wirkungsplan, 38
- Beispiel Wasserstandsregelung mit PI-Regler, 184
- Beispiel Wasserstandsregelung mit strukturinstabiler Regelung, 192
- Betriebspunkt, 14, 15, 17, 46, 64, 68
- Bimetall, 156
- binäres Signal, 19
- bleibende Regelabweichung, 129, 131, 135
- Block, 37, 40
- Bode-Diagramm, 31
- C**
- Chien, 203
- D**
- D, 53
- Dämpfungsgrad, 102, 104, 106–110, 115
- Datenbus, 219
- D-Glied, 54
- Differenzengleichung, 226
- Differenzialgleichung, 25
- Differenzialgleichung, Auswertung, 166
- Differenzialgleichungsanalyse, 161
- Differenzierbeiwert, 153
- Digital-Analog-Umsetzer, 219
- digitaler Regler, 126
- digitales Signal, 19, 31
- Drehzahl, 1
- Drehzahlregelung, 248
- Drehzahlregler, 1
- Dreikomponentenregelung, 245
- Dreipunktregler, 155
- Druckregelstrecke, 86, 176
- Durchflussregelstrecke, 169
- D-Verhalten, 36, 54, 146
- dynamischer Kennwert, 56
- E**
- Eigenfrequenz, 103
- Eingangsgröße, 1, 22, 23, 37–39, 43, 44, 48
- Eingangssignal, 21, 44, 48
- Eingangssprung, 128, 166
- Einheitsanstieg, 49
- Einheitsmessumformer, 10
- Einheitsregler, 13, 135
- Einheitssprung, 46
- einschleifiger Regelkreis, 161
- Einschwingverhalten, 108
- Einstellregel, 161, 198, 203, 204
- Einstellwerte, 203
- Empfindlichkeit, 199
- Entladefunktion, 78
- F**
- Festwertregler, 125
- Fliehkraftregler, 1
- Folgeregler, 125
- Frequenzbereich, 22, 29
- Führungsgröße, 4, 8, 9, 13, 23, 125
- Führungsgrößenbildner, 9
- Führungsverhalten, 161, 166, 189, 197
- Fundamentalgleichung, 36
- G**
- Genauigkeit, 199
- Gerätefließbild, Druckluftregelkreis, 177
- Gerätefließbild, Wasserstandsregelung, 192
- Gleichung des Summenpunktes, 164
- Güte, 199
- Gütemaß, 207
- H**
- Halbwertzeit, 81
- Hilfsenergie, 126
- Hilfsregelgröße, 239
- Hilfsstellgröße, 244
- Hrones, 203
- Hysterese, 211, 213, 215
- I**
- I, 50, 137
- I-Glied, 39
- Impulsantwort, 47–49, 51, 54
- Impulsfunktion, 44, 47, 48
- Information, 18
- Informationsparameter, 18, 19
- Informationszustand, 19
- Integralkriterien, 208
- Integrierbeiwert, 115, 117, 119, 120, 139, 143

- Integrierwert, 118, 152
Integrierzeit, 51, 117, 140
I-Regler, 133, 138–140
I-Strecke, 115, 116, 122
Istwert, 14
I-Verhalten, 11, 36, 54, 57, 58, 115, 117
- K**
Kennkreisfrequenz, 102
Kennlinie, 7, 13, 15, 16, 37–39, 59, 60, 62, 64, 119
Kennlinienschar, 170
Kennwert, dynamischer, 56
Kennwert, statischer, 56
Kompensationsregler, 236
Kreisschaltung, 37
kritischer Zustand, 200, 203
Kursregelung, Beispiel, 11
- L**
Ladefunktion, 77
Lageregelung, 114
Laplace-Transformation, 161, 228
Leistungsüberschuss, 159
Linearisierung, 16, 18, 59
logarithmisches Dekrement, 104, 108, 113
Lösung, allgemeine, 27
Lösung, homogene, 26
Lösung, partikuläre, 27
 λ -Regelung, 243
- M**
Mengenverhältnis-Regelung, 243
Messeinrichtung, 4, 35
Messglied, 10, 15
Messgröße, 3
Messort, 55
Messspanne, 12
Messumformer, 13, 41
Mittelwert, 34
Mittelwert, quadratische Abweichung, 33
MSR-Form, 165
Multiplexer, 219
Multiplikationsstelle, 41, 43
- N**
Nachstellzeit, 140, 143, 145
Normalverteilung, 34
- O**
Ortskurve, 31
Ortskurvendarstellung, 31
- P**
Parallelschaltung, 37
PD-Regler, 145, 147, 149
Periode, 103
P-Glied, 75
Phasenverschiebung, 103
PID-Regler, 150, 151
PI-Regler, 137, 141, 143
Positionierregelung, 249
P-Regler, 128, 129, 136, 137
P-Regler, Übertragungsverhalten, 131
Proportionalbeiwert, 47, 56, 66, 68, 73, 75, 103, 132
Proportionalbereich, 132
Proportionalwert, 39, 59, 61, 62, 69, 96, 98, 110, 128, 151
P-Strecke, 101, 122
P-Verhalten, 36, 49, 54, 57, 58
- Q**
quasistetiger Regler, 126
- R**
Rampenfunktion, 44
Raumtemperatur, 2
Raumtemperaturregelung, 4, 5
Raumtemperatursteuerung, 3
Rechteckfunktion, 44
Regelabweichung, bleibende, 129
Regelbarkeit, 82, 83
Regeldifferenz, 6, 8, 126, 128
Regeldifferenz, bleibende, 131, 135, 167, 169
Regeleinrichtung, 4, 41, 125
Regelfaktor, 163
Regelfläche, 209
Regelglied, 9, 125
Regelgröße, 4, 6, 8–10, 12, 13, 15
Regelgüte, 205
Regelkreis, 4, 8, 14
Regelkreisanalyse, 162–164
Regelkreisanalyse, Checkliste, 163
Regelschaltung, 161
Regelstrecke, 9, 13–16, 34, 55, 57, 73, 126
Regelung, 4–6, 13, 34
Regelungssystem, 8

