Soluzione delle relazioni di ricorrenza

- Consideriamo la seguente relazione di ricorrenza:

$$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq c \\ \alpha T(n/\beta) + f(n) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

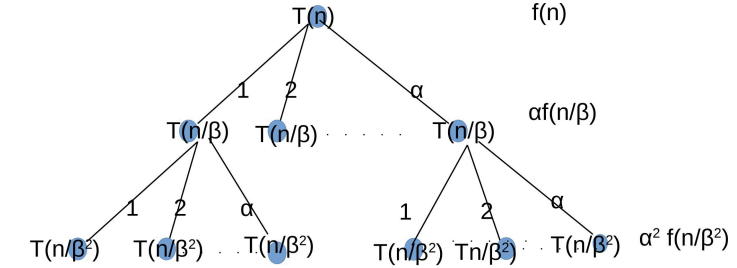
  con $\alpha \geq 1$ e $\beta > 1$ costanti.
- Nel caso in cui $T(n)$ sia la funzione che scaturisce dall'analisi di un algoritmo basato sul paradigma del Divide et Impera, $f(n)$ è il tempo per il lavoro di suddivisione e di ricombinazione. In altre parole, $f(n) = d(n) + r(n)$.
- In realtà nella ricorrenza n/β dovrebbe essere $\lceil n/\beta \rceil$ oppure $\lfloor n/\beta \rfloor$. Per stimare $T(n)$, assumiamo per semplicità che n sia una potenza di β in modo da poter omettere le parti intere superiori o inferiori.

Soluzione delle relazioni di ricorrenza

- L'algoritmo non effettua chiamate ricorsive quando l'input ha dimensione al più c. Quindi la ricorrenza non sarà più applicata quando si arriva al livello i per cui per la prima volta $n/\beta^i \leq c$, cioè $i = \lceil \log_\beta n/c \rceil$.
- Il numero di livelli dell'albero è quindi $\lceil \log_\beta n/c \rceil + 1$ (partiamo dal livello 0) e ciascun nodo sul livello $\lceil \log_\beta n/c \rceil$ corrisponde al tempo $T(n/\beta^{\lceil \log_\beta n/c \rceil}) \leq T(c) \leq c_0$. Il tempo totale per eseguire le $\alpha^{\lceil \log_\beta n/c \rceil}$ chiamate ricorsive in quest'ultimo livello è quindi $\leq \alpha^{\lceil \log_\beta n/c \rceil} c_0$.
- Abbiamo visto che per $i < \lceil \log_\beta n/c \rceil$, il tempo per eseguire tutte le chiamate sul livello i è $\alpha^i f(n/\beta^i)$.
- Sommando su tutti i livelli (compreso l'ultimo) si ha

$$T(n) \leq \alpha^{\lceil \log_\beta n/c \rceil} c_0 + \sum_{i=0}^{\lceil \log_\beta n/c \rceil - 1} \alpha^i f(n/\beta^i).$$

Soluzione delle relazioni di ricorrenza



Sia h l'altezza dell'albero (h+1 livelli). Per i<h, Il tempo di esecuzione per tutte le chiamate ricorsive a livello i e` al piu` $\alpha^i f(n/\beta^i)$.

Soluzione delle relazioni di ricorrenza

- Vogliamo stimare la funzione

$$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq c \\ \alpha T(n/\beta) + f(n) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  quando la funzione $f(n)$ è limitata da $c' n^k$, dove c' e k sono due costanti tali che $k \geq 0$, $c' > 0$ ($f(n)$ polinomiale).
- Da quanto ottenuto nella slide precedente si ha che

$$\begin{aligned} T(n) &\leq \alpha^{\lceil \log_\beta n/c \rceil} c_0 + \sum_{i=0}^{\lceil \log_\beta n/c \rceil - 1} \alpha^i f(n/\beta^i) \\ &\leq \alpha^{\lceil \log_\beta n/c \rceil} c_0 + \sum_{i=0}^{\lceil \log_\beta n/c \rceil - 1} \alpha^i c' (n/\beta^i)^k \end{aligned}$$

