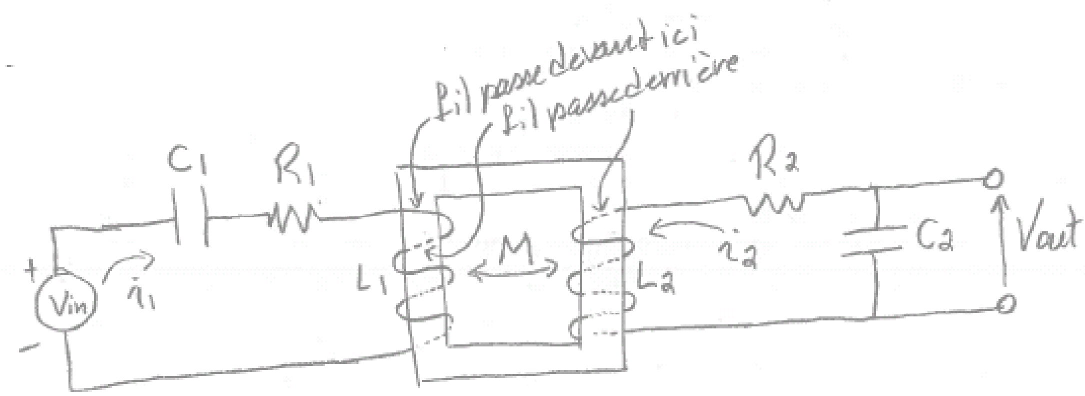
S5e – APP3 : Examen formatif

Question 1

On a le circuit électrique illustré à la figure ci-bas qui consiste en deux circuits couplés par un transformateur :



Ce circuit mène aux équations différentielles suivante (équations dynamique) :

$$L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 + \frac{q_1}{C_1} = V_{in}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 + \frac{q_2}{C_2} = 0$$

où q_1 est la charge sur le condensateur C_1, i_1 est le courant dans la boucle de gauche dans le sens indiqué, q_2 est la charge sur le condensateur C_2, i_2 est le courant dans la boucle de droite dans le sens indiqué, M est l'inductance mutuelle entre les deux bobines d'inductances L_1 et L_2 enroulées autour du noyau de fer qui fait que les circuits de droite et de gauche sont couplé

Rappel:

$i_1 = dq_1/dt$ $\quad$ $i_{condensateur} = C\, dV_c/dt$

$i_2 = dq_2/dt$ $\quad$ $V_{inductance} = L\, di/dt$

a) À partir des équations dynamiques faites le schéma bloc du système (c.à.d. du circuit complet), chaque bloc du schéma ne doit pas être plus que d'ordre 1.

b) Trouvez la fonction du transfert entre l'entrée V_{in} et la sortie V_{out} de façon algébrique.

c) Écrivez les équations à variables d'état, utilisez $x_1 = q_1, x_2 = i_1, x_3 = q_2 \; et \; x_4 = i_2$ comme variables d'état.

Question 2

Un système est décrit par le modèle variable d'état suivant

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \ D = 0$$

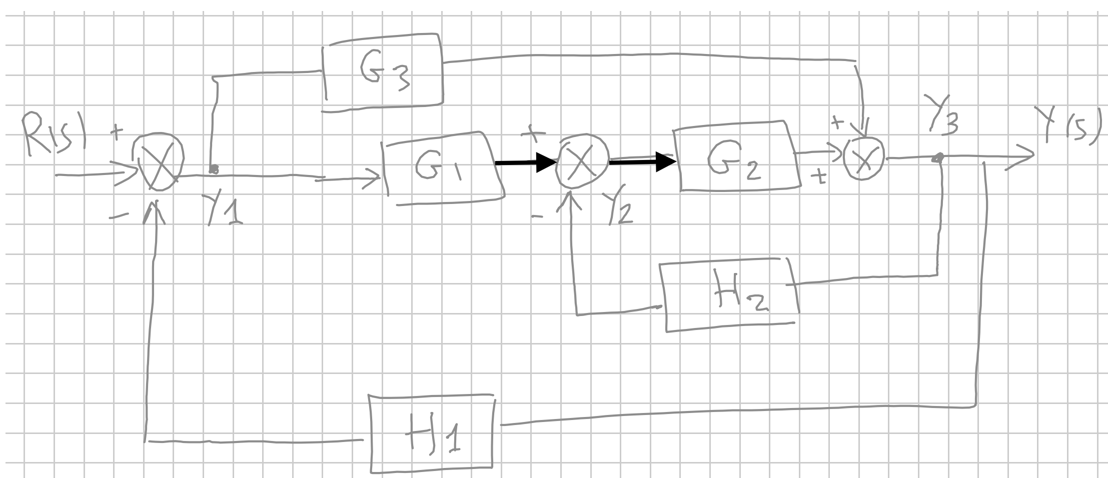
(a) Trouver la fonction de transfert $\dfrac{Y(s)}{U(s)}$ (cette question est à faire avec MATLAB).

(b) Donner l'équation qui permettra de trouver les pôles de ce système et trouver ces pôles.

