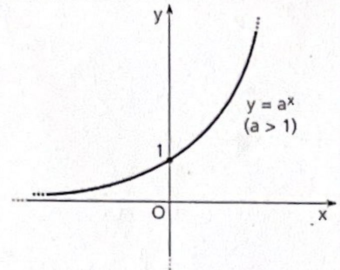
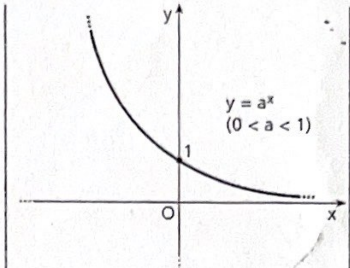
LA FUNZIONE ESPONENZIALE E LA FUNZIONE LOGARITMO

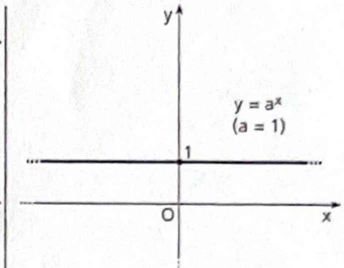
La funzione esponenziale



a. • C.E.: $\mathbb{R}$;
• codominio: $\mathbb{R}^+$;
• funzione crescente in $\mathbb{R}$;
• corrispondenza biunivoca;
• $a^x \to 0$ per $x \to -\infty$;
• $a^x \to +\infty$ per $x \to +\infty$.

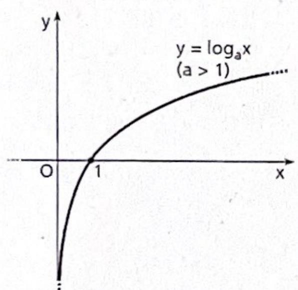


b. • C.E.: $\mathbb{R}$;
• codominio: $\mathbb{R}^+$;
• funzione decrescente in $\mathbb{R}$;
• corrispondenza biunivoca;
• $a^x \to 0$ per $x \to +\infty$;
• $a^x \to +\infty$ per $x \to -\infty$.

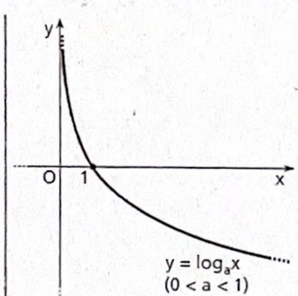


c. • C.E.: $\mathbb{R}$;
• codominio: {1};
• funzione costante;
• funzione non iniettiva.

La funzione logaritmo



a. • C.E.: $\mathbb{R}^+$;
• codominio: $\mathbb{R}$;
• funzione crescente in $\mathbb{R}^+$;
• corrispondenza biunivoca;
• $\log_a x \to -\infty$ per $x \to 0$;
• $\log_a x \to +\infty$ per $x \to +\infty$.



b. • C.E.: $\mathbb{R}^+$;
• codominio: $\mathbb{R}$;
• funzione decrescente in $\mathbb{R}^+$;
• corrispondenza biunivoca;
• $\log_a x \to +\infty$ per $x \to 0$;
• $\log_a x \to -\infty$ per $x \to +\infty$.

Logaritmo di un prodotto

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c, \quad (b > 0, c > 0)$$

Logaritmo di un quoziente

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \qquad (b > 0, c > 0)$$

Logaritmo di una potenza

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b, \quad (b > 0)$$

Cambiamento di base nei logaritmi

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad a > 0, b > 0, c > 0 \quad a \neq 1, c \neq 1$$

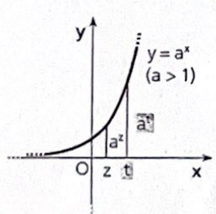
Disequazioni esponenziali

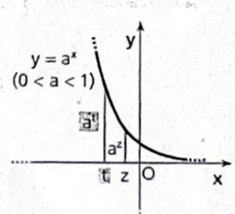
$a > 1$

$a^t > a^z \iff t > z$

$0 < a < 1$

$a^t > a^z \iff t < z$





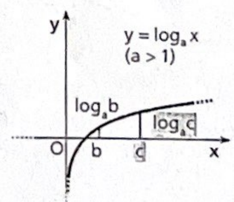
Disequazioni logaritmiche

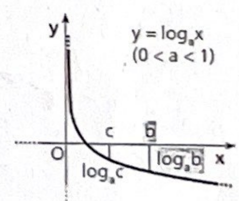
$a > 1$

$\log_a b < \log_a c \iff b < c$

$0 < a < 1$

$\log_a b < \log_a c \iff b > c$





DIV. TRA POLINOMI

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

PRODOTTI NOTEVOLI

$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$

$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$

$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$

$A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$

PROPRIETÀ RADICI

$\sqrt[n]{a^n} = a \qquad (\sqrt[n]{a^m})^n = a^m \qquad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^q \cdot \sqrt[n]{a^r}$, q $m = nq + r$

