Esercizi

Esercizio 1. Siano A e B due eventi di una stessa sigma-algebra con $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/4$ e $P(A \cap B) = 1/12$. Calcolare:

1. $P(A \cup B)$,
2. $P(A \cap \overline{B})$,
3. $P(\overline{A} \cap B)$,
4. $P(\overline{A} \cap \overline{B})$,
5. $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

Esercizio 2. Siano A e B due eventi di una stessa sigma-algebra con $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$ e $P(A \cup B) = 0.6$. Calcolare:

1. $P(A \cap \overline{B})$,
2. $P(\overline{A} \cap B)$,
3. $P(\overline{A} \cap \overline{B})$,
4. $P(\overline{A} \cup \overline{B})$,
5. $P(A \cup B)$.

Esercizio 3. Siano A e B due eventi di una stessa sigma-algebra con $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.5$ e $P(A|B) = 0.4$. Calcolare

1. $P(A \cap B)$,
2. $P(B|A)$,
3. $P(A \cup B)$,
4. $P(\overline{B}|A)$.

Esercizio 4. Si consideri l'esperimento consistente nel lancio di un dado e si faccia riferimento ai seguenti eventi: Siano $A = \{Esce\ 5\ oppure\ 6\}$ e $B = \{Esce\ un\ numero\ pari\}$. Supponiamo che $P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/2$ e $P(A \cap B) = 1/8$.

1. Dire se il dado è truccato motivando la risposta.
2. Calcolare le probabilità dei seguenti eventi:
   (a) $C_1 = A \cup B$,
   (b) $C_2 = A \cup (B \cap \overline{B})$,
   (c) $C_3 = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$.

Esercizio 5. Con riferimento all'Esercizio 4, assumiamo che $P(A) = a$, $P(B) = b$ e $P(A \cap B) = c$.
Stabilire quali sono i valori ammissibili di a, b e c.

Esercizio 6. La probabilità che un primo studente risolva correttamente un esercizio è p mentre per un secondo studente tale probabilità è q. Supponiamo che gli studenti lavorino separatamente (e quindi indipendentemente).

1. Calcolare la probabilità che almeno uno dei due studenti risolva correttamente l'esercizio. In che caso tale probabilità vale 1?

2. Calcolare la probabilità che esattamente uno dei due studenti risolva correttamente l'esercizio. In che caso tale probabilità vale 1?

Esercizio 7. Un esperimento consiste nella scelta casuale di un numero intero N con $1 \le N \le 16$. Si considerino i seguenti eventi: $A = \{N \le 8\}$, $B = \{8 \le N \le 15\}$, $C = \{N\ pari\}$.

1. Dire se esistono coppie di eventi indipendenti e se gli eventi A, B e C sono indipendenti.
2. Valutare la probabilità dei seguenti eventi $A \cap (B \cap \overline{C})$, $A \cup (B \cap \overline{C})$.

Esercizio 8. Un esperimento consiste nella scelta casuale di un numero intero N con $1 \le N \le 8$. Si considerino i seguenti eventi: $A = \{N \le 4\}$, $B = \{4 \le N \le 7\}$, $C = \{N\ dispari\}$.

1. Dire se esistono coppie di eventi indipendenti e se gli eventi A, B e C sono indipendenti.
2. Valutare la probabilità dei seguenti eventi $A \cap (B \cap \overline{C})$, $A \cup (B \cap \overline{C})$.

Esercizio 9. Consideriamo una stringa binaria costruita con tre bit generati a caso. Stabilire se i seguenti eventi

$$A = \{000,\ 001\, 010,\ 100\}, \quad B = \{000,\ 001\, 100,\ 101\}, \quad C = \{011,\ 100\, 110,\ 111\}$$

sono indipendenti.

Esercizio 10. Si considerino due urne; la prima urna contiene 4 biglie bianche e 8 biglie rosse, la seconda urna contiene 3 biglie bianche e 3 biglie blu. Si lancia una moneta onesta, se esce testa si estrae una biglia dalla prima urna altrimenti si estrae una biglia dalla seconda urna. Calcolare:

1. la probabilità che la biglia estratta sia bianca,
2. sapendo che la biglia estratta è bianca, calcolare la probabilità che dal lancio della moneta sia uscita testa,
3. sapendo che la biglia estratta è rossa, calcolare la probabilità che dal lancio della moneta sia uscita testa.

Esercizio 11. Una scatola contiene n schede bianche e k schede azzurre; una seconda scatola contiene k schede bianche e n azzurre. Si estrae una scheda da una delle due scatole scelta a caso.

1. Calcolare con che probabilità la scheda estratta è bianca. Con che probabilità è azzurra?
2. Sapendo che la scheda estratta è bianca, con che probabilità proviene dalla scatola i-esima per $i = 1, 2$?

Esercizio 12. Una scatola contiene n schede bianche e k schede azzurre; una seconda scatola contiene k schede bianche e n azzurre e una terza contiene $n+k$ schede bianche e $n+k$ schede azzurre. Si estrae una scheda da una delle scatole scelta a caso.

1. Calcolare con che probabilità la scheda estratta è bianca. Con che probabilità è azzurra?
2. Sapendo che la scheda estratta è bianca, con che probabilità proviene dalla scatola i-esima per $i = 1, 2, 3$?

Esercizio 13. Si considerino tre urne, delle quali le prime due contengono 6 biglie bianche e 6 bigie nere e la terza contiene 10 biglie bianche e 2 nere. Si sceglie un'urna a caso e da questa si estrae una biglia.

1. Calcolare con che probabilità la biglia estratta è bianca. Con che probabilità la biglia estratta è nera?
2. Sapendo che la biglia estratta è bianca, con che probabilità proviene dall'urna i-esima per $i = 1, 2, 3$?

Esercizio 14. Si considerino tre urne, la prima contiene 4 biglie bianche e 4 bigie nere, la seconda contiene 10 biglie bianche e 2 nere e la terza contiene 5 biglie bianche e 5 nere. Si sceglie un'urna a caso e da questa si estrae una biglia.

1. Calcolare con che probabilità la biglia estratta è bianca. Con che probabilità la biglia estratta è nera?
2. Sapendo che la biglia estratta è bianca, con che probabilità proviene dall'urna i-esima per $i = 1, 2, 3$?

Esercizio 15. Si consideri un'urna contenente 9 biglie contrassegnate con i numeri $1, 2, \ldots, 9$. Si estrae una biglia: se si presenta un numero pari la biglia estratta è reinserita nell'urna, mentre se esce un numero dispari la biglia estratta è eliminata. Si effettua una seconda estrazione di una biglia dall'urna. Si definiscono i seguenti eventi:
$A_i = \{\text{La } i\text{-esima biglia estratta presenta un numero pari}\} \quad (i = 1, 2)$,
$B_i = \{\text{La } i\text{-esima biglia estratta presenta un numero dispari}\} \quad (i = 1, 2)$.
Valutare le seguenti probabilità:

1. $P(A_i),\ P(B_i)$ per $i = 1, 2$;
2. $P(A_1|A_2),\ P(A_1|B_2)$.