

Reiner Marchthaler  
Sebastian Dingler

# Kalman-Filter

Einführung in die Zustandsschätzung und  
ihre Anwendung für eingebettete Systeme



Springer Vieweg

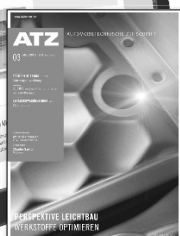
---

## Kalman-Filter

# Lizenz zum Wissen.




Sichern Sie sich umfassendes Technikwissen mit Sofortzugriff auf tausende Fachbücher und Fachzeitschriften aus den Bereichen: Automobiltechnik, Maschinenbau, Energie + Umwelt, E-Technik, Informatik + IT und Bauwesen.

Exklusiv für Leser von Springer-Fachbüchern: Testen Sie Springer für Professionals 30 Tage unverbindlich. Nutzen Sie dazu im Bestellverlauf Ihren persönlichen Aktionscode **C0005406** auf [www.springerprofessional.de/buchaktion/](http://www.springerprofessional.de/buchaktion/)



**Jetzt  
30 Tage  
testen!**

**Springer für Professionals.**  
**Digitale Fachbibliothek. Themen-Scout. Knowledge-Manager.**

-  Zugriff auf tausende von Fachbüchern und Fachzeitschriften
-  Selektion, Komprimierung und Verknüpfung relevanter Themen durch Fachredaktionen
-  Tools zur persönlichen Wissensorganisation und Vernetzung

[www.entschieden-intelligenter.de](http://www.entschieden-intelligenter.de)

**Springer für Professionals**

 **Springer**

---

Reiner Marchthaler · Sebastian Dinger

# Kalman-Filter

Einführung in die Zustandsschätzung und  
ihre Anwendung für eingebettete Systeme

Prof. Dr.-Ing. Reiner Marchthaler  
Hochschule Esslingen  
Fakultät Informationstechnik  
Esslingen am Neckar  
Deutschland

Sebastian Dinger  
Stuttgart  
Deutschland

ISBN 978-3-658-16727-1      ISBN 978-3-658-16728-8 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-658-16728-8

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

# VORWORT

Als wir die Idee zu diesem Buch mit anderen diskutierten, kam relativ schnell die Frage auf: „Weshalb ein neues Buch? Es gibt doch schon Bücher zu diesem Thema“. Betrachtet man die Liste aller Publikationen zum Thema Kalman-Filter, dann kann man diese Frage sehr gut nachvollziehen. Bei näherer Betrachtung stellt man jedoch fest, dass die meisten dieser Publikationen sehr spezielle Abhandlungen über Kalman-Filter sind. Derjenige, der sich noch nie mit Kalman-Filter beschäftigt hat, wird große Probleme haben, diese Publikationen zu verstehen. Grundlagenbücher zu diesem Thema beschreiben zwar die Grundlagen und die Herleitung des Kalman-Filters, haben jedoch oft keinerlei Beispiele zur Anwendung der Theorie. Die Tätigkeit als Hochschulprofessor und die Arbeit in der industriellen Forschung haben gezeigt, dass diese negative Erfahrung viele Studierende, Ingenieure und Wissenschaftler abschreckt, Kalman-Filter anzuwenden. Aus dieser Erkenntnis heraus kam die Motivation ein Buch zu schreiben, welches zum einen die Grundlagen und die Annahmen, die einem Kalman-Filter zugrunde liegen, kurz und kompakt erklären und zum anderen dem Anwender die Angst anhand einfacher Beispiele nimmt, diese Filter auch in der Praxis einzusetzen.

Zu Beginn des Buchs werden an einem einführenden Beispiel die Grundzüge eines Entwurfs eines Kalman-Filters aufgezeigt. In den nächsten Grundlagenkapiteln werden auf die Möglichkeiten der Beschreibung von physikalischen Problemen im Zustandsraum und auf die für das Kalman-Filter wichtigsten Grundlagen der Wahrscheinlichkeits- und Signaltheorie eingegangen. Im Anschluss daran werden die Grundgleichungen des Kalman-Filters und darauf aufbauend die Gleichungen eines adaptiven Kalman-Filters (ROSE-Filter) hergeleitet. Darauf aufbauend wird anhand mehrerer Beispiele der Entwurf von Kalman-Filtern gezeigt. An allen Beispielen wird darauf geachtet, dass jeder Teilschritt ausführlich erläutert wird.

Im Buch wird die sehr weit verbreitete Software MATLAB<sup>®</sup> verwendet, hierzu gibt es eine kostengünstige Studentenversion. Mit dieser Software lassen sich die Beispiele sehr einfach nachvollziehen und eigene Filter entwickeln. Alternativ kann für die meisten Beispiele auch die kostenlose Software GNU Octave bzw. Scilab verwendet werden. Die in dem Buch verwendete MATLAB<sup>®</sup>-Files können von der Verlagsseite des Buchs heruntergeladen werden.

Recht herzlich möchten wir uns bei Prof. Dr. J. Goll, Prof. Dr. J. Koch, Prof. Dr. M. Stämpfle, Bharanidhar Duraisamy, Timo Wascheck, André-Marcel Hellmund und Verena Widmaier für die zahlreiche Anregungen und Korrekturen bedanken. Darüber hinaus bei Dr. Sabine Kathke und dem Springer Vieweg Verlag zur Übernahme des Lektorats und der Veröffentlichung dieses Buchs.

Reiner Marchthaler und Sebastian Dinger

# INHALTSVERZEICHNIS

## I Einleitung

### 1 Einführendes Beispiel ..... 3

Motivation 3 • Zustandsraum-Modellierung 7 : *Zeitkontinuierliche Systembeschreibung* – *Zeitdiskrete Systembeschreibung* – *Beobachtbarkeit* • Rauschen 12 : *Systemrauschen* – *Messrauschen* • Kalman-Filter Gleichungen 15

## II Grundlagen

### 2 Zustandsraumbeschreibung ..... 23

Beschreibung dynamischer Systeme 24 • Allgemeine Darstellung von Differentialgleichungen 28 • Systemeigenschaften 30 : *Beobachtbarkeit* – *Steuerbarkeit* • Lösung der Zustandsgleichung 37 • Beschreibung zeitdiskreter Systeme 39

### 3 Wahrscheinlichkeitstheorie ..... 49

Definitionen und Begriffe 49 : *Zufälliges Experiment* – *Ergebnis und Ergebnismenge* – *Zufallsvariable* – *Wahrscheinlichkeit* • Dichtefunktion 54 : *Gleichverteilung* – *Normalverteilung* – *Weitere Verteilungen* • Momente und zentrale Momente 61 : *Erwartungswert und Mittelwert* – *Varianz und Kovarianz*

### 4 Signaltheorie ..... 71

Stochastischer Prozess 71 • Autokorrelation und Kreuzkorrelation 74 • Spezielle Stochastische Prozesse 78 : *Weißes Rauschen* – *Gauß-Markov-Prozess*



### III Kalman-Filter

- 5 Klassischer Kalman-Filter** ..... **83**
- Struktur Kalman-Filter **83** • Herleitung Kalman-Filter-Gleichungen **85**: *Prädiktion* – *Korrektur* • Alternative Berechnung der Kalman-Verstärkung **89**
- 6 Adaptiver Kalman-Filter (ROSE-Filter)** ..... **93**
- Grundprinzip **93** • Adaptive Bestimmung des Messrauschens **95** • Adaptive Bestimmung des Systemrauschens **96** • Algorithmus **97**
- 7 Systemrauschen** ..... **99**
- Ausgangspunkt **100** • Direkte Diskretisierung **101** • Partielles konstantes Rauschen **102** • Diskretisiertes zeitkontinuierliches Modell **102** • Kinematische Modelle **104**: *Modellierung* – *Modell 2. Ordnung* – *Modell 3. Ordnung* – *Modell höherer Ordnung*

### IV Anwendungsbeispiele

- 8 Prinzipielles Vorgehen** ..... **115**
- Zeitkontinuierliche Systembeschreibung **115** • Zeitdiskrete Systembeschreibung **116** • Beobachtbarkeit **117** • Bestimmung des System- und Messrauschens **118**
- 9 Beispiel: Bias-Schätzung** ..... **119**
- Filterentwurf **120** • Kalman-Filter **125** • Übergang in IIR-Filter 1. Ordnung **130** • ROSE-Filter **131**
- 10 Beispiel: Messrauschen mit Offset** ..... **137**
- Problematik **137** • Filterentwurf **139** • Implementierung und Ergebnisse **144**
- 11 Beispiel: Alternatives Bewegungsmodell der Mondfähre** ..... **149**
- Filterentwurf **149** • Implementierung und Ergebnisse **155**
- 12 Beispiel: Umfeldsensor mit ROSE-Filter** ..... **159**
- Umfeldsensor **160** • Implementierung und Ergebnisse **167**

**13 Beispiel: Fahrstreifenerkennung ..... 173**

Problembeschreibung 174 • Filterentwurf 178 • Implementierung und  
Ergebnisse 183

**V Anhang****A Vektor- und Matrizenrechnung ..... 189****B Sammlung wichtiger verwendeter Formeln ..... 197****C Lösung Matrix-Exponentialgleichungen – Einführendes Beispiel .... 199**

Literaturverzeichnis ..... 201

Stichwortverzeichnis ..... 205

# NOTATIONEN

---

Bezeichnung	Bedeutung
<hr/>	
$\hat{x}$	prädizierte Größe
$\tilde{x}$	korrigierte Größe
$\underline{A}, \underline{B}, \dots$	Vektoren, Matrizen
$\underline{A}^T, \underline{B}^T, \dots$	transponierte Vektoren, Matrizen
$\underline{A}_d, \underline{B}_d, \dots$	zeitdiskrete Vektoren, Matrizen
$\underline{0}$	Nullmatrix
$\underline{I}$	Einheitsmatrix
$\text{Det}(\underline{A})$	Determinante einer Matrix
$\text{Adj}(\underline{A})$	Adjunkte einer Matrix
$\text{Tr}(\underline{A})$	Spur einer Matrix
$E(X)$	Erwartungswert der Zufallsvariable $X$
$\text{Var}(X)$	Varianz der Zufallsvariable $X$
$\text{Cov}(X, Y)$	Kovarianz der Zufallsvariable $X$ und $Y$
$\text{Rang}(\underline{S})$	Rang einer Matrix

---

# HÄUFIG VERWENDETE FORMELZEICHEN

Bezeichnung	Bedeutung
$f_X(x)$	Dichtefunktion der Zufallsvariable $X$
$\underline{A}, \underline{A}_d$	Systemmatrix (zeitkontinuierlich, zeitdiskret)
$\underline{B}, \underline{B}_d$	Eingangsmatrix (zeitkontinuierlich, zeitdiskret)
$\underline{C}$	Ausgangsmatrix
$\underline{D}$	Durchgangsmatrix
$\underline{K}$	Matrix der Kalman-Verstärkung
$\underline{G}, \underline{G}_d$	Matrix des Systemsrauschens (zeitkontinuierlich, zeitdiskret)
$\underline{P}$	Kovarianzmatrix des Schätzfehlers
$\underline{Q}$	Kovarianzmatrix des Systemrauschens
$\underline{R}$	Kovarianzmatrix des Messrauschens
$\underline{u}$	Eingangsvektor des Zustandsbeobachters
$\underline{y}$	Ausgangsvektor des Zustandsbeobachters
$T_s$	Abtastzeit
$\underline{x}$	Zustandsvektor des Zustandsbeobachters (allgemein)
$\tilde{\underline{x}}$	korrigierter Zustandsvektor
$\hat{\underline{x}}$	prädizierter Zustandsvektor
$\tilde{\underline{\epsilon}}$	Schätzfehler des korrigierten Zustandsvektors $\tilde{\underline{x}}$
$\hat{\underline{\epsilon}}$	Schätzfehler des prädizierten Zustandsvektors $\hat{\underline{x}}$
$\underline{z}$	vektorielles Systemrauschen
$\underline{v}$	vektorielles Messrauschen
$\gamma$	Verstärkungsfaktor

---

# Einleitung

---

## KAPITEL 1

# EINFÜHRENDES BEISPIEL

Im Jahre 1960 entwickelte Rudolf E. Kalman für zeitdiskrete, lineare Systeme ein spezielles Filter, mit dem es möglich war, aus verrauschten und teils redundanten Messungen die Zustände und Parameter des Systems zu schätzen. Der Vorteil dieses (Kalman-)Filters gegenüber anderen stochastischen Schätzverfahren ist der iterative Aufbau des Filters, der besonders für Echtzeitanwendungen geeignet ist.

Zur Einführung in die Zustandsschätzung soll in diesem Kapitel der Entwurf eines solchen Kalman-Filters anhand eines historischen, nachgestellten Beispiels gezeigt werden. Das einführende Beispiel ist bewusst einfach gehalten, um den Fokus auf die Kernaspekte bei der Zustandsschätzung mittels Kalman-Filters zu lenken.

Viele der in diesem Beispiel verwendeten Formeln werden als bekannt vorausgesetzt, werden nicht hergeleitet und nur zum Teil erläutert. Sollten beim Lesen des Kapitels Formeln unbekannt sein oder Hintergrundinformationen fehlen, dienen die nachfolgenden Grundlagenkapitel dazu, diese Wissenslücken zu schließen. Sollten keinerlei Grundlagen vorhanden sein, dienen die Literaturhinweise jeweils zu Beginn der Grundlagenkapitel dazu, diese aufzubauen.

## 1.1 Motivation

Einer der wohl bekanntesten Einsatzgebiete des Kalman-Filters war die Verwendung bei der Mondlandung.

Hier bestand das Problem darin, Ort und Geschwindigkeit der Apollo-Mondlandefähre (Lunar Module Eagle, Abb. 1.1) durch Messung der Position der Mondlandefähre durch vier auf der Erde befindliche Dopplerradar-Stationen und der an Bord befindlichen Inertialsensorik (drei Gyroskopen und drei Accelerometern [29]) zu schätzen [28]. Alle

bis dahin bekannten Algorithmen hatten Probleme beim Schätzen von Ort und Geschwindigkeit. Das Kalman-Filter war prädestiniert für diese schwierige Aufgabe, denn es eliminierte weitgehend statistische und systematische Messfehler und schätzte die Geschwindigkeit der Mondlandefähre.

Es wird angenommen, dass mithilfe von vier auf der Erde befindlichen Radaranlagen der Abstand der Mondlandefähre von der Mondoberfläche  $h(t)$  bestimmt wird. Darüber hinaus liegt aus den an Bord befindlichen Sensoren die Beschleunigung  $a(t)$  der Mondlandefähre senkrecht zur Mondoberfläche vor. Beispielhaft zeigt die Abbildung 1.2 den zeitlichen Verlauf der beiden messtechnisch erfassbaren Signale  $a(t)$  und  $h(t)$ .

In diesem simulierten Beispiel befindet sich die Mondlandefähre zu Beginn der Messung in einer Höhe von etwa 1000 m und landet nach ca. 40 s auf der Mondoberfläche.



Abb. 1.1: Lunar Module Eagle im Mondorbit [21]

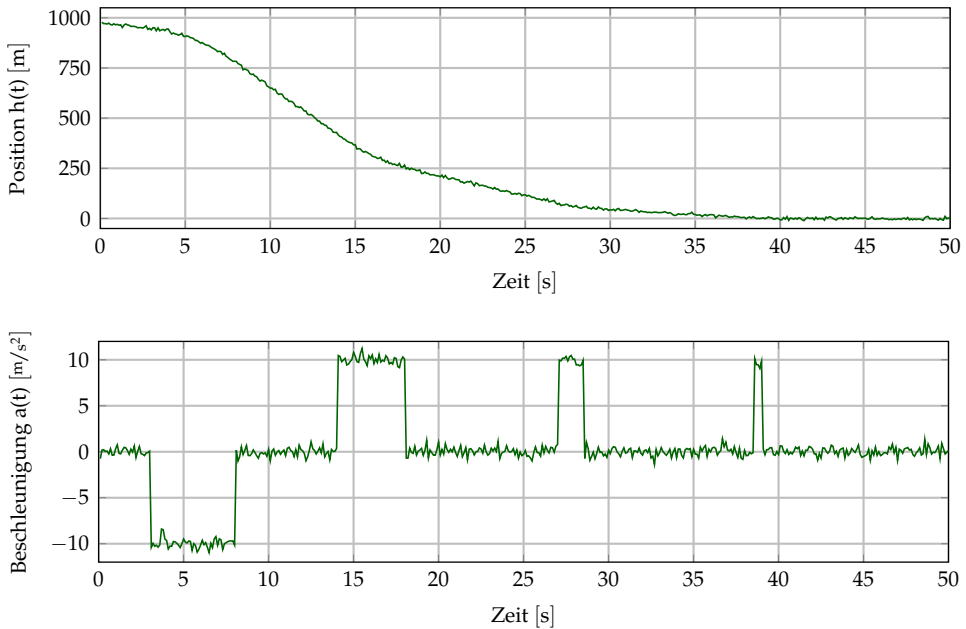


Abb. 1.2: Verlauf messtechnisch erfassbarer Größen der Mondlandefähre: Abstand von der Mondoberfläche  $h(t)$  und Beschleunigung  $a(t)$

Die Mondlandefähre bewegt sich zu Beginn der Messung mit einer Geschwindigkeit von  $-10 \text{ m/s}$  und wird im Laufe der Messung durch Zündung der Bremsraketen verzögert. Dem Beschleunigungsverlauf ist zu entnehmen, dass zu Beginn der Messung die Mondlandefähre für eine kurze Zeit mit  $-10 \text{ m/s}^2$  beschleunigt wird und anschließend in drei Zündungsphasen der Bremsraketen jeweils mit  $+10 \text{ m/s}^2$  verzögert wird. Zwischen den Zündungen der Bremsraketen werden diese nur schwach betrieben, sodass durch den Mond hervorgerufene Anziehungskraft von ca.  $+1.6 \text{ m/s}^2$  kompensiert wird.

Unbekannt ist nach wie vor die Geschwindigkeit  $v(t)$  der Mondlandefähre. Theoretisch wäre es nun möglich, aus dem Signal  $h(t)$  durch Differenzieren die unbekannte Geschwindigkeit der Mondlandefähre zu bestimmen. Dieses differenzierte Signal ist jedoch aufgrund des verrauschten Signals  $h(t)$  nicht zu gebrauchen (siehe Abbildung 1.3).

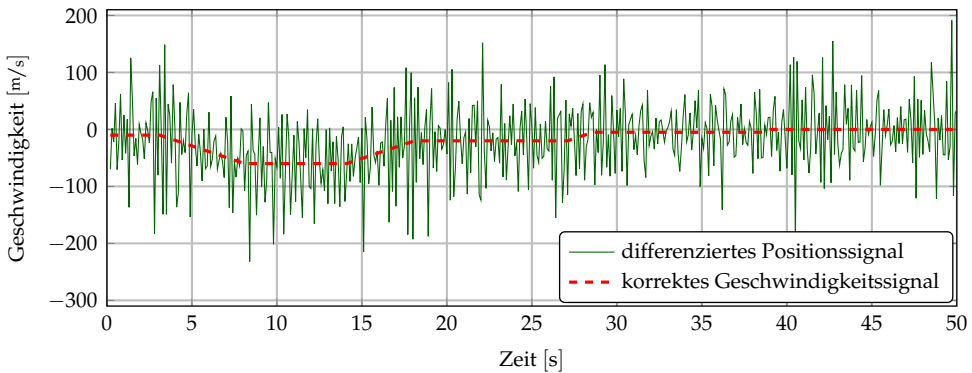


Abb. 1.3: Der durch Differenzierung erhaltene Verlauf der Geschwindigkeit der Mondlandefähre

Hier liegt die Idee nahe, zuerst das Rauschen des Signals  $h(t)$  durch Filtern zu eliminieren und anschließend zu differenzieren. Möglich wäre dies z. B. durch einen Tiefpass. Diese Art der Filterung weist jedoch eine Gruppenlaufzeit auf und führt dazu, dass die gefilterte Größe dem aktuellen Wert zeitlich nacheilt. Am Beispiel der Mondlandefähre wurde das Höhsignal mit einem Tiefpass-Filter (Finite Response Filter mit einer konstanten Gruppenlaufzeit von 3 Sekunden) gefiltert und anschließend differenziert.

Hierdurch erhält man eine Geschwindigkeit, die die Mondlandefähre noch vor 3 Sekunden hatte - jedoch nicht die aktuelle Geschwindigkeit (siehe Abbildung 1.4). Dieser Effekt ist für Echtzeitanwendungen meist nicht tragbar.

Ebenso wäre es möglich, das Beschleunigungssignal  $a(t)$  zu integrieren und hieraus die gesuchte Geschwindigkeit der Mondlandefähre zu ermitteln. Dabei stößt man bei der Integration auf das Problem der unbekannten Integrationskonstanten, sprich der



unbekannten Anfangsgeschwindigkeit zu Beginn der Messung und den, in der Realität, immer vorhandenen Offsets in Beschleunigungssignalen.

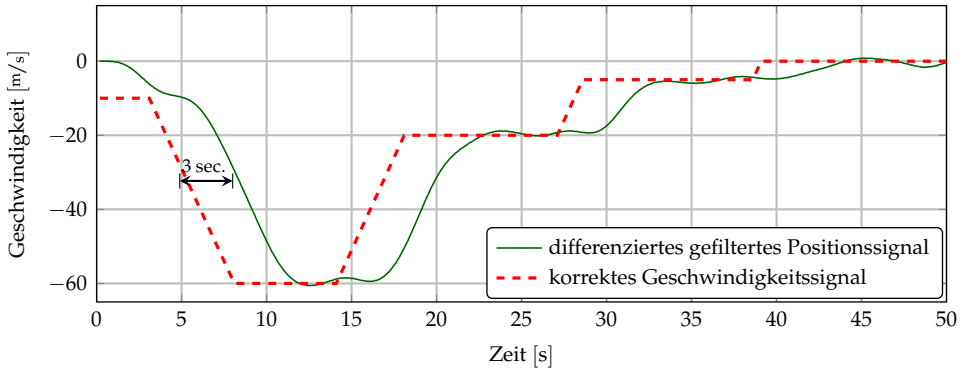


Abb. 1.4: Der durch Tiefpass-Filterung und Differenzierung erhaltene Verlauf der Geschwindigkeit der Mondlandefähre

In Abbildung 1.5 ist ein solcher Verlauf eines aufintegrierten Signals dargestellt. Die unbekannte Integrationskonstanten (Anfangsgeschwindigkeit) wurde hier mit 0 m/s definiert.

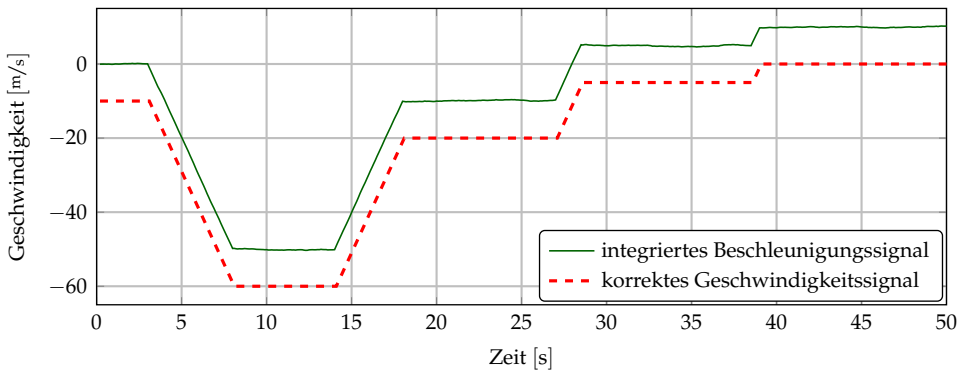


Abb. 1.5: Der durch Integration erhaltene Verlauf der Geschwindigkeit der Mondlandefähre

## 1.2 Zustandsraum-Modellierung

Als Erstes ist es notwendig, das dynamische Verhalten der Mondlandefähre in der Zustandsraumdarstellung zu modellieren. Dabei wird das dynamische Verhalten zuerst als zeitkontinuierliches System modelliert und anschließend diskretisiert. Am Ende erfolgt eine Überprüfung des Systems auf Beobachtbarkeit. Dadurch lässt sich sagen, inwieweit die unbekannten Größen auch geschätzt werden können.

### 1.2.1 Zeitkontinuierliche Systembeschreibung

Zuerst wird ein Modell benötigt, welches den Zusammenhang zwischen der gemessenen Beschleunigung  $a(t)$ , der geschätzten Geschwindigkeit  $v(t)$  und der gemessenen Höhe der Mondlandefähre  $h(t)$  beschreibt.

Wird die komplette Masse der Mondlandefähre in einem Massepunkt vereint, so lässt sich das dynamische Verhalten dieses Massepunkts durch

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{h}(t) \quad (1.1)$$

modellieren.

Als nächstes muss das Modell in die Zustandsraumdarstellung überführt werden. In unserem Fall handelt es sich um ein zeitinvariantes, lineares System, das allgemein durch die beiden folgenden Gleichungen im Zustandsraum (siehe z. B. [24], [26]) beschrieben werden kann:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t) + \underline{G} \cdot \underline{z}(t) \quad (1.2)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot \underline{u}(t) \quad (1.3)$$

Bei  $\underline{x}(t)$  spricht man vom Zustandsvektor,  $\underline{u}(t)$  vom Eingangs- und  $\underline{y}(t)$  vom Ausgangsvektor des Systems. Ungenauigkeiten in der Modellierung werden durch das Systemrauschen/Prozessrauschen  $\underline{z}(t)$  abgebildet.

Bei der Wahl des Zustandsvektors  $\underline{x}(t)$  ist man frei. Dabei gibt es „gute“ und „weniger gute“ Wahlmöglichkeiten. In Kapitel 11 wird das Beispiel mit einem anderen Zustandsvektor erneut berechnet und die Konsequenz verdeutlicht.

Wählt man den Zustandsvektor  $\underline{x}(t)$  zu

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

ist die Ableitung der Zustandsvariablen  $\dot{\underline{x}}(t)$  gegeben durch

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{a}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ a(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot z(t) \quad (1.5)$$

Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die Ableitung der Beschleunigung null ist. Mögliche Änderungen in der Beschleunigung werden durch die Einführung eines Systemrauschens  $z(t)$  modelliert.

Des Weiteren ist bekannt, dass die Größen  $h(t)$  und  $a(t)$  messtechnisch erfasst werden. Damit ist  $\underline{y}(t) = [h(t), a(t)]^T$ . Somit ergeben sich die beiden Zustandsgleichungen zu:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{a}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot z(t) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \cdot u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{G}} \cdot z(t) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) &= \begin{bmatrix} h(t) \\ a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot u(t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

## 1.2.2 Zeitdiskrete Systembeschreibung

Für die Implementierung in digitalen Schaltungen/Mikroprozessoren ist es notwendig, die Beschreibung des Systems im Zustandsraum im diskreten Zeitbereich darzustellen. Hierbei wird angenommen, dass bei der Digitalisierung durch einen Digital-/Analogwandler die analogen Signale alle  $T_s$  Sekunden abgetastet werden.

Ein lineares zeitdiskretes System wird allgemein im Zustandsraum beschrieben durch:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{x}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) + \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k) \quad (1.8)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) \quad (1.9)$$

mit

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s}, \quad \underline{B}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{B} \, dv, \quad \underline{G}_d = \underline{A}_d \cdot \underline{G} \quad (1.10)$$

Für die Berechnung der Matrix  $\underline{G}_d$  werden in der Literatur mehrere Modelle genannt (siehe Kapitel 7 und [1]). Die Herleitung der Gleichungen zur Bestimmung von  $\underline{A}_d$  und  $\underline{B}_d$  ist dem Kapitel 2 zu entnehmen. Die Berechnung der Matrix  $\underline{A}_d$  kann allgemein z. B. mithilfe der Laplacetransformation erfolgen (siehe Anhang: C). Alternativ kann die Berechnung mit dem Programm MATLAB<sup>®</sup> durchgeführt werden, mit welchem sich über folgende Befehle die Matrix  $\underline{A}_d$ ,  $\underline{B}_d$  und  $\underline{G}_d$  bestimmen lässt:

### MATLAB: Berechnung $\underline{A}_d$ , $\underline{B}_d$ und $\underline{G}_d$

```
syms Ts 'real';

A = [0 1 0;
      0 0 1;
      0 0 0];
B = [0; 0; 0];
G = [0; 0; 1];

Ad = simplify(expm(Ts*A))
Bd = simplify(int(expm(Ts*A)*B))
Gd = Ad*G
```

Die Berechnung ergibt:

$$\underline{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} \\ 0 & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{G}_d = \begin{bmatrix} \frac{T_s^2}{2} \\ T_s \\ 1 \end{bmatrix}$$

Setzt man die hiermit bestimmten Größen  $\underline{A}_d$ ,  $\underline{B}_d$  und  $\underline{G}_d$  in die Gleichung (1.8) ein, so folgt:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} h(k+1) \\ v(k+1) \\ a(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} \\ 0 & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_d} \cdot \begin{bmatrix} h(k) \\ v(k) \\ a(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{T_s^2}{2} \\ T_s \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{G}_d} \cdot z(k) \quad (1.11)$$

Ausformuliert erhält man die bekannten diskreten Gleichungen einer Bewegung eines Punkt-Masse-Modells inkl. der unbekannten Größe  $z(k)$ :

$$\begin{aligned} h(k+1) &= h(k) + T_s \cdot v(k) + \frac{T_s^2}{2} \cdot (a(k) + z(k)) \\ v(k+1) &= v(k) + T_s \cdot (a(k) + z(k)) \\ a(k+1) &= a(k) + z(k) \end{aligned}$$

### 1.2.3 Beobachtbarkeit

Nicht mit allen Systembeschreibungen ist es möglich, die Größen des Zustandsvektors zu schätzen. Man spricht hier von der Beobachtbarkeit des Systems. Allgemein gesprochen ist ein System beobachtbar, wenn jeder Zustand des Systems in einem endlichen Zeitbereich aus Kenntnis der Eingangsgröße  $u(t)$  und der Ausgangsgröße  $y(t)$  bestimmt werden kann.

Die Beobachtbarkeit ist gegeben, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix  $S_B$  bei einem System der Ordnung  $n$  den Rang  $n$  besitzt:

$$\underline{S}_B = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Prinzipiell ist es möglich, dass ein System im kontinuierlichen Zeitbereich noch beobachtbar ist, jedoch bei bestimmten Abtastzeiten nicht mehr beobachtbar ist. Es ist

deshalb sinnvoll, die Überprüfung der Beobachtbarkeit mit der Beobachtbarkeitsmatrix  $S_B^*$  durchzuführen. Diese ist definiert zu:

$$\underline{S}_B^* = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^2 \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Das System ist beobachtbar, sobald die Beobachtbarkeitsmatrix  $S_B^*$  den Rang  $n$  besitzt [24].

Im Beispiel der Mondlandefähre ist die Ordnung des Systems  $n = 3$  und somit die Beobachtbarkeitsmatrix  $S_B^*$  gegeben durch:

$$\text{Rang}(\underline{S}_B^*) = \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^2 \end{bmatrix} \right) = \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2T_s & 2T_s^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 3$$

Mit der Annahme  $T_s > 0$  lässt sich das überbestimmte Gleichungssystem auflösen und man erhält drei unabhängige Zeilenvektoren.

Zur Bestimmung des Rangs muss die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren der Beobachtbarkeitsmatrix  $S_B^*$  gleich  $n$  sein. In dem Beispiel der Mondlandefähre ist dies drei. Somit ist die Anzahl der Elemente des Zustandsvektors gleich dem Rang der Beobachtbarkeitsmatrix  $S_B^*$  und das beschriebene System ist beobachtbar.

Alternativ lässt sich der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix  $S_B^*$  auch mit MATLAB® bestimmen.

Dies wird im Folgenden gezeigt:

#### MATLAB: Berechnung Rang der Beobachtbarkeitsmatrix $S_B^*$

```
syms Ts 'real';

A = [0 1 0;
      0 0 1;
      0 0 0];
C = [1 0 0;
      0 0 1];

Ad = simplify(expm(Ts*A));

SB=C;
for n=1:length(A)-1
    SB = [SB; C*Ad^n];
end

rank(SB)
```

## 1.3 Rauschen

Neben der Modellierung des Systems im Zustandsraum ist es für den Entwurf eines Kalman-Filters notwendig, die Fehler in der Systembeschreibung (Modellungenauigkeiten) und die Fehler bei der Messdatenerfassung in Form von Rauschen zu bestimmen. Bei beiden Größen, dem System- und dem Messrauschen, genügt es, die Varianz zu bestimmen. Die Erwartungswerte der Rauschgrößen werden zu null angenommen. Man spricht hier von mittelwertfreien Rauschquellen.

### 1.3.1 Systemrauschen

Ungenauigkeiten bei der Modellierung eines Systems lassen sich durch das Systemrauschen beschreiben. In dem gezeigten einführenden Beispiel wurde angenommen, dass die Ableitung der Beschleunigung null ist und dass mögliche Änderungen in der Beschleunigung durch die Einführung der Rauschgröße  $z_k$  beschrieben werden.

Die Varianz des Systemrauschens ist definiert durch:

$$Q(k) = \text{Var}(z(k)) = \sigma_v^2 \quad (1.14)$$

In dem einführenden Beispiel gab es nur eine Rauschgröße bei der Systemmodellierung, d. h. die Zufallsgröße  $z(k)$  ist in diesem Fall ein Skalar. Daraus folgt, dass somit auch die Varianz  $Q(k)$  ein Skalar ist.

Das Kalman-Filter liegt die Annahme zugrunde, dass der Schätzfehler und das Systemrauschen unkorreliert sind. Erweitert man diese Annahme noch, dass es sich um ein normalverteiltes, mittelwertfreies, weißes Rauschen handelt, so lässt sich die Varianz  $Q(k)$  in diesem Beispiel wie folgt abschätzen.

Man geht davon aus, dass sich die Beschleunigung um maximal  $10 \text{ m/s}^2$  innerhalb eines Abtastintervalls ändert und die Änderung der Beschleunigung normalverteilt ist. Ferner wird angenommen, dass diese maximale Änderung des Beschleunigungssignals z. B. einem Wert von  $3 \cdot \sigma$  entspricht, d. h. man weiß, dass sich die Beschleunigung bei 99% aller Messungen weniger als  $10 \text{ m/s}^2$  von Messung zu Messung ändert.

Aus diesen Annahmen folgt:

$$Q(k) = \sigma_v^2 = \left( \frac{10}{3} \text{ m/s}^2 \right)^2 \approx 11,1 \text{ m}^2/\text{s}^4 \quad (1.15)$$

### 1.3.2 Messrauschen

**A**lle erfassbaren Messgrößen weisen in realen Systemen ein Rauschen auf. Diese sind beispielsweise bedingt durch die Quantisierung im Analog/Digital-Wandler oder durch andere Störgrößen. Zur Berücksichtigung dieses Effekts wird der Ausgangsvektor  $\underline{y}(k)$  von einem Messrauschen  $\underline{v}(k)$  überlagert. So lassen sich lineare zeitdiskrete Systeme mit System- und Messrauschen beschreiben durch:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{x}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) + \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k) \quad (1.16)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) + \underline{v}(k) \quad (1.17)$$

Anzumerken ist, dass der Eingangsvektor  $\underline{u}(k)$  unverrauscht und nur der Ausgangsvektor  $\underline{y}(k)$  verrauscht ist. Bei der Beschreibung des Messrauschens ist wichtig zu wissen, dass, bei dem von Rudolf E. Kalman entwickelten Filter, der Schätzfehler und das Messrauschen  $\underline{v}(k)$  unkorreliert sein müssen. Diese Annahme wird oft damit verknüpft, dass es sich bei dem Messrauschen um ein mittelwertfreies, normalverteiltes, weißes Rauschen handelt, d. h. der Erwartungswert  $E(\underline{v}(k)) = \underline{0}$  ist.



Die Varianz des Messrauschens wird durch:

$$\underline{R}(k) = \text{Var}(\underline{v}(k)) \quad (1.18)$$

beschrieben.

Unter der Annahme, dass auch in dem einführenden Beispiel das Messrauschen mittelwertfrei und normalverteilt ist, so ist die Varianz des Höhengsignals gegeben durch  $\text{Var}(\underline{v}_h(k)) = \sigma_h^2$  und die des Beschleunigungssignals durch  $\text{Var}(\underline{v}_a(k)) = \sigma_a^2$ .

Des Weiteren wird angenommen, dass die beiden Messrauschgrößen  $\underline{v}_h(k)$  und  $\underline{v}_a(k)$  stochastisch unabhängig sind. Mit dieser Annahme beeinflusst die eine Rauschgröße die andere nicht. Dies ist in dem einführenden Beispiel sicherlich der Fall, da das Rauschen des Beschleunigungssignals z. B. durch Vibration und die des Höhengsignals z. B. durch Ungenauigkeiten in der Radarmessung aufgrund der großen Entfernung entstehen. So ist anzunehmen, dass sich diese beiden Rauschgrößen gegenseitig nicht beeinflussen, d. h., dass  $\underline{v}_h(k)$  und  $\underline{v}_a(k)$  unkorreliert sind und somit die Kovarianz<sup>1</sup>  $\text{Cov}(\underline{v}_h(k), \underline{v}_a(k))$  gleich null ist.

Ist davon auszugehen, dass sich das Messrauschen über der Zeit nur unwesentlich ändert, so lässt sich die Varianz  $\sigma_h^2$  und  $\sigma_a^2$  mithilfe der Gleichung (siehe Kapitel 3.3.2):

$$\text{Var}(x) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n (x(k) - E(x))^2 \quad (1.19)$$

empirisch abschätzen.

Vorteilhaft ist für die Schätzung der Varianzen in diesem Beispiel der Bereich zwischen 40 s und 50 s aus der Abbildung 1.2. Dort sind die Erwartungswerte jeweils null. Mit dieser Methode wird in dem einführenden Beispiel  $\sigma_h^2 \approx 20 \text{ m}^2$  und  $\sigma_a^2 \approx 0.2 \text{ m}^2/\text{s}^4$  abgeschätzt.

So gilt:

$$\underline{R}(k) = \text{Var}(\underline{v}(k)) = \begin{bmatrix} \text{Var}(v_h(k)) & \text{Cov}(v_h(k), v_a(k)) \\ \text{Cov}(v_h(k), v_a(k)) & \text{Var}(v_a(k)) \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_h^2 & 0 \\ 0 & \sigma_a^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Hinweis für den Praktiker: Werden diese Größen nicht korrekt abgeschätzt, ändern sich in den meisten Fällen die durch das Kalman-Filter abgeschätzten Zustandsgrößen nur

<sup>1</sup>Kovarianz: Maß für den linearen Zusammenhang zweier Zufallsvariablen

unwesentlich. Salopp gesprochen legt man mit der Varianz fest, wie „vertrauenswürdig“ die beiden Größen  $a(k)$  und  $h(k)$  sind.

Ist davon auszugehen, dass das Messrauschen über die Zeit stark variiert, so muss die Varianz des Messrauschens laufend geschätzt werden. Hierzu sei auf das in Kapitel 6 ROSE-Filter verwiesen, welches adaptive die Varianz des Messrauschens und die des Systemrauschens schätzt.

## 1.4 Kalman-Filter Gleichungen

Rudolf E. Kalman stellte nachfolgende Grundgleichungen für ein Kalman-Filter auf. Die Herleitung dieser Gleichungen ist für den interessierten Leser dem Kapitel 5.2 zu entnehmen.

Korrektur:

$$\underline{\hat{y}}(k) = \underline{C} \cdot \underline{\hat{x}}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) \quad (1.22)$$

$$\underline{\Delta y}(k) = \underline{y}(k) - \underline{\hat{y}}(k) \quad (1.23)$$

$$\underline{K}(k) = \underline{\hat{P}}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot (\underline{C} \cdot \underline{\hat{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k))^{-1} \quad (1.24)$$

$$\underline{\tilde{x}}(k) = \underline{\hat{x}}(k) + \underline{K}(k) \cdot \underline{\Delta y}(k) \quad (1.25)$$

$$\underline{\tilde{P}}(k) = (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \underline{\hat{P}}(k) \quad (1.26)$$

Prädiktion:

$$\underline{\hat{x}}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{\tilde{x}}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) \quad (1.27)$$

$$\underline{\hat{P}}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{\tilde{P}}(k) \cdot \underline{A}_d^T + \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T \quad (1.28)$$

Um den zeitlichen Verlauf der gesuchten Größen zu bestimmen, werden diese Grundgleichungen des Kalman-Filters zyklisch berechnet. Abbildung 1.6 visualisiert die zeitliche Berechnung der Grundgleichungen des Kalman-Filters.

Bei den Gleichungen fällt auf, dass es zwei Größen gibt, die den Zustandsvektor  $\underline{x}(k)$  beschreiben.  $\underline{\hat{x}}(k)$  ist der prädizierte Zustandsvektor und  $\underline{\tilde{x}}(k)$  der korrigierte Zustandsvektor.

Betrachtet man die für die Berechnung des Kalman-Filters notwendigen Gleichungen näher, wird zuerst mit Gleichung (1.23) die Differenz  $\underline{\Delta y}(k)$  zwischen der prädizierten

Ausgangsgröße  $\hat{y}(k)$  Gleichung (1.22) und der aktuell vorliegenden Messung  $y(k)$  bestimmt. Passt die prädizierte und aktuell gemessene Größe gut überein, so wird die Differenz  $\Delta y(k)$  sehr klein.

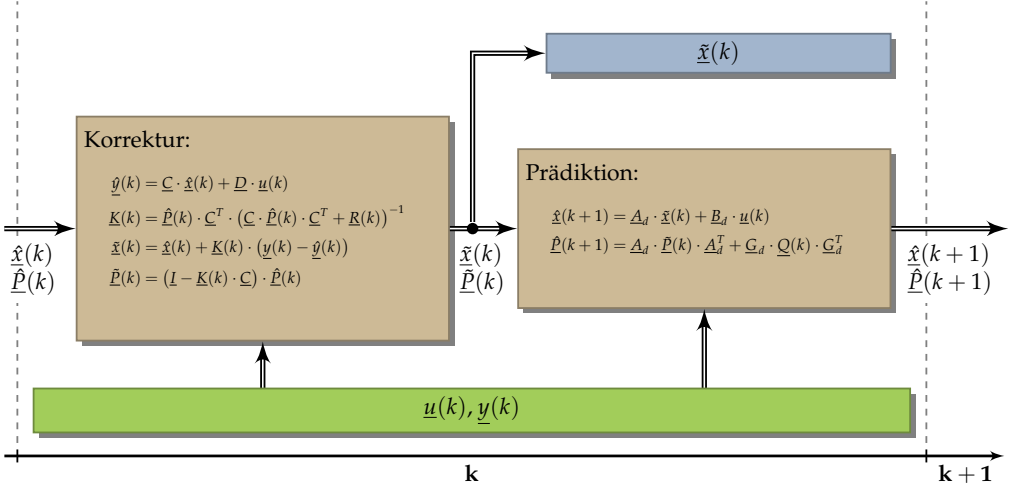


Abb. 1.6: Zeitliche Berechnung der Grundgleichungen des Kalman-Filters

Die Gleichung (1.24) bestimmt die Kalmanverstärkung  $\underline{K}(k)$  zum Zeitpunkt  $k$ . Diese Verstärkung wird benötigt, um in Gleichung (1.25) den korrigierten Zustandsvektor  $\hat{\underline{x}}(k)$  zu berechnen. Die Größe der Korrektur des Zustandsvektors hängt zum einen von der Kalmanverstärkung  $\underline{K}(k)$  und zum anderen von der Differenz  $\Delta y(k)$  ab. Je kleiner diese Differenz ist, umso kleiner fällt die Korrektur des Zustandsvektors aus.

$\underline{P}(k)$  stellt die Kovarianz des Schätzfehlers  $\underline{\varepsilon}(k)$  dar. Der Schätzfehler ist die Differenz zwischen dem wahren Wert und dem geschätzten Wert. Somit ist  $\underline{\varepsilon}(k) = \underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k)$  die Differenz zwischen dem wahren Wert  $\underline{x}(k)$  und dem korrigierten Zustandsvektor  $\hat{\underline{x}}(k)$ .  $\hat{\underline{\varepsilon}}(k) = \underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k)$  ist die Differenz zwischen dem wahren Wert  $\underline{x}(k)$  und dem prädizierten Zustandsvektor  $\hat{\underline{x}}(k)$ .

In diesem Beispiel wird der Schätzfehler  $\underline{\varepsilon}(k)$  durch die Differenz des wahren Höhengsignals  $x_h(k)$  und dem prädizierten Höhengsignals  $\tilde{x}_h(k)$ , durch die Differenz des wahren Geschwindigkeitssignals  $x_v(k)$  und dem prädizierten Geschwindigkeitssignals  $\tilde{x}_v(k)$  und durch die Differenz des wahren Beschleunigungssignals  $x_a(k)$  und dem prädizierten Höhengsignals  $\tilde{x}_a(k)$  beschrieben.

$$\underline{\tilde{\varepsilon}}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_h(k) \\ \tilde{\varepsilon}_v(k) \\ \tilde{\varepsilon}_a(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_h(k) - \tilde{x}_h(k) \\ x_v(k) - \tilde{x}_v(k) \\ x_a(k) - \tilde{x}_a(k) \end{bmatrix}$$

Mithilfe der Gleichung (1.26) wird die korrigierte Kovarianz des Schätzfehlers  $\tilde{P}(k) = \text{Var}(\tilde{\varepsilon}(k))$  ermittelt. Durch die Gleichung (1.28) wird auf Basis der Systemungenauigkeiten  $\underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T$  die Kovarianz des Schätzfehlers extrapoliert und mit  $\hat{P}(k)$  bezeichnet. Die Matrix  $\hat{P}$  bzw.  $\hat{P}$  hat die Dimension  $n \times n$ , wobei  $n$  die Anzahl der Elemente des Zustandsvektors ist.

In diesem Beispiel haben die Matrizen somit die Dimension  $3 \times 3$ . Betrachtet man die Matrix  $\tilde{P}$  genauer, hat diese den folgenden Aufbau:

$$\tilde{P}(k) = \begin{bmatrix} \text{Var}(\tilde{\varepsilon}_h(k)) & \text{Cov}(\tilde{\varepsilon}_h(k), \tilde{\varepsilon}_v(k)) & \text{Cov}(\tilde{\varepsilon}_h(k), \tilde{\varepsilon}_a(k)) \\ \text{Cov}(\tilde{\varepsilon}_h(k), \tilde{\varepsilon}_v(k)) & \text{Var}(\tilde{\varepsilon}_v(k)) & \text{Cov}(\tilde{\varepsilon}_v(k), \tilde{\varepsilon}_a(k)) \\ \text{Cov}(\tilde{\varepsilon}_h(k), \tilde{\varepsilon}_a(k)) & \text{Cov}(\tilde{\varepsilon}_v(k), \tilde{\varepsilon}_a(k)) & \text{Var}(\tilde{\varepsilon}_a(k)) \end{bmatrix}$$

Das Element  $\tilde{P}_{1,1}(k)$  stellt z. B. die Varianz des prädizierten Schätzfehlers des Höhengsignals dar. Unterstellt man, dass das Rauschen normalverteilt ist, gilt:

$$\text{Var}(\tilde{\varepsilon}_h(k)) = \tilde{\sigma}_h^2(k)$$

Ein Wert von  $\pm \tilde{\sigma}_h(k) = \sqrt{\text{Var}(\tilde{\varepsilon}_h(k))}$  repräsentiert einen Bereich um das prädizierte Höhengsignal, in welchem der wahre Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 68% liegt. Somit liefern die Elemente auf der Spur der Kovarianzmatrix  $\underline{P}$  ein Maß, wie vertrauenswürdig die Schätzung des Zustandsvektor  $\underline{x}$  ist.

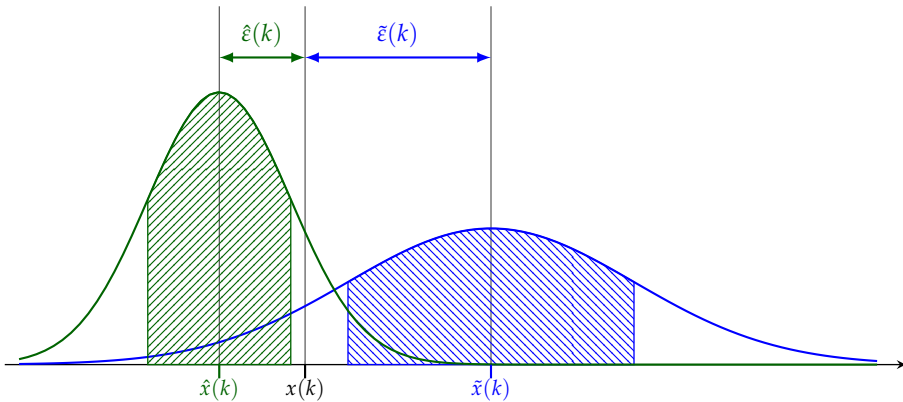


Abb. 1.7: Verkleinerung der Varianzen des Schätzfehlers vor und nach der Korrektur

In Abbildung 1.7 ist dieser Bereich, in welchem der wahre Wert  $x(k)$  mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 68% liegt, schraffiert dargestellt. Generell rückt bei einem klassischen

Kalman-Filter der geschätzte Wert nach der Korrektur näher an den wahren Wert und die Streuung/Varianz des Schätzfehlers nimmt ab. Es gilt  $\hat{P}(k) \leq \tilde{P}(k)$ . Je besser das Modell (ausgedrückt durch eine kleine Varianz des Systemrauschens  $\underline{Q}$ ) bzw. je kleiner das Messrauschen (in Form einer kleinen Varianz des Messrauschens  $\underline{R}$ ) ist, desto kleiner wird der Schätzfehler und somit auch die Kovarianz des Schätzfehlers. Bei guten Modellen bewirkt die Korrektur keine große Verbesserung des Schätzwerts und es gilt  $\hat{P}(k) \approx \tilde{P}(k)$ .

Unter Verwendung der Gleichungen (1.22), (1.23), (1.24), (1.25), (1.26), (1.27) und (1.28) lassen sich die geschätzte Geschwindigkeit und die Position der Mondlandefähre sowie die entsprechenden Kovarianzen berechnen. Mit diesen Gleichungen lassen sich die Werte für die prädierte Höhe  $\tilde{x}_1 = \tilde{h}$ , der prädierten Varianz des Schätzfehlers  $\tilde{P}_{1,1} = \tilde{\sigma}_h$ , für die korrigierte Höhe  $\hat{x}_1 = \hat{h}$  und der korrigierten Varianz des Schätzfehlers  $\hat{P}_{1,1} = \hat{\sigma}_h$  bestimmen (siehe Tabelle 1.1).

In diesem Beispiel ist bei  $k = 261$  die korrigierte Position (Höhe) 89,93m. Betrachtet man das Intervall von  $\pm 3 \cdot \sigma$ , so liegt der wahre Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,7% innerhalb des Intervalls von 87,14m und 92,72m. Die Schätzung des Intervalls basiert maßgeblich auf der richtigen Bestimmung der Kovarianzen des System- und Messrauschens. Werden die Kovarianzen dieser Rauschgrößen falsch abgeschätzt, wird die Kovarianz des Schätzfehlers und somit das Intervall inkorrekt bestimmt.

k	prädierte Größen		korrigierte Größen	
	$\tilde{h}(k) = \tilde{x}_1(k)$	$\tilde{\sigma}_h(k) = \sqrt{\tilde{P}_{1,1}(k)}$	$\hat{h}(k) = \hat{x}_1(k)$	$\hat{\sigma}_h(k) = \sqrt{\hat{P}_{1,1}(k)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
260	91,92m	0,96m	92,09m	0,93m
261	90,10m	0,96m	89,93m	0,93m
262	87,92m	0,96m	87,68m	0,93m
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tab. 1.1: Auszug aus den berechneten Größen des Kalman-Filters

Der für die in diesem Kapitel verwendete Code des Kalman-Filters ist im nachfolgenden aufgeführt.

#### MATLAB: Kalman-Filter

```
load -ascii data_y.csv; y = data_y; u = zeros(1,length(y));

Ts = 0.1;
R = [20 0; 0 0.2];
Q = 100/9;

Ad = [1 Ts 0.5*Ts^2; 0 1 Ts; 0 0 1];
Bd = [0; 0; 0];
C = [1 0 0; 0 0 1];
G = [0.5*Ts^2; Ts; 1];

%%% INITIALISIERUNG KALMAN-FILTER %%%
x = [y(1,1); 0; y(1,2)];
P = 3*[1 0 0; 0 1 0; 0 0 1];

%%% ZYKLISCHE BERECHNUNG KALMAN-FILTER %%%
for k=1:length(y)
    K = P*C'*pinv(C*P*C' + R);
    x = x + K*(y(k,:) - C*x);
    P = (eye(length(Bd)) - K*C)*P;

    s(k)=x(1); v(k)=x(2); a(k)=x(3);

    x = Ad*x + Bd*u(k);
    P = Ad*P*Ad' + G*Q*G';
end
```

Die Abbildung 1.8 zeigt die mithilfe des Kalman-Filters geschätzten (korrigierten) Größen des Zustandsvektors. Hierbei sieht man, dass die Größen zeitlich den tatsächlich gemessenen Größen nicht nacheilen und somit keine Gruppenlaufzeit besitzen. Auch hat das Kalman-Filter die Geschwindigkeit nach 3 sec. sehr gut abgeschätzt, obwohl die Anfangsgeschwindigkeit unbekannt war und diese fälschlicherweise bei der Initialisierung zu null angenommen wurde.

