### 3.4 Trasformazioni di variabili aleatorie

Analizziamo le seguenti due domande:

*(a)* data una variabile aleatoria $X$ ed una funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la posizione $Y = g(X)$ definisce una variabile aleatoria $Y$?

*(b)* se $Y = g(X)$ è una variabile aleatoria, quale legame sussiste tra le funzioni di distribuzione di $X$ e di $Y$?

La risposta è data dalla seguente proposizione in cui si fa uso della definizione di funzione Borel-misurabile:

[1]Una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è Borel-misurabile se per ogni sottoinsieme di Borel $B \in \mathscr{B}$ si ha $g^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in B\} \in \mathscr{B}$.

**Proposizione 3.3** *Sia $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria e sia $g(x)$ con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione Borel-misurabile. La funzione $Y = g(X)$ è allora essa stessa una variabile aleatoria.*

**Teorema 3.2** *Sia $X$ una variabile aleatoria discreta $\{x_r,\ p_X(x_r);\ r = 1, 2, \ldots\}$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione Borel-misurabile. Se $g$ è strettamente monotona, allora $Y = g(X)$ è una variabile aleatoria discreta $\{y_k,\ p_Y(y_k);\ k = 1, 2, \ldots\}$ tale che*

$$p_Y(y_k) = P(Y = y_k) = \begin{cases} P\big[X = h(y_k)\big], & y_k = g(x_k) \quad (k = 1, 2, \ldots) \\ 0, & \textit{altrimenti,} \end{cases}$$

*dove $h$ denota la funzione inversa di $g$.*

**Dimostrazione** L'ipotesi fatta su $g$ consente di affermare che tale funzione è invertibile, così che esiste una corrispondenza biunivoca tra i valori assunti da $Y$ ed i valori assunti da $X$; quindi per ogni $y_k = g(x_k)$ si ha $p_Y(y_k) = p_X(x_k)$. □

**Esempio 3.9** Sia $X$ una variabile aleatoria discreta $\{k,\ p_k;\ k = 0, 1, \ldots, n\}$ con

$$p_k = P(X = k) = \frac{2^k}{2^{n+1} - 1} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Determiniamo la funzione di probabilità della variabile aleatoria $Y = n - X$.

In tal caso $g(x) = n - x$ è una funzione strettamente monotona e la variabile aleatoria $Y$ assume i valori $0, 1, \ldots, n$. Pertanto dal Teorema 3.2 si ricava:

$$p_Y(y) = P(Y = y) = P(X = n - y) = \begin{cases} \dfrac{2^{n-y}}{2^{n+1} - 1}, & y = 0, 1, \ldots, n \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

◊

Osserviamo esplicitamente che se la funzione *g* non è strettamente monotona è possibile ugualmente determinare la funzione di probabilità di *Y = g(X)* come mostrato nel seguente esempio.

**Esempio 3.10** Sia $X$ una variabile aleatoria discreta che assume i valori $-1, 0, 1$ con rispettive probabilità $q$, $1-p-q$, $p$. Determiniamo la funzione di probabilità di $Y = X^2$, i cui possibili valori sono 0 e 1.

Essendo $g(x) = x^2$, il dominio di $g$ può essere rappresentato come l'unione dei due intervalli disgiunti $I_1 = (-\infty, 0]$ e $I_2 = (0, +\infty)$ in ognuno dei quali $g$ è strettamente monotona. Dal Teorema 3.3 si ricava:

$$\begin{aligned}
&P(Y=0) = P(X^2=0) = P(X=0) = 1-p-q,\\
&P(Y=1) = P(X^2=1) = P(X=-1) + P(X=1) = p+q.
\end{aligned}$$

Pertanto la desiderata funzione di probabilità è la seguente:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1-p-q, & y=0\\ p+q, & y=1\\ 0, & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

$\diamondsuit$

Più in generale, vale il seguente risultato:

**Teorema 3.3** *Sia $X$ una variabile aleatoria discreta $\{x_r,\ p_X(x_r);\ r = 1, 2, \ldots\}$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione Borel-misurabile. Si assuma inoltre che il dominio di $g$ sia esprimibile come l'unione di intervalli disgiunti $I_1, I_2, \ldots, I_n$ e che $g$ sia strettamente monotona nell'intervallo $I_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Se si denota con $h_j$ la funzione inversa di $g$ nell'intervallo $I_j$, allora $Y = g(X)$ è una variabile aleatoria discreta $\{y_k,\ p_Y(y_k);\ k = 1, 2, \ldots\}$ tale che*

$$p_Y(y_k) = P(Y = y_k) = \sum_{j=1}^{n} P\big[X = h_j(y_k)\big], \tag{3.21}$$

*dove il termine $j$-esimo della somma è nullo se $y_k$ non appartiene al dominio di $h_j$.*

È possibile studiare lo stesso problema anche per variabili assolutamente continue.

