1) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ 30/06/2022

$x \in A \vee x \in B$

$\neg (x \notin A \wedge x \notin$

$$X \setminus (A \cup B) = \{ x \in X \wedge x \notin A \cup B \}$$
$$= \{ x \in X \wedge (x \notin A \cancel{\wedge} x \notin B) \}$$
$$= \{ (x \in X \wedge x \notin A) \cancel{\wedge} (x \in X \wedge x \notin B) \}$$
$$= \{ x \in X \setminus A \cancel{\wedge} x \in X \setminus B \}$$
$$= \{ x \in X \setminus A \cancel{\wedge} x \in X \setminus B \}$$
$$= (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

2) $\begin{cases} x \equiv 16 \pmod{19} \\ x \equiv 17 \pmod{20} \end{cases}$ $x = 16 + 19k$

$16 + 19k \equiv 17 \pmod{20}$

$19k \equiv 1 \pmod{20}$ $\quad MCD(20, 19) = 1$

$20 = 19 \cdot 1 + 1$

$19 = 1 \cdot 19 + 0$

$1 = 20(1) - 1(19)$

$s = -1$

$s = [-1]_{20} = [19]_{20}$

$x = 16 + 19(19) = 377$

Soluzione: $[377]_{380}$

Soluzione unica compresa tra 1000 e 1500 $[1137]_{380}$

3)

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 3 \right\}$$

$\nexists$ elemento neutro

non può essere gruppo

$A, B \in N$, $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB) = 9$ — per Binet

$AB \notin N$ non è parte stabile

4)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{ij} \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & 0 & \ddots & a_{ii} \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X$$

$A, B \in X$, AB è ancora triangolare superiore

3)

21.03.2022

- $f: (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{Z},+)$ $f(x)$ = parte intera di x

$f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=1$, $f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})=0+0$

non è omomorfismo

- $f: (\mathbb{Z}_6,+) \to (\mathbb{Z}_2,+)$ $f(x) = rest(x,2)$

$f([a]_6+[b]_6) = f([a+b]_6) = \cancel{rest(a+b,2)}\ [a+b]_2 = [a]_2+[b]_2$

$= f([a]_6)+f([b]_6)$ è omomorfismo

- $f: (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $f(x)=2^x$

$f(x+y) = 2^{x+y}$

$f(x)\cdot f(y) = 2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$ è omomorfismo

1)

21/03/2022

$f^{-1}(\{a\}) = \{1, 2, 5, 8\}$ $f^{-1}(\{b\}) = \{4, 6\}$

$f^{-1}(\{c\}) = \{3, 7\}$ essi formano una partizione di X perchè $\emptyset \notin X$, sono disgiunti e la loro unione da X

2)

$\sim \subseteq X \times X$

$x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$

- riflessiva

$x \sim x$, $f(x) = f(x)$, banale

- simmetria

$x \sim \cancel{y} \Rightarrow y \sim x$

hp.
$f(x) = f(y)$

th.
$f(y) = f(\cancel{x})$ è lo stesso di $f(x) = f(y)$

- transitività

$x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$

hp.
$f(x) = f(y)$
$f(y) = f(z)$

th.
$f(x) = f(z)$

ho che $f(y) = f(x) = f(z)$ mi basta banalmente sostituire e ottengo $f(x) = f(z)$ e quindi $x \sim z$

3)

$[1]_\sim = \{2, 5, 8\}$ $\quad [3]_\sim = \{3, 7\}$

$[4]_\sim = \{4, 6\}$

$X/_\sim = \{[1]_\sim, [3]_\sim, [4]_\sim\}$

//

2)

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 2 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \end{cases} \qquad x = 0 + 2k$$

$2k \equiv 4 \pmod 5$ $\qquad MCD(5,2) = 1$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 \cdot 1 + 2(-2)$

$s = 4(-2) = -8$

$s = [-8]_5 = [2]_5$

$x = 0 + 2(2) = 4$

$[4]_{10} = 4 + 10y$

$4 + 10y \equiv 2 \pmod 3$

$10y \equiv -2 \pmod 3$

$10y \equiv 1 \pmod 3$ $\qquad MCD(10,3) = 1$

$10 = 3 \cdot 3 + 1$

$3 = 1 \cdot 3 + 0$

$1 = 10 - 3 \cdot 3 = 10 \cdot 1 + 3(-3)$

$s = 1 \qquad s = [1]_3$

$x = 4 + 10 = 14$

Soluzione del sistema: $[14]_{30}$

2)

22/02/2022

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{2} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 6 \pmod{11} \end{cases} \qquad x = 0 + 2k$$

$2k \equiv 3 \pmod{7}$ $\qquad$ $MCD(7,2) = 1$

$7 = 2 \cdot 3 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 7 - 2 \cdot 3 = 7 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 7 \cdot 1 - 3 \cdot 2$

$s = (-3)(3) = -9$

$s = [-9]_7 = [5]_7$

$x = 0 + 2(5) = 10$

Soluzione delle prime due equazioni: $[10]_{14} = 10 + 14y$

$k = 10 + 14y$

$10 + 14y \equiv 6 \pmod{11}$

$14y \equiv -4 \pmod{11}$

$14y \equiv 7 \pmod{11}$ $\qquad$ $MCD(14,11) = 1$

$14 \cdot 6 = 84$

$14 = 11 \cdot 1 + 3$

$11 = 3 \cdot 3 + 2$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 3 - 2 = 3 - (11 - 3 \cdot 3) = 3 - 11 + 3 \cdot 3 = 3 \cdot 4 - 11 =$

$4(14 - 11) - 11 =$

$4 \cdot 14 - 4 \cdot 11 - 11 =$

$14 \cdot 4 - 5 \cdot 11$

$s = 7(4) = 28$

$s = [28]_{11} = [6]_{11}$

$k = 10 + 14(6) = 10 + 84 = 94$

Soluzione del sistema $[94]_{154}$

3) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ sottogruppo abeliano di $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$

parte stabile

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+b & 1 \end{pmatrix} \in M$$

M è chiuso rispetto al prodotto

$\exists\, I_2 \in M$, con $a=0$

$\det(A)$ è sempre $=1$ quindi ogni matrice è invertibile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$$

4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + \alpha R_1$

$3 + \alpha = 0$

$\alpha = -3$

$(3,4,5) + (-3,-6,-9)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + \alpha R_1$

$\alpha = -4$

$(4,6,8) + (-4,-8,-12)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + \alpha R_2$

$-2 + (-2)\alpha$

$-2\alpha = 2$

$\alpha = -1$

$(0,-2,-4) + (0,2,4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rango $= 2$

22/02/2022

$\forall c \in \mathbb{Z}$ $\quad f_c : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f_c(x) := x - cx + c \quad \forall x \in \mathbb{Z}$

per quali valori di c f_c è iniettiva, suriettiva o biettiva

iniettività $\quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$f(x) = x - cx + c$

$f(y) = y - cy + c$

$x - cx + c = y - cy + c$

$x - cx = y - cy$

$x(1-c) = y(1-c)$

$x(1-c) = y(1-c) \Rightarrow x = y$

se $c = 1$ $\quad f_c(x) = x - x + 1 = 1$

non è iniettiva perché costante

se $c = 0$ $\quad f_c(x) = x - 0(x) + 0 = x - 0 = x$, funzione identità, biettive

f_c è quindi iniettiva $\forall c \neq 1$

suriettività

$\forall y \in \mathbb{Z} \; \exists x \in \mathbb{Z} \mid f(x) = y$

$y = x - cx + c$ $\qquad x - cx + c = y$

$x(1-c) = y - c$

$x = \dfrac{y-c}{1-c} =$

se $c = 2$ $\quad x = \dfrac{y-2}{-1} = -y + 2 \in \mathbb{Z}$

quindi per $c = 2$ è suriettiva

per $c = 1$ non è suriettiva

Se $c \neq 2$ la funzione non è mai suriettive

$f(2)$ quindi è biettive

$f(0)$ " " "

3) 550515015S

04|02|2022

elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{20}$

$$\mathbb{Z}_{20}^* = \{[1]_{20}, [3]_{20}, [7]_{20}, [9]_{20}, [11]_{20}, [13]_{20}, [17]_{20}, [19]_{20}\}$$

$$\varphi(20) = \varphi(5 \cdot 2^2) = (5-1)(2^2-2) = (4)(2) = 8$$

divisori dello 0 di $(\mathbb{Z}_{20}, +, \cdot)$, sono tutti gli elementi non invertibili (diversi da 0)

$$\mathbb{Z}_{20}^d = \{[2]_{20}, [3]_{20}, [4]_{20}, [5]_{20}, [6]_{20}, \dots\}$$

dato $[a]_{20}$, l'inverso è $[b]_{20}$ t.c. $ab \equiv 1 \pmod{20}$

$([1]_{20})^{-1} = [1]_{20}$ $\quad([3]_{20})^{-1} = [7]_{20}$ $\quad([9]_{20})^{-1} = [9]_{20}$

$([11]_{20})^{-1} = [11]_{20}$ $\quad([13]_{20})^{-1} = [17]_{20}$ $\quad([19]_{20}^{-1}) = [19]_{20}$

4)

dimostrare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ di equazione $x^2 - y^2 = 0$ non è sottospazio di $\mathbb{R}_2$

$S = \{(x,y) : x^2 - y^2 = 0\}$ $\quad (0,0) \in S$ $\quad S = \{(x,y) : x^2 = y^2\}$

~~utilizzo il criterio con la combinazione lineare~~

$\cancel{\alpha(x,y) + \beta(z,k) = (\alpha x, \alpha y) + (\beta z, \beta k) = (\alpha x + \beta z, \alpha y + \beta k)}$

$(1,-1), (1,1) \in S$ $\quad$ ma $(1,-1) + (1,1) = (2,0) \notin S$

04/02/2022

1) $\forall n \geq 8 \quad \exists a, b \in \mathbb{N}_0 : n = 3a + 5b$

procedo per induzione.

P. B.

$n = 8$, $8 = 3a + 5b$, $a, b = 1$ v.

