2.3. AUTÓMATAS FINITOS (AF)

"El autómata finito es un modelo matemático de un sistema, con entradas y salidas discretas" (Hopcroft, 1997, p. 15).

2.3.1. AUTOMÁTA FINITO DETERMINISTA (AFD)

MOTIVACIÓN (Hopcroft, 2002, pp. 3-4)

Un interruptor (ver Figura 2.1) es capaz de recordar si está apagado (off) o encendido (on), y permite que el usuario presione un botón consiguiendo diferentes efectos, que dependen de cuál era el estado del interruptor: si el interruptor está apagado, la acción de presionar el botón hace que su estado cambie a encendido y que el dispositivo controlado por el interruptor funcione; si el interruptor está encendido, la acción de presionar el botón hace que su estado cambie a apagado.

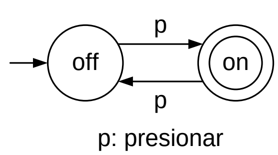


Figura 2.1. AFD para un interruptor.

DEFINICIÓN

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Q : conjunto finito de estados.
Σ : alfabeto de entrada.
δ : función de transición.
$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$
q_0 : estado inicial.
$q_0 \in Q$
F : conjunto de estados finales o de aceptación.
$F \subseteq Q$

Ejemplo 1:
$A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$

δ	0	1
q_0	q_2	q_0
q_1	q_1	q_1
q_2	q_2	q_1

Ejemplo 2:
$A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_0\})$

δ	0	1
q_0	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

TABLA DE TRANSICIONES

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \Rightarrow \begin{cases} \rightarrow q_0 & \\ * q & \forall q \in F \end{cases}$$

Ejemplo 1:

δ	0	1
$\rightarrow q_0$	q_2	q_0
$*q_1$	q_1	q_1
q_2	q_2	q_1

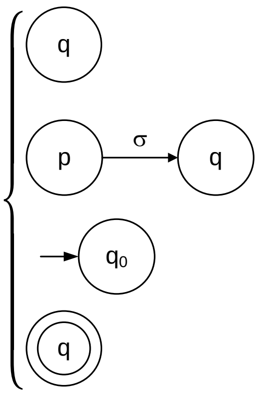
Ejemplo 2:

δ	0	1
$\rightarrow *q_0$	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

DIAGRAMA DE TRANSICIONES

Grafo dirigido

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \Rightarrow$



$\forall q \in Q$

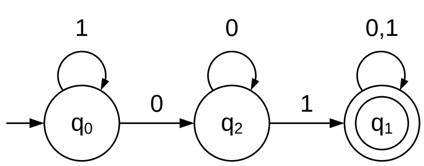
$\forall \delta(p, \sigma) = q$

$\forall q \in F$

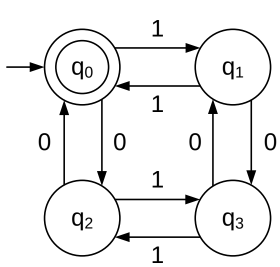
Si hay más de una transición entre dos estados, se dibuja un único arco entre estos dos estados, cuya etiqueta incluye los símbolos implicados separados por comas (Cases, 2002, pp. 75-76).

“De cada estado parte una y sólo una transición para cada símbolo del alfabeto” (Kelley, 1995, p. 61).

Ejemplo 1:



Ejemplo 2:



LENGUAJE ACEPTADO

$L(A) = \{\omega \in \Sigma^* / \delta(q_0, \omega) \in F\}$

Observación:
$q_0 \in F \Rightarrow \varepsilon \in L(A)$

Ejemplo 1:
$L(A) = \{\omega \in \{0, 1\}^*$ / ω contiene la subpalabra 01$\}$

$\omega_1 = 01$
$\omega_2 = 11010$
$\omega_3 = 100011$
$\omega_4 = \varepsilon$
$\omega_5 = 0$
$\omega_6 = 111000$

Ejemplo 2:
$L(A) = \{\omega \in \{0, 1\}^*$ / ω tiene un número par de ceros y un número par de unos$\}$

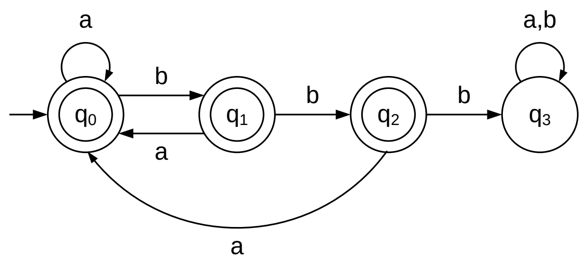
$\omega = 110101$

EJEMPLO 1

Definición:
$A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0, q_1, q_2\})$

δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_0	q_2
q_2	q_0	q_3
q_3	q_3	q_3

Diagrama de transiciones:



Lenguaje aceptado:
$L(A) = \{\omega \in \{a, b\}^* \ / \ \omega$ no contiene tres b consecutivas$\}$

