Architettura degli Elaboratori

Rappresentazioni ottale ed esadecimale

Barbara Masucci
UNIVERSITA DEGLI STUDI DI SALERNO
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA
DIPARTIMENTO DI ECCELLENZA

Punto della situazione

- Abbiamo visto
  - Il sistema posizionale pesato, in particolare le rappresentazioni con basi 2 e 10
  - Gli algoritmi di conversione Decimale $\longleftrightarrow$ Binario per i numeri interi
- Oggi vediamo altre basi importanti: 8 e 16
  - Base 8: rappresentazione ottale
  - Base 16: rappresentazione esadecimale

Notazione Ottale

La sequenza $a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1\, a_0$

di simboli in $\{0, 1, \ldots, 7\}$

rappresenta l'intero

$$N = a_{n-1} \times 8^{n-1} + a_{n-2} \times 8^{n-2} + \ldots + a_1 \times 8^1 + a_0 \times 8^0$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i 8^i$$

Notazione Esadecimale

La sequenza $a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1\, a_0$

di simboli in $\{0, 1, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F\}$

rappresenta l'intero

$$N = a_{n-1} \times 16^{n-1} + a_{n-2} \times 16^{n-2} + \ldots + a_1 \times 16^{1} + a_0 \times 16^{0}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i 16^i$$

A volte è usato il prefisso 0x davanti alla stringa

Esempio: 0x8A00C

Esempi

$(234)_8$ $\quad$ $2\times 8^2+3\times 8+4=156_{10}$

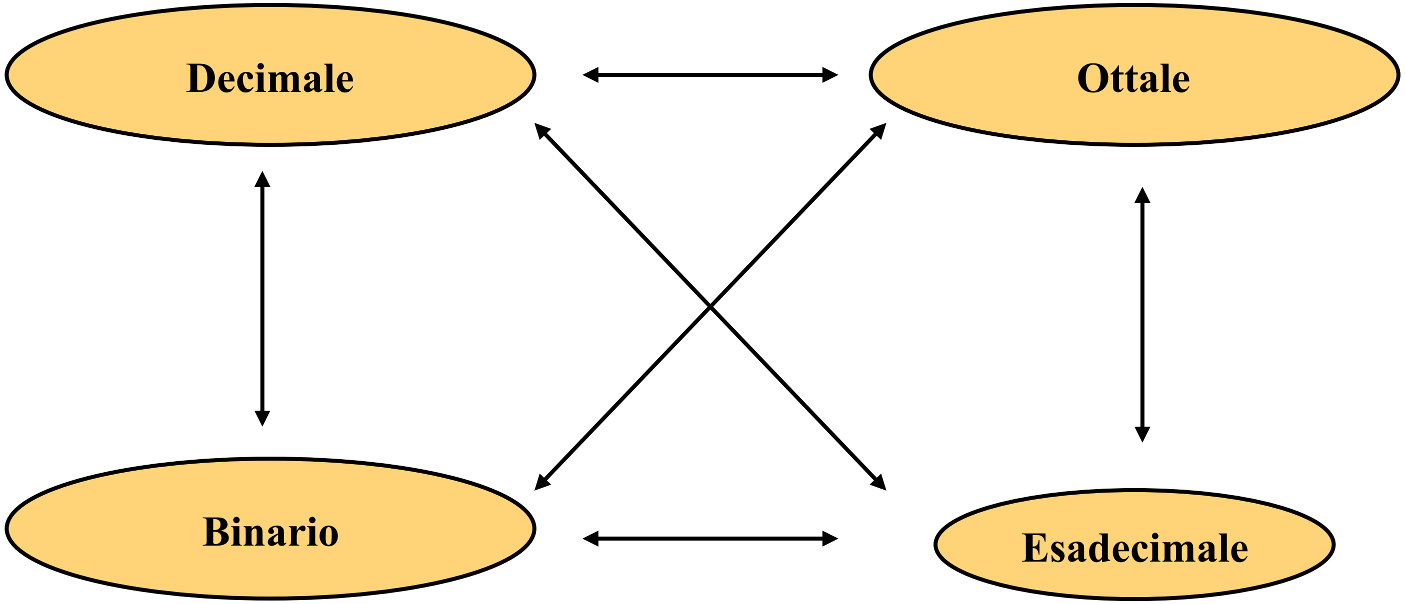
$(101)_8$ $\quad$ $1\times 8^2+0\times 8+1=65_{10}$

$(19)_{16}$ $\quad$ $1\times 16+9=25_{10}$

$(A3)_{16}$ $\quad$ $10\times 16+3=163_{10}$

Conversioni tra basi (più diffuse)

- Le possibilità



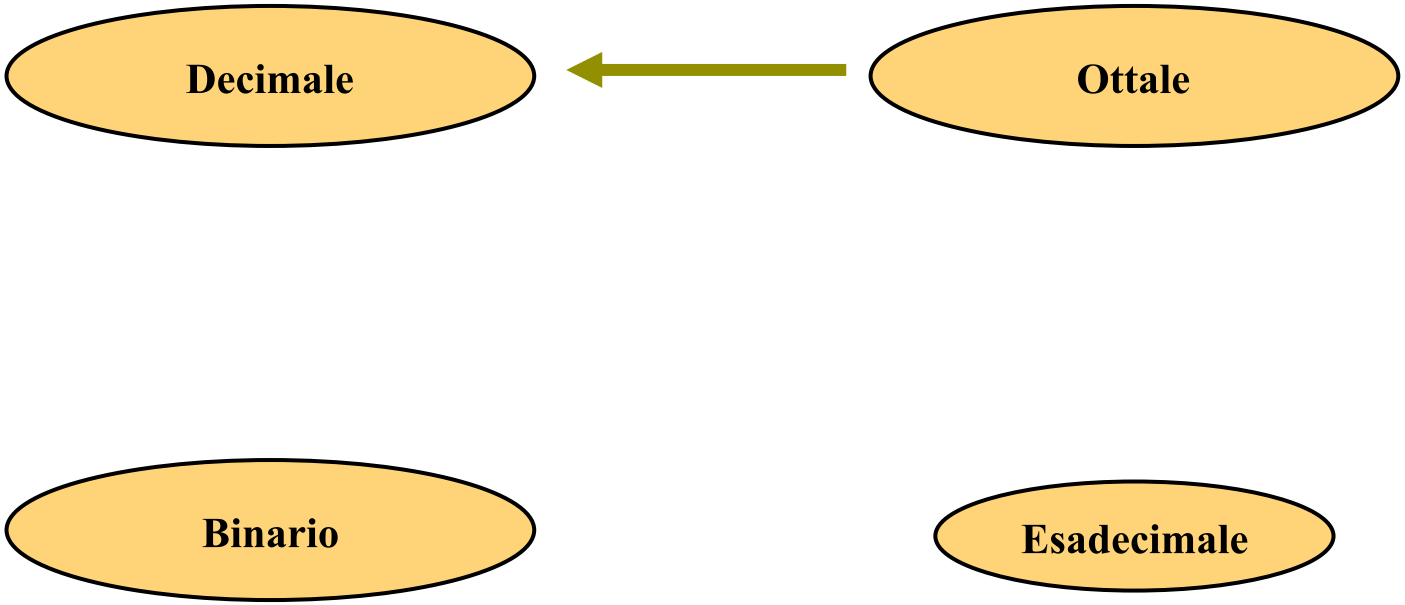
- Abbiamo già visto Binario $\longleftrightarrow$ Decimale

Algoritmi di conversione Ottale ⟷ Decimale

- Da Ottale a Decimale
  - Moltiplico ogni cifra ottale per l'opportuna potenza di 8 e poi faccio la somma
- Da Decimale a Ottale
  - Esprimo il numero come somma di potenze di 8, partendo dalla più grande potenza di 8 minore del numero

Esistono altri algoritmi, più efficienti, per convertire un numero da ottale a decimale e viceversa

