Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Bacharelado em Ciência da Computação
Teoria dos Grafos

Teoria dos Grafos

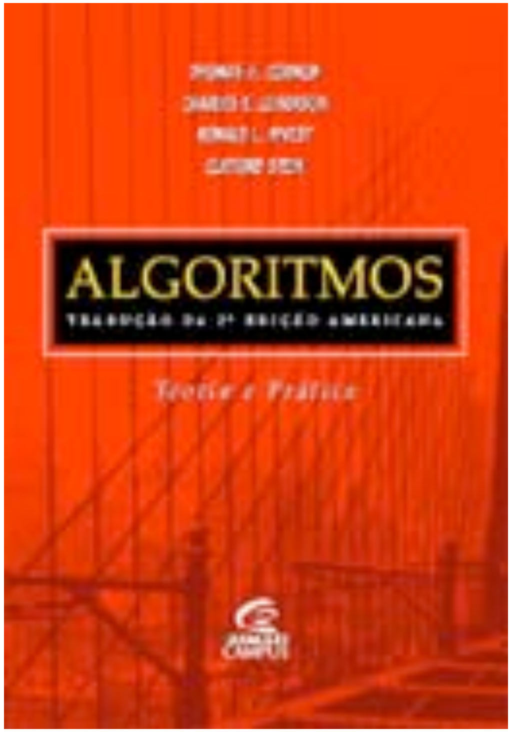
Prof.: Felipe Domingos
felipebh@gmail.com

Ementa

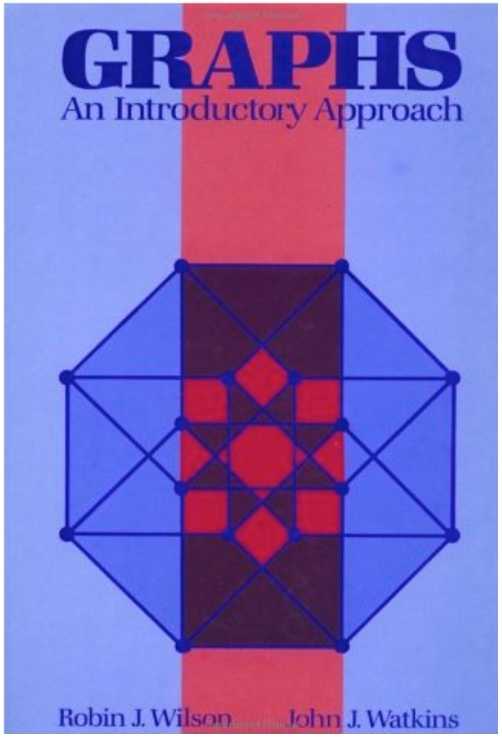
Grafos dirigidos e não-dirigidos. Estruturas de dados para representação de grafos. Subgrafos. Isomorfismo. Caminhos e circuitos, busca em profundidade e largura, algoritmos de caminho mínimo e de fecho transitivo. Árvores, árvores geradoras mínimas, árvores de Steiner, algoritmos de Prim e de Kruskal. Ordenação Topológica. Conectividade em grafos dirigidos e não-dirigidos e algoritmo de Tarjan. Planaridade, dualidade e algoritmos para detecção de planaridade. Coloração de vértices, arestas e faces. Particionamento: dominância, independência, cobertura e casamentos. Fluxo em redes, algoritmos de fluxo máximo, cortes mínimos. Introdução às redes complexas.

Bibliografia Recomendada

CORMEN, Thomas H. et al. Algoritmos: teoria e prática. Rio de Janeiro: Campus, 2002. 916p.



WILSON, Robin J.; WATKINS, John J. Graphs: an introductory approach : a first course in discrete mathematics. New York: J. Wiley, c1990. 340p.



Método de Avaliação

■ 3 Provas (20, 20, 20 pts)	60 pontos
■ 3 Listas de Exercícios (2, 2, 2 pts)	06 pontos
■ Prática Investigativa	05 pontos
■ ADA	05 pontos
■ Trabalhos Práticos	24 pontos

Conceitos Básicos

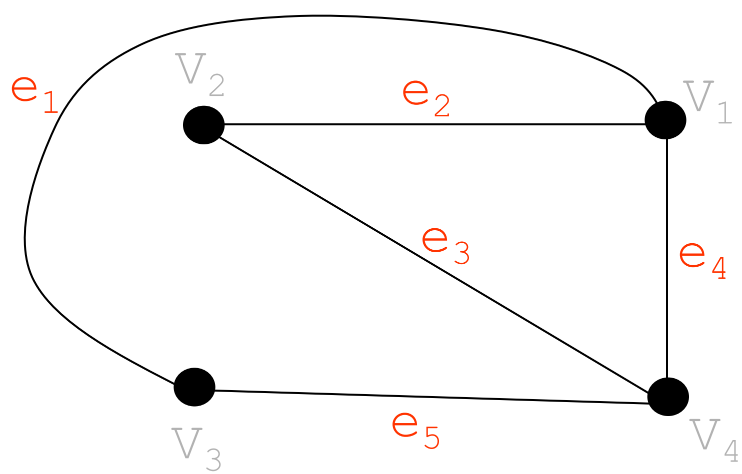
Cormen – páginas 853 até 861

ou

Deo – páginas 1 até 23
(mais didático e detalhado)

