4. AUTÓMATAS FINITOS (AF)

"El autómata finito es un modelo matemático de un sistema, con entradas y salidas discretas" (Hopcroft, 1997, p. 15).

4.1. AUTOMÁTA FINITO DETERMINISTA (AFD)

(Hopcroft, 2002, pp. 3-4)

Un interruptor es capaz de recordar si está apagado (off) o encendido (on), y permite que el usuario presione un botón consiguiendo diferentes efectos, que dependen de cuál era el estado del interruptor: si el interruptor está apagado, la acción de presionar el botón hace que su estado cambie a encendido y que el dispositivo controlado por el interruptor funcione; si el interruptor está encendido, la acción de presionar el botón hace que su estado cambie a apagado.

El autómata finito determinista para el interruptor se presenta en la Figura 4.1.

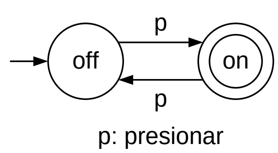


Figura 4.1. AFD para un interruptor.

4.1.1. DEFINICIÓN

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Q : conjunto finito de estados
Σ : alfabeto de entrada
δ : función de transición
$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$
q_0 : estado inicial
$q_0 \in Q$
F : conjunto de estados finales o de aceptación
$F \subseteq Q$

Ejemplo 1:
$A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$

δ	0	1
q_0	q_2	q_0
q_1	q_1	q_1
q_2	q_2	q_1

Ejemplo 2:
$A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_0\})$

δ	0	1
q_0	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

4.1.2. TABLA DE TRANSICIONES

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \Rightarrow \begin{cases} \rightarrow q_0 \\ \\ * q \qquad \forall q \in F \end{cases}$$

Ejemplo 1:

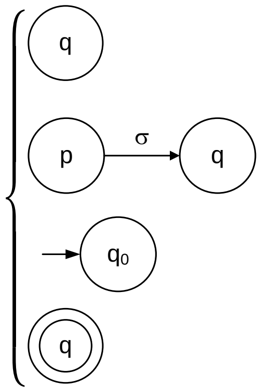
δ	0	1
$\rightarrow q_0$	q_2	q_0
$*q_1$	q_1	q_1
q_2	q_2	q_1

Ejemplo 2:

δ	0	1
$\rightarrow *q_0$	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

4.1.3. DIAGRAMA DE TRANSICIONES

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \Rightarrow$



$\forall q \in Q$

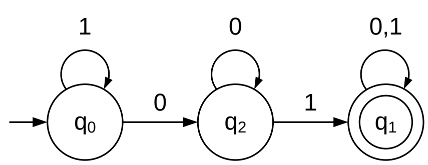
$\forall \delta(p, \sigma) = q$

$\forall q \in F$

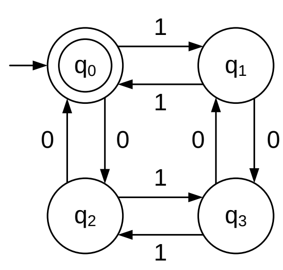
Si hay más de una transición entre dos estados, se dibuja un único arco entre estos dos estados, cuya etiqueta incluye los símbolos implicados separados por comas (Cases, 2002, pp. 75-76).

“De cada estado parte una y sólo una transición para cada símbolo del alfabeto” (Kelley, 1995, p. 61).

Ejemplo 1:



Ejemplo 2:



4.1.4. LENGUAJE ACEPTADO

$L(A) = \{\omega \in \Sigma^* \ / \ \delta(q_0, \omega) \in F\}$

Observación:
$q_0 \in F \Rightarrow \varepsilon \in L(A)$

Ejemplo 1:
$L(A) = \{\omega \in \{0, 1\}^*$ / ω contiene la subpalabra 01}

$\omega_1 = 01$
$\omega_2 = 11010$
$\omega_3 = 100011$
$\omega_4 = \varepsilon$
$\omega_5 = 0$
$\omega_6 = 111000$

Ejemplo 2:
$L(A) = \{\omega \in \{0, 1\}^*$ / ω tiene un número par de ceros y un número par de unos}

$\omega = 110101$

Ejemplo:

$L(A) = \{\omega \in \{a, b\}^*$ / ω contiene la subpalabra abaa}

Ejercicios:

1. $L(A) = \{a^i b \ / \ i \geq 0\}$

2. $L(A) = \{(ab)^i \ / \ i \geq 0\}$

3. $L(A) = \{(ab)^i \ / \ i \geq 1\}$

4.1.5. MINIMIZACIÓN

4.1.5.1. Método 1

Los pares de estados equivalentes se pueden encontrar por medio de una tabla en la que cada fila y cada columna corresponden a un estado (Kelley, 1995, p. 96). Debido a la simetría con respecto a la diagonal, se utiliza menos de la mitad de la tabla.