$b \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \cdot a} \qquad a\sqrt[n]{c} \pm b\sqrt[n]{c} = (a \pm b)\sqrt[n]{c}$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, $c = \sqrt{a^2 - b}$

PROPRIETÀ POTENZE

$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad a^m \cdot b^m = (ab)^m$

$a^m : b^m = (a:b)^m \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

EQ. II GRADO

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \Delta$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ 2 soluzioni distinte

$\Delta = 0 \Rightarrow$ 2 soluz. coincidenti

$\Delta < 0 \Rightarrow$ 0 soluz. reali

se $b = 0 \Rightarrow$ eq. pura , $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

se $c = 0 \Rightarrow$ eq. spuria , $x = 0$, $x = -\frac{b}{a}$

se b pari $\Rightarrow x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$

se x_1, x_2 radici , allora la scomp. è : $a(x - x_1)(x - x_2)$

EQ. e DISEQ. IRRAZIONALI

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \begin{cases} n \text{ dispari}: & A(x) = [B(x)]^n \\ n \text{ pari}: & \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \quad (\text{include } A(x) \geq 0) \end{cases} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} = \sqrt[m]{B(x)} \begin{cases} n, m \text{ dispari}: & [A(x)]^m = [B(x)]^n \\ n, m \text{ pari e disp}: & \begin{cases} A(x) \geq 0 \quad n \text{ pari} \\ [A(x)]^m = [B(x)]^n \end{cases} \\ n, m \text{ pari}: & \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ [A(x)]^m = [B(x)]^n \end{cases} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \begin{cases} n \text{ dispari}: & A(x) < [B(x)]^n \\ n \text{ pari}: & \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^n \end{cases} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x) \begin{cases} n \text{ dispari}: & A(x) > [B(x)]^n \\ n \text{ pari}: & \begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^n \end{cases} \end{cases}$$

PROPRIETÀ LOGARITMI

$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a (x : y) = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

$\log_a b = -\log_a \frac{1}{b}$ $\qquad$ $\log_a b = -\log_{\frac{1}{a}} b$

$\log_a b = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b}$ $\qquad$ $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

$\log_a a^n = n$ $\qquad$ $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $\qquad$ $e \cong 2,71$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\log_a f(x) = K \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^K \end{cases}$$

GONIOMETRIA

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
SIN	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
COS	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
TAN	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\qquad \cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\tan\theta}$ $\qquad \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ $\qquad \cos\theta = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}$ $\qquad \sin\theta = \dfrac{\tan\theta}{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\qquad \cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}$ $\qquad \cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad , t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$ $\quad , \alpha \neq \pi + 2k\pi$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

$\sin x = a$ determinata se $-1 \le a \le 1$

$x = \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x = (\pi - \alpha) + 2k\pi$

$\cos x = b$ det. se $-1 \le b \le 1$

$x = \pm \beta + 2k\pi$

$\tan x = c$ sempre det.

$x = \gamma + k\pi$

$\sin \alpha = \sin \alpha' \Rightarrow \alpha = \alpha' + 2k\pi \quad \vee \quad \alpha + \alpha' = \pi + 2k\pi$

$\sin \alpha = \cos \alpha' \Rightarrow \sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$\cos \alpha = \cos \alpha' \Rightarrow \alpha = \pm \alpha' + 2k\pi$

$\cos \alpha = -\cos \alpha' \Rightarrow \cos \alpha = \cos(\pi - \alpha')$

$\tan \alpha = \tan \alpha' \Rightarrow \alpha = \alpha' + k\pi$

$\tan \alpha = -\tan \alpha' \Rightarrow \tan \alpha = \tan(-\alpha')$

EQ. e DISEQ. VALORE ASSOLUTO

$|A(x)| = k \Rightarrow k < 0$: nessuna soluzione

$\qquad k \ge 0$: $A(x) = \pm k$

$|A(x)| < k \Rightarrow k > 0 \Rightarrow -k < A(x) < k \Rightarrow \begin{cases} A(x) > -k \\ A(x) < k \end{cases}$

