Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Bacharelado em Ciência da Computação

Teoria dos Grafos

Teoria dos Grafos

Prof.: Felipe Domingos

felipe@pucminas.br

Algoritmos para o Menor Caminho

Cormen – páginas 470 até 475

Algoritmos para o Menor Caminho

- Um motorista deseja encontrar a rota mais curta possível do Rio de Janeiro a São Paulo
- Dado um mapa rodoviário do Brasil no qual a distância entre cada par de interseções adjacentes esteja marcada, como podemos determinar essa rota mais curta?

Algoritmos para o Menor Caminho

- Para resolver de forma eficiente problemas de menor caminho, utilizamos um grafo ponderado $G=(V,E)$, com função de peso $w:E \rightarrow R$ que mapeia arestas para pesos de valores reais
- O peso do caminho $p=\langle v0, v1, ..., vk \rangle$ é o somatório dos pesos de suas arestas constituintes

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1,} v_i)$$

Algoritmo de Dijkstra

- O algoritmo de Dijkstra resolve o problema de caminhos mais curtos de única origem em um grafo ponderado $G=(V,E)$ para o caso no qual os pesos de arestas são não negativos
- Portanto, $w(u, v) \geq 0$ para cada aresta $(u, v) \in E$

Algoritmo de Dijkstra

- Mantém um conjunto S de vértices cujos pesos finais de caminhos mais curtos desde a origem s já foram determinados
- O algoritmo seleciona repetidamente o vértice $u \in V-S$ com a estimativa mínima de caminhos mais curtos, adiciona u a S e relaxa todas as arestas que saem de u
- A fila de prioridades mínima Q de vértices possui os valores d como chave

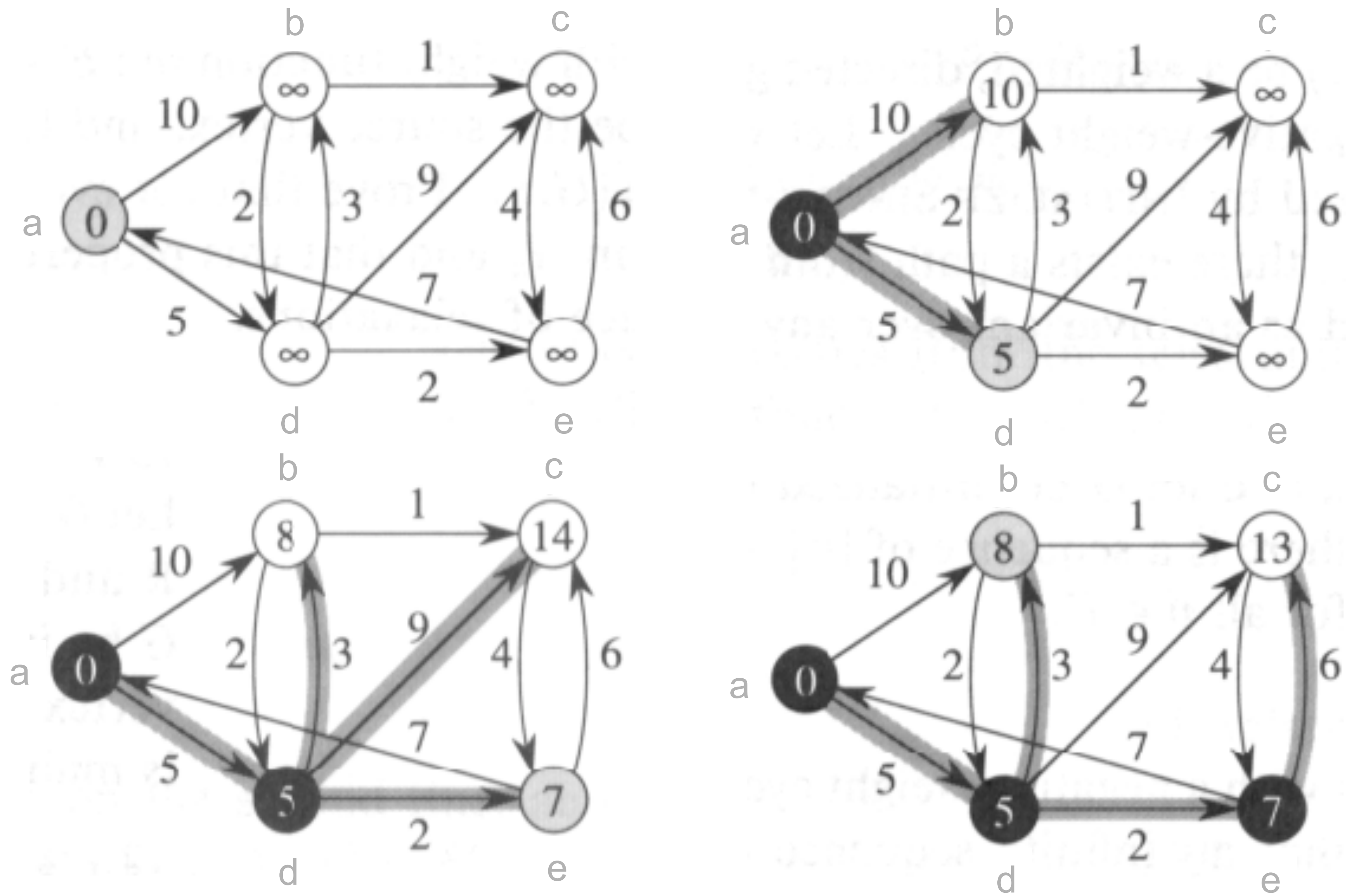
Algoritmo de Dijkstra

```
DIJKSTRA(G,w,s)
for cada vértice v ∈ V[G] do
    d[v] ← ∞
    π[v] ← NIL
d[s] ← 0
S ← ∅
Q ← V[G]
while Q ≠ ∅ do
    u ← EXTRACT-MIN(Q)
    S ← S ∪ {u}
    for cada vértice v ∈ Adj[u] do
        if d[v] > d[u] + w(u,v) then
            d[v] ← d[u] + w(u,v)
            π[v] ← u
```

