Lezione 2-11

mercoledì 2 novembre 2022 09:11

DEF - Dato un insieme S, una applicazione $\perp : S \times S \to S$ è detta OPERAZIONE (binaria) INTERNA di S.

L'insieme $(S, \perp)$ è detto STRUTTURA ALGEBRICA.

NOTAZIONE $\perp(x, y) = z \iff x \perp y = z$

ESEMPI:

① $(\mathbb{N}, +)$ $\quad + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto x + y$ $\quad (2, 3) \mapsto 2 + 3 = 5$

$(\mathbb{N}, \cdot)$ $\quad \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto xy$

$(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$ ....

② $(\mathbb{N}, *)$ $\quad * : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \to 3^n$ $\quad * : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(n, m) \mapsto n^m$

$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(x, y) \mapsto 3x + 2y + 5$

$(x, y) \mapsto x^2 + y^2$

$(x, y) \mapsto x \log(|y| + 1)$

④ $X \neq \emptyset$, $\quad (\mathcal{P}(X), \cap)$ $\quad \cap : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, $(A, B) \mapsto A \cap B$

$(\mathcal{P}(X), \cup)$ $\quad \cup : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, $(A, B) \mapsto A \cup B$

$(\mathcal{P}(X), \setminus)$ $\quad \setminus : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, $(A, B) \to A \setminus B$

⑤ L insieme ordinato

⑤ L insieme ordinato

$(L, \vee)$ $\qquad \vee : L \times L \to L$
$\qquad\qquad (a,b) \mapsto a \vee b = \sup(a,b)$

è operazione se L è un reticolo

$(L, \wedge)$ è struttura algebrica

NB $(S, \perp_1, \perp_2, \perp_3, \dots, \perp_n)$ struttura con più operazioni

es $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, \setminus)$

$(L, \vee, \wedge)$

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$

DEF- Data $(S, \perp)$, $\perp$ è detta:

① ASSOCIATIVA se $\forall x, y, z \in S$, $\quad x \perp (y \perp z) = (x \perp y) \perp z$

② COMMUTATIVA se $\forall x, y \in S \quad x \perp y = y \perp x$

ES- $(\mathbb{N}, *)$, $\quad n * m = n^m \quad$ non è commutativa $\quad 2 * 3 = 2^3$
$\qquad 3 * 2 = 3^2$

$$\underbrace{\underbrace{n*(m*\ell)}_{n*(m^\ell)}}_{n^{m^\ell}} = \underbrace{\underbrace{(n*m)*\ell}_{(n^m)*\ell}}_{(n^m)^\ell = n^{m\ell}}$$

non è associativa

$(\mathcal{P}(X), \setminus)$, $\setminus$ non è commutativo $\qquad A \setminus B \neq B \setminus A$

ES $\quad V^V = \{ f : V \to V \mid f \text{ è funzione} \}$

$f, g \in V^V$, $\quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in V$

i) $\circ$ è ASSOCIATIVA : $\forall f, g, h \in V^V$

$$\underbrace{h \circ (g \circ f)}_{h(g(f(x)))} = \underbrace{(h \circ g) \circ f}_{h(g(f(x)))} \quad \forall x \in V$$

ii) $\circ$ non è commutativa , $g \circ f \neq f \circ g$

DEF – Data $(S, \perp)$ con $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ (finito) la TAVOLA di MOLTIPLICAZIONE di $(S, \perp)$ è questa:

$\perp$	x_1	x_2	x_3	.....	x_n
x_1	$x_1 \perp x_1$	$x_1 \perp x_2$	$x_1 \perp x_3$	....	$x_1 \perp x_n$
x_2	$x_2 \perp x_1$	$x_2 \perp x_2$	$x_2 \perp x_3$	.....	$x_2 \perp x_n$
x_3	$x_3 \perp x_1$	$x_3 \perp x_2$	$x_3 \perp x_3$	....	$x_3 \perp x_n$
$\vdots$	$\vdots$				
x_n	$x_n \perp x_1$	$x_n \perp x_2$	$x_n \perp x_3$	....	$x_n \perp x_n$

Es – $(\mathcal{P}(\{a,b\}), \cup)$

$\cup$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$

DEF – Data $(S, \perp)$, un elemento $e \in S$ è detto ELEMENTO NEUTRO per $\perp$ se $\forall x \in S \quad e \perp x = x \perp e = x$

Se vale soltanto $e \perp x = x \to e$ è neutro a sinistra

$x \perp e = x \to e$ è neutro a destra

ES $(\mathcal{P}(X), \setminus)$, ϕ è neutro a destra, perché $\forall A \subseteq X$, $A \setminus \phi = A$

DEF - Data $(S, \perp)$, t.c. esiste l'elemento neutro e per $\perp$, un elemento $x \in S$ è detto SIMMETRIZZABILE se $\exists$ un elemento $x' \in S$ t.c.

$$x \perp x' = e = x' \perp x$$

L'elemento x' è detto SIMMETRICO di x.