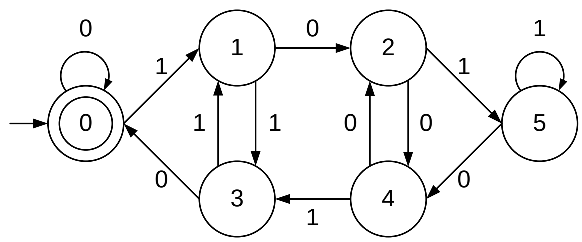
$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \Rightarrow A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0, F')$ donde $F' = \{q' \in Q' / q' \in F\}$

Algoritmo (Hopcroft, 1997, p. 74):

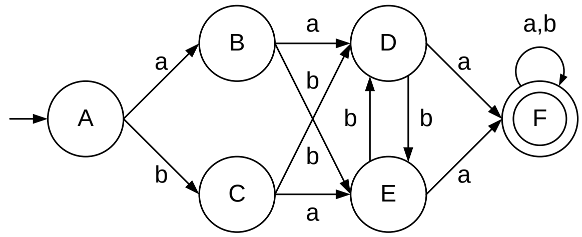
$\forall\ p \in F \wedge q \in (Q - F)$
    Marcar (p, q)
$\forall\ (p, q) \in F \times F \vee (p, q) \in (Q - F) \times (Q - F)$
    Si para algún $\sigma \in \Sigma$, $(\delta(p, \sigma), \delta(q, \sigma))$ está marcado entonces
    {
        Marcar (p, q)
        Marcar recursivamente todos los pares no marcados de la lista (p, q) y de las listas de otros pares marcados en este paso
    }
    Sino
        $\forall\ \sigma \in \Sigma$
            Poner (p, q) en la lista $(\delta(p, \sigma), \delta(q, \sigma))$ a menos que $\delta(p, \sigma) = \delta(q, \sigma)$
    Fin Si

Los cuadros que quedan en blanco al final del algoritmo indican los pares de estados que son equivalentes (Hopcroft, 2002, p. 168).

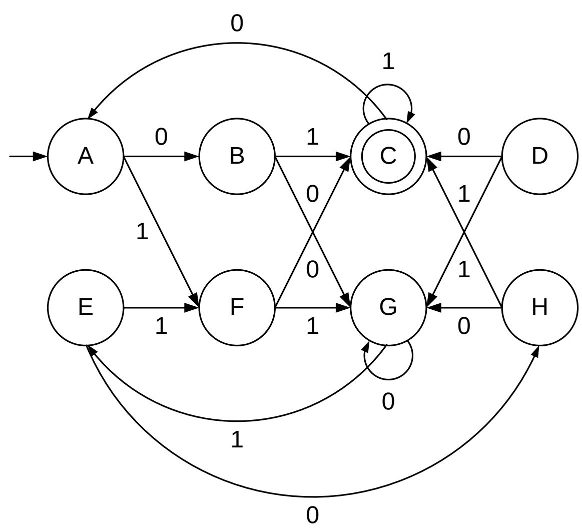
Ejemplo:



Ejercicio:



Ejercicio propuesto:



4.1.5.2. Método 2

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \Rightarrow A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0, F')$ donde $F' = \{q' \in Q' / q' \in F\}$

Algoritmo (Aho, 1990, p. 145):
$i = 0$
$P_0 = (F)\ (Q - F)$
Repetir
    $i = i + 1$
    $\forall$ grupo G de P_{i-1}
    {
        Particionar G en subgrupos tales que dos estados p y q de G están en el mismo subgrupo $\Leftrightarrow \forall\ \sigma \in \Sigma$, los estados p y q tienen transiciones con σ hacia estados del mismo grupo de P_{i-1}
        Sustituir G en P_i por el conjunto de todos los subgrupos formados
    }
Hasta $P_i = P_{i-1}$

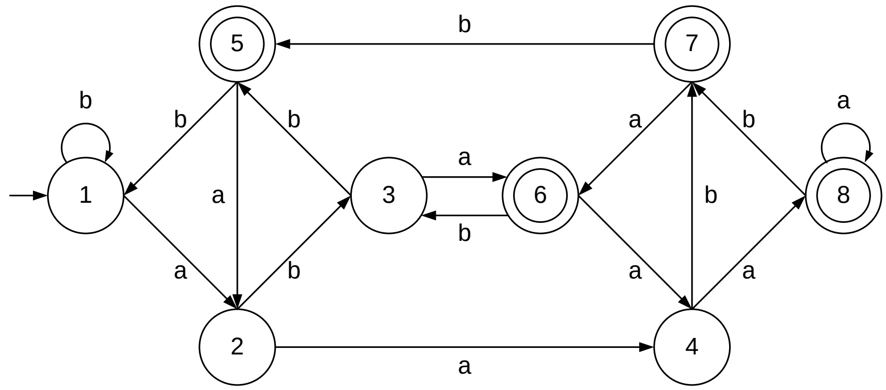
Ejemplo:

δ	a	b
→A	B	C
B	B	D
C	B	C
D	B	E
*E	B	C

Ejercicio 1:

δ	a	b
→A	B	C
B	D	E
C	A	B
*D	C	F
*E	G	H
F	H	B
*G	I	I
H	J	F
I	H	J
J	G	E

Ejercicio 2:



Ejercicio 3:

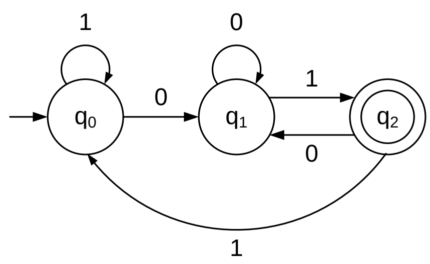
δ	a	b
→1	2	1
2	3	4
*3	3	3
4	5	6
5	3	7
6	8	9
7	3	10
8	3	4
9	3	4
10	11	12
11	3	7
12	3	7

