LE FUNZIONI

Dati due insiemi A e B, tra essi c'è una relazione se a qualche elemento di A corrispondono uno o più elementi di B.
La relazione diventa funzione se ad ogni elemento di A associa uno e un solo elemento di B. È detta corrispondenza univoca.

$f: A \rightarrow B$ f è una funzione da A a B

A è l'insieme di partenza; B l'insieme d'arrivo

$f: x \mapsto y$ y è l'immagine di x mediante f

A è il dominio; il sottoinsieme di B formato dalle immagini è detto codominio. $y = f(x)$

Se gli insiemi sono numerici, abbiamo funzioni numeriche

Consideriamo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una f. reale di variabile reale con y = variabile dipendente e x = variabile indipendente

Il dominio naturale è il più ampio sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che può essere preso come dominio, contenente tutti i valori per cui non perde significato l'espressione che definisce la funzione.

Un numero reale a è uno zero della funzione se $f(a) = 0$

- Forma esplicita $y = f(x)$ $y = 2x^2 - 1$
- Forma implicita $F(x; y) = 0$ $2x^2 - y - 1 = 0$

FUNZIONE → Algebrica → Razionali

↓   ↓   ↓   ↘ Intere

Trascendenti   Irrazionali   Fratte

$y = 2^x$ $y = \sqrt{x+1}$ $y = \frac{2x-1}{3x+2}$

$y = \cos x$

- Lineari $y = 2x + 5$
- Quadratiche $y = x^2 + 1$

Una funzione si dice iniettiva se ogni elemento di B è immagine di al più un elemento di A.
Una funzione si dice suriettiva quando ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A.
Una funzione è biiettiva o biunivoca quando è sia iniettiva che suriettiva. Queste funzioni sono invertibili

$y = f(x) \quad x = f^{-1}(y)$

Una funzione è crescente se all'aumentare di x l'immagine presenta dei cali. É strettamente crescente se l'immagine aumenta sempre. É decrescente se all'aumentare di x, l'immagine presenta dei picchi. É strettamente decrescente se cala con costanza.
Una funzione è pari se $f(-x) = f(x)$, mentre è ~~dispari~~ dispari se $f(-x) = -f(x)$. Le pari sono simmetriche rispetto all'asse y, mentre le dispari lo sono rispetto all'origine

POTENZE CON ESP. ~~RAZIONALE~~ REALE

LE POTENZE CON ESP. INTERO

a^x se	è definita per	Esempio
$x > 0$	$\forall a$	$(-\sqrt{2})^3 = -2\sqrt{2}$ $\quad 0^3 = 0$
$x = 0$	$a \neq 0$	$a^0 = 1$ $\quad 0^0$ indeterminato
$x < 0$	$a \neq 0$	$(-2/3)^{-2} = (-3/2)^2 = \frac{9}{4}$ $\quad 0^{-2} = \left(\frac{1}{0}\right)^2$

POTENZE CON ESP. RAZIONALE

a^x se	è definita per	Esempio
$x > 0$	$a \geq 0$	$5^{3/4} = \sqrt[4]{5^3}$ $\quad 0^{1/2} = 0$
$x = 0$	$a \neq 0$	$a^0 = 1$ $\quad 0^0$ indeterminato
$x < 0$	$a > 0$	$(\sqrt{3})^{-1/2} = \frac{1}{(\sqrt{3})^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

La base non può essere negativa

$$-125 = (-5)^3 = \left\{\left[(-5)^3\right]^2\right\}^{1/2} = \left[(-5)^6\right]^{1/2} = \sqrt{(-5)^6} = \sqrt{5^6} = 125$$

$$-125 = +125$$

$1^x = 1 \quad \forall x$

$0^x = 0 \quad x \in R^+$ $\qquad$ non si definisce: 0^x con $x \leq 0$

$a^0 = 1 \quad a \in R^+$ $\qquad$ a^x con $a < 0$

PROPRIETÀ DELLE POTENZE

$a, b \in R^+ \quad x, y \in R$

I Prodotto di potenze di uguale base $\quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

II Quoziente di potenze di uguale base $\quad a^x : a^y = a^{x-y}$

III Potenza di potenza $\quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$

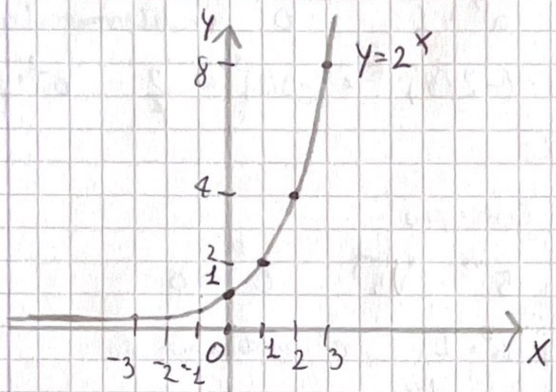
IV Prodotto di potenze di uguale esp. $\quad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

V Quoziente di potenze di uguale esp. $\quad a^x : b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

TEOREMA: all'aumentare di x, la potenza a^x

- aumenta se $a > 1$ $\quad x_1 < x_2 \iff a^{x_1} < a^{x_2}$
- diminuisce se $0 < a < 1$ $\quad x_1 < x_2 \iff a^{x_1} > a^{x_2}$

