O estudo do plano

Professor Vitor Luiz de Almeida

PUC Minas Virtual

Problemas envolvendo planos

PUC Minas Virtual

Objetivo Geral: Resolver problemas envolvendo planos.

Objetivos específicos:

1. Determinar equações para o plano em situações diversas;
2. Estabelecer condições que permitam identificar quando uma reta e um plano são paralelos, transversais e, em particular, perpendiculares;
3. Estabelecer condições que permitam identificar quando dois planos são paralelos, transversais e, em particular, perpendiculares;

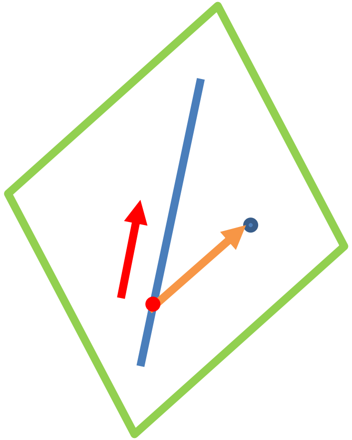
4. Descrever a reta como interseção entre dois planos;
5. Determinar o ângulo entre reta e plano e entre planos;
6. Determinar a distância entre ponto e plano, reta e plano e entre planos.

Exemplo 01: Determine uma equação para o plano que contém a reta $r : (x, y, z) = (-1, 1, 2) + t(3, 2, 3),\ t \in \mathbb{R}$, e que passa pelo ponto $C(1, 3, -2)$.

Resolução:

Basta observarmos que

$$\mathbf{n} = (3,2,3) \times [(-1,1,2) - (1,3,-2)] = (14,-18,-2) = 2(7,-9,-1)$$



Resolução:

Portanto, uma equação geral para o plano tem a forma

$$7x - 9y - z + d = 0$$

Como $C(1, 3, -2) \in \pi$, segue que

$$7 - 27 - (-2) + d = 0 \;\Rightarrow\; d = 18$$

Resolução:

Assim, concluímos que

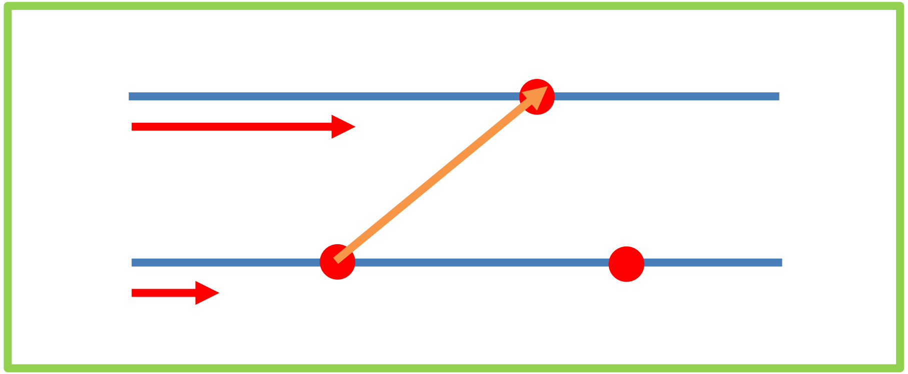
$$7x - 9y - z + 18 = 0$$

Exemplo 02: Determine uma equação para o plano que contém as retas $r : (x, y, z) = (-1, 0, 3) + t(2, 4, -6),\ t \in \mathbb{R}$, e $s : \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = -3x - 2 \end{cases}$.

Resolução:

Basta observarmos que:

$$\mathbf{v}_1 = (2, 4, -6) \;\|\; \mathbf{v}_2 = [(0, 1, -2) - (1, 3, -5)] = (-1, -2, 3)$$



Resolução:

Dessa forma,

$$\mathbf{n} = (2,4,-6) \times [(-1,0,3) - (0,1,-2)] = (14,-4,2) = 2(7,-2,1)$$

Portanto, uma equação para o plano procurado é

$$7(x+1) - 2(y-0) + 1(z-3) = 0, \quad \text{ou ainda}, \quad 7x - 2y + z + 4 = 0$$

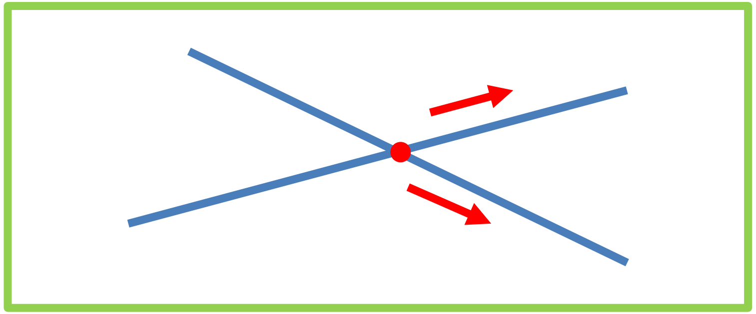
Exemplo 03: Determine uma equação para o plano que contém as retas $r : (x, y, z) = (3, 1, 3) + t(2, 4, 2),\ t \in \mathbb{R}$, e $s : (x, y, z) = (5, 1, -2) + u(3, 2, -4),\ u \in \mathbb{R}$.