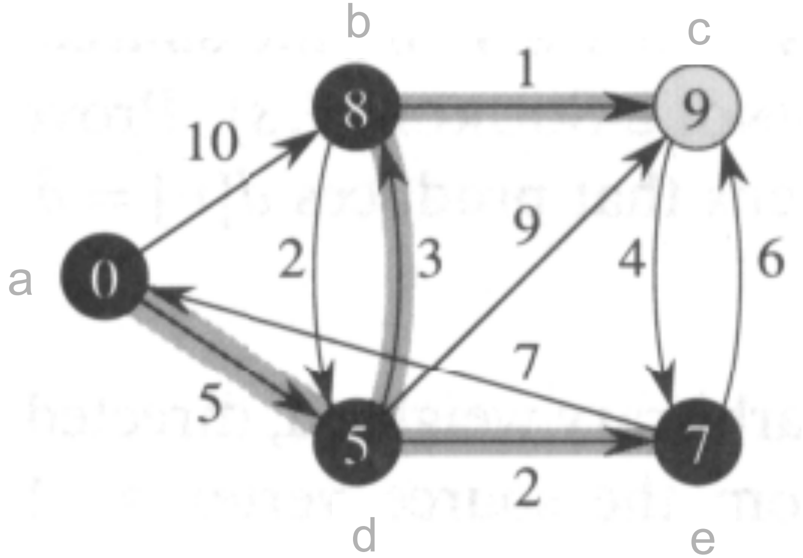
BUILD-MIN-HEAP

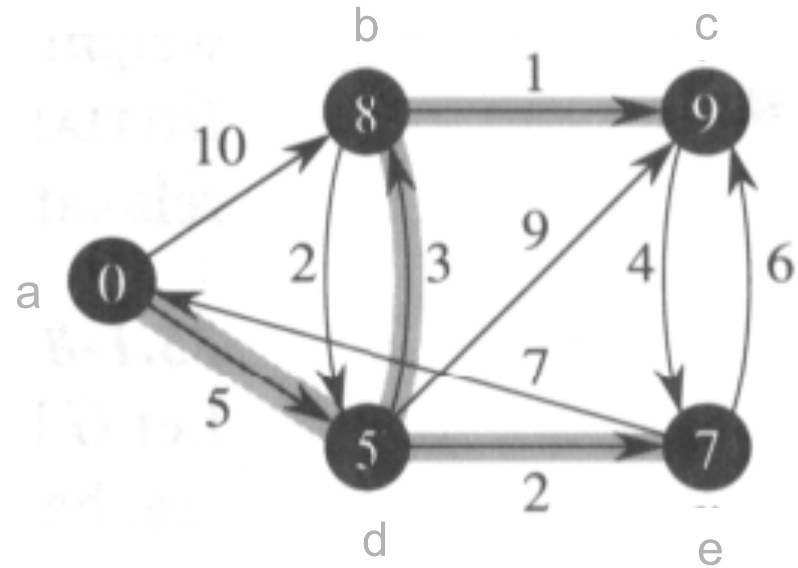
DECREASE-KEY

Algoritmo de Dijkstra



Algoritmo de Dijkstra



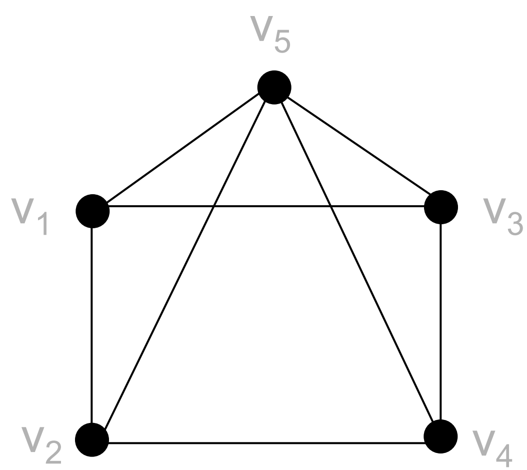


Coloração

Deo – páginas 165 até 169 e 186 até 190

Coloração de Grafos

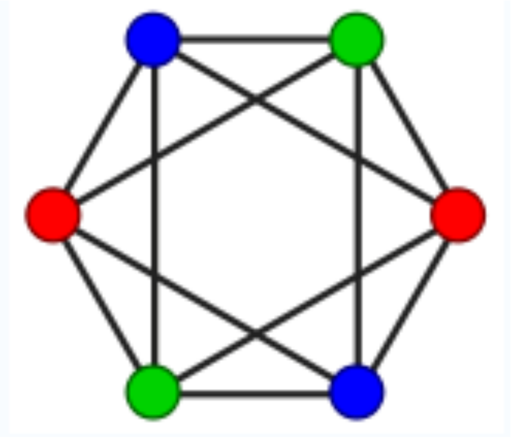
- Dado um grafo G, como pintar seus vértices com várias cores de maneira que vértices adjacentes são pintados com cores diferentes? Qual é o menor número de cores necessárias?



- Dado um grafo G sem autoloops, uma coloração de G é uma atribuição de cores aos vértices de G de maneira que cores diferentes são atribuídas a vértices adjacentes

Coloração de Grafos

- Se existe uma coloração para um grafo `G` que utiliza `K` cores, então `G` é um grafo `K-colorido`