FUNZIONE ESPONENZIALE $\quad y = a^x$, con $a \in \mathbb{R}^+$



DOMINIO: $\mathbb{R}$

CODOMINIO: $\mathbb{R}^+$

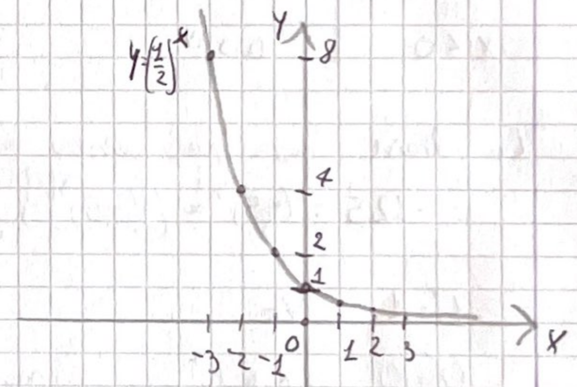
non interseca mai l'asse x

interseca l'asse y in $(0;1)$

Funzione crescente

$a^x \to 0$ se $x \to -\infty$

$a^x \to +\infty$ per $x \to +\infty$



Dominio: $\mathbb{R}$ Codominio $\mathbb{R}^+$

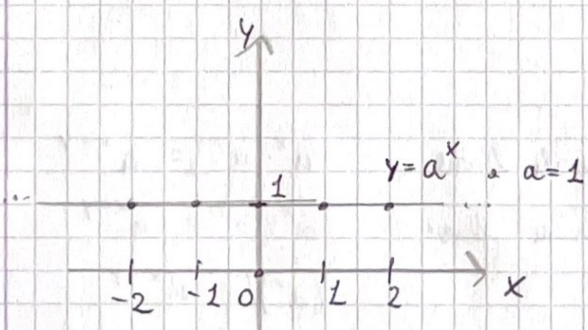
Funzione decrescente

Non interseca mai l'asse x

Interseca l'asse y in $(0;1)$

$a^x \to 0$ per $x \to +\infty$

$a^x \to +\infty$ per $x \to -\infty$



Dominio: $\mathbb{R}$ Codominio: $\{1\}$

Funzione costante

Non interseca mai l'asse x

Interseca l'asse y in $(0;1)$

Due funzioni con basi reciproche sono simmetriche rispetto all'asse y. Basi opposte sono simmetriche rispetto all'asse x

DOMINI

$y = a^{f(x)}$ esiste nel dominio di $f(x)$, se $a > 0$

$y = 3^{\sqrt{x-1}}$ $D: x-1 \geq 0 \rightarrow D: x \geq 1$

$y = [f(x)]^{\sqrt{2}}$ $f(x) \geq 0$, se $a \in R^+$ $f(x) > 0$, se $a \in R^-$

$y = (x^2-1)^{\sqrt{2}}$ $D: x^2-1 \geq 0 \rightarrow D: x \leq -1 \vee x \geq 1$

$y = [f(x)]^{g(x)}$ esiste nel dominio $g(x)$, se $f(x) > 0$

$y = (4x^2-1)^{\sqrt{x}}$ $D: \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2-1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2} \end{cases}$ $D: x > \frac{1}{2}$

EQUAZIONI ESPONENZIALI

$a^x = b$ con $a > 0$

sono impossibili se $b \leq 0$ o se $a = 1$ e $b \neq 1$

indeterminata $1^x = 1$

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

se $a > 1$, presi due numeri t e z con $t > z$ $a^t > a^z$

se $0 < a < 1$, presi due numeri t e z con $t > z$ $a^t < a^z$

$32^x > 128 \rightarrow 2^{5x} > 2^7 \rightarrow 5x > 7 \rightarrow x > \frac{7}{5}$

$\left(\frac{1}{8}\right)^x > \frac{1}{4} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow 3x < 2 \rightarrow x < \frac{2}{3}$ cambio verso tra gli esp.

LOGARITMI

se ho $5^2 = x$, uso le potenze; se ho $x^2 = 25$, uso la radice

$5^x = 25$ si risolve con i logaritmi

$\Downarrow$

$\log_5 25 = x$ dove 5 è la base e 25 l'argomento

$\log_a b = x$ $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$

$\log_a 1 = 0$ $a^0 = 1$ restituisce sempre immagine $= 0$

$\log_a a = 1$ $a^1 = a$

$a^{\log_a b} = b$ $x = y \iff \log_a x = \log_a y$

$\Downarrow$

sostituzione della x

TEOREMA

All'aumentare dell'argomento b, il logaritmo $\log_a b$

- aumenta se $a > 1$
- diminuisce se $0 < a < 1$

LOG. DI UN PRODOTTO Il log del prodotto di due numeri positivi è uguale alla somma dei log dei singoli fattori

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

LOG DI UN QUOZIENTE Il log del quoziente di due numeri è uguale alla differenza tra i log dei singoli numeri

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

LOG DI UNA POTENZA Il log della potenza di un numero positivo elevato ad esp. reale è uguale al prodotto di tale esponente per il log di quel numero