- Regelungstechnik, Fundamentalgleichung, 24
 Regelventil, 5
 Regler, 1, 125
 Regler, digital, 126
 Regler, quasistetig, 126
 Regler, stetig, 126
 Regler, unstetig, 126
 Reglerarten, 126
 Reglerausgangsgröße, 8, 9
 Reglerkennwerte, 126
 Regleroptimierung, 210
 Regressionsgerade, 66
 Reihenschaltung, 37, 73, 102, 112
 Reswick, 203
 Rückführgröße, 8, 125
 Rückführung, 157
 Rückführungsgröße, 10
 Rücksubstitution, 27
- S**
 Samal, 204
 Sample, 32
 Schmiegefunktion, 113, 115
 Schrittregler, 154
 Schwierigkeitsgrad, 83, 91, 93, 96
 Schwingungsglied, 102, 112
 Schwingungsverhalten, 163, 168, 186
 Signal, 18, 22, 29
 Signal, analoges, 19, 33
 Signal, binäres, 19
 Signal, digitales, 19, 31, 33
 Skalierung, 223
 Sollwert, 4, 6, 9, 14, 15
 Speicherglied, 82
 Sprungantwort, 36, 38, 39, 45–47, 49, 50, 54, 88, 102, 113, 120, 139, 151, 167, 168
 Sprungfunktion, 44
 Stabilität, 199
 Stabilitätsrand, 202
 Stabilitätsreserve, 199
 Standardabweichung, 34
 statischer Kennwert, 56
 Stellantrieb, 9
 Stellbereich, 12, 127
 Stelleinrichtung, 4, 9, 15, 35
 Steller, 9
 Stellglied, 9, 10, 21, 55
 Stellgröße, 8, 9, 12, 15, 32, 56, 125, 126
 Stellimpulsfolge, 155
- Stellort, 55
 Stellverhalten, 55, 126, 158
 stetiger Regler, 126
 Steuerbus, 219
 Steuerkette, 7, 8
 Steuerung, 1
 Störgröße, 3, 5, 8, 10, 13–15, 23, 55, 119, 126
 Störgrößenaufschaltung, 146
 Störort, 13
 Störsprung, 191
 Störverhalten, 55, 56, 161, 164, 166, 195
 Summierungspunkt, 8
- T**
 Temperaturregelung, 232, 237
 Testfunktion, 35, 44, 54, 166
 Testsignal, 43
 T-Glied, 75
 Toleranzband, 206
 Totzeit, 56, 57, 70, 71, 74, 82, 83, 120, 122
 Totzeitverhalten, 70
- U**
 Übergangsfunktion, 45, 47, 54, 82, 88, 104, 115
 Überschwingweite, 104, 107, 207
 Übertragungsfunktion, 37
 Übertragungsverhalten, 44
 unstetiger Regler, 126
- V**
 Vergleichsglied, 9, 125
 Verschwindeimpuls, 146
 Verzögerung, 57
 Verzugszeit, 58, 82, 83, 86, 96
 Verzweigungspunkt, 8
 Verzweigungsstelle, 41
 Vier-Quadranten-Methode, 63, 65
 Vorhaltzeit, 147, 149
- W**
 Wasserstandsregelung, 184, 192, 197
 Wendetangenten-Verfahren, 87, 90
 Wirkschaltplan, 42, 43
 Wirkschaltplan, Steuerung, 7
 Wirkschaltplan, Vordruckregelung, 6
 Wirkung, 37
 Wirkungsablauf, 4
 Wirkungslinie, 40, 41
 Wirkungsplan, 5, 8, 11, 37, 38

- Wirkungsrichtung, 37, 40
Wirkungssinn, 41
Wirkungsumkehr, 6
Wirkungsweg, 2, 4, 8, 37
- Z**
Zeitbereich, 22, 29, 30, 112, 161
Zeitkennwert, 70
Zeitkonstante, 70, 71, 75, 77–81, 83, 88, 89, 95, 96, 99, 112, 153
Zeitkonstantensumme, 85, 87, 95, 121, 122
- Zeitplanregelung, 241
Zeitprozentkennwert-Methode, 99
Zeitprozentkennwert-Verfahren, 97
Zeitverhalten, 9, 22, 23, 35, 46, 54, 60, 70, 92, 110, 118, 126, 167, 168, 211
Ziegler Nichols, 203
Zielgröße, 8, 9
 z -Transformation, 228
Zustand, kritischer, 200, 203
Zustandsgröße, 22
Zweipunktregler, 156–158, 211