(c) Trouver l'équation différentielle associée à ce modèle variable d'état.

Question 3

Le schéma bloc d'un système est le suivant :



(a) Tracer le graphe de fluence de ce système.

(b) Trouver la fonction de transfert $\dfrac{Y(s)}{R(s)}$ en utilisant la loi de Mason.

Question 4

Un système est décrit par l'équation différentielle ordinaire (EDO) suivante :

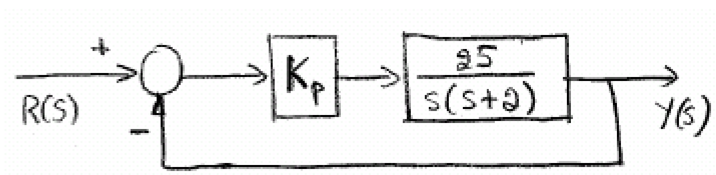
$$\dddot{x} + 4\ddot{x} + 8\dot{x} + kx = 3u + 5\dot{u}\,,$$

où u est l'entrée et la sortie est $y = x$.

a) Trouver les matrices ABCD d'un modèle à variables d'état

Question 5

Un système est représenté par le schéma bloc suivant :



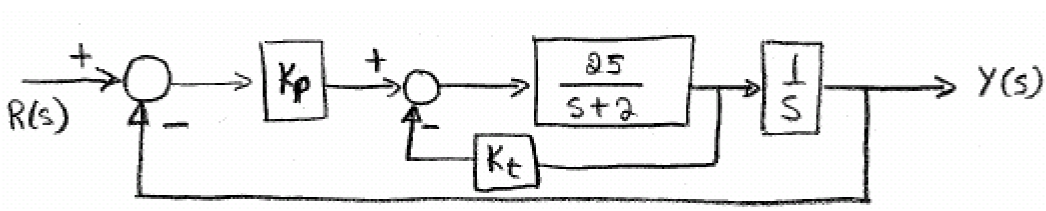
(a) Calculer la valeur de K_p pour que le système en boucle fermée ait un facteur d'amortissement $\zeta = 0.5$.

(b) Avec cette valeur de K_p, calculer :

i. Le temps du premier maximum

ii. Le pourcentage de dépassement maximum

Un retour tachymétrique est ajouté au système, ce qui donne lieu au schéma bloc suivant :



(c) Calculer K_p et K_t pour obtenir un facteur d'amortissement $\zeta = 0.5$ et fréquence naturelle $\omega_n = 4\ rad/s$.

Formulaire d’équations

(ce formulaire sera inclus dans l’énoncé de l’examen sommatif)

Système d’ordre 1 standard

$$\frac{K}{1+\tau s}$$

$$t_s(2\%) = 4\tau$$

Système d’ordre 2 standard

$$\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

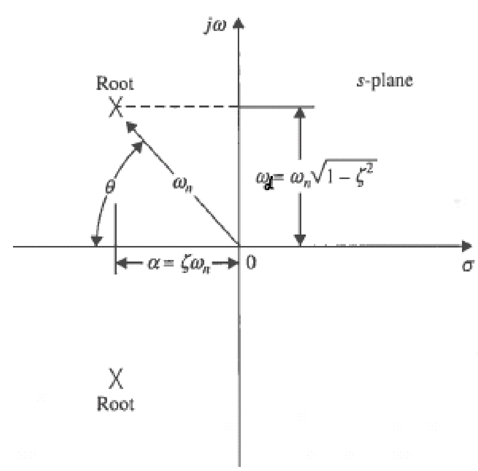
$$t_s(2\%) = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$\zeta = \cos\theta$$

$$y_{\max} - 1 = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\pi/\tan\theta}$$

$$M_{\max}(\%) = 100\,e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 100\,e^{-\pi/\tan\theta}$$

$$t_{\max} = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$



Inverse d’une matrice d’ordre 2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

où $\Delta = \det(A) = ad - cb$

Un système dynamique représenté par l'EDO

$$\dddot{x} + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = b_3\dddot{u} + b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0 u, \tag{34}$$

dont la sortie est

$$y = x \tag{35}$$

peut être représenté par les équations d'état suivantes

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u, \end{aligned} \tag{36}$$

avec

$$\begin{gathered} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = [\beta_0], \end{gathered} \tag{37}$$

où les variables d'état sont définies par

$$\begin{aligned} x_1 &= x - \beta_0 u, \\ x_2 &= \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x} - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u, \\ x_3 &= \dot{x}_2 - \beta_2 u = \ddot{x} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u \end{aligned} \tag{38}$$

Les constantes β_0, β_1 et β_2 satisfont au système d'équations

$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_3, \\ \beta_1 &= b_2 - a_2\beta_0, \\ \beta_2 &= b_1 - a_2\beta_1 - a_1\beta_0. \end{aligned} \tag{39}$$

et β_3 est définie par

$$\beta_3 = b_0 - a_2\beta_2 - a_1\beta_1 - a_0\beta_0. \tag{40}$$