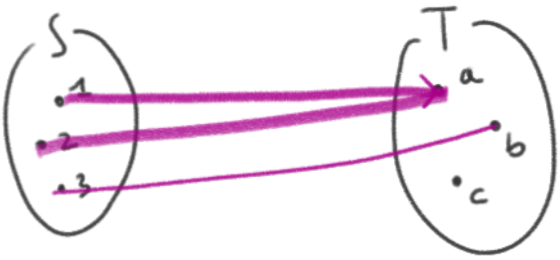
Lezione 28-09

mercoledì 28 settembre 2022 09:12

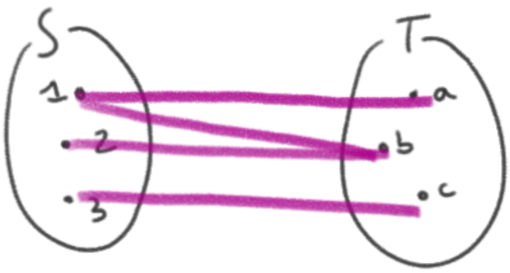
DEF - Una applicazione è una relazione $f \subseteq S \times T$ t.c.
$\forall x \in S \ \exists! \, y \in T$ t.c. $x f y$ $\quad (f(x) = y)$

ES - $S = \{1, 2, 3\}$ $\quad T = \{a, b, c\}$

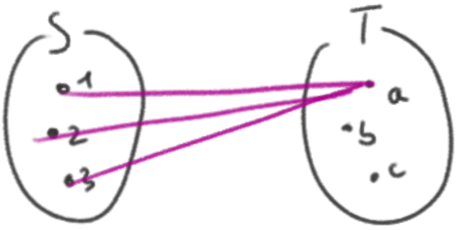


$1 f a \qquad f(1) = a$

$f(1) = a \qquad \mathrm{Im}(f) = \{a, b\}$
$f(2) = a$
$f(3) = b$



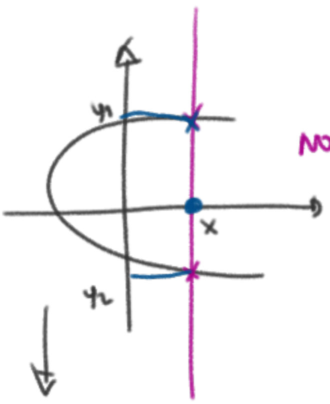
$f(1) = ?$ a / b



$f(1) = f(2) = f(3) = a$
f è "costante" $\qquad \mathrm{Im}(f) = \{a\}$

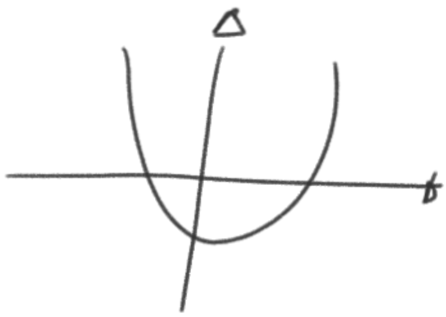
DEF - $\mathrm{Im}(f) \subseteq T$ è un insieme definito come:

$$\mathrm{Im}(f) = \{ y \in T \mid \exists x \in S \text{ t.c. } f(x) = y \} \subseteq T$$



NON è funzione
dato x ho y_1 e y_2 t.c.
$f(x) = y_1$ e
$f(x) = y_2$

$f = \{ (y^2, y) \mid y \in \mathbb{R} \}$



$f = \{ (x, x^2) \mid x \in \mathbb{R} \}$

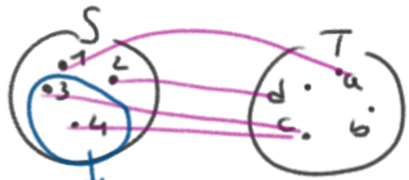
$f = \{ (y^2, y) \mid y \in \mathbb{R} \}$ $\qquad$ $f = \{ (x, x^2) \mid x \in \mathbb{R} \}$