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

DIMOSTRAZIONI posti $x = \log_a b$ da cui $a^x = b$ e

$y = \log_a c \rightarrow a^y = c$

$$a^x \cdot a^y = b \cdot c \rightarrow a^{x+y} = bc \rightarrow x+y = \log_a (b \cdot c)$$

$$\underline{\log_a b + \log_a c = \log (b \cdot c)}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{b}{c} \rightarrow a^{x-y} = \frac{b}{c} \rightarrow x-y = \log_a \frac{b}{c}$$

$$\underline{\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}}$$

$$a^x = b \rightarrow (a^x)^n = b^n \rightarrow a^{xn} = b^n \Rightarrow nx = \log_a b^n$$

$$\underline{n \log_a b = \log_a b^n}$$

Per calcolare con la calcolatrice si hanno solo due basi

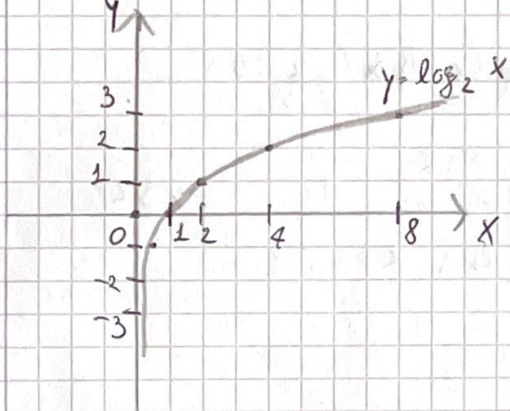
$\log x$ indica $\log_{10} x$ log decimale

$\ln x$ indica $\log_e x$ log naturale o neperiano

e = numero di Nepero 2,71828

CAMBIAMENTO DI BASE $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

FUNZIONE LOGARITMICA $y = \log_a x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$



Dominio R^+

Codominio R

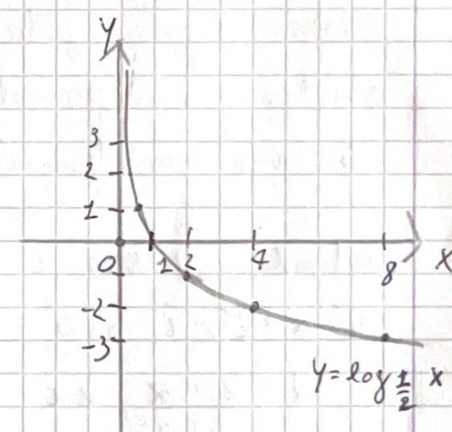
Intersezione $(1;0)$

Funzione crescente

Non interseca l'asse y

$\log_a x \to -\infty$ per $x \to 0$

$\log_a x \to +\infty$ per $x \to +\infty$



Dominio R^+ Codominio R

Funzione decrescente

Non interseca l'asse y

Intersezione con l'asse x in $(1;0)$

$\log_a x \to +\infty$ per $x \to 0$

$\log_a x \to -\infty$ per $x \to +\infty$

Le funzioni con basi reciproche sono simmetriche rispetto all'asse y.

La funzione logaritmica è la funzione inversa della funzione esponenziale. I grafici delle due sono simmetrici rispetto alla bisettrice di I e III q.

EQUAZIONI LOGARITMICHE $\log_a A(x) = \log_a B(x)$

$\log_2 (x-2) - \log_2 (x) = \log_2 (x-1)$ C.E. $\begin{cases} x-2>0 \\ x>0 \\ x-1>0 \end{cases}$ C.E. $x>2$

$\frac{x-2}{x} = x-1$

$\Downarrow$ $x-2 = x(x-1) \Rightarrow x^2 - x - x + 2 = 0$

$x^2 - 2x + 2 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-2}}{1}$ IMP.

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE $\log_a A(x) < \log_a B(x)$

$\begin{cases} \text{C.E. degli argomenti} \\ \text{dis. degli argomenti} \end{cases}$ $\log_{\frac{1}{3}} (x-4) > \log_{\frac{1}{3}} 5x$

$\begin{cases} x-4>0 \\ 5x>0 \\ x-4 < 5x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>4 \\ x>0 \\ 4x > -4 \rightarrow x>-1 \end{cases}$ $x>4$

GONIOMETRIA

misura degli angoli

- Sistema sessagesimale $32° \, 10' \, 47'' = 32° + \left(\frac{10}{60}\right)° + \left(\frac{47}{60}\right)° = 32{,}95°$
- Sistema sessadecimale $37{,}25° \Rightarrow (0{,}25 \cdot 60)' = 15'$

$37° \, 15'$

radianti prese 2 circonferenze

$l : \alpha° = 2\pi r : 360°$ e $l' : \alpha° = 2\pi r' : 360°$

$l = \frac{2\pi\alpha}{360°} \cdot r$ $\qquad l' = \frac{2\pi\alpha}{360°} \cdot r'$

$l : l' = r : r' \rightarrow l : r = l' : r'$

$\frac{l}{r} = \frac{l'}{r'}$

Il rapporto non dipende dalla circonferenza, ma dall'angolo considerato. Il rapporto α è la misura in radianti di $\alpha°$

Radiante è l'angolo al centro che insiste su un arco di lunghezza uguale al raggio.

