21/05/21

Programmazione dinamica (III parte)

Progettazione di Algoritmi a.a. 2020-21

Matricole congrue a 1

Docente: Annalisa De Bonis

Problema dello zaino

- Input
  - n oggetti ed uno zaino
  - L'oggetto i pesa $w_i > 0$ chili e ha valore $v_i > 0$.
  - Lo zaino puo` trasportare fino a W chili.
- Obiettivo: riempire lo zaino in modo da massimizzare il valore totale degli oggetti inseriti senza eccedere il limite W.
- Esempio: { 3, 4 } ha valore 40.

W = 11

Oggetto	Valore	Peso
1	1	1
2	6	2
3	18	5
4	22	6
5	28	7

Greedy: seleziona ad ogni passo l'oggetto con il rapporto v_i/w_i piu` grande in modo che il peso totale dei pesi selezionati non superi w

Esempio: soluzione greedy { 5, 2, 1 } ha valore = 35 $\Rightarrow$ greedy non e` ottimo

Problema dello zaino

Input

- n oggetti: l'oggetto i pesa $w_i > 0$ chili e ha valore $v_i > 0$
- limite W

Obiettivo: selezionare un sottoinsieme S degli n oggetti in modo

- da rispettare il vincolo $\sum_{i\in S} w_i \leq W$, cioe` che la somma dei pesi degli oggetti selezionati sia minore di W
- e da massimizzare $\sum_{i\in S} v_i$

Corrisponde al problema subset sums quanto $v_i=w_i$ per ogni i.

Problema dello zaino: estensione approccio usato per Subset Sums

Def. OPT(i, w) = valore della soluzione ottima per gli oggetti 1, …, i con limite di peso totale w.

- Caso 1: La soluzione ottima per i primi i oggetti, con limite di utilizzo w non include l'oggetto i.
  - La soluzione ottima e` in questo caso la soluzione ottima per { 1, 2, …, i-1 } con limite di utilizzo w → in questo caso OPT(i, w) = OPT(i-1, w)
- Caso 2: La soluzione ottima per i primi i oggetti, con limite di utilizzo w include l'oggetto i.
  - La soluzione ottima include la soluzione ottima per { 1, 2, …, i-1 } con limite di utilizzo w- w_i → in questo caso OPT(i, w) = v_i +OPT(i-1, w-w_i)

La soluzione ottima per i primi i oggetti con limite di utilizzo w va ricercata tra le soluzioni ottime per i due casi. Questo pero` se i>0 e w_i <w.

Se i=0, banalmente si ha OPT(i,w)=0. Se w_i >w, e` possibile solo il caso 1 perche' i non puo` far parte della soluzione in quanto ha peso maggiore del peso trasportabile.

$$OPT(i,w) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \\ OPT(i-1,w) & \text{if } w_i > w \\ \max\{ OPT(i-1,w),\ \ v_i + OPT(i-1,w-w_i)\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

21/05/21

Problema dello zaino: algoritmo

Knapsack (n,w_1,…,w_n, v_1,…,v_n ,W)

```
for w = 0 to W
   M[0, w] = 0

for i = 1 to n
   for w = 0 to W
      if (wi > w)
         M[i, w] = M[i-1, w]
      else
         M[i, w] = max {M[i-1, w], vi + M[i-1, w-wi ]}

return M[n, W]
```


Problema dello zaino: tempo di esecuzione algoritmo

- Tempo di esecuzione. Θ(n W).

- Non e` polinomiale nella dimensione dell'input!
- "Pseudo-polinomiale": L'algoritmo e` efficiente quando W ha un valore ragionevolmente piccolo.

- Se volessimo produrre la soluzione ottima, potremmo scrivere un algoritmo simile a quelli visti prima in cui la soluzione ottima si ricostruisce andando a ritroso nella matrice M. Tempo O(n).

- Esercizio: Scrivere lo pseudocodice dell'algoritmo che produce la soluzione ottima per un'istanza del problema dello zaino.

- Esercizio: Scrivere la versione ricorsiva dell'algoritmo di programmazione dinamica per il problema dello zaino.

Algoritmo per il problema della zaino: esempio

W →

n ↓

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ϕ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
{ 1 }	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
{ 1, 2 }	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
{ 1, 2, 3 }	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
{ 1, 2, 3, 4 }	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
{ 1, 2, 3, 4, 5 }	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	40

OPT(5,11) = OPT(4,11) = v_4+OPT(3,11-w_4) = v_4+OPT(3,5) = v_4+v_3+OPT(2,0) = v_4+v_3+OPT(1,0)
= v_4+v_3+OPT(0,0) = 22+18+0 = 40

Soluzione ottima : { 4, 3 }
Valore soluzione ottima = 22 + 18 = 40

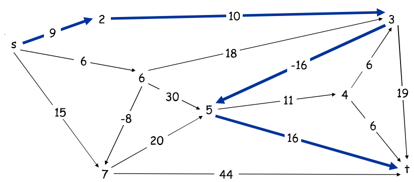
W = 11

Oggetto	Valore	Peso
1	1	1
2	6	2
3	18	5
4	22	6
5	28	7

Cammini minimi

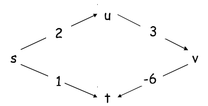
- Problema del percorso piu` corto. Dato un grafo direzionato G = (V, E), con pesi degli archi $c_{vw}$, trovare il percorso piu` corto da s a t.