Passo induttivo

$n(\cancel{n+1}) = 3(a+1) + 5(b+1) = 3a + 3 + 5b + 5$

$n(\cancel{n+1}) = \underbrace{3a + 5b}_{\text{vero per ipotesi induttiva}} + \underbrace{3 + 5}_{\text{vero perchè sto}}$

sommando una stessa quantità, cioè $3a + 5b$ con $a, b = 1 \in \mathbb{N}_0$

$n = 3(a+1) + 5(b+1)$

2) $13x + 19y = 1$ MCD$(19, 13) = 1$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 2 \\ \hline 38 \end{array}$$

$19 = 13 \cdot 1 + 6$

$13 = 6 \cdot 2 + 1$

$6 = 1 \cdot 6 + 0$

$1 = 13 - 6 \cdot 2 = 13 - 2(19 - 13)$

$= 13 - 2 \cdot 19 + 2 \cdot 13 =$

$3 \cdot 13 - 2 \cdot 19$

$13(3) + 19(-2) = 1$

$x = 3$
$y = -2$

$39 - 38 = 1$

3)

21/01/2022

$G = \{e, a, b, c\}$

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

$(G, *)$ è gruppo abeliano

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$

$a_{12} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

$a_{21} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$

$a_{22} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) ~~stabilire~~ dimostrare che esistono almeno n partizioni nell'insieme $\{1, \dots, n\}$

3/04/2017

Possiamo considerare la partizione

$$p_i = \{\{i\}, \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}\}$$

con i che va da 1 a n

$(a,b) R (c,d) \iff a+d = b+c$

21/01/2022

- riflessiva

  $(a,b) R (a,b)$

  $a+b = b+a$ v.

- simmetrica

  $(a,b) R (c,d) \Rightarrow (c,d) R (a,b)$

~~ipo~~ hp.

$a+d = b+c$

devo provare che

$c+b = d+a$, per la commutatività della somma posso scrivere

$a+d = b+c$ v.

- transitive

  $(a,b) R (c,d) \wedge (c,d) R (e,f) \Rightarrow (a,b) R (e,f)$

~~hp~~. hp.

i) $a+d = b+c$

ii) $c+f = d+e$

th.

$a+f = b+e$

~~sottraendo~~

~~sottraendo~~

~~sostituendo~~ quindi

i) $a = b+c-d$

ii) $f = d+e-c$

$a+f = b+\cancel{c}-\cancel{d}+\cancel{d}+e-\cancel{c} = b+e$

verificato, R è di equiva

1)

$(1,2)\, R\, (a,b) \iff 1+b = 2+a$

$2+b = 1+a$

$b = 10$

$a = 11$

$2+10 = 1+11$

$12 = 12$

$[(1,1)]_R = \{(a,a) : a \in \mathbb{N}\}$

$[(1,2)]_R = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{N},\ b = a+1\}$

$[(2,1)]_R = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{N},\ a = b+1\}$

-

$a < b$

$[(a,b)]_R = \{(m, m+k) : m,k \in \mathbb{N},\ k = b-a\}$

$a > b$

$[(a,b)]_R = \{(m+k, m) : m,k \in \mathbb{N},\ k = a-b\}$

2)
$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod 9 \\ x \equiv 3 \pmod 7 \end{cases} \qquad x = 5 + 9k$$

$15 \mid 7$, remainder 1, quotient 2

$21 - 15 = 6$

$5 + 9k \equiv 3 \pmod 7$

$9k \equiv -2 \pmod 7$

$9k \equiv 5 \pmod 7 \qquad MCD(9,7) = 1$

$9 = 7 \cdot 1 + 2$

$7 = 2 \cdot 3 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 7 - 2\cdot 3 = 7 - 3(9-7) = 7 - 3\cdot 9 + 3 \cdot 7 = 4\cdot 7 - 3 \cdot 9$

$k = (-3)(15) = -15$

$\cancel{[-45]_7 = [4]_7} \qquad [-15]_7 = [6]_7$

$\cancel{x = 5 + 9(4) = 5 + 36 = 41} \qquad \cancel{-15 = (-3)2 + 1}$

$x = 5 + 9(6) =$

~~Soluzione: $[41]_{63} = 41 + 63h$~~

$5 + 54 = 59$

Soluzione del sistema: $[59]_{63} = 59 + 63y$

$$\begin{cases} x \equiv 10 \pmod{13} \\ x \equiv 7 \pmod{15} \end{cases}$$

$x = 10 + 13k$

9/02/2017

$10 + 13k \equiv 7 \pmod{15}$

$13k \equiv -3 \pmod{15}$

$13k \equiv 12 \pmod{15}$

$MCD(15, 13) = 1$

$15 = 13 \cdot 1 + 2$

$13 = 2 \cdot 6 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 13 - 2 \cdot 6 = 13 - 6(15 - 13) = 13 - 6 \cdot 15 + 6 \cdot 13 =$

$= 13(1) - 6 \cdot 15 + 6 \cdot 13 =$

$7 \cdot 13 - 6 \cdot 15$

$s = 7(12) = 84$

$[84]_{15} = [9]_{15}$

$x = 10 + 13(9) = 127$

Soluzione $[127]_{195} = 127 + 195k$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + \alpha R_1$

$2 + \alpha = 0$

$\alpha = -2$

$(2,4,6,8) + (-2,-4,-6,-6)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad R_2 \leftrightarrow R_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + \alpha R_1$

$2 + \alpha = 0$

$\alpha = -2$

$(2,3,5,5) + (-2,-4,-6,-16) = (0,-1,-1,-11$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + \alpha R_2$

$-1 + \alpha = 0$

$\alpha = 1$

$(0,-1,-1,11) + (0,1,2,2) = (0,0,1,$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rango = 3

1. Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$f(x) = x^2 - 3x + 2$ è biettiva? 9/02/2017

iniettività

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x(x-3) + 2 = 0$

$x = -2$

$f(2) = 4 - 3(2) + 2 = 0$

$f(-2) = 4 - 3(-2) + 2 = 12$

$f(5) = 25 - 3(5) + 2 = 25 - 15 + 2 = 12$ $\Big\}$ $x \neq y$ ma $f(x) = f(y)$

la funzione non è iniettiva quindi non potrà essere biettiva

3.

$$\begin{cases} x \equiv 10 \pmod{13} \\ x \equiv 7 \pmod{15} \end{cases} \qquad x = 10 + 13y$$

$10 + 13y \equiv 7 \pmod{15}$

$13y \equiv -3 \pmod{15}$

$28 - 15 = 13$

$28y \equiv 12 \pmod{15}$ $\quad MCD(28, 15) = 1$

$28 = 15 \cdot 1 + 13$

$15 = 13 \cdot 1 + 2$

$13 = 2 \cdot 6 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 13 - 2 \cdot 6 = 13 - 6(15 - 13)$

$= 13 - 6 \cdot 15 + 6 \cdot 13 =$

$13 - 6 \cdot 15 + 6(28 - 15) =$

$13 - 6 \cdot 15 + 6 \cdot 28 - 6 \cdot 15 =$

$13 + 6 \cdot 13 - 6 \cdot 15 =$

$7 \cdot 13 - 6 \cdot 15$

$S = 1(12) = 12$

$x = 10 + 13(12) = 166$

$S = [166]_{195}$

NO!

3)
$$\begin{cases} x \equiv 10 \pmod{13} \\ x \equiv 7 \pmod{15} \end{cases}$$

$x = 10 + 13k$

$10 + 13k \equiv 7 \pmod{15}$

$13k \equiv -3 \pmod{15}$

$28k \equiv 12 \pmod{15}$ $\quad MCD(28,15) = 1$

$28 = 15 \cdot 1 + 13$

$15 = 13 \cdot 1 + 2$

$13 = 2 \cdot 6 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 13 - 2 \cdot 6 = 13 - 6(15 - 13) = 13 - 6 \cdot 15 + 6 \cdot 13$
$= 13 - 6 \cdot 2 =$
$(28 - 15) - 6 \cdot 2 =$
$28 - 15 - 6 \cdot 2 =$
$28 - 27 = 28(1) -$

$1 = 13 - 2 \cdot 6 = 13 - 6 \cdot 2 = 13 - 6(15 - 13) =$

$13 - 6 \cdot 15 + 6 \cdot 13 = 13 - 6 \cdot 2 = (-6)2 + 13 = (-6)2 + 28 - 15 = 28 - 27 = 28($

$S = (1)(12) = 12 \qquad [12]_{15} = 12 + 15h$

~~x = 10 + 13(12 + 15h) =~~

NO...

$R \subseteq N \times N$ 12/01/2017

$xRy \iff x \mid y^2$

Simmetria

xRx, $x \mid x^2$ v. $x^2 = x \cdot x$

~~tebaaai~~ asimmetria

$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$

~~tk~~

$x \mid y^2$, $\exists k : y^2 = xk$

$y \mid x^2$, $\exists h : x^2 = yh$

2|16 4|4

2R4 4R2 ma $x \neq y$

~~$x = y^2$, $x \cdot x \cdot x$ ... $k = 1$~~

non è asimmetrica, quindi non è d'ordine

4.

A e B $n \times n$ su un campo K e se $AB = 0$, allora A e B non sono entrambe invertibili

Una matrice è invertibile $\iff \det(A) \neq 0$

Per il teorema di Binet $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(BA)$

Ma $\det(AB) = 0 \iff \det(A) = 0$ oppure $\det(B) = 0$ ovvero almeno una delle due matrici non è invertibile

1) dimostrare che $|A \cup B|$ non è sempre uguale a $|A|+|B|$ 19/09/2017

$A = \{2,3\}$ $|A| = 2$

$B = \{1,2\}$ $|B| = 2$ $|A|+|B| = 4$ $A \cup B = \{1,2,3\}$

$|A \cup B| = 3$

2)

$2^n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

P.B. $n = 1$

$2^1 \geq 1$, $2 \geq 1$ v.

P.I. hp $2^n \geq n$

$2^{n+1} \geq n+1 \Rightarrow 2^n \cdot 2 \geq n+1$

$2^n + 2^n \geq n+1 \iff 2^n \geq n$ vero per hp.

