Analyse de systèmes asservis analogiques

EXAMEN FORMATIF

APP4e

Problème 1 (sans MATLAB)

(a) Appliquer à la main les 9 règles de construction du lieu des racines pour le système :

$$KG(s) = \frac{K}{s(s^2+5s+5)}$$

1. Symétrie : la moitié du travail est faite… Les angles de départ/arrivée dans la partie Nord seront l'image miroir de la partie Sud.
2. Ordre 3 => 3 pôles => 3 branches
3. Départ aux pôles à $s = 0$, $s = -3.618$, $s = -1.382$
   Arrivée aux zéros : aucuns zéros, $n - m = 3$, donc les 3 branches vont à l'∞
4. Trois asymptotes : angles de $+60$ deg, $+180$ deg et -60 deg.
5. Intersection des asymptotes avec l'axe des réels :

$$\sigma = \frac{\sum pôles - \sum zéros}{n-m} = \frac{(0-3.618-1.382)-(0)}{3-0} = -\frac{5}{3} = -1.67$$

6. Lieu sur l'axe des réels (« peinture ») :
   entre le pôle à $s = 0$ et le pôle à $s = -1.382$ et à partir du pôle à $s = -3.618$ vers $-\infty$.

7. Point de séparation et points de jonction sur l'axes des réels : point de séparation entre les deux pôles avec de la « peinture » entre les deux.

$$\frac{dK}{ds} = 0 => \quad ND' - DN' = 0$$

$$N = 1, \quad D = s(s^2+5s+5) = s^3+5s^2+5s$$

$$(1)(3s^2+10s+5) - s(s^2+5s+5)(0) = 3s^2+10s+5 = 0$$

   Solutions : $s = -2.721$, $s = -0.613$. Seulement $\boldsymbol{s = -0.613}$ est sur un lieu des racines valide (avec peinture) donc séparation à ce point.

8. Angle de départ des pôles conjugués complexes : aucun
   Angle d'arrivée à des zéros conjugués complexes : aucun

9. Intersection avec l'axe imaginaire :

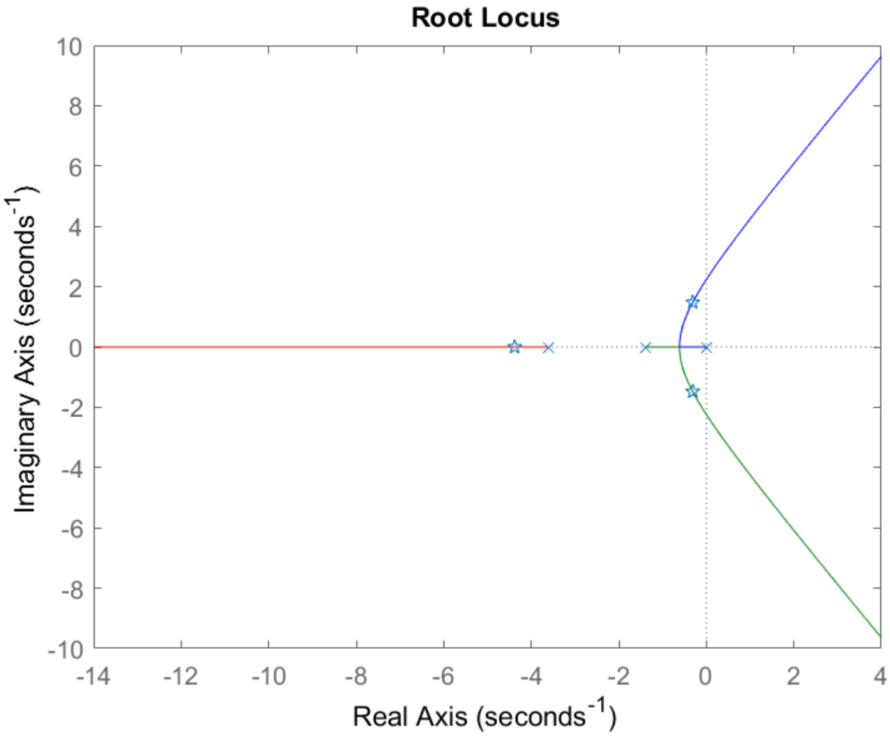
$$DEN_{BF} = D(s) + K\,N(s) = (s^3+5s^2+5\,s+K) = 0$$

$$-j\omega^3 - 5\omega^2 + 5\,j\omega + K = 0$$

$$-\omega^3 + 5\,\omega = 0 \qquad \omega = 0 \text{ et } \omega = \pm\sqrt{5}$$

$$-5\omega^2 + K = 0 \quad => K = 5\omega^2 = 25$$

   Le système devient instable avec un gain $K = 25$ et traverse l'axe imaginaire à $\pm j\sqrt{5} = \pm j2.236$.