Da Ottale a Decimale



Da Ottale a Decimale

- Sia $N = (a_{n-1}\ a_{n-2} \ldots a_1 a_0)_8$ un intero in ottale
- Il valore di N è

$$N = a_{n-1}8^{n-1} + a_{n-2}8^{n-2} + \ldots + a_1 8 + a_0$$

- Definiamo i valori

$$S_{n-1} = a_{n-1}$$
$$S_{n-2} = a_{n-2} + 8S_{n-1}$$
$$S_{n-3} = a_{n-3} + 8S_{n-2}$$
$$\ldots\ldots$$
$$S_i = a_i + 8S_{i+1}$$
$$\ldots\ldots$$

$$S_0 = N$$

Esempio 1

$(1234)_8$

n=4

$S_3 = a_3 = 1$
$S_2 = a_2+8S_3 = 2 + 8 = 10$
$S_1 = a_1+8S_2 = 3 + 80 = 83$
$S_0 = a_0+8S_1 = 4 + 664 = 668$

$S_0 = N = 668$

Esempio 2

$$(1110)_8$$

n=4

$$S_3 = a_3 = 1$$
$$S_2 = a_2 + 8S_3 = 1 + 8 = 9$$
$$S_1 = a_1 + 8S_2 = 1 + 72 = 73$$
$$S_0 = a_0 + 8S_1 = 0 + 584 = 584$$

$$S_0 = N = 584$$

Perché funziona?

$N = a_{n-1}8^{n-1} + a_{n-2}8^{n-2} + \ldots + a_1 8 + a_0$

$= (a_{n-1}8^{n-2} + a_{n-2}8^{n-3} + \ldots + a_2 8 + a_1)\ 8 + a_0$

$= (\ (a_{n-1}8^{n-3} + a_{n-1}8^{n-4} + \ldots + a_2)\ 8 + a_1)\ 8 + a_0$

.....

.....

$= ((\ldots\ (a_{n-1}8 + a_{n-2})\ 8\ +\ \ldots\ +\ a_2)\ 8\ +\ a_1)8 + a_0$

$= ((\ldots\ (\ (a_{n-1})\ 8 + a_{n-2})\ 8\ +\ \ldots\ +\ a_2)\ 8\ +\ a_1)8 + a_0$

$S_0 = S_1\ 8 + a_0$

$S_1 = S_2\ 8 + a_1$

$S_2 = S_3\ 8 + a_2$

.....

$S_{n-2} = S_{n-1}\ 8 + a_{n-2}$

$S_{n-1} = a_{n-1}$

Algoritmo di conversione: da Ottale a Decimale

MSD=cifra più significativa

$$N = (a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1 a_0)_8$$

LSD=cifra meno significativa

$$N = ((\ldots ((a_{n-1}) 8 + a_{n-2}) 8 + \ldots + a_2) 8 + a_1) 8 + a_0$$

$N = S_0 = S_1 8 + a_0$

$S_1 = S_2 8 + a_1$

$S_2 = S_3 8 + a_2$

.....

$S_{n-2} = S_{n-1} 8 + a_{n-2}$

$S_{n-1} = a_{n-1}$

Dal basso verso l'alto: da a_{n-1} a a_0 ; da MSD a LSD

$S_{n-1} = a_{n-1}$

$S_{n-2} = a_{n-2} + 8S_{n-1}$

$S_{n-3} = a_{n-3} + 8S_{n-2}$

.....

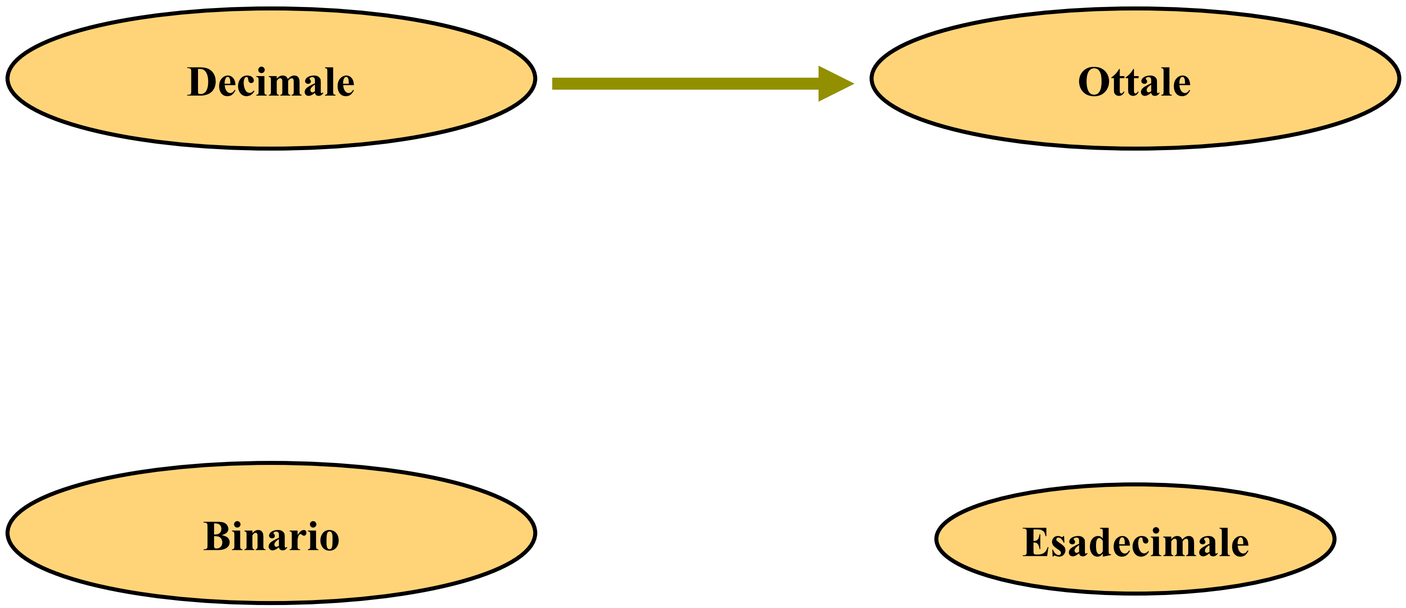
$S_i = a_i + 8S_{i+1}$

.....

$S_0 = a_0 + 8S_1$

$S_0 = N$

Da Decimale a Ottale



Algoritmo di conversione: da Decimale ad Ottale

Input: N_{10} Risultato: a_{n-1} , a_{n-2} , …, a_1 , a_0 con a_i in {0, 1,… ,7}

Procedura inversa: dall'alto verso il basso (da a_0 ad a_{n-1})

$$N = S_0 = S_1 8 + a_0$$
$$S_1 = S_2 8 + a_1$$
$$S_2 = S_3 8 + a_2$$
$$\ldots\ldots$$
$$S_i = S_{i+1} 8 + a_i$$
$$\ldots\ldots$$
$$S_{n-2} = S_{n-1} 8 + a_{n-2}$$
$$S_{n-1} = a_{n-1}$$

a_0 ed S_1 sono il resto e il quoziente della divisione di $N = S_0$ per 8

….

a_i ed S_{i+1} sono il resto e il quoziente della divisione di S_i per 8

….