4.1.6. COMPLEMENTACIÓN

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \Rightarrow A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F')$ donde $F' = Q - F$

$L(A') = \overline{L}(A)$

Ejemplo:



$L(A) = \{\omega \in \{0, 1\}^* \,/\, \omega$ termina en $01\}$

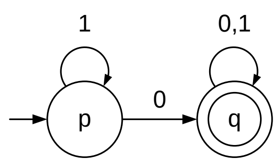
4.1.7. INTERSECCIÓN

$$\begin{array}{l} A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1) \\ A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2) \end{array} \Rightarrow \quad A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

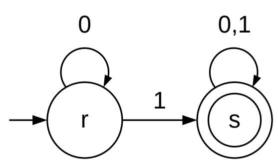
$$\text{donde} \begin{cases} Q = Q_1 \times Q_2 \\ \delta\big((p,q),\sigma\big) = (\delta_1(p,\sigma), \delta_2(q,\sigma)) \quad \forall p \in Q_1, q \in Q_2, \sigma \in \Sigma \\ q_0 = (q_1, q_2) \\ F = F_1 \times F_2 \end{cases}$$

$L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$

Ejemplo:

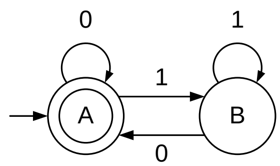


$L(A_1) = \{\omega \in \{0, 1\}^* \,/\, \omega \text{ contiene un } 0\}$

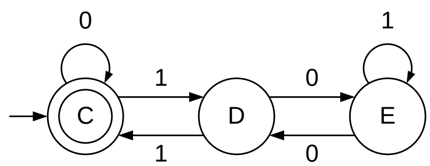


$L(A_2) = \{\omega \in \{0, 1\}^* \,/\, \omega \text{ contiene un } 1\}$

Ejercicio:



$L(A_1) = \{\omega \in \{0, 1\}^* \ / \ \omega$ es un número binario múltiplo de dos$\}$



$L(A_2) = \{\omega \in \{0, 1\}^* \ / \ \omega$ es un número binario múltiplo de tres$\}$

4.2. AUTOMÁTA FINITO NO DETERMINISTA (AFN)

(Hopcroft, 1997, pp. 16-17)

En la orilla izquierda de un río se encuentra un hombre, junto con un lobo, una cabra y un repollo. Hay un bote con la capacidad suficiente para llevar al hombre y a uno de los otros tres. El hombre con el repollo y demás compañeros deben cruzar el río, y el hombre puede llevar a uno solo a la vez. Sin embargo, si el hombre deja solos al lobo y a la cabra en cualquier lado del río, con toda seguridad que el lobo se comerá a la cabra. Del mismo modo, si la cabra y el repollo se quedan juntos, la cabra se comerá al repollo.

¿Es posible que se pueda cruzar el río sin que nada sea comido por nadie?

La Figura 4.2 muestra el diagrama de transiciones. Los estados son los ocupantes de cada orilla del río separados por un guion, en donde los símbolos que están a la izquierda del guion representan el subconjunto que se encuentra en la orilla izquierda; los símbolos que están a la derecha del guion representan el subconjunto que se encuentra en la orilla derecha. Donde:

H : hombre
L : lobo
C : cabra
R : repollo

Las transiciones son las acciones del hombre:

h : cruzar el río solo
l : cruzar el río con el lobo
c : cruzar el río con la cabra
r : cruzar el río con el repollo

