UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Faculté de génie
Département de génie électrique et génie informatique

RAPPORT APP3

Identification de systèmes dynamiques
GEL521

Présenté à :
Wael Suleiman

Présenté par :
Giuseppe Lomonaco - lomg2301
Jean Dodie Ombeni – ombj2301
Anthony Royer – roya2019

Sherbrooke – 4 octobre 2023

Table des matières

Liste des figures

1. MANDAT A : ÉQUATIONS STATIQUES ET DYNAMIQUES

1.1 AMPLIFICATEUR

$$G(s) = \frac{e_a(s)}{e_{in}(s)} = \frac{k}{1 + \tau s}$$

$$e_a * (1 + \tau s) = k * e_{in}$$

$$e_a + e_a \tau s = k e_{in}$$

L'on applique Laplace inverse afin de retourner dans le domaine temporel :

$$e_a(t) + \tau * \frac{de_a(t)}{dt} = k e_{in}(t)$$

$$\boxed{\dot{e_a}(t) = \frac{de_a(t)}{dt} = \frac{k e_{in}(t)}{\tau} - \frac{e_a(t)}{\tau}}$$

1.2 ÉQUATION ÉLECTRIQUE DU MOTEUR

$$i_a(t) * R_a + L_a * \frac{di_a(t)}{dt} = e_a - e_t \qquad Avec \;\; e_t = K_b * \omega_m$$

$$\boxed{\dot{i_a}(t) = \frac{di_a(t)}{dt} = \frac{1}{L_a} e_a - \frac{K_b}{L_a} \omega_m - \frac{R_a}{L_a} i_a}$$

1.3 CÔTÉ MOTEUR

$$\sum T = J_m \dot{\omega_m}$$

$$\sum T = T_{moteur} - T_{friction} - T_{OUT}$$

$$T_m - T_f - T_L = J_m \dot{\omega_m} \qquad Avec \;\; T_f = B_m \omega_m \quad \& \quad T_{OUT} = N T_L$$

$$\boxed{T_m - B_m \omega_m - N T_L = J_m \dot{\omega_m}}$$

1.4 CÔTÉ CHARGE (*LOAD*)

$$\sum T = J_L \dot{\omega}_L$$

$$\sum T = T_L - T_{friction}$$

$$T_L - T_{friction} = J_L \dot{\omega}_L \qquad Avec\ T_{friction} = B_L \omega_L$$

$$\boxed{T_L - B_L \omega_L = J_L \dot{\omega}_L}$$

1.5 SUBSTITUTION DES ÉQUATION CÔTÉ MOTEUR ET CÔTÉ *LOAD*

À partir des équations trouvées précédemment :

$$T_m - B_m \omega_m - N T_L = J_m \dot{\omega_m} \qquad \& \qquad T_L = J_L \dot{\omega}_L + B_L \omega_L$$

$$T_m - B_m \omega_m - N[J_L \dot{\omega}_L + B_L \omega_L] = J_m \dot{\omega_m}$$

$$T_m - B_m \omega_m - N J_L \dot{\omega}_L - N B_L \omega_L = J_m \dot{\omega_m} \qquad Avec\ T_m = K_i i_a$$

$$K_i i_a - B_m \omega_m - N J_L \dot{\omega}_L - N B_L \omega_L = J_m \dot{\omega_m}$$

Nous devons prendre en compte le réducteur de vitesse, nous savons que :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{r_1}{r_2} = N$$

Selon nos données :

$$N = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_{Load}}{\omega_{Moteur}} \qquad alors \quad \omega_{Moteur} = \frac{\omega_{Load}}{N}$$

L'on remplace tous nos ω_m par $\frac{\omega_{Load}}{N}$ dans l'équation :

$$K_i i_a - B_m \frac{\omega_L}{N} - N J_L \dot{\omega}_L - N B_L \omega_L = J_m \frac{\dot{\omega_L}}{N}$$

L'on isole $\dot{\omega}_L$:

$$\boxed{\dot{\omega}_L = i_a \frac{N K_i}{J_m + N^2 J_L} - \omega_L \frac{(B_m + N^2 B_L)}{J_m + N^2 J_L}}$$

2. MANDAT B : ÉQUATIONS D'ÉTATS

Les variables d'état sont $x_1 = \theta_L$, $x_2 = \omega_L$, $x_3 = i_a \quad et \quad x_4 = e_a$, soit :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_L \\ \omega_L \\ i_a \\ e_a \end{bmatrix}$$

Les équations finales trouvées sont donc :

$$\dot{\theta}_L = \omega_L$$

$$\dot{\omega_L} = i_a \frac{NK_i}{J_m + N^2 J_L} - \omega_L \frac{(B_m + N^2 B_L)}{J_m + N^2 J_L}$$

$$\dot{\iota_a}(t) = e_a \frac{1}{L_a} - \omega_L \frac{K_b}{NL_a} - i_a \frac{R_a}{L_a}$$

$$\dot{e_a}(t) = e_{in} \frac{K}{\tau} - e_a \frac{1}{\tau}$$

Avec les équations trouvées précédemment, il est simple d'exprimer chacune des dérivées trouvées en fonction de nos variables d'état :

$$\dot{\boldsymbol{x_1}} = \boldsymbol{x_2}$$

$$\dot{\boldsymbol{x_2}} = \boldsymbol{x_3} \frac{NK_i}{J_m + N^2 J_L} - \boldsymbol{x_2} \frac{(B_m + N^2 B_L)}{J_m + N^2 J_L}$$

$$\dot{\boldsymbol{x_3}} = \boldsymbol{x_4} \frac{1}{L_a} - \boldsymbol{x_2} \frac{K_b}{NL_a} - \boldsymbol{x_3} \frac{R_a}{L_a}$$

$$\dot{\boldsymbol{x_4}} = e_{in} \frac{K}{\tau} - \boldsymbol{x_4} \frac{1}{\tau}$$

3. MANDAT C : MODÈLE D'ÉTAT COMPLET DU SYSTÈME

3.1 MODÈLE ABCD

Une fois les équations en fonction des variables d'état trouvées, il suffit de bâtir les matrices du modèle ABCD dans MATLAB puis d'utiliser la fonction ***ss2tf()*** afin de trouver la fonction de transfert du modèle trouvé :

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_L \\ \dot{\omega}_L \\ \dot{i_a} \\ \dot{e}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-(B_m + N^2 B_L)}{J_m + N^2 J_L} & \dfrac{NK_i}{J_m + N^2 J_L} & 0 \\ 0 & -\dfrac{k_B}{L_a N} & -\dfrac{R_a}{L_a} & \dfrac{1}{L_a} \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\tau} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \theta_L \\ \omega_L \\ i_a \\ e_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k/\tau \end{bmatrix} e_{in}$$

Nous savons que nous avons θ_L à la sortie, donc :

$$Y = CX + DU$$

$$Y = \theta_L = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] * \begin{bmatrix} \theta_L \\ \omega_L \\ i_a \\ e_a \end{bmatrix} + [0] e_{in}$$

