1

(x, y) COPPIA ORDINATA

(y, x) SONO 2 OGGETTI DIVERSI

$\{x, y\}$ $\{y, x\}$ Sono INSIEMI SONO LO STESSO OGGETTO

S, T INSIEMI

PRODOTTO CARTESIANO DI S e T L'INSIEME

$$S \times T := \{(x, y) \mid x \in S,\ y \in T\}$$

$$(a, b) \in S \times T \overset{def}{\iff} a \in S \text{ e } b \in T$$

$$(a, b) \notin S \times T \iff \neg(a \in S \land b \in T) \iff a \notin S \lor b \notin T$$

S, T ~~FINITI~~ INSIEMI FINITI e $|S| = n$ e $|T| = m$

CI SONO n ELEMENTI

ALLORA $S \times T$ E' FINITO E $|S \times T| = m \cdot n$

IN GENERALE $S \times T$ NON E' COMMUTATIVO CIOE' $S \times T \neq T \times S$

PRENDIAMO S, INSIEME QUALSIASI

$S \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times S$ NON AVENDO ELEMENTI $\emptyset$ NON CI SONO COPPIE

SIA $S \neq \emptyset$ IL PRODOTTO CARTESIANO E' COMMUTATIVO (SE UNO DEI 2 INSIEMI E' VUOTO). IL RISULTATO E' L'INSIEME $\emptyset$

$S \times S$ IL PRODOTTO CARTESIANO E' COMMUTATIVO TRA LE COPPIE CI SONO QUELLI CON LE 2 COORDINATE =

$$S = \{a, b, c\}$$

$$S \times S = \{(a, b), (a, c), (a, a), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

COPPIE CON COORDINATE = DIAGONALE DEL PRODOTTO CARTESIANO

DEF: ΔS L'INSIEME COSTITUITO DI TUTTE E SOLE LE COPPIE CHE HANNO COORDINATE UGUALI

$$\Delta S := \{(x, y) \in S \times S \mid x = y\} = \{(x, x) \mid x \in S\}$$

$$\Delta S = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

INSIEME DELLE COPPIE CON I e II COORDINATE x ~~CON~~ AL VARIARE DI x INS

RAPPORTO INCLUSIONE E P. CARTESIANO

S, T, V, W INSIEMI

$S \subseteq V$, $T \subseteq W$ $(*)$ $\Rightarrow$ $S \times T \subseteq V \times W$

OGNI ELEMENTO DELL'INSIEME DI Sx APPARTIENE A QUELLO DI Dx

$(x, y) \in S \times T \Leftrightarrow x \in S$ e $y \in T \Rightarrow x \in V$ e $y \in W \Rightarrow$
$(x, y) \in V \times W$

1. x hp $S \subseteq V$ OGNI ELEMENTO DI S E' ANCHE UN ELEMENTO DI V
2. x hp $T \subseteq W$

QUANDO QUEST'IMPLICAZIONE $(*)$ E' UN'EQUIVALENZA?

NON SEMPRE, SOLO QUANDO S e $T \neq \emptyset$

SE $S \neq \emptyset$ e $T \neq \emptyset$ ALLORA
$S \times T \subseteq V \times W \Rightarrow S \subseteq V$ e $T \subseteq W$

1. $T \neq \emptyset$ $\exists y \in T$

$\forall x \in S$, (x, y) (HA I COOR. IN S, II IN T) $\in S \times T \underset{x\,hp}{\subseteq} V \times W$
$\Rightarrow (x, y) \in V \times W \Rightarrow x \in V$

QUINDI PRESO 1 ELEMENTO DI S E' ANCHE UN SOTTOINSIEME DI V
(VALE ANCHE SE S E' VUOTO, POICHE' L'INSIEME VUOTO E' CONTENUTO IN V

$S \neq \emptyset$ $\exists s \in S$
$\forall t \in T$, $(s, t) \in S \times T \subseteq V \times W \Rightarrow (s, t) \in$
$V \times W \Rightarrow t \in W$

ALLORA $S, T, V, W \neq \emptyset$ TUTTI ALLORA
$S \times T = V \times W \Leftrightarrow S = V$ e $T = W$

$S \times T = V \times W \Rightarrow S \times T \subseteq V \times W$ e $V \times W \subseteq S \times T$ $\Rightarrow$ $S \subseteq V$ e $T \subseteq W$, $V \subseteq S$ e $W \subseteq T$

VALE LA DOPPIA INCLUSIONE

$S = V$ e $T = W$

VALE ANCHE AL CONTRARIO OVVIAMENTE CIOE'

$S = V$ e $T = W \Rightarrow S \times T = V \times W$

$S\times T = T\times S \iff S=\emptyset \vee T=\emptyset \vee S=T$

$S=\emptyset \qquad \emptyset\times T=\emptyset = T\times\emptyset$

$T=\emptyset \qquad S=T$

SUPPONIAMO CHE $S\times T = T\times S$ DOBBIAMO FAR VEDERE CHE O $S=\emptyset$, O $T=\emptyset$ O $S=T$

SUPPONIAMO CHE $S\neq\emptyset$ E $T\neq\emptyset$ E ALLORA

$S\times T = T\times S \qquad S,T\neq\emptyset \Rightarrow S=T$ E $T=S$

MATRICI

TABELLA DI NUMERI REALI

SIANO $m,n\in\mathbb{N}$ $\quad m,n>0$

SI CHIAMA MATRICE $m\times n$ SU $\mathbb{R}$ UNA TABELLA DI NUMERI REALI DISPOSTI SECONDO m RIGHE ED n COLONNE

AD ESEMPIO

$$A=\begin{array}{c c}
\begin{array}{c} \text{I RIGA} \\ \text{II RIGA} \\ \text{III RIGA} \end{array} &
\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -4 & 0 & \frac{1}{2} \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ \pi & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{cccc} \text{I COLONNA} & \text{II COLONNA} & \text{III COLONNA} & \text{IV COLONNA} \end{array}
\end{array}$$

È UNA MATRICE 3×4 SU $\mathbb{R}$

SIA A UNA MATRICE $m\times n$ SU $\mathbb{R}$

SE $1\le i\le m$ E $1\le j\le n$ SI CHIAMA TERMINE DI POSTO (i,j) DI A E SI INDICA a_{ij} L'UNICO NUMERO REALE CHE APPARTIENE ALLA RIGA DI POSTO i (iesima) E DALLA COLONNA j-ESIMA

a_{23} DI POSTO $(2,3)$ DELLA MATRICE A

$a_{23}=0$

$a_{34}=0$

SE $m = n$ SI PARLA DI MATRICE QUADRATA DI ORDINE $n = m$

4

$$M \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \\ -4 & 1/6 & 7 \end{pmatrix}$$ MATRICE QUADRATA DI ORDINE 3

→ DIAGONALE PRINCIPALE DELLA MATRICE QUADRATA

CONSIDERO GLI ELEMENTI CHE HANNO INDICE DI RIGA = INDICE DI COLONNA a_{11} a_{22} a_{33} → DIAGONALE DELLA MATRICE

DIAGONALE PRINCIPALE

GENERICA MATRICE DI ORDINE n

$$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$ n^a-ESIMA RIGA

→ DIAGONALE PRINCIPALE

QUANDO ABBIAMO UNA MATRICE QUALSIASI PARLIAMO DI TRASPOSTA

LA TRASPOSTA DI UNA MATRICE

CONSIDERIAMO UNA MATRICE $m \times n$ SU $\mathbb{R}$ A

SI CHIAMA TRASPOSTA DI A LA MATRICE CHE SI OTTIENE DA A SCAMBIANDO LE RIGHE CON LE COLONNE

SI OTTIENE UNA MATRICE CON n RIGHE E m COLONNE $(n \times m)$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1/2 & -3 \\ 0 & 11 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ MATRICE 4×3

$$A^T = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 11 & 0 \\ \sqrt{2} & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ MATRICE 3×4

IN PARTICOLARE, LA TRASPOSTA DI UNA MATRICE QUADRATA È ANCORA QUADRATA E DELLO STESSO ORDINE

SE A QUADRATA DI ORDINE n $\Rightarrow$ LA TRASPOSTA E' QUADRATA DI ORDINE n

IN GENERALE $A \neq A^T$.