$\qquad k \le 0 \Rightarrow$ nessuna sol

$|A(x)| > k \Rightarrow k < 0 \Rightarrow$ sempre

$\qquad k = 0 \Rightarrow A(x) \neq 0$

$\qquad k > 0 \Rightarrow A(x) < -k \quad \vee \quad A(x) > k$

NUMERI COMPLESSI

$i^0 = 1 \qquad i^1 = i \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1 \qquad i^5 = i$

FORMA ALGEBRICA $a + ib$ (operazioni come i monomi)

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}$$

Reciproco di $a + ib$ è $\frac{1}{a+ib}$

FORMA TRIGONOMETRICA

$$(a,b)+(c,d)=(a+c\,,\,b+d)$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd\,,\,ad+bc)$$

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}\,,\,\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$$ [simm. del $\cdot$]

$$a+ib=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)\quad,\ \rho=\sqrt{a^2+b^2}\quad \alpha=\mathrm{ARCTAN}\,\frac{b}{a}$$

$$z_1\cdot z_2=\rho_1\cdot\rho_2\left[\cos(\alpha_1+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\right]$$

$$z_1:z_2=\rho_1:\rho_2\left[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cancel{\rho[\cos\alpha}\ [\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^n=\rho^n[\cos n\alpha+i\sin n\alpha]$$

$$\sqrt[n]{z_1}=z_2\Rightarrow z_1=z_2^n\Rightarrow\rho_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)=\rho_2^n(\cos n\beta+i\sin n\beta)$$

FORMA ESPONENZIALE

$$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha\quad\Rightarrow\quad z=\rho\cdot e^{i\alpha}$$

$$e^{-i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\qquad \sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$$

LIMITI

IMMEDIATI

$$\lim_{n\to+\infty}a^n=\begin{cases}+\infty & ,\ a>1\\ 1 & ,\ a=1\\ 0 & ,\ |a|<1\\ \text{non esiste} & ,\ a\le -1\end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^a}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}n^b=\begin{cases}+\infty & ,\ b>0\\ 1 & ,\ b=0\\ 0 & ,\ b<0\end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{b}{n}\right)^n=e^b$$

NOTEVOLI

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0\qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\qquad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\qquad \lim_{x\to0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k\qquad \lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$$

SOSTITUZIONE INFINITESIMI $f(x) \to 0$

$\sin f(x) \to f(x)$ $\quad$ $e^{f(x)} - 1 \to f(x)$

$\tan f(x) \to f(x)$ $\quad$ $1 - \cos f(x) \to \frac{1}{2} \cdot f^2(x)$

$\arctan f(x) \to f(x)$ $\quad$ $(1 + f(x))^{\alpha} - 1 \to \alpha \cdot f(x)$

$\arcsin f(x) \to f(x)$

DERIVATE FONDAMENTALI

$y = K \to y' = 0$

$y = x^{\alpha} \to y' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$ $\quad$ $y = [f(x)]^n \to y' = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$

$y = \sin x \to y' = \cos x$ $\quad$ $y = \sin f(x) \to y' = f'(x) \cdot \cos f(x)$

$y = \cos x \to y' = -\sin x$ $\quad$ $y = \cos f(x) \to y' = -f'(x) \cdot \sin f(x)$

$y = \log_a x \to y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $\quad$ $y = \ln x \to y' = \frac{1}{x}$

$y = f(x) + g(x) \to y' = f'(x) + g'(x)$

$y = f(x) \cdot g(x) \to y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$y = K \cdot f(x) \to y' = K \cdot f'(x)$

$y = \frac{f(x)}{g(x)} \to y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

$y = \log_a f(x)$

$\downarrow$

$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot \ln a}$

$y = \tan x \to y' = \frac{1}{\cos^2(x)}$ $\quad$ $y = \cot x \to y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$y = f(z)$ e $z = g(x) \to f'(g(x)) = g'(x) \cdot f'(z)$

$y = f(x) \to [f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}$

$y = a^{f(x)}$

$\downarrow$

$y' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$

$y = a^x \to y' = a^x \ln a$ $\quad$ $y = e^x \to y' = e^x$

$y = \arcsin x \to y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\quad$ $y = \arccos x \to y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \arctan x \to y' = \frac{1}{1 + x^2}$ $\quad$ $y = \text{arccot}\, x \to y' = -\frac{1}{1 + x^2}$

