RISOLUZIONI EQ. e DISEQ. IRRAZIONALI

$\sqrt[n]{f(x)} = 0 \rightarrow f(x) = 0$

$\sqrt[n]{f(x)} = k \rightarrow n$ dispari $\rightarrow f(x) = k^n$

$\downarrow n$ pari $\rightarrow k > 0 \rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = k^n \end{cases}$

$\downarrow k < 0 \quad \nexists x \in \mathbb{R}$

$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \rightarrow n$ dispari $\rightarrow f(x) = [g(x)]^n$

$\downarrow n$ pari $\rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^n \end{cases}$

$\sqrt[n]{f(x)} \overset{\geq}{>} 0 \rightarrow f(x) \overset{\geq}{>} 0$

$\sqrt[n]{f(x)} \overset{\leq}{<} 0 \rightarrow n$ dispari $f(x) \overset{\leq}{<} 0$

$\downarrow n$ pari $\rightarrow f(x) = 0$ se $\leq$ opp $\nexists x \in \mathbb{R}$

$\sqrt[n]{f(x)} \overset{\geq}{>} k \rightarrow n$ dispari $\rightarrow f(x) \overset{\geq}{>} k^n$

$\downarrow n$ pari $\rightarrow k > 0 \rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \overset{\geq}{>} k^n \end{cases}$

$\downarrow k < 0 \rightarrow f(x) \geq 0$

$\sqrt[n]{f(x)} \overset{\leq}{<} k \rightarrow n$ dispari $\rightarrow f(x) \overset{\leq}{<} k^n$

$\downarrow n$ pari $\rightarrow k < 0 \quad \nexists x \in \mathbb{R}$

$\downarrow k > 0 \rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \overset{\leq}{<} k^n \end{cases}$

$\sqrt[n]{f(x)} \overset{\leq}{<} \sqrt[n]{g(x)} \rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \overset{\leq}{<} g(x) \end{cases}$

$\sqrt[n]{f(x)} \overset{\leq}{<} g(x) \rightarrow n$ dispari $f(x) \overset{\leq}{<} [g(x)]^n$

$\downarrow n$ pari $\rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \overset{\geq}{>} 0 \\ f(x) \overset{\leq}{<} [g(x)]^n \end{cases}$

$\sqrt[n]{f(x)} \overset{\geq}{>} g(x) \rightarrow n$ dispari $\rightarrow f(x) \overset{\geq}{>} [g(x)]^n$

$\downarrow n$ pari $\rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \overset{\geq}{>} [g(x)]^n \end{cases}$

FUNZIONI

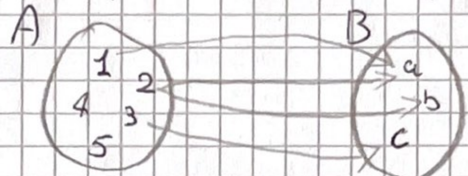
$A: \{1; 2; 3\}$ $B: \{a; b\}$

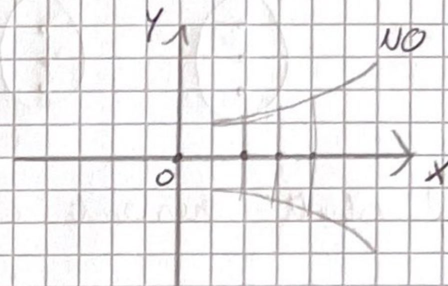
prodotto tra insiemi $A \times B = \{(1,a); (1,b); (2,a); (2,b); (3,a); (3,b)\}$

R : relazione ordinata in $A \times B$

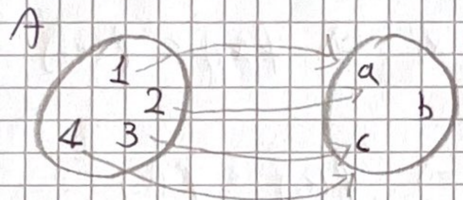
es. $R = \{(1,a), (1,b), (3,a)\}$

es. di funzione $R = \{(1,a), (2,a), (3,b)\}$





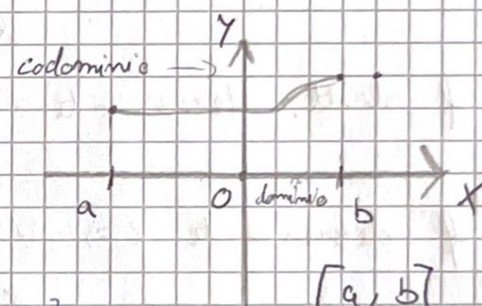
NON È UNA FUNZIONE



È UNA FUNZIONE

$f: A \to B$

$x \to y$ $y = f(x)$

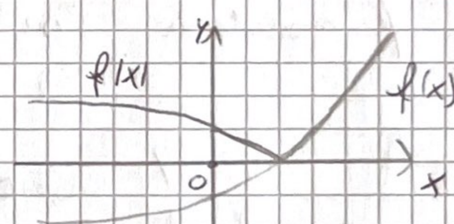


$[a, b]$

$G = \{(x; y) \mid x \in A, y \in B, y = f(x)\}$

$f(x) > 0$ positivo

$f(x) \geq 0$ non negativo

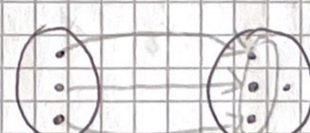


f iniettiva $\forall x_1, x_2 \in D$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

