Esercizi svolti

Esempio 1. Uno studente deve sostenere due prove; con probabilità 0.5 supera la prima prova, con probabilità 0.3 supera la seconda e con probabilità 0.3 le supera entrambe. Calcolare la probabilità con cui lo studente

1. supera almeno una prova,
2. non supera nessun a prova.

Soluzione Definiamo i seguenti eventi
$T_i = \{$Lo studente supera la prova i-esima$\}$ $\quad (i = 1, 2)$
$A = \{$Lo studente supera almeno una prova$\}$
$B = \{$Lo studente non supera nessuna prova$\}$
Risulta che

1. $P(A) = P(T_1 \cup T_2) = P(T_1) + P(T_2) - P(T_1 \cap T_2) = 0.5 + 0.4 - 0,3 = 0.6$
2. $P(B) = P(\overline{T_1} \cap \overline{T_2}) \equiv P(\overline{T_1 \cup T_2}) = 1 - P(T_1 \cup T_2) = 1 - P(A) = 0.4.$

Esempio 2. Si consideri l'esperimento consistente nel lancio di due dadi non truccati e si calcoli la probabilità dei seguenti eventi:

1. $A = \{$Il primo dado dà 6$\}$ e $B = \{$Il secondo dado dà 5$\}$,
2. $C = A \cup B$,
3. $D = \{$I due dadi danno risultati divers$\}$.

Soluzione Risulta:

1. $P(A) = 1/6 = P(B)$
2. $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/6 + 1/6 - 1/36 = 11/36$
3. Definiamo i seguenti eventi: $A_i\{$Il primo dado dà risultato $i\}$, B_i=Il secondo dado dà risultato $i\}$, si ha:

$$P(D) = \sum_{i=1}^{6} P(A_i \cap \overline{B_i}) = \sum_{i=1}^{6} P(A_i)\, P(\overline{B_i}) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6}\,\frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

Esempio 3. Consideriamo l'esperimento consistente nel lanciare n volte una monete"onesta". Sia $A_i = \{$Testa esce i volte negli n lanci$\}$. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

1. $A_2 = \{$Testa esce 2 volte negli n lanci$\}$,
2. $B = \{$Testa esce al massimo una volta negli n lanci$\}$,
3. $C = A_2 \cup B$.

Soluzione

1. $P(A_2) = \binom{n}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \equiv \binom{n}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n\,(n-1)}{2^{n+1}}$ per $n = 2, 3, \ldots$
2. $P(B) = P(A_0 \cup A_1) = P(A_0) + P(A_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \binom{n}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

   Quindi, per $n = 2, 3, \ldots$ segue $P(B) = \dfrac{n+1}{2^n}$

3. Osserviamo che A_2 e B sono eventi incompatibili, così che, per $n = 2, 3, \ldots$ risulta:

$$P(C) \equiv P(A_0 \cup A_1 \cup A_2) = P(A_2) + P(B) = \frac{n\,(n-1)}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^n} = \frac{n^2+n+2}{2^{n+1}}.$$

Esempio 4. Nell'esperimento consistente nel lancio di 2 monete oneste calcolare

1. la probabilità dell'evento $A = \{\text{Nei due lanci esce testa}\}$,
2. la probabilità dell'evento A sapendo che al primo lancio è uscita testa,
3. la probabilità dell'evento A sapendo che nei due lanci è uscita almeno una testa.
4. Generalizzare al caso di n lanci.

