PUC Minas

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Bacharelado em Ciência da Computação

Teoria dos Grafos

Teoria dos Grafos

Prof.: Felipe Domingos

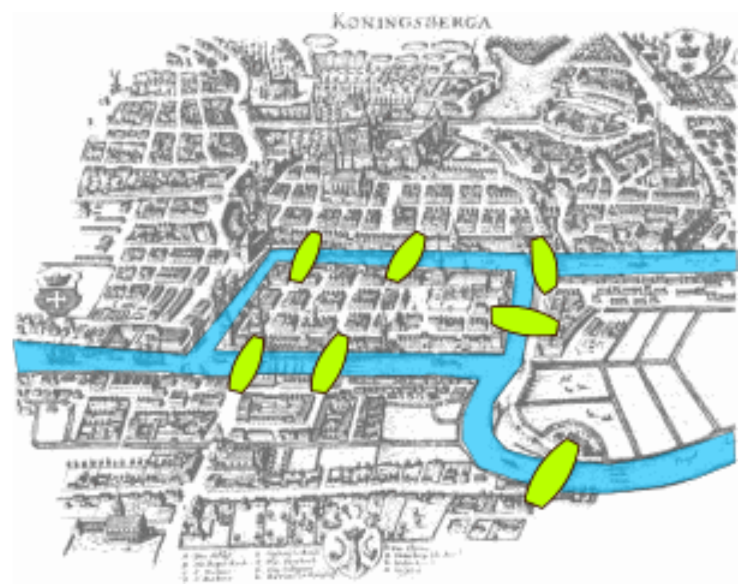
felipe@pucminas.br

Grafos Eulerianos
Grafos Unicursais
Problema do Carteiro Chinês

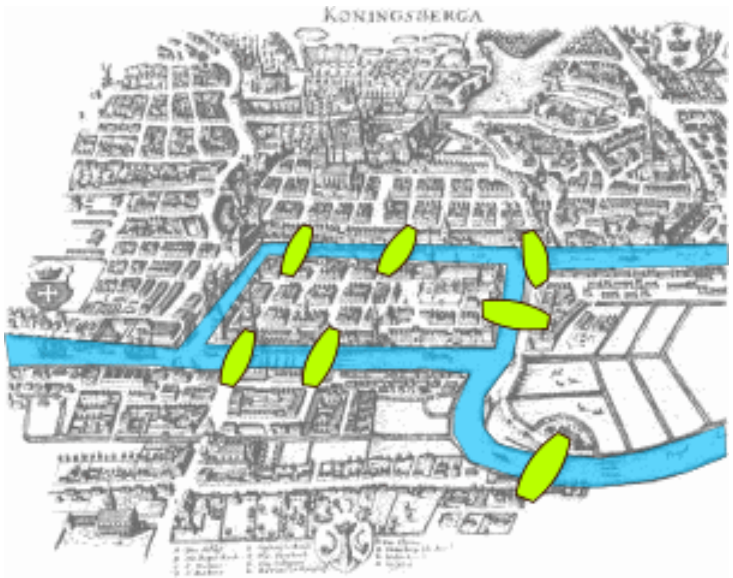
Deo – páginas 23 até 30

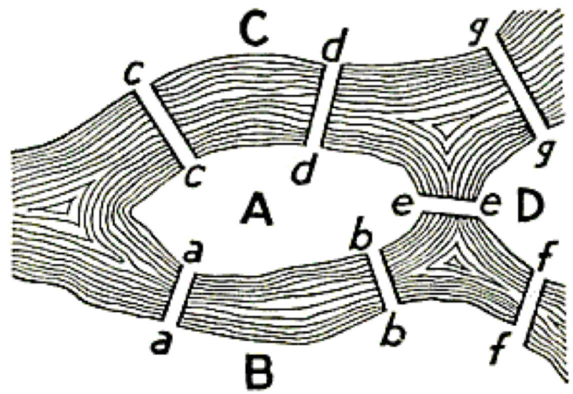
Problema das Pontes de Königsberg

- No século XVIII, Königsberg era a capital da Prússia Oriental
- A cidade foi construída à volta do rio Pregel e para unir todas as partes da cidade foram construídas 7 pontes
- Os habitantes da cidade gostavam de passear pelas pontes e tentavam encontrar uma forma de atravessar todas as pontes exatamente uma vez e retornar ao ponto inicial



