1.6 Problemi di calcolo combinatorio

Se lo spazio campione Ω è finito e se è inoltre ragionevole assumere che gli eventi costituiti dai singleton dei suoi elementi sono equiprobabili, è possibile considerare una classe di problemi in cui, facendo uso della definizione classica, in modo naturale si assegnano probabilità ad eventi più complessi. In problemi di questo tipo ruolo fondamentale riveste il calcolo combinatorio.

Si assuma che l'insieme Ω consiste di n oggetti. In problemi coinvolgenti la scelta di oggetti da questo insieme occorre distinguere il caso in cui questa è effettuata *con rimpiazzamento* dal caso in cui essa è effettuata *senza rimpiazzamento*. Si può inoltre porre o meno l'attenzione sull'ordine con cui gli oggetti si presentano nella selezione.

Definizione 1.4 *Dicesi disposizione senza ripetizione (o, semplicemente, disposizione) di n oggetti distinguibili su k posti ogni selezione ordinata di k oggetti di Ω senza rimpiazzamento. Dicesi permutazione degli n oggetti ogni disposizione senza ripetizione degli n oggetti su n posti. Dicesi disposizione con ripetizione degli n oggetti su k posti ogni selezione ordinata con rimpiazzamento di k elementi di Ω.*

Due disposizioni si considerano distinte quando differiscono o per la scelta degli n oggetti o per l'ordine con cui essi sono distribuiti sui k posti.

Proposizione 1.1 *Il numero $D_{n,k}$ di disposizioni senza ripetizione di n oggetti su k posti è*

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (1 \le k \le n); \tag{1.3}$$

il numero P_n di permutazioni di n oggetti è

$$P_n = n! \qquad (n \ge 1); \tag{1.4}$$

il numero $\widehat{D}_{n,k}$ di disposizione con ripetizione di n oggetti su k posti è

$$\widehat{D}_{n,k} = n^k \qquad (k \ge 1). \tag{1.5}$$

Dimostrazione La (1.3) segue osservando che la scelta del primo elemento può effettuarsi in n modi diversi, quella del secondo elemento in $n-1$ modi diversi, e così via, fino a che si perviene all'elemento k-esimo che può scegliersi in $n-k+1$ modi diversi. La (1.4) segue immediatamente dalla (1.3) ponendo $k = n$. Infine, la (1.5) si ricava notando che la scelta di ognuno dei k oggetti può essere effettuata in n modi diversi. $\square$

Definizione 1.5 *Dicesi combinazione senza ripetizione (o, semplicemente, combinazione) di n oggetti a gruppi di k ogni selezione non ordinata di k oggetti tratti da Ω senza rimpiazzamento. Dicesi combinazione con ripetizione di n oggetti a gruppi di k ogni selezione non ordinata di k elementi tratti da Ω con rimpiazzamento.*

Proposizione 1.2 *Il numero $C_{n,k}$ di combinazioni di n oggetti a gruppi di k è*

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} \qquad (1 \le k \le n); \tag{1.6}$$

il numero $\widehat{C}_{n,k}$ di combinazioni con ripetizione di n oggetti a gruppi di k è

$$\widehat{C}_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} \qquad (k \ge 1). \tag{1.7}$$

Esempio 1.4 Si scelgano due lettere dall'insieme $\Omega = \{x, y, z\}$. Le disposizioni senza ripetizione delle 3 lettere su 2 posti sono le seguenti: (x, y), (x, z), (y, x), (y, z), (z, x), (z, y). Il loro numero è ottenibile dalla (1.3) ponendovi $n = 3$, $k = 2$. Invece le disposizioni con ripetizione delle 3 lettere su 2 posti sono (x, x), (x, y), (x, z), (y, x), (y, y), (y, z), (z, x), (z, y), (z, z), quindi in numero di $\widehat{D}_{3,2} = 9$, come segue dalla (1.5). Inoltre, come si ricava dalla (1.6), esistono $C_{3,2} = 3$ combinazioni di lettere dell'insieme Ω: (x, y), (x, z), (y, z). Esistono poi $\widehat{C}_{3,2} = 6$ combinazioni con ripetizione di due lettere di Ω, come si deduce dalla (1.7); queste sono (x, x), (x, y), (x, z) (y, y), (y, z), (z, z). Infine, le permutazioni delle 3 lettere di Ω sono (x, y, z), (x, z, y), (y, x, z), (y, z, x), (z, x, y), (z, y, x), il cui numero è $P_3 = 6$, come si ricava dalla (1.4) per $n = 3$. $\diamondsuit$

Esempio 1.5 Si calcoli la probabilità che in un'estrazione del lotto esca l'ambo $(20, 50)$ su una fissata ruota.