Conceitos Básicos

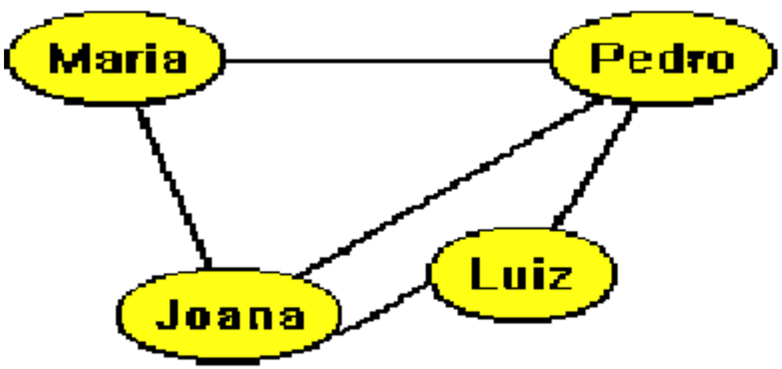
- Grafo é uma coleção de vértices e arestas
- Vértice é um objeto simples que pode ter nomes e outros atributos
- Aresta é uma conexão entre dois vértices



Por definição um grafo deve ter pelo menos 1 vértice

Grafo da Amizade

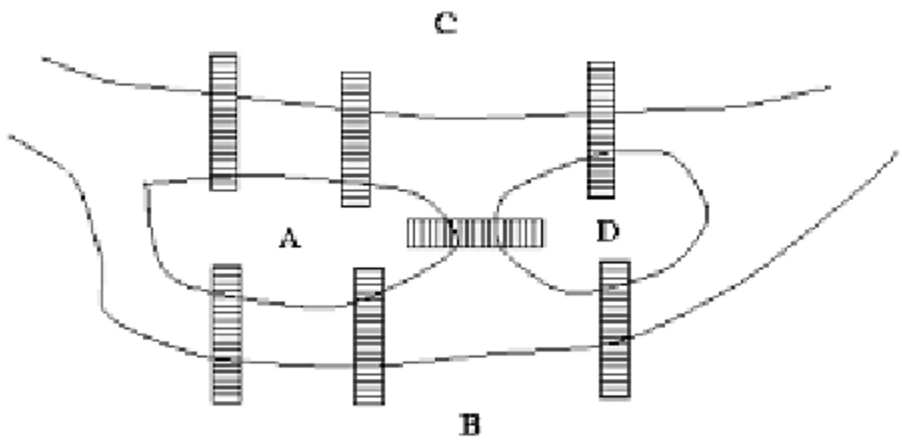
- Modelagem:
  - Vértices: pessoas
  - Arestas: relação de amizade
- **n**: número de vértices
- **e**: número de arestas



n = 4 **e** = 5

Problema das Pontes de Königsberg

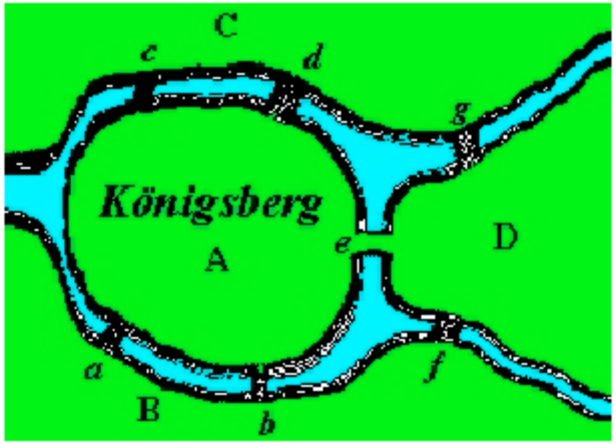
- No século XVIII havia na cidade de Königsberg um conjunto de sete pontes que cruzavam o rio Pregel. Elas conectavam duas ilhas (**A** e **D**) entre si e as ilhas com as margens (**B** e **C**)



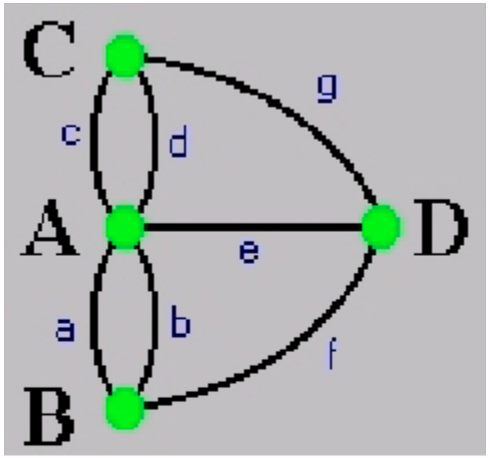
Por muito tempo os habitantes daquela cidade perguntavam-se se era possível **cruzar as sete pontes** numa caminhada contínua **sem passar duas vezes** por qualquer uma delas

