Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas e Informática
Departamento de Ciência da Computação
Curso de Ciência da Computação

Projeto e Análise de Algoritmos

Parte 1

Raquel Mini
raquelmini@pucminas.br

O que é um algoritmo?

- Qualquer procedimento computacional bem definido que toma algum valor ou conjunto de valores como entrada e produz algum valor ou conjunto de valores como saída
- Sequência de passos computacionais que transformam a entrada na saída
- Sequência de ações executáveis para a obtenção de uma solução para um determinado tipo de problema
- Descrição de um padrão de comportamento, expresso em termos de um conjunto finito de ações
- Sequência não ambígua de instruções que é executada até que determinada condição se verifique

Algoritmo correto X incorreto

- Um algoritmo é **correto** se, para cada instância de entrada, ele pára com a saída correta
- Um algoritmo **incorreto** pode não parar em algumas instâncias de entrada, ou então pode parar com outra resposta que não a desejada

Algoritmo eficiente X ineficiente

- Algoritmos **eficientes** são os que executam em tempo polinomial
- Algoritmos que necessitam de tempo superpolinomial são chamados de **ineficientes**

Problema tratável X intratável

- Problemas que podem ser resolvidos por algoritmo de tempo polinomial são chamados de **tratáveis**
- Problemas que exigem tempo superpolinomial são chamados de **intratáveis**

Tratabilidade

Problema decidível X indecidível

- Um problema é **decidível** se existe algoritmo para resolvê-lo
- Um problema é **indecidível** se não existe algoritmo para resolvê-lo

Decidibilidade

Análise de algoritmos

- Analisar a complexidade computacional de um algoritmo significa prever os recursos de que o mesmo necessitará:
  - Memória
  - Largura de banda de comunicação
  - Hardware
  - **Tempo de execução**
- Geralmente existe mais de um algoritmo para resolver um problema
- A análise de complexidade computacional é fundamental no processo de definição de algoritmos mais eficientes para a sua solução
- Em geral, o tempo de execução cresce com o tamanho da entrada

Porque estudar análise de algoritmos?

- O tempo de computação e o espaço na memória são recursos limitados
  - Os computadores podem ser rápidos, mas não são infinitamente rápidos
  - A memória pode ser de baixo custo, mas é finita e não é gratuita
- Os recursos devem ser usados de forma sensata, e algoritmos eficientes em termos de tempo e espaço devem ser projetados
- Com o aumento da velocidade dos computadores, torna-se cada vez mais importante desenvolver algoritmos mais eficientes, devido ao aumento constante do tamanho dos problemas a serem resolvidos

Porque estudar análise de algoritmos?

- Suponha que para resolver um determinado problema você tem disponível um **algoritmo exponencial** (2^n) e um computador capaz de executar 10^4 operações por segundo

	2^n na máquina 10^4	
	tempo (s)	**tamanho**
	0,10	10
	1	13
1 minuto	60	19
1 hora	3.600	25
1 dia	86.400	30
1 ano	31.536.000	38

Porque estudar análise de algoritmos?

- Compra de um novo computador capaz de executar 10^9 operações por segundo

		2^n na máquina 10^4	2^n na máquina 10^9
	tempo (s)	**tamanho**	**tamanho**
	0,10	10	27
	1	13	30
1 minuto	60	19	36
1 hora	3.600	25	42
1 dia	86.400	30	46
1 ano	31.536.000	38	55

Aumento na velocidade computacional tem pouco efeito no tamanho das instâncias resolvidas por algoritmos ineficientes

Porque estudar análise de algoritmos?

- **Investir em algoritmo**:
  - Você encontrou um algoritmo quadrático (n^2) para resolver o problema

		2^n na máquina 10^4	2^n na máquina 10^9	n^2 na máquina 10^4	n^2 na máquina 10^9
	tempo (s)	**tamanho**	**tamanho**	**tamanho**	**tamanho**
	0,10	10	27	32	10.000
	1	13	30	100	31.623
1 minuto	60	19	36	775	244.949
1 hora	3.600	25	42	6.000	1.897.367
1 dia	86.400	30	46	29.394	9.295.160
1 ano	31.536.000	38	55	561.569	177.583.783

Novo algoritmo oferece uma melhoria maior que a compra da nova máquina

Porque estudar projeto de algoritmos?

- Algum dia você poderá encontrar um problema para o qual não seja possível descobrir prontamente um algoritmo publicado
- É necessário estudar técnicas de projeto de algoritmos, de forma que você possa desenvolver algoritmos por conta própria, mostrar que eles fornecem a resposta correta e entender sua eficiência

Exercício

1. Para cada função $f(n)$ e cada tempo t na tabela a seguir, determine o maior tamanho n de um problema que pode ser resolvido no tempo t, supondo-se que o algoritmo para resolver o problema demore $f(n)$ segundos

	1 seg.	1 min.	1 hora	1 dia	1 mês	1 ano	1 século
log n							
$\sqrt{n}$							
n							
n log n							
n^2							
n^3							
2^n							
n!							

Medida do Tempo de Execução de um Programa

Ziviani – págs. 1 até 11

Cormen – págs. 3 até 20

Tipos de problemas na análise de algoritmos

- Análise de um algoritmo particular
- Análise de uma classe de algoritmos

Análise de um algoritmo particular

- Qual é o custo de usar um dado algoritmo para resolver um problema específico?

- Características que devem ser investigadas:
  - Análise do número de vezes que cada parte do algoritmo deve ser executada
  - Estudo da quantidade de memória necessária

Análise de uma classe de algoritmos

- Qual é o algoritmo de menor custo possível para resolver um problema particular?
- Toda uma família de algoritmos é investigada
- Procura-se identificar um que seja o melhor possível
- Colocam-se **limites** para a complexidade computacional dos algoritmos pertencentes à classe

Custo de um algoritmo

- Determinando o menor custo possível para resolver problemas de uma dada classe, temos a medida da dificuldade inerente para resolver o problema
- Quando o custo de um algoritmo é igual ao menor custo possível, o algoritmo é **ótimo** para a medida de custo considerada
- Podem existir vários algoritmos para resolver o mesmo problema
- Se a mesma medida de custo é aplicada a diferentes algoritmos, então é possível compará-los e escolher o mais adequado

Função de complexidade

- Para medir o custo de execução de um algoritmo é comum definir uma função de custo ou **função de complexidade** T
- $\mathrm{T}(n)$ é a medida do tempo necessário para executar um algoritmo para um problema de tamanho n
- Função de **complexidade de tempo**: $\mathrm{T}(n)$ mede o tempo necessário para executar um algoritmo para um problema de tamanho n
- Função de **complexidade de espaço**: $\mathrm{T}(n)$ mede a memória necessária para executar um algoritmo para um problema de tamanho n
- Utilizaremos T para denotar uma função de complexidade de tempo daqui para a frente
- Na realidade, a complexidade de tempo não representa tempo diretamente, mas o número de vezes que determinada operação considerada relevante é executada

Exemplo: Maior elemento

- Considere o algoritmo para encontrar o maior elemento de um vetor de inteiros `A[1..n]`, $n \geq 1$

```
function Max (var A: Vetor): integer;
var i, Temp: integer;
begin
  Temp := A[1];
  for i:=2 to n do if Temp < A[i] then Temp := A[i];
  Max  := Temp;
end;
```

- Seja T uma função de complexidade tal que $T(n)$ seja o número de comparações entre os elementos de `A`, se `A` contiver n elementos
- Logo $T(n) = n - 1$ para $n \geq 1$
- Vamos provar que o algoritmo apresentado no programa acima é **ótimo**

Exemplo: Maior elemento

- **Teorema**: Qualquer algoritmo para encontrar o maior elemento de um conjunto com n elementos, $n \geq 1$, faz pelo menos $n - 1$ comparações

- **Prova**: Cada um dos $n - 1$ elementos tem de ser mostrado, por meio de comparações, que é menor que algum outro elemento

- Logo $n - 1$ comparações são necessárias

- O teorema acima nos diz que, se o número de comparações for utilizado para medida de custo, então a função `Max` do programa anterior é ótima

Tamanho da entrada de dados

- A medida do custo de execução de um algoritmo depende principalmente do tamanho da entrada de dados
- É comum considerar o tempo de execução de um programa como uma função do tamanho da entrada
- Para alguns algoritmos, o custo de execução é uma função da entrada particular dos dados, não apenas do tamanho da entrada
- No caso da função `Max` do programa do exemplo, o custo é uniforme sobre todos os problemas de tamanho n
- Já para um algoritmo de ordenação isso não ocorre: se os dados de entrada já estiverem quase ordenados, então o algoritmo pode ter que trabalhar menos

Melhor caso, pior caso e caso médio

- **Melhor caso:**
  - Menor tempo de execução sobre todas as entradas de tamanho n
- **Pior caso:**
  - Maior tempo de execução sobre todas as entradas de tamanho n
  - Se T é uma função de complexidade baseada na análise de pior caso, o custo de aplicar o algoritmo nunca é maior do que $\mathrm{T}(n)$
- **Caso médio** (ou caso esperado):
  - Média dos tempos de execução de todas as entradas de tamanho n

Melhor caso, pior caso e caso médio

- Na análise do caso esperado, supõe-se uma **distribuição de probabilidades** sobre o conjunto de entradas de tamanho n e o custo médio é obtido com base nessa distribuição
- A análise do caso médio é geralmente muito mais difícil de obter do que as análises do melhor e do pior caso
- É comum supor uma distribuição de probabilidades em que todas as entradas possíveis são igualmente prováveis
- Na prática isso nem sempre é verdade

Exemplo: Registros de um arquivo

- Considere o problema de acessar os registros de um arquivo
- Cada registro contém uma chave única que é utilizada para recuperar registros do arquivo
- O problema: dada uma chave qualquer, localize o registro que contenha esta chave
- O algoritmo de pesquisa mais simples é o que faz a pesquisa sequencial

Exemplo: Registros de um arquivo

- Seja T uma função de complexidade tal que $T(n)$ é o número de registros consultados no arquivo (número de vezes que a chave de consulta é comparada com a chave de cada registro)
  - Melhor caso: $T(n) = 1$ (registro procurado é o primeiro consultado)
  - Pior caso: $T(n) = n$ (registro procurado é o último consultado ou não está presente no arquivo)
  - Caso médio: $T(n) = \frac{(n+1)}{2}$

Exemplo: Registros de um arquivo

- No estudo do caso médio, vamos considerar que toda pesquisa recupera um registro
- Se p_i for a probabilidade de que o i-ésimo registro seja procurado, e considerando que para recuperar o i-ésimo registro são necessárias i comparações, então

$$T(n) = (1 \times p_1) + (2 \times p_2) + (3 \times p_3) + \Lambda + (n \times p_n)$$

- Para calcular $T(n)$ basta conhecer a distribuição de probabilidades p_i
- Se cada registro tiver a mesma probabilidade de ser acessado que todos os outros, então $p_i = 1/n, 1 \leq i \leq n$
- Neste caso $T(n) = \frac{1}{n}(1 + 2 + 3 + \Lambda + n) = \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n+1}{2}$
- A análise do caso esperado revela que uma pesquisa com sucesso examina aproximadamente metade dos registros

Exercício

2. No problema de acessar os registros de um arquivo, seja T uma função de complexidade tal que $\mathrm{T}(n)$ é o número de registros consultados no arquivo. Seja q a probabilidade de que uma pesquisa seja realizada com sucesso (chave procurada se encontra no arquivo) e $(1-q)$ a probabilidade da pesquisa sem sucesso (chave procurada não se encontra no arquivo). Considere também que nas pesquisas com sucesso todos os registros são igualmente prováveis. Encontre a função de complexidade para o caso médio.