3.2 Code Matlab du modèle ABCD

```
%%  S5 - APP3 - PROBLEMATIQUE - PROBLEMATIQUE.M
%   Auteur:     Giuseppe Lomonaco
%   CIP:        LOMG2301
%   Auteur:     Jean Dodie Ombeni
%   CIP:        OMBJ2301
%   Auteur:     Anthony Royer
%   CIP:        ROYA2019

%   Date de creation:                       30-Septembre-2023
%   Date de derniere modification:          03-Octobre-2023

%   DESCRIPTION:    problématique S5-APP3 Identification et modélisation

clc
close all
clear all

%% DONNEES DU PROBLEME
disp(" Paramètre        Valeur         Unité          Description ");
disp(" ---------------------------------------------------------- ");
Kp =            0.318;          % V/rad
K =             100;            %                   gain ampli
tau =           0.01;           % Cste de temps ampli en seconde
Ki =            0.5;            % Cste de couple du moteur en N-m/A
Kb =            0.5;            % Cste de force contrélectromotrice en V/rad/s
Ra =            8;              % résistance armature du moteur en Ohm
La =            0.008;          % inductance armature du moteur en H
Jm =            0.02;           % inertie armature en N-m s2/rad
Bm =            0.01;           % frottement visqueux armature en N.m/rad/s
N =             0.1;            % facteur de réduction
JL =            1;              % inertie charge en N.m s2/rad
BL =            1;              % frottement visqueux charge en N-m/rad/s

%% Construction du modele ABCD
A = [0          1                               0                       0;
    0          -(Bm+(N^2)*BL)/(Jm+(N^2)*JL)       N*Ki/(Jm+(N^2)*JL)      0;
    0          -Kb/(La*N)                      -Ra/La                   1/La;
    0          0                                0                   -1/tau];

B = [   0;
        0;
        0;
        K/tau];

C = [1      0       0       0];

D = [0];

% on utilise ss2tf pour avoir le num et den de la fonction de transfert
[num, den] = ss2tf(A, B, C, D);
FTBO = tf(num, den)
```

4. Mandat D: Représentation complète du système – Schéma bloc

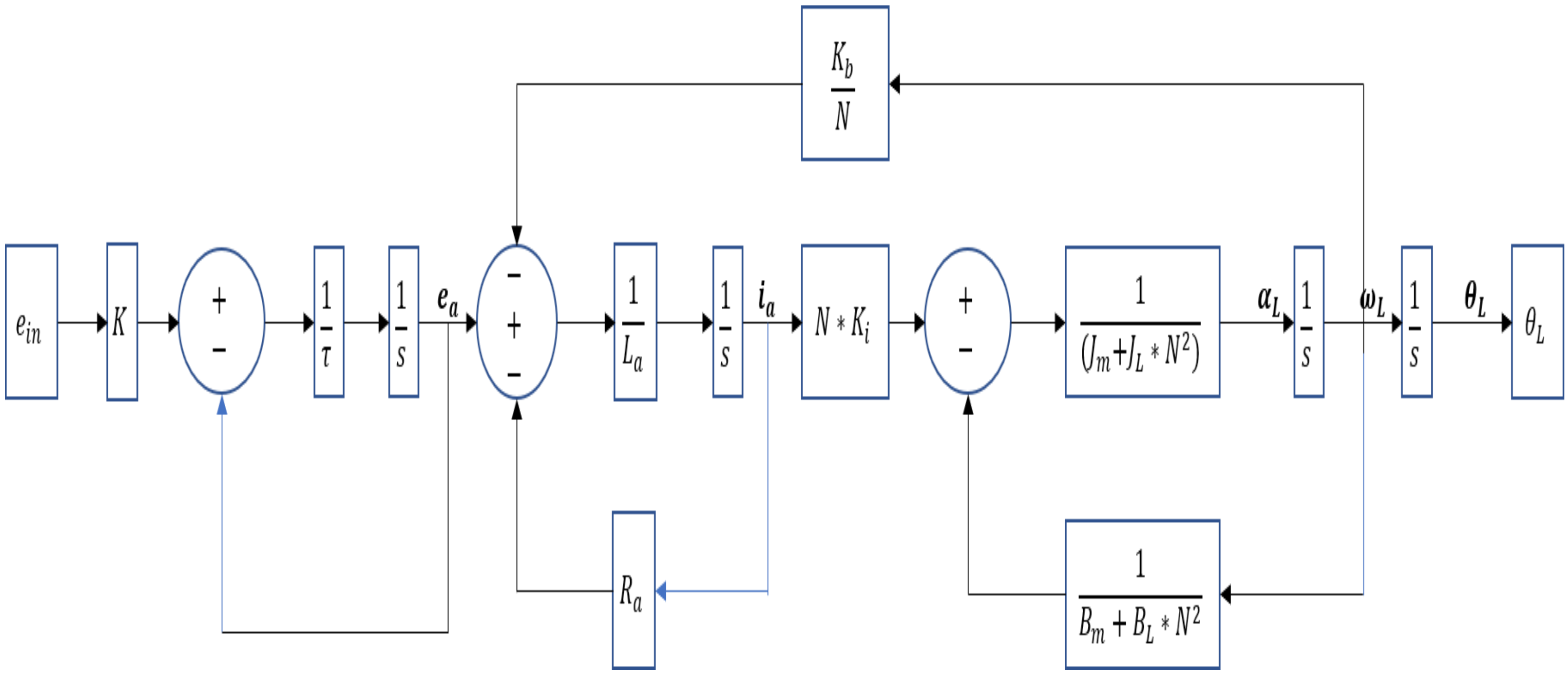


Figure 1: Schéma bloc

5. Mandat E : Fonction de transfert FTBO, FTBF et équation caractéristique

Tous les calculs théoriques se trouvent en Annexe.

5.1 FTBO:

```
FTBO =

                  2.083e06
  -------------------------------------------
  s^4 + 1101 s^3 + 1.018e05 s^2 + 1.708e05 s
```

Figure 2: fonction de transfert en boucle ouverte MATLAB

```
FTBO_a_bras =

                  2.083e06
  ----------------------------------------
  s^4 + 1101 s^3 + 101775 s^2 + 1.708e05 s
```

Figure 3: fonction de transfert en boucle ouverte théorique

5.2 Équation caractéristique FTBO

Afin d’avoir l’équation caractéristique, il suffit de prendre le dénominateur de la fonction de transfert et l’égaliser à zéro.

```
s^4 + 1101 s^3 + 1.018e05 s^2 + 1.708e05 s  = 0
```

Figure 4: équation caractéristique FTBO

5.3 FTBF :

```
FTBF =

                    662500
  ---------------------------------------------------
  s^4 + 1101 s^3 + 1.018e05 s^2 + 1.708e05 s + 662500
```

Figure 5: fonction de transfert en boucle fermée MATLAB

```
FTBF_a_bras =

                    662500
  ---------------------------------------------------
  s^4 + 1101 s^3 + 1.018e05 s^2 + 1.708e05 s + 662500
```

Figure 6: fonction de transfert en boucle fermée théorique

5.4 ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE FTBF

Afin d’avoir l’équation caractéristique, il suffit de prendre le dénominateur de la fonction de transfert et l’égaliser à zéro.

```
s^4 + 1101 s^3 + 1.018e05 s^2 + 1.708e05 s + 662500  = 0
```

Figure 7: équation caractéristique boucle fermée

6. MANDAT F : RÉDUCTION DE LA COMPLEXITÉ

6.1 RÉDUCTION PHYSIQUE

6.1.1 NÉGLIGENCE DE L'INDUCTANCE $\boldsymbol{L_a}$ DU MOTEUR

Puisque $s * L_a \ll R_a$ on peut négliger l'inductance L_a, ce qui cause une réduction de l'ordre dans la FT.

6.1.2 NÉGLIGENCE DE L'AMPLIFICATEUR

Puisque $s * \boldsymbol{\tau} \ll \mathbf{1}$ on peut négliger le facteur $\boldsymbol{\tau}$ **,** ce qui cause une réduction de l'ordre dans la FT.