Problema das Pontes de Königsberg

- As pontes são identificadas pelas letras de a até g



- Este problema pode ser representado pelo grafo

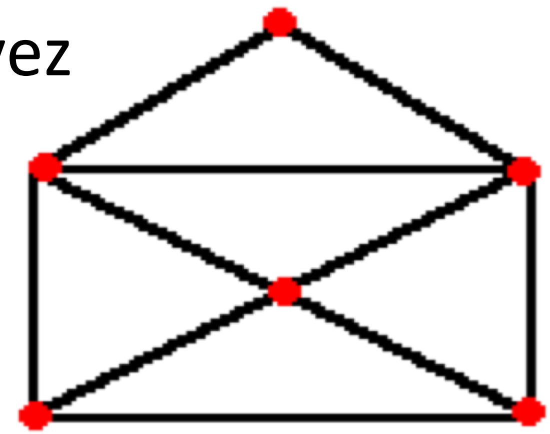


vértices: pontos de terra

aresta: pontes

Problema do Desenho da Casa

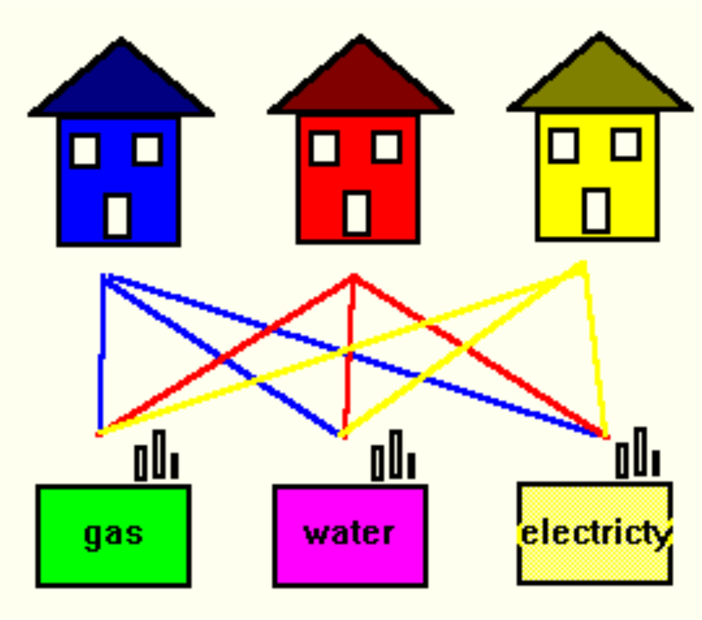
- No desenho abaixo, uma criança diz ter posto a ponta do lápis numa das bolinhas e com movimentos contínuos (sem levantar e sem retroceder o lápis) traçou as linhas que formam o desenho da casa, traçando cada linha uma única vez



- A mãe da criança acha que ela trapaceou pois não foi capaz de achar nenhuma sequência que pudesse produzir tal resultado. Você concorda com esta mãe?

O Problema das 3 Casas e 3 Serviços

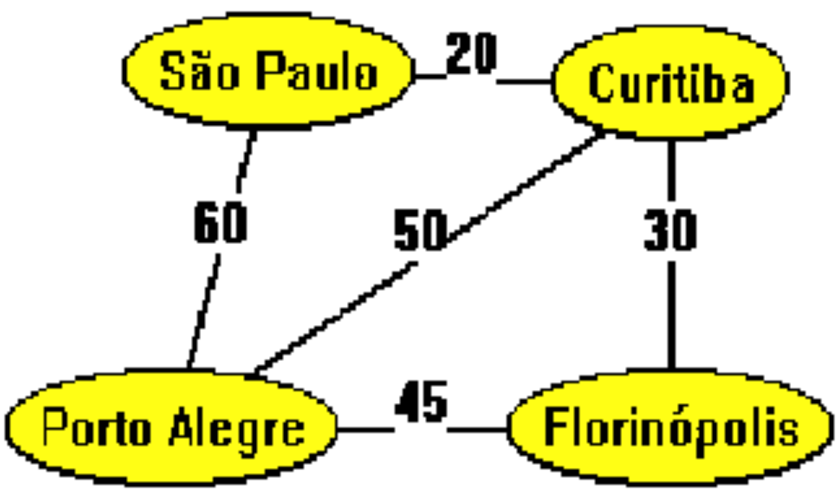
- Suponha que tenhamos três casas e três serviços, a exemplo de:



- É possível conectar cada serviço a cada uma das três casas sem que haja cruzamento de tubulações?

Problema de Transporte

- Nos problemas que envolvem transportes de carga ou pessoas, os pontos de parada, embarque e desembarque são os vértices e as estradas entre os pontos são as arestas