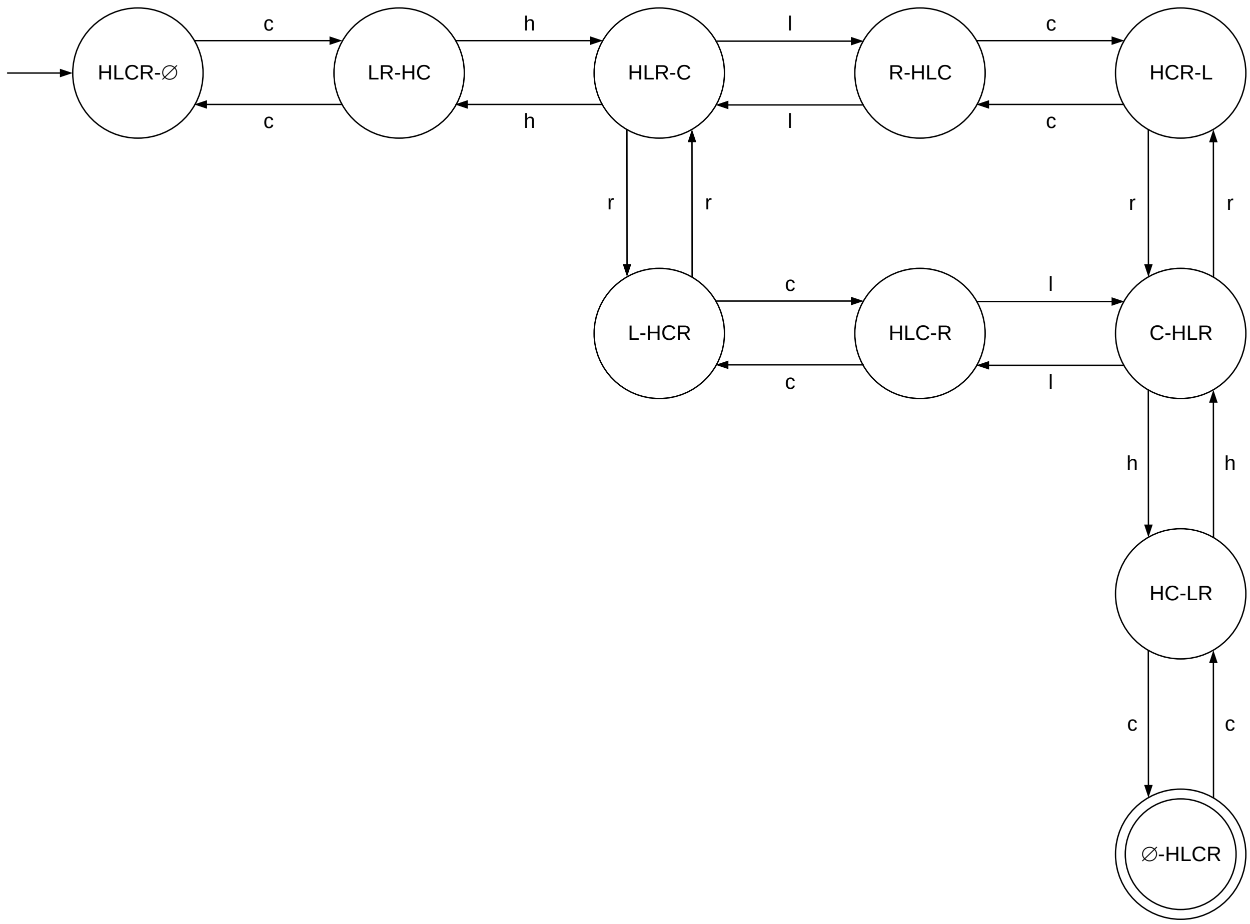


Figura 4.2. AFN para el problema del hombre, el lobo, la cabra y el repollo.

4.2.1. DEFINICIÓN

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Q : conjunto finito de estados
Σ : alfabeto de entrada
δ : función de transición
$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$
q_0 : estado inicial
$q_0 \in Q$
F : conjunto de estados finales o de aceptación
$F \subseteq Q$

Ejemplo 1:
$A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$

δ	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$
q_2	$\varnothing$	$\varnothing$

Ejemplo 2:
$A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_4\})$

δ	0	1
q_0	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	$\{q_4\}$	$\varnothing$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

Observación:

$$\delta(P, \omega) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, \omega) \qquad P \subseteq Q$$

Ejemplo:
$\delta(\{q_0, q_3\}, 0) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_3, 0) = \{q_0, q_3\} \cup \{q_4\} = \{q_0, q_3, q_4\}$

4.2.2. TABLA DE TRANSICIONES

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \Rightarrow \begin{cases} \rightarrow q_0 \\ \\ * q \qquad \forall q \in F \end{cases}$$

Ejemplo 1:

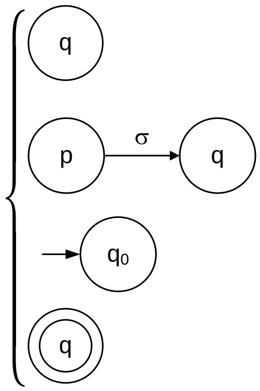
δ	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\varnothing$	$\varnothing$

Ejemplo 2:

δ	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	$\{q_4\}$	$\varnothing$
$*q_4$	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

4.2.3. DIAGRAMA DE TRANSICIONES

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \Rightarrow$



$\forall q \in Q$

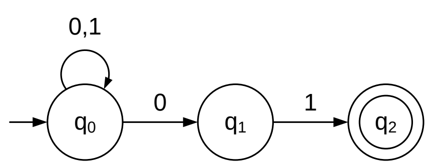
$\forall \delta(p, \sigma) = q$

$\forall q \in F$

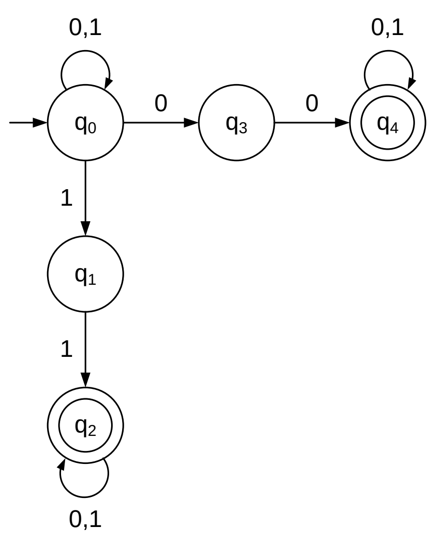
Si hay más de una transición entre dos estados, se dibuja un único arco entre estos dos estados, cuya etiqueta incluye los símbolos implicados separados por comas (Cases, 2002, pp. 75-76).

“Se permite que desde un estado se realicen cero, una o más transiciones mediante el mismo símbolo de entrada” (Kelley, 1995, p. 61).

