Matrizes inversas

Professor Vitor Luiz de Almeida

Matrizes invertíveis *versus* sistemas lineares

PUC Minas Virtual

Objetivo Geral: Resolver sistemas lineares usando a invertibilidade de matrizes.

Objetivos específicos:

1. Perceber que o sistema linear admite uma única solução quando a matriz dos coeficientes for invertível;
2. Estabelecer condições suficientes e necessárias entre invertibilidade de matrizes e consistência de sistemas lineares;

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Recordando: Um sistema linear tem zero, uma ou uma infinidade de soluções.

Ideia:

$$X_1, X_2 \text{ sol. distintas de } AX = B$$

$$\Downarrow$$

$$X_0 = X_1 - X_2 \neq 0 \text{ sol. de } AX = 0$$

Ideia:

Portanto,

$$X = X_1 + c \cdot X_0 \text{ é uma solução de } AX = B, \ \forall c \in \mathbb{R}$$

De fato,

$$\begin{aligned} AX &= A(X_1 + c \cdot X_0) \\ &= AX_1 + c \cdot AX_0 \\ &= B + 0 \end{aligned}$$

Teorema: Se A é uma matriz invertível $n \times n$, então, para cada matriz B do tipo $n \times 1$, o sistema linear $AX = B$ tem uma única solução, a saber, $X = A^{-1}B$.

Demonstração:

Basta observarmos que

$$AX = B \Rightarrow A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \left(A^{-1} \cdot A\right) X = A^{-1} \cdot B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que Y seja outra solução de $AX = B$.

Portanto,

$$AY = B,$$

isto é, $Y = A^{-1} \cdot B = X$, o que gera uma contradição com nossa suposição inicial.

Exemplo 01: Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} -x + 4y + z = -3 \\ x + 9y - 2z = 4 \\ 6x + 4y - 8z = -5 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & -2 \\ 6 & 4 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & -2 \\ 6 & 4 & -8 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Resolução:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 64 & -36 & 17 \\ 4 & -2 & 1 \\ 50 & -28 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{421}{2} \\ -\frac{25}{2} \\ -\frac{327}{2} \end{bmatrix}$$

Exemplo 02: Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = b_1 \\ -x - 2y \quad = b_2 \\ 2x + 5y + 4z = b_3 \end{cases}$$

em que (i) $b_1 = -1$, $b_2 = -1$ e $b_3 = 0$; (ii) $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ e $b_3 = 1$.

Resolução:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Resolução:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -13 & -10 \\ -4 & 6 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Por exemplo, para o item (i), temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -13 & -10 \\ -4 & 6 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Teorema: Seja A uma matriz quadrada.

(1) Se B é uma matriz quadrada tal que $BA = I_{n\times n}$, então $B = A^{-1}$;

(2) Se B é uma matriz quadrada tal que $AB = I_{n\times n}$, então $B = A^{-1}$.

Demonstração:

Para o item (1), temos:

$$AX = 0 \implies B \cdot (AX) = B \cdot 0 \implies (B \cdot A)X = 0 \implies X = 0$$

O item (2) deverá ser feito como exercício.

Consequência imediata: Sejam A e B duas matrizes quadradas de mesmo tamanho. Suponhamos que AB seja invertível. Então, A e B são invertíveis.

$$AB \text{ invertível} \Rightarrow (AB)\cdot C = I \Rightarrow A\cdot(BC) = I$$

De forma análoga,

$$AB \text{ invertível} \Rightarrow C\cdot(AB) = I \Rightarrow (CA)\cdot B = I$$

Portanto, A e B são invertíveis.

Teorema: As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) A é invertível;

(2) O sistema linear homogêneo $AX = 0$ admite somente a solução trivial;

(3) A forma escalonada reduzida por linhas de A é $I_{n\times n}$;

(4) A pode ser escrita como produto de matrizes elementares;

(5) $AX = B$ é consistente para cada matriz B do tipo $n \times 1$;

(6) $AX = B$ tem exatamente uma única solução para cada matriz B do tipo $n \times 1$.

Demonstração:

$(1) \Rightarrow (6)$ $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$(6) \Rightarrow (5)$ É imediato.