Soluzione Consideriamo i seguenti eventi $B_i = \{\text{Il lancio della } i\text{-esima moneta dà testa}\}$. Risulta:

1. $P(A) = P(B_1 \cap B_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,
2. $P(A|B_1) = \dfrac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)} = \dfrac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} \equiv P(B_2) = \dfrac{1}{2}$
3. $P(A|B_1 \cup B_2) = \dfrac{P[A \cap (B_1 \cup B_2)]}{P(B_1 \cup B_2)} = \dfrac{P[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_1)]}{P(B_1 \cup B_2)}$.
   Osserviamo che
   $$P(B_1 \cup B_2) = 1 - P(\overline{B_1 \cup B_2}) = 1 - P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = 1 - P(\overline{B_1})\,P(\overline{B_2}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$
   Inoltre, $A \cap B_1 \equiv A \cap B_2 \equiv A$, pertanto
   $$P(A|B_1 \cup B_2) = \frac{P(A)}{P(B_1 \cup B_2)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Esempio 5. Una compagnia assicuratrice suddivide le persone in due classi quelle propense ad avere incidenti (il 30%) e quelle che non lo sono (il 70%). Le statistiche mostrano che le persone propense ad avere incidenti hanno probabilità 0.4 di avere un incidente in un anno mentre per le altre la probabilità è pari a 0.2.

1. Qual è la probabilità che un nuovo assicurato abbia un incidente in un anno?
2. Se un nuovo assicurato ha un incidente in un anno con che probabilità è una persona propensa ad avere incidenti?

Soluzione Consideriamo i seguenti eventi
$A = \{\text{Un nuovo assicurato ha un incidente in un anno}\}$
$B = \{\text{Una persona è propensa ad avere incidenti}\}$.

1. $P(A) = P(A|B)\,P(B) + P(A|\overline{B})\,P(\overline{B}) = 0.4 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.26$.
2. $P(B|A) = \dfrac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)} = \dfrac{0.4 \cdot 0.3}{0.26} = \dfrac{0.12}{0.26} = \dfrac{6}{13} = 0.461$.

Esempio 6. Una stringa binaria di lunghezza 5 contiene 2 bit settati ad 1 e 3 bit settati a 0. Un algoritmo scandisce la stringa bit per pet e si ferma non appena trova il primo 1. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi

1. $A_k = \{$L'algoritmo si ferma al passo k-esimo$\}$,
2. $B = \{$Il bit successivo al primo 1 è uno zero$\}$.

Soluzione

1. Applichiamo la definizione classica di probabilità. In questo caso lo spazio campione Ω è costituito da tutte le possibili sequenze di lunghezza 5 caratterizzate dal contenere 2 bit a 1 e 3 bit settati a zero. Quindi $|\Omega| = \binom{5}{2} = 10$. Inoltre, A_k contiene tutte le stringhe formate da $k-1$ zeri seguiti da un 1 così che $|A_k| = 5 - k$. Quindi, $P(A_k) = (5-k)/10$.
2. Osserviamo che
$$P(B) = \sum_{k=1}^{4} P(B|A_k)\,P(A_k) = \sum_{k=1}^{4} \frac{4-k}{5-k}\,\frac{k-1}{10} = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$
essendo $P(B|A_1) = 3/4,\ P(B|A_2) = 2/3\ P(B|A_3) = 1/2\ P(B|A_4) = 0$.
3. In questo caso $P(A_k) = (n-k)/\binom{n}{2} = 2\,(n-k)/[n\,(n-1)!]$. Inoltre, poiché $P(B|A_k) = (n-k-1)/(n-k)$ si ha:
$$P(B) = \sum_{k=1}^{n-1} P(B|A_k)\,P(A_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k-1}{n-k}\,\frac{2\,(n-k)}{n\,(n-1)} = \frac{2}{n\,(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1}(n-k-1)$$
da cui, ponendo $j = n-k-1$ segue:
$$P(B) = \frac{2}{n\,(n-1)} \sum_{j=0}^{n-2} j = \frac{2}{n\,(n-1)}\,\frac{(n-2)(n-1)}{2} = \frac{n-2}{n}.$$

Esempio 7. Un sistema di gestione di posta elettronica riceve un messaggio che si suppone essere uno *spam* con probabilità 0.7 e con probabilità 0.3 non lo è. Il sistema effettua un controllo su ogni messaggio ricevuto: se riceve uno *spam* lo classifica come tale con probabilià 0.9 e con probabilità 0.1 lo classifica come non *spam*, se invece riceve un messaggio che non è *spam* lo classifica come tale con probabilità 0.8 e con probabilità 0.2 lo classifica come *spam*. Calcolare la probabilità che

1. il sistema classifichi come *spam* un messaggio ricevuto,
2. il messaggio ricevuto non sia uno *spam* sapendo che sistema lo ha classificato come tale,
3. il messaggio ricevuto sia uno *spam* sapendo che sistema lo ha classificato come non *spam*.

