O estudo do plano

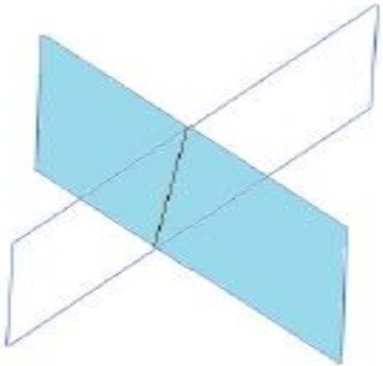
Professor Vitor Luiz de Almeida

Formas da equação

Objetivo Geral: Estabelecer as formas da equação do plano.

Objetivos específicos:

1. Determinar equações para o plano nas formas vetorial, paramétrica, reduzida e geral;
2. Fazer o esboço de planos;



Recordando: Dizemos que os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ são paralelos se $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ideia:

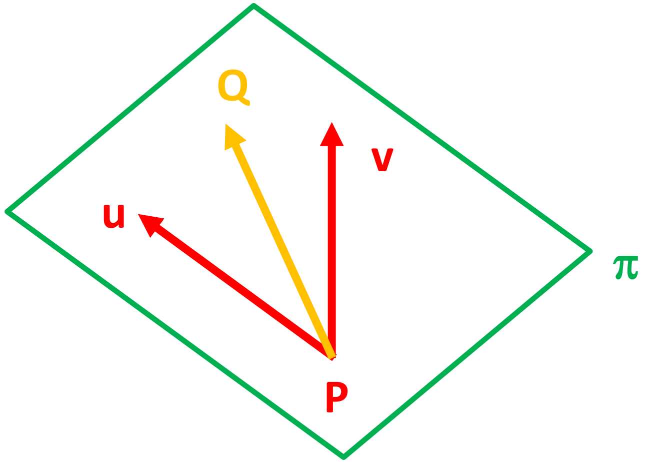
Teorema: Sejam **u** e **v** dois vetores não paralelos. Então, uma equação da forma

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v},\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

representa o plano que é gerado pelos vetores **u** e **v** e passa pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$.

Demonstração:

$$Q(x, y, z) \in \pi \iff \mathbf{PQ} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}$$



Portanto,

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}$$

Exemplo 01: Determine equações nas formas vetorial e paramétrica para o plano que passa pelo ponto $P(1,-2,2)$ e é gerado pelos vetores $\mathbf{u} = (1,0,-2)$ e $\mathbf{v} = (-1,3,2)$.

Resolução:

$$Q(x,y,z) \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{PQ} = (x,y,z) - (1,-2,2) = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$$

Logo,

$$(x,y,z) = (1,2,2) + \lambda(1,0,-2) + \mu(-1,3,2)$$

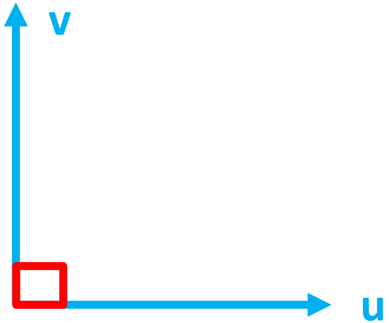
Resolução:

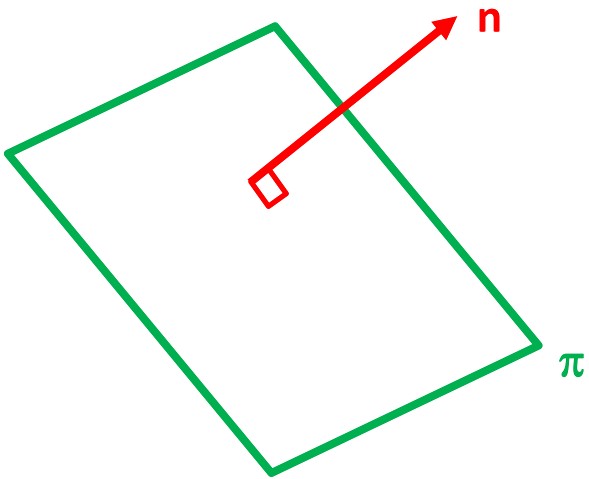
Portanto,

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2 + 3\mu \\ z = 2 - 2\lambda + 2\mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Recordando: Dizemos que os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ são ortogonais se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Além disso, dizemos que um vetor $\mathbf{n}$ é normal a um plano π se ele for ortogonal a todos os vetores cujos representantes pertencem a esse plano.

