2.3 Disuguaglianza di Boole e formula di inclusione-esclusione

Il terzo assioma della probabilità esprime la proprietà di additività completa per eventi incompatibili da cui, come si è visto, segue anche la proprietà di additività finita. Esaminiamo ora il caso in cui si abbandona l'ipotesi di incompatibilità degli eventi.

Teorema 2.2 *(Disuguaglianza di Boole) Se* $\{A_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ *è una successione di eventi di* $\mathscr{F}$*, si ha:*

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) \tag{2.5}$$

Dimostrazione Consideriamo la successione ausiliaria di eventi $\{B_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ con $B_1 = A_1, B_n = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \overline{A_{n-1}} \cap A_n \quad (n = 2, 3, \ldots)$. Come si è dimostrato nell'Esempio 2.5 gli eventi di tale successione sono incompatibili ed inoltre risulta $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$. Per il terzo assioma si ha quindi:

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) = P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n), \tag{2.6}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dall'essere $A_1 = B_1$, $B_n \subset A_n$ per $n = 2, 3, \ldots$ e dalla Proposizione 2.6. □

Esempio 2.8 *(Problema degli insiemi monocromatici)* Sia $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ una famiglia di sottoinsiemi di un insieme $\mathscr{U}$, ciascuno dei quali contiene k elementi. Diremo colorazione di $\mathscr{U}$ ogni funzione che a ciascun elemento di $\mathscr{U}$ associa uno di due colori, che qui supporremo essere rosso e blu. Diremo che S_i è monocromatico se tutti i suoi elementi hanno lo stesso colore. Nel 1963 Paul Erdös dimostrò il seguente risultato: "Se è $n < 2^{k-1}$, allora esiste una colorazione tale che nessuno degli insiemi $S_1, S_2, \ldots, S_n$ è monocromatico". Per dimostrarlo, si consideri una colorazione casuale degli elementi di $\mathscr{U}$, ossia si supponga che ogni elemento di $\mathscr{U}$ abbia colore rosso o blu con probabilità $1/2$. Il numero di possibili colorazioni distinte è $N(\mathscr{U}) = 2^{|\mathscr{U}|}$, dove $|\mathscr{U}|$ denota la cardinalità dell'insieme $\mathscr{U}$. Si consideri ora l'evento $A_i = \{$*l'insieme* S_i *è monocromatico*$\}$; il numero di casi favorevoli a tale evento è $N(A_i) = 2 \cdot 2^{|\mathscr{U}|-k}$. Infatti i k elementi di S_i devono avere tutti colore rosso oppure tutti colore blu ed, una volta fissato tale colore, ciascuno dei rimanenti $|\mathscr{U}| - k$ elementi di $\mathscr{U}$ può essere colorato in due differenti modi. Pertanto, per la definizione classica di probabilità, si ha $P(A_i) = 2 \cdot 2^{|\mathscr{U}|-k}/2^{|\mathscr{U}|} = 2^{-(k-1)} \ (i = 1, 2 \ldots, n)$. Se si considera l'evento $A = \{$*almeno uno degli insiemi* $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *è monocromatico*$\}$, risulta $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$. Quindi, per la disuguaglianza di Boole si ha:

$$P(A) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k-1} = \frac{n}{2^{k-1}} < 1,$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dall'aver ipotizzato che risulta $n < 2^{k-1}$. Dall'essere $P(A) < 1$, segue che l'evento complementare $\overline{A} = \{$*nessuno degli insiemi* $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *è monocromatico*$\}$ ha probabilità positiva. Dunque esiste almeno una colorazione tale che nessuno degli insiemi $S_1, S_2, \ldots, S_n$ è monocromatico. ♢

Teorema 2.3 *Se A_1 e A_2 sono eventi di $\mathscr{F}$, si ha:*

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2). \tag{2.7}$$

Dimostrazione Dalle proprietà *(9)* e *(12)* del Paragrafo 1.3 risulta:

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (\overline{A_1} \cap A_2), \qquad A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (\overline{A_1} \cap A_2). \tag{2.8}$$

