1. LENGUAJES FORMALES

1.1. LENGUAJES NATURALES Y LENGUAJES FORMALES

(Brookshear, 1993, pp. 12-13)

Un lenguaje natural es aquel que ha evolucionado con el paso del tiempo para fines de la comunicación humana, por ejemplo, el español, el inglés o el alemán. Estos lenguajes continúan su evolución sin tomar en cuenta reglas gramaticales formales.

En contraste con los lenguajes naturales, los lenguajes formales están definidos por reglas preestablecidas y, por lo tanto, se ajustan con todo rigor a ellas. Como ejemplo tenemos los lenguajes de programación de computadores. Gracias a esta adhesión a las reglas, es posible construir traductores eficientes para los lenguajes de programación, a la vez que la falta de observancia de reglas establecidas dificulta la construcción de un traductor para un lenguaje natural.

1.2. CONCEPTOS

1.2.1. SÍMBOLO

Notación:
σ

Ejemplos:
$\sigma_1 = 0$
$\sigma_2 = 1$

1.2.2. ALFABETO

Definición:
"Un alfabeto es un conjunto finito no vacío de símbolos" (Hopcroft, 2002, p. 32).

Notación:
$\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n\}$ $\quad n > 0$

Ejemplo:
$\Sigma = \{0, 1\}$

Ejemplos:
$\Sigma_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
Σ_2 = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, ñ, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z}
Σ_3 = {A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, Ñ, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z}
Σ_4 = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, ñ, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, Ñ, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z}
Σ_5 = {!, ", #, $, %, &, ', (,), *, +, ,,-, ., /, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, :, ;, <, =, >, ?, @, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, [, \,], ^, _, `, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, {, |, }, ~}

Ejercicios:
Σ_1 = {., _}
Σ_2 = {I, V, X, L, C, D, M}
Σ_5 = {B, C, D, F, G, H, J, K, L, P, R, S, T, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

1.2.3. PALABRA

Definición:
"Una secuencia finita de símbolos de un determinado alfabeto se conoce como palabra sobre dicho alfabeto" (Kelley, 1995, p. 30).

Notación:
$\omega = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_n$

Ejemplos:
$\omega_1 = 0$
$\omega_2 = 1$
$\omega_3 = 011$
$\omega_4 = 110$
$\omega_5 = 111$
$\omega_6 = 01101$

Observación:
Cada símbolo de un alfabeto es una palabra sobre dicho alfabeto (Kelley, 1995, p. 30).

1.2.3.1. PALABRA VACÍA

Notación:
ε

Observación:
La palabra vacía es una palabra sobre cualquier alfabeto (Kelley, 1995, p. 30).

1.2.4. LENGUAJE

Definición:
"Un lenguaje es un conjunto de palabras" (Kelley, 1995, p. 31).

Notación:
$L = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n\}$

Ejemplos:
$L_1 = \varnothing$
$L_2 = \{\varepsilon\}$
$L_3 = \{0\}$
$L_4 = \{1\}$
$L_5 = \{0, 1\}$
$L_6 = \{\varepsilon, 01, 10, 0011, 0101, 1001, 1100, \ldots\}$

1.3. OPERACIONES CON PALABRAS

1.3.1. LONGITUD

Notación:
$|\omega|$

Definición:
"La longitud de una palabra es el número se símbolos que la componen" (Cases, 2002, p. 14).

$\omega = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_n \Rightarrow |\omega| = n$

Ejemplo 1:
$\omega = 011 \Rightarrow |\omega| = |011| = 3$
Ejemplo 2:
$\omega = 01101 \Rightarrow |\omega| = |01101| = 5$

Observaciones:
- $|\varepsilon| = 0$
- $|\omega|_\sigma$ es el número de ocurrencias del símbolo σ en la palabra ω (Cases, 2002, p. 14).

Ejercicio 1:
$|a|$
Ejercicio 2:
$|abab|$
Ejercicio 3:
$|abcb|$
Ejercicio 4:
$|bcba|$
Ejercicio 5:
$|bbc|_a$
Ejercicio 6:
$|bcba|_b$

1.3.2. CONCATENACIÓN

Definición:
La concatenación de dos palabras es la palabra que se forma al escribir la primera seguida de la segunda (Hopcroft, 1997, pp.1-2).

$$\begin{matrix} \omega_1 = \sigma_{11}\sigma_{12}\sigma_{13}\cdots\sigma_{1i} \\ \omega_2 = \sigma_{21}\sigma_{22}\sigma_{23}\cdots\sigma_{2j} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \omega_1\omega_2 \\ \omega = \sigma_{11}\sigma_{12}\sigma_{13}\cdots\sigma_{1i}\sigma_{21}\sigma_{22}\sigma_{23}\cdots\sigma_{2j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\omega| = |\omega_1| + |\omega_2| \\ |\omega| = i + j \end{cases}$$

