1.6. REPRESENTACIÓN DE LENGUAJES

1.6.1. GRAMÁTICAS

Definición

$G = (N, \Sigma, P, S) \qquad N \cap \Sigma = \emptyset$

N : conjunto finito de símbolos no terminales.
Σ : conjunto finito de símbolos terminales.
P : conjunto finito de producciones.

$P \subseteq (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$

Notación:
$(\alpha, \beta) \in P \Rightarrow \alpha \to \beta$

Cada producción consta de un lado izquierdo y un lado derecho, conectados por una flecha (Brookshear, 1993, p. 50).

Los lados izquierdo y derecho de las producciones de una gramática pueden ser cualquier combinación de no terminales y terminales, siempre y cuando el lado izquierdo contenga por lo menos un no terminal (Brookshear, 1993, p. 51).

Se puede abreviar la escritura de las producciones factorizando todas las que tienen el mismo lado izquierdo, de modo que en una misma línea se escribe este lado izquierdo, seguido de la flecha, y a continuación todos los lados derechos de las producciones, separados entre sí por una barra vertical.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \to \beta_1 \\ \alpha \to \beta_2 \\ \alpha \to \beta_3 \\ \quad \cdots \\ \alpha \to \beta_n \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \to \beta_1 \mid \beta_2 \mid \beta_3 \mid \cdots \mid \beta_n{}^{1}$$

S : símbolo inicial.

$S \in N$

Ejemplo:
$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSb \mid \varepsilon\}, S)$

[1] | se lee "o".

Paso de derivación

$\beta \rightarrow \gamma \in P \Rightarrow \alpha\beta\delta \Rightarrow \alpha\gamma\delta$[2]

Notación:
$\Rightarrow$ un paso de derivación.
$\overset{i}{\Rightarrow}$ i pasos de derivación.
$\overset{*}{\Rightarrow}$ cero o más pasos de derivación.
$\overset{+}{\Rightarrow}$ uno o más pasos de derivación.

Derivación

Una gramática genera una palabra si, al comenzar con el símbolo inicial, se puede producir esa palabra reemplazando sucesivamente el lado izquierdo de las producciones de la gramática por su correspondiente lado derecho, hasta que sólo queden terminales. La secuencia de pasos de este proceso se conoce como derivación de la palabra (Brookshear, 1993, p. 52).

Ejemplo:
$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaaaSbbbb \Rightarrow aaaabbbb$

Lenguaje generado

$$L(G) = \left\{\omega \in \Sigma^* / S \overset{*}{\Rightarrow} \omega\right\}$$

Ejemplo:
$L(G) = \{a^n b^n / n \geq 0\}$

Equivalencia

$L(G_1) = L(G_2) \Rightarrow G_1 \equiv G_2$

Ejemplo:
$G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSb \mid \varepsilon\}, S)$

$G_2 = (\{S, X\}, \{a, b\}, P_2, S)$
$P_2 = \{$
$S \rightarrow aX \mid \varepsilon$
$X \rightarrow Sb$
$\}$

2 $\Rightarrow$ se lee “deriva”, “genera” o “produce”.

1.6.1.1. JERARQUÍA DE CHOMSKY

0. Gramática No restringida

$G = (N, \Sigma, P, S)$

$P \subseteq (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$

$\alpha \rightarrow \beta \in P \qquad \alpha \in (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^*$
$\qquad\qquad\qquad\; \beta \in (N \cup \Sigma)^*$

Ejemplo:
G = ({S, A, B, C, D, E}, {a}, P, S)
P = {
$S \rightarrow ACaB$
$Ca \rightarrow aaC$
$CB \rightarrow DB \mid E$
$aD \rightarrow Da$
$AD \rightarrow AC$
$aE \rightarrow Ea$
$AE \rightarrow \varepsilon$
}

$L(G) = \{a^{2^k} / k > 0\}$

$S \Rightarrow ACaB \Rightarrow AaaCB \Rightarrow AaaDB \Rightarrow AaDaB \Rightarrow ADaaB \Rightarrow ACaaB \Rightarrow AaaCaB \Rightarrow AaaaaCB$
$\Rightarrow AaaaaE \Rightarrow AaaaEa \Rightarrow AaaEaa \Rightarrow AaEaaa \Rightarrow AEaaaa \Rightarrow aaaa$

1. Gramática Sensible al contexto

$G = (N, \Sigma, P, S)$

$P \subseteq (N \cup \Sigma)^* \, N \, (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^+$

$\alpha \to \beta \in P \, , \, |\alpha| \leq |\beta|$ $\qquad \alpha \in (N \cup \Sigma)^* \, N \, (N \cup \Sigma)^*$
$\qquad \beta \in (N \cup \Sigma)^+$

Observación:
$\alpha \to \varepsilon \notin P$

Ejemplo 1:
$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$
$P = \{$

$S \to aSBC \mid aBC$
$CB \to BC$
$aB \to ab$
$bB \to bb$
$bC \to bc$
$cC \to cc$

$\}$

$L(G) = \{a^n b^n c^n \,/\, n \geq 1\}$

$S \Rightarrow aBC \Rightarrow abC \Rightarrow abc$

Ejemplo 2:
$G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$
$P = \{$

$S \to abc \mid aAbc$
$Ab \to bA$
$Ac \to Bbcc$
$bB \to Bb$
$aB \to aa \mid aaA$

$\}$

$L(G) = \{a^n b^n c^n \,/\, n \geq 1\}$

2. Gramática Independiente del contexto

$G = (N, \Sigma, P, S)$

$P \subseteq N \times (N \cup \Sigma)^*$

$A \to \alpha \in P \qquad A \in N$
$\qquad\qquad\qquad \alpha \in (N \cup \Sigma)^*$