RELAZIONE

Angolo giro $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ $\qquad \alpha^\circ : \alpha_{RAD} = 360^\circ : 2\pi$

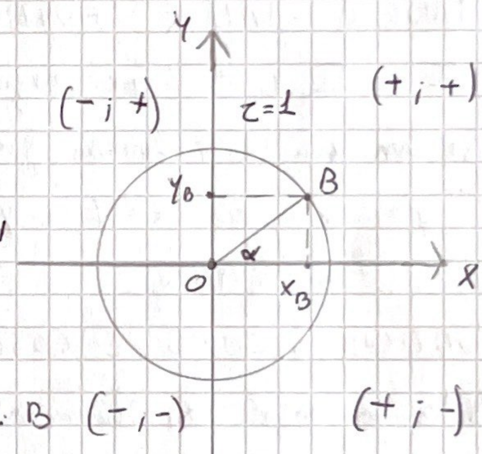
GRADI	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
RADIANTI	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

$l = \alpha_{RAD} \cdot r$

SETTORE CIRCOLARE $\quad A_S : A_C = \alpha_{RAD} : 2\pi$

$A_S = \frac{1}{2}\alpha r^2$ o $A_S = \frac{1}{2} l r$

FUNZIONI SENO e COSENO



Presa una circonferenza goniometrica e un angolo α con il punto B ad esso associato sulla circonferenza, definiamo seno e coseno di α le funzioni che associano da α il valore di ordinata ed ascissa di B

$\cos\alpha = X_B$ $\quad \sin\alpha = Y_B$

Dipendono dall'angolo α. Preso un triangolo rettangolo

$\sin\alpha = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}}$ $\qquad \cos\alpha = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}}$

$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ $\qquad -1 \leq \cos\alpha \leq 1$ $\qquad$ DOMINIO : $\mathbb{R}$

Im : $[-1; 1]$ $\qquad$ PERIODO : 2π

$\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ FUNZIONE PARI : simmetrico rispetto a Y

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ FUNZIONE DISPARI : simmetria rispetto all'origine

1ª RELAZIONE FONDAMENTALE DELLA GONIOMETRIA

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ deriva dal Teorema di Pitagora

TANGENTE

Presa circonferenza goniometrica ed il punto B dato dall'inters. di questa con l'angolo α, definiamo tangente di α la funzione che associa ad α il rapporto ordinata/ascissa

$TAN\,\alpha = \frac{y_B}{x_B}$ → nel triangolo $TAN\,\alpha = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}}$

2^a RELAZIONE FONDAMENTALE $TAN\,\alpha = \frac{SIN\,\alpha}{COS\,\alpha}$

C.E. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$TAN(-\alpha) = -TAN\,\alpha$ FUNZIONE DISPARI con PERIODO π

I e III q. + per segni concordi di SIN e COS

Se ~~in~~ una circonferenza goniometrica tracciamo una retta

$y = mx$ con $x = 1$ e $y = TAN\,\alpha$ misurata su una retta // all'asse y

$m = TAN\,\alpha$

FUNZIONI SECANTE E COSECANTE

Dato un angolo α, chiamiamo secante di α il reciproco del valore di $COS\,\alpha$ e cosecante di α il reciproco del valore di $SIN\,\alpha$

$SEC\,\alpha = \frac{1}{COS\,\alpha}$ con $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ Periodo 2π PARI

$CSC\,\alpha = \frac{1}{SIN\,\alpha}$ con $\alpha \neq k\pi$ Periodo 2π DISPARI

Dati i punti S ed S' dall'intersezione di assi e tangente in B, $SEC\,\alpha$ è OS, visto sull'asse x, mentre $CSC\,\alpha$ è OS', visto sull'asse y

Data una funzione $f(x)$ possiamo ricavarne il reciproco $y = g(x) = \frac{1}{f(x)}$

FUNZIONE COTANGENTE

Preso un ~~og~~ angolo α ed il punto B, intersezione di questo con la circonferenza, definiamo cotangente di α la funzione che associa ad α il rapporto tra ascissa e ordinata di B

$$COT\ \alpha = \frac{x_B}{y_B} \rightarrow COT\ \alpha = \frac{COS\ \alpha}{SIN\ \alpha} \qquad C.E.\ \alpha \neq k\pi$$

$$\downarrow$$

$$COT(-\alpha) = -COT\ \alpha \qquad COT\ \alpha = \frac{1}{TAN\ \alpha}$$

misurata su una retta // all'asse X

DISPARI PERIODO π

$$TAN\ \alpha \cdot COT\ \alpha = 1$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ANGOLI PARTICOLARI

30°

$SIN\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad COS\ \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad TAN\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad COT\ \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

$SEC\ \frac{\pi}{6} = 1 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\quad CSC\ \alpha = 2$

45°

$COS\ \frac{\pi}{4} = SIN\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad COT\ \frac{\pi}{4} = TAN\ \frac{\pi}{4} = 1$

$SEC\ \frac{\pi}{4} = CSC\ \frac{\pi}{4} = 1 : \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

60°

$COS\ \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\quad SIN\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad TAN\ \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ $\quad COT\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$SEC\ \frac{\pi}{3} = 2$ $\quad CSC\ \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