Fino ad ottenere un S_i =0

Algoritmo delle divisioni successive

Esempio: N=668

$$N = (a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1 a_0)_8 \text{ ???}$$

$S_0 = a_0 + 8S_1 = 4 + 8 \times 83 = 668$ — 668 : 8 = 83 con resto 4

$S_1 = a_1 + 8S_2 = 3 + 8 \times 10 = 83$ — 83 : 8 = 10 con resto 3

$S_2 = a_2 + 8S_3 = 2 + 8 \times 1 = 10$ — 10 : 8 = 1 con resto 2

$S_{n-1} = a_{n-1}$ $\quad S_3 = a_3 + 8S_4 = 1 + 8 \times 0 = 1$ — 1 : 8 = 0 con resto 1

$\downarrow$

STOP

$$N = (1234)_8$$

Esempio: N=584

$$N = (a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1 a_0)_8\ ???$$

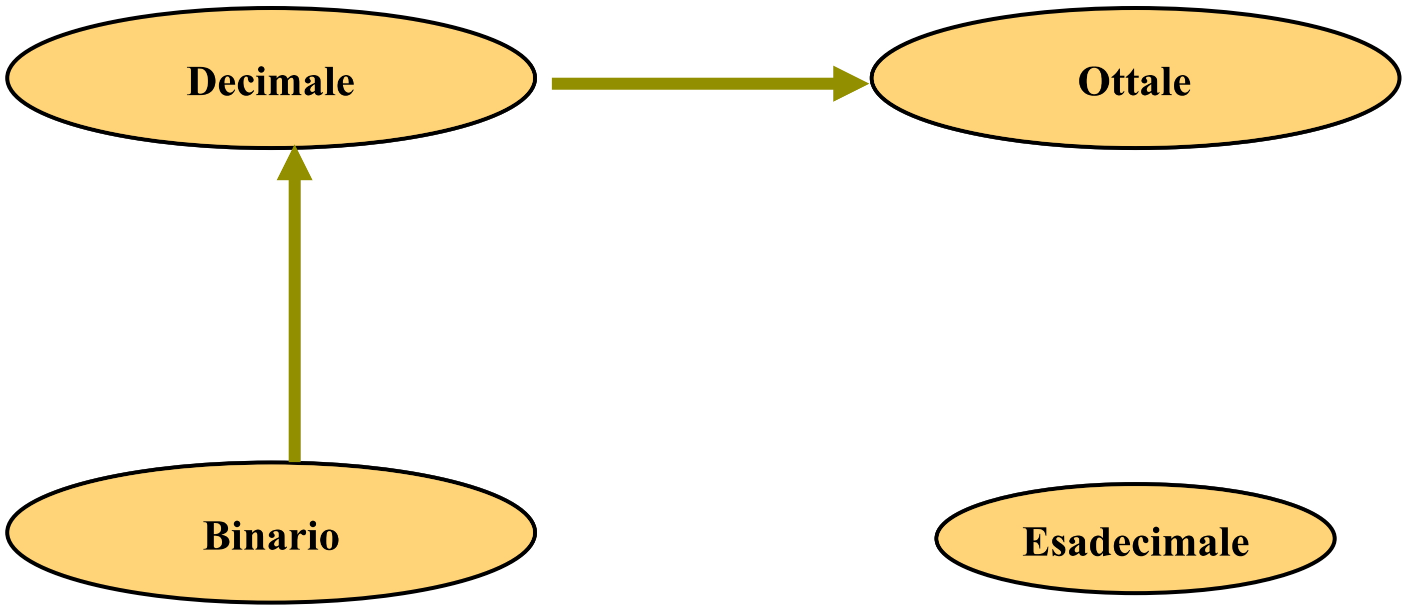
```
584 | 8
  0 |______
    | 73  | 8
    |  1  |_____
    |     | 9   | 8
    |     |  1  |_____
    |     |     | 1   | 8
    |     |     |  1  |_____
    |     |     |     | 0
```

$N_8 = 1110$

$584 = 1*8^3+1*8^2+1*8^1+0*8^0$

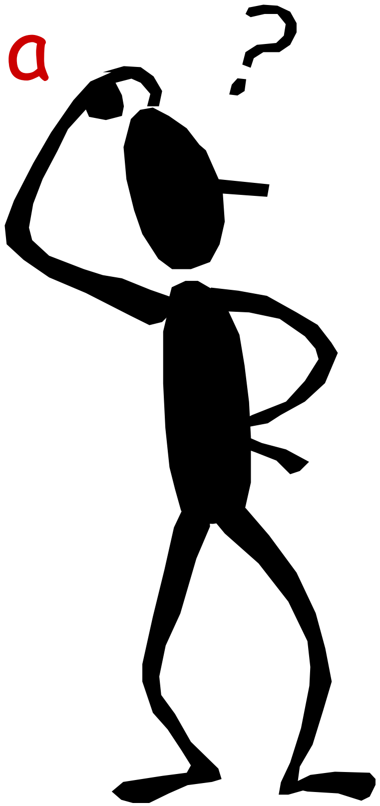
Da Binario a Ottale

- Possiamo convertire un numero da Binario a Ottale facendo due conversioni

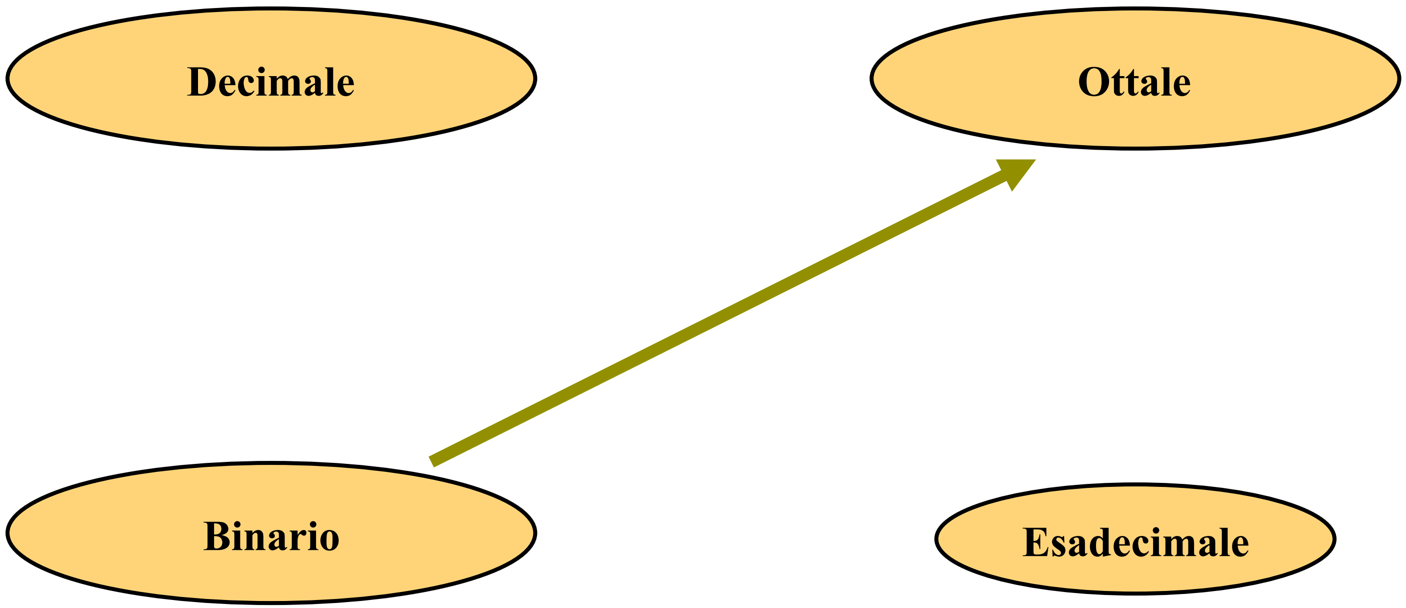


Da Binario a Ottale

Esiste un metodo per passare dalla rappresentazione binaria a quella ottale senza passare per quella decimale?



Da Binario a Ottale



Un po' di magia

b = 8 rappresentazione ottale

$$(213)_8 = 2 \times 8^2 + 1 \times 8 + 3 = 139$$

010 001 011

Valore identico

Convertiamolo in decimale

$2^7+2^3+2^1+2^0=$

$=128+8+2+1 = 139$

0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Sarà un caso?

Non è un caso!