NO

parabola

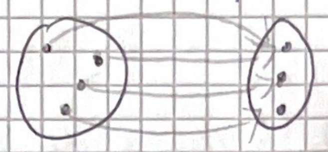
SI



esponenziale

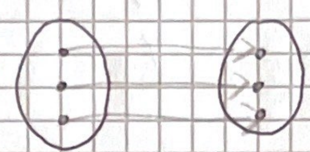
f. suriettiva $\forall y \in C \quad \exists x \in D \mid y = f(x)$

Sì



Con la restrizione del dominio ogni funzione può esserlo

f. biunivoca o biiettiva $\forall y \in C \quad \exists! \, x \in D \mid y = f(x)$



f. strett. crescente $\iff \forall x_1, x_2 \in D$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

f. crescente $\iff \forall x_1, x_2 \in D$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

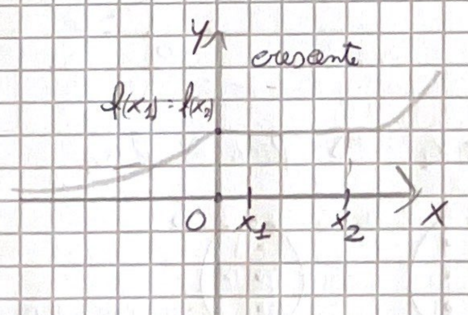
f. strett. decrescente $\iff \forall x_1, x_2 \in D$

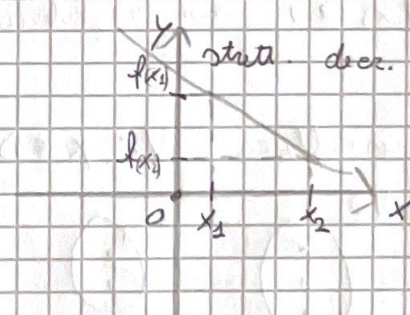
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

f. decrescente $\iff \forall x_1, x_2 \in D$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

f. monotona se e solo se la f., nel dato intervallo, è strettamente crescente/decrescente.





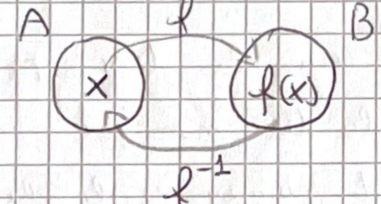
f. periodica $f(x) = f(x+T)$

presa una funzione f di periodo T_1 ed una funzione g di periodo T_2

$$\left.\begin{array}{l} f\pm g\\ f\cdot g \\ f/g\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \begin{cases} 1 & \Rightarrow \quad T_1=T_2=T \\ n \text{ razionale} & \quad mcm\,(T_1,T_2) \\ n \text{ irrazionale} & \quad \text{non è periodica}\end{cases}$$

Nota: se una delle due f. non è periodica, allora $f(x)$ non sarà periodica

f. inversa (esiste solo per f. biunivoche)

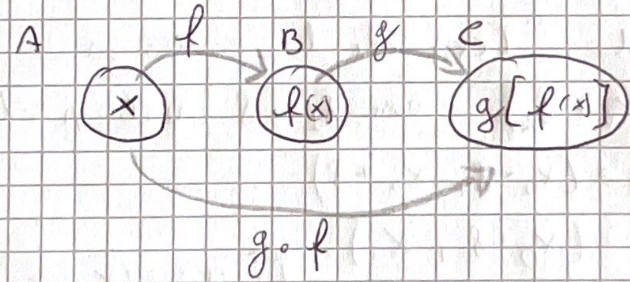


$f: A \to B \quad x \to y$

$f^{-1}: B \to A \quad y \to x$

Graficamente fai simmetria con $y=x$

f composta il codominio di B deve essere almeno restrizione del dominio di C



anticommutativa

$g\circ f \neq f\circ g$

$g\circ f(x) \Rightarrow g[f(x)]$

Nota: $f(x) = \text{SEN } x$ $\quad g(x) = \sqrt{x}$

Le normali operazioni non portano a funzioni periodiche

$f\circ g(x) = \text{SEN}\sqrt{x}$ non periodica

$g\circ f(x) = \sqrt{\text{SEN } x}$ periodica

$A \Rightarrow B$ $\Longleftrightarrow$ cond. necessaria e sufficiente

A implica B

A è la ipotesi, condizione sufficiente per B.

B è la tesi, condizione necessaria di A

Es: essere un ladro è condizione sufficiente per essere un fuorilegge. Se non siamo ladri, potremmo essere assassini, e dunque fuorilegge.

Cond. sufficiente (CS) presupposto (ipotesi) per il quale una affermazione (tesi) sussiste, ma senza il quale la tesi potrebbe comunque sussistere.