Soluzione Definiamo i seguenti eventi:
$A = \{$Il sistema classifica un messaggio come *spam*$\}$,
$B = \{$Il messaggio è uno *spam*$\}$

1. Dalla formula delle alternative si ha:
$$P(A) = P(A|B)\,P(B) + P(A|\overline{B})\,P(\overline{B}) = 0.9 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.3 = 0.69.$$
2. Dal teorema di Bayes risulta:
$$P(\overline{B}|A) = \frac{P(A|\overline{B})\,P(\overline{B})}{P(A)} = \frac{0.06}{0.69} = 0.0870.$$
3. Dal teorema di Bayes segue anche che
$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}|B)\,B(B)}{P(\overline{A})} = \frac{0.1 \cdot 0.7}{1 - P(A)} = 0.2258.$$

Esempio 8. Nell'esperimento consistente nel lancio di n monete non truccate consideriamo i seguenti eventi:
$T_i = \{$Esce testa al lancio i-esimo$\}$, $U = \{$ Esce lo stesso risultato negli n lanci$\}$,
$A = \{$Esce testa almeno una volta$\}$.
Mostarre che

1. T_1 e U sono indipendenti,
2. T_1 e A non sono indipendenti,
3. A e U sono indipendenti se e solo se $n = 1$.

Soluzione Osserviamo che risulta:
$$P(T_1) = \frac{1}{2}, \qquad P(U) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

1. Poiché
$$P(T_1 \cap U) \equiv P(\text{Esce sempre testa}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n = P(T_1)\,P(U)$$
si ha che T_1 e U sono indipendenti.
2. Risulta
$$P(T_1 \cap A) \equiv P(T_1) = \frac{1}{2} \neq P(T_1)\,P(A)$$
così che T_1 e A non sono indipendenti,
3. Poicè $A \cap U = \{$Esce sempre testa$\}$, si ha che $P(A \cap U) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Inoltre, poiché $P(A)\,P(U) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ si ha che gli eventi A e U sono indipendenti se e solo se $P(A \cap U) = P(A)\,P(U)$ la qual cosa si realizza se e solo se
$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$
che, semplificando fornisce
$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1$$
Quest'ultima relazione è soddisfatta se e solo se $n = 1$.

Esempio 9. Consideriamo l'esperimento consistente nel lancio di due monete oneste. Stabilire se i seguenti eventi

$$A_1 = \{TC, TT\}, \qquad A_2 = \{CT,\ TT\}, \qquad A_3 = \{CC,\ TT\}$$

sono indipendenti.
Soluzione Visto che le monete sono oneste possiamo applicare la definizione classica di probabilità, in questo modo si ha:

$$P(A_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \equiv P(A_2) \equiv P(A_3)$$

Relativamente alle coppie di eventi risulta che $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \{TT\}$, quindi

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = P(\{TT\}) = \frac{1}{4}$$

Pertanto, essendo $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$, $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$, concludiamo che gli eventi A_1, A_2, A_3 sono indipendenti a coppie. Inoltre, poiché

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\{TT\}) = \frac{1}{4} \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}$$

concludiamo che gli eventi A_1, A_2, A_3 non sono indipendenti.