Ejemplos:

$$\begin{matrix} \omega_1 = 01101 \\ \omega_2 = 110 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \begin{cases} \omega = \omega_1\omega_2 \\ \omega = 01101110 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\omega| = |\omega_1| + |\omega_2| \\ |\omega| = |01101| + |110| \\ |\omega| = 5 + 3 \\ |\omega| = 8 \end{cases} \\ \begin{cases} \omega = \omega_2\omega_1 \\ \omega = 11001101 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\omega| = |\omega_2| + |\omega_1| \\ |\omega| = |110| + |01101| \\ |\omega| = 3 + 5 \\ |\omega| = 8 \end{cases} \end{matrix}$$

Propiedades:
1. Elemento neutro
   $\omega\varepsilon = \varepsilon\omega = \omega$
2. Asociatividad
   $\omega_1(\omega_2\omega_3) = (\omega_1\omega_2)\omega_3 = \omega_1\omega_2\omega_3$

1.3.3. POTENCIA

$$\omega^i = \begin{cases} \varepsilon & \text{si} \quad i = 0 \\ \omega & \text{si} \quad i = 1 \\ \omega^{i-1}\omega & \text{si} \quad i > 1 \end{cases}$$

Ejemplo:

$$\omega = 01101 \Rightarrow \begin{cases} \omega^0 = \varepsilon \\ \omega^1 = 01101 \\ \omega^2 = 0110101101 \\ \omega^3 = 011010110101101 \end{cases}$$

1.3.4. PREFIJO

$\omega = \omega_1\omega_2 \Rightarrow \omega_1$ es prefijo de ω

Ejemplo:
$\omega = 01101 \Rightarrow P = \{\varepsilon, 0, 01, 011, 0110, 01101\}$

1.3.4.1. PREFIJO PROPIO

$\omega = \omega_1\omega_2 \wedge \omega \neq \omega_1 \Rightarrow \omega_1$ es prefijo propio de ω

Ejemplo:
$\omega = 01101 \Rightarrow P' = \{\varepsilon, 0, 01, 011, 0110\}$

1.3.5. SUFIJO

$\omega = \omega_1\omega_2 \Rightarrow \omega_2$ es sufijo de ω

Ejemplo:
$\omega = 01101 \Rightarrow S = \{\varepsilon, 1, 01, 101, 1101, 01101\}$

1.3.5.1. SUFIJO PROPIO

$\omega = \omega_1\omega_2 \wedge \omega \neq \omega_2 \Rightarrow \omega_2$ es sufijo propio de ω

Ejemplo:
$\omega = 01101 \Rightarrow S' = \{\varepsilon, 1, 01, 101, 1101\}$

1.3.6. SUBPALABRA

$\omega = \omega_1\omega_2\omega_3 \Rightarrow \omega_2$ es subpalabra de ω

Ejemplo:
$\omega = 01101 \Rightarrow I = \{\varepsilon, 0, 1, 01, 10, 11, 011, 101, 110, 0110, 1101, 01101\}$

1.3.6.1. SUBPALABRA PROPIA

$\omega = \omega_1\omega_2\omega_3 \wedge \omega \neq \omega_2 \Rightarrow \omega_2$ es subpalabra propia de ω

Ejemplo:
$\omega = 01101 \Rightarrow I' = \{\varepsilon, 0, 1, 01, 10, 11, 011, 101, 110, 0110, 1101\}$

1.3.7. TRANSPUESTA

$\omega = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}\sigma_n \Rightarrow \omega^R = \sigma_n\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\ldots\sigma_3\sigma_2\sigma_1$

Ejemplo:
$\omega = 01101 \Rightarrow \omega^R = 10110$

Propiedades:
1. $(\omega^R)^R = \omega$
2. $(\omega_1\omega_2)^R = \omega_2^R\omega_1^R$

1.4. OPERACIONES CON ALFABETOS

1.4.1. UNIÓN

$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{\sigma \,/\, \sigma \in \Sigma_1 \vee \sigma \in \Sigma_2\}$

1.4.2. POTENCIA

$\Sigma^i = \{\omega \,/\, |\omega| = i\}$

Ejemplo:

$$\Sigma = \{0, 1\} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma^0 = \{\varepsilon\} \\ \Sigma^1 = \{0, 1\} \\ \Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\} \\ \Sigma^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\} \end{cases}$$

1.4.3. CLAUSURA

$\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \ldots$

Ejemplo:
$\Sigma = \{0, 1\} \Rightarrow \Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, \ldots\}$

