1.3 Spazio campione ed eventi

Convenzionalmente con la locuzione “esperimento casuale” si indica ogni atto o processo, spontaneamente verificantesi o artificialmente realizzato, di cui non sia prevedibile con certezza il risultato o lo sviluppo, ma che sia ripetibile o, quantomeno, concepibile come tale. Ogni singola esecuzione dell’esperimento casuale viene detta *prova*. I possibili esiti, o “risultati”, di un esperimento casuale devono intendersi invece sempre ben definiti o precisabili.

Si consideri un esperimento casuale con caratteristiche e condizioni ambientali ben definite; si definisce *spazio campione*, e lo si indica tradizionalmente con Ω, l’insieme dei possibili risultati dell’esperimento casuale.[3] Ad esempio, nell’esperimento consistente nell’estrazione di una biglia da un’urna contenente n biglie in parte bianche e in parte rosse, lo spazio campione potrebbe essere costituito da n elementi, ciascuno identificante una ed una sola biglia. Se invece dovesse essere d’interesse solo il colore della biglia estratta, lo spazio campione consisterebbe dei due soli elementi “bianco”, “rosso”. A seconda delle situazioni, lo spazio campione può essere discreto (finito o numerabile) o continuo. Se, ad esempio, l’esperimento casuale consiste nel lanciare una moneta per un prefissato numero di volte e nel registrare la successione di teste e di croci ottenuta, Ω è finito; se, invece, l’esperimento consiste nel lanciare ripetutamente un dado fino a quando il risultato è un numero pari, Ω è numerabile; infine, Ω è continuo se ad esempio si assume che l’esperimento fornisca come esito un numero reale appartenente ad uno specificato intervallo. Si noti che esperimenti casuali distinti possono dar luogo allo stesso spazio campione.

I possibili risultati dell’esperimento casuale vengono detti *eventi elementari*. Nel seguito il generico evento elementare sarà denotato con ω. Lo spazio campione Ω è costituito dunque dalla totalità degli eventi elementari.

L’associare ad ogni esperimento casuale uno spazio campione permette di introdurre il concetto di *evento*. Un *evento* è un sottoinsieme dell’insieme Ω, ivi compreso l’insieme vuoto e l’intero Ω. Si noti che con tale definizione un evento elementare non è un evento, mentre evento può essere un *singleton*, ossia un sottoinsieme di Ω costituito da un solo evento elementare. Nel seguito un generico evento sarà usualmente denotato con lettere romane maiuscole $A, B, \ldots$

Si dice che un evento E si verifica, o “occorre”, quando il risultato ω dell’esperimento casuale effettuato appartiene ad E. Ad esempio, nell’esperimento consistente nel lanciare una sola volta un dado, può assumersi $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, così che $E = \{2, 4, 6\}$ è l’evento “numero pari”. Se il lancio dà come esito il numero 2, oppure il numero 4 oppure il numero 6, diciamo che l’evento E si è verificato. Si noti che il verificarsi di un evento non esclude il verificarsi anche di altri eventi. Ad esempio, con riferimento al lancio del dado, l’uscita del numero 6 indica l’occorrenza sia dell’evento “uscita di un numero pari” sia dell’evento “uscita di un numero maggiore di 4”.

Lo spazio Ω, costituito dalla totalità degli eventi elementari, è detto *evento certo* (“certo” perché qualunque sia l’evento elementare ω che si verifica, risulta $\omega \in \Omega$). Quindi, Ω è un insieme di eventi elementari *necessari* (nel senso che uno di essi si deve verificare necessariamente) ed *incompatibili* (ossia più eventi elementari non possono verificarsi simultaneamente). L’evento che non contiene nessun evento elementare viene detto *evento impossibile* e denotato con $\emptyset$.

Si noti che esiste un’analogia tra il linguaggio del calcolo delle probabilità e quello della teoria degli insiemi. Infatti, agli elementi di un insieme corrispondono gli eventi elementari; al termine “sottoinsieme” corrisponde il termine “evento”; all’insieme Ω corrisponde l’evento certo; all’insieme vuoto $\emptyset$ corrisponde l’evento impossibile.

Se A è un evento, $\overline{A}$ (*complemento* o *complementare di* A), denota l’evento costituito dall’insieme degli eventi elementari di Ω che non appartengono ad A. Ovviamente il complemento di $\overline{A}$ è l’evento A; quindi $\overline{\Omega} = \emptyset$ e $\overline{\emptyset} = \Omega$.