Resolução:

Basta observarmos que:

$$r \cap s = \{(2, -1, 2)\}$$

$$\mathbf{n} = (2, 4, 2) \times (3, 2, -4) = (-20, 14, -8) = -2(10, -7, 4)$$



Resolução:

Portanto, uma equação para o plano procurado é

$$10(x-2)-7(y+1)+4(z-2)=0, \quad \text{ou ainda}, \quad 10x-7y+4z-35=0$$

Agora é com você!

Leia a teoria no livro-texto indicado e faça todas as atividades propostas em nosso planejamento de aulas.

PUC Minas
Virtual

O estudo do plano

Professor Vitor Luiz de Almeida

PUC Minas Virtual

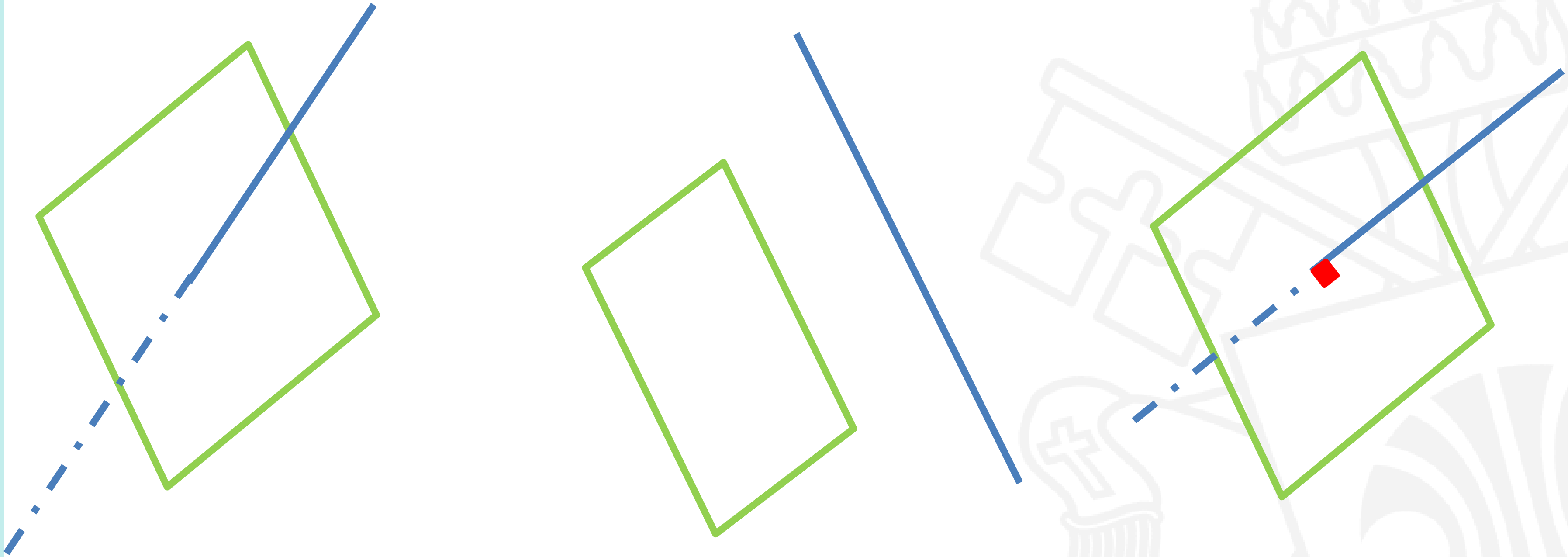
Problemas envolvendo planos

Posições relativas entre retas e planos

Sejam r uma reta com vetor diretor $\mathbf{v}$ e π um plano com vetor normal $\mathbf{n}$. Dizemos que

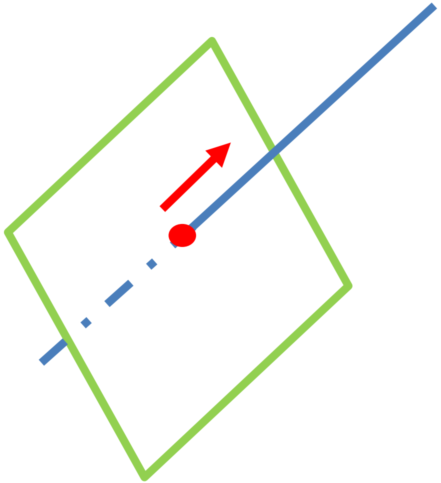
(1) r é paralela a π se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$;

(2) r é transversal a π se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0$. Em particular, r é perpendicular a π se $\mathbf{v}$ for paralelo a $\mathbf{n}$.



Exemplo 04: Determine uma equação para a reta que passa pelo ponto $A(1, 2, -4)$ e é perpendicular ao plano $2x - y + z = 6$.

Resolução:



Um vetor diretor para a reta procurada é

$$\mathbf{n} = (2, -1, 1)$$

Como $A(1, 2, -4) \in r$, segue que

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -4 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Exemplo 05: Mostre que a reta $r : (1, -1, 2) + t(2, 3, -1),\ t \in \mathbb{R}$, é transversal ao plano $\pi : x - y + 3z = 5$. Em seguida, determine as coordenadas do ponto de interseção entre r e π.

Resolução:

Como
$$(2,3,-1)\cdot(1,-1,3) = 2-3-3 \neq 0,$$

segue que r é transversal ao plano π.