Si noti che gli eventi $A_1 \cup A_2$ e A_2 sono così stati entrambi espressi come unioni di eventi incompatibili poiché risulta $A_1 \cap (\overline{A_1} \cap A_2) = \emptyset$ e $(A_1 \cap A_2) \cap (\overline{A_1} \cap A_2) = \emptyset$. Facendo uso della Proposizione 2.3 in (2.8) si ha:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(\overline{A_1} \cap A_2), \qquad P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2) \tag{2.9}$$

da cui, per eliminazione di $P(\overline{A_1} \cap A_2)$, segue la tesi. □

Esempio 2.9 Un imprenditore si avvale dell'opera di due collaboratori C_1 e C_2. Con riferimento ad un prefissato giorno lavorativo, si considerino gli eventi $A_i = \{$*il collaboratore* C_i *è assente nel giorno fissato*$\}$ $(i = 1, 2)$ e si supponga che $P(A_1) = 3/100$, $P(A_2) = 4/100$ e $P(A_1 \cap A_2) = 1/100$. Si calcolino le probabilità dei seguenti eventi: $E_1 = \{$*l'imprenditore si avvale al più di un collaboratore*$\}$, $E_2 = \{$*l'imprenditore si avvale almeno di un collaboratore*$\}$, $E_3 = \{$*l'imprenditore si avvale di un solo collaboratore*$\}$.

Poiché $E_1 = A_1 \cup A_2$, dal Teorema 2.3 segue $P(E_1) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 6/100$. Inoltre, essendo $E_2 = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$, si ha $P(E_2) = 1 - P(A_1 \cap A_2) = 99/100$. Infine, osservando che $E_3 = (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2)$ (ossia che è esprimibile come unione di eventi incompatibili), risulta $P(E_3) = P(A_1 \cap \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cap A_2) = 5/100$, dove l'ultima uguaglianza segue in quanto $P(A_1 \cap \overline{A_2}) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2)$ e $P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$. ♢

Proposizione 2.7 *Se A_1 e A_2 sono eventi di $\mathscr{F}$, si ha:*

(a) $P(A_1) = 0 \;\Rightarrow\; P(A_1 \cap A_2) = 0$ *e* $P(A_1 \cup A_2) = P(A_2)$;

(b) $P(A_1) = 1 \;\Rightarrow\; P(A_1 \cup A_2) = 1$ *e* $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2)$.

Dimostrazione Dimostriamo in primo luogo l'implicazione *(a)*. Poiché $A_1 \cap A_2 \subset A_1$, applicando la Proposizione 2.6 si ha $P(A_1 \cap A_2) \le P(A_1)$. Poiché $P(A_1) = 0$ per ipotesi, ricordando il primo assioma si ha $0 \le P(A_1 \cap A_2) \le P(A_1) = 0$, da cui segue $P(A_1 \cap A_2) = 0$. Inoltre, dalla (2.7) risulta $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = P(A_2)$. Dimostriamo ora l'implicazione *(b)*. Poiché $A_1 \subset A_1 \cup A_2$, in virtù della Proposizione 2.6 si ha $P(A_1) \le P(A_1 \cup A_2)$. Poiché $P(A_1) = 1$ per ipotesi, ricordando la Proposizione 2.5 si ottiene $1 = P(A_1) \le P(A_1 \cup A_2) \le 1$, da cui segue $P(A_1 \cup A_2) = 1$; dalla (2.7) segue infine $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2) = P(A_2)$. □

La formula (2.7) può essere generalizzata.
Cominciamo col considerare tre eventi di una stessa sigma-algebra:

$$A_1, A_2, A_3 \in \mathscr{F}$$

e dimostriamo che

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = {} & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) \\ & - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Come prima cosa osserviamo che

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P[(A_1 \cup A_2) \cap A_3]$$

da cui, applicando la (2.7) e distribuendo l'intersezione rispetto all'unione nell'ultimo termine è possibile ottenere:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = {} & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) \\ & - P[(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)] \end{aligned}$$

Infine, riapplicando la (2.7) segue:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Più in generale vale la seguente formula nota come principio di inclusione-esclusione:

Teorema 2.4 *Se* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$, *allora*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n). \qquad (2.10)$$

La dimostrazione del Teorema 2.4 può essere effettuata procedendo per induzione su n. Naturalmente, se gli eventi che compaiono nella (2.10) dovessero essere incompatibile, le intersezioni darebbero origine ad eventi impossibili e dalla (2.10) seguirebbe la proprietà di additività. Osserviamo inoltre che, poiché vale la disuguaglianza di Boole, formula (2.5), possiamo concludere che il secondo termine della (2.10) è minore o uguale della somma delle probabilità dei singoli eventi.

Esempio 2.10 *(Il problema delle concordanze)* In un'urna sono contenute n biglie numerate da 1 a n. Si consideri l'esperimento consistente nell'estrarre le biglie dall'urna l'una dopo l'altra fino ad esaurimento. Si dice che esiste una *concordanza* all'estrazione i*-esima* se la biglia contrassegnata con il numero i si presenta all'i*-esima* estrazione. Si calcolino le probabilità dei seguenti eventi: $B_n = \{$*si ha almeno una concordanza nelle* n *estrazioni*$\}$, $C_n = \{$*non si ha nessuna concordanza nelle* n *estrazioni*$\}$, $F_{n,r} = \{$*si hanno esattamente* r *concordanze nelle* n *estrazioni*$\}$.