Lo spazio campione Ω è costituito dalle cinquine che si possono formare con i numeri interi da 1 a 90. Poiché non interessa l'ordine in cui appaiono gli elementi della cinquina, gli elementi di Ω sono le combinazioni di 90 numeri a gruppi di 5. Il numero di tali cinquine, che è ragionevole ritenere equiprobabili, è $N(\Omega) = \binom{90}{5}$. Si consideri ora l'evento $A = \{$*uscita dell'ambo* $(20, 50)$ *sulla fissata ruota*$\}$. I casi ad esso favorevoli sono le cinquine che contengono, in posizioni qualsiasi, i numeri 20 e 50. Il numero di tali cinquine si ottiene pertanto calcolando il numero $N(A)$ di combinazioni dei rimanenti 88 numeri a gruppi di 3, che è $\binom{88}{3}$. Quindi, in definitiva, si ottiene:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \binom{88}{3} \Big/ \binom{90}{5} = \frac{88!}{3!\,85!}\,\frac{85!\,5!}{90!} = \frac{2}{89 \cdot 9} = 0.0025.$$

Evidentemente tale probabilità non cambia se al posto dei numeri 20 e 50 si pone una qualsiasi altra coppia di numeri possibili, in particolare la coppia $(1, 2)$. $\diamondsuit$

Esempio 1.6 Ci proponiamo di calcolare la probabilità che in quattro successivi lanci di un dado i risultati si presentano in ordine strettamente crescente.

Lo spazio Ω dei casi possibili è quello delle disposizioni con ripetizione di 6 elementi su 4 posti poiché in ogni lancio i sei possibili risultati sono $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Quindi il numero di casi possibili è $N(\Omega) = 6^4$ che, per ragioni di simmetria, possiamo giudicare equiprobabili. Si consideri l'evento $A = \{$*i risultati dei quattro lanci si presentano in ordine strettamente crescente*$\}$. Il numero di casi favorevoli all'occorrenza di tale evento è $N(A) = 1 + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 15$. Infatti, affinché i risultati siano in ordine strettamente crescente, l'ultimo lancio del dado deve fornire come risultato 4, 5 oppure 6; se esso fornisce come risultato 4, esiste un'unica sequenza possibile, cioè $(1, 2, 3, 4)$; se fornisce come risultato 5 occorre considerare tutte le possibili combinazioni senza ripetizione dei quattro numeri $\{1, 2, 3, 4\}$ su tre posti, cioè le $\binom{4}{3}$ sequenze $(1, 2, 3, 5)$, $(1, 2, 4, 5)$, $(1, 3, 4, 5)$, $(2, 3, 4, 5)$; infine, se fornisce come risultato 6 occorre considerare tutte le possibili combinazioni senza ripetizione dei cinque numeri $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ su tre posti, cioè le $\binom{5}{3}$ sequenze $(1, 2, 3, 6)$, $(1, 2, 4, 6)$, $(1, 2, 5, 6)$, $(1, 3, 4, 6)$, $(1, 3, 5, 6)$, $(1, 4, 5, 6)$, $(2, 3, 4, 6)$, $(2, 3, 5, 6)$, $(2, 4, 5, 6)$, $(3, 4, 5, 6)$. Pertanto risulta

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{15}{6^4} = 0.0115.$$

$\diamondsuit$

Esempio 1.7 Si consideri un'urna contenente n biglie numerate da 1 a n e si supponga di estrarre k biglie dall'urna effettuando estrazioni con rimpiazzamento. Si è interessati a calcolare la probabilità che il campione estratto di k biglie, detto anche "campione di taglia k", non contenga ripetizioni, cioè che ogni numero appaia esattamente una volta.

La cardinalità di Ω è $N(\Omega) = n^k$, pari al numero delle disposizioni con ripetizione delle n biglie su k posti. Si consideri l'evento $A = \{$*nel campione di k biglie non ci sono ripetizioni*$\}$. Il numero $N(A)$ dei casi favorevoli ad A è uguale al numero delle disposizioni di n biglie su k posti, ossia $N(A) = n(n-1)\cdots(n-k+1) = n!/(n-k)!$. Pertanto si ha:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \prod_{i=1}^{k-1}\Big(1-\frac{i}{n}\Big).$$

$\diamondsuit$

Esempio 1.8 Si consideri un ordinamento casuale dei numeri $1, 2, \ldots, n$. Si calcoli la probabilità che i numeri 1 e 2 risultino consecutivi e la probabilità che i numeri 1, 2 e 3 siano anch'essi consecutivi.