SE $A = A^T$ ALLORA A E' UNA MATRICE SIMMETRICA

TIPO PARTICOLARE DI MATRICI =

Matrici a scala

SIA A MATRICE (QUALSIASI) $m \times n$

A E' UNA MATRICE A SCALA $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

1. ~~HA UNA RIGA NULLA~~ SE A POSSIEDE UNA RIGA NULLA, ALLORA TUTTE LE RIGHE AL DI SOTTO SONO NULLE

2. IL PRIMO TERMINE NON NULLO DI OGNI RIGA E' "PIU' A Dx" RISPETTO A QUELLO DELLA RIGA PRECEDENTE

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

IL 3 E' + A Dx DELL'1

E' A SCALA

III RIGA NULLA ANCHE LA IV

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

NON E' A SCALA

LA III RIGA IL 4 NON E' + A Dx DELLA RIGA PRECEDENTE

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NON E' A SCALA

LA MATRICE NULLA E' UNA MATRICE A SCALA

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

NON E' A SCALA

DOVREBBE ESSERE 0 MA NON LO E'

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E' UNA MATRICE A SCALA

IL I ELEMENTO NON NULLO DI ~~UNA~~ OGNI RIGA DI UNA MATRICE A SCALA SI CHIAMA PIVOT

IL PIVOT DI OGNI RIGA E' + A Dx DEL PIVOT PRECEDENTE

OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE DI UNA MATRICE (X OTTENERE UNA MATRICE A SCALA)

(UTILIZZANDO LE MATRICI SI POSSONO RISOLVERE I SISTEMI LINEARI)

ESEGUIRE UN'OPERAZIONE ELEMENTARE SIGNIFICA

1. MOLTIPLICARE TUTTI I TERMINI DI UNA RIGA X UNO STESSO NUMERO REALE $\lambda \neq 0$

$R_i \to \lambda R_i$ R = RIGA

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 11 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad R_2 \to 3R_2 \quad \begin{matrix} 3 & -4 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -6 & 9 \end{matrix}$$

2. SCAMBIARE DI POSTO 2 RIGHE

$R_i \longleftrightarrow R_j$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 11 & -1 & 5 \end{pmatrix} R_1 \longleftrightarrow R_3 \begin{pmatrix} 0 & 11 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

3. SOSTITUIRE UNA RIGA CON LA SOMMA DI QUELLA RIGA + UNA RIGA DIVERSA DI POSTO DIVERSO MOLTIPLICATA PER (UN NUMERO REALE λ) $\lambda \in \mathbb{R}$

$R_i \longrightarrow R_i + \lambda R_j$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 11 & -1 & 5 \end{pmatrix} R_2 \to R_2 - \frac{1}{3} R_1 \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 4/3 & -11/3 & 8/3 \\ 0 & 11 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(1, 0, -2, 3) - \frac{1}{3}(3, -4, 5, 1)$$

$$= (1, 0, -2, 3) - \left(1, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(0, +\frac{4}{3}, -2-\frac{5}{3}, 3-\frac{1}{3}\right)$$

$$\left(0, \frac{4}{3}, -\frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

SIANO A e B DUE MATRICI DELLO STESSO TIPO (STESSO N. DI RIGHE E COLONNE)

$A \sim B \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\boxed{\text{B SI OTTIENE DA A CON UN NUMERO FINITO DI OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE}}$

A e B sono equivalenti

MATRICE $m \times n$ SU $\mathbb{R}$ m = RIGHE
n = COLONNE

SIA M UNA MATRICE SU $\mathbb{R}$

M è A SCALA $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 1. SE LA MATRICE HA UNA RIGA NULLA TUTTE LE RIGHE SOTTOSTANTI SONO RIGHE NULLE

1° ELEMENTO NON NULLO = PIVÓT

2. IL PRIMO ELEMENTO NON NULLO DI OGNI RIGA È + A DX RISPETTO A QUELLO DELLA RIGA PRECEDENTE

OPERAZIONI ELEMENTARI

1. $R_i \to \lambda R_i$ $\lambda \neq 0$ $\lambda \in \mathbb{R}$
2. $R_i \to R_j$ $i \neq j$
3. $R_i \to R_i + \lambda R_j$ $i \neq j$

A, B MATRICI $m \times n$ SU $\mathbb{R}$

A e B EQUIVALENTI $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ B SI OTTIENE DA A CON UN NUMERO FINITO DI OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE

$A \sim B$

SE IO PRENDO UNA MATRICE QUALUNQUE, ESSA È SEMPRE EQUIVALENTE AD UNA MATRICE A SCALA

$\forall A \ \exists M$ MATRICE A SCALA : $A \sim M$

POSSO PRENDERE UNA MATRICE QUALUNQUE POSSO TRASFORMARLA IN UNA MATRICE A SCALA

ALGORITMO DI GAUSS

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 11 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

3 DEVE ESSERE IL PRIMO PIVÒT (PRIMO TERMINE NON NULLO DELLA PRIMA COLONNA NON NULLA)

SE LA MATRICE NON È NULLA, HA ALMENO UNA COLONNA NON NULLA DOVE NEL CASO FOSSE IN RIGHE SOTTOSTANTI DEVE ANDARE COME PRIMA RIGA

IN QUESTO CASO IL 3 È GIÀ SOPRA, MA DOBBIAMO ANNULLARE TUTTI I TERMINI SOTTOSTANTI AL PIVÒT (IN PARTICOLARE L'1)

x ANNULLARE 1 SOMMO UN MULTIPLO OPPORTUNO DELLA PRIMA RIGA.

QUINDI

$R_2 \to R_2 + \alpha R_1$ $\quad$ α IN MODO CHE DALLA SOMMA AL PRIMO POSTO OTTENGO 0

QUINDI $1 + 3\alpha = 0$

QUINDI $\alpha = -\frac{1}{3}$

$(1, 0, -2, 3) - \frac{1}{3}(3, -4, 5, 1) =$

$(1, 0, -2, 3) - (1, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}) =$

$= (0, +\frac{4}{3}, -\frac{11}{3}, \frac{8}{3})$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 4/3 & -11/3 & 8/3 \\ 0 & 11 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

CONSIDERO LA MATRICE + PICCOLA

$R_3 \to R_3 + \alpha R_2$

α : $11 + \alpha \frac{4}{3} = 0$ $\quad$ $\alpha = -\frac{33}{4}$

$(0, 11, -1, 5) - \frac{33}{4}(0, \frac{4}{3}, -\frac{11}{3}, \frac{8}{3}) =$

$(0, 11, -1, 5) - (0, 11, -\frac{121}{4}, \frac{88}{4}) = (0, 0, \frac{117}{4}, -\frac{68}{4})$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 4/3 & -11/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & -117/4 & -17 \end{pmatrix}$$

QUESTA E' "FINALMENTE" UNA MATRICE A SCALA

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PORTIAMO QUEL -3 IN PRIMA POSIZIONE

$R_3 \to R_1$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$R_4 \to R_4 + \alpha R_1$

$1 + \alpha(-3) = 0$

$\alpha = +\frac{1}{3}$

$R_4 \to R_4 + \frac{1}{3} R_1$

$(0, 1, 0, 1) + \frac{1}{3}(0, -3, 1, 0) = (0, 1, 0, 1) + (0, -1, +\frac{1}{3}, 0) =$

$(0, 0, \frac{1}{3}, 1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + \alpha R_2$ $\quad 2 - \alpha = 0 \quad \alpha = 2$

$R_4 \to R_4 + \beta R_2$ $\quad \frac{1}{3} - \beta = 0 \quad \beta = \frac{1}{3}$

$(0,0,2,0) - 2(0,0,-1,0) = (0,0,0,0)$

$(0,0,\frac{1}{3},1) - \frac{1}{3}(0,0,-1,0) = (0,0,0,1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_3 \to R_4 \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E' UNA MATRICE A SCALA

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

TROVARE LA MATRICE A SCALA EQUIVALENTE

31-01-22.