Soluzione delle relazioni di ricorrenza

- Abbiamo visto che se $f(n) \leq c'n^k$, dove c' e k sono due costanti tali che $k \geq 0$, $c' > 0$, allora

$$T(n) \leq \alpha^{\lceil \log_\beta n/c \rceil} c_0 + c'n^k \sum_{i=0}^{\lceil \log_\beta n/c \rceil - 1} (\alpha/\beta^k)^i.$$

- consideriamo i 2 seguenti casi:
- $\alpha = \beta^k$: In questo caso si ha

$$\alpha^{\lceil \log_\beta n/c \rceil} c_0 = (\beta^k)^{\lceil \log_\beta n/c \rceil} c_0 < (\beta^k)^{\log_\beta (n/c)+1} c_0 = \beta^k (n/c)^k c_0 = O(n^k)$$

e

$$c'n^k \sum_{i=0}^{\lceil \log_\beta n/c \rceil - 1} (\alpha/\beta^k)^i = c'n^k \sum_{i=0}^{\lceil \log_\beta n/c \rceil - 1} 1 = c'n^k \lceil \log_\beta n/c \rceil = O(n^k \log_\beta n).$$

Quindi $T(n) = O(n^k) + O(n^k \log_\beta n) = O(n^k \log_\beta n) = O(n^k \log n)$.

Soluzione delle relazioni di ricorrenza

Consideriamo i due sottocasi di $\alpha \neq \beta^k$: $\alpha < \beta^k$ e $\alpha > \beta^k$

- Caso $\alpha < \beta^k$:

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha/\beta^k)^{\lceil \log_\beta (n/c) \rceil} - 1}{(\alpha/\beta^k) - 1} &= \frac{1 - (\alpha/\beta^k)^{\lceil \log_\beta n/c \rceil}}{1 - (\alpha/\beta^k)} \\ &< \frac{1}{1 - (\alpha/\beta^k)} = \frac{\beta^k}{\beta^k - \alpha} = O(1). \end{aligned}$$

Si ha quindi che la suddetta relazione insieme alla (1) e alla (2) della slide precedente implicano:

$$T(n) \leq O(n^{\log_\beta \alpha}) + c'n^k O(1) = O(n^{\log_\beta \alpha} + n^k).$$

Si noti che $\alpha < \beta^k$ implica $\log_\beta \alpha < k$ e di conseguenza si ha

$$T(n) = O(n^{\log_\beta \alpha} + n^k) = O(n^k).$$

Soluzione delle relazioni di ricorrenza

- $\alpha \neq \beta^k$: In questo caso si ha

$$\begin{aligned} \alpha^{\lceil \log_\beta n/c \rceil} c_0 &< c_0 \alpha^{\log_\beta n/c + 1} = c_0 \alpha \cdot \alpha^{\log_\beta n/c} = c_0 \alpha \cdot \alpha^{\log_\alpha (n/c) \log_\beta \alpha} \\ &= c_0 \alpha (n/c)^{\log_\beta \alpha} = O(n^{\log_\beta \alpha}), \end{aligned} \tag{1}$$

e

$$c'n^k \sum_{i=0}^{\lceil \log_\beta n/c \rceil - 1} (\alpha/\beta^k)^i = c'n^k \cdot \frac{(\alpha/\beta^k)^{\lceil \log_\beta n/c \rceil} - 1}{(\alpha/\beta^k) - 1}. \tag{2}$$

Soluzione delle relazioni di ricorrenza

- Caso $\alpha > \beta^k$:

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha/\beta^k)^{\lceil \log_\beta (n/c) \rceil} - 1}{(\alpha/\beta^k) - 1} &< \frac{(\alpha/\beta^k)^{\log_\beta (n/c)+1} - 1}{(\alpha/\beta^k) - 1} = \frac{(\alpha/\beta^k)(\alpha/\beta^k)^{\log_\beta (n/c)} - 1}{(\alpha/\beta^k) - 1} \\ &= O((\alpha/\beta^k)^{\log_\beta (n/c)}) = O((\alpha/\beta^k)^{\log_{\alpha/\beta^k} (n/c) \log_\beta (\alpha/\beta^k)}) \\ &= O((n/c)^{\log_\beta (\alpha/\beta^k)}) = O((n/c)^{\log_\beta \alpha - \log_\beta \beta^k}) \\ &= O(n^{\log_\beta (\alpha) - k}) \end{aligned}$$

Si ha quindi che la suddetta relazione insieme alla (1) e alla (2) della slide precedente implicano:

$$T(n) \leq O(n^{\log_\beta \alpha}) + c'n^k O(n^{\log_\beta (\alpha) - k}) = O(n^{\log_\beta \alpha} + n^k n^{\log_\beta (\alpha) - k}) = O(n^{\log_\beta \alpha}).$$

Soluzione delle relazioni di ricorrenza

- Abbiamo stimato la funzione

$$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq c \\ \alpha T(n/\beta) + c' n^k & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

  dove c' e k sono due costanti tali che $k \geq 0$, $c' > 0$.
- Abbiamo provato

$$T(n) = \begin{cases} O(n^k) & \text{se } \alpha < \beta^k \\ O(n^k \log n) & \text{se } \alpha = \beta^k \\ O(n^{\log_\beta \alpha}) & \text{se } \alpha > \beta^k \end{cases}$$

- **Esempi:** Nel caso di MergeSort $\alpha = 2$, $\beta = 2$ e $k = 1$. Si ha $\alpha = \beta^k$ e quindi $T(n) = O(n^k \log n) = O(n \log n)$.
  Nel caso dell'algoritmo per la ricerca binaria $\alpha = 1$, $\beta = 2$ e $k = 0$. Si ha $\alpha = \beta^k$ e quindi $T(n) = O(n^k \log n) = O(\log n)$.

Soluzione delle relazioni di ricorrenza quando n non è potenza di β

- Consideriamo la seguente relazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq c \\ \alpha T(n/\beta) + c' n^k & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  con $\alpha \geq 1$ e $\beta > 1$ costanti.
- Quando n non è una potenza di β la taglia di ciascun sottoproblema è $\lceil n/\beta \rceil$ oppure $\lfloor n/\beta \rfloor$.
- Siccome vogliamo stabilire un limite superiore per $T(n)$ mettiamoci nel caso peggiore in cui la taglia di ciascun sottoproblema è $\lceil n/\beta \rceil$
  Consideriamo quindi la seguente relazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq c \\ \alpha T(\lceil n/\beta \rceil) + c' n^k & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  con $\alpha \geq 1$, $\beta > 1$ e $k \geq 0$ costanti.
- Usando questa nuova relazione di ricorrenza potremmo usare un procedimento simile a quello usato per il caso in cui n è potenza di β per provare le stesse limitazioni superiori viste per quel caso. Nel seguito invece useremo un argomento molto semplice per dedurre che quelle limitazioni valgono anche quando n non è potenza di β.

Soluzione delle relazioni di ricorrenza quando n non è potenza di β

- Sia p il più piccolo intero positivo per cui $n \leq \beta^p$, cioè p è l'intero per cui $\beta^{p-1} < n \leq \beta^p$.
- Osserviamo che siccome $T(n)$ è una funzione non decrescente allora $T(n) \leq T(\beta^p)$.
- Applicando a $T(\beta^p)$ la limitazione asintotica dimostrata per le potenze di β si ha

$$T(\beta^p) = \begin{cases} O((\beta^p)^k) & \text{se } \alpha < \beta^k \\ O((\beta^p)^k \log(\beta^p)) & \text{se } \alpha = \beta^k \\ O((\beta^p)^{\log_\beta \alpha}) & \text{se } \alpha > \beta^k \end{cases} \quad (3)$$