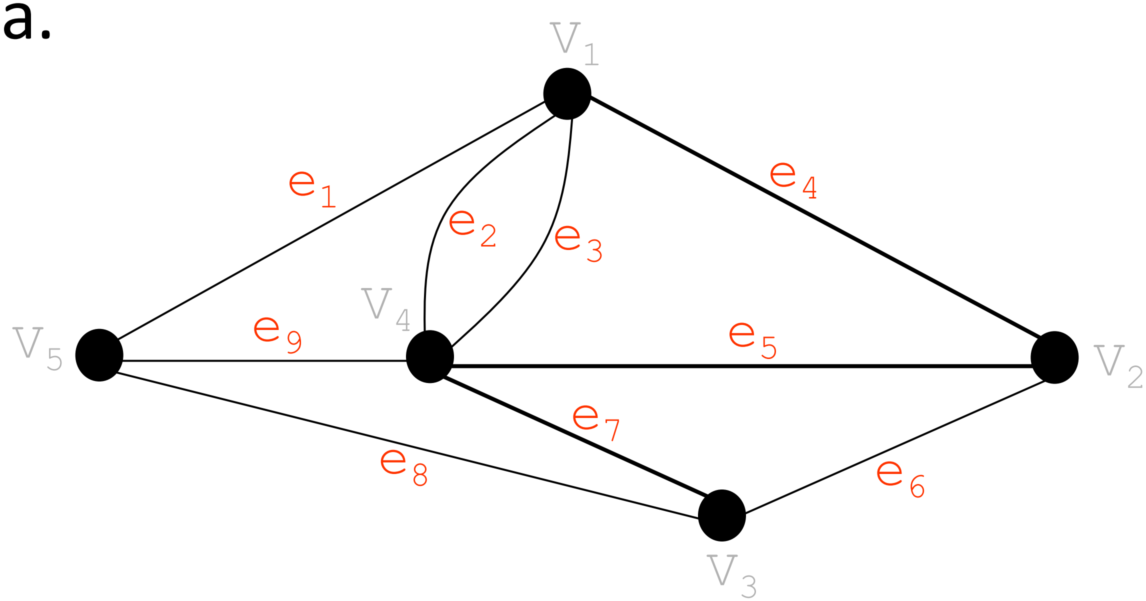


Problema de Transporte

- **Problema de Conectividade:** dadas as direções das vias, é possível ir da cidade A até a cidade B, sem andar na contramão?
- **Problema de Fluxo Máximo:** dada a capacidade de fluxo em cada via, qual é a quantidade de mercadoria que podemos mandar de uma cidade A a uma cidade B?
- **Problema de Menor Caminho:** Dados os comprimentos de cada via, qual o percurso mais rápido para sair de uma cidade A e chegar a uma cidade B?

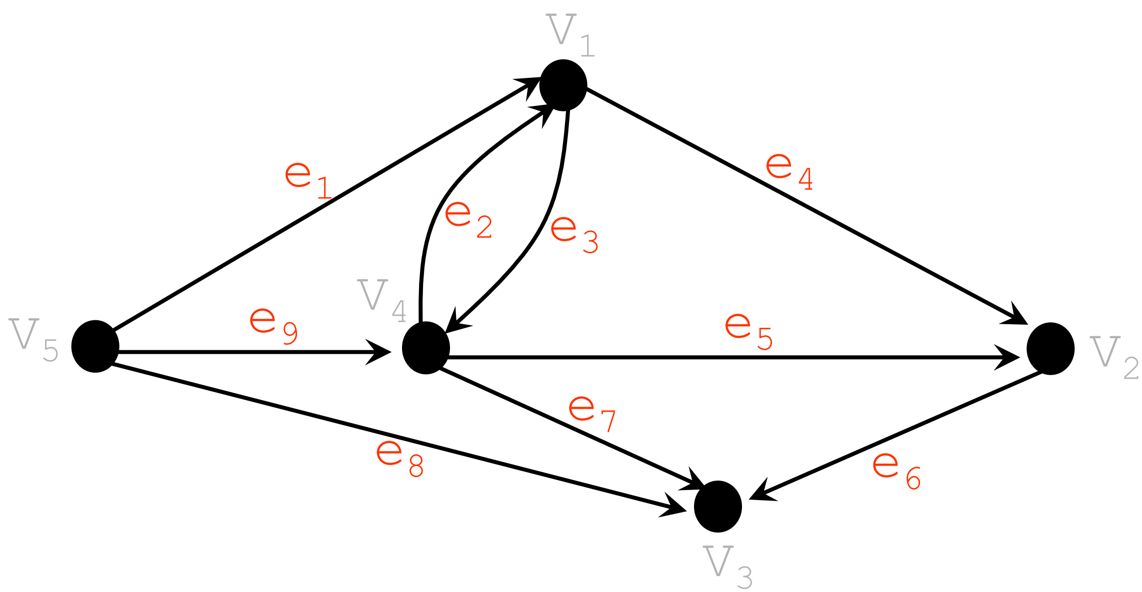
Terminologia

- <u>Grafo não orientado</u>: $G=(V,E)$ é um par onde V é um conjunto finito e o conjunto de arestas E consiste em pares de vértices não orientados. A aresta (v_i, v_j) e (v_j, v_i) são consideradas a mesma aresta.



Terminologia

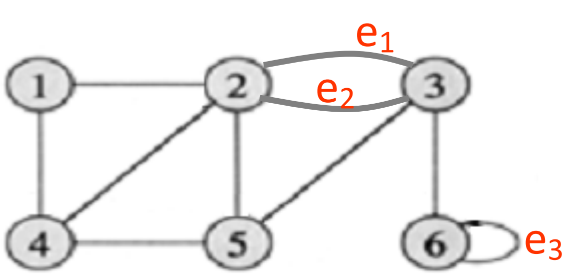
- Grafo orientado: G é um par (V, E), onde V é um conjunto finito e E é uma relação binária em V



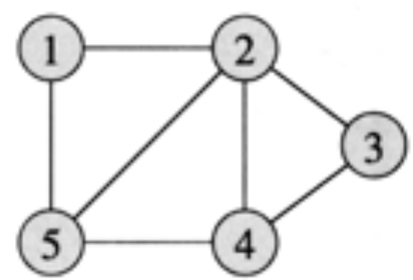
Terminologia

- *Autoloop*: uma aresta associada ao par de vértices `(vi,vi)`
- Arestas paralelas: quando mais de uma aresta está associada ao mesmo par de vértices
- Grafo simples: um grafo que não possui *autoloops* e nem arestas paralelas