$2^n \geq 1$ visto che $n \in \mathbb{N}$ 2^n è sempre ≥ 1

3)

$43x - 5y = 1$

$MCD(43,5) = 1$

$43 = 5 \cdot 8 + 3$

$5 = 3 \cdot 1 + 2$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 3 - 2 = 3 - (5-3) = 3 - (5-3) =$

$= 3 - 5 + 3 = 2 \cdot 3 - 5 = 2(43 - 5 \cdot 8) - 5$

$= 2 \cdot 43 - 16 \cdot 5 - 5$

$43(2) - 5(17) = 1$

$= \underbrace{2}_{x} \cdot 43 - \underbrace{17}_{y} \cdot 5$

4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + \alpha R_1$

$\alpha = -2$

$(2,4,6) + (-2,-4,-6)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$R_2 \leftrightarrow R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rango = 2

1) $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(a,b) R (c,d) \iff a \leq c, b \leq d$ 26/01/2017

Non è una relazione totale,

$(1,4) \not R (2,3)$

$(2,3) \not R (1,4)$ non sono confrontabili: $(7,8) R (9,10)$

$(9,10) \not R (7,8)$

2) trovare due gruppi diversi ma isomorfi

$\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}$

3) stabilire il numero degli elementi invertibili nell'anello $\mathbb{Z}/_{40}$

$\varphi(40) = \varphi(5 \cdot 2^3) = (5-1)(2^3 - 2^2) = (4)(4) = 16$

40	5
8	2
4	2
2	2
1	

4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + t \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -1 - 2(-4) + t(-2) = -1 + 8 - 2t \neq 0$$

ha rango 3 solo se $t \neq \frac{7}{2}$

$-2t \neq 1 - 8$

$2t \neq 8 - 1$

$t = \frac{7}{2}$

2)

trovare una soluzione intera dell'equazione 4/04/2018

$55x + 17y = 1$

$55x = 1 - 17y$

$-55x \equiv -1 + 17y$ $\qquad -55x + 17 + 17 + 17 + 17 = 13$

$13x \equiv 16 \pmod{17}$

ah no, bastava Bezout

$MCD(55, 17) = 1$

$55 = 17 \cdot 3 + 4$

$17 = 4 \cdot 4 + 1$

$4 = 1 \cdot 4 + 0$

$1 = 17 - 4 \cdot 4 = 17 - 4(55 - 17 \cdot 3) = 17 - 4 \cdot 55 + 12$

$= 13 \cdot 17 - 4 \cdot 55$

$55(-4) + 17(13) = 1$ $\qquad x = -4$, $y = 13$

$-220 + 221 = 1$

1)

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\qquad f(n) = n^2 + 2n$

iniettiva, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$f(n) = n^2 + 2n$

$f(k) = k^2 + 2k$

$n^2 + 2n = k^2 + 2k$ $\qquad (n+1)^2 = (k+1)^2$

$n = k$

è iniettiva perché crescente

suriettiva

$f(n) = n^2 + 2n$

$y = n^2 + 2n$

$n^2 + 2n = y$

$n(n+2) = y$

$n = \dfrac{y}{n+2}$ $\qquad$ non è suriettiva

3) trovare una matrice A 2×2 nel campo dei numeri razionali t.c. $A^2 = I$ ma $A \neq I$ dove $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

10/09/2018

2) quanti numeri da 1 a 120 sono invertibili modulo 120

$\ell(120) = \ell(5 \cdot 3 \cdot 2^3) = 32$

$= (5-1)(3-1)(2^3 - 2^2) = (4)(2)(4) = 32$

120	5
24	3
8	2
4	2
2	2
1	

4) base dello spazio vettoriale

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 0 \\ 2x + 6y + 10z = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + \alpha R_1$

$\alpha = -2$

$(2, 6, 10, 0) + (-2, -6, -10, 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = -3y - 5z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

rango 1

quindi una base e' $\{(-3, 1, 0), (-5, 0, 1)\}$

incognite - rango = 2, dimensione dello spazio delle soluzioni

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$y(-3, 1, 0) + z(-5, 0, 1)$

3) 11/11/2019

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + \alpha R_1$

$\alpha = -2$

$(2,4,6) + (-2,-4,-6)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c_1 \leftrightarrow c_2 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rango = 2

15 | 01 | 2018

2) $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{13} \\ x \equiv 7 \pmod{17} \end{cases}$ $\qquad x = 5 + 13y$

$5 + 13y \equiv 7 \pmod{17}$

$13y \equiv 2 \pmod{17}$ $\qquad MCD(17, 13) = 1$

$17 = 13 \cdot 1 + 4$

$13 = 4 \cdot 3 + 1$

$4 = 1 \cdot 4 + 0$

$1 = 13 - 4 \cdot 3 = 13 - 3(17 - 13) = 13 - 3 \cdot 17 + 3 \cdot 13$

$= 3 \cdot 13 + 13 - 3 \cdot 17$

$= 4 \cdot 13 - 3 \cdot 17$

$y = 4 \cdot 2 = 8$

$S = 5 + 13(8) = 109$

$S = [109]_{221}$

4)

$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 7z = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad R_2 \to R_2 + \alpha R_1$

$2 + \alpha = 0$

$\alpha = -2$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad C_3 \leftrightarrow C_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad (2, 4, 7, 0) + (-2, -4, -6, 0) = (0, 0,$

$R_1 \to R_1 + \alpha R_2$

$3 + \alpha = 0$

$\alpha = -3$

$(1, 3, 2, 0) + (0, -3, 0)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ rango 2

3 incognite - 2 rango = spazio delle soluzioni, dimensione

$\begin{cases} x - z = 0 \Rightarrow x = z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$

3) Una $M_{n \times n}$ è invertibile se $\det(M) \neq 0$

Assumo A invertibile ($\det(A) \neq 0$) per il teorema di Binet anche A^2 è invertib

Poichè $A^2 = AA \Rightarrow \det(AA) = \det(A) \cdot \det(A) \neq 0$

v. di

1) relazioni binarie su un insieme di n elementi 15/07/2013

$S = \{a, b, \dots, n\}$ $R \subseteq S \times S$ $|S \times S| = |S| \cdot |S| = n \cdot n = n^2$

Vado a considerare tutti i possibili sottoinsiemi di $S \times S$, cioè $P(S \times S)$

$|P(S \times S)| = 2^{n^2}$ possibili relazioni binarie.

2)

$2x \equiv 3 \pmod 4$ $MCD(4,2) = 2$

$2 \nmid 3$, nessuna soluzione

4)

base dello spazio vettoriale V delle matrici 2×2 a coefficienti reali

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$X = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è sistema di generatori

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4$

inoltre $a = b = c = d = 0$, quindi B è linearmente ~~dip~~ indipendente ed X è base di V

1) $xRy \iff x^2 = y^2$ 16/07/2018

- riflessiva

$xRx, \; x^2 = x^2$ v

- simmetrica

$xRy \Rightarrow yRx$

$x^2 = y^2 \Rightarrow y^2 = x^2$ v.

- transitiva

$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

hp. th.

$x^2 = y^2$ $x^2 = z^2$

$y^2 = z^2$

$y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 = z^2$ poiché $y^2 = x^2$ per ipotesi

2) parte stabile di $(\mathbb{R}, +)$ che non sia gruppo

$(\mathbb{N}, +)$

4)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + \alpha R_1$

$1 + \alpha = 0$

$\alpha = -1$

$(1,0,1,0) + (-1,-1,-1,0) = (0,-1,0,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to -1 R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + \alpha R_1$

$4 + \alpha = 0$

$\alpha = -4$

$(4,0,1,0) + (-4,-8,-12,0) = (0,-8,-11,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & -11 & 0 \end{pmatrix}$$

~~x+2y+3z=0 , x=-2y-3z~~

$R_2 \to -\frac{1}{8} R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 11/8 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_1 \to R_1 + \alpha R_2$

$2 + \alpha = 0$

$\alpha = (-2)$

$3 - \frac{11}{4} = \frac{12-11}{4}$

$-\frac{\cancel{22}}{8} \frac{11}{4}$

$(1,2,3,0) + (0,-2,-11/4,0) = (1,0,\frac{1}{4},0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

$x + \frac{1}{4} z = 0 \qquad x = -\frac{1}{4} z$

$y + \frac{11}{8} z = 0$

$y = -\frac{11}{8} z$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4} z \\ y = -\frac{11}{8} z \\ z = z \end{cases}$$

1) $\{1,\dots,10\}$ sottoinsiemi pari 17/12/2018

$$|\{1,\dots,10\}| = 32 = |\underbrace{P}_{\text{parti}}(\{2,4,6,8,10\})| = 2^5$$

2) ogni parte stabile di $(\mathbb{N},+)$ è infinita

Suppongo per assurdo che S (parte stabile di $(\mathbb{N},+)$) sia finito

$\max(S) =$
$m > 0 \Rightarrow m \in S$

Essendo S parte stabile $m+m \in S$ ma $m+m > m$, assurdo perché m era l'elemento massimo di S

3) $\ell(n)$ assume infiniti valori

$\ell(2^n) = 2^{n-1}$

4) $x+y+z+t=2$

$2x+3y=3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + \alpha R_1$

$2+\alpha=0$

$\alpha=-2$

$(2,3,0,0,3)+(-2,-2,-2,-2,-4)=(0,1,-2,-2,-1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$R_1 \to R_1 + \alpha R_2$

$1+\alpha=0$

$\alpha=-1$

$(1,1,1,1,2)+(0,-1,2,2,1)=(1,0,3,3,3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$x+3z+3t=3$ $\quad$ $y-2z-2t=-1$ $\quad$ $y=-1+2z+2t$

$$\begin{cases} x=3-3z-3t \\ y=-1+2z+2t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) $f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 20/01/2020

$f(x,y) = xy+1$, stabilire se è associativa

$$f(x, f(y,z)) = f(x, yz+1) = x(yz+1)+1 = xyz+x+1$$

$$f(f(x,y),z) = f(xy+1, z) = z(xy+1)+1 = xyz+z+1$$

non è associativa

2) inverso di 101 modulo 113

$\cancel{113 = 101\cdot 1 + 10}$

$\cancel{101 = 10\cdot 10 + 1}$

$\cancel{10 = 1\cdot 10 + 0}$

$MCD(113,101) = 1$

$12\cdot 8 = 96$ $\quad 12\cdot 6 = 72$ $\quad 12\cdot 7 = 84$

$\cancel{1 = 101 - 10\cdot 10 = 101 - (113-101)10 = 101 - 10\cdot 113 + 10\cdot 101 = 101\cdot 11 - 113\cdot 10}$

$113 = 101\cdot 1 + 12$

$101 = 12\cdot 8 + 5$

$12 = 5\cdot 2 + 2$

$5 = 2\cdot 2 + 1$

$2 = 1\cdot 2 + 0$

$$\begin{aligned}
1 &= 5 - 2\cdot 2 = 5 - 2(12 - 5\cdot 2) = 5 - 2\cdot 12 + 2\cdot 5\cdot 2 \\
&= 5\cdot 5 - 2\cdot 12 \\
&= 5(101 - 12\cdot 8) - 2\cdot 12 \\
&= 5\cdot 101 - 5\cdot 12\cdot 8 - 2\cdot 12 \\
&= 5\cdot 101 - 40\cdot 12 - 2\cdot 12 \\
&= 5\cdot 101 - 42\cdot 12 \\
&= 5\cdot 101 - 42(113-101) \\
&= 5\cdot 101 - 42\cdot 113 + 42\cdot 101 \\
&= 47\cdot 101 - 42\cdot 113
\end{aligned}$$