Exemplo: Maior e menor elementos (1)

- Considere o problema de encontrar o maior e o menor elemento de um vetor de inteiros `A[1..n]`, $n \geq 1$
- Um algoritmo simples pode ser derivado do algoritmo apresentado no programa para achar o maior elemento

```
procedure MaxMin1 (var A: Vetor; var Max, Min: integer);
var i: integer;
begin
  Max := A[1];  Min := A[1];
  for i := 2 to n do
    begin
      if A[i] > Max then Max := A[i]; {Testa se A[i] contém o maior elemento}
      if A[i] < Min then Min := A[i]; {Testa se A[i] contém o menor elemento}
    end;
end;
```

- Seja $T(n)$ o número de comparações entre os elementos de `A`, se `A` tiver n elementos
- Logo $T(n) = 2\,(n-1)$, para $n > 0$, para o melhor caso, pior caso e caso médio.

Exemplo: Maior e menor elementos (2)

- `MaxMin1` pode ser facilmente melhorado:
  - a comparação `A[i] < Min` só é necessária quando o resultado da comparação `A[i] > Max` for falso

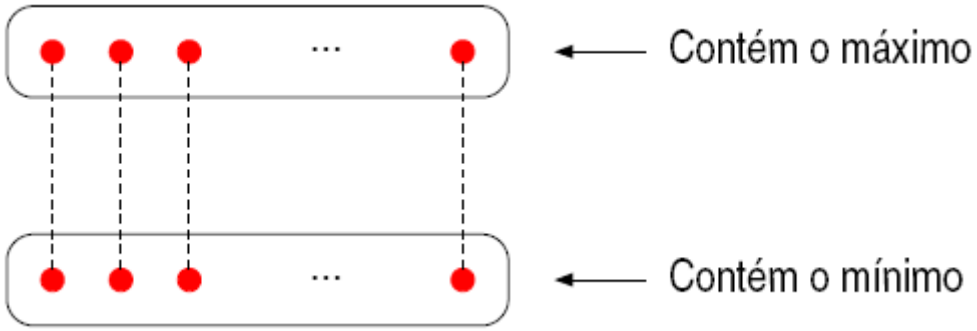
```
procedure MaxMin2 (var A: Vetor; var Max, Min: integer);
var i: integer;
begin
  Max := A[1];  Min := A[1];
  for i := 2 to n do
    if A[i] > Max
    then Max := A[i]
    else if A[i] < Min then Min := A[i];
end;
```

Exemplo: Maior e menor elementos (2)

- Para a nova implementação temos:
  - Melhor caso: $T(n) = n - 1$ (quando os elementos estão em ordem crescente)
  - Pior caso: $T(n) = 2(n-1)$ (quando o maior elemento está na 1ª posição)
  - Caso médio: $T(n) = \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}$
- Caso médio:
  - `A[i]` é maior do que `Max` a metade das vezes
  - Logo, $T(n) = n - 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}$, para $n > 0$

Exemplo: Maior e menor elementos (3)

- Considerando o número de comparações realizadas, existe a possibilidade de obter um algoritmo mais eficiente:
  1. Compare os elementos de A aos pares, separando-os em dois subconjuntos (maiores em um e menores em outro), a um custo de $\lceil n/2 \rceil$ comparações
  2. O máximo é obtido do subconjunto que contém os maiores elementos, a um custo de $\lceil n/2 \rceil - 1$ comparações
  3. O mínimo é obtido do subconjunto que contém os menores elementos, a um custo de $\lceil n/2 \rceil - 1$ comparações



Exemplo: Maior e menor elementos (3)

```
procedure MaxMin3(var A: Vetor;
                  var Max, Min: integer);
var i,
    FimDoAnel: integer;
begin
  {Garante uma qte par de elementos no vetor para evitar caso de exceção}
  if (n mod 2) > 0
  then begin
         A[n+1]    := A[n];
         FimDoAnel := n;
       end
  else FimDoAnel := n-1;

  {Determina maior e menor elementos iniciais}
  if A[1] > A[2]
  then begin
         Max := A[1]; Min := A[2];
       end
  else begin
         Max := A[2]; Min := A[1];
       end;
```

Exemplo: Maior e menor elementos (3)

```
i:= 3;
while i <= FimDoAnel do
  begin
  {Compara os elementos aos pares}
  if A[i] > A[i+1]
  then begin
         if A[i] > Max then   Max := A[i];
         if A[i+1] < Min then Min := A[i+1];
       end
  else begin
         if A[i] < Min then   Min := A[i];
         if A[i+1] > Max then Max := A[i+1];
       end;
  i:= i + 2;
  end;
end;
```

Exemplo: Maior e menor elementos (3)

- Os elementos de `A` são comparados dois a dois e os elementos maiores são comparados com `Max` e os elementos menores são comparados com `Min`

- Quando n é ímpar, o elemento que está na posição `A[n]` é duplicado na posição `A[n+1]` para evitar um tratamento de exceção

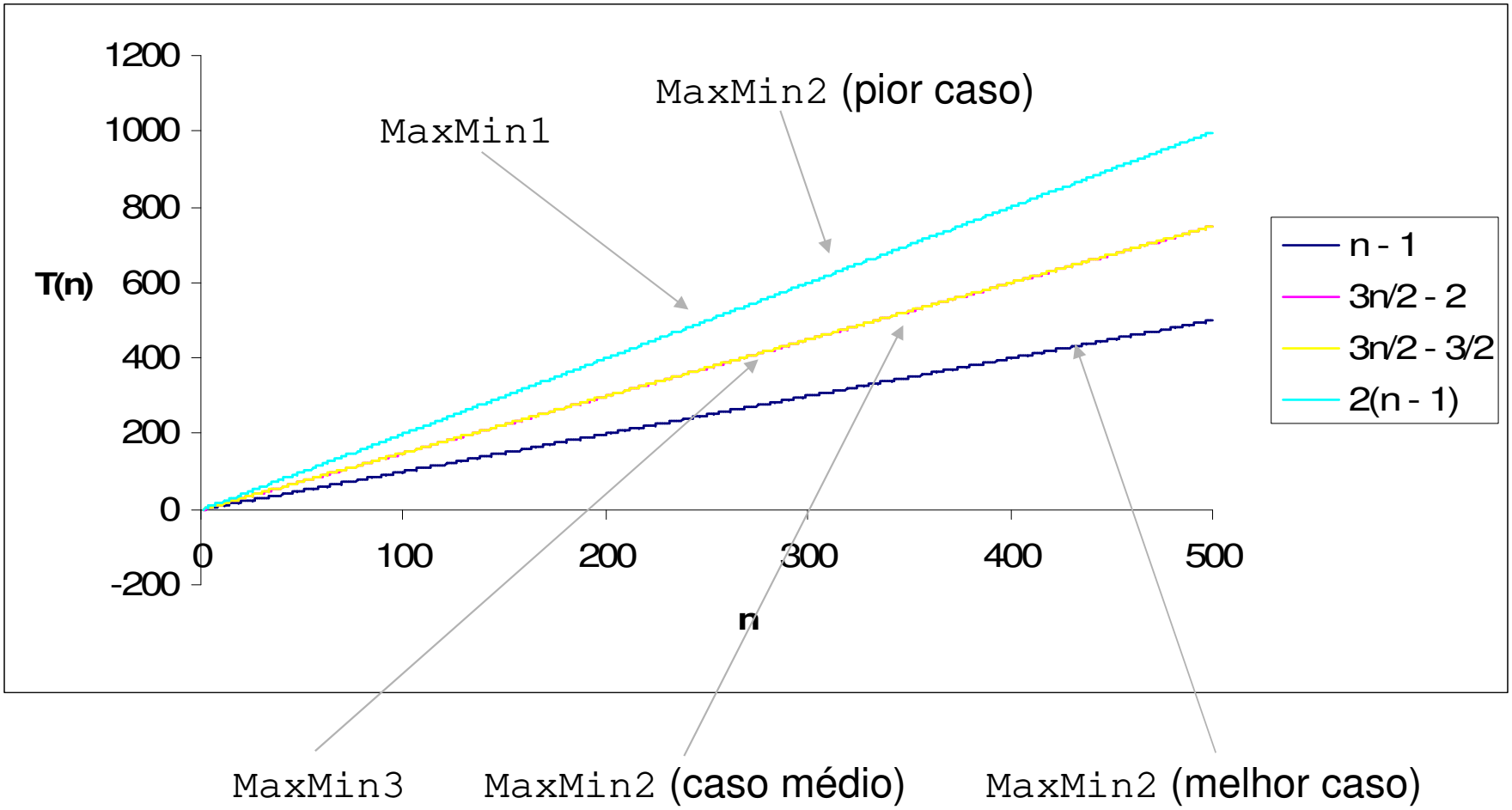
- Para esta implementação, $\mathrm{T}(n) = \frac{n}{2} + \frac{n-2}{2} + \frac{n-2}{2} = \frac{3n}{2} - 2$
  para $n > 0$, para o melhor caso, pior caso e caso médio

Comparação entre os algoritmos `MaxMin1`, `MaxMin2` e `MaxMin3`

- A tabela abaixo apresenta uma comparação entre os algoritmos dos programas `MaxMin1`, `MaxMin2` e `MaxMin3`, considerando o número de comparações como medida de complexidade
- Os algoritmos `MaxMin2` e `MaxMin3` são superiores ao algoritmo `MaxMin1` de forma geral.
- O algoritmo `MaxMin3` é superior ao algoritmo `MaxMin2` com relação ao pior caso e bastante próximo quanto ao caso médio

Os três algoritmos	T (n)		
	Melhor caso	Pior caso	Caso médio
MaxMin1	$2(n-1)$	$2(n-1)$	$2(n-1)$
MaxMin2	$n-1$	$2(n-1)$	$3n/2-3/2$
MaxMin3	$3n/2-2$	$3n/2-2$	$3n/2-2$

Comparação entre os algoritmos MaxMin1, MaxMin2 e MaxMin3



Exercício

3. Apresente a função de complexidade de tempo para os algoritmos abaixo, indicando em cada caso qual é a operação relevante:

a)

```
ALG1()
for i ← 1 to 2 do
    for j ← i to n do
        for k ← i to j do
            temp ← temp + i + j + k
```

b)

```
INSERTION-SORT(A)
for j ← 2 to n do
    chave ← A[j]
    i ← j - 1
    A[0] ← chave      //sentinela
    while A[i] > chave do
        A[i+1] ← A[i]
        i ← i-1
    A[i+1] ← chave
```