Sfruttando le relazioni tra angoli associati è possibile ~~esprimere~~ ridurre tutti gli angoli al I quadrante

$SIN\ 110°$ $\qquad 110° = 90° + 20°$

$SIN\ 110° = SIN\ (90° + 20°) = COS\ 20°$

$COS\ 230°$ $\qquad 230° = 180° + 50°$ $\qquad 230° = 270° - 40°$

$COS\ 230° = COS\ (180° + 50°) = -COS\ 50°$

$COS\ 230° = COS\ (270° - 40°) = -SIN\ 40°$

Negli ~~vari~~ angoli associati noti che SIN, COS, TAN e COT si riducono alla stessa funzione se troviamo angoli opposti, angoli giro e angoli piatti. SIN e COS si scambiano con $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3}{2}\pi$ così come TAN e COT

FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

FUNZIONI

Una funzione è invertibile, ossia ammette la f. inversa, se e solo se è biunivoca (o biettiva). È tale quando a ogni elemento dell'insieme di arrivo (Codominio) arriva una e una sola freccia dall'insieme di partenza (Dominio).

$f(x) = y = 2x - 1$ la sua funzione inversa $f^{-1}(x)$:

ricaviamo x in funzione della y

$y + 1 = 2x \rightarrow x = \frac{y+1}{2}$ $f^{-1}(x) = y = \frac{x+1}{2}$

Nel caso le funzioni non siano biunivoche si può restringere il dominio (es. contare un solo ramo di una parabola con asse $= y$).

SENO, ARCOSENO restringiamo a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $y = \sin x$ è biunivoca

Dati x e y, con $-1 \le x \le 1$ e $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, diciamo che y è l'arcoseno di x se x è il seno di y

$y = \text{ARCSIN } x$ o $y = \sin^{-1} x$

$\text{ARCSIN } 1 = \frac{\pi}{2} \iff \sin \frac{\pi}{2} = 1$

COSENO, ARCOCOSENO Dati due numeri reali x e y, con $-1 \le x \le 1$ e $0 \le y \le \pi$, diciamo che y è l'arcocoseno di x se x è il coseno di y. $y = \text{ARCCOS } x$ o $y = \cos^{-1} x$

restrizione a $[0; \pi]$ $\text{ARCCOS } (-1) = \pi \iff \cos \pi = -1$

TANGENTE e
ARCOTANGENTE Dati i numeri reali x e y, con $x \in \mathbb{R}$ e $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$,
diciamo che y è l'arcotangente di x se x è la tangente di y $\downarrow$ $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

$y = ARCTAN\ x$ o $y = TAN^{-1}x$

$ARCTAN\ 1 = \frac{\pi}{4} \iff TAN\ \frac{\pi}{4} = 1$

COTANGENTE e
ARCOCOTANGENTE Dati i numeri reali $x \in \mathbb{R}$ e $0 < y < \pi$, $]0; \pi[$
diciamo che y è l'arcocotangente di x se x è la cotangente di y

$y = ARCCOT\ x$ o $y = COT^{-1}x$

$ARCCOT\ 0 = \frac{\pi}{2} \iff COT\ \frac{\pi}{2} = 0$

Tutti i grafici si ricavano facendo la simmetria con la bisettrice di I e III quadrante $y = x$

$SIN^2\alpha + COS^2\alpha = 1$ $\quad TAN\ \alpha = \frac{SIN\ \alpha}{COS\ \alpha}$ $\quad SIN\ \alpha = TAN\ \alpha \cdot COS\ \alpha$

$COS\ \alpha = \frac{SIN\ \alpha}{TAN\ \alpha}$

$COS^2 \cdot TAN^2 + COS^2 = 1 \rightarrow COS\ \alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+TAN^2\alpha}}$

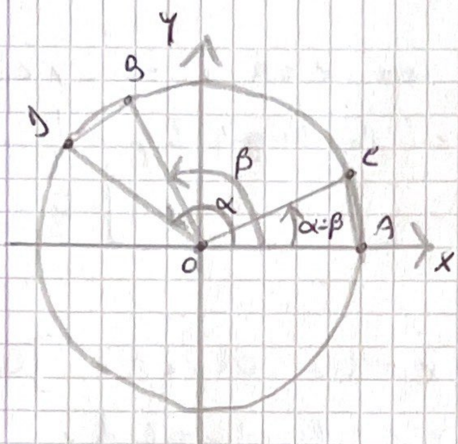
$SIN^2 + \frac{SIN^2}{TAN^2} = 1 \rightarrow SIN\ \alpha = \frac{TAN\ \alpha}{\pm\sqrt{1+TAN^2\alpha}}$ $\quad TAN \cdot COT = 1$

$SEC = \frac{1}{COS}$ $\quad SEC = 1 : \frac{SIN}{TAN} \rightarrow SEC = \frac{TAN}{SIN}$

$CSC = \frac{1}{SIN}$ $\quad CSC = \frac{1}{TAN \cdot COS}$ $\quad TAN = \frac{1}{CSC} : \frac{1}{SEC} \rightarrow TAN = \frac{SEC}{CSC}$

$TAN = SEC \cdot SIN$ $\quad COT = \frac{COS}{SIN}$ $\rightarrow SIN = \frac{1}{\pm\sqrt{1+COT^2}}$

