2.4 Indipendenza di eventi

Fondamentale nella teoria della probabilità è il concetto di *indipendenza* di eventi. Prima di darne la definizione formale ed esplicitarne alcune proprietà, è opportuno illustrarne il significato intuitivo.

Questo può essere fatto anticipando il concetto di probabilità condizionata che sarà approfondito nella prossima lezione.

Nel seguito indicheremo con *P(A|B)* la probabilità dell'evento *A* condizionata dal fatto che l'evento *B* si è già verificato, ossia la probabilità di *A* sapendo che *B* si è verificato. Naturalmente *A* e *B* devono appartenere alla stessa famiglia di eventi. Seguendo la definizione classica, ad esempio, *P(A|B)* si definisce come il rapporto tra il numero di casi favorevoli all'evento $A \cap B$ e il numero di casi possibili dando luogo alla seguente formula:

$$P(A|B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} \frac{N(\Omega)}{N(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Quindi sussiste la relazione $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$. In altre parole, la circostanza che i due eventi sono indipendenti comporta che la probabilità della loro intersezione è uguale al prodotto delle probabilità dei singoli eventi.

Definizione 2.9 *Siano A e B eventi di $\mathscr{F}$. Essi si dicono indipendenti se risulta*

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B). \tag{2.16}$$

A differenza dell'incompatibilità, che è una proprietà intrinseca degli eventi, l'indipendenza è una proprietà che dipende esclusivamente dalle probabilità degli eventi e non, in generale, dalla struttura di questi. Come emerge dalla Definizione 2.9, l'indipendenza è una relazione simmetrica: se A è indipendente da B, allora B è indipendente da A. Affermare che gli eventi A e B sono indipendenti significa dunque che il verificarsi di A non influenza la probabilità che B si verifichi, e viceversa.

Esempio 2.11 Si consideri l'esperimento consistente nell'estrarre una carta da un mazzo ben mescolato (ossia si assume valida l'equiprobabilità delle 52 carte). Gli eventi $A = \{$*la carta estratta è una figura*$\}$ e $B = \{$*la carta estratta è di cuori*$\}$ sono indipendenti. Infatti, $N(\Omega) = 52$ è il numero dei casi possibili, $N(A) = 12$ il numero dei casi favorevoli ad A, $N(B) = 13$ il numero di casi favorevoli a B e $N(A \cap B) = 3$ il numero di casi favorevoli ad $A \cap B$, così che

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{13}, \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4}, \quad P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{52} = P(A)P(B).$$

Quindi A e B sono eventi indipendenti. $\diamondsuit$

Proposizione 2.8 *Se A è un evento di $\mathscr{F}$ tale che $P(A) = 0$ oppure $P(A) = 1$ e se B è un qualsiasi altro evento di $\mathscr{F}$, si ha che A e B sono indipendenti.*

Dimostrazione Se $P(A) = 0$, dalla Proposizione 2.7 segue che $P(A \cap B) = 0$ così che la relazione (2.16) è banalmente verificata. Analogamente, dalla Proposizione 2.7 e dall'essere $P(A) = 1$ segue $P(A \cap B) = P(A)$, restando così nuovamente verificata la (2.16). $\square$

Proposizione 2.9 *Se A e B sono eventi indipendenti di $\mathscr{F}$, allora*

(i) A e $\overline{B}$ sono indipendenti;

(ii) $\overline{A}$ e B sono indipendenti;

(iii) $\overline{A}$ e $\overline{B}$ sono indipendenti.

Dimostrazione *Caso (i)* Poiché $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, con $A \cap B$ e $A \cap \overline{B}$ eventi incompatibili, facendo uso della Proposizione 2.3 e dell'ipotesi di indipendenza di A e B si ha:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(B) + P(A \cap \overline{B})$$

e quindi:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A)\,[1 - P(B)] = P(A)P(\overline{B}),$$

ossia la tesi.

Caso (ii) Per dimostrare che $\overline{A}$ e B sono indipendenti, basta semplicemente scambiare i ruoli di A e B nel *Caso (i)*.