6.1.3 COMPARAISON DE LA RÉPONSE IMPULSIONNELLE DU SYSTÈME RÉDUIT AVEC CELLE DU SYSTÈME ORIGINAL (PHYSIQUE)

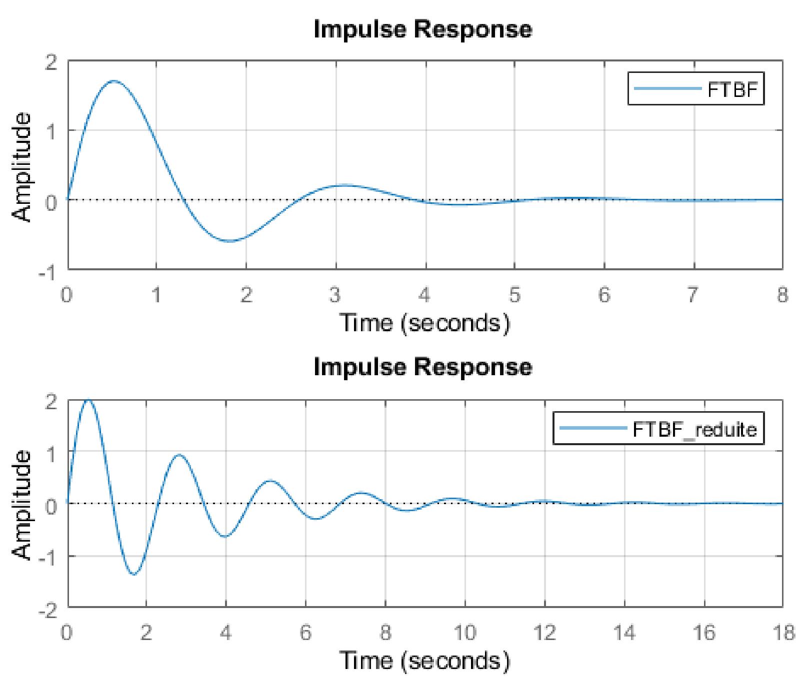


Figure 8: comparaison de la réponse impulsionnelle

Ces graphiques confirment que nos approximations physiques sont bonnes puisque la réponse à un échelon est similaire dans les deux cas.

6.1.4 Fonction de transfert réduite physiquement

```
FTBO_red_phy =

           20.83
  ----------------------
  s^2 + 0.6667 s + 1.042
```

Figure 9: FTBO réduite physiquement

6.2 Réduction numérique

Avec la fonction ***reduce*** de MATLAB, on peut obtenir les pôles qui ont le plus d'impact sur les réponses du système. Les pôles négatifs qui sont plus proches de l'axes des imaginaires sont ceux qui impact le plus le système.

6.2.1 Comparaison la réponse impulsionnelle du système réduit avec celle du système original. (Numérique)

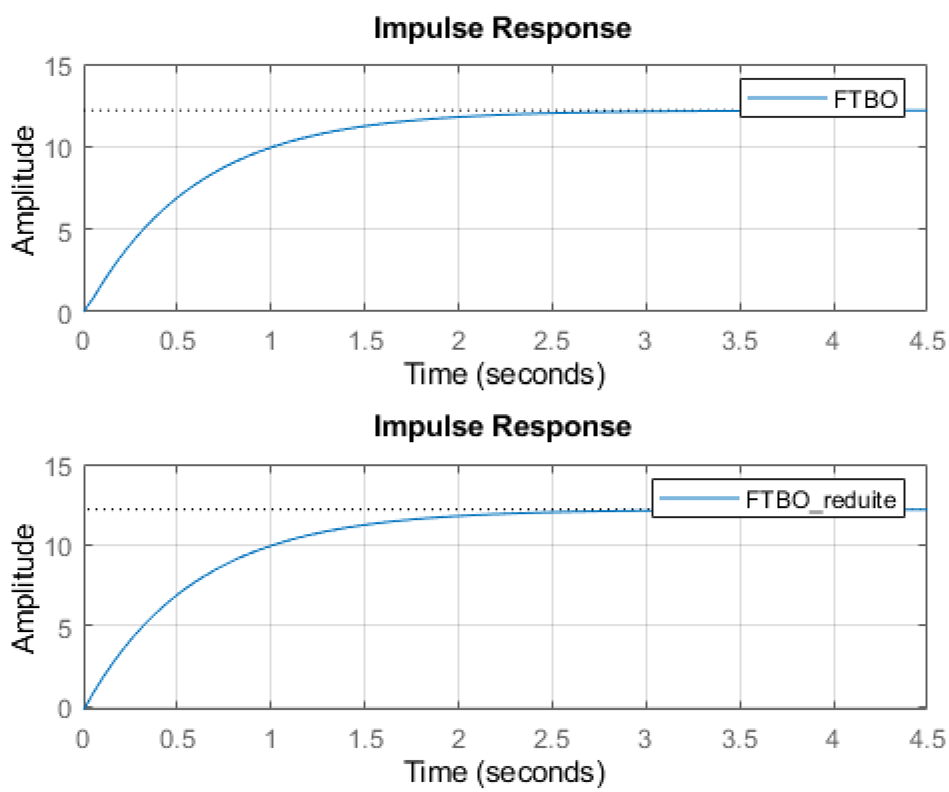


Figure 10: comparaison de la réponse impulsionnelle du système réduit avec celle du système originale

6.3 CODE MATLAB DE LA RÉDUCTION NUMÉRIQUE

```
%FTBF et FTBO numerique
[NUM1,DEN1] = ss2tf(A1,B1,C1,D1);
FTBO = tf(NUM1,DEN1)
FTBF = Kp*feedback(FTBO, Kp) % Kp gain de potentiometre donc lentre et le
feedback est touche


numa = [K];
dena = [tau 1];
numb = [N*Ki];
denb = [(JmN2Jl*La) (Ra*JmN2Jl + La*BmN2Bl) (BmN2Bl*Ra + Ki*Kb) 0];

tfa = tf(numa,dena);
tfb = tf(numb/2.4e-06,denb/2.4e-06);
FTBO_a_bras = tfa*tfb
[NumBO,DenBO] = tfdata(FTBO_a_bras, 'v');
FTBF_a_bras = tf(Kp*NUM1,(DEN1 + Kp*NUM1))


t = [0:0.01:50]';
stepp = ones(size(t));

% Affichage
figure('Name','Simulation de lerreur avec une entree echelon')
plot(t, lsim(FTBF, stepp, t))
xlabel('Time (s)')
ylabel('Amplitude')
xlim([0 10])
grid on


%f) 2 - Reduction numerique:
figure('Name','PZmap FTBO')
pzmap(FTBO)
[R, P, Kq] = residue(NumBO,DenBO)
poids = abs(R)./real(P)
[B,A] = residue(R(3:4),P(3:4),Kq); %a modifier selon les poids
tfss = tf(B,A);
% On ne se sert pas de cela car FTBO instable
% K1 = dcgain(FTBO);
% K2 = dcgain(tfss);
% KK = K2/K1;
% Kn = 1/KK;
% TF = tfss*Kn;
TF = tfss
FTBF_Red_num = Kp*feedback(tfss,Kp)


figure('Name','Réponse à un échelon en BO')
hold on
subplot(2,1,1)
step(FTBO)
```

```
legend('FTBO')
grid on
subplot(2,1,2)
step(TF)
legend('FTBO_reduite')
grid on
hold off

figure('Name','Réponse Impulsionnelle en BO')
hold on
subplot(2,1,1)
impulse(FTBO)
legend('FTBO')
grid on
subplot(2,1,2)
impulse(TF)
legend('FTBO_reduite')
grid on

% En BF
figure('Name','Réponse à un échelon en BF')
hold on
subplot(2,1,1)
step(FTBF)
legend('FTBF')
grid on
subplot(2,1,2)
step(FTBF_Red_num)
legend('FTBF_reduite')
grid on
hold off

figure('Name','Réponse Impulsionnelle en BF')
hold on
subplot(2,1,1)
impulse(FTBF)
legend('FTBF')
grid on
subplot(2,1,2)
impulse(FTBF_Red_num)
legend('FTBF_reduite')
grid on
```