47 è l'inverso

$\cancel{= 101 - 12\cdot 8 - 2\cdot 12 + 2\cdot 5\cdot 2}$

$\cancel{= 101 - (113-101)8 - 2\cdot 12 + 2\cdot 5\cdot 2}$

$\cancel{= 101 - 113\cdot 8 + 101\cdot 8 - 2\cdot 12 + 2\cdot 5\cdot 2}$

$\cancel{= 101\cdot 9 - 113\cdot 8 - 2\cdot 12 + 2\cdot 5\cdot 2}$

$\cancel{= 101\cdot 9 - 113\cdot 8}$

3) $AB = BA$

dimostrare $A^m B = BA^m \ \forall m \geq 1$

P.B. $AB = BA$ v.

passo induttivo

$A^{m+1} B = B A^{m+1}$

$A^{m+1} B = \underbrace{A^m \cdot A \cdot B = B \cdot A^m}_{A^m \cdot B = B \cdot A^m \text{ per ipotesi}} \cdot A \Rightarrow \underbrace{A \cdot B = B \cdot A}_{\text{per ipotesi}}$

4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + \alpha R_1$ $\quad 2 + \alpha = 0 \quad \alpha = -2$

$(2,4,6) + (-2)(1,2,3) = (2,4,6) + (-2,-4,-6) = (0,0,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$R_2 \leftrightarrow R_3$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad R_2 \to R_2 + \alpha R_1$

$3 + \alpha = 0$

$\alpha = -3$

$(3,5,7) + (-3)(1,2,3)$

$(3,5,7) + (-3,-6,-9) = (0,-1,-2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rango = 2

)

$(2k+1)^m$ è dispari $\forall m \geq 1$

24/06/2019

P. b.

$m = 1$ $\quad (2k+1)^1$ è dispari

induttivo

$(2k+1)^{m+1} = (2k+1)^m (2k+1)$

$(2k+1)^m$: dispari x hp. induttiva

$(2k+1)$: è dispari

il prodotto di due numeri dispari è dispari

)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & t \end{pmatrix} = t - 6 \neq 0 \Rightarrow t \neq 6$$

per $t \neq 6$ è compatibile per Cramer ed ammette una sola soluzione

22/03/2019

2) $\ell(4) = |\{1,3\}| = 2$

$\ell(5) = |\{1,2,3,4\}| = 4$

$\ell(6) = |\{1, \cancel{4}, 5\}| = 2$

non è strettamente crescente

4) $\det \begin{pmatrix} x-1 & 3-1 \\ y-2 & 3-2 \end{pmatrix} = (x-1) - (2)(y-2) = (x-1) - (2y-4) = x - 1 - 2y + 4$

$= x - 2y + 3 = 0$

$-2y = -x - 3$

$y = \frac{x+3}{2} = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

3) inverso di 121 modulo 117

$121 \equiv x \pmod{117}$ $\qquad$ $121 = 117 \cdot 1 + 4$

$121 \equiv 4 \pmod{117}$

$121 = 117 \cdot 1 + 4$

$117 = 4 \cdot 29 + 1$

$4 = 1 \cdot 4 + 0$

$$1 = 117 - 4 \cdot 29 = 117 - (121 - 117)29 = 117 + 29 \cdot 117 - 29 \cdot 121$$

~~Boh~~ Boh mudi

$$= 30 \cdot 117 - 29 \cdot 121$$

4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ t & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det = t \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + 2 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = t(12 - 15) + 2(5 - 8)$$

$$= -3t - 6$$

$-3t - 6 = 0$

$-3t = 6$

$t = -2$

il rango è 3 per $t \neq -2$

e 2 per $t = -2$

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 25/06/2018

$f(x) = x^2 + 4x$

iniettività: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$f(x) = x^2 + 4x$

$f(y) = y^2 + 4y$

$x^2 + 4x = y^2 + 4y$

$x^2 + 4x + 4 = y^2 + 4y + 4$

$(x+2)^2 = (y+2)^2$

$x + 2 = y + 2$

$x = y$ v.

non e' iniettiva

suriettiva: $\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y$

$f(x) = x^2 + 4x$

$x^2 + 4x = y$, $x^2 + 4x - y = 0$,

$x(x+4) = y$

$x = \dfrac{y}{x+4}$ non e' suriettiva

2)

$1 + 3 + \dots + 2n - 1 = n^2$

P.B.

$1 = 1^2$ v.

Passo induttivo

$\underbrace{1 + 3 + \dots + 2n - 1}_{= n^2 \text{ x hp.}} + 2(n+1) - 1 = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

$n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

v. $\forall n \geq 1$

1) $R \subseteq N \times N$: $xRy \iff x^2 | y^2$

$x^2 | y^2 \iff x | y$, è sicuramente un reticolo essendo una relazione di divide

$\forall x,y \ \exists \sup\{x,y\} = mcm(x,y)$

$\exists \inf\{x,y\} = MCD(x,y)$

2) $(M,+)$ trovare un monoide t.c. $x+x=x \ \forall x \in M$

$M = \{0\}$

associatività : $0+(0+0) = (0+0)+0 = 0$

elemento neutro : 0

$0+0=0$

3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4)

$P_1 = (1,2,3)$

$P_2 = (2,0,4)$

$P_3 = (0,0,2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + \alpha R_1$

$2 + \alpha = 0$

$\alpha = -2$

$(2,0,4) + (-2)(1,2,3) = (2,0,4) + (-2,-4,-6)$

$= (0,-4,-2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

~~$R_2 \to R_2 + \alpha R_1$~~

~~$+4 + \alpha 2 = 0$~~

~~$2\alpha = -4$~~

~~$\alpha = -2$~~

~~$(0,-4,-2) + (-2)(1,2,3) = (0,-4,-2) + (-2,-4,-6) = (2,0,4)$~~

~~$R_2 \to R_2 + \alpha R_2$~~

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to -\frac{1}{4} R_2$

$(0,-4,-2)(-\frac{1}{4}) = (0, 1, \frac{1}{2})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_1 \to R_1 + \alpha R_2$

$2 + \alpha = 0$

$\alpha = -2$

$(1,2,3) + (-2)(0,1,\frac{1}{2}) = (1,2,3) + (0,-2,-1) = (1,0,2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to \frac{1}{2} R_3$ $\quad (0,0,2)\frac{1}{2} = (0,0,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 aprile 2017

1) R, S r.e. , $R \cap S$ è r.e.
th

$R \subseteq X \times X = \{(x,y) \in R\}$
$S \subseteq X \times X = \{(z,k) \in S\}$

2)

$6^n \equiv 6 \pmod{10} \;\forall n \geq 1$, $10 \mid 6^n - 6$,

Passo base

$n = 1$

$10 \mid 6-6 \Rightarrow 10 \mid 0$ v. $0 = 10 \cdot 0$

Passo induttivo, dimostro $P(n+1)$ con ipotesi $P(n)$, $10 \mid 6^n - 6$

th: $10 \mid 6^{n+1} - 6$

$$6^{n+1} - 6 = 6^n \cdot 6 - 6 = 6^n \cdot 6 - 6 + 36 - 36 = \underbrace{6(6^n - 6)}_{\text{x hp.}} + 36 - 6$$

$10 \mid 6^n - 6$
ma quindi
$10 \mid 6(6^n - 6)$
essendo un multiplo

mi resta da verificare che

$10 \mid 36 - 6$

$$36 - 6 = 30 = \underbrace{6^2 - 6}$$

$10 \mid 6^2 - 6$ per ipotesi induttiva

3)

$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 4$

$2(-2) - \cancel{8(1)} = -4+8 = 4$
$(-8)1$

$\begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$1(-1) - (1)(-1)$

$-1-(-1) = -1+1 = 0$

4)

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+4y+6z=1 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ ridurre a scala ridotta

$R_2 \to R_2 + \alpha R_1$

$2+\alpha = 0$
$\alpha = (-2)$

$(2,4,6,1) + (-2)(\overset{1}{\cancel{2}},\overset{2}{\cancel{4}},\overset{3}{\cancel{6}},\overset{0}{\cancel{1}})$

$(2,4,6,1) + \cancel{\ldots}\,(-2,-4,-6,0) = (0,0,0,1)$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $0=1$, non ha soluzione
rango$=2$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ $R_2 \to R_2 + \alpha R_1$

$2+\alpha = 0$
$\alpha = -2$

$(2,4,6) + (-2)(1,2,3) = (2,4,6) + (-2,-4,-6)$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rango$=1$

non c'è soluzione
rango della matrice completa
diverso dal rango di quella completa

• $(\cdot)$ associativo

$a\, m\mathbb{Z}\, b \cdot (c\, m\mathbb{Z}\, d \cdot e\, m\mathbb{Z}\, f) = e\, m\mathbb{Z}\, f \cdot (a\, m\mathbb{Z}\, b \cdot c\, m\mathbb{Z}\, d)$

$a\, m\mathbb{Z}\, b \cdot (c\, m\mathbb{Z}\, d \cdot e\, m\mathbb{Z}\, f) = a\, m\mathbb{Z}\, b \cdot (ce\, m\mathbb{Z}\, df) = ace\, m\mathbb{Z}\, bdf$

$e\, m\mathbb{Z}\, f \cdot (a\, m\mathbb{Z}\, b \cdot c\, m\mathbb{Z}\, d) = e\, m\mathbb{Z}\, f \cdot (ac\, m\mathbb{Z}\, bd) = eac\, m\mathbb{Z}\, fbd = ace\, m\mathbb{Z}\, bdf$

• $(\cdot)$ distributivo su $+$

i) $a\, m\mathbb{Z}\, b \cdot (c\, m\mathbb{Z}\, d + e\, m\mathbb{Z}\, f) = (a\, m\mathbb{Z}\, b \cdot c\, m\mathbb{Z}\, d) + (a\, m\mathbb{Z}\, b \cdot e\, m\mathbb{Z}\, f)$
ii)

i) $a\, m\mathbb{Z}\, b \cdot (c+e\, m\mathbb{Z}\, d+f) = a(c+e)\, m\mathbb{Z}\, b(d+f)$

ii) ~~[illegible]~~ $ac\, m\mathbb{Z}\, bd + ae\, m\mathbb{Z}\, bf = ac+ae\, m\mathbb{Z}\, bd+bf = a(c+e)\, m\mathbb{Z}\, b(d+f)$