Lo spazio Ω consiste di tutte le possibili permutazioni di n elementi, il cui numero è $N(\Omega) = n!$. Consideriamo i seguenti eventi: $A = \{$*i numeri* 1, 2 *sono consecutivi nella sequenza*$\}$ e $B = \{$*i numeri* 1, 2 *e* 3 *sono consecutivi nella sequenza*$\}$. Il numero dei casi favorevoli ad A è $N(A) = (n-1)(n-2)!$ poiché i numeri $1, 2$ possono apparire consecutivamente nella sequenza di n numeri in $n-1$ posizioni e, fissate le posizioni dei numeri 1 e 2, occorre considerare tutte le possibili permutazioni dei rimanenti $n-2$ numeri. Analogamente, il numero dei casi favorevoli a B è $N(B) = (n-2)(n-3)!$ poiché i numeri $1, 2, 3$ possono essere sistemati consecutivamente nella sequenza di n numeri in $n-2$ modi e, fissate le tre posizioni dei numeri 1, 2 e 3, occorre considerare tutte le possibili permutazioni degli altri $n-3$ numeri. In conclusione, si ha:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{(n-1)(n-2)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n},$$
$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{(n-2)(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

$\diamondsuit$

Esempio 1.9 In fila in un negozio vi sono m uomini e n donne. Supponendo che tutti siano giunti in ordine casuale, si determini la probabilità che gli uomini nella fila occupino tutti posizioni consecutive.

La cardinalità dell'insieme Ω è $N(\Omega) = (m+n)!$ essendo uguale al numero delle permutazioni delle $m+n$ persone nella fila. Consideriamo l'evento $A = \{$*gli uomini presenti nella fila sono tutti in posizioni consecutive*$\}$. Il numero di casi favorevoli a tale evento è $N(A) = (n+1)\, n!\, m! = (n+1)!\, m!$. Infatti gli m uomini possono essere considerati come un unico blocco che può essere sistemato nella fila lunga $m+n$ in $n+1$ modi distinti. Fissate le m posizioni del blocco occorre considerare tutte le possibili permutazioni degli m uomini e delle n donne. In definitiva si ha:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{(n+1)!\, m!}{(m+n)!}.$$

Nota: Il valore *n + 1* è determinato contando le *n* donne + il blocco degli uomini.

$\diamondsuit$

Esempio 1.10 Un mazzo di n chiavi contiene la chiave che apre una determinata serratura. Ci proponiamo di calcolare la probabilità che, scegliendo ogni volta a caso una chiave diversa, sia la k-esima quella giusta.

Lo spazio Ω consiste di tutte le disposizioni senza ripetizione di n chiavi su k posti. La sua cardinalità è quindi $N(\Omega) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$. Si consideri l'evento $A = \{$*la k-esima chiave scelta apre la serratura*$\}$. Il numero di casi ad esso favorevoli è $N(A) = (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$. Infatti occorre considerare tutte le disposizioni senza ripetizione che hanno all'ultimo posto la chiave giusta mentre le rimanenti $k-1$ chiavi vanno scelte tra le $n-1$ chiavi rimanenti. Pertanto risulta:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} = \frac{1}{n}.$$

Si noti che il risultato non dipende da k, come è intuitivo: con uguali probabilità, ciascuna pari a $1/n$, la chiave giusta è la prima, la seconda, ..., l'n-esima. $\diamondsuit$

Esempio 1.11 Si scelgano casualmente k numeri dall'insieme $\{0, 1, \ldots, 9\}$ con rimpiazzamento. Si è interessati a calcolare la probabilità che nella sequenza così costituita non siano presenti i numeri 0 e 1, nonché la probabilità che nella sequenza, supposta di lunghezza non inferiore a 3, il numero 0 appaia esattamente 3 volte.

La cardinalità dell'insieme Ω è $N(\Omega) = 10^k$ in quanto l'insieme Ω consiste di tutte le disposizioni con ripetizione di 10 elementi su k posti. Sia $A = \{$*nella sequenza di lunghezza k non sono presenti il numero* 0 *ed il numero* 1$\}$. Il numero di casi favorevoli a questo evento è $N(A) = 8^k$, pari al numero di tutte le disposizioni con ripetizione degli otto elementi rimanenti su k posti. Pertanto si ha:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{8^k}{10^k} = \left(\frac{8}{10}\right)^k \qquad (k = 2, 3, \ldots).$$

Si consideri ora l'evento $B = \{$*nella sequenza di lunghezza k il numero* 0 *appare esattamente* 3 *volte*$\}$. Il numero di casi favorevoli a B è $N(B) = \binom{k}{3}\, 9^{k-3}$. Infatti esistono $\binom{k}{3}$ modi distinti in cui si può collocare tre volte il numero 0 in una sequenza di lunghezza k, rimanendo così disponibile una sottosequenza di lunghezza $k-3$ nella quale i rimanenti numeri $1, 2, \ldots, 9$ possono collocarsi, con ripetizione, in 9^{k-3} modi distinti. Risulta quindi:

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \binom{k}{3} \frac{9^{k-3}}{10^k} = \binom{k}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^3 \left(\frac{9}{10}\right)^k \qquad (k \geq 3).$$

$\diamondsuit$

Esempio 1.12 Due persone, denotate con U e V, sono in una fila costituita in totale da n persone. Si calcoli la probabilità che tra U e V vi siano k persone.