0 1 0 0 0 1 0 1 1

$= 0 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$

$= (0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0) \times 2^6 + (0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1) \times 2^3 + (0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1) \times 2^0$

$= 2 \times 2^6 + 1 \times 2^3 + 3 \times 2^0$

$= 2 \times 8^2 + 1 \times 8^1 + 3 \times 8^0$

$= (2\ 1\ 3)_8$

Da Binario a Ottale

$N = (a_7\, a_6 \ldots a_1 a_0)_2$

$= a_7\, 2^7 + a_6\, 2^6 + \ldots + a_1 2 + a_0$

$= a_7 \times 2^7 + a_6 \times 2^6 + a_5 \times 2^5 + a_4 \times 2^4 + a_3 \times 2^3 + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2 + a_0$

$= (a_7 \times 2^1 + a_6) \times 2^6 + (a_5 \times 2^2 + a_4 \times 2^1 + a_3) \times 2^3 + (a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2 + a_0) \times 2^0$

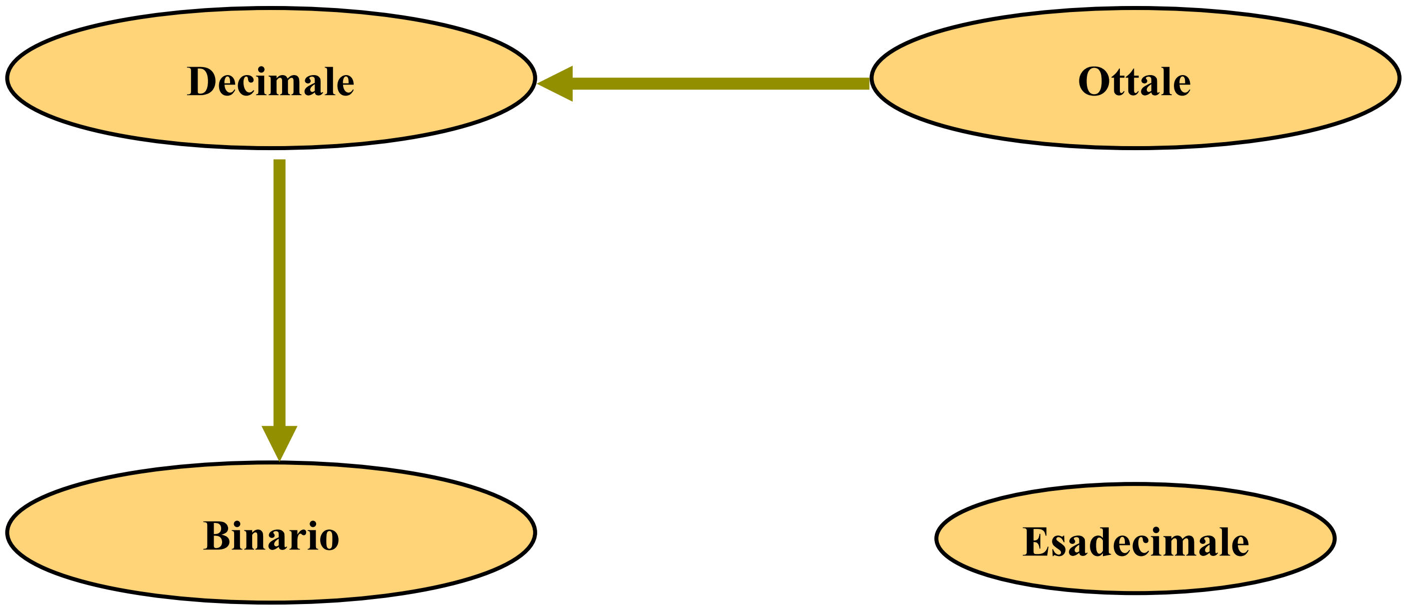
$= b_2 \times 8^2 + b_1 \times 8^1 + b_0 \times 8^0$

Nota che b_2 , b_1 , b_0 sono compresi fra 0 e 7

- Algoritmo
  - Raggruppa i bit 3 a 3 da destra
  - Ad ogni gruppo fai corrispondere la cifra in ottale (da 0 a 7)

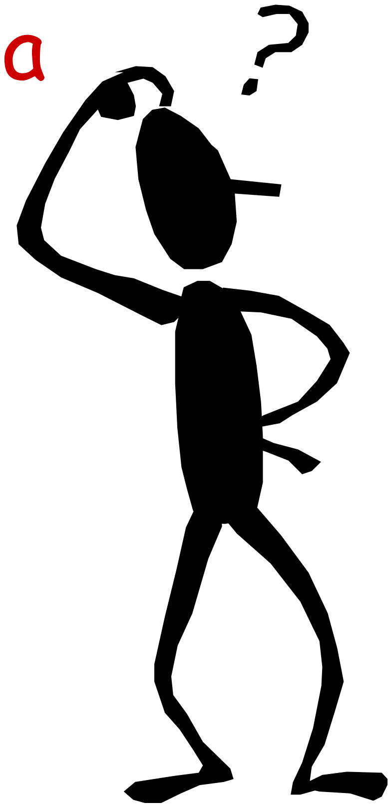
Da Ottale a Binario

- Possiamo convertire un numero da Ottale a Binario facendo due conversioni

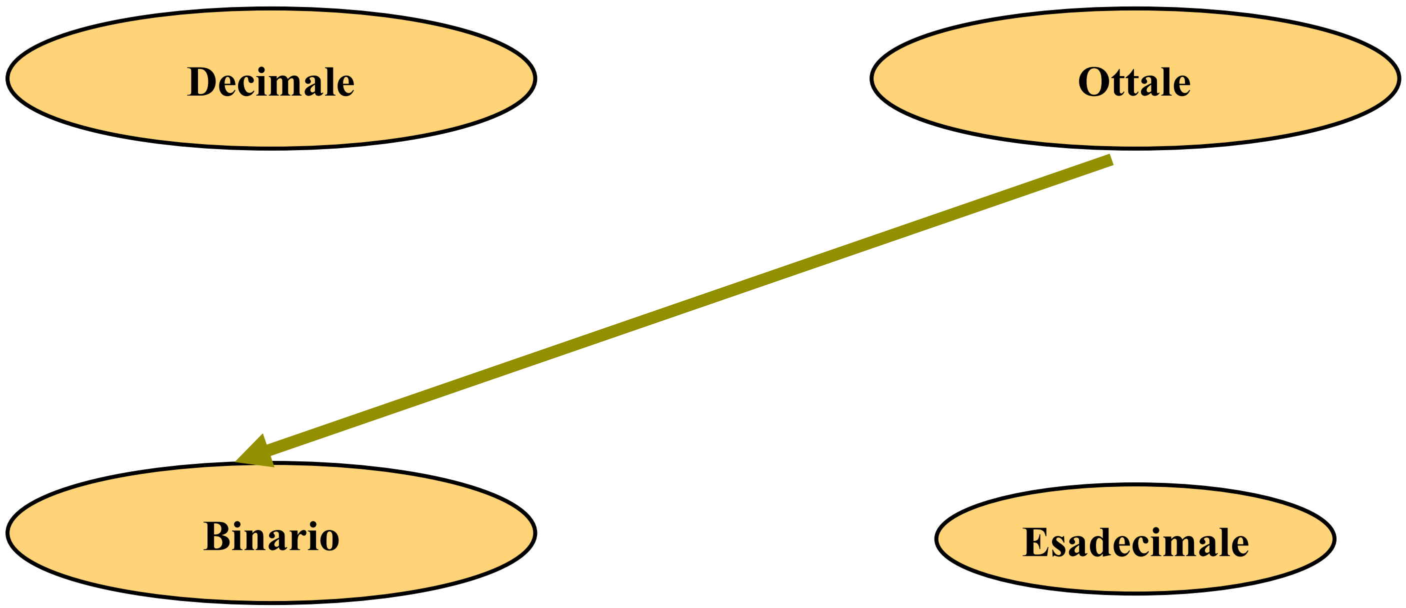


Da Ottale a Binario

Esiste un metodo per passare dalla rappresentazione ottale a quella binaria senza passare per quella decimale?