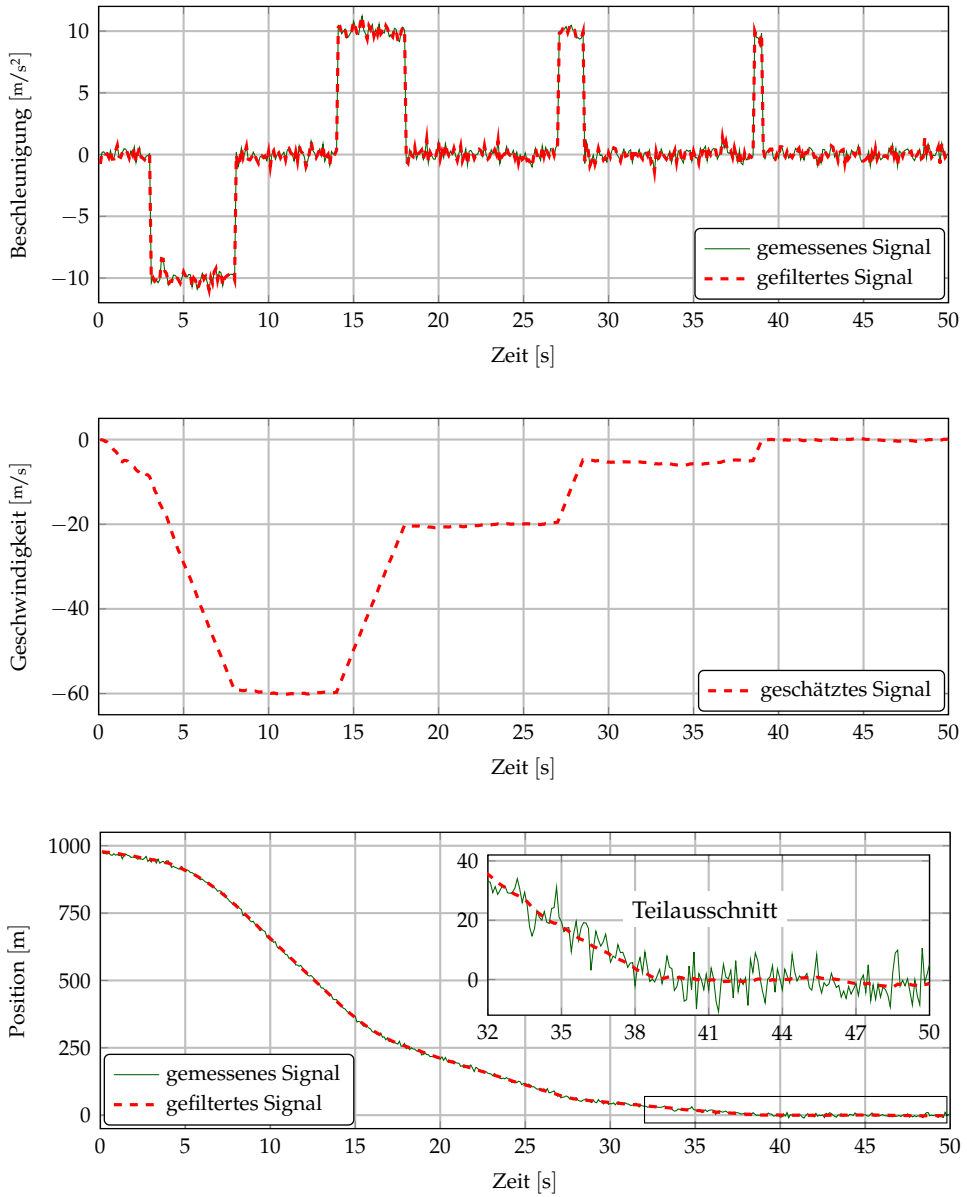


Abb. 1.8: Verlauf der Größen des korrigierten Zustandsvektors

---

# Grundlagen

---



## KAPITEL 2

# ZUSTANDSRAUMBESCHREIBUNG

Es gibt mehrere Möglichkeiten zur Beschreibung dynamischer Systeme. Eine ist die Darstellung physikalischer Systeme im Frequenzbereich z. B. durch die Übertragungsfunktion. Alternativ lassen sich dynamische Systeme auch mittels Differentialgleichungen charakterisieren.

Der Vorteil gegenüber der Systemcharakterisierung im Frequenzbereich ist nach [25]:

- Es sind detaillierte Einblicke in das innere Verhalten des Systems möglich. Hierzu zählen Steuerbarkeit und die Beobachtbarkeit, die mit dieser Beschreibungsform definiert und überprüft werden kann.
- Die Darstellungsart ist sowohl für analytische Beschreibungen als auch für numerische Berechnungen gut geeignet.
- Die Bestimmung des Verhaltens des homogenen Systems ist mittels der Anfangsbedingung  $x(t_0)$  sehr einfach.
- Ein- und Mehrgrößensysteme können formal gleich behandelt werden.

Kalman-Filter basieren auf der Beschreibung eines physikalischen dynamischen Systems im Zustandsraum und nutzen somit diese Vorteile. Aufgrund dessen wird im nachfolgenden Kapitel auf die Beschreibung solcher Systeme im Zustandsraum eingegangen. Dazu wird ausgeführt, wie Differentialgleichungen in die Zustandsraumbeschreibung überführt werden können und wie die beiden Systemeigenschaften „Beobachtbarkeit“ und „Steuerbarkeit“ definiert sind. Da Kalman-Filter in Rechnern verwendet werden, in denen nur zeitdiskrete Werte vorliegen, wird im Speziellen nach der Lösung der Zustandsgleichung auf die für Kalman-Filter wichtige Beschreibung zeitdiskreter Systeme am Ende des Kapitels eingegangen.

Weiterführende Literatur zur Beschreibung von Systemen im Zustandsraum findet man z. B. bei J. Lunze [16] und H. Unbehauen [24].

## 2.1 Beschreibung dynamischer Systeme

Bei der Beschreibung im Zustandsraum wird das physikalische System durch einen Satz von Differentialgleichungen dargestellt. Hierbei können sowohl zeitvariante Systeme sowie nichtlineare Systeme beschrieben werden. Diese Methode beschreibt somit dynamische Systeme im Zeitbereich durch Zustandsgleichungen.

Veranschaulichen lässt sich dies, in dem man sich ein physikalisches System vorstellt, auf das eine Eingangsgröße  $u(t)$  wirkt und auf welches das System mit der Ausgangsgröße  $y(t)$  „reagiert“ (Abb. 2.1). Die Ein- und Ausgangsgröße kann aus mehreren Signalen bestehen und wird deshalb zu einem Vektor  $\underline{u}(t)$  bzw.  $\underline{y}(t)$  zusammengefasst. Das interne Verhalten des Systems wird durch Differentialgleichungen beschrieben.

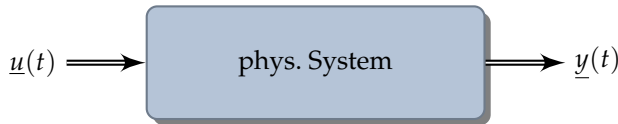


Abb. 2.1: Allgemeine Beschreibung von Systemen

Betrachtet man nur zeitinvariante, lineare Systeme, so kann dieses Verhalten allgemein in der Zustandsraumbeschreibung durch die beiden folgenden Gleichungen beschrieben werden (siehe z. B. [24], [26]) :

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t) \quad (2.1)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot \underline{u}(t) \quad (2.2)$$

Hierbei bezeichnet man die Gleichung (2.1) als Zustandsdifferentialgleichung und die Gleichung (2.2) als Ausgangsgleichung.  $\underline{x}(t)$  wird Zustandsvariable oder auch Zustandsgröße genannt. Besteht die Zustandsvariable  $\underline{x}(t)$  aus mehr als einer Größe, so geht diese Zustandsvariable in einen Zustandsvektor  $\underline{x}(t)$  über.  $\underline{u}(t)$  ist der Eingangs- und  $\underline{y}(t)$  der Ausgangsvektor des Systems.

Die Matrix  $\underline{A}$  wird als Systemmatrix,  $\underline{B}$  als Eingangsmatrix oder Steuermatrix bezeichnet. Die Ausgangsmatrix oder auch Beobachtungsmatrix  $\underline{C}$  beschreibt die Auswirkungen des Systems auf den Ausgang. Die Durchgangsmatrix  $\underline{D}$  beschreibt den Durchgriff des Systems, bei nicht sprungfähigen Systemen ist die Durchgangsmatrix null. Ist die Durchgangsmatrix nicht null, reagiert das System unmittelbar (in unendlich kurzer Zeit) auf eine Änderung des Eingangsvektors  $\underline{u}(t)$  und wird als sprungfähig bezeichnet [20].

Eine solche allgemeine Systembeschreibung im Zustandsraum ist in Abbildung 2.2 dargestellt.

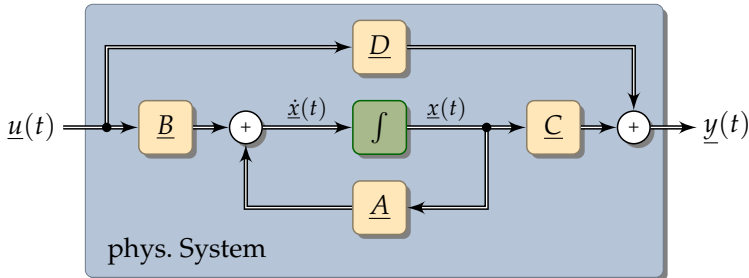


Abb. 2.2: Allgemeine Beschreibung von Systemen im Zustandsraum

## Beispiele

Im Folgenden soll das Aufstellen der Zustandsgleichungen anhand von zwei einfachen kinematischen Beispielen verdeutlicht werden. Bei dem ersten Beispiel reduziert sich die Zustandsgröße auf eine skalare Variable, bei dem zweiten Beispiel liegt die Zustandsvariable als Vektor vor.

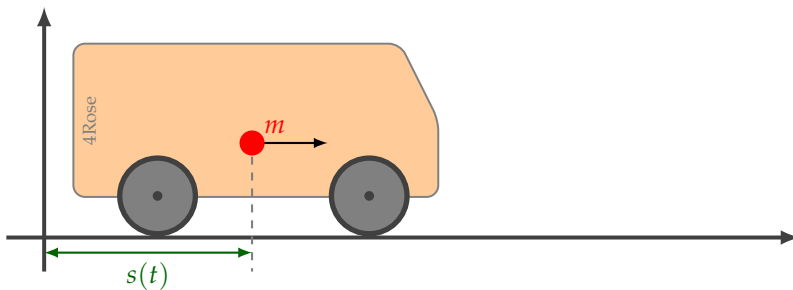


Abb. 2.3: Beschreibung der Dynamik eines Fahrzeugs durch eine Punktmasse

### Beispiel 1: Aufstellen der Zustandsgleichungen

Stellt man sich vor, dass die komplette Masse des Fahrzeugs im Massepunkt  $m$  vereint sei und sich dieser Massepunkt horizontal vom Koordinatenursprung fortbe-

wegt, so beschreibt  $s(t)$  den Abstand vom Koordinatenursprung zum Massepunkt des Fahrzeugs (Abb. 2.3). Messtechnisch erfassbar ist der Abstand  $s(t)$  und die Geschwindigkeit  $v(t)$  des Fahrzeugs im Massepunkt.

Der Zusammenhang zwischen dem Weg  $s$  und der Geschwindigkeit  $v$  einer Punktmasse lässt sich durch die lineare Differentialgleichung

$$v(t) = \dot{s}(t)$$

beschreiben. Durch die Wahl der Zustandsvariable  $x(t)$  zu

$$x(t) = s(t)$$

ist die Ableitung der Zustandsvariable  $\dot{x}(t)$  gegeben durch

$$\dot{x}(t) = \dot{s}(t) = v(t)$$

Wie bei der Wahl der Zustandsvariable gibt es auch bei der Festlegung der Eingangsgröße  $u(t)$  und der Ausgangsgröße  $y(t)$  mehrere sinnvolle Möglichkeiten. In der Regel beinhaltet die Ausgangsgröße  $y(t)$  die messtechnisch erfassbaren Größen.

Da in diesem Beispiel die Zustandsvariable zu  $x(t) = s(t)$  gewählt wurde, liegt es nahe, dieses physikalische System, abweichend von der oben genannten Regel, mit  $u(t) = v(t)$  und  $y(t) = s(t)$  zu beschreiben. Hierdurch erhält man eine einfache Möglichkeit die Größen  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$  und  $\underline{D}$  zu bestimmen.

Bringt man diese beiden Gleichungen in die Form der Zustandsdifferentialgleichung (2.1) bzw. Ausgangsgleichung (2.2), so ergeben sich die unbekannten Größen durch Koeffizientenvergleich zu  $A = 0$ ,  $B = 1$ ,  $C = 1$  und  $D = 0$ .

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = \dot{s}(t) = v(t) = u(t) &= \underbrace{0}_A \cdot x(t) + \underbrace{1}_B \cdot u(t) \\ y(t) = s(t) = x(t) &= \underbrace{1}_C \cdot x(t) + \underbrace{0}_D \cdot u(t)\end{aligned}$$

In diesem einfachen Beispiel reduzieren sich somit die Matrizen und Vektoren zu Skalare.

└

┘

## Beispiel 2: Aufstellen der Zustandsgleichungen

Nun wird angenommen, dass statt der Geschwindigkeit  $v(t)$  die Beschleunigung  $a(t)$  messtechnisch erfassbar ist.

Der Zusammenhang zwischen der zurückgelegten Strecke  $s(t)$ , der Geschwindigkeit  $v(t)$  und der Beschleunigung  $a(t)$  eines Massepunkts wird durch die Gleichung

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$$

modelliert.

Bei der Wahl der Zustandsvariable  $\underline{x}(t)$  ist man auch hier wieder frei. Wählt man diese zu

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

ist die Ableitung der Zustandsvariable  $\dot{\underline{x}}(t)$  gegeben durch

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{s}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ a(t) \end{bmatrix}$$

In diesem zweiten Beispiel ist nun  $u(t) = a(t)$  und  $y(t) = s(t)$ . Somit ergeben sich die beiden Zustandsgleichungen zu:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{s}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot a(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B \cdot a(t) \\ \underline{y}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot a(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D \cdot a(t) \end{aligned}$$

## 2.2 Allg. Darstellung von Differentialgleichungen

Die Darstellung von Differentialgleichungen im Zustandsraum ist auch für lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung möglich. So wird ein zeitinvariantes lineares System mit der Eingangsgröße  $u(t)$  und der Ausgangsgröße  $y(t)$  durch die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_0u(t) \quad (2.3)$$

beschrieben. Durch die Wahl der Zustandsvariablen zu

$$\begin{aligned} x_0(t) &= y(t) \\ x_1(t) &= \dot{y}(t) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(t) &= y^{(n-1)}(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

kann die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung (Gleichung 2.3) durch ein Gleichungssystem von n Differentialgleichungen erster Ordnung und einer weiteren Gleichung (Ausgangsgleichung) beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= -a_{n-1}x_{n-1}(t) - \dots - a_1x_1(t) - a_0x_0(t) + b_0u(t) \\ y(t) &= x_0(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

In Matrixform lautet das Gleichungssystem (2.5):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 \cdot u(t) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Verallgemeinert man die Zustandsgleichungen (2.6) und (2.7) auf ein zeitinvariantes lineares System der Ordnung  $n$  mit  $i$  Eingangs- und  $j$  Ausgangsgrößen, erhält man in Matrixform folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,n-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} & \dots & b_{0,i-1} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1,0} & b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,i-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_{i-1}(t) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \\ \vdots \\ y_{j-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & c_{0,2} & \dots & c_{0,n-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{j-1,0} & c_{j-1,1} & c_{j-1,2} & \dots & c_{j-1,n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{0,0} & d_{0,1} & d_{0,2} & \dots & d_{0,i-1} \\ d_{1,0} & d_{1,1} & d_{1,2} & \dots & d_{1,i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{j-1,0} & d_{j-1,1} & d_{j-1,2} & \dots & d_{j-1,i-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_{i-1}(t) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

## 2.3 Systemeigenschaften

Im Folgenden Kapitel sollen die beiden wichtigsten Systemeigenschaften bei der Beschreibung von physikalischen Systemen im Zustandsraum eingegangen werden. Diese dienen dazu, mehr über das Verhalten des Systems bezüglich der Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit der internen Zustandsgrößen sagen zu können. Im Speziellen die Beobachtbarkeit ist bei dem Entwurf von Kalman-Filtern von großer Wichtigkeit.

### 2.3.1 Beobachtbarkeit

Die im vorigen Abschnitt 2.1 beschriebene Darstellung von dynamischen Systemen im Zustandsraum ist dadurch gekennzeichnet, dass von außen betrachtet nur die Eingangsgrößen  $\underline{u}(t)$  und die Ausgangsgrößen  $\underline{y}(t)$  sichtbar sind. Die internen Zustandsgrößen, die im Zustandsvektor  $\underline{x}(t)$  vereint sind, sind von außen nicht sichtbar.

Für die Benutzung eines Kalman-Filters ist es notwendig, dass mithilfe der von außen sichtbaren Größen  $\underline{u}(t)$  und  $\underline{y}(t)$  auf den Zustandsvektor  $\underline{x}(t)$  geschlossen werden kann. Ist dies möglich, wird ein solches System als beobachtbar bezeichnet.

#### **Definition 1.: Beobachtbarkeit**

*Ein lineares zeitinvariantes System, im Zustandsraum beschrieben durch*

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot \underline{u}(t)\end{aligned}$$

*heißt vollständig beobachtbar, wenn es möglich ist, innerhalb eines endlichen Intervalls  $[t_0, t_1]$ , aus Kenntnis der Eingangsgrößen  $\underline{u}(t)$  und der Ausgangsgrößen  $\underline{y}(t)$  jeden Anfangszustand des Zustandsvektors  $\underline{x}(t_0)$  zu bestimmen.*

Rudolf E. Kalman entwickelte hieraus eine Bedingung, mit der überprüft werden kann, ob ein im Zustandsraum beschriebenes System beobachtbar ist. Diese Bedingung kann mithilfe der Bewegungsgleichung und des Cayley-Hamilton-Theorems hergeleitet werden [7].



Das nach Kalman entwickelte Kriterium für die Beobachtbarkeitsbedingung besagt, dass ein lineares zeitinvariantes System der Ordnung  $n$  dann beobachtbar ist, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix  $S_B$

$$\underline{S}_B = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

den Rang  $n$  besitzt.

Zur Bestimmung des Rangs der Matrix  $\underline{S}_B$  wird die Matrix in Zeilenvektoren zerlegt. Der Rang ist die maximale Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren. Dieser Rang wird auch als Zeilenrang einer Matrix bezeichnet.

Alternativ kann die Matrix in Spaltenvektoren zerlegt werden. In diesem Fall ist der Rang (Spaltenrang) die maximale Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren. Da der Spaltenrang und Zeilenrang einer Matrix immer gleich sind, kann der Rang über beide Berechnungsmethoden bestimmt werden.

#### **Definition 2.: Rang einer Matrix**

Der Rang einer Matrix  $\underline{A}$  ist die maximale Anzahl an linear unabhängigen Spalten- bzw. Zeilenvektoren.

Es gilt:  $\text{Rang}(\underline{A}) = \text{Rang}(\underline{A}^T)$ .

Der Rang einer  $(k \times l)$ -Matrix ist immer  $\leq \min(k, l)$ .

Ist der Rang  $= \min(k, l)$  so hat die Matrix einen vollen Rang.

**Beispiel 3: Bestimmung Rang einer Matrix**

$$\begin{aligned} \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} &= 3 & \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix} &= 2 & \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} &= 1 \\ \\ \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} &= 2 & \text{Rang} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} &= 2 & \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} &= 1 \end{aligned}$$

Ist es nicht sofort ersichtlich, ob die Zeilenvektoren linear unabhängig sind, kann die Matrix z. B. mithilfe des gaußschen Eliminationsverfahrens in eine äquivalente Matrix in Stufenform umgeformt werden.

In den letzten drei Beispielen lag eine  $(4 \times 2)$ -Matrix vor. Hier besteht somit eine gewisse Auswahlmöglichkeit bei der Bestimmung der linear unabhängigen Zeilenvektoren. Liegt ein im Zustandsraum beschriebenes lineares zeitinvariantes System der Ordnung  $n$  mit  $j$  Ausgangsgrößen vor, so besitzt die Beobachtbarkeitsmatrix  $\underline{S}_B$   $(n \cdot j)$ -Zeilenvektoren der Länge  $n$ . Dadurch besteht bei mehr als einer Ausgangsgröße ( $j > 1$ ) ebenso eine Auswahlmöglichkeit  $n$  passende linear unabhängige Zeilenvektoren auszusuchen.

**Beispiel 4: Bestimmung der Beobachtbarkeit**

Bezug nehmend auf das Beispiel 1, bei dem das physikalische System mit  $A = 0$ ,  $B = 1$ ,  $C = 1$  und  $D = 0$  modelliert wurde, folgt  $n = 1$ . Für den Rang der Beobachtbarkeitsmatrix  $\underline{S}_B$  gilt:

$$\text{Rang}(\underline{S}_B) = \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix} \right) = \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} \right) = \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \right) = 1$$

Somit ist der Rang gleich der Ordnung  $n$  und das System ist beobachtbar.

**Beispiel 5:** *Bestimmung der Beobachtbarkeit*

┌

┐

Im vorigen Beispiel 2 war

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Ordnung ist somit  $n = 2$  und der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix  $\underline{S}_B$  berechnet sich zu:

$$\text{Rang}(\underline{S}_B) = \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A} \end{bmatrix} \right) = \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 2$$

Auch in diesem Beispiel ist der Rang gleich der Ordnung  $n$  und das System ist beobachtbar.

Wäre jetzt abweichend von dem Beispiel  $y(t) = v(t)$ , ändert sich die Ausgangsmatrix zu:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix  $\underline{S}_B$  wäre dann:

$$\text{Rang}(\underline{S}_B) = \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A} \end{bmatrix} \right) = \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 1$$

Der Rang ist nun kleiner als die Ordnung des Systems. Das System ist somit nicht vollständig beobachtbar. In diesem Fall wäre nur die Größe  $v(t)$  beobachtbar.

└

┘

### Beispiel 6: Bestimmung der Beobachtbarkeit

In dem einführenden Beispiel aus Kapitel 1 war die Ordnung des Systems  $n = 3$  und

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Geht man nun davon aus, dass messtechnisch nur die Geschwindigkeit erfassbar wäre, ändert sich die Ausgangsmatrix  $\underline{C}$  zu:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Für die Beobachtbarkeitsmatrix folgt:

$$\text{Rang}(\underline{S}_B) = \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^2 \end{bmatrix} \right) = \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2$$

Der Rang ist kleiner als die Ordnung des Systems. Somit ist das System nicht vollständig beobachtbar. Es wären hier nur die Größen  $v(t)$  und  $a(t)$  beobachtbar.

Wäre nur die Beschleunigung messtechnisch erfassbar, ergibt sich die Ausgangsmatrix  $\underline{C}$  zu:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Für den Rang der Beobachtbarkeitsmatrix folgt:

$$\text{Rang}(\underline{S}_B) = \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^2 \end{bmatrix} \right) = \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 1$$

Es wären hier nur die Größe  $a(t)$  beobachtbar und das System wäre somit nicht vollständig beobachtbar.

Der Vollständigkeit halber ist angemerkt, dass es neben diesem relativ einfach zu bestimmenden Kriterium nach Kalman noch das Gilbert- und das Hautus-Kriterium zur Bestimmung der Beobachtbarkeit existieren. Mit den beiden Kriterien ist es möglich, nicht nur festzustellen, ob das System vollständig beobachtbar ist, sondern sie geben gegebenenfalls auch an, welche Eigenwerte nicht beobachtbar sind [16].

## 2.3.2 Steuerbarkeit

Neben der Beobachtbarkeit gibt es noch die Eigenschaft der Steuerbarkeit. Diese Eigenschaft ist in allen regelungstechnischen Problemen von großer Wichtigkeit. Hier ist die Frage, ob es möglich ist, durch geeignete Eingangsgrößen  $\underline{u}$  die Größen des Zustandsvektors  $\underline{x}$  zu verändern.

### Definition 3.: Steuerbarkeit

Ein lineares zeitinvariantes System, im Zustandsraum beschrieben durch

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot \underline{u}(t)$$

heißt vollständig steuerbar, wenn es möglich ist, innerhalb eines endlichen Intervalls  $[t_0, t_1]$ , durch geeignete Eingangsgrößen  $\underline{u}(t)$  jeden Anfangszustand des Zustandsvektors  $\underline{x}(t_0)$  in jeden Zustand  $\underline{x}(t_1)$  zu überführen.

Auch hier entwickelte R. E. Kalman eine Bedingung, mit der überprüft werden kann, ob ein im Zustandsraum beschriebenes System steuerbar ist. Dieses Kriterium für die Steuerbarkeitsbedingung besagt, dass ein lineares zeitinvariantes System der Ordnung  $n$  dann steuerbar ist, wenn die Steuerbarkeitsmatrix  $S_S$

$$S_S = \begin{bmatrix} \underline{B}, & \underline{A} \cdot \underline{B}, & \underline{A}^2 \cdot \underline{B}, & \dots, & \underline{A}^{n-1} \cdot \underline{B} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

den Rang  $n$  besitzt.

### Beispiel 7: Bestimmung der Steuerbarkeit

Zur Berechnung der Steuerbarkeit des Beispiels 1, bei dem das physikalische System mit  $A = 0$ ,  $B = 1$ ,  $C = 1$  und  $D = 0$  modelliert wurde, folgt  $n = 1$  und für den Rang der Steuerbarkeitsmatrix  $\underline{S}_S$  gilt:

$$\text{Rang}\left(\left[\underline{B}, \underline{A} \cdot \underline{B}, \underline{A}^2 \cdot \underline{B}, \dots, \underline{A}^{n-1} \cdot \underline{B}\right]\right) = \text{Rang}\left(\left[\underline{B}\right]\right) = \text{Rang}\left(\left[1\right]\right) = 1$$

Das System ist somit steuerbar, da der Rang gleich der Ordnung  $n$  des Systems ist.

### Beispiel 8: Bestimmung der Steuerbarkeit

Mit

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

aus dem vorigen Beispiel 2 folgt  $n=2$ . Der Rang der Steuerbarkeitsmatrix  $\underline{S}_S$  berechnet sich zu:

$$\text{Rang}(\underline{S}_S) = \text{Rang}\left(\left[\underline{B}, \underline{A} \cdot \underline{B}\right]\right) = \text{Rang}\left(\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]\right) = 2$$

Auch in diesem Beispiel ist der Rang gleich der Ordnung  $n$  und das System ist steuerbar.

### Beispiel 9: Bestimmung der Steuerbarkeit

In dem einführenden Beispiel aus Kapitel 1 war die Ordnung des Systems  $n = 3$  und

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Für den Rang der Steuerbarkeitsmatrix folgt:

$$\text{Rang}(\underline{S}_S) = \text{Rang}\left(\left[\underline{B}, \underline{A} \cdot \underline{B}, \underline{A}^2 \cdot \underline{B}\right]\right) = \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Der Rang ist null und somit kleiner als die Ordnung des Systems. Somit ist das System nicht steuerbar.

## 2.4 Lösung der Zustandsgleichung

Für die Überführung eines zeitkontinuierlichen Systems im Zustandsraum in ein zeitdiskretes Systems ist es notwendig, zuerst die Lösung der Zustandsgleichungen zu bestimmen. Siehe hierzu auch O. Föllinger S. 423 Abschnitt 12.2 [6].

Hierzu wird die Zustandsdifferentialgleichung  $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t)$  umgestellt und mit  $e^{-\underline{A} \cdot t}$  multipliziert.

$$e^{-\underline{A} \cdot t} \cdot \dot{\underline{x}}(t) - e^{-\underline{A} \cdot t} \cdot \underline{A} \cdot \underline{x}(t) = e^{-\underline{A} \cdot t} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(t) \quad (2.12)$$

Leitet man  $e^{-\underline{A} \cdot t} \cdot \underline{x}(t)$  ab, erhält man mithilfe der Produktregel  $(g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \underbrace{e^{-\underline{A} \cdot t}}_g \cdot \underbrace{\underline{x}(t)}_h \right) = \underbrace{-\underline{A} \cdot e^{-\underline{A} \cdot t}}_{\dot{g}} \cdot \underbrace{\underline{x}(t)}_h + \underbrace{e^{-\underline{A} \cdot t}}_g \cdot \underbrace{\dot{\underline{x}}(t)}_{\dot{h}} \quad (2.13)$$

Somit lässt sich die Gleichung (2.12) mit (2.13) schreiben:

$$\frac{d}{dt} \left( e^{-\underline{A} \cdot t} \cdot \underline{x}(t) \right) = e^{-\underline{A} \cdot t} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(t) \quad (2.14)$$

Durch Integration folgt:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \left( \frac{d}{d\tau} \left( e^{-\underline{A} \cdot \tau} \cdot \underline{x}(\tau) \right) \right) d\tau &= \int_{t_0}^t e^{-\underline{A} \cdot \tau} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau \\ e^{-\underline{A} \cdot t} \cdot \underline{x}(t) - e^{-\underline{A} \cdot t_0} \cdot \underline{x}(t_0) &= \int_{t_0}^t e^{-\underline{A} \cdot \tau} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.15)$$

lässt sich die Gleichung nach  $\underline{x}(t)$  auflösen.

$$\underline{x}(t) = \underbrace{e^{\underline{A} \cdot (t-t_0)} \cdot \underline{x}(t_0)}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{\int_{t_0}^t e^{\underline{A} \cdot (t-\tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau}_{\text{partikuläre Lösung}} \quad (2.16)$$

Die Gleichung (2.16) bezeichnet man als Bewegungsgleichung. Der linke Ausdruck beschreibt die homogene Lösung und der rechte Ausdruck die partikuläre Lösung der Differentialgleichung. Neben dieser Herleitung existieren noch zahlreiche weitere Ansätze zur Herleitung dieser Bewegungsgleichung, z. B. der von Jan Lunze (siehe [15]).

Oft wird die Bewegungsgleichung in der folgenden Form geschrieben, bei der die e-Funktion durch

$$\underline{\Phi}(t - \tau) = e^{\underline{A} \cdot (t-\tau)} \quad (2.17)$$

substituiert wird. Man spricht bei dieser Gleichung auch von der Transitionsmatrix .



Die Bewegungsgleichung schreibt sich mit dieser Substitution:

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t - t_0) \cdot \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(t - \tau) \cdot \underline{B} \underline{u}(\tau) d\tau \quad (2.18)$$

Die Ausgangsgleichungen  $\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot \underline{u}(t)$  der Ausgangsgröße  $\underline{y}(t)$  lassen sich mithilfe der Bewegungsgleichung beschreiben.

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{\Phi}(t - t_0) \cdot \underline{x}(t_0) + \underline{C} \cdot \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(t - \tau) \cdot \underline{B} \underline{u}(\tau) d\tau + \underline{D} \cdot \underline{u}(t) \quad (2.19)$$

## 2.5 Beschreibung zeitdiskreter Systeme

In den vorigen Abschnitten dieses Kapitels wurde gezeigt, wie man physikalische Systeme im kontinuierlichen Zeitbereich beschreibt. Für die Implementierung in digitalen Schaltungen/Mikroprozessoren ist es notwendig, diese im diskreten Zeitbereich darzustellen. Zur Digitalisierung werden die kontinuierlichen Signale alle  $t = n \cdot T_s$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) Sekunden abgetastet.

Setzt man die Anfangszeit  $t_0 = 0$  und  $t = n \cdot T_s$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  geht die Bewegungsgleichung über in:

$$\underline{x}(n \cdot T_s) = e^{\underline{A} \cdot n \cdot T_s} \cdot \underline{x}(0) + \int_0^{n \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot (n \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau \quad (2.20)$$

Für  $t = (n+1) \cdot T_s$  folgt für die Bewegungsgleichung:

$$\underline{x}((n+1) \cdot T_s) = e^{\underline{A} \cdot (n+1) \cdot T_s} \cdot \underline{x}(0) + \int_0^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau \quad (2.21)$$

Teilt man das Integral in zwei Integrale auf und klammert den Term  $e^{\underline{A} \cdot T_s}$  aus, folgt:

$$\begin{aligned}
 \underline{x}((n+1) \cdot T_s) &= e^{\underline{A} \cdot (n+1) \cdot T_s} \cdot \underline{x}(0) + \int_0^{n \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau \\
 &\quad + \int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau \\
 &= e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot e^{\underline{A} \cdot n \cdot T_s} \cdot \underline{x}(0) + \int_0^{n \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot e^{\underline{A} \cdot (n \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau \\
 &\quad + \int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau \\
 &= e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underbrace{\left( e^{\underline{A} \cdot n \cdot T_s} \cdot \underline{x}(0) + \int_0^{n \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot (n \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau \right)}_{\underline{x}(n \cdot T_s)} \\
 &\quad + \int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau \\
 &= e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{x}(n \cdot T_s) + \int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

Zur weiteren Vereinfachung der Gleichung 2.22 müssen weitere Annahmen zum Verlauf des Signals  $\underline{u}(t)$  im Intervall  $n \cdot T_s$  und  $(n+1) \cdot T_s$  vorgenommen werden. Dies ist deshalb notwendig, da durch die Abtastung nur der Wert zu den Abtastzeitpunkten  $t = n \cdot T_s$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  bekannt ist.

Im Folgenden sollen die beiden bekanntesten Annahmen zum Verlauf des Signals  $\underline{u}(t)$  vorgestellt werden. Das eine geht von einer idealen Abtastung aus, das andere von einer realen Abtastung des Signals.

## Ideale Abtastung

Bei der idealen Abtastung wird ein kontinuierliches Signal  $u(t)$  mit einer Folge von Dirac-Impulsen multipliziert (siehe Abbildung 2.4).

Mathematisch lässt sich das ideal abgetastete Signal  $u_d(t)$  beschreiben durch:

$$u_d(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} u(n \cdot T_s) \cdot \delta(t - n \cdot T_s) \quad (2.23)$$

Im Intervall  $n \cdot T_s \leq t < (n+1) \cdot T_s$  ist das Signal folglich:

$$u_d(t) = u(n \cdot T_s) \cdot \delta(t - n \cdot T_s) \quad (2.24)$$

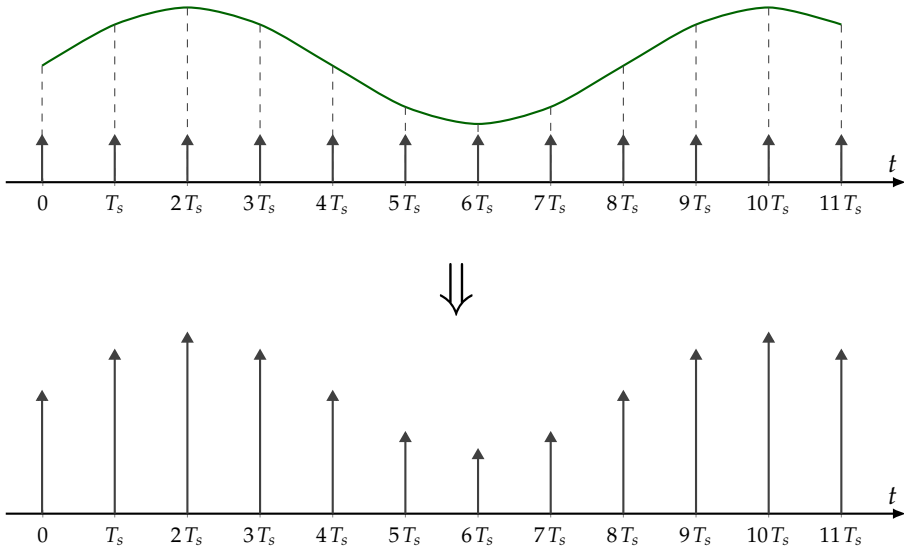


Abb. 2.4: Abtastung eines kontinuierlichen Signals

Nähert man  $u(t)$  mit  $u(t) \approx u_d(t)$  an und setzt die Gleichung (2.24) in Gleichung (2.22) ein, folgt:

$$\begin{aligned} \underline{x}((n+1) \cdot T_s) &= e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{x}(n \cdot T_s) + \\ &\quad \int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) \cdot \delta(\tau - n \cdot T_s) d\tau \end{aligned} \quad (2.25)$$

Durch die Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses lässt sich die Gleichung weiter vereinfachen.

$$\begin{aligned} \underline{x}((n+1) \cdot T_s) &= e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{x}(n \cdot T_s) + e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - n \cdot T_s)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(n \cdot T_s) \\ &= e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{x}(n \cdot T_s) + e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(n \cdot T_s) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Betrachtet man nur die Folge der abgetasteten Werte und weist den Abtastwerten den Index  $k$  zu, folgt:

$$\underline{x}(k+1) = \underbrace{e^{\underline{A} \cdot T_s}}_{\underline{A}_d} \cdot \underline{x}(k) + \underbrace{e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{B}}_{\underline{B}_d} \cdot \underline{u}(k) \quad (2.27)$$

Das lineare zeitdiskrete System wird somit beschreiben durch:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{x}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) \quad (2.28)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) \quad (2.29)$$

mit

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s}, \quad \underline{B}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{B} \quad (2.30)$$

Die Berechnung der Matrix  $\underline{A}_d$  kann z. B. mithilfe der Laplacetransformation erfolgen.

## Reale Abtastung (Abtast-Halte-Glied)

In der Realität ist es nicht möglich, ideale Dirac-Impulse zu erzeugen. Technisch benötigt man eine endliche Zeit, um den abgetasteten Wert eines Signals zu bestimmen. Daher besteht der zweite Ansatz darin, den Abtastvorgang nach einem Dirac-Impuls durch ein zusätzliches Halteglied zu modellieren (siehe Abbildung 2.5).

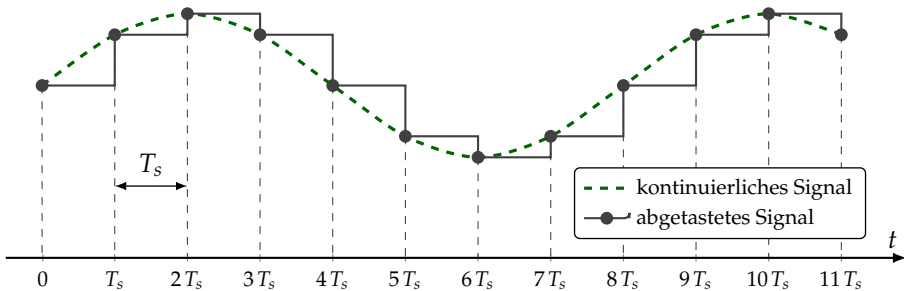


Abb. 2.5: Abtastung eines kontinuierlichen Signals durch ein Abtast-Halte-Glied

Unter der Annahme, dass sich das abgetastete Signal nicht verändert, ist  $u(t) = u(n \cdot T_s)$  im Intervall  $n \cdot T_s \leq t < (n+1) \cdot T_s$  konstant. Der Term  $\underline{u}(\tau)$  geht in  $\underline{u}(n \cdot T_s)$  über und die Gleichung (2.22) lässt sich schreiben mit:

$$\underline{x}((n+1) \cdot T_s) = e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{x}(n \cdot T_s) + \int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \, d\tau \cdot \underline{u}(n \cdot T_s) \quad (2.31)$$

Das Integral lässt sich mithilfe der Substitution  $v(\tau) = (n+1) \cdot T_s - \tau$  vereinfachen.

Die Ableitung nach  $\tau$  ergibt  $\frac{dv}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}((n+1) \cdot T_s - \tau) = -1$ . Somit ist  $d\tau = -dv$ .

Die Integrationsgrenzen des Integrals ändern sich mit dieser Substitution zu:

- Untere Integrationsgrenze:  $v(n \cdot T_s) = (n+1) \cdot T_s - n \cdot T_s = T_s$
- Obere Integrationsgrenze:  $v((n+1) \cdot T_s) = (n+1) \cdot T_s - (n+1) \cdot T_s = 0$

Durch diese Substitution lässt sich Gleichung (2.31) vereinfachen.

$$\begin{aligned} \underline{x}((n+1) \cdot T_s) &= e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{x}(n \cdot T_s) - \int_{T_s}^0 e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{B} \, dv \cdot \underline{u}(n \cdot T_s) \\ &= e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{x}(n \cdot T_s) + \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{B} \, dv \cdot \underline{u}(n \cdot T_s) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Weist man den Abtastwerten den Index  $k$  zu, lässt sich die Gleichung (2.32) weiter vereinfachen.

$$\underline{x}(k+1) = \underbrace{e^{\underline{A} \cdot T_s}}_{\underline{A}_d} \cdot \underline{x}(k) + \underbrace{\int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{B} \, dv}_{\underline{B}_d} \cdot \underline{u}(k) \quad (2.33)$$

Das lineare zeitdiskrete System wird somit beschrieben durch:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{x}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) \quad (2.34)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) \quad (2.35)$$

mit

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s}, \quad \underline{B}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{B} \, dv \quad (2.36)$$

Je nach Modellierung des abgetasteten Signals ergibt sich eine unterschiedliche Berechnung der diskretisierten Eingangsmatrix  $\underline{B}_d$ . In der Praxis wird oft die Näherung der realen Abtastung verwendet, wobei es auch Anwendungen gibt, die durch die ideale Abtastung besser beschrieben werden.

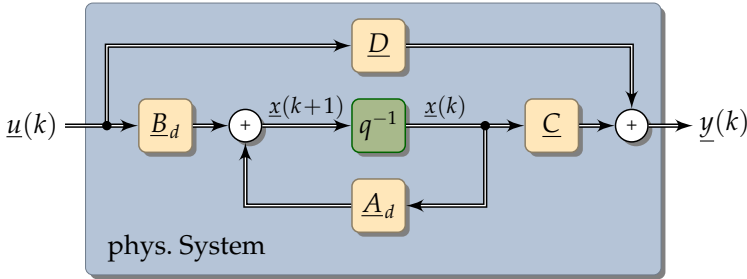


Abb. 2.6: Beschreibung zeitdiskreter, linearer Systeme im Zustandsraum

Das in Abbildung 2.2 beschriebene System geht im diskreten Zeitbereich in das in Abbildung 2.6 dargestellte System über. Dabei wird der Integrator durch ein Verzögerungsglied  $q^{-1}$  ersetzt, welches die Werte des Zustandsvektors zeitlich um einen Abtastwert verzögert.

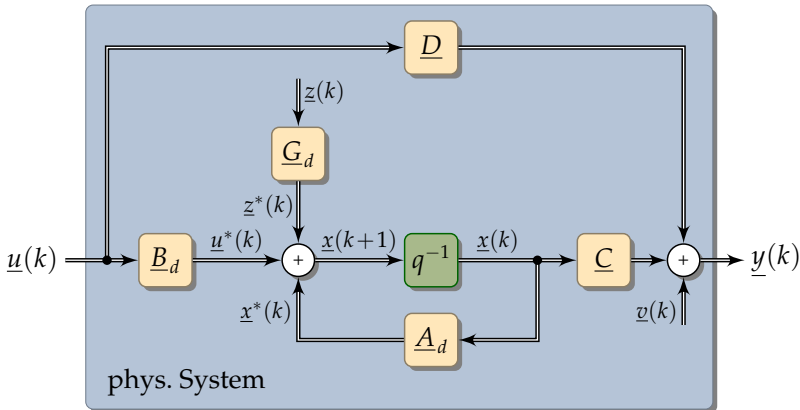


Abb. 2.7: Beschreibung realer, zeitdiskreter, linearer Systeme im Zustandsraum

Unter Berücksichtigung, dass reale Systeme durch ein Systemrauschen  $\underline{z}(k)$  und ein Messrauschen  $\underline{v}(k)$  verändert werden, lassen sich diese Systeme im diskreten Zeitbereich wie in Abbildung 2.7 dargestellt modellieren. Das Systemrauschen  $\underline{z}(k)$  wird mit der

Matrix  $\underline{G}_d$  multipliziert und additiv dem Zustandsvektor zugeführt. Das Messrauschen  $\underline{v}(k)$  wird direkt dem Ausgangsvektor  $\underline{y}(k)$  überlagert.

Dieses lineare zeitdiskrete System mit Rauschen ist beschreiben durch:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{x}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) + \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k) \quad (2.37)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) + \underline{v}(k) \quad (2.38)$$

und

$$\underline{x}^*(k) = \underline{A}_d \cdot \underline{x}(k), \quad \underline{u}^*(k) = \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k), \quad \underline{z}^*(k) = \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k)$$

### Beispiel 10: Bestimmung von $\underline{A}_d$ und $\underline{B}_d$

Bezugnehmend auf das Beispiel 1, bei dem das physikalische System mit  $A = 0$ ,  $B = 1$ ,  $C = 1$  und  $D = 0$  modelliert wurde

$$\dot{x}(t) = \underbrace{0}_A \cdot x(t) + \underbrace{1}_B \cdot u(t), \quad y(t) = \underbrace{1}_C \cdot x(t) + \underbrace{0}_D \cdot u(t)$$

folgt mit Gleichung (2.36):

$$A_d = e^{A \cdot T_s} = e^0 = 1, \quad B_d = \int_0^{T_s} e^{A \cdot v} \cdot B \, dv = \int_0^{T_s} e^0 \cdot 1 \, dv = T_s$$

$$\underline{x}(k+1) = \underline{x}(k) + T_s \cdot \underline{u}(k)$$

Diese Gleichung stellt die bekannte Bewegungsgleichung eines Punkt-Masse-Objekts mit  $s(k+1) = s(k) + T_s \cdot v(k)$  dar.

### Beispiel 11: Bestimmung von $\underline{A}_d$ und $\underline{B}_d$

In dem Beispiel 2 war

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B \cdot a(t), \quad \underline{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D \cdot a(t)$$

Die Berechnung der Systemmatrix  $\underline{A}_d$  und der Eingangsmatrix  $\underline{B}_d$  kann wie im einführenden Beispiel z. B. mithilfe von MATLAB<sup>®</sup> oder mit der Laplacetransformation erfolgen. Für einfache Systemmatrizen wie in Beispiel 2 bietet sich eine weitere Berechnungsmethode über die Reihenentwicklung der e-Funktion an.

Die e-Funktion lässt sich über eine Reihe entwickeln.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{für } n=0 \text{ gilt: } \frac{x^0}{0!} = 1$$

Diese Reihenentwicklung ist auch mit Matrizen möglich. Somit lässt sich die Transitionmatrix schreiben durch:

$$e^{\underline{A} \cdot T_s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \underline{A}^n \cdot T_s^n \quad \text{für } n=0 \text{ gilt: } \frac{1}{0!} \cdot \underline{A}^0 \cdot T_s^0 = \underline{I} = \text{Einheitsmatrix}$$

In diesem Beispiel ist für  $n > 1$  der Ausdruck  $\underline{A}^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Somit verschwinden, bis auf den ersten Term, alle weiteren Terme der Summe. Es folgt:

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot T_s = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot \nu} \cdot \underline{B} \, d\nu = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\nu = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} \nu \\ 1 \end{bmatrix} d\nu = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned}\underline{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix} \cdot \underline{u}(k) \\ \underline{y}(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}(k)\end{aligned}$$

Plausibilisieren lässt sich die Gleichung für  $\underline{x}(k+1)$ , indem man den Zustandsvektor  $\underline{x}(k)$  ausschreibt und für  $\underline{u}(k) = a(k)$  einsetzt.

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} s(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix} \cdot a(k)$$

$$\begin{aligned}s(k+1) &= s(k) + T_s \cdot v(k) + \frac{T_s^2}{2} \cdot a(k) \\ v(k+1) &= v(k) + T_s \cdot a(k)\end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen stellen die bekannten Bewegungsgleichungen für den Weg bzw. für die Geschwindigkeit eines Punkt-Masse-Objekts unter der Berücksichtigung einer Beschleunigung dar.

└

┘

## KAPITEL 3

# WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

Die Wahrscheinlichkeitstheorie stellt das zweite wichtige Grundlagenkapitel dieses Buchs dar. Das Kapitel dient dazu, die Grundlagen zu erarbeiten, um später die Mechanismen zu verstehen, wie es mit dem Kalman-Filter möglich ist, die messtechnisch erfassbaren, verrauschten Größen zu filtern und die unbekannten Größen zu schätzen.

Hierzu werden in diesem Kapitel die wichtigsten Grundlagen für die Zustandsschätzung dargelegt. Es wurde bewusst nur auf den Teil der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik eingegangen, der für die Zustandsschätzung mit Kalman-Filtern relevant ist.

Interessierte Leser, die einen kompletten Überblick über diesen Themenbereich bekommen möchten, sind auf die einschlägige Literatur verwiesen. Beispielfhaft zählen hierzu die Bücher von H. Georgii „Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik“ [8], von O. Beucher „Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik mit MATLAB“ [3] oder von L. Papula „Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik oder Fehler- und Ausgleichsrechnung“ [18].

## 3.1 Definitionen und Begriffe

Zu Beginn werden die für die Wahrscheinlichkeitstheorie wichtigsten Definitionen und Begrifflichkeiten festgelegt. Diese sind die Basis für das Verständnis der Wahrscheinlichkeitstheorie und der darauf aufbauenden Theorie der Zustandsschätzung mittels Kalman-Filter.

### 3.1.1 Zufälliges Experiment

In der Natur gibt es Experimente, auch Versuche genannt, bei denen der Ausgang des Experiments mehrere verschiedene „Ausgänge/Ergebnisse“ hat, die nicht vorhersehbar sind. Liegt ein solches Experiment vor, spricht man von einem zufälligen Experiment/Versuch.

Ein sehr oft zitiertes Beispiel ist das Benutzen eines Würfels. Das Experiment hat in diesem Fall sechs verschiedene Ausgänge. Welcher der sechs Ausgänge am Ende eines solchen Experiments eintritt, ist nicht vorhersehbar.

Aber auch das Bestimmen der Länge eines Gegenstandes mit einem Lineal kann als zufälliges Experiment betrachtet werden. Durch Messungenauigkeiten wird nicht der wahre Wert bestimmt, sondern es entstehen verschiedene Längenergebnisse, die um den wahren Wert schwanken.

### 3.1.2 Ergebnis und Ergebnismenge

Der Ausgang eines zufälligen Experiments wird allgemein als elementares Ereignis  $\omega$  bezeichnet. Die Menge aller möglichen Ausgänge/Ergebnisse eines zufälligen Experiments werden mit der Menge  $\Omega$  beschrieben.

Besteht ein zufälliges Experiment aus  $L$  Elementarereignissen, ist

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_L\} \quad (3.1)$$

Beim Würfelexperiment gilt somit  $\Omega = \{\square, \square, \square, \square, \square, \square\}$

Ein Ereignis besteht nicht zwangsläufig aus einem Elementarereignis, sondern kann allgemein eine Teilmenge von  $\Omega$  sein.

$A \subseteq \Omega$  heißt Ereignis und tritt dann ein, wenn ein Zufallsexperiment/Versuch ein Elementarereignis aus  $A$  ergibt. Für die Menge  $A$  gilt:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_M\} \quad \text{mit } M \leq L \quad (3.2)$$

Beispielsweise sei  $A = \{\square, \square, \square\}$  die Menge aller Primzahlen von  $\Omega$  oder  $B = \{\square\}$  sei die Menge, dass eine sechs gewürfelt wird.

Spezielle Ereignisse:

- Gilt  $A = \Omega$  tritt das Ereignis sicher ein. Man spricht von einem sicheren Ereignis
- Ist  $A = \emptyset$  eine leere Menge, kann das Ereignis nie eintreten. Dies wird als unmögliches Ereignis bezeichnet
- $A^C$  heißt Komplementärereignis. Ist z. B.  $A = \{\square, \blacksquare, \boxtimes\}$  so folgt  $A^C = \{\square, \boxtimes, \boxplus\}$
- $A, B$  heißen unvereinbar oder disjunkt, falls  $A \cap B = \emptyset$  ist

### 3.1.3 Zufallsvariable

Für das Rechnen mit zufälligen Ereignissen werden Zufallsvariablen eingeführt. Diese werden durch Abbildungen/Zuordnungen eines Elementarereignisses zu einer Variable gebildet. Mit anderen Worten ordnet die Zufallsvariable  $X$  jedem Ergebnis  $\omega \in \Omega$  eine reelle Zahl zu. Es gilt:

$$\begin{aligned} X: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow X(\omega) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Vor der Durchführung eines Zufallsexperiments bildet die Zufallsvariable  $X$  eine reelle Zahl ab, deren Wert unbekannt ist. Nach der Durchführung wird die Zufallsvariable  $X$  im Wert  $x$  realisiert. Man spricht deshalb in diesem Zusammenhang bei  $x$  von der Realisierung der Zufallsvariable  $X$  nach der Durchführung eines Zufallsexperimentes.