Ideia:



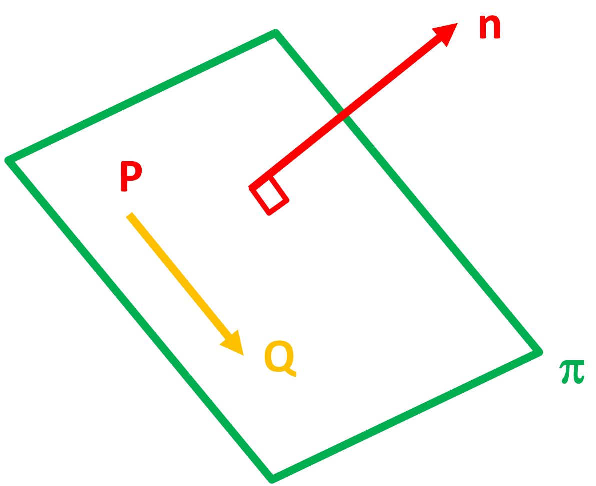


Teorema: Se a, b, c e d forem constantes reais tais que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, então uma equação da forma

$$ax + by + cy + d = 0$$

representa um plano em $\mathbb{R}^3$ cujo vetor normal é $\mathbf{n} = (a, b, c) \neq \mathbf{0}$.

Demonstração:



$$Q(x, y, z) \in \pi \iff \mathbf{PQ} \perp \mathbf{n}$$

Portanto,

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$$

Ou seja,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Demonstração:

Desenvolvendo essa última expressão, obtemos:

$$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{d} = 0$$

Exemplo 02: Determine uma equação geral para o plano que passa pelo ponto $P(-2, 1, 3)$ e tem vetor normal $\mathbf{n} = (2, -3, 4)$.

Resolução:

$$Q(x, y, z) \in \pi \;\Leftrightarrow\; \mathbf{PQ} \perp \mathbf{n}$$

Portanto,

$$(x + 2, y - 1, z - 3) \cdot (2, -3, 4) = 0$$

Ou seja,

$$2(x + 2) - 3(y - 1) + 4(z - 3) = 0$$

Resolução:

Desenvolvendo essa última expressão, obtemos:

$$2x - 3y + 4z + \underbrace{(2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) + 4 \cdot (-3))}_{d} = 0$$

Exemplo 03: Determine uma equação geral para o plano que passa pelo ponto $P(0,-2,4)$ e é gerado pelos vetores $\mathbf{u}=(3,1,-2)$ e $\mathbf{v}=(1,-1,1)$.

Resolução:

Um vetor normal é $\mathbf{n}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}$. Daí,

$$\mathbf{n}=\det\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=(-1,-5,-4)$$

Resolução:

Portanto, uma equação geral do plano tem a forma

$$-1x - 5y - 4z + d = 0$$

Como $P(0, -2, 4) \in \pi$, segue que

$$-1 \cdot 0 - 5 \cdot (-2) - 4 \cdot (4) + d = 0$$

Assim, uma equação geral para o plano é

$$-x - 5y - 4z + 6 = 0$$

Exemplo 04: Determine uma equação geral para o plano que passa pelos pontos $A(2,1,1)$, $B(-3,-1,3)$ e $C(4,2,1)$.

Resolução:

$$\mathbf{AB}, \mathbf{AC} \in \pi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} = \mathbf{AB} \times \mathbf{AC}$$

Como

$$\mathbf{n} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -5 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-2, 4, -1) \text{ e } A \in \pi,$$

Resolução:

segue que

$$-2(x-2)+4(y-1)-1(z-1)=0$$

ou

$$-\,2x+4y-z+1=0$$

Exemplo 05: Determine uma equação geral para o plano mediador do segmento AB, em que $A(-2, 1, 4)$ e $B(-4, 3, 2)$.

Resolução:

$$\pi \text{ é o plano mediador de } AB \text{ se } \begin{cases} \mathbf{AB} \text{ for normal a } \pi \\ M \in \pi \end{cases}$$

Logo,

$$\mathbf{n} = (-2, 2, -2) \text{ e } \underbrace{\left(\frac{-2-4}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{4+2}{2}\right)}_{M(-3,2,3)}$$

Resolução:

Portanto,

$$-2(x+3)+2(y-2)-2(z-3)=0$$

ou

$$-2x+2y+2z-4=0$$

Exemplo 06: Determine o valor da constante real α para que os pontos $A(\alpha, -1, 5)$, $B(7, 2, 1)$, $C(-1, -3, -1)$ e $D(1, 0, 3)$ sejam coplanares.