Cond. necessaria (CN) ipotesi per cui la tesi potrebbe esistere, ma senza la quale la tesi non può valere.

Un intervallo è un sottoinsieme di numeri reali che corrisponde a una semiretta (int. illimitato) o un segmento (int. limitato), che può essere chiuso o aperto, a seconda che contenga gli estremi.

Dato un numero reale x_0, un intorno completo di x_0 è un qualunque intervallo aperto $I(x_0)$ che lo contenga.

$$I(x_0) = (x_0 - \delta_1 ; x_0 + \delta_2) \quad \text{con } \delta_1 \text{ e } \delta \text{ reali positivi}$$

Intorno circolare $I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta ; x_0 + \delta)$

Intorno sinistro $I_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta ; x_0)$

destro $I_\delta^+(x_0) = (x_0 ; x_0 + \delta)$

Intorno di meno infinito qualsiasi intervallo aperto illimitato inferiormente

Intorno di più infinito qualsiasi int. aperto ill. superiormente

Preso un $x_0 \in A$, sottoinsieme di $\mathbb{R}$, questo è un punto isolato di A se esiste almeno un I di x_0 che non contiene altri elementi di A diversi da x_0. Es: insieme $\mathbb{N}$

Il numero reale è punto di accumulazione di A se ogni intorno completo di x_0 contiene infiniti punti di A

almeno un punto di A distinto da x_0

Es: $A = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

0 è pto di accumulazione. (l'unico)

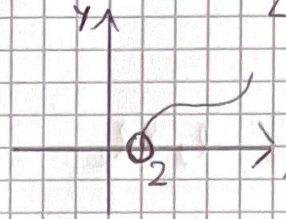
LIMITI

studiamo il comportamento di una funzione nell'intorno di un punto o all'infinito

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists I(x_0) : |f(x) - \ell| < \varepsilon, \; \forall x \in I(x_0), \; x \neq x_0$

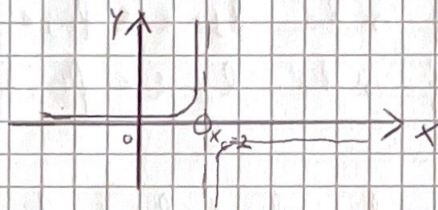
$\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; | \; \forall x \in I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$



- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \iff \forall M > 0 \; \exists \delta > 0 \; | \; \forall x \in I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

si ha $f(x) < -M \vee f(x) > M$

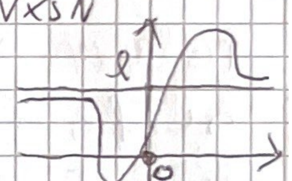


- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists c > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon, \; \forall x > c$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists c > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon, \; \forall x < -c$

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists N > 0 \; | \; \forall x \in I(\infty), \; x < -N \vee x > N$

si ha $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$



- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \; \exists c > 0 : f(x) > M, \; \forall x > c$

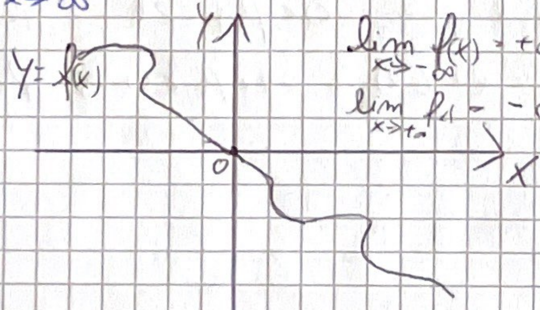
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \; \exists c > 0 : f(x) > M, \; \forall x < -c$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0 \; \exists c > 0 : f(x) < -M, \; \forall x > c$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0 \; \exists c > 0 : f(x) < -M, \; \forall x < -c$

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \iff \forall M > 0 \; \exists N > 0 \; | \; \forall x \in I(\infty), \; f(x) \in I(\infty)$

$x < -M \vee x > M$



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

$\overline{R} = R \cup \{\pm\infty\}$

Se $f(x)$ ha limite finito l per $x \to x_0$, allora tale limite è unico

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow l$ è unico ; $l \in \overline{R}$

DIM.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$ $\quad$ e poniamo $l_1 > l_2$

$\varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_1(x_0) \mid \forall x \in I_1(x_0) - \{x_0\}$ si ha $l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_2(x_0) \mid \forall x \in I_2(x_0) - \{x_0\}$ si ha $l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon$

$I_1(x_0) \cap I_2(x_0) = I(x_0)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I(x_0) \mid \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$ si ha $l_2 - \varepsilon < l_1 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon < l_1 + \varepsilon$

consideriamo $l_1 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon \rightarrow l_1 - \varepsilon < l_2 + \varepsilon$