e_1 e e_2 são arestas paralelas



e_3 é um autoloop



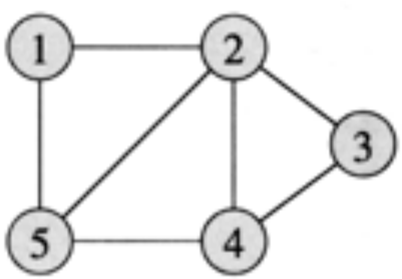
grafo simples

Terminologia

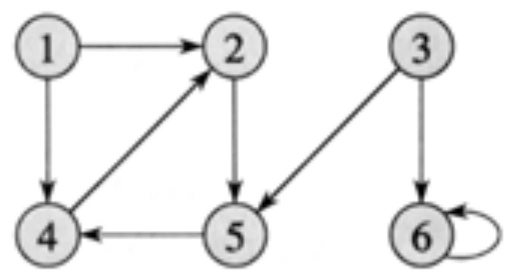
- Se (u,v) é uma aresta em um grafo $G=(V,E)$, dizemos que o vértice v é adjacente ao vértice u (em grafo não orientado, a relação de adjacência é simétrica).
  Se (u,v) é uma aresta de um grafo orientado e (v,u) não é uma aresta, dizemos que o vértice v é adjacente ao vértice u, mas u não é adjacente a v
- Se (u,v) é uma aresta em um grafo orientado $G = (V,E)$, dizemos que a aresta (u,v) é incidente do ou sai do vértice u e é incidente no ou entra no vértice v
- Se (u,v) é uma aresta em um grafo não orientado $G=(V,E)$ dizemos que a aresta (u,v) é incidente nos vértices u e v

Terminologia

- O <u>grau</u> de um vértice em um grafo não orientado é o número de arestas incidentes nele. Em um grafo orientado, o <u>grau de saída</u> de um vértice é o número de arestas que saem dele, e o <u>grau de entrada</u> de um vértice é o número de arestas que entram nele. O <u>grau de um vértice</u> em um grafo orientado é seu <u>grau de entrada</u> somado a seu grau de saída



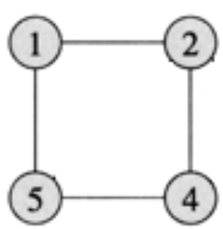
grau do vértice 2 é 4



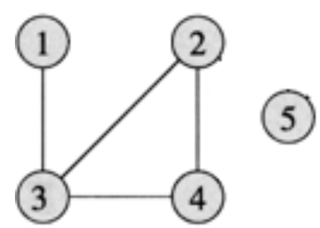
grau de entrada do vértice 5 é 2
grau de saída do vértice 5 é 1

Terminologia

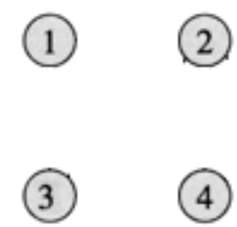
- Um grafo no qual todos os vértices possuem o mesmo grau é chamado de grafo regular
- Um vértice com nenhuma aresta incidente é chamado de vértice isolado
- Um vértice com grau 1 é chamado de vértice pendente
- Um grafo sem nenhuma aresta é chamado de grafo nulo (todos os vértices em um grafo nulo são vértices isolados)



grafo regular



5 é um vértice isolado
1 é um vértice pendente

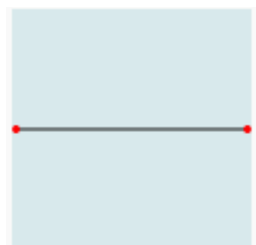


grafo nulo

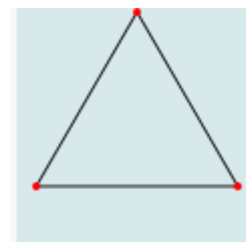
Terminologia

- Um grafo não orientado $G=(V,E)$ é um grafo completo se para cada par de vértices v_i e v_j existe uma aresta entre v_i e v_j. Em um grafo completo quaisquer dois vértices distintos são adjacentes (K_n)

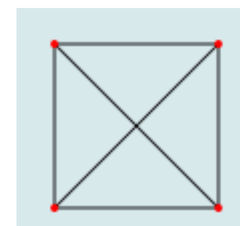
K_1



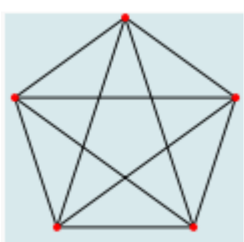
K_2



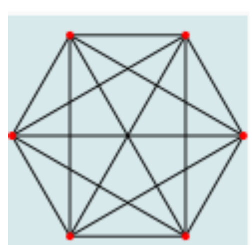
K_3



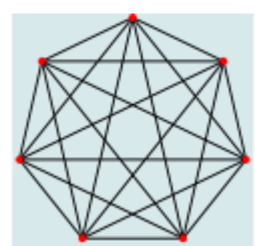
K_4



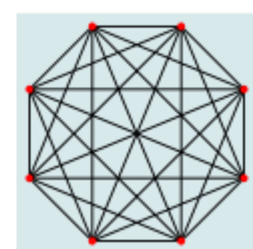
K_5



K_6



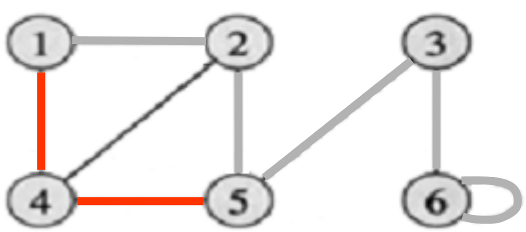
K_7



K_8

Terminologia

- Um caminho de comprimento `k` de um vértice `u` até um vértice `u’` em um grafo `G=(V,E)` é uma sequência `<V0,V1,V2,...,Vk>` de vértices tais que `u=V0`, `u’=Vk e(Vi-1,Vi)∈ E para i=1,2,...,k`
- O comprimento de um caminho é o número de arestas no caminho
- Se existe um caminho de `u` até `u’` dizemos que `u’` é acessível a partir de `u`
- Um caminho simples é aquele em que todos os vértices no caminho são distintos