- O número cromático de um grafo `G`, denotado por `X(G)`, é o menor número `K` para o qual `G` é `K-colorido`



`X(G)` = 3

Coloração de Grafos

- Observações
  - Não precisamos considerar grafos desconexos porque as cores utilizadas em um componente não tem efeito sobre as do outro componente
  - Arestas paralelas não afetam a coloração
  - Grafo não pode ter *autoloops*

GRAFOS CONEXOS SIMPLES

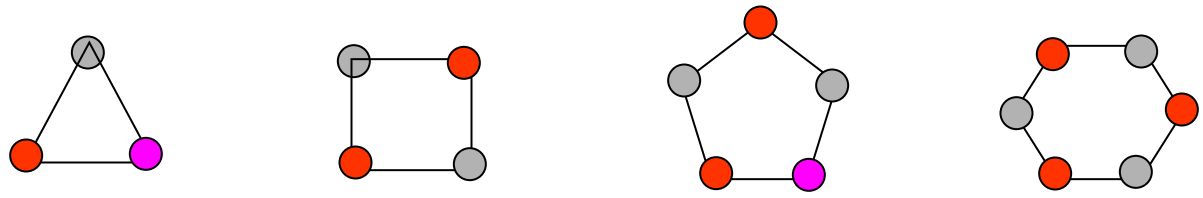
Coloração de Grafos

- O que podemos dizer sobre o número cromático dos seguintes grafos?
  - grafo que consiste de um único vértice
  - grafo com pelo menos uma aresta
  - grafo completo K_n
  - grafo bipartido
  - árvore com 2 ou mais vértices

- Todo grafo 2-cromático é bipartido?
- Todo grafo 2-cromático é uma árvore?