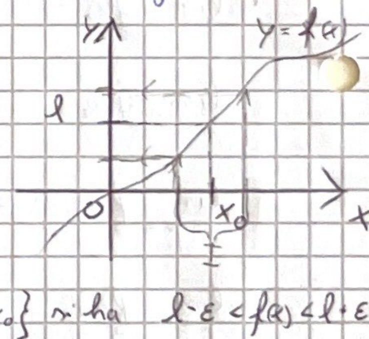
ricaviamo ε: $-2\varepsilon < l_2 - l_1 \rightarrow \varepsilon > \frac{l_1 - l_2}{2}$ contraddice la tesi

TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO

Se $f(x)$ ha limite finito l, diverso da 0, per $x \to x_0$, allora esiste $I(x_0) - \{x_0\}$ in cui $f(x)$ e l hanno stesso segno

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ con $l \neq 0$

se $l > 0$, allora $f(x) > 0$
se $l < 0$, allora $f(x) < 0$
$\Big\} \ \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$



DIM.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists I(x_0) \mid \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$ si ha $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

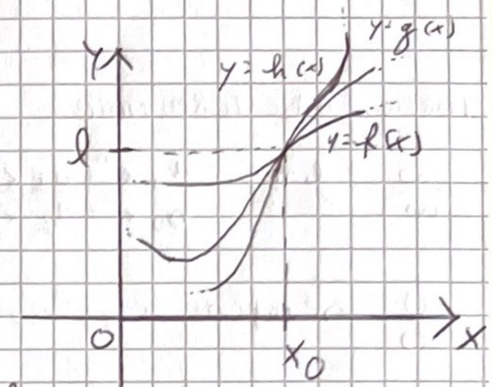
ponendo $\varepsilon = |l| \quad l - |l| < f(x) < l + |l|$

se $l > 0 \Rightarrow l - l < f(x) < l + l \rightarrow 0 < f(x) < 2l \Rightarrow f(x) > 0$

se $l < 0 \Rightarrow l - (-l) < f(x) < l + (-l) \rightarrow 2l < f(x) < 0 \Rightarrow f(x) < 0$

TEOREMA DEL CONFRONTO (o dei due carabinieri)

Siano $h(x)$, $f(x)$ e $g(x)$ tre funzioni definite in uno stesso intorno $H(x_0) - \{x_0\}$. Se risulta, in ogni punto, $f(x) \le g(x) \le h(x)$ e il limite per $x \to x_0$ di $f(x)$ e $h(x)$ è uno stesso numero l, allora anche il $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$



DIM.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_1 \cap H$

$| \ \forall x \in H(x_0) - \{x_0\}$ si ha $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_2(x_0) \cap H(x_0)$

$| \ \forall x \in I_2(x_0) - \{x_0\}$ si ha $l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$

Entrambe valgono $\forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$, dove $I(x_0) = I_1(x_0) \cap I_2(x_0)$

$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \qquad l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$

~~poiché~~ dall'ipotesi: $l - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < l + \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$

otteniamo $l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$, $\forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$

che significa proprio $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$

CALCOLARE LIMITI

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ si risolve per sostituzione

LIMITE DELLA SOMMA

$f(x) \backslash g(x)$	m	$+\infty$	$-\infty$
l	$l+m$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

F. I. $+\infty - \infty$

LIMITE DEL PRODOTTO

$f(x) \backslash g(x)$	$m > 0$	$m < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	$l \cdot m$	$l \cdot m$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$l \cdot m$	$l \cdot m$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

F. I. $0 \cdot \infty$

LIMITE DELLA DIVISIONE

$f(x) \backslash g(x)$	$m \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l \neq 0$	l/m	∞	0	0
0	0	?	0	0
$+\infty$	∞	∞	1	?
$-\infty$	∞	∞	?	1

F. I. $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

LIMITE DELLA POTENZA

$f(x)$	a	$[f(x)]^a$
$+\infty$	$a>0$	$(+\infty)^a = +\infty$
$+\infty$	$a<0$	$(+\infty)^a = 0^+$

$f(x)$ \ $g(x)$	0	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	0^+
0^+	?	0^+	$+\infty$
1	1	?	?
$0<l<1$	1	0^+	$+\infty$
$l>1$	1	$+\infty$	0^+

F.I. ∞^0 0^0 1^∞

FORME INDETERMINATE

$\frac{\infty}{\infty}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + b_m}$ $\begin{cases} n>m & \to \pm\infty \\ n=m & \to \cancel{n/m}\ a_0/b_0 \\ n<m & \to 0 \end{cases}$

$\frac{0}{0}$ scomponi i polinomi, semplifica e sostituisci

$+\infty - \infty$ $\lim_{x\to+\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n) = \lim_{x\to+\infty} a_0x^n$ regola dei segni

$0\cdot\infty$ scomponi, semplifica e sostituisci

0^0, ∞^0 e 1^∞ si risolvono tutte utilizzando la proprietà
$a = e^{\ln a}$, con $a>0$

ASINTOTI

rette da cui $f(x)\to\infty$ ha ~~una~~ la distanza da un punto della retta che tende a 0

A. Verticale $x = x_0 \iff$ vale almeno una delle seguenti:

destro : $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$

sinistro : $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$

bilatero : $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty \wedge \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$

A. Orizzontale $y = l \iff$ vale almeno una delle seguenti:

destro $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$

sinistro $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$

bilatero $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \wedge \lim_{x\to-\infty} f(x) = l$

A. Obliqui $\iff \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (mx+q)] = 0$

verificato $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$; $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$

Una funzione $f(x)$ è un infinitesimo per $x \to \alpha$ quando il limite di $f(x)$ per $x \to \alpha$ è uguale a 0

Una $f(x)$ è un infinito per $x \to \alpha$ quando il limite di $f(x)$ per $x \to \alpha$ è uguale a $+\infty$ o $-\infty$.