(b) Si on ajoute un compensateur de type $K_P(s + 2)$ en cascade, indiquer quelles sont les modifications du tracé sur le lieu des racines : nombre et direction des asymptotes, intersection des asymptotes avec l'axe réel, point de séparation, déplacement général du lieu ?

<u>nombre et direction des asymptotes</u> :
Avec le PD, on ajoute un zéro donc on perd une asymptote vers l'infini : on passe de 3 asymptotes (± 60 deg et $- 180$ deg) à 2 asymptotes (± 90 deg).

<u>intersection des asymptotes avec l'axe réel</u> :

$$\sigma = \frac{\sum p\hat{o}les - \sum z\acute{e}ros}{n-m} = \frac{(0 - 3.618 - 1.382) - (\mathbf{-2})}{3-1} = -\frac{3}{2} = -1.5$$

<u>point de séparation</u>

$$\frac{dK}{ds} = 0 => \quad ND' - DN' = 0$$

$$N = (\boldsymbol{s + 2}), \quad D = s(s^2 + 5s + 5) = s^3 + 5s^2 + 5s$$

$$(s+2)(3s^2 + 10s + 5) - (s^3 + 5s^2 + 5s)(1) = 3s^3 + 16s^2 + 25s + 10 - (s^3 + 5s^2 + 5s) = 0$$

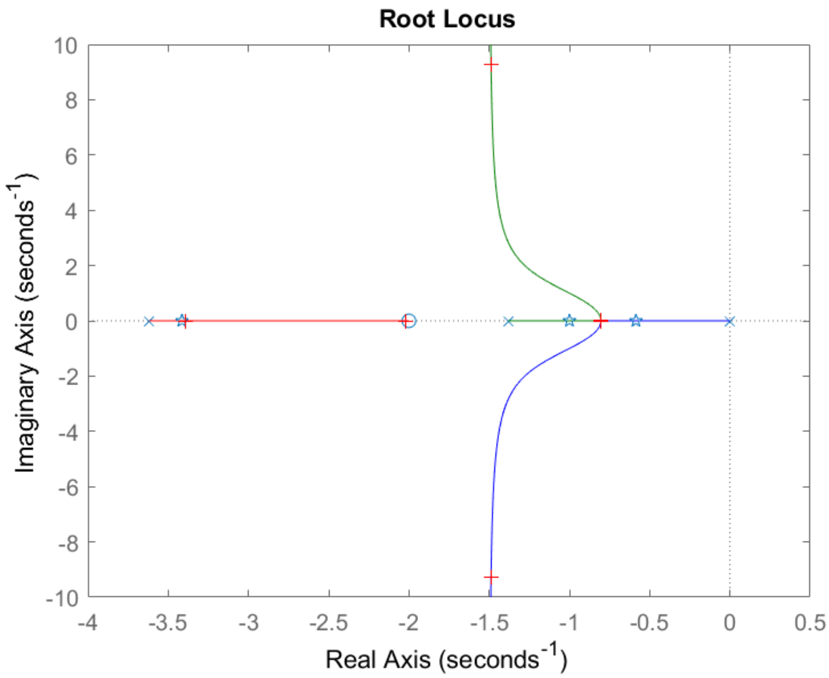
$$2s^3 + 11s^2 + 20s + 10 = 0$$

solutions (on ne demandera pas de trouver les racines d'une cubique sans MATLAB):

-2.34871466846652 +	0.844701384204889i	rejetée
-2.34871466846652 -	0.844701384204889i	rejetée
-0.802570663066967		**bonne (sur la peinture)**

Le point de séparation s'est déplacé vers la gauche.

déplacement général du lieu
Le lieu des racines est attiré vers la gauche.