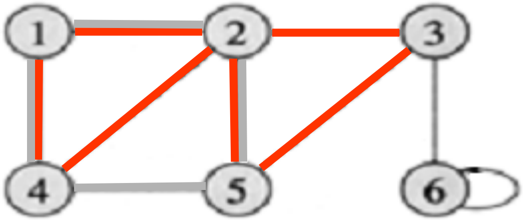


<1,4,5> é um caminho simples

<1,2,5,3,6,6> não é um caminho simples

Terminologia

- Um caminho $<V_0, V_1, V_2, ..., V_k>$ forma um ciclo se $V_0=V_k$ e o caminho contém pelo menos uma aresta
- Ciclo simples é um ciclo no qual os vértices $V_1, V_2, ..., V_k$ são distintos
- Um autoloop é um ciclo de comprimento 1
- Um grafo sem ciclos é acíclico

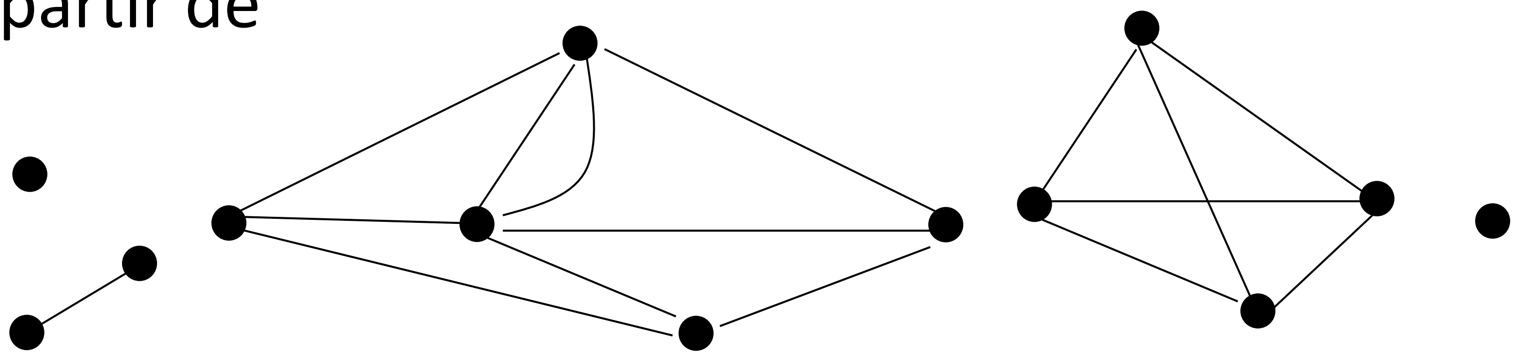


<4,1,2,3,5,2,4> é um ciclo

<1,2,5,4,1> é um ciclo simples

Terminologia

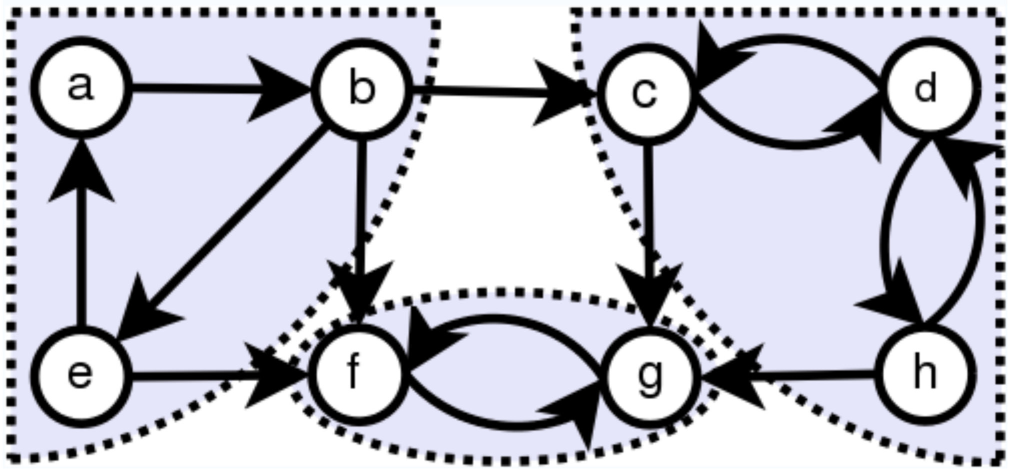
- Um grafo não orientado é conectado se todo par de vértices está conectado por um caminho
- Cada um dos subgrafos conectados é chamado de componente
- Os componentes conexos de um grafo são as classes de equivalência de vértices sob a relação "é acessível a partir de"



grafo não conectado com 5 componentes

Terminologia

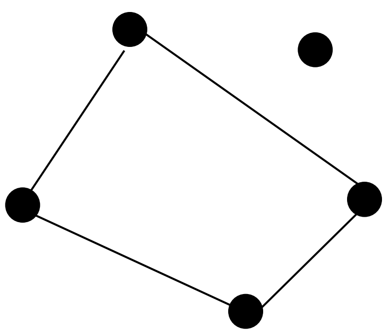
- Um grafo orientado é fortemente conectado se cada um de dois vértices quaisquer é acessível a partir do outro
- Os componentes fortemente conectados de um grafo orientado são as classes de equivalência de vértices sob a relação “são mutuamente acessíveis”



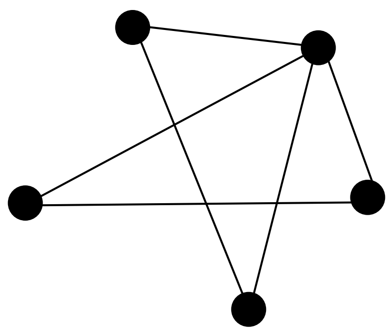
grafo possui 3 componentes fortemente conectados