Seja $P(x,y,z) \in r \cap \pi$. Então,

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= (1+2t) - (-1+3t) + 3(2-t) \\ &= 8 - 4t \\ &= 5 \end{aligned}$$

Resolução:

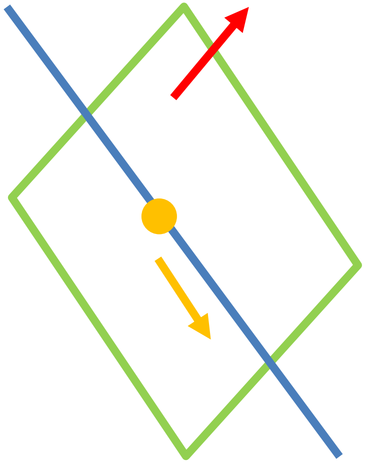
Dessa forma, $t = \dfrac{3}{4}$ e, assim,

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right) \\ y = -1 + 3 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right) \\ z = 2 - \left(\dfrac{3}{4}\right) \end{cases}$$

Portanto, $P\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{4}\right)$.

Exemplo 06: Determine os valores das constantes m e n tais que a reta $r : (2, 1, -3) + t(1, 1, -2),\ t \in \mathbb{R}$, esteja contida no plano $\pi : mx + ny + 2z = 1$.

Resolução:



Primeiramente, devemos garantir que

$$(1, 1, -2) \cdot (m, n, 2) = m + n - 4 = 0$$

Além disso,

$$m \cdot 2 + n \cdot 1 + 2 \cdot (-3) = 1$$

.

Resolução:

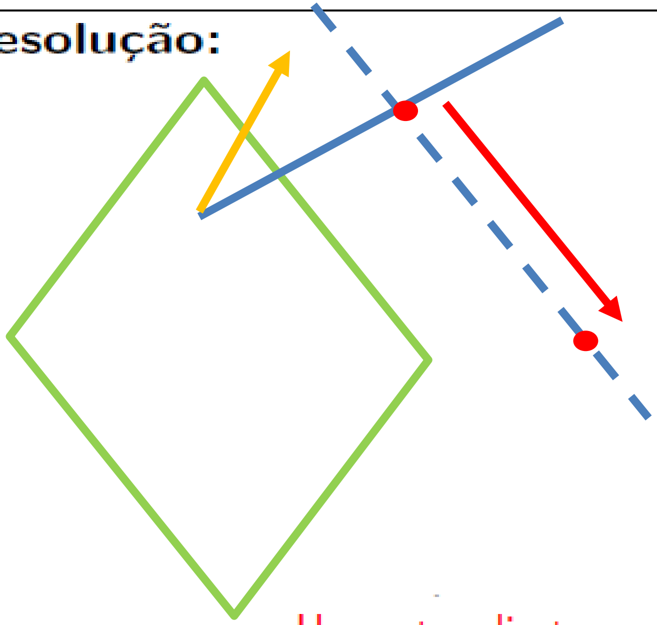
Logo,

$$\begin{cases} m + n = 4 \\ 2m + n = 7 \end{cases}$$

Portanto, $m = 3$ e $n = 1$.

Exemplo 07: Determine uma equação para a reta r que passa pelo ponto $A(1,1,0)$, é concorrente com a reta $s : (x,y,z) = (1,0,0) + t(-1,0,1)$, $t \in \mathbb{R}$, e é paralela ao plano $\pi : 2x + y - z = 3$.

Resolução:



Um vetor diretor para a reta procurada deve ter a forma

$$\mathbf{v} = (1,1,0) - (1-t,0,t) = (t,1,-t)$$

Além disso, devemos ter

$$\mathbf{v} \cdot (2, 1, -1) = 0$$

Logo,

$$t = -\frac{1}{3}$$

Dessa forma, um vetor diretor é $\mathbf{v} = (-1, 3, 1)$.

Portanto,

$$r : (x, y, z) = (1, 1, 0) + u(-1, 3, 1), \ u \in \mathbb{R}.$$

Agora é com você!

Leia a teoria no livro-texto indicado e faça todas as atividades propostas em nosso planejamento de aulas.