La cardinalità dell'insieme Ω è $N(\Omega) = n!$, pari al numero di permutazioni delle n persone nella fila. Sia $A = \{$*k persone tra* U *e* V *sono nella fila*$\}$. Il numero di casi favorevoli ad A è $N(A) = 2\,(n-k-1)\,(n-2)!$. Il coefficiente 2 deriva dal fatto che le posizioni di U e V possono essere scambiate (U può precedere V oppure U può seguire V). Se U precede V, la scelta della posizione di U nella sequenza (in maniera tale da avere k persone che separano U da V) può essere effettuata in $n-k-1$ modi; infine, fissate le posizioni di U e V, esistono $(n-2)!$ modi di sistemare le rimanenti $n-2$ persone in fila. Si ha quindi:

$$P(A) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{2\,(n-k-1)\,(n-2)!}{n!}.$$

Nota: Al denominatore n! rappresenta il numero di permutazioni delle n persone che costituiscono la fila. Per quanto riguarda il numeratore, il coefficiente 2 = $C_{2,1}$ deriva dal fatto che U può precede V o, viceversa, V può precedere U; il termine (n – k – 1) = $C_{n-k-1,1}$ è connesso al numero di persone che costituiscono un blocco; il termine (n – 2)! rappresenta il numero di permutazioni delle n – 2 persone rimanenti.

$\diamondsuit$

Esempio 1.13 In un'aula vi sono k $(k \leq 365)$ studenti convocati indipendentemente dalle loro date di nascita, che sono supposte equidistribuite nei 365 giorni dell'anno (ipotesi certo semplificatrice). Ci proponiamo di calcolare la probabilità che tutti gli studenti presenti abbiano distinti compleanni, nonché la probabilità che almeno 2 studenti abbiano lo stesso compleanno.

Lo spazio campione Ω è costituito da tutte le disposizioni con ripetizione di 365 elementi su k posti, in numero di $N(\Omega) = 365^k$. Sia $A = \{$*tutti i k studenti compiono gli anni in giorni differenti*$\}$. Il numero di casi favorevoli a tale evento è $N(A) = 365 \cdot 364 \cdots (365 - k + 1)$, pari al numero delle disposizioni di 365 elementi su k posti. Pertanto si ha:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - k + 1)}{365^k} = \frac{364 \cdot 363 \cdots (365 - k + 1)}{365^{k-1}}.$$

Si consideri ora l'evento $B = \{$*almeno* 2 *studenti compiono gli anni nello stesso giorno*$\}$. Evidentemente, $B = \overline{A}$, così che il numero di casi favorevoli a B è $N(B) = N(\overline{A}) = N(\Omega) - N(A) = 365^k - 365 \cdot 364 \cdots (365 - k + 1)$. Quindi:

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{364 \cdot 363 \cdots (365 - k + 1)}{365^{k-1}}.$$

Tabella 1.3: Probabilità che almeno 2 studenti tra k compiano gli anni nello stesso giorno.

k	$P(B)$	k	$P(B)$
5	0.0271	24	0.5383
10	0.1169	25	0.5687
15	0.2529	30	0.7063
20	0.4114	40	0.8912
21	0.4437	50	0.9704
22	0.4757	60	0.9941
23	0.5073	70	0.9992

La Tabella 1.3 mostra che per $k = 23$ la probabilità di trovare in aula almeno due studenti che hanno lo stesso compleanno è 0.5073 (massima incertezza!), mentre per $k = 70$ tale probabilità è molto prossima all'unità (quasi certezza!). $\diamondsuit$

L'Esempio 1.13 è noto in letteratura come *Problema dei compleanni*. Osserviamo che per valori di *k* maggiori o uguali di 365 è ovvio *P(B) = 1*, così come ci aspettiamo che per per *k* minore di 365 ma prossimo a tale valore *P(B)* sia prossimo ad *1.* Meno intuitivi sono i valori mostrati nella Tabella 1.3 (calcolati numericamente) in cui si evince che già con 70 studenti nell'aula la probabilità che almeno due abbiamo lo stesso compleanno è prossima ad 1, così come con 23 studenti tale probabilità è già superiore al 50%.