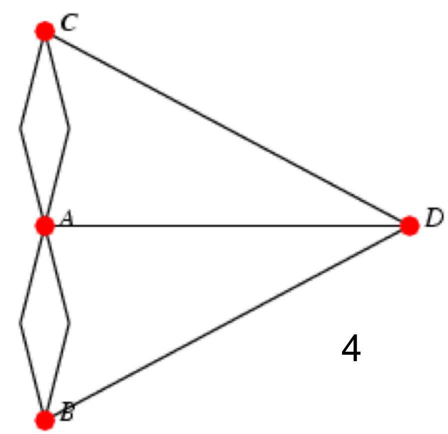
Problema das Pontes de Königsberg





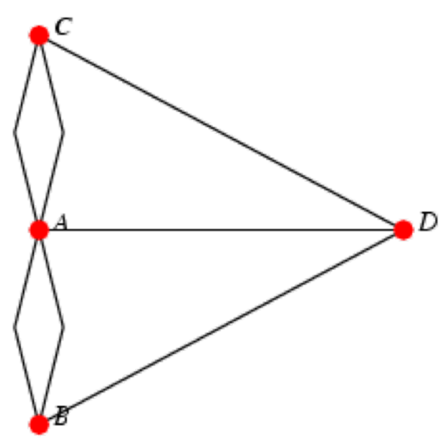
vértices: pontos de terra

aresta: pontes



Problema das Pontes de Königsberg

- Em 1736, Euler mostrou que existe um caminho com ponto de início em qualquer vértice que passa através de cada aresta exatamente uma vez e termina no vértice inicial **se e somente se** todos os vértices tiverem grau par
- O grafo que não cumprir com essas condições não é Euleriano
- No exemplo da ponte, todos os quatro vértices têm grau ímpar, logo não é possível atravessar todas as pontes exatamente uma vez e retornar ao ponto inicial

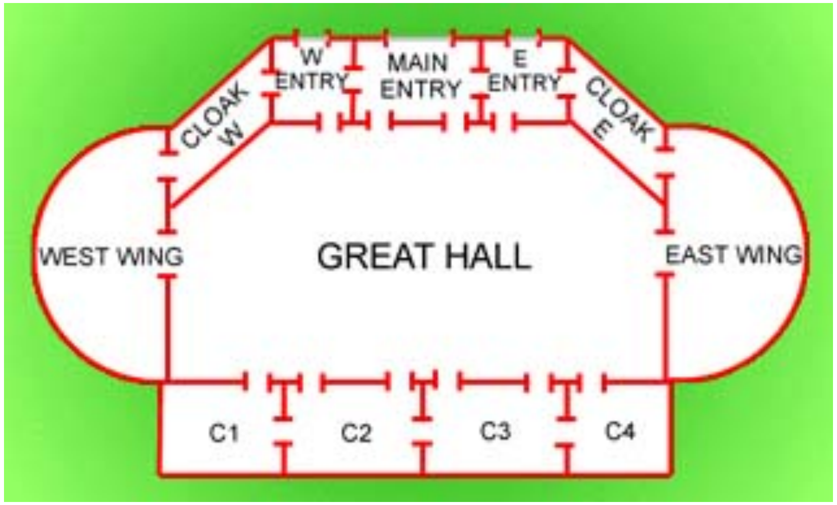


Grafos Eulerianos

- Problema: encontrar um ciclo que passe por todas as arestas uma única vez
- Se é possível encontrar um ciclo que passe por todas as arestas uma única vez, dizemos que G é um grafo euleriano
- TEOREMA: Um grafo é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices tiverem grau par

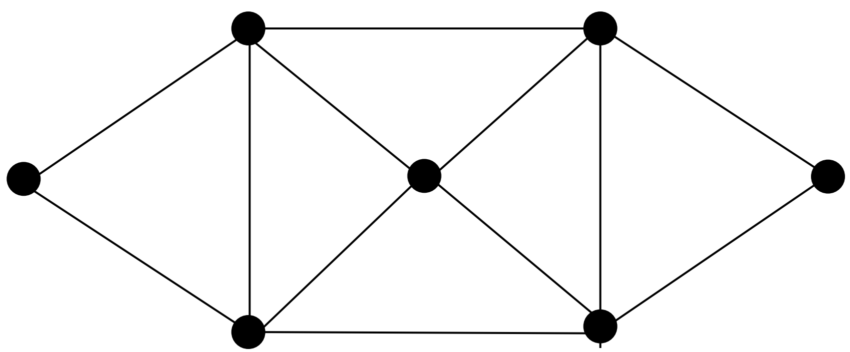
Mapa do Departamento de Matemática

- A figura abaixo ilustra o mapa do Departamento de Matemática de uma importante Universidade. A entrada principal está na parte norte do Departamento. Determine se é possível que uma pessoa possa andar pelo Departamento passando através de cada porta exatamente uma vez e terminando onde começou.



O Problema do Explorador

- Um explorador deseja explorar todas as estradas entre um número de cidades. É possível encontrar um roteiro que passe por cada estrada apenas uma vez e volte a cidade inicial?