ES $(\mathbb{N}_0, +)$ nessun elemento è simmetrizzabile

$(\mathbb{Z}, +)$ tutti gli elementi sono simmetrizzabili

$(\mathbb{Q}, \cdot)$ tutti gli elementi non nulli sono simmetrizzabili

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ gli elementi simmetrizzabili sono $\{+1, -1\}$

$z \in \mathbb{Z}$ $\exists z'$ t.c. $z \cdot z' = 1$

$(V^V, \circ)$ $\quad f^{-1} \circ f = id = f \circ f^{-1}$

$id: V \to V$
$x \mapsto x$

Gli elementi simmetrizzabili in $(V^V, \circ)$ sono le funzioni biettive (sono esattamente quelle per le quali esiste una inversa)

$\boxed{\text{LEMMA}}$ Sia $(S, \perp)$ una struttura algebrica con elemento neutro e, $\perp$ associativa.

Se x, y sono simmetrizzabili, anche $x \perp y$ è simmetrizzabile e

$$(x \perp y)' = y' \perp x'$$

DIM

Devo vedere che $(x \perp y) \perp (y' \perp x') = e$ $(*)$

Devo vedere che $(x \perp y) \perp (y' \perp x') = e \quad (*)$

$$(y' \perp x') \perp (x \perp y) = e \quad (**)$$

$(*)$ $(x \perp y) \perp (y' \perp x') \underset{\text{Associatività}}{=} x \perp (y \perp y') \perp x' \underset{y' \text{ è simmetrico di } y}{=} \overbrace{x \perp e}^{x} \perp x' = x \perp x' \underset{x' \text{ è simmetrico di } x}{=} e$

$(**)$ $(y' \perp x') \perp (x \perp y) = y' \perp (x' \perp x) \perp y = y' \perp e \perp y = y' \perp y = e$ $\square$

NB $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

DEF - Dato $a \in S$, con $(S, \perp)$ struttura algebrica - Diremo che:

(i) a è cancellabile a sinistra se $\forall x, y \in S$ $\quad a \perp x = a \perp y \Rightarrow x = y$

(ii) a è cancellabile a destra se $\forall x, y \in S$ $\quad x \perp a = y \perp a \Rightarrow x = y$

(iii) a è CANCELLABILE se è cancellabile sia a destra che a sinistra.

NB - Se $\perp$ è associativa, ogni elemento simmetrizzabile è cancellabile

infatti, $\quad a \perp x = a \perp y$ ed esiste a' t.c. $a \perp a' = e$

$$a' \perp (a \perp x) = a' \perp (a \perp y)$$

$$(a' \perp a) \perp x = (a' \perp a) \perp y$$

$$e \perp x = e \perp y$$

$$x = y$$

DEF - $(S, \perp, \top)$, con 2 operazioni. Diremo che $\perp$ è DISTRIBUTIVA su $\top$

se $\forall x, y, z \in S$ $\quad x \perp (y \top z) = (x \perp y) \top (x \perp z)$ (Dist. a sx)

Analogamente $\quad (y \top z) \perp x = (y \perp x) \top (z \perp x)$ (Distr. a dx)

Es $(\mathcal{P}(S), \cap, \cup)$ $\quad \forall A, B, C \in \mathcal{P}(S)$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$a + (b \cdot c) \neq (a+c) \cdot (b+c)$$

DEF- Dati S, T insiemi, $\star : T \times S \to S$ funzione è detta

OPERAZIONE ESTERNA su S -

$$\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(\alpha, a) \mapsto \alpha a$$

$$\star : \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(\alpha, a) \mapsto \alpha a$$

$$\star : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(\alpha, (a, b)) \mapsto (\alpha a, \alpha b) \qquad (3, (1,2)) \mapsto (3, 6)$$

$$\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

$$(\alpha, f) \mapsto \alpha f$$

ex $f(x) = e^x$

$$(2f)(x) = 2 \cdot f(x) = 2e^x$$

STRUTTURE ALGEBRICHE NOTEVOLI

$(S, \perp)$

1. **SEMIGRUPPO** se $\perp$ è associativa

   es- $(\mathbb{N}, +)$

2. **MONOIDE** se $\perp$ è associativa e ha elemento neutro

   es- $(\mathbb{N}_0, +)$, $(\mathcal{P}(S), \cap)$, $(\mathcal{P}(S), \cup)$

3. **GRUPPO** se $\perp$ è associativo, esiste elemento neutro, ogni elemento è simmetrizzabile

   es- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathcal{S}_X, \circ)$

   $\hookrightarrow$ funzioni biettive da X in X

4. **GRUPPO ABELIANO** se $(S, \perp)$ è gruppo e $\perp$ è commutativa

   es- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ ...

$(S, \perp, \top)$

5. **ANELLO** se $(S, \perp)$ è gruppo abeliano, $\top$ distribuisce su $\perp$, $\top$ è associativa

   es- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

   $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

   Matrici

6. **ANELLO COMMUTATIVO** se è anello e $\top$ è commutativa

7. **ANELLO UNITARIO** se è anello e ed esiste l'elemento neutro per $\top$

   ES- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è commutativo e unitario

8. **CAMPO** è anello commutativo unitario e ogni elemento (eccetto

⑧ **CAMPO** è anello commutativo unitario e ogni elemento (eccetto l'elemento neutro per $\perp$) è simmetrizzabile rispetto a $\top$.

ES. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$