17/05/21

Programmazione dinamica (I parte)

Progettazione di Algoritmi a.a. 2020-21

Matricole congrue a 1

Docente: Annalisa De Bonis

1

1

Paradigmi della Progettazione degli Algoritmi

- Greedy. Costruisci una soluzione in modo incrementale, ottimizzando (in modo miope) un certo criterio locale.
- Divide-and-conquer. Suddividi il problema in sottoproblemi, risolvi ciascun sottoproblema indipendentemente e combina le soluzioni dei sottoproblemi per formare la soluzione del problema di partenza.
- Programmazione dinamica. Suddividi il problema in un insieme di sottoproblemi che si sovrappongono, cioè che hanno dei sottoproblemi in comune. Costruisci le soluzioni a sottoproblemi via via sempre più grandi **in modo da computare la soluzione di un dato sottoproblema un'unica volta**.
- Nel divide and conquer, se due sottoproblemi condividono uno stesso sottoproblema quest'ultimo viene risolto più volte.

2

Storia della programmazione dinamica

- Bellman. Negli anni '50 è stato il pionere nello studio sistematico della programmazione dinamica.
- Etimologia.
  - Programmazione dinamica = pianificazione nel tempo.

3

Applicazioni della programmazione dinamica

Aree.

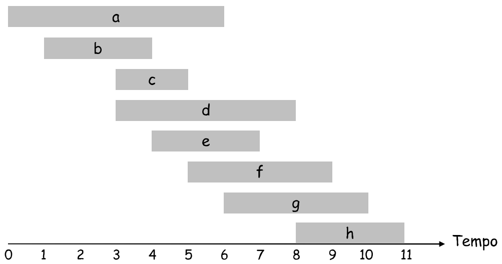
- Bioinformatica.
- Teoria dell'informazione
- Ricerca operativa
- Informatica teorica
- Computer graphics
- Sistemi di Intelligenza Artificiale

4

17/05/21

Interval Scheduling Pesato

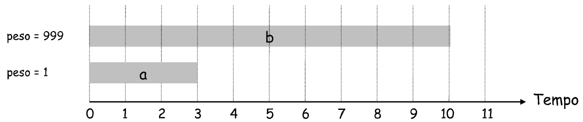
Interval scheduling con pesi
- Job j: comincia al tempo s_j, finisce al tempo f_j, ha associato un valore (peso) v_j .
- Due job sono compatibili se non si sovrappongono
- Obiettivo: trovare il sottoinsieme di job compatibili con il massimo peso totale .



Interval scheduling senza pesi

- L'algoritmo greedy Earliest Finish Time funziona quando tutti i pesi sono uguali ad 1.
- Considera i job in ordine non decrescente dei tempi di fine
- Seleziona un job se è compatibile con quelli già selezionati

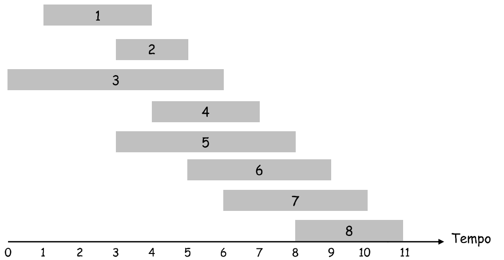
Osservazione. L'algoritmo greedy Earliest Finish Time può fallire se i pesi dei job sono valori arbitrari.



Interval Scheduling Pesato

Notazione. Etichettiamo i job in base al tempo di fine :
$f_1 \le f_2 \le \ldots \le f_n$.
Def. p(j) = il più grande indice i < j tale che i è compatibile con j

Ex: p(8) = 5, p(7) = 3, p(2) = 0.



Interval Scheduling Pesato: soluzione basata sulla PD

Notazione. OPT(j) = valore della soluzione ottima per l'istanza del problema dell'Interval Scheduling Pesato costituita dalle j richieste con i j tempi di fine più piccoli
Si possono verificare due casi:
- Caso 1: La soluzione ottima per i j job con i tempi di fine piu` piccoli include il job j.
  - In questo caso la soluzione non può usare i job incompatibili { p(j) + 1, p(j) + 2, ..., j - 1 }
  - Deve includere la soluzione ottima al problema dell'Interval Scheduling Pesato **per** i job 1, 2, ..., p(j)
- Caso 2: La soluzione ottima per i j job con i tempi di fine piu` piccoli non contiene il job j.
  - In questo caso la soluzione deve includere la soluzione ottima al problema dell'Interval Scheduling Pesato per i job 1, 2, ..., j-1

$$OPT(j) = \begin{cases} 0 & \text{if } j = 0 \\ \max\left\{ v_j + OPT(p(j)),\ OPT(j-1) \right\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Interval Scheduling Pesato: soluzione basata sulla PD

N.B.