Eine solche Abbildungsvorschrift könnte z. B. bei einem Zufallsexperiment mit einmaligem Würfeln wie folgt definiert sein:

$$X = \text{Augenzahl des Würfelerggebnisses}$$

Dann wäre  $X(\square) = 1$ ,  $X(\blacksquare) = 2$ ,  $X(\boxtimes) = 3$ ,  $X(\boxplus) = 4$ ,  $X(\boxtimes) = 5$  und  $X(\boxplus) = 6$ .

### 3.1.4 Wahrscheinlichkeit

Im Folgenden soll wieder das Zufallsexperiment mit einmaligem Würfeln betrachtet werden. Hierbei wird der Zufallsvariable  $X$  jedem Ereignis die Augenzahl des Würfelergebnisses zugeordnet. Führt man dieses Experiment mehrmals durch, erhält man nach jedem Versuch einen Wert der Zufallsvariable  $X$ . Abbildung 3.1 zeigt beispielhaft den Verlauf der Zufallsvariable  $X$  über 60 durchgeführten Versuche.

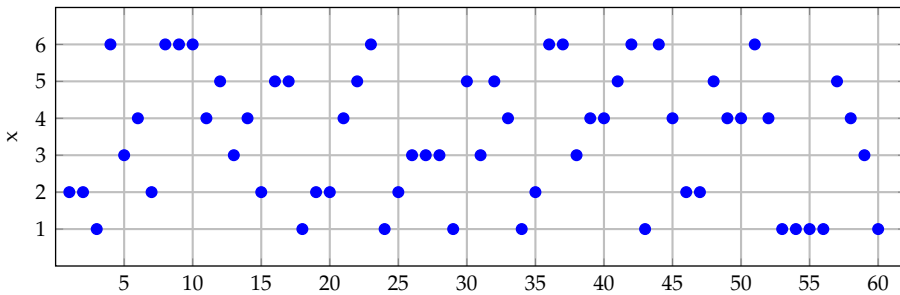


Abb. 3.1: Verlauf der Zufallsvariable beim Würfeln mit einem Würfel

Oft ist nicht von Interesse zu welchem Zeitpunkt der Ausgang des Zufallsexperiments aufgetreten ist, sondern die Anzahl der gleichartigen Ereignisse. Abbildung 3.2 zeigt die Häufigkeitsverteilung der Zufallsvariable  $X$  über die 60 durchgeführten Versuche.

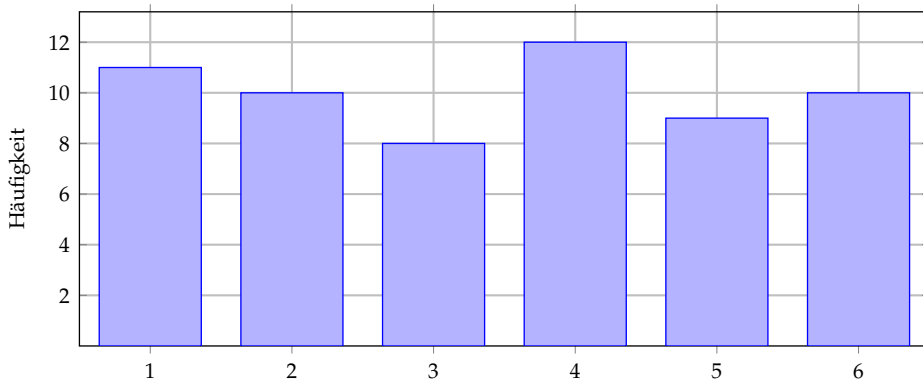


Abb. 3.2: Häufigkeit der Zufallsvariable  $X$  nach 60-maligen Würfeln

Wiederholt man diesen Versuch mit einem idealen (nicht gezinkten) Würfel  $n$ -mal, so wird der relative Unterschied zwischen den Häufigkeiten für große  $n$  immer kleiner.

Werden die Häufigkeiten mit der Anzahl der  $n$ -mal durchgeführten Experimente geteilt, entsteht eine relative Häufigkeit. Allgemein lässt sich die relative Häufigkeit  $h_n$  eines Ereignisses  $A \subseteq \Omega$ , welches  $n$ -mal durchgeführt wird, schreiben

$$h_n(A) = \frac{\text{Anzahl der Experimente mit Ereignis } A}{n} \quad (3.4)$$

Für  $n \rightarrow \infty$  treten alle Häufigkeiten bei einem Würfelexperiment mit einem idealen Würfel gleich oft aus.

Bei einem idealen Würfel beträgt die relative Häufigkeit eines jeden Ereignisses  $1/6$ .

Für  $n \rightarrow \infty$  strebt die relative Häufigkeit gegen die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$ .

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(A) \quad (3.5)$$

Diese Größe gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Ereignis auftritt. Anders ausgedrückt ist die Wahrscheinlichkeit das Verhältnis zwischen der Anzahl der für  $A$  günstigen Elementarereignisse zu der Anzahl aller möglichen Elementarereignisse.

Die Zuordnung eines jeden Ereignisses  $A$  einer Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  wird in der Wahrscheinlichkeitstheorie Wahrscheinlichkeitsmaß genannt. Das Wahrscheinlichkeitsmaß muss hierbei die drei Axiome nach Kolmogorov erfüllen:

1. Jedem Ereignis  $A$  ist eine reelle Zahl (Wahrscheinlichkeit von  $A$ ) zwischen 0 und 1 zugeordnet:  $0 \leq P(A) \leq 1$ .
2. Ein sicheres Ereignis  $\Omega$  hat die Wahrscheinlichkeit 1:  $P(\Omega) = 1$ .
3. Für zwei disjunkte Ereignisse gilt:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , falls  $A \cap B = \emptyset$ .

Aus den Axiomen nach Kolmogorov folgt:

- Für die Wahrscheinlichkeit eines komplementären Ereignisses folgt:  
 $P(A^C) = 1 - P(A)$
- Ein unmögliches Ereignis  $A = \emptyset$  hat die Wahrscheinlichkeit:  $P(\emptyset) = 0$
- Für die Vereinigung nicht disjunkter Ereignisse gilt:  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

## 3.2 Dichtefunktion

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Häufigkeitsverteilungen von Zufallszahlen vorgestellt. Hierzu zählen die Gleich- und Normalverteilung.

### 3.2.1 Gleichverteilung

Bezug nehmend auf das Zufallsexperiment mit einmaligen Würfeln sind bei einem idealen Würfel alle Wahrscheinlichkeiten eines jeden Elementarereignisses gleich. Solche Häufigkeitsverteilungen, bei denen alle Werte der Zufallsvariable gleich oft auftreten, werden als gleichverteilt bezeichnet.

Allgemein spricht man in diesem Zusammenhang auch von einer Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion oder kurz Dichtefunktion. Die Beschreibung geschieht durch die Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion (kurz Dichtefunktion)  $f_X(x)$ . Bei einem zufälligen Experiment mit diskreten Ausgängen wird diese durch eine Folge von Dirac-Impulsen beschrieben.

Der Dirac-Impuls, auch Delta-Distribution, Dirac-Funktion, Dirac-Puls, Dirac-Stoß, Stoßfunktion oder Impulsfunktion genannt, ist wie folgt definiert:

#### **Definition 4.: Dirac-Funktion**

Die von Paul A. M. Dirac in der Physik eingeführte  $\delta$ -Funktion ( $\delta$ -Distribution) ist vereinfachend geschrieben definiert durch:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \int_G \delta(x) dx = \begin{cases} 1 & 0 \in G \\ 0 & 0 \notin G \end{cases}$$

Im strengen Sinn ist die Dirac-Funktion keine mathematische Funktion, da  $\infty$  keine Zahl ist. Jedoch sind die meisten Rechengesetze für die Dirac-Funktion gültig. Die für diesen Themenbereich wichtigste Eigenschaft ist die Ausblendeigenschaft.

Ausblendeigenschaft der Dirac-Funktion:

$$\int_G \delta(x - a) \cdot f(x) dx = \begin{cases} f(a) & a \in G \\ 0 & a \notin G \end{cases}$$

Bei dem beschriebenen Würfelexperiment gilt für die Dichtefunktion (siehe auch Abb. 3.3):

$$f_X(x) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 \delta(x - i) \quad (3.6)$$

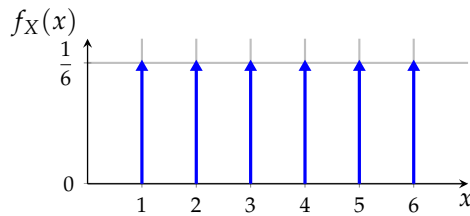


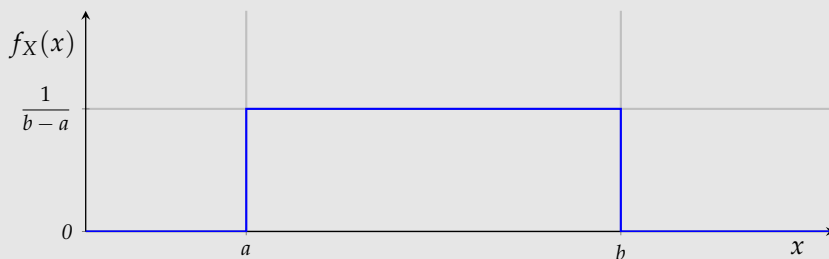
Abb. 3.3: Beschreibung der Gleichverteilung des Würfelperiments durch Dirac-Impulse

Hat die Zufallsvariable unendlich viele anzunehmende Werte, spricht man von einer kontinuierlichen Zufallsvariablen. Für eine solche Zufallsvariable ist die Dichtefunktion einer Gleichverteilung definiert mit:

**Definition 5.: Dichtefunktion Gleichverteilung**

Die Dichtefunktion einer gleichverteilten Zufallsvariable ist definiert durch die Funktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \text{ für } a < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$





### 3.2.2 Normalverteilung

Viele Experimente in der Natur weisen Zufallsprozesse auf, deren Dichtefunktion nicht gleichverteilt ist. Eine häufig auftretende Verteilung der Zufallszahlen stellt die Normalverteilung, auch Gaußverteilung dar.

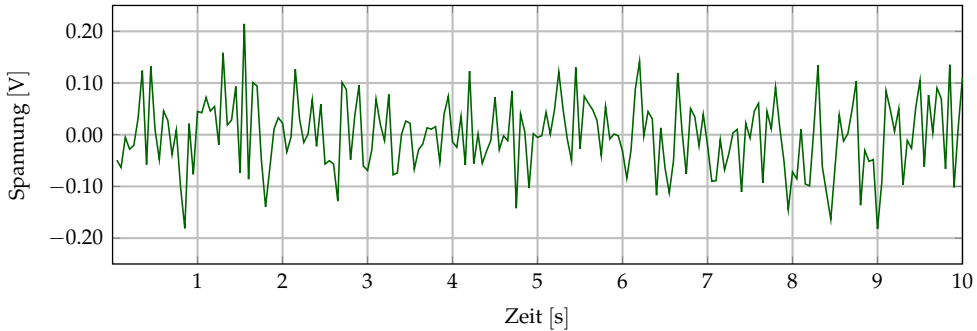


Abb. 3.4: Beispielhafter Verlauf der Spannung an einem Widerstand, bedingt durch thermisches Rauschen

Ein Beispiel hierfür ist z. B. das thermische Rauschen eines Widerstands. Misst man den Spannungsabfall eines Widerstands bei einer Temperatur  $> 0K$ , so ist eine kleine, stark schwankende Spannung messbar.

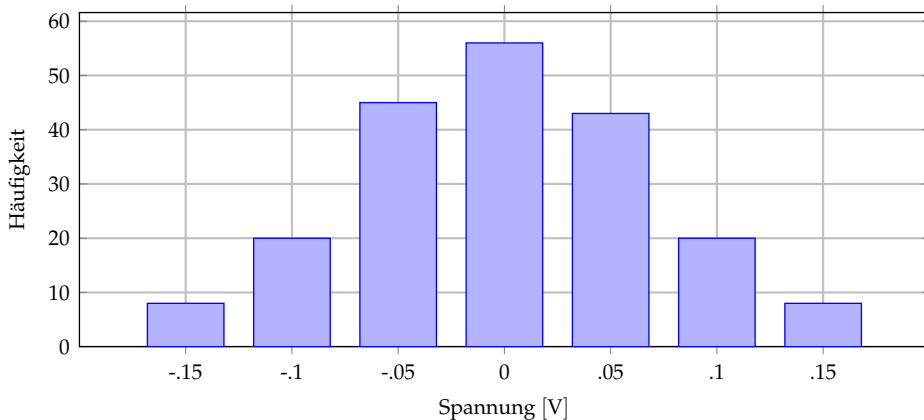


Abb. 3.5: Häufigkeitsverteilung der Spannungswerte

Dies rührt daher, dass jeder Widerstand ein Elektronengas (bedingt durch die thermische Energie) besitzt, aufgrund dessen die Elektronen sich im Leiter bewegen und somit eine Spannung (Rauschspannung) hervorrufen. Die Rauschspannung lässt sich als Zufallszahl interpretieren, deren Werte normalverteilt sind [31]. Abbildung 3.4 zeigt einen solchen beispielhaften Verlauf des Spannungsabfalls an einem Widerstand und Abbildung 3.5 die dazugehörige Häufigkeitsverteilung.

Die Normalverteilung, auch nach Carl Friedrich Gauß benannte Gaußsche Normalverteilung oder Gaußsche Glockenkurve, hat eine große Bedeutung in vielen Bereichen der Natur-, Wirtschafts- und Ingenieurwissenschaften. Ein Grund für die herausstehende Bedeutung der Normalverteilung ist nicht nur, dass viele Zufallsprozesse normalverteilt sind, sondern auch der Gültigkeit des zentralen Grenzwertsatzes in der Wahrscheinlichkeitstheorie. So besagt der zentrale Grenzwertsatz, dass der Mittelwert verschiedener Stichproben mit zunehmenden Umfang der Stichproben einer Gauß-Verteilung folgt [8].

#### **Definition 6.: Dichtefunktion Normalverteilung**

Die Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsvariable ist definiert durch die Funktion:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \quad \sigma > 0$$

$\mu$ : Erwartungswert (Mittelwert)

$\sigma$ : Standardabweichung (Streumaß für die Breite/Abweichung der Verteilung um den Erwartungswert  $\mu$ ).



In dem Intervall zwischen  $-\sigma$  und  $\sigma$  liegen 68,27% aller Zufallszahlen

### 3.2.3 Weitere Verteilungen

In der Natur gibt es neben der Gleichverteilung und Normalverteilung von Zufallszahlen noch viele weitere Verteilungen von Zufallszahlen. Im Folgenden sind weitere für die Modellierung wichtige kontinuierliche Verteilungen in Abbildung 3.6 aufgeführt.

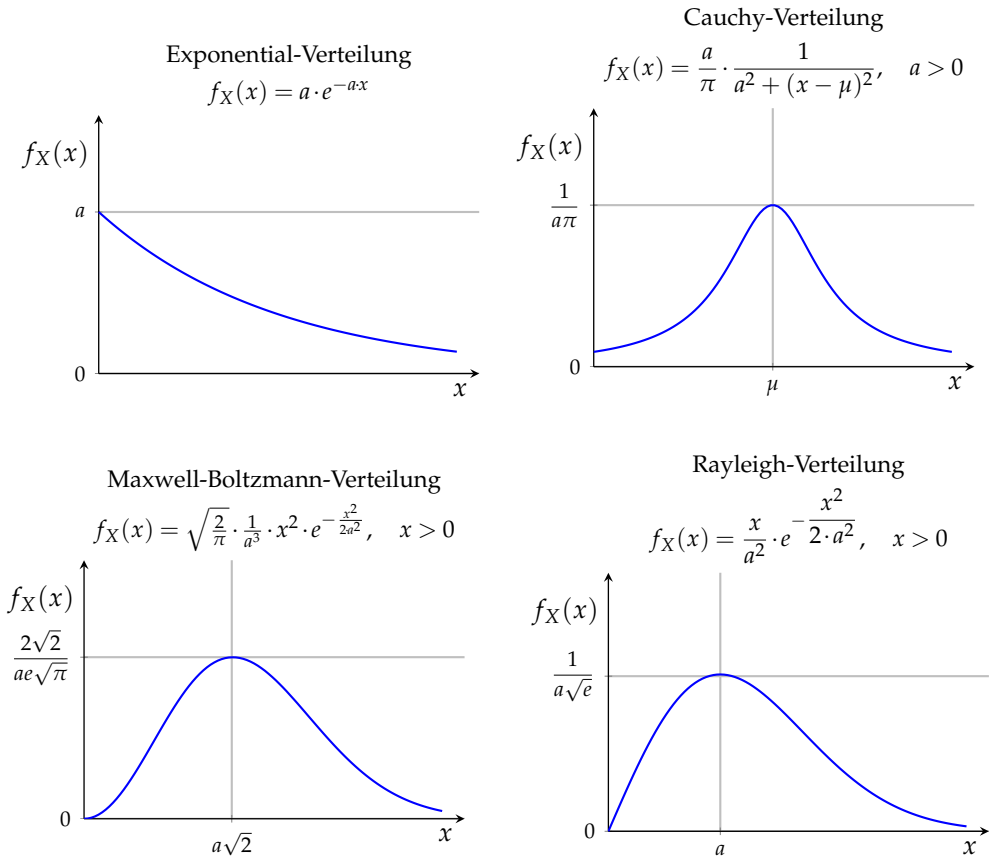


Abb. 3.6: Verlauf weiterer kontinuierlicher Dichtefunktionen

Beobachtet man den Zeitpunkt des Ausfalls gleichartiger elektrischer Bauelemente über die Zeit, so kann die Lebensdauer über eine Exponential-Verteilung angenähert werden. Die Cauchy-Verteilung beschreibt z. B. in der Physik Resonanzkurven oder die Verteilung von optischen Spektrallinien. In idealen Gasen folgt die statische Verteilung der Geschwindigkeit einzelner Gasteilchen der Maxwell-Boltzmann-Verteilung. Bei der Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen treten z. B. durch zufällige Reflexion

und Streuungen Amplitudenschwankungen auf, welche oft einer Rayleigh-Verteilung entspricht.

Neben den kontinuierlichen Verteilungen existieren auch noch zwei wichtige diskrete Verteilungen, die Binominal-Verteilung und die Poisson-Verteilung.

Binominal-Verteilungen treten dann auf, wenn ein Experiment genau zwei Elementarereignisse aufweist. Das eine tritt mit der Wahrscheinlichkeit  $p$ , das andere mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - p$  auf. Als Beispiel lässt sich das Werfen einer Münze, welche mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p = 0.45$  „Kopf“ und mit  $1 - p = 0.55$  „Zahl“ erscheint<sup>1</sup>. Werden nun zwölf Münzen hochgeworfen und werden der Zufallszahl die Anzahl der Münzen mit „Kopf“ zugeordnet, erhält man eine Binomial-Verteilung wie in Abbildung 3.7 (linke Grafik) dargestellt.

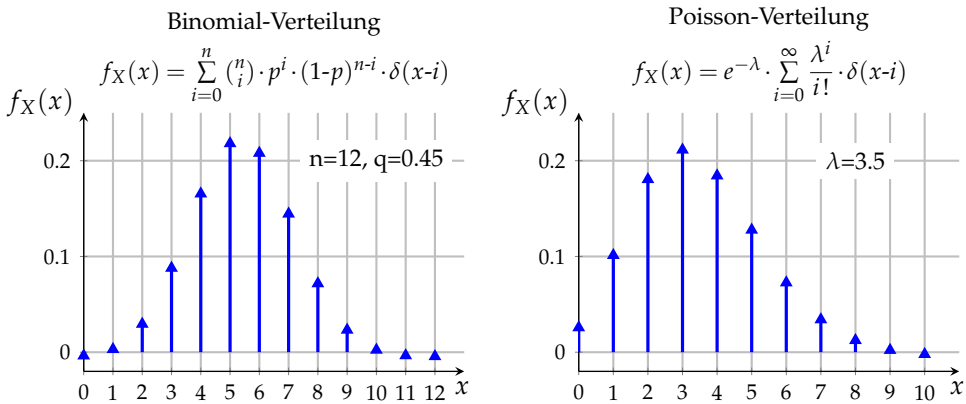


Abb. 3.7: Diskrete Dichtefunktion Binomial- und Poisson-Verteilung

Ein weiteres sehr anschaulicher Versuch zur Verdeutlichung der Binomial-Verteilung ist das Galtonbrett (nach Francis Galton) [8] (siehe Abbildung 3.8). Bei diesem fallen Kugeln auf ein Brett, welches mit in mehreren Reihen Nägel aufweist. Fällt eine Kugel zufällig auf einen Nagel wird diese entweder nach rechts oder links abgelenkt. Am Ende des Bretts befinden sich  $n$ -Auffangbehälter, die die Kugel auffangen. Die in den  $n$ -Behältern aufgefangen Kugel besitzen hierbei eine Binomial-Verteilung. Für einen großen Stichprobenumfang ( $n \rightarrow \infty$ ) strebt die Binominal-Verteilung gegen die Normalverteilung.

<sup>1</sup>Anmerkung: bei einer idealen Münze wäre  $p=0.5$

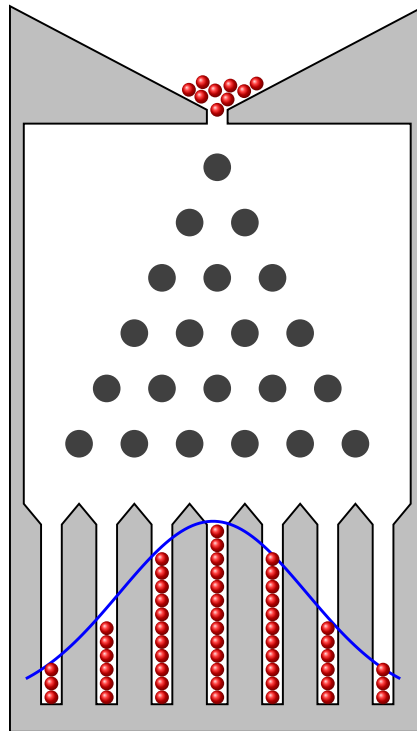


Abb. 3.8: Schematischer Aufbau des Galtonbretts

Werden Ereignisse über eine bestimmte Zeit beobachtet, wird oft die Poisson-Verteilung zur Beschreibung des Auftretens eines Ereignisses verwendet. So werden z. B. viele zufällige Prozesse im Zusammenhang mit Warteschlangen-Problemen und Markov-Ketten durch eine Poisson-Verteilungen modelliert [14].

## 3.3 Momente und zentrale Momente

Wie vorab gezeigt, charakterisieren Häufigkeitsverteilungen Zufallsexperimente. Neben dieser Charakterisierung existieren noch Kennwerte, die jedoch in unvollständiger Weise einen Zufallsprozess beschreiben. Zu diesen Kennwerten zählen die Momente und zentralen Momente eines Zufallsexperiments.

### 3.3.1 Erwartungswert und Mittelwert

Zur Beschreibung von Zufallsprozessen spielen die Momente von Zufallsvariablen eine wichtige Rolle. Sie sind nicht nur in der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik sehr verbreitet, sondern auch in anderen Bereichen wie z. B. in der technischen Mechanik.

Allgemein ist das  $i$ -te Moment definiert durch:

**Definition 7.:  $i$ -tes Moment einer Zufallsvariable  $X$**

Für eine Zufallsvariable  $X$  mit der Dichtefunktion  $f_X(x)$  gilt für das  $i$ -te Moment:

$$\alpha_i = E(X^i) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x^i \cdot f_X(x) dx & \text{falls } X \text{ stetig ist} \\ \sum_{k \in \mathbb{N}} x(k)^i \cdot f_X(x(k)) & \text{falls } X \text{ diskret ist} \end{cases}$$

Das wichtigste Moment stellt das erste Moment dar, welches auch als Erwartungswert  $E(X)$  der Zufallsvariable  $X$  bezeichnet wird.

**Definition 8.: Erwartungswert einer Zufallsvariable  $X$**

Für eine Zufallsvariable  $X$  mit der Dichtefunktion  $f_X(x)$  gilt für den Erwartungswert:

$$\alpha_i = E(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx & \text{falls } X \text{ stetig ist} \\ \sum_{k \in \mathbb{N}} x(k) \cdot f_X(x(k)) & \text{falls } X \text{ diskret ist} \end{cases}$$

Ist  $X$  und  $Y$  eine Zufallsvariable und  $a$  und  $b$  Konstanten, so gelten folgende Rechenregeln:

$$E(a) = a \quad (3.7)$$

$$E(a \cdot X) = a \cdot E(X) \quad (3.8)$$

$$E(a + b \cdot X) = a + b \cdot E(X) \quad (3.9)$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad (3.10)$$

Die Bestimmung des Erwartungswertes einer Zufallszahl ist in der Praxis nicht immer einfach, da die Dichtefunktion  $f_X(x)$  nicht bekannt ist. Oft behilft man sich, indem man den Erwartungswert durch eine Mittelwertbildung annähert. Hierbei wird das Zufallsexperiment  $n$  mal durchgeführt und die Summe der bei jedem Versuch bestimmten einzelnen Werte der Zufallsvariable durch die Anzahl  $n$  geteilt.

**Definition 9.: Mittelwert**

Der Mittelwert einer Zahlenfolge  $x(k)$  berechnet sich durch:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n x(k)$$

**Beispiel 12: Mittelwertbestimmung Würfelexperiment**

Betrachtet man wieder das Beispiel des Werfens eines Würfels und definiert die Zufallszahl  $X$  mit der erzielten Augenzahl eines Würfelergbnisses, so ergibt sich z. B. nach 20-maliger Wiederholung des Experiments folgende Zufallszahlen

$$x = \{2, 3, 5, 3, 4, 1, 6, 2, 3, 4, 5, 2, 4, 6, 5, 1, 1, 3, 3, 3\}$$

Der Mittelwert der Zufallsvariable  $X$  berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{20} \cdot (2+3+5+3+4+1+6+2+3+4+5+2+4+6+5+1+1+3+3+3) \\ &= \frac{66}{20} = 3,3 \end{aligned}$$

Werden die gleichen Würfelergebnisse zusammengefasst, so lässt sich der Mittelwert auch schreiben mit:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{20} \cdot (3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6) = \frac{66}{20} = 3,3 \\ &= \frac{3}{20} \cdot 1 + \frac{3}{20} \cdot 2 + \frac{6}{20} \cdot 3 + \frac{3}{20} \cdot 4 + \frac{3}{20} \cdot 5 + \frac{2}{20} \cdot 6 = \frac{66}{20} = 3,3 \\ &= \sum_{k=1}^L \frac{m(k)}{n} \cdot \omega(k)\end{aligned}$$

└

┘

Allgemein lässt sich der Mittelwert auch berechnen durch die Summe

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^L \frac{m(k)}{n} \cdot \omega(k) = \sum_{k=1}^L h_n(\omega(k)) \cdot \omega(k)$$

$L$	Anzahl der möglichen Elementarereignisse
$m(k)$	Auftreten eines Elementarereignisses
$n$	Anzahl der durchgeführten Versuche
$\omega(k)$	Elementarereignis
$h_n(\omega(k))$	relative Häufigkeit des Auftretens des Elementarereignisses $\omega(k)$

Für  $n \rightarrow \infty$  strebt die relative Häufigkeit gegen die Wahrscheinlichkeit  $P(\omega(k)) = P(X = x(k))$ . Der aus  $n \rightarrow \infty$  berechnete Mittelwert der Zufallszahl  $X$  entspricht dem Erwartungswert  $E(X)$ .

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n x(k)$$

Für das Würfelexperiment erwartet man bei einem idealen Würfel, dass alle Augenzahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit  $P(X = x(k)) = 1/6$  auftreten, somit ist der Erwartungswert:

$$E(X) = \sum_{k=1}^6 \omega(k) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot (1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3,5$$



### 3.3.2 Varianz und Kovarianz

Weitere Kennwerte zur Charakterisierung von Zufallsexperimenten stellen die zentralen Momente eines Zufallsexperiments dar.

**Definition 10.:  $i$ -tes zentrales Moment einer Zufallsvariable  $X$**

Für eine Zufallsvariable  $X$  mit der Dichtefunktion  $f_X(x)$  gilt für das  $i$ -te Moment:

$$\mu_i = E\left((X - E(X))^i\right) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (X - E(X))^i \cdot f_X(x) dx & \text{falls } X \text{ stetig} \\ \sum_{k \in \mathbb{N}} (x(k) - E(X))^i \cdot f_X(x(k)) & \text{falls } X \text{ diskret} \end{cases}$$

Das wichtigste zentrale Moment stellt das zweite zentrale Moment dar, welches auch als Varianz der Zufallsvariable  $X$  bezeichnet wird.

**Definition 11.: Varianz**

Für eine Zufallsvariable  $X$  mit der Dichtefunktion  $f_X(x)$  gilt für die Varianz:

$$\text{Var}(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (X - E(X))^2 \cdot f_X(x) dx & \text{falls } X \text{ stetig} \\ \sum_{k \in \mathbb{N}} (x(k) - E(X))^2 \cdot f_X(x(k)) & \text{falls } X \text{ diskret} \end{cases}$$

Ist die Dichtefunktion  $f_X(x)$  unbekannt, so kann die Varianz mittels einer Stichprobe über die empirische Varianz angenähert werden.

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n (x(k) - E(X))^2 \quad (3.11)$$

Es ist zu beachten, dass im Gegensatz zum Erwartungswert, bei dem mit  $1/n$  gerechnet wird, bei der empirischen Varianz  $1/(n+1)$  verwendet wird.

Die Streuung oder Standardabweichung einer Zufallsvariable  $X$  ist definiert durch:

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Sind  $X$  und  $Y$  Zufallsvariablen und  $a$  und  $b$  Konstanten so gelten folgende Rechenregeln:

$$\text{Var}(a) = 0 \quad (3.12)$$

$$\text{Var}(a + X) = \text{Var}(X) \quad (3.13)$$

$$\text{Var}(a + b \cdot X) = b^2 \cdot \text{Var}(X) \quad (3.14)$$

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \cdot \underbrace{\left( E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \right)}_{\text{Cov}(X,Y)} \quad (3.15)$$

Haben Zufallsexperimente mehrere Zufallsvariablen, entstehen Momente 2. Ordnung. Ist  $X$  und  $Y$  eine Zufallsvariable, so ist  $\text{Cov}(X, Y)$  die Kovarianz der beiden Zufallsvariablen. Diese beschreibt die lineare statistische Abhängigkeit der Zufallsvariable  $X$  von  $Y$ .

**Definition 12.: Kovarianz**

Allgemein ist die Kovarianz zweier Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  definiert zu:

$$\text{Cov}(X, Y) = E\left((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))\right) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

Für stetige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit der zwei-dimensionalen Dichtefunktion  $f_{XY}(x, y)$  gilt:

$$\text{Cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X)) \cdot (y - E(Y)) \cdot f_{XY}(x, y) \, dx \, dy$$

Für die Stichprobe diskreter Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  gilt:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n (x(k) - E(X)) \cdot (y(k) - E(Y)) \\ &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n (x(k) \cdot y(k)) - \frac{n}{n-1} \cdot E(X) \cdot E(Y) \end{aligned}$$

Sind zwei Zufallsvariable  $X$  und  $Y$  unkorreliert, d. h. sie sind linear unabhängig, so ist die Kovarianz der beiden Zufallsvariable  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

Ist  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  eine Zufallsvariable und  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  Konstanten, so gelten für die Kovarianz folgende Rechenregeln:

$$\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X) \quad (3.16)$$

$$\text{Cov}(a + b \cdot X, c + d \cdot Y) = b \cdot d \cdot \text{Cov}(X, Y) \quad (3.17)$$

$$\text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z) \quad (3.18)$$

Zur Charakterisierung wird die Kovarianz mit der den Standardabweichungen auf Werte zwischen -1 und +1 normiert. Diese dimensionslose Größe wird als Korrelationskoeffizient  $r_{XY}$  definiert.

**Definition 13.: Korrelationskoeffizient**

Der Korrelationskoeffizient zweier Zufallsvariable  $X$  und  $Y$  ist definiert zu:

$$r_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}$$

**Beispiel 13: Bestimmung der Kovarianz zweier Sensorsignale**

Zwei Sensoren  $X$  und  $Y$  liefern jeweils zum Zeitpunkt  $k$  die in der Tabelle 3.1 dargestellten Messwerte

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Sensor X	2.6	1.0	3.6	0.5	1.6	1.9	2.9	2.2	0.9	2.8	2.0
Sensor Y	5	2	7	1	4	3	5	3	3	6	5

Tab. 3.1: Messwerte zweier Sensoren

Die Mittelwerte (Erwartungswerte) berechnen sich zu:

$$E(X) = \frac{1}{11} \cdot \sum_{k=1}^{11} x(k) = 2 \qquad E(Y) = \frac{1}{11} \cdot \sum_{k=1}^{11} y(k) = 4$$

und die Varianzen zu:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \frac{1}{10} \cdot \sum_{k=1}^{11} (x(k) - E(X))^2 \\ &= \frac{0.6^2 + 1^2 + 1.6^2 + 1.5^2 + 0.4^2 + 0.1^2 + 0.9^2 + 0.2^2 + 1.1^2 + 0.8^2 + 0^2}{10} \\ &= 0.904\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) &= \frac{1}{10} \cdot \sum_{k=1}^{11} (y(k) - E(Y))^2 \\ &= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2}{10} \\ &= 3.2\end{aligned}$$

Die Kovarianz ist in diesem Beispiel:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \frac{1}{10} \cdot \sum_{k=1}^{11} (x(k) \cdot y(k)) - \frac{11}{10} \cdot E(X) \cdot E(Y) \\ &= \frac{13 + 2 + 25.2 + 0.5 + 6.4 + 5.7 + 14.5 + 6.6 + 2.7 + 16.8 + 10}{10} - \frac{88}{10} \\ &= 1.54\end{aligned}$$

Für den Korrelationskoeffizient folgt:

$$r_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}} = \frac{1.54}{\sqrt{0.904 \cdot 3.2}} \approx 0.9$$

Zur Veranschaulichung werden die beiden Sensorwerte in den folgenden Diagrammen einmal über der Zeit und einmal in einem Streudiagramm dargestellt.

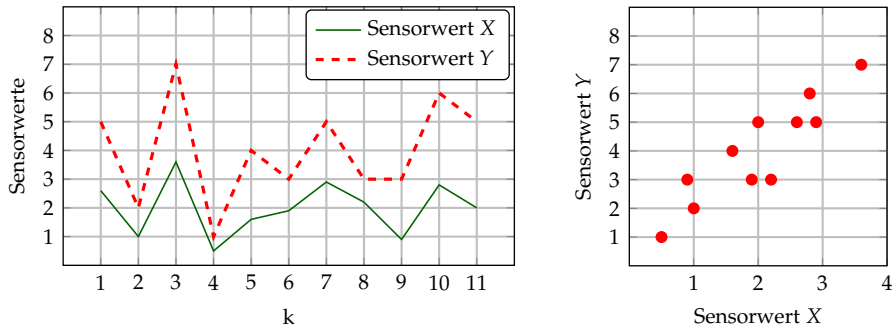


Abb. 3.9: Sensorwert X und Sensorwert Y mit dem Korrelationskoeffizienten  $r_{XY}=0.9$

Der Korrelationskoeffizient von  $r_{XY} = 0.9$  besagt, dass eine starke lineare Abhängigkeit zwischen den beiden Sensorwerten besteht. Dies verdeutlicht auch die rechte Grafik der Abbildung 3.9. Je stärker die Abhängigkeit zweier Größen, desto mehr liegen diese auf einer Geraden.

Bei einem Korrelationskoeffizienten von  $r_{XY} = 0.0$  sind die beiden Werte unkorreliert, es besteht kein linearer Zusammenhang. Bei  $r_{XY} = -1$  verhalten sich die beiden Werte gegenläufig, d. h. wenn der eine Wert größer wird, wird der andere kleiner und umgekehrt (siehe Abb. 3.10).

Zusammenfassend lässt sich für den Korrelationskoeffizienten sagen:

- Der Korrelationskoeffizient  $r_{XY}$  beschreibt die lineare statistische Abhängigkeit der Zufallsvariable X von Y.
- Der Korrelationskoeffizient  $r_{XY}$  kann Werte zwischen  $+1$  und  $-1$  annehmen.
- Bei einem Korrelationskoeffizienten  $r_{XY} = 1$  liegen alle Punkte auf einer Geraden mit positiver Steigung, die Zufallsvariable X von Y sind statistisch linear abhängig.
- Bei einem Korrelationskoeffizienten  $r_{XY} = -1$  liegen alle Punkte auf einer Geraden mit negativer Steigung, die Zufallsvariable X von Y sind „negativ“ statistisch linear abhängig.
- Bei einem Korrelationskoeffizienten  $r_{XY} = 0$  liegen die Punkte auf keiner Geraden, es besteht keine lineare statistische Abhängigkeit der Zufallsvariable X von Y, die beiden Zufallsvariablen sind unkorreliert.

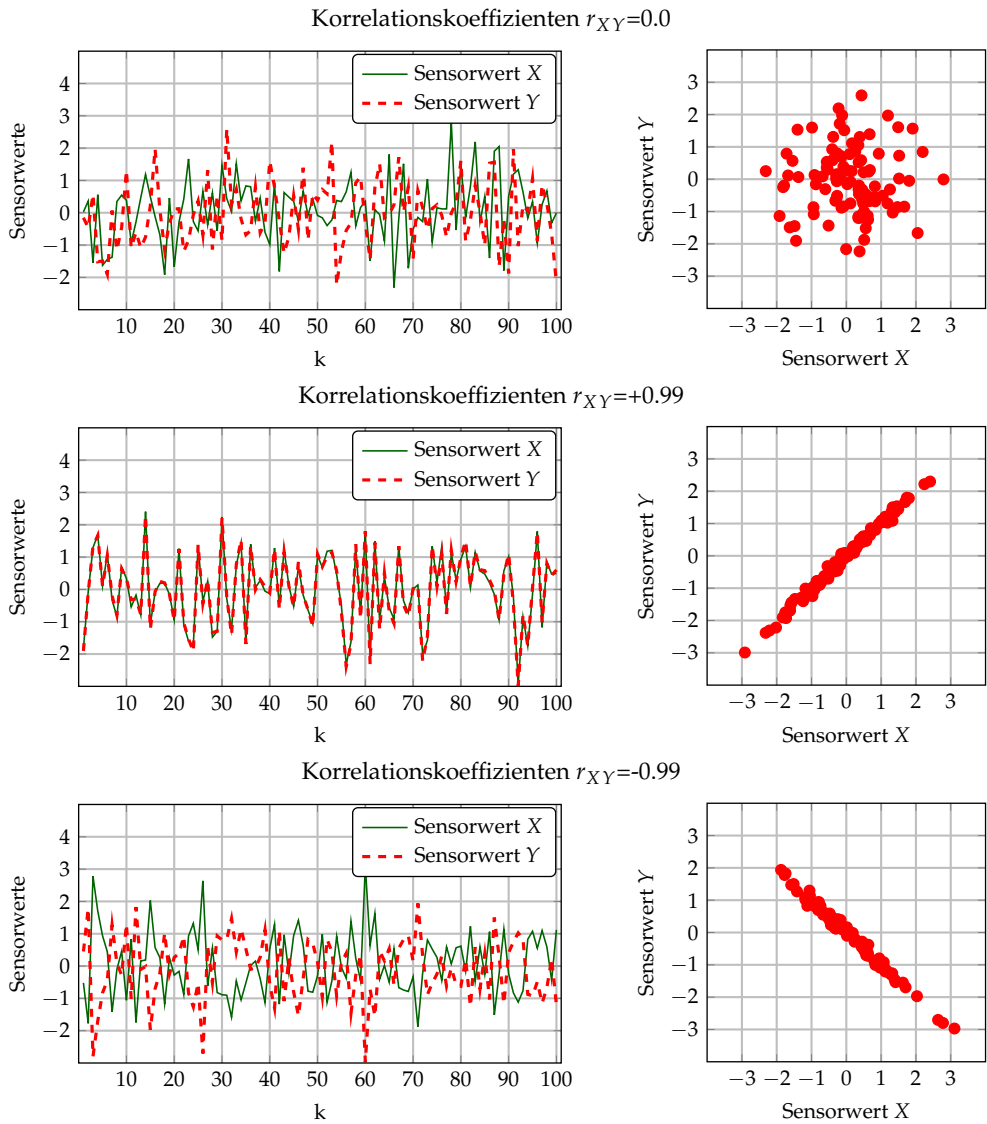


Abb. 3.10: Verschiedene Sensorwerte mit unterschiedlichen Korrelationskoeffizienten

## KAPITEL 4

# SIGNALTHEORIE

In diesem Kapitel werden die aus dem Bereich der Signaltheorie für die Zustandsschätzung mit Kalman-Filter relevanten Teile kurz angerissen. Dieses Kapitel steht in einem engen Zusammenhang mit dem Grundlagenkapitel 3. Es wird deshalb empfohlen, vorab dieses Kapitel zu lesen.

Aufbauend auf das vorige Kapitel 3 werden in diesem Kapitel die Begriffe Stochastischer Prozess, die Autokorrelation und Kreuzkorrelation eingeführt und am Ende noch weitere spezielle Stochastische Prozesse wie das „weiße Rauschen“ beschrieben.

Weiterführende Informationen zu dem Themenbereich der Signaltheorie findet man in der einschlägigen Literatur z. B. in A. Mertins „Signaltheorie“ [17], in D. Wolf „Signaltheorie: Modelle und Strukturen“ [30] oder in R. G. Brown und P. Y. C. Hwang „Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering“ [5].

## 4.1 Stochastischer Prozess

Wird ein Zufallsexperiment parallel  $k$ -mal durchgeführt und jedes der  $k$ -Experimente zeitlich wiederholt, so lässt sich der Ausgang aller  $k$ -Experimente einer Zufallsvariable zuordnen. Die Zufallsvariable geht über in einen Zufallsvektor  $\underline{X}(t)$ , der von der Zeit abhängt.

$$\underline{X}(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_k(t) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Man spricht in diesem Zusammenhang von einem stochastischen Prozess. Diese werden durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (Dichtefunktion)  $f_X(\underline{x}(t))$  beschrieben.

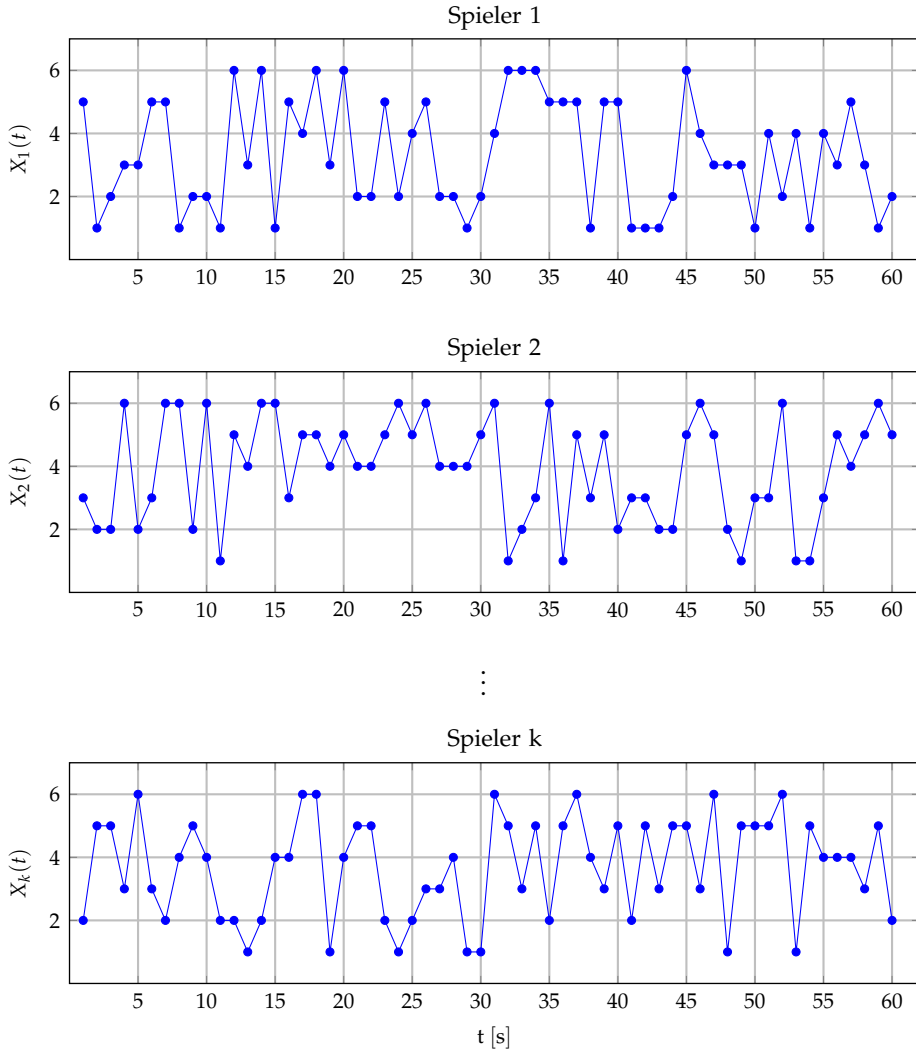


Abb. 4.1: Stochastischer Prozess: Würfelexperiment bestehend aus  $k$ -Würfelspieler

Als Beispiel kann man sich z. B. einen Prozess vorstellen, bei dem  $k$ -Spieler (Schar von Spielern) jede Sekunde mit  $k$ -Würfeln gleichzeitig würfeln. Somit erhält man zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t_1$   $k$ -Zufallszahlen, die in dem Vektor  $\underline{x}(t_1)$  zugeordnet werden (siehe Abbildung 4.1).



Ein anderes Beispiel für einen stochastischen Prozess ist der Verlauf der Spannung an  $k$ -Widerständen, bedingt durch thermisches Rauschen (siehe Abbildung 3.4).

In der Natur gibt es Prozesse, bei denen die Dichtefunktion  $f_X(\underline{x}(t))$  nicht von der augenblicklichen Zeit abhängt. Folglich haben die beiden Vektoren bei  $\underline{x}(t)$  und  $\underline{x}(t + t_0)$  für jedes  $t_0$  dieselben statistischen Eigenschaften. Bei solchen stochastischen Prozessen ist:

$$f_X(\underline{x}(t)) = f_X(\underline{x}(t + t_0)) = f_X(\underline{x}) \quad (4.2)$$

Solche stochastische Prozesse werden als stationär bezeichnet.

Der Erwartungswert für diesen speziellen Prozess ist:

$$E(\underline{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{x} \cdot f_X(\underline{x}) d\underline{x} = const. \quad (4.3)$$

Darüber hinaus gibt es stochastische Prozesse, bei denen der Scharmittelwert des Prozesses zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  mit dem Zeitmittelwert jedes Einzelexperimentes übereinstimmt. Solche Prozesse werden als ergodisch bezeichnet. Dies hat in der Praxis eine große Bedeutung, da hierdurch die statistischen Momente anhand der zeitlichen Wiederholung eines einzelnen Zufallsexperiments bestimmt werden können. [27]

Ein Beispiel für einen solchen ergodischen stochastischen Prozess ist das Würfeln mit  $k$ -Spielern. Es ist anzunehmen, dass es bei idealen Würfeln keine Rolle spielt, ob man mit  $k$ -Würfeln gleichzeitig würfelt oder mit einem einzelnen Würfel  $k$ -mal würfelt. Man erwartet in beiden Fällen die selben statistischen Momente.

## 4.2 Autokorrelation und Kreuzkorrelation

Ein stochastischer Prozess liefert zu jedem Zeitpunkt  $t$  einen Vektor mit Zufallszahlen  $\underline{x}(t)$ . Betrachtet man zum Zeitpunkt  $t_1$  und  $t_2$  die Zufallsvariablen  $\underline{X}(t_1)$  und  $\underline{X}(t_2)$ , so lässt sich der Erwartungswert des Produkts der beiden Zufallsvektoren bestimmen. Dieses spezielle Moment wird als Autokorrelationsfunktion (AKF) bezeichnet.

### Definition 14.: Autokorrelationsfunktion

Die Autokorrelationsfunktion eines stochastischen Prozesses, beschrieben durch die Dichtefunktion  $f_X(\underline{X}(t))$  und des Zufallsvektors  $\underline{X}(t)$ , ist definiert durch:

$$\gamma_{\underline{X}\underline{X}}(t_1, t_2) = E(\underline{X}(t_1) \cdot \underline{X}(t_2)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{x}(t_1) \cdot \underline{x}(t_2) \cdot f_X(\underline{x}(t)) d\underline{x}(t_1) d\underline{x}(t_2)$$

Für stationäre stochastische Prozesse hängt die Autokorrelationsfunktion nur von der Zeitdifferenz  $\tau$  ab. Somit folgt für  $t_2 = t + \tau$ :

$$\gamma_{\underline{X}\underline{X}}(\tau) = E(\underline{X}(t) \cdot \underline{X}(t + \tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{x}(t) \cdot \underline{x}(t + \tau) \cdot f_X(\underline{x}) d\underline{x}(t) d\underline{x}(t + \tau)$$

Für ergodische, stationäre stochastische Prozesse berechnet sich die Autokorrelationsfunktion zu:

$$\gamma_{\underline{X}\underline{X}}(\tau) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \cdot \int_{-0.5 \cdot \Delta T}^{0.5 \cdot \Delta T} x(t) \cdot x(t + \tau) dt$$

Die normierte Autokorrelationsfunktion (Autokorrelationskoeffizienten) für stationäre stochastische Prozesse berechnet sich zu:

$$\gamma_{\underline{X}\underline{X}}^*(\tau) = \frac{\gamma_{\underline{X}\underline{X}}(\tau)}{\gamma_{\underline{X}\underline{X}}(0)}$$

Der Betrag dieser Autokorrelationskoeffizienten nimmt nur Werte zwischen 0 und 1 an.

Bei einem ergodischen, streng stationären stochastischen Prozess wird für  $\tau = 0$  das Originalsignal mit einem um  $\tau = 0$  verschobenen Signal verglichen. Diese beiden sind genau identisch, folglich besitzt die Autokorrelationsfunktion bei  $\tau = 0$  das Maximum.

**Definition 15.: Diskrete Autokorrelationsfunktion**

Die Autokorrelationsfunktion eines diskreten ergodischen, stationären stochastischen Prozesses berechnet sich zu:

$$\gamma_{XX}(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-k-1} x(n) \cdot x(n+k) & k \geq 0 \\ \gamma_{XX}(-k) & k < 0 \end{cases}$$

**Beispiel 14: Autokorrelation zweier Sensorwerte**

Zur Verdeutlichung ist im Folgenden die normierte Autokorrelationsfunktion zweier diskreter ergodischen, stationären stochastischer Prozesse  $X(k)$  und  $Y(k)$  abgebildet.

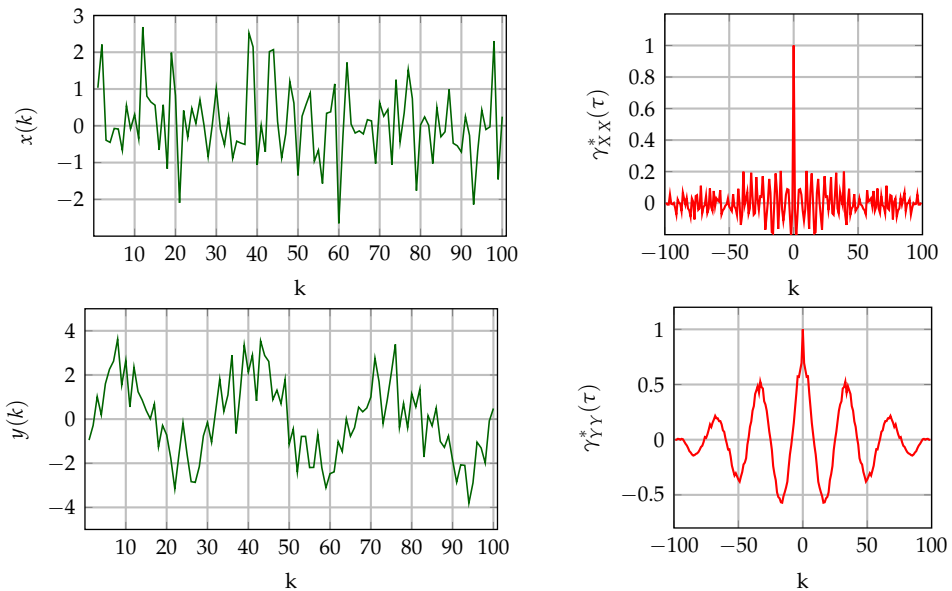


Abb. 4.2: Normierte Autokorrelationsfunktion zweier stochastischer Prozesse

Betrachtet man zwei stochastische Prozesse  $\underline{X}(t)$  und  $\underline{Y}(t)$ , so lässt sich wieder der Erwartungswert aus dem Produkt der beiden Zufallsvektoren bestimmen. Dieses Moment wird als Kreuzkorrelationsfunktion bezeichnet.

