Matrizes inversas

Professor Vitor Luiz de Almeida

Matrizes elementares

Objetivo Geral: Definir matrizes elementares.

Objetivos específicos:

1. Relembrar as operações elementares sobre as linhas de uma matriz;
2. Verificar que as operações elementares são invertíveis;
3. Definir matrizes linha-equivalentes;

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow 3L_2}{\sim} \begin{bmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{bmatrix}$$

As três operações elementares que definimos sobre as linhas de uma matriz são:

Operações elementares

$(\mathcal{O}_1)$ $L_i \leftrightarrow L_j$;

$(\mathcal{O}_2)$ $L_i \leftarrow c \cdot L_i, \; c \neq 0$;

$(\mathcal{O}_3)$ $L_i \leftarrow L_i + c \cdot L_j, \; c \neq 0$.

Exemplo 01: Efetue a sequência ordenada de operações elementares $L_1 \leftarrow -2L_1$ e $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ sobre as linha de

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Resolução:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_1 \leftarrow -2L_1} \begin{bmatrix} 2 & -6 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{bmatrix} 2 & -6 & -2 \\ 4 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Qualquer uma das três operações elementares sobre as linhas de uma matriz são invertíveis:

Operações elementares

(1) $L_i \leftrightarrow L_j$ tem como operação inversa $L_j \leftrightarrow L_i$;

(2) $L_i \leftarrow c \cdot L_i$, $c \neq 0$, tem como operação inversa $L_i \leftarrow \dfrac{1}{c} L_i$;

(3) $L_i \leftarrow L_i + c \cdot L_j$, $c \neq 0$, tem como operação inversa $L_i \leftarrow L_i - c \cdot L_j$.

Exemplo 02: Sabe-se que a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

foi obtida por meio da sequência ordenada de operações elementares $L_2 \leftarrow 3L_2$ e $L_1 \leftarrow L_1 + 2 \cdot L_2$ sobre as linhas de A. Calcule a_{12}.

Resolução:

Sabemos que

$$A \overset{L_2 \leftarrow 3L_2}{\sim} M \overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2 \cdot L_2}{\sim} B$$

Resolução:

Daí, segue que

$$B \underset{\sim}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2 \cdot L_2}{}} M \underset{\sim}{\overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2}{}} A$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2 \cdot L_2}{}} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2}{}} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Matrizes linha-equivalentes

Dizemos que a matriz B é linha-equivalente à matriz A se ela puder ser obtida de A por meio de um número finito de operações elementares.

Exemplo 03: Obtenha a matriz linha-equivalente à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

por meio da sequência ordenada de operações elementares $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$, $L_2 \leftrightarrow L_1$ e $L_1 \leftarrow 2L_1$.

Resolução:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_2 \leftrightarrow L_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_1 \leftarrow 2L_1} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Matriz elementar

Dizemos que E é uma matriz elementar se ela é obtida a partir de $I_{n\times n}$ por meio de uma **única** operação elementar $\mathcal{O}_m$.

Exemplo 04: As matrizes

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são elementares.

Resolução:

Basta observarmos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_3 \leftarrow L_3 + 3 \cdot L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema: Se E é a matriz elementar associada a operação elementar $\mathcal{O}_m$, então $E \cdot A$ é a matriz linha-equivalente à A que é obtida a partir desta por meio da operação elementar $\mathcal{O}_m$.

Exemplo 05: Ilustre o resultado anterior para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e para a operação elementar $\mathcal{O}_3 : L_1 \leftarrow L_1 - L_2$.

Resolução:

Por um lado, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Por outro lado,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

Resolução:

Portanto,

$$E \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorema: Toda matriz elementar é invertível e sua matriz inversa é também uma matriz elementar.

Demonstração:

Observemos o esquema:

$$E_0 \quad \xleftarrow{\text{inversa de } \mathcal{O}} \quad I \quad \xrightarrow{\mathcal{O}} \quad E$$

Portanto,

$$E \cdot E_0 = I$$

$$E_0 \cdot E = I$$

Exemplo 06: Determine a inversa da matriz elementar $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Notemos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2 \cdot L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = E$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = E^{-1}$$

Agora é com você!

Leia a teoria no livro-texto indicado e faça todas as atividades propostas em nosso planejamento de aulas.

PUC Minas
Virtual