ESERCIZIO

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + \lambda R_1 =$ $\quad 4 + \lambda 1 = 0$

$\lambda = -4$

$R_3 \to R_3 + \lambda R_1 =$ $\quad 7 + \lambda = 0$

$\lambda = -7$

$(4, 5, 6, 1) - 4(1, 2, 3, 1) =$

$(4, 5, 6, 1) - (4, 8, 12, 4) =$

$(0, -3, -6, -3) \quad (R_2)$

~~1 2 3 1~~

$(7, 8, 8, 1) - 7(1, 2, 3, 1)$

$(7, 8, 8, 1) - (7, 14, 21, 7)$

$(0, -6, -13, -6)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -13 & -6 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + \lambda R_2$

$-6 + \lambda(-3) = 0$

$\lambda(-3) = 6$

$\lambda = -\frac{6}{3} \quad -2$

~~(0, -13, -6)~~

$(0, -6, -13, -6) - 2(0, -3, -6, -3)$

$(0, -6, -13, -6) - (0, -6, -12, -6)$

$(0, -6, -13, -6) + (0, +6, +12, +6)$

$(0, 0, -1, 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

~~SCALA~~

SIA M UNA MATRICE A SCALA

M E' SCALA RIDOTTA $\overset{def}{\iff}$ 1. I SUOI PIVOT SONO TUTTI $= 1$
2. I TERMINI "SOPRA" I PIVOT SONO TUTTI 0

CONSIDERATA UNA MATRICE QUALSIASI A $\exists$ 1 E 1 SOLA MATRICE SCALA RIDOTTA T : A E' EQUIVALENTE A T $(A \sim T)$

SE PRENDO UNA QUALUNQUE MATRICE POSSO OPERARE SULLE RIGA CON UN n. FINITO DI OP. ELEMENTARI PER OTTENERE UNA MATRICE A SCALA RIDOTTA
QUESTA MATRICE CHE OTTENGO E' UNIVOCAMENTE DETERMINATA
(UNA MATRICE ~~A~~ SCALA NON LO E', POTREI MOLTIPLICARE OGNI RIGA x UN NUMERO λ E OTTERREI UN'ALTRA MATRICE EQUIVALENTE)

A matrice

$$A \overset{+}{\sim} \underset{\text{A SCALA}}{M} \overset{h}{\sim} \underset{\text{A SCALA RIDOTTA}}{T} \qquad A \overset{+h}{\sim} T$$

h OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE

FINITO

(DIMOSTRARE CHE E' UNIVOCAMENTE DETERMINATA)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = M$$

~~R2~~

~~$R_2 \to R_2 + R_1 \lambda$~~
~~$-3 + 2\lambda = 1$~~
~~$+2\lambda = +4$~~
~~$\lambda = \frac{+4}{2} = 2$~~

~~1/3~~

$\alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \ \frac{1}{\alpha}$

$R_2 \to -\frac{1}{3} R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to -R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_1 \to R_1 + \alpha R_2 \qquad \alpha = -2$

$2 + \alpha \cdot 1 = 0 \qquad \alpha = -2$

$(1,2,3,1) \to (1,2,3,1) - 2(0,1,2,1) =$
$(1,2,3,1) - (0,2,4,2) =$
$(1,0,-1,-1) \quad R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + \lambda R_3 \qquad \lambda = -2$

$(0,1,2,1) - 2(0,0,1,0)$
$(0,1,2,1) - (0,0,2,0) =$

3

~~RNO~~

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_1 \to \cancel{R_1 + R_3}$

$R_1 + \lambda R_3$

$-1 + \lambda 1 = 0$

$-1 + \lambda = 0$

$\lambda = 1$

$\cancel{1} (1,0,-1,-1) + (0,0,1,0)$

$(1,0,0,-1)$ R_1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

~~1, 0, 0, -1~~
~~0, 1, 2,~~

$R_2 \to R_2 + \lambda R_3$

$(0,1,2,1) - 2(0,0,1,0)$

$(0,1,2,1) - (0,0,2,0)$

$(0,1,0,1)$ R_2

~~100~~

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRICE A SCALA RIDOTTA

L'OBIETTIVO DI TUTTO CIO' E' RISOLVERE UN SISTEMA DI EQ. LINEARI

SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI NELLE INCOGNITE $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

m equazioni

n incognite

RISOLVERE IL SISTEMA:
INDIVIDUARE TUTTE LE n-uple DI NUMERI REALI $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ CHE SODDISFANO TUTTE LE m EQUAZIONI

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$$

SISTEMA DI 3 EQUAZIONI IN 3 INCOGNITE

→ 3 EQUAZIONI

3 incognite x, y, z

$\boxed{m \neq n}$

INDICHIAMO CON S L'INSIEME DELLE SOLUZIONI (a)

PUO' SUCCEDERE CHE:

1. NON CI SONO SOLUZIONI $S=\emptyset$

IL SISTEMA NON AMMETTE SOLUZIONI, SI DICE CHE IL SISTEMA NON E' COMPATIBIL

2. $S = \{(a_1, a_2, ..., a_n)\}$ S E' UN SINGLETON

COSTITUITO DA UN UNICO ELEMENTO

IL SISTEMA AMMETTE ~~UNA~~ UNA E UNA SOLA SOLUZIONE

3. IL SISTEMA AMMETTE INFINITE SOLUZIONI

S E' INFINITO

IL SISTEMA AMMETTE INFINITE SOLUZIONI

2 SISTEMI SONO EQUIVALENTI QUANDO HANNO LE STESSE SOLUZIONI

2 SISTEMI SI DICONO " SE AMMETTONO LE STESSE SOLUZIONI

(RISOLVERE UN SISTEMA, O IL SUO EQUIVALENTE E' LA STESSA COSA)

POSSO ASSOCIARE AL SISTEMA UNA MATRICE FORMATA DAI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE E LA COLONNA DEI TERMINI ~~NOTI~~ NOTI

MATRICE DEL SISTEMA LINEARE:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$\#$ colonne $= \#$ incognite $+ 1$

HA TANTE RIGHE QUANTE SONO LE EQUAZIONI

$\#$ righe $= \#$ equazioni

HA TANTE COLONNE QUANTE SONO LE INCOGNITE + 1 (TERMINE NOTO)

QUESTA PRENDE IL NOME DI MATRICE COMPLETA DEL SISTEMA

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

MATRICE COMPLETA DEL SISTEMA

~~SE A~~

SE A e B MATRICI, ~~SONO~~ ~~A~~ SONO EQUIVALENTI $(A \sim B)$ ALLORA IL SISTEMA LA CUI MATRICE COMPLETA E' A E IL SISTEMA LA CUI MATRICE COMPLETA E' B, SONO EQUIVALENTI = HANNO LE STESSE SOLUZIONI

METODO DI GAUSS-JORDAN

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + \lambda R_1$ $\qquad 3 + \lambda 1 = 0 \qquad \lambda = -3$

$R_3 \to R_3 + \lambda R_1$ $\qquad 2 + \lambda 1 = 0 \qquad \lambda = -2$

$(3, -2, 1, 0) - 3(1, -2, 1, 1)$

$(3, -2, 1, 0) - (3, -6, 3, 3)$

$(0, 4, -2, -3)$ R_2

$(2, 3, -4, 2) - 2(1, -2, 1, 1)$

$(2, 3, -4, 2) - (2, -4, 2, 2)$

$(0, 7, -6, 0)$ R_3

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & 7 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$\cancel{R_2 \to R_1 + \lambda R_2}$

$R_3 \to R_3 + \lambda R_2$

$7 + \lambda 4 = 0$

$\lambda 4 = -7$

$\lambda = -\frac{7}{4}$

$(0, 7, -6, 0) - \frac{7}{4}(0, 4, -2, -3)$

$(0, 7, -6, 0) - (0, 7, -\frac{14}{4}, -\frac{21}{4})$

$(0, 0, -\frac{5}{2}, +\frac{21}{4})$

$+\frac{14}{4} - 6 = \frac{-24+14}{4}$

$-\frac{\cancel{10}\,5}{\cancel{4}\,2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -5/2 & 21/4 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to \frac{1}{4} R_2$

$R_3 \to -\frac{2}{5} R_3$

$-\frac{\cancel{2}}{5} \cdot \frac{21}{\cancel{4}\,2}$

$-\frac{21}{10}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -21/10 \end{pmatrix}$$

6

$R1 \to R_1 + \lambda R_2$

$-2 + \cancel{R_2}\, 1 \qquad \lambda = 2$

$\cancel{R_1 \to R_1}$

$(1, -2, 1, 1) + 2(0, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}) \qquad -\frac{3}{2} + 1 = \frac{-3+2}{2} = \frac{-1}{2}$

$(1, -2, 1, 1) + (0, 2, -1, -\frac{3}{2})$

$(1, 0, 0, -\frac{1}{2})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{10} \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + \lambda R_3$