ES - $f(n) = 2 + n$ $\qquad f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$

$f(n) = n^2 + 1$ $\qquad f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$

$f(-3) = 2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N}_0$

PROPRIETÀ $\quad f: S \to T, \quad A \subseteq S$



$A = \{3, 4\}$

$f(A) = \{f(3), f(4)\} = \{c\}$

Definito $f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \} \subseteq T$

Dati $A_1, A_2 \subseteq S$ - Si ha

1) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$

2) $f(A_1) \cup f(A_2) = f(A_1 \cup A_2)$

3) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

4) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$

Dim

1) hp : $A_1 \subseteq A_2$

th : $f(A_1) \subseteq f(A_2)$

Sia $y \in f(A_1)$ - Per definizione $\exists x \in A_1$ t.c. $y = f(x)$

poiché $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow x \in A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow x \in A_2$.

Quindi $f(x) \in f(A_2) \Rightarrow$ poiché $f(x) = y$ si ha $y \in f(A_2)$

Allora $f(A_1) \subseteq f(A_2)$ -

2) per CASA

3) Dobbiamo dimostrare che se $y \in f(A_1 \cap A_2)$ allora $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$

$y \in f(A_1 \cap A_2) \Leftrightarrow \exists x \in A_1 \cap A_2$ t.c. $y = f(x) \Leftrightarrow$ poiché $x \in A_1 \cap A_2$

si ha $x \in A_1$ e $x \in A_2 \Leftrightarrow$ $y = f(x)$ con $x \in A_1$ e $y = f(x)$ con $x \in A_2$ $\Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)$

$y \in f(A_1) \wedge y \in f(A_2)$

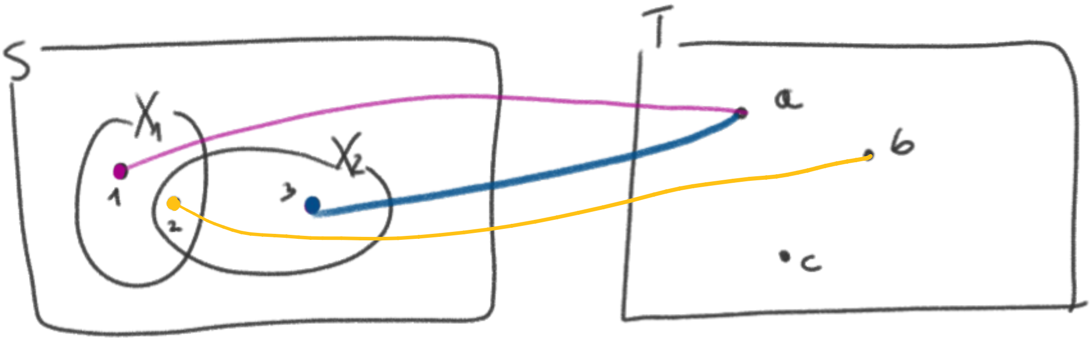
$y \in f(A_1) \wedge y \in f(A_2)$

$\exists x_1 \in A_1$ e $\exists x_2 \in A_2$

t.c.

$f(x_1) = f(x_2) = y$

$y \in f(A_1) \cap (A_2) \not\Rightarrow y \in f(A_1 \cap A_2)$



$X_1 = \{1, 2\}$ $\qquad f(X_1) = \{f(1), f(2)\} = \{a, b\}$

$X_2 = \{2, 3\}$ $\qquad f(X_2) = \{f(2), f(3)\} = \{a, b\}$

$X_1 \cap X_2 = \{2\}$ $\qquad f(X_1 \cap X_2) = \{f(2)\} = \{b\}$

$f(X_1) \cap f(X_2) = \{a, b\}$

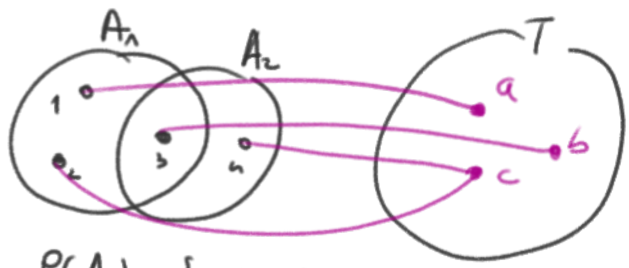
4) $f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$