$y = [f(x)]^{g(x)} \to y' = [f(x)]^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$

$y = \sqrt[n]{[f(x)]^m} \to y' = \cancel{\frac{m \cdot f'(x)}{\dots}}\ \frac{m \cdot f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{[f(x)]^{n-m}}}$

PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI DEFINITI

$$\int_a^b K f(x)\,dx = K \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad c \in (a,b)$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

INTEGRALI INDEFINITI

$$\int K\,dx = Kx + c$$

$$\int [f(x)]^m \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{m+1}}{m+1} + c$$

$$\int f'(x) \cdot \sin f(x)\,dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int f'(x) \cdot \cos f(x)\,dx = \sin f(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$
$$\downarrow$$
$$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \tan f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}\,dx = -\cot f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = \arcsin f(x) + c = -\arccos f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \arctan f(x) + c = -\operatorname{arccot} f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$$
$$\downarrow$$
$$\frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int f'(x) \cdot a^{fx}\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

TEOREMA DELL'UNICITÀ DEL LIMITE (successioni)

Se una successione è convergente con $\lim_{n\to+\infty} a_n = L_1$ tale lim è unico

Supponiamo per assurdo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = L_1$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = L_2$ con $L_1 \neq L_2$ e prendiamo un $\varepsilon > 0$ t.c.:

$\varepsilon < \frac{|L_1 - L_2|}{2}$ Per definizione di limite $\exists v_1$ t.c.

$\forall n > v_1$ si ha $|a_n - L_1| < \varepsilon$, analogamente $|a_n - L_2| < \varepsilon$

Preso $n > \max\{v_1, v_2\}$, le relazioni valgono contemporaneamente e sommando si ottiene: $|a_n - L_1| + |a_2 - L_2| < 2\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| < 2\varepsilon \Rightarrow |L_1 - a_n + a_n - L_2| \leq |\text{e}_1| + |\text{e}_1| < 2\varepsilon$

$\Rightarrow |L_1 - L_2| < 2\varepsilon$ che contraddice l'ipotesi, dunque $L_1 = L_2$ ↯

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO (successioni)

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = L > 0$ allora $\exists v \in \mathbb{R} : \forall n > v$ si ha $a_n > 0$

Dalla definizione di limite, posto $\varepsilon = L$, $\exists v \in \mathbb{R} \mid \forall n > v$ si ha $L - L < a_n < L + L \Rightarrow 0 < a_n < 2L$ ↯

TEOREMA DEL CONFRONTO o DEI CARABINIERI (successioni)

Siano a_n, b_n, c_n 3 successioni verificanti la relazione $a_n \leq c_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ con $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = L$. Allora anche $\lim_{n\to+\infty} c_n = L$

Scelto $\varepsilon > 0$, $\exists v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\forall n > v_1$ e $\forall n > v_2$ valgono ~~le~~ $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|b_n - L| < \varepsilon$, da cui

$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ e $L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon$

Preso $n > v = \max\{v_1, v_2\}$ valgono entrambe, quindi

$L - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \varepsilon \rightarrow L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$

$\Downarrow$

$\lim_{n\to+\infty} c_n = L$ ↯

TEOREMA DELL'UNICITÀ DEL LIMITE (funzioni)

Se il limite di una funzione in un punto esiste, esso è unico

Sia f una funzione definita in A e supponiamo per assurdo

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$ con $l_1 < l_2$ e $0 < \varepsilon < \frac{l_2 - l_1}{2}$

$\exists \delta_1 > 0 : |f(x) - l_1| < \varepsilon \quad \forall x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta_1$ e

$\exists \delta_2 > 0 : |f(x) - l_2| < \varepsilon \quad \forall x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta_2$

Preso $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, allora valgono entrambe le diseq.:

$$\begin{cases} l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon \\ l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow l_2 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$$ da cui

$l_2 - \varepsilon < l_1 + \varepsilon \Rightarrow l_2 - l_1 < 2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon > \frac{l_2 - l_1}{2}$ che contraddice l'ipotesi $\lightning$

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO (funzioni)

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq 0$, allora la funzione è localmente concorde con il limite

Sia f una funzione definita in A. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ allora

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ risulta

$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$. Preso $\varepsilon = |l|$ si hanno 2 casi:

$0 < f(x) < 2l$ se $l > 0$ e

$2l < f(x) < 0$ se $l < 0$ $\lightning$

TEOREMA DEL CONFRONTO o DEI CARABINIERI (funzioni)