Ejemplo 1:



Ejemplo 2:



4.2.4. LENGUAJE ACEPTADO

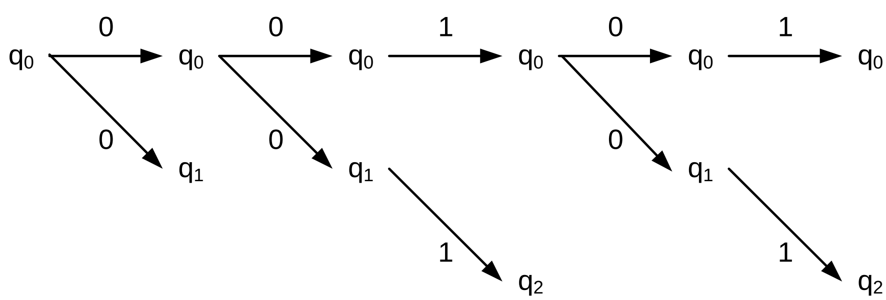
$L(A) = \{\omega \in \Sigma^* \ / \ \delta(q_0, \omega) \cap F \neq \emptyset\}$

Observación:
$q_0 \in F \Rightarrow \varepsilon \in L(A)$

Ejemplo 1:

$L(A) = \{\omega \in \{0, 1\}^* \ / \ \omega$ termina en 01$\}$

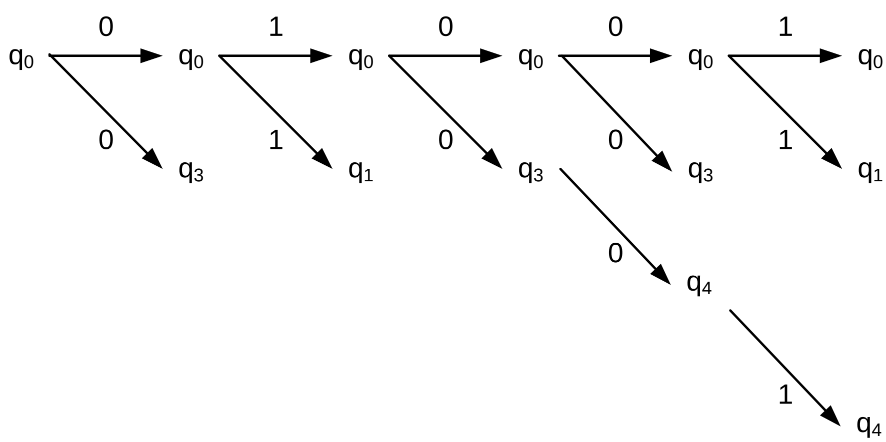
$\omega = 00101$



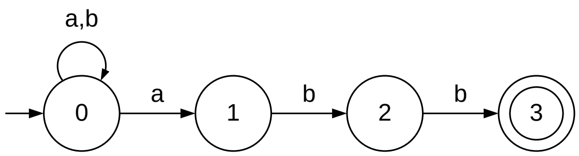
Ejemplo 2:

$L(A) = \{\omega \in \{0, 1\}^* \ / \ \omega$ contiene dos ceros consecutivos o dos unos consecutivos$\}$

$\omega = 01001$



Ejercicios:



$L(A) = \{\omega \in \{a, b\}^* / \omega \text{ termina en abb}\}$

ω_1 = abb
ω_2 = aabb
ω_3 = babb
ω_4 = aaabb

4.3. AUTOMÁTA FINITO NO DETERMINISTA CON TRANSICIONES ε (AFN-ε)

4.3.1. DEFINICIÓN

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Q : conjunto finito de estados
Σ : alfabeto de entrada
δ : función de transición
$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$
q_0 : estado inicial
$q_0 \in Q$
F : conjunto de estados finales o de aceptación
$F \subseteq Q$

Ejemplo:
A = ({A, B, C, D, E}, {a, b}, δ, A, {B, C})

δ	a	b	ε
A	∅	{B}	∅
B	{C}	{D, E}	∅
C	{B, C}	{D}	{D, E}
D	∅	{A, B, D}	{C}
E	{E}	{E}	{A}

4.3.2. TABLA DE TRANSICIONES

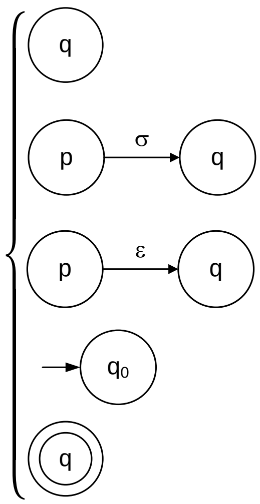
$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \Rightarrow \begin{cases} \to q_0 & \\ * q & \forall q \in F \end{cases}$$

Ejemplo:

δ	a	b	ε
→A	∅	{B}	∅
*B	{C}	{D, E}	∅
*C	{B, C}	{D}	{D, E}
D	∅	{A, B, D}	{C}
E	{E}	{E}	{A}

4.3.3. DIAGRAMA DE TRANSICIONES

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \Rightarrow$



$\forall q \in Q$

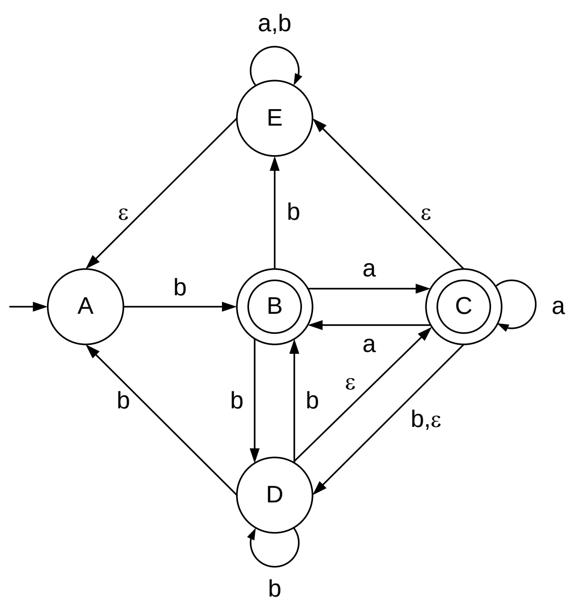
$\forall \delta(p, \sigma) = q$

$\forall \delta(p, \varepsilon) = q$

$\forall q \in F$

Si hay más de una transición entre dos estados, se dibuja un único arco entre estos dos estados, cuya etiqueta incluye los símbolos implicados separados por comas (Cases, 2002, pp. 75-76).

Ejemplo:



4.3.4. CLAUSURA

C-ε(q) $\quad q \in Q$

Conjunto de estados a los cuales es posible acceder, a partir de q, mediante alguna secuencia de cero o más transiciones ε (Cases, 2002, p. 90).

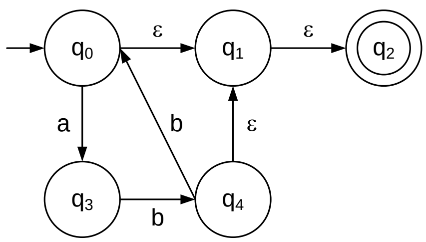
Observaciones:
$\text{C-}\varepsilon(\varnothing) = \varnothing$
$\text{C-}\varepsilon(P) = \bigcup_{q \in P} \text{C-}\varepsilon(q) \qquad P \subseteq Q$

Algoritmo:
C-ε(q) = {q}
Mientras ∃ p ∈ C-ε(q) no marcado hacer
    Marcar p
    ∀ p' ∈ δ(p, ε)
    {
        Si p' ∉ C-ε(q) entonces
            C-ε(q) = C-ε(q) ∪ {p'}
        Fin Si
    }
Fin Mientras

Ejemplo:

q	C-ε(q)
A	{A}
B	{B}
C	{A, C, D, E}
D	{A, C, D, E}
E	{A, E}

Ejercicio:



4.3.5. LENGUAJE ACEPTADO

$\hat{\delta}(q, \sigma) = \text{C-}\varepsilon(\delta(\text{C-}\varepsilon(q), \sigma))$

$L(A) = \{\omega \in \Sigma^* \ / \ \hat{\delta}(q, \omega) \cap F \neq \emptyset\}$

Ejemplo:
ω = babbbb = baεbbεbbε

Secuencia de estados

(A, B, C, D, B, E, A, B, D, C)

(A, B, C, E, E, E, A, B, D, C)

4.4. EQUIVALENCIAS

$L(A_1) = L(A_2) \Rightarrow A_1 \equiv A_2$

4.4.1. AFD ⇒ AFN

Todo AFD puede ser considerado un caso particular de AFN.

$$\begin{array}{lll} \textbf{AFD} & & \textbf{AFN} \\ A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) & \Rightarrow & A' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F) \text{ donde } \delta'(q, \sigma) = \{\delta(q, \sigma)\} \quad \forall q \in Q, \sigma \in \Sigma \end{array}$$

4.4.2. AFN ⇒ AFN-ε

Todo AFN puede ser considerado un caso particular de AFN-ε (Cases, 2002, p. 90).

$$\begin{array}{lll} \textbf{AFN} & & \textbf{AFN} - \boldsymbol{\varepsilon} \\ A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) & \Rightarrow & A' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F) \text{ donde } \begin{cases} \delta'(q, \sigma) = \delta(q, \sigma) & \forall q \in Q, \sigma \in \Sigma \\ \delta'(q, \varepsilon) = \emptyset & \forall q \in Q \end{cases} \end{array}$$

4.4.3. AFD ⇒ AFN-ε

$$\begin{array}{lll} \textbf{AFD} & & \textbf{AFN} - \boldsymbol{\varepsilon} \\ A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) & \Rightarrow & A' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F) \text{ donde } \begin{cases} \delta'(q, \sigma) = \{\delta(q, \sigma)\} & \forall q \in Q, \sigma \in \Sigma \\ \delta'(q, \varepsilon) = \emptyset & \forall q \in Q \end{cases} \end{array}$$

4.4.4. AFN $\Rightarrow$ AFD

4.4.4.1. Método 1

AFN **AFD**

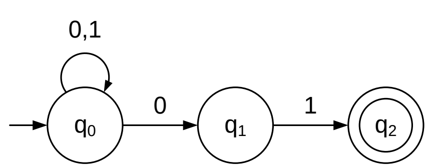
$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \quad \Rightarrow \quad A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$$

$$\text{donde} \begin{cases} Q' = 2^Q \\ \delta'(q', \sigma) = \bigcup_{q \in q'} \delta(q, \sigma) \qquad \forall q' \in Q', \sigma \in \Sigma \\ q_0' = \{q_0\} \\ F' = \{q' \in Q' \;/\; q' \cap F \neq \emptyset\} \end{cases}$$