**Definition 16.: Kreuzkorrelationsfunktion**

Die Kreuzkorrelationsfunktion eines stochastischen Prozesses, beschrieben durch die Dichtefunktion  $f_{XY}(\underline{x}(t), \underline{y}(t))$  und die beiden Zufallsvektoren  $\underline{X}(t), \underline{Y}(t)$ , ist definiert durch:

$$\gamma_{\underline{X}\underline{Y}}(t_1, t_2) = E(\underline{X}(t_1) \cdot \underline{Y}(t_2)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{x}(t_1) \cdot \underline{y}(t_2) \cdot f_{XY}(\underline{x}(t), \underline{y}(t)) d\underline{x}(t_1) d\underline{y}(t_2)$$

Für stationäre stochastische Prozesse hängt die Kreuzkorrelationsfunktion nur von der Zeitdifferenz  $\tau$  ab. Somit folgt für  $t_2 = t + \tau$ :

$$\gamma_{\underline{X}\underline{Y}}(\tau) = E(\underline{X}(t) \cdot \underline{Y}(t + \tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{x}(t) \cdot \underline{y}(t + \tau) \cdot f_{XY}(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{x}(t) d\underline{y}(t + \tau)$$

Für ergodische, streng stationäre stochastische Prozesse berechnet sich die Kreuzkorrelationsfunktion zu:

$$\gamma_{XY}(\tau) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \cdot \int_{-0.5 \cdot \Delta T}^{0.5 \cdot \Delta T} x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

Für stationäre stochastische Prozesse ist die normierte Kreuzkorrelationsfunktion definiert mit:

$$\gamma_{\underline{X}\underline{Y}}^*(\tau) = \frac{\gamma_{\underline{X}\underline{Y}}(\tau)}{\sqrt{\gamma_{\underline{X}\underline{X}}(0) \cdot \gamma_{\underline{Y}\underline{Y}}(0)}}$$

Für  $\tau = 0$  folgt für stationäre stochastische Prozesse:

$$\gamma_{\underline{X}\underline{Y}}(0) = E(\underline{X}(t) \cdot \underline{Y}(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{x}(t) \cdot \underline{y}(t) \cdot f_{XY}(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{x}(t) d\underline{y}(t)$$

Somit entspricht die Kreuzkorrelation zweier Zufallsvektoren mit dem Erwartungswert  $E(\underline{X}(t)) = 0$  und  $E(\underline{Y}(t)) = 0$  der Kovarianz dieser beiden Zufallsvektoren  $\underline{X}(t)$  und  $\underline{Y}(t)$ .

Mit anderen Worten berechnet die Kreuzkorrelation die Kovarianz zweier Zufallsvektoren für  $\tau = 0$ . Für Werte  $\tau > 0$  wird ein Zufallsvektor um  $t = \tau$  verschoben und daraus die Kovarianz bestimmt. Somit lässt sich die Kreuzkorrelation (analog der Kovarianz) als ein  $t = \tau$  abhängiges Ähnlichkeitsmaß interpretieren.

**Definition 17.: Diskrete Kreuzkorrelationsfunktion**

Die Kreuzkorrelationsfunktion eines diskreten ergodischen, stationären stochastischen Prozesses berechnet sich zu:

$$\gamma_{XY}(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-k-1} x(n) \cdot y(n+k) & k \geq 0 \\ \gamma_{XY}(-k) & k < 0 \end{cases}$$

**Beispiel 15: Kreuzkorrelationsfunktion zweier Sensorwerte**

Erfasst man die Werte zweier Sensoren, so können diese als zwei diskrete stationäre, ergodische, stochastische Prozesse  $X(k)$  und  $Y(k)$  interpretiert werden. Aus diesen beiden Signalen lässt sich dann die normierte Kreuzkorrelationsfunktion berechnen (siehe Abbildung 4.3).

Bei  $\gamma_{XY}^*(0)$  lässt sich die Ähnlichkeit der beiden Signale ablesen.

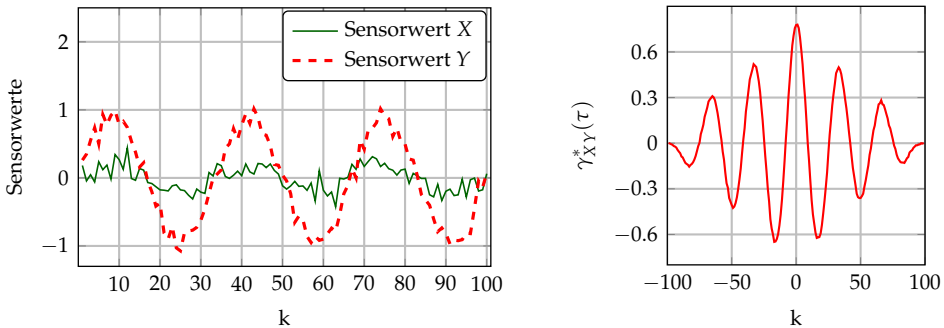


Abb. 4.3: Normierte Kreuzkorrelationsfunktion zweier stochastischer Prozesse

## 4.3 Spezielle Stochastische Prozesse

**I**m Zusammenhang von Kalman-Filtern fallen immer wieder zwei wichtige Stochastische Prozesse: der Prozess mit „Weißem Rauschen“ und der „Gauß-Markov-Prozess“. Diese werden im Folgenden kurz vorgestellt.

### 4.3.1 Weißes Rauschen

**B**ei weißem Rauschen handelt es sich um einen stationären stochastischen Prozess, dessen Autokorrelationsfunktion eine Dirac-Funktion ist (Abb. 4.4 links).

$$\gamma_{\underline{X}\underline{X}}(\tau) = A \cdot \delta(\tau) \quad (4.4)$$

„Rauschen“ wird oft in der Signaltheorie für ein Signal/Störgröße benutzt, welches durch einen stochastischen Prozess beschrieben wird. Der Begriff „weiß“ hat seinen Namen aus der Optik. Die Dirac-Funktion ist im Frequenzbereich eine Konstante und besitzt somit alle Frequenzen, genau wie „weißes“ Licht alle Farbfrequenzen enthält.

Für die Fouriertransformierte  $\Gamma_{\underline{X}\underline{X}}(j \cdot \omega)$  für weißes Rauschen gilt (Abb. 4.4 rechts):

$$\Gamma_{\underline{X}\underline{X}}(j \cdot \omega) = \mathcal{F}(\gamma_{\underline{X}\underline{X}}(\tau)) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\underline{X}\underline{X}}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = A \quad (4.5)$$

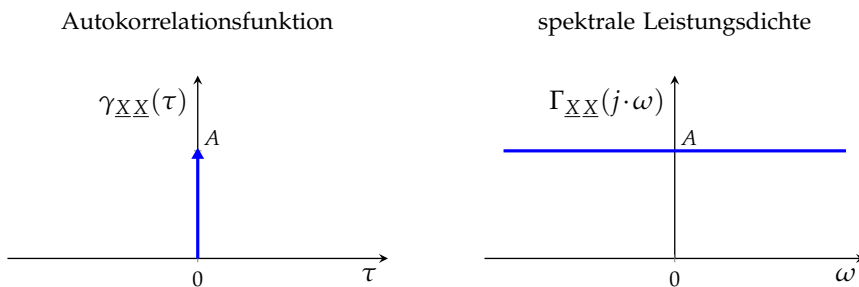


Abb. 4.4: Weißes Rauschen

Unendlich hohe Frequenzen lassen sich natürlich nicht in der Praxis realisieren. Weißes Rauschen wird trotzdem zur Modellierung stochastischer Prozesse verwendet, da im interessierten Frequenzbereich die Eigenschaft von weißem Rauschen vorliegen.

Weißes Rauschen bezieht sich auf die Art, wie sich das Signal über die Zeit verhält. Es sagt nichts über die Art der Verteilung / Dichtefunktion  $f_X(\underline{x}(t))$  aus. Deshalb muss ein normalverteiltes Rauschen nicht automatisch ein weißes Rauschen sein.

### 4.3.2 Gauß-Markov-Prozess

Ein stationärer Gauß-Markov-Prozess mit der Varianz  $\text{Var}(\underline{X}) = \mathbb{E}(\underline{X}(t) \cdot \underline{X}(t)^T) = \sigma^2$  besitzt eine exponentiell abklingende Autokorrelationsfunktion (Abb. 4.5 links)

$$\gamma_{\underline{X}\underline{X}}(\tau) = \sigma^2 \cdot e^{-\beta \cdot |\tau|} \quad (4.6)$$

Dies bedeutet, sämtliche statistischen Informationen der Vergangenheit haben Auswirkung auf die Gegenwart. Jedoch exponentiell abnehmend, also die Auswirkung wird immer kleiner.

Für die Fouriertransformierte  $\Gamma_{\underline{X}\underline{X}}(j \cdot \omega)$  gilt (Abb. 4.5 rechts):

$$\Gamma_{\underline{X}\underline{X}}(j \cdot \omega) = \mathcal{F}(\gamma_{\underline{X}\underline{X}}(\tau)) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\underline{X}\underline{X}}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{2 \cdot \sigma^2 \cdot \beta}{\omega^2 + \beta^2} \quad (4.7)$$

Somit hat die Fouriertransformierte den selben Verlauf wie die Cauchy-Verteilung.

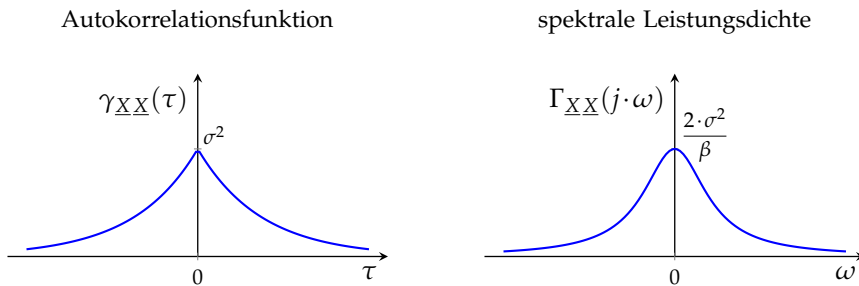


Abb. 4.5: Gauß-Markov-Prozess

---

# Kalman-Filter

---



## KAPITEL 5

# KLASSISCHER KALMAN-FILTER

Damit Kalman-Filter korrekt eingesetzt werden können, ist es wichtig, die Randbedingungen zu kennen, unter der die Kalman-Gleichungen verwendet werden dürfen. Dies bedeutet, dass die jeweilig zu lösende Aufgabe dahingehend zu überprüfen ist. Sind diese Voraussetzungen nicht gegeben, liefern die Kalman-Gleichungen nicht das gewünschte Ergebnis. Hierzu werden in diesem Kapitel die Grundgleichungen der Kalman-Filter hergeleitet und an den jeweiligen Stellen darauf hingewiesen, welche Voraussetzungen gelten.

Zu Beginn wird die Struktur eines klassischen Kalman-Filters beschrieben, welches auf die Zustandsraumbeschreibung eines realen Systems inkl. Mess- und Systemrauschen aufbaut (siehe hierzu Kap. 2.5). Im Anschluss daran werden die Grundgleichungen, aufgeteilt in Prädiktion und Korrektur, hergeleitet. Am Ende wird doch eine alternative Berechnung der Kalman-Verstärkung vorgestellt. Diese stellt im Speziellen für das adaptive Kalman-Filter (ROSE-Filter) eine wichtige Grundgleichung dar.

## 5.1 Struktur Kalman-Filter

Nach der Publikation des Kalman-Filters durch R. E. Kalman [11] wurden seither viele weitere Unterarten des ursprünglichen Kalman-Filters entwickelt. In Anlehnung an das R. E. Kalman entwickelte Filter ist in Abbildung 5.1 eine solche Struktur zur Schätzung des Zustandsvektors  $\underline{x}(k)$  eines physikalischen Systems dargestellt.

Das in dieser Struktur verwendete lineare Modell schätzt die Ausgangsgröße  $\hat{y}(k)$  ab und vergleicht diese mit der gemessenen Ausgangsgröße  $\underline{y}(k)$  des physikalischen Systems. Die Differenz  $\Delta \underline{y}(k)$  dieser beiden Größen wird mit der Kalman-Verstärkung  $\underline{K}(k)$

gewichtet und zur Korrektur des geschätzten Zustandsvektors  $\hat{\underline{x}}(k)$  verwendet. Dieser korrigierte Zustandsvektor ist mit  $\tilde{\underline{x}}(k)$  bezeichnet.

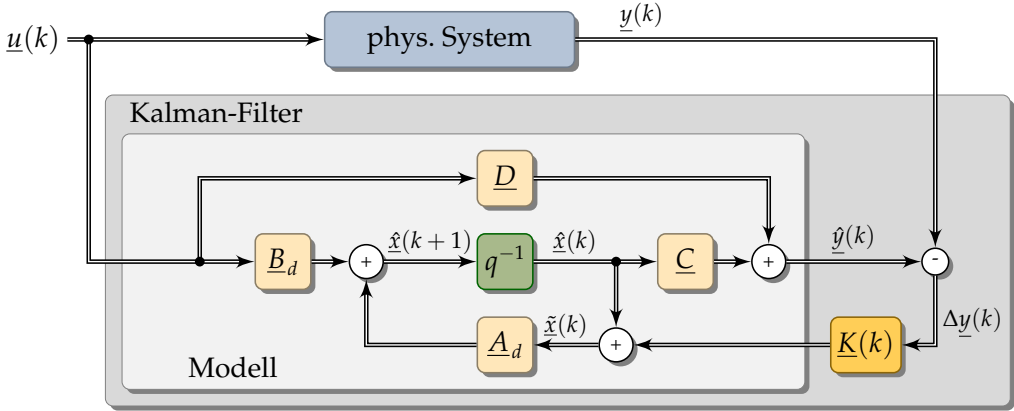


Abb. 5.1: Struktur des Kalman-Filters

Aus dieser Struktur heraus hat Rudolf E. Kalman folgende fünf Grundgleichungen (zwei für die Prädiktion und drei für die Korrektur) des Kalman-Filters abgeleitet.

Prädiktion:

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{x}}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) \quad (5.1)$$

$$\underline{\hat{P}}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{\hat{P}}(k) \cdot \underline{A}_d^T + \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T \quad \text{mit } \underline{Q}(k) = \text{Var}(\underline{z}(k)) \quad (5.2)$$

Korrektur:

$$\underline{K}(k) = \underline{\hat{P}}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot (\underline{C} \cdot \underline{\hat{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k))^{-1} \quad \text{mit } \underline{R}(k) = \text{Var}(\underline{v}(k)) \quad (5.3)$$

$$\tilde{\underline{x}}(k) = \hat{\underline{x}}(k) + \underline{K}(k) \cdot (\underline{y}(k) - \underline{C} \cdot \hat{\underline{x}}(k) - \underline{D} \cdot \underline{u}(k)) \quad (5.4)$$

$$\underline{\tilde{P}}(k) = (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \underline{\hat{P}}(k) \quad (5.5)$$

Die Gleichungen (5.1) und (5.4) können direkt aus der Abbildung 5.1 entnommen werden. Die Herleitung der Gleichungen (5.2), (5.3) und (5.5) ist für den interessierten Leser im nachfolgenden Kapitel beschrieben.

Wichtig ist anzumerken, dass diese Gleichungen nur unter den folgenden Randbedingungen gelten:

- Der Schätzfehler  $\underline{\hat{\varepsilon}}(k)$  und das Systemrauschen  $\underline{z}(k)$  sind unkorreliert, somit gilt  $\text{Cov}(\underline{\hat{\varepsilon}}(k), \underline{z}(k)) = \underline{0}$
- Der Schätzfehler  $\underline{\hat{\varepsilon}}(k)$  und das Messrauschen  $\underline{v}(k)$  sind unkorreliert, folglich ist die Kovarianz der beiden Größen  $\text{Cov}(\underline{\hat{\varepsilon}}(k), \underline{v}(k)) = \underline{0}$
- Die Rauschgröße  $\underline{v}(k)$  und der Schätzfehler  $\underline{\hat{\varepsilon}}(k)$  sind mittelwertfrei und somit ist der Erwartungswert  $E\{\underline{v}(k)\} = \underline{0}$  und  $E\{\underline{\hat{\varepsilon}}(k)\} = \underline{0}$

## 5.2 Herleitung Kalman-Filter-Gleichungen

Ausgangsbasis zur Herleitung der Kalman-Filter-Gleichungen ist zum einen die Struktur des klassischen Kalman-Filters aus der Abbildung 5.1 und zum anderen die Beschreibung eines verrauschten physikalischen Systems (siehe Abbildung 2.7). Mithilfe dieser beiden Beschreibungen lassen sich die Kalman-Filter-Gleichungen herleiten.

Wie beschrieben lassen sich die Gleichungen (5.1) und (5.4) direkt aus der Abbildung 5.1 ableiten. Die weiteren Gleichungen für die Prädiktion und die Korrektur der Größen, sowie eine alternative Berechnung der Kalman-Verstärkung, werden in den nachfolgenden Ausführungen hergeleitet.

### 5.2.1 Prädiktion

Im Folgenden wird die Prädiktion der Kovarianz des Schätzfehlers Gleichung (5.2) hergeleitet.

Aus der Struktur aus Abbildung 5.1 folgt:

$$\underline{\hat{x}}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{\hat{x}}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) \quad (5.6)$$

$$\underline{\tilde{x}}(k) = \underline{\hat{x}}(k) + \underline{K}(k) \cdot (\underline{y}(k) - \underline{C} \cdot \underline{\hat{x}}(k) - \underline{D} \cdot \underline{u}(k)) \quad (5.7)$$

Der Schätzfehler  $\hat{\underline{\epsilon}}(k+1)$  zum Zeitpunkt  $k+1$  ist definiert als die Differenz zwischen dem wahren Zustandsvektor  $\underline{x}(k+1)$  und dem geschätzten Zustandsvektor  $\hat{\underline{x}}(k+1)$ .

$$\hat{\underline{\epsilon}}(k+1) = \underline{x}(k+1) - \hat{\underline{x}}(k+1) \quad (5.8)$$

Unter Verwendung der Gleichungen (2.37) und (5.6) folgt:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\epsilon}}(k+1) &= \underline{A}_d \cdot \underline{x}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) + \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k) - \underline{A}_d \cdot \hat{\underline{x}}(k) - \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) \\ &= \underline{A}_d \cdot (\underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k)) + \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k) \\ &= \underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{\epsilon}}(k) + \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k) \end{aligned} \quad (5.9)$$

mit

$$\tilde{\underline{\epsilon}}(k) = \underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k) \quad (5.10)$$

Bildet man die Kovarianz des Schätzfehlers  $\hat{\underline{\epsilon}}(k+1)$  mithilfe der Gleichungen (5.9), folgt mit Gleichung (B.6), Gleichung (B.7), Gleichung (B.9) und der Annahme, dass der Schätzfehler  $\tilde{\underline{\epsilon}}(k)$  und das Systemrauschen  $\underline{z}(k)$  unkorreliert sind, d. h.  $\text{Cov}(\tilde{\underline{\epsilon}}(k), \underline{z}(k)) = \underline{0}$ , so berechnet sich dieser zu:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{P}}(k+1) &= \text{Cov}(\hat{\underline{\epsilon}}(k+1), \hat{\underline{\epsilon}}(k+1)) \\ &= \text{Var}(\hat{\underline{\epsilon}}(k+1)) \\ &= \text{Var}(\underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{\epsilon}}(k) + \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k)) \\ &= \text{Var}(\underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{\epsilon}}(k)) + \text{Var}(\underline{G}_d \cdot \underline{z}(k)) + 2 \cdot \underbrace{\text{Cov}(\underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{\epsilon}}(k), \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k))}_{=0} \\ &= \underline{A}_d \cdot \text{Var}(\tilde{\underline{\epsilon}}(k)) \cdot \underline{A}_d^T + \underline{G}_d \cdot \text{Var}(\underline{z}(k)) \cdot \underline{G}_d^T \end{aligned}$$

$\hat{\underline{P}}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{A}_d^T + \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T \quad \text{mit} \quad \underline{Q}(k) = \text{Var}(\underline{z}(k))$
---

## 5.2.2 Korrektur

Die letzten beiden noch fehlenden Formeln Gleichung (5.3) und Gleichung (5.5) des Kalman-Filters lassen sich durch die folgenden Rechenschritte herleiten.

Der Schätzfehler  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$  zum Zeitpunkt  $k$ , beschrieben durch die Gleichung (5.10), lässt sich mithilfe der beiden Gleichungen (1.17) und (5.7) ausdrücken.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{x}}(k) &= \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k) \\
 &= \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{K}(k) \cdot (\mathbf{y}(k) - \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(k)) \\
 &= \mathbf{x}(k) - (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{y}(k) + \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(k) \\
 &= \mathbf{x}(k) - (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(k) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(k) \\
 &\quad - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{v}(k) + \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(k) \\
 &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{x}(k) - (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{v}(k) \\
 &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{v}(k) \\
 &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \tilde{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{v}(k)
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Die Kovarianz  $\tilde{\mathbf{P}}(k)$  des Schätzfehlers  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$  lässt sich auch mithilfe der Gleichung (B.6) darstellen. Unter der Annahme, dass die  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  und  $\mathbf{v}(k)$  unkorreliert ist und unter Verwendung von Gleichung (B.7) folgt:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{P}}(k) &= \text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}(k), \tilde{\mathbf{x}}(k)) = \text{Var}(\tilde{\mathbf{x}}(k)) \\
 &= \text{Var}\left((\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \tilde{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{v}(k)\right) \\
 &= \text{Var}\left((\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \tilde{\mathbf{x}}(k)\right) + \text{Var}(-\mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{v}(k)) + \\
 &\quad \underbrace{2 \cdot \text{Cov}\left((\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \tilde{\mathbf{x}}(k), (-\mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{v}(k))^T\right)}_{=0, \text{ da } \tilde{\mathbf{x}}(k) \text{ und } \mathbf{v}(k) \text{ unkorreliert}} \\
 &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \underbrace{\text{Var}(\tilde{\mathbf{x}}(k))}_{\hat{\mathbf{P}}(k)} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C})^T + \mathbf{K}(k) \cdot \underbrace{\text{Var}(\mathbf{v}(k))}_{\mathbf{R}(k)} \cdot \mathbf{K}(k)^T \\
 &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \hat{\mathbf{P}}(k) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C})^T + \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{R}(k) \cdot \mathbf{K}(k)^T
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

mit

$$\mathbf{R}(k) = \text{Var}(\mathbf{v}(k)) \tag{5.13}$$

Die Gleichung (5.12) wird in der Literatur auch als "Joseph Formel" bezeichnet, hergeleitet von P. D. Joseph [9]. Diese Formel stellt bei der Herleitung des Kalman-Filters eine

Basisgleichung dar, mit der sich die Matrix  $\underline{K}(k)$  sowie die Korrektur der Kovarianz des Schätzfehlers bestimmen lassen.

Zur Bestimmung der Kalman-Verstärkung  $\underline{K}(k)$  muss die Gleichung (5.12) weiter umgeformt werden.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\underline{P}}(k) &= (\hat{\underline{P}}(k) - \underline{K}(k) \cdot \underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k)) \cdot (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C})^T + \underline{K}(k) \cdot \underline{R}(k) \cdot \underline{K}(k)^T \\
 &= (\hat{\underline{P}}(k) - \underline{K}(k) \cdot \underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k)) \cdot (\underline{I} - \underline{C}^T \cdot \underline{K}(k)^T) + \underline{K}(k) \cdot \underline{R}(k) \cdot \underline{K}(k)^T \\
 &= \hat{\underline{P}}(k) - \underline{K}(k) \cdot \underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k) - \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot \underline{K}(k)^T + \underline{K}(k) \cdot \underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot \underline{K}(k)^T \\
 &\quad + \underline{K}(k) \cdot \underline{R}(k) \cdot \underline{K}(k)^T
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Um aus statistischer Sicht eine bestmögliche Schätzung für den Zustandsvektor  $\tilde{\underline{x}}$  zu bekommen, ist die Aufgabe ein geeignetes  $\underline{K}(k)$  zu finden, bei dem die Kovarianz des Schätzfehlers  $\tilde{\underline{P}}(k)$  minimal wird. Dieses Optimum lässt sich mit der Ableitung  $\frac{\partial \text{Tr}(\tilde{\underline{P}}(k))}{\partial \underline{K}} = \underline{0}$  bestimmen. Unter Verwendung der Gleichungen (B.2), (B.10), (B.11), (B.12) und unter Berücksichtigung der Symmetrie der Matrix  $\hat{\underline{P}}(k)$  ist  $\hat{\underline{P}}(k) = \hat{\underline{P}}(k)^T$  folgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \text{Tr}(\tilde{\underline{P}}(k))}{\partial \underline{K}} &= -\hat{\underline{P}}(k)^T \cdot \underline{C}^T - \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + 2 \cdot \underline{K}(k) \cdot \underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + 2 \cdot \underline{K}(k) \cdot \underline{R}(k) \\
 \underline{0} &= -2 \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + 2 \cdot \underline{K}(k) \cdot \underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + 2 \cdot \underline{K}(k) \cdot \underline{R}(k) \\
 \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T &= \underline{K}(k) \cdot (\underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k))
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\underline{K}(k) = \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot (\underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k))^{-1}$$

Um zu beweisen, dass es sich hier um ein Minimum handelt, muss für die zweite Ableitung  $\frac{\partial^2 \text{Tr}(\tilde{\underline{P}}(k))}{\partial^2 \underline{K}}$  positiv definit<sup>1</sup> sein.

$$\frac{\partial^2 \text{Tr}(\tilde{\underline{P}}(k))}{\partial^2 \underline{K}} = 2 \cdot (\underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k))^T \tag{5.16}$$

Diese Bedingung gilt immer, da die Kovarianzmatrizen  $\hat{\underline{P}}$  und  $\underline{R}$  quadratisch, symmetrisch, diagonal dominant und somit positiv definit sind. Folglich ist auch der Ausdruck  $\underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k)$  positiv definit.

<sup>1</sup>Definition: siehe Anhang A „Vektor- und Matrizenrechnung“

Durch Umstellen der Gleichung (5.14) lässt sich diese, unter Verwendung der Gleichung (5.15), weiter vereinfachen.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\underline{P}}(k) &= (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \hat{\underline{P}}(k) - \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot \underline{K}(k)^T \\
 &\quad + \underbrace{\underline{K}(k) \cdot (\underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k)) \cdot \underline{K}(k)^T}_{=\hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T} \\
 &= (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \hat{\underline{P}}(k) - \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot \underline{K}(k)^T + \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot \underline{K}(k)^T
 \end{aligned}$$

$$\tilde{\underline{P}}(k) = (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \hat{\underline{P}}(k)$$

## 5.3 Alternative Berechnung der Kalman-Verstärkung

Betrachtet man die Fehler  $\Delta \underline{y}(k)$  zwischen der geschätzten Ausgangsgröße  $\hat{\underline{y}}(k)$  und der gemessenen Größe  $\underline{y}(k)$ , so werden diese, unter Berücksichtigung des Zusammenhangs mit  $\hat{\underline{y}}(k) = \underline{C} \cdot \hat{\underline{x}}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k)$ , berechnet zu:

$$\begin{aligned}
 \Delta \underline{y}(k) &= \underline{y}(k) - \hat{\underline{y}}(k) \\
 \Delta \underline{y}(k) &= \underline{y}(k) - \underline{C} \cdot \hat{\underline{x}}(k) - \underline{D} \cdot \underline{u}(k)
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Mithilfe der Gleichung (2.38)  $\underline{y}(k) = \underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) + \underline{v}(k)$  folgt:

$$\begin{aligned}
 \Delta \underline{y}(k) &= \underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) + \underline{v}(k) - \underline{C} \cdot \hat{\underline{x}}(k) - \underline{D} \cdot \underline{u}(k) \\
 &= \underline{C} \cdot \underbrace{(\underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k))}_{\hat{\underline{\varepsilon}}(k)} + \underline{v}(k) \\
 &= \underline{C} \cdot \hat{\underline{\varepsilon}}(k) + \underline{v}(k)
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Für die Kovarianz  $\underline{M}(k)$  der Größe  $\Delta \underline{y}(k)$  gilt:

$$\begin{aligned}
 \underline{M}(k) &= \text{Cov}(\Delta \underline{y}(k), \Delta \underline{y}(k)) \\
 &= \text{Var}(\Delta \underline{y}(k)) \\
 &= \text{Var}(\underline{C} \cdot \hat{\underline{x}}(k) + \underline{v}(k)) \\
 &= \text{Var}(\underline{C} \cdot \hat{\underline{x}}(k)) + \text{Var}(\underline{v}(k)) + 2 \cdot \underbrace{\text{Cov}(\underline{C} \cdot \hat{\underline{x}}(k), \underline{v}(k))}_{=0, \text{ da unkorreliert}} \\
 &= \underline{C} \cdot \underbrace{\text{Var}(\hat{\underline{x}}(k))}_{\hat{\underline{P}}(k)} \cdot \underline{C}^T + \underbrace{\text{Var}(\underline{v}(k))}_{\underline{R}(k)} \\
 &= \underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k)
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Wie schon bei der Herleitung der Kalman-Filter Gleichungen liegt die Annahme zugrunde, dass  $\hat{\underline{x}}(k)$  und  $\underline{v}(k)$  unkorreliert sind und somit die Kovarianz  $\text{Cov}(\underline{C} \cdot \hat{\underline{x}}(k), \underline{v}(k)) = 0$  ist.

Mit Gleichung (5.18), Gleichung (B.4) und der vorab getroffenen Annahme, dass die Größen  $\hat{\underline{x}}(k)$ ,  $\underline{v}(k)$  mittelwertfrei sind, gilt für den Erwartungswert  $E(\Delta \underline{y}(k))$ :

$$\begin{aligned}
 E(\Delta \underline{y}(k)) &= E(\underline{C} \cdot \hat{\underline{x}}(k) + \underline{v}(k)) \\
 &= \underline{C} \cdot \underbrace{E(\hat{\underline{x}}(k))}_{=0} + \underbrace{E(\underline{v}(k))}_{=0} = 0
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Die Kovarianz  $\underline{M}(k)$  lässt sich mit Gleichung (B.9) und Gleichung (5.20) schreiben zu:

$$\begin{aligned}
 \underline{M}(k) &= \text{Cov}(\Delta \underline{y}(k), \Delta \underline{y}(k)) \\
 &= E(\Delta \underline{y}(k) \cdot \Delta \underline{y}(k)^T) - \underbrace{E(\Delta \underline{y}(k)) \cdot E(\Delta \underline{y}(k)^T)}_{=0} \\
 &= E(\Delta \underline{y}(k) \cdot \Delta \underline{y}(k)^T)
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Somit folgt mit Gleichung (5.19) und Gleichung (5.21):

$$\underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k) = E(\Delta \underline{y}(k) \cdot \Delta \underline{y}(k)^T) \tag{5.22}$$



Durch diesen Zusammenhang lässt sich die Kalman-Verstärkung schreiben zu:

$$\underline{K}(k) = \underline{\hat{P}}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot \underline{M}(k)^{-1} \quad \text{mit} \quad \underline{M}(k) = E(\underline{\Delta y}(k) \cdot \underline{\Delta y}(k)^T) \quad (5.23)$$

Bei dieser alternativen Berechnung muss statt der Größe  $\underline{R}(k)$ , die Größe  $\underline{M}(k) = E(\underline{\Delta y}(k) \cdot \underline{\Delta y}(k)^T)$  bestimmt werden.

## KAPITEL 6

# ADAPTIVER KALMAN-FILTER (ROSE-FILTER)

Um das Kalman-Filter optimal zu nutzen, ist es von großer Wichtigkeit, die Kovarianz des Messrauschens  $\underline{R}(k)$  und des Systemrauschens  $\underline{Q}(k)$  möglichst exakt zu bestimmen. Erst durch eine exakte Bestimmung der beiden Kovarianzen ist es möglich, eine optimale Zustandsschätzung und eine korrekte Schätzung der Kovarianz des Schätzfehlers zu erreichen. Für viele Anwendungen reicht es nicht aus, diese beiden Größen einmal abzuschätzen, da sie sich im Laufe der Zeit zum Teil stark ändern.

Im Folgenden wird ein Ansatz gezeigt, mit dem schnell und adaptiv das Mess- und Systemrauschen bestimmt werden kann. Dieses lineare Kalman-Filter mit adaptiver Bestimmung der beiden Kovarianz-Matrizen wird im Folgenden als ROSE-Filter (Rapid Ongoing Stochastic covariance Estimation-Filter) bezeichnet.

## 6.1 Grundprinzip

Die Grundidee basiert darauf, die Kovarianz des Messrauschens  $\underline{R}(k)$  über die Beobachtung der messtechnisch erfassbaren Größe  $\underline{y}(k)$  mittels zwei eingebetteten, einfachen (Kalman)-Filter (mit konstantem Kalman-Verstärkung) kontinuierlich abzuschätzen.

Ebenso wird die Kovarianz des Systemrauschens  $\underline{Q}(k)$  mithilfe der Größe  $\Delta \underline{y}(k)$  (Differenz zwischen der geschätzten Ausgangsgröße  $\hat{\underline{y}}(k)$  und der gemessenen Größe  $\underline{y}(k)$ ), der Kovarianz des Schätzfehlers  $\underline{\hat{P}}(k-1)$ , der vorab bestimmten Kovarianz des Mess-

rauschens  $\underline{R}(k)$  und eines weiteren eingebetteten einfachen (Kalman)-Filter fortlaufend bestimmt.

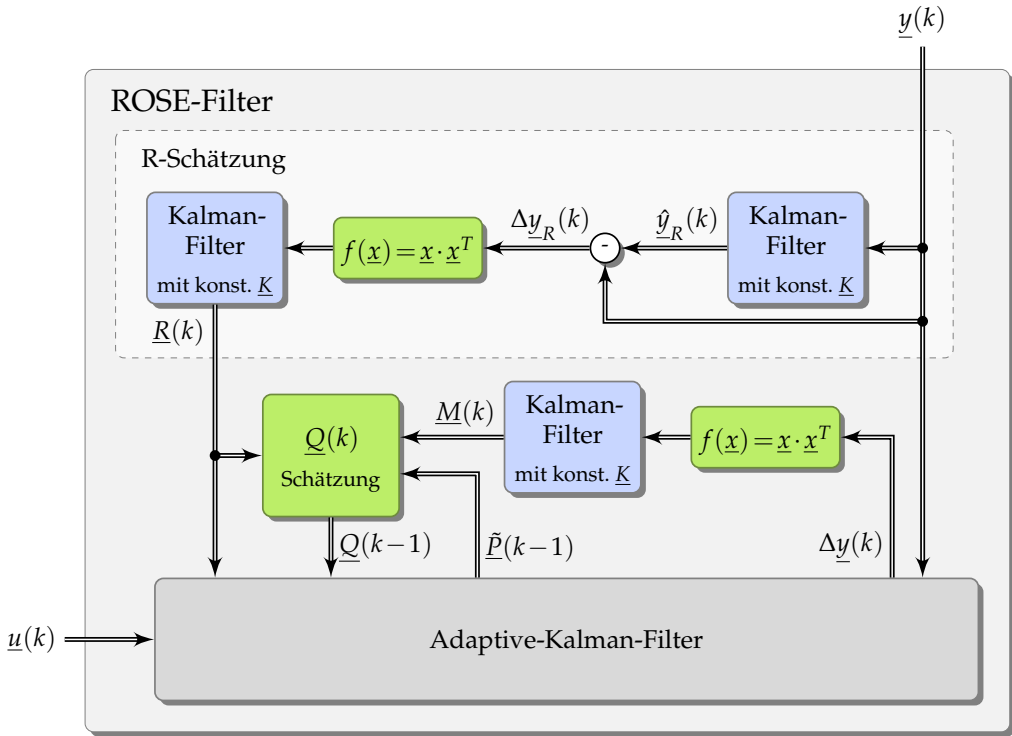


Abb. 6.1: Struktur ROSE-Filter

Abbildung 6.1 zeigt schematisch die Struktur des ROSE-Filters. Bei den drei zusätzlichen Kalman-Filter handelt es sich um Kalman-Filtern mit fester Verstärkung. Hierdurch reduziert sich die Berechnung in Echtzeit auf ein paar wenige, einfach in Echtzeit zu realisierbare Formeln. Im Speziellen entfällt die aufwendige Berechnung der Matrixinvertierung in Echtzeit. Für Systeme mit geringer Dynamik ist z. B. die Implementierung eines Alpha-Filters bzw. für Systeme mit großer Dynamik der Einsatz eines Alpha-Beta-Filters.

Die Kalman-Verstärkung berechnet sich für ein Alpha-Filter mit der folgenden Gleichung (siehe Kapitel 9):

$$K = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Q_\alpha}{R_\alpha} + \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{Q_\alpha}{R_\alpha}\right)^2 + \frac{Q_\alpha}{R_\alpha}} \quad (6.1)$$

Die Kalman-Verstärkung für ein Alpha-Beta-Filter lässt sich mit

$$K = \frac{0.125}{T_s} \cdot \begin{bmatrix} T_s \cdot (-\lambda^2 - 8 \cdot \lambda + (\lambda + 4) \cdot \sqrt{\lambda^2 + 8 \cdot \lambda}) \\ 2 \cdot (\lambda^2 + 4 \cdot \lambda - \lambda \cdot \sqrt{\lambda^2 + 8 \cdot \lambda}) \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

mit

$$\lambda = T_s \cdot \sqrt{\frac{Q_{\alpha\beta}}{R_{\alpha\beta}}} \quad (6.3)$$

bestimmen (siehe Kapitel 12 und [2]).

Im unteren Teil der Abbildung 6.1 befindet sich das eigentliche „Haupt-Kalman-Filter“, dessen Kovarianz des Messrauschens  $\underline{R}(k)$  und des Systemrauschens  $\underline{Q}(k)$  adaptiv bestimmt wird. Die anderen für die Berechnung notwendigen Gleichungen werden in den folgenden Kapiteln hergeleitet.

## 6.2 Adaptive Bestimmung des Messrauschens

Zuerst wird die Varianz (Kovarianz) der messtechnisch erfassbaren Größe  $\underline{y}(k)$  bestimmt. Mit  $\underline{y}(k) = \underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) + \underline{v}(k)$  und der Annahme, dass die Größe  $\underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k)$  und das Messrauschen  $\underline{v}(k)$  unkorreliert sind, folgt:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\underline{y}(k)) &= \text{Var}(\underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) + \underline{v}(k)) \\ &= \underbrace{\text{Var}(\underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k))}_{=0} + \text{Var}(\underline{v}(k)) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Da der Term  $\underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k)$  zum Zeitpunkt  $k$  für die Varianzberechnung als eine Konstante betrachtet werden kann, ist  $\text{Var}(\underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k)) = 0$  und es folgt:

$$\underline{R}(k) = \text{Var}(\underline{y}(k)) \quad (6.5)$$

$$= \text{E} \left( \left( \underline{y}(k) - \text{E}(\underline{y}(k)) \right) \cdot \left( \underline{y}(k) - \text{E}(\underline{y}(k)) \right)^T \right) \quad (6.6)$$

$$\approx \text{E} \left( \left( \underline{y}(k) - \hat{\underline{y}}_R(k) \right) \cdot \left( \underline{y}(k) - \hat{\underline{y}}_R(k) \right)^T \right) \quad (6.7)$$

$$\approx \text{E} \left( \Delta \hat{\underline{y}}_R(k) \cdot \Delta \hat{\underline{y}}_R(k)^T \right) \quad (6.8)$$

Alternativ lässt sich die Kovarianz des Messrauschens auch berechnen mit:

$$\begin{aligned}\underline{R}(k) &= \text{Var}(\underline{y}(k)) \\ &= \text{E}(\underline{y}(k) \cdot \underline{y}(k)^T) - \text{E}(\underline{y}(k)) \cdot \text{E}(\underline{y}(k))^T\end{aligned}\quad (6.9)$$

Betrachtet man ein kurzes Zeitintervall, so kann man innerhalb diesen Intervallen die Annahme eines ergodischen Prozesses treffen. Unter dieser Annahme lässt sich der Erwartungswert durch eine Mittelwertbildung annähern.

Sehr vorteilhaft bezüglich einer Implementierung in einer Mikrocontroller ist die Realisierung mittels eines IIR-Filters (englisch: *infinite impulse response filter*) 1. Ordnung. Dieses Filter kann auch als ein simples Kalman-Filter interpretiert werden, welches somit den Erwartungswert schätzt (siehe Kapitel 9).

## 6.3 Adaptive Bestimmung des Systemrauschens

Mithilfe der in Kapitel 5.3 bestimmten Kovarianz  $\underline{M}(k)$  der Größe  $\Delta\underline{y}(k)$  ist es möglich, das Systemrauschen zu bestimmen.

Mit Gleichung (5.22):  $\underline{M}(k) = \text{E}(\Delta\underline{y}(k) \cdot \Delta\underline{y}(k)^T) = \underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k)$  folgt:

$$\hat{\underline{P}}(k) = \underline{C}^T \cdot (\underline{M}(k) - \underline{R}(k)) \cdot \underline{C} \quad (6.10)$$

Gleichung (5.2):  $\hat{\underline{P}}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{P}}(k) \cdot \underline{A}_d^T + \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T$  lässt sich mithilfe der obigen Gleichung (6.10) und einer Indexverschiebung umschreiben. Es folgt:

$$\begin{aligned}\underline{Q}^*(k-1) &= \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k-1) \cdot \underline{G}_d^T \\ &= \hat{\underline{P}}(k) - \underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{P}}(k-1) \cdot \underline{A}_d^T \\ &= \underline{C}^T \cdot (\underline{M}(k) - \underline{R}(k)) \cdot \underline{C} - \underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{P}}(k-1) \cdot \underline{A}_d^T\end{aligned}\quad (6.11)$$

mit

$$\underline{M}(k) = \text{E}(\Delta\underline{y}(k) \cdot \Delta\underline{y}(k)^T) \quad (6.12)$$

Auch hier kann unter der Annahme, dass es sich in einem kurzen Beobachtungsintervall um einen ergodischen Prozess handelt, der Erwartungswert, bei der Bestimmung von  $\underline{M}(k)$ , durch eine Mittelwertbildung (z. B. ein IIR-Filter 1. Ordnung) ersetzt werden.

Die Berechnung der Varianz des Systemrauschens  $\underline{Q}$  geschieht durch Koeffizientenvergleich der einzelnen Elemente der linken und rechten Seite der Gleichung (6.11).

Es ist zu beachten, dass bei einem Modell, bei dem die Anzahl der messtechnisch erfassbaren Größen kleiner als die Anzahl der Elemente des Zustandsvektors ist, die mit Gleichung (6.10) bestimmte Kovarianzmatrix  $\hat{\underline{P}}(k)$  Einträge mit Nullen aufweist. Somit sind nicht alle Elemente der Matrix  $\underline{Q}^*(k-1)$  für den Koeffizientenvergleich geeignet. Des weiteren sollten, für eine bestmögliche Schätzung der Varianzen des Systemrauschens, die Elemente aus der Matrix  $\underline{Q}^*(k-1)$  verwendet werden, die die selbe physikalische Einheit aufweisen, wie die Varianz der jeweiligen Größe  $z(k)$ .

## 6.4 Algorithmus

Mit den in den vorigen Kapiteln hergeleiteten Gleichungen lässt sich das ROSE-Filter durch die nachfolgenden Gleichungen beschreiben. Erwähnenswert ist, dass im Gegensatz zu dem klassischen Kalman-Filter die Kovarianz des Schätzfehlers  $\hat{\underline{P}}$  nicht prädiert wird, sondern erst dann berechnet wird, nachdem eine neue Messung vorliegt. Dies ist möglich, da die Kovarianz des Systemrauschens zu jedem Zeitpunkt bestimmt wird. Hierdurch steigt die Genauigkeit der Korrektur und somit der Schätzung des Zustandsvektors.

Prädiktion:

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \hat{\underline{x}}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) \quad (6.13)$$

Berechnung von  $\underline{R}(k)$  und  $\underline{Q}(k)$ :

$$\underline{R}(k) = \text{E}(\underline{y}(k) \cdot \underline{y}(k)^T) - \text{E}(\underline{y}(k)) \cdot \text{E}(\underline{y}(k))^T \quad (6.14)$$

$$\Delta \underline{y}(k) = \underline{y}(k) - \underline{C} \cdot \hat{\underline{x}}(k) - \underline{D} \cdot \underline{u}(k) \quad (6.15)$$

$$\underline{M}(k) = \text{E}(\Delta \underline{y}(k) \cdot \Delta \underline{y}(k)^T) \quad (6.16)$$

$$\underline{Q}^*(k-1) = \underline{C}^T \cdot (\underline{M}(k) - \underline{R}(k)) \cdot \underline{C} - \underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{P}}(k-1) \cdot \underline{A}_d^T \quad (6.17)$$

Korrektur:

$$\hat{\underline{P}}(k) = \underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{P}}(k-1) \cdot \underline{A}_d^T + \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k-1) \cdot \underline{G}_d^T \quad (6.18)$$

$$\underline{K}(k) = \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot (\underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k))^{-1} \quad (6.19)$$

$$\tilde{\underline{x}}(k) = \hat{\underline{x}}(k) + \underline{K}(k) \cdot \Delta y(k) \quad (6.20)$$

$$\tilde{\underline{P}}(k) = (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \hat{\underline{P}}(k) \quad (6.21)$$

Dadurch, dass die Größen  $\underline{R}(k)$  und  $\underline{M}(k)$  nur abgeschätzt werden, kann dies dazu führen, dass negative Werte für die Größe  $\underline{Q}(k-1)$  berechnet werden. Diese unplausiblen Werte müssen auf null gesetzt werden. Siehe Beispiele in Kapitel 9.4 und 12.

## KAPITEL 7

# SYSTEMRAUSCHEN

Die Basis eines jeden Kalman-Filters stellt das Modell des physikalischen Systems dar. Dieses ist in Form von Differentialgleichungen beschrieben und lässt sich durch Umformen in eine Zustandsraumbeschreibung überführen. Unter der Verwendung der in Kapitel 2 beschriebenen Gleichungen lassen sich somit die für das Kalman-Filter notwendigen Größen  $\underline{A}_d$ ,  $\underline{B}_d$ ,  $\underline{C}$  und  $\underline{D}$  bestimmen.

Diese Größen alleine reichen jedoch noch nicht aus, um ein Kalman-Filter benutzen zu können. Es ist noch notwendig die Kovarianzmatrix des Systemrauschens und die des Messrauschens zu bestimmen. Speziell die Kovarianzmatrix des Systemrauschens  $\underline{G}_d$  ist eine schwer greifbare Größe, auf deren Beschreibung in diesem Kapitel näher eingegangen wird. Hierbei werden mehrere Berechnungsmethoden zur Ermittlung der Größe  $\underline{G}_d$  bzw. der Größe  $\underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T$  in der Kalman-Filter-Gleichung (5.2) vorgestellt.

Das Systemrauschen, auch Prozessrauschen genannt, ist eine abstrakte Größe, die Ungenauigkeiten in der Modellierung abbildet. Es handelt sich somit nicht um ein reales Rauschen, sondern vielmehr um eine theoretische Größe, die diese Modellungenauigkeiten beschreibt.

In Anlehnung an das Vorgehen in Kapitel 2.5 zur Bestimmung der Eingangsmatrix  $\underline{B}_d$  im Zeitdiskreten werden mehrere Verfahren zur Bestimmung der Größen  $\underline{G}_d$  bzw.  $\underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T$  vorgestellt. Am Ende des Kapitels werden im Speziellen beispielhaft kinematische Modelle zur Modellierung des Systemrauschens hergeleitet.



## 7.1 Ausgangspunkt

Ausgangspunkt für die Verfahren zur Modellierung des Systemrauschens ist ein Modell, welches durch die Zustandsdifferentialgleichung

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t) + \underline{G} \cdot \underline{z}(t) \quad (7.1)$$

beschrieben wird.

Führt man dieses Modell in ein zeitdiskretes System über, folgt in Anlehnung dem in Kapitel 2.4 und 2.5 beschriebenen Vorgehen die Gleichung:

$$\begin{aligned} \underline{x}((n+1) \cdot T_s) = & \underbrace{e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{x}(n \cdot T_s)}_{\underline{x}^*(n \cdot T_s)} + \underbrace{\int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau}_{\underline{u}^*(n \cdot T_s)} + \\ & \underbrace{\int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{G} \cdot \underline{z}(\tau) d\tau}_{\underline{z}^*(n \cdot T_s)} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Mit den in Abbildung 2.7 vorgenommenen Bezeichnungen lässt sich die obige Gleichung schreiben mit:

$$\underline{x}((n+1) \cdot T_s) = \underline{x}^*(n \cdot T_s) + \underline{u}^*(n \cdot T_s) + \underline{z}^*(n \cdot T_s) \quad (7.3)$$

Die verschiedenen Möglichkeiten zur Vereinfachung der Größe  $\underline{u}^*(n \cdot T_s)$  wurde in Kapitel 2.5 ausführlich beschrieben. Im Folgenden wird nun auf die Vereinfachung der Größe  $\underline{z}^*(n \cdot T_s)$  eingegangen.

Für das Systemrauschen gilt nach der obigen Definition:

$$\underline{z}^*(n \cdot T_s) = \int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{G} \cdot \underline{z}(\tau) d\tau \quad (7.4)$$

## 7.2 Direkte Diskretisierung

Ein abgetastetes Signal wird durch das Produkt aus dem zeitkontinuierlichen Signal und einer Folge von Dirac-Impulsen beschrieben.

$$z_d(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} z(n \cdot T_s) \cdot \delta(t - n \cdot T_s) \quad (7.5)$$

Im Intervall  $n \cdot T_s \leq t < (n+1) \cdot T_s$  ist das Signal folglich

$$z_d(t) = z(n \cdot T_s) \cdot \delta(t - n \cdot T_s) \quad (7.6)$$

Nähert man  $z(t)$  mit  $z(t) \approx z_d(t)$  und setzt diese Näherung in Gleichung (7.4) ein und nutzt die Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses, folgt:

$$\begin{aligned} \underline{z}^*(n \cdot T_s) &= \int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{G} \cdot \underline{z}(\tau) \cdot \delta(\tau - n \cdot T_s) d\tau \\ &= e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - n \cdot T_s)} \cdot \underline{G} \cdot \underline{z}(n \cdot T_s) \\ &= e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{G} \cdot \underline{z}(n \cdot T_s) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Weist man der Folge der abgetasteten Werte den Index  $k$  zu, ergibt sich:

$$\underline{z}^*(k) = \underbrace{e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{G}}_{\underline{G}_d} \cdot \underline{z}(k) \quad (7.8)$$

mit

$$\underline{G}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{G} \quad (7.9)$$

## 7.3 Partielles konstantes Rauschen

Wird angenommen, dass sich das Rauschen innerhalb eines Abtastintervalls nicht verändert und somit konstant ist, so lässt sich die Gleichung (7.4) schreiben:

$$\underline{z}^*(n \cdot T_s) = \int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{G} d\tau \cdot \underline{z}(n \cdot T_s) \quad (7.10)$$

Substituiert man  $\tau$  mit  $\nu(\tau) = (n+1) \cdot T_s - \tau$  und weist man des Weiteren der Folge der abgetasteten Werte den Index  $k$  zu, so vereinfacht sich die Gleichung (7.10) zu:

$$\underline{z}^*(k) = \underbrace{\int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot \nu} \cdot \underline{G} d\nu}_{\underline{G}_d} \cdot \underline{z}(k) \quad (7.11)$$

mit

$$\underline{G}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot \nu} \cdot \underline{G} d\nu \quad (7.12)$$

## 7.4 Diskretisiertes zeitkontinuierliches Modell

Mithilfe der Substitution  $\nu(\tau) = (n+1) \cdot T_s - \tau$  lässt sich das Integral der Gleichung (7.4) vereinfachen. Weist man des Weiteren der Folge der abgetasteten Werte den Index  $k$  zu, folgt:

$$\underline{z}^*(k) = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot \nu} \cdot \underline{G} \cdot \underline{z}(\nu) d\nu \quad (7.13)$$

Bei diesem dritten Verfahren zur Diskretisierung der Kovarianz des Systemrauschens müssen weitere Annahmen vorgenommen werden. Nimmt man an, dass es sich um

weißes, mittelwertfreies Rauschen handelt, so lässt sich die Kovarianz des Systemrauschens im kontinuierlichen Zeitbereich mithilfe der Gleichung (B.9) schreiben:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\underline{z}(t), \underline{z}(\tau)) &= E(\underline{z}(t) \cdot \underline{z}(\tau)^T) - \underbrace{E(\underline{z}(t))}_{=\underline{0}} \cdot \underbrace{E(\underline{z}(\tau)^T)}_{=\underline{0}} = E(\underline{z}(t) \cdot \underline{z}(\tau)^T) \\ E(\underline{z}(t) \cdot \underline{z}(\tau)^T) &= \underline{q} \cdot \delta(t - \tau) \end{aligned} \quad (7.14)$$

Das weiße Rauschen besitzt innerhalb eines Abtastintervalls ein konstantes Leistungsdichtespektrum (englisch *const. power spectral density*) der Höhe  $\underline{q}(k)$ , dessen Autokorrelationsfunktion ein Dirac-Impuls  $\underline{q}(k) \cdot \delta(t - \tau)$  ist.