Se A e B sono eventi, $A \cup B$ denota l’evento che consiste di tutti gli eventi elementari che appartengono ad almeno uno degli eventi A, B. Quindi $A \cup B$ si verifica se A si verifica e B non si verifica, oppure se B si verifica e A non si verifica, oppure se entrambi A e B si verificano.

Se A e B sono eventi, $A \cap B$ denota l'evento che consiste di tutti gli eventi elementari che appartengono sia ad A che a B. Inoltre, se $A \cap B = \emptyset$ gli eventi A e B non si possono verificare contemporaneamente; infatti, se $\omega \in A$ allora $\omega \notin B$, e se $\omega \in B$ allora $\omega \notin A$. In questo caso gli eventi A e B sono detti *incompatibili* oppure *mutuamente esclusivi*.

Con la scrittura $A \subset B$, che si legge A *implica* B, si indica che il verificarsi dell'evento A implica il verificarsi dell'evento B. Quindi, se $A \subset B$ e se $\omega \in A$, allora $\omega \in B$. Ovviamente $A \subset B$ equivale a $\overline{B} \subset \overline{A}$. Inoltre, la scrittura $A = B$ indica che ogni evento elementare in A è un evento elementare in B ed ogni evento elementare in B è un evento elementare in A. Si noti che $A = B$ equivale a richiedere che $A \subset B$ e $B \subset A$.

Più in generale, l'evento $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ si verifica quando almeno uno degli eventi

A_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ si verifica, mentre l'occorrenza dell'evento $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ consiste nel verificarsi di tutti gli eventi A_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Gli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono detti incompatibili se e solo se essi sono incompatibili a due a due, cioè se e solo se $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j)$.

Esempio 1.1 Si supponga di lanciare per due volte un dado e si assuma come spazio campione l'insieme delle 36 coppie di possibili risultati: $\Omega = \{(i, j)\colon\ i, j = 1, 2, \ldots, 6\}$. Si denoti con $A = \{(i, j)\colon\ i = 1, 2;\ j = 1, 2, \ldots, 6\}$ l'evento che si verifica quando il primo dado fornisce un numero minore di 3, con $B = \{(i, j)\colon\ i = 1, 2, \ldots, 6;\ j = 4, 5, 6\}$ l'evento che si verifica quando il secondo dado dà un numero maggiore di 3 e con $C = \{(i, j)\colon\ i = 4, 5, 6;\ j = 1, 2\}$ l'evento che si verifica quando il primo dado fornisce un numero maggiore di 3 e il secondo un numero minore di 3. In Figura 1.2 sono indicati gli eventi A, B e C mediante un diagramma di Venn. Si noti che gli eventi A e B non sono incompatibili, poiché $A \cap B = \{(i, j)\colon\ i = 1, 2;\ j = 4, 5, 6\}$, mentre A e C sono incompatibili, così come incompatibili sono B e C. $\diamondsuit$

1.4 Prime definizioni di probabilità

Per costruire una teoria utilizzabile in problemi concreti è opportuno partire da una definizione di probabilità che ne rispecchi il contenuto intuitivo e che allo stesso tempo sia operativa nel senso di contenere in sé le regole di calcolo che sono alla base dei necessari sviluppi matematici. Poiché l'interpretazione degli aspetti intuitivi non è unica, si sono sviluppate nel corso dei tempi definizioni diverse di probabilità: *classica, frequentista* e *soggettiva*.

1.4.1 Definizione classica

Definizione 1.1 (Probabilità classica) *Dato uno spazio campione Ω finito, si definisce probabilità $P(A)$ di un evento $A \subset \Omega$ il rapporto tra il numero $N(A)$ di casi favorevoli al verificarsi dell'evento A ed il numero $N(\Omega)$ dei casi possibili, purché questi ultimi siano "ugualmente possibili":*

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}.$$

Dalla Definizione 1.1 segue immediatamente che la probabilità è un numero compreso tra 0 (quando nessun caso è favorevole) e 1 (quando tutti i casi sono favorevoli); in particolare si ha il valore 1 quando l'evento si verifica certamente. Un'altra conseguenza della definizione è la *legge di additività finita della probabilità* che può così formularsi: se A_1 e A_2 sono eventi incompatibili dello stesso spazio campione Ω, la probabilità della loro unione è uguale alla somma delle rispettive probabilità:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2). \tag{1.1}$$