Se $h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I(x_0, r)$ e $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$,

allora anche $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Per definizione di limite: $\forall \varepsilon > 0 \quad |h(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0, r_1)$ e

$|g(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0, r_2)$, che valgono contemporaneamente

in $I(x_0, r_1) \cap I(x_0, r_2)$, da cui

$l - \varepsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < l + \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \lightning$$

TEOREMA DEGLI ZERI

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste almeno un $x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) = 0$

Sia $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, e supponiamo per assurdo che $f(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$ e consideriamo l'insieme $A = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$. Sappiamo di certo che $A \neq \emptyset$ poiché contiene almeno a e inoltre è limitato superiormente, $\sup A = x_0 < b$. Poiché $f(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$ si ha $f(x_0) \neq 0$ e per la permanenza del segno, se $f(x_0) < 0$, ~~si~~ $\exists \tau > 0 : \forall x \in I(x_0, \tau)$ si ha $f(x) < 0$. Dunque in $(x_0, x_0 + \tau)$ si ha $f(x) < 0$, pertanto x_0 non è un maggiorante. Se invece $f(x_0) > 0$, si avrebbe in $(x_0 - \tau, x_0)$ $f(x) > 0$, che vuol dire che x_0 non è il minimo dei maggioranti. Pertanto la funzione si annulla in x_0, cioè $f(x_0) = 0$ ↯

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(a) < f(b)$. Allora la funzione assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$

Consideriamo un $y \in (f(a), f(b))$ e la funzione continua $g(x) = f(x) - y$. Osserviamo che

$$g(a) = f(a) - y < 0 \quad \text{e}$$

$$g(b) = f(b) - y > 0$$

Per il teorema degli zeri $\exists x \in (a,b) : g(x_0) = f(x_0) - y = 0$ da cui $y = f(x_0)$ ↯

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Una funzione continua in un insieme chiuso e limitato ha massimo e minimo

Se f è continua in X chiuso e limitato, allora $f(X)$ è un insieme chiuso e limitato e come tale è dotato di minimo e massimo. ↯

TEOREMA DI FERMAT

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di massimo o minimo relativo interno ad A. Se f è derivabile in x_0, si ha $f'(x_0) = 0$

Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo interno. Allora esiste un intorno completo I_{x_0} di x_0 t.c.:

$f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in I_{x_0}$ e, considerando $x_0 + h \in I_{x_0}$ ($h \in \mathbb{R}$) si ha

$f(x_0 + h) \leq f(x_0)$ da cui si ricavano:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad \text{per } h > 0 \text{ e}$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \text{per } h < 0$$

Poiché la funzione è derivabile in x_0, per la permanenza del segno si ha

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad \text{e}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$, pertanto risulterà

$f'(x_0) = 0$. Analogo il discorso se fosse minimo relativo ↯

TEOREMA DI ROLLE

Se $f(x)$ è continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b) e $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$

La funzione è continua nell'insieme chiuso e limitato e, per il t. di Weierstrass, ha max e min assoluti. Nel caso banale che questi si trovino agli estremi dell'intervallo, la 3ª ~~condizione~~ ipotesi ci dice che la funzione non può che essere costante, pertanto ha derivata sempre nulla. Se invece almeno uno dei due fosse interno e raggiunto ad una certa ascissa c, poiché f è derivabile, si avrebbe $f'(c) = 0$ (T.d. Fermat)

↯

"Esiste almeno un punto interno in cui la TAN è parallela all'asse delle x"

TEOREMA DI CAUCHY

Se f e g sono due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b), allora esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ tale che

$$[f(b)-f(a)] \cdot g'(c) = [g(b)-g(a)] \cdot f'(c)$$

Costruiamo la seguente funzione:

$$h(x) = [f(b)-f(a)] \cdot g(x) - [g(b)-g(a)] \cdot f(x)$$

che sarà sia continua che derivabile in $[a,b]$ in quanto somma di funzioni continue e derivabili. Si ha che

$$h(a) = f(b) \cdot g(a) - \cancel{f(a) \cdot g(a)} - g(b) f(a) + \cancel{g(a) f(a)} =$$
$$= f(b) \cdot g(a) - g(b) \cdot f(a)$$

$$h(b) = \cancel{f(b)\, g(b)} - f(a) \cdot g(b) - \cancel{g(b) \cdot f(b)} + g(a) \cdot f(b) =$$
$$= -f(a) \cdot g(b) + g(a) \cdot f(b)$$