Exercício

c)

```
BUBBLE-SORT(A)
for i ← 1 to n do
    for j ← n downto i+1 do
        if A[j] < A[j-1] then
            A[j] ↔ A[j-1]
```

d)

```
SELECTION-SORT(A)
for i ← 1 to n-1 do
    Min ← i
    for j ← i+1 to n do
        if A[j] < A[Min] then
            Min ← j
    A[Min] ↔ A[i]
```

Comportamento Assintótico

Ziviani – págs. 11 até 19

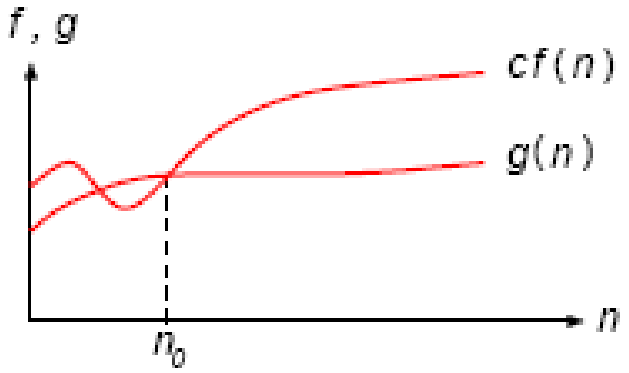
Cormen – págs. 32 até 49

Comportamento assintótico de funções

- O parâmetro n fornece uma medida da dificuldade para se resolver o problema
- Para valores suficientemente pequenos de n, qualquer algoritmo custa pouco para ser executado, mesmo os ineficientes
- A **escolha do algoritmo** não é um problema crítico para problemas de tamanho pequeno
- Logo, a análise de algoritmos é realizada para valores grandes de n
- Estuda-se o comportamento assintótico das **funções de custo** (comportamento de suas funções de custo para valores grandes de n)
- Para entradas grandes o bastante, as constantes multiplicativas e os termos de mais baixa ordem de um tempo de execução podem ser ignorados

Dominação assintótica

- A análise de um algoritmo geralmente conta com apenas algumas operações elementares
- A medida de custo ou medida de complexidade relata o crescimento assintótico da operação considerada
- **Definição**: Uma função $f(n)$ **domina assintoticamente** outra função $g(n)$ se existem duas constantes positivas c e n_0 tais que, para $n \geq n_0$, temos $|g(n)| \leq c \times |f(n)|$



- Exemplo:
  - Sejam $g(n) = (n+1)^2$ e $f(n) = n^2$
  - As funções $g(n)$ e $f(n)$ dominam assintoticamente uma a outra, já que
  - $|(n+1)^2| \leq 4|(n^2)|$ para $n \geq 1$ e
  - $|(n^2)| \leq |(n+1)^2|$ para $n \geq 0$

Como medir o custo de execução de um algoritmo?

- **Função de Custo** ou **Função de Complexidade**
  - $\mathrm{T}(n)$ = medida de custo necessário para executar um algoritmo para um problema de tamanho n
  - Se $\mathrm{T}(n)$ é uma medida da quantidade de tempo necessário para executar um algoritmo para um problema de tamanho n, então T é chamada função de complexidade de tempo de algoritmo
  - Se $\mathrm{T}(n)$ é uma medida da quantidade de memória necessária para executar um algoritmo para um problema de tamanho n, então T é chamada função de complexidade de espaço de algoritmo

- Observação: tempo não é tempo!
  - É importante ressaltar que a complexidade de tempo na realidade não representa tempo diretamente, mas o número de vezes que determinada operação considerada relevante é executada

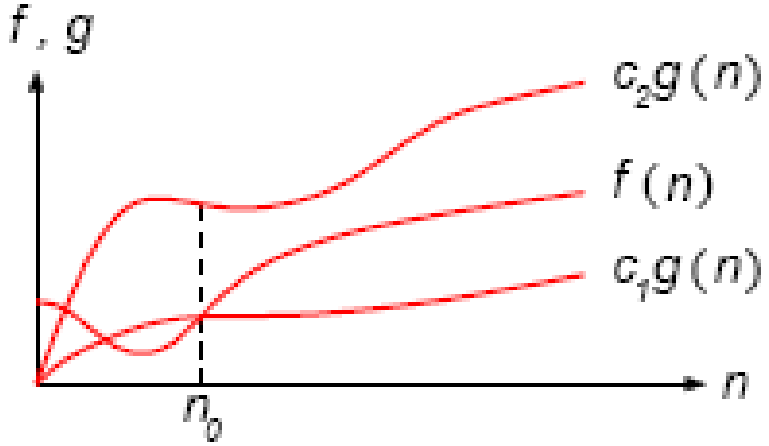
Custo assintótico de funções

- É interessante comparar algoritmos para valores grandes de n
- O custo assintótico de uma função $\mathrm{T}(n)$ representa o limite do comportamento de custo quando n cresce
- Em geral, o custo aumenta com o tamanho n do problema
- Observação:
  - Para valores pequenos de n, mesmo um algoritmo ineficiente não custa muito para ser executado

Notação assintótica de funções

- Existem três notações principais na análise de assintótica de funções:
  - Notação Θ
  - Notação O (“O” grande)
  - Notação Ω

Notação Θ



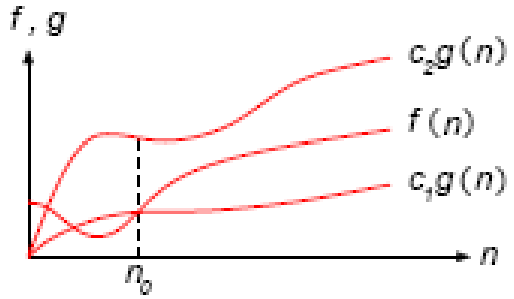
$$f(n) = \Theta(g(n))$$

Notação Θ

- A notação Θ limita a função por fatores constantes
- Escreve-se $f(n) = \Theta(g(n))$, se existirem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que para $n \geq n_0$, o valor de $f(n)$ está sempre entre $c_1 g(n)$ e $c_2 g(n)$ inclusive
- Neste caso, pode-se dizer que $g(n)$ é um limite assintótico firme (em inglês, *asymptotically tight bound*) para $f(n)$

$$f(n) = \Theta(g(n)), \exists c_1 > 0, c_2 > 0 \text{ e } n_0 \mid$$

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \ \forall n \geq n_0$$



Notação Θ: Exemplo

- Mostre que $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

Para provar esta afirmação, devemos achar constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $n_0 > 0$, tais que:

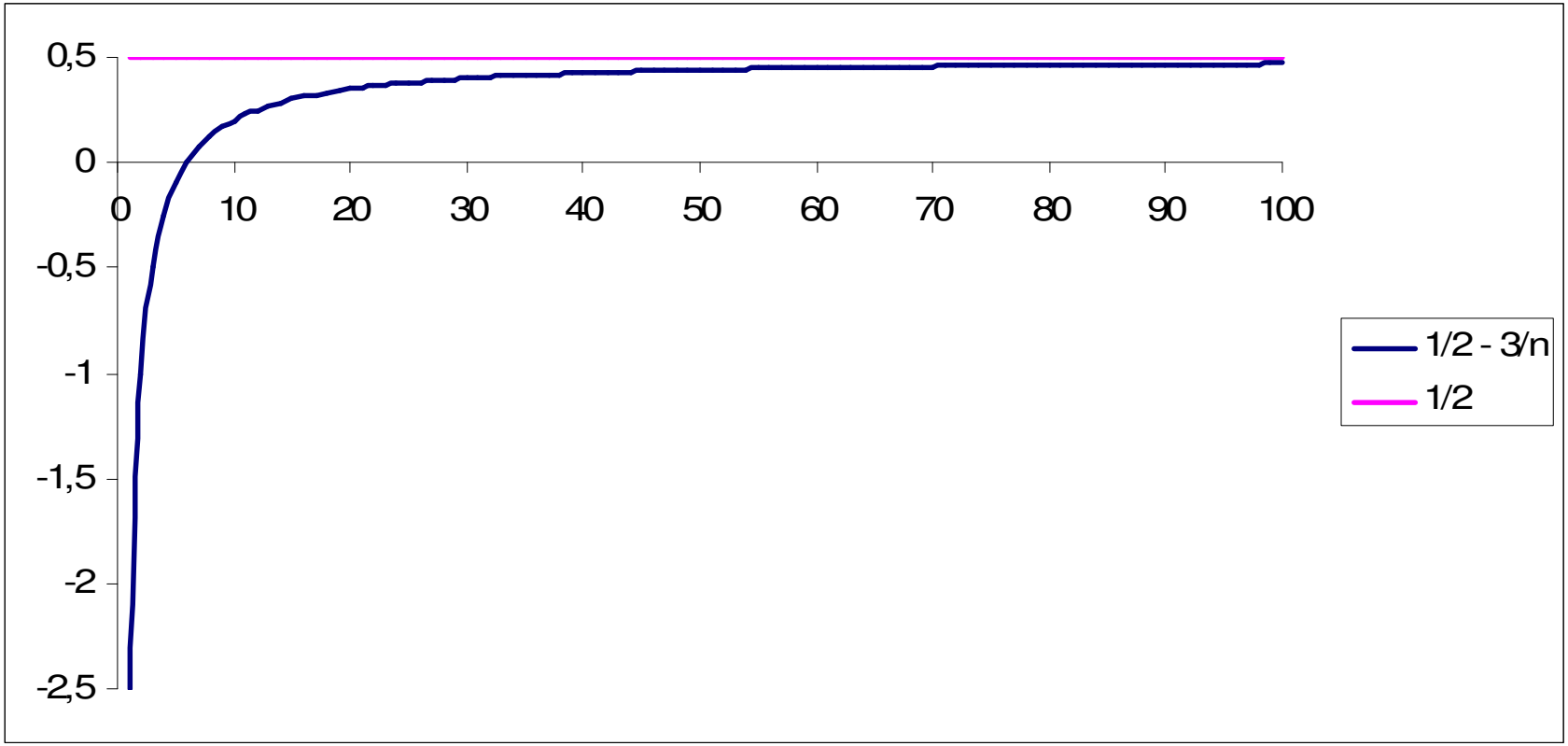
$$c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2$$

para todo $n \geq n_0$

Se dividirmos a expressão acima por n^2 temos:

$$c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$$

Notação Θ: Exemplo



Notação Θ: Exemplo

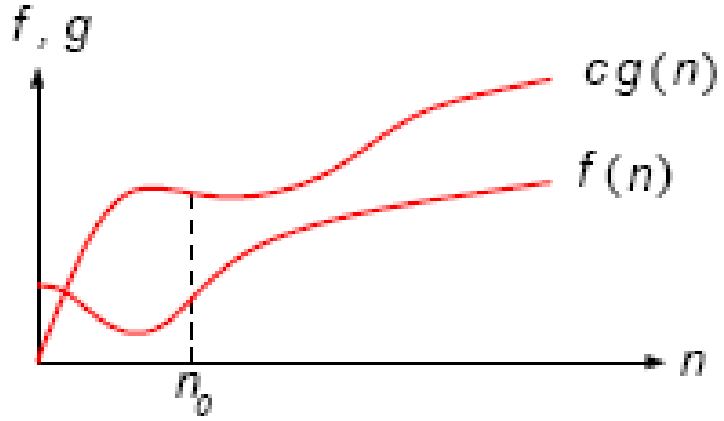
- A inequação mais a direita será sempre válida para qualquer valor de $n \geq 1$ ao escolhermos $c_2 \geq 1/2$
- Da mesma forma, a inequação mais a esquerda será sempre válida para qualquer valor de $n \geq 7$ ao escolhermos $c_1 \leq 1/14$
- Assim, ao escolhermos $c_1 = 1/14$, $c_2 = 1/2$ e $n_0 = 7$, podemos verificar que $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$
- Note que existem outras escolhas para as constantes c_1 e c_2, mas o fato importante é que a escolha existe
- Note também que a escolha destas constantes depende da função $\frac{1}{2}n^2 - 3n$
- Uma função diferente pertencente a $\Theta(n^2)$ irá provavelmente requerer outras constantes

