Lezione 04/10

martedì 4 ottobre 2022 11:12

DEF- Una **RELAZIONE D'ORDINE** $R \subseteq S \times S$ è una relazione tale che

1) Riflessiva $\forall x \in S,\ xRx$
2) Asimmetrica $\forall x, y \in S$, se $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
3) Transitiva $\forall x, y, z \in S$, se $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Esempi: $\leq$ "usuale", $\subseteq$, il divide in $\mathbb{N}_0$

NOTAZIONE: indicheremo ogni relazione d'ordine R con $\leq$

DEF- Un **INSIEME ORDINATO** è una coppia $(S, \leq)$ dove $\leq$ è una relazione d'ordine su S.

Es - $(\mathbb{N}_0, \leq)$, $(\mathbb{N}_0, |)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$

DEF- Dato $(S, \leq)$ insieme ordinato diremo:

1) $x, y \in S$ si dicono **confrontabili** (rispetto a $\leq$) se vale una tra $x \leq y$ e $y \leq x$.

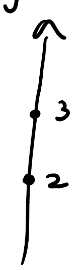
es in $(\mathbb{N}_0, |)$ $2 \nmid 3$ e $3 \nmid 2$

es $A = \{a, b, c\}$ in $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ $\{a\}, \{b\}$ non sono confrontabili: $\{a\} \not\subseteq \{b\}$ e $\{b\} \not\subseteq \{a\}$

$\{a\}, \{a, b\}$ sono confrontabili: perché $\{a\} \subseteq \{a, b\}$

2) se $\forall x, y \in S$ si ha che x e y sono confrontabili $\Rightarrow S$ è detto **TOTALMENTE ORDINATO (o CATENA)**

es- $(\mathbb{R}, \leq)$



3) Definiamo $<$ "minore stretto": $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ e $x \neq y$
$\geq$ "maggiore uguale": $x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$

4) Dati $(S, \leq)$, $(S^*, \leq^*)$ due insiemi ordinati. Definiamo $f: S \to S^*$ **funzione crescente** se $\forall x, y \in S$ tali che $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq^* f(y)$

omomorfismo tra insiemi ordinati

$\underbrace{\text{funzione crescente}}_{\text{omomorfismo di insiemi ordinati}}$ se $\forall\, x,y \in S$ tali che $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq^* f(y)$

Es - $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{R}, \leq), (\mathbb{R}, \leq)$ con l'ordine usuale

se $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

$f(x) = 2x$ $x \leq y \Rightarrow \underset{f(x)}{2x} \leq \underset{f(y)}{2y}$

Es - $(\mathbb{N}_0, |)$ $(\mathbb{N}_0, \leq)$ $id_{\mathbb{N}_0} : (\mathbb{N}_0, |) \to (\mathbb{N}_0, \leq)$ è crescente?

$x \mapsto x$

$\forall\, x,y \in \mathbb{N}_0$ se $x | y \Rightarrow id_{\mathbb{N}_0}(x) \leq id_{\mathbb{N}_0}(y)$

$\Rightarrow x \leq y$ ok!

(perché y è multiplo di x)

$id_{\mathbb{N}_0} : (\mathbb{N}_0, \leq) \to (\mathbb{N}_0, |)$

$\forall\, x,y \in \mathbb{N}_0$, se $x \leq y \Rightarrow id_{\mathbb{N}_0}(x) \,|\, id_{\mathbb{N}_0}(y) \Rightarrow x | y$

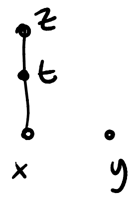
$5 \leq 7$ ma $5 \nmid 7$

DEF - DIAGRAMMI di HASSE (per insiemi finiti)

$(S, \leq)$

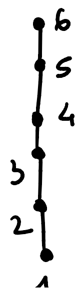
x, y

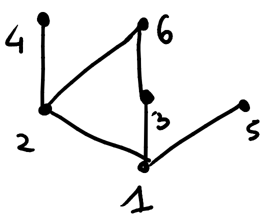
$x \leq t \leq z$

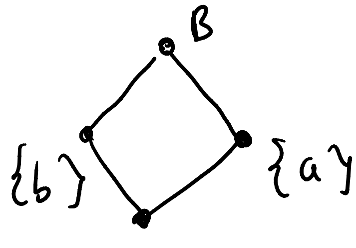


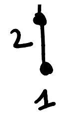
Es $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $B = \{a, b\}$ $(\mathcal{P}(B), \subseteq)$

$(A, \leq)$ $(A, |)$ $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, B, \{a\}, \{b\}\}$