Resolução:

$$\mathbf{BC}, \mathbf{BD} \in \pi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} = \mathbf{BC} \times \mathbf{BD}$$

Como

$$\mathbf{n} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -8 & -5 & -2 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix} = (-14, 28, -14) = -14(1, -2, 1) \text{ e } D \in \pi,$$

Resolução:

segue que

$$1(x-1)+-2(y-0)-1(z-3)=0$$

ou

$$x-2y-z+2=0$$

Portanto,

$$A(\alpha,-1,5)\in\pi \quad\Leftrightarrow\quad \alpha-2\cdot(-1)-5+2=0 \;\Rightarrow\; \alpha=1$$

Esboço de planos

Para fazer o esboço de um plano, em geral, usamos uma das seguintes estrátegias:

(1) Obtemos, caso existam, as interseções do plano com os planos coordenados;

(2) Selecionamos um ponto do plano e um vetor normal à ele.

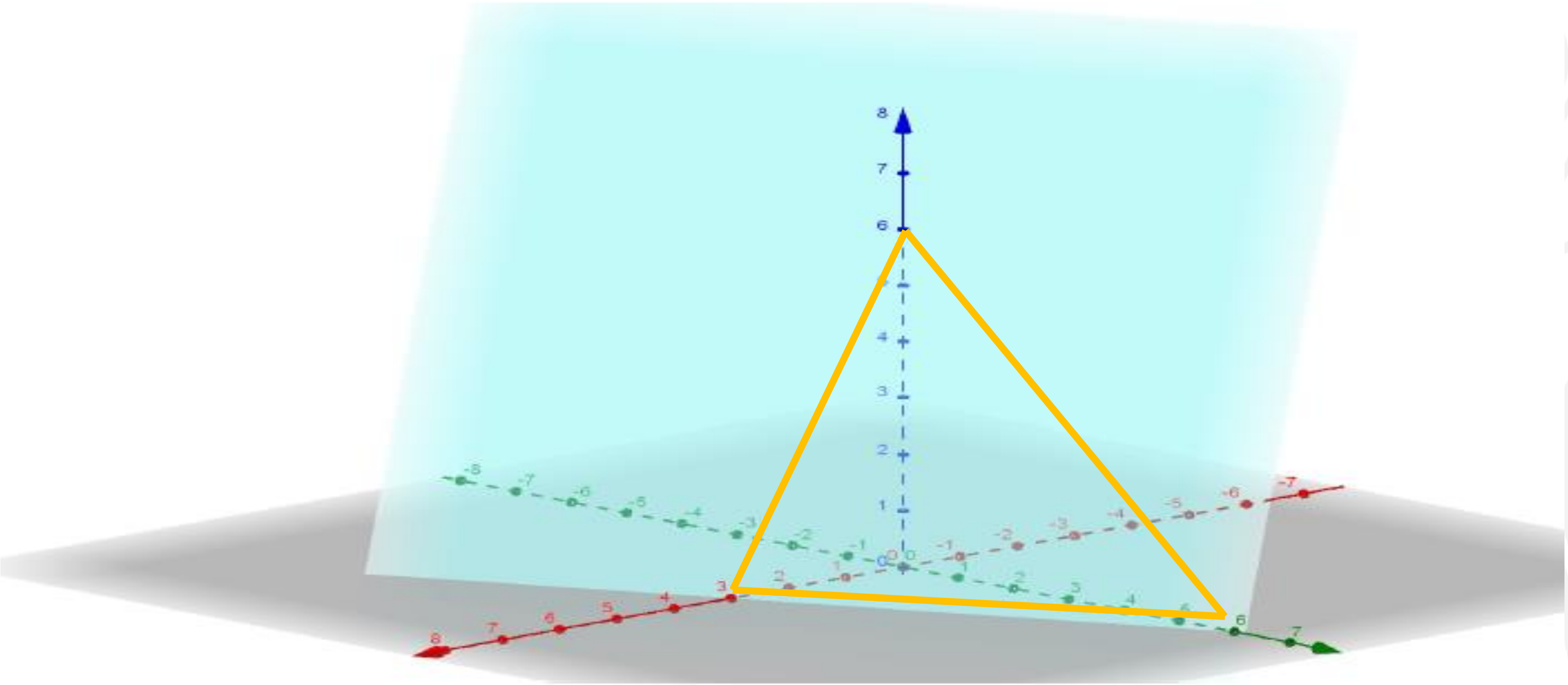
Exemplo 07: Esboce o plano que tem uma equação na forma geral dada por $2x + y + z = 6$.