Infatti, poiché per ipotesi i due eventi sono incompatibili, il numero $N(A_1 \cup A_2)$ dei casi favorevoli all'evento $A_1 \cup A_2$ è uguale a $N(A_1) + N(A_2)$, ossia alla somma del numero dei casi favorevoli ad A_1 e del numero di quelli favorevoli ad A_2. Usando la Definizione 1.1, si ha:

$$P(A_1 \cup A_2) = \frac{N(A_1 \cup A_2)}{N(\Omega)} = \frac{N(A_1) + N(A_2)}{N(\Omega)} = \frac{N(A_1)}{N(\Omega)} + \frac{N(A_2)}{N(\Omega)} = P(A_1) + P(A_2).$$

Abbiamo così ricavato, come diretta conseguenza della definizione data, alcune proprietà della probabilità.

Va qui menzionato che nel caso in cui Ω non contiene un numero finito di elementi, il concetto di equiprobabilità deve essere espresso in altro modo, come si vedrà nel seguito.

Esempio 1.2 Si supponga di lanciare un dado[4] e di voler calcolare la probabilità che il risultato sia un numero pari. Per motivi di simmetria, le uscite di ciascuna delle sei facce del dado sono da considerarsi ugualmente probabili. Essendo 3 il numero di casi favorevoli e 6 il numero di casi possibili, per la definizione classica la probabilità richiesta è $3/6 = 1/2$. Si supponga ora di lanciare il dado per due volte e di essere interessati alla probabilità che

Tabella 1.1: Somma dei risultati in due lanci di un dado.

Primo lancio	Secondo lancio 1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

la somma dei risultati sia 10 oppure 11. Si considerino i seguenti eventi: $B = \{$*la somma dei risultati è* 10 *oppure* $11\}$, $A_1 = \{$*la somma dei risultati è* $10\}$, $A_2 = \{$*la somma dei risultati è* $11\}$. Si noti che $B = A_1 \cup A_2$ e, poiché gli eventi A_1 e A_2 sono incompatibili, dalla (1.1) risulta $P(B) = P(A_1) + P(A_2)$. Il numero dei casi possibili è $N = 36$, ossia uguale al numero delle coppie (i, j), $i, j = 1, \ldots, 6$. Come si nota dalla Tabella 1.1, le coppie che forniscono come somma 10 sono $(4, 6)$, $(5, 5)$ e $(6, 4)$, così che il numero dei casi favorevoli all'evento A_1 è 3. Ne segue $P(A_1) = 3/36 = 1/12$. Invece, le coppie che forniscono come somma 11 sono $(5, 6)$ e $(6, 5)$, di modo che il numero dei casi favorevoli all'evento A_2 è 2. Ne segue $P(A_2) = 2/36 = 1/18$. La probabilità richiesta è in conclusione $P(B) = 1/12 + 1/18 = 5/36$. $\diamondsuit$

1.4.2 Definizione frequentista

È noto fin dall'antichità che per un gran numero di fenomeni traducibili in esperimenti casuali consistenti in prove ripetute (quali ad esempio ripetizioni del lancio di una moneta) il verificarsi o meno di un prefissato evento esibisce talune regolarità. Invero, indicato con $\nu_n(A)$ il numero di volte in cui l'evento A si verifica in n prove ripetute nelle stesse condizioni (*frequenza assoluta* di occorrenza dell'evento A), la *frequenza relativa* $f_n(A)$ di occorrenza di A, ossia il rapporto $\nu_n(A)/n$, al crescere di n appare stabilizzarsi intorno ad un qualche "valore limite". Questa osservazione, di natura esclusivamente empirica, ha condotto alla formulazione del seguente postulato, noto come Legge Empirica del Caso: *In una successione di prove effettuate nelle stesse condizioni, al crescere del numero delle prove la frequenza relativa di ogni prefissato evento si avvicina alla probabilità dell'evento stesso*.

La legge empirica del caso mette in relazione la frequenza relativa, determinata sperimentalmente, con la nozione teorica di probabilità, che risulta pertanto indirettamente definita. Si giunge così alla definizione frequentista di probabilità.