7. MANDAT G : FORME DE LA RÉPONSE EN BOUCLE FERMÉE

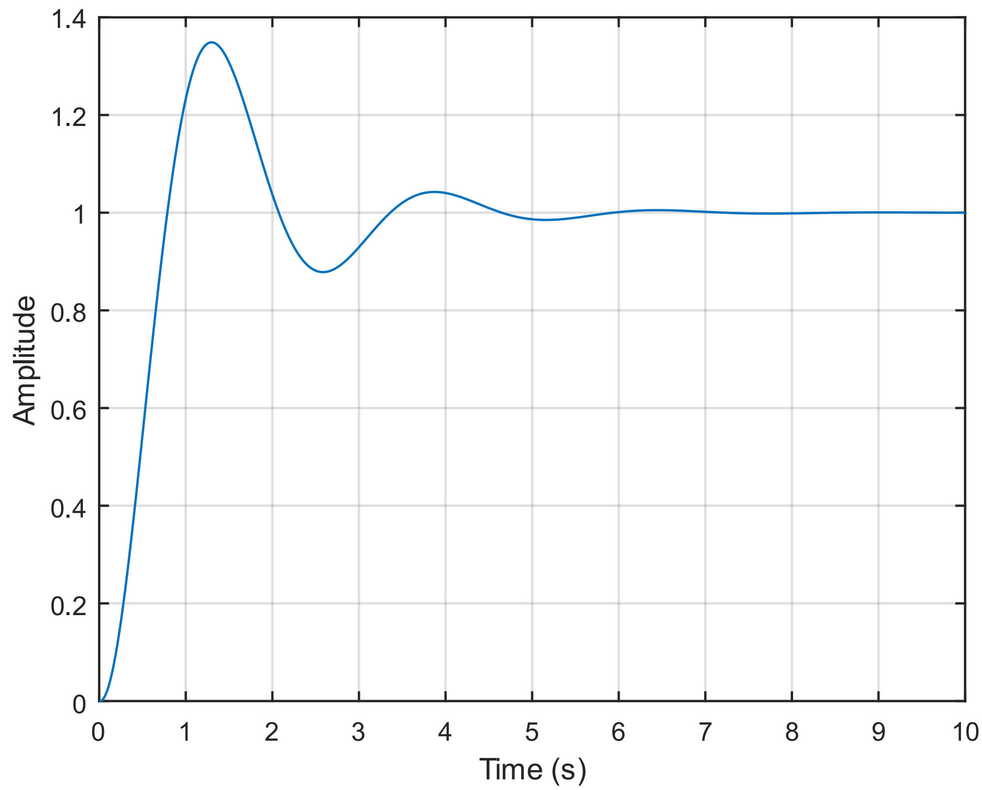


Figure 11: réponse en boucle fermée à un échelon unitaire

L'on remarque que le système prend environ 6 secondes à se stabiliser. Il y a un dépassement lors des premières secondes. La réponse impulsionnelle semble plausible physiquement bien que la rapidité du système ne soit pas sa plus grande force. Le temps de stabilisation est élevé.

En somme, dépendamment des spécifications du système, celui-ci fonctionne bien mais n'est pas excessivement précis et prend du temps à se stabiliser.

Le système est somme toute raisonnable physiquement.

8. MANDAT H : IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES

8.1 EXPÉRIENCE 2

$$T_m = K_i * i_a \qquad \rightarrow \qquad K_i = \frac{T_m}{i_a} = \frac{0.52\ Nm}{1.09\ A} = 0.477\ Nm/A$$

$$R_a = \frac{V_a}{i_a} = 7.339\ \Omega$$

8.2 EXPÉRIENCE 1

Équation Électrique (Obtenu avec KVL)

$$e_a - R_a i_a - L_a \frac{d}{dt} i_a - K_b \dot{\theta} = 0$$

$$\mathcal{L} \rightarrow E_a - R_a I_a(s) - s * L_a I_a(s) - s * K_b \Theta(s) = 0$$

Équation Mécanique

$$(T_m) - B_m \dot{\theta} = J_m \ddot{\theta}$$

$$\mathcal{L} \rightarrow \left(K_i I_a(s)\right) - B_m * \mathrm{s}\Theta(s) = J_m * s^2 \Theta(s)$$

Fonction de transfert entre Θ et E_a

$$\frac{\Theta(\mathrm{s})}{E_a(s)} = \frac{K_i}{s[\ (R_a + sL_a)(J_m * s + B_m) + K_i K_b]}$$

Avec la relation de $\omega = \frac{d}{dt}\theta \rightarrow\ \mathcal{L} \rightarrow \Omega(\mathrm{s}) = s\Theta(\mathrm{s})$

On obtient la fonction de transfert entre Ω et E_a

$$\frac{\Omega(\mathrm{s})}{E_a(s)} = \frac{K_i}{[\ (R_a + sL_a)(J_m * s + B_m) + K_i K_b]}$$

Puisque $sL_a \ll R_a$

$$\frac{\Omega(\mathrm{s})}{E_a(s)} = \frac{K_i}{[\ (R_a)(J_m * s + B_m) + K_i K_b]}$$

On réarrange la fonction de transfert pour qu'elle ressemble à une fonction de transfert d'ordre1

$$\frac{\Omega(s)}{E_a(s)} = \frac{\frac{K_i}{R_a}}{(J_m * s + B_m) + (\frac{K_i K_b}{R_a})} = \frac{\frac{0.477}{7.339}}{(J_m * s + B_m) + \left(\frac{0.477 * 0.477}{7.339}\right)}$$

$$\frac{\Omega(s)}{E_a(s)} = \frac{0.0649}{J_m * s + (B_m + 0.031)}$$

On revient dans le domaine temporel pour pouvoir trouver les paramètres J_m et B_m

$$\Omega(s)[J_m * s + (B_m + 0.031)] = 0.0649 E_a(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \rightarrow \omega(t)\left[J_m * \frac{d}{dt} + (B_m + 0.031)\right] = 0.0649 e_a(t)$$

$$\omega(t) = (\frac{0.0649}{(B_m + 0.031)})\, e_a(t) + (-\frac{J_m}{(B_m + 0.031)}) * \frac{d}{dt}\omega(t)$$

Équation linéaire utiliser dans MATLAB

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2$$

$$a_1 = 1.4121$$

$$a_2 = -0.4984$$

$$B_m = \frac{0.0649}{a_1} - 0.031 \quad et \quad J_m = -a_2(B_m + 0.031)$$

$$\boxed{B_m = 0.0149 \qquad et \qquad J_m = 0.0229}$$

8.3 Code MATLAB de l'identification

```
%% partie identification
load donnees_moteur_2016

dt = t(2:end) - t(1:end-1);
%Force d'Entree
X1 = tension;

%Premiere derivee
X2 = diff(vitesse)./dt;
X = [X1(1:end-1) X2];

%Vecteur de sortie
Y = vitesse(1:end-1);

%Matrice de correlation
R = X'*X;
P = X'*Y;

%Coefficients
A = inv(R)*P

Bm = (0.0649/A(1)) - 0.031
Jm = -A(2)*(Bm + 0.031)
```