Exercício

4. Prove que:
   a) $2n^2 + n = \Theta(n^2)$
   b) $3n^3 + 2n^2 + n = \Theta(n^3)$
   c) $\log_5^n = \Theta(\log n)$
   d) $7n \log n + n = \Theta(n \log n)$

5. Usando a definição formal de Θ, prove que $6n^3 \neq \Theta(n^2)$.

Notação O



$$f(n) = \mathrm{O}(g(n))$$

Notação O

- A notação O define um limite superior para a função, por um fator constante

- Escreve-se $f(n) = O(g(n))$, se existirem constantes positivas c e n_0 tais que para $n \geq n_0$, o valor de $f(n)$ é menor ou igual a $cg(n)$. Neste caso, pode-se dizer que $g(n)$ é um limite assintótico superior (em inglês, *asymptotically upper bound*) para $f(n)$

$$f(n) = O(g(n)), \exists\, c > 0 \text{ e } n_0 \mid 0 \leq f(n) \leq cg(n), \forall n \geq n_0$$

- Escrevemos $f(n) = O(g(n))$ para expressar que $g(n)$ domina assintoticamente $f(n)$. Lê-se $f(n)$ é da ordem no máximo $g(n)$

Notação O: Exemplos

- Seja $f(n) = (n + 1)^2$
  - Logo $f(n)$ é $O(n^2)$, quando $n_0 = 1$ e $c = 4$, já que
    $(n+1)^2 \leq 4n^2$ para $n \geq 1$

- Seja $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$. Mostre que $g(n)$ não é $O(n)$
  - Sabemos que $f(n)$ é $O(n^2)$, pois para $n \geq 0$, $n \leq n^2$
  - Suponha que existam constantes c e n_0 tais que para todo $n \geq n_0$, $n^2 \leq cn$. Assim, $c \geq n$ para qualquer $n \geq n_0$. No entanto, não existe uma constante c que possa ser maior ou igual a n para todo n

Notação O: Exemplos

- Mostre que $g(n) = 3n^3 + 2n^2 + n$ é $O(n^3)$
  - Basta mostrar que $3n^3 + 2n^2 + n \leq 6n^3$, para $n \geq 0$
  - A função $g(n) = 3n^3 + 2n^2 + n$ é também $O(n^4)$, entretanto esta afirmação é mais fraca que dizer que $g(n)$ é $O(n^3)$

- Mostre que $h(n) = \log_5 n$ é $O(\log n)$
  - O $\log_b n$ difere do $\log_c n$ por uma constante que no caso é $\log_b c$
  - Como $n = c^{\log_c n}$, tomando o logaritmo base b em ambos os lados da igualdade, temos que $\log_b n = \log_b c^{\log_c n} = \log_c n \times \log_b c$

Notação O

- Quando a notação O é usada para expressar o tempo de execução de um algoritmo no pior caso, está se definindo também o limite superior do tempo de execução desse algoritmo para todas as entradas
- Por exemplo, o algoritmo de ordenação por inserção é $O(n^2)$ no pior caso
  - Este limite se aplica para qualquer entrada
- O que se quer dizer quando se fala que "*o tempo de execução é* $O(n^2)$" é que no pior caso o tempo de execução é $O(n^2)$
  - ou seja, não importa como os dados de entrada estão arranjados, o tempo de execução em qualquer entrada é $O(n^2)$

Operações com a notação O

$$
\begin{aligned}
f(n) &= O(f(n)) \\
c \times O(f(n)) &= O(f(n)) \quad c = constante \\
O(f(n)) + O(f(n)) &= O(f(n)) \\
O(O(f(n)) &= O(f(n)) \\
O(f(n)) + O(g(n)) &= O(max(f(n), g(n))) \\
O(f(n))O(g(n)) &= O(f(n)g(n)) \\
f(n)O(g(n)) &= O(f(n)g(n))
\end{aligned}
$$

Operações com a notação O: Exemplos

- Regra da soma $O(f(n)) + O(g(n))$
  - Suponha três trechos cujos tempos de execução sejam

    $$O(n), O(n^2) \text{ e } O(n \log n)$$

  - O tempo de execução dos dois primeiros trechos é $O(\max(n, n^2))$, que é $O(n^2)$
  - O tempo de execução de todos os três trechos é então $O(\max(n^2, \log n))$, que é $O(n^2)$

- O produto de $[\log n + k + O(1/n)]$ por $[n + O(\sqrt{n})]$ é

  $$n \log n + kn + O(\sqrt{n} \log n)$$

Exercício

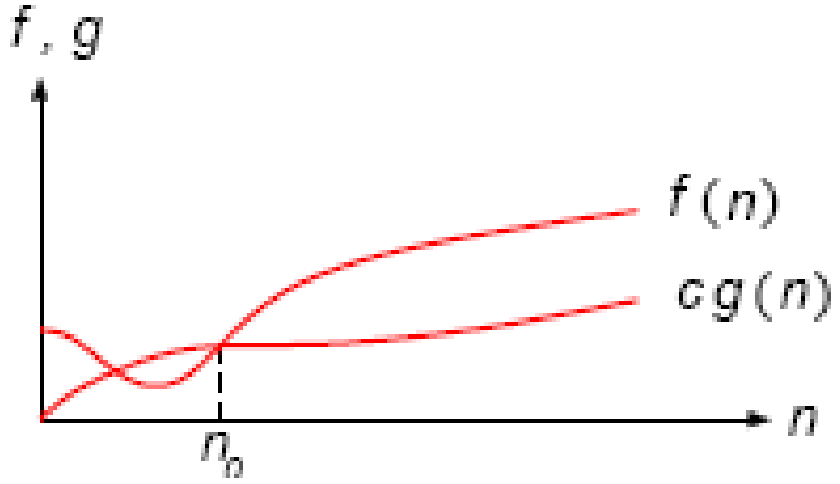
6. Mostre se $f(n) = \mathrm{O}(g(n))$ para os seguintes casos.

a) $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n \quad e \quad g(n) = n^2$

b) $f(n) = n\log n - 3n \quad e \quad g(n) = n^2$

c) $f(n) = n\log n - 3n \quad e \quad g(n) = n$

Notação Ω



$$f(n) = \Omega(g(n))$$

Notação Ω

- A notação Ω define um limite inferior para a função, por um fator constante

- Escreve-se $f(n) = \Omega(g(n))$, se existirem constantes positivas c e n_0 tais que para $n \geq n_0$, o valor de $f(n)$ é maior ou igual a $cg(n)$
  - Pode-se dizer que $g(n)$ é um limite assintótico inferior (em inglês, *asymptotically lower bound*) para $f(n)$

$$f(n) = \Omega(g(n)), \exists c > 0 \text{ e } n_0 \mid 0 \leq cg(n) \leq f(n), \forall n \geq n_0$$

Notação Ω

- Quando a notação Ω é usada para expressar o tempo de execução de um algoritmo no melhor caso, está se definindo também o limite (inferior) do tempo de execução desse algoritmo para todas as entradas

- Por exemplo, o algoritmo de ordenação por inserção é $\Omega(n)$ no melhor caso
  - O tempo de execução do algoritmo de ordenação por inserção é $\Omega(n)$

- O que significa dizer que “o tempo de execução” (i.e., sem especificar se é para o pior caso, melhor caso, ou caso médio) é $\Omega(g(n))$?
  - O tempo de execução desse algoritmo é pelo menos uma constante vezes $g(n)$ para valores suficientemente grandes de n

Notação Ω: Exemplos

- Para mostrar que $f(n) = 3n^3 + 2n^2$ é $\Omega(n^3)$ basta fazer $c = 1$, e então $3n^3 + 2n^2 \geq n^3$ para $n \geq 0$

Limites do algoritmo de ordenação por inserção

- O tempo de execução do algoritmo de ordenação por inserção está entre $\Omega(n)$ e $O(n^2)$

- Estes limites são assintoticamente os mais firmes possíveis
  - Por exemplo, o tempo de execução deste algoritmo não é $\Omega(n^2)$, pois o algoritmo executa em tempo $\Theta(n)$ quando a entrada já está ordenada

Teorema

- Para quaisquer funções $f(n)$ e $g(n)$,

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

se e somente se,

$$f(n) = \mathrm{O}(g(n)), \text{ e}$$

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

Mais sobre notação assintótica de funções

- Existem duas outras notações na análise assintótica de funções:
  - Notação o ("O" pequeno)
  - Notação ω
- Estas duas notações não são usadas normalmente, mas é importante saber seus conceitos e diferenças em relação às notações O e Ω, respectivamente

Notação o

- O limite assintótico superior definido pela notação O pode ser assintoticamente firme ou não
  - Por exemplo, o limite $2n^2 = \mathrm{O}(n^2)$ é assintoticamente firme, mas o limite $2n = \mathrm{O}(n^2)$ não é

- A notação o é usada para definir um limite superior que não é assintoticamente firme

- Formalmente a notação o é definida como:

$$f(n) = \mathrm{o}(g(n)), \text{ para qualquer } c > 0 \; e \; n_0 \mid 0 \leq f(n) < cg(n), \forall n \geq n_0$$

- Exemplo, $2n = \mathrm{o}(n^2)$ mas $2n^2 \neq \mathrm{o}(n^2)$

Notação o

- As definições das notações O e o são similares
  - A diferença principal é que em $f(n) = o(g(n))$, a expressão $0 \leq f(n) < cg(n)$ é válida para todas constantes $c > 0$

- Intuitivamente, a função $f(n)$ tem um crescimento muito menor que $g(n)$ quando n tende para infinito. Isto pode ser expresso da seguinte forma:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

- Alguns autores usam este limite como a definição de o

Notação ω

- Por analogia, a notação ω está relacionada com a notação Ω da mesma forma que a notação o está relacionada com a notação O

- Formalmente a notação ω é definida como:

$$f(n) = \omega(g(n)), \text{ para qualquer } c > 0 \; e \; n_0 \mid 0 \leq cg(n) < f(n), \forall n \geq n_0$$

- Por exemplo, $\frac{n^2}{2} = \omega(n)$, mas $\frac{n^2}{2} \neq \omega(n^2)$

- A relação $f(n) = \omega(g(n))$ implica em

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

se o limite existir

Exercício

7. Utilizando as definições para as notações assintóticas, prove se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas.

a) $3n^3 + 2n^2 + n + 1 = \mathrm{O}(n^3)$

b) $7n^2 = \mathrm{O}(n)$

c) $2^{n+2} = \mathrm{O}(2^n)$

d) $2^{2n} = \mathrm{O}(2^n)$

e) $5n^2 + 7n = \Theta(n^2)$

f) $6n^3 + 5n^2 \neq \Theta(n^2)$

g) $9n^3 + 3n = \Omega(n)$

h) $9n^3 + 3n = \mathrm{o}(n^3)$

Comparação de programas

- Podemos avaliar programas comparando as funções de complexidade, negligenciando as constantes de proporcionalidade
- Um programa com tempo de execução $\Theta(n)$ é melhor que outro com tempo $\Theta(n^2)$
  - Porém, as constantes de proporcionalidade podem alterar esta consideração

- Exemplo: um programa leva $100n$ unidades de tempo para ser executado e outro leva $2n^2$. Qual dos dois programas é melhor?
  - Depende do tamanho do problema
  - Para $n < 50$, o programa com tempo $2n^2$ é melhor do que o que possui tempo $100n$
  - Para problemas com entrada de dados pequena é preferível usar o programa cujo tempo de execução é $\Theta(n^2)$
  - Entretanto, quando n cresce, o programa com tempo de execução $\Theta(n^2)$ leva muito mais tempo que o programa $\Theta(n)$

Classes de Comportamento Assintótico
Complexidade Constante

- $f(n) = \Theta(1)$
  - O uso do algoritmo independe do tamanho de n
  - As instruções do algoritmo são executadas um número fixo de vezes
  - O que significa um algoritmo ser $\Theta(2)$ ou $\Theta(5)$?