Sia $y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$ $\quad \exists\, x_1 \in A_1$ t.c. $y = f(x_1)$ e $y \notin f(A_2)$

$\Rightarrow \nexists\, x_2 \in A_2$ t.c. $y = f(x_2)$ $\Rightarrow$

$\exists\, x \in A_1 \setminus A_2$ (equivalentemente questo vuol dire che $x_1 \in A_1 \setminus A_2$

$\Rightarrow y = f(x_1) \in f(A_1 \setminus A_2)$ $\square$



$f(A_1) = \{a, b, c\}$

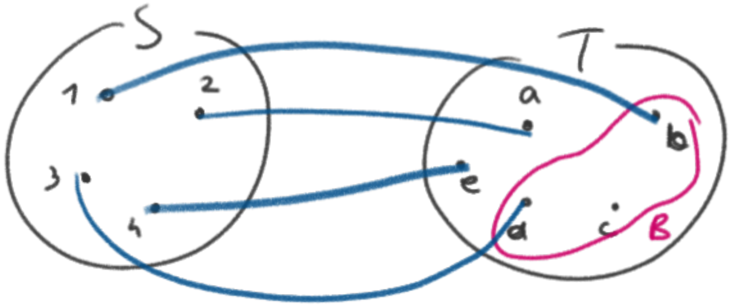
$f(A_2) = \{b, c\}$

$f(A_1) \setminus f(A_2) = \{a\}$

DEF- Dato $A \subseteq S$, $\quad f[A] = f(A) = \{f(x) \in T \mid x \in A\} \subseteq T$ è detto IMMAGINE di A.

Dato $B \subseteq T$ $\quad f^{-1}[B] = f^{-1}(B) = \{x \in S \mid f(x) \in B\} \subseteq S$

è detto CONTROIMMAGINE (o PREIMMAGINE) di B.

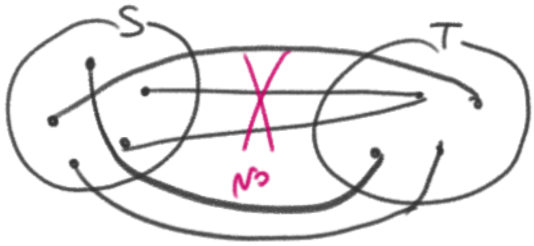


$f^{-1}(B)=\{1,3\}$ perché $f(1)=b\in B$

$f(3)=d\in B$

DEF - Data $f: S\to T$, f si dirà:

1) INIETTIVA se $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)\ \forall x_1,x_2\in S$

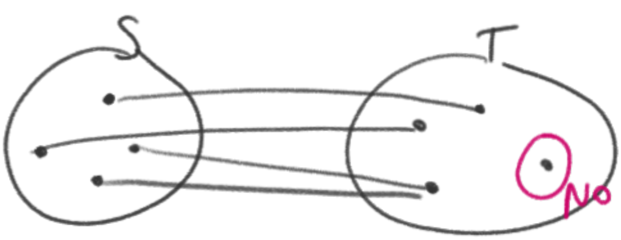


Es $f(x)=x^2$ non è iniettiva $f(-5)=f(5)=25$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