- Esempio. I nodi rappresentano agenti finanziari e c_{vw} e` il costo (eventualmente <0) di una transazione che consiste nel comprare dall'agente v e vendere immediatamente a w.

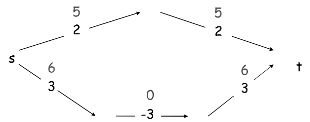


Cammini minimi in presenza di archi con costo negativo

- Dijkstra. Puo` fallire se ci sono archi di costo negativo

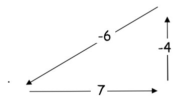


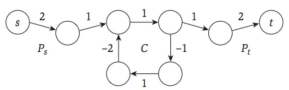
- Re-weighting. Aggiungere una costante positiva ai pesi degli archi potrebbe non funzionare.



Cammini minimi in presenza di archi con costo negativo

- Ciclo di costo negativo.



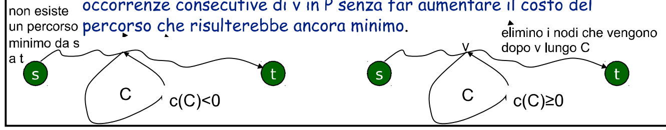


Cammini minimi in presenza di archi con costo negativo

Osservazione. Se qualche percorso da s a t contiene un ciclo di costo negativo allora non esiste un percorso minimo da s a t. In caso contrario esiste un percorso minimo da s a t che e` semplice (nessun nodo compare due volte sul percorso).

- Dim. Se esiste un percorso P da s a t con un ciclo C di costo negativo –c allora gni volta che attraversiamo il ciclo riduciamo il costo del percorso di un valore pari a c. Cio` rende impossibile definire il costo del percorso minimo perche` dato un percorso riusciamo sempre a trovarne uno di costo minore attraversando il ciclo C (osservazione questa che avevamo gia` fatto in precedenti lezioni).

Supponiamo ora che nessun percorso da s a t contenga cicli negativi e sia P un percorso minimo da s a t (ovviamente P e` privo di cicli di costo negativo). Supponiamo che un certo vertice v appaia almeno due volte in P. C'e` quindi in P un ciclo che contiene v e che per ipotesi deve avere costo **non negativo**. In questo caso potremmo rimuovere le porzioni di P tra due occorrenze consecutive di v in P senza far aumentare il costo del percorso che risulterebbe ancora minimo.



Cammini minimi: Programmazione dinamica

Def. OPT(i, v) = lunghezza del cammino piu` corto P per andare da v a t che consiste di al piu` i archi

Per computare OPT(i,v) quando i>0 e v≠t, osserviamo che

- il percorso ottimo P deve contenere almeno un arco (che ha come origine v).
- se (v, w) e` il primo arco di P allora P e` formato da (v, w) e dal percorso piu` corto da w a t di al piu` i-1 archi

$$OPT(i,v) = \min_{(v,w)\in E} \left\{ OPT(i-1,\ w) + c_{vw} \right\}$$

$$\text{OPT(i,v)}=\begin{cases} 0 & \text{se } v=t \\ \infty & \text{se } i=0 \text{ e } v\neq t \\ \min_{(v,w)\in E}\{OPT(i-1,w)+c_{vw}\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Cammini minimi: Programmazione dinamica

$$\text{OPT(i,v)}=\begin{cases}0 & \text{se v=t}\\ \infty & \text{se } i=0 \text{ e } v\neq t\\ \min_{(v,w)\in E}\{OPT(i-1,w)+c_{vw}\} & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Dove si usa l'osservazione di prima sul fatto che in assenza di cicli negativi il percorso minimo e` semplice?

Ecco dove….

Affermazione. Se non ci sono cicli di costo negativo allora OPT(n-1, v) = lunghezza del percorso piu` corto da v a t.

Dim. Dall'osservazione precedente se non ci sono cicli negativi allora esiste un percorso di costo minimo da v a t che e` semplice e di conseguenza contiene al piu` n-1 archi

Progettazione di Algoritmi A.A. 2020-21
A. De Bonis

57

57

Algoritmo di Bellman-Ford per i cammini minimi

```
Shortest-Path(G, t) {
   foreach node v ∈ V
      M[0, v] ← ∞
      S[0, v] ← Ø // Ø  indica che non ci sono percorsi
                  //da v a t di al piu` 0 archi
   for i = 0 to n-1
      M[i, t] ← 0
      S[i, t] ← t  //t indica che non ci sono successori
                    //lungo il percorso ottimo da t a t
   for i = 1 to n-1
      foreach node v ∈ V
         M[i, v] ← ∞, S[i, v] ← Ø
         foreach edge (v, w) ∈ E
            if M[i-1, w] + c_vw < M[i, v]
                M[i, v] ← M[i-1, w] + c_vw
                S[i,v] ← w  //serve per ricostruire i
                              //percorsi minimi verso t
}
```

- Assumiamo che per ogni v esista un percorso da v a t → n=O(m)
- Analisi. Tempo $\Theta(mn)$, spazio $\Theta(n^2)$.
- S[i,v]: Memorizza il successore di v lungo il percoso minimo per andare da v a t attraversando al piu` i archi

Progettazione di Algoritmi A.A. 2020-21
A. De Bonis

58

58