Classes de Comportamento Assintótico
Complexidade logarítmica

- $f(n) = \Theta(\log n)$
  - Ocorre tipicamente em algoritmos que resolvem um problema transformando-o em problemas menores
  - Nestes casos, o tempo de execução pode ser considerado como sendo menor do que uma constante grande

- Supondo que a base do logaritmo seja 2:
  - Para $n = 1\,000$, $\log_2 \approx 10$
  - Para $n = 1\,000\,000$, $\log_2 \approx 20$

- Exemplo:
  - Algoritmo de pesquisa binária

Classes de Comportamento Assintótico
Complexidade linear

- $f(n) = \Theta(n)$
  - Em geral, um pequeno trabalho é realizado sobre cada elemento de entrada
  - Esta é a melhor situação possível para um algoritmo que tem que processar/produzir n elementos de entrada/saída
  - Cada vez que n dobra de tamanho, o tempo de execução também dobra

- Exemplo:
  - Algoritmo de pesquisa sequencial

Classes de Comportamento Assintótico
Complexidade linear logarítmica

- $f(n) = \Theta(n \log n)$
  - Este tempo de execução ocorre tipicamente em algoritmos que resolvem um problema quebrando-o em problemas menores, resolvendo cada um deles independentemente e depois agrupando as soluções
  - Caso típico dos algoritmos baseados no paradigma **divisão-e-conquista**

- Supondo que a base do logaritmo seja 2:
  - Para $n = 1\,000\,000$, $\log_2 \approx 20\,000\,000$
  - Para $n = 2\,000\,000$, $\log_2 \approx 42\,000\,000$

- Exemplo:
  - Algoritmo de ordenação MergeSort

Classes de Comportamento Assintótico
Complexidade quadrática

- $f(n) = \Theta(n^2)$
  - Algoritmos desta ordem de complexidade ocorrem quando os itens de dados são processados aos pares, muitas vezes em um anel dentro do outro
  - Para $n = 1000$, o número de operações é da ordem de 1000000
  - Sempre que n dobra o tempo de execução é multiplicado por 4
  - Algoritmos deste tipo são úteis para resolver problemas de tamanhos relativamente pequenos

- Exemplos:
  - Algoritmos de ordenação simples como seleção e inserção

Classes de Comportamento Assintótico
Complexidade cúbica

- $f(n) = \Theta(n^3)$
  - Algoritmos desta ordem de complexidade geralmente são úteis apenas para resolver problemas relativamente pequenos
  - Para $n = 100$, o número de operações é da ordem de 1000000
  - Sempre que n dobra o tempo de execução é multiplicado por 8

- Exemplo:
  - Algoritmo para multiplicação de matrizes

Classes de Comportamento Assintótico
Complexidade Exponencial

- $f(n) = \Theta(2^n)$
  - Algoritmos desta ordem de complexidade não são úteis sob o ponto de vista prático
  - Eles ocorrem na solução de problemas quando se usa a força bruta para resolvê-los
  - Para $n = 20$, o tempo de execução é cerca de 1000000
  - Sempre que n dobra o tempo de execução fica elevado ao quadrado

- Exemplo:
  - Algoritmo do Caixeiro Viajante

Classes de Comportamento Assintótico
Complexidade Exponencial

- $f(n) = \Theta(n!)$
  - Um algoritmo de complexidade $\Theta(n!)$ é dito ter complexidade exponencial, apesar de $\Theta(n!)$ ter comportamento muito pior do que $\Theta(2^n)$
  - Geralmente ocorrem quando se usa força bruta na solução do problema

- Considerando:
  - $n = 20$, temos que $20! = 2432902008176640000$, um número com 19 dígitos
  - $n = 40$ temos um número com 48 dígitos

Comparação de funções de complexidade

Função de custo	Tamanho n					
	10	20	30	40	50	60
n	0,00001 s	0,00002 s	0,00003 s	0,00004 s	0,00005 s	0,00006 s
n^2	0,0001 s	0,0004 s	0,0009 s	0,0016 s	0,0.35 s	0,0036 s
n^3	0,001 s	0,008 s	0,027 s	0,64 s	0,125 s	0.316 s
n^5	0,1 s	3,2 s	24,3 s	1,7 min	5,2 min	13 min
2^n	0,001 s	1 s	17,9 min	12,7 dias	35,7 anos	366 séc.
3^n	0,059 s	58 min	6,5 anos	3855 séc.	10^8 séc.	10^{13} séc.

Função de custo de tempo	Computador atual	Computador 100 vezes mais rápido	Computador 1000 vezes mais rápido
n	t_1	$100\ t_1$	$1000\ t_1$
n^2	t_2	$10\ t_2$	$31,6\ t_2$
n^3	t_3	$4,6\ t_3$	$10\ t_3$
2^n	t_4	$t_4 + 6,6$	$t_4 + 10$

Algoritmo exponencial × Algoritmo polinomial

- Funções de complexidade:
  - Um algoritmo cuja função de complexidade é $\Omega(c^n)$, $c > 1$, é chamado de algoritmo exponencial no tempo de execução
  - Um algoritmo cuja função de complexidade é $O(p(n))$, onde $p(n)$ é um polinômio de grau n, é chamado de algoritmo polinomial no tempo de execução

- A distinção entre estes dois tipos de algoritmos torna-se significativa quando o tamanho do problema a ser resolvido cresce

- Esta é a razão porque algoritmos polinomiais são muito mais úteis na prática do que algoritmos exponenciais
  - Geralmente, algoritmos exponenciais são simples variações de pesquisa exaustiva

Algoritmo exponencial × Algoritmo polinomial

- Os algoritmos polinomiais são geralmente obtidos através de um entendimento mais profundo da estrutura do problema

- Tratabilidade dos problemas:
  - Um problema é considerado **intratável** se ele é tão difícil que não se conhece um algoritmo polinomial para resolvê-lo
  - Um problema é considerado **tratável** (bem resolvido) se existe um algoritmo polinomial para resolvê-lo

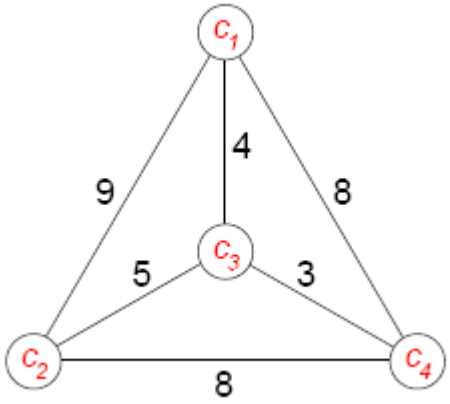
- Aspecto importante no projeto de algoritmos

Algoritmo exponencial × Algoritmo polinomial

- A distinção entre algoritmos polinomiais eficientes e algoritmos exponenciais ineficientes possui várias exceções
- Exemplo: um algoritmo com função de complexidade $f(\mathrm{n}) = 2^n$ é mais rápido que um algoritmo $g(n) = n^5$ para valores de n menores ou iguais a 20
- Também existem algoritmos exponenciais que são muito úteis na prática
  - Exemplo: o algoritmo Simplex para programação linear possui complexidade de tempo exponencial para o pior caso mas executa muito rápido na prática.
- Tais exemplos não ocorrem com frequência na prática, e muitos algoritmos exponenciais conhecidos não são muito úteis.

Algoritmo exponencial
O Problema do Caixeiro Viajante

- Um **caixeiro viajante** deseja visitar n cidades de tal forma que sua viagem inicie e termine em uma mesma cidade, e cada cidade deve ser visitada uma única vez
- Supondo que sempre há uma estrada entre duas cidades quaisquer, o problema é encontrar a menor rota para a viagem
- Seja a figura que ilustra o exemplo para quatro cidades c_1, c_2, c_3 e c_4 em que os números nas arestas indicam a distância entre duas cidades



O percurso < c_1, c_3, c_4, c_2, c_1> é uma solução para o problema, cujo percurso total tem distância 24

Exemplo de algoritmo exponencial

- Um algoritmo simples seria verificar todas as rotas e escolher a menor delas
- Há $(n - 1)!$ rotas possíveis e a distância total percorrida em cada rota envolve n adições, logo o número total de adições é $n!$
- No exemplo anterior teríamos 24 adições
- Suponha agora 50 cidades: o número de adições seria $50! \approx 10^{64}$
- Em um computador que executa 10^9 adições por segundo, o tempo total para resolver o problema com 50 cidades seria maior do que 10^{45} séculos só para executar as adições
- O problema do caixeiro viajante aparece com frequência em problemas relacionados com transporte, mas também aplicações importantes relacionadas com otimização de caminho percorrido

