Formulaire d’équations

Acronymes utilisés

FTBO = fonction de transfert en boucle ouverte
FTBF = fonction de transfert en boucle fermée

Système d’ordre 1 standard

$$G(s) = \frac{K}{1+\tau s}$$

$$t_s(2\%) = 4\tau$$

Système d’ordre 2 standard

Note : Dans Ogata, l’angle ϕ est dénoté par β et ω_a est dénoté par ω_d.

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\omega_a = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$t_s(2\%) = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$\zeta = \cos\phi$$

$$M_p = 100e^{-\pi/\tan\phi}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_a} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Règles pour tracer le lieu des racines

1. Symétrie
2. Nombre de branches = nombre de pôles de la FTBO
3. Départ aux pôles de la FTBO et arrivée aux zéros de la FTBO
4. Nombre d’asymptotes $(n-m)$ et leur direction $\frac{180°}{n-m}(2k+1)$
5. Intersection des asymptotes avec axe réel: $\frac{\sum_i p_i - \sum_k z_k}{n-m}$ (Note : les termes de la factorisation de la fonction de transfert sont supposés ici être écrits sous la forme $(s - p_i)$ et $(s - z_k)$.
6. Lieu sur axe des réels: règle de la ‘peinture’ => il doit y avoir un nombre impair de pôles et zéros à droite de tout lieu des racines valide sur l’axe réel
7. Points de séparation ou de jonction $\frac{dK}{ds} = 0 \Rightarrow ND' - N'D = 0$. Le point de séparation/jonction doit être sur le lieu valide de l’axe des réels (sur la ‘peinture’).
8. Angles de départ des pôles $\theta_d = 180° - \sum_i \angle p_i + \sum_k \angle z_k$
   angles d’arrivée aux zéros $\theta_a = 180° - \sum_k \angle z_k + \sum_i \angle p_i$
9. Intersection avec l’axe imaginaire : solution de $1 + KG(j\omega) = 0 \Rightarrow D(j\omega) + KN(j\omega) = 0$ => 2 équations ($Re = 0,\ Im = 0$) à 2 inconnues (K, ω).

Erreurs en régime permanent

$e(\infty)$	**Échelon Au_0**	**Rampe Au_1**	**Parabole Au_2**
CLASSE 0	$A / (1+K_{pos})$	∞	∞
CLASSE 1	0	A / K_{vel}	∞
CLASSE 2	0	0	A / K_{acc}

$$K_{pos} = lim_{s\to 0}\, G\,(s) \qquad e_{RP} = \frac{1}{1+K_{pos}} \qquad \text{(à un échelon unitaire)}$$

$$K_{vel} = lim_{s\to 0}\, s\,G(s) \qquad e_{RP} = \frac{1}{K_{vel}} \qquad \text{(à une rampe unitaire)}$$

$$K_{acc} = lim_{s\to 0}\, s^2\,G(s) \qquad e_{RP} = \frac{1}{K_{acc}} \qquad \text{(à une parabole unitaire)}$$

<u>Marges de stabilité</u>

Marge de phase PM: quand la condition d'amplitude $|G(j\omega)| = 1$ (0 dB) est rencontrée à la fréquence ω_g, c'est la phase qu'il faut perdre pour rencontrer la condition de phase $\langle G(j\omega)\rangle_{\omega=\omega_g} = -180$ deg.

Marge de gain GM: quand la condition de phase $\langle G(j\omega)\rangle = -180$ deg est rencontrée à la fréquence ω_p, c'est le gain qu'il faut multiplier pour rencontrer la condition de gain $|G(j\omega)|_{\omega=\omega_p} = 1$ (0 dB).

Marge de retard: C'est la marge de phase exprimée en secondes à la fréquence ω_g.

<u>Comportement aux basses fréquences (**donc pour ω petit**) selon la classe d'un système</u>

$$G(j\omega) \to K_{pos} \quad \text{(classe 0)} \quad \text{pente de } 0 \text{ dB/décade}, \; 0 \text{ deg en phase si phase minimum}$$

$$G(j\omega) \to \frac{K_{vel}}{\omega} \quad \text{(classe 1)} \quad \text{pente de} - 20\text{dB/décade}, -90 \text{ deg en phase si phase minimum}$$

$$G(j\omega) \to \frac{K_{acc}}{\omega^2} \quad \text{(classe 2)} \quad \text{pente de} - 40\text{dB/décade}, -180 \text{ deg en phase si phase minimum}$$

<u>Comportement aux hautes fréquences (**donc pour grand ω**)</u>

$$\lim_{\omega\to\infty} G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^{n-m}} \qquad \begin{matrix} n = \text{nombre de pôles de la FTBO} \\ m = \text{nombre de zéros de la FTBO} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \text{pente de} - (n-m) \text{ dB/décade} \\ \text{phase de} - (n-m)90 \text{ deg si phase min} \end{matrix}$$

<u>Retard pur de T secondes</u>

$$R(s) = e^{-Ts}$$
$$R(j\omega) = e^{-j\omega T}$$

Approximation par une FT avec la fonction **pade** sur MATLAB.