Coloração de Circuitos

- Um grafo consistindo simplesmente de um circuito com $n \geq 3$ vértices é 2-cromático se n é par e 3-cromático se n é impar



- Um grafo simples G com pelo menos uma aresta é 2-cromático se, e somente se, G não contiver circuitos de tamanho ímpar

Coloração de Grafos

- Se d é o maior grau dos vértices de um grafo simples G então

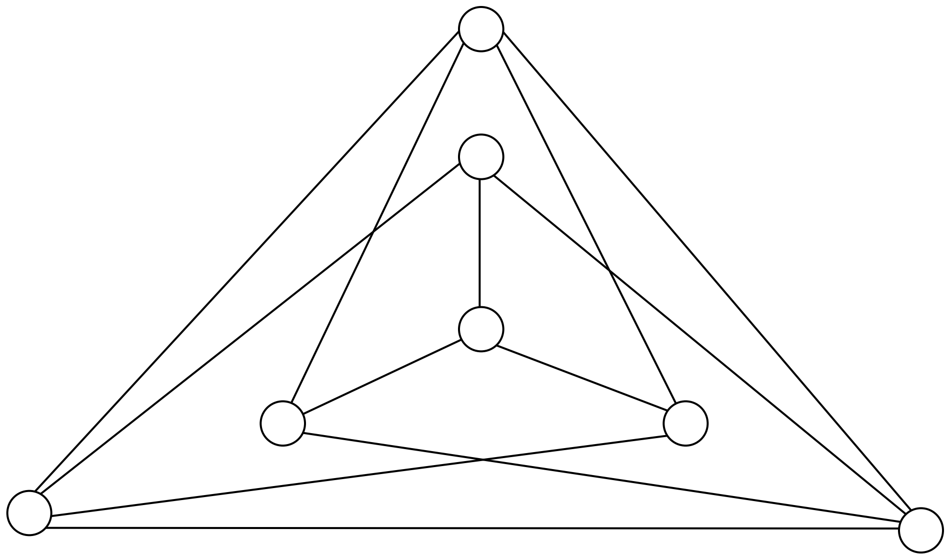
$$X(G) \leq d+1$$

- Se d é o maior grau dos vértices de um grafo simples G, tal que G não contém um grafo circuito com um número ímpar de vértices e nem um grafo completo, de d+1 vértices, então

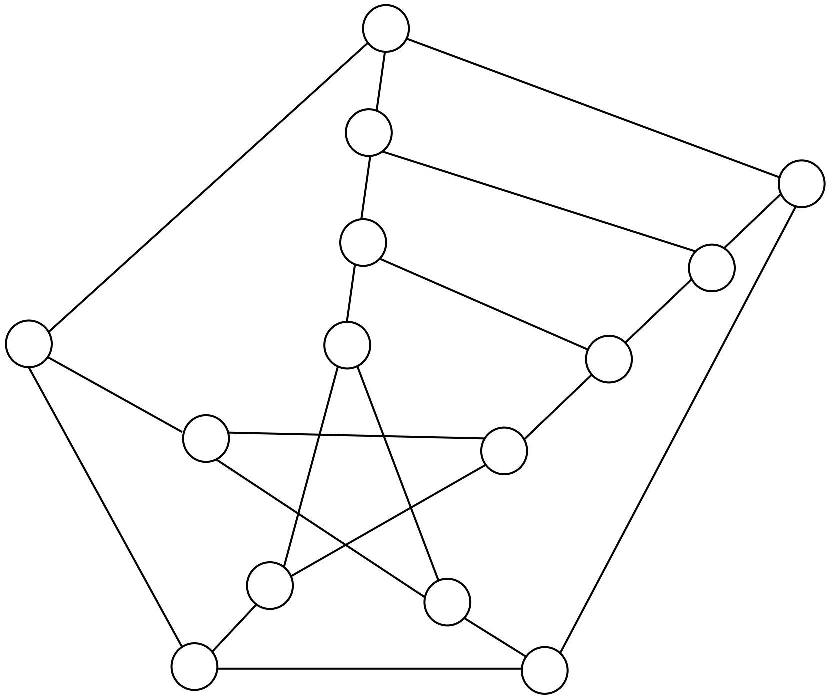
$$X(G) \leq d$$

Exercícios

19. Qual é o número cromático dos seguintes grafos?



a)



b)