è sottoanello

6) si dimostri che $(m\mathbb{Z},+,\cdot)$ è un sottoanello di $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ $\forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$

11) esercitazione 4

- parte stabile

$a \, m\mathbb{Z} \, b + c \, m\mathbb{Z} \, d = a+c \; m\mathbb{Z} \; b+d$

$a \, m\mathbb{Z} \, b \cdot c \, m\mathbb{Z} \, d = ac \; m\mathbb{Z} \; bd$

vero perché $m\mathbb{Z}$ è una congruenza per definizione

- $(m\mathbb{Z},+)$ gruppo abeliano, • associativo, • distributivo su +

$a \cdot (b+c) = (ab)+(ac)$

- associativa

$a \, m\mathbb{Z} \, b + (c \, m\mathbb{Z} \, d + e \, m\mathbb{Z} \, f) = e \, m\mathbb{Z} \, f + (a \, m\mathbb{Z} \, b + c \, m\mathbb{Z} \, d)$

- $a \, m\mathbb{Z} \, b + (c \, m\mathbb{Z} \, d + e \, m\mathbb{Z} \, f) = a \, m\mathbb{Z} \, b + (c+e \; m\mathbb{Z} \; d+f) = a+c+e \; m\mathbb{Z} \; b+d+f$
- $e \, m\mathbb{Z} \, f + (a \, m\mathbb{Z} \, b + c \, m\mathbb{Z} \, d) = e \, m\mathbb{Z} \, f + (a+c \; m\mathbb{Z} \; b+d) = e+a+c \; m\mathbb{Z} \; f+b+d$

$= a+c+e \; m\mathbb{Z} \; b+d+f$

- elemento neutro

$a \, m\mathbb{Z} \, b + e \, m\mathbb{Z} \, f = a \, m\mathbb{Z} \, b$

$a \, m\mathbb{Z} \, b + 0 \, m\mathbb{Z} \, 0 = a+0 \; m\mathbb{Z} \; b+0 = a \, m\mathbb{Z} \, b$

$0 \, m\mathbb{Z} \, 0$ elemento neutro

- simmetrizzabile

$a \, m\mathbb{Z} \, b + \bar{a} \, m\mathbb{Z} \, \bar{b} = 0 \, m\mathbb{Z} \, 0$

$a \, m\mathbb{Z} \, b + -a \, m\mathbb{Z} \, -b = a+(-a) \; m\mathbb{Z} \; b+(-b) = 0 \, m\mathbb{Z} \, 0$

- commutativa

$a \, m\mathbb{Z} \, b + c \, m\mathbb{Z} \, d = c \, m\mathbb{Z} \, d + a \, m\mathbb{Z} \, b$

$a \, m\mathbb{Z} \, b + c \, m\mathbb{Z} \, d = a+c \; m\mathbb{Z} \; b+d$

$c \, m\mathbb{Z} \, d + a \, m\mathbb{Z} \, b = c+a \; m\mathbb{Z} \; d+b = a+c \; m\mathbb{Z} \; b+d$

d) si provi che il sottoinsieme $T = \{(a, 2b) \mid a \in \mathbb{Z}_2, b \in \mathbb{Z}_6\}$ è sottogruppo di $(G, +)$

- parte stabile

$(a, 2b) + (c, 2d) = (a+c, 2b+2d) = (a+c, 2(b+d)) \in T$

$a, c \in \mathbb{Z}_2 \quad b, d \in \mathbb{Z}_6$

- associativa

$(a, 2b) + ((c, 2d) + (e, 2f)) = (e, 2f) + ((c, 2d) + (a, 2b))$

$(a, 2b) + (c+e, 2d+2f) = (a+c+e, 2b+2d+2f)$ ~~$= (e,2f)+((c,2d)+(a,2b))$~~

$(e, 2f) + ((c, 2d) + (a, 2b)) = (e, 2f) + ((c+a), (2d+2b)) = (e+c+a, 2f+2d+2b)$

$= (a+c+e, 2b+2d+2f)$

- elemento neutro

$(a, 2b) + (e, 2f) = (a, 2b)$

$(a, 2b) + (0, 2(0)) = (a, 2b)$

- simmetrizzabile

$(a, 2b) + (c, 2d) = (0, 0)$

caso 1: $a = 0$

$(0, \underbrace{2b}_{= m}) +$ $\quad (0, m) + (0, 6-m) = (0, 0)$

caso 2: $a = 1$ $\quad (1, m) + (1, 6-m) = (0, 0)$

è sottogruppo

5) Si considerano gli anelli $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ e l'anello prodotto $G = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ 9) Esercitazione 4

a) elementi di G

$$G = \{ ([h],[k]) : 0 \le h < 2,\ 0 \le k < 6,\ h \in \mathbb{Z}_2,\ k \in \mathbb{Z}_6 \}$$

$\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ $\quad \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 = \{ (\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1}), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{0},\bar{3}), (\bar{0},\bar{4}), (\bar{0},\bar{5}), (\bar{1},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1}), (\bar{1},\bar{2}), (\bar{1},\bar{3}), (\bar{1},\bar{4}), (\bar{1},\bar{5}) \} = G$$

b)

$[0]_6 + [2]_6 + [5]_6 = [7]_6 = [1]_6$

$[1]_2 + [1]_2 + [1]_2 = [3]_2 = [1]_2$

$[2]_6 \cdot [5]_6 = [10]_6 = [4]_6$

$[3]_6 \cdot [3]_6 = [9]_6 = [3]_6$

$([0]_2, [3]_6) + ([1]_2, [2]_6) = ([1]_2, [5]_6)$

$([1]_2, [1]_6) + ([0]_2, [4]_6) = ([1]_2, [5]_6)$

$([1]_2, [1]_6) + ([1]_2, [1]_6) = ([0]_2, [2]_6)$

$([0]_2, [3]_6) + ([0]_2, [3]_6) = ([0]_2, [0]_6)$

c) si esibisca una coppia di divisori in G dello 0

$([1]_2 + [1]_2, [2]_6 \cdot [3]_6)$

$(S\setminus X)\cap(S\setminus Y) = S\setminus(X\cup Y)$

$$S\setminus(X\cup Y) = \{(x\in S)\wedge(x\notin X\cup Y)\}$$

$$= \{x\in S\wedge(x\notin X\vee x\notin Y)\}$$

$$= \{(x\in S\wedge x\notin X)\vee(x\in S\wedge x\notin Y)\}$$

$$= \{(x\in S\setminus X)\vee(x\in S\setminus Y)\} \qquad \text{MO}$$

$$= S\setminus X\cup S\setminus Y$$

$$(S\setminus X)\cap(S\setminus Y) = \{(x\in S\setminus X)\wedge(x\in S\setminus Y)\}$$

$$= \{(x\in S\wedge x\notin X)\wedge(x\in S\wedge x\notin Y)\}$$

$$= \{(x\in S\wedge x\in S)\wedge(x\notin X\wedge x\notin Y)\}$$

$$= \{(x\in S)\wedge\neg(x\in X\vee x\in Y)\}$$

$$= \{(x\in S)\wedge\neg(x\in X\cup Y)\}$$

$$= \{(x\in S)\wedge(x\notin X\cup Y)\}$$

$$= \{S\setminus(X\cup Y)$$

$3^n 7^m \; R \; 3^s 7^t$

$3^u 7^v \; R \; 3^w 7^z$

$(3^n 7^m)(3^u 7^v) \; R \; (3^s 7^t)(3^w 7^z)$ ~~[illegible]~~

$|n - m| = |s - t|$

$|u - v| = |w - z|$

$3^2 7^1 \; R \; 3^3 \cdot 7^2$

$3^4 7^0 \; R \; 3^1 \cdot 7^5$

$(3^2 7^1)(3^4 7^0) \; R \; (3^3 7^2)(3^1 7^5)$

$3^6 7^1 \; R \; 3^4 7^5$

$6 - 1 = 5 \qquad 4 - 5 = -1$

$|5| \neq |-1|$

4) Sia $S \neq \emptyset$, si dimostri che l'applicazione

$$g : P(S) \to P(S) \qquad g(X) = S \setminus X$$

è un isomorfismo di $(P(S), \cup)$ in $(P(S), \cap)$

dimostro che è omomorfismo

$g(X \cup Y) = g(X) \cap g(Y)$ $\qquad g(X \cup Y) = S \setminus (X \cup Y)$

$g(X) = S \setminus X$

$g(Y) = S \setminus Y$ $\quad \Rightarrow (S \setminus X) \cap (S \setminus Y)$

3) Sia $W = \{ 3^n 7^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0 \} \subseteq \mathbb{N}$

a) si dimostri che W è una parte stabile $(\mathbb{N}_0, \cdot)$ e non di $(\mathbb{N}_0, +)$

$a \cdot b = (3^n 7^m)(3^k 7^\ell) =$

$n, m, k, \ell \in \mathbb{N}_0$

$3^{n+k} \cdot 7^{m+\ell} \in W$

$a + b = (3^n 7^m) + (3^k 7^\ell)$

$(3^1 \cdot 7^1) + (3^1 \cdot 7^1) = 3(7+7) = 3(14) \notin W$

b) si verifichi che $R \subseteq W \times W$, $3^n 7^m R\, 3^s 7^t \iff |n - m| = |s - t|$
è di equivalenza ma non è congruenza

- riflessiva xRx, $3^n 7^m R\, 3^n 7^m \iff |n-m| = |n-m|$, vero
- simmetrica $xRy \Rightarrow yRx$

$3^n 7^m R\, 3^s 7^t$ hp. $3^s 7^t R\, 3^n 7^m$ th.

$|n-m| = |s-t| \Rightarrow |s-t| = |n-m|$ $|s-t| = |n-m|$ ~~$\Rightarrow |n-m| = |s-t|$~~

vero

- transitiva

$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

$3^n 7^m R\, 3^s 7^t \wedge 3^s 7^t R\, 3^k 7^\ell \Rightarrow 3^n 7^m R\, 3^k 7^\ell$

hp:

$|n-m| = |s-t|$

$|s-t| = |k-\ell|$

th.