$COT = COS \cdot CSC$ $\quad COS = \frac{\pm COT}{\sqrt{1+COT^2}}$



$D\hat{O}A$ ampiezza α

$B\hat{O}A$ ampiezza β

$$\left.\begin{array}{l} D\hat{O}B \text{ è } \alpha-\beta \\ C\hat{O}A \text{ è } \alpha-\beta \end{array}\right\} \text{CORDE UGUALI}$$

$$\overline{CA}=\overline{DB}$$

$B(\cos\beta ; \sin\beta)$ $\quad D(\cos\alpha ; \sin\alpha)$

$C(\cos(\alpha-\beta) ; \sin(\alpha-\beta))$

$$\overline{CA}^2 = [\cos(\alpha-\beta)-1]^2 + \sin^2(\alpha-\beta)$$

$$\overline{DB}^2 = (\cos\alpha-\cos\beta)^2 + (\sin\alpha-\sin\beta)^2$$

$$\cos^2(\alpha-\beta)+1-2\cos(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta +$$
$$+\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha-\sin\beta$$

$$\cancel{2}-2\cos(\alpha-\beta) = \cancel{2}-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos[\alpha-(-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)] = \sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$$

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}} \qquad \boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}}$$

FUNZIONE LINEARE

$y = a\,SIN\,x + b\,COS\,x$ cerchiamo un numero r ed un angolo α

$y = r\,SIN\,(x+\alpha)$ dove α è l'angolo aggiunto

$r\,SIN(x+\alpha) = r\,SIN\,x\,COS\,\alpha + r\,COS\,x\,SIN\,\alpha$

$$\begin{cases} a = r \cdot COS\,\alpha \\ b = r \cdot SIN\,\alpha \end{cases}$$

$a^2 + b^2 = r^2 COS^2\alpha + r^2 SIN^2\alpha \rightarrow a^2+b^2 = r^2 \rightarrow r = \sqrt{a^2+b^2}$

$\frac{b}{a} = \frac{SIN\,\alpha}{COS\,\alpha} \rightarrow TAN\,\alpha = \frac{b}{a}$ trovata la tangente, troviamo i segni di seno e coseno e determiniamo l'angolo

$y = SIN\,x - COS\,x$

$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ $TAN = \frac{-1}{1} = -1$ $SIN\,\alpha$ è $-$, $COS\,\alpha$ è $+$ IV q.

$\alpha = -\frac{\pi}{4}$ $y = \sqrt{2}\,SIN\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

ANGOLO FRA DUE RETTE

$y = mx + q$ $y' = m'x + q'$ $m = TAN\,\alpha$ e $m' = TAN\,\beta$ angoli con la direzione +

$TAN\,\gamma = TAN(\alpha - \beta) = \frac{TAN\,\alpha - TAN\,\beta}{1 + TAN\,\alpha \cdot TAN\,\beta} = \frac{m - m'}{1 + m\,m'}$

γ è acuto $\pi - \gamma$ è ottuso

DUPLICAZIONE

$SIN\,2\alpha = SIN(\alpha + \alpha) = 2\,SIN\,\alpha\,COS\,\alpha$

$COS\,2\alpha = COS^2\alpha - SIN^2\alpha \rightarrow 1 - 2SIN^2\alpha \rightarrow SIN^2\alpha = \frac{1 - COS\,2\alpha}{2}$

$2COS^2\alpha - 1 \rightarrow COS^2\alpha = \frac{1 + COS\,2\alpha}{2}$

$TAN\,2\alpha = \frac{2TAN\,\alpha}{1 - TAN^2\alpha}$

$SIN^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - COS\,\alpha}{2}$

$COS^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + COS\,\alpha}{2}$

BISEZIONE

$$\cos\alpha = \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \qquad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \Rightarrow \text{c.e. } 1+\cos\alpha \neq 0 \quad \alpha \neq \pi + 2k\pi$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

PARAMETRICHE

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

dividiamo per $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ $\qquad$ $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \alpha \neq \pi + 2k\pi$

$$\sin\alpha = \frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} \qquad \cos\alpha = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = t$$

con $\alpha \neq \pi + 2k\pi$

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

PROSTAFERESI

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta \end{cases}$$

sommando $\quad \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

sottraendo $\quad \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha \cdot \sin\beta$

poni $\quad \alpha+\beta = p \qquad \alpha-\beta = q$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin p + \sin q &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin p - \sin q &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}}$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \end{cases}$$

sommando $\quad \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha \cdot \cos\beta$

sottraendo $\quad \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha \cdot \sin\beta$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos p - \cos q &= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}}$$

WERNER

Dai risultati dei sistemi, dividiamo per 2 tutti i membri:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$$

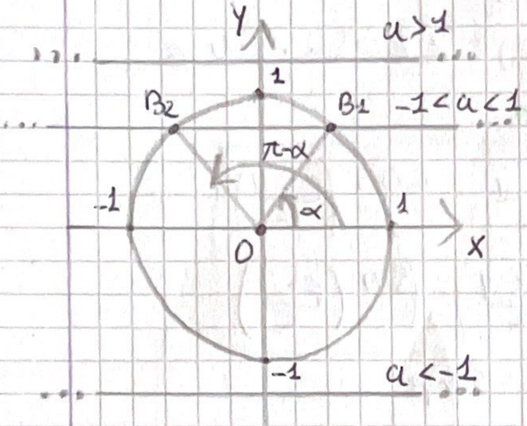
$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]$$