$R_2 \to \cancel{R_2}$

$-\frac{1}{2} + \lambda 1 = 0$

$\lambda = \frac{1}{2}$

$(0, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}) + \frac{1}{2}(0, 0, 1, -\frac{21}{10})$

$(0, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}) + (0, 0, +\frac{1}{2}, -\frac{21}{20}) = (0, 1, 0, -\frac{9}{5})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{10} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{9}{5} \\ z = -\frac{21}{10} \end{cases}$$

$-\frac{21}{20} - \frac{3}{4} = \frac{-21-15}{20} = \frac{-36}{20}$ $\frac{18}{10}$ $\frac{9}{}$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 3 \\ 6x - 2y + z = 2 \\ 2x + 4y - 9z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ 2x - 4y + 3z + t = 4 \\ 3x - 3y + 2z + 2t = 5 \\ 4x - 2y + z + 3t = 6 \end{cases}$$

31-01-22. pt 3. (1)

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 3 \\ 6x - 2y + z = 2 \\ 2x + 4y - 9z = 1 \end{cases}$$

MATRICE COMPLETA

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 3 \\ 6 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + \lambda R_1$

$6 + \lambda 2 = 0$

$\lambda = -\frac{\cancel{6}\,3}{\cancel{2}}$

$R_2 \to R_2 - 3R_1$

$(6, -2, 1, 2) - 3(2, -3, 5, 3)$

$(6, -2, 1, 2) - (6, -9, 15, 9)$

$(0, 7, -14, -7)$

$R_3 \to R_3 + \lambda R_1$

$2 + \lambda 2$

$\lambda 2 = -2$

$\lambda = -\frac{\cancel{2}\,1}{\cancel{2}}$

$R_3 - (1)R_1$

$(2, 4, -9, 1) - (2, -3, 5, 3)$

$(0, 7, -14, -2)$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & -14 & -7 \\ 0 & 7 & -14 & -2 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_2 \lambda$

$7 + 7\lambda$

$\lambda = -1$

$(0, 7, -14, -2) - (0, 7, -14, -7)$

$(0, 0, 0, 5)$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & \cancel{7} & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_1 \to \frac{1}{2} R_1 \\ R_2 \to \frac{1}{7} R_2 \\ R_3 \to \frac{1}{5} R_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

②

LA $0 = 1$ NON HA SOLUZIONE

IPOTETICO SISTEMA DI QUESTA MATRICE

$$\begin{cases} x - \frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z = \frac{3}{2} \\ y - 2z = -1 \\ 0 = 1 \to \text{E' UN'EQUAZIONE IMPOSSIBILE} \end{cases}$$

$S \neq 0$

IL SISTEMA NON HA SOLUZIONE

IL SISTEMA NON E' COMPATIBILE

$$\begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ 2x - 4y + 3z + t = 4 \\ 3x - 3y + 2z + 2t = 5 \\ 4x - 2y + z + 3t = 6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \\ R_4 \to R_4 - 4R_1 \end{array}$$

$(2, -4, 3, 1, 4) - 2(1, 1, -1, 1, 1)$

$(2, -4, 3, 1, 4) - (2, 2, -2, 2, 2)$

$(0, -6, 5, -1, 2)$ R_2

$(3, -3, 2, 2, 5) - 3(3, 3, -3, 3, 3)$

$(0, -6, 5, -1, 2)$ R_3

$(4, -2, 1, 3, 6) - (4, 4, -4, 4, 4)$

$(0, -6, 5, -1, 2)$ R_4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2 \\ \Downarrow \\ \text{OTTENGO 2 RIGHE NULLE} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5/6 & 1/6 & -2/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_1 \rightarrow R_1 - R_2$

$$(1, 1, -1, 1, 1) - (0, 1, -5/6, 1/6, -2/6)$$
$$= \left(1, 0, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}\right)$$

$$\begin{array}{ccccc} x & y & z & t & \text{termine noto} \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E' A SCALA RIDOTTA

PRENDO IL SISTEMA CHE HA QUESTA COME MATRICE COMPLETA

LA MATRICE HA 2 PIVOT E ABBIAMO 4 INCOGNITE

ABBIAMO + INCOGNITE CHE PIVOT

$$\begin{cases} x - \frac{1}{6} z + \frac{5}{6} t = \frac{4}{3} \\ y - \frac{5}{6} z + \frac{1}{6} t = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

LE ULTIME DUE SAREBBERO $0 = 0$

QUANDO HO UNA MATRICE DOVE IL N. DI PIVOT E' < DEL NUMERO DI INCOGNITE, LE INCOGNITE "NON PIVOT" LE CONSIDERO DEI PARAMETRI

INTRODUCO 2 PARAMETRI = z e t

DICO CHE QUESTO SISTEMA HA INFINITE SOLUZIONI

$$\left\{ \left(\underbrace{\frac{1}{6} z - \frac{5}{6} t + \frac{4}{3}}_{1°}, \underbrace{\frac{5}{6} z - \frac{1}{6} t - \frac{1}{3}}_{2°}, \underbrace{z}_{3°}, \underbrace{t}_{4°} \right)^{*} \right\}$$

→ CERCHIAMO UNA QUATERNA POICHE' ABBIAMO 4 INCOGNITE

LE SOLUZIONI VARIANO A SECONDA DELLA SCELTA DI z e DI t

IL SISTEMA HA INFINITE SOLUZIONI

PER OGNI SCELTA DEI NUMERI REALI z e t, LA QUATERNA * E' SOLUZIONE DEL SISTEMA QUINDI L'INSIEME S DELLE SOLUZIONI E' INFINITO PERCHE' z e t POSSONO ESSERE SCELTI IN INFINITI MODI

31-01-22 pt 3. 4.

OPERAZIONI TRA MATRICI

CONSIDERIAMO L'INSIEME DI TUTTE LE MATRICI $m \times n$ SU $\mathbb{R}$

$$M_{m,n}(\mathbb{R}) = \{A \mid A \text{ E' UNA MATRICE CON } m \text{ RIGHE ED } n \text{ COLONNE}\}$$

SE $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ POSSO CONSIDERARE LA LORO **SOMMA $A+B$**

$A+B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ E' LA MATRICE IL CUI TERMINE DI POSTO (i,j) SI OTTIENE SOMMANDO IL TERMINE DI POSTO (i,j) DI A CON QUELLO DI POSTO (i,j) DI B

(STESSO NUMERO DI RIGHE E STESSO NUMERO DI COLONNE)

$a_{ij} + b_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & \sqrt{2} \\ 1/2 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -20 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 11 & 2 \\ 13 & 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 MATRICI 3×4 → COLONNE; ↓ RIGHE

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & \sqrt{2}+4 \\ 1/2 & -2 & 11 & 3 \\ 15 & 11/3 & -20 & 1 \end{pmatrix}$$

ABBIAMO INTRODOTTO UN'OPERAZIONE IN UN INSIEME

DEFINIAMO QUINDI **LE PROPRIETA'**:

COMMUTATIVA: $\forall a,b \in \mathbb{R} \quad a+b = b+a$

LA SEGUE

$\forall A,B \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \quad A+B = B+A$

ASSOCIATIVITA': $\forall a,b,c \in \mathbb{R} \quad (a+b)+c = a+(b+c)$

$\forall A,B,C \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \quad (A+B)+C = A+(B+C)$

ELEMENTO NEUTRO (MATRICE NULLA): $\exists$ e neutro RISPETTO A + ED E' LA **MATRICE NULLA** (HA I TERMINI TUTTI = A 0)

OPPOSTO: $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \; \exists -A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) : -A+A=0$

$A = (a_{ij}) \qquad -A = (-a_{ij})$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad -A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ -4 & -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

~~QUESTO TIPO DI STRUTTURA VIENE~~

$(M_{m,n}(\mathbb{R}), +)$ E' UN GRUPPO ABELIANO

...ERNA:

... DI UN NUMERO REALE λ • UNA MATRICE $A = (a_{ij})$

SI λA E' UNA MATRICE $m \times n$

SI OTTIENE MOLTIPLICANDO TUTTI I TERMINI DI $A \cdot \lambda$

+ PRECISAMENTE E' LA MATRICE IL CUI TERMINE DI POSTO (i,j) E' λa_{ij}

$\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ $\quad A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 10 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & -3/2 & 1/2 & 7/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7.2.2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4×3

$$2 \cdot A^T + 3 \cdot B^T = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

