Matrizes inversas

Professor Vitor Luiz de Almeida

Um processo prático para inverter matrizes

PUC Minas Virtual

Objetivo Geral: Desenvolver um algoritmo prático para inverter matrizes.

Objetivos específicos:

1. Perceber que a forma escalonada reduzida por linhas de uma matriz invertível é a matriz identidade;
2. Verificar que toda matriz invertível pode ser expressa como um produto de matrizes elementares;
3. Aplicar a invertibilidade de matrizes na resolução de problemas;

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1}$$

Teorema: As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) A é invertível;

(2) O sistema linear homogêneo $AX = 0$ admite somente a solução trivial;

(3) A forma escalonada reduzida por linhas de A é $I_{n \times n}$;

(4) A pode ser escrita como produto de matrizes elementares.

Demonstração:

$(1) \Rightarrow (2)$

$$A \cdot X = 0 \Leftrightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot 0$$

$$\Leftrightarrow \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = 0 \Leftrightarrow I \cdot X = 0$$

$(2) \Rightarrow (3)$
$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & & & = 0 \\ & x_2 & & = 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & x_n & = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Demonstração:

$(3) \Rightarrow (4)$ $E_k \cdot \ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I \Rightarrow A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1}$

$(4) \Rightarrow (1)$ A é um produto de matrizes invertíveis.

Algoritmo da inversão

Para obtermos a matriz inversa de A, aplicamos, sobre $I_{n\times n}$, a mesma sequência ordenada de operações elementares que transforma a matriz A na matriz $I_{n\times n}$.

Exemplo 01: Determine, caso exista, a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolução:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_2 \leftarrow -L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Exemplo 02: Determine, caso exista, a inversa da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2\cdot L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}\cdot L_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\cdot L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \overset{L_3 \leftarrow \frac{3}{7} L_3}{\sim}$$

Resolução:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \vdots & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_1 \leftarrow L_1 - 2 \cdot L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \vdots & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \vdots & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{4}{3} \cdot L_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \vdots & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{3} L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Exemplo 03: Determine, caso exista, a inversa da matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolução:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2 \cdot L_1 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{L_2 \leftrightarrow L_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{\begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2 \cdot L_2 \end{array}}$$

Resolução:

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -1 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Exemplo 04: Determine todos os valores reais de c tais que

$$D = \begin{bmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

seja uma matriz invertível.

Resolução:

$$\begin{bmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & c & 1 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_2 \leftarrow L_2 - c \cdot L_1} \begin{bmatrix} 1 & c & 1 \\ 0 & 1-c^2 & -c \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_3 \leftrightarrow L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 1-c^2 & -c \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_3 \leftarrow L_3 - (1-c^2)L_2} \begin{bmatrix} 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2c+c^3 \end{bmatrix}$$

Resolução:

Portanto,

$$-2c + c^3 \neq 0 \ \Rightarrow c \neq 0, \pm\sqrt{2}$$

Exemplo 05: Escreva a matriz

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

e sua matriz inversa como um produto de matrizes elementares.

Resolução:

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 \leftarrow L_2+5 \cdot L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} \cdot L_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Resolução:

Portanto,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 06: Sabe-se que a sequência ordenada de operações elementares transforma a matriz A, de tamanho 2×2, na matriz identidade $I_{2\times 2}$:

(i) $L_2 \leftrightarrow L_1$

(ii) $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

(iii) $L_2 \leftarrow -L_2$

(iv) $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

Determine a matriz inversa de A.

Resolução:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_2 \leftarrow -L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora é com você!

Leia a teoria no livro-texto indicado e faça todas as atividades propostas em nosso planejamento de aulas.

PUC Minas

Virtual