**Teorema 3.4** *Sia $X$ una variabile aleatoria assolutamente continua con densità di probabilità $f_X(x)$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona dotata di derivata prima continua. Denotata con $h$ la funzione inversa di $g$ e con $D$ il suo dominio, $Y = g(X)$ è una variabile aleatoria assolutamente continua di densità di probabilità*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\,\left|\dfrac{dh(y)}{dy}\right|, & y \in D\\ 0 & \textit{altrimenti.}\end{cases} \tag{3.22}$$

**Dimostrazione** Poiché per ipotesi $g$ è strettamente monotona, esiste una corrispondenza biunivoca tra i valori di $X$ e di $Y$. Inoltre, poiché la derivata prima di $g$ è continua, la sua inversa $h$ è derivabile. Occorre distinguere due casi: *(a)* $g$ è strettamente crescente, *(b)* $g$ è strettamente decrescente.
*(a)* Se $g$ è strettamente crescente si ha:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\big[g(X) \le y\big] = P\big[X \le h(y)\big] = \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(z)\,dz. \tag{3.23}$$

Effettuando il cambiamento di variabile $z = h(u)$, dalla (3.23) si ricava:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_X[h(u)]\,\frac{dh(u)}{du}\,du.$$

Si vede che $F_Y(y)$ è della forma (3.8), così che $Y$ è una variabile aleatoria assolutamente continua con densità di probabilità:

$$f_Y(y) = f_X[h(y)]\,\frac{dh(y)}{dy}\cdot \tag{3.24}$$

*(b)* Se $g$ è strettamente decrescente si ha

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\big[g(X) \le y\big] = P\big[X \ge h(y)\big] = \int_{h(y)}^{+\infty} f_X(z)\, dz$$

che, mediante il cambiamento di variabile $z = h(u)$, diviene:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \Big\{ -\, f_X[h(u)]\, \frac{dh(u)}{du} \Big\}\, du.$$

Anche in questo caso $F_Y(y)$ è della forma (3.8), di modo che $Y$ è una variabile aleatoria assolutamente continua con densità di probabilità:

$$f_Y(y) = -\, f_X[h(y)]\, \frac{dh(y)}{dy}. \tag{3.25}$$

Notiamo infine che è $dh(y)/dy > 0$ se $g$ è strettamente crescente ed è $dh(y)/dy < 0$ se $g$ è strettamente decrescente. Quindi dalle (3.24) e (3.25) segue la (3.22). □

**Esempio 3.11** Sia $X$ un'arbitraria variabile aleatoria. Per determinare la funzione di distribuzione di $Y = a\,X + b$, con $a$ e $b$ reali, occorre distinguere i seguenti casi: *(i)* $a > 0$, *(ii)* $a = 0$ e *(iii)* $a < 0$.
*(i)* Per $a > 0$, si ha:

$$F_Y(y) = P(a\,X + b \le y) = P\Big(X \le \frac{y-b}{a}\Big) = F_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big). \tag{3.26}$$

*(ii)* Se è $a = 0$, allora $Y$ è degenere ed assume il valore $b$ quasi certamente.
*(iii)* Per $a < 0$, infine, si ottiene:

$$F_Y(y) = P(a\,X + b \le y) = P\Big(X \ge \frac{y-b}{a}\Big) = 1 - P\Big(X < \frac{y-b}{a}\Big) = 1 - F_X\Big[\Big(\frac{y-b}{a}\Big)^{-}\Big].$$

Esaminiamo ora il caso in cui $X$ è assolutamente continua con $a \ne 0$. Per $a > 0$, operando il cambiamento di variabile $z = (t-b)/a$, dalla (3.26) si ottiene:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{(y-b)/a} f_X(z)\, dz = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{a}\, f_X\Big(\frac{t-b}{a}\Big)\, dt,$$

da cui segue:

$$f_Y(y) = \frac{1}{a}\, f_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big).$$

Se, invece, è $a < 0$, attraverso il cambiamento di variabile $z = (t-b)/a$, si ricava:

$$F_Y(y) = 1 - \int_{-\infty}^{(y-b)/a} f_X(z)\, dz = 1 - \int_{y}^{+\infty} \frac{1}{|a|}\, f_X\Big(\frac{t-b}{a}\Big)\, dt = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{|a|}\, f_X\Big(\frac{t-b}{a}\Big)\, dt.$$

Pertanto se la variabile aleatoria $X$ è assolutamente continua risulta:

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|}\, f_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big) \qquad (a \ne 0). \tag{3.27}$$

La (3.27) può essere anche ottenuta direttamente facendo uso del Teorema 3.4 dal momento che se è $a \ne 0$ la funzione $g(x) = a\,x + b$ è strettamente monotona e dotata di inversa $h(y) = (y-b)/a$. ♢