Caso (iii) Per dimostrare, infine, che $\overline{A}$ e $\overline{B}$ sono indipendenti è sufficiente applicare il procedimento descritto nel *Caso (i)* agli eventi indipendenti $\overline{B}$ ed A. □

Proposizione 2.10 *Se A e B sono eventi indipendenti di $\mathscr{F}$, allora $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A})\,P(\overline{B})$.*

Dimostrazione Dall'identità $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$ (legge di De Morgan) e dalla Proposizione 2.4 si ricava $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B})$. La tesi segue immediatamente dalla Proposizione 2.9 osservando che, essendo gli eventi A e B indipendenti, tali sono anche $\overline{A}$ e $\overline{B}$. □

Esempio 2.12 Da un'urna contenente 10 biglie rosse e 5 biglie nere si estraggono due biglie con rimpiazzamento. Per calcolare la probabilità dell'evento $C = \{$*almeno una delle biglie estratte è nera*$\}$, è conveniente passare all'evento complementare $\overline{C} = \{$*nessuna delle due biglie estratte è nera*$\}$. L'evento $\overline{C}$ è l'intersezione di due eventi indipendenti $A = \{$*la prima biglia estratta è rossa*$\}$ e $B = \{$*la seconda biglia estratta è rossa*$\}$. Dalla definizione classica di probabilità si ricava $P(A) = P(B) = 2/3$, e quindi dalla Proposizione 2.10 segue $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - (2/3)^2 = 5/9$. ♢

Vogliamo ora estendere la definizione di indipendenza ad *n* eventi. Cominciamo col considerare 3 eventi definiti sullo stesso spazio campione. Richiedere che la probabilità congiunta dei 3 eventi si fattorizzi nel prodotto delle probabilità dei singoli eventi non è sufficiente. Per convincersi di ciò è sufficiente pensare ad una situazione limite in cui uno degli eventi in esame, ad esempio il primo, sia quasi impossibile; in questo caso la relazione

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

sarebbe sempre soddisfatta indipendentemente dall'indipendenza tra A_2 e A_3. Questa osservazione ci conduce a richiedere che affinché i tre eventi siano indipendenti è necessario che risultino indipendenti anche le singole coppie di eventi.

Più in generale si giunge alla seguente definizione:

Definizione 2.10 *Gli eventi $A_n \in \mathscr{F}$, in numero finito o numerabile, si dicono indipendenti se, comunque scelti k di essi $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ $(k = 2, 3, \ldots)$, la probabilità dell'intersezione di questi si fattorizza nel prodotto delle rispettive probabilità:*

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\,P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}). \tag{2.17}$$

Nel caso di tre eventi A, B, C la condizione di indipendenza è espressa complessivamente da quattro relazioni, ossia dalle seguenti tre relazioni tra coppie di eventi

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \qquad P(A \cap C) = P(A)P(C), \qquad P(B \cap C) = P(B)P(C),$$

ed inoltre dalla relazione seguente:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

Esempio 2.13 Si consideri l'esperimento consistente nel lanciare 2 volte una moneta. Lo spazio campione è $\Omega = \{\mathrm{TT}, \mathrm{TC}, \mathrm{CT}, \mathrm{CC}\}$ e ciascuno dei suoi eventi elementari ha probabilità $1/4$. Consideriamo i seguenti eventi: $A = \{$*al primo lancio esce testa*$\}$, $B = \{$*al secondo lancio esce testa*$\}$ e $C = \{$*nei due lanci si ha lo stesso risultato*$\}$. Poiché $A = \{\mathrm{TT,TC}\}$, $B = \{\mathrm{TT,CT}\}$ e $C = \{\mathrm{TT,CC}\}$, risulta $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$. Inoltre, poiché $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{\mathrm{TT}\}$, si ha $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/4$. Da ciò si trae che $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ e $P(B \cap C) =$

$P(B)P(C)$, così che gli eventi A, B e C sono indipendenti a due a due. Tuttavia, poiché $A \cap B \cap C = \{\mathrm{TT}\}$, risulta $P(A \cap B \cap C) = 1/4$, mentre $P(A)\,P(B)\,P(C) = 1/8$. Essendo $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)\,P(B)\,P(C)$, i tre eventi A, B e C non sono indipendenti. $\diamondsuit$

Esempio 2.14 Si prenda in esame l'esperimento che consiste nella scelta a caso di una sequenza costituita da terne di cifre binarie. Lo spazio campione $\Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ consiste di 8 eventi elementari che assumeremo equiprobabili. Si considerino i seguenti eventi: $A = \{$*la prima cifra è* $1\}$, $B = \{$*al più una cifra è* $1\}$, $C = \{$*la seconda ed la terza cifra sono uguali*$\}$. Risulta quindi $A = \{100, 101, 110, 111\}$, $B = \{000, 001, 010, 100\}$ e $C = \{000, 011, 100, 111\}$, così che $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$. Inoltre, poiché $A \cap B \cap C = \{100\}$, si ha che $P(A \cap B \cap C) = 1/8 = P(A)\,P(B)\,P(C)$. Si noti che la sussistenza di tale relazione non garantisce che gli eventi A, B, C sono indipendenti. Infatti, essendo $A \cap B = \{100\}$, si ha $P(A \cap B) = 1/8 \neq P(A)\,P(B) = 1/4$. Si osservi infine che gli eventi A e C, così come gli eventi B e C, sono indipendenti, risultando $P(A \cap C) = 1/4 = P(A)\,P(C)$ e $P(B \cap C) = 1/4 = P(B)\,P(C)$. $\diamondsuit$

La Proposizione 2.9 può essere generalizzata al caso di più di due eventi come emerge dalla seguente proposizione che ci limitiamo ad enunciare.

