

Formulaire d'équations

Acronymes utilisés

FTBO = fonction de transfert en boucle ouverte

FTBF = fonction de transfert en boucle fermée

Système d'ordre 1 standard

$$G(s) = \frac{K}{1 + \tau s}$$

$$t_s(2\%) = 4\tau$$

Système d'ordre 2 standard

Note : Dans Ogata, l'angle ϕ est dénoté par β
et ω_a est dénoté par ω_d .

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$t_s(2\%) = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$\zeta = \cos \phi$$

$$M_p = 100e^{-\pi / \tan \phi}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_a} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Règles pour tracer le lieu des racines

1. Symétrie
2. Nombre de branches = nombre de pôles de la FTBO
3. Départ aux pôles de la FTBO et arrivée aux zéros de la FTBO
4. Nombre d'asymptotes $(n - m)$ et leur direction $\frac{180^\circ}{n-m} (2k + 1)$
5. Intersection des asymptotes avec axe réel: $\frac{\sum_i p_i - \sum_k z_k}{n-m}$ (Note : les termes de la factorisation de la fonction de transfert sont supposés ici être écrits sous la forme $(s - p_i)$ et $(s - z_k)$).
6. Lieu sur axe des réels: règle de la 'peinture' => il doit y avoir un nombre impair de pôles et zéros à droite de tout lieu des racines valide sur l'axe réel
7. Points de séparation ou de jonction $\frac{dK}{ds} = 0 \Rightarrow ND' - N'D = 0$. Le point de séparation/jonction doit être sur le lieu valide de l'axe des réels (sur la 'peinture').
8. Angles de départ des pôles $\theta_d = 180^\circ - \sum_i \angle p_i + \sum_k \angle z_k$
angles d'arrivée aux zéros $\theta_a = 180^\circ - \sum_k \angle z_k + \sum_i \angle p_i$
9. Intersection avec l'axe imaginaire : solution de $1 + KG(j\omega) = 0 \Rightarrow D(j\omega) + KN(j\omega) = 0 \Rightarrow$
2 équations ($Re = 0, Im = 0$) à 2 inconnues (K, ω).

Erreurs en régime permanent

$e(\infty)$	Échelon Au_0	Rampe Au_1	Parabole Au_2
CLASSE 0	$A / (1 + K_{pos})$	∞	∞
CLASSE 1	0	A / K_{vel}	∞
CLASSE 2	0	0	A / K_{acc}

$$\begin{aligned}
K_{pos} &= \lim_{s \rightarrow 0} G(s) & e_{RP} &= \frac{1}{1 + K_{pos}} & (\text{à un échelon unitaire}) \\
K_{vel} &= \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) & e_{RP} &= \frac{1}{K_{vel}} & (\text{à une rampe unitaire}) \\
K_{acc} &= \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) & e_{RP} &= \frac{1}{K_{acc}} & (\text{à une parabole unitaire})
\end{aligned}$$

Marges de stabilité

Marge de phase PM: quand la condition d'amplitude $|G(j\omega)| = 1$ (0 dB) est rencontrée à la fréquence ω_g , c'est la phase qu'il faut perdre pour rencontrer la condition de phase $\langle G(j\omega) \rangle_{\omega=\omega_g} = -180$ deg.

Marge de gain GM: quand la condition de phase $\langle G(j\omega) \rangle = -180$ deg est rencontrée à la fréquence ω_p , c'est le gain qu'il faut multiplier pour rencontrer la condition de gain $|G(j\omega)|_{\omega=\omega_p} = 1$ (0 dB).

Marge de retard: C'est la marge de phase exprimée en secondes à la fréquence ω_g .

Comportement aux basses fréquences (**donc pour ω petit**) selon la classe d'un système

$$\begin{aligned}
G(j\omega) &\rightarrow K_{pos} & (\text{classe 0}) & \text{pente de } 0 \text{ dB/décade, } 0 \text{ deg en phase si phase minimum} \\
G(j\omega) &\rightarrow \frac{K_{vel}}{\omega} & (\text{classe 1}) & \text{pente de } -20 \text{ dB/décade, } -90 \text{ deg en phase si phase minimum} \\
G(j\omega) &\rightarrow \frac{K_{acc}}{\omega^2} & (\text{classe 2}) & \text{pente de } -40 \text{ dB/décade, } -180 \text{ deg en phase si phase minimum}
\end{aligned}$$

Comportement aux hautes fréquences (**donc pour grand ω**)

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^{n-m}} \quad \begin{array}{ll} n = \text{nombre de pôles de la FTBO} & \text{pente de } -(n-m) \text{ dB/décade} \\ m = \text{nombre de zéros de la FTBO} & \text{phase de } -(n-m)90 \text{ deg si phase min} \end{array}$$

Retard pur de T secondes

$$\begin{aligned}
R(s) &= e^{-Ts} \\
R(j\omega) &= e^{-j\omega T}
\end{aligned}$$

Approximation par une FT avec la fonction **pade** sur MATLAB.