Fundamentos Matemáticos

Cormen – págs. 835 até 844

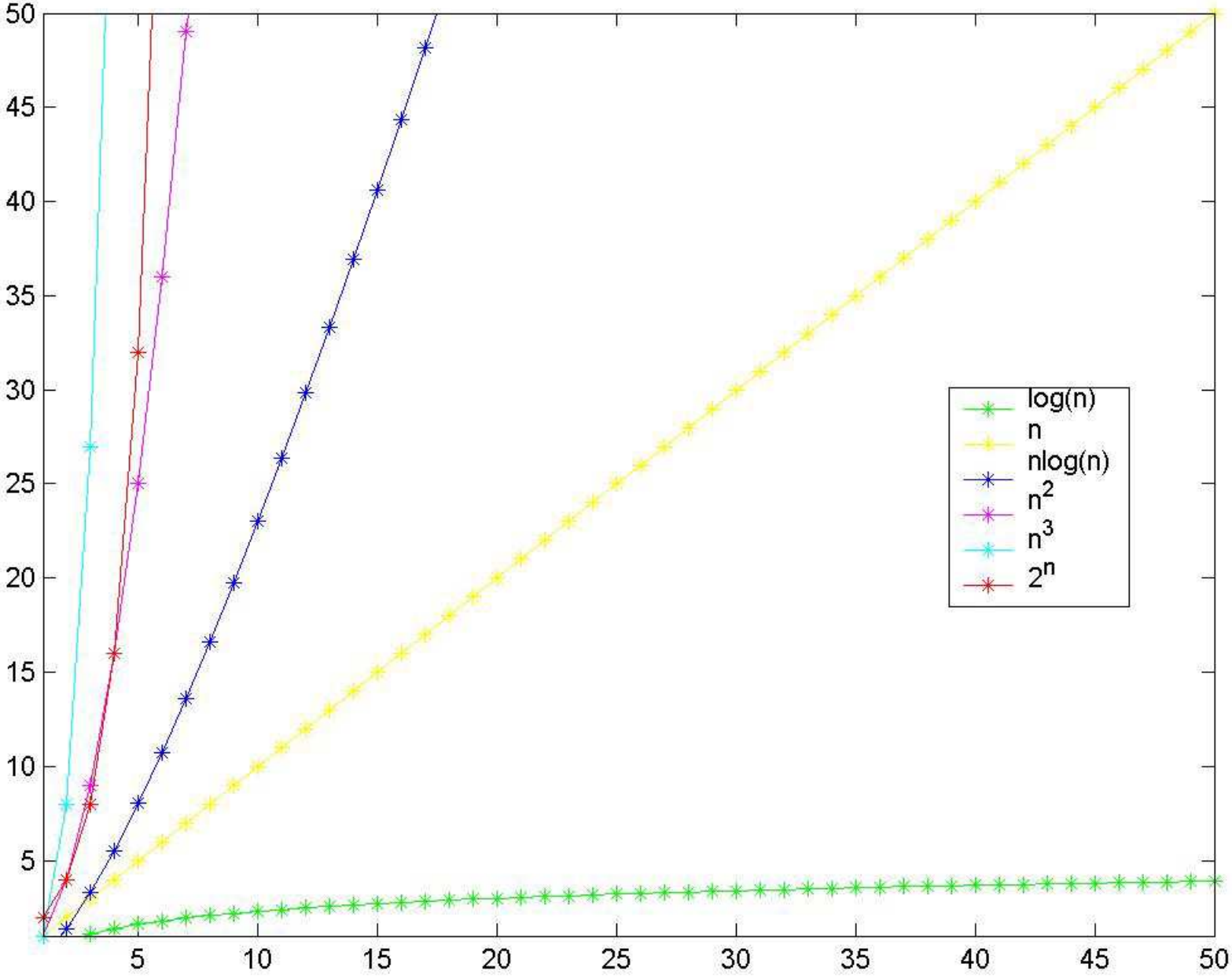
Hierarquias de funções

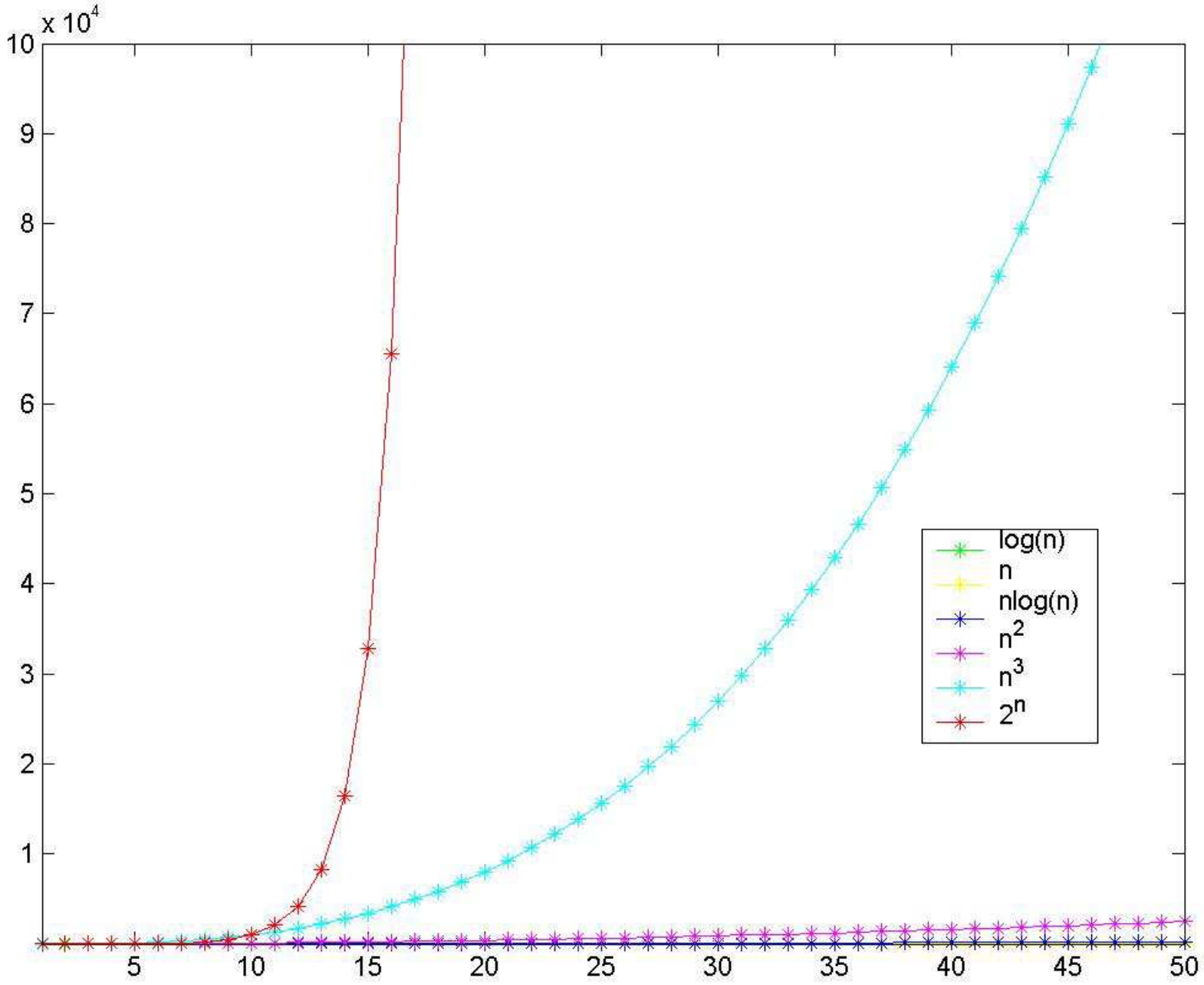
- A seguinte hierarquia de funções pode ser definida do ponto de vista assintótico:

$$1 \prec \log\log n \prec \log n \prec n^{\varepsilon} \prec n \prec n^{c} \prec n^{\log n} \prec c^{n} \prec n^{n} \prec c^{c^{n}}$$

onde ε e c são constantes arbitrárias com $0 < \varepsilon < 1 < c$

$$f(n) \prec g(n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$


50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
log(n)
n
nlog(n)
n2
n3
2n


x 10^4
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
log(n)
n
nlog(n)
n^2
n^3
2^n

Funções Usuais

- Logaritmos e Exponenciais:

$$a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x$$

$$\log_a a^x = x$$

$$a^0 = 1 \implies \log_a 1 = 0$$

$$a^{x+y} = a^x \times a^y \implies \log_a p + \log_a q = \log_a pq$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \implies \log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \implies \log_a x^y = y \log_a x$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \implies \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

- Aproximação de Stirling:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Somatórios

- Notação de somatório: $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \Lambda + a_n$
- Propriedades: $\sum_{i=1}^{n} (ca_i + b_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

Alguns somatórios

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

- Série aritmética

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Somas de quadrados e cubos

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Alguns somatórios

- Série geométrica (ou exponencial)
  - Para a ≠ 1

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = 1 + a + a^2 + \Lambda + a^n$$

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

  - Para |a| < 1

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1 - a}$$

Integração e diferenciação de séries

- Fórmulas adicionais podem ser obtidas por integração ou diferenciação das fórmulas anteriores
  - Exemplo: diferenciando-se ambos os lados de:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}$$

  - temos:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i a^i = \frac{a}{(1-a)^2}$$

Técnicas de Análise de Algoritmos

Ziviani – págs. 19 até 23 e 35 até 42

Cormen – págs. 21 até 31 e 50 até 72

Técnicas de análise de algoritmos

- Determinar o tempo de execução de um programa pode ser um problema matemático complexo
- Determinar a ordem do tempo de execução, sem preocupação com o valor das constantes envolvidas, pode ser uma tarefa mais simples
- A análise utiliza técnicas de matemática discreta, envolvendo contagem ou enumeração dos elementos de um conjunto:
  - manipulação de somas
  - produtos
  - permutações
  - fatoriais
  - coeficientes binomiais
  - solução de **equações de recorrência**

Análise do tempo de execução

- Comando de atribuição, de leitura ou de escrita: $\Theta(1)$
- Sequência de comandos: determinado pelo maior tempo de execução de qualquer comando da sequência
- Comando de decisão: tempo dos comandos dentro do comando condicional, mais tempo para avaliar a condição, que é $\Theta(1)$
- Anel: soma do tempo de execução do corpo do anel mais o tempo de avaliar a condição para terminação (geralmente $\Theta(1)$), multiplicado pelo número de iterações

Análise do tempo de execução

- Procedimentos não recursivos:
  - Cada um deve ser computado separadamente um a um, iniciando com os que não chamam outros procedimentos
  - Avalia-se então os que chamam os já avaliados (utilizando os tempos desses)
  - O processo é repetido até chegar no programa principal

- Procedimentos recursivos:
  - É associada uma função de complexidade $\mathrm{T}(n)$ desconhecida, onde n mede o tamanho dos argumentos
  - Obtemos uma equação de recorrência para $\mathrm{T}(n)$
  - Resolvemos a equação de recorrência

Análise de algoritmos não recursivos

- Considerando que a operação relevante seja o número de atribuições à variável a, qual é a **função de complexidade** da função exemplo1?
- Qual a **ordem de complexidade** da função exemplo1?

```
void exemplo1 (int n)
{
    int i, a;
    a=0;
    for (i=0; i<n; i++)
        a+=i;
}
```

Análise de algoritmos não recursivos

- Considerando que a operação relevante seja o número de atribuições à variável a, qual é a **função de complexidade** da função exemplo2?
- Qual a **ordem de complexidade** da função exemplo2?

```
void exemplo2 (int n)
{
    int i,j,a;
    a=0;
    for (i=0; i<n; i++)
        for (j=n; j>i; j--)
            a+=i+j;
    exemplo1(n);
}
```

Análise de algoritmos não recursivos

- Ordenação por Seleção
  - Seleciona o menor elemento do conjunto
  - Troca este com o primeiro elemento $A[0]$
  - Repita as duas operações acima com os $n-1$ elementos restantes, depois com os $n-2$, até que reste apenas um