Esempio 10. *(Il problema di Monty Hall)*
Il problema di Monty Hall è un noto paradosso della teoria della probabilità legato ad un gioco a premi americano (Let's Make a Deal). Il nome viene da quello del conduttore dello show, Maurice Halprin, noto con lo pseudonimo di Monty Hall.
Nel gioco vengono mostrate a un giocatore tre porte chiuse: una di esse nasconde un'automobile e le altre due nascondono una capra. Il giocatore sceglie una porta e non la apre, dopo di che il conduttore dello show (che conosce ciò che si trova dietro ogni porta) apre una delle due porte rimanenti rivelando una delle due capre. A questo punto il conduttore offre al giocatore la possibilità di cambiare la porta scelta inizialmente con l'unica rimasta.
Che cosa conviene fare?
Soluzione Supponiamo di aver scelto una delle due porte che nascondono la capra. Questo evento ha probabilità 2/3. In questo caso il conduttore aprirà l'unica porta rimasta che nasconde una capra, quindi cambiando porta si vince l'auto con certezza. Se invece scegliamo la porta che nasconde il premio, evento che si verifica con probabilità 1/3, il conduttore apre a caso una delle altre due porte, in questo caso e cambiando porta sicuramente non vinceremo l'auto.
Quindi, la politica vincente dovrebbe essere quella di cambiare la scelta iniziale visto che con probabilità 2/3 si può vincere il premio.

Esempio 11. In una prova a risposte multiple, nel rispondere ad una domanda per la quale sono proposte $m \geq 2$ possibili risposte lo studente può

conoscere la risposta o non conoscerla e provare così ad indovinare. Se prova ad indovinare con probabilità $1/m$ risponde correttamente. Si vuole calcolare la probabilità che uno studente che ha risposto correttamente conosca veramente la risposta.
Soluzione Definiamo i seguenti eventi:
$A = \{$Lo studente conosce la risposta$\}$
$B = \{$Lo studente risponde correttamente alla domanda$\}$
Applicando il teorema di Bayes risulta che

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

Poiché $P(A) = p$, dal teorema delle alternative si ha:

$$P(B) = P(B|A)\,P(A) + P(B|\overline{A})\,P(\overline{A}) = 1 \cdot p + \frac{1}{m}\,(1-p)$$

da cui segue che

$$P(A|B) = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{m}\,(1-p)} = \frac{mp}{mp + (1-p)} = \frac{mp}{1 + (m-1)p}$$

Se, ad esempio, $p = 1/2$ e $m = 5$ si ha che $P(A|B) = 5/6$.
Osservazione La probabilità $P(A|B)$ è una funzione crescente di m. Infatti, risulta:

$$\frac{mp}{1+(m-1)p} - \frac{(m-1)p}{1+(m-2)p} = \ldots = \frac{p(1-p)}{[1+(m-1)p]\,1+(m-2)p]} > 0$$

Esempio 12. L'azienda di cosmetici per cui lavora la signora Lella organizza una cena tra donne per le dipendenti e per le loro figlie. Sono invitate le dipendenti che hanno figlie insieme alla maggiore delle loro figlie. La signora Lella ha due figli ed è invitata alla cena. Con che probabilità i figli della signora Lella sono entrambi di sesso femminile?
Soluzione Lo spazio degli eventi è costituito dalle 4 coppie che specificano il sesso dei due figli della signora Lella: $\Omega = \{(m,m),(m,f),(f,m),(f,f)\}$. Se la signora Lella è invitata alla cena allora deve avere almeno un figlio di sesso femminile; pertanto, considerando i seguenti eventi:
$A = \{$La signora Lella ha almeno una figlia$\}$,
$B = \{$La signora Lella ha due figlie$\}$
risulta che

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \equiv \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Esempio 13. Il Dr Rossi è convinto che col 30% di possibilità la sua azienda aprirà un nuovo ufficio a Meta di Sorrento. Se cià dovesse verificarsi, pensa di avere il 60% di possibiltà di diventare dirigente nella nuova filiale. Con che probabilità il Dr Rossi diventerà veramente dirigente nel nuovo ufficio?
Soluzione Definiamo i seguenti eventi:

$A = \{$L'azienda apre un nuovo ufficio a Meta di Sorrento$\}$,
$B = \{$Il Dr Rossi è promosso dirigente$\}$
Risulta che