(c) Prédire les impacts de ce compensateur sur la réponse en régime transitoire du système en boucle fermée soumis à une entrée échelon (stabilité, oscillations, temps de stabilisation) ?

Le système non compensé pouvait devenir instable pour un gain $K_P > 25$. Le système compensé est toujours stable pour toute valeur du gain K_P. Le lieu des racines se déplace vers la gauche, il y a moins d'oscillation et le temps de stabilisation sera plus court.

(d) Comment varie le tracé du lieu des racines si on change le gain K_P du compensateur par un facteur 10?

Les commandes rlocus(FT) et rlocus(10*FT) donnent le même tracé : le lieu des racines ne change pas de forme avec la multiplication d'un gain positif. Cependant la valeur du gain à un endroit donné sur le lieu a changé par un facteur 10. Autre façon de voir : un gain positif (phase = 0 deg) ne change pas la phase de la FTBO et donc, ne change pas le « trajet d'autobus ». Il ne change que le « nom des stations d'autobus » (l'ancienne station 1 est retrouvée à la station 0.1).

(e) Quels sont les impacts de ce changement de gain K_P d'un facteur 10 sur l'erreur en régime permanent du système en boucle fermée soumis à une entrée rampe ?

Le gain de la FTBO de classe 1 vient d'être augmenté d'un facteur 10 donc le K_{vel} va aussi être amplifié d'un facteur 10 et l'erreur en régime permanent à une entrée rampe sera réduite d'un facteur 10.

Problème 2 (sans MATLAB)

Le déplacement *x(t)* d'une masse de 1 kg est effectué par une entrée *u(t)* qui actionne un moteur qui amplifie l'entrée $u(t)$ par un gain de 10 (la force appliquée en Newton est $F(t) = 10\,u(t)$). Une friction visqueuse de coefficient *b* = 25 N/(m/s) est aussi appliquée à cette masse.

(a) Développer la fonction de transfert en boucle ouverte de ce système.

FT entre $x(t)$ et $F(t)$

Équation originale : $m\ddot{x} = F(t) - b\dot{x}$ avec $F(t) = 10u(t)$.
Laplace : $(ms^2 + bs)X(s) = F(s) = 10U(s)$

FT avec sortie sur entrée :

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{10}{(ms^2 + bs)} = \frac{10}{s(s+25)}$$

(b) Calculer (à la main) les marges de phase et de gain de ce système quand on ferme la boucle entre la position *x(t)* et l'entrée *u(t)* avec une rétroaction unitaire et une commande P en cascade de gain $K = 1$. Quelles sont les fréquences de traverse en phase ω_p et en gain ω_g?

Marge de phase

On trouve la fréquence de traverse en gain ω_g, la fréquence à laquelle la marge de phase est calculée.
La fréquence de traverse en gain ω_g est le point où l'amplitude est 1 (0 dB) : $|G(j\omega_g)| = 1$.

$$|G(j\omega)| = \left|\frac{10}{-\omega^2 + 25j\omega}\right| = \frac{10}{\sqrt{\omega^4 + 625\omega^2}} = 1$$

$$\omega^4 + 625\omega^2 - 100 = 0 \quad => \quad \omega^2 = \ \mathbf{-625.16} \text{ ou } \mathbf{0.16} \ => \boldsymbol{\omega_g} = \ \mathbf{0.4\ rad/s}$$

On calcule la phase de $G(s)$ à ω_g (le symbole $\langle G(j\omega_g)\rangle$ est utilisé pour la phase de $G(j\omega_g)$).

$$\langle G(j\omega_g)\rangle = \langle\frac{10}{-\omega_g^2 + 25j\omega_g}\rangle = \langle 10\rangle - \langle -\omega_g^2 + 25j\omega_g\rangle = 0 - \tan^{-1}\frac{imag}{real} = -\tan^{-1}\left(\frac{25\omega_g}{-\omega_g^2}\right) =$$
$$= -\tan^{-1}\left(\frac{25}{-\omega_g}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{25}{-0.4}\right) = -90.92 \text{ deg}$$

Marge de phase :

$$PM = \langle G(j\omega_g)\rangle - (-180) = -90.92 + 180 = \mathbf{89.08\ deg}$$

(Au besoin, voir le document « Clarifications_sur_le_calcul_de_phase ».)