Definizione 1.2 (Probabilità frequentista) *In una successione di prove effettuate nelle stesse condizioni la probabilità di un evento è misurata dalle frequenze relative di occorrenza dell'evento quando il numero delle prove cresce indefinitamente.*

La frequenza relativa delle prove in cui l'evento considerato si verifica possiede le stesse caratteristiche esibite dal rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero dei casi possibili. Infatti si ha $0 \leq f_n(A) \leq 1$, con l'uguaglianza a 0 se l'evento non si è verificato nelle n prove e l'uguaglianza ad 1 se l'evento si è verificato in ognuna delle n prove. È ragionevole assumere che tali proprietà sussistano anche nell'ideale passaggio al limite, ossia quando il numero delle prove viene assunto infinitamente grande. Quindi anche per la definizione frequentista la probabilità è un numero compreso tra 0 e 1. Inoltre, se in un esperimento consistente in n prove ripetute si considerano due eventi incompatibili A_1 e A_2, allora per la definizione di frequenza relativa si ha:

$$f_n(A_1 \cup A_2) = \frac{\nu_n(A_1 \cup A_2)}{n} = \frac{\nu_n(A_1)}{n} + \frac{\nu_n(A_2)}{n} = f_n(A_1) + f_n(A_2).$$

È ragionevole assumere che tale proprietà sussista al crescere indefinito del numero delle prove. Usando quindi la definizione frequentista si giunge di nuovo alla legge (1.1) di additività finita della probabilità.

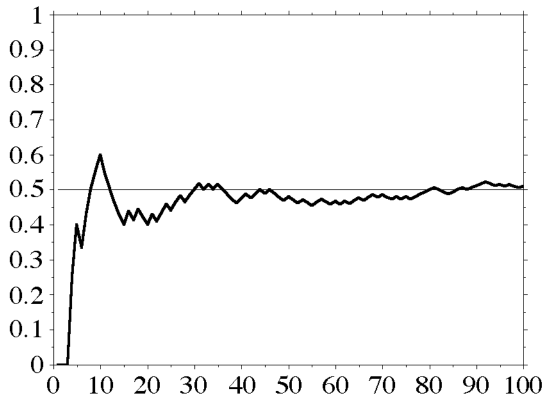

Figura 1.3: Frequenze relative in una particolare successione di lanci di una moneta.

La Figura 1.3 mostra l'andamento della frequenza relativa di occorrenza dell'evento "Testa" in un particolare esperimento consistente in 100 lanci di una moneta equa. Si noti come al crescere del numero dei lanci effettuati tale frequenza si avvicini al valore $1/2$ coincidente con la probabilità a priori dell'evento considerato.

Esempio 1.3 Si consideri l'esperimento consistente nel lanciare una moneta che si sa essere non equa, ossia truccata. La definizione classica di probabilità non può in questo caso essere utilizzata poiché le uscite ora non sono equiprobabili. Se in 1000 lanci il numero di volte in cui appare Testa è 750, le frequenze relative all'uscita di Testa e Croce sono rispettivamente 0.75 e 0.25; esse possono ragionevolmente essere riguardate come valutazioni delle corrispondenti probabilità. $\diamondsuit$

1.4.3 Definizione soggettiva

Esistono delle situazioni in cui non è possibile ricorrere alle due precedenti definizioni di probabilità: da un lato poiché non sembra avere alcuna giustificazione l'ipotesi di equiprobabilità degli eventi elementari, dall'altro perché non è possibile effettuare ripetizioni dell'esperimento nelle medesime condizioni. Un esempio tipico è costituito dalle scommesse sul risultato di un incontro di calcio in cui non si può ritenere che i tre possibili risultati (vincita della squadra di casa, pareggio, vincita della squadra in trasferta) siano equiprobabili. Inoltre i precedenti incontri sostenuti dalle due squadre non possono essere riguardati come prove ripetute nelle medesime condizioni (perché non è detto che i giocatori siano sempre nelle stesse condizioni atletiche, perché i campi di gioco non sono caratterizzati da condizioni immutabili meteorologiche o di manto erboso, perché l'effetto della tifoseria può essere variamente condizionante, e così via).

In situazioni analoghe a quella descritta si può ricorrere all'impostazione "soggettiva" (o "personale") della probabilità. Questa, già accennata in Pascal ed attribuibile a D. Bernoulli, è stata ripresa e sviluppata in epoca recente soprattutto da Bruno de Finetti (1906–1985) e da Leonard Jimmie Savage (1917–1971). Nell'approccio soggettivo la probabilità di un evento viene identificata con il "grado di fiducia" che una persona ripone nel verificarsi dell'evento. Più precisamente, si dà la seguente definizione:

Definizione 1.3 (Probabilità soggettiva) *La probabilità di un evento A è il prezzo $P(A)$ che un individuo ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica e ricevere 0 se l'evento non si verifica.*

È appena il caso di menzionare che tale prezzo deve intendersi minore dell'unità.