Da Ottale a Binario



Da Ottale a Binario

Algoritmo:

- Ad ogni cifra in ottale fai corrispondere la rappresentazione binaria su 3 bit
- Concatena i bit ottenuti

Esempio:

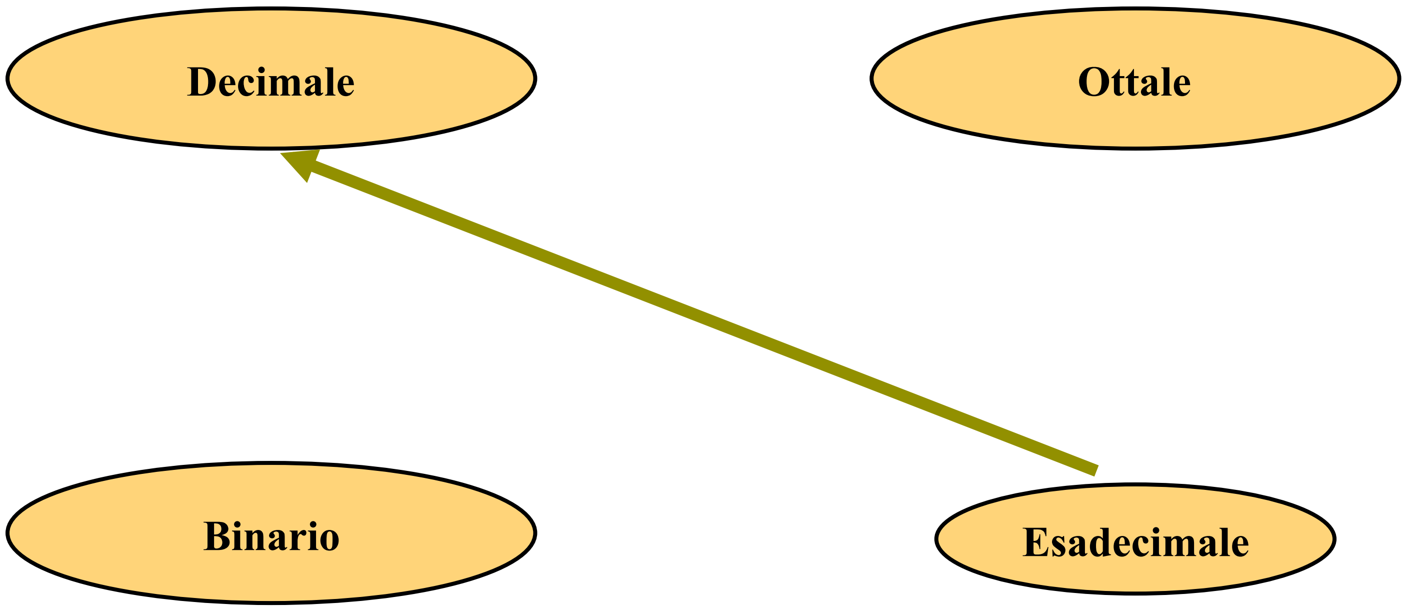
$$267_8 = 010\ 110\ 111 = 10110111_2$$

Algoritmi di conversione Esadecimale ⟷ Decimale

- Da Esadecimale a Decimale
  - Moltiplico ogni cifra esadecimale per l'opportuna potenza di 16 e poi faccio la somma
- Da Decimale a Esadecimale
  - Esprimo il numero come somma di potenze di 16, partendo dalla più grande potenza di 16 minore del numero

Esistono altri algoritmi, più efficienti, per convertire un numero da esadecimale a decimale e viceversa

Da Esadecimale a Decimale



Da Esadecimale a Decimale

- Sia $N = (a_{n-1}\ a_{n-2}...a_1a_0)_{16}$ un intero in esadecimale
- Il valore di N è

$$N=a_{n-1}16^{n-1}+ a_{n-2}16^{n-2}+ ...+ a_1 16+ a_0$$

- Definiamo i valori

$$S_{n-1} = a_{n-1}$$
$$S_{n-2} = a_{n-2} + 16S_{n-1}$$
$$S_{n-3} = a_{n-3} + 16S_{n-2}$$
$$.....$$
$$S_i = a_i + 16S_{i+1}$$
$$.....$$

$$S_0 = N$$

Esempio 1

$(01A3)_{16}$

n=4

$$S_3 = a_3 = 0$$
$$S_2 = a_2+16S_3 = 1 + 0 = 1$$
$$S_1 = a_1+16S_2 = 10 + 16 = 26$$
$$S_0 = a_0+16S_1 = 3 + 416 = 419$$

$$S_0 = N = 419$$

Esempio 2

$(10BF)_{16}$

n=4

$S_3 = a_3 = 1$

$S_2 = a_2 + 16S_3 = 0 + 16 = 16$

$S_1 = a_1 + 16S_2 = 11 + 256 = 267$

$S_0 = a_0 + 16S_1 = 15 + 4272 = 4287$

$S_0 = N = 4287$

Perché funziona?

$N = a_{n-1}16^{n-1} + a_{n-2}16^{n-2} + \ldots + a_1 16 + a_0$

$= (a_{n-1}16^{n-2} + a_{n-2}16^{n-3} + \ldots + a_2 16 + a_1)\ 16 + a_0$

$= (\ (a_{n-1}16^{n-3} + a_{n-1}16^{n-4} + \ldots + a_2)\ 16 + a_1)\ 16 + a_0$

.....

.....

$= ((\ldots\ (a_{n-1}16 + a_{n-2})\ 16\ + \ldots + a_2)\ 16 + a_1)16 + a_0$

$\boxed{= ((\ldots\ (\ (a_{n-1})\ 16 + a_{n-2})\ 16\ + \ldots + a_2)\ 16 + a_1)16 + a_0}$

$S_0 = S_1\ 16 + a_0$

$S_1 = S_2\ 16 + a_1$

$S_2 = S_3\ 16 + a_2$

.....

$S_{n-2} = S_{n-1}\ 16 + a_{n-2}$

$S_{n-1} = a_{n-1}$

Algoritmo di conversione: da Esadecimale a Decimale

MSD=cifra più significativa

$$N = (a_{n-1}\ a_{n-2} \ldots a_1 a_0)_{16}$$

LSD=cifra meno significativa

$$N = ((\ldots((a_{n-1})16 + a_{n-2})16 + \ldots + a_2)16 + a_1)16 + a_0$$

$N = S_0 = S_1 16 + a_0$

$S_1 = S_2 16 + a_1$

$S_2 = S_3 16 + a_2$

.....

$S_{n-2} = S_{n-1} 16 + a_{n-2}$

$S_{n-1} = a_{n-1}$

Dal basso verso l'alto: da a_{n-1} a a_0 ; da MSD a LSD

$S_{n-1} = a_{n-1}$

$S_{n-2} = a_{n-2} + 16 S_{n-1}$

$S_{n-3} = a_{n-3} + 16 S_{n-2}$

.....