2) SURIETTIVA $Im(f)=T$

$\forall y\in T\ \exists\, x\in S$ tc $y=f(x)$

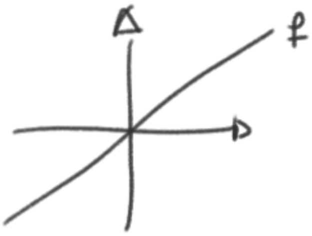


3) BIETTIVA = iniettiva + suriettiva

$\forall y\in T\ \exists!\, x\in S$ tc $f(x)=y$

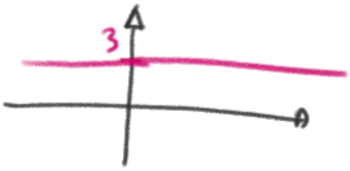
Es $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ non è suriettiva perché $\operatorname{Im}(f)=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 0\}$
$=[0,+\infty)$

Es = $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$



4) f è COSTANTE se $f(x)=c$ $\forall x\in S$, dove $c\in T$ è fissato.

Es - $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3$



$\operatorname{Im}(f)=\{3\}$

PROPRIETÀ della CONTROIMMAGINE $f: S\to T$

Dati $B_1, B_2\subseteq T$

1) $B_1\subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1)\subseteq f^{-1}(B_2)$
2) $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$
3) $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$
4) $f^{-1}(B_1\setminus B_2)=f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)$
5) $\forall A\subseteq S$ $\quad A\subseteq f^{-1}(f(A))$
6) $\forall B\subseteq T$ $\quad f(f^{-1}(B))\subseteq B$

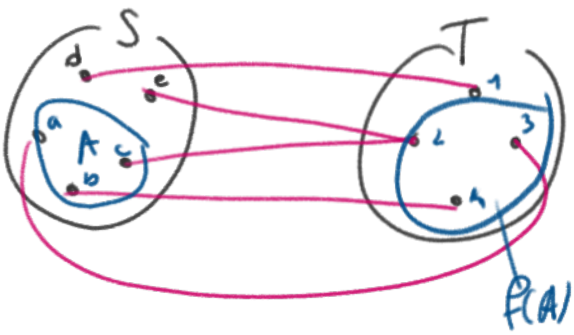
Dim

5) Sia $x\in A \Rightarrow f(x)\in f(A)$.

$f^{-1}(f(A))=\{x\in S \mid f(x)\in f(A)\}$ → definizione

$\Rightarrow x\in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow A\subseteq f^{-1}(f(A))$ □

Es -



$f(A)=\{2,3,4\}$

$f^{-1}(f(A))=\{a,b,c,e\}$

$A\subsetneq f^{-1}(f(A))$

$f(A)$ $\qquad A \subsetneq f^{-1}(f(A))$

__DEF__ - $f \subseteq S \times T$ e $g \subseteq T \times W$ -

$(f: S \to T \qquad g: T \to W)$

Si chiama composta di f e g la applicazione

$$g \circ f : S \to W \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

__ES__ - $f(x) = x + 3$

$g(x) = x^2$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+3) = (x+3)^2$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 3$$

$\Rightarrow$ La composizione non è commutativa

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \to$ è associativa

$\mathrm{Im}(f) \subseteq \text{Dominio}(g)$

__ES__ $f(x) = -x \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{x} \qquad g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$\underbrace{(g \circ f)(x)}_{= \sqrt{-x}}$ ha senso solo se $f(x) \geq 0$

__TEOREMA__

1) f, g sono iniettive $\Rightarrow g \circ f$ è iniettiva
2) " " " suriettive $\Rightarrow g \circ f$ è suriettiva
3) " " " biettive $\Rightarrow g \circ f$ è biettiva

2) " " " suriettive $\Rightarrow$ $g \circ f$ è suriettiva

3) " " " biettive $\Rightarrow$ $g \circ f$ è biettiva

4) $g \circ f$ è iniettiva $\Rightarrow$ f è iniettiva

5) $g \circ f$ è suriettiva $\Rightarrow$ g è suriettiva

6) $g \circ f$ è biettiva $\Rightarrow$ f è iniettiva e g è suriettiva.