- Osserviamo che $\beta^p = \beta\beta^{p-1} < \beta n$, dal momento che $\beta^{p-1} < n$. Si ha quindi che

$$O((\beta^p)^k) = O((\beta n)^k) = O(\beta^k n^k) = O(n^k),$$
$$O((\beta^p)^k \log(\beta^p)) = O((\beta n)^k) \log(\beta n)) = O(n^k(\log(\beta) + \log n)) = O(n^k \log n),$$
$$O((\beta^p)^{\log_\beta \alpha}) = O((\beta n)^{\log_\beta \alpha}) = O(\beta^{\log_\beta \alpha} n^{\log_\beta \alpha}) = O(n^{\log_\beta \alpha}).$$

  La (3) può essere quindi scritta come segue

$$T(\beta^p) = \begin{cases} O(n^k) & \text{se } \alpha < \beta^k \\ O(n^k \log n) & \text{se } \alpha = \beta^k \\ O(n^{\log_\beta \alpha}) & \text{se } \alpha > \beta^k \end{cases}$$

- Poichè $T(n) \leq T(\beta^p)$ allora le limitazioni appena provate valgono anche per $T(n)$.

Esempi di relazioni di ricorrenza della forma $T(n) \leq \alpha T(n/\beta) + cn^k$

- Ricerca binaria

$$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \text{ oppure } k \text{ è l'elemento centrale} \\ T(n/2) + c & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  Si ha $\alpha = 1$,$\beta = 2$, $k = 0$.

  Siccome $\alpha = \beta^k$, siamo nel secondo caso e si ha

$$T(n) = O(n^k \log n)) = O(\log n).$$

Esempi di relazioni di ricorrenza della forma $T(n) \leq \alpha T(n/\beta) + n^k$

Nell'ordinamento per fusione,

$$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \\ 2T(n/2) + cn & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi,

- $\alpha = 2$, $\beta = 2$ e $k = 1$
- siamo nel caso $\alpha = \beta^k$ e quindi $T(n) = O(n^k \log n) = O(n \log n)$.

Sommatorie utili

- $$\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$$
- $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$
- $$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ per } a \neq 1$$
- $$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a} \text{ per } 0 < a < 1.$$

Esempi di relazioni di ricorrenza della forma $T(n) \leq \alpha T(n/\beta) + cn^k$

- Moltiplicazione veloce di interi: primo algoritmo

  $$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \\ 4T(n/2) + cn & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  Applicazione del risultato provato:

  - si ha che $\alpha = 4$, $\beta = 2$ e $k = 1$
  - $\alpha > \beta^k$, quindi si applica il terzo caso e si ha $T(n) = O(n^{\log_2 4}) = O(n^2)$
- Moltiplicazione veloce di interi: secondo algoritmo

  $$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \\ 3T(n/2) + cn & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  Applicando il risultato dimostrato,

  - si ha che $\alpha = 3$, $\beta = 2$ e $k = 1$
  - $\alpha > \beta^k$, quindi si applica il terzo caso e si ha $T(n) = O(n^{\log_2 3}) = O(n^{1,585})$

Divide et impera su alberi

- **Caso base**: per `u = null` o una foglia
- **Decomposizione**: riformula il problema per i sottoalberi radicati nei figli di u.
- **Ricombinazione**: ottieni il risultato con `Ricombina`

```
1  Decomponibile(u):
2    IF (u == null) {
3      RETURN valore base;
4    } ELSE {
5      i=0;
       FOR( ciascun figlio f di u ){

6      risultatiFigli[i] = Decomponibile(f);
7      i=i+1 }
8      RETURN Ricombina(risultatiFigli);
9    }
```

La ricombinazione del risultati della chiamate ricorsive sui figli potrebbe essere effettuata anche nel for man mano che vengono ottenuti i risultati delle chiamate sui figli.