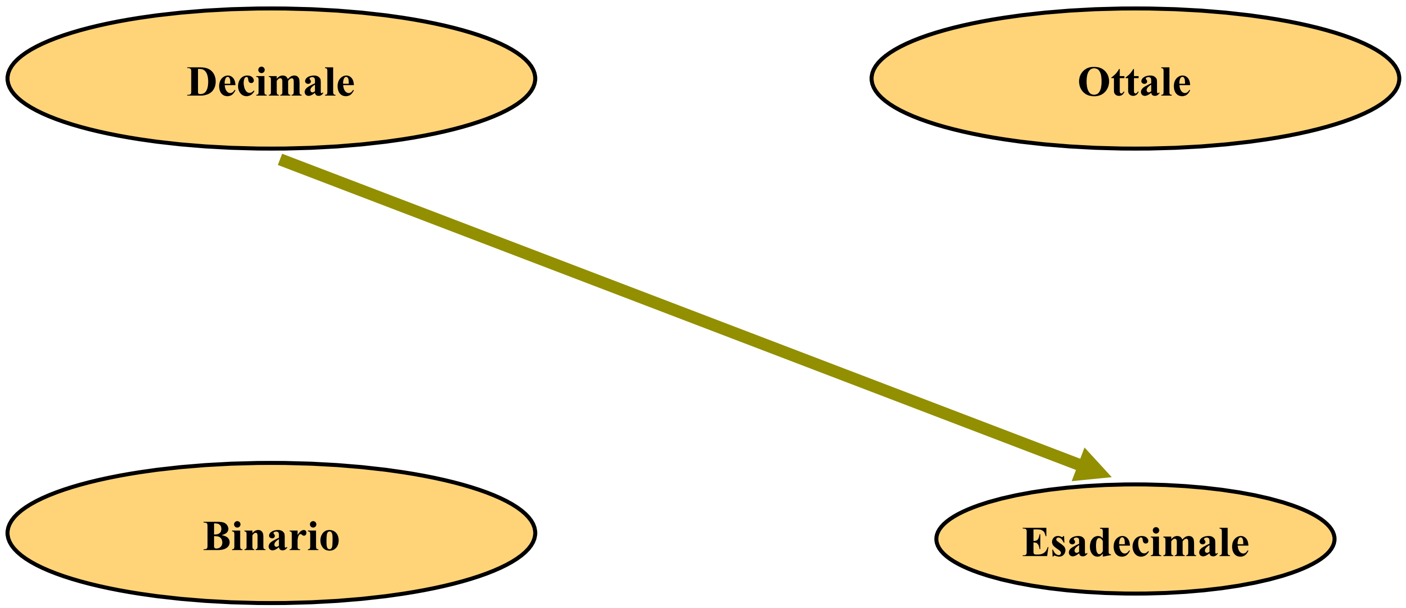
$S_i = a_i + 16 S_{i+1}$

.....

$S_0 = a_0 + 16 S_1$

$S_0 = N$

Da Decimale a Esadecimale



Algoritmo di conversione: da Decimale ad Esadecimale

Input: N Risultato: $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$, a_i in {0, 1,… ,9,A, B, …, F}

Procedura inversa: dall'alto verso il basso (da a_0 ad a_{n-1})

$N = S_0 = S_1\,16 + a_0$

$S_1 = S_2\,16 + a_1$

$S_2 = S_3\,16 + a_2$

……

$S_i = S_{i+1}\,16 + a_i$

……

$S_{n-2} = S_{n-1}\,16 + a_{n-2}$

$S_{n-1} = a_{n-1}$

a_0 ed S_1 sono il resto e il quoziente della divisione di $N = S_0$ per 16

….

a_i ed S_{i+1} sono il resto e il quoziente della divisione di S_i per 16

….

Fino ad ottenere un $S_i = 0$

Algoritmo delle divisioni successive

Esempio: N=419

$$N = (a_{n-1}\ a_{n-2} \ldots a_1 a_0)_{16}\ ???$$

$S_0 = a_0 + 16 S_1 = 3 + 16 \times 26 = 419$ | **419 : 16 = 26 con resto 3**

$S_1 = a_1 + 16 S_2 = 10 + 16 \times 1 = 26$ | **26 : 16 = 1 con resto 10**

$S_{n-1} = a_{n-1}$ $\quad S_2 = a_2 + 16 S_3 = 1 + 16 \times 0 = 1$ | **1 : 16 = 0 con resto 1**

STOP

$$N = (1A3)_{16}$$

Esempio: N=4287

$$N = (a_{n-1}\ a_{n-2} \ldots a_1 a_0)_{16}\ ???$$

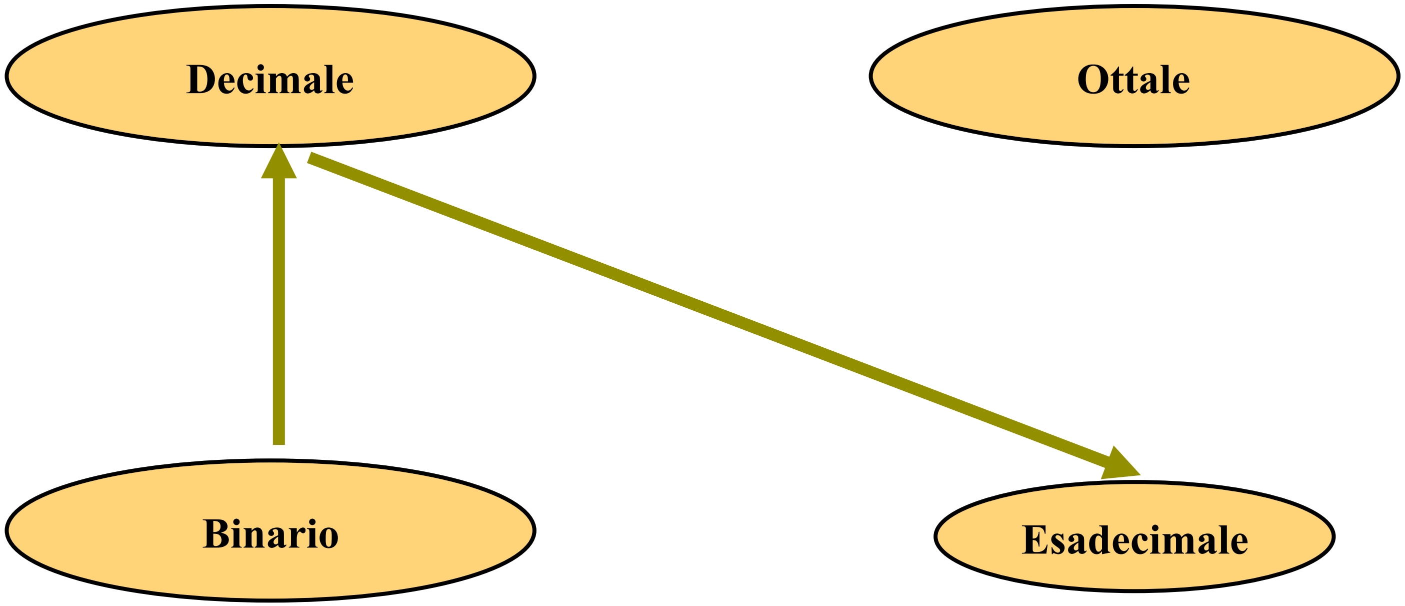
```
4287 | 16
  15 | 267 | 16
          11 | 16 | 16
                0 |  1 | 16
                     1 |  0
```