Proposizione 2.11 *Se si considera una famiglia di eventi indipendenti di $\mathscr{F}$ e se per ogni evento di qualche sua sottofamiglia si opera la sostituzione con il suo complemento, allora la nuova classe è ancora formata da eventi indipendenti.*

La Proposizione 2.10 può essere estesa al caso di più di due eventi indipendenti.

Proposizione 2.12 *Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono eventi indipendenti di $\mathscr{F}$, allora*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}).$$

Dimostrazione Dalla legge di De Morgan $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \overline{\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}}$ e dalla Proposizione 2.4 si trae $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right)$. La tesi segue immediatamente dalla Proposizione 2.11 osservando che, essendo gli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ indipendenti, tali sono anche $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$. $\square$

Esempio 2.15 Il Cavaliere de Méré, noto appassionato di giochi d'azzardo, era erroneamente convinto che fossero uguali le probabilità dei seguenti eventi: $A = \{$*lanciando quattro dadi si ottiene* 6 *almeno una volta*$\}$ e $B = \{$*lanciando ventiquattro coppie di dadi si ottiene un* 6 *doppio almeno una volta*$\}$. Determiniamo le probabilità di questi eventi.

Per calcolare la probabilità di A osserviamo che l'evento complementare $\overline{A}$ si può esprimere come intersezione dei quattro eventi indipendenti $C_i = \{$*nel lancio* i*-esimo non si ottiene* $6\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Pertanto, per la Proposizione 2.4 e per l'indipendenza degli eventi C_i si ha

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(C_1)\,P(C_2)\,P(C_3)\,P(C_4) = 1 - \Big(\frac{5}{6}\Big)^4 = 0.5177.$$

Analogamente risulta

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \Big(\frac{35}{36}\Big)^{24} = 0.4914,$$

che, sebbene dimostri l'incorrettezza della congettura del de Méré, pur tuttavia ne manifesta la notevole intuizione in vista della differenza di solo circa il 2.5% dei valori esatti di dette probabilità. $\diamondsuit$

Va menzionato che molti esperimenti consistono in prove indipendenti, tali cioè che il risultato di ciascuna prova non influenza e non è influenzato dal risultato di ogni altra prova. Tipicamente, prove consistenti nel lanciare una moneta un certo numero di volte sono tra loro indipendenti; estrarre biglie da un'urna significa eseguire prove indipendenti a condizione che la biglia estratta venga reinserita ogni volta nell'urna; estrarre carte da un mazzo significa anche eseguire prove indipendenti a condizione che la carta estratta venga rimessa ogni volta nel mazzo e che il mazzo sia sempre accuratamente mescolato.

Esempio 2.16 Si consideri un'apparecchiatura costituita da tre dispositivi che lavorano indipendentemente l'uno dall'altro. Si supponga che durante un fissato intervallo di tempo l'affidabilità (probabilità di corretto funzionamento) del primo dispositivo sia p_1, del secondo sia p_2 e del terzo sia p_3. Si assuma che il corretto funzionamento del primo dispositivo sia indispensabile per il corretto funzionamento dell'apparecchiatura e che il guasto simultaneo del secondo e del terzo dispositivo metta fuori uso l'apparecchiatura. Per determinare l'affidabilità dell'apparecchiatura durante l'intervallo di tempo considerato, si considerino gli eventi

$A = \{$*perfetto funzionamento dell'apparecchiatura*$\}$ e $A_i = \{$*perfetto funzionamento del dispositivo* i*-esimo*$\}$ $(i = 1, 2, 3)$. Si ha $A = (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3)$. Poiché gli eventi $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, $A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3$ e $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3$ sono incompatibili, si ha:

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3).$$

Poiché per ipotesi i tre dispositivi lavorano tra loro indipendentemente, risulta:

$$P(A) = p_1\,p_2\,p_3 + p_1\,(1 - p_2)\,p_3 + p_1\,p_2\,(1 - p_3) = p_1\,(p_2 + p_3 - p_2\,p_3).$$