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{30}{100}\frac{60}{100} = \frac{18}{100} = 18\%$$

Esempio 14. Un aereo è scomparso e si suppone che con uguale probabilità possa essere caduto in una qualsiasi di tre regioni. Sia $(1 - \alpha_i)$ la probabilità di rintracciare il velivolo che cade nella regione i-esima per $i = 1, 2, 3$. Le costati α_i rappresentano le probabilità di non ritrovare l'aereo, esse dipendono normalmente dalle condizioni geografiche e/o ambientali delle regioni. Qual è la probabilità che l'aereo si trovi in ciascuna delle tre regioni se una ricerca effettuata nella regione 1 ha dato esito negativo?
Soluzione Definiamo i seguenti eventi:
$R_i = \{$Il velivolo si trova nella regione i-esima$\}$ $(i = 1, 2, 3)$,
$A = \{$La ricerca non ha dato successo$\}$.
Si vuole determinare $P(R_i|A)$ per $i = 1, 2, 3$. Dal teorema di Bayes segue che

$$P(R_i|A) = \frac{P(A|R_i)\,P(R_i)}{P(A)}$$

Ricordando la formula delle alternative, si ha che

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A|R_i)\,P(R_i) = \sum_{i=1}^{3} P(A|R_i)\,\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\,[\alpha_1 + 1 + 1] = \frac{1}{3}\,[\alpha_1 + 2]$$

visto che se l'aereo è precipitato nelle regioni 2 o 3 sicuramente la ricerca nella regione 1 darà esito negativo. Pertanto risulta:

$$P(R_1|A) = \frac{P(A|R_1)\,P(R_1)}{P(A)} = \frac{\alpha_1/3}{[\alpha_1 + 2]/3} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 2},$$

$$P(R_2|A) = \frac{P(A|R_2)\,P(R_2)}{P(A)} = \frac{1/3}{[\alpha_1 + 2]/3} = \frac{1}{\alpha_1 + 2} \equiv P(R_3|A).$$

Osserviamo che poiché $\alpha_1 \in (0, 1)$ si ha che $P(R_1|A) < P(R_j|A)$ per $j = 2, 3$.

Esempio 15. Ad un certo stadio delle indagini su un crimine, l'investigatore capo è convinto al 60% della colpevolezza di un certo sospettato. Si scopre un nuovo indizio che evidenzia il fatto che il colpevole deve deve possedere una certa caratteristica distintiva (ad esempio, essere mancino, calvo, biondo,...) e il sospettato possiede tale caratteristica. Sapendo che la caratteristica interessa il 20% della popolazione calcolare con che probabilità il sospettato è colpevole. Cosa accade se l'indizio non è univoco?
Soluzione Definiamo i seguenti eventi:
$A = \{$Il sospettato è colpevole$\}$,

$B = \{$Il sospettato possiede il tratto distintivo$\}$.
Si vuole calcolare $P(A|B)$. Facendo uso della formula di Bayes risulta:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)} = \frac{1\,0.6}{1\,0.6 + 0.2\,0.4} = \frac{0.6}{0.68} \simeq 0.882,$$

dove $P(B) = P(B|A)\,P(A) + P(B|\overline{A})\,P(\overline{A}) = 1\,0.6 + 0.2\,0.4 = 0.68$ è stata ottenuta facendo uso della formula delle alternative.
Dire che l'indizio non è univoco equivale a supporre che con alta probabilità, diciamo 0.9, il colpevole possiede il tratto distintivo. In questo caso si ha che $P(B) = 0.9\,0.6 + 0.2\,0.40 = 0.62$ e $P(A|B) = 0.54/0.62 \simeq 0.871 < 0.882$. Più in generale se si assume che $P(B|A) = x$ si ha:

$$P(A|B) = \frac{x\,0.6}{x\,0.6 + 0.2\,0.4} = \frac{6\,x}{6\,x + 0.8}$$

che risulta una funzione monotona crescente di x.