Marge de gain

On trouve la fréquence de traverse en phase ω_p, la fréquence à laquelle la marge de gain est calculée.
La fréquence de traverse en phase ω_p est le point on la phase est -180 deg: $\langle G(j\omega_p)\rangle = -180$.

$$\langle G(j\omega_p)\rangle = -\tan^{-1}\left(\frac{25}{-\omega_p}\right) = -180 \;\; => \;\tan(180) = \frac{25}{-\omega_p} \; => 0 = \frac{25}{-\omega_p} \;\; => \;\omega_p = \infty$$

La marge de gain est infinie (on ne traverse pas la phase à -180 deg).

(c) De quel facteur (ou de quelle fraction) doit-on changer le gain unitaire K pour obtenir une marge de phase de 30 deg ? Que deviendrait la nouvelle fréquence de traverse en gain ω_g?

La marge de phase de 30 deg sera obtenue à une nouvelle fréquence ω_g donnée par :

$$\langle G(j\omega_g\rangle = -180 + PM = \; -180 + 30 = \; -150 \text{ deg}$$

Donc

$$\langle G(j\omega_g\rangle = -\tan^{-1}\left(\frac{25}{-\omega_g}\right) = \; -150 \quad => \quad \omega_g = -\frac{25}{\tan(150)} = 43.30 \text{ rad/s}$$

On veut que l'amplitude à ce ω_g soit 1 (0 dB).

$$\left|KG(j\omega_g)\right| = 1 \;\; => \quad K = \frac{1}{G(j\omega_g)} = \frac{\sqrt{\omega_g^4 + 625\omega_g^2}}{10} = 216.51$$

NOTE : La marge de phase est passée de $PM = 89.08$ deg à $PM = 30$ deg avec l'augmentation de gain de 216.51. Normalement, on ne désire pas réduire une marge de phase sauf dans le cas où on veut augmenter le gain pour réduire une erreur en régime permanent. C'est le cas ici. Voir la prochaine question.

(d) Avec le changement de gain K en (c), par quel facteur le gain statique K_{vel} et l'erreur en régime permanent (à une réponse à une rampe unitaire) ont-ils été augmentés/diminués ?

Le gain statique K_{vel} a été augmenté d'un facteur 216.51 et l'erreur en RP a été diminuée du même facteur :

$$K_{vel}(original) = \frac{10}{25} = 0.4 \quad => \quad e_{RP}(rampe) = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

$$K_{vel}(nouveau) = K_{vel}(original)(216.51) = \; 86.6 \quad => \quad e_{RP}(rampe) = \frac{1}{86.6} = 0.0115$$

(e) Toujours avec le gain K calculé en (c), quel est le retard pur T_R maximum que le système pourrait subir avant de devenir instable ?

$$T_R = \frac{PM}{\omega_g}\frac{\pi}{180} = 0.0121\, s$$

(f) Démontrer analytiquement l'impact du gain K de la rétroaction sur les caractéristiques de la réponse temporelle en boucle fermée (impact sur l'amortissement et sur la fréquence naturelle).

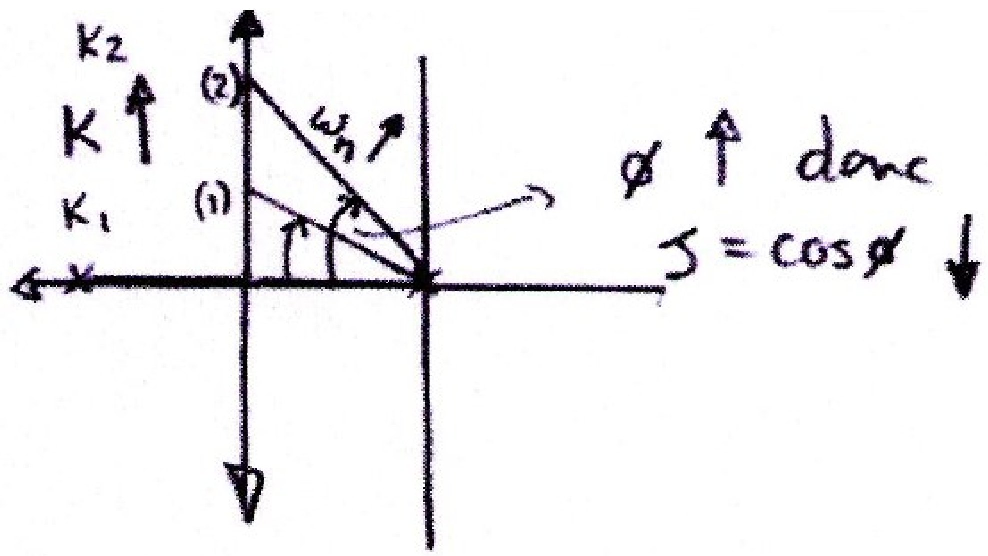
$$FTBF = \frac{\frac{K10}{s(s+25)}}{1 + \frac{K10}{s(s+25)}} = \frac{10K}{s^2 + 25s + 10K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