Mit der Annahme, dass das zeitdiskrete Systemrauschen auch mittelwertfrei (Erwartungswert  $E(\underline{z}^*(k)) = \underline{0}$ ) ist, lässt sich die Kovarianz des Systemrauschens im zeitdiskreten Bereich schreiben durch:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\underline{z}^*(k), \underline{z}^*(k)) &= \text{Var}(\underline{z}^*(k)) \\ &= E(\underline{z}^*(k) \cdot \underline{z}^*(k)^T) - \underbrace{E(\underline{z}^*(k))}_{=\underline{0}} \cdot \underbrace{E(\underline{z}^*(k)^T)}_{=\underline{0}} \end{aligned} \quad (7.15)$$

Die Kovarianz (Varianz) des zeitdiskreten Systemrauschens lässt sich mit  $\underline{z}^*(k) = \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k)$  und  $\underline{Q}(k) = \text{Var}(\underline{z}(k))$  ausdrücken.

$$\text{Var}(\underline{z}^*(k)) = \text{Var}(\underline{G}_d \cdot \underline{z}(k)) = \underline{G}_d \cdot \underbrace{\text{Var}(\underline{z}(k))}_{\underline{Q}(k)} \cdot \underline{G}_d^T = \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T \quad (7.16)$$

Somit lässt sich mit Gleichung (7.13), (7.15) und (7.16) schreiben mit:

$$\begin{aligned} \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T &= E(\underline{z}^*(k) \cdot \underline{z}^*(k)^T) \\ &= E\left(\int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v_1} \cdot \underline{G} \cdot \underline{z}(v_1) \, dv_1 \cdot \int_0^{T_s} \left(e^{\underline{A} \cdot v_2} \cdot \underline{G} \cdot \underline{z}(v_2)\right)^T \, dv_2\right) \\ &= E\left(\int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v_1} \cdot \underline{G} \cdot \underline{z}(v_1) \, dv_1 \cdot \int_0^{T_s} \underline{z}(v_2)^T \cdot \underline{G}^T \cdot (e^{\underline{A} \cdot v_2})^T \, dv_2\right) \\ &= E\left(\int_0^{T_s} \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v_1} \cdot \underline{G} \cdot \underline{z}(v_1) \cdot \underline{z}(v_2)^T \cdot \underline{G}^T \cdot (e^{\underline{A} \cdot v_2})^T \, dv_1 \, dv_2\right) \end{aligned} \quad (7.17)$$

Berücksichtigt man den Zusammenhang  $E(\underline{A} \cdot \underline{x} \cdot \underline{B}) = \underline{A} \cdot E(\underline{x}) \cdot \underline{B}$  und die Linearität der Erwartungswerte bzw. des Integrals  $E\left(\int f(x) dx\right) = \int E(f(x)) dx$ , lässt sich der Erwartungswert in das Integral ziehen und mit Gleichung (7.14) folgt:

$$\underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v_1} \cdot \underline{G} \cdot \underbrace{E(\underline{z}(v_1) \cdot \underline{z}(v_2)^T)}_{\underline{q}(k) \cdot \delta(v_1 - v_2)} \cdot \underline{G}^T \cdot (e^{\underline{A} \cdot v_2})^T dv_1 dv_2 \quad (7.18)$$

Nutzt man die Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses und die Annahme, dass  $\underline{q}(k)$  innerhalb eines Abtastintervalls konstant ist, lässt sich die obige Gleichung weiter vereinfachen.

$$\underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v_1} \cdot \underline{G} \cdot \underline{G}^T \cdot (e^{\underline{A} \cdot v_1})^T dv_1 \cdot \underline{q}(k) \quad (7.19)$$

## 7.5 Kinematische Modelle

Im Folgenden soll am Beispiel von verschiedenen kinematischen Modellen die Anwendung der im vorigen Kapitel vorgestellten Verfahren zur Beschreibung des Systemrauschens vorgestellt werden.

Zuerst wird ein Modell beschrieben, bei denen die Geschwindigkeitskomponente mit Rauschen modelliert wird. Es handelt sich daher um Modelle zweiter Ordnung. Diese werden auch in der englischen Literatur *constant velocity* genannt. Im Anschluss wird ein Modell dritter Ordnung vorgestellt, bei dem eine konstante Beschleunigung angenommen wird (englisch: *constant acceleration*) und eine mögliche Beschleunigungsänderung als Rauschen modelliert wird.

Für jedes dieser Modelle werden drei Verfahren zur Diskretisierung beschrieben. Jedes der nachfolgenden Modelle besitzt eine unterschiedliche Kovarianzmatrix für das Prozessrauschen. Keine der Matrizen ist falsch und keines der Modelle kann die Realität exakt abbilden. Es ist deshalb wichtig, an dieser Stelle hervorzuheben, dass die Modelle nur Näherungen sind.

### 7.5.1 Modellierung

Unter Kinematik versteht man die Beschreibung von Vorgängen im Zusammenhang mit der Bewegung von Körpern. In der einfachsten Form werden als Zustände der zurückgelegte Weg  $s$ , die Geschwindigkeit  $v$  und die Beschleunigung  $a$  in Abhängigkeit zur Zeit  $t$  betrachtet.

Das Kalman-Filter ist für die Schätzung dieser Zustände besonders geeignet. Es ist deshalb kein Wunder, dass in vielen Anwendungen ein Kalman-Filter verwendet wird, der die genannten Größen schätzt.

Die Anwendungsfelder, in denen man kinematische Modelle findet, lassen sich in zwei Gebiete gliedern. Zu einem in der Beschreibung der eigenen Bewegung. Die Notwendigkeit dieses Wissens geht bis in die frühzeitliche Seefahrt zurück, in der das Wissen über die eigene Position für die Navigation wichtig war. In heutigen Anwendungen werden dazu hauptsächlich mikro-elektro-mechanische Inertialsensoren verwendet, mit denen es auch ohne GPS möglich ist, die eigene Bewegung zu bestimmen. Hierbei wird auch von der inertialen Navigation oder Trägheitsnavigation gesprochen.

Das zweite wichtige Anwendungsgebiet stellt die Beobachtung und Verfolgung von anderen Objekten dar. Diese Aufgabe wird dem Themenkomplex Tracking zugeordnet, die zum Beispiel in der Radartechnik zum Einsatz kommen. Viele der bekannten Modelle haben ihren Ursprung aus der militärischen und zivilen Luftraumüberwachung. Diese Modelle lassen sich jedoch auch für die Beschreibung der Bewegung des eigenen Körpers anwenden.

Es existiert eine Vielzahl von Modellen für die Beschreibung von kinematischen Bewegungen. Dieses Kapitel beschränkt sich auf die Wichtigsten. Eine Ursache für die Vielfalt an Modellen ist, dass jedes Modell eine andere Annahme über die Art der Bewegung tätigt.

Eine solche Annahme ist zum Beispiel, dass zwischen zwei Abtastschritten die Beschleunigung als konstant angenommen wird. Diese Vereinfachung führt so zu einem eingängigen Modell, jedoch mit der möglichen Konsequenz, dass eine Bewegung nur ungenau beschrieben wird. Je besser das Modell der Realität entspricht, desto bessere Ergebnisse lassen sich erzielen. Solche Modelle erfordern jedoch weitreichende Kenntnisse über die Art der Bewegung. Dieses Wissen ist in der Praxis meist unbekannt. In der Praxis muss deshalb abgewägt werden, welchen Nutzen ein aufwändigeres Modell gegenüber dem mathematischen Aufwand und dessen Realisierung in einem Mikrocontroller bringt.

Eine Vereinfachung, die fast alle Modelle gemeinsam haben, ist, dass ein Objekt als Massepunkt betrachtet wird. Diese Vereinfachung macht gerade im Anwendungsfall der Objektverfolgung Sinn, da das zu beobachtende Objekt im Verhältnis zum überwachten Raum sehr klein ist.

Eine weitere Annahme, die bei diesen Modellen gilt, ist, dass jede Raumkoordinatenachse unabhängig voneinander betrachtet wird. Diese Vereinfachung reduziert die Größe der Matrizen und somit den Rechenaufwand. Ein Modell kann so für jede Raumachse getrennt berechnet werden.

Es ist zu beachten, dass diese Unabhängigkeit der Bewegung zu den einzelnen Koordinatenachsen in der Realität nicht korrekt ist. Stellt man sich ein Auto vor, dass sich durch eine Kurve bewegt, so treten Abhängigkeiten zu den einzelnen Raumrichtungen aufgrund von Kräften wie der Fliehkraft auf. Möchte man diese Abhängigkeiten berücksichtigen, benötigt man jedoch nichtlineare Modelle (im Automobilbereich wird dazu häufig das Einspurmodell verwendet). In Anbetracht des Aufwandes von nichtlinearen Modellen und einem nichtlinearen Kalman-Filter führt dieses Vorgehen nicht grundsätzlich zu einem besseren Schätzergebnis.

Verantwortlich für die Bewegung ist die Beschleunigung. Innerhalb der Zustandsraumbeschreibung würde man daher die Beschleunigung der Steuergröße  $u$  zuordnen. In den meisten Fällen ist die Beschleunigung, die auf ein System wirkt, jedoch unbekannt. Es ist deshalb üblich, die Beschleunigung durch einen zufälligen Prozess zu modellieren. Der einfachste Ansatz verwendet weißes, mittelwertfreies Rauschen als Ursache der Bewegung. In den folgenden Abschnitten werden Modelle vorgestellt, bei denen die Ursache der Bewegung (weißes) Rauschen ist.

## 7.5.2 Modell 2. Ordnung

Modelle 2. Ordnung werden dann verwendet, wenn sich ein Objekt mit nahezu konstanter Geschwindigkeit bewegt (in der anglistischen Literatur findet man hierzu den Begriff *constant velocity*). Kleinere Änderungen in der Geschwindigkeit werden durch die Rauschgröße  $z(t)$  modelliert. Setzt man als physikalisches Modell eine Punktmasse des bewegten Objekts voraus, lässt sich das System durch die folgenden beiden Gleichungen  $v(t) = \dot{s}(t)$  und  $a(t) = \dot{v}(t)$  beschreiben.

Wählt man die Zustandsvariable zu  $\underline{x}(t) = [s(t) \quad v(t)]^T$ , so lässt sich das physikalische System im Zustandsraum beschreiben durch:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{s}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot z(t) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B \cdot u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_G \cdot z(t) \end{aligned}$$

Im Nachfolgenden werden die drei Verfahren zur Diskretisierung des Systemrauschens aus Kapitel 7.2, 7.3 und 7.4 für dieses Modell beschrieben.

### Methode 1: Direkte Diskretisierung

Bei dieser Methode folgt für die Matrix  $\underline{G}_d$ :

$$\underline{G}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_s \\ 1 \end{bmatrix}$$

Betrachtet man die mit  $\underline{G}_d$  gewonnene diskrete Systembeschreibung im Zustandsraum genauer, folgt:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} s(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s}} \cdot \begin{bmatrix} s(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_d} \cdot u(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} T_s \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{G}_d} \cdot z_v(k)$$

bzw. ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} s(k+1) &= s(k) + T_s \cdot (v(k) + z_v(k)) \\ v(k+1) &= v(k) + z_v(k) \end{aligned}$$

Bei dieser Darstellung ist es offensichtlich, dass die Rauschgröße  $z_v(t)$  die Dimension Länge/Zeit (Geschwindigkeit) hat. Um dies zu kennzeichnen, wurde der Index  $v$  an die Rauschgröße angefügt.

Um die drei Verfahren besser vergleichen zu können, wird die Größe  $\underline{Q}^*(k)$  eingeführt. Diese ist definiert mit:

$$\underline{Q}^*(k) = \text{Var}(\underline{z}^*(k)) = \text{Var}(\underline{G}_d \cdot \underline{z}(k)) = \underline{G}_d \cdot \text{Var}(\underline{z}(k)) \cdot \underline{G}_d^T = \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T$$

Somit folgt für dieses Beispiel:

$$\underline{Q}^*(k) = \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \begin{bmatrix} T_s \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \text{Var}(z_v(k)) \cdot \begin{bmatrix} T_s & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_s^2 & T_s \\ T_s & 1 \end{bmatrix} \cdot \text{Var}(z_v(k))$$



## Methode 2: Partielles konstantes Rauschen

Bei dieser Methode liegt die Annahme zugrunde, dass über ein Abtastintervall ein konstantes Rauschen vorliegt. Mit Gleichung (7.12) berechnet sich die Matrix  $\underline{G}_d$  mit:

$$\underline{G}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot \nu} \cdot \underline{G} d\nu = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\nu = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} \nu \\ 1 \end{bmatrix} d\nu = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix}$$

Somit gilt für die diskrete Systembeschreibung im Zustandsraum:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} s(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s}} \cdot \begin{bmatrix} s(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_d} \cdot u(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix}}_{\underline{G}_d} \cdot z_a(k)$$

bzw. ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} s(k+1) &= s(k) + T_s \cdot v(k) + \frac{1}{2} \cdot T_s^2 \cdot z_a(k) \\ v(k+1) &= v(k) + T_s \cdot z_a(k) \end{aligned}$$

Bei dieser Methode hat die Rauschgröße  $z_a(t)$  offensichtlich die Dimension Länge/Zeit<sup>2</sup> (Beschleunigung), welches mit dem Index  $a$  gekennzeichnet wurde. Die Größe  $z_a$  ist somit die Ableitung von  $z_v$ . Da bei dieser Methode die Annahme zugrunde liegt, dass innerhalb eines Abtastintervalls die Rauschgröße konstant ist, gilt:

$$z_v(k) = \int_0^{T_s} z_a(k) d\tau = T_s \cdot z_a(k)$$

Für  $\underline{Q}^*(k)$  gilt diesem Beispiel mit  $Q(k) = \text{Var}(z_a(k)) = \text{Var}\left(\frac{z_v(k)}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s^2} \text{Var}(z_v(k))$ :

$$\begin{aligned} \underline{Q}^*(k) &= \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix} \cdot \text{Var}(z_a(k)) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T_s^2 & T_s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} T_s^4 & \frac{1}{2} T_s^3 \\ \frac{1}{2} T_s^3 & T_s^2 \end{bmatrix} \cdot \text{Var}(z_a(k)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} T_s^2 & \frac{1}{2} T_s \\ \frac{1}{2} T_s & 1 \end{bmatrix} \cdot \text{Var}(z_v(k)) \end{aligned}$$

### Methode 3: Diskretisiertes zeitkontinuierliches Modell

Bei dieser Methode wird angenommen, dass es sich bei dem Systemrauschen um ein weißes Rauschen mit  $E(z(t) \cdot z(\tau)^T) = q(k) \cdot \delta(t - \tau)$  mit dem Erwartungswert  $E(z^*(k)) = 0$  handelt. Es folgt mit Gleichung (7.19):

$$\begin{aligned}
 \underline{Q}^*(k) &= \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot \nu} \cdot \underline{G} \cdot \underline{G}^T \cdot (e^{\underline{A} \cdot \nu})^T d\nu \cdot q(k) \\
 &= \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \nu & 1 \end{bmatrix} d\nu \cdot q(k) \\
 &= \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} \nu^2 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} d\nu \cdot q(k) \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} T_s^3 & \frac{1}{2} T_s^2 \\ \frac{1}{2} T_s^2 & T_s \end{bmatrix} \cdot q(k)
 \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, dass in diesem Beispiel im rechten unteren Feld  $Q_{2,2}^*(k)$  der obigen Matrix die Varianz der Rauschgröße  $z_v(k)$  steht, so ist  $T_s \cdot q(k) = \text{Var}(z_v(k))$ . Somit lässt sich die obige Gleichung schreiben mit:

$$\begin{aligned}
 \underline{Q}^*(k) &= \begin{bmatrix} Q_{1,1}^*(k) & Q_{1,2}^*(k) \\ Q_{2,1}^*(k) & Q_{2,2}^*(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} T_s^3 & \frac{1}{2} T_s^2 \\ \frac{1}{2} T_s^2 & T_s \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{T_s} \cdot \text{Var}(z_v(k)) \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} T_s^2 & \frac{1}{2} T_s \\ \frac{1}{2} T_s & 1 \end{bmatrix} \cdot \text{Var}(z_v(k))
 \end{aligned}$$

### 7.5.3 Modell 3. Ordnung

**B**ei dem vorhergehenden Modell 2. Ordnung war die Beschleunigung zwischen zwei Abtastintervallen als konstant angenommen. Änderungen an der Beschleunigung wurden durch eine Rauschgröße modelliert.

Liegen größere Beschleunigungen vor, lässt sich das Modell verbessern, indem man die Zustandsvariable um die Größe der Beschleunigung erweitert. Somit ist

$\underline{x}(t) = [s(t) \ v(t) \ a(t)]^T$ . Die Beschleunigungsänderung (Ruck) zwischen zwei Abtastintervallen wird als konstant angenommen. Kleinere Beschleunigungsänderungen werden durch das Hinzufügen der Rauschgröße  $z_a(t)$  berücksichtigt.

Das physikalische System im Zustandsraum ist mit dieser Annahme beschrieben durch:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{s}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{a}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot z_a(t) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \cdot u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{G}} \cdot z_a(t) \end{aligned}$$

## Methode 1: Direkte Diskretisierung

Wendet man diese Methode 1 bei einem kinetischen Modell 3. Ordnung an, folgt für die Matrix  $\underline{G}_d$  (siehe auch Einführendes Beispiel in Kapitel 1):

$$\underline{G}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{G} = \underline{A}_d \cdot \underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & T_s & \frac{1}{2}T_s^2 \\ 0 & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T_s^2 \\ T_s \\ 1 \end{bmatrix}$$

Somit folgt für die Kovarianz des Systemrauschens:

$$\begin{aligned} \underline{Q}^*(k) &= \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T_s^2 \\ T_s \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \text{Var}(z_a(k)) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T_s^2 & T_s & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}T_s^4 & \frac{1}{2}T_s^3 & \frac{1}{2}T_s^2 \\ \frac{1}{2}T_s^3 & T_s^2 & T_s \\ \frac{1}{2}T_s^2 & T_s & 1 \end{bmatrix} \cdot \text{Var}(z_a(k)) \end{aligned}$$

## Methode 2: Partielles konstantes Rauschen

Bei dieser Methode berechnet sich die Matrix  $\underline{G}_d$  zu:

$$\underline{G}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot \nu} \cdot \underline{G} \, d\nu = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \frac{1}{2}\nu^2 \\ 0 & 1 & \nu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \, d\nu = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\nu^2 \\ \nu \\ 1 \end{bmatrix} \, d\nu = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}T_s^3 \\ \frac{1}{2}T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix}$$

Wie im kinetischen Modell 2. Ordnung ausgeführt, gilt bei Methode 2:  $\underline{Q}(k) = 1/T_s^2 \cdot \text{Var}(z_a(k))$ . Damit lässt sich die Kovarianz des Systemrauschens bestimmen.

$$\begin{aligned} \underline{Q}^*(k) &= \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}T_s^3 \\ \frac{1}{2}T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{T_s^2} \cdot \text{Var}(z_a(k)) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{6}T_s^3 & \frac{1}{2}T_s^2 & T_s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{36}T_s^4 & \frac{1}{12}T_s^3 & \frac{1}{6}T_s^2 \\ \frac{1}{12}T_s^3 & \frac{1}{4}T_s^2 & \frac{1}{2}T_s \\ \frac{1}{6}T_s^2 & \frac{1}{2}T_s & 1 \end{bmatrix} \cdot \text{Var}(z_a(k)) \end{aligned}$$

## Methode 3: Diskretisiertes zeitkontinuierliches Modell

Bei der Methode 3 wird direkt mit Gleichung (7.19) die Kovarianz des Systemrauschens bestimmt.

$$\underline{Q}^*(k) = \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot \nu} \cdot \underline{G} \cdot \underline{G}^T \cdot (e^{\underline{A} \cdot \nu})^T \, d\nu \cdot q(k)$$

$$\begin{aligned}
\underline{Q}^*(k) &= \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \frac{1}{2}\nu^2 \\ 0 & 1 & \nu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\nu^2 & \nu & 1 \end{bmatrix} d\nu \cdot q(k) \\
&= \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\nu^4 & \frac{1}{2}\nu^3 & \frac{1}{2}\nu^2 \\ \frac{1}{2}\nu^3 & \nu^2 & \nu \\ \frac{1}{2}\nu^2 & \nu & 1 \end{bmatrix} d\nu \cdot q(k) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{20}T_s^5 & \frac{1}{8}T_s^4 & \frac{1}{6}T_s^3 \\ \frac{1}{8}T_s^4 & \frac{1}{3}T_s^3 & \frac{1}{2}T_s^2 \\ \frac{1}{6}T_s^3 & \frac{1}{2}T_s^2 & T_s \end{bmatrix} \cdot q(k)
\end{aligned}$$

Ersetzt man wieder  $q(k)$  mit  $q(k) = 1/T_s \cdot \text{Var}(z_a(k))$  (wie im kinematischen Modell 2. Ordnung), so folgt:

$$\begin{aligned}
\underline{Q}^*(k) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{20}T_s^5 & \frac{1}{8}T_s^4 & \frac{1}{6}T_s^3 \\ \frac{1}{8}T_s^4 & \frac{1}{3}T_s^3 & \frac{1}{2}T_s^2 \\ \frac{1}{6}T_s^3 & \frac{1}{2}T_s^2 & T_s \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{T_s} \cdot \text{Var}(z_a(k)) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{20}T_s^4 & \frac{1}{8}T_s^3 & \frac{1}{6}T_s^2 \\ \frac{1}{8}T_s^3 & \frac{1}{3}T_s^2 & \frac{1}{2}T_s \\ \frac{1}{6}T_s^2 & \frac{1}{2}T_s & 1 \end{bmatrix} \cdot \text{Var}(z_a(k))
\end{aligned}$$

## 7.5.4 Modell höherer Ordnung

Möchte man eine höhere Genauigkeit haben, kann man die  $(n-1)$ -Ableitung der Position als konstant modellieren. Diese Modelle werden in der anglistischen Literatur mit *polynomial model* bezeichnet [13].

Für  $n=2$  erhält man ein Modell 2. Ordnung und für  $n=3$  ein Modell 3. Ordnung. Somit sind die beschriebenen Modelle 2. und 3. Ordnung Spezialfälle des *polynomial models*.

---

# Anwendungsbeispiele

---

## KAPITEL 8

# PRINZIPIELLES VORGEHEN

Bei dem Entwurf des Kalman-Filters im einführenden Beispiel wurde schon eine Methodik sichtbar, mit der sich viele Kalman-Filter entwickeln lassen. Diese Methodik (Kochrezept) und die hierfür notwendigen Schritte sollen im Folgenden nochmals verdeutlicht werden.

## 8.1 Zeitkontinuierliche Systembeschreibung

Zur Modellierung eines physikalischen Systems ist es notwendig, dies in Form von Differentialgleichungen zu beschreiben. Ist das System vollständig mithilfe einem Satz von Differentialgleichungen beschrieben, werden die messtechnisch erfassbaren Größen bestimmt. Diese legen den Ausgangsvektor  $y(t)$  fest. Hierbei sollte in der Regel darauf geachtet werden, dass alle rauschbehafteten Größen dem Ausgangsvektor zugeordnet werden. Nicht rauschbehaftete Größen werden dem Eingangsvektor  $u(t)$  zugewiesen. Dies ist der Modellierung des physikalischen Systems geschuldet, welches nur seine Ausgangsgröße mit einem Messrauschen überlagert. Die Eingangsgröße  $u(t)$  wird mit keinem zusätzlichen Messrauschen bedacht. Ein Beispiel für eine rauschfreie Eingangsgröße könnte ein System sein, welches die Erdbeschleunigung nutzt.

Als nächstes wird die Zustandsvariable  $x(t)$  gewählt, wobei es es oft mehrere Möglichkeiten gibt. Nach deren Wahl wird die Ableitung der Zustandsvariable  $\dot{x}(t)$  bestimmt. Hierdurch ergibt sich die Matrix  $G$  des Systemrauschens. Es ist oft sinnvoll, mehrere Ansätze mit verschiedenen Zustandsvariablen durchzurechnen und sich dann für den besten Ansatz für das jeweilige Problem zu entscheiden. Aus Sicht der Rechengeschwindigkeit ist es sinnvoll, den Zustandsvektor so klein wie möglich zu halten. Jede zusätzliche Größe, die im Zustandsvektor hinzugefügt wird, lässt den späteren

Rechenaufwand überproportional stark steigen. Für die Minimierung von Modellierungsungenauigkeiten ist oft ein Modell mit einer größeren Anzahl von Zustandsgrößen von Vorteil.

Am Ende liegt nun ein System der Form vor, bei dem die Systemmatrix  $\underline{A}$ , die Eingangsmatrix  $\underline{B}$ , die Ausgangsmatrix  $\underline{C}$ , die Durchgangsmatrix  $\underline{D}$ , die Matrix  $\underline{G}$  des Systemrauschens und die Zustandsvariable  $\underline{x}(t)$  bestimmt wurde.

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t) + \underline{G} \cdot \underline{z}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot \underline{u}(t)\end{aligned}$$

## 8.2 Zeitdiskrete Systembeschreibung

Nachdem die Systembeschreibung im Zeitkontinuierlichen vorliegt, kann diese mithilfe der beiden Gleichungen

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s}, \quad \underline{B}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{B} \, dv \quad \text{bzw.} \quad \underline{B}_d = \underline{A}_d \cdot \underline{B}$$

in eine zeitdiskrete Systembeschreibung überführt werden.  $T_s$  ist hierbei die konstante Abtastzeit des Systems.

Die Matrizen  $\underline{C}$  und  $\underline{D}$  bleiben im Zeitdiskreten unverändert und sind somit im kontinuierlichen System als auch im zeitdiskreten System identisch.

Zur Bestimmung der Matrix  $\underline{G}_d$  gibt es mehrere Formeln, die jeweils unterschiedliche Annahmen zugrunde legen. Drei dieser verschiedenen Berechnungsmethoden wurden im Kapitel 7 vorgestellt. Die Methode 1 basiert auf der direkten Diskretisierung des Systemrauschens, die Methode 2 geht davon aus, dass innerhalb des Abtastintervalls ein partielles konstantes Systemrauschen vorliegt und die Methode 3 diskretisiert das zeitkontinuierliche Modell. Tabelle 8.1 gibt einen Überblick über diese vorgestellten Verfahren der Matrix  $\underline{G}_d$ . bzw. bei der dritten Methode des Produkts  $\underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T$ .

Es ist angemerkt, dass es nicht zwingend notwendig ist, das System zuerst im Zeitkontinuierlichen zu beschreiben und dann in eine zeitdiskrete Systembeschreibung zu überführen. Es gibt Aufgabenstellungen, die sich leichter direkt im Zeitdiskreten bzw. nur dort beschreiben lassen. Bei solchen Problemstellungen ist es sinnvoll, direkt die zeitdiskrete Systembeschreibung aufzustellen.



Methode	Modellannahme im Abtastintervall $\mathbf{n} \cdot T_s \leq t < (\mathbf{n} + 1) \cdot T_s$	Berechnung
1	Abtastung durch Dirac-Impuls $z_d(t) = z(n \cdot T_s) \cdot \delta(t - n \cdot T_s)$	$\underline{G}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{G}$
2	Systemrauschen innerhalb Abtastintervalls konstant	$\underline{G}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{G} dv$
3	weißes, mittelwertfreies System- rauschen, dessen Autokorre- lationsfunktion ein Dirac-Impuls mit $\underline{q}(k) \cdot \delta(t - \tau)$ ist	$\underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v_1} \cdot \underline{G} \cdot \underline{G}^T \cdot (e^{\underline{A} \cdot v_1})^T dv_1 \cdot \underline{q}(k)$

Tab. 8.1: Varianten zur Berechnung der Matrix  $\underline{G}_d$ 

## 8.3 Beobachtbarkeit

Sobald die Beschreibung eines Systems im Zustandsraum vorliegt, kann eine Überprüfung der Beobachtbarkeit stattfinden. Das bekannteste Kriterium zur Überprüfung der Beobachtbarkeit ist das von R. E. Kalman (siehe Kapitel 2.3.1). Dies besagt, dass ein lineares zeitinvariantes System der Ordnung  $n$  dann beobachtbar ist, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix  $S_B$  bzw.  $S_B^*$  den Rang  $n$  besitzt. Neben diesem sehr bekannten Kriterium existiert noch das Beobachtbarkeitskriterium von Gilbert und das von Hautus (siehe [16]).

Ist ein System nicht vollständig beobachtbar, kann das System in ein beobachtbares und in ein nicht beobachtbares System aufgeteilt werden. Details hierzu siehe [16].

Es kann sein, dass manche Systeme, welche im Zeitkontinuierlichen noch beobachtbar sind, bei bestimmten Abtastzeiten nicht mehr beobachtbar sind. Es ist deshalb sinnvoll, die Überprüfung der Beobachtbarkeit mit der Beobachtbarkeitsmatrix  $S_B^*$  durchzuführen.

## 8.4 Bestimmung des System- und Messrauschens

Durch die Modellbildung wurde dessen Ungenauigkeiten durch das Systemrauschen beschrieben. Im Folgenden muss das Systemrauschen näher charakterisiert werden. Dieses wird durch dessen Varianz  $\underline{Q}(k) = \text{Var}(\underline{z}(k))$  beschrieben.

Für viele Anwendungen genügt es, die Kovarianz des Systemrauschens  $\underline{Q}(k)$  im Vorfeld abzuschätzen und Sie während der Berechnung des Kalman-Filters als konstant anzusehen.

Bei der Schätzung der Kovarianz des Systemrauschens ist zu beachten, dass je nach Wahl der zugehörigen Methode bei Schritt *Zeitdiskrete Systembeschreibung* das Rauschen eine unterschiedliche physikalische Größe beschreibt (siehe hierzu die Beispiele in Kapitel 7.5).

Die Varianz des Messrauschens  $\underline{R}(k) = \text{Var}(\underline{v}(k))$  kann z. B. durch eine vorige Messung der messtechnisch zugänglichen Größen geschätzt werden. Ist anzunehmen, dass sich das Messrauschen über die Zeit nicht verändert, lässt sich die Berechnung der Kalman-Verstärkung  $\underline{K}$  und der Kovarianzmatrix  $\underline{\hat{P}}$  bzw.  $\underline{\tilde{P}}$  vorab bestimmen. Dies reduziert im erheblichen Maße die Rechenzeit des Kalman-Filters (siehe Kapitel 11.2).

Ist davon auszugehen, dass sich die Varianz des Messrauschens  $\underline{R}(k)$  über die Zeit verändert, ist diese Varianz adaptive zu bestimmen. Ein Ansatz hierzu ist im Kapitel 6 beschrieben.

Beim Messrauschen liegt die Annahme zugrunde, dass der Erwartungswert des Messrauschens  $E(\underline{v}(k)) = \underline{0}$  ist. Da für manche Problemstellungen diese Annahme nicht gilt, kann bei einem Messrauschen mit einem Erwartungswert  $E(\underline{v}(k)) \neq \underline{0}$ , das Messrauschen in einen mittelwertfreien Teil und in einen unbekannten Offset aufgeteilt werden. Die Zustandsvariable  $\underline{x}(k)$  wird dann um den Offset des Messrauschens erweitert (siehe Beispiel in Kapitel 10).

## KAPITEL 9

# BEISPIEL: BIAS-SCHÄTZUNG

Mit diesem Beispiel soll der Entwurf und die Arbeitsweise eines Kalman-Filters in einfacher Weise dargelegt werden. Grundlage ist die im vorigen Kapitel vorgestellte Methodik zum Entwurf eines Kalman-Filters.

Die Aufgabe des Kalman-Filter soll es sein, einen unbekannten Bias eines verrauschten Signals abzuschätzen. Bekannt ist von dem Signal, dass sich der Bias über die Zeit nur langsam ändert. Des Weiteren ist davon auszugehen, dass die Varianz des Messrauschens sich zunächst nicht ändert. Abgetastet wird das Signal alle 10ms. Die Abbildung 9.1 zeigt den Verlauf dieses Signals.

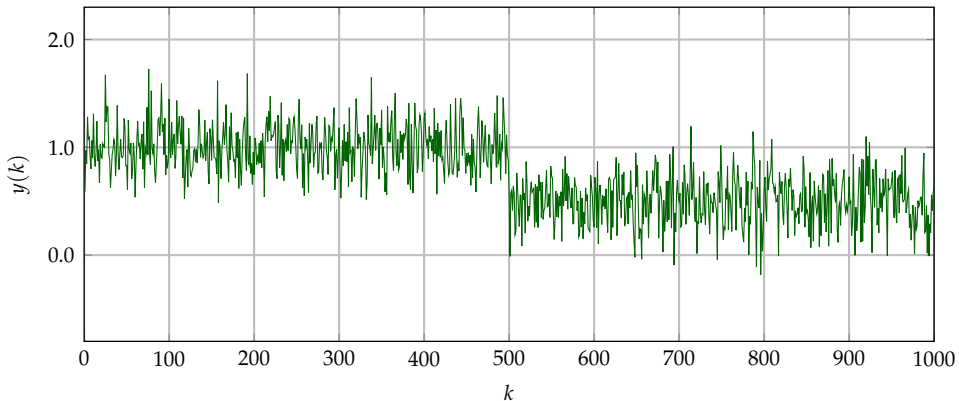


Abb. 9.1: Verlauf eines verrauschten Signals mit unbekannten Bias

## 9.1 Filterentwurf

### Zeitkontinuierliche Systembeschreibung

Mithilfe der Kenntnis, dass sich der unbekannte Bias des Signals nur sehr langsam ändert, lässt sich ein einfaches Modell des physikalischen Systems entwerfen. Die unbekannte Konstante (Bias) wird den Zustandsvariablen  $x(t)$  zugeordnet.

$$\dot{x}(t) = \text{const.} \quad (9.1)$$

Die Ableitung der Zustandsvariablen  $\dot{x}(t)$  ist null. Mögliche kleinere Änderungen (Systemungenauigkeiten) werden durch die Zufallsvariable  $z(t)$  berücksichtigt.

$$\dot{x}(t) = 0 + z(t) \quad (9.2)$$

Die Zustandsraumbeschreibung eines solchen Modells ist:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{0}_A \cdot x(t) + \underbrace{0}_B \cdot u(t) + \underbrace{1}_G \cdot z(t) \quad (9.3)$$

$$y(t) = \underbrace{1}_C \cdot x(t) + \underbrace{0}_D \cdot u(t) \quad (9.4)$$

### Zeitdiskrete Systembeschreibung

Nachdem die Systembeschreibung im Zeitkontinuierlichen vorliegt, wird das Modell in eine zeitdiskrete Systembeschreibung überführt, dessen Ausgangssignal alle  $T_s$  Sekunden abgetastet wird. Für  $A_d$  gilt:

$$A_d = e^{A \cdot T_s} = e^{0 \cdot T_s} = 1 \quad (9.5)$$

Die Eingangsmatrix berechnet sich in diesem Beispiel zu:

$$B_d = \int_0^{T_s} e^{A \cdot v} \cdot B \, dv = \int_0^{T_s} e^0 \cdot 0 \, dv = 0 \quad (9.6)$$

Die Ausgangsmatrix  $C$  und Durchgangsmatrix  $D$  sind in der zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Systembeschreibung gleich.

## Beobachtbarkeit

Die Überprüfung der Beobachtbarkeit geschieht durch die Beobachtbarkeitsmatrix  $S_B^*$ . Das vorliegende System hat die Dimension  $n=1$  (Länge der Zustandsvariable), somit ist der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix  $S_B^*$  in diesem Beispiel definiert zu:

$$\text{Rang}(S_B^*) = \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^{n-1} \end{bmatrix} \right) = \text{Rang}([C]) = \text{Rang}([1]) = 1 \quad (9.7)$$

Der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix ist gleich der Anzahl der Elemente der Zustandsvariablen  $\underline{x}(k)$  ( $n=1$ ) und somit ist das System beobachtbar.

## Bestimmung des System- und Messrauschens

Als erstes muss die Größe  $G_d$  und die Größe  $G_d \cdot Q(k) \cdot G_d$  bestimmt werden. Hierbei wurden im Kapitel 7 drei Verfahren vorgestellt.

### Methode 1: Direkte Diskretisierung

Um Verwechslungen zu vermeiden, erhält das Systemrauschen, welches mit der Methode 1 bestimmt wird, den Index 1.

Mit diesem Verfahren folgt  $G_d = A_d \cdot G = 1 \cdot 1 = 1$

und für  $G_d \cdot Q(k) \cdot G_d^T = 1 \cdot Q(k) \cdot 1 = \text{Var}(z_1(k))$

Somit gilt für das zeitdiskrete System:

$$x(k+1) = \underbrace{1}_{A_d} \cdot \underline{x}(k) + \underbrace{0}_{B_d} \cdot u(t) + \underbrace{1}_{G_d} \cdot z_1(k) = x(k) + z_1(k) \quad (9.8)$$

$$y(k) = \underbrace{1}_C \cdot x(k) + \underbrace{0}_D \cdot u(k) + v(k) = x(k) + v(k) \quad (9.9)$$

Als nächstes muss versucht werden, den Verlauf der Größe  $z_1(k)$  möglichst genau abzuschätzen. Diese Abschätzung soll mit einer sehr starken Vereinfachung verdeutlicht werden.

Bei Betrachtung des Signals  $y(k)$  aus Abbildung 9.1 kann man annehmen, dass sich das Signal  $y(k)$  nach Gleichung (9.9) aus einem Messrauschanteil  $v(k)$  und dem unbekannten Bias, der durch die Größe  $x(k)$  beschrieben wird, zusammensetzt (siehe Abbildung 9.2).

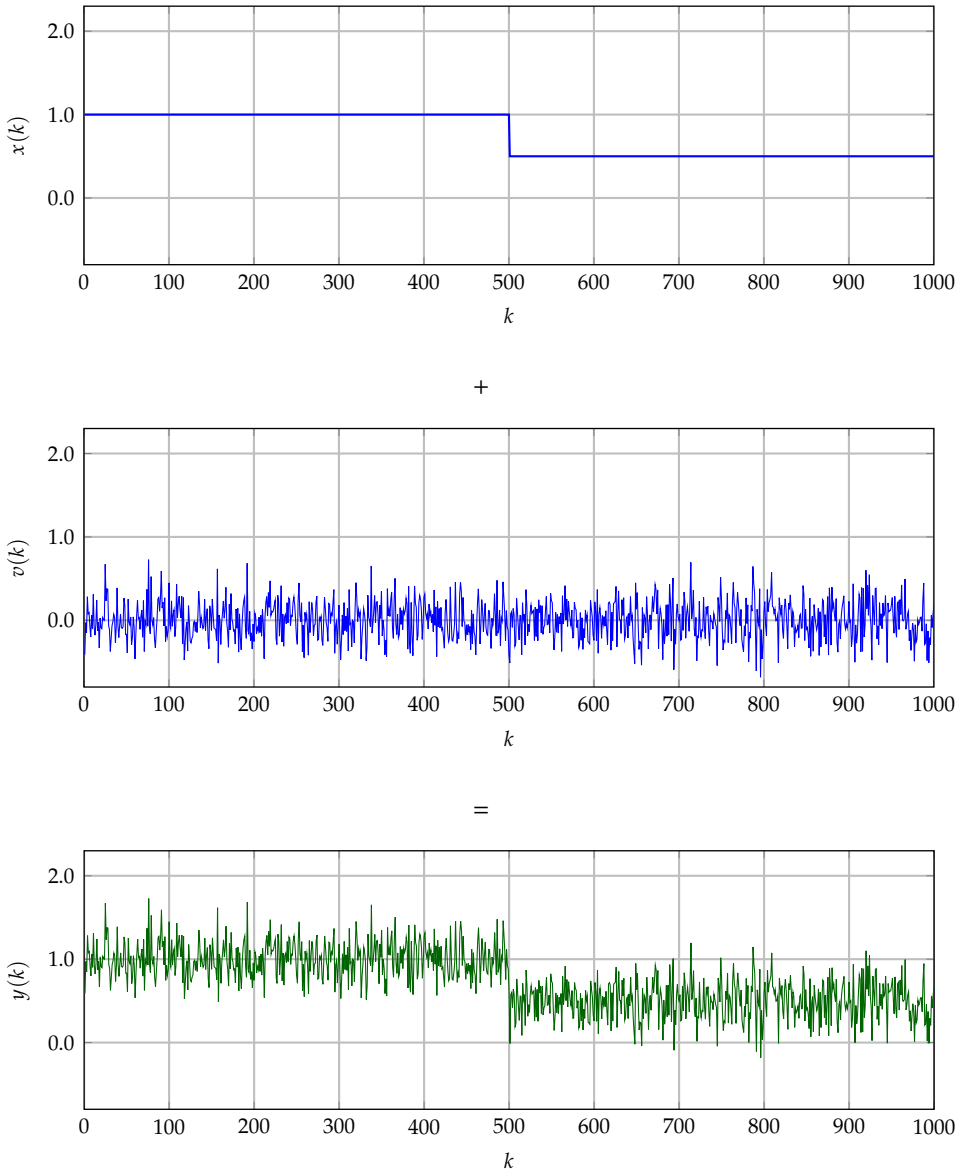


Abb. 9.2: Annahme des Aufbaus des verrauschten Signals mit unbekanntem Bias

Hierbei ist es nicht von großer Bedeutung, ob das Signal  $x(0)$  wie in der Abbildung 9.2 bei 1.0 startet oder einen anderen Wert hat. Wichtiger ist die Kenntnis, dass sich das Signal bei ca.  $k = 500$  um ca. 0.5 erniedrigt und sonst konstant ist (siehe Abb. 9.3). Mit Gleichung (9.8)  $x(k+1) = x(k) + z_1(k)$  folgt für den Verlauf der Größe  $z_1(k)$ :

$$z_1(k) = \begin{cases} 0.0 & \text{für } k \neq 500 \\ -0.5 & \text{für } k = 500 \end{cases} \quad (9.10)$$

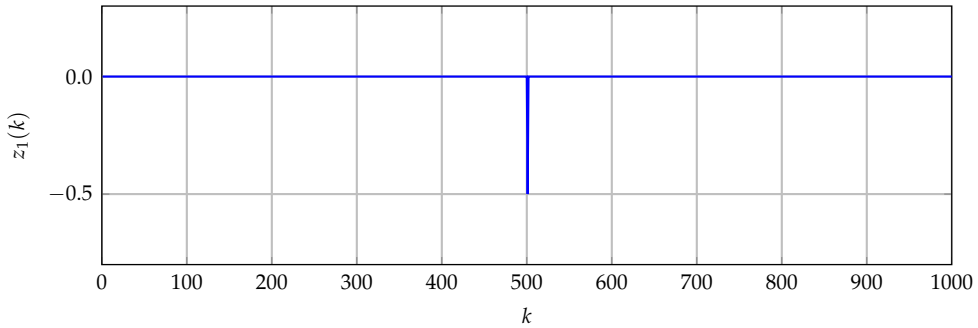


Abb. 9.3: Annahme des Verlaufs der Größe  $z_1(k)$

Für das Kalman-Filter wird lediglich die Varianz  $Q(k)$  der Zufallsgröße  $z_1(k)$  benötigt. Diese berechnet sich allgemein zu:

$$\text{Var}(z_1(k)) = E(z_1(k)^2) - E(z_1(k))^2 \quad (9.11)$$

Geht man davon aus, dass sich die Varianz  $Q$  des Systemrauschens über die Zeit nicht ändert, so lässt sich der Erwartungswert mit dem Mittelwert annähern. Die Größe  $Q$  lässt sich somit schreiben mit:

$$Q = \text{Var}(z_1) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N z_1(n)^2 - \left( \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N z_1(n) \right)^2 \quad (9.12)$$

In diesem Beispiel liegen  $N = 1000$  Werte vor. Mit der Gleichung (9.10) lässt sich die Varianz des Systemrauschens abschätzen.

$$Q = \frac{1}{1000} \cdot 0.5^2 - \left( \frac{1}{1000} \cdot 0.5 \right)^2 \approx 0.25 \cdot 10^{-3} \quad (9.13)$$

## Methode 2: Partielles konstantes Rauschen

Bei dieser Methode berechnet sich  $\underline{G}_d$  zu:  $G_d = \int_0^{T_s} e^{A \cdot v} \cdot G \, dv = \int_0^{T_s} e^0 \cdot 1 \, dv = T_s$

Für das zeitdiskrete System gilt hier:

$$x(k+1) = \underbrace{1}_{A_d} \cdot \underline{x}(k) + \underbrace{0}_{B_d} \cdot u(t) + \underbrace{T_s}_{G_d} \cdot z_2(k) = x(k) + T_s \cdot z_2(k) \quad (9.14)$$

$$y(k) = \underbrace{1}_C \cdot x(k) + \underbrace{0}_D \cdot u(k) + v(k) = x(k) + v(k) \quad (9.15)$$

Es ist offensichtlich, dass die Größe  $z_2(k)$  aus der Methode 2 eine andere Einheit als die Größe  $z_1(k)$  aus Methode 1 hat. Bei der Methode 2 wird die Größe  $z_2(k)$  mit der Abtastzeit  $T_s$  multipliziert, d. h. die Größe  $z_2(k)$  beschreibt die Änderung des Systemrauschens innerhalb eines Abtastintervalls. Somit folgt bei den selben Annahmen/Überlegungen wie bei Methode 1 für die Größe  $z_2(k)$ :

$$z_2(k) = \begin{cases} +\frac{0.0}{T_s} & \text{für } k \neq 500 \\ -\frac{0.5}{T_s} & \text{für } k = 500 \end{cases} \quad (9.16)$$

Die Größe  $z_2(k)$  lässt sich somit in diesem Beispiel in die Größe  $z_1(k)$  mit  $z_1(k) = z_2(k) \cdot T_s$  umrechnen. Folglich erhält man mit der Methode 2 dieselben Ergebnisse wie mit der Methode 1.

Die Anwendung der Methode 3 macht in diesem Beispiel wenig Sinn, da aufgrund dem angenommen Verlauf der Größe  $z(k)$  es sich nicht um weißes, mittelwertfreies Rauschen handelt.

Mithilfe der Abbildung 9.2 lässt sich die Varianz des Messrauschens  $\underline{R}$  bestimmen. Mit der Annahme, dass in diesem Beispiel die Varianz des Messrauschens konstant ist und der Erwartungswert des Messrauschens  $v(k) = 0$  ist, lässt sich die Varianz des Messrauschens  $\underline{R}$  bestimmen.

Mit den Werten aus Abbildung 9.2 wird die Varianz des Messrauschens geschätzt zu:

$$R = \text{Var}(v) = E(v^2) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N v(n)^2 \approx 0.06 \quad (9.17)$$



## 9.2 Kalman-Filter

Für die Berechnung des Kalman-Filters werden die aus dem Kapitel 5 hergeleiteten Formeln verwendet.

$$\begin{aligned}
 \underline{K}(k) &= \underline{\hat{P}}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot (\underline{C} \cdot \underline{\hat{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k))^{-1} \\
 \underline{\tilde{x}}(k) &= \underline{\hat{x}}(k) + \underline{K}(k) \cdot (\underline{y}(k) - \underline{C} \cdot \underline{\hat{x}}(k) - \underline{D} \cdot \underline{u}(k)) \\
 \underline{\tilde{P}}(k) &= (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \underline{\hat{P}}(k) \\
 \underline{\hat{x}}(k+1) &= \underline{A}_d \cdot \underline{\tilde{x}}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) \\
 \underline{\hat{P}}(k+1) &= \underline{A}_d \cdot \underline{\tilde{P}}(k) \cdot \underline{A}_d^T + \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T
 \end{aligned}$$

In diesem Beispiel reduzieren sich die Matrizen zu Skalare und es folgt mit den Größen  $A_d = 1$ ,  $B_d = 0$ ,  $C = 1$ ,  $D = 0$  und  $G_d = 1$  und der Annahme, dass sich die Varianz des Systemrauschens  $Q$  und die Varianz des Messrauschens  $R$  nicht über die Zeit verändert:

$$K(k) = \hat{P}(k) \cdot (\hat{P}(k) + R)^{-1} \quad (9.18)$$

$$\tilde{x}(k) = \hat{x}(k) + K(k) \cdot (y(k) - \hat{x}(k)) \quad (9.19)$$

$$\tilde{P}(k) = (1 - K(k)) \cdot \hat{P}(k) \quad (9.20)$$

$$\hat{x}(k+1) = \tilde{x}(k) \quad (9.21)$$

$$\hat{P}(k+1) = \tilde{P}(k) + Q \quad (9.22)$$

Setzt man Gleichung (9.19) in Gleichung (9.21) und Gleichung (9.20) in Gleichung (9.22) ein, reduziert sich die Berechnung auf drei Gleichungen:

$$K(k) = \hat{P}(k) \cdot (\hat{P}(k) + R)^{-1} \quad (9.23)$$

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) + K(k) \cdot (y(k) - \hat{x}(k)) \quad (9.24)$$

$$\hat{P}(k+1) = (1 - K(k)) \cdot \hat{P}(k) + Q \quad (9.25)$$

Einen guten Startwert stellen die Anfangsbedingungen  $x(1) = y(1)$  und  $P(1) = G_d \cdot Q \cdot G_d$  dar.

### MATLAB: Kalman-Filter Beispiel Bias mit konstantem System- und Messrauschen

```
load -ascii data_y.csv; y = data_y;

%%% INITIALISIERUNG KALMAN-FILTER %%%
R = 0.06;
Q = 0.00025;
x(1) = y(1);
P(1) = Q;

%%% ZYKLISCHE BERECHNUNG KALMAN-FILTER %%%
for k=1:length(y)
    K(k) = P(k) / (P(k) + R);
    x(k+1) = x(k) + K(k) * (y(k) - x(k));
    P(k+1) = (1 - K(k)) * P(k) + Q;
end
```

Mit dieser Anfangsbedingung und den Kalman-Filter Gleichungen lässt sich der Verlauf des unbekannten Bias abschätzen. Der Verlauf ist in Abbildung 9.4 abgebildet.

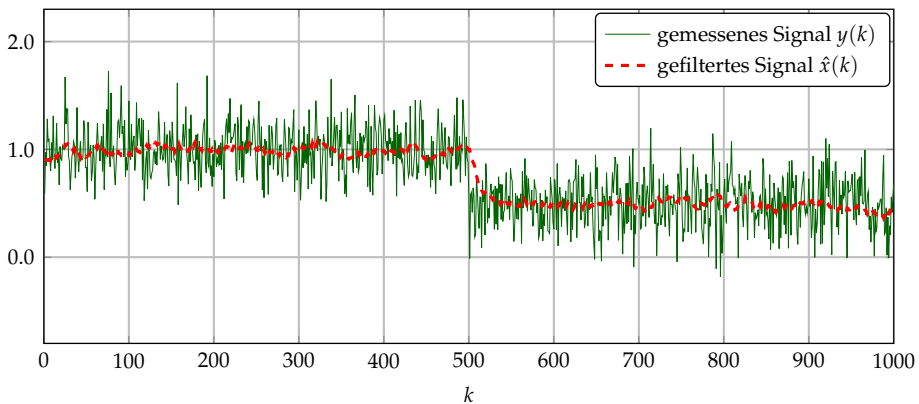


Abb. 9.4: Verlauf des verrauschten Signals des unbekannten Bias und des geschätzten Bias

In Abbildung 9.5 ist der Verlauf der Kalman-Verstärkung  $K(k)$  und der Kovarianz des Schätzfehlers  $\hat{P}(k)$  dargestellt. In diesem Beispiel konvergieren beide Werte schnell auf einen konstanten Wert.