Resolução:

$$y = 0 \text{ e } z = 0 \Rightarrow x = 3 \qquad A(3,0,0) \in \pi$$

$$x = 0 \text{ e } z = 0 \Rightarrow y = 6 \qquad \Rightarrow \qquad B(0,6,0) \in \pi$$

$$x = 0 \text{ e } y = 0 \Rightarrow z = 6 \qquad C(0,0,6) \in \pi$$



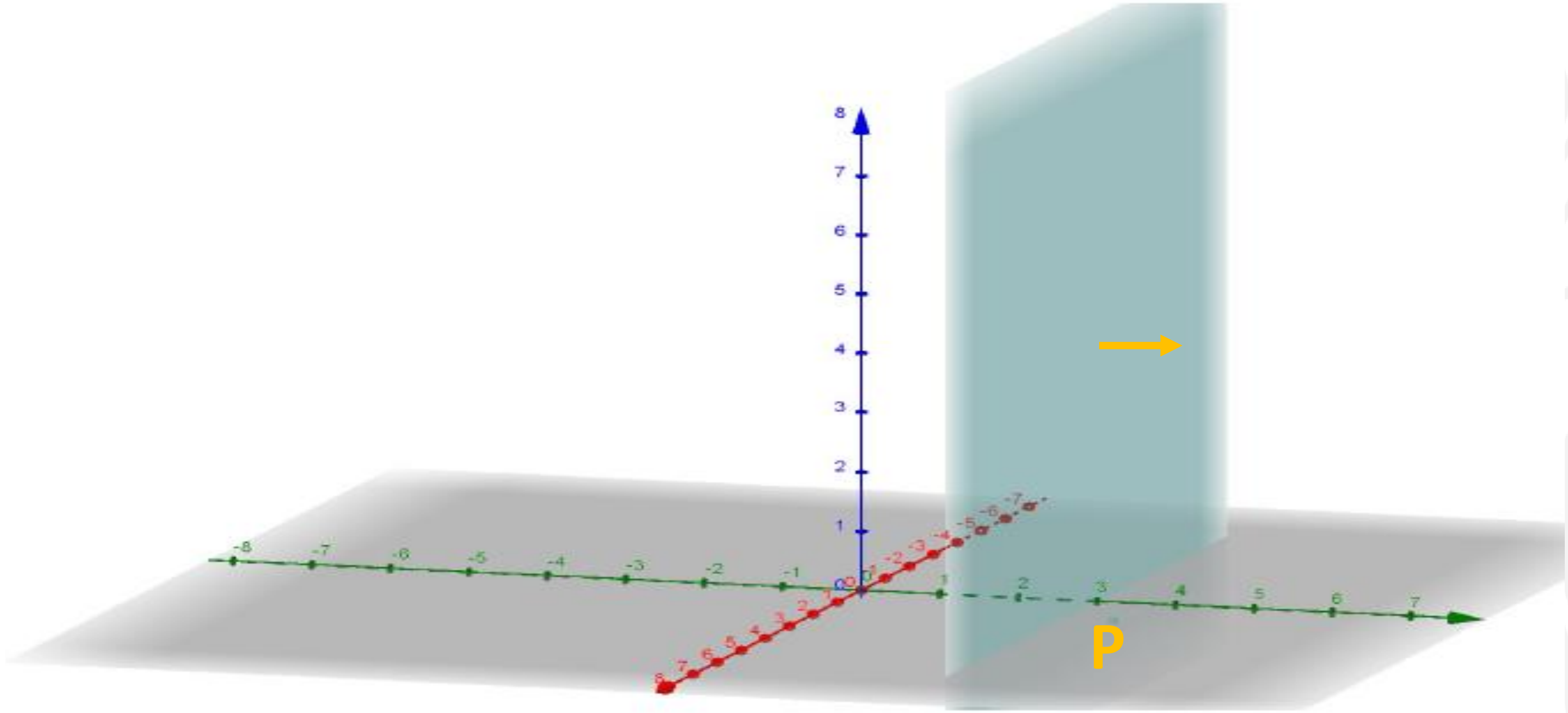
Exemplo 08: Esboce o plano que é gerado pelos vetores **i** e **k** e passa pelo ponto $P(0,3,0)$.