Terminologia

- Grafo complementar: seja $G=(V,E)$ um grafo simples. O complemento de G, $\overline{G}$, é um grafo formado da seguinte maneira:
  - Os vértices de $\overline{G}$ são todos os vértices de G
  - As arestas de $\overline{G}$ são exatamente as arestas que faltam em G para formarmos um grafo completo



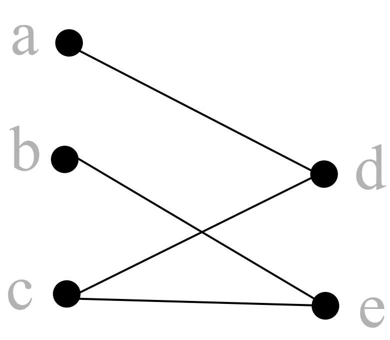
G

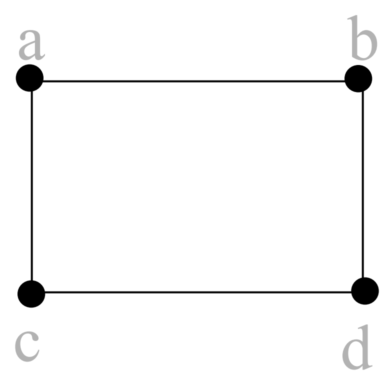


$\overline{G}$

Terminologia

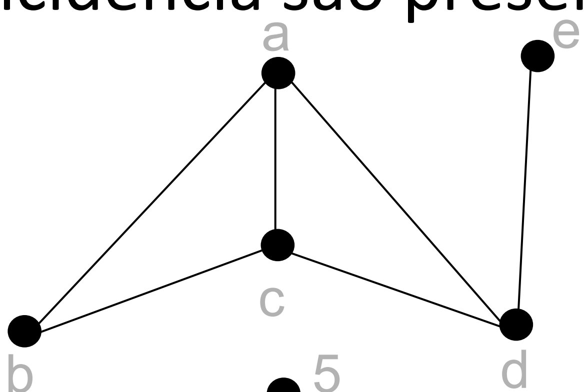
- Um grafo bipartido é um grafo não orientado `G=(V,E)` em que `V` pode ser particionado em dois conjuntos `V1` e `V2` tais que `(u,v)` $\in$ `E` implica que:
  - `u` $\in$ `V1` e `v` $\in$ `V2` ou
  - `u` $\in$ `V2` e `v` $\in$ `V1`
- Em um grafo bipartido, todas as arestas ligam um vértice do conjunto `V1` com um vértice do conjunto `V2`

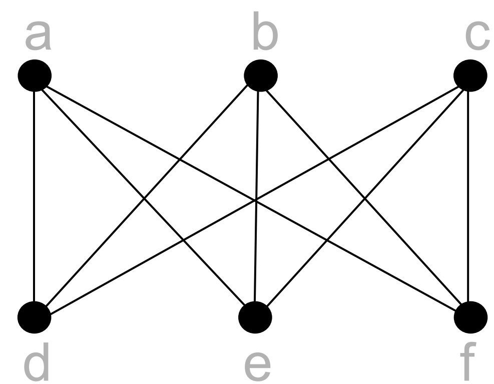


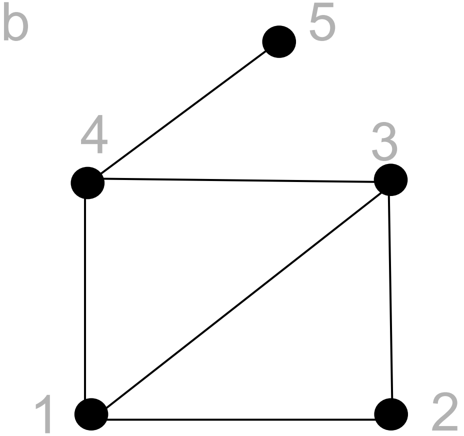


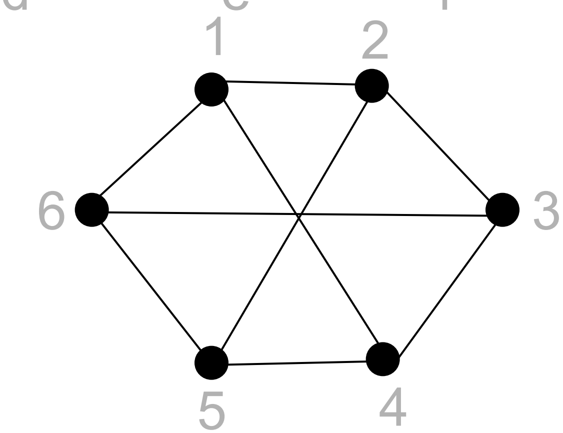
Terminologia

- Dois grafos G e H são ditos <u>isomorfos</u> se existir uma correspondência um-para-um entre seus vértices e entre suas arestas, de maneira que as relações de incidência são preservadas



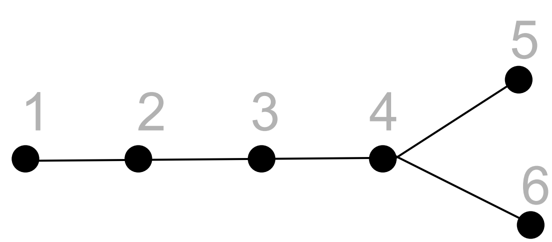


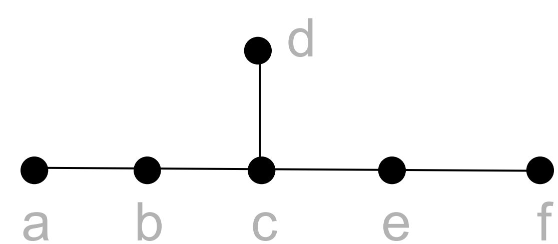




Terminologia

- Condições necessárias mas não suficientes para que G e H sejam isomorfos:
  - mesmo número de vértices
  - mesmo número de arestas
  - mesmo número de componentes
  - mesmo número de vértices com o mesmo grau
- Exemplo:





Não existe um algoritmo eficiente para determinar se dois grafos são isomorfos

Número de Vértices de Grau Ímpar

- A soma dos graus de todos os vértices de um grafo G é duas vezes o número de arestas de G.