T = TRASPOSTA

SI SCAMBIANO LE RIGHE E LE COLONNE

TRASPOSTA SARA' 3×4

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 10 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & 4 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 12 \\ 21 & 0 & 9 & 0 \\ 15 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 22 \\ 27 & 2 & 9 & 2 \\ 23 & 3 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$

PRODOTTO RIGHE x COLONNE

$A_{m \times n} = B_{n \times t}$ NUMERO COLONNE A = NUMERO RIGHE B

A, B | IL NUMERO DELLE COLONNE DI A SIA UGUALE AL NUMERO DELLE RIGHE DI B

IN UNA RIGA DI A CI SONO n NUMERI

NELLA RIGA i-esima $\quad i \quad$ $a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{in}$

IN UNA COLONNA DI B CI SONO n NUMERI

NELLA COLONNA j-esima $\quad j \quad$ b_{1j}

b_{2j}

$\vdots$

LA MATRICE AB E' QUELLA IL CUI TERMINE DI POSTO (i,j) ③

E' LA SOMMA DEI PRODOTTI DEI TERMINI DELLA RIGA i-esima DI A PER QUELLI DELLA COLONNA j-ESIMA DI B

$(i,j)\ a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$ $m \times t$

$$A\ 2 \times 3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad B\ 3 \times 4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

AVRA' TANTE RIGHE QUANTE NE HA A E TANTE COLONNE QUANTE NE HA B

$$AB\ \underset{2 \times 4}{} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ -5 & -10 & -5 & -15 \end{pmatrix}$$

(1,1) I RIGA A, I COLONNA B — ~~3·0,~~ $3\cdot 0 + 2\cdot 1 + 1\cdot 0 = 2$

(1,2) $3\cdot -1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 0 = 1$

(1,3) $3\cdot 2 + 2\cdot 1 + 1\cdot 5 = 1$

(1,4) $3\cdot 0 + 2\cdot 3 + -1\cdot 1 = 5$

(2,1) $0\cdot 0 + -5\cdot 1 + 0\cdot 0 = -5$

(2,2) $0\cdot -1 + -5\cdot 2 + 0\cdot 0 = -10$

(2,3) $0\cdot -2 + -5\cdot 1 + 0\cdot 5 = -5$

(2,4) $0\cdot 0 + -5\cdot 3 + 0\cdot -1 = -15$

SE POSSIAMO FARE A·B NON E' DETTO CHE POSSIAMO ORA FARE B·A

NON E' UN'OPERAZIONE COMMUTATIVA

01/02/22 PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

A $\quad$ B

$m \times n$ $\quad$ $n \times t$

IN UNA RIGA DI A CI SONO n NUMERI E CI SONO n NUMERI ANCHE NELLA COLONNA DI B

righe di A $\quad a_{i1} \; a_{i2} \; \dots \; a_{in}$ $\qquad$ E' UNA MATRICE $m \times t$

colonne di B $\quad b_{1j} \; b_{2j} \; \dots \; b_{nj}$

↳ PRODOTTO DEI NUMERI E SOMMA

$$(a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}) \to$$ TERMINE DI POSTO (i,j) AB

A $\quad$ B

3×2 $\quad$ 2×3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{3\times 3}{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 12 & 19 \\ 7 & 21 & -35 \end{pmatrix}$$ QUADRATA DI ORDINE 3

$\neq$

$$\underset{2\times 2}{BA} = \begin{pmatrix} -35 & 1 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$$ QUADRATA DI ORDINE 2

SE CONSIDERO 2 MATRICI QUADRATE DI ORDINE n

$A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ quadrate di ORDINE n

$AB, BA \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ IN GENERE SONO DIVERSE

$AB \neq BA$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 14 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

NON E' UN'OPERAZIONE COMMUTATIVA

IL PRODOTTO righe per colonne E' ASSOCIATIVO

$A, B, C \in M_{n}(\mathbb{R})$ $\qquad (AB)C = A(BC)$

(QUADRATE DELLO STESSO ORDINE)

$\exists$ UNA MATRICE $I \in M_{n}(\mathbb{R})$ |

$IA = A = AI \quad \forall A \in M_n(\mathbb{R})$?

2

MATRICE QUADRATA DI ORDINE n CON TUTTI I TERMINI DELLA DIAGONALE PRINCIPALE = 1 E TUTTI GLI ALTRI = 0

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (MATRICE A SCALA RIDOTTA)

$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$ $\quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ FARE I CONTI X TROVARE A

$A \in M_n(\mathbb{R}) \quad m \in \mathbb{N}$

$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{m\text{-volte}}$ $\quad A^0 = I_m$ ELEMENTO NEUTRO, I_m MATRICE IDENTITÀ

SIA

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ QUADRATA DI ORDINE 3 SU $\mathbb{R}$ $\in M_3(\mathbb{R})$ DIMOSTRIAMO CHE $\forall m \geq 0 \quad m \in \mathbb{N}_0$

$A^m = \begin{pmatrix} 1 & 2m & 5m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ X INDUZIONE

BASE INDUZIONE

$m = 0$

$\cancel{A^0}\ A^m = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 0 & 5\cdot 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ [BASE VERIFICATA]

P_h E' VERA $\Rightarrow P_{h+1}$ VERA

$\downarrow$ $m \geq 0$

$A^h = \begin{pmatrix} 1 & 2h & 5h \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ SUPPONGO VERA QUEST'UGUAGLIANZA

$A^{h+1} = A^h \cdot A$ PER IP. DI INDUZ. A^h E' QUESTA $= \begin{pmatrix} 1 & 2h & 5h \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 2+2h & 5+5h \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(h+1) & 5(h+1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ E' QUINDI SEMPRE VERA

01/02/22 pt2.
~~7/2/23.~~

1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

DIMOSTRARE PER INDUZIONE CHE $\forall m \geq 0$

$$A^m = \begin{pmatrix} 2^m & 3\cdot 2^m - 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^m \end{pmatrix}$$

$$A^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 2^0 & 3\cdot 2^0 - 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$P(m)$ E' VERO $\Rightarrow$ $P(m+1)$ VERO

$$A^{m+1} = A^m \cdot A = \begin{pmatrix} 2^m & 3\cdot 2^m - 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2^m & 3\cdot 2^m - 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2^m & 6\cdot 2^m - 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \cdots \end{pmatrix}$$

$=$

$$\begin{pmatrix} 2^{m+1} & 3\cdot 2^{m+1} - 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{m+1} \end{pmatrix}$$

(1,1) $2\cdot 2^m + 0 + 0 = 2\cdot 2^m$

(1,2) $3\cdot 2^m + 3\cdot 2^m - 3 + 0 = 6\cdot 2^m - 3$

$12\cdot 2^m - 3$

(1,3) $0 + 0 + 0$

(2,1) $0 + 0 + 0 = 0$

(2,2) $0 + 1 + 0 = 1$

(2,3) $0 + 0 + 0 \quad 0$

(3,1) $0 + 0 + 0 = 0$

(3,2) $0 + 0 + 0$

$0 + 0 + 5^m \cdot 5 \cdot 5 = 25\cdot 5^m$

MATRICE QUADRATA

$A \in M_n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

CONSIDERANDO a_{ij} DI A SI CHIAMA **MATRICE COMPLEMENTARE** DI a_{ij} LA MATRICE QUADRATA DI ORDINE $(n-1)$ CHE SI OTTIENE CANCELLANDO LA RIGA i-ESIMA (A CUI APPARTIENE a_{ij}) E LA COLONNA j-ESIMA

$A_{ij} \rightarrow$ MATRICE COMPLEMENTARE

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

MATRICE COMPLEMENTARE DEL TERMINE DI POSTO (2,3) DOBBIAMO CANCELLARE LA 2 RIGA E LA 3ª COLONNA

$$\boxed{\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A_{23}}$$

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

- DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA È UN NUMERO REALE ASSOCIATO ALLA MATRICE E LO DEFINIAMO X INDUZIONE SULL'ORDINE DELLA MATRICE

DEF.:

IL DETERMINANTE È UN NUMERO REALE CHE VIENE DEFINITO **PER INDUZIONE** SULL'**ORDINE $n \geq 1$** DELLA MATRICE:

1. VIENE PRECISATO X $n = 1$

MATRICE DI ORDINE 1 $= (a_{11})$ UN SOLO NUMERO

$\det(a_{11}) = a_{11}$ IL SUO UNICO TERMINE

2. SUPPONIAMO DI AVER DEFINITO IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA DI ORDINE t E CONSIDERIAMO UNA MATRICE DI ORDINE t+1