$(5) \Rightarrow (1)$ $AX_i = e_i \Rightarrow C = \left[\begin{array}{ccccccc} X_1 & \vdots & X_2 & \vdots & \dots & \vdots & X_n \end{array} \right]$ é tal que $A \cdot C = I$.

Exemplo 03: Determine uma relação entre as constantes b_1 e b_2 tais que o sistema linear

$$\begin{cases} 6x - 4y = b_1 \\ 3x - 2y = b_2 \end{cases}$$

seja consistente.

Resolução:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 6 & -4 & b_1 \\ 3 & -2 & b_2 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{b_1}{6} \\ 3 & -2 & b_2 \end{array}\right] \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3 \cdot L_1}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{b_1}{6} \\ 0 & 0 & b_2 - \frac{b_1}{2} \end{array}\right]$$

Portanto, o sistema só é consistente quando

$$b_2 - \frac{b_1}{2} = 0$$

Exemplo 04: Determine uma relação entre as constantes b_1, b_2 e b_3 tais que o sistema linear

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = b_1 \\ 4x - 5y + 8z = b_2 \\ -3x + 3y - 3z = b_3 \end{cases}$$

seja consistente.

Resolução:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 5 & \vdots & b_1 \\ 4 & -5 & 8 & \vdots & b_2 \\ -3 & 3 & -3 & \vdots & b_3 \end{array}\right] \underset{\sim}{\begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 4 \cdot L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3 \cdot L_1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 5 & \vdots & b_1 \\ 0 & 3 & -12 & \vdots & b_2 - 4b_1 \\ 0 & -3 & 12 & \vdots & b_3 + 3b_1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_2 \leftarrow \frac{1}{3} \cdot L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 5 & \vdots & b_1 \\ 0 & 1 & -4 & \vdots & \frac{1}{3}(b_2 - 4b_1) \\ 0 & -3 & 12 & \vdots & b_3 + 3b_1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3 \leftarrow L_3 + 3 \cdot L_2} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 5 & \vdots & b_1 \\ 0 & 1 & -4 & \vdots & \frac{1}{3}(b_2 - 4b_1) \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -b_1 + b_2 + b_3 \end{array}\right]$$

Resolução:

Portanto, o sistema só é consistente quando

$$b_1 = b_2 + b_3$$

Exemplo 05: Determine uma relação entre as constantes b_1, b_2 e b_3 tais que o sistema linear

$$\begin{cases} -x - 2y - z = b_1 \\ -4x + 5y + 2z = b_2 \\ -4x + 7y + 4z = b_3 \end{cases}$$

seja consistente.

Resolução:

$$\left[\begin{array}{ccccc} -1 & -2 & -1 & \vdots & b_1 \\ -4 & 5 & 2 & \vdots & b_2 \\ -4 & 7 & 4 & \vdots & b_3 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_1 \leftrightarrow -L_1} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & \vdots & -b_1 \\ -4 & 5 & 2 & \vdots & b_2 \\ -4 & 7 & 4 & \vdots & b_3 \end{array}\right] \underset{\sim}{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 4 \cdot L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4 \cdot L_1 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & \vdots & -b_1 \\ 0 & 13 & 6 & \vdots & b_2 - 4b_1 \\ 0 & 15 & 8 & \vdots & b_3 - 4b_1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_2 \leftarrow \tfrac{1}{13} \cdot L_2} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & \vdots & -b_1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{13} & \vdots & \frac{b_2 - 4b_1}{13} \\ 0 & 15 & 8 & \vdots & b_3 - 4b_1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3 \leftarrow L_3 - 15L_2}$$

Resolução:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & \vdots & -b_1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{13} & \vdots & \frac{b_2-4b_1}{13} \\ 0 & 0 & \frac{14}{13} & \vdots & b_3-4b_1-15\cdot\frac{b_2-4b_1}{13} \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3 \leftarrow \frac{13}{14}\cdot L_3} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & \vdots & -b_1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{13} & \vdots & \frac{b_2-4b_1}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{13}{14}\left[b_3-4b_1-15\cdot\frac{b_2-4b_1}{13}\right] \end{array}\right]$$

Portanto, para quaisquer $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$, o sistema dado é consistente.

Agora é com você!

Leia a teoria no livro-texto indicado e faça todas as atividades propostas em nosso planejamento de aulas.

PUC Minas
Virtual