Matrizes inversas

Professor Vitor Luiz de Almeida

Objetivo Geral: Reconhecer quando uma matriz quadrada é ou não invertível.

Objetivos específicos:

1. Desenvolver um processo prático para obtenção da inversa de uma matriz, caso exista;
2. Aplicar a invertibilidade de matrizes na resolução de sistemas lineares $n \times n$;

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Seja $M(n \times n, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem n cujas entradas são reais.

Definição de invertibilidade de matrizes

Seja $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Dizemos que A é uma matriz invertível se existe uma matriz $B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I_{n \times n},$$

em que $I_{n \times n}$ indica a matriz identidade de ordem n.

Exemplo 01: $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ é uma inversa de $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$.

Resolução: Basta observarmos que

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 02: $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ é uma inversa de $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução: Basta observarmos que

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 03: A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ não é invertível.

Resolução:

Basta observarmos que

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}$$

A terceira coluna de B.A é dada por B vezes a terceira coluna de A!

Teorema: Seja $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Se a inversa de A existe, então ela é única.

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que A possua inversas distintas B_1 e B_2, isto é,

$$A \cdot B_1 = B_1 \cdot A = A \cdot B_2 = B_2 \cdot A = I$$

Segue daí que,

$$\begin{aligned} B_1 = B_1 \cdot I &= B_1 \cdot (A \cdot B_2) \\ &= (B_1 \cdot A) \cdot B_2 \\ &= I \cdot B_2 = B_2, \end{aligned}$$

Relembre que I é o elemento neutro do produto de matrizes!

o que gera uma contradição com nossa suposição inicial.

PUC Minas Virtual

Exemplo 04: Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, com $ad - bc \neq 0$. Mostre que $B = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ é a matriz inversa de A.

Resolução:

De fato,

Lembre-se que k(AB) = (kA)B = A(kB)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O produto $B \cdot A$ deverá ser feito como exercício!

Exemplo 05: Sejam $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ e suponhamos que A e B sejam invertíveis. Mostre que $A \cdot B$ é invertível e $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Resolução:

Recorde que o produto de matrizes é associativo!

Basta observarmos que

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot I \cdot B = B^{-1} \cdot B = I$$

Exemplo 06: Seja $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ e suponhamos que A seja invertível. Mostre que A^T é invertível e $\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Recorde que $(AB)^T = B^T A^T$

Resolução:

Basta observarmos que

$$A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = I^T = I$$

$$(A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = I^T = I$$

Agora é com você!

Leia a teoria no livro-texto indicado e faça todas as atividades propostas em nosso planejamento de aulas.

PUC Minas
Virtual