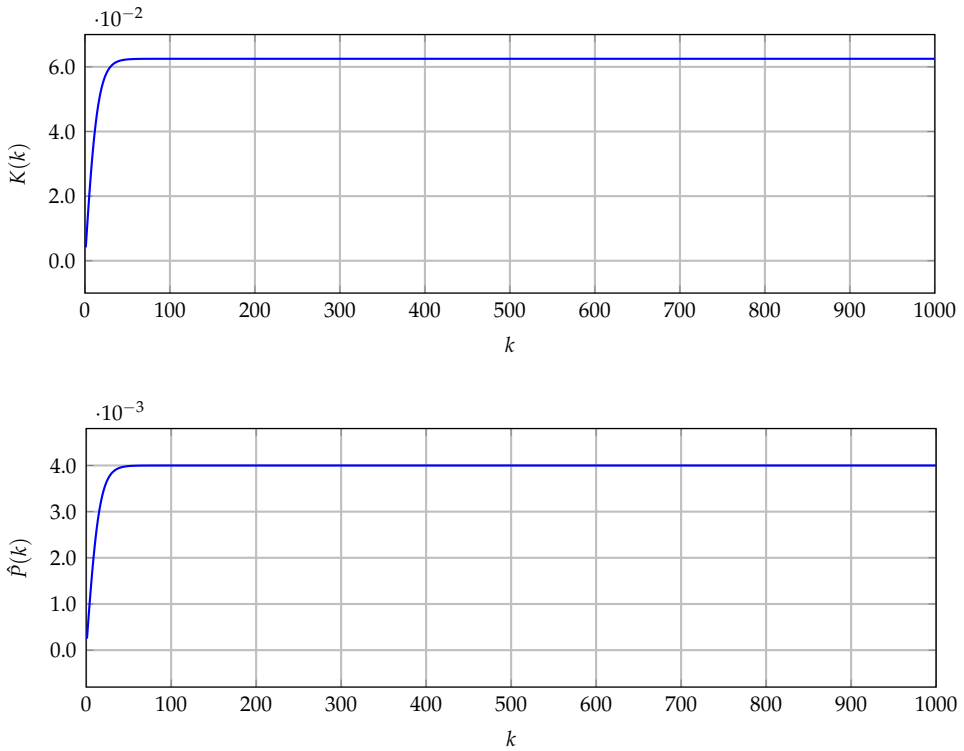


Abb. 9.5: Verlauf der Kalman-Verstärkung  $K$  und der Kovarianz des Schätzfehlers  $\hat{P}$

Die Werte gegen die die Kalman-Verstärkung  $K(k)$  und die Kovarianz des Schätzfehlers  $\hat{P}(k)$  in diesem Beispiel streben, lassen sich mit der folgenden Überlegung berechnen.

Im eingeschwungenen Zustand gilt  $\hat{P}(k+1) = \hat{P}(k) = \hat{P}$  und  $K(k) = K$ . Mit diesen beiden Zusammenhängen lässt sich Gleichung (9.25) schreiben zu:

$$\hat{P} = \hat{P} - K \cdot \hat{P} + Q = \frac{Q}{K} \quad (9.26)$$

Setzt man Gleichung (9.26) in Gleichung (9.23) ein und multipliziert die Gleichung mit  $K/R$ , folgt für  $R \neq 0$ :

$$K = \frac{\frac{Q}{K}}{\frac{Q}{K} + R} = \frac{\frac{Q}{R}}{\frac{Q}{R} + K} \quad (9.27)$$

Umgeformt erhält man die quadratische Gleichung:

$$K^2 + \frac{Q}{R} \cdot K - \frac{Q}{R} = 0 \quad (9.28)$$

Da  $K$  nur positive Werte annehmen kann, hat diese quadratische Gleichung die Lösung:

$$K = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{R} + \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{Q}{R}\right)^2 + \frac{Q}{R}} \quad (9.29)$$

In unserem Beispiel konvergiert somit für  $R = 0.06$  und  $Q = 0.00025$  die Kalman-Verstärkung  $K$  gegen:

$$K \approx 0.063$$

Mithilfe der Gleichung (9.26) lässt sich berechnen, dass die Kovarianz des Schätzfehlers  $\hat{P}$  gegen den folgenden Wert konvergiert:

$$\hat{P} = \frac{Q}{K} \approx \frac{0.00025}{0.063} \approx 0.004$$

Aus Gleichung (9.29) geht hervor, dass die Kalman-Verstärkung im eingeschwungenen Zustand nur von dem Verhältnis  $Q/R$  abhängt. In der Literatur (siehe [10], [22]) wird dieses Verhältnis auch als „*Target Maneuvering Index*“ oder „*Target Tracking Index*“ bezeichnet. Da es sich bei  $Q$  und  $R$  jeweils um Varianzen handelt, ist das Verhältnis  $Q/R$  stets positiv. Somit kann die Kalman-Verstärkung im eingeschwungenen Zustand nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen.

Der durch die Gleichung (9.29) beschriebenen Verlauf der Kalman-Verstärkung ist der Abbildung 9.6 zu entnehmen.

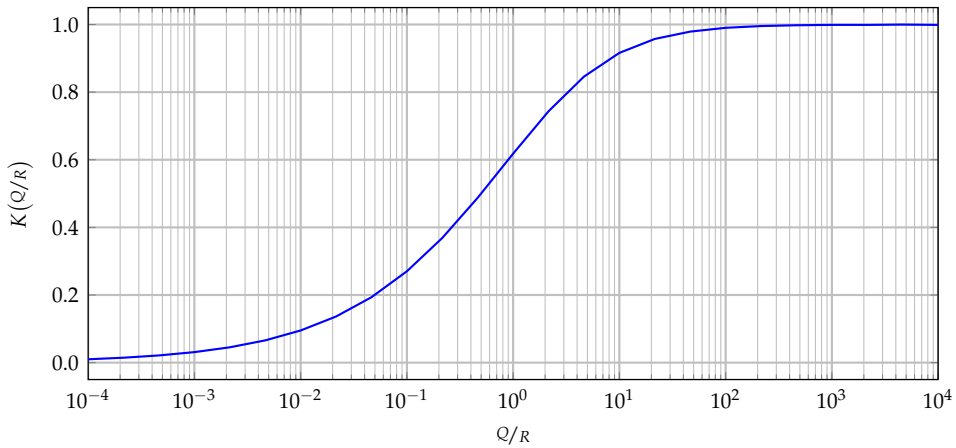


Abb. 9.6: Verlauf der Kalman-Verstärkung  $K$  in Abhängigkeit der Größe  $Q/R$

Durch diese Überlegung liegt in diesem Beispiel die Kalman-Verstärkung im eingeschwungenen Zustand vor und es ist nicht mehr notwendig, diese adaptiv zu bestimmen. Somit reduziert sich die Berechnung des Kalman-Filters in diesem Beispiel auf die Gleichung:

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) + K \cdot (y(k) - \hat{x}(k)) \quad (9.30)$$

mit

$$K = -0.5 \cdot Q/R + \sqrt{0.25 \cdot (Q/R)^2 + Q/R}$$

#### MATLAB: optimiertes Kalman-Filter Beispiel Bias mit konstantem System- und Messrauschen

```
load -ascii data_y.csv; y = data_y;

%%% INITIALISIERUNG KALMAN-FILTER %%%
R = 0.06;
Q = 0.00025;

K = -0.5*Q/R + sqrt(0.25*(Q/R)^2 + Q/R);
P = Q/K;

x(1) = y(1);

%%% ZYKLISCHE BERECHNUNG KALMAN-FILTER %%%
for k=1:length(y)
    x(k+1) = x(k) + K*(y(k) - x(k));
end
```

## 9.3 Übergang in IIR-Filter 1. Ordnung

Betrachtet man das Filterergebnis aus Abbildung 9.4, liegt die Frage nahe, ob ein herkömmliches Tiefpass-Filter bei diesem Beispiel nicht dasselbe Ergebnis geliefert hätte. Wird die Gleichung (9.30) umgeformt

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) + K \cdot (y(k) - \hat{x}(k)) = K \cdot y(k) + (1 - K) \cdot \hat{x}(k) \quad (9.31)$$

mit

$$K = -0.5 \cdot Q/R + \sqrt{0.25 \cdot (Q/R)^2 + Q/R}$$

so ist ersichtlich, dass es sich bei dem Kalman-Filter in diesem Beispiel um ein IIR-Filter (englisch: *infinite impulse response filter*) 1. Ordnung handelt.

Der „Filtergrad“ wird durch die Kalman-Verstärkung  $K$  bzw. durch das Verhältnis  $Q/R$  festgelegt (siehe Abb. 9.7). Bei Werten von  $Q \ll R$  ergibt sich eine Kalman-Verstärkung von  $K \approx 0$  und das Filter berücksichtigt nur unwesentlich aktuelle Messergebnisse, es ist  $\hat{x}(k+1) \approx \hat{x}(k)$ .

Ist  $Q \gg R$  folgt für die Kalman-Verstärkung ein Wert  $K \approx 1$  und  $\hat{x}(k+1) \approx y(k)$ . In diesem Fall „vertraut“ das Filter fast ausschließlich den aktuellen Messergebnissen und nicht dem gefilterten Wert. Mit anderen Worten: das Modell ist zu schlecht. In solchen Fällen sollte das Modell verfeinert werden. Das Ziel sollte sein, ein Modell zu finden, bei dem  $Q < R$  ist.

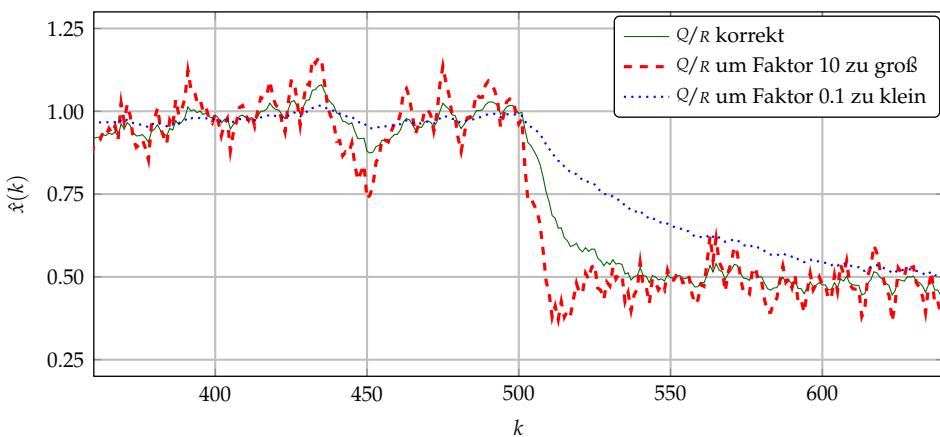


Abb. 9.7: Verlauf der Zustandsvariable  $\hat{x}(k)$  in Abhängigkeit der Größe  $Q/R$

## 9.4 ROSE-Filter

In dem zu Beginn des Kapitels vorgestellten Beispiels wurde die Annahme getroffen, dass sich die Varianz des Messrauschens nicht verändert. Für viele Problemstellungen stellt diese Annahme eine große Einschränkung dar.

Ebenso spielt bei der Bestimmung der Varianz des Systemrauschens der betrachtete Zeitkorridor eine große Rolle. Bei dem Beispiel wurde angenommen, dass sich alle 1000 Abtastwerte das Signal um 0.5 verändert. Hieraus wurde eine Schätzung über die mittlere Varianz des Systemrauschens getroffen. Bei genauerer Betrachtung wäre es aber korrekt gewesen bei allen Zeitpunkten  $k \neq 500$  die Varianz des Systemrauschens auf null zu setzen, da sich der Bias des Signals nicht ändert und der Modellierungsfehler somit null ist. Hingegen müsste bei der Signaländerung von 0.5 (bei  $k = 500$ ) die Varianz des Systemrauschens einen Wert deutlich größer als  $10^{-3}$  annehmen. Der zuvor konstante Wert von  $Q \approx 0.25 \cdot 10^{-3}$  ist folglich nie korrekt.

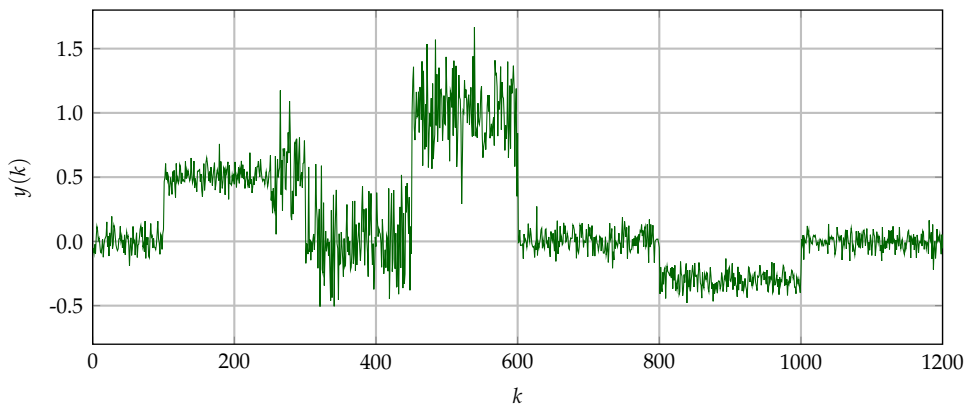


Abb. 9.8: Verlauf eines Signals mit veränderlichem Messrauschen

Um ein optimal arbeitendes Kalman-Filter nutzen zu können, muss die Varianz des Messrauschens und im Speziellen die des Systemrauschens folglich adaptiv bestimmt werden. Zu diesem Zweck soll im Folgenden der Bias des in Abbildung 9.8 mithilfe des ROSE-Filter abgeschätzt werden.

Für viele Problemstellungen ist es ausreichend, den Erwartungswert durch ein IIR-Filter 1. Ordnung zu ersetzen. Wie in dem Kapitel 9.3 gezeigt, entspricht dieses IIR-Filter 1. Ordnung einem Kalman-Filter. Mit anderen Worten wird der Erwartungswert durch eine Tiefpass-Filterung (Mittelwertbildung) ersetzt.

Allgemein wird ein IIR-Filter 1. Ordnung durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$y(n) = b_0 \cdot x(n) + a_1 \cdot y(n-1) \quad (9.32)$$

Die Größe  $x$  stellt die Eingangsgröße,  $y$  die Ausgangsgröße und  $b_0$  und  $a_1$  die Filterkoeffizienten des IIR-Filters dar. Da das Filter keine Verstärkung haben soll, ist die Summe der Filterkoeffizienten gleich 1. Ersetzt man  $b_0 = \alpha$ , so folgt für  $a_1 = 1 - \alpha$ . Die Größe  $\alpha$  entspricht der Kalman-Verstärkung  $\alpha = K$  (siehe Kap. 9.3).

Für die Näherung der Varianz  $M$  folgt:

$$M(k) = E(\Delta \underline{y}(k) \cdot \Delta \underline{y}(k)^T) \approx \alpha_M \cdot \Delta y(k)^2 + (1 - \alpha_M) \cdot M(k-1) \quad (9.33)$$

Ebenso lassen sich die beiden Erwartungswerte für die Bestimmung der Varianz des Messrauschens nähern.

$$E1(k) = E(\underline{y}(k)) \approx \alpha_R \cdot y(k) + (1 - \alpha_R) \cdot E1(k-1) \quad (9.34)$$

$$EE1(k) = E(\underline{y}(k) \cdot \underline{y}(k)^T) \approx \alpha_R \cdot y(k) \cdot y(k) + (1 - \alpha_R) \cdot EE1(k-1) \quad (9.35)$$

Mit der Variablen  $\alpha$  stellt man die Grenzfrequenz des Tiefpass-Filters ein. Je kleiner der Wert  $\alpha$  gewählt wird, desto schwächer reagiert das Filter auf Änderungen des Erwartungswerts. Auf der anderen Seite führt ein zu großer Wert dazu, dass der Erwartungswert zu ungenau bestimmt wird und somit das Kalman-Filter nicht mehr optimal arbeitet.

Sinnvoll ist es, den Wert  $\alpha$  auch bei stark sich ändernden Erwartungswerten (Varianzen des Messrauschens) nicht größer als 0.5 zu wählen. Bei sich langsam ändernden Varianzen können kleinere Werte als 0.5 gewählt werden. Nach der Gleichung (9.32) entspricht ein Wert von  $\alpha = K = 0.5$  einem Verhältnis von  $Q/R=0.5$ . Somit sollte zwischen

$$0 < \alpha \leq 0.5 \quad (9.36)$$

sein.

Für dieses Beispiel wurden die Werte  $\alpha_R = 0.5$  und  $\alpha_M = 0.3$  gewählt. Aufgrund der Näherung der Erwartungswerte durch ein Kalman-Filter (IIR-Filter) kann es im Speziellen bei großen Werten von  $\alpha$  dazu kommen, dass  $Q$  kleiner null geschätzt wird. Diese Werte sind unplausibel und werden auf null gesetzt. Aus dem selben Grund wird  $R$  oft zu klein abgeschätzt. Dieser Effekt wird mithilfe eines wählbaren Verstärkungsfaktors  $\gamma$  ausgeglichen. In diesem Beispiel wurde dieser auf 9.0 gewählt.



Anbei das entsprechende MATLAB<sup>®</sup>-Programm zur Berechnung des ROSE-Filters.

#### MATLAB: ROSE-Filter für Bias-Schätzung

```
clear all; clc;

Gamma    = 9.0;           % Verstärkungsfaktor Messrauschen
Alpha_R  = 0.5;           % Kalman-Verstärkung Varianz Messrauschen
Alpha_M  = 0.3;           % Kalman-Verstärkung Varianz M

Ts = 0.1;                 % Abtastzeit
Ad = 1;                   % Systemmatrix
Bd = 0;                   % Eingangsmatrix
C = 1;                    % Ausgangsmatrix
D = 0;                    % Durchgangsmatrix
G = 1;                    % Systemfehlermatrix

%%% MESSDATEN - GENERATOR %%%
t = Ts*(1:1:1200);
ao = [zeros(1,100) +.5*ones(1,200) zeros(1,150) +1*ones(1,150)...
      zeros(1,200) -.3*ones(1,200) zeros(1,200)];
Rg = 5E-3;
v = [sqrt(1*Rg)*randn(1,250) sqrt(10*Rg)*randn(1,350) sqrt(1*Rg)*randn(1,600)];
y = [ao + v];
u = zeros(1,length(y));

%%% INIT ROSE - FILTER %%%
x_dach = [y(1)];
p_tilde = 0;
E1 = y(1);
EE1 = y(:,1)*y(:,1)';
M = 0;

%%% ROSE - FILTER %%%
for k=1:length(y)
    %-- Bestimmung R mit IIR-Filter 1. Ordnung --
    E1 = Alpha_R*y(:,k) + (1-Alpha_R)*E1;
    EE1 = Alpha_R*y(:,k)*y(:,k)' + (1-Alpha_R)*EE1;
    R = Gamma*(EE1 - E1*E1');

    %-- Bestimmung M mit IIR-Filter 1. Ordnung --
    dy = y(:,k) - C*x_dach - D*u(k);
    M = Alpha_M.*dy*dy' + (1-Alpha_M).*M;

    %-- Bestimmung Q --
    Q(k) = C'*(M - R)*C - Ad*p_tilde*Ad';
    if Q(k)<0
        Q(k)=0;
    end;

    %-- Kalman Gleichungen --
    p_dach = Ad*p_tilde*Ad' + G*Q(k)*G';
    K = p_dach*C'*pinv(C*p_dach*C' + R);
    x_tilde = x_dach + K*dy;
    p_tilde = (eye(length(Bd)) - K*C)*p_dach;
    x_dach = Ad*x_tilde + Bd*u(k);
end
```

In Abbildung 9.9 ist der Verlauf der durch die IIR-Filter geschätzten Varianzen des System- und Messrauschens zu sehen. Bei dem Verlauf der Größe  $R$  ist deutlich der Anstieg der Varianz des Messrauschens zwischen  $k = 250$  und  $k = 600$  zu sehen. Das Rauschen auf der Größe  $R$  stört das ROSE-Filter nur unwesentlich. Die Varianz des Systemrauschens  $Q$  wird sehr gut abgeschätzt. Die Größe  $Q$  ist, bis an den Sprungstellen des Signals  $y(k)$ , sehr klein.

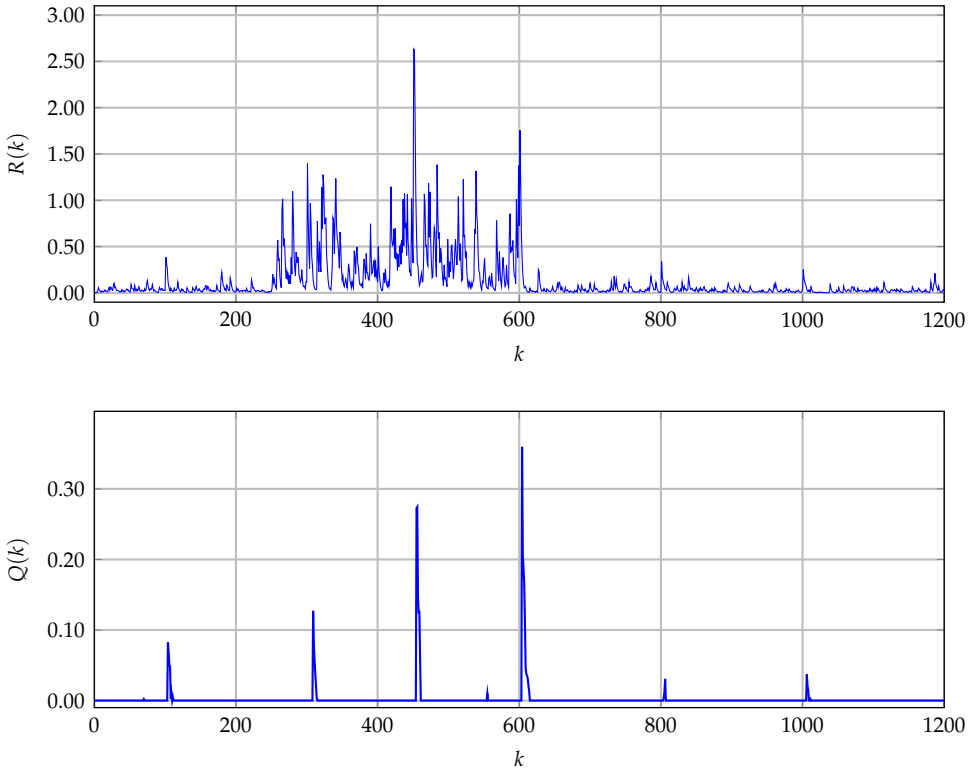


Abb. 9.9: Verlauf der Varianz des Messrauschens  $R(k)$  und der des Systemrauschens  $Q(k)$

Im Folgenden wird das Kalman-Filter mit festen Werten für  $R$  und  $Q$  verglichen mit dem ROSE-Filter, bei dem die beiden Größen adaptiv geschätzt werden (siehe Abb. 9.10). Es ist auffallend, dass über den kompletten Verlauf das ROSE-Filter bessere Ergebnisse als

das klassische Kalman-Filter mit festen Werten für  $R$  und  $Q$  liefert. Dies wird im Bereich zwischen  $k = 250$  und  $k = 600$  besonders deutlich.

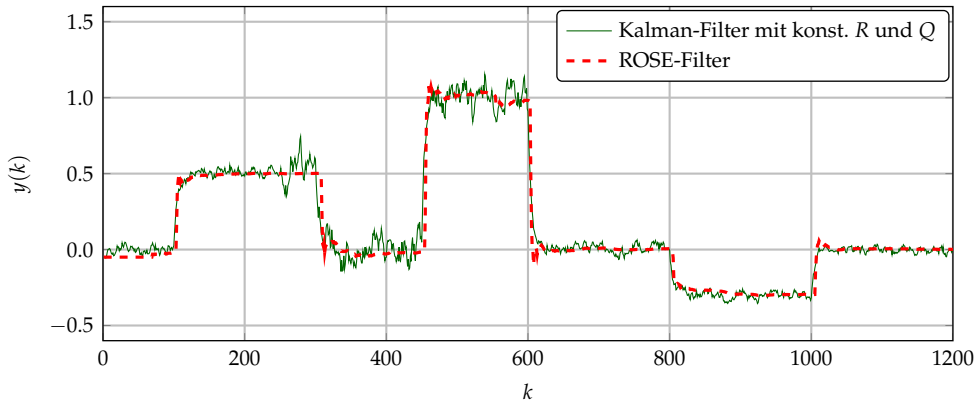


Abb. 9.10: Verlauf der Ausgangsgröße des Kalman-Filters mit festen Werten für  $R$  und  $Q$  und des ROSE-Filters

Abschließend ist in Abbildung 9.11 das Eingangssignal  $y(k)$  dem Ausgangssignal des ROSE-Filters gegenübergestellt.

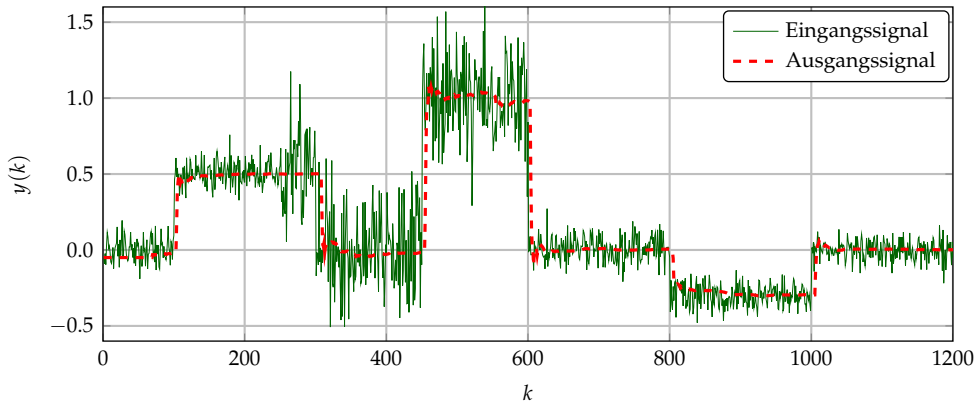


Abb. 9.11: Verlauf der Eingangs- und Ausgangsgröße des ROSE-Filters

## KAPITEL 10

# BEISPIEL: MESSRAUSCHEN MIT OFFSET

Kalman-Filter besitzen die Einschränkung, dass der Schätzfehler  $\hat{\varepsilon}(k)$  und das Messrauschen  $\underline{v}(k)$  unkorreliert sein müssen. Ein Messrauschen mit Offset führt dazu, dass diese Bedingung oft nicht mehr gegeben ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn ein solcher Offset den Schätzfehler bei der Zustandsschätzung vergrößert.

Aus diesem Grund ist für viele Kalman-Filter die Forderung aufgestellt, dass der Erwartungswert des Messrauschens  $E(\underline{v}(k)) = \underline{0}$  ist. Mit derselben Argumentation wird auch gefordert, dass der Erwartungswert des Systemrauschens  $E(\underline{z}(k)) = \underline{0}$  sein muss.

Bei der Verwendung von Kalman-Filtern bedeutet dies jedoch eine große Einschränkung. In diesem Kapitel soll nun anhand des einführenden Beispiels mit der Mondfähre gezeigt werden, wie es möglich ist, trotz eines Offsets im Beschleunigungssignals die Zustandsgrößen korrekt zu bestimmen.

## 10.1 Problematik

Bekannt ist, dass z. B. Beschleunigungssensoren einen unbekannten Offset haben, der sich u. a. durch Temperaturänderungen zeitlich verändert. In der Regel ist dieser Offset-Drift langsam und nicht groß. Wird das Beschleunigungssignal jedoch dazu benutzt, die Relativgeschwindigkeit bzw. den zurückgelegten Weg zu bestimmen, ist der Offset sehr störend und verfälscht merklich die geschätzten Größen.

Zur Verdeutlichung des Problems wird angenommen, dass das Beschleunigungssignal, anders als im einführenden Beispiel aus Kapitel 1, einen kleinen unbekannten Offset besitzt, der sich langsam über die Zeit verändern kann (siehe Abb. 10.1).

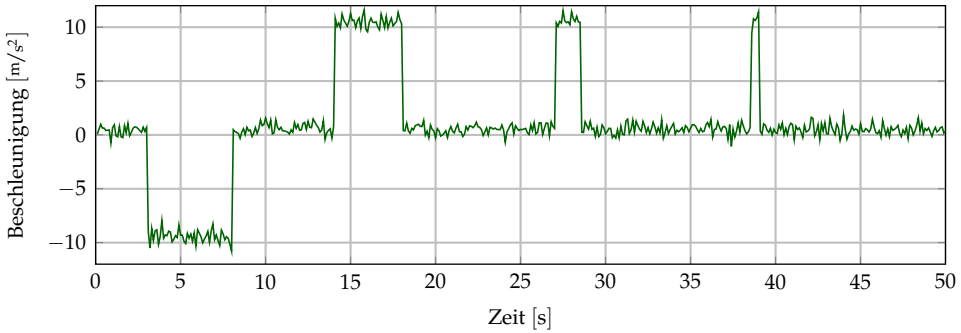


Abb. 10.1: Beschleunigungssignal mit unbekanntem Offset im Messrauschen

Beachtet man dies nicht und schätzt fälschlicherweise mit den aus Kapitel 1 bestimmten Kalman-Filter die Geschwindigkeit und das Positionssignal (siehe Abb. 10.2), erkennt man, dass die Geschwindigkeit am Ende der Messung nicht 0 m/s, sondern ca. 2 m/s ist und die Position der Mondfähre auch nicht 0 m, sondern ca. 5 m ist.

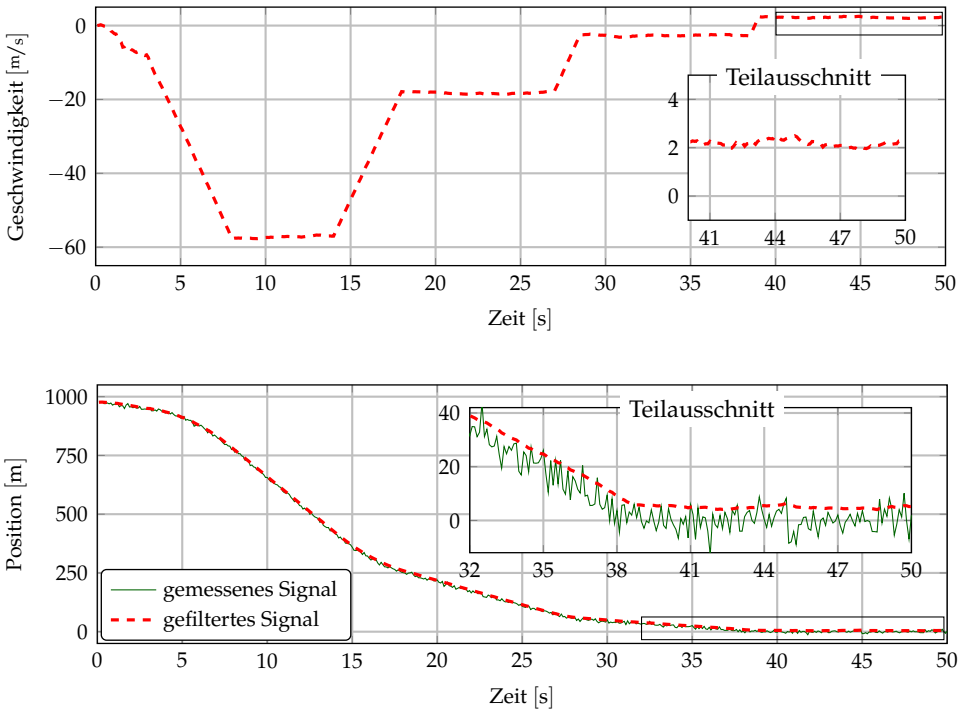


Abb. 10.2: Inkorrekte Schätzung aufgrund eines Offsets im Messrauschen des Beschleunigungssignals

Diese inkorrekte Schätzung rührt aus der Nichtbeachtung, dass alle Messrauschen mittelwertfrei sein müssen. Dieses Problem lässt sich lösen, indem der unbekannte Offset als weitere Zustandsgröße geschätzt wird.

## 10.2 Filterentwurf

### Zeitkontinuierliche Systembeschreibung

Zur Systembeschreibung wird der Zustandsvektor um den unbekannten Offset des Beschleunigungssignals erweitert.

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \\ a(t) \\ a_{\text{Offset}}(t) \end{bmatrix} \quad (10.1)$$

Die Größe  $a(t)$  stellt die korrekte, tatsächlich auf die Mondfähre wirkende Beschleunigung und  $a_{\text{Offset}}(t)$  der Offset des Beschleunigungssignals dar.

Für die Ableitung des Zustandsvektors  $\dot{\underline{x}}(t)$  folgt:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{a}(t) \\ \dot{a}_{\text{Offset}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ a(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ a(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

Die Modellungenauigkeit, dass die Beschleunigungsänderungen nicht null sind, wird durch die Einführung zweier Zufallszahlen  $z_1$  und  $z_2$  verbessert.

Dies lässt sich im Zustandsraum modellieren mit:

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{a}(t) \\ \dot{a}_{Offset}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \\ a(t) \\ a_{Offset}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{u}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \cdot \underline{u}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{G}} \cdot \underline{z}(t)
 \end{aligned} \tag{10.3}$$

Werden messtechnisch die Größen  $h(t)$  und  $a(t)$  erfasst, ist somit  $\underline{y}(t) = [h(t), a(t)]^T$  und es gilt für die zweite Zustandsgleichung:

$$\begin{aligned}
 \underline{y}(t) &= \begin{bmatrix} h(t) \\ a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \\ a(t) \\ a_{Offset}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{u}(t) \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot \underline{u}(t)
 \end{aligned} \tag{10.4}$$

## Zeitdiskrete Systembeschreibung

Werden die Signale alle  $T_s$  Sekunden abgetastet, gilt für die zeitdiskrete Systemmatrix  $\underline{A}_d$  und die zeitdiskrete Eingangsmatrix  $\underline{B}_d$ :

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s}, \quad \underline{B}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{B} \, dv \tag{10.5}$$

Die Berechnung der Systemmatrix  $\underline{A}_d$  kann z. B. mithilfe der Laplacetransformation erfolgen oder mit dem folgenden MATLAB<sup>®</sup>-Code durchgeführt werden.

**MATLAB: Berechnung  $A_d$  und  $B_d$** 

```
syms Ts 'real';

A = [0 1 0 0;
      0 0 1 0;
      0 0 0 0;
      0 0 0 0];
B = [0; 0; 0; 0];

Ad = simplify(expm(Ts*A))
Bd = simplify(int(expm(Ts*A)*B))
```

Die Berechnung ergibt:

$$\underline{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & T_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Beobachtbarkeit**

Die Überprüfung der Beobachtbarkeit des Systems erfolgt durch die Bestimmung des Rangs der Beobachtbarkeitsmatrix  $\underline{S}_B^*$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Rang}(\underline{S}_B^*) &= \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^{n-1} \end{bmatrix} \right) = \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^2 \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2T_s & 2\frac{T_s^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3T_s & \frac{9T_s^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right) = 4 \quad \text{für } T_s > 0 \end{aligned} \quad (10.6)$$



Der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix ist für  $T_s > 0$  gleich der Anzahl der Elemente des Zustandsvektors  $\underline{x}(k)$  ( $n=4$ ) und somit ist das System beobachtbar.

Im Folgenden ist der entsprechende MATLAB<sup>®</sup>-Code zur Bestimmung des Rangs der Beobachtbarkeitsmatrix  $S_B^*$  abgebildet.

#### MATLAB: Berechnung Rang der Beobachtbarkeitsmatrix $S_B^*$

```
syms Ts 'real';

A = [0 1 0 0;
      0 0 1 0;
      0 0 0 0;
      0 0 0 0];
C = [1 0 0 0;
      0 0 1 -1];

Ad = simplify(expm(Ts*A));

SB=C;
for n=1:length(A)-1
    SB = [SB; C*Ad^n];
end

rank(SB)
```

## Bestimmung des System- und Messrauschens

In Kapitel 8 sind drei Methoden zur Bestimmung der Größe  $\underline{Q}^*(k) = \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T$  vorgestellt worden. Mit der Methode 1 folgt für  $\underline{G}_d$ :

$$\underline{G}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{G} = \underline{A}_d \cdot \underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & T_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_s^2}{2} & 0 \\ T_s & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.7)$$

Die Matrix  $\underline{Q}(k)$  ist in diesem Beispiel eine  $2 \times 2$ -Matrix. Unter der Voraussetzung, dass eine Änderung des Beschleunigungssignals (modelliert durch die Rauschgröße  $z_1(k)$ ) nicht mit einer Änderung des Offsets des Beschleunigungssensors (modelliert durch die Rauschgröße  $z_2(k)$ ) zusammenhängt, ist die Kovarianz  $\text{Cov}(z_1(k), z_2(k)) = 0$ . Darüber

hinaus wird angenommen, dass die beiden Rauschgrößen  $z_1(k)$  und  $z_2(k)$  normalverteilt sind.

$$\underline{Q}(k) = \begin{bmatrix} \text{Var}(z_1(k)) & \text{Cov}(z_1(k), z_2(k)) \\ \text{Cov}(z_1(k), z_2(k)) & \text{Var}(z_2(k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{z_1}^2(k) & 0 \\ 0 & \sigma_{z_2}^2(k) \end{bmatrix} \quad (10.8)$$

Die Varianz  $\text{Var}(z_1(k))$  wurde im einführenden Beispiel im Kapitel 1.3.1 schon mit  $\text{Var}(z_1(k)) = \sigma_{z_1}^2 = \left(\frac{10}{3} \text{m/s}^2\right)^2 = 11,1 \text{m}^2/\text{s}^4$  festgelegt.

Bei der Festlegung der Varianz  $\text{Var}(z_2(k))$  wird die selbe Argumentation wie in dem Beispiel in Kapitel 9.1 verwendet. Es wird davon ausgegangen, dass der Offset lange Zeit konstant ist und sich dann sprunghaft ändert. Für eine Offsetänderung eines Beschleunigungssensors sind sinnvolle Werte z. B., dass sie alle 1000 Abtastwerte der Offset um  $0.2 \text{m/s}^2$  ändert. Diese ist eine sehr grobe Abschätzung, hilft aber, die Größenordnung der Varianz  $\text{Var}(z_2(k))$  zu bestimmen. Mit diesen Annahmen folgt:

$$\text{Var}(z_2(k)) = \sigma_{z_2}^2 = \left(\frac{0.2 \text{m/s}^2}{1000}\right)^2 = 4 \cdot 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}^4 \quad (10.9)$$

In der Regel hat ein realer Sensor einen vielfach kleineren Offsetdrift. Wählt man jedoch kleinere Werte, führt dies dazu, dass das Kalman-Filter ggf. zu langsam einschwingt. Ist eine schnelle Bestimmung des Offsets nicht vorrangig, kann der Wert problemlos verringert werden.

Für  $\underline{Q}^*(k)$  folgt:

$$\underline{Q}^*(k) = \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \begin{bmatrix} \frac{T_s^2}{2} & 0 \\ T_s & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{z_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{z_2}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{T_s^2}{2} & T_s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} T_s^4 \sigma_{z_1}^2 & \frac{1}{2} T_s^3 \sigma_{z_1}^2 & \frac{1}{2} T_s^2 \sigma_{z_1}^2 & 0 \\ \frac{1}{2} T_s^3 \sigma_{z_1}^2 & T_s^2 \sigma_{z_1}^2 & T_s \sigma_{z_1}^2 & 0 \\ \frac{1}{2} T_s^2 \sigma_{z_1}^2 & T_s \sigma_{z_1}^2 & \sigma_{z_1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_2}^2 \end{bmatrix} \quad (10.11)$$

Berechnet man die Kovarianz des Systemrauschens  $\underline{Q}^*(k)$  mit der Methode 2 oder 3 erhält man ganz ähnliche Matrizen, diese führen nur zu unmerklich anderen Ergebnissen. Aufgrund dessen wird für dieses Beispiel auf die Berechnung mit den anderen Methoden verzichtet.

Das Messrauschen verändert sich durch die Einführung eines weiteren Zustands im Zustandsvektor nicht und es werden die im einführenden Beispiel in Kapitel 1.3.2 bestimmten Werte für die Messrausch-Matrix  $\underline{R}(k)$  verwendet.

$$\underline{R}(k) = \text{Var}(v(k)) = \begin{bmatrix} \sigma_h^2 & 0 \\ 0 & \sigma_a^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

## 10.3 Implementierung und Ergebnisse

Mit dem aufgeführten MATLAB<sup>®</sup>-Code lassen sich die Zustandsgrößen, die Position (Höhe)  $h(t)$ , die Geschwindigkeit  $v(t)$ , die Beschleunigung (ohne Offset)  $a(t)$  und der Offset des Beschleunigungssignal  $a_{\text{Offset}}(t)$  des Kalman-Filters bestimmen.

Die Initialisierung des Kalman-Filters geschieht wie im einführenden Beispiel. Zusätzlich wird der Offset des Beschleunigungssignals  $a_{\text{Offset}}$  zu Beginn mit dem Wert 0 initialisiert.

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} h(0) \\ v(0) \\ a(0) \\ a_{\text{Offset}}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ 0 \\ y_2(0) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.13)$$

**MATLAB: Kalman-Filter für Messrauschen mit Offset**

```

load -ascii data_t_y.dat;  t=data_t_y(:,1);  y=data_t_y(:,2:3);  u=zeros(1,length(y));

Ts = 0.1;

R = [20 0.0;
     0 0.2];

Q1 = 100/9;
Q2 = 0.04/1000;

Ad = [1  Ts  0.5*Ts^2  0;
      0  1   Ts       0;
      0  0   1        0;
      0  0   0        1];

Bd = [0;
      0;
      0;
      0];

C = [1 0 0 0;
     0 0 1 -1];

GQG = [Q1*Ts^4/4  Q1*Ts^3/2  Q1*Ts^2/2  0;
        Q1*Ts^3/2  Q1*Ts^2   Q1*Ts     0;
        Q1*Ts^2/2  Q1*Ts     Q1        0;
        0          0         0         Q2];

%%% INITIALISIERUNG KALMAN-FILTER %%%
x = [y(1,1);
     0.0;
     y(1,2);
     0.0];

P = 3*[1 0 0 0;
       0 1 0 0;
       0 0 1 0;
       0 0 0 .01];

%%% ZYKLISCHE BERECHNUNG KALMAN-FILTER %%%
for k=1:length(y)
    K = P*C'*pinv(C*P*C' + R);
    x = x + K*(y(k,:)' - C*x);
    P = (eye(length(Bd)) - K*C)*P;

    s(k)=x(1);  v(k)=x(2);  a(k)=x(3);  ao(k)=x(4);

    x = Ad*x + Bd*u(k);
    P = Ad*P*Ad' + GQG;
end

```

In Abbildung 10.3 ist der Verlauf des geschätzten Offsets des Beschleunigungssignals  $a_{Offset}$  dargestellt.

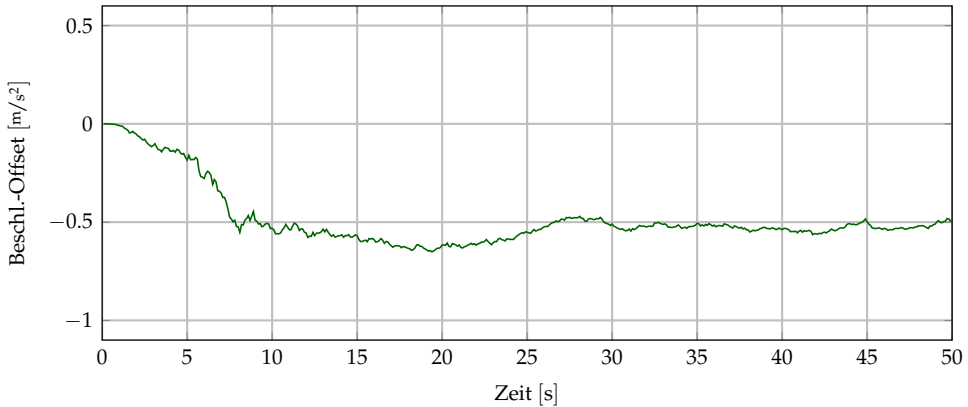


Abb. 10.3: Schätzung des Offsets des Beschleunigungssignals  $a_{Offset}$

Es ist zu erkennen, dass das Kalman-Filter nach ca. 8 Sekunden eingeschwungen ist. Die Einschwingdauer wird durch die Varianz  $\sigma_{z2}^2$  maßgeblich bestimmt. Je langsamer sich der Offset verändert, desto kleiner müsste die Varianz  $\sigma_{z2}^2$  gewählt werden, dies führt jedoch dann zu langen Einschwingdauern. Ein fälschlicherweise zu groß gewählter Wert für die Varianz  $\sigma_{z2}^2$  führt zwar zu kürzeren Einschwingdauern, jedoch wird dann der Offset ungenauer abgeschätzt.

Schätzt man die Zustandsgrößen Position (Höhe)  $h(t)$  und die Geschwindigkeit  $v(t)$  einmal mit dem im einführenden Beispiel aus Kapitel 1 beschriebenen Kalman-Filter und zum anderen mit dem in diesem Kapitel entworfenen Kalman-Filter mit zusätz-

licher Offsetschätzung, wird der Vorteil der zusätzlichen Offsetschätzung deutlich. In Abbildung 10.4 sind die Ergebnisse der beiden Schätzungen gegenübergestellt.

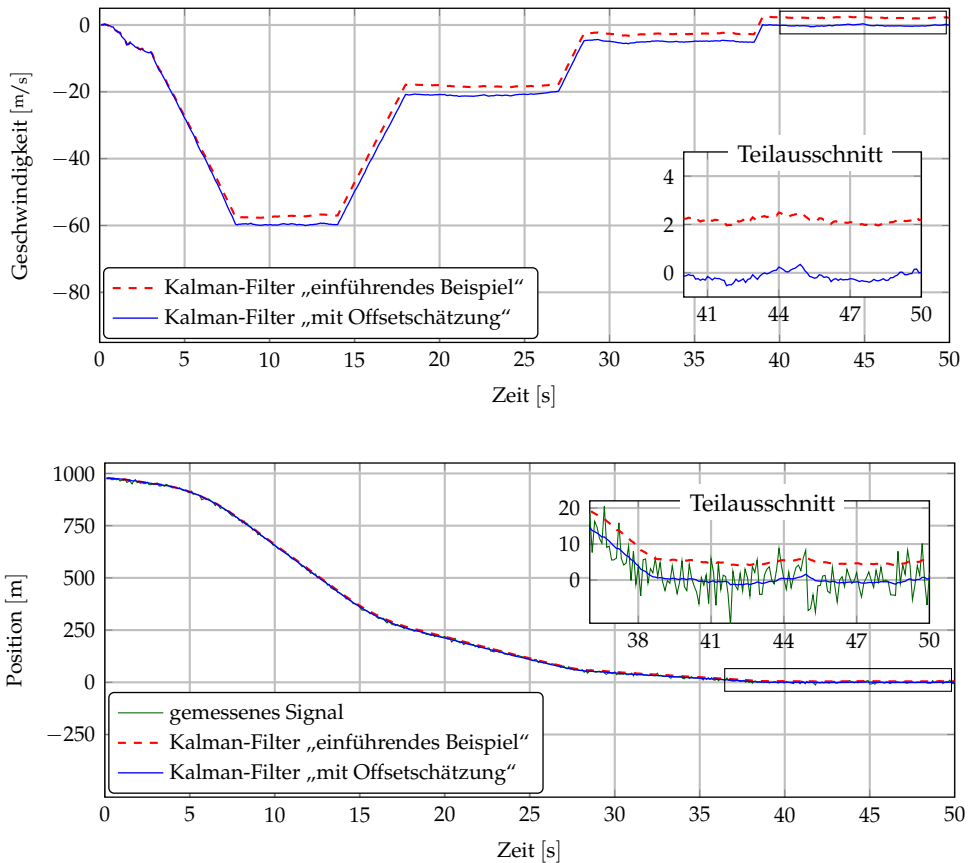


Abb. 10.4: Vergleich der Schätzungen der beiden Kalman-Filter

Die zusätzlich eingeführte Zustandsgröße  $a_{Offset}$  erhöht auf der einen Seite den Rechenaufwand, da die Matrizen/Vektoren vergrößert wurden. Auf der anderen Seite ist die Qualität der erzielten Schätzung deutlich besser geworden.

## KAPITEL 11

# BEISPIEL: ALTERNATIVES BEWEGUNGSMODELL DER MONDFÄHRE

Bezug nehmend auf das einführende Beispiel aus Kapitel 1 soll in diesem Kapitel das Modell mit einem alternativen (reduzierten) Zustandsvektor in die Zustandsraumdarstellung überführt werden. Hierbei wird im Gegensatz zu allen bisherigen Beispielen eine der messtechnisch erfassbaren Größen über die Eingangsgröße  $u(t)$ , statt über die Ausgangsgröße  $y(t)$  dem Kalman-Filter zugeführt.

Dieser alternative Kalman-Filterentwurf weist einige Besonderheiten auf, im Speziellen bei der Modellierung des Systemrauschens. Am Ende des Kapitels werden die geschätzten Zustandsgrößen mit den Simulationsergebnissen aus dem einführenden Beispiel aus Kapitel 1 verglichen.

## 11.1 Filterentwurf

### Zeitkontinuierliche Systembeschreibung

Das aus dem einführenden Beispiel aus Kapitel 1 zugrunde liegende Modell war ein Punkt-Masse-Modell mit:

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{h}(t) \quad (11.1)$$

Wählt man den Zustandsvektor  $\underline{x}(t)$  nun zu:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

ist die Ableitung des Zustandsvektors  $\dot{\underline{x}}(t)$  gegeben durch:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ a(t) \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

Es wird wieder angenommen, dass messtechnisch die Größen  $h(t)$  und  $a(t)$  verfasst werden. Somit ist  $\underline{y}(t) = [h(t), a(t)]^T$  und die beiden Zustandsgleichungen lassen sich schreiben zu:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{u}(t) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \cdot a(t) \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) &= \begin{bmatrix} h(t) \\ a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{u}(t) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot a(t) \end{aligned} \quad (11.5)$$

In diesem Fall entspricht die Eingangsgröße  $\underline{u}(t)$  der Beschleunigung  $a(t)$ . Zum System-/Prozess-Rauschen lässt sich zu diesem Zeitpunkt noch keine Angabe machen.



## Zeitdiskrete Systembeschreibung

Im Kapitel 2.5 (Beispiel 2) wurde die zeitdiskrete Systembeschreibung des Modells schon bestimmt. Unter der Annahme, dass die Signale alle  $T_s$  Sekunden abgetastet werden, gilt:

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.6)$$

$$\underline{B}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot \nu} \cdot \underline{B} d\nu = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\nu = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} \nu \\ 1 \end{bmatrix} d\nu = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix} \quad (11.7)$$

Die zeitdiskrete Systembeschreibung des Modells lautet:

$$\underline{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_d} \cdot \underline{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix}}_{\underline{B}_d} \cdot a(k) \quad (11.8)$$

$$\underline{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \underline{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot a(k) \quad (11.9)$$

## Beobachtbarkeit

Mithilfe der Bestimmung des Rangs der Beobachtbarkeitsmatrix  $\underline{S}_B^*$  lässt sich die Beobachtbarkeit des Systems überprüfen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Rang}(\underline{S}_B^*) &= \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^{n-1} \end{bmatrix} \right) = \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & T_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2 \quad \text{für } T_s > 0 \end{aligned} \quad (11.10)$$

Der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix ist für  $T_s > 0$  gleich der Anzahl der Elemente der Zustandsvariablen  $\underline{x}(k)$  ( $n=2$ ) und somit ist das System beobachtbar.

## Bestimmung des System- und Messrauschens

Abbildung 11.1 verdeutlicht das aktuell modellierte zeitdiskrete System. Das Ausgangssignal  $\underline{y}(k)$  wird mit dem Messrauschen  $\underline{v}(k)$  überlagert und der Zustandsvektor  $\underline{x}(k+1)$  mit dem Systemrauschen  $\underline{G} \cdot \underline{z}(k)$ . Die Eingangsgröße  $\underline{u}(k)$  besitzt kein Rauschen. Das Problem ist nun, dass in diesem Beispiel die Eingangsgröße  $\underline{u}(k)$  (Beschleunigung  $a(k)$ ) nur als verrauschtes Signal bekannt ist.