- Quando viene detto che la soluzione per i primi j job con il tempo di fine piu` piccolo deve includere la soluzione ottima per i job 1, 2, …, p(j) (nel caso 1) o quella per i job 1, 2, …, j-1 (nel caso 2), NON vuol dire che la soluzione deve includere necessariamente tutti i job 1, 2, …, p(j) nel caso 1 e i job 1,2,…,j-1, nel caso 2.
- Quando si deriva la formula di ricorrenza per calcolare il valore della soluzione ottima di un problema non si deve MAI
  - fare riferimento agli algoritmi usati per calcolare il valore della soluzione ottima: sono gli algoritmi ad usare la formula, non è la formula ad essere costruita sulla base dell'algoritmo!
  - ragionare in modo iterativo nella derivazione della formula

Interval Scheduling Pesato: algoritmo ricorsivo **inefficiente**

- Inizialmente Compute-Opt viene invocato con j=n

```
Input: n, s1,…,sn , f1,…,fn , v1,…,vn

Sort jobs by finish times so that f1 ≤ f2 ≤ ... ≤ fn.

Compute p(1), p(2), …, p(n)

Compute-Opt(j) {
   if (j = 0)
      return 0
   else
      return max(vj + Compute-Opt(p(j)), Compute-Opt(j-1))
}
```


Interval Scheduling Pesato: algoritmo ricorsivo inefficiente

L'algoritmo computa correttamente OPT(j)

Dim per induzione.

- ***Caso base*** j=0. Il valore restituito è correttamente 0.
- **Passo Induttivo.** Consideriamo un certo j>0 e supponiamo (ipotesi induttiva) che l'algoritmo produca il valore corretto di OPT(i) per ogni i<j.
- Il valore computato per j dall'algoritmo è

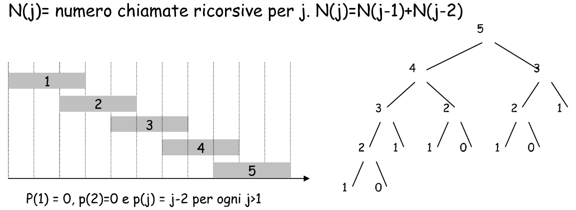
`Compute-Opt(j)= max(vj + Compute-Opt(p(j),Compute-Opt(j-1))`

- Siccome per ipotesi induttiva
- `Compute-Opt(p(j))= OPT(p(j))` **e**
- `Compute-Opt(j-1)= OPT(j-1)`

- allora ne consegue che
- `Compute-Opt(j)= max(vj + OPT(p(j)), OPT(j-1))= OPT(j)`

Interval Scheduling Pesato: algoritmo ricorsivo inefficiente

- Osservazione. L'algoritmo ricorsivo corrisponde ad un algoritmo di forza bruta perchè ha tempo esponenziale
  - Ciò è dovuto al fatto che
    - ✓ Un gran numero di sottoproblemi sono condivisi da più sottoproblemi
    - ✓ L'algoritmo computa più volte la soluzione ad uno stesso sottoproblema.
- **Esempio**. In questo esempio il numero di chiamate ricorsive cresce come i numeri di Fibonacci.
- N(j)= numero chiamate ricorsive per j. N(j)=N(j-1)+N(j-2)



P(1) = 0, p(2)=0 e p(j) = j-2 per ogni j>1

Interval Scheduling Pesato: Memoization

- Osservazione: l'algoritmo ricorsivo precedente computa la soluzione di n+1 sottoproblemi soltanto OPT(0),…,OPT(n). Il motivo dell'inefficienza dell'algoritmo è dovuto al fatto che computa la soluzione ad uno stesso problema più volte.