Infiniti:

ordini:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l & \to f(x) = g(x) \\ \infty & \to f(x) > g(x) \\ 0 & \to f(x) < g(x) \\ \text{non esiste} & \to \text{non confrontabili} \end{cases}$$

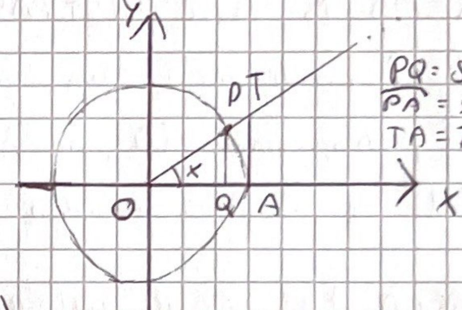
Infinitesimi

$$\begin{cases} l & \to f(x) = g(x) \\ \infty & \to f(x) < g(x) \\ 0 & \to f(x) > g(x) \\ \text{non esiste} & \to \text{non fra confr.} \end{cases}$$

Due infiniti/infinitesimi con rapporto $= 1$, sono equivalenti
asintoticamente uguali

$n^n > n! > a^n > n > \log_a n$

LIMITI NOTEVOLI



$\overline{PQ} = SIN\, x$
$\overset{\frown}{PA} = x$
$TA = TAN\, x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{SIN\, x}{x} = 1$$

DIM.

$$f(-x) = \frac{SIN(-x)}{-x} = \frac{-SIN\, x}{-x} = \frac{SIN\, x}{x} = f(x)$$

poniamo l'angolo x in radianti $\qquad \lim_{x \to 0^\circ} \frac{SIN\, x^\circ}{x^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$

$SIN\, x < x < TAN\, x$

$$1 < \frac{x}{SIN\, x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 > \frac{SIN\, x}{x} > \cos x \text{ da cui } \lim_{x \to 0} \frac{SIN\, x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

DIM.

$$\frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{SIN^2 x}{x(1 + \cos x)} = \text{~~[illegible]~~}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{SIN\, x}{x} \cdot SIN\, x \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \right) = 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

DIM.

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln\left[\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$y = \frac{1}{x} \qquad \ln\left[\lim_{y \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right] = \ln e = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

DIM. $y = e^x - 1 \quad x \to 0$ si ha $y \to 0$

$$x = \ln(1 + y) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^k - 1}{x} = k$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{TAN\, x}{x} = 1$$

FUNZIONI CONTINUE

$f(x)$ è continua in $x_0 \in D \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$f(x)$ è continua in $x_0 \in (a,b) \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$
$f(x_0) = l$

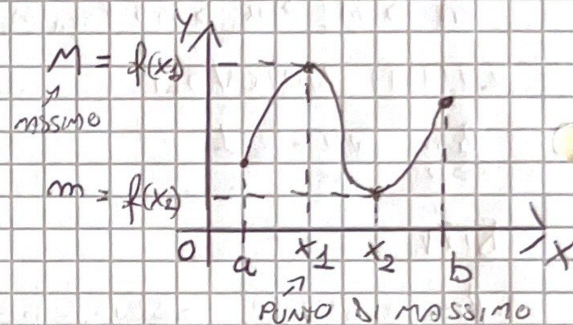
Posto $x = x_0 + h \to \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$

Condizioni:

- $x_0 \in D$ - $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ - $f(x_0) = l$

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Se f è continua in un compatto $[a;b]$, essa ammette massimo assoluto e minimo assoluto



TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI (DI BOLZANO)

Se f è continua in un compatto, essa ammette infiniti valori tra M e m

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

Se $f(x)$ è continua in un compatto $[a;b]$, $\forall x_1, x_2 \in [a;b]$,
$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0 \Rightarrow \exists c\ (a;b)$ tale che $f(c) = 0$

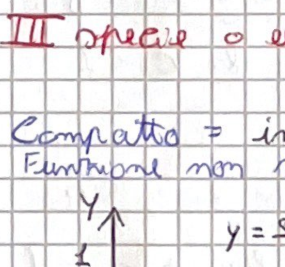
DISCONTINUITÀ punti in cui la f. si interrompe
(anche p. di singolarità)

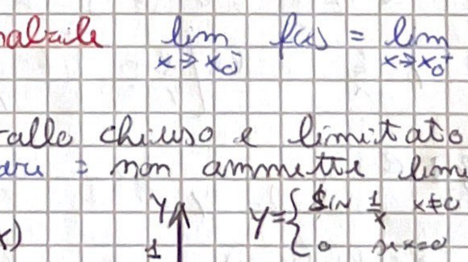
I specie $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