Observación:
$L \subseteq \Sigma^*$

1.4.4. CLAUSURA POSITIVA

$\Sigma^+ = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \ldots$

Ejemplo:
$\Sigma = \{0, 1\} \Rightarrow \Sigma^+ = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, \ldots\}$

Observación:
$\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \ldots$
$\Sigma^* = \{\varepsilon\} \cup \Sigma^+$

1.5. OPERACIONES CON LENGUAJES

1.5.1. COMPLEMENTACIÓN

$\overline{L} = \Sigma^* - L$

1.5.2. UNIÓN

$L_1 \cup L_2 = \{\omega \mid \omega \in L_1 \vee \omega \in L_2\}$

Ejemplo 1:

$$\begin{matrix} L_1 = \{10, 001, 111\} \\ L_2 = \{\varepsilon, 001\} \end{matrix} \Rightarrow L_1 \cup L_2 = \{\varepsilon, 10, 001, 111\}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{matrix} L_1 = \{\varepsilon, 0, 1, 10, 11\} \\ L_2 = \{\varepsilon, 1, 0110, 11010\} \end{matrix} \Rightarrow L_1 \cup L_2 = \{\varepsilon, 0, 1, 10, 11, 0110, 11010\}$$

1.5.3. INTERSECCIÓN

$L_1 \cap L_2 = \{\omega \mid \omega \in L_1 \wedge \omega \in L_2\}$

Ejemplo:

$$\begin{matrix} L_1 = \{\varepsilon, 0, 1, 10, 11\} \\ L_2 = \{\varepsilon, 1, 0110, 11010\} \end{matrix} \Rightarrow L_1 \cap L_2 = \{\varepsilon, 1\}$$

1.5.4. DIFERENCIA

$L_1 - L_2 = \{\omega \mid \omega \in L_1 \wedge \omega \notin L_2\}$

Ejemplo:

$$\begin{matrix} L_1 = \{\varepsilon, 0, 1, 10, 11\} \\ L_2 = \{\varepsilon, 1, 0110, 11010\} \end{matrix} \Rightarrow L_1 - L_2 = \{0, 10, 11\}$$

1.5.5. CONCATENACIÓN

$L_1L_2 = \{\omega_1\omega_2 \ / \ \omega_1 \in L_1 \wedge \omega_2 \in L_2\}$

Ejemplo 1:

$$\begin{matrix} L_1 = \{1, 10\} \\ L_2 = \{11, 011\} \end{matrix} \Rightarrow L_1L_2 = \{111, 1011, 10011\}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{matrix} L_1 = \{10, 001, 111\} \\ L_2 = \{\varepsilon, 001\} \end{matrix} \Rightarrow L_1L_2 = \{10, 001, 111, 10001, 001001, 111001\}$$

Propiedades:

1. $L\varnothing = \varnothing L = \varnothing$
2. $L\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}L = L$
3. $L_1(L_2L_3) = (L_1L_2)L_3 = L_1L_2L_3$

Ejercicio 1:
$L_1 = \{a, ab\}$
$L_2 = \{b, bb\}$
Ejercicio 2:
$L_1 = \{a, ab\}$
$L_2 = \{b, ab\}$
Ejercicio 3:
$L_1 = \{a, ab, baa\}$
$L_2 = \{ab, ba\}$

1.5.6. POTENCIA

$$L^i = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{si} \quad i = 0 \\ L & \text{si} \quad i = 1 \\ L^{i-1}L & \text{si} \quad i > 1 \end{cases}$$

Ejemplo:

$$L = \{0, 11\} \Rightarrow \begin{cases} L^0 = \{\varepsilon\} \\ L^1 = \{0, 11\} \\ L^2 = \{00, 011, 110, 1111\} \\ L^3 = \{000, 0011, 0110, 1100, 01111, 11011, 11110, 111111\} \end{cases}$$

1.5.7. CLAUSURA

$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \dots$

Ejemplo:
$L = \{10, 11\} \Rightarrow L^* = \{\varepsilon, 10, 11, 1010, 1011, 1110, 1111, \dots\}$

1.5.8. CLAUSURA POSITIVA

$L^+ = L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \dots$

Ejemplo:
$L = \{10, 11\} \Rightarrow L^+ = \{10, 11, 1010, 1011, 1110, 1111, \dots\}$

Observación:
$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \dots$
$L^* = \{\varepsilon\} \cup L^+$

Propiedad:
$L^+ = LL^* = L^*L$

1.5.9. TRANSPUESTA

$L^R = \{\omega^R \,/\, \omega \in L\}$

Ejemplo:
$L = \{10, 001, 111\} \Rightarrow L^R = \{01, 100, 111\}$

Propiedades:
1. $(L^R)^R = L$
2. $(L_1L_2)^R = L_2^R L_1^R$