APP4e **Examen formatif**
Hiver 2023

<u>Problème 1</u> (sans MATLAB)

(a) Appliquer à la main les 9 règles de construction du lieu des racines pour le système :

$$KG(s) = \frac{K}{s(s^2 + 5s + 5)}$$

(b) Si on ajoute un compensateur de type $K_P(s + 2)$ en cascade, décrire quelles sont les modifications du tracé sur le lieu des racines : nombre et direction des asymptotes, intersection des asymptotes avec l'axe réel, point de séparation, déplacement général du lieu ?

(c) Prédire les impacts de ce compensateur sur la réponse en régime transitoire du système en boucle fermée soumis à une entrée échelon (stabilité, oscillations, temps de stabilisation) ?

(d) Comment varie le tracé du lieu des racines si on change le gain K_P du compensateur par un facteur 10 ?

(e) Quels sont les impacts de ce changement de gain K_P d'un facteur 10 sur l'erreur en régime permanent du système en boucle fermée soumis à une entrée rampe ?

<u>Problème 2</u> (sans MATLAB)

Le déplacement *x(t)* d'une masse de 1 kg est effectué par une entrée *u(t)* qui actionne un moteur qui amplifie l'entrée $u(t)$ par un gain de 10 (la force appliquée en Newton est $F(t) = 10\ u(t)$). Une friction visqueuse de coefficient b = 25 N/(m/s) est aussi appliquée à cette masse.

(a) Développer la fonction de transfert en boucle ouverte de ce système.

(b) Calculer (à la main) les marges de phase et de gain de ce système quand on ferme la boucle entre la position *x(t)* et l'entrée *u(t)* avec une rétroaction unitaire et une commande P en cascade de gain $K = 1$. Quelles sont les fréquences de traverse en phase ω_p et en gain ω_g?

(c) De quel facteur (ou de quelle fraction) doit-on changer le gain unitaire K pour obtenir une marge de phase de 30 deg ? Que deviendrait la nouvelle fréquence de traverse en gain ω_g?

(d) Avec le changement de gain Ken (c), par quel facteur le gain statique K_{vel} et l'erreur en régime permanent (à une réponse à une rampe unitaire) ont-ils été augmentés/diminués ?

(e) Toujours avec le gain K calculé en (c), quel est le retard pur T_R maximum que le système pourrait subir avant de devenir instable ?

(f) Démontrer analytiquement l'impact du gain K de la rétroaction sur les caractéristiques de la réponse temporelle en boucle fermée (impact sur l'amortissement et sur la fréquence naturelle).

(g) Démontrer le résultat en (f) en faisant un croquis du lieu des racines et en y indiquant les pôles en boucle fermée pour deux gains K_1 et K_2 avec $K_2 > K_1$.

<u>Problème 3</u> (sans MATLAB)

À partir du diagramme de Bode illustré en annexe:

(a) Déterminer la classe du système.
(b) Déterminer les marges de phase et de gain.
(c) Calculer les coefficients K_P, T_D du compensateur PD de la forme $K_P(1 + T_D s)$ qui donne une marge de phase de 10 deg à la même fréquence de traverse en gain.

<u>Problème 4</u> (sans MATLAB)

Pour la FTBO suivante : $KG(s) = \frac{K(s-z)}{s(s^2+4s+8)}$, utiliser les règles du lieu des racines pour calculer la condition sur le zéro à $z < 0$ qui assure la stabilité en boucle fermée du système pour toute valeur du gain proportionnel K.

<u>Problème 5</u> (sans MATLAB)

Pour un système masse-ressort-amortisseur de masse *m*, constante de ressort *k* et facteur amortisseur *b* soumis à une force de commande F_c, la loi de Newton donne l'équation dynamique:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_c(t)$$

(a) Trouver la fonction de transfert entre la position $x(t)$ et la commande $F_c(t)$.
(b) Si la commande F_c est calculée à partir d'un compensateur PD de gain K_P et K_D sur le retour de la position $x(t)$, démontrer que l'effet du compensateur est de changer électriquement les caractéristiques physiques du système en agissant sur la constante du ressort et de l'amortisseur.

<u>Problème 6</u> (avec MATLAB)

NOTE : Ce problème est très *pédagogique*. Il fait le tour de plusieurs concepts reliant le lieu des racines et le diagramme de Bode.

Un système dynamique a la fonction de transfert suivante : $G(s) = \frac{s^2+3s+23}{s^4+5s^3+22s^2+7s+9}$

(a) Combien de modes possède ce système ?
(b) À partir des pôles de ce système en boucle ouverte, calculer les caractéristiques temporelles de chaque mode : M_p, t_p, t_s.

(c) À partir du lieu des racines sur MATLAB, déterminer le plus long temps de stabilisation qui serait obtenu avec une rétroaction de type proportionnel quand le gain tend vers de grandes valeurs. Confirmer ce résultat avec la règle no 5 du lieu des racines.
(d) À partir du lieu des racines sur MATLAB et la fonction ***rlocfind*** (ou avec le curseur), trouver approximativement entre quelles valeurs de gain le système en boucle fermée est instable. *** Déterminer exactement ces valeurs avec la règle no 9 du lieu des racines.
(e) À partir du diagramme de Bode, calculer l'augmentation minimum de phase qui permettrait au système en boucle fermée d'être stable pour toute valeur du gain proportionnel. Indiquer à quelle fréquence cette augmentation de phase doit être faite.
(f) Calculer le compensateur PD qui réaliserait l'augmentation de phase requise en (e) ci-dessus. Vérifier avec le diagramme de Bode et le lieu des racines que le résultat est bien obtenu.