$|n-m| = |k-\ell|$

per hp. $|s-t| = |k-\ell|$ ma $|s-t| = |n-m|$ cioè $|n-m| = |k-\ell|$

c) Si studi la struttura quoziente $(W/R, \cdot)$

$W/R : \{ [a]_R : a \in W \}$

elemento neutro

$[a]_R \cdot [e]_R = [a]_R$

$[h]_R = \{ 3k+1 : h+k \in 2\mathbb{N}_0 \}$

$[h]_R \cdot [1]_R = [h]_R$

commutatività

$[3h+1]_R * [3k+1]_R = [3k+1]_R * [3h+1]_R$

$3h3k+3h+3k+1 = 3(hk+h+k)+1$ — $3k3h+3k+3h+1 = 3(kh+h+k)+1$

è commutativa

associativa

$([3h+1]_R * [3k+1]_R) * [3z+1]_R = [3z+1] * ([3h+1]_R * [3k+1])$

$([3h3k+3h+3k+1])_R \cdot [3z+1]_R = [3z+1]_R \cdot ([3h3k+3h+3k+1])_R = [3z+1] \cdot ([3h+1]_R \cdot [3k+$

non è simmetrizzabile

4)

$(3h+1)\,R\,(3k+1)$
$(3z+1)\,R\,(3l+1)$ } allora $(3h+1)(3z+1)\,R\,(3k+1)(3l+1) \iff h+k \in 2\mathbb{N}_0$

$$9hz+3h+3z+1 \;R\; 9kl+3k+3l+1$$

$$3(3hz+h+z)+1 \;R\; 3(3kl+k+l)+1 \iff h+k \in 2\mathbb{N}_0$$

$$3hz+h+z+3kl+k+l \in 2\mathbb{N}_0$$

$h+k \in 2\mathbb{N}_0$

$z+l \in 2\mathbb{N}_0$ x hp.

$$3hz+3kl = 3(hz+kl) \in 2\mathbb{N}_0$$

caso 1.

h, k pari, $h \cdot z$ pari e $k \cdot l$ pari

caso 2.

z, l pari, * *

caso 3.

tutti dispari, la somma di due numeri dispari è pari

2) $W = \{3h+1 \mid h \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0$

a) si dimostri che W è parte stabile di $(\mathbb{N}_0, \cdot)$ e non di $(\mathbb{N}_0, +)$

$(\mathbb{N}_0, \cdot)$

$$x \cdot y = (3h+1)(3k+1) = 3h3k + 3h + 3k + 1 = 3(h+k+h+k)+1 = 3(2h+2k)+1 \in W$$

$h, k \in \mathbb{N}_0$

$(\mathbb{N}_0, +)$

$$x + y = (3h+1)+(3k+1) = 3h+3k+2 = 3(h+k)+2 \notin W$$

$h, k \in \mathbb{N}_0$

b)

si verifichi che la relazione $R \subseteq W \times W$:

$$(3h+1) R (3k+1) \Leftrightarrow h+k \in 2\mathbb{N}_0$$

- è congruenza in $(W, \cdot)$
- riflessiva

  $(3h+1) R (3h+1) \Leftrightarrow h+h \in 2\mathbb{N}_0$

  $h+h = 2h \in 2\mathbb{N}_0$

- simmetrica $(3h+1) R (3k+1) \Rightarrow (3k+1) R (3h+1)$

  $\left.\begin{array}{l} 3h+1 \; R \; 3k+1, \text{ cioè } h+k \in 2\mathbb{N}_0 \\ 3k+1 \; R \; 3h+1, \text{ cioè } k+h \in 2\mathbb{N}_0 \end{array}\right\}$ verificato per commutatività della somma

- transitiva

  $(3h+1) R (3k+1) \wedge (3k+1) R (3z+1) \Rightarrow (3h+1) R (3z+1)$

  $(3h+1) R (3k+1) \Rightarrow h+k \in 2\mathbb{N}_0$

  $(3k+1) R (3z+1) \Rightarrow k+z \in 2\mathbb{N}_0$

  $(3h+1) R (3z+1)$, $h+z \in 2\mathbb{N}_0$

  $h+k+k+z \in 2\mathbb{N}_0 \Rightarrow (h+z)+(k+k) \in 2\mathbb{N}_0$

  per commutatività

  per la riflessività

Esercitazione 4

$(\mathbb{Q}, \perp)$ dove $x \perp y = \frac{3xy}{2}$ :: si dimostri che [illegible]

$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

studiare la struttura

definita da $f(x) = \frac{2}{3}x$

è isomorfismo di $(\mathbb{Q}, \cdot) \to (\mathbb{Q}, \perp)$

associativa

$$n \perp (m \perp l) = (n \perp m) \perp l$$

$$n \perp (m \perp l) = n \perp \left(\frac{3ml}{2}\right) = \frac{3n \cdot \left(\frac{3ml}{2}\right)}{2} =$$

$$\frac{3 \cdot \frac{nml}{2} \cdot 3}{2} \qquad \left(3n \frac{3ml}{2}\right)\frac{1}{2}$$

$$\left(3n \cdot \frac{3ml}{2}\right) : 2 = \left(3n \cdot \frac{3ml}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{3n \cdot 3ml}{4} = \frac{9nml}{4}$$

$$(n \perp m) \perp l = \frac{3nm}{2} \perp l = \frac{3}{2} \cdot nml \cdot \frac{3}{2} = \frac{9nml}{4}$$

commutativa $n \perp m = m \perp n$

$$n \perp m = \frac{3nm}{2}$$

$$m \perp n = \frac{3mn}{2}$$

elemento neutro $n \perp e = n$ $\qquad e = \frac{2}{3}$

$$n \perp e = \frac{3ne}{2} = \frac{3}{2} \cdot n \cdot \frac{2}{3} = n$$

$$n \perp e = n$$

$$\frac{3ne}{2} = n \qquad \frac{3ne}{2} = n$$

$$\frac{3}{2} ne = n \qquad \frac{3}{2} ne = n$$

$$e \frac{3}{2} = \frac{n}{n} \qquad \frac{3}{2} e = 1$$

$$e \frac{3}{2} = 1 \qquad 3e = 2$$

$$e = \frac{2}{3}$$

$$3e = 2$$

$$e = \frac{2}{3}$$

è omomorfismo? $f: (\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{Z}, \perp)$ $m \perp n := m+n-5$

$x \mapsto 5 - z \quad z \in \mathbb{Z}$

1

$f(x+y) = f(x) \perp f(y)$

$5-(x+y) = (5-x) \perp (5-y)$ ✗ e 5

$5-x-y = 5-x \cancel{+} 5-y \cancel{-5}$

$5-x-y$

iniettività

$\forall x,y \in \mathbb{Z}$ con $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$f(x) = 5-x \qquad 5-x = 5-y$

$f(y) = 5-y \qquad x = y$

suriettività: $Im(f) = \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z} \mid f(x) = y$

$f(x) = 5-x$

$y = 5-x$

$x = 5-y \in \mathbb{Z}$

è isomorfismo

Esercizi matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Rango

$R_2 \to R_2 + \alpha R_1$

$3 + \alpha(1) = 0$

$\alpha = -3$

$(3,4,5) + (-3)(1,2,3) = (3,4,5) + (-3,-6,-9) = (0,-2,-4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + \alpha R_1$

$4 + \alpha = 0$

$\alpha = -4$

$(4,6,8) + (-4)(1,2,3) = (4,6,8) + (-4,-8,-12) = (0,-2,-4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

~~$R_3 \to R_3 + \alpha R_2$~~

~~$-2 + \alpha(-2) = 0$~~

~~rango = 2~~

~~$-2\alpha = 2$~~

$R_3 \to R_3 + \alpha R_2$

$-2 + \alpha(-2) = 0$

$(0,-2,-4) + (-1)(0,-2,-4)$

$-2\alpha = 2$

$-\alpha = 1$

$\alpha = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rango = 2

è simmetrizzabile? $x \perp y = x = \frac{2}{3} = y \perp x$

$\frac{3}{2} x y = \frac{2}{3}$

$y = \frac{\frac{2}{3} - \frac{3}{2}}{x} = -\frac{5}{6} x \in \mathbb{Q}$

$\frac{2}{3} - \frac{3}{2} = \frac{4-9}{6} = -\frac{5}{6}$

$\frac{3}{2} y x = \frac{2}{3}$

$y = \frac{\frac{2}{3} - \frac{3}{2}}{x} = -\frac{5}{6} x \in \mathbb{Q}$

è omomorfismo?

$f(x * y) = f(x) \perp f(y)$

$\frac{2}{3} x y$

$\frac{2}{3} x \perp \frac{2}{3} y = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} x \cdot \frac{2}{3} y\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{9} x y\right) = \frac{2}{3} x y$

iniettiva?

$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$f(x) = \frac{2}{3} x$

$f(y) = \frac{2}{3} y$

$\frac{2}{3} x = \frac{2}{3} y$

$2x = 2y$

$x = y$

suriettiva

$\forall x \in \mathbb{Q}\ \exists y \in \mathbb{Q} \mid f(x) = y$

$f(x) = \frac{2}{3} x = y$ $\quad 2x = 3y$ $\quad x = \frac{3}{2} y \in \mathbb{Q}$

Esercizio

$(\mathbb{Z}, \perp)$

$n \perp m := n + m - 5$

Si studi $(\mathbb{Z}, \perp)$ e si dimostri che $f: x \in \mathbb{Z} \mapsto 5 - \mathbb{Z}$ è isomorfismo di $(\mathbb{Z}, +)$ in $(\mathbb{Z}, \perp)$

$f: (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, \perp)$

$x \longmapsto 5 -$

1) associativa

$(n \perp m) \perp \ell = (n + m - 5) \perp \ell = (n + m - 5 + \ell - 5) =$

$= (m + \ell - 5) + n - 5 = n \perp (m \perp \ell)$

$n \perp (m \perp \ell) = n \perp (m + \ell - 5) = n + m + \ell - 5 - 5 = (n + m - 5) + \ell - 5$