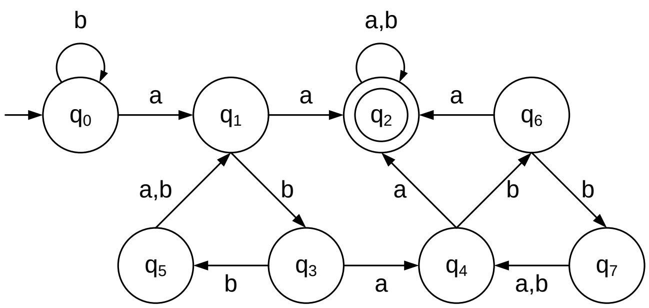
ω = bbab

EJEMPLO 2

Tabla de transiciones:

δ	a	b
$\rightarrow q_0$	q_1	q_0
q_1	q_2	q_3
$*q_2$	q_2	q_2
q_3	q_4	q_5
q_4	q_2	q_6
q_5	q_1	q_1
q_6	q_2	q_7
q_7	q_4	q_4

Diagrama de transiciones:

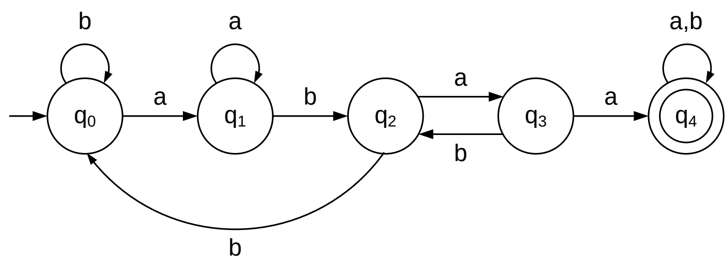


Lenguaje aceptado:
L(A) = {$\omega \in \{a, b\}^*$ / ω tiene algún par de a separadas por una subpalabra de longitud múltiplo de tres}

ω = babab ab

EJERCICIO

Diagrama de transiciones:



Lenguaje aceptado:
$L(A) = \{\omega \in \{a, b\}^* \ / \ \omega$ contiene la subpalabra abaa$\}$

2.3.1.1. MINIMIZACIÓN

2.3.1.1.1. Método 1

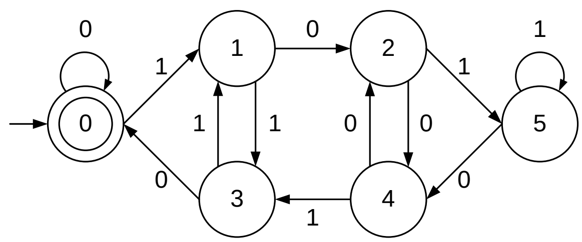
Los pares de estados equivalentes se pueden encontrar por medio de una tabla en la que cada fila y cada columna corresponden a un estado (Kelley, 1995, p. 96). Debido a la simetría con respecto a la diagonal, se utiliza menos de la mitad de la tabla.

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \Rightarrow A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0, F')$ donde $F' = \{q' \in Q' \,/\, q' \in F\}$

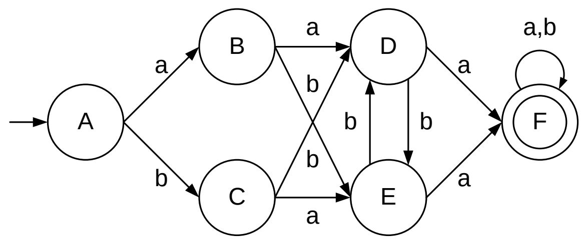
Algoritmo (Hopcroft, 1997, p. 74):
$\forall\ p \in F \wedge q \in (Q - F)$
    Marcar (p, q)
$\forall\ (p, q) \in F \times F \vee (p, q) \in (Q - F) \times (Q - F)$
    Si para algún $\sigma \in \Sigma$, $(\delta(p, \sigma), \delta(q, \sigma))$ está marcado entonces
    {
        Marcar (p, q)
        Marcar recursivamente todos los pares no marcados de la lista (p, q) y de las listas de otros pares marcados en este paso.
    }
    Sino
        $\forall\ \sigma \in \Sigma$
            Poner (p, q) en la lista $(\delta(p, \sigma), \delta(q, \sigma))$ a menos que $\delta(p, \sigma) = \delta(q, \sigma)$
    Fin Si

Los cuadros que quedan en blanco al final del algoritmo indican los pares de estados que son equivalentes (Hopcroft, 2002, p. 168).

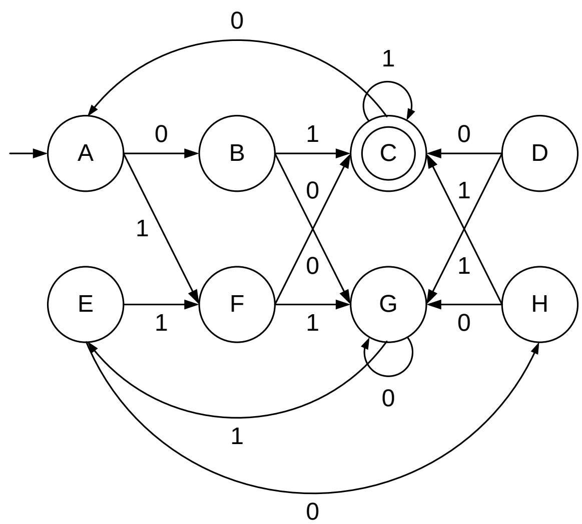
Ejemplo:



Ejercicio:



Tarea:



2.3.1.1.2. Método 2

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \Rightarrow A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0, F')$ donde $F' = \{q' \in Q' \,/\, q' \in F\}$

Algoritmo (Aho, 1990, p. 145):
i = 0
P_0 = (F) (Q - F)
Repetir
    i = i + 1
    ∀ grupo G de P_{i-1}
    {
        Particionar G en subgrupos tales que dos estados p y q de G están en el mismo subgrupo ⇔ ∀ σ ∈ Σ, los estados p y q tienen transiciones en σ hacia estados del mismo grupo de P_{i-1}
        Sustituir G en P_i por el conjunto de todos los subgrupos formados.
    }
Hasta $P_i = P_{i-1}$

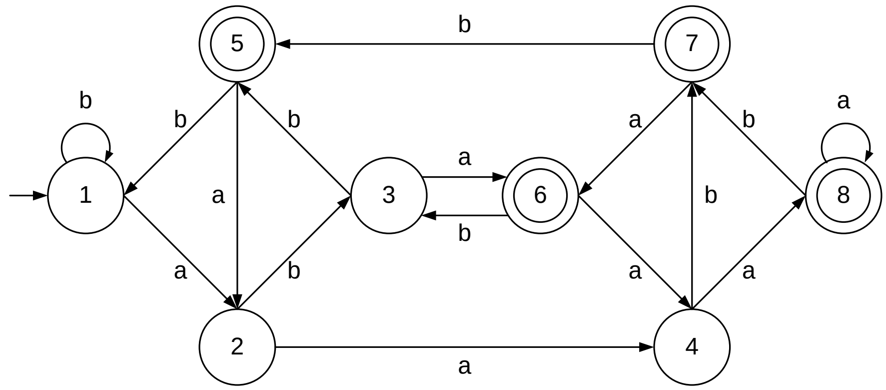
Ejemplo:

δ	a	b
→A	B	C
B	B	D
C	B	C
D	B	E
*E	B	C

Ejercicio 1:

δ	a	b
→A	B	C
B	D	E
C	A	B
*D	C	F
*E	G	H
F	H	B
*G	I	I
H	J	F
I	H	J
J	G	E

Ejercicio 2:



Ejercicio 3:

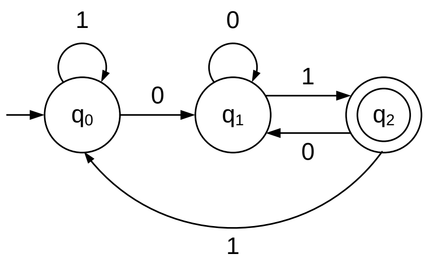
δ	a	b
→1	2	1
2	3	4
*3	3	3
4	5	6
5	3	7
6	8	9
7	3	10
8	3	4
9	3	4
10	11	12
11	3	7
12	3	7

2.3.1.2. COMPLEMENTACIÓN

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \Rightarrow A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F')$ donde $F' = Q - F$

L(A') = $\overline{\mathrm{L}}$ (A)

Ejemplo:



L(A) = {ω ∈ $\{0, 1\}^*$ / ω termina en 01}

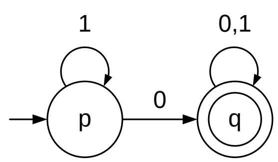
2.3.1.3. INTERSECCIÓN

$$\begin{matrix} A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1) \\ A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2) \end{matrix} \Rightarrow A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

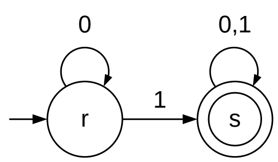
$$\text{donde } \begin{cases} Q = Q_1 \times Q_2 \\ \delta\big((p,q),\sigma\big) = (\delta_1(p,\sigma), \delta_2(q,\sigma)) \quad \forall p \in Q_1, q \in Q_2, \sigma \in \Sigma \\ q_0 = (q_1, q_2) \\ F = F_1 \times F_2 \end{cases}$$

$L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$

Ejemplo:

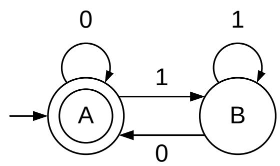


$L(A_1) = \{\omega \in \{0, 1\}^* \ / \ \omega \text{ contiene un } 0\}$

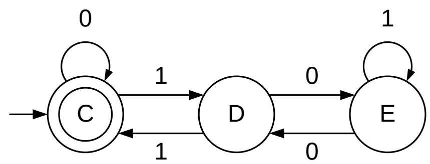


$L(A_2) = \{\omega \in \{0, 1\}^* \ / \ \omega \text{ contiene un } 1\}$

Ejercicio:



$L(A_1) = \{\omega \in \{0, 1\}^* \;/\; \omega$ es un número binario múltiplo de dos$\}$



$L(A_2) = \{\omega \in \{0, 1\}^* \;/\; \omega$ es un número binario múltiplo de tres$\}$