<u>Problème 7</u> (avec MATLAB)

Pour le système dynamique du précédent problème :

(a) Avec MATLAB, calculer la fonction de transfert du système réduit à ses pôles dominants.
(b) Comparer le lieu des racines des deux fonctions de transfert pour vérifier que l'approximation est valide i.e. que le lieu des racines est identique pour de petits gains.
(c) Remarquer que la réduction du système à ses pôles dominants cause un système à phase non-minimale. Pourquoi… ?
(d) Comparer le diagramme de Bode des deux fonctions de transfert. Expliquer les ressemblances et différences en amplitude et en phase. Remarquer ici aussi que le système réduit est à phase non-minimale.
(e) Comparer la réponse temporelle du système original et du système réduit. Remarquer que la réponse du système réduit « part dans le mauvais sens » comme cela est souvent la cas d'un système à phase non-minimale (comme faire un virage en vélo ou faire monter un avion).

<u>Problème 8</u> (avec MATLAB)

La FT en boucle ouverte d'un système est donnée par: $G(s) = \frac{s^2+3s+5}{s(s^3+7s^2+5s+3)}$

Un compensateur de <u>type proportionnel</u> est utilisé avec un gain K et rétroaction unitaire.

(a) Combien de modes possède le système en boucle ouverte ?
(b) Comme design initial, une marge de gain d'au moins 6 dB est requise. Avec MATLAB, calculer le gain K qui permet d'obtenir cette performance.
(c) Pour la valeur de K calculée en (a), obtenir sur MATLAB la nouvelle marge de phase du système en boucle fermée.

(d) À partir de la situation en (c) avec le gain K, que faudrait-il faire avec le gain K pour obtenir une marge de phase de 30 deg ? L'augmenter ou le diminuer ?

(e) Avec la valeur de gain K calculée en (b), calculer le plus grand retard pur T (dans e^{-Ts}) que le système peut tolérer avant de devenir instable.

(f) À mesure que le gain K est augmenté de la valeur en (a) vers l'infini (sans le retard), décrire sur le diagramme de Bode quel serait l'historique de la stabilité du système en boucle fermée. Valider avec le lieu des racines.

(g) Dans le lieu des racines, identifier le *mode d'ordre 2* du système en boucle ouverte. Uniquement avec la rétroaction proportionnelle et pour ce mode :

   i. quelle est le meilleur temps de stabilisation (à 2%) que l'on peut obtenir pour ce mode

   ii. peut-on trouver un gain K qui donne un meilleur (plus grand) facteur d'amortissement que celui en boucle ouverte ?

(h) Quelle serait l'erreur en régime permanent du système en boucle fermée pour une entrée rampe unitaire quand $K = 3$.

<u>Problème 9</u> (sans MATLAB)

(a) Nommer le type de compensateur qui place un zéro à droite d'un pôle sur l'axe des réels négatifs du plan *s*. Décrire son utilité (avantage) et son principal inconvénient.

(b) Si le pôle disparait (se déplace vers $-\infty$**)**, définir le type de compensateur obtenu.

(c) Nommer le type de compensateur qui place un zéro à gauche d'un pôle sur l'axe des réels négatifs du plan *s*. Décrire son utilité (avantage) et son principal inconvénient.

(d) Si le pôle se déplace à l'origine, définir le type de compensateur obtenu.

<u>Problème 10</u> (sans MATLAB)

(a) Décrire les critères de performance qui sont facilement vérifiables ou observables sur le lieu des racines.

(b) Décrire les critères de performance qui sont facilement vérifiables ou observables sur le diagramme de Bode.

<u>Problème 11</u> (sans MATLAB)

(a) Décrire l'impact sur le diagramme de Bode (réponses en amplitude et en phase) de l'ajout d'un retard pur à la fonction de transfert en boucle ouverte.

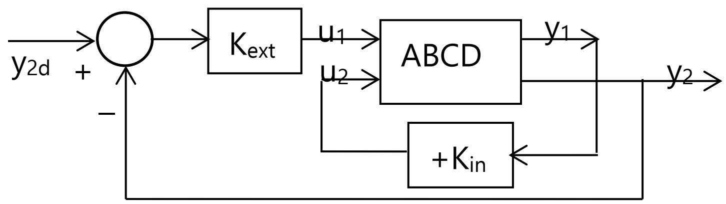
(b) Le diagramme de Bode en amplitude d'un système à <u>phase minimale</u> se termine aux hautes fréquences par une pente de –60 db/décade. Décrire l'impact en boucle fermée sur ce système (réponses en amplitude et en phase) si le gain proportionnel d'un asservissement prend de grandes valeurs.

(c) Le diagramme de Bode en phase d'un système à <u>phase minimale</u> commence aux basses fréquences à –180 deg. Le système est rendu stable en boucle fermée avec un asservissement de type PD. Prédire quelle sera l'erreur en régime permanent du système en boucle fermée pour une entrée rampe unitaire.

<u>Problème 12</u> (sans MATLAB)

Pour le système à 2 entrées et 2 sorties :

$$B = [B_1 \quad B_2], \qquad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



(a) Donner l'équation des matrices $A_{int}, B_{int}, C_{int}, D_{int}$ après avoir fermé la boucle interne avec le gain K_{int}.

(b) Donner l'équation des matrices $A_{ext}, B_{ext}, C_{ext}, D_{ext}$ entre y_{2d} et y_2 après avoir fermé la boucle externe avec le gain K_{ext}.

ANNEXE
FIGURE POUR LE PROBLÈME NO 3