$A \in M_{t+1}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(t+1)} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(t+1)} \\ \vdots & & & \\ a_{(t+1)1} & a_{(t+1)2} & \dots & a_{(t+1)(t+1)} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot \det A_{11} - a_{12} \cdot \det A_{12} + \dots - a_{1(t+1)} \det A_{1(t+1)}$$

MATRICE COMPLEMENTARE

SEGNO INVERTITI OGNI VOLTA (CIOÈ - POI + POI - POI +

DETERMINANTE MATRICE 2x2 =
PRODOTTO DEGLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE PRINCIPALE - IL PRODOTTO DEGLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE SECONDARIA

$A \in M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ (3)

$$\det A = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

01-02-2022 pt.3

DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \dots - a_{nn} \det A_{nn}$$

$A = (a_{11}) \quad \det A = a_{11}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} =$$

$$= 1 \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \underbrace{0 \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{0} =$$

$$= 1(-2 \cdot 3 - 3 \cdot 3) - 1(1 \cdot 3 - 3 \cdot 2) =$$

$$= -15 + 3 = -12$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \det A_1 = 0 \cdot \cancel{\det \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}} - \cancel{0 \begin{pmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}} +$$

$$1 \cdot \det \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \cancel{0 \begin{pmatrix} -4 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}} =$$

$$1 \cdot \left(-4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$1 \cdot \left(-4(1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) - 5(0 \cdot 3 - 1 \cdot 5) + 1(0 \cdot 2 - 1 \cdot 5)\right)$$

$$1 \cdot -4(3-2) - 5(-5) + (-5) = -4 + 25 - 5 = 16$$

FORMULA VERA DA MALATI DI MERDA

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det A_{13} \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} A_{1n}$$

I SEGNI SONO ALTERNI

MOLTIPLICO -1 ELEVATI ALLA SOMMA DEGLI INDICI

3x3

SARRUS

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

\+ \+ \+

INDIVIDUO LA DIAGONALE PRINCIPALE + ALTRE 2 DIAGONALI

$$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) =$$

DIAGONALE SECONDARIA + 2 DIAGONALI PARALLELE

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

$$\det A = (1 \cdot -2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot 3) - (0 \cdot -2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 3) =$$
$$(-6 + 6 + 0) - (0 + 9 + 3)$$
$$0 - 12 = -12$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

CONSIDERATO a_{ij} SI CHIAMA COMPLEMENTO ALGEBRICO DI a_{ij} IL NUMERO REALE DATO DA

$$\boxed{(-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}}$$

det A = SOMMA DEI PRODOTTI DEI TERMINI DELLA 1ª RIGA x I LORO COMPLEMENTI ALGEBRICI

IL DETERMINANTE SI DEFINISCE CON LA PRIMA RIGA MA POSSIAMO PRENDERE QUALSIASI RIGA O COLONNA x IL CALCOLO DEL DETERMINANTE

TEOREMA DI LAPLACE:

IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA A E' = ALLA SOMMA DEI PRODOTTI DEGLI ELEMENTI DI UNA SUA LINEA (RIGA O COLONNA) x I COMPLEMENTI ALGEBRICI

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det A = 1^{v} \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 0^{v} \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + (-3)^{v} \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$
$$+2 + 0 + 0 = +2$$

II COLONNA => det A 0

$$(-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} +$$
$$(-1)^{3+2} \dots$$

$0 + 0 + \cancel{A} - 1 \cdot -1 \cdot 2 = 2$

SEGNI in 3x3

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

PROPRIETA' DEL DETERMINANTE

SIA A UNA MATRICE QUADRATA:

1. SE A HA UNA LINEA NULLA IL DETERMINANTE E' $=0$
2. det A COINCIDE CON det A^T $\det A = \det A^T$
3. SE B SI OTTIENE DA A SCAMBIANDO 2 RIGHE O 2 COLONNE (2 LINEE DELLO STESSO TIPO TRA LORO) ALLORA det B E' L'OPPOSTO DEL ~~DET~~ det A $\det B = -\det A$
4. SE B SI OTTIENE DA A MOLTIPLICANDO TUTTI I TERMINI DI UNA LINEA · UN NUMERO REALE λ, ALLORA IL det B E' $\lambda \det A$ λ ELEVATO ALLA QUANTITA' DI RIGHE (O COLONNE)
5. SE A HA 2 RIGHE O 2 COLONNE = ALLORA $\det A = 0$ SE MOLTIPLICO TUTTE LE RIGHE $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det A$
6. SE A E' UNA MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE O INFERIORE $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ (PRODOTTO DEI NUMERI DELLA DIAGONALE PRINCIPALE)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \quad 1 \cdot (2 \cdot 1) = 2$$

IN PARTICOLARE, $\boxed{\det I_n = 1}$ → MATRICE IDENTICA

TRIANGOLARE SUPERIORE = I TERMINI SONO TUTTI 0 AL DI SOTTO DELLA DIAGONALE PRINCIPALE

TRIANGOLARE INFERIORE = I TERMINI SONO TUTTI 0 AL DI SOPRA DELLA DIAGONALE PRINCIPALE

7. SE B SI OTTIENE DA A SOMMANDO AD UNA RIGA (COLONNA) IL PRODOTTO DI UN'ALTRA RIGA (COLONNA) · UN NUMERO REALE λ ALLORA $\det A = \det B$

$\det A \det B$

$AB \neq BA$ PERÒ IL $\det(AB) = \det(BA)$

$$\det(AB) = \underbrace{\det A \cdot \det B}_{\text{PRODOTTO TRA NUMERI REALI, QUINDI COMMUTATIVO}} = \det B \cdot \det A = \det(BA)$$

01/02/22 pt.4

CONSIDERIAMO L'INSIEME $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ LA PRODOTTO RIGHE • COLONNE

- NON E' COMMUTATIVO $AB \neq BA$, MA HANNO UGUALE IL DETERMINANTE
- E' ASSOCIATIVO

LA MATRICE IDENTICA, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ E' ELEMENTO NEUTRO RISPETTO AL PRODOTTO RIGHE • COLONNE

$\forall A \in M_n(\mathbb{R}) \quad A \cdot I_n = A = I_n \cdot A$

MATRICE INVERTIBILE

$A \in M_n(\mathbb{R})$

A E' INVERTIBILE $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists B \in M_n(\mathbb{R}) \mid AB = I_n = BA$

QUALI SONO LE MATRICI INVERTIBILI?

SUPPONIAMO A INVERTIBILE $\Rightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{R}) \mid AB = BA = I_n$

$\det(AB) = \underset{\text{MATRICE IDENTICA}}{\det(I_n)} = 1 \qquad \underbrace{\det A \cdot \det B}_{\text{x TM. DI BINÈT}} = \underset{\text{DET. MATRICE DEL PRODOTTO}}{\det(AB)} = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$

NON PUO' ESSERE 0 IL DET DI UNA MATRICE INVERTIBILE

SE A INVERTIBILE, ~~ALLORA~~ $\det A \neq 0$

E' UNA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE, CIOE' SI PUO' DIMOSTRARE CHE LE MATRICI INVERTIBILI SONO TUTTE E SOLE LE MATRICI CON $\det A \neq 0$

A INVERTIBILE $\Rightarrow$ $\det A \neq 0$

$\Longleftrightarrow$

MATRICI CON $\det A \neq 0 \rightarrow$ NON SINGOLARI

INVERSA DI UNA MATRICE

SIA $A \in M_n(\mathbb{R})$ SUPPONIAMO CHE $\det A \neq 0$ ALLORA A E' INVERTIBILE E LA SUA MATRICE INVERSA (UNICAMENTE DETERMINATA)

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^*)^T}$$

A^* = MATRICE AGGIUNTA

QUELLA MATRICE IL CUI TERMINE (i,j) ~~Aij~~ E' IL COMPLEMENTO ALGEBRICO DEL TERMINE DI POSTO (i,j) DI A

COMP. ALGEBRICO $= (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{matrix}$

$-20 + 72 + 24 - (90 + \cancel{12} - 32) =$

$+76 - 70 = 6$

$\exists A^{-1}$ PERCHE $\det A \neq 0$

26-32+4 (2)