On fait le mapping du dénominateur

$$\omega_n^2 = 10K, \quad 2\,\zeta\omega_n = 25 \quad => \quad \omega_n = \sqrt{10\,K} \quad \zeta = \frac{25}{2\sqrt{10\,K}}$$

Quand K augmente, la fréquence naturelle ω_n augmente et tend vers ∞.
Le facteur d'amortissement diminue avec une augmentation de K.

(g) Démontrer le résultat en (e) en faisant un croquis du lieu des racines et en y indiquant les pôles en boucle fermée pour deux gains K_1 et K_2 avec $K_2 > K_1$.



Problème 3 (sans MATLAB)

À partir du diagramme de Bode illustré en annexe :
(a) Déterminer la classe du système.
(b) Déterminer les marges de phase et de gain.
(c) Calculer les coefficients K_P, T_D du compensateur PD de la forme $K_P(1+T_D s)$ qui donne une marge de phase de 10 deg à la même fréquence de traverse en gain.

P3

(a) Classe : -20 dB/dec pour $\omega \to 0$: Classe 1

(b) GM $= -14$ dB à 2.24 rad/s (ω_p)
PM $= -39.2$ deg à 4.4 rad/s (ω_g)

(c) On veut $K_p(1+T_d s)$ pour que PM $= 10$ deg à ω_g

$\Rightarrow$ On conserve la même ω_g donc $|K_p(1+T_d j\omega_g)| = 1$ ①

$\Rightarrow$ On veut $PM_{désiré} = +10$ deg et on part avec $PM_{départ} = -39.2$ deg. On veut donc augmenter ("avancer") la phase de $\phi = 10-(-39.2) = 49.2$ deg

$\Rightarrow$ On veut donc $\angle K_p(1+T_d\omega_g j) = 49.2$ deg ②

$\Rightarrow$ 2 éqns. à 2 inconnues $\Rightarrow$ commence par ②

$\tan^{-1}\left(\dfrac{T_d\omega_g}{1}\right) = 49.2 \Rightarrow T_d = \dfrac{\tan(49.2)}{\omega_g} = 0.263$

$\Rightarrow$ Eq. ① : $K_p\sqrt{1+T_d^2\omega_g^2} = 1 \Rightarrow K_p = 0.653$

$\Rightarrow$ Compensateur : $0.653(1+0.263s)$ augmente la marge de phase de -39.2 deg à $+10$ deg.

Problème 4 (sans MATLAB)

Pour la FTBO suivante : $KG(s) = \frac{K(s-z)}{s(s^2+4s+8)}$, utiliser les règles du lieu des racines pour calculer la condition sur le zéro à $z < 0$ qui assure la stabilité en boucle fermée du système pour toute valeur du gain K.

$$G(s) = \frac{K(s-z)}{s(s^2+4s+8)} = \frac{K(s-z)}{s(s^2+2-2j)(s+2+2j)}$$

- Un zéro à $z < 0$ et trois pôles à 0, $-2 \pm 2j$
- $n - m = 3 - 1 = 2$ => 2 branches à l'infini
- On veut les asymptotes du côté négatif.

$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{(0-2-2j-2+2j)-(z)}{n-m} = \frac{-4-z}{2} < 0$$

- Donc $-4 - z < 0$ => $z > -4$. Il faut mettre le zéro à droite de -4 (et à gauche de 0).