9. MANDAT I : BONUS

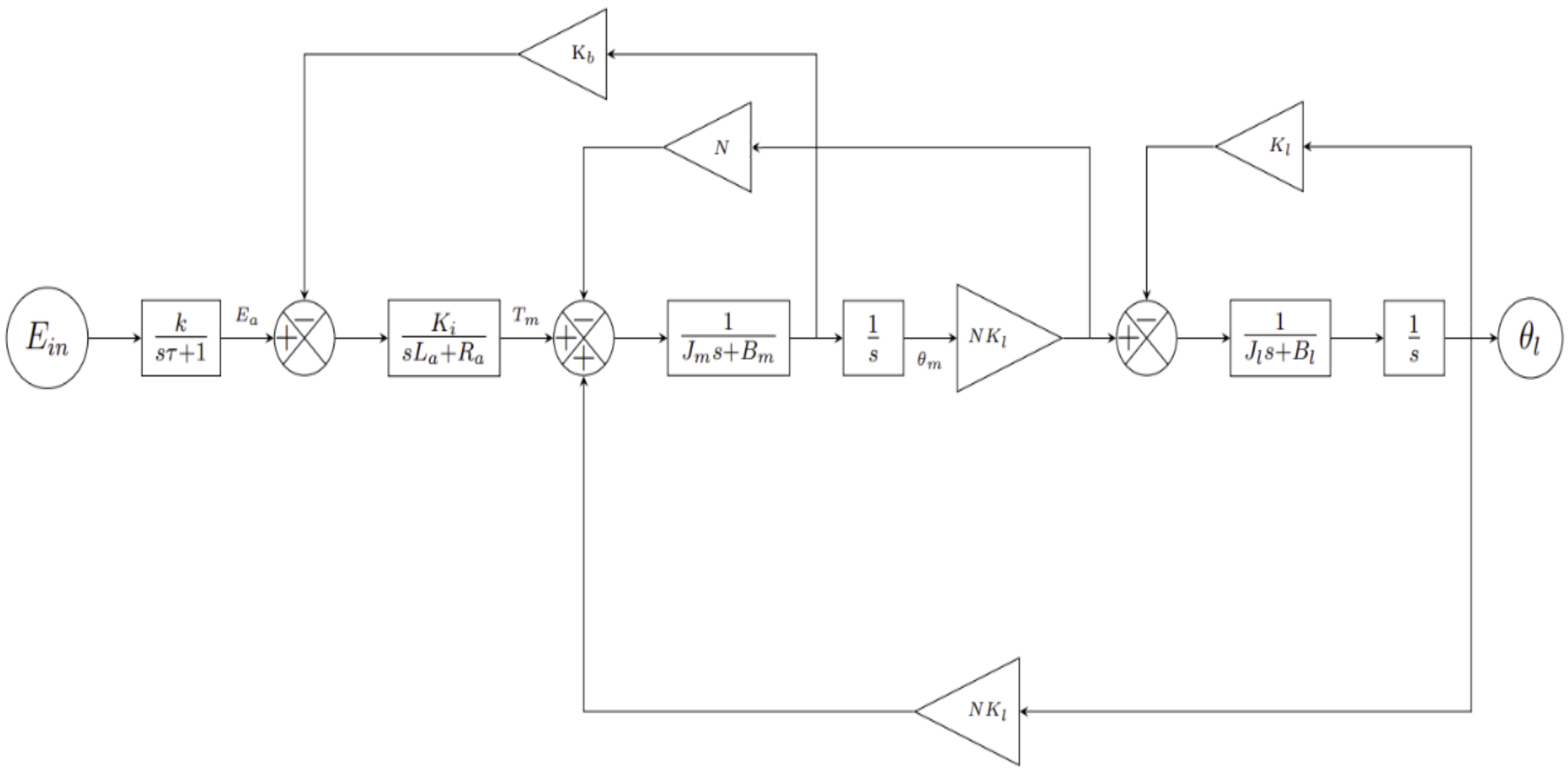


Figure 12: schéma bloc de l'arbre flexible

Annexe – Calculs à la main

APP3 S5 – A2023 – Problématique

Mandat A] Amplificateur

e_{in} → Amplificateur de puissance → e_a

Valeurs connues

$\tau = 0{,}01\,s$ ⇒ Constante de temps ampli

$K = 100\ V/rad$ ⇒ Gain ampli

Équation standard Ordre 1

$$\frac{K}{\tau \cdot s + 1} = \frac{\text{Sortie}}{\text{Entrée}} = \frac{e_a}{e_{in}}$$

Entrée : e_{in}

Sortie : e_a

Résolution

Fonction de transfert : $\frac{\text{Sortie}}{\text{Entrée}} = \frac{e_a}{e_{in}}$

$$\frac{e_a}{e_{in}} = \frac{K}{1+\tau s} \Rightarrow K \cdot e_{in} = e_a + \tau \cdot s \cdot e_a \Rightarrow K \cdot e_{in} = e_a + \tau \cdot \dot{e}_a$$

$$\dot{e}_a = \frac{1}{\tau}\left[K \cdot e_{in} - e_a\right]$$

$$\dot{e}_a(t) = \frac{1}{\tau}\left[K \cdot e_{in}(t) - e_a(t)\right] \Leftrightarrow \boxed{\dot{e}_a(t) = \frac{K}{\tau} \cdot e_{in}(t) - \frac{1}{\tau} e_a(t)}$$

Laplace

$$s \cdot e_a(s) = \frac{K}{\tau} \cdot e_{in}(s) - \frac{1}{\tau} \cdot e_a(s) \Rightarrow \tau \cdot s \cdot e_a(s) = K \cdot e_{in}(s) - e_a(s) \Rightarrow K \cdot e_{in}(s) = e_a(s)\left[\tau \cdot s + 1\right]$$

$$\frac{e_a(s)}{e_{in}(s)} = \frac{K}{(\tau \cdot s + 1)}$$ → Valide !

Statique

$\dot{e}_a = 0$

$0 = \cancel{\frac{1}{\tau}}\left[K \cdot e_{in} - e_a\right]$

$\boxed{e_a = K \cdot e_{in}}$

1

Mandat A] Moteur

Valeurs connues

$R_a = 8\,\Omega$ ⇒ Résistance de l'armature du moteur

$L_a = 0{,}008\,H$ ⇒ Inductance de l'armature du moteur

$K_i = 0.5\ N\text{-}m/A$ ⇒ Constante de couple du moteur

$K_b = 0{,}5\ V/rad/s$ ⇒ Constante de force contre électromotrice du moteur

$J_m = 0{,}02\ N\text{-}m\ s^2/rad$ ⇒ Inertie de l'armature

$B_m = 0{,}01$ ⇒ Frottement visqueux de l'armature

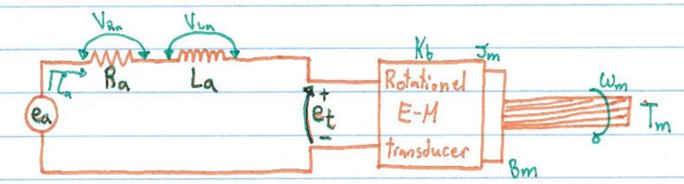
$N = 0{,}1$ ⇒ Facteur de réduction

$J_L = 1\ Nm\,s^2/rad$ ⇒ Inertie de la charge

$B_L = 1\ Nm/rad/s$ ⇒ Frottement visqueux de la charge

Électrique

Moteur C.C.