La Definizione 1.3 trova un'immediata interpretazione quando ci si riferisca al contesto delle scommesse, acquistando la seguente formulazione: *La probabilità di un evento A è l'importo $P(A)$ che uno scommettitore è disposto a puntare per ricevere 1 in caso di vincita e 0 in caso di perdita.*

La probabilità di un evento si interpreta in sostanza come l'importo che un individuo, in base alle proprie personali valutazioni, giudica equo pagare (farsi pagare) per riscuotere (pagare) l'importo unitario se l'evento si verifica e l'importo nullo se l'evento non si verifica. In tali condizioni l'individuo è dunque disposto a pagare (ricevere) $s\,P(A)$ per ricevere (pagare) s se l'evento si verifica.

Esempio Nelle scommesse sui cavalli "a quota fissa" l'allibratore fissa la quota q_i per i diversi cavalli per ogni corsa. La vincita relativa al cavallo i è $a(1+q_i)$ do ve a denota la somma puntata. In questo caso si ha $a = S\,P(A)$, $S = a(1+q_i)$, quindi $S = S\,P(A)\,(1+q_i)$, cioè $1 = P(A)\,(1+q_i)$. Pertanto, indicando con $p_i = P(A)$ si ha che $q_i = 1/p_i - 1$ e $p_i = 1/(1+q_i)$.

1.5 Probabilità geometriche

La definizione classica di probabilità, che richiede che tutti gli eventi costituiti da singoli punti dello spazio campione siano equiprobabili, trova un'analogia di carattere geometrico nel caso in cui lo spazio campione Ω consiste ad esempio di figure geometriche (intervalli, figure piane, figure solide). In tal caso i punti di Ω non sono più in numero finito, così che il concetto di "ugualmente probabile" sta ora semplicemente ad indicare che la probabilità che un punto appartenga ad un sottoinsieme dello spazio campione Ω è proporzionale alla misura di questo sottoinsieme. In generale, quindi, se M è la misura di Ω (lunghezza, area, volume) e m è l'analoga misura di un evento E di pari dimensionalità (riguardato come sottoinsieme di Ω), allora la probabilità $P(E)$ di tale evento viene posta uguale a m/M. Ad esempio, con riferimento alla Figura 1.4, sia AB il segmento di lunghezza L e sia CD un segmento di AB di lunghezza ℓ. Ci si può chiedere quale sia la probabilità che un punto scelto a caso su AB appartenga a CD. In questo caso Ω è costituito dall'insieme dei punti di AB. All'evento

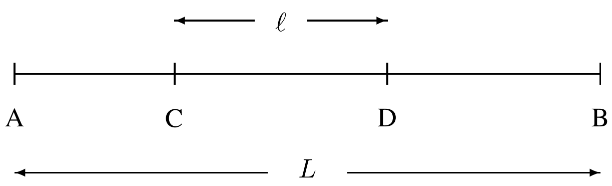

Figura 1.4: Esempio di probabilità geometriche in una dimensione.

$E = \{$*un punto scelto a caso su* AB *appartiene a* CD$\}$ va pertanto associata la probabilità $P(E) = \ell/L$.

Come secondo esempio si consideri un quadrato Q di lato d e sia C il cerchio inscritto in Q (v. Figura 1.5). Si intende determinare la probabilità che un punto scelto a caso in Q

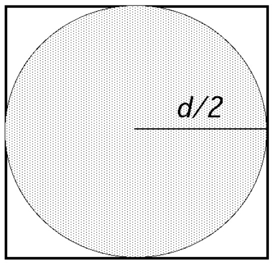

Figura 1.5: Esempio di probabilità geometriche nel piano.

appartenga a C. In questo caso Ω è l'insieme dei punti di Q così che all'evento $E = \{$*un punto scelto a caso in* Q *cade in* C$\}$ va associata la probabilità

$$P(E) = \frac{\text{area di C}}{\text{area di Q}} = \frac{\pi\, d^2/4}{d^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0.7853. \tag{1.2}$$

Giova osservare che in taluni casi la definizione geometrica di probabilità può dar luogo ad ambiguità. È ad esempio celebre il cosiddetto paradosso di Bertrand che nasce dalla considerazione del seguente problema: tracciata a caso una corda di una circonferenza, calcolare la probabilità che la sua lunghezza sia maggiore di quella del lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza. Questo problema apparentemente ammette più di una soluzione in conseguenza delle diverse concrete traduzioni in termini operativi della procedura con la quale è possibile tracciare una corda "a caso". Tra i vari possibili criteri, qui considereremo i tre sotto elencati (v. Figura 1.6).