Análise de algoritmos não recursivos

```
   void Ordena (int A[]) {
      /*ordena o vetor A em ordem ascendente*/
      int i, j, min, x;
(1)   for (i = 0; i < n-1; i++) {
(2)      min = i;
(3)      for (j = i + 1; j < n; j++)
(4)          if (A[j] < A[min])
(5)              min = j;
         /*troca A[min] e A[i]*/
(6)      x = A[min];
(7)      A[min] = A[i];
(8)      A[i] = x;
      }
   }
```

Análise de algoritmos não recursivos

- Considerando que a operação relevante seja o número de comparações com os elementos do vetor:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-2} (n-1-i-1+1) = \sum_{i=0}^{n-2} (n-i-1)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} n - \sum_{i=0}^{n-2} i - \sum_{i=0}^{n-2} 1 = n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1)$$

$$= n^2 - n - \frac{n^2 - 3n + 2}{2} - n + 1 = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

- Se considerarmos o número de movimentações com os elementos de `A`, o programa realiza exatamente $3(n-1)$ operações

Exercício

8. O que faz essa função ? Qual é a operação relevante? Qual a sua ordem de complexidade?

```
void p1 (int n)
{
   int i, j, k;

   for (i=0; i<n; i++)
      for (j=0; j<n; j++) {
         C[i][j]=0;
         for (k=n-1; k>=0; k--)
            C[i][j]=C[i][j]+A[i][k]*B[k][j];
      }
}
```

Exercício

9. O que faz essa função ? Qual é a operação relevante? Qual a sua ordem de complexidade?

```
void p2 (int n)
{
    int i, j, x, y;

   x = y = 0;
   for (i=1; i<=n; i++) {
       for (j=i; j<=n; j++)
           x = x + 1;
       for (j=1; j<i; j++)
           y = y + 1;
    }
}
```

Exercício

10. Qual é a função de complexidade para o número de atribuições ao vetor `x`?

```
void Exercicio3(int n){
   int i, j, a;

   for (i=0; i<n; i++){
      if (x[i] > 10)
         for (j=i+1; j<n; j++)
            x[j] = x[j] + 2;
      else {
         x[i] = 1;
         j = n-1;
         while (j >= 0) {
            x[j] = x[j] - 2;
            j = j - 1;
         }
      }
   }
}
```

Algoritmos recursivos

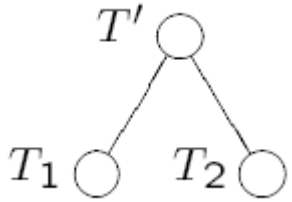
- Um objeto é recursivo quando é definido parcialmente em termos de si mesmo
- Um algoritmo que chama a si mesmo, direta ou indiretamente, é dito ser **recursivo**
- Recursividade permite descrever algoritmos de forma mais clara e concisa, especialmente problemas recursivos por natureza ou que utilizam estruturas recursivas

Algoritmos recursivos

- Exemplo 1: Números naturais
  a) 1 é um número natural
  b) O sucessor de um número natural é um número natural

- Exemplo 2: Função fatorial
  a) 0! = 1
  b) Se $n > 0$ então $n! = n\,(n-1)!$

- Exemplo 3: Árvores
  a) A árvore vazia é uma árvore
  b) Se T_1 e T_2 são árvores então T' é uma árvore



Algoritmos recursivos

- Normalmente, as funções recursivas são divididas em duas partes
  - Chamada recursiva
  - Condição de parada
- A chamada recursiva pode ser direta (mais comum) ou indireta (A chama B que chama A novamente)
- A condição de parada é fundamental para evitar a execução de *loops* infinitos

Algoritmos recursivos

- Internamente, quando qualquer chamada de função é feita dentro de um programa, é criado um registro de ativação na pilha de execução do programa

- O registro de ativação armazena os parâmetros e variáveis locais da função bem como o “ponto de retorno” no programa ou subprograma que chamou essa função

- Ao final da execução dessa função, o registro é desempilhado e a execução volta ao subprograma que chamou a função

Exemplo: fatorial recursivo

```
int fat (int n) {
    if (n<=0)
        return (1);
    else
        return (n * fat(n-1));
}
```

```
int main() {
    int f;
    f = fat(5);
    printf("%d",f);
    return (0);
}
```

fat(5) = 5 * fat(4)

fat(4) = 4 * fat(3)

fat(3) = 3 * fat(2)

fat(2) = 2 * fat(1)

fat(1) = 1 * fat(0)

fat(0) = 1

Complexidade: fatorial recursivo

- A complexidade de tempo do fatorial recursivo é $\mathrm{O}(n)$ (em breve iremos ver a maneira de calcular isso usando **equações de recorrência**)

- Mas a complexidade de espaço também é $\mathrm{O}(n)$, devido a pilha de execução

Complexidade: fatorial iterativo

- A complexidade de espaço do fatorial não recursivo é O(1)

```
int fatiter (int n) {
    int f;
    f = 1;
    while(n > 0){
        f = f * n;
        n = n - 1;
    }
    return (f);
}
```

Recursividade

- Portanto, a recursividade nem sempre é a melhor solução, mesmo quando a definição matemática do problema é feita em termos recursivos

Exemplo: série de Fibonnaci

- Série de Fibonnaci:
  - $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $\quad n > 2,$
  - $F_0 = F_1 = 1$
  - 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89...

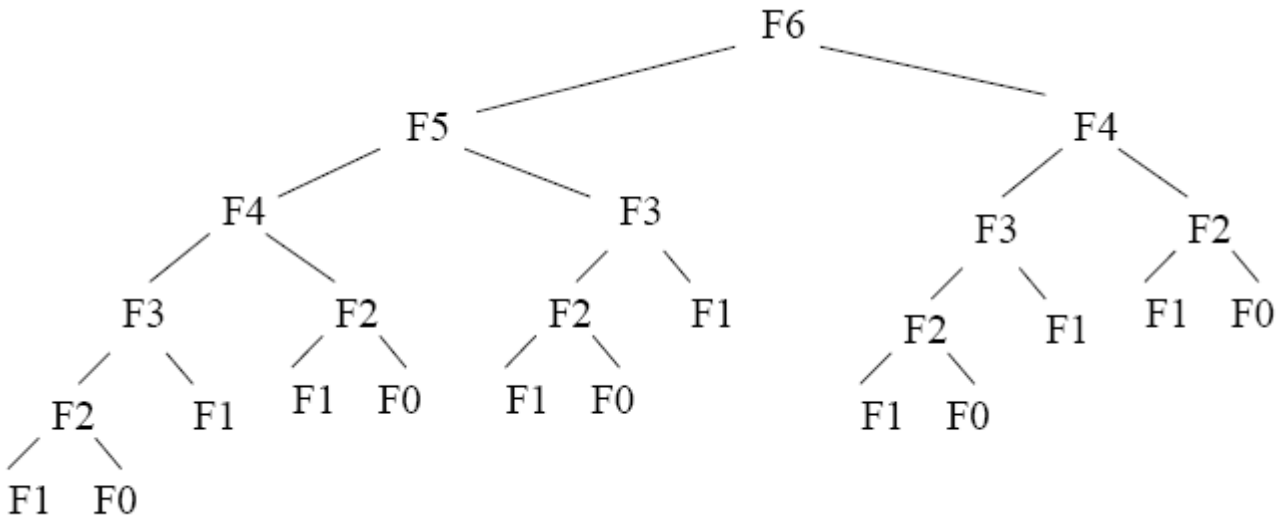
```
int Fib(int n) {
   if (n<2)
      return (1);
   else
      return (Fib(n-1) + Fib(n-2));
}
```

Complexidade: série de Fibonacci

- Ineficiência em Fibonacci
  - Termos F_{n-1} e F_{n-2} são computados independentemente
  - Número de chamadas recursivas = número de Fibonacci!
  - Custo para cálculo de F_n

    $O(\phi^n)$ onde $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}61803...$

    Exponencial!!!



Exemplo: série de Fibonacci iterativo

```
int FibIter(int n) {
    int i, k, F;

    i = 1; F = 0;
    for (k = 1; k <= n; k++) {
        F += i;
        i = F - i;
    }
    return F;
}
```

- Complexidade: $O(n)$
- Conclusão: não usar recursividade cegamente!

Quando vale a pena usar recursividade?

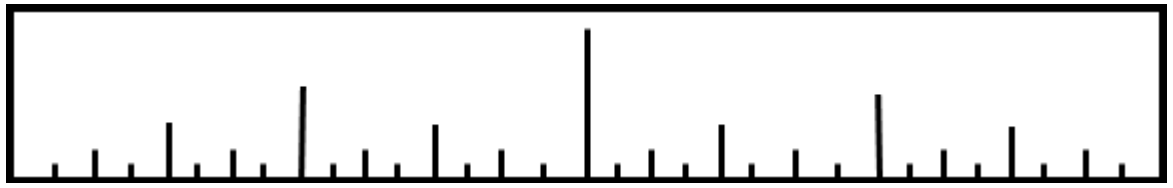
- Recursividade vale a pena para algoritmos complexos, cuja a implementação iterativa é complexa e normalmente requer o uso explícito de uma pilha
  - Dividir para Conquistar (Ex. Quicksort)
  - Caminhamento em Árvores (pesquisa, backtracking)

- Evitar o uso de recursividade quando existe uma solução óbvia por iteração:
  - Fatorial
  - Série de Fibonacci

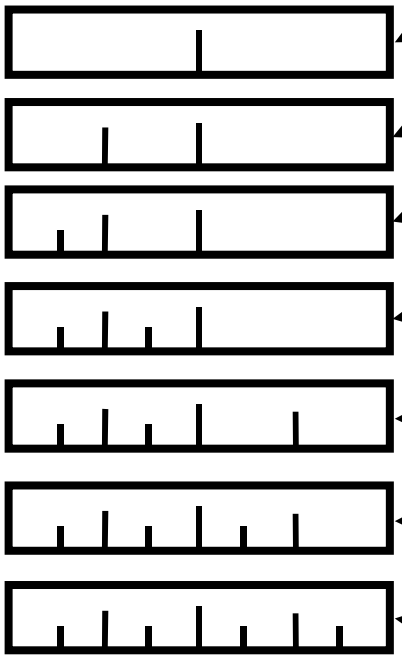
Exemplo: régua

```
void regua(int l, r, h){
    int m;

    if (h > 0) {
        m = (l + r) / 2;
        marca(m, h);
        regua(l, m, h - 1);
        regua(m, r, h - 1);
    }
}
```