Divide et impera su alberi binari

- **Caso base**: per `u = null` o una foglia
- **Decomposizione**: riformula il problema per i sottoalberi radicati nei figli `u.sx` e `u.dx`
- **Ricombinazione**: ottieni il risultato con `Ricombina`

```
1 Decomponibile(u):
2   IF (u == null) {
3     RETURN valore base;
4   } ELSE {
5     risultatoSX = Decomponibile(u.sx);
6     risultatoDx = Decomponibile(u.dx);
7     RETURN Ricombina(risultatoSX, risultatoDx);
8   }
```

Analisi dell'algoritmo Decomponibile

- Assumiamo che il tempo per la decomposizione e la ricombinazione sia costante
- Se escludiamo il tempo impiegato per le chiamate ricorsive, l'algoritmo impiega tempo $O(1+c_v)$, dove c_v è il numero di figli di v
- Se cominciamo la visita dal nodo w, l'algoritmo viene invocato su tutti i discendenti di w

➔Tempo totale = $\sum_{v \in T_w} O(c_v + 1) = O(|T_w|)$

- La visita di tutto l'albero richiede tempo $O(|T|)$
- Se l'albero ha n nodi la visita richiede tempo $T(n)= O(n)$

Analisi dell'algoritmo Decomponibile

- Nell'analisi precedente abbiamo usato il fatto che $\sum_{v \in T_w} c_v = |T_w| - 1$.
- È facile vedere che vale questa uguaglianza in quanto ogni nodo di T_w, eccezion fatta per la radice w, è figlio di un unico nodo v dell'albero T_w e quindi viene contato esattamente una volta in quella sommatoria.

Analisi dell'algoritmo Decomponibile per un albero binari mediante relazione di ricorrenza

La funzione $T(n)$ che esprime il tempo di esecuzione dell'algoritmo Decomponibile su un albero binario con n nodi può essere descritta dalla seguente relazione di ricorrenza, dove $r - 1 \geq 0$ è il numero di nodi del sottoalbero sinistro.

$$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \\ T(r-1) + T(n-r) + c & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostriamo per induzione che $T(n) \leq c'n$ per $n \geq 1$ e per una costante $c' > 0$. In altre parole $T(n) = O(n)$.

- Base: $T(1) \leq c_0$ implica $T(1) \leq c'$ se si sceglie $c' \geq c_0$.
- Passo induttivo: Assumiano $T(m) \leq c'm$ per ogni $1 \leq m < n$ e dimostriamo $T(n) \leq c'n$.
  Applichiamo relazione di ricorrenza: $T(n) \leq T(r-1) + T(n-r) + c$.
  L'ipotesi induttiva implica $T(r-1) \leq c'(r-1)$ e $T(n-r) \leq c'(n-r)$.
  Si ha quindi $T(n) \leq c'(r-1) + c'(n-r) + c = c'n - c'r + c$.
  Affinché risulti $T(n) \leq c'n$ basta scegliere c' in modo che $c'r \geq c$ cioè $c' \geq c/r$. Non sappiamo quanto vale r ma sappiamo che $r \geq 1$ per cui basta scegliere $c' \geq c$.
- Dalla base dell'induzione e dal passo induttivo, sappiamo che basta scegliere $c' = \max\{c_0, c\}$ affinché valga $T(n) \leq c'n$ per $n \geq 1$.