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -16 & +26 & -11 \\ +14 & -22 & +10 \\ -6 & +12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -16 & +14 & -6 \\ +26 & -22 & +12 \\ -11 & +10 & -6 \end{pmatrix}}_{\text{TRASPOSTA DI } A^*} = \begin{pmatrix} -8/3 & +7/3 & -1 \\ 13/3 & -11/3 & +2 \\ -11/6 & +5/3 & -1 \end{pmatrix}$$

PER CONTROLLARE SI DOVREBBE FARE IL PRODOTTO DI $A^{-1} \cdot A$ E TROVARE I_3

$A^{-1} \cdot A =$ $\qquad\qquad$ $A^{-1} \cdot A = I_3$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8/3 & +7/3 & -1 \\ 13/3 & -11/3 & +2 \\ -11/6 & +5/3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$(1,1)$ $\quad -\frac{8}{3} \cdot 2 + \frac{7}{3} \cdot 4 + -1 \cdot 3 =$

$-\frac{16}{3} + \frac{28}{3} - 3 = \frac{-16+28-9}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$(1,2)$ $\quad -\frac{8}{3} \cdot 4 + \frac{7}{3} \cdot 5 - 1 =$

$-\frac{32}{3} + \frac{35}{3} - 1 = \frac{-32+35-3}{3} = 0$

$(1,3)$ $\quad -\frac{8}{3} \cdot 6 + \frac{7}{3} \cdot 6 + 2 = \frac{-48+42+6}{3} = 0$

$(2,1)$ $\quad \frac{13}{3} \cdot 2 - \frac{11}{3} \cdot 4 + 2 \cdot 3 =$

$\frac{26}{3} - \frac{44}{3} + 6 = \frac{26-44+18}{3} = 0$

$(2,3)$ $\quad \frac{13}{3} \cdot 6 - \frac{11}{3} \cdot 6 + 2 \cdot (-2) =$

$\frac{78}{3} - \frac{66}{3} - 4 = \frac{78-66-12}{3} = 0$

$(2,2)$ $\quad \frac{13}{3} \cdot 4 - \frac{11}{3} \cdot 5 + 2 =$

$\frac{52}{3} - \frac{55}{3} + 2 = \frac{52-55+6}{3} = 1$

3

(3,1) $-\frac{11}{\cancel{6}_3}\cdot\cancel{2} + \frac{5}{3}\cdot 4 - 3 =$

$\frac{-11+20-9}{3} = 0$

(3,2) $-\frac{11}{\cancel{6}_3}\cdot\cancel{4}^{2} + \frac{5}{3}\cdot 5 - 1 =$

$\frac{-22+25-3}{3} = 0$

(3,3) $-\frac{11}{\cancel{6}_3}\cdot\cancel{6}^{3} + \frac{5}{3}\cdot 6 + 2$

$\frac{-33+30+6}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

RANGO DI UNA MATRICE

02-02-22.

SIA $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ m RIGHE n COLONNE

SOTTO MATRICE DI A (MATRICE CHE SI OTTIENE CANCELLANDO ALCUNE RIGHE E COLONNE DI A)

TRA LE SOTTOMATRICI DI A CI SONO MATRICI QUADRATE E DI QUESTE POSSO CALCOLARE IL DETERMINANTE

IL det DI UNA SOTTO MATRICE DI A CHE SIA QUADRATA DI ORDINE t SI CHIAMA MINORE DI ORDINE t DI A

MINORI DI UNA MATRICE = determinanti DELLE SOTTOMATRICI DI A QUADRATE

SUPPONIAMO CHE $m \neq n$ e $m > n$

x es.

$\boxed{5 \times 3}$ IL MASSIMO ORDINE DEI MINORI E' n

MAX ORDINE DEI MINORI = 3

RANGO DI A: DIREMO CHE LA MATRICE A HA RANGO 0 $\iff$ A E' MATRICE NULLA

SUPPONIAMO CHE $A \neq 0$, e ALLORA IL RANGO DI A

$$\rho(A) = k \in \mathbb{N} \iff$$

1. A POSSIEDE UN MINORE DI ORDINE k DIVERSO DA 0 (CIOE' A DEVE AVERE UNA SOTTOMATRICE QUADRATA DI ORDINE k $\neq 0$)
2. A NON HA SOTTOMATRICI DI ORDINE k+1, CIOE' k E' IL MASSIMO ORDINE DEI MINORI, OPPURE TUTTI I MINORI DI ORDINE > k SONO = 0

$\iff$ QUESTO SIGNIFICA CHE k E' IL MASSIMO ORDINE DI UN MINORE $\neq 0$ DI A

$\iff$ A HA RANGO = k SE 1. POSSIEDE UN MINORE DI ORDINE $k \neq 0$ E TUTTI I MINORI DI $k+1 = 0$

$\iff$ NON E' NEANCHE NECESSARIO PRENDERE TUTTI I MINORI DI ORDINE k+1 MA BASTA PRENDERE GLI ORLATI DI QUEL MINORE ~~MINORI~~

A POSSIEDE UNA SOTTOMATRICE B QUADRATA DI ORDINE k CON $\det \neq 0$ E TUTTE LE SOTTOMATRICI QUADRATE DI ORDINE k+1 CHE HANNO B COME SOTTOMATRICE (GLI ORLATI DI B) HANNO $\det = 0$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 12 \end{pmatrix} \qquad 1 \leq \rho(A) \leq 3$$

3×5

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \qquad 2 \leq \rho(A) \leq 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 8 \end{matrix}\right. \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \qquad 8 + 0 + 4 - (2 + 10 + 0) = $$

$$12 - 12 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \cancel{0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$0 + 1 = 1 \neq 0$$

$$\rho(A) = 3$$

03-02-22. (1)

SIA $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ SI DEFINISCE **RANGO DI A** $\rho(A)$ IL MASSIMO **ORDINE DI UN MINORE** DIVERSO DA 0 DELLA MATRICE

DOVE MINORE DI A È IL DETERMINANTE DI UNA SOTTOMATRICE QUADRATA

$\rho(A) = t \overset{def}{\iff}$ 1. A POSSIEDE UN MINORE DI ORDINE t DIVERSO DA 0 E CIOE' SE ESISTE UNA SOTTOMATRICE DI A QUADRATA DI ORDINE t CON DETERMINANTE $\neq 0$

2. OGNI MINORE DI ORDINE $K > t$ È $= 0$ CIOE' OGNI SOTTOMATRICE DI A QUADRATA DI ORDINE > DI t HA DETERMINANTE 0

$\iff$ 1. A POSSIEDE UN MINORE DI ORDINE t $\neq 0$

2. I MINORI DI ORDINE $t+1$ SONO TUTTI NULLI

$\iff$ 1. A POSSIEDE UN MINORE DI ORDINE t DIVERSO DA 0

2. TUTTI GLI ORLATI DELLA MATRICE QUADRATA, DI ORDINE t CON DETERMINANTE $\neq 0$, HANNO DETERMINANTE NULLO

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ -6 & 8 & 2 \end{matrix} \end{pmatrix} = A \qquad A \in M_{4,5}(\mathbb{R})$$

4×5

$$1 \leq \rho(A) \leq 4$$

SE CONSIDERO LA SOTTOMATRICE $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$

ALLORA A POSSIEDE ALMENO UN MINORE DI ORDINE 2 $\neq 0$

LA MATRICE HA $\rho(A)$ ALMENO 2 $\qquad 2 \leq \rho(A) \leq 4$

È 2 SE TUTTE LE SOTTOMATRICI DI ORDINE + GRANDE HANNO MINORI = 0

ORLATI

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (-1-2) + (+3) = 0$$

↑ x FARE IL det PRENDIAMO LA COLONNA

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = (1+3) - 4 = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (0+1) + (-1) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (-6-0) + 2(0+3) = -6+6=0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = (8+0) + 2(0-4) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (2+0) + 2(0-1) = 0$$

QUESTA MATRICE $\rho(A)=2$

SIA $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ SI DICE A HA RANGO MASSIMO QUANDO $\rho(A)$ E' IL MINIMO TRA IL n. DI RIGHE E IL n. DI COLONNE

PER ESEMPIO, NELLA PRECEDENTE AVREBBE AVUTO RANGO MASSIMO SE AVESSE AVUTO RANGO 4

SE $A \in M_{4,5}(\mathbb{R})$ ALLORA A HA RANGO MASSIMO SE $\rho(A)=4$

IN PARTICOLARE, SE CONSIDERO $A \in M_n(\mathbb{R})$, ALLORA A HA RANGO MASSIMO E CIOE' $\rho(A)=n \iff \det A \neq 0$