EQUAZIONI e DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

Un' eq. goniometrica contiene almeno una f. goniometrica dell' incognita

$\sin x = a \qquad \cos x = b \qquad \tan x = c \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

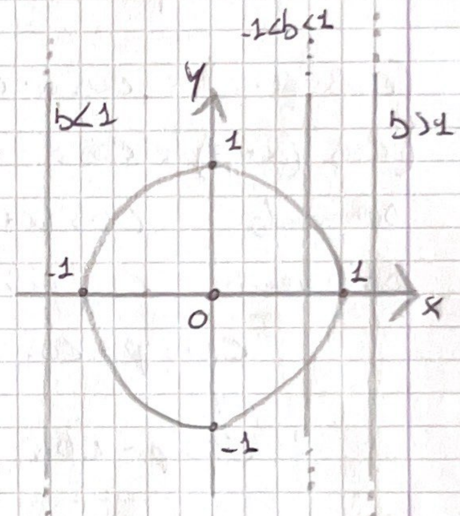


L' equazione è determinata per

$-1 \leq a \leq 1$ con soluzione

$x = \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x = (\pi - \alpha) + 2k\pi$

Impossibile per $a < -1 \vee a > 1$

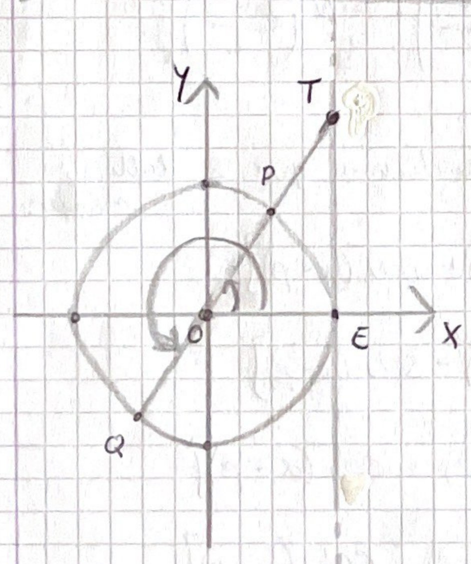


L' equazione è determinata

per $-1 \leq b \leq 1$

$x = \beta + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\beta + 2k\pi$

Impossibile se $b < -1 \vee b > 1$



La tangente di un angolo è l'ordinata del punto d'intersezione della retta tangente alla circonferenza nell' origine degli archi con la retta OP che individua l'angolo.

È sempre determinata

$x = \gamma + k\pi$

Prendendo $\cos x = -\frac{1}{2}$ poniamo $y = \cos x$ e $y = -\frac{1}{2}$

Risolvere l' equazione equivale a trovare i punti di intersezione

PARTICOLARI EQ. GONIOMETRICHE ELEMENTARI

$\sin\alpha = \sin\alpha'$

$$\alpha = \alpha' + 2k\pi \quad \vee \quad \alpha + \alpha' = \pi + 2k\pi$$

$\sin\alpha = -\sin\alpha' \rightarrow \sin\alpha = \sin(-\alpha')$

$\sin\alpha = \cos\alpha' \rightarrow \sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)$

$\sin\alpha = -\cos\alpha' \rightarrow \sin\alpha = \sin\left(\alpha' - \frac{\pi}{2}\right)$

$\cos\alpha = \cos\alpha'$

$$\alpha = \pm\alpha' + 2k\pi$$

$\cos\alpha = -\cos\alpha' \rightarrow \cos\alpha = \cos(\pi - \alpha')$

$\tan\alpha = \tan\alpha'$

$$\alpha = \alpha' + k\pi$$

$\tan\alpha = -\tan\alpha' \rightarrow \tan\alpha = \tan(-\alpha')$

EQUAZIONI LINEARI IN SENO E COSENO

$$a\sin x + b\cos x + c = 0 \qquad a \neq 0;\ b \neq 0 \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

METODO ALGEBRICO

$c = 0 \rightarrow a\sin x + b\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non è soluzione $\rightarrow \cos x \neq 0$

$a\tan x + b = 0 \rightarrow \tan x = -\frac{b}{a}$

$c \neq 0 \rightarrow$ eq. completa

Usiamo le parametriche, dunque verifichiamo se
$x = \pi + 2k\pi$

Risolviamo l'eq. in t

Poniamo $\tan\frac{x}{2} = t_1$ e $\tan\frac{x}{2} = t_2$ e abbiamo le soluzioni

METODO GRAFICO

$$\begin{cases} a \sin x + b \cos x + c = 0 \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} aY + bX + c = 0 & \text{eq. retta} \\ X^2 + Y^2 = 1 & \text{eq. circonferenza con } r = 1 \end{cases}$$

I punti di intersezione forniscono i risultati.