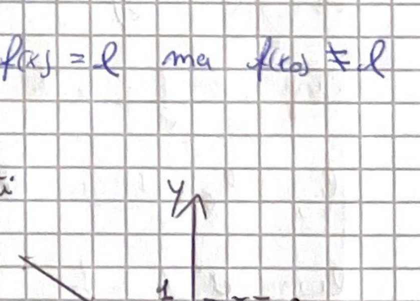
II specie per $x \to x_0$ almeno uno $\nexists$ o è ∞

III specie o eliminabile $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ ma $f(x_0) \neq l$

Compatto = intervallo chiuso e limitato
Funzione non regolari = non ammettono limiti







SUCCESSIONE NUMERICA funzione che associa a ogni numero naturale n un numero reale a_n: $a_n = f(n)$

$f(1) = a_1$; $f(2) = a_2$ ... a_n = termine generale

Elencazione: 0, 3, 6, 9, ...

Espressione analitica: $a_n = 3n$

Ricorsiva o per ricorsione: $\begin{cases} a_0 \\ a_n = f(a_{n-1}) & \text{se } n > 0 \end{cases}$

Crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in N$ — strettamente se $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in N$

Decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \in N$ — strettamente se $a_n > a_{n+1}$ $\forall n \in N$

Costante se $a_n = a_{n+1}$ $\forall n \in N$

Limitata superiormente se $a_n \leq M$ $\forall n \in N$

inferiormente se $a_n \geq m$ $\forall n \in N$

Limitata se $m \leq a_n \leq N$ $\forall n \in N$

Aritmetica	Geometrica
differenza costante tra termini successivi	quoziente costante tra termini successivi
$a_n - a_{n-1} = d$ ← ragione	$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ ← ragione
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	$q > 0$ tutti + o tutti − ; $q < 0$ si alternano
$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $\quad S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Verifica del limite

Poiché il Dominio delle successioni è l'insieme dei numeri naturali gli unici limiti da considerare sono per $n \to +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ divergente positivamente

$\frac{3^n}{10} > M \to n > \log_3 10M$

$\forall M > 0$ $\exists N \in N$ tale che $a_n > M$ $\forall n > N$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ divergente negativamente

$\forall M > 0$ $\exists N \in N$ tale che $a_n < -M$ $\forall n > N$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ convergente

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in N$ | $\forall n > N$ $|a_n - l| < \varepsilon$

$\lim_{n \to +\infty} a_n$ non esiste indeterminata

I vari teoremi e le regole sono tutti validi anche per le successioni

Calcolo del limite di una progressione aritmetica

Poiché $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

se $d = 0 \Rightarrow a_n = a_1$ costante

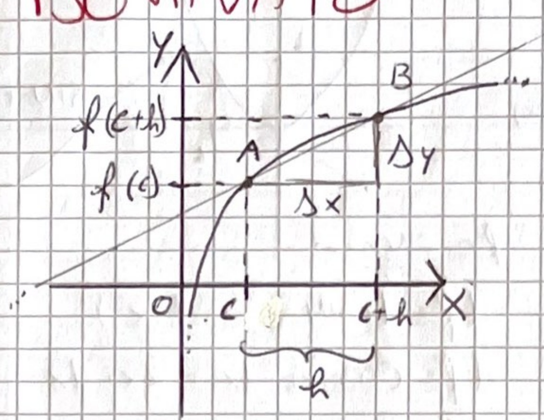
se $d \neq 0 \rightarrow \lim_{n \to +\infty} [a_1 + (n-1) \cdot d] = \begin{cases} +\infty & \text{se } d > 0 \\ -\infty & \text{se } d < 0 \end{cases}$

Progressione geometrica

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

- Convergente $\begin{cases} a_1 & \text{se } q = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < q < 1 \end{cases}$ se $-1 < q \leq 1$
- Divergente $\begin{cases} +\infty & \text{se } a_1 > 0 \\ -\infty & \text{se } a_1 < 0 \end{cases}$ se $q > 1$
- Indeterminata se $q \leq -1$

DERIVATE



Data $y = f(x)$ definita in $[a;b]$ ed un suo punto A, incrementiamone l'ascissa di un $h \neq 0$; c e $c+h$ devono essere interni all'intervallo

$\Delta x = x_B - x_A = h$

$\Delta y = f(c+h) - f(c)$

RAPPORTO INCREMENTALE $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ Coeff. della secante

DERIVATA $f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ Coeff della tangente

Una funzione è derivabile in un punto se la derivate destra e sinistra sono finite e uguale

Punti di non derivabilità:

- Punto angoloso finite e diverse / finito e infinito
- Cuspide infiniti discordi
- Flesso a tangente verticale infiniti concordi

T. Se una funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_0, in quel punto la f è continua

La continuità è condizione necessaria ma non sufficiente per la derivabilità

$D\, k = 0$

$D\, x = 1$

$D\, x^a = a \cdot x^{a-1}$

$D\, \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$D\, \sin(x) = \cos(x)$