- Memoization. Consiste nell'immagazzinare le soluzioni di ciascun sottoproblema in un'area di memoria accessibile globalmente.

```
Input: n, s1,…,sn , f1,…,fn , v1,…,vn

Sort jobs by finish times so that f1 ≤ f2 ≤ ... ≤ fn.
Compute p(1), p(2), …, p(n)

for j = 1 to n
   M[j] = empty      ← array globale

M-Compute-Opt(j) {
   if j = 0 Return 0
   if (M[j] is empty)
      M[j] = max(vj + M-Compute-Opt(p(j)), M-Compute-Opt(j-1))
   return M[j]
}
```

13

13

Interval Scheduling pesato: Tempo di Esecuzione

Affermazione. La versione "memoized" dell'algoritmo ha tempo di esecuzione $O(n \log n)$.

Fase di inizializzazione: $O(n \log n)$

- Ordinamento in base ai tempi di fine: $O(n \log n)$.
- Computazione dei valori p(·): $O(n)$ dopo aver ordinato i job (rispetto ai tempi di inizio e di fine). Siano $a_1,\dots,a_n$ i job ordinati rispetto ai tempi di inizio e $b_1,\dots,b_n$ i job ordinati rispetto ai tempi di fine. (si noti che il job con l'i-esimo tempo di inizio non corrisponde necessariamente a quello con l'i-esimo tempo di fine)
  - Si confronta il tempo di fine di b_1 con i tempi di inizio di $a_1,a_2,a_3\dots$, fino a che non si incontra un job a_j con tempo di inizio $\geq f_1$. Si pone $p'(1)=p'(2)=\dots=p'(j-1)=0$. Si confronta il tempo di fine di b_2 con i tempi di inizio di $a_j,a_{j+1},a_{j+2}\dots$, fino a che non si incontra un job a_k con tempo di inizio $\geq f_2$. Si pone $p'(j)=p'(j+1)=p'(j+2)=\dots=p'(k-1)=1$. Si confronta il tempo di fine di b_3 con i tempi di inizio di $a_k,a_{k+1},a_{k+2}\dots$, fino a che non si incontra un job a_m con tempo di inizio $\geq f_3$. Si pone $p'(k)=p'(k+1)=p'(k+2)=\dots=p'(m-1)=2$, e cosi` via.

Continua nel slide successiva

Progettazione di Algoritmi A.A. 2020-21
A. De Bonis

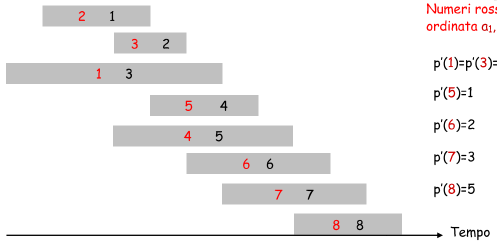
14

14

Interval Scheduling pesato: Tempo di Esecuzione

- Si noti che in p'(j), j e` l'indice del job nella sequenza $a_1,\dots,a_n$.
- Per ottenere il corrispondente valore p(r) basta sostituire a j l'indice del job nella sequenza $b_1,\dots,b_n$. L'associazione tra il job e la sua posizione nella sequenza $a_1,\dots,a_n$ e quella nella sequenza $b_1,\dots,b_n$ puo` essere creata quando si ordinano i job.

Numeri neri= indici nella sequenza ordinata $b_1,\dots,b_n$
Numeri rossi= indici nella sequenza ordinata $a_1,\dots,a_n$



p'(1)=p'(3)=p'(4)=0 p(3)=p(2)=p(5)=0
p'(5)=1 p(4)=1
p'(6)=2 p(6)=2
p'(7)=3 p(7)=3
p'(8)=5 p(8)=5

Continua nel slide successiva

Progettazione di Algoritmi A.A. 2020-21
A. De Bonis

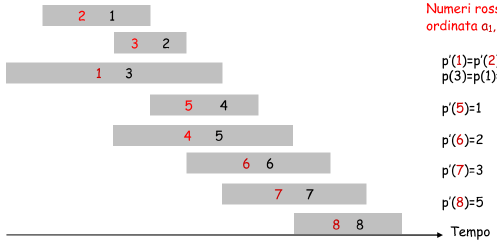
15

15

Interval Scheduling pesato: Tempo di Esecuzione

- Il tempo per calcolare i valori p(1),…,p(n) (una volta ottenuti i due ordinamenti $a_1,\dots,a_n$ e $b_1,\dots,b_n$) e` $O(n)$ perche` dopo ogni confronto l'algoritmo passa a considerare o il prossimo job nell'ordinamento $b_1,\dots,b_n$ (nel caso di confronto tra due job compatibili) o il prossimo job nell'ordinamento $a_1,\dots,a_n$ (nel caso di confronto tra due job incompatibili).