$N_{16} =$ 10BF

$$4287 = 1*16^3+0*16^2+11*16^1+15*16^0$$

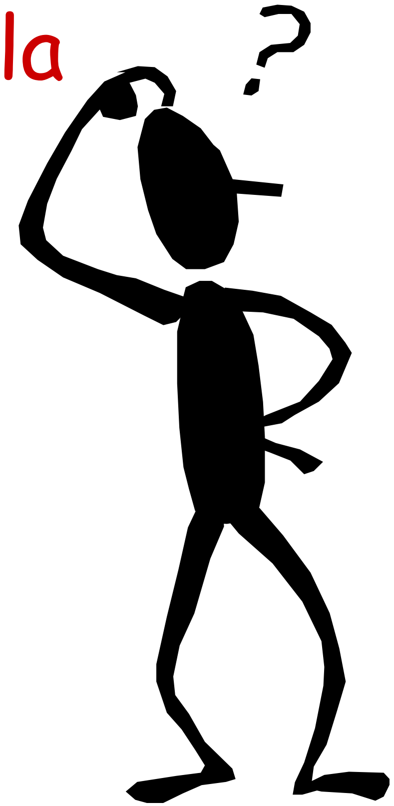
Da Binario a Esadecimale

- Possiamo convertire un numero da Binario a Esadecimale facendo due conversioni

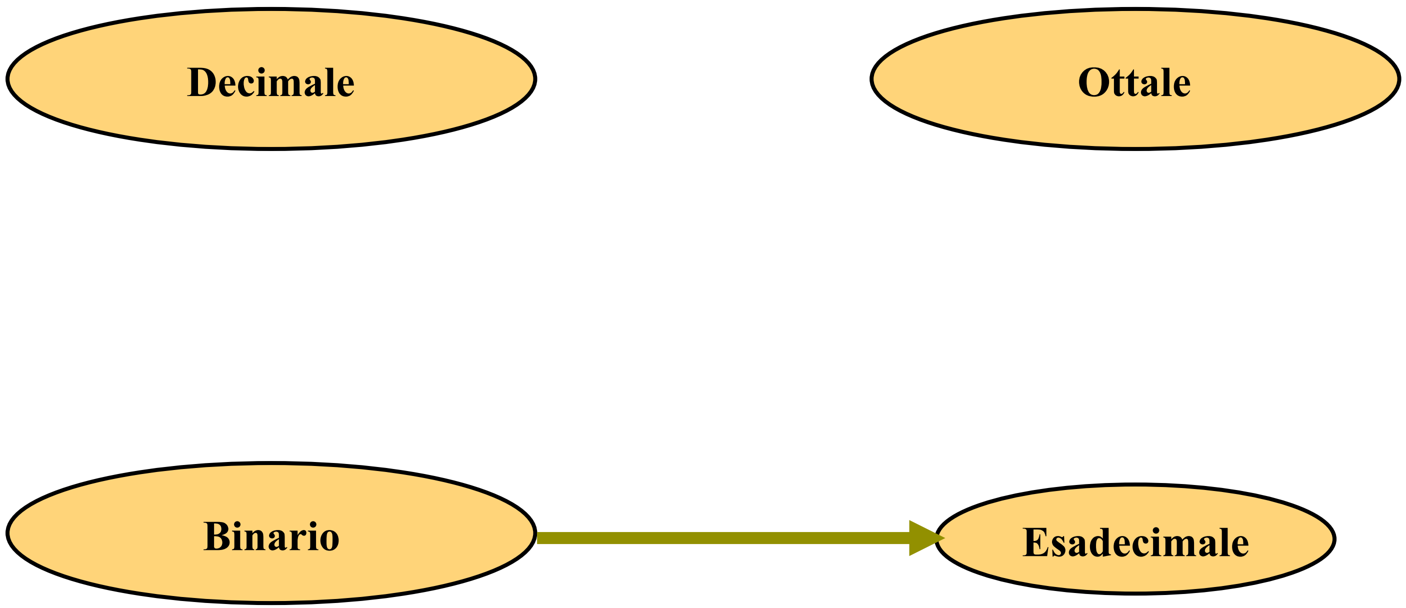


Da Binario a Esadecimale

Esiste un metodo per passare dalla rappresentazione binaria a quella esadecimale senza passare per quella decimale?



Da Binario a Esadecimale



Ancora magia!

$b = 16$ rappresentazione esadecimale

$$(203)_{16} = 2 \times 16^2 + 3 = 515$$

00100000 0011

Valore identico

Convertiamolo in decimale

$$\boxed{2^9 + 2^1 + 2^0 = 515}$$

Nemmeno questo è un caso!

Da Binario a Esadecimale

Algoritmo

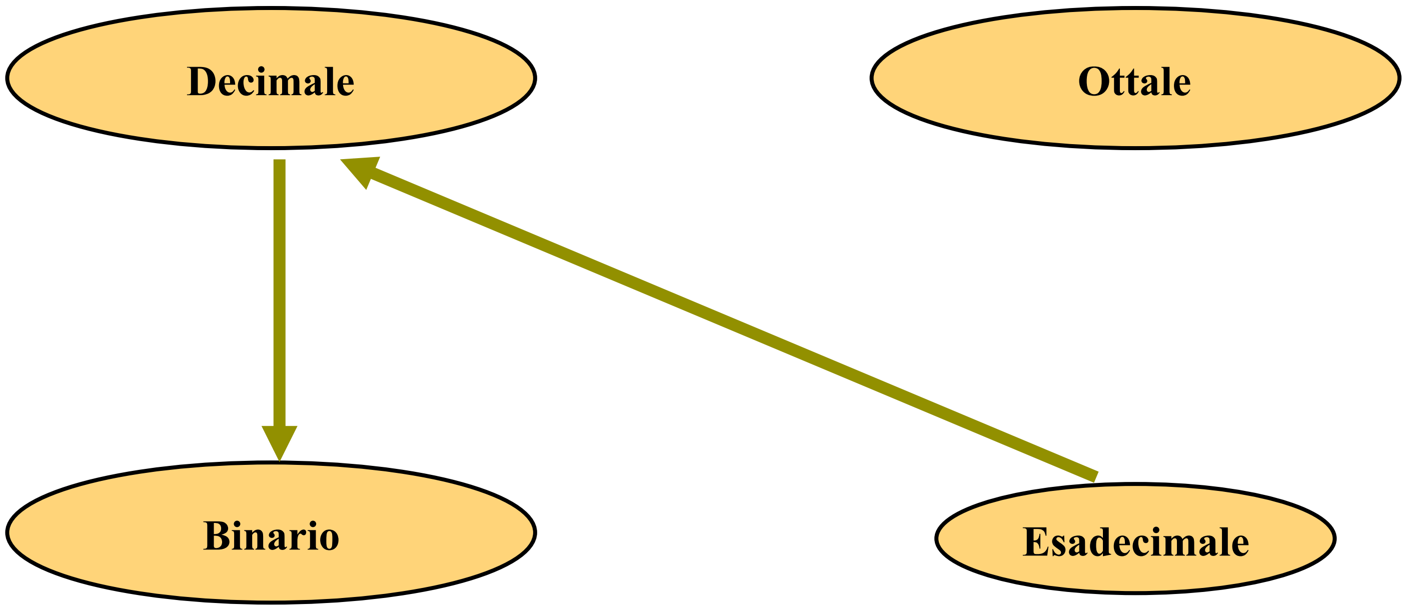
- Raggruppa i bit 4 a 4 da destra
- Ad ogni gruppo fai corrispondere la cifra in esadecimale (da 0 a F)

Esempio

$1001011111_2 = 10\ 0101\ 1111 = 25F_{16}$

Da Esadecimale a Binario

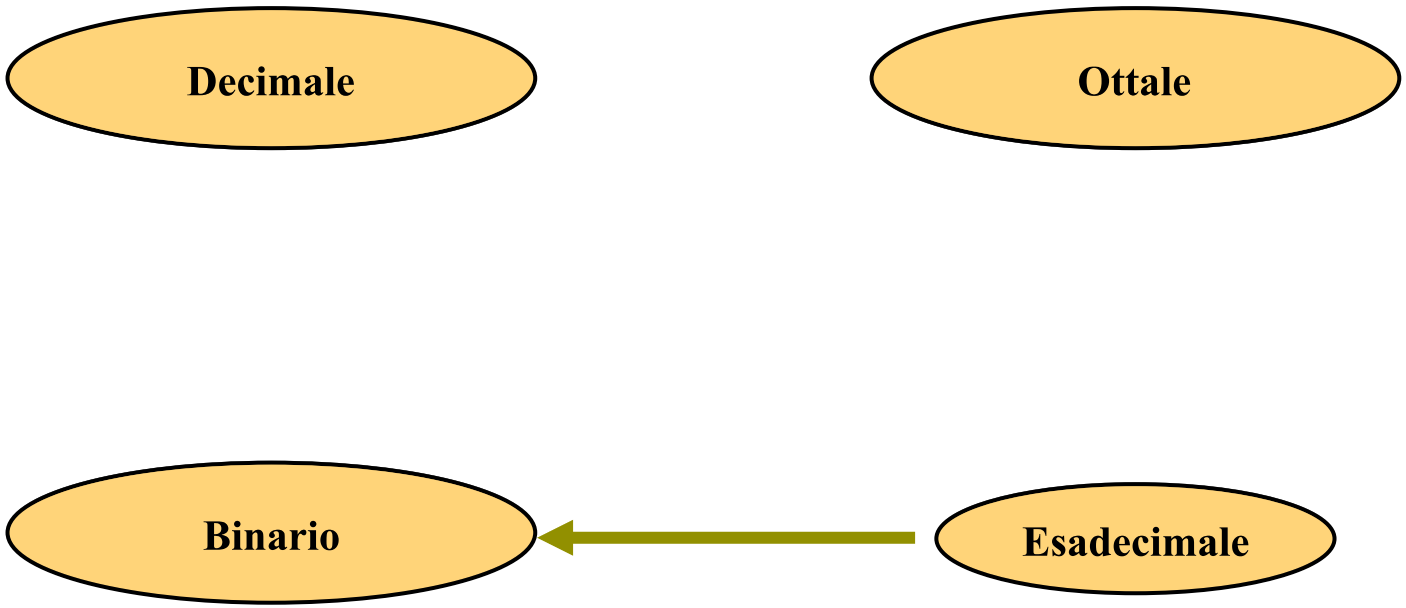
- Possiamo convertire un numero da Esadecimale a Binario facendo due conversioni



Da Esadecimale a Binario

Esiste un metodo per passare dalla rappresentazione esadecimale a quella binaria senza passare per quella decimale?