Ejemplo 1:
$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$
$P = \{$

$S \to aBS \mid bAS \mid \varepsilon$
$A \to bAA \mid a$
$B \to aBB \mid b$

$\}$

$L(G) = \{\omega \in \{a, b\}^* \,/\, |\omega|_a = |\omega|_b\}$

Ejemplo 2:
$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon\}, S)$

$L(G) = \{\omega \in \{a, b\}^* \,/\, |\omega|_a = |\omega|_b\}$

3. Gramática Regular

a) Lineal por la derecha

$G = (N, \Sigma, P, S)$

$P \subseteq N \times \Sigma^* (N \cup \varepsilon)$

$$\left.\begin{array}{l} A \to \omega B \\ A \to \omega \end{array}\right\} \in P \qquad \begin{array}{c} A, B \in N \\ \omega \in \Sigma^* \end{array}$$

Ejemplo:
$G = (\{S, A\}, \{0, 1\}, P, S)$
$P = \{$
$S \to 0A$
$A \to 10A \mid \varepsilon$
$\}$

$L(G) = \{0(10)^n / n \geq 0\}$

b) Lineal por la izquierda

$G = (N, \Sigma, P, S)$

$P \subseteq N \times (N \cup \varepsilon)\, \Sigma^*$

$$\left.\begin{array}{l} A \to B\omega \\ A \to \omega \end{array}\right\} \in P \qquad \begin{array}{c} A, B \in N \\ \omega \in \Sigma^* \end{array}$$

Ejemplo:
$G = (\{S\}, \{0, 1\}, \{S \to S10 \mid 0\}, S)$

$L(G) = \{0(10)^n / n \geq 0\}$

1.6.2. RECONOCEDORES

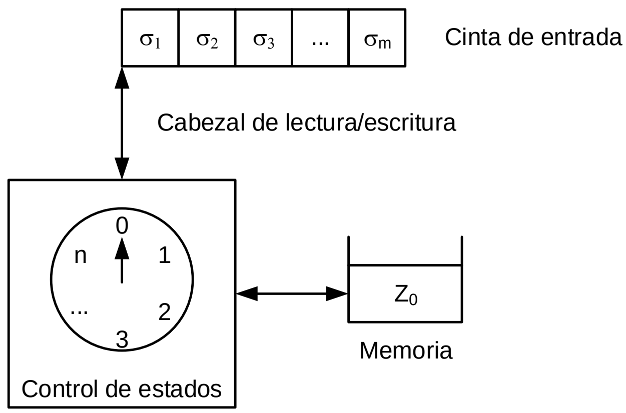

Figura 1.1. Reconocedor.

Un reconocedor consta de (ver Figura 1.2) (Sanchis, 1988, pp. 99-100):

1. Una **cinta de entrada** dividida en celdas, cada una de las cuales contiene un símbolo de la palabra de entrada.
2. Un **cabezal de lectura/escritura** que puede leer y escribir símbolos, para lo cual puede moverse a la izquierda, a la derecha o permanecer estático. “Inicialmente, el cabezal se encuentra situado delante del primer símbolo de la palabra que está escrita en la cinta de entrada” (Cases, 2002, p. 76).
3. Un **control de estados** que determina el comportamiento del reconocedor, representado por un conjunto finito de estados, uno de los cuales es el estado inicial.
4. Una **memoria** que posee una estructura de pila, la cual contiene un símbolo inicial de un determinado alfabeto.

1.6.3. RESUMEN

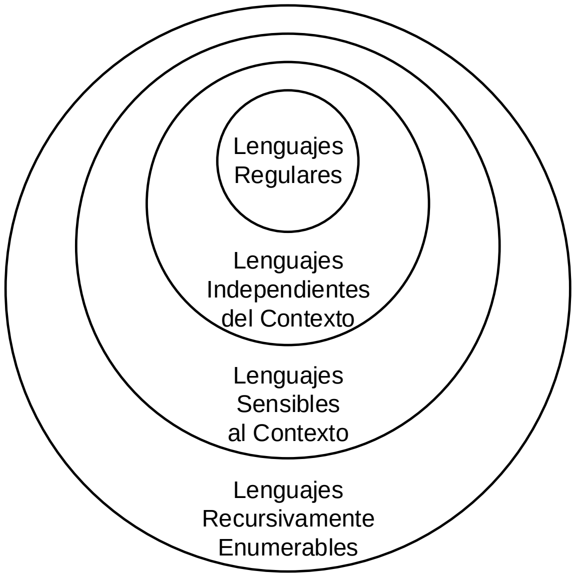

Figura 1.1. Jerarquía de Chomsky.

Tabla 1.1. Representación de Lenguajes.

Tipo	Lenguaje	Generador	Reconocedor
3	Regular	Gramática Regular	Autómata Finito
2	Independiente del Contexto	Gramática Independiente del Contexto	Autómata Apilador
1	Sensible al Contexto	Gramática Sensible al Contexto	Máquina de Turing No Determinista
0	Recursivamente Enumerable	Gramática No Restringida	Máquina de Turing