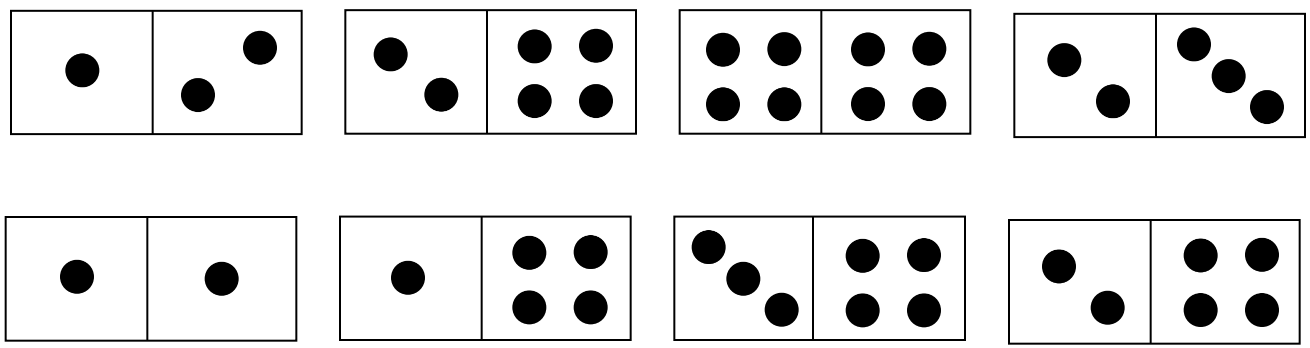


vértices: cidades

aresta: estradas

Problema do Dominó

- É possível arranjar todas as peças de um dominó em um caminho fechado?



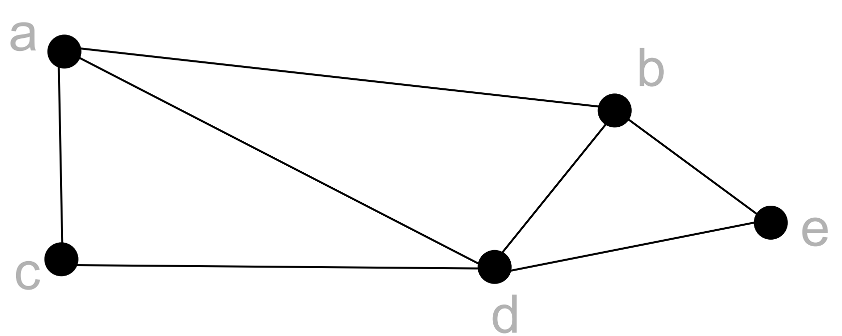
Grafos Eulerianos

- Análise de Complexidade:
  - Para verificar se um grafo é euleriano basta verificar o grau de todos os vértices do grafo
  - Para verificar o grau de um vértice temos que percorrer uma linha da matriz de adjacências que tem tamanho n
  - Como são n vértices, a complexidade é $O(n^2)$

Grafos Unicursais

- Um grafo G é dito unicursal se ele possuir um caminho aberto de Euler, ou seja, se é possível percorrer todas as arestas de G apenas uma vez sem retornar ao vértice inicial.

Caminho de Euler: a c d a b d e b



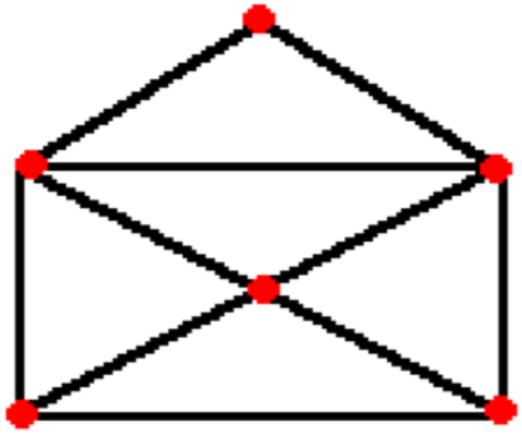
- Se adicionarmos uma aresta entre os vértices inicial e final do caminho aberto de Euler, esse grafo passa a ser um grafo euleriano

Grafos Unicursais

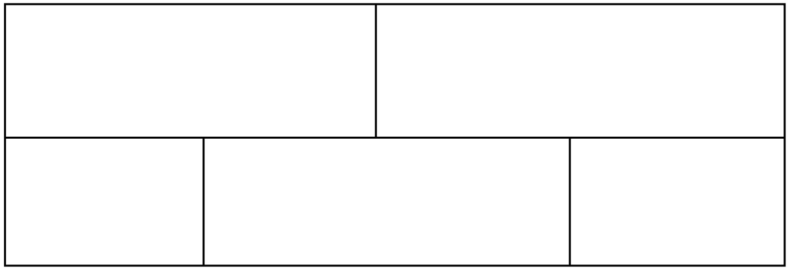
- Um grafo conexo é unicursal se, e somente se, ele possuir exatamente 2 vértices de grau ímpar
- TEOREMA: Em um grafo conexo G com exatamente $2K$ vértices de grau ímpar, existem K subgrafos disjuntos de arestas, todos eles unicursais, de maneira que juntos eles contêm todas as arestas de G
- Casos:
  - Grafo euleriano: todos os vértices de grau par
  - Grafo unicursal: dois vértices de grau ímpar
  - Grafo qualquer: 2K vértices de grau ímpar (k-traçável)

Grafos Unicursais

- É possível fazer o desenho abaixo sem retirar o lápis do papel e sem retroceder?