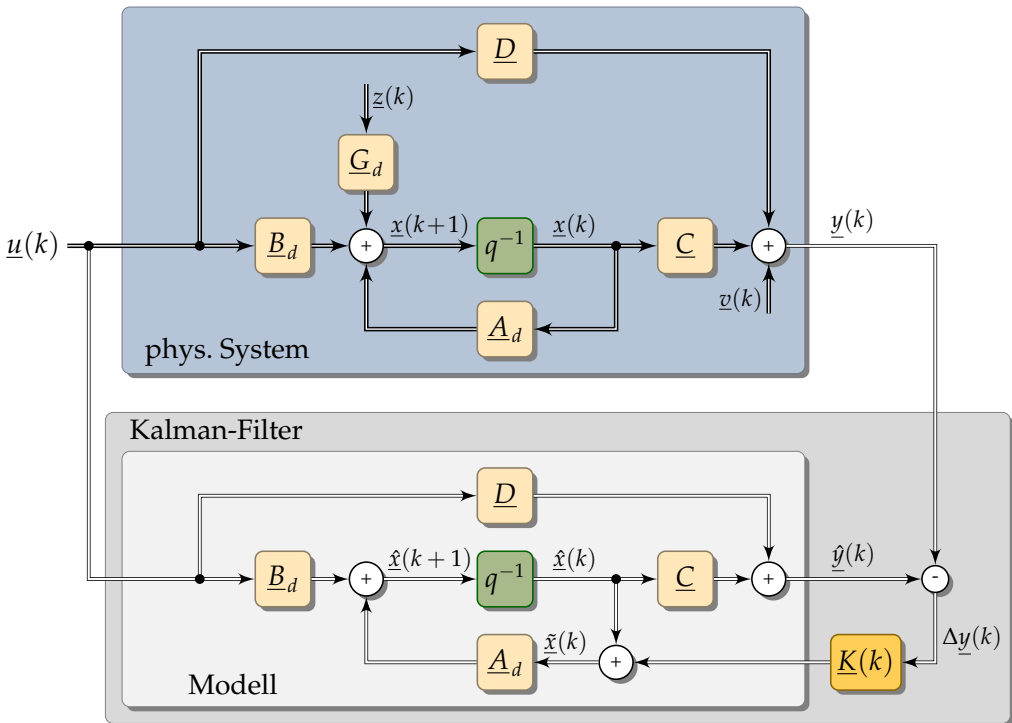


Abb. 11.1: Gesamtstruktur des physikalischen Systems inkl. Kalman-Filter

Dieses Problem lässt sich lösen, indem man davon ausgeht, dass das verrauschte Eingangssignal  $\underline{u}(k)$  von einem Rauschen  $\underline{z}(k)$  derart überlagert wird, dass das Rauschen des Eingangssignals verschwindet. Hierzu wird die Matrix  $\underline{G}$  gleich  $\underline{B}_d$  gewählt und das Systemrauschen  $\underline{z}(k)$  entspricht dem Messrauschen des Beschleunigungssignals  $a(k)$ .

Mit anderen Worten: wird statt dem Beschleunigungssignal das verrauschte Beschleunigungssignal verwendet, entspricht die Varianz des Messrauschens  $Q(k)$  der Varianz des Messrauschens des Beschleunigungssignals. Das dieser Überlegung zugrundeliegendem Modell ist in Abbildung 11.2 dargestellt.

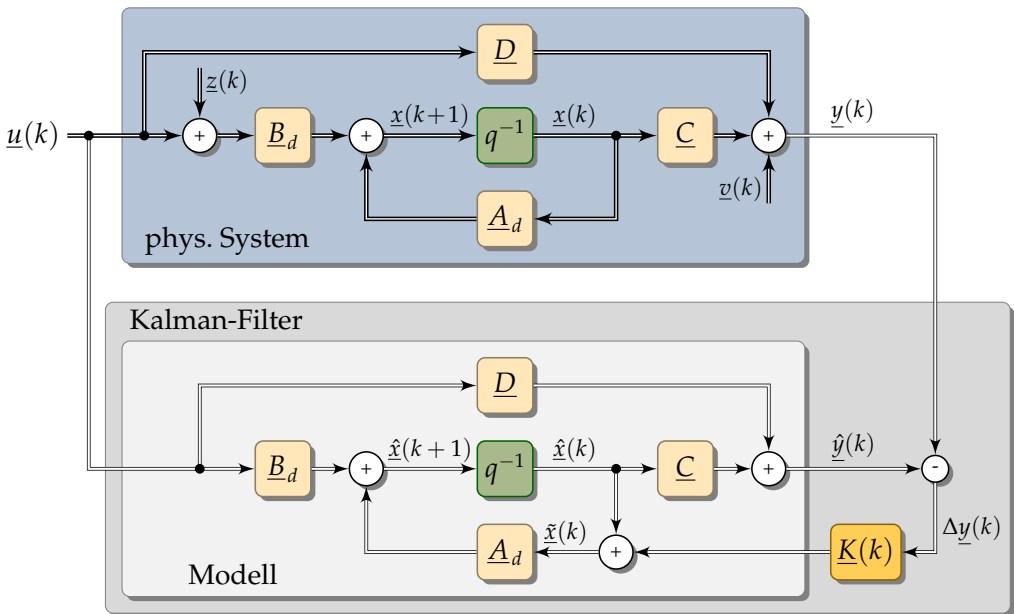


Abb. 11.2: Alternative Modellierung des Systemrauschens eines physikalischen Systems inkl. Kalman-Filter

In dem betrachteten Beispiel gilt:

$$\underline{\hat{y}}(k) = \underline{C} \cdot \underline{\hat{x}}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{h}(k) \\ \hat{v}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{u}(k) = \begin{bmatrix} \hat{h}(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \quad (11.11)$$

Dadurch, dass das verrauschte Beschleunigungssignal dem Eingangssignal  $u(k)$  entspricht und dieses dem Kalman-Filter auch über das Signal  $\underline{y}(k)$  zugeführt wird, ist:

$$\underline{y}(k) = \begin{bmatrix} h(k) \\ a(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \quad (11.12)$$

Somit wird die Größe  $\Delta \underline{y}(k)$  zu:

$$\Delta \underline{y}(k) = \underline{y}(k) - \hat{\underline{y}}(k) = \begin{bmatrix} h(k) \\ u(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{h}(k) \\ u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(k) - \hat{h}(k) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.13)$$

Wenn die zweite Größe des Vektors  $\Delta \underline{y}(k)$  immer null ist, lässt sich mit dieser Überlegung (ohne Informationsverlust) die Größe  $\underline{y}(k)$  auf ein Skalar reduzieren. Mithilfe der beiden Rauschgrößen  $z(k)$  und  $v(k)$  lässt sich das Modell im Zustandsraum schreiben mit:

$$\underline{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_d} \cdot \underline{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix}}_{\underline{B}_d} \cdot a(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix}}_{\underline{G}_d = \underline{B}_d} \cdot z(k) \quad (11.14)$$

$$\underline{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \underline{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot a(k) + v(k) \quad (11.15)$$

Mit den Überlegungen aus dem einführenden Beispiel in Kapitel 1.3.2 folgt für die Varianz des Systemrauschens  $Q$  und die Varianz des Messrauschens  $R$ :

$$Q = \text{Var}(z(k)) = \sigma_a^2 = 0.2 \frac{m}{s^2} \quad R = \text{Var}(v(k)) = \sigma_h^2 = 20m$$

## 11.2 Implementierung und Ergebnisse

Da sich in diesem Beispiel mehrere Größen zu Skalaren reduzieren und die Durchgangsmatrix  $D = 0$  ist, lassen sich die in Kapitel 5 hergeleiteten Formeln für das Kalman-Filter vereinfachen.

$$\underline{K}(k) = \underline{\hat{P}}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot (\underline{C} \cdot \underline{\hat{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + R)^{-1} \quad (11.16)$$

$$\underline{\tilde{x}}(k) = \underline{\hat{x}}(k) + \underline{K}(k) \cdot (y(k) - \underline{C} \cdot \underline{\hat{x}}(k)) \quad (11.17)$$

$$\underline{\tilde{P}}(k) = (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \underline{\hat{P}}(k) \quad (11.18)$$

$$\underline{\hat{x}}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{\tilde{x}}(k) + \underline{B}_d \cdot u(k) \quad (11.19)$$

$$\underline{\hat{P}}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{\tilde{P}}(k) \cdot \underline{A}_d^T + \underline{G}_d \cdot Q \cdot \underline{G}_d^T \quad (11.20)$$

Mit den Anfangsbedingungen  $x(1) = \begin{bmatrix} y(1) & 0 \end{bmatrix}^T$  und  $P(1) = 3 \cdot \underline{I}$  ( $\underline{I}$  entspricht der Einheitsmatrix) lassen sich die unbekannte Geschwindigkeit  $v$  und die aktuelle gefilterte Höhe  $h$  der Mondfähre abschätzen.

### MATLAB: Kalman-Filter Beispiel Alternatives Bewegungsmodell Mondfähre

```
load -ascii data_t_y.dat;
t = data_t_y(:,1); y = data_t_y(:,2); u = data_t_y(:,3);

Ts = 0.1;
R = 20;
Q = 0.2;

Ad = [1 Ts; 0 1];
Bd = [.5*Ts^2; Ts];
C = [1 0];
G = Bd;
GQG = G*Q*G';

%%% INITIALISIERUNG KALMAN-FILTER %%%
x = [y(1,1); 0];
P = 3*[1 0; 0 1];

%%% ZYKLISCHE BERECHNUNG KALMAN-FILTER %%%
for k=1:length(y)
    K = P*C'*pinv(C*P*C' + R);
    x = x + K*(y(k,:) - C*x);
    P = (eye(length(Bd)) - K*C)*P;

    s(k) = x(1); v(k) = x(2);

    x = Ad*x + Bd*u(k);
    P = Ad*P*Ad' + GQG;
end
```

Die in diesem Beispiel abgeschätzten Größen unterscheiden sich nur unwesentlich mit denen im einführenden Beispiel. Die Unterschiede entstehen hauptsächlich bei einer Änderung der Beschleunigung. Durch die Zuführung der Beschleunigung im einführenden Beispiel über die Ausgangsgröße  $y$  kann bei einer Änderung der Beschleunigung der Zustandsvektor noch im aktuellen Zeitschritt  $k$  durch Gleichungen (11.17) korrigiert werden.

Im Gegensatz zu der in diesem Beispiel gewählten Zuführung der Beschleunigung über die Eingangsgröße  $u$ , beeinflusst die Beschleunigung den prädizierten Zustandsvektor über die Gleichung (11.19) und wird somit erst im nächsten Zeitschritt berücksichtigt. Der Verlauf der geschätzten Größen ist der Abbildung 11.3 zu entnehmen.

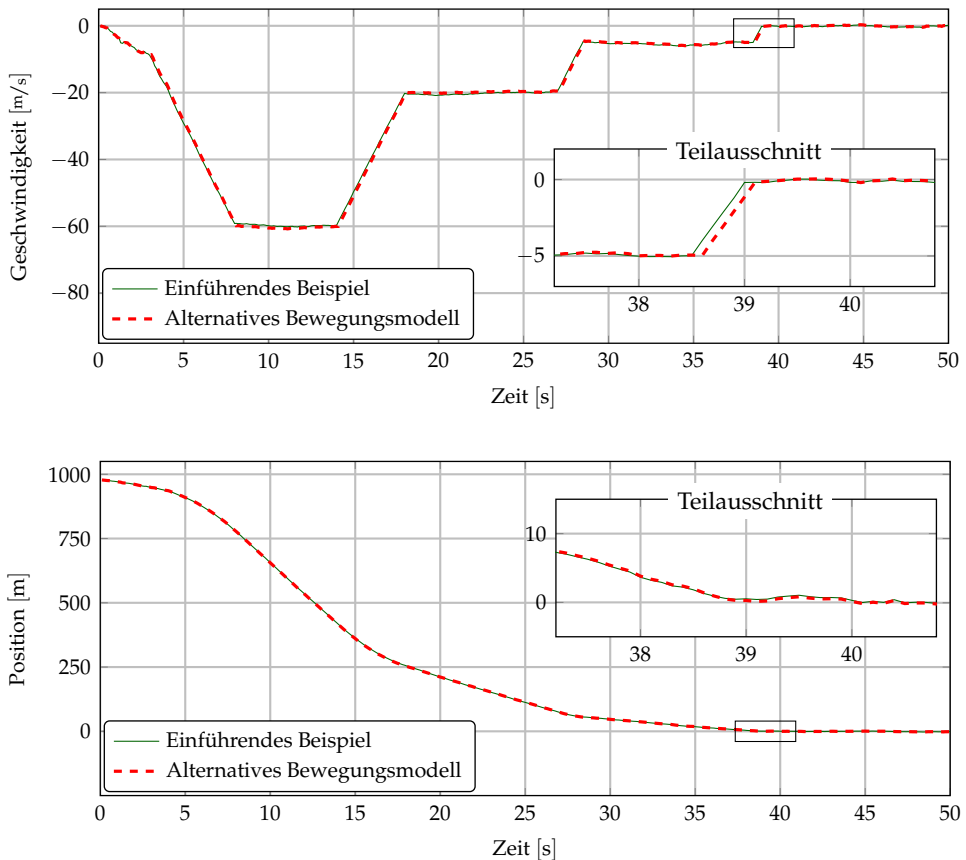


Abb. 11.3: Vergleich der geschätzten Größen bei unterschiedlicher Modellierung

Der Vorteil bei der Modellierung, die in diesem Beispiel gewählt wurde, ist der kleinere Zustandsvektor und dass die Messrauschmatrix nur ein Skalar ist. Speziell das letztere erspart die Matrixinvertierung der Gleichung (11.16) und verkürzt somit deutlich die Rechenzeit.

Da in diesem Beispiel die Matrizen  $\underline{A}_d$ ,  $\underline{B}_d$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{D}$  und  $\underline{G}_d$  keine zeitlich veränderlichen Größen beinhalten und auch das Mess- und Systemrauschen konstant ist, konvergiert die Kalman-Verstärkung auf feste Werte. D. h. dass die Gleichungen (11.16), (11.18) und (11.20) nicht in Echtzeit bestimmt werden müssen. Aus Abbildung 11.4 ist ersichtlich, dass die Kalmanverstärkung nach ca. 100 Iterationsschritten gegen einen konstanten Wert konvergiert.

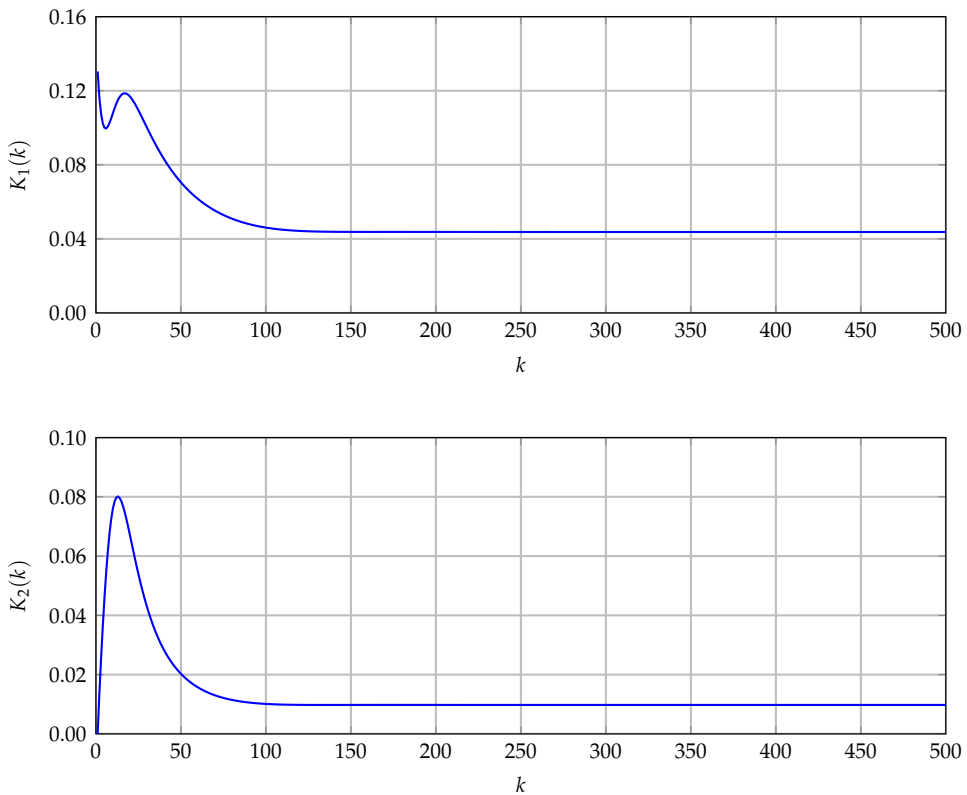


Abb. 11.4: Verlauf der Kalman-Verstärkung  $\underline{K}(k)$

Mit der Erkenntnis, dass sich die Gleichungen (11.16), (11.18) und (11.20) vorab bestimmen lassen, ist die Implementierung eines Laufzeit optimierten MATLAB<sup>®</sup>-Codes abge-

bildet. Der Vorteil besteht nicht nur darin, dass die in Echtzeit zu rechnende Schleife deutlich schneller berechnet werden kann, sondern auch darin, dass das Kalman-Filter schon in den ersten Berechnungszyklen für dieses Problem die optimale Kalman-Verstärkung besitzt.

#### MATLAB: Laufzeit optimiertes Kalman-Filter Beispiel Alternatives Bewegungsmodell Mondfähre

```
load -ascii data_t_y.dat;
t = data_t_y(:,1); y = data_t_y(:,2); u = data_t_y(:,3);

Ts = 0.1;
R = 20;
Q = 0.2;

Ad = [1 Ts; 0 1];
Bd = [.5*Ts^2; Ts];
C = [1 0];
G = Bd;
GQG = G*Q*G';

%%% INITIALISIERUNG KALMAN-FILTER %%%
x = [y(1,1); 0];
P = 3*[1 0; 0 1];

%%% VORABBESTIMMUNG VON P UND K %%%
for k=1:200
    K = P*C'*pinv(C*P*C' + R);
    P = (eye(length(Bd)) - K*C)*P;
    P = Ad*P*Ad' + GQG;
end

%%% ZYKLISCHE BERECHNUNG KALMAN-FILTER %%%
for k=1:length(y)
    x = x + K*(y(k,:) - C*x);

    s(k) = x(1); v(k) = x(2);

    x = Ad*x + Bd*u(k);
end
```



## KAPITEL 12

# BEISPIEL: UMFELDSENSOR MIT ROSE-FILTER

In dem folgenden Kapitel sollen die Vorteile des ROSE-Filters (Rapid Ongoing Stochastic covariance Estimation-Filter) an einem weiteren Beispiel vorgestellt werden. Es wird gezeigt, dass durch die adaptive Schätzung der Varianz des Mess- und Systemrauschens eine deutlich bessere Schätzung der Zustandsgrößen und der Kovarianz des Schätzfehlers erfolgt.

Ein sehr häufig in der Praxis auftretendes Problem stellt die Beobachtung (Verfolgung) eines kinematischen Objekts dar. Von dem Objekt werden z. B. mittels Radarsensors Position und Geschwindigkeit in Längsrichtung erfasst. Beide Messgrößen sind verrauscht und die Varianz des Messrauschens ist über der Zeit nicht konstant. Von Interesse ist die Position und die Geschwindigkeit (ohne Messrauschen) sowie die Schätzung der Beschleunigung und die Kovarianz des Schätzfehlers der jeweils geschätzten Größen.

## 12.1 Umfeldsensor

Ausgangspunkt für dieses Beispiel sind die Position und Geschwindigkeit eines mittels Umfeldsensors erfassten Objektes. Abbildung 12.1 zeigt einen simulierten typischen Verlauf der beiden Signale.

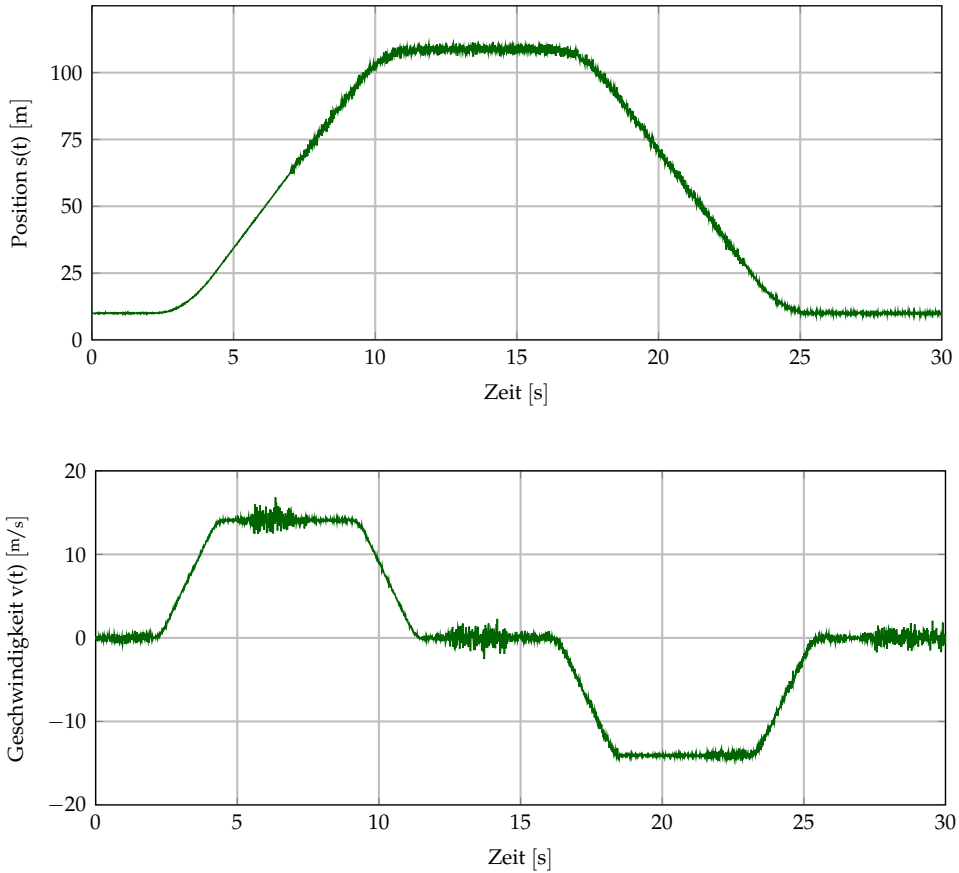


Abb. 12.1: Verlauf messtechnisch erfassbarer Größen eines beobachteten Objekts: Abstand  $s(t)$  und Geschwindigkeit  $v(t)$

Auffallend ist, dass die Varianz des Messrauschens über die Zeit nicht konstant ist und dass die Änderungen in der Varianz des Messrauschens in den beiden Signalen zu unterschiedlichen Zeitpunkten stattfindet.

## Zeitkontinuierliche Systembeschreibung

**B**asis für die Modellierung stellt das im einführenden Beispiel (Kapitel 1) beschriebene Punkt-Masse-Modell dar. Der Zustandsvektor wird wieder zu

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix} \quad (12.1)$$

gewählt.

Da die Position  $s(t)$  und Geschwindigkeit  $v(t)$  messtechnisch erfassbar sind, folgt mit  $\underline{y}(t) = [s(t), v(t)]^T$  für die zeitkontinuierliche Systembeschreibung im Zustandsraum:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \cdot u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{G}} \cdot z(t) \quad (12.2)$$

$$\underline{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot u(t) \quad (12.3)$$

## Zeitdiskrete Systembeschreibung

**D**a sich die Systemmatrix  $\underline{A}_d$ , die Eingangsmatrix  $\underline{B}_d$  und die Rauschmatrix  $\underline{G}_d$  gegenüber dem einführenden Beispiel nicht verändert haben, gilt für die zeitdiskrete Systembeschreibung:

$$\underline{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} \\ 0 & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_d} \cdot \begin{bmatrix} s(k) \\ v(k) \\ a(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_d} \cdot u(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{T_s^2}{2} \\ T_s \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{G}_d} \cdot z(k) \quad (12.4)$$

$$\underline{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \begin{bmatrix} s(k) \\ v(k) \\ a(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot u(k) \quad (12.5)$$

## Beobachtbarkeit

Die Beobachtbarkeit ist gegeben, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix  $S_B^*$  bei einem System der Ordnung drei den Rang drei besitzt. Es folgt für den Rang der Beobachtbarkeitsmatrix  $S_B^*$ :

$$\text{Rang}(S_B^*) = \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^2 \end{bmatrix} \right) = \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} \\ 0 & 1 & T_s \\ 1 & 2T_s & 2T_s^2 \\ 0 & 1 & 2T_s \end{bmatrix} \right) = 3$$

Für  $T_s > 0$  lässt sich das überbestimmte Gleichungssystem auflösen und man erhält drei unabhängige Zeilenvektoren. Somit ist der Rang drei und das beschriebene System beobachtbar.

## Adaptive Bestimmung des Messrauschens

Allgemein lässt sich das Messrauschen über die Gleichung (12.6) bestimmen. In diesem Beispiel verändert sich jedoch die Varianz des Messrauschens über der Zeit und es ist notwendig, zu jedem Zeitpunkt die Erwartungswerte in der Gleichung bestmöglich abzuschätzen.

$$\underline{R}(k) = E \left( \left( \underline{y}(k) - E(\underline{y}(k)) \right) \cdot \left( \underline{y}(k) - E(\underline{y}(k)) \right)^T \right) \quad (12.6)$$

$$\approx E \left( \left( \underline{y}(k) - \hat{\underline{y}}_R(k) \right) \cdot \left( \underline{y}(k) - \hat{\underline{y}}_R(k) \right)^T \right) \quad (12.7)$$

$$\approx E \left( \Delta \hat{\underline{y}}_R(k) \cdot \Delta \hat{\underline{y}}_R(k)^T \right) \quad (12.8)$$

Wie in Kapitel 6 beschrieben, geschieht dies über zwei Kalman-Filter. Um die Rechenzeit gering zu halten, ist es sinnvoll, einfache Kalman-Filter mit einer festen Kalman-Verstärkung einzusetzen. Hierdurch reduziert sich der Rechenaufwand in Echtzeit.

Für Messgrößen mit geringer Dynamik können einfache Filter (Alpha-Filter), wie in Kapitel 9.4 beschrieben, eingesetzt werden. Aufgrund der größeren Dynamik wird in

diesem Beispiel für die Schätzung der Größe  $\hat{y}_R(k)$  ein Modell 2. Ordnung (siehe Kapitel 7.5.2) eingesetzt. Für diese gilt:

$$\underline{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_d} \cdot \underline{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_d} \cdot u(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}T_s \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{G}_d} \cdot z_v(k) \quad (12.9)$$

$$\underline{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \underline{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot u(k) \quad (12.10)$$

Sind die Größen  $R$  und  $Q$  zeitinvariant, so konvergiert die Kalman-Verstärkung auf einen festen Wert, der sich mit der Gleichung:

$$K = \frac{0.125}{T_s} \cdot \begin{bmatrix} T_s \cdot (-\lambda^2 - 8 \cdot \lambda + (\lambda + 4) \cdot \sqrt{\lambda^2 + 8 \cdot \lambda}) \\ 2 \cdot (\lambda^2 + 4 \cdot \lambda - \lambda \cdot \sqrt{\lambda^2 + 8 \cdot \lambda}) \end{bmatrix} \quad (12.11)$$

mit

$$\lambda = T_s \cdot \sqrt{\frac{Q}{R}} = T_s \cdot \sqrt{\frac{\text{Var}(z(k))}{\text{Var}(v(k))}} \quad (12.12)$$

bestimmen lässt [2].

Bei der Wahl des Verhältnisses von  $Q/R$  ist man frei. Aufgrund der großen Dynamik sollte man das Verhältnis jedoch nicht zu klein wählen. Bei der Wahl von  $Q/R = 1$  folgt mit  $T_s = 0.01$ :

$$K \approx \begin{bmatrix} 0.13185 \\ 0.93175 \end{bmatrix} \quad (12.13)$$

Da bei den Kalman-Filtern mit fester Kalman-Verstärkung nur die geschätzte Zustandsgröße für die weitere Verarbeitung relevant ist, müssen nur die folgenden beiden Gleichungen betrachtet werden:

$$\hat{\underline{x}}(k) = \underline{A}_d \cdot \hat{\underline{x}}(k-1) + \underline{B}_d \cdot u(k-1) \quad (12.14)$$

$$\hat{\underline{x}}(k) = \hat{\underline{x}}(k) + \underline{K} \cdot (\underline{y}(k) - \underline{C} \cdot \hat{\underline{x}}(k) - \underline{D} \cdot u(k)) \quad (12.15)$$

Berücksichtigt man, dass  $\underline{B}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$  und  $\underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$  und setzt Gleichung (12.14) in (12.15) ein, folgt:

$$\begin{aligned}\underline{\hat{x}}(k) &= \underline{\hat{x}}(k) + \underline{K} \cdot \underline{y}(k) - \underline{K} \cdot \underline{C} \cdot \underline{\hat{x}}(k) \\ &= \underline{K} \cdot \underline{y}(k) + (\underline{I} - \underline{K} \cdot \underline{C}) \cdot \underline{\hat{x}}(k) \\ &= \underline{K} \cdot \underline{y}(k) + \underbrace{(\underline{I} - \underline{K} \cdot \underline{C}) \cdot \underline{A}_d}_{\underline{H}} \cdot \underline{\hat{x}}(k-1)\end{aligned}$$

Die Größe  $\underline{H}$  ist in diesem Beispiel:

$$\underline{H} = (\underline{I} - \underline{K} \cdot \underline{C}) \cdot \underline{A}_d \approx \begin{bmatrix} 0.86815 & 0.00868 \\ -0.93175 & 0.99068 \end{bmatrix} \quad (12.16)$$

Mit diesem Filter wird der Erwartungswert  $\hat{y}_R(k) = E(y(k))$  jeweils für die gemessene Position und für die gemessene Geschwindigkeit abgeschätzt.

$$\begin{aligned}\underline{\hat{x}}(k) &= \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \end{bmatrix} = \underline{K} \cdot \underline{y}(k) + \underline{H} \cdot \underline{\hat{x}}(k-1) \\ \hat{y}_R(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{\hat{x}}(k) = \hat{x}_1(k)\end{aligned} \quad (12.17)$$

Zur Schätzung der Kovarianz des Messrauschens  $\underline{R}(k)$  ist es aufgrund der geringen Dynamik der Größe  $\hat{y}_R(k)$  ausreichend, den Erwartungswert in Gleichung (12.8) über einen Alpha-Filter abzuschätzen:

$$\underline{R}(k) = \gamma \cdot \alpha_R \cdot (\hat{y}_R(k) - \underline{y}(k)) \cdot (\hat{y}_R(k) - \underline{y}(k))^T + (1 - \alpha_R) \cdot \underline{R}(k-1) \quad (12.18)$$

Der frei wählbare Verstärkungsfaktor  $\gamma$  dient als Korrekturfaktor, da die Kovarianz des Messrauschens oft zu klein geschätzt wird. Aufgrund dessen sind Werte von  $\gamma > 1$  sinnvoll.

Die Kovarianz des Messrauschens  $\underline{R}$  wird in diesem Beispiel aufgrund der zwei messtechnisch erfassbaren Größen durch eine 2x2-Matrix beschrieben. In der Hauptdiagonalen befindet sich die Varianz des Messrauschens des Positionssignals  $\text{Var}(s(k))$  und des Geschwindigkeitssignals  $\text{Var}(v(k))$ . In den anderen beiden Elementen steht die Kovarianz des Positionssignals und des Geschwindigkeitssignals  $\text{Cov}(s(k), v(k))$ . Somit wird Kovarianz des Messrauschens  $\underline{R}$  durch die folgende Matrix beschrieben:

$$\underline{R}(k) = \begin{bmatrix} R_{1,1}(k) & R_{1,2}(k) \\ R_{2,1}(k) & R_{2,2}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Var}(s(k)) & \text{Cov}(s(k), v(k)) \\ \text{Cov}(s(k), v(k)) & \text{Var}(v(k)) \end{bmatrix} \quad (12.19)$$

In Abbildung 12.2 ist der Verlauf der ermittelten Elemente  $R_{1,1}$  und  $R_{2,2}$  aus der Rauschmatrix  $\underline{R}$  im Vergleich zu der wahren Varianz zu sehen.

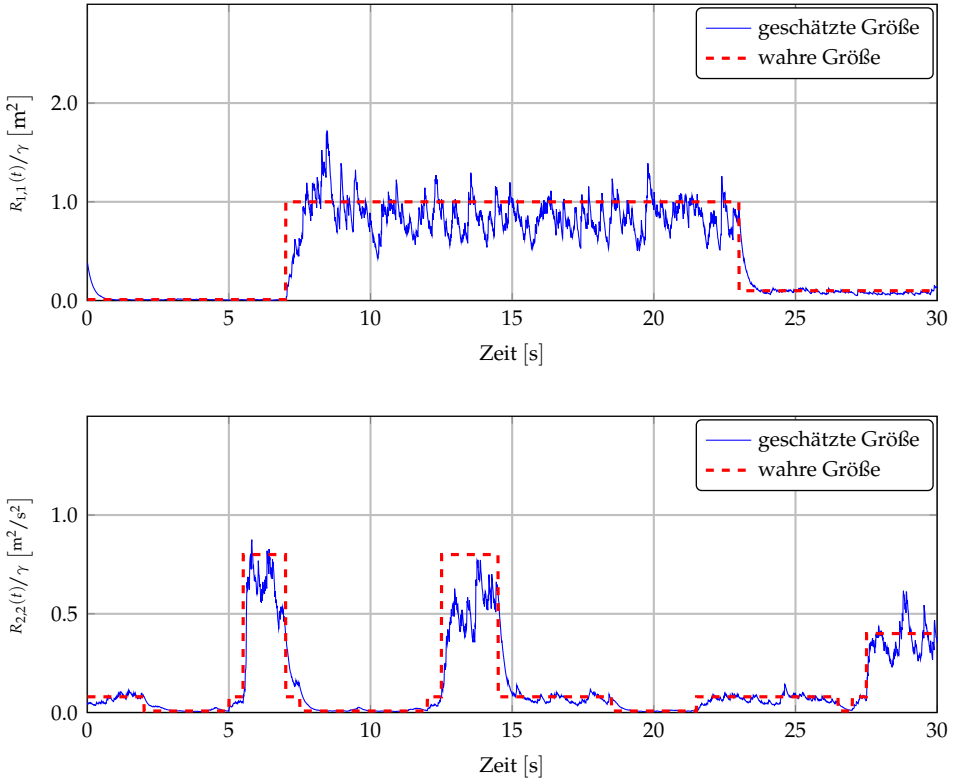


Abb. 12.2: Verlauf der geschätzten Varianzen des Messrauschens. Oben: Positionssignal. Unten: Geschwindigkeitssignal

## Adaptive Bestimmung des Systemrauschens

Zur Schätzung der Kovarianz des Systemrauschens ist es notwendig, die Hilfsgröße  $\underline{M}(k)$  zu bestimmen. Diese wird nach Kapitel 5.3 definiert durch:

$$\underline{M}(k) = E(\underline{\Delta y}(k) \cdot \underline{\Delta y}(k)^T) \quad (12.20)$$

mit

$$\Delta \underline{y}(k) = \underline{y}(k) - \underline{C} \cdot \hat{\underline{x}}(k) - \underline{D} \cdot \underline{u}(k) \quad (12.21)$$

Aufgrund der geringen Dynamik der Größe  $\Delta \underline{y}(k)$  ist es ausreichend, den Erwartungswert durch einen Alpha-Filter abzuschätzen. Dieses wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\underline{M}(k) = \alpha_M \cdot \Delta \underline{y}(k) \cdot \Delta \underline{y}(k)^T + (1 - \alpha_M) \cdot \underline{M}(k-1) \quad (12.22)$$

Ausgehend von der bestimmten Hilfsgröße  $\underline{M}(k)$  lässt sich mithilfe der Gleichung (6.17) die Größe  $\underline{Q}^*(k-1)$  bestimmen:

$$\underline{Q}^*(k-1) = \begin{bmatrix} Q_{1,1}^*(k-1) & Q_{1,2}^*(k-1) & Q_{1,3}^*(k-1) \\ Q_{2,1}^*(k-1) & Q_{2,2}^*(k-1) & Q_{2,3}^*(k-1) \\ Q_{3,1}^*(k-1) & Q_{3,2}^*(k-1) & Q_{3,3}^*(k-1) \end{bmatrix} \quad (12.23)$$

$$= \underline{C}^T \cdot (\underline{M}(k) - \underline{R}(k)) \cdot \underline{C} - \underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{P}}(k-1) \cdot \underline{A}_d^T \quad (12.24)$$

Die Kovarianzmatrix des Systemrauschens  $\underline{Q}^*(k)$  ist für ein kinematisches Modell 3. Ordnung (siehe Kapitel 7.5.2) auch beschrieben durch:

$$\underline{Q}^*(k-1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T_s^2 \\ T_s \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{Q}(k-1) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T_s^2 & T_s & 1 \end{bmatrix} \quad (12.25)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} T_s^4 & \frac{1}{2} T_s^3 & \frac{1}{2} T_s^2 \\ \frac{1}{2} T_s^3 & T_s^2 & T_s \\ \frac{1}{2} T_s^2 & T_s & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{Q}(k-1) \quad (12.26)$$

Mittels Koeffizientenvergleich kann die unbekannte Größe  $\underline{Q}(k-1)$  bestimmt werden. Da wie in Kapitel 6.3 beschrieben nicht alle Größen für den Koeffizientenvergleich geeignet sind, wird der Koeffizientenvergleich in diesem Beispiel mit dem Element  $Q_{2,2}^*$  durchgeführt. Durch die Symmetrie der Matrix  $\tilde{\underline{P}}$  folgt nach kurzer Rechnung:

$$Q(k-1) = \frac{Q_{2,2}^*(k-1)}{T_s^2} \quad (12.27)$$

$$= \frac{M_{2,2}(k) - R_{2,2}(k) - \tilde{P}_{2,2}(k-1)}{T_s^2} - \frac{2 \cdot \tilde{P}_{2,3}(k-1)}{T_s} + \tilde{P}_{3,3}(k-1) \quad (12.28)$$



In Abbildung 12.3 ist der Verlauf der geschätzten Varianz des Systemrauschens  $Q$  zu sehen. An den Stellen, an denen die Beschleunigung sich ändert, ist die Modellannahme verletzt. Das Rose-Filter erkennt dies und vergrößert die Varianz des Modellrauschens. An den anderen Stellen ist der Modellfehler minimal.

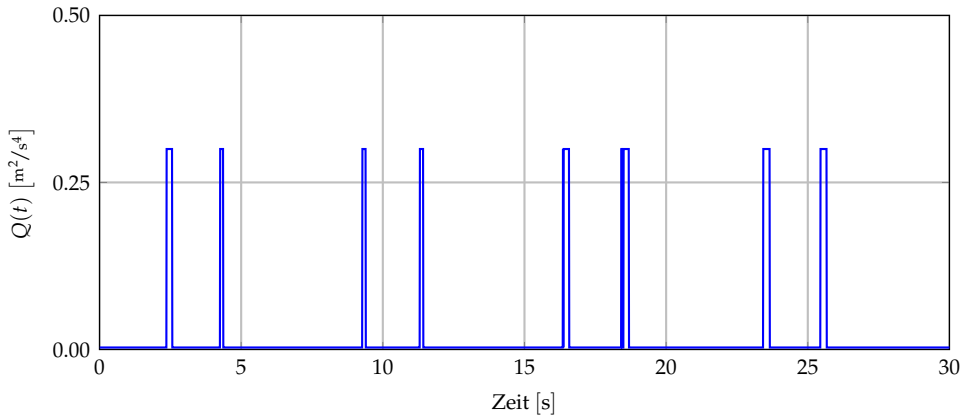


Abb. 12.3: Verlauf der geschätzten Varianzen des Systemrauschens  $Q$

## 12.2 Implementierung und Ergebnisse

Nach der Bestimmung von  $R$  und  $Q$  im vorigen Kapitel lässt sich mit den Formeln des klassischen Kalman-Filters die Zustandsschätzung durchführen. Da es sich bei der  $Q$ -Berechnung nur um eine Schätzung handelt, kann es sein, dass unplausible Werte, z. B. negative Werte geschätzt werden. Es ist deshalb ratsam, in jedem Zyklus zu überprüfen, ob die Größe  $Q$  einen minimalen Wert unterschritten bzw. einen maximalen Wert überschritten hat. In einem solchen Fall sollte der Wert von  $Q$  auf diesen Schwellwert begrenzt werden.

## MATLAB: ROSE-Filter (Teil 1 von 2)

```

load -ascii data_t_h_v_a_y_r1_r2_r3.dat
t = data_t_h_v_a_y_r1_r2_r3(:,1)'; y = data_t_h_v_a_y_r1_r2_r3(:,5:7)';

Gamma = 2.5;           % Verstärkungsfaktor Messrauschen
Alpha_R = 0.05;        % Kalman-Verstärkung Varianz Messrauschen
Alpha_M = 0.1;         % Kalman-Verstärkung Varianz M
Q_min = 3E-3;          % min. Q-Wert
Q_max = 3E-1;          % max. Q-Wert

Ts = 0.01;             % Abtastzeit

%--- V O R A B B E S T I M M U N G   V O N   K0   u n d   H   ---
Ad = [1 Ts;
      0 1];
C = [1 0];

R0 = 1;
Q0 = 1;

lambda = Ts*sqrt(Q0/R0);
K1 = -1/8*(lambda.^2 + 8*lambda - (lambda+4).*sqrt(lambda.^2+8*lambda));
K2 = .25*(lambda.^2 + 4*lambda - lambda.*sqrt(lambda.^2+8*lambda))/Ts;

K0= [K1;K2];
H = (eye(length(Ad)) - K0*C)*Ad;

%--- I N I T   R O S E - F I L T E R   ---

y1 = y(1,1);
y2 = y(2,1);

x1 = [y1;y2;];
x2 = [y2;0];

x = [y1; y2; 0;];

R = [1 0;
     0 0.1];

Ad = [1 Ts .5*Ts^2;
      0 1 Ts;
      0 0 1];
Bd = [0; 0; 0];
C = [1 0 0;
     0 1 0];
D = [0; 0];
G = [0.5*Ts^2;
     Ts;
     1];
GG = G*G';

u = zeros(1,length(t));
p_tilde = [0.5 0 0;
           0 0.1 0;
           0 0 0.1];
M = C*p_tilde*C';

```

## MATLAB: ROSE-Filter (Teil 2 von 2)

```

%--- R O S E - F I L T E R ---

for k=1:length(y)
    %--- Bestimmung Messrauschen ---
    y1 = y(1,k);
    y2 = y(2,k);
    x1 = H*x1 + K0*y1;
    x2 = H*x2 + K0*y2;
    R = Gamma*Alpha_R*[x1(1)-y1; x2(1)-y2]*[x1(1)-y1; x2(1)-y2]' + (1-Alpha_R)*R;

    %--- Bestimmung Systemrauschen ---
    dy = y(1:2,k) - C*x - D*u(k);
    M = Alpha_M.*dy.*dy' + (1-Alpha_M).*M;
    Q(k) = (M(4)-R(4)-p_tilde(5)-Ts*(2*p_tilde(6)+p_tilde(9)*Ts))/Ts^2;

    if Q(k)<Q_min
        Q(k)=Q_min;
    end

    if Q(k)>Q_max
        Q(k)=Q_max;
    end

    %--- Kalman Gleichungen ---
    p_dach = Ad*p_tilde*Ad' + GG*Q(k);
    K = p_dach*C'*pinv(C*p_dach*C' + R);
    x = x + K*dy;
    p_tilde = (eye(length(Bd)) - K*C)*p_dach;
    x = Ad*x + Bd*u(k);
end

```

Auf Basis dieses Codes lassen sich die Zustandsgröße Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung abschätzen. Abbildung 12.4 zeigt den Verlauf dieser Zustandsgrößen im Vergleich zu den messtechnisch erfassbaren Eingangsgrößen.

Man erkennt, dass auch zu den Zeitpunkten, an denen das Messrauschen sich vergrößert, die Zustandsgrößen nur unwesentlich verrauscht werden. Im Gegensatz zu einem Kalman-Filter mit zeitlich konstantem  $R$  und  $Q$  kann diese Adaptation nicht stattfinden und es stellt sich eine Verschlechterung der geschätzten Zustandsgrößen ein (siehe Abbildung 12.5). Besonders deutlich wird dies bei der Schätzung der unbekannten Beschleunigung, die bei dem Kalman-Filter mit zeitlich konstantem  $R$  und  $Q$  mehr rauscht als bei dem ROSE-Filter.

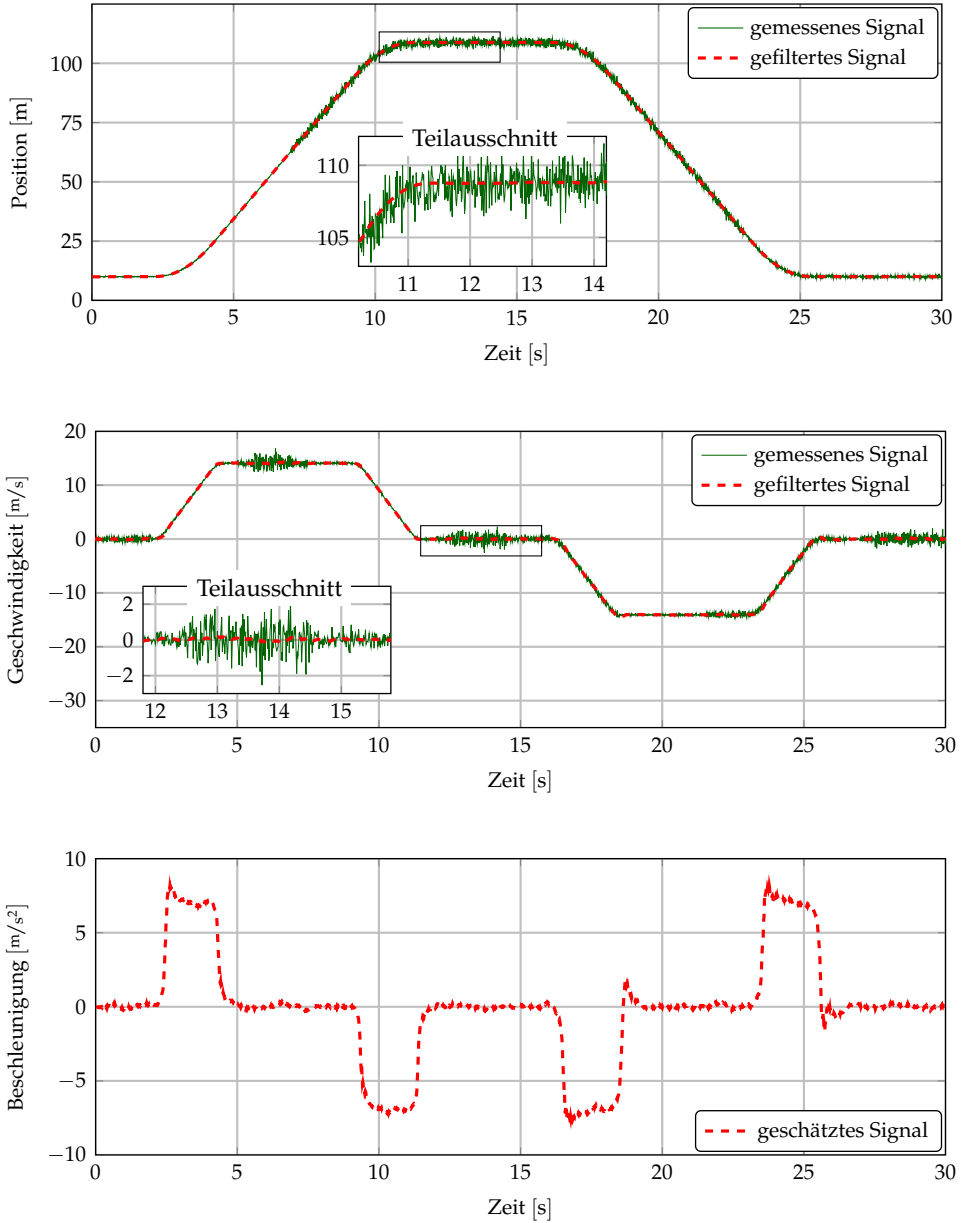


Abb. 12.4: Verlauf der Größen des korrigierten Zustandsvektors

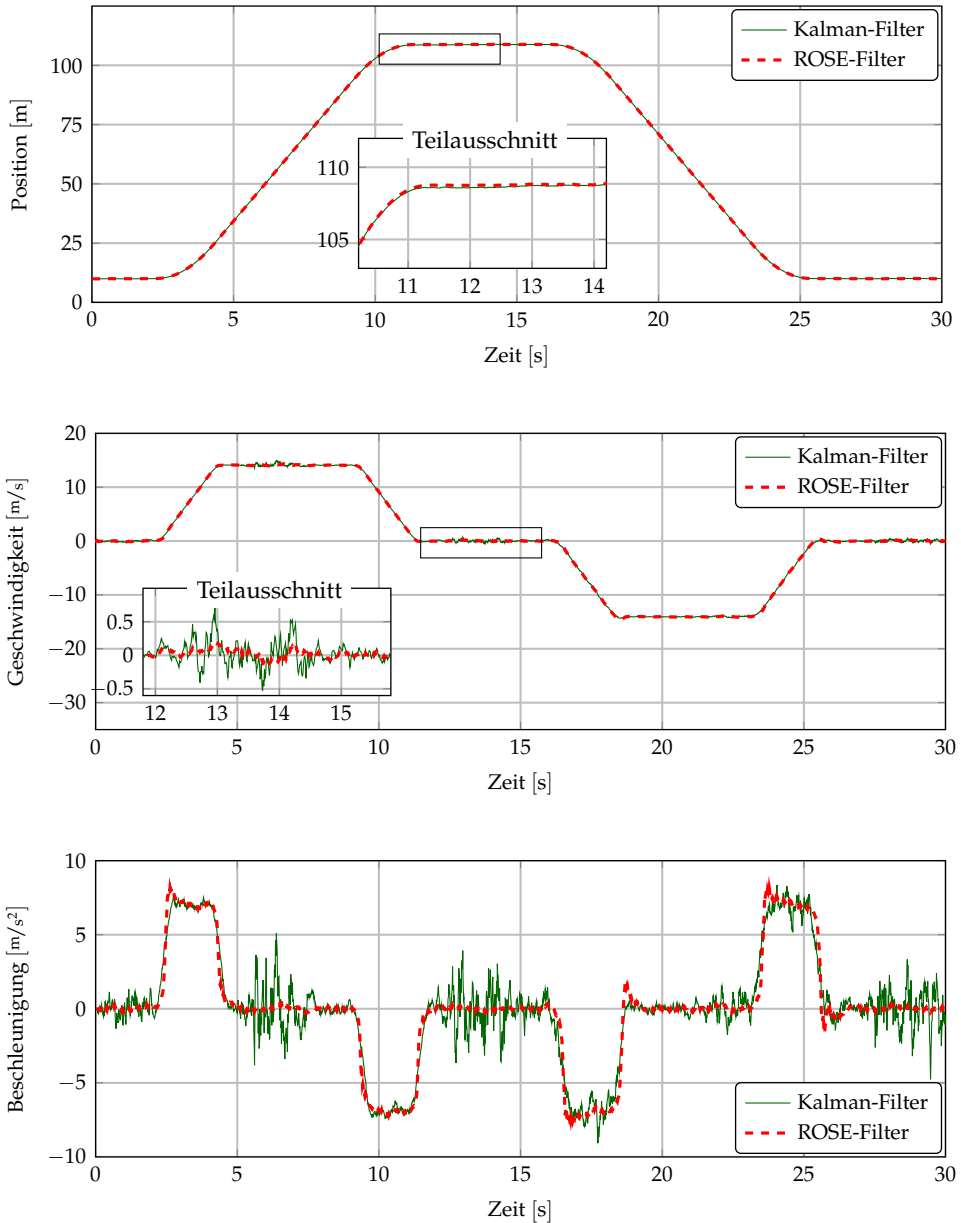


Abb. 12.5: Vergleich der Zustandgrößen zwischen Kalman-Filter mit konstantem  $R$  und  $Q$  und ROSE-Filter

## KAPITEL 13

# BEISPIEL: FAHRSTREIFENERKENNUNG

Dieses Kapitel beschreibt eine videobasierte Fahrstreifenerkennung, wie sie in Fahrerassistenzsystemen oder Systemen autonom fahrender Fahrzeuge vorkommt (siehe z. B. Abb 13.1). Ein prominenter Vertreter eines solchen Fahrerassistenzsystems ist der Spurhalteassistent, der den Fahrer eines Fahrzeuges vor dem Verlassen der Fahrspur warnt. Hierzu wird die Position des Fahrzeugs in der Fahrspur mit Hilfe einer Kamera bestimmt. Verringert sich der Abstand des Fahrzeuges zur Fahrbahnmarkierung, wird der Fahrer gewarnt.

Neben dem Abstand zur Fahrbahnmarkierung sind auch Eigenschaften, wie beispielsweise die Krümmung der Fahrbahn, für verschiedene Regelsysteme wichtig. So kann ein autonom fahrendes Fahrzeug aus der Krümmung der Fahrbahn die maximale Geschwindigkeit (Kurvengrenzgeschwindigkeit) bestimmen, um eine Kurve sicher zu passieren.



