Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Seconda prova intercorso - Classe 3 - Gruppo 2
Fisciano, 01/06/2020

Esercizio 1 (10 punti)
Un algoritmo genera sequenze booleane di lunghezza $n = 5$ dove ogni bit assume valore 0 con probabilità 1/4 ed assume valore 1 con probabilità 3/4, indipendentemente dagli altri. Sia X la variabile aleatoria che rappresenta il numero di bit pari a 0.
(i) Determinare $P(X = k)$, $k = 0, \ldots, 5$; **(ii)** calcolare $P(1 \leq X < 5 \,|\, X \geq 2)$;
(iii) calcolare $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

Esercizio 2 (10 punti)
Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua avente funzione densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{per } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Derminare il valore della costante c; **(ii)** ricavare la funzione di distribuzione di X;
(iii) determinare il valore di $n \in \mathbb{N}$ tale che $E\left(2 - 4X^n\right) = 1$;
(iv) calcolare $P\left(X > \dfrac{1}{4} \,\middle|\, X \leq \dfrac{3}{4}\right)$.

Esercizio 3 (10 punti)
Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti e supponiamo che X abbia distribuzione normale di valore atteso -1 e varianza 4 ed Y abbia distribuzione normale di valore atteso 1 e varianza 9.
(i) Calcolare $P(|X| < 1, |Y| < 1)$; **(ii)** posto $T_1 = pX + (1-p)Y$, $(0 < p < 1)$, calcolare $E(T_1)$, $Var(T_1)$ e $Cov(T_1, X)$;
(iii) posto $T_2 = pXY$, calcolare $E(T_2)$.

Esercizio 4 (**FACOLTATIVO**)
Un cassetto contiene 8 paia di guanti. Si scelgono a caso 4 guanti, qual è la probabilità che tra essi non vi sia nessun paio completo?