METODO DELL'ANGOLO AGGIUNTO

$a \sin x + b \cos x$ equivale a $r \sin(x + \alpha)$

$$r \sin(x+\alpha) + c = 0 \Rightarrow \sin(x+\alpha) = -\frac{c}{r}$$

EQUAZIONI OMOGENEE DI 2° GRADO IN SIN e COS

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

$a = 0 \vee c = 0 \rightarrow b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$

$a \sin^2 x + b \sin x \cos x = 0$

Raccoglimento e annullamento del prodotto

$a \neq 0 \wedge c \neq 0$ implica $\cos^2 x \neq 0$, dunque dividiamo

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$$

$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$ è riconducibile a omogenea

$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$

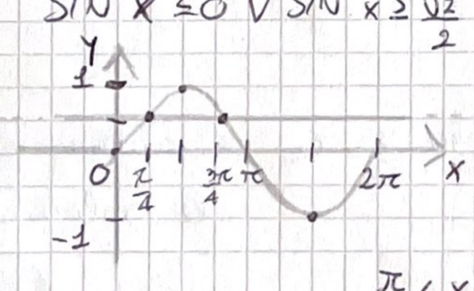
DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

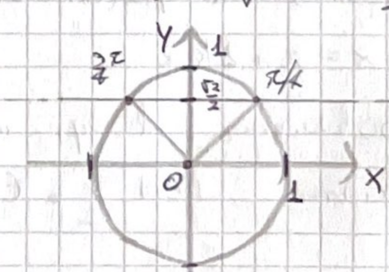
$\sin x > a \quad \cos x \leq b \quad \tan x \leq c$

Risolvi tramite grafico relativo o disegnando la circonferenza

$\sqrt{2} \sin^2 x - \sin x \geq 0 \quad [0; 2\pi] \qquad \sin x = 0 \vee \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

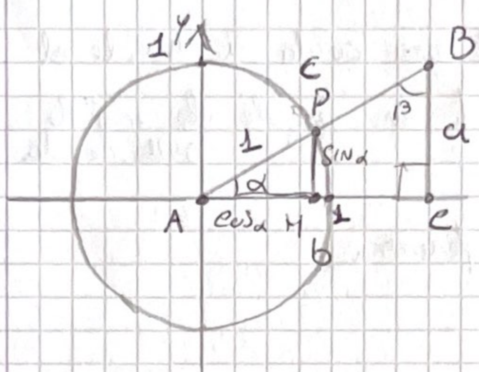
$\sin x \leq 0 \vee \sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$





$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\pi \vee \pi \leq x \leq 2\pi$$

TRIGONOMETRIA (greco "misura dei triangoli)



APH e ABC sono simili

$BC : AB = PH : AP$

$AC : AB = AH : AP$

$AP = 1$; $AH = \cos\alpha$ $PH = \sin\alpha$

$BC = AB \sin\alpha \Rightarrow a = c \cdot \sin\alpha$

$AC = AB \cdot \cos\alpha \rightarrow b = c \cdot \cos\alpha$

1° TEOREMA CATETO = IPOTENUSA · SENO ANGOLO OPP.

CATETO = IPOTENUSA · COSENO ANGOLO ADIAC.

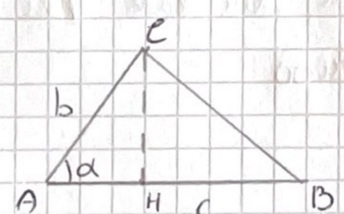
Scrivendo le proporzioni come $BC : AC = PH : AH$

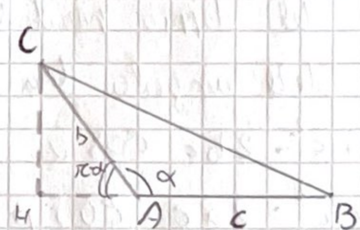
$\frac{BC}{AC} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$ o $\frac{AC}{BC} = \cot\alpha$

$a = b \tan\alpha$ $b = a \cot\alpha$

2° TEOREMA CATETO = ALTRO CAT. · TAN ANGOLO OPP.

CATETO = ALTRO CAT. · COT ANGOLO ADIAC.





$CH = b \cdot \sin\alpha$

$S = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin\alpha$

CHA ha un angolo $\pi - \alpha$

$CH = b \sin(\pi - \alpha) = b \sin\alpha$

$S = \frac{1}{2} cb \sin\alpha$

TEOREMA AREA DEL TRIANGOLO

L'Area del triangolo è uguale a $\frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \sin$ ANGOLO COMPRESSO

TEOREMA DELLA CORDA

In una circonferenza la misura di una corda è uguale al prodotto di diametro per seno di un angolo che insiste sulla corda

$$AB = 2r \cdot \sin\alpha$$

Posto ABC inscritto alla circonferenza

$a = 2r \sin\alpha \rightarrow r = \frac{a}{2\sin\alpha}$

$b = 2r \sin\beta \rightarrow r = \frac{b}{2\sin\beta}$

$c = 2r \sin\gamma \rightarrow r = \frac{c}{2\sin\gamma}$

TEOREMA DEI SENI

i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

TEOREMA DEL COSENO o DI CARNOT

Il quadrato della misura di un lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due diminuita del doppio prodotto di questi due lati per il coseno dell'angolo tra essi compreso

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$

Detto Teorema di Pitagora generalizzato