Esercizio 14

venerdì 7 maggio 2021 16:30

- Una scatola contiene m schede bianche e k azzurre
- Una scatola contiene k schede bianche e m azzurre
- Una scatola contiene $m+k$ schede bianche e $m+k$ azzurre

- Si estrae una delle schede delle scatole:

1) $B = \{$ la scheda estratta è bianca $\}$
   $A = \{$ la scheda estratta è azzurra $\}$
   $P(A)$ e $P(B)$?

2) Sapendo che è stata estratta una biglia bianca
   con che probabilità viene dalla biglia i-esima. tale che $i = \{1, 2, 3\}$

$E_i = \{$ la scheda è estratta dalla scatola i-esima $\}$ tale che $i = \{1, 2, 3\}$

$P(E_1) = \frac{1}{3}$

$P(E_2) = \frac{1}{3}$

$P(E_3) = \frac{1}{3}$

$P(E_2) = \frac{1}{3}$

$P(E_3) = \frac{1}{3}$

(a) $P(B|E_1) = P(B)$ $\rightarrow$ m Schede Bianche

k Schede Azzurre

$\Omega = m+k$

$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{m}{m+k}$

(b) $P(B|E_2) = P(B)$ $\rightarrow$ k Schede Bianche

m Schede Azzurre

$\Omega = m+k$

$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{k}{m+k}$

(c) $P(B|E_3) = P(B)$ $\rightarrow$ $k+m$ Schede Bianche

$m+k$ Schede Azzurre

$\Omega = 2k+2m$

$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{m+k}{2k+2m}$

Legge delle Alternative

(1) $P(B) = P(B|E_1) \cdot P(E_1) + P(B|E_2) \cdot P(E_2) + P(B|E_3) \cdot P(E_3)$

$$= \frac{m}{m+k} \cdot \frac{1}{3} + \frac{k}{m+k} \cdot \frac{1}{3} + \frac{m+k}{2k+2m} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{m}{m+k} + \frac{k}{m+k} + \frac{m+k}{2k+2m}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2m+2k+m+k}{2k+2m}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3m+3k}{2m+2k}$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}(m+k)}{2(m+k)}$$

$$= \frac{\cancel{m+k}}{2 \cdot (\cancel{m+k})}$$

$$= \frac{1}{2}$$

ⓐ $P(A|E_1) = P(A)$ $\rightarrow$ m Schede Bianche

k Schede Azzurre

$\Omega = m+k$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{m+k}$

ⓑ $P(A|E_2) = P(A)$ $\rightarrow$ k Schede Bianche

m Schede Azzurre

$\Omega = m+k$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{m+k}$

ⓒ $P(A|E_3) = P(A)$ $\rightarrow$ k+m Schede Bianche

m+k Schede Azzurre

$\Omega = 2k+2m$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m+k}{2(k+m)}$

1.2 $P(A) = P(A|E_1)\cdot P(E_1) + P(A|E_2)\cdot P(E_2) + P(A|E_3)\cdot P(E_3)$

$$= \frac{m}{m+k}\cdot\frac{1}{3} + \frac{k}{m+k}\cdot\frac{1}{3} + \frac{m+k}{2(m+k)}\cdot\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2m+2k+m+k}{2k+2m}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3m+3k}{2m+2k}$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}}\,\frac{\cancel{3}(m+k)}{2(m+k)}$$

$$= \frac{\cancel{m+k}}{2(\cancel{m+k})}$$

$$= \frac{1}{2}$$

② $P(E_i | B)$ Teorema di Bayes

ⓐ $$P(E_1|B) = \frac{P(B|E_1)\cdot P(E_1)}{P(B)} = \frac{\frac{m}{m+k}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{m}{m+k}\,\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1} = \frac{2m}{3m+3k}$$

ⓑ $$P(E_2|B) = \frac{P(B|E_2)\cdot P(E_2)}{P(B)} = \frac{\frac{k}{m+k}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{k}{m+k}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1} = \frac{2k}{3m+3k}$$

ⓒ $$P(E_3/B) = \frac{P(B/E_3)\cdot P(E_3)}{P(B)} = \frac{\frac{m+k}{2(m+k)}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\cancel{m+k}}{\cancel{2}\cancel{(m+k)}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\cancel{2}}{1} = \frac{1}{3}$$