PUC Minas
Virtual

O estudo do plano

Professor Vitor Luiz de Almeida

PUC Minas Virtual

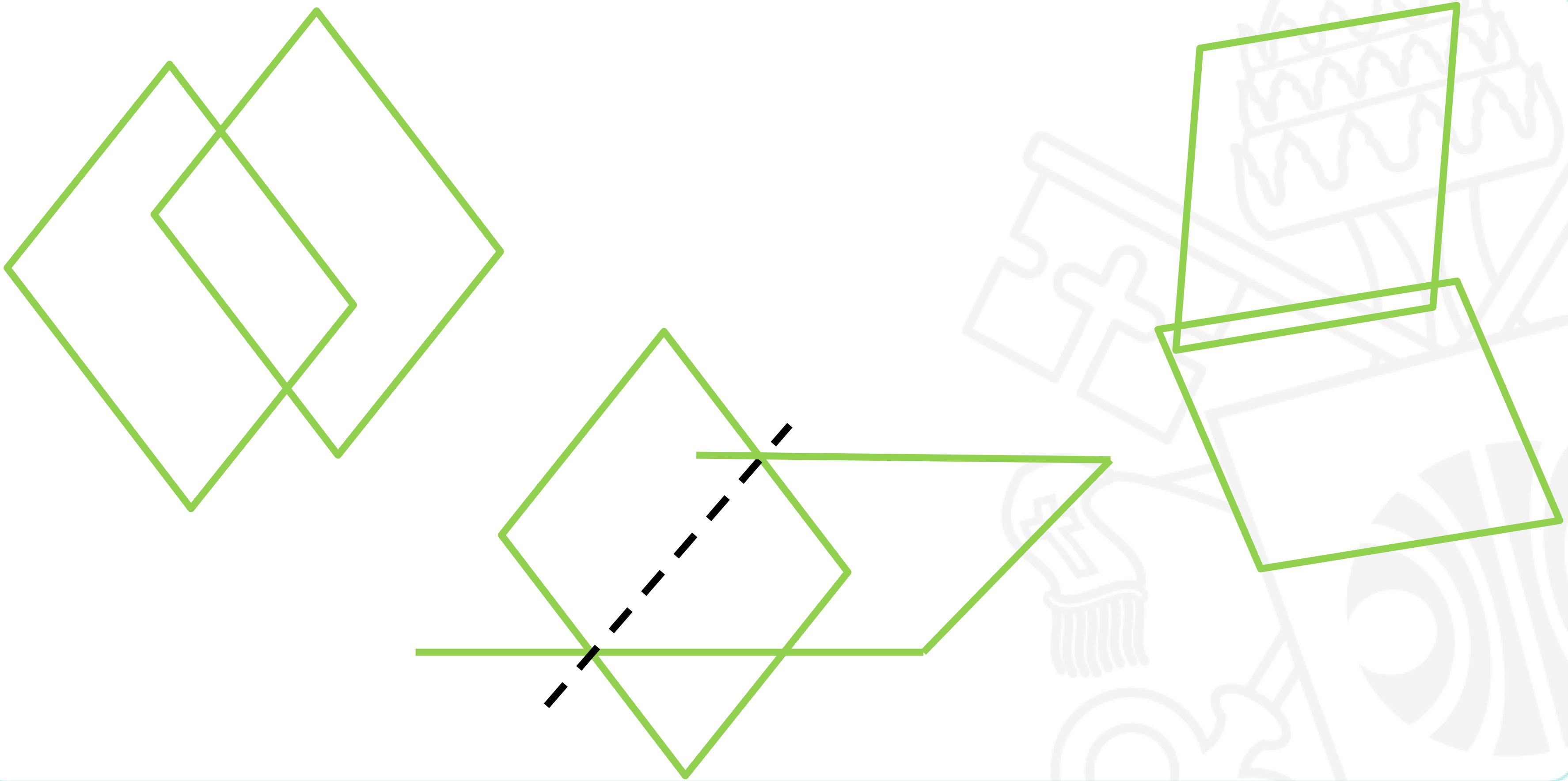
Problemas envolvendo planos

Posições relativas entre planos

Sejam π_1 e π_2 dois planos com vetores normais $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$, respectivamente. Dizemos que

(1) π_1 é paralelo a π_2 se $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ são vetores paralelos;

(2) π_1 é transversal a π_2 se $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ não são vetores paralelos. Em particular, os planos π_1 e π_2 são perpendiculares se $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$.



Exemplo 08: Determine os valores de m tais que os planos $\pi_1 : 3mx - y + 2z = 0$ e $\pi_2 : 2x + 2my - z = 1$ sejam perpendiculares.

Resolução:

Para que os planos dados sejam perpendiculares, basta garantirmos que

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (3m, -1, 2) \cdot (2, 2m - 1) = 0$$

Portanto,

$$6m - 2m - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{2}$$

Exemplo 09: Sabe-se que os planos $\pi_1 : 3ax - 5by - 2z = 5$ e $\pi_2 : x + y + 4z = 1$ são paralelos. Qual é o valor de $a + b$?

Resolução:

Se, por hipótese, os planos são paralelos, então

$$\mathbf{n}_1 = (3a, -5b, -2) \parallel \mathbf{n}_2 = (1, 1, 4)$$

Logo,

$$\mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

Resolução:

Portanto,

$$\begin{cases} 3a = -\dfrac{1}{2} \\ -5b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, $a = -\dfrac{1}{6}$ e $b = \dfrac{1}{10}$.

Agora é com você!

Leia a teoria no livro-texto indicado e faça todas as atividades propostas em nosso planejamento de aulas.

PUC Minas

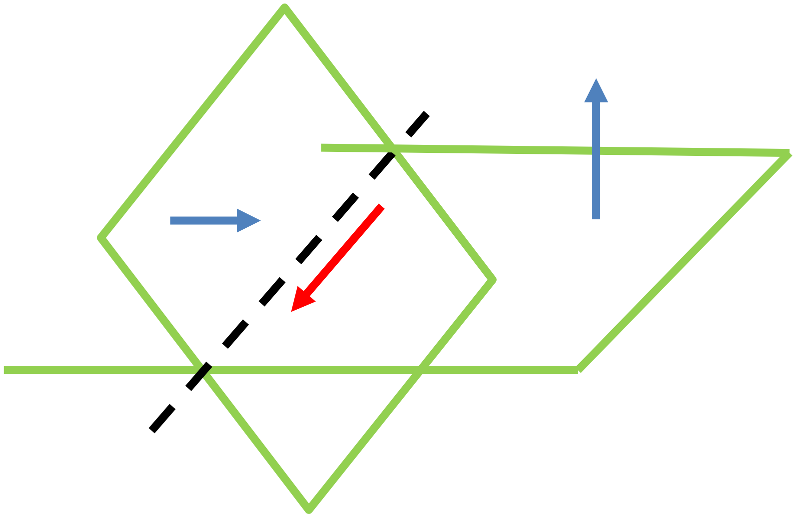
Virtual

O estudo do plano

Professor Vitor Luiz de Almeida

PUC Minas Virtual

Problemas envolvendo planos



$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$$

$$P \in \pi_1 \cap \pi_2$$

Exemplo 10: Determine equações paramétricas para a reta que é obtida pela interseção dos planos $\pi_1 : 3x - y + z - 3 = 0$ e $\pi_2 : x + 3y + 2z + 4 = 0$.