Coloração de Arestas

- Uma coloração de arestas de um grafo simples G é uma atribuição de cores às arestas de G de maneira que cores diferentes são atribuídas a arestas adjacentes
- Se existe uma coloração de arestas para um grafo G que utiliza K cores, então, G é um grafo K–colorido de arestas
- O índice cromático de um grafo G, denotado por X′(G) é o menor número K para qual G é K–colorido de arestas

Coloração de Arestas

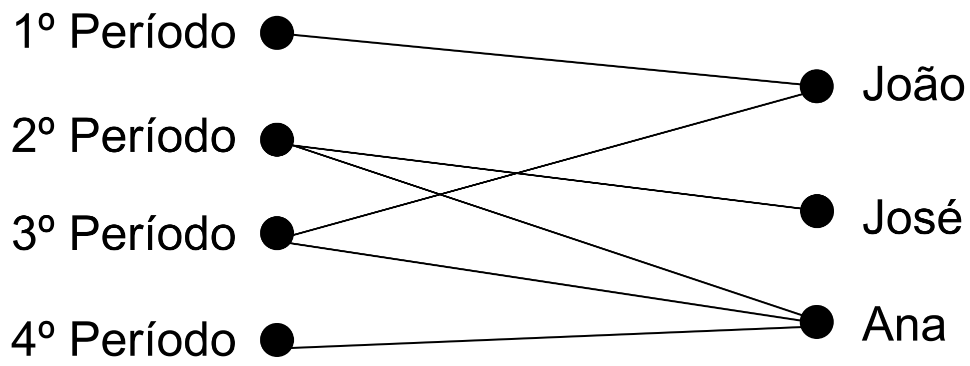
- Se G é um grafo simples cujo vértice de maior grau tem grau d, então

$$d \leq X'(G) \leq d+1$$

- Qual é a coloração de arestas do K_n?

Coloração de Arestas

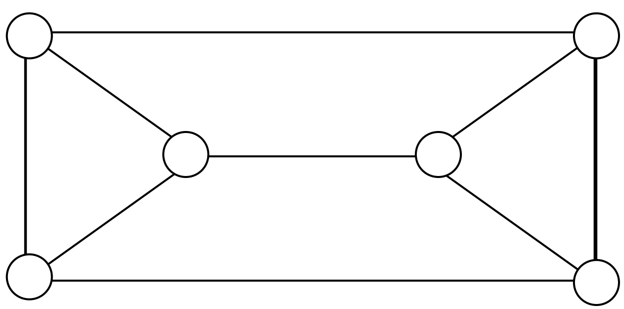
- Três professores lecionam disciplinas em 4 períodos do curso:



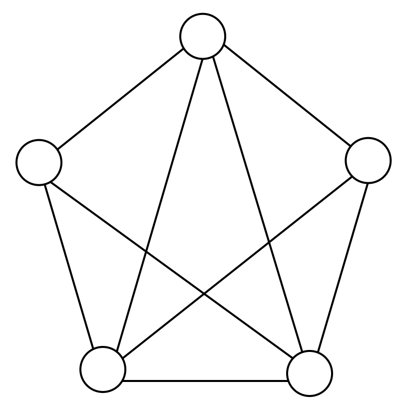
Como alocar horários para as aulas, sem que haja conflito para os professores e para as turmas?

Exercícios

20. Mostre que se um grafo bipartido possui algum circuito, esse deve ser de tamanho par.
21. Qual é o índice cromático do C_n?
22. Qual é o índice cromático do K_n?
23. Encontre o $X'(G)$ para os seguintes grafo G:



(a)



(b)