Resolução:

$$\mathbf{i} \text{ e } \mathbf{k} \text{ geram } \pi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

Portanto,

$$1(y-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3$$


P
8
7
6
5
4
3
2
1

Exemplo 09: Esboce o plano que contém a reta

$$r : (x, y, z) = (0, 1, 0) + t(0, 1, -1), \ t \in \mathbb{R}$$

e passa pelo ponto $P(2, 0, 1)$.

Resolução:

$\mathbf{u} = (2, 0, 1) - (0, 1, 0) = (2, -1, 1), \ \mathbf{v} = (0, 1, -1) \in \pi$

Logo,

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0, 2, 2) = 2(0, 1, 1)$$

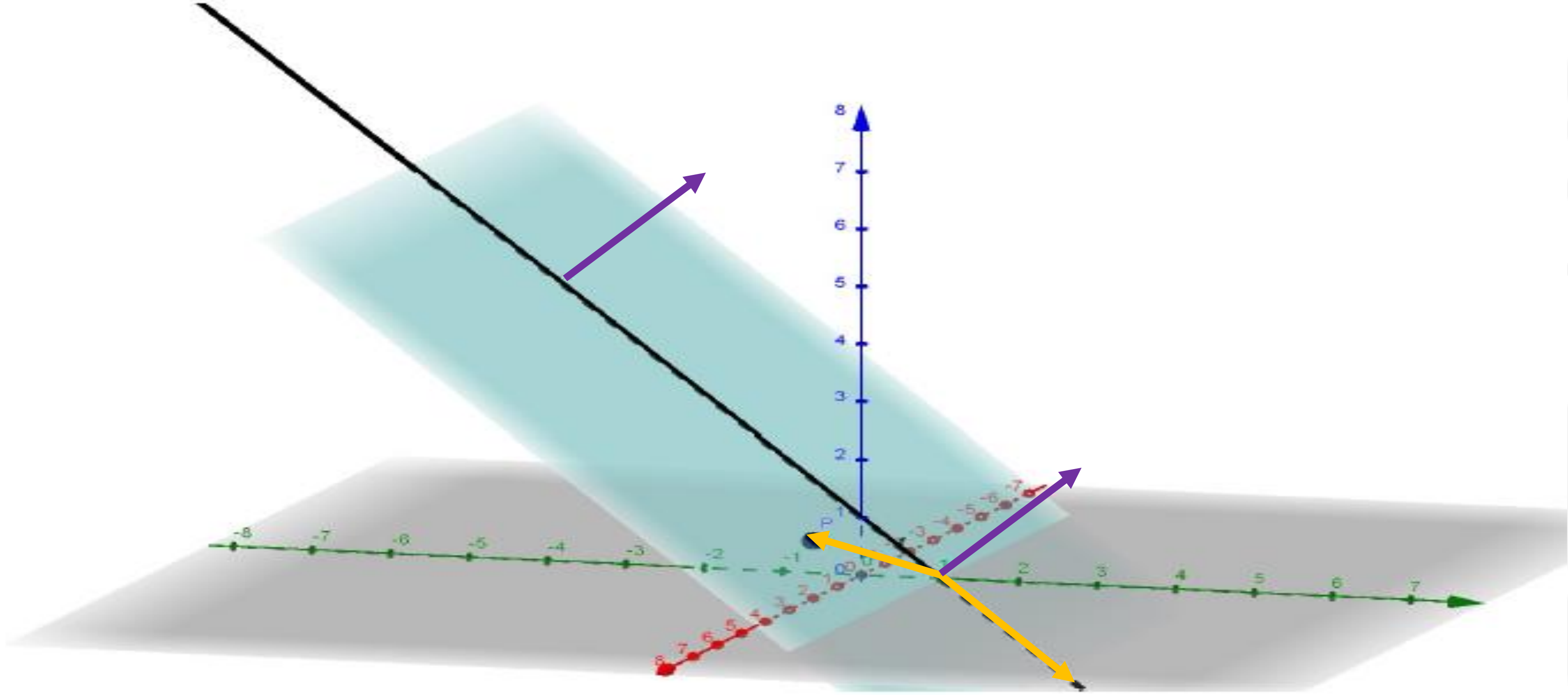
Resolução:

Portanto

$$1(y-0)+1(z-1)=0$$

ou

$$y+z=1$$


P

Exemplo 10: Esboce a reta que é obtida pela interseção do plano que é gerado pelos vetores $\mathbf{j}$ e $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$ e passa pelo ponto $P(0, 0, 1)$ com o plano $-x + y + 2z = 2$.

Resolução:

$$\mathbf{j},\ \mathbf{v} = (1, 0, -1) \in \pi \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{n} = \mathbf{j} \times \mathbf{v} = (-1, 0, -1) = -1(1, 0, 1)$$

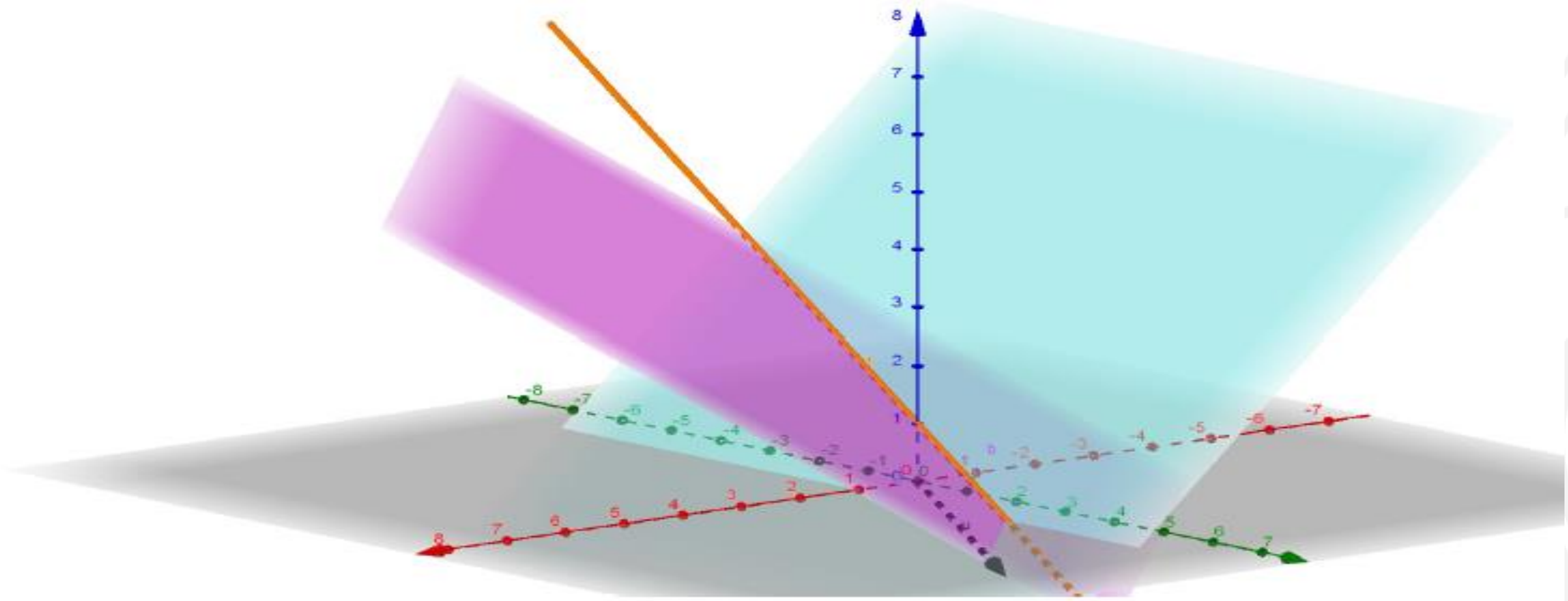
Logo,

$$x + (z - 1) = 0 \quad \text{ou} \quad x + z = 1$$

Resolução:

Fazendo $x = t, \ \ t \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$


8
7
6
5
4
3
2
1

Agora é com você!

Leia a teoria no livro-texto indicado e faça todas as atividades propostas em nosso planejamento de aulas.

PUC Minas

Virtual