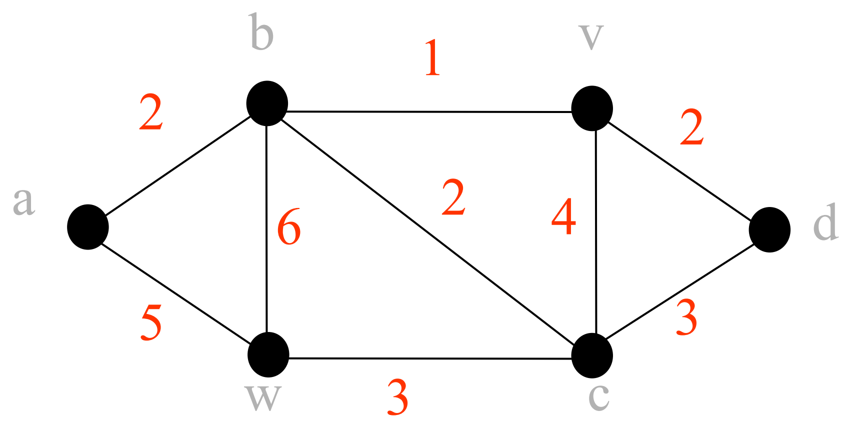


- Quantos traços são necessários para traçar o diagrama abaixo?



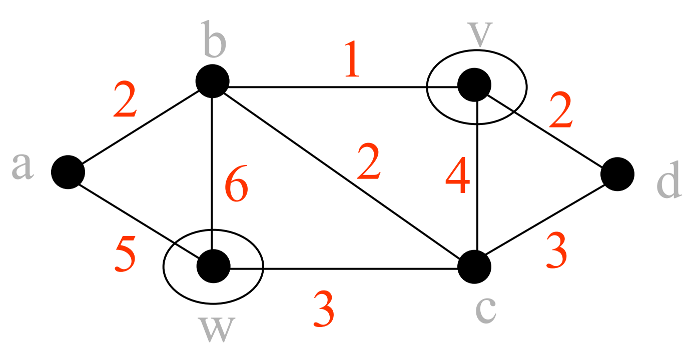
Carteiro Chinês

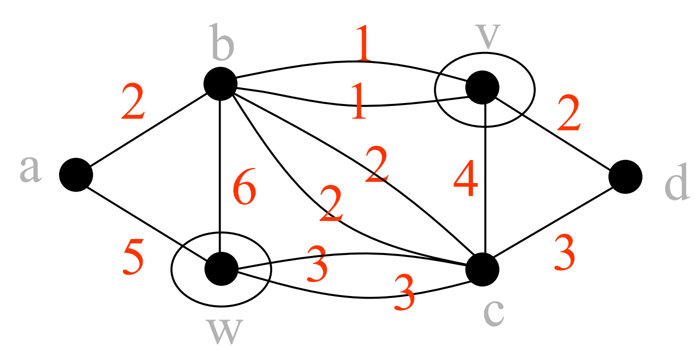
- Um carteiro deseja entregar cartas ao longo de todas as ruas de uma cidade, e retornar ao ponto inicial. Como ele pode planejar as rotas de forma a percorrer a menor distância possível?
  - Se o grafo for euleriano, basta percorrer o ciclo de Euler
  - Caso contrário, algumas arestas serão percorridas mais de uma vez