Ejemplo:
$A = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$

δ	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_0, q_1\}$

Ejercicio:



4.4.4.2. Método 2

AFN $\qquad$ **AFD**

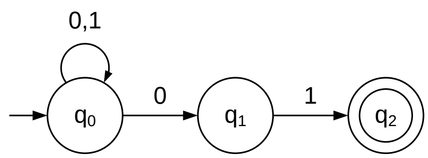
$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \quad \Rightarrow \quad A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0{}', F')$$

$$\text{donde} \begin{cases} \delta'(q', \sigma) = \displaystyle\bigcup_{q \in q'} \delta(q, \sigma) & \forall q' \in Q', \sigma \in \Sigma \\ q_0{}' = \{q_0\} \\ F' = \{q' \in Q' \;/\; q' \cap F \neq \emptyset\} \end{cases}$$

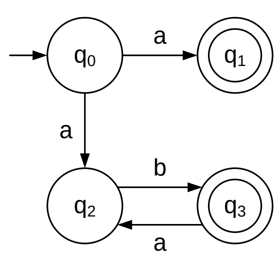
Algoritmo:

$Q' = \{q_0'\}$
Mientras $\exists\, q' \in Q'$ no marcado hacer
    Marcar q'
    $\forall\, \sigma \in \Sigma$
    {
        $p' = \delta'(q', \sigma)$
        Si $p' \notin Q'$ entonces
            $Q' = Q' \cup \{p'\}$
        Fin Si
    }
Fin Mientras

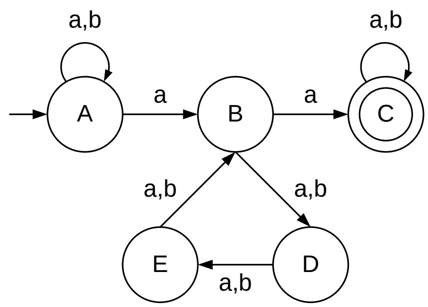
Ejemplo:



Ejercicio 1:



Ejercicio 2:

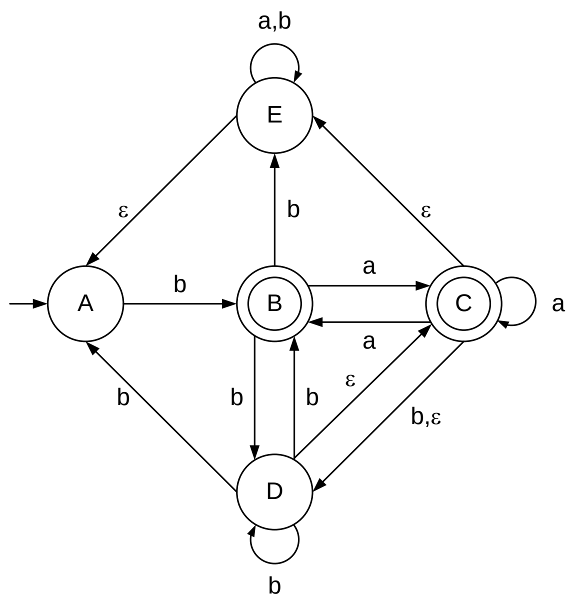


4.4.5. AFN-ε ⇒ AFN

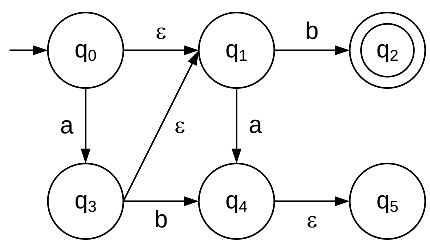
$$\begin{array}{lcl} \mathbf{AFN-\varepsilon} & & \mathbf{AFN} \\ A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) & \Rightarrow & A' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F') \end{array}$$

$$\text{donde} \begin{cases} \delta'(q, \sigma) = C\text{-}\varepsilon(\delta(C\text{-}\varepsilon(q), \sigma)) & \forall q \in Q, \sigma \in \Sigma \\ F' = \{q \in Q \ / \ C\text{-}\varepsilon(q) \cap F \neq \emptyset\} \end{cases}$$

Ejemplo:



Ejercicio propuesto:



4.4.6. AFN-ε ⇒ AFD

Construcción de Subconjuntos

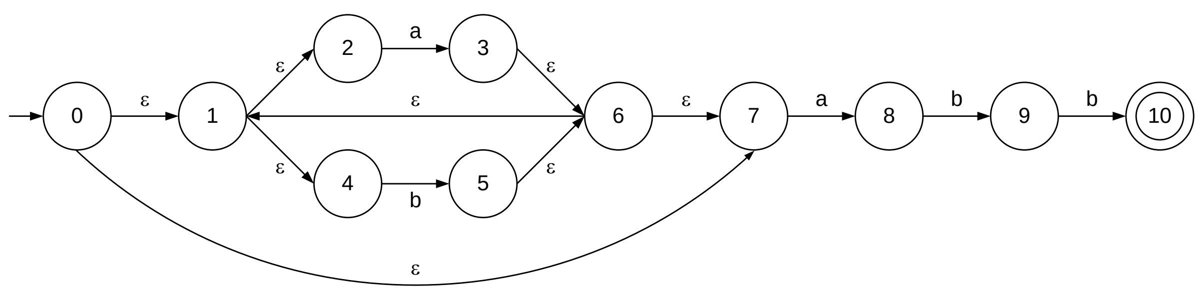
AFN − ε **AFD**

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \quad \Rightarrow \quad A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F') \text{ donde } \begin{cases} q_0' = C\text{-}\varepsilon(q_0) \\ F' = \{q' \in Q' \,/\, q' \cap F \neq \emptyset\} \end{cases}$$