Resolução:

Primeiramente, notamos que os planos dados são transversais, uma vez que

$$\mathbf{n}_1 = (3, -1, 1) \not\parallel \mathbf{n}_2 = (1, 3, 2)$$

Dessa forma, um vetor diretor para a reta procurada é

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (-5, -5, 10) = -5(1, 1, -2)$$

Resolução:

$$\begin{cases} 3x - y + z - 3 = 0 \\ x + 3y + 2z + 4 = 0 \end{cases} \overset{z=0}{\Longrightarrow} \begin{cases} 3x - y - 3 = 0 \\ x + 3y + 4 = 0 \end{cases}$$

Logo, $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$.

Resolução:

Portanto, equações paramétricas para a reta de interseção são:

$$r : \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + t \\ \\ y = -\dfrac{3}{2} + t \\ \\ z = 0 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 11: Determine equações paramétricas para a reta que é obtida pela interseção dos planos $\pi_1 : 2x - y - 3z - 5 = 0$ e $\pi_2 : x + y - z - 3 = 0$.

Resolução:

Observemos que

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & \vdots & 5 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \vdots & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Logo, fazendo $z = t, \ t \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}t \\ x = \dfrac{8}{3} + \dfrac{4}{3}t \end{cases}$$

Resolução:

Portanto,

$$r:\left(\frac{8}{3},\frac{1}{3},0\right)+t\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3},1\right),\ t\in\mathbb{R}.$$

Agora é com você!

Leia a teoria no livro-texto indicado e faça todas as atividades propostas em nosso planejamento de aulas.

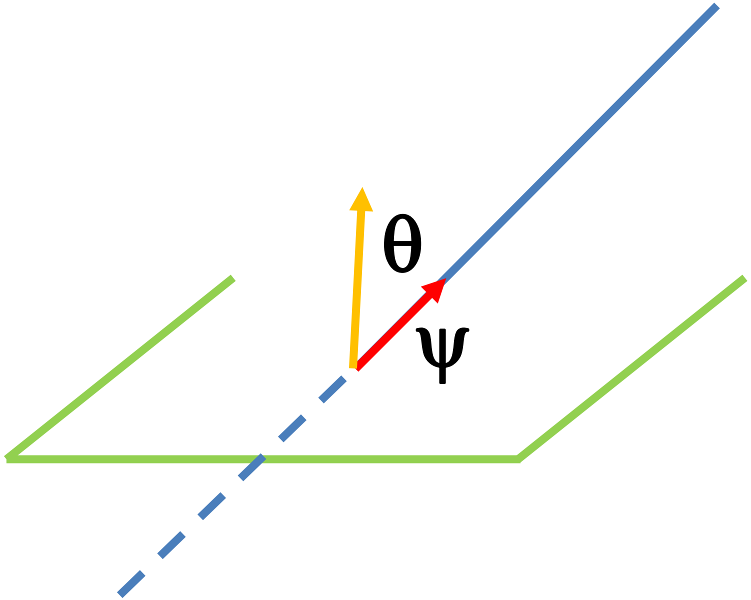
PUC Minas
Virtual

O estudo do plano

Professor Vitor Luiz de Almeida

PUC Minas Virtual

Problemas envolvendo planos



Como $\theta + \Psi = \dfrac{\pi}{2}$,

segue que $\cos\theta = \sin\Psi$.

Portanto,

$$\sin\Psi = \frac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{n}\|}$$

Exemplo 12: Determine o ângulo Ψ que a reta r forma com o plano π. São dados:

$$r : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{5} \text{ e } \pi : 2x - y + 7z - 1 = 0$$

Resolução:

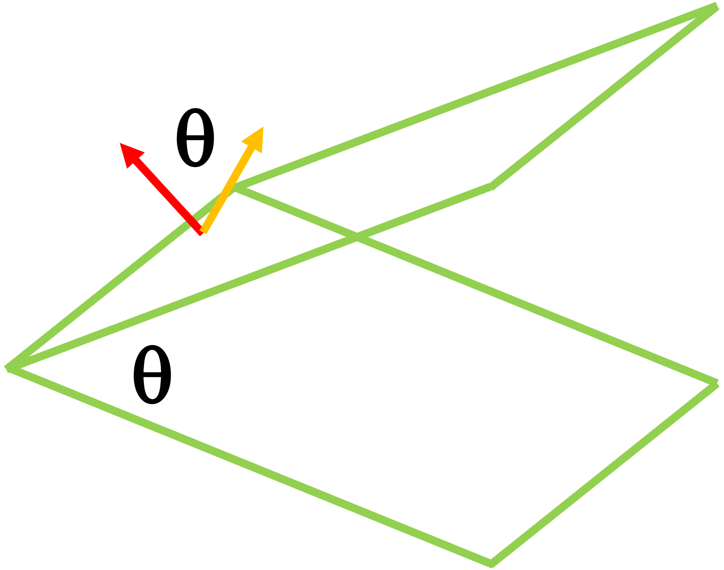
Como

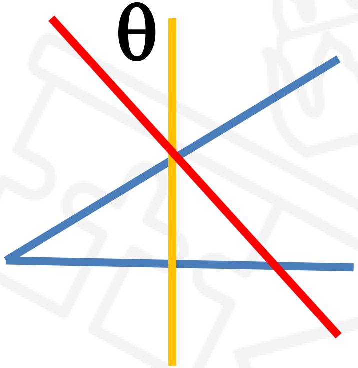
$$
\begin{aligned}
\sin\Psi &= \frac{|(3,-4,5)\cdot(2,-1,7)|}{\|(3,-4,5)\|\|(2,-1,7)\|}\\
&= \frac{45}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{54}}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2},
\end{aligned}
$$

Resolução:

segue que:

$$\Psi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$





$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{\|\mathbf{n}_1\|\|\mathbf{n}_2\|}$$

Exemplo 12: Determine o ângulo θ que o plano π_1 forma com o plano π_2. São dados:

$$\pi_1 : 2x - 2y + 1 = 0 \ \text{ e } \ \pi_2 : 2x - y - z = 0$$

Resolução:

Temos que:

$$\cos\theta = \frac{|(2,-2,0)\cdot(2,-1,-1)|}{\|(2,-2,0)\|\|(2,-1,-1)\|} = \frac{6}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}$$

Resolução:

Portanto,

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

Agora é com você!

Leia a teoria no livro-texto indicado e faça todas as atividades propostas em nosso planejamento de aulas.

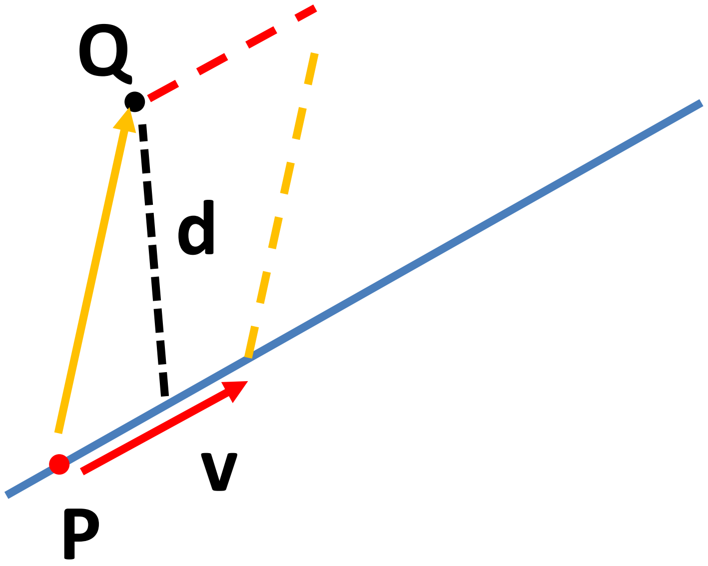
PUC Minas
Virtual

O estudo do plano

Professor Vitor Luiz de Almeida

PUC Minas Virtual

Problemas envolvendo distâncias



$$A = \|\mathbf{v}\| \cdot d$$

$$A = \|\mathbf{v} \times \mathbf{PQ}\|$$

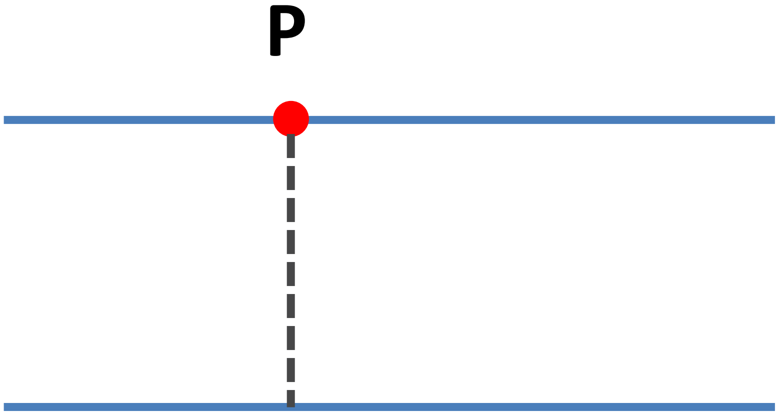
$$d = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{PQ}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

Exemplo 13: Determine a distância entre o ponto $P(2, 0, 7)$ e a reta de equações simétricas

$$r : \frac{x}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1}$$

Resolução:

$$d(P, r) = \frac{\|(2,2,1)\times(2,-2,10)\|}{\|(2,2,1)\|} = \frac{\sqrt{872}}{3}$$