Carteiro Chinês

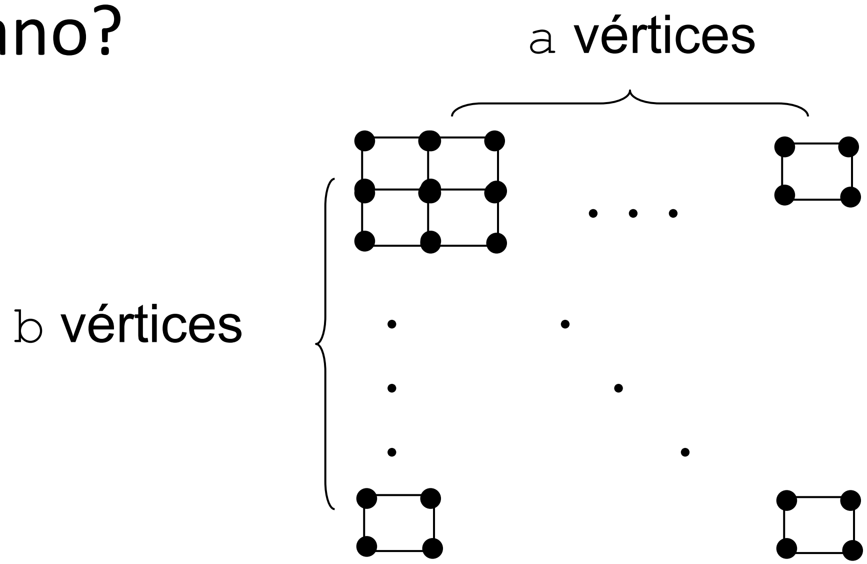
PASSO 1: Identifique os `m` nós de grau ímpar de `G(N,A)` (`m` é sempre par)
PASSO 2: Encontre o "casamento de pares com a mínima distância" (*minimum-length pairwise matching*) desses `m` nós e identifique os `m/2` caminhos mínimos deste "casamento" ótimo.
PASSO 3: Adicione estes `m/2` caminhos mínimos como arcos ligando os nós do "casamento" ótimo. O novo grafo `G(N,A)` contém zero vértices de grau ímpar.
PASSO 4: Encontre um ciclo euleriano em `G(N,A)`. Este ciclo é a solução ótima do problema no grafo original `G(N,A)` e o seu comprimento é igual ao comprimento total das arestas do grafo original mais o comprimento total dos `m/2` caminhos mínimos.





Exercícios

6. Para quais valores de a e b o grafo abaixo é euleriano?

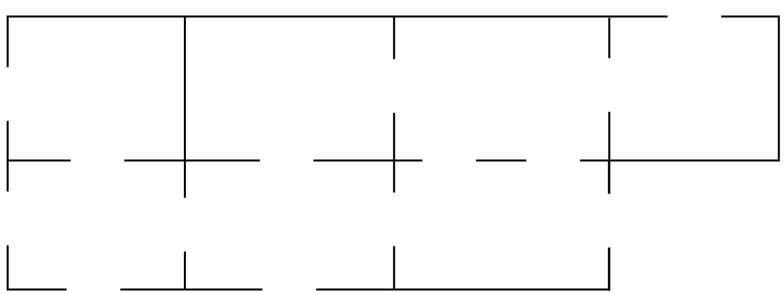


6. Determine os valores de n para os quais o grafo completo K_n é euleriano. Para quais valores de n, o K_n é unicursal? Justifique.

Exercícios

8. Para o grafo do problema das pontes de Königsberg, qual é o menor número de pontes que devem ser removidas para que o grafo resultante seja unicursal? Quais pontes? Idem para Euleriano.

8. É possível visitar todas as salas passando por todas as portas exatamente uma vez e retornando ao ponto inicial?