$= (n \perp m) \perp \ell$

2) commutativa, $(n \perp m) = (m \perp n)$

$n \perp m = n + m - 5$

$m \perp n = m + n - 5 = n + m - 5$

3) elemento neutro, $n \perp e = n$

$e = 5$

$n \perp e = n + e - 5 = n + 5 - 5 = n$

$n \perp e = \cancel{n} + e - 5 = n$, $e \in \mathbb{Z}$ $e = 5$

4) esiste opposto? $n \perp m = 5$

$n + m - 5 = 5$

$n \perp -n = 7 + (-7) - 5 + 10 = 5$

$n \perp m = 5 = m \perp n$

$m + n - 5 = 5$

$m + n = 10$

$m = 10 - n$

$m \perp n = m + n - 5 = 5$

$m = 10 - n$

$x = 9 + 22y$

$9 + 22y \equiv 51 \pmod{75}$

$22y \equiv 42 \pmod{75}$

$MCD(75, 22) = 1$

$75 = 22 \cdot 3 + 9$

$22 = 9 \cdot 2 + 4$

$9 = 4 \cdot 2 + 1$

$4 = 1 \cdot 4 + 0$

$1 = 9 - 4 \cdot 2 = 9 - (22 - 9 \cdot 2) \cdot 2 = 9 - 22 \cdot 2 + 9 \cdot 4$

$= 9 \cdot 5 - 22 \cdot 2 = (75 - 22 \cdot 3)5 - 22 \cdot 2$

$= 75 \cdot 5 - 22 \cdot 15 - 22 \cdot 2 = 75 \cdot 5 - 22 \cdot 17$

$= 75 \cdot 5 - 17 \cdot 22$

$117 - 75 = 42$

$867 \div 75 = 11$, resto 42 (867, 117, 42)

$y = (-17)51 = -867$

$-867 = 75(-12) + 33$

-90

$S = [-867]_{75} = [33]_{75}$

classe di equivalenza del sistema

$y = 33$

$x = 9 + 22(33) = 735$

$S = [735]_{1650}$

$\forall (x,y), (a,b), (h,k) \in \mathbb{R}^2$

$(x,y) + ((a,b) + (h,k)) = (x,y) + ((a+h),(b+k)) = (x+a+h) + (y+b+k)$

ελεγχ

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 3x-2y+z=0 \\ 2x+3y-4z=2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + \alpha R_1$

$3+\alpha \Rightarrow \alpha=-3$

$(3,-2,1,0)-3(1,-2,1,1)=$

$=(3,-2,1,0)-(3,-6,3,3)=(0,4,-2,-3)$

$R_3 \to R_3 + \alpha R_1 \quad 2+\alpha=0$

α

$(2,3,-4,2)-2(1,-2,1,1)$

$(2,3,-4,2)-(2,-4,2,2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & 7 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + \alpha R_2$

$7+4\alpha$

$\alpha=-\frac{7}{4}$

$(0,7,-6,0)+\left(-\frac{7}{4}\right)(0,4,-2,-3)=\left(0,-\frac{\cancel{28}^{7}}{\cancel{4}},+\frac{\cancel{14}^{7}}{\cancel{4}_{2}},\frac{21}{4}\right)$

$(0,7,-6,0)+\left(0,-7,\frac{7}{2},\frac{21}{4}\right)=\left(0,0,-\frac{5}{2},\frac{21}{4}\right) \qquad -6+\frac{7}{2}=\frac{-12+7}{2}=-\frac{5}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 21/4 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to \frac{1}{4} R_2 \qquad \frac{1}{\cancel{4}_2}(-\cancel{2}^{1})$

$R_3 \to -\frac{2}{5} R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -21/10 \end{pmatrix}$$

$\frac{21}{\cancel{4}_2}\cdot\left(-\frac{\cancel{2}}{5}\right)$

$R_1 \to R_1 + \alpha R_2$

$-2+\alpha$

$\alpha=2$

$(1,-2,1,1)+2\left(0,1,-\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)=\left(0,2,-1,-\frac{3}{2}\right)$

$(1,-2,1,1)+\left(0,2,-1,-\frac{3}{2}\right)=\left(1,0,0,-\frac{1}{2}\right) \qquad -\frac{3}{2}+1=\frac{-3+2}{2}=$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + \alpha R_1$

$R_3 \to R_3 + \alpha R_1$

$4 + \alpha_1 = 0 \qquad 7 + \alpha_2 = 0$

$\alpha_1 = -4 \qquad \alpha_2 = -7$

$(4,5,6,1) - 4(1,2,3,1) =$

$(4,5,6,1) - (4,8,12,4) = (0,-3,-6,-3)$

$(7,8,8,1) - 7(1,2,3,1) = (7,8,8,1) - (7,14,21,7) =$

$= (0,-6,-13,-6)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -13 & -6 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + \alpha R_2$

$-6 + \alpha \cdot (-3) = 0$

$-3\alpha = 6$

$\alpha = -2$

$(0,-6,-13,-6) - 2(0,-3,-6,-3) =$

$= (0,-6,-13,-6) + (0,6,12,6) = (0,0,-1,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -21/10 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + \alpha R_3$

$-\frac{1}{2} + \alpha = 0 \qquad \alpha = \frac{1}{2}$

$$\left(0, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(0, 0, 1, -21/10\right) = \left(0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{21}{20}\right)$$

$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{-1+1}{2}$

$$\left(0, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right) + \left(0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{21}{20}\right) = \left(0, 1, 0, -9/5\right)$$

$-\frac{3}{4} - \frac{21}{20} = -\frac{15}{2}$

$= -\frac{36}{20}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{10} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{9}{5} \\ z = -\frac{21}{10} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2n & 5n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 + 0 + 0$

$2 + 2n + 0$

$5 + 0 + 5n$

Esercitazione 3, congruenze modulo m

a) $25x \equiv 24 \pmod{16}$

$MCD(25,16)=1$

$25 = 16\cdot 1 + 9$

$16 = 9\cdot 1 + 7$

$9 = 7\cdot 1 + 2$

$7 = 2\cdot 3 + 1$

$2 = 1\cdot 2 + 0$

$1 = 7 - 2\cdot 3 = 7-(9-7)\cdot 3 = 7 - 9\cdot 3 + 7\cdot 3 = 7\cdot 4 - 9\cdot 3 =$

$(16-9)4 - 9\cdot 3 = 16\cdot 4 - 9\cdot 4 - 9\cdot 3 = 16\cdot 4 - 9\cdot 7 = 16\cdot 4 - (25-16)7$

$= 16\cdot 4 - 25\cdot 7 + 16\cdot 7 = 25(-7) + 16\cdot 11$

$S = (-7)(24) = -168$

$[168]_{16} = [8]_{16}$

$\begin{array}{r|l} 168 & 16 \\ 08 & 10 \\ 8 & \end{array}$

$-168 \equiv 8 \pmod{16}$

$S = [8]_{16} = \{8 + y16 \mid y \in \mathbb{Z}\}$

b) $20x \equiv 30 \pmod{26}$ $MCD(26,20)=2$

$26 = 20\cdot 1 + 6$

$20 = 6\cdot 3 + 2$

$6 = 2\cdot 3 + 0$

$2 \mid 30$ ✓

$10x \equiv 15 \pmod{13}$

~~$26 = 10\cdot 2 + 6$~~

~~$10 = 6\cdot 1 + 4$~~

~~$6 = 4\cdot 1 + 2$~~

~~$4 = 2\cdot 2 + 0$~~

$13 = 10\cdot 1 + 3$

$10 = 3\cdot 3 + 1$

$3 = 1\cdot 3 + 0$

$1 = 10 - 3\cdot 3 = 10 - 3(13-10) = 10 - 3\cdot 13 + 3\cdot 1$

$= 4\cdot 10 - 3\cdot 13$

$S = 4(15) = 60$

$S = [60]_{13}$

$= [8]_{13}$

$\begin{array}{r|l} 60 & 13 \\ 8 & 4 \end{array}$

$13\cdot 4 = 5$

$[8]_{13} = [8]_{26} + [8+\frac{26}{2}]_{26} = [8]_{26} \cup [8+13]_{26}$

a)

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 9 \pmod{11} \\ x \equiv 51 \pmod{75} \end{cases} \qquad x = 1 + 2y,\ y \in \mathbb{Z}$$

$1 + 2y \equiv 9 \pmod{11}$

$2y \equiv 8 \pmod{11}$

$MCD(11,2) = 1$

$11 = 2 \cdot 5 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0 \qquad 1 = 11 - 2 \cdot 5 = 11 - 5 \cdot 2$

$y = (-5)(8) = -40$

$[-40]_{11} = [4]_{11} \qquad -40 = 4(11) - 4$

$y = 4$

$x = 1 + 2(4) = 9, \quad [9]_{22}$

$x \equiv 9 \pmod{22} \qquad x = 9 + 22y,\ y \in \mathbb{Z}$

~~$15 + 22y \equiv 51 \pmod{75}$~~

~~$22y \equiv 36 \pmod{75} \qquad MCD(75,22) = 1$~~

~~$75 = 22 \cdot 3 + 9$~~

~~$22 = 9 \cdot 2 + 4$~~

~~$9 = 4 \cdot 2 + 1$~~

$4 = 1 \cdot 4 + 0$

~~$1 = 9 - 4 \cdot 2 = 9 - (22 - 9 \cdot 2) \cdot 2 = 9 - 22 \cdot 2 + 9 \cdot 4$~~

~~$= 9 - 22 \cdot 2 + (75 - 22 \cdot 3) \cdot 4$~~

~~$= 9 - 22 \cdot 2 + 75 \cdot 4 - 22 \cdot 7 = -22 \cdot 9 + 75 \cdot 4 + 9$~~

Tutorato 7

Equazioni congruenziali

Siano $a, m, b \in \mathbb{Z}$ $\quad a \equiv b \pmod m$ $\quad m \mid a-b$

$[a]_m = \{a + mq : q \in \mathbb{Z}\} = \{a - mq : q \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{Z}_{\equiv m} \to \mathbb{Z}_m = \{[a]_m : a \in \mathbb{Z}\}$

Un' equazione congruenziale lineare è un eq. del tipo:

$$ax \equiv b \pmod m$$

Essa ha soluzioni $\Leftrightarrow$ $MCD(a, m) \mid b$

La soluzione è $k\alpha$ dove $k = \frac{b}{MCD(a,m)}$ $\quad \alpha$: 1° coefficiente di Bezout

teorema

L'eq $ax \equiv b \pmod m$ con $d = MCD(a, m)$, $d \mid b$

$ax \equiv b \pmod m$ è equivalente a $\frac{a}{d} x \equiv \frac{b}{d} \left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{d}\right)$

Teorema

Se $c \in \mathbb{Z}$ è soluzione di $ax \equiv_m b$, allora $\forall s \in [c]_m$ si ha soluzione

Teorema cinese del resto

$$\begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv b_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ x \equiv b_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

con i moduli a due a due coprimi

Questo sistema ammette sempre soluzioni e se $c \in \mathbb{Z}$ è soluzione, le soluzioni del sistema sono tutti e soli gli interi in $[c]_{m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k}$