Algoritmo (Aho, 1990, p. 121):

```
Q' = {q0'}
Mientras ∃ q' ∈ Q' no marcado hacer
    Marcar q'
    ∀ σ ∈ Σ
    {
        p' = C-ε(δ(q', σ))
        Si p' ∉ Q' entonces
            Q' = Q' ∪ {p'}
        Fin Si
        δ'(q', σ) = p'
    }
Fin Mientras
```

Ejemplo:



4.5. OPERACIONES

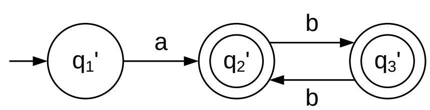
4.5.1. UNIÓN

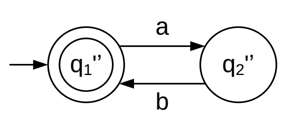
$$\begin{array}{l} A_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, F_1) \\ A_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2, F_2) \end{array} \quad Q_1 \cap Q_2 = \emptyset \Rightarrow A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \quad q_0 \notin (Q_1 \cup Q_2)$$

$$\text{donde} \begin{cases} Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\} \\ \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \\ \delta: \begin{cases} \delta(q_0, \varepsilon) = \{q_1, q_2\} \\ \delta(q, a) = \delta_1(q, a) & \forall q \in Q_1, a \in (\Sigma_1 \cup \{\varepsilon\}) \\ \delta(q, a) = \delta_2(q, a) & \forall q \in Q_2, a \in (\Sigma_2 \cup \{\varepsilon\}) \end{cases} \\ F = F_1 \cup F_2 \end{cases}$$

$L(A) = L(A_1) \cup L(A_2)$

Ejemplo:





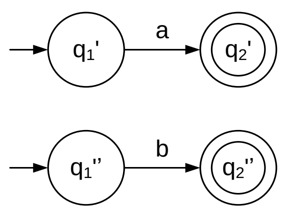
4.5.2. CONCATENACIÓN

$$A_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, F_1)$$
$$A_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2, F_2) \qquad Q_1 \cap Q_2 = \emptyset \Rightarrow A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

$$\text{donde} \begin{cases} Q = Q_1 \cup Q_2 \\ \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \\ \delta: \begin{cases} \delta(q,a) = \delta_1(q,a) & \forall q \in (Q_1 - F_1), a \in (\Sigma_1 \cup \{\varepsilon\}) \\ \delta(q,\sigma) = \delta_1(q,\sigma) & \forall q \in F_1, \sigma \in \Sigma_1 \\ \delta(q,\varepsilon) = \delta_1(q,\varepsilon) \cup \{q_2\} & \forall q \in F_1 \\ \delta(q,a) = \delta_2(q,a) & \forall q \in Q_2, a \in (\Sigma_2 \cup \{\varepsilon\}) \end{cases} \\ q_0 = q_1 \\ F = F_2 \end{cases}$$

$L(A) = L(A_1)L(A_2)$

Ejemplo:



4.5.3. CLAUSURA

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \quad \Rightarrow \quad A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$$

$$\text{donde} \begin{cases} Q' = Q \cup \{q_0'\} \\ \delta': \begin{cases} \delta'(q_0', \varepsilon) = \{q_0\} & \\ \delta'(q, a) = \delta(q, a) & \forall q \in (Q - F), a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \\ \delta'(q, \sigma) = \delta(q, \sigma) & \forall q \in F, \sigma \in \Sigma \\ \delta'(q, \varepsilon) = \delta(q, \varepsilon) \cup \{q_0'\} & \forall q \in F \end{cases} \\ F' = \{q_0'\} \end{cases}$$

L(A') = L(A)*

4.5.4. CLAUSURA POSITIVA

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \quad \Rightarrow \quad A' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$$

$$\text{donde} \begin{cases} \delta'(q, a) = \delta(q, a) & \forall q \in (Q - F), a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \\ \delta'(q, \sigma) = \delta(q, \sigma) & \forall q \in F, \sigma \in \Sigma \\ \delta'(q, \varepsilon) = \delta(q, \varepsilon) \cup \{q_0\} & \forall q \in F \end{cases}$$

L(A') = L(A)$^+$

4.5.5. TRANSPOSICIÓN

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \quad \Rightarrow \quad A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$$

$$\text{donde} \begin{cases} Q' = Q \cup \{q_0'\} \\ \delta': \begin{cases} \delta'(q_0', \varepsilon) = \{q \mid q \in F\} & \\ \delta'(q, a) = \{p \mid q \in \delta(p, a)\} & \forall q \in Q, a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \end{cases} \\ F' = \{q_0\} \end{cases}$$

L(A') = L(A)^R