**Les exercices doivent être faits à l'aide de Matlab**

- Il y a 3 questions.
- Il y a à la fin un formulaire d'équations et une section de notes de cours.

**Question 1**

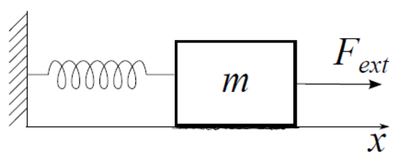
Un système possède la fonction de transfert suivante :

$$G(s)=\frac{1.5s^4+28.5s^3+202.8s^2+652.2s+740.4}{s^5+23s^4+210s^3+950s^2+2044s+1632}$$

(a) Réduire la fonction de transfert à son (ou ses) pôle(s) dominant(s).
(b) Comparer la réponse à un échelon unitaire du système réduit avec celle du système original.

**Questions 2**

On a un système masse-ressort amorti avec masse $m$, coefficient de friction $b$ et constante de rappel de ressort $k$. Une force extérieure $F_{ext}$ peut être appliquée sur la masse. Le système est illustré à la figure ici-bas.




L'équation dynamique décrivant ce système, qui est d'ordre 2, est donnée par

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=F_{ext}$$

On ne connait pas $m$, $b$ et $k$ et on désire identifier ces paramètres du système à l'aide de la méthode d'identification par moindres carrés. À cette fin, on fait une expérience dans laquelle on applique un échelon de force de 50 N et on mesure la position de la masse en fonction du temps. On a sauvegardé les données de ces mesures dans le fichier DonneesIdentifMasseRessortAmorti.mat disponible sur la page WEB de l'APP dans un fichier compressé .zip. À l'aide de ces données, trouvez les valeurs de $m$, $b$ et $k$.

**Question 3**

Un système décrit par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = [0]$$

a) Calculer et tracer la réponse à l'impulsion.

b) Calculer et tracer la réponse à un échelon de 50.

c) Simuler la réponse des états $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$, lorsque l'entrée est :

$$u(t) = \begin{cases} 100 & 0 \leq t < 2 \\ 20 & t > 2 \end{cases}$$

et que les conditions initiales sont :

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Note 1: Faire l'exercice c) avec la fonction Matlab *lsim*

Note 2: Ceci est le système masse-ressort amorti du problème précédent.

**Formulaire d'équations**

Système d'ordre 1 standard

$$\frac{K}{1+\tau s}$$

$$t_s(2\%) = 4\tau$$

Système d'ordre 2 standard

$$\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

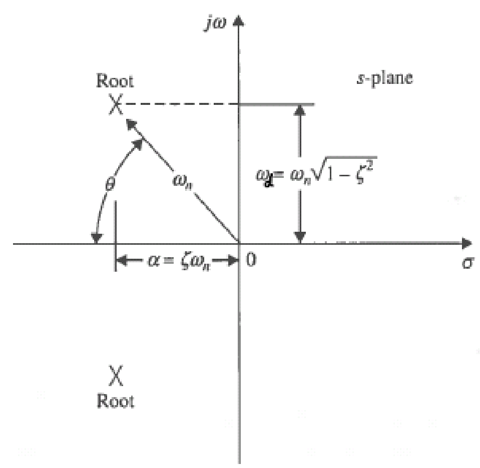
$$t_s(2\%) = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$\zeta = \cos\theta$$

$$y_{\max} - 1 = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\pi/\tan\theta}$$

$$M_{\max}(\%) = 100e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 100e^{-\pi/\tan\theta}$$

$$t_{\max} = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

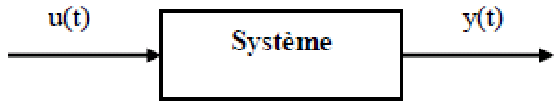



Fonctions Matlab

| | | | |
|---|---|---|---|
| inv | eig | diff | conv |
| tf | ss | tf2ss | ss2tf |
| series | parallel | pzmap | residue |
| dcgain | step | impulse | lsim |

Identification par moindres carrés

Un système linéaire peut être modélisé par une équation différentielle entre l'entré *u(t)* et la sortie *y(t)*




$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \ldots + a_n \frac{d^n y}{dt^n} = b_0 u(t) + b_1 \frac{du}{dt} + b_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + \ldots + b_m \frac{d^m u}{dt^m} \qquad (1)$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert associée au modèle linéaire continu du système sous forme canonique est définie par :

$$Y(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n} U(s) \qquad (2)$$

L'**identification** de systèmes dynamiques consiste à trouver les coefficients $a_i$ et $b_i$ de chacune des $i$ dérivées des entrées et des sorties de façon à ce que la réponse de la fonction de transfert corresponde à la réponse temporelle échantillonnée sur le système réel.