Da Esadecimale a Binario



Da Esadecimale a Binario

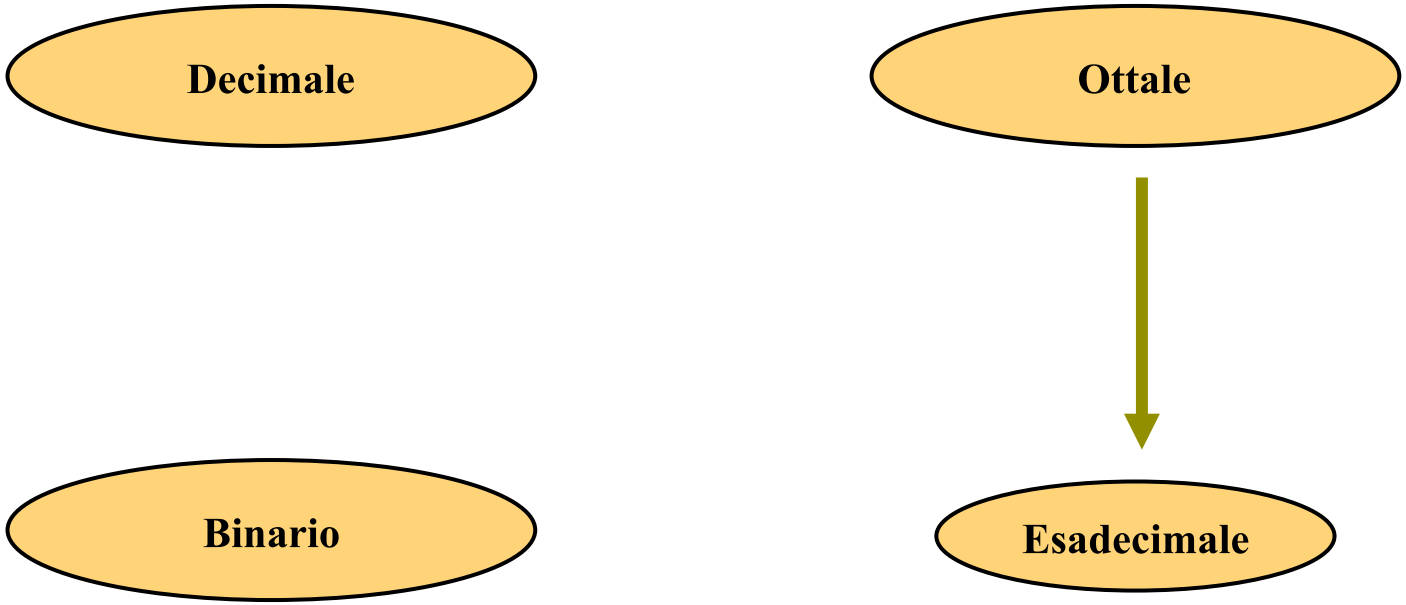
Algoritmo

- Ad ogni cifra in esadecimale fai corrispondere la rappresentazione binaria su 4 bit e concatena

Esempio:

$A67_{16}$ = 1010 0110 0111 = 101001100111_2

Da Ottale a Esadecimale



Da Ottale a Esadecimale

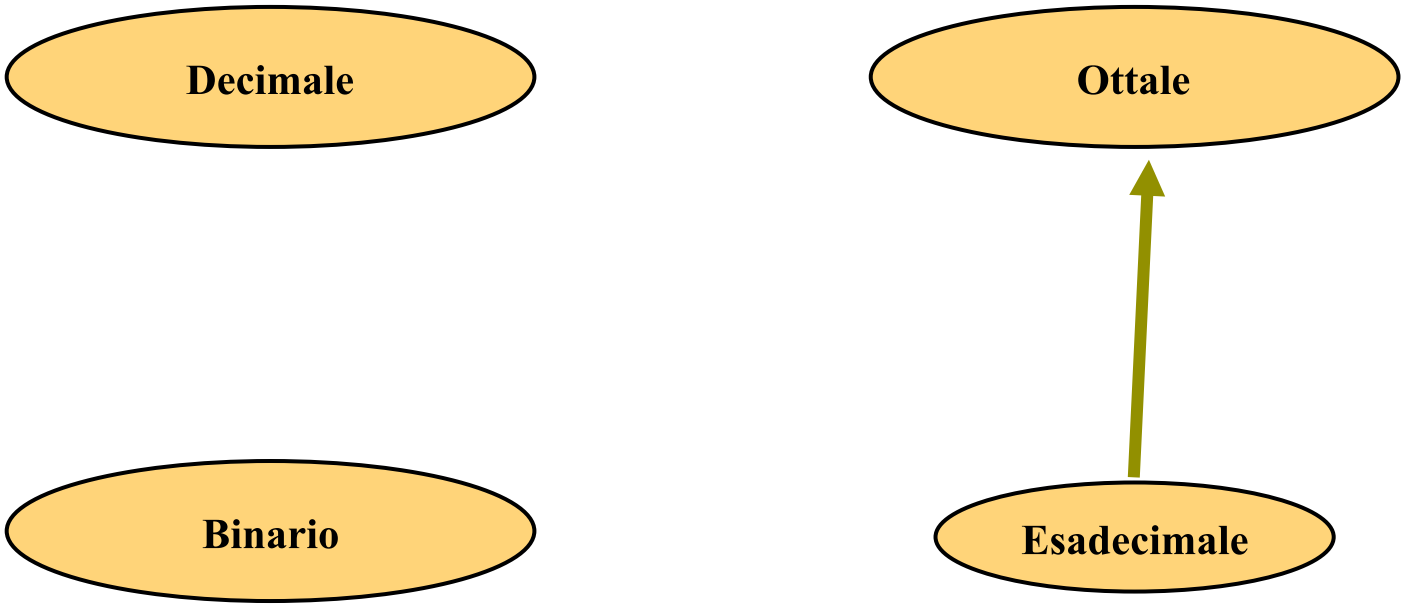
- **Idea:** usare la codifica binaria come rappresentazione intermedia
- $1076_8 = ?_{16}$

1	0	7	6
↓	↓	↓	↓
001	000	111	110

```
001 0|00 11|1 110
  2  |  3   |  E
```

$1076_8 = 23E_{16}$

Da Esadecimale a Ottale



Da Esadecimale a Ottale

- **Idea:** usare la codifica binaria come rappresentazione intermedia
- $1F0C_{16} = ?_8$

1	F	0	C
0001	1111	0000	1100

0 | 001 1 | 111 | 1 00 | 00 1 | 100

1 7 4 1 4

$1F0C_{16} = 17414_8$

Esercizi

- Convertire in base 16
  - 110101101011010_2
  - 36_8
- Convertire in base 2
  - 175_8
  - $01A_{16}$

Esercizi

- Convertire in base 16
  - $110101101011010_2 \rightarrow 6B5A_{16}$
  - $36_8 \rightarrow 1E_{16}$

- Convertire in base 2
  - $175_8 \rightarrow \mathbf{1111101}_2$
  - $01A_{16} \rightarrow \mathbf{11010}_2$

Riepilogo e riferimenti

- Rappresentazione nelle basi 2, 8, 10 e 16 e conversioni per interi
  - [P] par. 1.5