Progettazione di Algoritmi (9 CFU)
12/7/2019

Cognome e Nome:
Numero di Matricola:

Spazio riservato alla correzione

1	2	3	4	5	6	Totale
/18	/20	/18	20	/10	/14	/100

1.

a) Indicare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false.
1. $(\log n)n^{1/8} = O((\log n)^2)$
2. $n^2\, 2^{n/2} = \Omega(2^n)$
3. $10n+n^k = O(n)$, k e` una costante minore o uguale di 1
4. $1000n^4-100n^2=\Omega(n^3)$
5. $\frac{1}{4} n + n^{1/2}\log n = O(n)$

b) Si dimostri che se $f(n)=O(g(n))$ allora $nf(n)=O(ng(n))$. **Occorre utilizzare solo la definizione di O e nessuna altra proprieta`.**

c) Si analizzi il tempo di esecuzione nel caso pessimo del seguente segmento di codice fornendo una stima asintotica **quanto migliore e` possibile** per esso. **Si giustifichi in modo chiaro la risposta.**

```
i=1, j=1;
WHILE( i≤n and  j≤n){
      print(i*j);
      i=i+1;
      j=j*2

  }
```

2

a) Si scriva lo pseudocodice di un algoritmo basato sul paradigma del **Divide et Impera** che prende in input un array NON ordinato A e un elemento x e restituisce l'indice della cella dell'array contenente x. Se x non e` presente nell'array, l'algoritmo restituisce -1.

b) Si fornisca la relazione di ricorrenza che esprime il tempo di esecuzione T(n) dell'algoritmo di cui al punto a). **Spiegare in modo chiaro come si ottiene la formula da voi fornita. Se l'algoritmo al punto a) non risultera` corretto, questo punto non verra` valutato.**

c) A partire dalla relazione di ricorrenza di cui al punto b), si fornisca una stima asintotica quanto migliore e` possibile del tempo di esecuzione nel caso pessimo dell'algoritmo al punto a) . **Giustificare la risposta usando o il metodo iterativo o quello per sostituzione (induzione).**

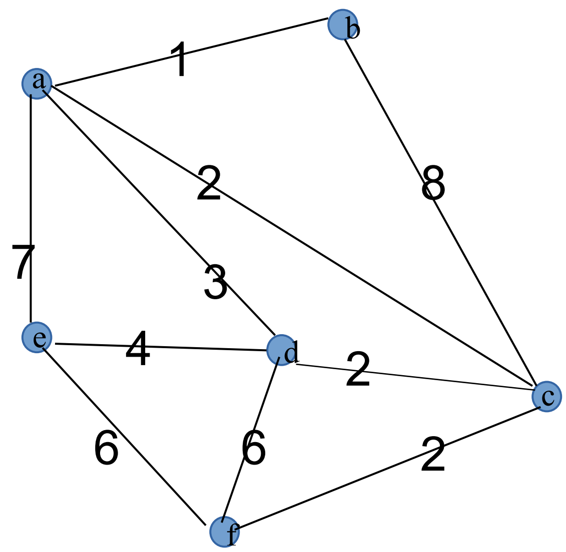
3.

a) Si scriva lo pseudocodice di un algoritmo BFS **senza** coda FIFO che abbia tempo di esecuzione O(n+m) .

b) Si scriva lo pseudocodice di un algoritmo che prende in input un grafo G non orientato e restituisce true se il grafo G e` bipartito e false altrimenti. L'algoritmo deve avere tempo di esecuzione O(n+m). Il voto dipendera`, oltre che dalla correttezza dell'algoritmo, anche da quanto dettagliato e` lo pseudocodice.

4.

a) Si mostri l'esecuzione dell'algoritmo di Krukal sul seguente grafo. **Occorre mostrare per ogni passo la foresta di alberi ottenuta fino a quel passo.**



b) Sia G un grafo non orientato connesso con pesi degli archi a due a due distinti. Si dimostri che se si esegue l'algoritmo di Kruskal su G allora ogni arco selezionato in questa esecuzione fa parte del minimo albero ricoprente di G.

c) Si spieghi in che cosa consiste un'istanza (input) del problema del **Partizionamento di Intervalli** e in cosa consiste una soluzione (output) del problema. **Se dalla risposta a questo punto si evincera` che lo studente non sa in cosa consiste il problema del Partizionamento di Intervalli, il punto successivo del quesito non sara` valutato.**

d) Si descriva la strategia greedy che permette di ottenere la soluzione ottima per il problema del **Partizionamento di Intervalli** e si dica a cosa e` uguale il valore della soluzione ottima. Fornire una definizione chiara di eventuali concetti utilizzati per rispondere al quesito.

5.

a) Si consideri la seguente istanza di Interval Scheduling Pesato:

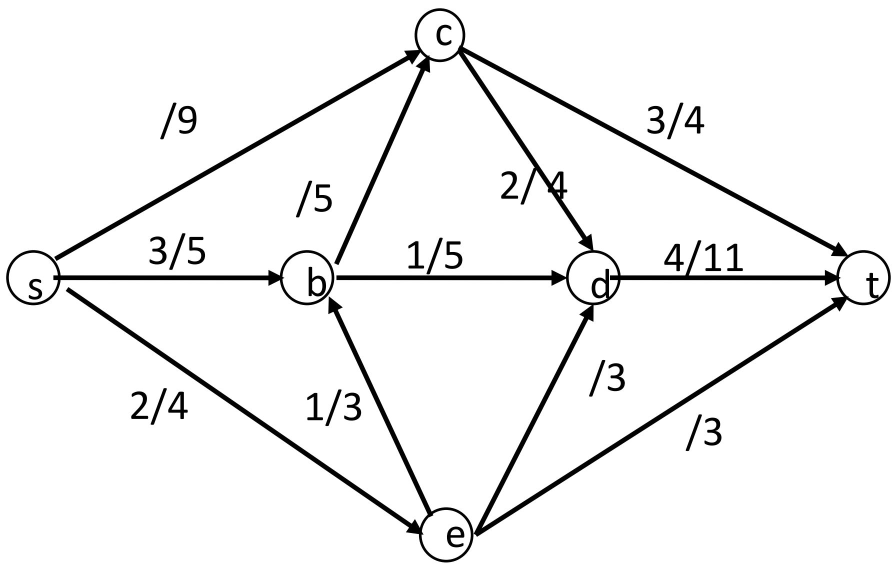
$s_1 = 5$, $s_2 = 1$, $s_3 = 4$, $s_4 = 2$
$f_1 = 7$, $f_2 = 8$, $f_3 = 6$, $f_4 = 4$
$v_1 = 15$, $v_2 = 21$, $v_3 = 4$, $v_4 = 10$

Si calcolino i valori p(j) e i valori OPT(j) per j=1,2,3,4 e si fornisca la **soluzione ottima** per la suddetta istanza del problema (non solo il suo valore).

Attenzione: gli indici j di p(j) e OPT(j) non corrispondono necessariamente agli indici j dei valori input s_j , f_j e v_j .

6.

a) Nella seguente figura sono indicate le quantita` di flusso associate ad alcuni degli archi della rete. Si associ a ciascuno dei restanti archi una quantita` di flusso in modo che i valori da voi forniti siano compatibili con quelli gia` indicati e si dica qual e` il valore della funzione flusso cosi` definita.



b) Si definisca la nozione di taglio s-t di una rete di flusso e di capacita` di un taglio s-t.

b) Si descriva un algoritmo efficiente per ottenere un taglio di capacita` minima di una rete di flusso G.