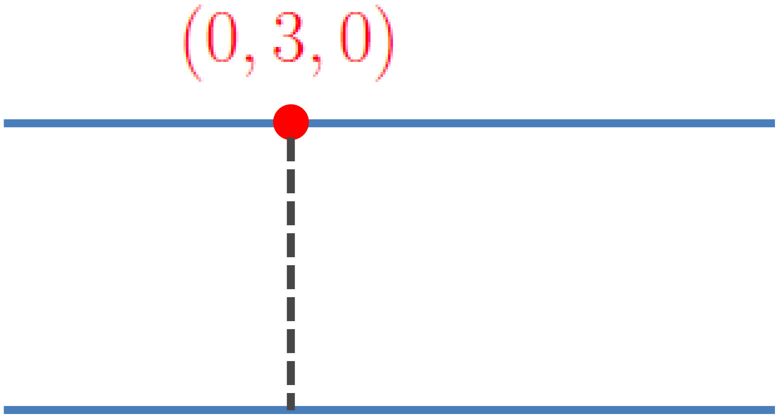


$$d(r, s) = d(P, s)$$

Exemplo 14: Calcule a distância entre as retas

$$r : \begin{cases} y = -2x + 3 \\ z = 2x \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = -3 - 4t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Resolução:



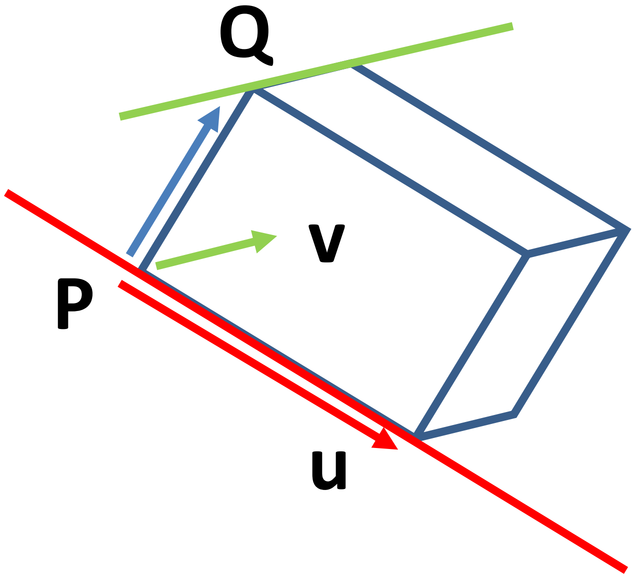
$$u = (1,\ -2,\ 2)$$

$$v = (-2,\ 4,\ -4)$$

Resolução:

Logo,

$$d(r, s) = \frac{\|(-2, 4, -4) \times [(0, 3, 0) - (-1, 1, -3)]\|}{\|(-2, 4, -4)\|} = \sqrt{13}$$



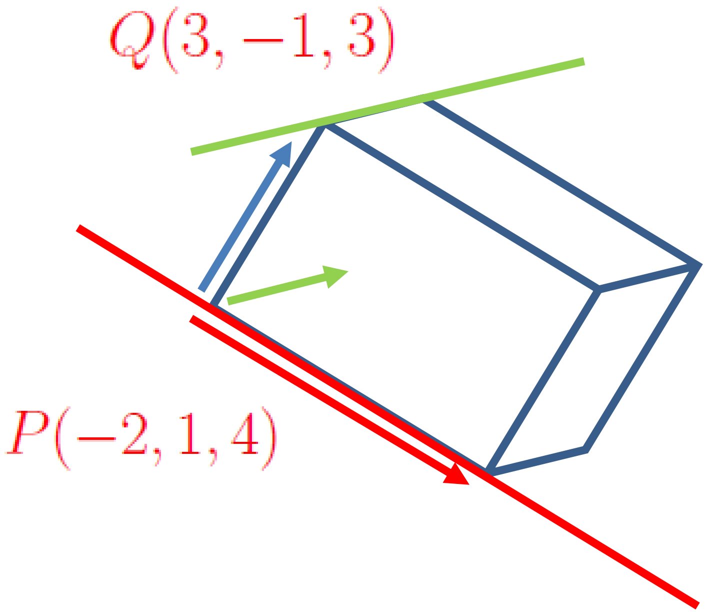
$$V = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| d$$

$$V = |\,[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{PQ}]\,|$$

$$d = \frac{|\,[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{PQ}]\,|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}$$

Exemplo 15: Calcule a distância entre as retas

$$r : \begin{cases} y = 1 \\ x + 2 = \dfrac{z-4}{-2} \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



$$\mathbf{u} = (1, 0, -2)$$

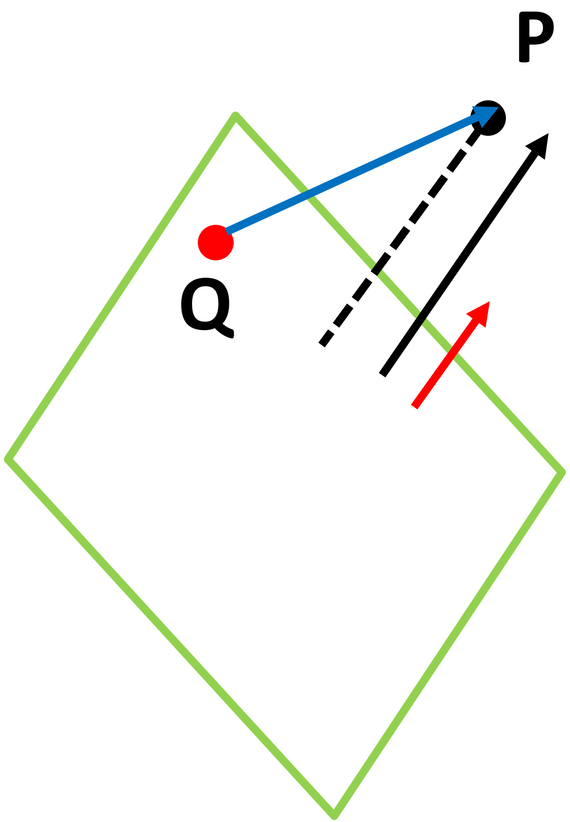
$$\mathbf{v} = (0, 2, -1)$$

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{PQ}] = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 16$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (4, 1, 2)$$