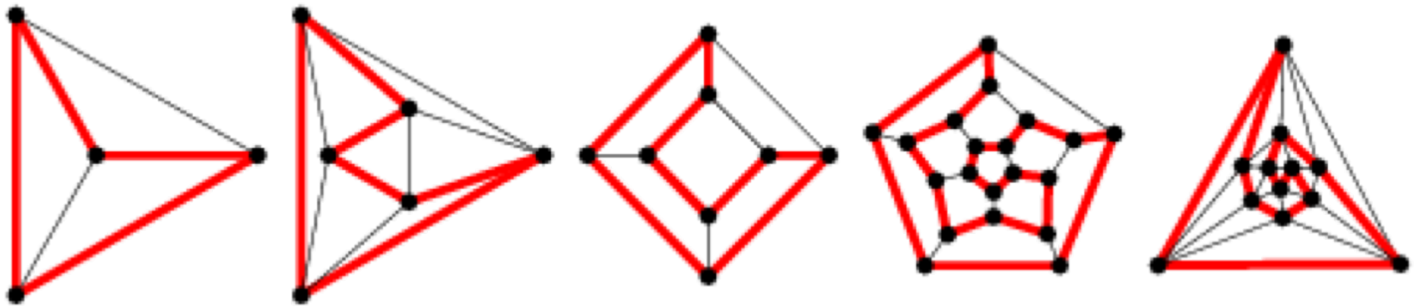


Grafos Hamiltonianos
Passeio do Cavalo
Problema do Caixeiro Viajante

Deo – páginas 30 até 35

Grafos Hamiltonianos

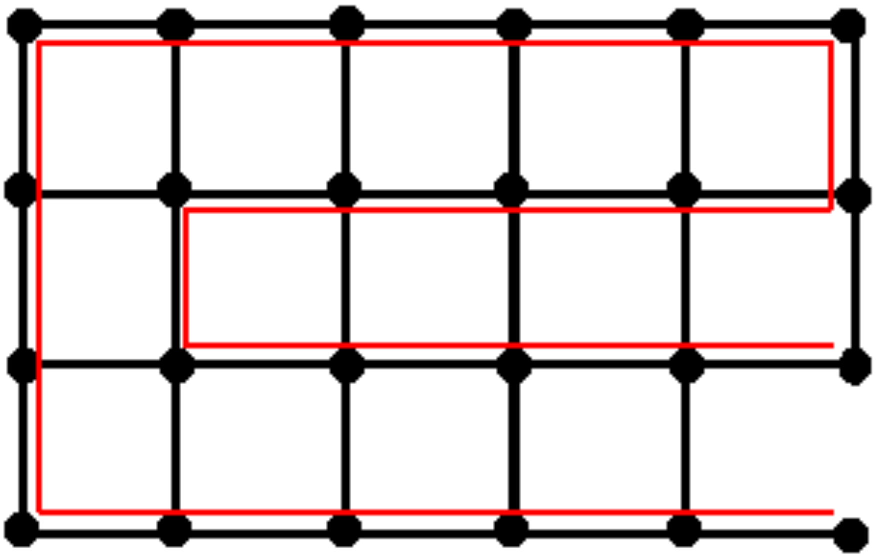
- Um ciclo de Hamilton em um grafo conexo é um ciclo simples que passa por todos os vértices do grafo uma única vez
- Todo grafo que possui um ciclo de hamilton é chamado de grafo hamiltoniano



- O ciclo de hamilton de um grafo com n vértices contém n arestas

Grafos Hamiltonianos

- Um caminho de Hamilton em um grafo conexo é um caminho que passa por todos os vértices do grafo exatamente uma vez



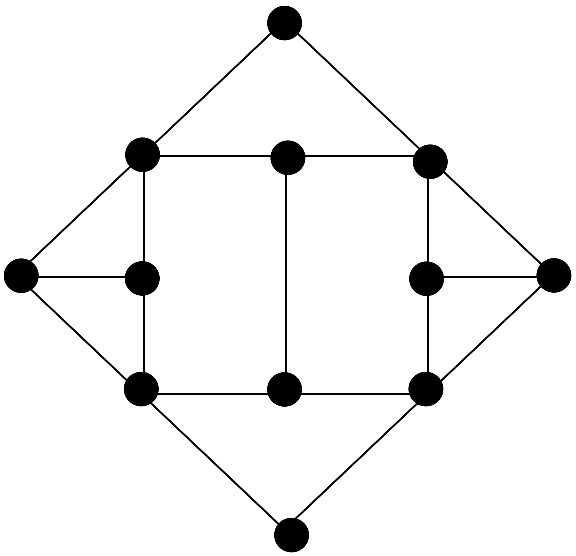
Grafos Hamiltonianos

- Considerações sobre grafos Hamiltonianos:
  - O grafo deve ser conexo
  - *Autoloops* e arestas paralelas podem ser desconsideradas
  - Se um grafo é hamiltoniano, então a inclusão de qualquer aresta não atrapalha esta condição

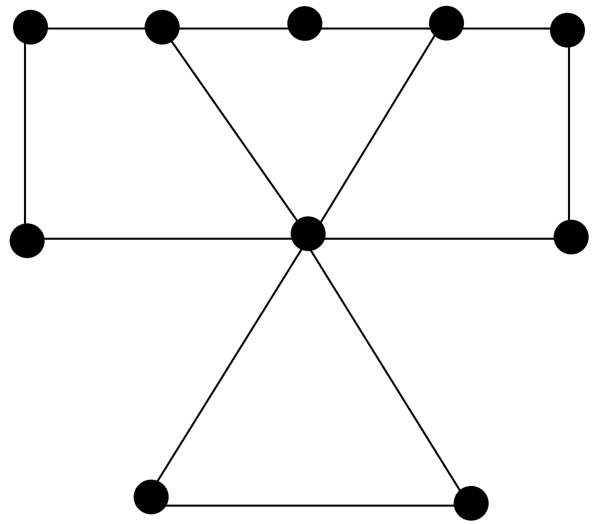
- Análise de Complexidade
  - Para verificar se existe um ciclo de hamilton em um grafo conexo devemos tentar todas as possibilidades, ou seja, devemos gerar todas as permutações nos `n` vértices
  - Portanto, a complexidade do problema é `O(n!)`

Exercícios

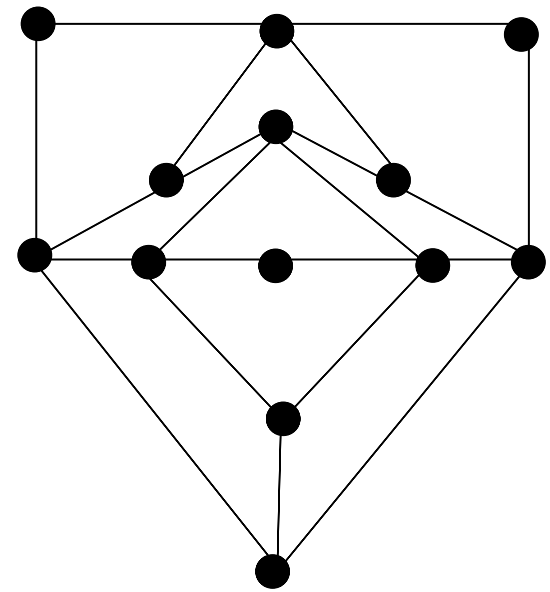
10. Os seguintes grafos são hamiltonianos?