1. SE M E' UNA MATRICE A SCALA ALLORA $\rho(M)$ = NUMERO DEI PIVOT
2. SE $A \sim B$ (EQUIVALENTI) ALLORA $\rho(A)=\rho(B)$

QUINDI UN MODO ALTERNATIVO x CALCOLARE IL $\rho(A)$ E' DETERMINARE UNA MATRICE A SCALA EQUIVALENTE E' CONTARE I PIVOT

EQUIVALENZA TRA 2 MATRICI E' UNA RELAZ. DI EQUIVALENZA:

- OGNI MATRICE E' EQUIVALENTE A SE' STESSA
- SE A E' EQUIVALENTE A B, PERCHE' FACCIO UN n. DI OPERAZIONI FINITE PER PASSARE DA A A B ANCHE B E' EQUIVALENTE AD A PERCHE' A VOGLIO UN n. DI OPERAZIONI DEFINITE PER PASSARE DA B AD A
- PASSO DA A A B MEDIANTE UN NUMERO FINITO DI OPERAZIONI, DA B A C ALLO STESSO MODO E DA A A C ALLO STESSO MODO

CLASSE DI EQ. DI MATRICI: C'E' UNA SOLA ~~CLASSE~~ ~~DI EQ.~~ MATRICE A SCALA RIDOTTA IN UNA CLASSE D'EQ.

UNICA SOLUZIONE

$$\left(\xi_1 = \frac{\det B_1}{\det A}, \xi_2 \frac{\det B_2}{\det A}, \dots, \xi_n = \frac{\det B_n}{\det A}\right)$$

DOVE B_1 E' QUELLA CHE SI OTTIENE SOSTITUENDO ALLA PRIMA COLONNA DI A QUELLA DEI TERMINI NOTI $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

B_2 E' QUELLA CHE SI OTTIENE SOSTITUENDO ALLA SECONDA COLONNA DI A QUELLA DEI TERMINI NOTI $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

B_n SI OTTIENE SOSTITUENDO ALLA n-ESIMA COLONNA DI A QUELLA DEI TERMINI NOTI $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + z = 0 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = +1 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3 + 1 = -2$$

E' UN SISTEMA DI CRAMER = HA UNA SOLA SOLUZIONE

$$\xi_1 = \frac{\quad}{-2}$$

$$\xi_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{\det A}, \quad \xi_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}}{\det A}, \quad \xi_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{\det A} =$$

$$= \frac{-\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{-2}, \quad \frac{-2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}{-2}, \quad \frac{-2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{-2} =$$

$$= \frac{-(1+2)}{-2} = \frac{3}{2}, \quad \left(\frac{+4, +(2-3)}{-2} = -\frac{5}{2}, \quad \frac{6}{-2} = -3 \right)$$

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -3\right)$$

UN SISTEMA E' OMOGENEO SE I TERMINI NOTI SONO TUTTI $=0$

$b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$

UN SISTEMA OMOGENEO E' SEMPRE COMPATIBILE

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \\ 4x - y = 3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

QUESTO SISTEMA, PUR ESSENDO QUADRATO ← $\det A = + \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} =$

$(-3-4) + (-1+8) = -7+7=0$

NON E' DI CRAMER (MA PUO' ESSERE RISOLTO CON IL METODO DI GAUSS)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \det B = 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$= (3-2) + 2(9-8) + (-3-4) =$

$1 - 2 + (-7) = -8$

7.6.1 - 7.6.4 - 7.6.6. p.285

2.5.12 p.108

$W = \{2^n \cdot 3^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ CONSIDERIAMO LA RELAZIONE R DEFINITA DA:

$$2^n \cdot 3^m \; R \; 2^h \cdot 3^k \overset{def}{\iff} |n-3m| = |h-3k|$$

i) VERIFICARE CHE R E' DI EQUIVALENZA

ii) DESCRIVERE LA CLASSE $[2^n \cdot 3^m]_R$, $[1]_R$, $[2]_R$, $[3]_R$, $[24]_R$

R E' RIFLESSIVA: $\forall\, 2^n \cdot 3^m \in W$ SI HA CHE $|n-3m| = |n-3m|$

QUINDI $2^n \cdot 3^m \, R \, 2^n \cdot 3^m$

R E' SIMMETRICA $2^n 3^m \, R \, 2^h 3^k \Rightarrow |n-3m| = |h-3k|$

UGUAGLIANZA E' SIMMETRICA

$|h-3k| = |n-3m| \Rightarrow 2^h 3^k \, R \, 2^n 3^m$

R E' TRANSITIVA: $2^n 3^m \, R \, 2^h 3^k$ $\Rightarrow$ $|n-3m| = |h-3k|$ $\Rightarrow$

$2^h 3^k \, R \, 2^s 3^t$ $\quad |h-3k| = |s-3t|$

PROPRIETA' DELL'UGUAGLIANZA TRANSITIVA $|n-3m| = |s-3t| \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^n 3^m \, R \, 2^s 3^t$

$[2^n 3^m]_R = \{2^h 3^k \in W \mid 2^n 3^m \, R \, 2^h 3^k\} = \{2^h 3^k \in W \mid |n-3m| = |h-3k|$

$[1]_R = [2^0 \cdot 3^0]_R = \{2^h \cdot 3^k \mid |h-3k| = 0\} = \{2^h \cdot 3^k \mid h-3k=0\}$

$n=0 \;\; m=0 \quad = \{2^h \cdot 3^k \mid h = 3k\} = \{2^{3k} 3^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

L'ESPONENTE DEL 2 E' 3 VOLTE DELL'ESP. DEL K

$[24]_R = [2^3 \cdot 3^1]_R \in [1]_R$

$1 \, R \, 24 \quad [24]_R = [1]_R$

$[2]_R = [2^1 \cdot 3^0]_R = \{2^h \cdot 3^k \in W \mid 2^n 3^m \, R \, 2^h 3^k\} \iff$

$\{2^h \cdot 3^k \in W \mid |n-3m| = |h-3k|\} \iff$

$\{2^h \cdot 3^k \mid |h-3k| = 1\} \iff \{2^h \cdot 3^k \mid h-3k = 1 \vee h-3k = -1\} \iff$

$\{2^h \cdot 3^k \mid h = 3k+1 \vee h = 3k-1\}$

ESPRIMO UN LEGAME TRA L'ESPONENTE DEL 2 E DEL 3

$[2]_R = \{2^{3k+1} 3^k \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{2^{3k-1} 3^k \mid k \in \mathbb{N}$

SE FOSSE 0 SAREBBE $3 \cdot 0 - 1 = -1$

$[3]_R = [2^0 \cdot 3^1]_R = \{2^h \cdot 3^k \mid |h - 3u| = |h - 3k|\} \Leftrightarrow$
$\{2^h 3^k \mid |h - 3k| = |0 - 3| = 3\} \Leftrightarrow$
$\{2^h \cdot 3^k \mid h - 3k = 3 \vee h - 3k = -3\} \Leftrightarrow$
$\{2^h \cdot 3^k \mid h = 3k+3 \vee h = 3k - 3\} \Leftrightarrow$

$$[3]_R = \{2^{3k+3} 3^k \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{2^{3k-3} 3^k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

CONSIDERIAMO UN SISTEMA DI EQ. LINEARI

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ASSOCIAMO 2 MATRICI:

MATRICE COMPLETA
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad m \times (m+1)$$

MATRICE INCOMPLETA
COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad m \times n$$

SISTEMA E' COMPATIBILE (CIOE' AMMETTE ALMENO UNA SOLUZIONE) $\Leftrightarrow$

TEOREMA DI ROUCHE' - CAPELLI
$$\rho(A_b) = \rho(A)$$

CONSIDERIAMO UN SISTEMA QUADRATO (n. DI EQ. = n. INCOGNITE)
(SISTEMA DI n EQUAZIONI IN n INCOGNITE)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

IN QUESTO CASO LA MATRICE INCOMPLETA E' UNA MATRICE QUADRATA DI ORDINE n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

SE $\det(A) \neq 0$ ALLORA IL SISTEMA E' DETTO DI CRAMER
E' COMPATIBILE ED AMMETTE 1 SOLA SOLUZIONE