1) Determinare le soluzioni di $121x \equiv 77 \pmod{22}$ $\quad MCD(121,22) = 11$

$121 = 22 \cdot 5 + 11$ $\quad 11 \mid 77 \,,\; 77 = 11 \cdot 7$

$22 = 11 \cdot 2 + 0$ $\quad d = a \mid m$

$\Downarrow$

$11x \equiv 7 \pmod{2}$ $\quad MCD(11,2) = 2$

$11 = 2 \cdot 5 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 11 - 2(5)$

$\alpha = 1 \quad k = 7$

$c = 1 \cdot 7 = 7$

Soluzione: $[7]_2 = [1]_2$

2) Soluzioni positive di $84x \equiv 108 \pmod{500}$

$500 = 84 \cdot 5 + 80$ $\quad MCD(500,84) = 4$

$84 = 80 \cdot 1 + 4$ $\quad 4 \mid 108$

$80 = 4 \cdot 20 + 0$

$21x \equiv 27 \pmod{125}$ $\quad MCD(125,21) = 1$

$125 = 21 \cdot 5 + 20$

$21 = 20 \cdot 1 + 1$

$20 = 1 \cdot 20 + 0$

$1 = 21 - 20 = 21 - (125 - 21 \cdot 5) = 21 - 125 + 21 \cdot 5 = 21 \cdot 6 - 125$

$s = 27 \cdot 6 = 162$

$[162]_{125} = [37]_{125}$ - cioè della forma $37 + 125h$ con $h \in \mathbb{Z}$

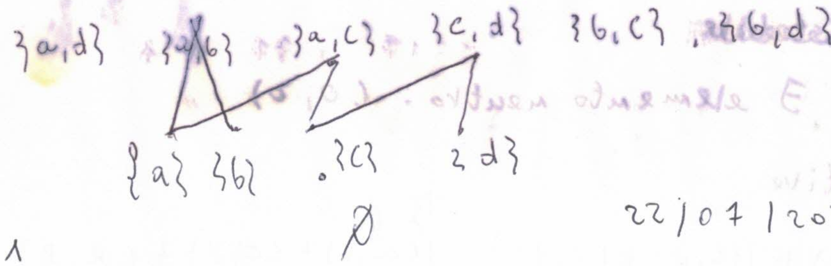
$162 = 125 \cdot 1 + 37$

le soluzioni positive sono:

$\{x : x = 37 + 125h \,,\; h \in \mathbb{Z},$

1) $X = \{a, b, c, d\}$

$(P(X), \subseteq)$



mi scoccio

:(

22/07/2022

2)

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 3 \pmod 7 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \end{cases} \qquad x = 1 + 2k$$

$1 + 2k \equiv 3 \pmod 7$

$2k \equiv 2 \pmod 7 \qquad MCD(7,2) = 1$

$7 = 2 \cdot 3 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 7(1) - 3(2)$

$S = (-3)(2) = -6$

$x = 1 + 2(1) = 3 \qquad S = [-6]_7 = [1]_7$

$[3]_{14} \quad - \quad x = 3 + 14k$

~~$3 + 14k \equiv 2 \pmod 3$~~

~~$3k \equiv -1 \pmod 3$~~

~~$3k \equiv 2 \pmod 3$~~

$3 + 14k \equiv 2 \pmod 3$

$14k \equiv 2 \pmod 3 \qquad MCD(14,3) = 1$

$14 = 3 \cdot 4 + 2$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 3 - 2 = 3 - (14 - 3 \cdot 4)$

$= 3 - 14 + 3 \cdot 4 = 3 \cdot 5 - 14$

$= 3 \cdot 5 - 1 \cdot 14$

$S = -2$

$S = [-2]_3 = [1]_3$

$x = 3 + 14 = 17$

$[17]_{42}$

3) $(\mathbb{Z}, +)$ $\quad \perp : (a,b) \perp (c,d) = (a+c, b+d)$

~~parte stabile~~

$\exists$ elemento neutro: $(0,0)$

associative

$$(a,b) + \big((c,d) + (e,f)\big) = \big((a,b) + (c,d)\big) + (e,f)$$

$$\downarrow$$

$$(a,b) + \big((c+e, d+f)\big) = (a+c+e, b+d+f)$$

$$\big((a,b) + (c,d)\big) + (e,f) = \big((a+c, b+d)\big) + (e,f) = (a+c+e, b+d+f)$$

~~con~~ è simmetrizzabile

$$(a,b) + (-a,-b) = (0,0)$$

commutativa

$(a,b) + (c,d) = (c,d) + (a,b)$ $\quad$ vero per la commutatività della somma

$\det(M) = 1 \cdot \det\left(\cancel{} \right) \quad d + \quad -$

$2 \cdot 4 \cdot 0$

$0 + 3 + 1$

Metodo ebrei ☆

$4 - (12 + 2 + 0\,2$

$-\bar{10}_5 = \bar{0}_5$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$(P_1 + P_2 + P_3)$

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

rango=3

$R_3 \to R_3 + \alpha R_2$

$1 + \alpha = 0$

$\alpha = -1$

[illegible]

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$$ $MCD(3,5)=1$

$[2]_3$

La soluzione della prima equazione è del tipo: $x = 2+3y$, $y \in \mathbb{Z}$

$2+3y \equiv 3 \pmod 5$

$3y \equiv 1 \pmod 5$ $\quad y=2$

$5 = 3 \cdot 1 + 2$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 3-2 = 3-(5-3) = 3-5+3 =$ $2 \cdot 3 - 5$

$s = 2 \cdot 1 = 2$, $s = y$

Vado a sostituire

$x = 2+3(2) = 8$ $\quad [8]_{15}$ $\cdot 3 \cdot 5$

Determinare le soluzioni di: 4)

$$\left.\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}\right] [8]_{15} : \{x \mid x = 8+15y, y \in \mathbb{Z}\}$$
$$x \equiv 4 \pmod 7$$

$8+15y \equiv 4 \pmod 7$

$15y \equiv -4 \pmod 7$

$15 = 7 \cdot 2 + 1$

$7 = 1 \cdot 7 + 0$

$1 = 15 - 7 \cdot 2$ $\quad y = 1(-4) = -4$, $[-4]_7$: $y \equiv -4 \pmod 7$

$y = 3$ $\quad y \equiv -4+7 \pmod 7$

$y \equiv 3 \pmod 7$

$45 \equiv -4 \pmod 7$

$[3]_7$

$x = 8+15(3) = 53$

Tutte le soluzioni del sistema appartengono

alla classe $[53]_{105} = \{x = 53+105z, z \in \mathbb{Z}\}$

5) $\begin{cases} 84x \equiv 100 \pmod{400} \\ 33x \equiv 154 \pmod{253} \end{cases}$ Verificare se è compatibile

$400 = 84 \cdot 4 + 64$

$84 = 64 \cdot 1 + 20$

$64 = 20 \cdot 3 + 4$

$20 = 4 \cdot 5 + 0$

$MCD(400, 84) = 4$

$MCD(253, 33) = 11$

$253 = 33 \cdot 7 + 22$

$33 = 22 \cdot 1 + 11$

$\cancel{21 = 12 \cdot 1 + 9}$ $22 = 11 \cdot 2 + 0$

$\cancel{12 = 9 \cdot 1 + 3}$

$\cancel{9 = 3 \cdot 3 + 0}$

$$\begin{cases} 21x \equiv 27 \pmod{100} \\ 3x \equiv 14 \pmod{23} \end{cases}$$

Sia c soluzione della prima equazione, tutte le soluzioni costituiscono

$[c]_{100} = \{x = c + 100y\}$

$x \equiv c \pmod{100}$

$21x \equiv 27 \pmod{100}$

$100 = 21 \cdot 4 + 16$

$21 = 16 \cdot 1 + 5$

$16 = 5 \cdot 3 + 1$

$5 = 1 \cdot 5 + 0$

$MCD(21, 100) = 1$

$1 \mid 27$ v

$1 = 16 - 5 \cdot 3 = 16 - (21 - 16) \cdot 3 = \cancel{16 - 21 + 16 \cdot 3 = 16 \cdot 4 - 21 \cdot 16}$

$= 16 - 3 \cdot 21 + 16 \cdot 3 = 16 \cdot 4 - 3 \cdot 21 = (100 - 21 \cdot 4) \cdot 4 - 3 \cdot 21$

$= 100 \cdot 4 - 21 \cdot 16 - 3 \cdot 21 = 100 \cdot 4 - 21 \cdot 19 = 100 \cdot 4 - 19(21)$

$S = (-19) 27 = -513$

$[-513]_{100} = [87]_{100}$

resto

4) induzione su n

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$\det = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} = 35$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \dots & 0 \\ a_{12} & a_{12} \dots & 0 \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & & a_{33} \end{matrix}$$

Passo base

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$\det = a_{11} \cdot 0$

$$\begin{array}{c|cc} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} & \cancel{a_{14}} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}$$

$\cancel{a_{11}}$

Antonio D'A

$$\begin{matrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}$$

$$(n \perp m) \perp k = \frac{nm}{5} \perp k = \frac{\frac{nmk}{5}}{5} = \frac{nmk}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5}$$

$n \perp m = \frac{nm}{5}$ $\qquad$ $m \perp n = \frac{mn}{5}$

elemento neutro

$n \perp e = n$

$\frac{ne}{5} = n$

$\frac{n}{5} e = n$

$\frac{e}{5} = 1$

$e = \frac{1}{5}$

$9 \perp 1$

$20 \perp \frac{1}{5}$

$\frac{20}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5}$

$35 \perp \frac{1}{5} = \frac{35 \cdot 1}{5} \cdot \frac{1}{5}$

$\frac{35}{5} \cdot 5$

$(n \perp m) \perp k$

$\frac{nm}{5} \perp k = \frac{1}{5} \cdot nmk \cdot \frac{1}{5}$

$\frac{1}{5} nm$

$380 \perp \frac{1}{5} = \frac{\frac{380}{5}}{5} = \frac{380}{\cancel{5}} \cdot$

$2\mathbb{Z} = \{-12, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

$3\mathbb{Z} = \{-12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12\}$

1217 +
280
1490

19 ·
19
171 +
190
361 +
16
377

377 +
280
657 +
280
937 +
280
1217

20
19
180 +
200

377 +
380
757 +
380
1137

1137 +
380
1517

13 ·
20
00 +
380

Antonio D'Auria
0512114149