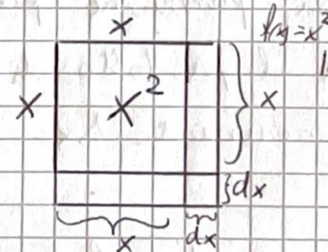
$D\, \cos(x) = -\sin x$

$D\, a^x = a^x \cdot \ln(a)$

$D\, e^x = e^x$

$D\, \log_a x = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$

$D\, \ln x = \frac{1}{x}$

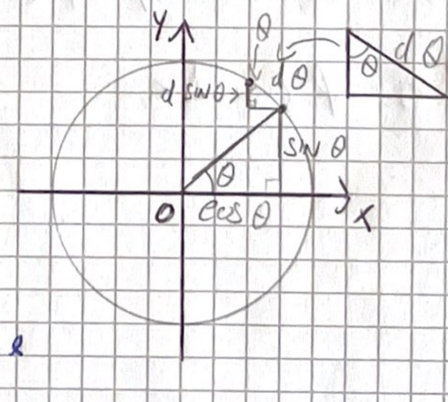


$f(x) = x^2$

INCREMENTO DI AREA

$df = x\,dx + x\,dx + dx^2$

$df = 2x\,dx \Rightarrow \frac{df}{dx} = 2x$



$\frac{d(\sin(\theta))}{d\theta}$

↓

$\frac{\text{CATETO AD}}{\text{IPOTENUSA}}$

↓ $\cos(\theta)$

$D\left[K \cdot f(x)\right] = K \cdot f'(x)$

$D\left[f(x) + g(x)\right] = f'(x) + g'(x)$

$D\left[f(x) \cdot g(x)\right] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$D\,\dfrac{1}{f(x)} = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$

$D\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

$D\,TAN(x) = \dfrac{1}{COS^2(x)}$

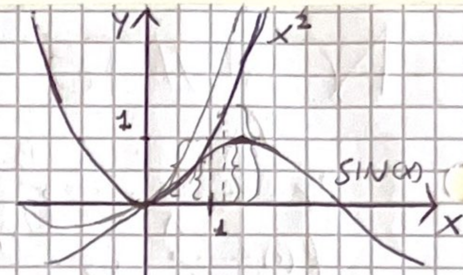
$D\,COT(x) = -\dfrac{1}{SIN^2(x)}$

$D\left[f(g(x))\right] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$D\left[f(x)^{g(x)}\right] = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + \dfrac{g(x)}{f(x)} \cdot f'(x)\right]$

$D\left[f(x)\right]^a = a\left[f(x)\right]^{a-1} \cdot f'(x)$

$D\left[f^{-1}(y)\right] = \dfrac{1}{f'(x)}$



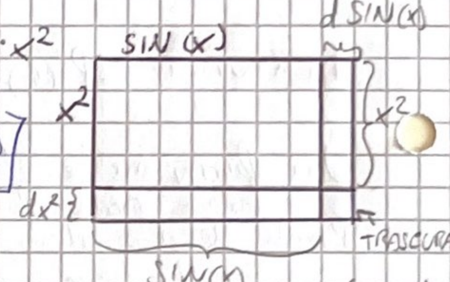
$f(x) = SIN(x) + x^2$

$df = d(SIN(x)) + d(x^2)$

$df = COS(x) \cdot dx + 2x \cdot dx$

$\dfrac{df}{dx} = COS(x) + 2x$

$f(x) = SIN(x) \cdot x^2$



$df = SIN(x) \cdot d(x^2) + x^2 \cdot d(SIN(x))$

LEFT d(RIGHT) + RIGHT d(LEFT)

$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ TANGENTE

$y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ NORMALE

Il differenziale di una funzione $f(x)$, relativo al punto x e all'incremento Δx, è il prodotto della derivata della f. calcolata in x, per l'incremento Δx.

$dy = f'(x) \cdot \Delta x$

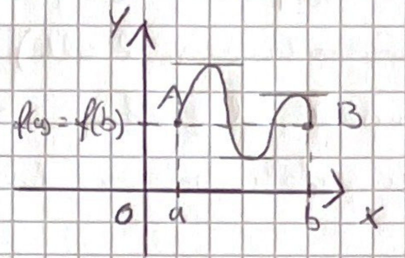
$y = x \Rightarrow dx = \Delta x \Rightarrow dy = f'(x) \cdot dx \Rightarrow f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

$f(x + \Delta x) \simeq f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$

TEOREMI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

ROLLE

$f(x)$ derivabile in $(a;b)$
$f(a) = f(b)$ $\Longrightarrow$ $\exists\, c \in (a;b) : f'(c) = 0$

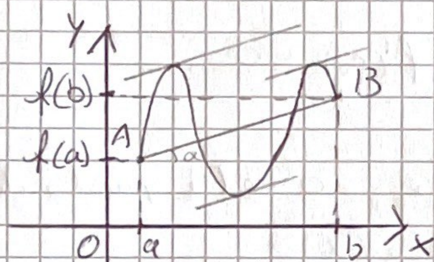


Esiste sempre almeno un punto la cui tangente è parallela all'asse x

Weierstrass è verificato

LAGRANGE

$f(x)$ derivabile in $(a;b)$ $\Longrightarrow$ $\exists\, c \in (a;b) : f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