Poiché $h(a) = h(b)$, il T. di Rolle è soddisfatto, per cui $\exists c \in (a,b) : h'(c) = 0$, cioè:

$$h'(c) = [f(b)-f(a)] \cdot g'(c) - [g(b)-g(a)] \cdot f'(c) = 0$$

da cui $[f(b)-f(a)] \cdot g'(c) = [g(b)-g(a)] \cdot f'(c)$

TEOREMA DI LAGRANGE

Se $f(x)$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b), allora esiste almeno un $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Consideriamo la funzione $g(x) = x$, ~~continua~~ che verifica entrambe le ipotesi per qualunque $[a,b]$. Inoltre $g'(x) = 1$.

Applicando il T. di Cauchy si ha:

$$[f(b)-f(a)] = (b-a) \cdot f'(c) \quad \text{cioè}$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Geometricamente vuol dire che c sarà almeno un punto c in cui la tangente è parallela alla congiungente di a e b

TEOREMA DELLA MEDIA

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann, allora

$$\inf f(x) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sup f(x) \cdot (b-a)$$

Se f è anche continua, $\exists\, c \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Si ha ovviamente $\inf f(x) \leq f(x) \leq \sup f(x)$ e integrando si ottiene subito

$$\inf f(x) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sup f(x)\,(b-a)$$

Se la funzione è continua nell'insieme chiuso e limitato, per il T. di Weierstrass ammette max e min. relativo, quindi:

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a)$$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

essendo compreso tra min e max per il T. dei valori intermedi

esisterà un $c \in [a,b]$:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Geometricamente vuol dire che esiste un rettangolo di base $(b-a)$ e altezza $f(c)$ con area uguale all'integrale di Riemann della funzione

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Se $f(x)$ è continua in $[a,b]$, la sua funzione integrale è derivabile e si ha $F'(x) = f(x)$

Consideriamo il rapporto incrementale della funz. integrale

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt}{\Delta x}$$

che riscriviamo come

$$\frac{\int_a^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+dx} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt}{\Delta x}$$

Usando il T. della media integrale

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} = f(z)$$

dove $z \in [x, x+\Delta x]$ e ovviamente z tende a x quando l'incremento tende a zero:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x)$$

PASSARE DALLA F. ALG. a F. TRIG.

$$\theta = \begin{cases} \pi/2 & a=0,\ b>0 \\ -\pi/2 & a=0,\ b<0 \\ \text{non definito} & a=0,\ b=0 \\ \text{ARCTAN}(b/a) & a>0,\ b \text{ qualsiasi} \\ \text{ARCTAN}(b/a)+\pi & a<0,\ b\geq 0 \\ \text{ARCTAN}(b/a)-\pi & a<0,\ b<0 \end{cases}$$

N.B. $\theta \in (-\pi, \pi]$

INTEGRALE PER PARTI

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx + c$$

DEFINIZIONI DI LIMITI

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ | \ \forall x \in A, \ 0 < |x - x_0| < \delta,$
$|f(x) - L| < \varepsilon$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $\quad \forall M > 0 \ \exists \delta(M) > 0 \ | \ \forall x \in A, \ 0 < |x - x_0| < \delta,$
$f(x) > M$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ $\quad \forall M > 0 \ \exists \delta(M) > 0 \ | \ \forall x \in A, \ 0 < |x - x_0| < \delta$
$f(x) < -M$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ | \ \forall x \in A, \ x > \delta,$
$|f(x) - L| < \varepsilon$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \forall M > 0 \ \exists \delta(M) > 0 \ | \ \forall x \in A, \ x > \delta,$
$f(x) > M$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \forall M > 0 \ \exists \delta(M) > 0 \ | \ \forall x \in A, \ x > \delta$
$f(x) < -M$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ | \ \forall x \in A, \ x < \delta$
$|f(x) - L| < \varepsilon$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \forall M > 0 \ \exists \delta(M) > 0 \ | \ \forall x \in A, \ x < \delta$
$f(x) > M$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \forall M > 0 \ \exists \delta(M) > 0 \ | \ \forall x \in A, \ x < \delta$
$f(x) < -M$

Teorema: Se una funzione è derivabile in un punto x_0, la funzione è ivi anche continua

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + c \cdot \Delta x = f(x_0) \qquad \Delta x \to 0 \Rightarrow x \to x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$