**Teorema 3.5** *Detta $X$ una variabile aleatoria assolutamente continua di densità di probabilità $f_X(x)$, si consideri una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si supponga che il dominio di $g$ consiste nell'unione di intervalli disgiunti $I_1, I_2, \ldots, I_n$ e che nell'intervallo $I_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ la funzione $g$ sia strettamente monotona e dotata di derivata prima continua tranne, al più, che negli estremi degli intervalli. Se si denota con $h_j(y)$ la funzione inversa di $g$ nell'intervallo $I_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ e con $D_j$ il suo dominio, allora $Y = g(X)$ è una variabile aleatoria assolutamente continua di densità di probabilità data da*

$$f_Y(y) = \sum_{j=1}^{n} f_X[h_j(y)] \left| \frac{dh_j(y)}{dy} \right| \tag{3.28}$$

*se $y$ appartiene ad almeno uno dei domini $D_j$. Se invece $y$ è esterno all'unione dei $D_j$, risulta $f_Y(y) = 0$.*

**Esempio 3.12** Consideriamo una variabile aleatoria $X$ caratterizzata da funzione di distribuzione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \dfrac{(1+x)^2}{2}, & -1 \le x < 0 \\ 1 - \dfrac{(1-x)^2}{2}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases} \tag{3.29}$$

Determiniamo la funzione di distribuzione e la densità di probabilità di $Y = X^2$.

Se è $y < 0$, allora $F_Y(y) = 0$, mentre per $y \ge 1$ si ha $F_Y(y) = 1$. Analizziamo ora il caso in cui risulta $0 \le y < 1$. Evidentemente si ha:

$$F_Y(y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}).$$

Essendo $0 \le y < 1$, risulta $0 \le \sqrt{y} < 1$ e $-1 < -\sqrt{y} \le 0$; quindi dalla (3.29) si ricava:

$$F_Y(y) = 1 - \frac{(1-\sqrt{y})^2}{2} - \frac{(1+\sqrt{y})^2}{2} = 1 - (1-\sqrt{y})^2, \qquad 0 \le y < 1.$$

Pertanto, in conclusione si ha:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - (1-\sqrt{y})^2, & 0 \le y < 1 \\ 1, & y \ge 1, \end{cases}$$

da cui segue la densità di probabilità:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{y}} - 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{altrimenti}. \end{cases} \tag{3.30}$$

Lo stesso risultato si può ottenere facendo uso del Teorema 3.5. Infatti, dalla (3.29) si ha:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

cosicché dalla (3.28) risulta:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \Big[ f_X(-\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y}) \Big] = \frac{1}{2\sqrt{y}} (1 - |-\sqrt{y}| + 1 - |\sqrt{y}|), \qquad 0 < y < 1,$$

da cui segue la (3.30).

Concludiamo questo paragrafo osservando esplicitamente che mentre la stretta monotonia della funzione $g$ non altera la natura della variabile aleatoria $Y = g(X)$ (nel senso che se $X$ è discreta tale è anche $Y$, e se $X$ è assolutamente continua tale è anche $Y$) la stessa cosa non accade se si rimuove l'ipotesi di stretta monotonia di $g$. Invero, se $g$ non è strettamente monotona e se $X$ è una variabile aleatoria assolutamente continua, $Y = g(X)$ non è necessariamente tale, come evidenziato nell'esempio seguente.

**Esempio 3.13** Sia $X$ una variabile aleatoria assolutamente continua di funzione di distribuzione $F_X(x)$ e sia $\{x_1, x_2, \ldots\}$ una successione strettamente crescente di numeri reali tale che risulti $\lim_{n\to+\infty} F_X(x_n) = 1$. Si consideri poi la seguente trasformazione $g$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$Y = g(X) = \begin{cases} y_1, & X \leq x_1 \\ y_2, & x_1 < X \leq x_2 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ y_k, & x_{k-1} < X \leq x_k \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{3.31}$$

con $y_1 < y_2 < \ldots$. Va esplicitamente notato che $g$ è una funzione definita in $\mathbb{R}$ ed assumente i soli valori $y_1, y_2, \ldots$, così che la variabile aleatoria $Y$ assume valori soltanto nell'insieme $\{y_1, y_2, \ldots\}$. La trasformazione (3.31) non soddisfa le ipotesi del Teorema 3.5. Infatti, poiché $g$ è costante a tratti, il suo dominio non è rappresentabile mediante unioni di intervalli disgiunti in ciascuno dei quali $g$ risulti strettamente monotona. Essendo

$$\begin{aligned} &P(Y = y_1) = P(X \leq x_1) = F_X(x_1), \\ &P(Y = y_k) = P(x_{k-1} < X \leq x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}) \qquad (k = 2, 3, \ldots), \end{aligned}$$

si nota immediatamente che risulta:

$$\begin{aligned} &P(Y = y_k) \geq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots), \\ &\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = y_k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} P(Y = y_k) = \lim_{n\to+\infty} F_X(x_n) = 1. \end{aligned}$$

Ciò indica che $Y$ è una variabile aleatoria discreta di funzione di distribuzione:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0, & y < y_1 \\ F_X(x_1), & y_1 \leq y < y_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ F_X(x_k), & y_k \leq y < y_{k+1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{cases}.$$

La trasformazione (3.31) si rivela particolarmente efficace per la simulazione di variabili aleatorie discrete a partire da variabili aleatorie assolutamente continue. $\diamondsuit$