1. Per ragioni di simmetria si può assegnare a priori la direzione della corda da tracciare. Con riferimento alla figura *(a)*, sceglieremo come direzione quella orizzontale. Consideriamo poi il diametro perpendicolare a tale direzione e su questo fissiamo a caso il punto attraverso il quale far passare la corda. Nel caso della figura *(a)* la corda tracciata con tale scelta casuale sia AB.

2. Sempre per ragioni di simmetria si può fissare uno degli estremi della corda sulla circonferenza. Nella figura *(b)* tale estremo è stato denotato con A. La corda verrà considerata come tracciata a caso se l'altro suo estremo (P nel caso della figura) è un punto scelto a caso sulla circonferenza.

3. Si può scegliere a caso un punto interno al cerchio e considerarlo come punto medio della corda da tracciare, come indicato in figura *(c)*.

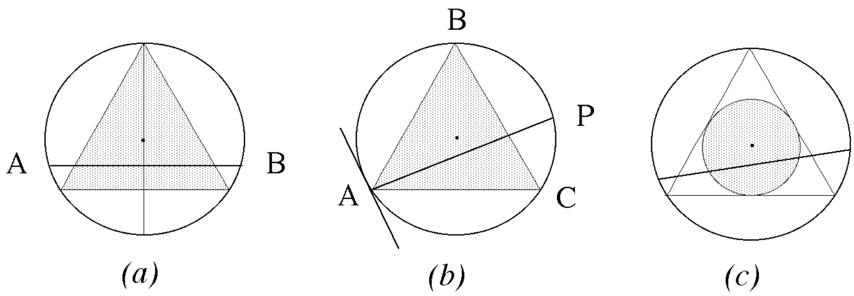

Figura 1.6: Illustrazioni del paradosso di Bertrand.

Anzitutto ricordiamo che se r denota il raggio della circonferenza, il lato del triangolo equilatero in essa inscritto ha lunghezza $r\sqrt{3}$ e che l'altezza di tale triangolo è $3\,r/2$. Per ognuno dei tre criteri precedentemente descritti calcoliamo la probabilità dell'evento $E = \{$*la lunghezza della corda scelta a caso è maggiore della lunghezza del lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza*$\}$.

La sopra specificata diversità delle procedure di costruzione della corda, conduce a tre differenti risultati. Infatti, nel caso *(a)* lo spazio campione Ω è costituito dall'insieme dei punti del diametro individuato e l'evento E si verifica per quei punti del diametro la cui distanza dal centro della circonferenza è minore di $r/2$. Quindi la probabilità richiesta è $P(E) = (r/2)/r = 1/2$. Nel caso *(b)* la tangente alla circonferenza nel punto A ed i due lati del triangolo equilatero con vertice in questo punto individuano tre angoli di $\pi/3$ ciascuno che insistono sugli archi $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{CA}}$, ognuno di lunghezza $2\,\pi\,r\,/3$. In tal caso lo spazio campione Ω è costituito dall'insieme dei punti della circonferenza e l'evento E si verifica se e solo se l'estremo P cade sull'arco $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$. La probabilità di E risulta pertanto data dal rapporto $(2\,\pi\,r/3)/(2\,\pi\,r) \;=\; 1/3$. Infine, nel caso *(c)* lo spazio Ω è costituito dai punti interni alla circonferenza ed E si verifica se e solo se il punto medio della corda cade nel cerchio di raggio $r/2$ concentrico a quello di partenza. La probabilità di E può essere pertanto calcolata come rapporto tra le aree dei due cerchi: $P(E) = [\pi\,(r/2)^2]/(\pi\,r^2) = 1/4$.

Questo risultato, soltanto in apparenza paradossale, ammette una spiegazione semplice: le diverse soluzioni ottenute sono in realtà soluzioni di problemi diversi caratterizzati da spazi campione differenti. Il paradosso è in ultima analisi dovuto alla circostanza che l'enunciato del problema non definisce in modo univoco cosa debba intendersi per "tracciare a caso una corda".