Logo,

$$d(r,\ s) = \frac{|16|}{||(4,1,2)||} = \frac{16}{\sqrt{21}}$$



$$d(P, \pi) = \|\text{proj}_{\mathbf{n}}\mathbf{QP}\| = \left\| \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{QP}}{\|\mathbf{n}\|}\ \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \right\|$$

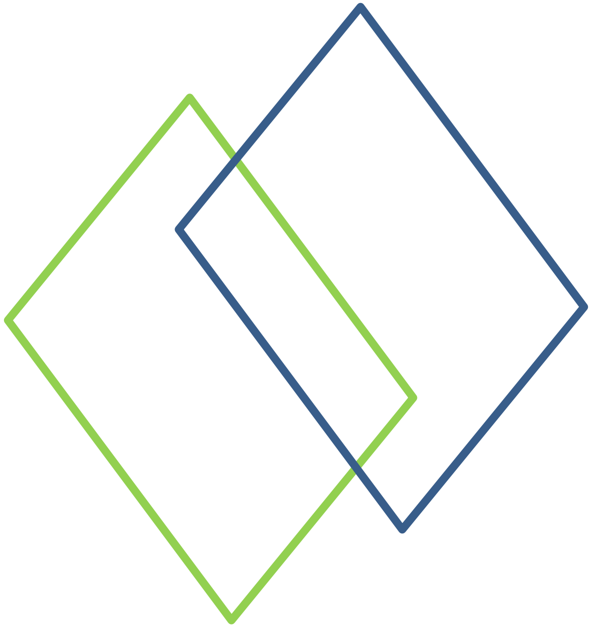
$$d(P, \pi) = \frac{|(a, b, c) \cdot (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)|}{\|(a, b, c)\|}$$

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemplo 16: Calcule a distância do ponto $P(-4, 2, 5)$ ao plano $\pi : 2x + y + 2z + 8 = 0$.

Resolução:

$$d(P, \pi) = \frac{|2(-4) + 1(2) + 2(5) + 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 4$$



$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_1)$$

Exemplo 17: Calcular a distância entre os planos

$$\pi_1 : 2x - 2y + z - 5 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : 4x - 4y + 2z + 14 = 0$$

Resolução:

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|4(0) - 4(0) + 2(5) + 14|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2}} = 4$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + by + cz + d_1 = 0 \\ ax + by + cz + \widetilde{d}_2 = 0 \end{cases}$$

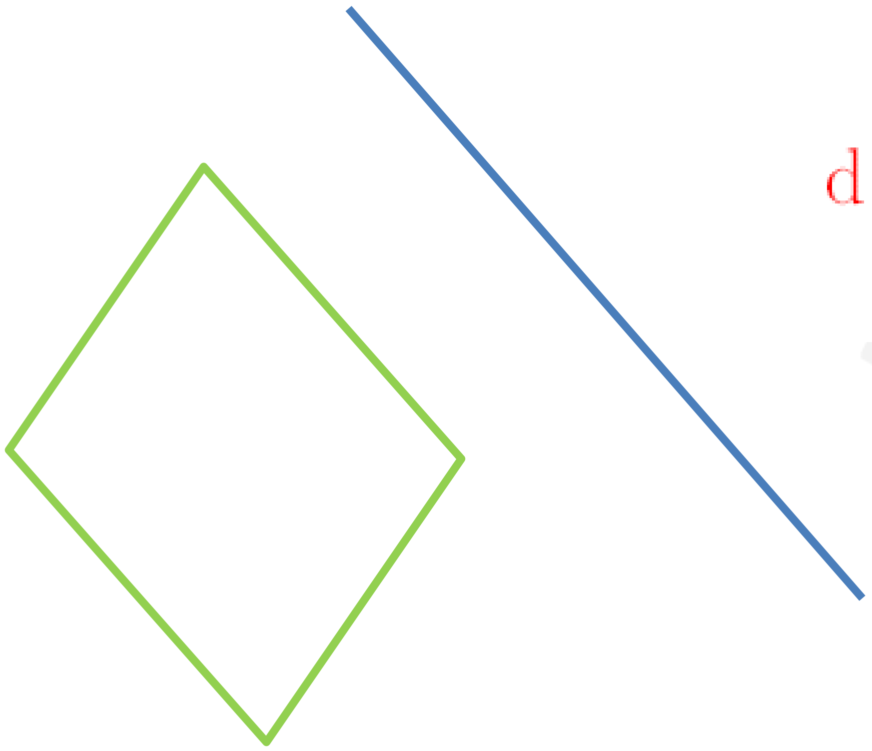
$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|d_1 - \widetilde{d}_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemplo 17: Calcular a distância entre os planos

$$\pi_1 : 2x - 2y + z - 5 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : 4x - 4y + 2z + 14 = 0$$

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|-5-7|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 4$$



$$\mathrm{d}(\pi, r) = \mathrm{d}(\mathrm{P}, \pi)$$

Agora é com você!

Leia a teoria no livro-texto indicado e faça todas as atividades propostas em nosso planejamento de aulas.

PUC Minas
Virtual