Algoritmi ricorsivi su alberi: dimensione

Calcolo della dimensione d = numero di nodi

- Caso base: albero vuoto $\Rightarrow d = 0$
- Caso induttivo: $d = 1+$ dimensione del sottoalbero sinistro + dimensione del sottoalbero destro

```
1 Dimensione( u ):
2   IF (u == null) {
3     RETURN 0;
4   } ELSE {
5     dimensioneSX = Dimensione( u.sx );
6     dimensioneDX = Dimensione( u.dx );
7     RETURN dimensioneSX + dimensioneDX + 1;
8   }
```

Se si vuole conoscere la dimensione di tutto l'albero, si invoca Dimensione con u uguale alla radice

Algoritmi ricorsivi su alberi: altezza

Calcolo dell'altezza h di un nodo:

- caso base per `null` $\Rightarrow h = -1$
- passo induttivo: $h = 1+$ massima altezza dei figli

```
1 Altezza( u ):
2   IF (u == null) {
3     RETURN -1;
4   } ELSE {
5     altezzaSX = Altezza( u.sx );
6     altezzaDX = Altezza( u.dx );
7     RETURN max( altezzaSX, altezzaDX ) + 1;
8   }
```

Per calcolare l'altezza dell'albero, si invoca Altezza con u uguale alla radice

Visita di un albero binario: inorder

- **simmetrica** (*inorder*):

```
1 Simmetrica( u ):
2   IF (u != null) {
3     Simmetrica( u.sx );
4     elabora(u);
5     Simmetrica( u.dx );
6   }
```

$O(n)$ tempo per n nodi

Visita di un albero binario: preorder

- **anticipata** (*preorder*):

```
1 Anticipata( u ):
2   IF (u != null) {
3     elabora(u);
4     Antiticipata( u.sx );
5     Antiticipata( u.dx );
6   }
```

$O(n)$ tempo per n nodi

Visita di un albero binario: postorder

- **posticipata** (*postorder*):

```
1 Posticipata( u ):
2   IF (u != null) {
3     Posticipata( u.sx );
4     Posticipata( u.dx );
5     elabora(u);
6   }
```

$O(n)$ tempo per n nodi

Uso della visita postorder per valutare l'espressione aritmetica rappresentata da un albero binario

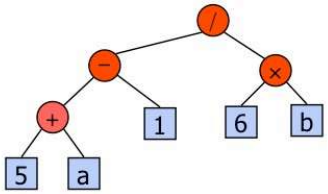
```
1  Valuta( u ):
2    IF (u==null) {
3      RETURN null;
4    }
5    IF (u.sx == null && u.dx==null) {
6      RETURN u.dato;
7    } ELSE {
8      valSinistra=Valuta( u.sx );
9      valDestra= Valuta( u.dx );
10     ris= Calcola(u.dato,valSinistra ,valDestra);
11     RETURN ris;
12   }
```

- La funzione Calcola invocata su *u.dato*, *valSinistra* e *valDestra*, applica l'operatore memorizzato nel nodo interno u ai valori *valSinistra* e *valDestra*.
- N.B.: la condizione del primo if è soddisfatta (u è null) solo se inizialmente la funzione Valuta è invocata su null. Se inizialmente Valuta è invocata su un nodo $u \neq null$ allora la condizione del primo if non sarà mai soddisfatta perché quando è invocata su una foglia, la funzione restituisce il contenuto della foglia.

Esempio dell'uso delle visite

Esempio dell'uso delle visite: valutazione dell'espressione aritmetica rappresentata da un albero binario

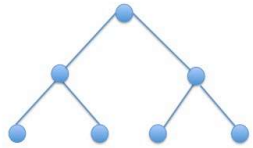
- Albero binario associato ad una espressione:
  - Nodi interni: operatori
  - Nodi esterni: operandi
- Esempio: ((5 + a) − 1) / (6 × b)



Algoritmo per verificare se un albero binario è completamente bilanciato

Definizioni:

- Albero binario **proprio**: ogni nodo interno ha sempre due figli non vuoti
- Albero **completamente bilanciato**: albero proprio con tutte le **foglie** alla **stessa profondità**
  Esempio:



Algoritmo per verificare se un albero binario è completamente bilanciato

- Def. ricorsiva di albero completamente bilanciato:
  - Un albero binario vuoto è completamente bilanciato
  - Una albero binario con almeno un nodo è completamente bilanciato se e solo se il sottoalbero destro e il sottoalbero sinistro della radice sono completamente bilanciati e hanno la stessa altezza (per convenzione, un albero vuoto ha altezza -1)
- N.B. In un albero completamente bilanciato l'altezza dell'albero corrisponde alla profondità di tutte le foglie
- Indichiamo con $T(u)$ il sottoalbero di T radicato in u
- Risolviamo un problema più generale per $T(u)$, calcolandone anche l'altezza oltre che a dire se è completamente bilanciato o meno
- La ricorsione restituisce una coppia (booleano, intero)
- Tempo di risoluzione: $O(n)$ tempo per n nodi

```
1  CompletamenteBilanciato( u ):
2    IF (u == null) {
3      RETURN <TRUE, -1>;
4    } ELSE {
5      <bilSX,altSX> = CompletamenteBilanciato( u.sx );
6      <bilDX,altDX> = CompletamenteBilanciato( u.dx );
7      bil = bilSX && bilDX && (altSX == altDX);
8      altezza = max(altSX, altDX) + 1;
9      RETURN <bil,altezza>;
10   }
```

Algoritmi ricorsivi su alberi: profondità di un nodo

- La radice ha profondità 0
- I figli della radice hanno profondità pari a 1, e così via
- Un nodo ha profondità p ha i figli a profondità $p + 1$

Versione iterativa dell'algoritmo per calcolare la profondità di un nodo u

```
p = 0;
WHILE (u.padre != null) {
  p = p + 1;
  u = u.padre;
}
```

Definizione ricorsiva di profondità di un nodo:

- La radice ha profondità 0
- I nodi diversi dalla radice hanno profondità pari alla profondità del padre + 1

Versione ricorsiva dell'algoritmo per calcolare la profondità di un nodo u

```
1  Profondita( u ):
2    IF (u.padre==null) {
3      RETURN 0;
4    }
5    RETURN profondita(u.padre)+1;
```

Trasmissione dell'informazione tra chiamate ricorsive

- **postorder** : l'informazione è trasferita dalle foglie alla radice
  – la soluzione del problema per $T(\mathtt{u})$ può essere ottenuta dalla soluzioni dei sottoproblemi per $T(\mathtt{u.sx})$ e $T(\mathtt{u.dx})$
- **passaggio dei parametri** : informazione passata attraverso i parametri dalla radice alle foglie
  – la soluzione del problema per $T(\mathtt{u})$ può essere ottenuta utilizzando l'informazione raccolta dalla radice fino al nodo u

Esempio: stampa la profondità di tutti i nodi

```
1  Profondita( u, p ):
2    IF (u != null) {
3      PRINT profondità di u è pari a p;
4      Profondita( u.sx, p+1 );
5      Profondita( u.dx, p+1 );
6    }
```

Il parametro p indica la profondità del nodo u. Se vogliamo stampare le profondità di tutti i nodi dobbiamo invocare la funzione con u uguale all'indirizzo della radice dell'albero e $p = 0$.

Algoritmo per trovare i nodi cardine

Trasferiamo informazione simultaneamente dalle foglie alla radice e dalla radice verso le foglie combinando i due approcci della slide precedente

- Nodo u è cardine se e solo se $\mathrm{profondita}(\mathtt{u}) = \mathrm{altezza}(T(\mathtt{u}))$

```
1  Cardine( u, p ):
2    IF (u == null) {
3      RETURN -1;
4    } ELSE {
5      altezzaSX = Cardine( u.sx, p+1 );
6      altezzaDX = Cardine( u.dx, p+1 );
7      altezza = max( altezzaSX, altezzaDX ) + 1;
8      IF (p == altezza) PRINT u.dato;
9      RETURN altezza;
10   }
```