En observant l'équation (1), nous voyons que la relation entre la sortie *y(t)*, l'entrée *u(t)* et les dérivées constitue une relation linéaire. En isolant *y(t)*, l'équation (1) se traduit par :

$$y(t) = \frac{b_0}{a_0} u(t) + \frac{b_1}{a_0} \frac{du}{dt} + \frac{b_2}{a_0} \frac{d^2 u}{dt^2} + \ldots + \frac{b_m}{a_0} \frac{d^m u}{dt^m} - \frac{1}{a_0} \left[ a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \ldots + a_n \frac{d^n y}{dt^n} \right] \qquad (3)$$

Pour simplifier la nomenclature, on introduit les vecteurs $X_i$ et Y tels que :

$$Y = \begin{bmatrix} y(t_1) \\ \vdots \\ y(t_p) \end{bmatrix}, \; X_1 = \begin{bmatrix} u(t_1) \\ \vdots \\ u(t_p) \end{bmatrix}, \; X_2 = \begin{bmatrix} (du/dt)_{t=t_1} \\ \vdots \\ (du/dt)_{t=t_p} \end{bmatrix}, \ldots, \; X_{m+1} = \begin{bmatrix} (d^m u/dt^m)_{t=t_1} \\ \vdots \\ (d^m u/dt^m)_{t=t_p} \end{bmatrix}$$

$$X_{m+2} = \begin{bmatrix} (dy/dt)_{t=t_1} \\ \vdots \\ (dy/dt)_{t=t_p} \end{bmatrix}, \ldots, \; X_{m+n+1} = \begin{bmatrix} (d^n y/dt^n)_{t=t_1} \\ \vdots \\ (d^n y/dt^n)_{t=t_p} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Les valeurs de $Y(k)$ et $X_1(k)$ correspondent aux mesures des entrées et des sorties $y$ et $u$ et les valeurs de $X_i(k)$ aux dérivées discrètes des entrées et des sorties.
De plus, la substitution des coefficients $a_i$ et $b_i$ par $\alpha_i$ permet d'obtenir la forme suivante :

$$\begin{array}{llllllllll} y(t) = & \frac{b_0}{a_0} u(t) & + \frac{b_1}{a_0} \frac{du}{dt} & + \frac{b_2}{a_0} \frac{d^2 u}{dt^2} & + \ldots + & \frac{b_m}{a_0} \frac{d^m u}{dt^m} & - \frac{a_1}{a_0} \frac{dy}{dt} & - \frac{a_2}{a_0} \frac{d^2 y}{dt^2} & - \ldots & - \frac{a_n}{a_0} \frac{d^n y}{dt^n} \\ Y = & \alpha_1 X_1 & + \alpha_2 X_2 & + \alpha_3 X_3 & + \ldots + & \alpha_{m+1} X_{m+1} & + \alpha_{m+2} X_{m+2} & + \alpha_{m+3} X_{m+3} & + \ldots + & \alpha_{m+n+1} X_{m+n+1} \end{array} \qquad (5)$$

La technique d'**identification par moindres carrés** est analogue à la régression linéaire (trouver la droite passant le plus près possible d'une série de points répartis dans le plan) et consiste à trouver la courbe définie par l'équation (5) qui passe le plus près possible de tous les points $k$ de l'échantillon de mesure.
La concaténation des vecteurs $X_i$ tels que :

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_{m+n+1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

permet d'écrire l'équation (5) sous la forme matricielle suivante :

$$Y = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_{m+n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m+n+1} \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m+n+1} \end{bmatrix} \tag{7}$$

La multiplication à droite de cette équation par la matrice transposée de $X$ (les lignes deviennent les colonnes) fait apparaitre les matrices de corrélations $R$ et $P$ :

$$\underbrace{X^T X}_{R} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m+n+1} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{X^T Y}_{P}$$

où $A$ est le vecteur colonne des coefficients $\alpha_i$ , $R = X^T X$ et $P = X^T Y$ .
Cette équation se résout par :

$$RA = P \Rightarrow A = R^{-1} P \tag{8}$$

où $R^{-1}$ est la matrice inverse de $R$.
L'obtention de la matrice $A$ permet d'obtenir les coefficients $a_i$ et $b_i$ recherchés grâce à la correspondance établie par l'équation (5).