In c la tangente è parallela alla congiungente di A e B

CAUCHY

$f(x)$ derivabile in $(a;b)$
$g(x)$ =
$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$ $\Longrightarrow$ $\exists\, c \in (a;b) : \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Il rapporto tra gli incrementi è uguale al rapporto delle derivate calcolate in un punto interno all'intervallo

DE L'HOSPITAL

$f(x)$ derivabile in $(a;b)$
$g(x)$ =
$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a;b)$
$f(x_0) = g(x_0) = 0$

$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

x_0 è punto di massimo assoluto $\iff \forall x \in D \quad f(x) \le f(x_0)$

x_0 è punto di minimo assoluto $\iff \forall x \in D \quad f(x) \ge f(x_0)$

x_0 è punto di massimo relativo $\iff \exists I_{x_0} \mid \forall x \in I_{x_0} \quad f(x) \le f(x_0)$

x_0 è punto di minimo relativo $\iff \exists I_{x_0} \mid \forall x \in I_{x_0} \quad f(x) \ge f(x_0)$

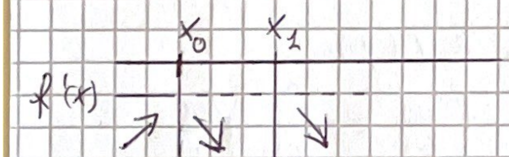
Una funzione $f(x)$ è convessa (concavità verso l'alto) in x_0 se le immagini della retta secante al grafico sono maggiori di $f(x_0)$. Viceversa, per valori minori la funzione è concava

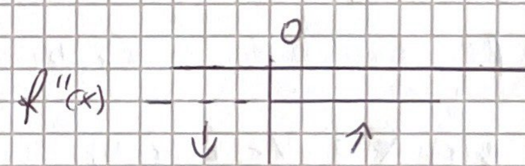
FERMAT esprime una condizione necessaria ma non sufficiente per l'esistenza di estremanti relativi

$f(x)$ derivabile in $(a;b)$
$x_0 \in (a;b)$ $\implies$ $f'(x_0) = 0$
x_0 punto estremante

x_0 è punto stazionario se $f'(x_0) = 0$ ed è punto di flesso se il grafico $f(x)$ cambia concavità

RICERCA CON DERIVATE





crescente — decrescente
x_0 MAX REL
x_1 flesso stazion. discendente

concava — convessa
flesso ascendente

sostituisci x_0 in $f'(x)$
$f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ stazion.
$f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ obl.

DERIVATE SUCCESSIVE

Trova gli zeri di $f'(x)$ e sostituiscili fino a trovare valori diversi da zero
Con $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots$

Pari se $f(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ max rel
se $f(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ min rel

Dispari se $f(x_0) < 0 \rightarrow x_0$ flesso discendente (stazion.)
se $f(x_0) > 0 \rightarrow x_0$ flesso ascendente (stazion.)

Quando $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ dispari ha flessi obliqui
pari concavità

IPERBOLE

Assegnati due punti F_1 ed F_2 detti fuochi, si chiama iperbole il luogo dei punti P che hanno costante la differenza delle distanze da F_1 ed F_2 $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = \text{costante}$

Fuochi su asse x

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ canonica/normale o riferita ai propri assi

vertici reali $A_1(a;0)$ $A_2(-a;0)$ A_1A_2 = asse trasverso

asintoti $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$

fuochi $F_1(\sqrt{a^2+b^2};0)$ $F_2(-\sqrt{a^2+b^2};0)$

eccentricità $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ al suo diminuire i rami si restringono

Fuochi su asse y

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

vertici reali $B_1(0;-b)$ e $B_2(0;b)$

asintoti $y = \frac{b}{a}x$ $y = -\frac{b}{a}x$

fuochi $F_1(0;-\sqrt{b^2+a^2})$ $F_2(0;\sqrt{b^2+a^2})$

eccentricità $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}$

Traslazione

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

$a'x^2+b'y^2+c'x+d'y+e'=0$

$O'(p;q) \to \left(-\frac{c'}{2a'}; -\frac{d'}{2b'}\right)$

Equilatera $a = b$

$x^2-y^2=a^2$ su asse x e $x^2-y^2=-a^2$ su asse y

asintoti $y = x$ e $y = -x$ eccentricità $e = \sqrt{2}$

È possibile considerare gli asintoti come nuovo sistema di riferimento ottenendo un'iperbole eq. riferita agli asintoti con equazione: $xy = k$

dove k vale $\frac{a^2}{2}$ ed il segno indica i quadranti d'appartenenza

Traslando quest'ultima con un vettore si ottiene la funzione omografica di formula $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $c \neq 0$

asint. $y = \frac{a}{c}$ e $x = -\frac{d}{c}$ centro $C\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ $ad-bc \neq 0$