$\diamondsuit$

Esempio 2.17 Due giocatori G_1 e G_2 competono in un torneo. Si supponga che la probabilità che G_1 vinca una partita sia $1/2$, la probabilità che G_2 vinca una partita sia $1/3$ e la probabilità che una partita termini in pareggio sia $1/6$. Se G_1 e G_2 partecipano ad un torneo di tre partite riguardate come indipendenti, si intende calcolare la probabilità dei seguenti eventi: $C = \{\mathrm{G}_1$ *vince tutte e tre le partite*$\}$, $D = \{$*due delle tre partite terminano in pareggio*$\}$, $F = \{\mathrm{G}_1$ *e* G_2 *vincono alternativamente le tre partite*$\}$ e $H = \{\mathrm{G}_2$ *vince almeno una delle tre partite*$\}$.

Si considerino i seguenti eventi: $A_i = \{\mathrm{G}_1$ *vince la partita i-esima*$\}$ $(i = 1, 2, 3)$, $B_i = \{\mathrm{G}_2$ *vince la partita i-esima*$\}$ $(i = 1, 2, 3)$, $E_i = \{$*la partita i-esima termina in pareggio*$\}$ $(i = 1, 2, 3)$. Si noti che è possibile esprimere gli eventi di interesse C, D, F e H in termini di A_i, B_i e E_i $(i = 1, 2, 3)$. Infatti, essendo $C = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, per l'ipotesi di indipendenza tra le partite si ha $P(C) = P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3) = 1/8$. Inoltre, poiché $D = (E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) \cup (E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) \cup (\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3)$ e $F = (A_1 \cap B_2 \cap A_3) \cup (B_1 \cap A_2 \cap B_3)$, per la proprietà di additività finita della probabilità e per l'ipotesi di indipendenza tra le partite risulta

$$
\begin{aligned}
&P(D) = P(E_1)\, P(E_2)\, P(\overline{E_3}) + P(E_1)\, P(\overline{E_2})\, P(E_3) + P(\overline{E_1})\, P(E_2)\, P(E_3) = \frac{5}{72}\,,\\
&P(F) = P(A_1)\, P(B_2)\, P(A_3) + P(B_1)\, P(A_2)\, P(B_3) = \frac{1}{4}\cdot
\end{aligned}
$$

Infine, essendo $\overline{H} = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}$, si ha:

$$
P(H) = 1 - P(\overline{H}) = 1 - P(\overline{B_1})\, P(\overline{B_2})\, P(\overline{B_3}) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27}\cdot
$$

$\diamondsuit$

Esempio 2.18 In un tiro al bersaglio due concorrenti sparano a turno un colpo finché uno dei due non fa centro. Quando ciò accade la competizione termina ed il concorrente che ha fatto centro vince. Si supponga che i risultati dei tiri siano indipendenti e che la probabilità di fare centro sia costante in ogni tiro per ciascun concorrente; questa sia p per colui che inizia a sparare e q per l'altro. Per calcolare la probabilità di vittoria di ciascun concorrente, si considerino i seguenti eventi: $A = \{$*il concorrente che inizia a sparare vince*$\}$, $B = \{$*il concorrente che spara per secondo vince*$\}$, $A_{2i+1} = \{$*il concorrente che inizia a sparare vince al tiro* $2i + 1\}$ $(i = 0, 1, \ldots)$, $B_{2i} = \{$*il concorrente che spara per secondo vince al tiro* $2i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Per l'ipotesi di indipendenza dei tiri si ha:

$$
\begin{aligned}
&P(A_{2i+1}) = \big[(1-p)\,(1-q)\big]^i\, p \qquad (i = 0, 1, \ldots)\\
&P(B_{2i}) = (1-p)\,\big[(1-p)\,(1-q)\big]^{i-1}\, q \qquad (i = 1, 2, \ldots).
\end{aligned}
$$

Gli eventi $A_1, A_3, \ldots$ e gli eventi $B_2, B_4, \ldots$ sono tutti tra loro incompatibili. Pertanto, poiché $A = \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_{2i+1}$ e $B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_{2i}$, applicando il terzo assioma della probabilità si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&P(A) = P\Big(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_{2i+1}\Big) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(A_{2i+1}) = \frac{p}{p + q - p\,q}\,,\\
&P(B) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_{2i}\Big) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(B_{2i}) = \frac{(1-p)\,q}{p + q - p\,q}\cdot
\end{aligned}
$$

Si osservi che (supponendo che la competizione possa protrarsi indefinitamente) la probabilità che la gara termini è unitaria essendo $P(A) + P(B) = 1$. Quindi, quasi certamente vi sarà un vincitore. $\diamondsuit$