$\boxed{V = R \cdot I}$

$\boxed{V = L \cdot \frac{di}{dt}}$ & $e_t = K_b \cdot \omega_m$

Var état dot

$e_a = V_{Ra} + V_{La} + e_t \Rightarrow e_a = i_a \cdot R_a + L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + K_b \cdot \omega_m \Rightarrow e_a = R_a \cdot i_a + L_a \cdot \dot{i}_a + K_b \cdot \omega_m$

$L_a \cdot \dot{i}_a = e_a - R_a \cdot i_a - K_b \cdot \omega_m \Rightarrow \boxed{\dot{i}_a = \frac{1}{L_a}\left[e_a - R_a \cdot i_a - K_b \cdot \omega_m\right]} \Rightarrow \frac{1}{L_a} \cdot e_a - \frac{R_a}{L_a} \cdot i_a - \frac{K_b}{L_a} \cdot \omega_m = \dot{i}_a$

Laplace

$s \cdot i_a(s) \cdot L_a = e_a(s) - R_a \cdot i_a(s) - K_b \cdot \omega_m(s) \Rightarrow i_a(s) \cdot s \cdot L_a + i_a(s) \cdot R_a = e_a(s) - K_b \cdot \omega_m \Rightarrow i_a(s)\left[L_a \cdot s + R_a\right] = e_a(s) - K_b \cdot \omega_m(s)$

Statique

$\dot{i}_a = 0$ & $\omega_m = \dot{\theta}_m = 0$

$0 = \cancel{\frac{1}{L_a}}\left[e_a - R_a \cdot I_a - K_b\,\omega_m\right] \rightarrow e_a = R_a I_a + K_b \cdot \omega_m$

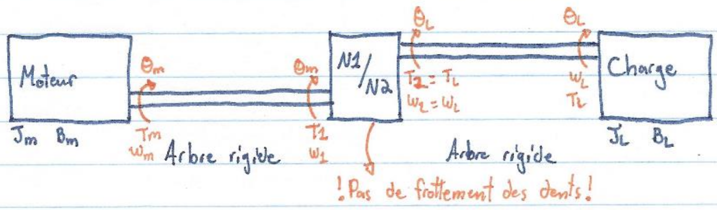
Statique

$\boxed{\frac{e_a - K_b \cdot \omega_m}{R_a} = i_a}$

2

$N = \frac{N1}{N2}$

Mécanique



En fonction des propriétés des Gear trains (défini dans KUO chapitre 4).

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{N1}{N2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} \Longleftrightarrow \text{(eq. 4-52)}$$

Et en fonction de la définition de N, soit $N = \frac{N1}{N2}$

On peut définir $N = \frac{T1}{T2}$, avec $T1 = T_{sortie}$ et $T2 = T_L \Longrightarrow \boxed{T_{out} = N \cdot T_L}$

Vue du moteur

$\boxed{\sum T = J \cdot \dot{\omega}}$

$T_{friction} = B \cdot \omega$

$K_i \Rightarrow Nm/A$ $\quad i_a \Rightarrow A$

$T_m = K_i \cdot i_a \Rightarrow Nm \cdot A / A \Rightarrow Nm$

$T_{friction\,m} = B_m \cdot \omega_m$

$T_{out} = T_{out}$ le restant

$$\sum T = J_m \cdot \dot{\omega}_m = T_m - T_{fm} - T_{out}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{J_m \cdot \dot{\omega}_m = K_i \cdot i_a - B_m \cdot \omega_m - N \cdot T_L}$$

$$\dot{\omega}_m = \frac{1}{J_m}\left[K_i \cdot i_a - B_m \cdot \omega_m - N \cdot T_L\right]$$

Vue de la charge

$T_{charge} = T_L$

$T_{friction\,charge} = B_L \cdot \omega_L$

$$\sum T = J_L \cdot \dot{\omega}_L = T_L - T_{fL}$$

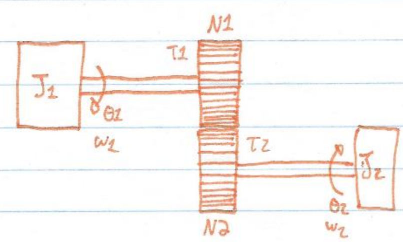
$$\Downarrow$$

$$J_L \cdot \dot{\omega}_L = T_L - B_L \cdot \omega_L$$

Combinaison

$$J_L \cdot \dot{\omega}_L = T_L - B_L \cdot \omega_L \Longrightarrow T_L = \underbrace{J_L \cdot \dot{\omega}_L + B_L \cdot \omega_L}$$

$$\dot{\omega}_m = \frac{1}{J_m}\left[K_i \cdot i_a - B_m \cdot \omega_m - N\left(J_L \cdot \dot{\omega}_L + B_L \cdot \omega_L\right)\right]$$



$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = N \longrightarrow \omega_2 = N \cdot \omega_1 \;\&\; \theta_2 = \theta_1 \cdot N$$

et $\dot{\omega}_2 = N \cdot \dot{\omega}_1$

3

Mécanique (suite)

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\omega}_L = \dot{\omega}_2 = N\cdot\dot{\omega}_1 \\ \omega_L = \omega_2 = N\cdot\omega_1\end{array}\right\} \rightarrow \left\{ T_L = J_L\cdot N\cdot\dot{\omega}_1 + B_L\cdot N\cdot\omega_1 \right. \rightarrow T_L = N\left(J_L\cdot\dot{\omega}_1 + B_L\cdot\omega_1\right)$$

avec $\omega_1 = \omega_m$, $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_m$

$$T_L = N\cdot\left(J_L\cdot\dot{\omega}_m + B_L\cdot\omega_m\right)$$

$$\downarrow$$

$$\dot{\omega}_m\cdot J_m = K_i\cdot i_a - B_m\cdot\omega_m - N\cdot\left[N\left(J_L\cdot\dot{\omega}_m + B_L\cdot\omega_m\right)\right]$$

$$\dot{\omega}_m\cdot J_m = K_i\cdot i_a - B_m\cdot\omega_m - N^2\cdot J_L\cdot\dot{\omega}_m - N^2\cdot B_L\cdot\omega_m$$

$$\dot{\omega}_m\cdot J_m + N^2\cdot J_L\cdot\dot{\omega}_m = K_i\cdot i_a - B_m\cdot\omega_m - N^2\cdot B_L\cdot\omega_m$$

$$\dot{\omega}_m\left[J_m + N^2\cdot J_L\right] = K_i\cdot i_a - \omega_m\left[B_m + N^2\cdot B_L\right]$$

$$\dot{\omega}_m = \frac{1}{\left[J_m + N^2\cdot J_L\right]}\left[K_i\cdot i_a - \omega_m\left(B_m + N^2\cdot B_L\right)\right]$$

$$\boxed{\dot{\omega}_m = \frac{K_i}{\left(J_m + N^2\cdot J_L\right)}\cdot i_a - \frac{\left(B_m + N^2\cdot B_L\right)}{\left(J_m + N^2\cdot J_L\right)}\cdot\omega_m}$$

équation exprimée selon $\dot{\omega}_m$

$$\frac{\dot{\omega}_L}{N}\cdot J_m = K_i\cdot i_a - B_m\cdot\frac{\omega_L}{N} - N\left(J_L\cdot\dot{\omega}_L + B_L\cdot\omega_L\right)$$

$$\dot{\omega}_L\cdot J_m = N\cdot K_i\cdot i_a - B_m\cdot\omega_L - N^2\cdot J_L\cdot\dot{\omega}_L - N^2\cdot B_L\cdot\omega_L$$

$$\dot{\omega}_L\cdot J_m + N^2\cdot J_L\cdot\dot{\omega}_L = N\cdot K_i\cdot i_a - B_m\cdot\omega_L - N^2\cdot B_L\cdot\omega_L$$

$$\dot{\omega}_L\left[J_m + N^2\cdot J_L\right] = N\cdot K_i\cdot i_a - \omega_L\left[B_m + N^2\cdot B_L\right]$$

$$\boxed{\dot{\omega}_L = \frac{N\cdot K_i}{\left[J_m + N^2\cdot J_L\right]}\cdot i_a - \frac{\left[B_m + N^2\cdot B_L\right]}{\left[J_m + N^2\cdot J_L\right]}\cdot\omega_L}$$

équation exprimée selon $\dot{\omega}_L$

$\Downarrow$ Validation avec $\dot{\omega}_L = N\cdot\dot{\omega}_m$ et $\omega_L = N\cdot\omega_m$

$$\dot{\omega}_m\cdot\cancel{N} = \frac{\cancel{N}\cdot K_i}{\left[J_m + N^2\cdot J_L\right]}\cdot i_a - \frac{\left[B_m + N^2\cdot B_L\right]}{\left[J_m + N^2\cdot J_L\right]}\cdot\omega_m\cdot\cancel{N}$$

Validation réussie !