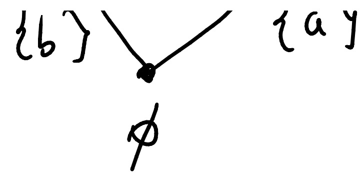








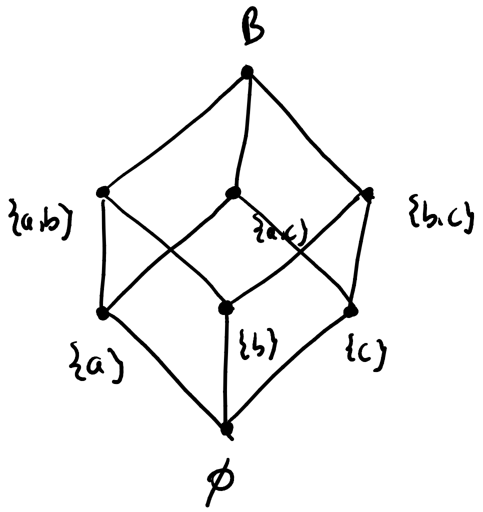
1



$\emptyset \subseteq \{b\} \subseteq B$

$B = \{a, b, c\}$ $\quad (\mathcal{P}(B), \subseteq)$

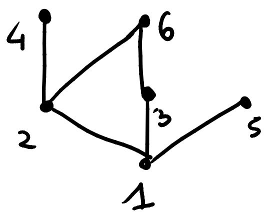
$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, B\}$



$(\mathcal{P}(B), \subseteq)$

DEF - Dato $(S, \leq)$
un elemento $a \in S$ è detto MASSIMO per S se $\forall x \in S$, $x \leq a$
un elemento $b \in S$ è detto MINIMO per S se $\forall x \in S$, $b \leq x$

in $(\mathcal{P}(B), \subseteq)$ massimo $= B$, minimo $= \emptyset$



$5 \nleq 6$
$3 \nleq 4$

$\max(S) = a$
$\min(S) = b$

Se $X \subseteq S$, definisco massimo e minimo dentro X:

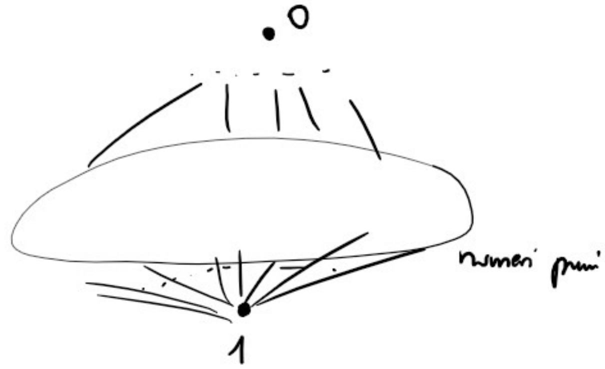
1) $a = \max_S(X)$ se $a \in X$ e $\forall x \in X$ si ha $x \leq a$
2) $b = \min_S(X)$ se $b \in X$ e $\forall x \in X$ si ha $b \leq x$

Es $\quad X = \{4, 6, 2\}$ $\quad \min_A(X) = 2$ e $\nexists$ max $\Leftarrow$

Es $\quad X = \{4, 6, 2\} \quad \min_A(X) = 2$ e $\nexists$ max $\Leftarrow$

$\quad X = \{2, 6, 3\} \quad \max_A(X) = 6$ e $\nexists$ min

$(\mathbb{N}_0, |)$



0 è diviso da tutto

$0 = n \cdot 0$

OSS - Se $(S, \le)$ ha un massimo, allora questo è unico. E lo stesso per il minimo.

Dim

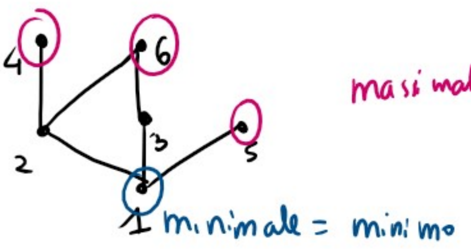
Siano a e b due massimi per S.

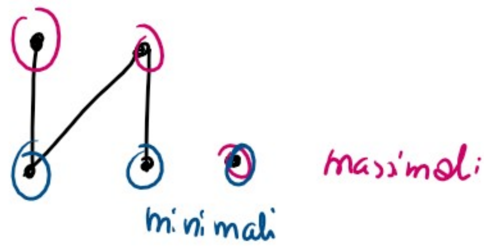
$$\left.\begin{array}{l} \text{Poiché } a = \max(S) \Rightarrow \forall x \in S,\ x \le a \Rightarrow \text{in particolare } b \le a \\ \text{Poiché } b = \max(S) \Rightarrow \forall x \in S,\ x \le b \Rightarrow \text{ '' '' } a \le b \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$$

DEF - Dato $(S, \le)$

un elemento $c \in S$ è detto **MASSIMALE** se $\nexists\, x \in S$ t.c. $c \le x$.

un elemento $d \in S$ è detto **MINIMALE** se $\nexists\, x \in S$ t.c. $x \le d$.





OSS - Ogni minimo è anche minimale, ogni massimo è anche massimale

OSS - In un insieme totalmente ordinato e finito esistono sempre massimo e minimo

In un insieme è totalmente ordinato e ha un massimale $\Rightarrow$ questo è massimo. Analogamente, se ha un minimale, questo è minimo.

DEF - $X \subseteq S$ diremo che

w è massimale in X se $\nexists\, x \in X$ t.c. $w \leq x$

v è minimale in X se $\nexists\, x \in X$ t.c. $x \leq v$