Osserviamo in primo luogo che l'evento $A_i = \{$*si ha una concordanza alla* i*-esima estrazione*$\}$ ha probabilità

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Infatti, l'esperimento considerato ha come risultato una qualsiasi delle $n!$ possibili permutazioni degli interi $1, 2, \ldots, n$; di queste ve ne sono $(n-1)!$ nelle quali si verifica la concordanza esattamente all'i*-esima* estrazione. (Più semplicemente, le uscite della biglia i-esima alla prima, seconda,. . . , n*-esima* estrazione sono equiprobabili e quindi ciascuna, ivi compresa l'uscita della biglia i*-esima* proprio all'i*-esima* estrazione, ha probabilità $1/n$). Analogamente, la probabilità che si abbiano r *concordanze nelle estrazioni* $i_1, i_2, \ldots, i_r$ è data da

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}) = \frac{(n-r)!}{n!},$$

poiché tra le $n!$ possibili permutazioni degli interi $1, 2, \ldots, n$ ve ne sono $(n-r)!$ nelle quali si verificano le concordanze esattamente nelle estrazioni $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Evidentemente risulta $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e quindi, facendo uso della formula di inclusione-esclusione, si ottiene:

$$\begin{aligned} P(B_n) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) \\ &\quad + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{i<j} \frac{(n-2)!}{n!} + \sum_{i<j<k} \frac{(n-3)!}{n!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \\ &= 1 - \binom{n}{2} \frac{(n-2)!}{n!} + \binom{n}{3} \frac{(n-3)!}{n!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\,\frac{1}{i!}, \tag{2.13}$$

poiché il numero di intersezioni distinte di k eventi è $\binom{n}{k}$. Si noti ora che $C_n = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ così che, facendo uso delle formule di De Morgan, risulta:

$$C_n = \overline{\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big)} = \overline{B_n}.$$

Pertanto, ricordando (2.13), si ha:

$$P(C_n) = 1 - P(B_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\,\frac{1}{i!}.$$

È interessante notare che quando $n \to +\infty$ la probabilità di non avere nessuna concordanza è

$$\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = \frac{1}{e} = 0.3678795.$$

Il reale e^{-1} fornisce dunque un'approssimazione per la probabilità di non ottenere nessuna concordanza nelle estrazioni al crescere del numero n delle biglie.

La Tabella 2.1 mostra che le probabilità di non avere nessuna concordanza nelle n estrazioni variano di poco con n e raggiungono molto rapidamente il valore limite e^{-1}.

Tabella 2.1: Probabilità di non avere nessuna concordanza nelle n estrazioni. (Le approssimazioni sono alla settima cifra decimale).

n	$P(C_n)$	n	$P(C_n)$
2	0.5	7	0.3678572
3	0.3333333	8	0.3678820
4	0.3750000	9	0.3678792
5	0.3666667	10	0.3678795
6	0.3680556	$+\infty$	0.3678795

Per calcolare la probabilità di avere esattamente r concordanze nelle n estrazioni, consideriamo l'evento $D_{n,r} = \{$*si hanno esattamente r fissate concordanze nelle n estrazioni delle n biglie*$\}$. In questo caso vi sono $n!$ permutazioni possibili delle n biglie e tra queste sono favorevoli quelle che, tenendo fisse le r biglie nei posti dove esiste concordanza, permutano le altre $n-r$ biglie senza fornire alcuna concordanza. Il numero di tali permutazioni, corrispondente al numero di casi favorevoli all'evento $D_{n,r}$, è pertanto $(n-r)!\; P(C_{n-r})$. Utilizzando la definizione classica di probabilità, si ha quindi:

$$P\big(D_{n,r}\big) = \frac{(n-r)!\; P(C_{n-r})}{n!} = \frac{(n-r)!}{n!}\,\sum_{i=0}^{n-r}(-1)^i\,\frac{1}{i!}.$$

Poiché esistono $\binom{n}{r}$ modi distinti ed equiprobabili di scegliere tra le n biglie r di esse che forniscono concordanze, risulta:

$$P\big(F_{n,r}\big) = \binom{n}{r}\,P\big(D_{n,r}\big) = \frac{1}{r!}\,\sum_{i=0}^{n-r}(-1)^i\,\frac{1}{i!}. \tag{2.14}$$