Statique

$$0 = \frac{N\cdot K_i}{\left(J_m + N^2\cdot J_L\right)}\, i_a - \frac{\left(B_m - N^2\cdot B_L\right)}{\left(J_m + N^2 J_L\right)}\,\omega_L$$

$$\frac{B_m + N^2\cdot B_L}{\cancel{J_m + N^2\cdot J_L}}\cdot\omega_L = \frac{N\cdot K_i}{\cancel{J_m + N^2\cdot J_L}}\cdot i_a \rightarrow \boxed{\omega_L = \frac{N\cdot K_i}{B_m + N^2\cdot B_L}\cdot i_a}$$

4

Mandat B] Équations d'état

Variables d'état:

$x_1 = \theta_L \quad \underbrace{x_2 = \omega_L}_{\omega_L = \dot{\theta}_L} \quad x_3 = i_a \quad x_4 = e_a$

Équations:

$$\dot{e}_a = \frac{K}{\tau} \cdot e_{in} - \frac{1}{\tau} \cdot e_a \qquad \dot{i}_a = \frac{1}{L_a} \cdot e_a - \frac{R_a}{L_a} \cdot i_a - \frac{K_b}{L_a} \cdot \omega_m \qquad \dot{\omega}_L = \frac{N \cdot K_i}{[J_m + N^2 \cdot J_L]} \cdot i_a - \frac{[B_m + N^2 \cdot B_L]}{[J_m + N^2 \cdot J_L]} \cdot \omega_L$$

$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_L \quad \dot{x}_2 = \dot{\omega}_L \quad \dot{x}_3 = \dot{i}_a \quad \dot{x}_4 = \dot{e}_a$

$\dot{i}_a = \frac{1}{L_a} \cdot e_a - \frac{R_a}{L_a} \cdot i_a - \frac{K_b}{L_a \cdot N} \cdot \omega_L$ et $\dot{\theta}_L = \omega_L$

$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_L$

$$\dot{x}_2 = \dot{\omega}_L = \frac{N \cdot K_i}{[J_m + N^2 \cdot J_L]} \cdot i_a - \frac{[B_m + N^2 \cdot B_L]}{[J_m + N^2 \cdot J_L]} \cdot \omega_L$$

$$\dot{x}_3 = \dot{i}_a = \frac{1}{L_a} \cdot e_a - \frac{R_a}{L_a} \cdot i_a - \frac{K_b}{L_a \cdot N} \cdot \omega_L$$

$$\dot{x}_4 = \dot{e}_a = \frac{K}{\tau} \cdot e_{in} - \frac{1}{\tau} \cdot e_a$$

5

Mandat C] Modèle ABCD

$$\dot{X} = Ax + Bu \quad \& \quad Y = Cx + Du$$

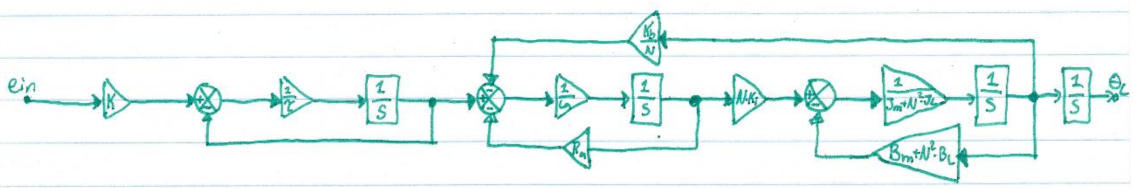
$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_L \\ \dot{\omega}_L \\ \dot{i}_a \\ \dot{e}_a \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{[B_m + N^2 \cdot B_L]}{[J_m + N^2 \cdot J_L]} & \frac{N \cdot K_i}{[J_m + N^2 \cdot J_L]} & 0 \\ 0 & -K_b / L_a \cdot N & -R_a / L_a & 1/L_a \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_L \\ \dot{\theta}_L \\ i_a \\ e_a \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{e_{in}}_{u}$$

$$Y = \theta_L = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_L \\ \dot{\theta}_L \\ i_a \\ e_a \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} \cdot \underbrace{e_{in}}_{u}$$

6

Mandat D] Schéma bloc & Laplace

$\dot{e}_a = \frac{1}{\tau}\left[K\cdot e_{in} - e_a\right]$ $\quad$ $\dot{i}_a = \frac{1}{L_a}\left[e_a - R_a\cdot i_a - \frac{K_b}{N}\cdot\omega_L\right]$ $\quad$ $\dot{\omega}_L = \frac{1}{\left[J_m+N^2\cdot J_L\right]}\cdot\left[N\cdot K_i\cdot i_a - (B_m+N^2\cdot B_L)\cdot\omega_L\right]$ $\quad$ $\dot{\theta}_L = \omega_L$



Laplace

$\theta_L(s)\cdot s\cdot s = \dot{\omega}_L$ $\quad$ & $\quad$ $\theta_L(s)\cdot s = \omega_L$

$\tau\cdot s\cdot e_a(s) = K\cdot e_{in}(s) - e_a(s)$

$\tau\cdot s\cdot e_a(s) + e_a(s) = K\cdot e_{in}(s)$

$e_a(s)\left[\tau\cdot s+1\right] = K\cdot e_{in}(s) \rightarrow \frac{e_a(s)}{e_{in}(s)} = \frac{K}{\tau\cdot s+1}$

$s\cdot i_a(s)\cdot L_a = e_a(s) - R_a\cdot i_a(s) - \frac{K_b}{N}\cdot s\cdot\theta_L(s)$

$s\cdot i_a(s)\cdot L_a + R_a\cdot i_a(s) = e_a(s) - \frac{K_b}{N}\cdot s\cdot\theta_L(s)$

$i_a(s)\left[s\cdot L_a + R_a\right] = e_a(s) - \frac{K_b}{N}\cdot s\cdot\theta_L(s) \rightarrow i_a(s) = \frac{1}{s\cdot L_a+R_a}\left[e_a(s) - \frac{K_b}{N}\cdot s\cdot\theta_L(s)\right]$

$s^2\cdot\theta_L(s)\cdot\left[J_m+N^2\cdot J_L\right] = N\cdot K_i\cdot i_a(s) - (B_m+N^2\cdot B_L)\cdot s\cdot\theta_L(s)$

$N\cdot K_i\cdot i_a(s) = \theta_L(s)\left[s^2(J_m+N^2\cdot J_L) + s\,(B_m+N^2\cdot B_L)\right] \rightarrow \frac{\theta_L}{i_a} = \frac{N\cdot K_i}{s^2(J_m+N^2\cdot J_L)+s\,(B_m+N^2\cdot B_L)}$

$N\cdot K_i\cdot i_a(s) = \theta_L(s)\left[\frac{1}{s}\right]\left[s\,(J_m+N^2\cdot J_L) + B_m+N^2\cdot B_L\right]$