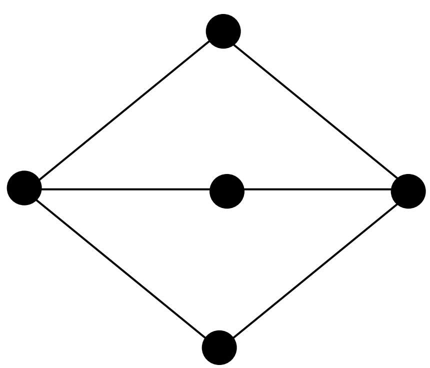
(a)



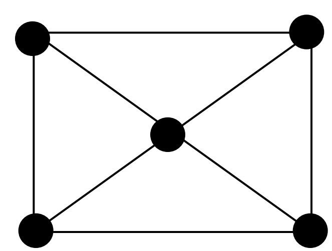
(b)



(c)



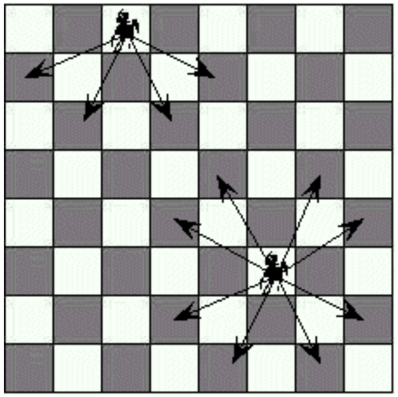
(d)

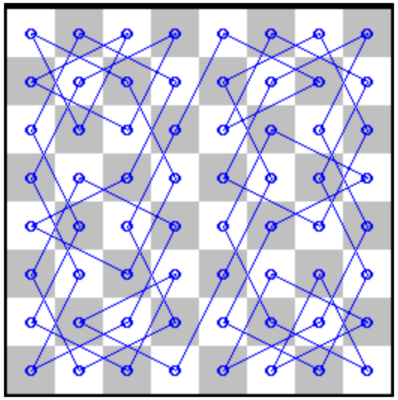


(e)

Passeio do Cavalo

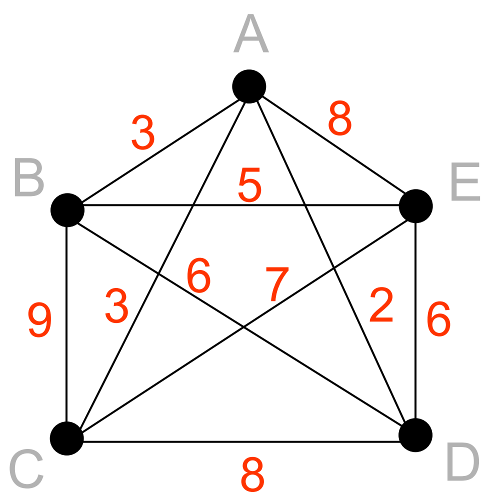
- Um cavalo do xadrez deve começar em alguma posição, visitar todas as posições exatamente uma vez e retornar à posição inicial.
- Para qual tamanho do tabuleiro `nxn` existe esse ciclo?
- Para qual nxn o grafo é hamiltoniano?





Problema do Caixeiro Viajante

- Um caixeiro viajante deseja visitar um número de cidades e voltar ao ponto de origem de maneira que ele visite todas as cidades e percorra a menor distância possível. Como escolher sua rota?