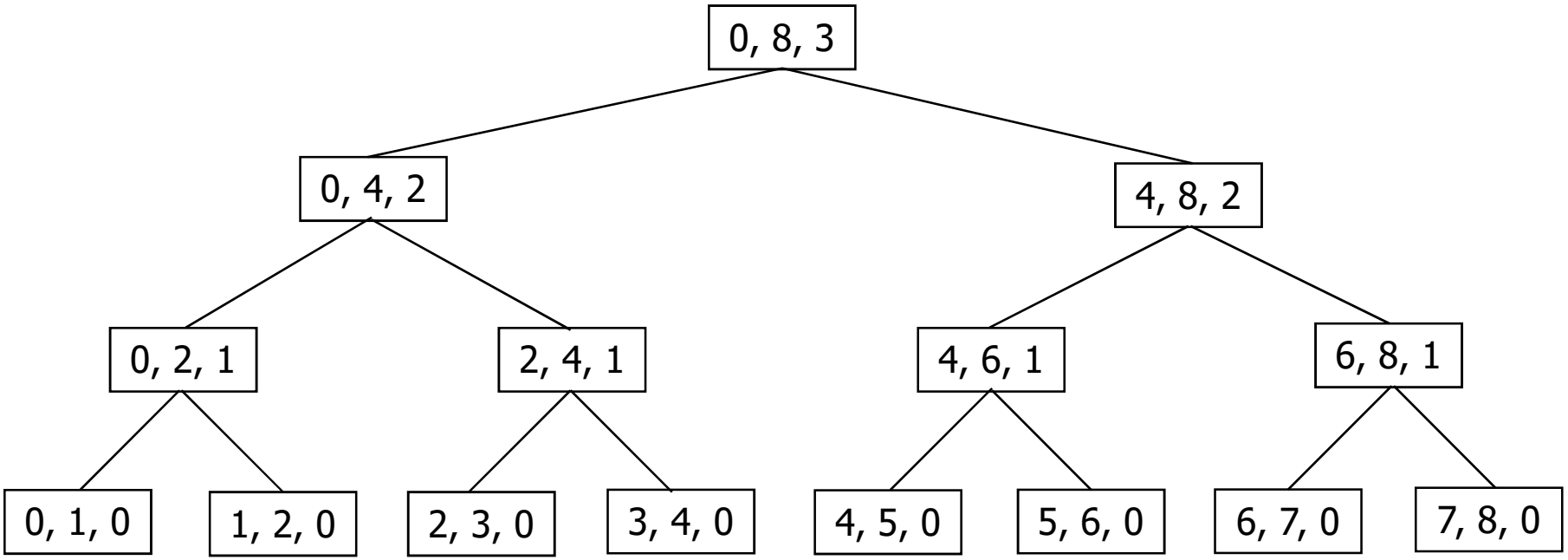


Exemplo: régua



```
regua(0, 8, 3)
 marca(4, 3)
 regua(0, 4, 2)
  marca(2, 2)
  regua(0, 2, 1)
   marca(1, 1)
    regua(0, 1, 0)
    regua(1, 2, 0)
  regua(2, 4, 1)
   marca(3, 1)
    regua(2, 3, 0)
    regua(3, 4, 0)
regua(4, 8, 2)
  marca(6, 2)
  regua(4, 6, 1)
   marca(5, 1)
    regua(4, 5, 0)
    regua(5, 6, 0)
  regua(6, 8, 1)
   marca(7, 1)
     regua(6, 7, 0)
     regua(7, 8, 0)
```

Exemplo: régua



Exercícios

11. Implemente uma função recursiva para computar o valor de 2^n

12. O que faz a função abaixo?

```
int f(int a, int b) {
    // considere a > b
    if (b == 0)
        return a;
    else
        return (f(b,a%b));
}
```

Análise de procedimento recursivo

```
    Pesquisa(n);
(1) if n ≤ 1
(2) then "inspecione elemento" e termine
    else begin
(3)         para cada um dos n elementos "inspecione elemento";
(4)         Pesquisa(n-1);
          end;
```

- Para cada procedimento recursivo é associada uma função de complexidade $T(n)$ desconhecida, onde n mede o tamanho dos argumentos para o procedimento
- Obtemos uma equação de recorrência para $T(n)$
- **Equação de recorrência**: maneira de definir uma função por uma expressão envolvendo a mesma função

Análise de procedimento recursivo

- Seja $T(n)$ uma função de complexidade que represente o número de inspeções nos n elementos do conjunto.
- O custo de execução das linhas `(1)` e `(2)` é $O(1)$ e da linha `(3)` é $O(n)$
- Usa-se uma **equação de recorrência** para determinar o número de chamadas recursivas
- O termo $T(n)$ é especificado em função dos termos anteriores $T(1), T(2), \ldots, T(n-1)$

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + n \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

(para $n = 1$, fazemos uma inspeção)

Resolução de equação de recorrência

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + n \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
T(n-1) &= T(n-2) + n - 1 \\
T(n-2) &= T(n-3) + n - 2 \\
T(n-3) &= T(n-4) + n - 3 \\
&\vdots \\
T(n-(n-2)) &= T(n-(n-1)) + 2 \\
T(n-(n-1)) &= 1
\end{aligned}$$

$$n + (n-1) + (n-2) + \Lambda + 2 + 1 = \sum_{i=1}^{n} i$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

Logo, o programa do exemplo é $\Theta(n^2)$

Análise da função `fat`

- Seja a seguinte função para calcular o fatorial de n:

```
int fat (int n) {
   if (n<=1)
      return (1);
   else
      return (n * fat(n-1));
}
```

- Seja a seguinte equação de recorrência para esta função:

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + c & n > 1 \\ T(1) = d \end{cases}$$

- Esta equação diz que quando $n = 1$, o custo para executar `fat` é igual a d
- Para valores de n maiores que 1, o custo para executar `fat` é c mais o custo para executar $T(n-1)$

Resolvendo a equação de recorrência

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + c & n > 1 \\ T(1) = d \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + c \\ T(n-1) &= T(n-2) + c \\ T(n-2) &= T(n-3) + c \\ &\vdots \\ T(n-(n-2)) &= T(n-(n-1)) + c \\ T(n-(n-1)) &= d \end{aligned} \Bigg\} \sum_{i=1}^{n-1} c + d$$

$$T(n) = c(n-1) + d$$

Logo, o programa do exemplo é $O(n)$

Exercícios

13. Resolva as seguintes equações de recorrência:

a) $$\begin{cases} T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 & (n \geq 2) \\ T(1) = 0 & (n = 1) \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n & (n \geq 2) \\ T(1) = 0 & (n = 1) \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + n & (n > 1) \\ T(1) = 1 & (n = 1) \end{cases}$$

Teorema Mestre

- Recorrências das forma

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

onde $a \geq 1$ e $b > 1$ são constantes e $f(n)$ é uma função assintoticamente positiva, podem ser revolvidas usando o Teorema Mestre

- Neste caso, não estamos achando a forma fechada da recorrência mas sim seu comportamento assintótico

Teorema Mestre

- Sejam as constantes $a \geq 1$ e $b > 1$ e $f(n)$ uma função definida nos inteiros não-negativos pela recorrência:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

onde a fração n/b pode significar $\lfloor n/b \rfloor$ ou $\lceil n/b \rceil$. A equação de recorrência $\mathrm{T}(n)$ pode ser limitada assintoticamente da seguinte forma:

1. Se $f(n) = \mathrm{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$, então $\boxed{\mathrm{T}(n) = \Theta(n^{\log_b a})}$
2. Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $\boxed{\mathrm{T}(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)}$
3. Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$ e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e para n suficientemente grande, então $\boxed{\mathrm{T}(n) = \Theta(f(n))}$

Comentários sobre o teorema Mestre

- Nos três casos estamos comparando a função $f(n)$ com a função $n^{\log_b a}$. Intuitivamente, a solução da recorrência é determinada pela maior das duas funções.

- Por exemplo:
  - No primeiro caso a função $n^{\log_b a}$ é a maior e a solução para a recorrência é $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
  - No terceiro caso, a função $f(n)$ é a maior e a solução para a recorrência é $T(n) = \Theta(f(n))$
  - No segundo caso, as duas funções são do mesmo "tamanho". Neste caso, a solução fica multiplicada por um fator logarítmico e fica da forma $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n) = \Theta(f(n) \log n)$

Tecnicalidades sobre o teorema Mestre

- No primeiro caso, a função $f(n)$ deve ser não somente menor que $n^{\log_b a}$ mas ser polinomialmente menor. Ou seja, $f(n)$ deve ser assintoticamente menor que $n^{\log_b a}$ por um fator de n^{ε}, para alguma constante $\varepsilon > 0$

- No terceiro caso, a função $f(n)$ deve ser não somente maior que $n^{\log_b a}$ mas ser polinomialmente maior e satisfazer a condição de "regularidade" que $af(n/b) \leq cf(n)$. Esta condição é satisfeita pela maior parte das funções polinomiais encontradas neste curso.

Tecnicalidades sobre o teorema Mestre

- Teorema **não** cobre todas as possibilidades para $f(n)$:
  - Entre os casos `1` e `2` existem funções $f(n)$ que são menores que $n^{\log_b a}$ mas não são polinomialmente menores
  - Entre os casos `2` e `3` existem funções $f(n)$ que são maiores que $n^{\log_b a}$ mas não são polinomialmente maiores

  Se a função $f(n)$ cai numa dessas condições, ou a condição de regularidade do caso `3` é falsa, então não se pode aplicar este teorema para resolver a recorrência

Uso do teorema: Exemplo 1

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

- Temos que,

$$a = 9, \quad b = 3, \quad f(n) = n$$

- Desta forma,

$$n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = \Theta(n^2)$$

- Como $f(n) = O(n^{\log_3 9 - \varepsilon})$, onde $\varepsilon = 1$, podemos aplicar o caso 1 do teorema e concluir que a solução da recorrência é

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

Uso do teorema: Exemplo 2

$$T(n) = T(2n/3) + 1$$

- Temos que,

$$a = 1, \quad b = 3/2, \quad f(n) = 1$$

- Desta forma,

$$n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$$

- O caso 2 se aplica já que $f(n) = O(n^{\log_b a}) = \Theta(1)$. Temos então que a solução da recorrência é

$$T(n) = \Theta(\log n)$$

Uso do teorema: Exemplo 3

$$T(n) = 3T(n/4) + n\log n$$

- Temos que,

$$a = 3, \quad b = 4, \quad f(n) = n\log n$$

- Desta forma,

$$n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = O(n^{0,793})$$

- Como $f(n) = \Omega(n^{\log_4 3+\varepsilon})$, onde $\varepsilon \approx 0{,}2$, o caso 3 se aplica se mostrarmos que a condição de regularidade é verdadeira para $f(n)$

Uso do teorema: Exemplo 3

- Para um valor suficientemente grande de n

$$af(n/b) = 3(n/4)\log(n/4) \leq (3/4)n\log n = cf(n)$$

- Para $c = ¾$. Consequentemente, usando o caso 3, a solução para a recorrência é:

$$T(n) = \Theta(n\log n)$$

Uso do teorema: Exemplo 4

$$T(n) = 2T(n/2) + n\log n$$

- Temos que,

$$a = 2, \quad b = 2, \quad f(n) = n\log n$$

- Desta forma,

$$n^{\log_b a} = n$$

- Aparentemente o caso 3 deveria se aplicar já que $f(n) = n\log n$ é assintoticamente maior que $n^{\log_b a} = n$. Mas no entanto, não é polinomialmente maior. A fração $f(n)/n^{\log_b a} = (n\log n)/n = \log n$ que é assintoticamente menor que n^{ε} para toda constante positiva ε . Consequentemente, a recorrência cai na situação entre os casos 2 e 3 onde o teorema não pode ser aplicado.

Exercício

14. Use o teorema mestre para derivar um limite assintótico Θ para da seguinte recorrência:

$$T(n) = 4T(n/2) + n$$