$\rightarrow \frac{\theta_L}{i_a} = \frac{N\cdot K_i}{s\,(J_m+N^2\cdot J_L)+B_m+N^2\cdot B_L}\cdot\frac{1}{s}$

$\boxed{7}$

Mandat E] FTBO & FTBF

FTBO

$$\Theta_L(s) = \frac{N \cdot K_i}{s\left[s\left(J_m+N^2 J_L\right)+B_m+N^2 B_L\right]} \cdot i_a(s)$$

$$\Theta_L(s) = \frac{N \cdot K_i}{\left[s^2\left(J_m+N^2 \cdot J_L\right)+s\left(B_m+N^2 \cdot B_L\right)\right]} \cdot \frac{1}{\left[s \cdot L_a + R_a\right]}\left[e_a(s) - \frac{K_b}{N} \cdot \Theta_L(s) \cdot s\right]$$

$$J_m + N^2 \cdot J_L = \bullet \qquad B_m + N^2 \cdot B_L = \blacksquare$$

$$\Theta_L(s) = \frac{N \cdot K_i}{\left[s^2 \cdot \bullet + s\,\blacksquare\right]\left[s \cdot L_a + R_a\right]}\left[e_a(s) - \frac{K_b}{N} \cdot \Theta_L(s) \cdot s\right]$$

$$\Theta_L(s) = \frac{N \cdot K_i}{s^3 \bullet \cdot L_a + s^2 \cdot R_a \bullet + s^2 \blacksquare \cdot L_a + s\,\blacksquare R_a}\left[e_a(s) - \frac{K_b}{N} \cdot \Theta_L(s) \cdot s\right]$$

$$\Theta_L(s)\left[s^3 \bullet L_a + s^2\left(\cancel{R_a L_a \bullet \blacksquare}\right) + s\,\blacksquare R_a\right] = N \cdot K_i \cdot e_a(s) - \frac{K_b \cdot \cancel{N} \cdot K_i}{\cancel{N}} \cdot \Theta_L(s) \cdot s$$

$$\Theta_L(s)\left[s^3 \bullet L_a + s^2\left(\cancel{R_a L_a \bullet \blacksquare}\right) + s\left(\blacksquare \cdot R_a + K_i K_b\right)\right] = N \cdot K_i \cdot e_a(s)$$

$$\frac{\Theta(s)}{e_a(s)} = \frac{N \cdot K_i}{\left[s^3 \bullet L_a + s^2\left(R_a \bullet + L_a \blacksquare\right) + s\left(\blacksquare R_a + K_i K_b\right)\right]}$$

$$\frac{\Theta(s)}{e_{in}(s)} = \frac{K}{\left[\tau \cdot s + 1\right]} \cdot \frac{N \cdot K_i}{\left[s^3 \bullet L_a + s^2\left(R_a \cdot \bullet + L_a \cdot \blacksquare\right) + s\left(\blacksquare R_a + K_i K_b\right)\right]}$$

$$\frac{\Theta_L(s)}{e_{in}(s)} = \frac{K \cdot K_i \cdot N}{s^4 \cdot \tau \cdot \bullet \cdot L_a + s^3 \cdot \tau\left(R_a \bullet + L_a \blacksquare\right) + s^2 \tau\left(\blacksquare R_a + K_i K_b\right) + s^3 \bullet L_a + s^2\left(R_a \bullet + \blacksquare L_a\right) + s\left(\blacksquare R_a + K_i K_b\right)}$$

$$\frac{\Theta_L(s)}{e_{in}(s)} = \frac{K \cdot K_i \cdot N}{s^4 \cdot \tau \cdot \bullet \cdot L_a + s^3\left(\bullet L_a + \tau\left(R_a \bullet + L_a \blacksquare\right)\right) + s^2\left(R_a \bullet + L_a \blacksquare + \tau\left(\blacksquare R_a + K_i K_b\right)\right) + s\left(\blacksquare \cdot R_a + K_i K_b\right)}$$

$\boxed{8}$

FTBF

$$\boxed{FTBF \quad K \cdot \frac{FTBO}{1+K \cdot FTBO}}$$

$$FTBO = \frac{num_{BO}}{den_{BO}}$$

$$FTBF = K_p \frac{num_{BO}}{den_{BO}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{num_{BO}}{den_{BO}} \cdot K_p}$$

$$FTBF = \frac{K_p \cdot num_{BO}}{den_{BO} + num_{BO} \cdot K_p}$$

$$FTBF = \frac{K_p \cdot K_i \cdot K \cdot N}{s^4(\tau \cdot \bullet \cdot L_a) + s^3(\bullet \cdot L_a + \tau(R_a \cdot \bullet + L_a \cdot \blacksquare)) + s^2(R_a \cdot \bullet + L_a \cdot \blacksquare + \tau(\blacksquare \cdot R_a + K_i K_b)) + s(\blacksquare \cdot R_a + K_i K_b) + K_p \cdot K_i \cdot K \cdot N}$$

Équation caractéristique FTBO

$$0 = s^4(\tau \cdot \bullet \cdot L_a) + s^3(\bullet \cdot L_a + \tau(R_a \cdot \bullet + L_a \cdot \blacksquare)) + s^2(R_a \cdot \bullet + L_a \cdot \blacksquare + \tau(\blacksquare \cdot R_a + K_i K_b)) + s(\blacksquare \cdot R_a + K_i K_b)$$

Équation caractéristique FTBF

$$0 = s^4(\tau \cdot \bullet \cdot L_a) + s^3(\bullet \cdot L_a + \tau(R_a \cdot \bullet + L_a \cdot \blacksquare)) + s^2(R_a \cdot \bullet + L_a \cdot \blacksquare + \tau(\blacksquare \cdot R_a + K_i \cdot K_b)) + s(\blacksquare \cdot R_a + K_i K_b) + K_p \cdot K_i \cdot K \cdot N$$

$\boxed{9}$

Fonction de transfert réduite (physique)

~~[illegible]~~ $I_a(s) \cdot R_a = e_a(s) - \frac{K_b}{N} \cdot s \cdot \Theta_L(s)$ & $e_a = K \cdot e_{in}$

$$\Theta_L(s) = \frac{N \cdot K_i}{\left[s^2 (J_m + N^2 J_L) + s (B_m + N^2 B_L)\right]} \cdot \frac{1}{R_a} \left[e_a(s) - \frac{K_b}{N} \cdot \Theta_L(s) \cdot s\right]$$

$\bullet = J_m + N^2 \cdot J_L$ $\quad$ $\blacksquare = B_m + N^2 \cdot B_L$

$$\Theta_L(s) = \frac{N \cdot K_i}{s^2 \cdot \bullet R_a + s \blacksquare \cdot R_a} \cdot e_a(s) - \frac{K_b}{\cancel{N}} \cdot \frac{\cancel{N} \cdot K_i}{s^2 \cdot R_a \cdot \bullet + s \cdot R_a \cdot \blacksquare} \cdot \Theta_L(s) \cdot s$$

$$\left[\frac{K_b \cdot K_i}{s^2 \cdot R_a \cdot \bullet + s \cdot R_a \cdot \blacksquare} + 1\right] \Theta_L(s) = \frac{N \cdot K_i}{s^2 \cdot R_a \cdot \bullet + s \cdot R_a \cdot \blacksquare} \cdot e_a = \frac{N \cdot K_i \cdot K}{s^2 \cdot R_a \bullet + s \cdot R_a \cdot \blacksquare} \cdot e_{in}$$

$$\boxed{\frac{\Theta_L(s)}{e_{in}(s)} \cong \frac{N \cdot K_i \cdot K}{K_b \cdot K_i + s^2 \cdot R_a \cdot \bullet + s \cdot R_a \cdot \blacksquare}}$$

$\boxed{10}$