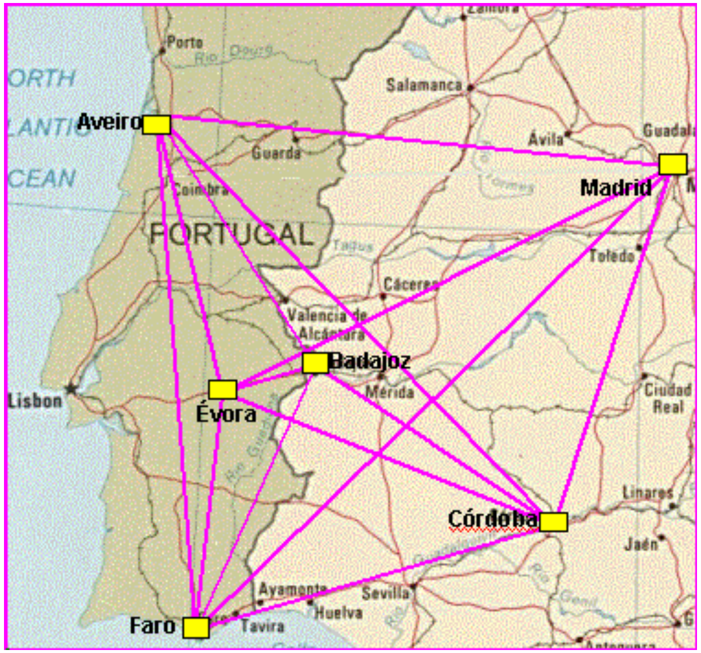


grafo com peso nas arestas
- Vértices: cidades
- Arestas: estradas

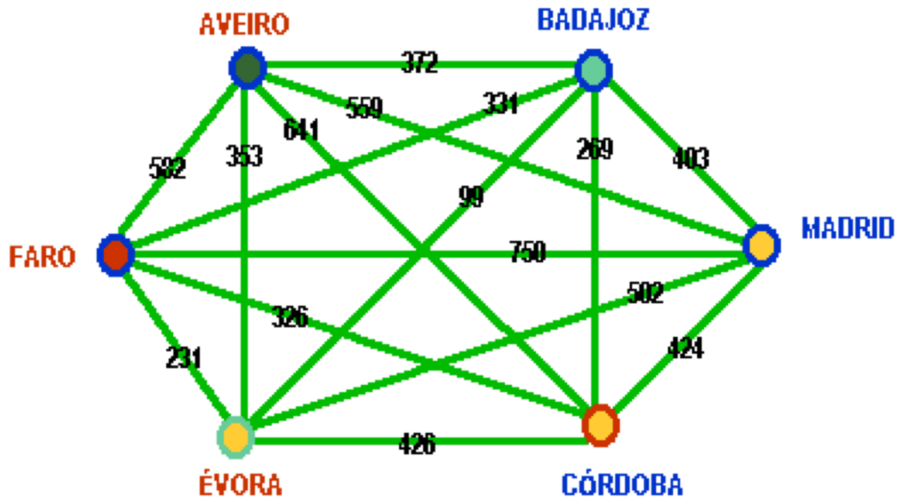
Encontrar um ciclo de hamilton de peso mínimo

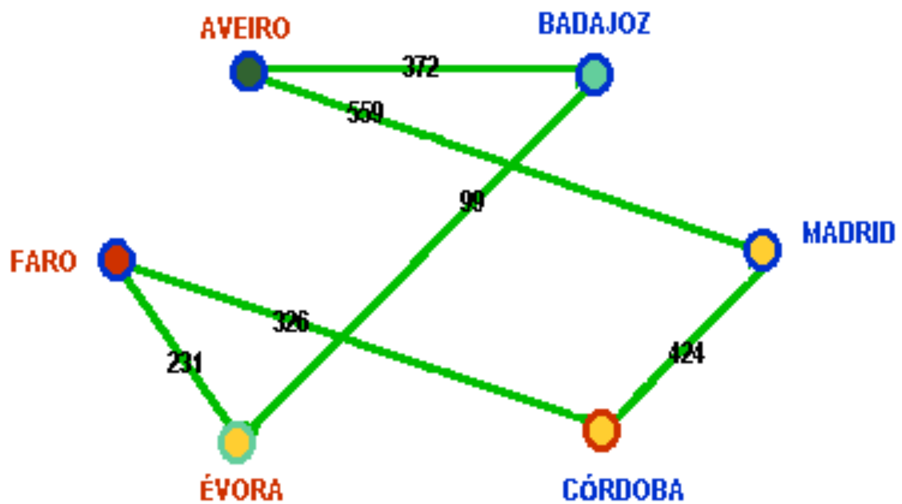
Problema do Caixeiro Viajante

- Um viajante deve visitar clientes instalados em 6 cidades da Península Ibérica. Procura-se determinar qual o menor percurso de forma que o visitante comece em uma cidade, passe por todas as cidades e termine na cidade de origem



Problema do Caixeiro Viajante





Problema do Caixeiro Viajante

- Análise de Complexidade
  - A solução mais direta é gerar todas as permutações e verificar qual é a que possui o menor comprimento. Como o número de permutações é `n!`, esta solução tem complexidade `O(n!)`
  - Usando técnicas de programação dinâmica, é possível resolver o problema com complexidade `O(2n)`

Exercícios

11. Dê um exemplo de um grafo que seja euleriano mas não seja hamiltoniano.
12. Dê um exemplo de um grafo que seja euleriano e hamiltoniano, mas que o ciclo de euler seja diferente do ciclo de hamilton.
13. Desenhe um grafo no qual o ciclo de Euler seja também o ciclo de hamilton. O que podemos dizer desses grafos em geral?
14. Para quais valores de a e b o grafo bipartido completo $K_{a,b}$ é hamiltoniano? Justifique.

Exercícios

15. Para quais valores de a e b o grafo abaixo é hamiltoniano?