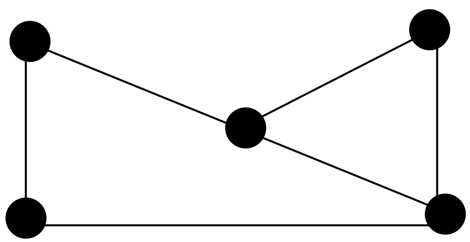
$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e$$

- O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par

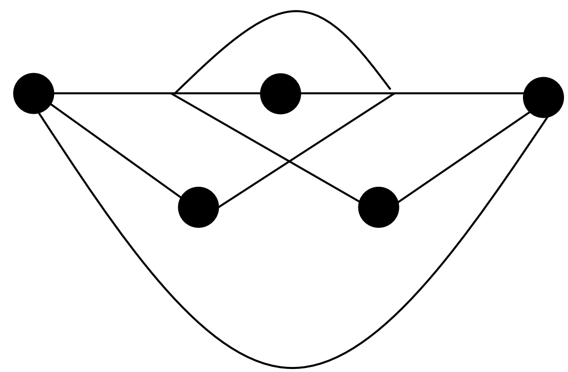
$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{d(v_j)\,par} d(v_j) + \sum_{d(v_k)\,ímpar} d(v_k)$$

Exercícios

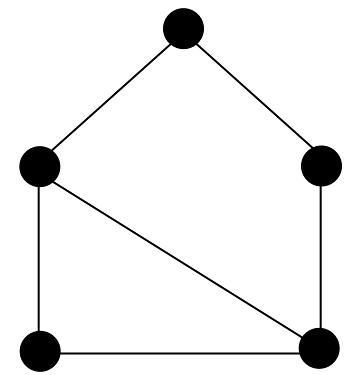
1. Todos os grafos abaixo são isomorfos, exceto:



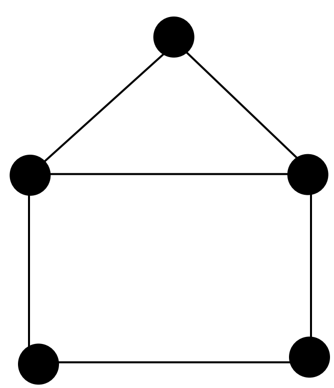
(a)



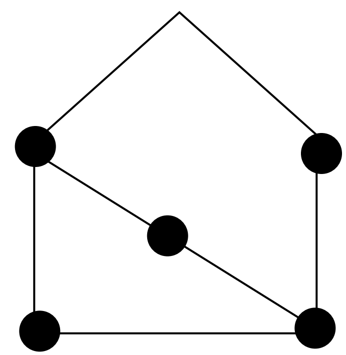
(b)



(c)



(d)



(e)

Exercícios

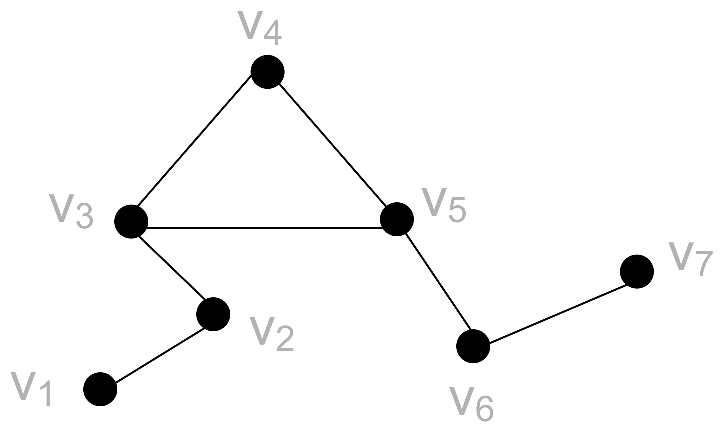
2. Com relação ao grafo completo Kn, responda:
   - Qual é o grau dos seus vértices?
   - Quantas arestas ele possui?

3. Encontre um grafo com 5 vértices que seja isomorfo a seu complemento.

4. Qual o número de arestas de um grafo que é isomorfo a seu complemento?

Exercícios

5. Com relação ao grafo abaixo, responda:



a) O grafo é simples?
b) Completo?
c) Regular?
d) Conectado?
e) Encontre 2 caminhos simples entre V3 e V6
f) Encontre 1 ciclo
g) Indique uma aresta cuja remoção tornará o grafo não conectado

Número Mínimo e Máximo de Arestas

- O número mínimo de arestas de um grafo simples com `n` vértices e `k` componentes é `n-k`
- O número máximo de arestas de um grafo simples com `n` vértices e `k` é $\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$

Grafo simples e conexo

$$n-1 \leq e \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

Grafo simples

$$n-k \leq e \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$