Abb. 13.1: Reale Fahrstreifenerkennung in einem System für hochautomatisiertes Fahren.  
*Veröffentlicht mit freundlicher Genehmigung von André-Marcel Hellmund.*

## 13.1 Problembeschreibung

Das Ziel der Fahrstreifenerkennung ist es, alle sichtbaren Fahrstreifen in einem Kamerabild zu erkennen und Fahrerassistenzsystemen, wie dem Spurhalteassistent, zur Verfügung zu stellen. Es wird nachfolgend unter einem Fahrstreifen eine der Markierungen (z. B. links oder rechts) verstanden, die in einer Fahrspur vorzufinden ist.

Bei der Fahrstreifenerkennung gilt es, eine Vielzahl an Problemen zu lösen, die sich in der Praxis von Anwendungsfall zu Anwendungsfall unterscheiden. Zuerst muss durch Bildverarbeitung ermittelt werden, welche Pixel im Kamerabild zu einem Fahrstreifen gehören. Anschließend wird in aller Regel ein geometrisches Modell zu diesen Pixeln bestimmt, das der Fahrstreifengeometrie am besten entspricht. Unabhängig von der Fortbewegung des Fahrzeuges unterliegen die Parameter zur Schätzung der Geometrie zusätzlichen Schwankungen durch Rauschen. Dies bedeutet, auch wenn das Fahrzeug sich nicht bewegt und die Fahrstreifen sich durch den Stillstand theoretisch nicht im Kamerabild ändern, unterscheiden sich die Werte der Parameter von Bild zu Bild. Der Kalman-Filter eignet sich dafür, diese Parameterwerte über die Zeit zu schätzen und damit das Rauschen zu minimieren.

Neben dem Minimieren des Rauschens ergeben sich weitere Vorteile durch die Anwendung des Kalman-Filters. Zum einen lässt sich die Prädiktionseigenschaft des Kalman-Filters dazu nutzen, um Fahrstreifen aus einem Kamerabild zum Zeitpunkt  $k - 1$  in das Kamerabild zum Zeitpunkt  $k$  zu präzisieren. Dies ermöglicht den Bildverarbeitungsalgorithmen den Suchbereich nach neuen Fahrstreifen zu verringern. Ein weiterer Vorteil ist, dass bei Unterbrechungen des Kameraflusses oder einer Störung im Kamerabild eine Schätzung der Fahrspur aus vorangegangenen Bildern möglich ist.

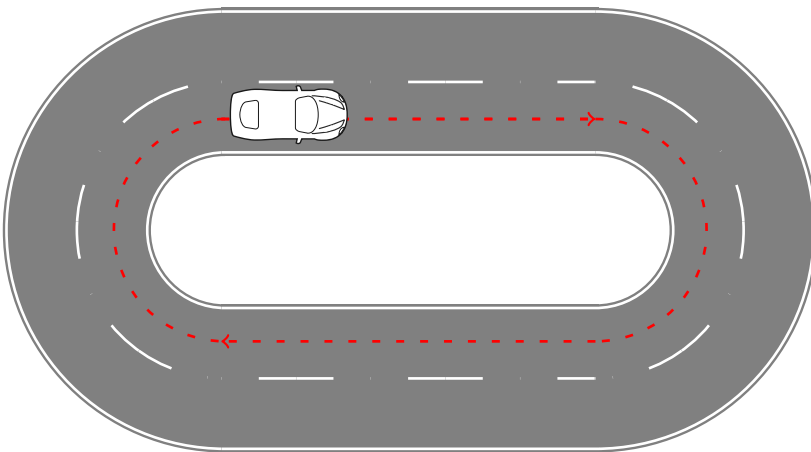


Abb. 13.2: Fahrstrecke für die Simulation von künstlichen Kamerabildern.

Die Funktionsweise einer Fahrstreifenerkennung soll am Beispiel einer Simulation gezeigt werden. Hierzu wurden künstliche Kamerabilder, die Fahrstreifen zeigen, erzeugt. Dies erfolgte durch Definition einer Fahrstrecke, welche in Abbildung 13.2 dargestellt ist. Anschließend wurde festgelegt, wie ein Fahrzeug diese Strecke abfährt (gestrichelte Linie in Abb. 13.2). Die Fahrstreifen wurden dann durch eine fiktive Kamera auf dem Fahrzeug erfasst. Aus dieser Konfiguration werden durch einfache Bildsynthese künstliche Kamerabilder erzeugt. Ein solches Kamerabild ist in Abbildung 13.3 skizziert.

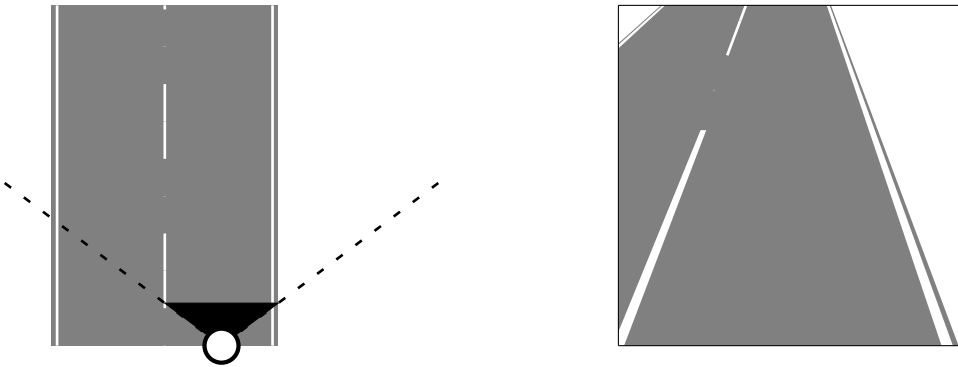


Abb. 13.3: Skizzierung der Bildsynthese. Aus einer simulierten Szene wird durch Strahlenverfolgung (engl. ray tracing) ein künstliches Kamerabild der Szene generiert. Das Kamerabild (rechts) zeigt deutlich die perspektivische Verzerrung, die bei einem Bildaufnahmeprozess auftritt.

Die künstlich erzeugten Kamerabilder werden anschließend für die Fahrstreifenerkennung genutzt. Dazu müssen eine Reihe von Bildvor- und Verarbeitungsschritten erfolgen. Da in der Praxis von Anwendungsfall zu Anwendungsfall jeder Verarbeitungsschritt ein anderes Verfahren verwenden kann, soll hier nur die Funktionsweise und nicht die konkrete Implementierung beschrieben werden. Der interessierte Leser sei auch hier auf den Quellcode auf [www.kalman-filter.de](http://www.kalman-filter.de) verwiesen. Mit diesem Quellcode können alle Verarbeitungsschritte nachvollzogen werden.

Am Ende dieser Verarbeitungskette liegen für die Fahrstreifen relevante Bildpunkte vor, mit denen es möglich ist, über verschiedene geometrische Modelle den Verlauf der Straße zu bestimmen. Eine Möglichkeit ist es, ein Polynom 2. Grades zu verwenden. Die allgemeine Formel hierzu lautet:

$$P(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \quad (13.1)$$

Für  $a_2 = 0$  ergibt sich eine lineare Funktion, mit der sich gerade Abschnitte eines Fahrstreifens beschreiben lassen. Kurvige Abschnitte dagegen werden mit  $a_2 \neq 0$  abgebildet. In jedem Zeitschritt wird jeder Fahrstreifen mit diesem Polynom approximiert. Eine



solche Approximation zeigt Abbildung 13.4 jeweils für eine gerade und einen kurvigen Abschnitt.

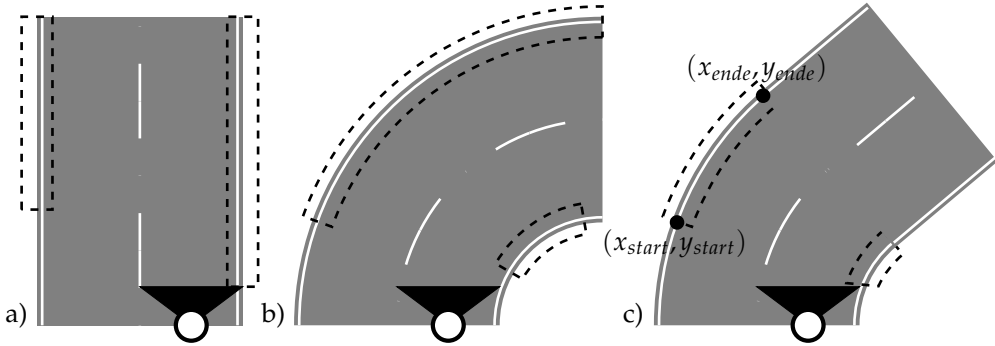


Abb. 13.4: Andeutung der Bereiche in denen der Fahrstreifen durch ein Polynom 2. Grades approximiert wird. Durch den Öffnungswinkel der Kamera wird der Sichtbereich teilweise eingegrenzt. Bei c) wird angedeutet, dass über die Start- und Endpunkte nur der Abschnitt approximiert der dem Fahrzeug am nächsten ist.

Neben der Form der Fahrstreifen muss deren Start- und Endpunkt geschätzt werden. Mit dem Start- und Endpunkt kann der Bereich eingegrenzt werden, indem das Polynom den Fahrstreifen besonders gut beschreibt. Dies ist zwingend notwendig, wenn im Kamerabild der Streckenabschnitt aus verschiedenen kurvigen Elementen besteht (vgl. Abb. 13.4 c). Zum Beispiel kann ein zu Beginn gerader Abschnitt, der in eine Kurve mündet, nur ungenau durch ein Polynom 2. Grades beschrieben werden. Deswegen ist es erforderlich, nur den Abschnitt mit dem Polynom zu approximieren, der dem Fahrzeug am nächsten ist. Dies kann durch eine Schätzung der Start- und Endpunkte erfolgen. Ihre x- und y-Koordinaten werden mit  $(x_{start}, y_{start})$  für den Startpunkt und mit  $(x_{ende}, y_{ende})$  für den Endpunkt notiert.

Um eine Fahrstreifenerkennung mit dem Kalman-Filter durchzuführen, sollte beachtet werden, dass sich im Kamerabild in den meisten Fällen mehrere Fahrstreifen befinden. Folglich ist für jeden Fahrstreifen ein eigener Kalman-Filter zu verwenden.

Bestimmt man durch die Approximation eines Polynoms 2. Grades die äußere Fahrspur des in Abbildung 13.2 zu sehenden Rundkurses, so erhält man den in Abbildung 13.5 dargestellten Verlauf der Parameter  $a_2, a_1, a_0$ .

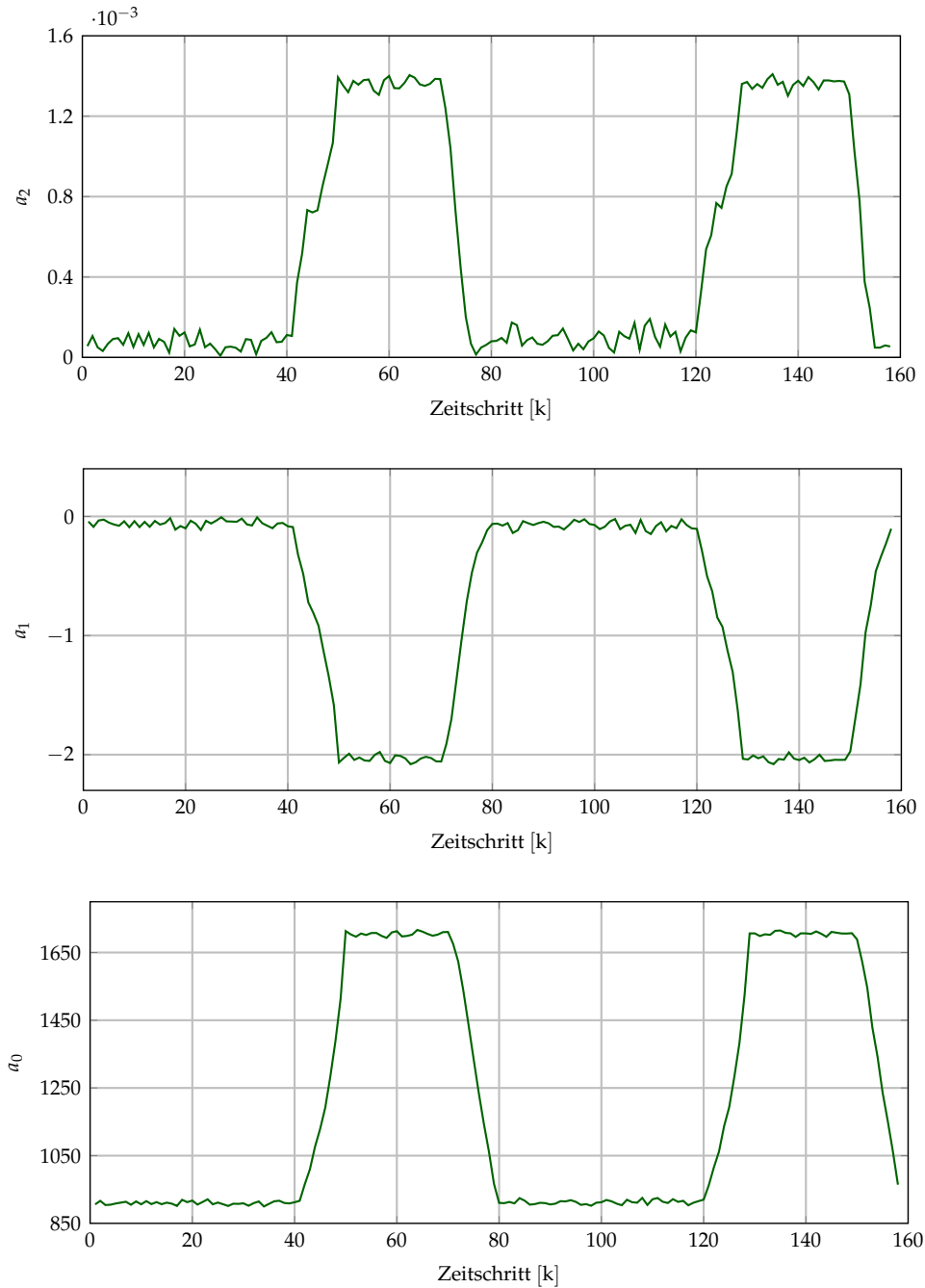


Abb. 13.5: Eingangsgrößen für das Kalman-Filter.

## 13.2 Filterentwurf

Dieser Abschnitt beschreibt den Filterentwurf, um Fahrstreifen mit Hilfe des Kalman-Filters über die Zeit zu verfolgen und damit verlässliche und robuste Informationen über den Verlauf der Fahrstreifen anderen Systemen zur Verfügung zu stellen.

### Zeitkontinuierliche Systembeschreibung

Die zeitdiskrete Systembeschreibung setzt sich zum einen aus den Parametern des Polynom 2. Grades und den Start- und Endpunkten zusammen. Der Zustandsvektor lautet daher:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ x_{\text{start}}(t) \\ y_{\text{start}}(t) \\ x_{\text{ende}}(t) \\ y_{\text{ende}}(t) \end{bmatrix} \quad (13.2)$$

Für die Systemdynamik wird davon ausgegangen, dass sich das Fahrzeug nur langsam bewegt oder dass die Kamera eine hohe Aufnahmefrequenz besitzt. Dadurch sollten sich die Werte des Zustandsvektors  $\underline{x}(t)$  von einem Zeitpunkt  $t$  zum nächsten Zeitpunkt  $t + \Delta t$  nur unwesentlich ändern. Für die Ableitung des Zustandsvektors  $\dot{\underline{x}}(t)$  gilt damit:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{a}_0(t) \\ \dot{a}_1(t) \\ \dot{a}_2(t) \\ \dot{x}_{\text{start}}(t) \\ \dot{y}_{\text{start}}(t) \\ \dot{x}_{\text{ende}}(t) \\ \dot{y}_{\text{ende}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{a_0}(t) \\ z_{a_1}(t) \\ z_{a_2}(t) \\ z_{x_{\text{start}}}(t) \\ z_{y_{\text{start}}}(t) \\ z_{x_{\text{ende}}}(t) \\ z_{y_{\text{ende}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{a_0}(t) \\ z_{a_1}(t) \\ z_{a_2}(t) \\ z_{x_{\text{start}}}(t) \\ z_{y_{\text{start}}}(t) \\ z_{x_{\text{ende}}}(t) \\ z_{y_{\text{ende}}}(t) \end{bmatrix} \quad (13.3)$$

Kleinere Änderungen werden durch die Zufallszahlen  $z_{a_0}, z_{a_1}, z_{a_2}, z_{x_{\text{start}}}, z_{y_{\text{start}}}, z_{x_{\text{ende}}}$  und  $z_{y_{\text{ende}}}$  modelliert.

Die vollständige Zustandsraumbeschreibung lautet damit:

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{a}_0(t) \\ \dot{a}_1(t) \\ \dot{a}_2(t) \\ \dot{x}_{start}(t) \\ \dot{y}_{start}(t) \\ \dot{x}_{ende}(t) \\ \dot{y}_{ende}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{a_0}(t) \\ z_{a_1}(t) \\ z_{a_2}(t) \\ z_{x_{start}}(t) \\ z_{y_{start}}(t) \\ z_{x_{ende}}(t) \\ z_{y_{ende}}(t) \end{bmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \cdot \underline{u}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{G}} \cdot \underline{z}(t) \quad (13.4)
 \end{aligned}$$

Die Systemmatrix  $\underline{A}$  entspricht der Nullmatrix, die Eingangsmatrix  $\underline{B}$  dem Nullvektor und die Matrix  $\underline{G}$  der Einheitsmatrix.

In diesem Fahrstreifenerkennungsansatz sind alle Zustandsgrößen direkt messbar. Dies bedeutet, dass für die Messabbildung (Ausgangsgleichung)

$$\begin{aligned}
 \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ x_{start}(t) \\ y_{start}(t) \\ x_{ende}(t) \\ x_{ende}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ x_{start}(t) \\ y_{start}(t) \\ x_{ende}(t) \\ x_{ende}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{u}(t) \quad (13.5)
 \end{aligned}$$

$$\underline{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot \underline{u}(t) \quad (13.6)$$

gilt. Somit entspricht die Beobachtungsmatrix  $\underline{C}$  der Einheitsmatrix und die Durchgangsmatrix  $\underline{D}$  dem Nullvektor.

## Zeitdiskrete Systembeschreibung

In Kapitel 2 wurde auf die Diskretisierung der zeitkontinuierlichen Systembeschreibung eingegangen. Mit diesem Wissen lässt sich die zeitdiskrete Systemmatrix  $\underline{A}_d$  und die zeitdiskrete Eingangsmatrix  $\underline{B}_d$  bestimmen.

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{B}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{B} dv = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Systemmatrix entspricht somit im Zeitkontinuierlichen der Nullmatrix und im Zeitdiskreten der Einheitsmatrix.

## Beobachtbarkeit

Da alle Zustandsgrößen direkt messbar sind, gestaltet sich die Überprüfung der Beobachtbarkeit einfach. Der Rang für die Beobachtbarkeitsmatrix  $\underline{S}_B^*$  ergibt sich mit:

$$\text{Rang}(\underline{S}_B^*) = \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^{n-1} \end{bmatrix} \right) = 7 \quad (13.7)$$

Da der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix  $\underline{S}_B^*$  gleich der Anzahl der Freiheitsgrade des Zustands  $\underline{x}$  ist, ist das System beobachtbar.

## Bestimmung des System- und Messrauschens

Im Falle der Fahrstreifenerkennung wird für die Kovarianzmatrix  $\underline{R}(k)$  des Messrauschens eine mögliche Korrelation zwischen den einzelnen Größen vernachlässigt. D. h. die Kovarianz aller Größen ist null. Die Kovarianzmatrix des Messrauschens lautet damit:

$$\underline{R}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Var}(v_{a_2}(k)) \\ \text{Var}(v_{a_1}(k)) \\ \text{Var}(v_{a_0}(k)) \\ \text{Var}(v_{x_{start}}(k)) \\ \text{Var}(v_{y_{start}}(k)) \\ \text{Var}(v_{x_{ende}}(k)) \\ \text{Var}(v_{y_{ende}}(k)) \end{bmatrix} \quad (13.8)$$

Für die Simulation wird die Varianz des Messrauschens empirisch bestimmt. Dazu verbleibt das Fahrzeug im Stillstand. Nun werden für eine gewisse Zeit die Werte der Fahrstreifen aufgezeichnet. Anschließend erfolgt eine Mittelung dieser Werte und die Berechnung der Varianz.

Die mit dieser Methode ermittelten Werte lauten:

$$\begin{bmatrix} \text{Var}(v_{a_2}(k)) \\ \text{Var}(v_{a_1}(k)) \\ \text{Var}(v_{a_0}(k)) \\ \text{Var}(v_{x_{\text{start}}}(k)) \\ \text{Var}(v_{y_{\text{start}}}(k)) \\ \text{Var}(v_{x_{\text{ende}}}(k)) \\ \text{Var}(v_{y_{\text{ende}}}(k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,174 \cdot 10^{-9} \\ 7,585 \cdot 10^{-4} \\ 26,266 \\ 1,631 \\ 1,631 \\ 1,631 \\ 1,631 \end{bmatrix} \quad (13.9)$$

Die Bestimmung der Matrix für das diskrete Systemrauschen  $\underline{G}_d$  erfolgt durch die Methode der direkten Diskretisierung. Diese lautet:

$$\begin{aligned} \underline{G}_d &= e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{G} = \underline{A}_d \cdot \underline{G} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu den kinematischen Modellen aus Kapitel 7.5 besteht für die in diesem Fall gewählte Modellbildung kein einfacher physikalischer Zusammenhang. Deshalb wird vereinfacht davon ausgegangen, dass die einzelnen Zustandsgrößen unkorreliert und normalverteilt sind. Die Kovarianzmatrix des Systemrauschens lautet somit:

$$\underline{Q}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Var}(z_{a_2}(k)) \\ \text{Var}(z_{a_1}(k)) \\ \text{Var}(z_{a_0}(k)) \\ \text{Var}(z_{x_{\text{start}}}(k)) \\ \text{Var}(z_{y_{\text{start}}}(k)) \\ \text{Var}(z_{x_{\text{ende}}}(k)) \\ \text{Var}(z_{y_{\text{ende}}}(k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{z_1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{z_2}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z_3}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_4}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_5}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_6}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_7}^2 \end{bmatrix}$$

In der vorliegenden Simulation wurden die Werte der Varianzen manuell auf

$$\begin{bmatrix} \text{Var}(z_{a_2}(k)) \\ \text{Var}(z_{a_1}(k)) \\ \text{Var}(z_{a_0}(k)) \\ \text{Var}(z_{x_{\text{start}}}(k)) \\ \text{Var}(z_{y_{\text{start}}}(k)) \\ \text{Var}(z_{x_{\text{ende}}}(k)) \\ \text{Var}(z_{y_{\text{ende}}}(k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,935 \cdot 10^{-9} \\ 1,896 \cdot 10^{-4} \\ 6,567 \\ 0,408 \\ 0,408 \\ 0,408 \\ 0,408 \end{bmatrix} \quad (13.11)$$

festgelegt, so dass ein für den Rundkurs optimales Filterergebnis erreicht wird. Eine empirische Festlegung wie für das Messrauschen ist aufgrund des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen dem Zustand  $\underline{x}(t)$  und der physikalischen Bewegung des Fahrzeuges nicht ohne weiteres möglich. Je nach Situation (Geradeaus- bzw. Kurvenfahrt) wären andere Werte optimal. Hierfür wäre das ROSE-Filter prädestiniert, um adaptiv die Kovarianzen mit abzuschätzen.

Die Kovarianzmatrix  $\underline{Q}^*(k)$  des Systemrauschens berechnet sich analog zu den vorherigen Kapiteln:

$$\underline{Q}^*(k) = \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \begin{bmatrix} \sigma_{z_1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{z_2}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z_3}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_4}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_5}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_6}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_7}^2 \end{bmatrix} \quad (13.12)$$

## 13.3 Implementierung und Ergebnisse

Mit dem im vorherigen Abschnitt beschriebenen Filterentwurf lässt sich nun eine zeitliche Verfolgung der Fahrspuren durchführen. Hierzu wird der auf [www.kalman-filter.de](http://www.kalman-filter.de) zur Verfügung gestellte Quellcode verwendet.



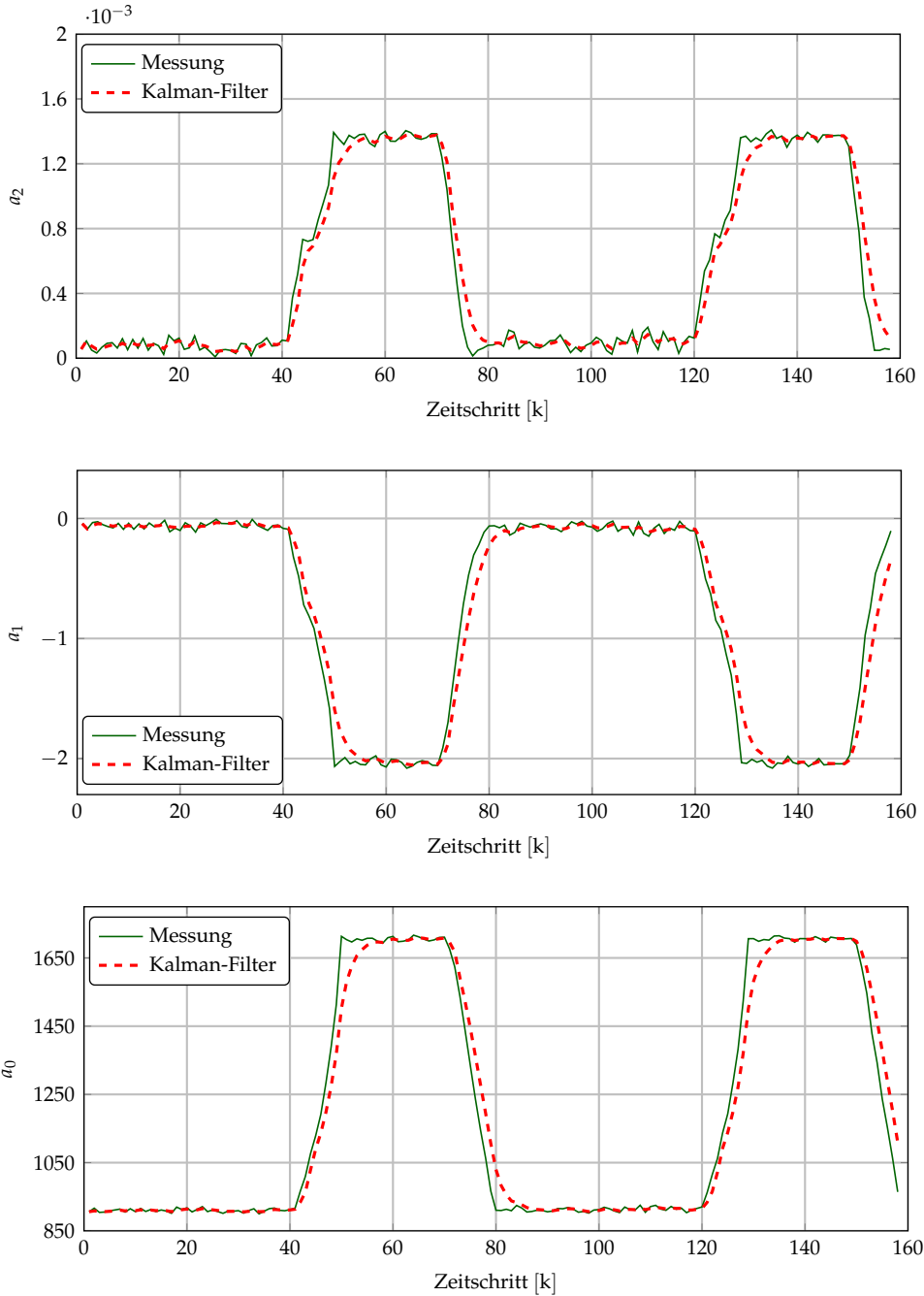


Abb. 13.6: Die Abbildung zeigt das Ergebnis der Kalman-Filterung für die Befahrung der Strecke aus Abb. 13.2.

In Abbildung 13.6 ist der Verlauf des äußeren Fahrstreifens mit den drei Parametern des Polynoms  $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$  dargestellt. Der Unterschied zwischen Geradeaus- und Kurvenfahrt ist deutlich zu erkennen. Besonders anschaulich ist dies für den quadratischen Parameter  $a_2$ . Bei der Fahrt durch den geraden Abschnitt ist dieser nahe null und nimmt in der Kurve einen Wert ungleich null an.

Die Start- und Endpunkte sind hier nicht aufgeführt, da sie für die Fahrstreifeneigenschaft weniger interessant sind und hauptsächlich nur als Hilfsgrößen dienen.

---

# Anhang

---

## ANHANG A

# VEKTOR- UND MATRIZENRECHNUNG

## Matrix

Besitzt eine Matrix  $m$  Spalten und  $n$  Zeilen, wird diese als  $(n \times m)$ -Matrix bezeichnet. Jedes Element der Matrix ist durch den Zeilenindex  $i$  und den Spaltenindex  $j$  bestimmt.

$$\underline{A} = [a_{i,j}]_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

## Vektor

Ein Vektor stellt einen Spezialfall einer Matrix dar und hat entweder nur eine Spalte (Spaltenvektor) bzw. eine Zeile (Zeilenvektor).

$$\underline{B} = [b_i]_{n \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \underline{C} = [c_j]_{1 \times m} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_m]$$

## Addition zweier $(n \times m)$ -Matrizen

Bei gleicher Matrizengröße ist eine Addition zweier Matrizen möglich.

$$\begin{aligned}
 \underline{E} + \underline{F} &= \left[ e_{i,j} \right]_{n \times m} + \left[ f_{i,j} \right]_{n \times m} = \left[ e_{i,j} + f_{i,j} \right]_{n \times m} \\
 &= \begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & \cdots & e_{1,m} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & \cdots & e_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n,1} & e_{n,2} & \cdots & e_{n,m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,m} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n,1} & f_{n,2} & \cdots & f_{n,m} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} e_{1,1} + f_{1,1} & e_{1,2} + f_{1,2} & \cdots & e_{1,m} + f_{1,m} \\ e_{2,1} + f_{2,1} & e_{2,2} + f_{2,2} & \cdots & e_{2,m} + f_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n,1} + f_{n,1} & e_{n,2} + f_{n,2} & \cdots & e_{n,m} + f_{n,m} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## Multiplikation mit Skalar k

$$k \cdot \underline{A} = k \cdot \left[ a_{i,j} \right]_{n \times m} = \left[ k \cdot a_{i,j} \right]_{n \times m} = \begin{bmatrix} k \cdot a_{1,1} & k \cdot a_{1,2} & \cdots & k \cdot a_{1,m} \\ k \cdot a_{2,1} & k \cdot a_{2,2} & \cdots & k \cdot a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{n,1} & k \cdot a_{n,2} & \cdots & k \cdot a_{n,m} \end{bmatrix}$$

$$k \cdot \underline{B} = k \cdot \left[ b_i \right]_{n \times 1} = \left[ k \cdot b_i \right]_{n \times 1} = \begin{bmatrix} k \cdot b_1 \\ k \cdot b_2 \\ \vdots \\ k \cdot b_n \end{bmatrix}$$

$$k \cdot \underline{C} = k \cdot \left[ c_j \right]_{1 \times m} = \left[ k \cdot c_j \right]_{1 \times m} = \left[ k \cdot c_1 \quad k \cdot c_2 \quad \cdots \quad k \cdot c_m \right]$$

## Multiplikation $(n \times r)$ -Matrix mit $(r \times m)$ -Matrix

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{E} \cdot \underline{H} = [a_{i,j}]_{n \times m} = [e_{i,j}]_{n \times r} \cdot [h_{i,j}]_{r \times m} \\ &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & \cdots & e_{1,r} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & \cdots & e_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n,1} & e_{n,2} & \cdots & e_{n,r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdots & h_{1,m} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \cdots & h_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{r,1} & h_{r,2} & \cdots & h_{r,m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{mit } a_{i,j} = \sum_{k=1}^r e_{i,k} \cdot h_{k,j} \quad i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots m$$

### Beispiel 16: Multiplikation

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{E} \cdot \underline{H} = [a_{i,j}]_{2 \times 1} = [e_{i,j}]_{2 \times 3} \cdot [h_{i,j}]_{3 \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o & p & q \\ r & s & t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o \cdot x + p \cdot y + q \cdot z \\ r \cdot x + s \cdot y + t \cdot z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{mit } a_{i,j} = \sum_{k=1}^3 e_{i,k} \cdot h_{k,j} \quad i = 1, 2, \quad j = 1$$

Alternatives Rechenschema:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} o & p & q \\ r & s & t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} o \cdot x + p \cdot y + q \cdot z \\ r \cdot x + s \cdot y + t \cdot z \end{bmatrix} \end{array}$$

## Transponierte

Die Transponierte lässt sich nur bei einer quadratischen  $(n \times n)$ -Matrix bilden.

$$\underline{A}^T = \left[ a_{i,j} \right]_{n \times n}^T = \left[ a_{j,i} \right]_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \quad \underline{C}^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_m \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

## Symmetrie $(n \times n)$ -Matrix

Eine Symmetrie existiert nur bei einer quadratischen  $(n \times n)$ -Matrix.

$$\underline{A} = \underline{A}^T = \left[ a_{i,j} \right]_{n \times n} = \left[ a_{i,j} \right]_{n \times n}^T \quad \text{mit} \quad a_{i,j} = a_{j,i} \quad \forall i, j$$

### Beispiel 17: Symmetrie

$$\underline{A} = \underline{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

## Inverse $(n \times n)$ -Matrix

Die Determinante lässt sich nur bei einer quadratischen  $(n \times n)$ -Matrix bilden.

$$\underline{A}^{-1} = \left[ a_{i,j} \right]_{n \times n}^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(\underline{A})} \cdot \left( \text{Adj}(\underline{A}) \right)^T \quad \text{mit} \quad \text{Det}(\underline{A}) \neq 0$$

$\text{Det}(\underline{A})$ : Determinante von  $\underline{A}$        $\text{Adj}(\underline{A})$ : Adjunkte von  $\underline{A}$

Zur Berechnung der Determinanten und der Adjunkte siehe z. B. Strampp, W. „Lineare Algebra mit Mathematica und Maple“ [23].

### Beispiel 18: Inverse

$$\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \text{Det}(\underline{A}) \cdot \begin{bmatrix} e \cdot i - f \cdot h & c \cdot h - b \cdot i & b \cdot f - c \cdot e \\ f \cdot g - d \cdot i & a \cdot i - c \cdot g & c \cdot d - a \cdot f \\ d \cdot h - e \cdot g & b \cdot g - a \cdot h & a \cdot e - b \cdot d \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(\underline{A}) = \frac{1}{a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - c \cdot e \cdot g - b \cdot d \cdot i - a \cdot f \cdot h}$$



## Spur ( $n \times n$ )-Matrix

Die Spur lässt sich nur bei einer quadratischen ( $n \times n$ )-Matrix bilden.

$$\text{Tr}(\underline{A}) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n} \quad \text{mit} \quad \underline{A} = [a_{i,j}]_{n \times n}$$

### Beispiel 19: Spur

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \text{Tr}(\underline{A}) = a + e + i$$

## Einheitsmatrix ( $n \times n$ )-Matrix

Die Einheitsmatrix existiert nur bei einer quadratischen ( $n \times n$ )-Matrix.

$$\underline{I} = [a_{i,j}]_{n \times n} \quad \text{mit} \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

## Definitheit von Matrizen

Für  $\underline{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$   $\underline{X} = [x_j]_{1 \times m}$  gilt falls:

- $\underline{X} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X}^T > 0$  : Matrix  $\underline{A}$  positiv definit
- $\underline{X} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X}^T \geq 0$  : Matrix  $\underline{A}$  positiv semidefinit
- $\underline{X} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X}^T < 0$  : Matrix  $\underline{A}$  negativ definit
- $\underline{X} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X}^T \leq 0$  : Matrix  $\underline{A}$  negativ semidefinit

### Beispiel 20: Definitheit

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{X} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 3 \cdot x_2^2$$

Für alle reellen Werte für  $x_1$  und  $x_2$  ist die Matrix  $\underline{A}$  mindestens positiv semidefinit.

## Wichtige Rechenregeln

Für  $\underline{A} = [a_{i,j}]_{n \times m}$   $\underline{B} = [b_{i,j}]_{n \times m}$   $\underline{C} = [c_{i,j}]_{n \times m}$   $k$  : skalar gilt:

$$\underline{A} - \underline{A} = \underline{0}$$

$$\underline{A} + \underline{0} = \underline{A}$$

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$$

$$(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$$

$$k \cdot (\underline{A} + \underline{B}) = k \cdot \underline{A} + k \cdot \underline{B}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A}$$

Für  $\underline{D} = [d_{i,j}]_{n \times n}$   $\underline{E} = [e_{i,j}]_{n \times n}$   $\underline{F} = [f_{i,j}]_{n \times n}$   $k$  : skalar gilt:

$$(\underline{D} \cdot \underline{E}) \cdot \underline{F} = \underline{D} \cdot (\underline{E} \cdot \underline{F})$$

$$\underline{D} \cdot \underline{E} \neq \underline{E} \cdot \underline{D}$$

$$\underline{D} \cdot (\underline{E} + \underline{F}) = \underline{D} \cdot \underline{E} + \underline{D} \cdot \underline{F}$$

$$(\underline{E} + \underline{F}) \cdot \underline{D} = \underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{F} \cdot \underline{D}$$

$$(\underline{D}^T)^T = \underline{D}$$

$$(\underline{D} + \underline{E})^T = \underline{D}^T + \underline{E}^T$$

$$\underline{I} \cdot \underline{D} = \underline{D}$$

$$\underline{D} \cdot \underline{D}^{-1} = \underline{I}$$

$$(k \cdot \underline{D})^T = k \cdot \underline{D}^T$$

$$(\underline{D} \cdot \underline{E})^T = \underline{E}^T \cdot \underline{D}^T$$

Ausführliche Beispiele zur Vektor- und Matrizenrechnung findet man z. B. in Koch, J. und Stämpfle, M. „Mathematik für das Ingenieurstudium“ [12].

Weitere Rechenregeln z. B. zur Differenzial- und Integralrechnung findet man in Petersen, K. B. und Pedersen, M. S. „The Matrix Cookbook“ [19] bzw. in Simon, D. „Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches“ [22].

## ANHANG B

# SAMMLUNG WICHTIGER VERWENDETER FORMELN

---

$$(\underline{X} + \underline{Y})^T = \underline{X}^T + \underline{Y}^T \quad (\text{B.1})$$

$$(\underline{X} \cdot \underline{Y})^T = \underline{Y}^T \cdot \underline{X}^T \quad (\text{B.2})$$

$$E(\underline{X} + \underline{Y}) = E(\underline{X}) + E(\underline{Y}) \quad (\text{B.3})$$

$$E(\underline{A} \cdot \underline{X}) = \underline{A} \cdot E(\underline{X}) \quad (\text{B.4})$$

$$E(\underline{A} \cdot \underline{X} \cdot \underline{B}) = \underline{A} \cdot E(\underline{X}) \cdot \underline{B} \quad (\text{B.5})$$

$$\text{Var}(\underline{X} + \underline{Y}) = \text{Var}(\underline{X}) + \text{Var}(\underline{Y}) + 2 \cdot \text{Cov}(\underline{X}, \underline{Y}) \quad (\text{B.6})$$

$$\text{Var}(\underline{A} \cdot \underline{X}) = \underline{A} \cdot \text{Var}(\underline{X}) \cdot \underline{A}^T \quad (\text{B.7})$$

$$\text{Cov}(\underline{X}, \underline{Y}) = E(\underline{X} \cdot \underline{Y}) - E(\underline{X}) \cdot E(\underline{Y}) \quad (\text{B.8})$$

$$\text{Cov}(\underline{X}, \underline{X}) = \text{Var}(\underline{X}) = E(\underline{X} \cdot \underline{X}^T) - E(\underline{X}) \cdot E(\underline{X}^T) \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial \text{Tr}(\underline{X} \cdot \underline{B} \cdot \underline{X}^T)}{\partial \underline{X}} = 2 \cdot \underline{X} \cdot \underline{B} \quad \text{wenn } \underline{B} = \underline{B}^T \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial \text{Tr}(\underline{X} \cdot \underline{A})}{\partial \underline{X}} = \underline{A}^T \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial \text{Tr}(\underline{A} \cdot \underline{X}^T)}{\partial \underline{X}} = \underline{A} \quad (\text{B.12})$$

---

Quelle: [4] und [19]

## ANHANG C

# LÖSUNG MATRIX-EXPONENTIALGLEICHUNGEN – EINFÜHRENDES BEISPIEL

Alternative Berechnung des Ausdrucks

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} \quad (\text{C.1})$$

mithilfe der Laplacetransformation. Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{a \cdot t}\} &= \frac{1}{s - a} \\ e^{\underline{A} \cdot t} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{(s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1}\right\} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

mit  $\underline{I}$  Einheitsmatrix.

Somit gilt für das einführende Beispiel mit  $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$e^{\underline{A} \cdot T_s} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}\right)^{-1}\right\}$$

Invertierung der Matrix mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

s	-1	0	1	0	0	·s	}	+
0	s	-1	0	1	0			
0	0	s	0	0	1			
<hr/>								
s <sup>2</sup>	0	-1	s	1	0	·s	}	+
0	s	-1	0	1	0	·s		
0	0	s	0	0	1			
<hr/>								
s <sup>3</sup>	0	0	s <sup>2</sup>	s	1	· $\frac{1}{s^3}$		
0	s <sup>2</sup>	0	0	s	1	· $\frac{1}{s^2}$		
0	0	s	0	0	1	· $\frac{1}{s}$		
<hr/>								
1	0	0	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s^3}$			
0	1	0	0	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$			
0	0	1	0	0	$\frac{1}{s}$			

Somit folgt mithilfe der Laplace-Transformierten:

$$e^{A \cdot T_s} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3} \\ 0 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} \\ 0 & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Orignalfunktion $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ F(s) \}$	Bildfunktion $F(s) = \mathcal{L} \{ f(t) \}$
1	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$

Tab. C.1: Umrechnung Laplace-Transformation

# LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BAR-SHALOM, Y. ; KIRUBARAJAN, T. ; LI, X. : *Estimation with applications to tracking and navigation: [theory algorithms and software]*. New York (u.a.) : Wiley, 2001. – ISBN 0 – 471 – 41655 – X
- [2] BAR-SHALOM, Y. ; LI, X.-R. : *Estimation and tracking: Principles Techniques and Software*. Boston : Artech House, 1993. – ISBN 0 – 89006 – 643 – 4
- [3] BEUCHER, O. : *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik mit MATLAB*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2005. – ISBN 3 – 540 – 23416 – 0
- [4] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. 25. Auflage. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig und Verlag Nauka, Moskau, 1991
- [5] BROWN, R. G. ; HWANG, P. Y. C.: *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. Fourth Edition. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, Weinheim : John Wiley & Sons, Inc., 2012. – ISBN 978 – 0 – 470 – 60969 – 9
- [6] FÖLLINGER, O. ; DÖRRSCHEIDT, F. ; KLITTICH, M. : *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 10., durchges. Aufl., [Nachdr. der 8. überarb. Aufl. 1994]. Heidelberg : Hüthig, 2008 (Studium). – ISBN 978 – 3 – 7785 – 2970 – 6
- [7] FREUND, E. ; HOYER, H. : *Regelungssysteme im Zustandsraum I: Kurseinheit 6/7: Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit*. Hagen : FernUniversität Fachbereich Elektrotechnik, 1981 (Vorlesungsskript)
- [8] GEORGII, H. : *Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. 5. Auflage. Berlin, Boston : Walter de Gruyter, 2015 (De-Gruyter-Lehrbuch). – ISBN 978 – 3 – 11 – 035969 – 5
- [9] GREWAL, M. S. ; ANDREWS, P. A.: *Kalman filtering: theory and practice using Matlab*. Second Edition. New York : Wiley-Interscience Publication, 2001
- [10] KALATA, P. : The tracking index: A generalized parameter for  $\alpha - \beta$  and  $\alpha - \beta - \gamma$  target trackers. In: *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* AES-20 (1984), S. 174–182. <http://dx.doi.org/10.1109/TAES.1984.310438>. – DOI 10.1109/TAES.1984.310438. – ISSN 0018 – 9251

- [11] KALMAN, R. E. ; BUCY, R. S.: New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. In: *Journal of Basic Engineering* (1961), S. 95–108
- [12] KOCH, J. ; STÄMPFLE, M. : *Mathematik für das Ingenieurstudium*. 2. Auflage. Carl Hanser Verlag München, 2013. – ISBN 978 – 3 – 446 – 43232 – 1
- [13] LI, X.-R. ; JILKOV, V. P.: Survey of maneuvering target tracking. Part I. Dynamic models. In: *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 39 (2003), Nr. 4, S. 1333–1364. – ISSN 0018 – 9251
- [14] LUNZE, J. : *Ereignisdiskrete Systeme - Modellierung und Analyse dynamischer Systeme mit Automaten, Markovketten und Petrinetzen*. München, Wien : Oldenbourg Verlag, 2006 (Studium). – ISBN 3 – 486 – 58071 – X
- [15] LUNZE, J. : *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. 5., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Berlin, Heidelberg, New York : Springer Verlag, 2006 (Studium). – ISBN 978 – 3 – 540 – 28326 – 3
- [16] LUNZE, J. : *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. 4., neu bearbeitete Auflage. Berlin, Heidelberg, New York : Springer Verlag, 2006 (Studium). – ISBN 978 – 3 – 540 – 32335 – 8
- [17] MERTINS, A. : *Signaltheorie: Grundlagen der Signalbeschreibung, Filterbänke, Wavelets, Zeit-Frequenz-Analyse, Parameter- und Signalschätzung*. 3., überarbeitete und erweiterte Auflage. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2012 (SpringerLink: Bücher). – ISBN 978 – 3 – 8348 – 8109 – 0
- [18] PAPULA, L. : *Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung*. 6. Auflage. Wiesbaden : Vieweg + Teubner Verlag, Springer Fachmedien, 2011 (Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler). – ISBN 978 – 3 – 8348 – 1227 – 8
- [19] PETERSEN, K. B. ; PEDERSEN, M. S.: *The Matrix Cookbook*. online aufgerufen bei: <http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/p.php?3274>, Nov 2012. – Version 20121115
- [20] PHILIPPSEN, H. : *Einstieg in die Regelungstechnik: Vorgehensmodell für den praktischen Reglerentwurf*. 2. Auflage. Carl Hanser Verlag München, 2015. – ISBN 978 – 3 – 446 – 43261 – 1
- [21] ROSSKOTHEN, M. : *Abbildung: Mondlandefähre*. online aufgerufen bei: <https://de.fotolia.com/id/22825496>, 18. Februar 2016
- [22] SIMON, D. : *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*. Hoboken and NJ : Wiley-Interscience, 2006. – ISBN 0 – 471 – 70858 – 5
- [23] STRAMPP, W. : *Lineare Algebra mit Mathematica und Maple: Repetitorium und Aufgaben mit Lösungen*. Vieweg+Teubner Verlag, 2013. – ISBN 978 – 3 – 322 – 80306 – 1



- [24] UNBEHAUEN, H. : *Regelungstechnik II: Zustandsregelungen, digitale und nichtlineare Regelsysteme*. 9. durchgesehene und korrigierte Auflage. Wiesbaden : Vieweg + Teubner Verlag, 2007 (Studium). – ISBN 978 – 3 – 528 – 83348 – 0
- [25] UNBEHAUEN, H. : *Regelungstechnik I: Klassische Verfahren zur Analyse und Synthese linearer kontinuierlicher Regelsysteme, Fuzzy-Regelsysteme*. 15. überarbeitete und erweiterte Auflage. Wiesbaden : Vieweg + Teubner Verlag, 2008 (Studium). – ISBN 978 – 3 – 8348 – 0497 – 6
- [26] UNBEHAUEN, R. : *Systemtheorie 1: Allgemeine Grundlagen, Signale und lineare Systeme im Zeit- und Frequenzbereich*. 8., korr. Aufl. München : Oldenbourg, 2002 (Systemtheorie). – ISBN 3 – 486 – 25999 – 7
- [27] WENDEL, J. : *Integrierte Navigationssysteme: Sensordatenfusion GPS und inertielle Navigation*. 2. Auflage. München : Oldenbourg, 2011. – ISBN 978 – 3 – 486 – 70572 – 6
- [28] WENZEL, L. : Kalman-Filter - Ein mathematisches Modell zur Auswertung von Messdaten für Regelungstechnik, Teil 1. In: *Elektronik* (2000), Juni
- [29] WIKIPEDIA ; ONLINE-NACHSCHLAGEWERK: *Primary Guidance, Navigation and Control System*. online aufgerufen bei: [http://de.wikipedia.org/wiki/Primary\\_Guidance%2C\\_Navigation\\_and\\_Control\\_System](http://de.wikipedia.org/wiki/Primary_Guidance%2C_Navigation_and_Control_System), 04. Mai 2013
- [30] WOLF, D. : *Signaltheorie: Modelle und Strukturen*. Springer Berlin Heidelberg, 1999 (SpringerLink: Bücher). – ISBN 978 – 3 – 642 – 58540 – 1
- [31] ZIMMER, G. : *Hochfrequenztechnik - Lineare Modelle*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2000. – ISBN 978 – 3 – 642 – 63082 – 8

# STICHWORTVERZEICHNIS

## A

Ausblendeigenschaft .... 41, 54, 101, 104

Ausgangs-

Gleichung ..... 24

Größe ..... 24, 28, 30

Matrix ..... 24, 116

Vektor ..... 24

Autokorrelationsfunktion ..... 74 f.

## B

Beobachtbarkeit ..... 30–35, 117

Beobachtungsmatrix ..... 24

Bewegungsgleichung ..... 38

## D

Dichtefunktion ..... 54–60

Differentialgleichung ..... 28

Dirac-Funktion ... 40 ff., 54, 78, 101, 103 f.

Direkte Diskretisierung ..... 101

Disjunkte Menge ..... 51

Diskretisiertes zeitkontinuierliches

Modell ..... 102 ff.

Durchgangsmatrix ..... 24, 116

## E

Eingangs-

Größe ..... 24, 28, 30, 35

Matrix ..... 24, 116

Vektor ..... 24

Elementarereignisse ..... 50

Ereignis ..... 50 f.

Erwartungswert ..... 61 ff.

Experiment ..... 50

## G

Gauß-Markov-Prozess ..... 79

Gilbert-Kriterium ..... 35, 117

Gleichverteilung ..... 55

## H

Häufigkeitsverteilung ..... 52, 54–60

Hautus-Kriterium ..... 35, 117

## I

Ideale Abtastung ..... 40 ff.

IIR-Filter ..... 96, 132

## J

Joseph Formel ..... 87

## K

Kalman-Verstärkung ..... 83, 88–91, 94

Kinematisches Modell

2. Ordnung ..... 106–109

3. Ordnung ..... 109–112

Höherer Ordnung ..... 112

Kolmogorov-Axiome ..... 53

Komplementärereignis ..... 51

Korrektur ..... 87 ff.

Korrelationskoeffizient ..... 66–69

Kovarianz ..... 65 ff.

Kreuzkorrelationsfunktion ..... 76 f.

## M

Markov-Ketten ..... 60

**Matrix-**

Addition .....	190
Allgemein .....	189
Definitheit .....	195
Einheitsmatrix .....	194
Inverse .....	193
Multiplikation .....	191 f.
Rechenregeln .....	196
Skalarmultiplikation .....	190
Spur .....	194
Symmetrie .....	192
Transponierte .....	192

Messrauschen ..... 44 f., 85, 95, 118

Mittelwert ..... 62 f.

Mondlandung ..... 3–19

**N**

Normalverteilung ..... 56 f.

**P**

Partielles konstantes Rauschen ..... 102

Prädiktion ..... 85 f.

**R**

Rang ..... 31–37

Reale Abtastung ..... 42–47

ROSE-Filter .... 93–98, 131–135, 159–172

**S**

Sprungfähige Systeme ..... 24

Steuerbarkeit ..... 35 ff.

Steuermatrix ..... 24

Stochastischer Prozess

Definition ..... 72

Ergodisch ..... 73

Stationär ..... 73

**System-**

Matrix ..... 24, 116

Rauschen .... 44, 85, 96, 99–112, 118

**T****Target**

Maneuvering Index ..... 128

Tracking Index ..... 128

Tiefpass-Filter ..... 5, 130, 132

Transitionsmatrix ..... 38

**V**

Varianz ..... 64 f., 67

Vektor ..... 189

**W****Wahrscheinlichkeits-**

Dichte ..... 54

Maß ..... 53

Weißes Rauschen ..... 78 f., 103

**Z****Zufalls-**

Variable ..... 51, 71

Vektor ..... 71

**Zustands-**

Differentialgleichung ..... 24, 100

Größe ..... 24

Variable ..... 24, 115 f.

Vektor ..... 24