Numeri neri= indici nella sequenza ordinata $b_1,\dots,b_n$
Numeri rossi= indici nella sequenza ordinata $a_1,\dots,a_n$



p'(1)=p'(2)=p'(3)=p'(4)=0
p(3)=p(1)=p(2)=p(5)=0
p'(5)=1 p(4)=1
p'(6)=2 p(6)=2
p'(7)=3 p(7)=3
p'(8)=5 p(8)=5

Continua nel slide successiva

Progettazione di Algoritmi A.A. 2020-21
A. De Bonis

16

16

17/05/21

Interval Scheduling pesato: Tempo di Esecuzione

Affermazione: `M-Compute-Opt(n)` richiede O(n)

Dim.

- `M-Compute-Opt(j)`: escludendo il tempo per le chiamate ricorsive, ciascuna invocazione prende tempo O(1) e fa una delle seguenti cose
  - (i) restituisce il valore esistente di `M[j]`
  - (ii) riempie l'entrata `M[j]` facendo due chiamate ricorsive

- Per stimare il tempo di esecuzione di `M-Compute-Opt(j)` dobbiamo stimare il numero totale di chiamate ricorsive innescate da `M-Compute-Opt(j)`
  - Abbiamo bisogno di una misura di come progredisce l'algoritmo
  - Misura di progressione Φ = # numero di entrate non vuote di `M[]`.
  - inizialmente $\Phi = 0$ e durante l'esecuzione si ha sempre $\Phi \leq n$.
  - per far crescere Φ di 1 occorrono al piu` 2 chiamate ricorsive.
  - quindi per far andare Φ da 0 a j, occorrono al piu` 2j chiamate ricorsive per un tempo totale di O(j)

- Il tempo di esecuzione di `M-Compute-Opt(n)` e` quindi O(n).

N.B. O(n), una volta ordinati i job in base ai valori di inizio.

Memoization nei linguaggi di programmazione

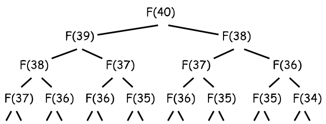
- Automatica. Molti linguaggi di programmazione funzionale, quali il Lisp, prevedono un meccanismo per rendere automatica la memoization

```
(defun F (n)
  (if
    (<= n 1)
    n
    (+ (F (- n 1)) (F (- n 2)))))
```

Lisp (efficiente)

```
static int F(int n) {
   if (n <= 1) return n;
   else return F(n-1) + F(n-2);
}
```

Java (esponenziale



Interval Scheduling Pesato: Trovare una soluzione

- Domanda. Gli algoritmi di programmazione dinamica computano il valore ottimo. E se volessimo trovare la soluzione ottima e non solo il suo valore?
- Risposta. Facciamo del post-processing (computazione a posteriori).

```
Run M-Compute-Opt(n)
Run Find-Solution(n)

Find-Solution(j) {
   if (j = 0)
      output nothing
   else if (vj + M[p(j)] > M[j-1])
      print j
      Find-Solution(p(j))
   else
      Find-Solution(j-1)
}
```


Interval Scheduling Pesato: Bottom-Up

Programmazione dinamica bottom-up

Per capire il comportamento dell'algoritmo di programmazione dinamica e` di aiuto formulare una versione iterativa dell'algoritmo.

```
Input: n, s1,…,sn , f1,…,fn , v1,…,vn

Sort jobs by finish times so that f1 ≤ f2 ≤ ... ≤ fn.

Compute p(1), p(2), …, p(n)

Iterative-Compute-Opt {
   M[0] = 0
   for j = 1 to n
      M[j] = max(vj + M[p(j)], M[j-1])
}
```

Correttezza: Con l'induzione su j si puo` dimostrare che ogni entrata M[j] contiene il valore OPT(j)

Tempo di esecuzione: n iterazioni del for, ognuna della quali richiede tempo O(1) $\rightarrow$ tempo totale O(n)