2.5 Probabilità condizionata

Il concetto di probabilità condizionata riveste un interessante contenuto intuitivo che emerge nelle tre definizioni classica, frequentista e soggettiva di probabilità.

Nella definizione classica si definisce probabilità condizionata $P(A|B)$ il rapporto tra il numero di casi favorevoli all'evento $A \cap B$ ed il numero dei casi favorevoli all'evento B. Quindi, se si denota con $N(\Omega)$ il numero dei casi possibili (supposti equiprobabili), con $N(A \cap B)$ il numero di casi favorevoli all'evento $A \cap B$ e con $N(B)$ il numero di casi favorevoli all'evento B, se è $N(B) > 0$ si ha:

$$P(A|B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} \, \frac{N(\Omega)}{N(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\,.$$

Nella definizione frequentista la probabilità condizionata $P(A|B)$ è calcolata restringendo l'attenzione solo alle prove in cui l'evento B si verifica ed è definita come limite della frequenza relativa (calcolata solo sulle prove in cui B si verifica) delle prove in cui l'evento $A \cap B$ si verifica quando il numero delle prove tende all'infinito. Quindi, secondo la definizione frequentista dalla successione di prove nelle quali si osserva il verificarsi dell'evento A occorre eliminare le prove in cui non si verifica B. Nel caso in cui si effettuano n prove, denotando con $\nu_n(A \cap B)$ il numero di prove in cui si verifica $A \cap B$ e con $\nu_n(B)$ il numero delle prove in cui si verifica B, se risulta $\nu_n(B) > 0$ si ha:

$$f_n(A|B) = \frac{\nu_n(A \cap B)}{\nu_n(B)} = \frac{\nu_n(A \cap B)}{n} \, \frac{n}{\nu_n(B)} = \frac{f_n(A \cap B)}{f_n(B)}\,.$$

Per la definizione frequentista di probabilità, al crescere del numero delle prove $f_n(A \cap B)$ e $f_n(B)$ costituiscono rispettivamente misure di $P(A \cap B)$ e $P(B)$; ne segue che $f_n(A|B)$ misura il rapporto $P(A \cap B)/P(B)$, che denotiamo con $P(A|B)$.

Nella definizione soggettiva la probabilità $P(A|B)$ è una misura del grado di fiducia che un individuo coerente ripone nel verificarsi di A, calcolata nell'ipotesi che B si verifichi. Quindi, la probabilità $P(A|B)$ è il prezzo che un individuo ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento A si verifica e 0 se l'evento A non si verifica, prezzo valutato nell'ipotesi che B si verifichi.

Esempio 2.19 Calcoliamo la probabilità che il lancio di un dado dia come risultato 2 sapendo che il risultato del lancio è pari.

Consideriamo gli eventi $A = \{$*il risultato del lancio è* $2\}$ e $B = \{$*il risultato del lancio è pari*$\}$. In questo caso $N(A \cap B) = 1$ e $N(B) = 3$ di modo che, usando la definizione classica, si ha $P(A|B) = 1/3$. Invece, secondo la definizione frequentista, nella successione di lanci del dado consideriamo soltanto quelli che danno un risultato pari; la frequenza relativa del risultato 2, condizionatamente all'ipotesi che il risultato sia pari, ci si attende sia "asintoticamente" prossima a $1/3$ al crescere del numero di lanci. $\diamondsuit$

In generale, si dà la seguente definizione di probabilità condizionata.

Definizione 2.11 *Siano A e B eventi di $\mathscr{F}$ con $P(B) > 0$. La probabilità di A condizionata dal verificarsi di B, denotata con $P(A|B)$ (si legge "probabilità di A dato B"), è così definita:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\,. \tag{2.19}$$

Esempio 2.20 Nell'esperimento consistente nel lancio di un dado ripetuto due volte, si calcoli la probabilità che la somma dei risultati sia minore di 7 sapendo che il primo dado ha fornito come risultato j $(j = 1, 2, \ldots, 6)$.

Si considerino i seguenti eventi: $A = \{$*la somma dei risultati è minore di 7*$\}$ e $B_j = \{$*il risultato del primo lancio è* $j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, 6)$. Dalla definizione classica di probabilità si ha (v. Tabella 1.1) $P(A \cap B_j) = (6 - j)/36$ $(j = 1, 2, \ldots, 6)$. Essendo $P(B_j) = 1/6$, dalla definizione di probabilità condizionata segue

$$P(A|B_j) = \frac{P(A \cap B_j)}{P(B_j)} = 1 - \frac{j}{6} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 6).$$

Si noti che, sebbene gli eventi $B_1, B_2, \ldots, B_6$ siano equiprobabili, la probabilità richiesta $P(A|B_j)$ varia con j. $\diamondsuit$

Dimostriamo ora che la (2.19) è effettivamente una probabilità, ossia che essa soddisfa i tre assiomi caratterizzanti la probabilità.

Teorema 2.5 *Se* $B \in \mathscr{F}$ *e* $P(B) > 0$, *allora* $P(\cdot\,|B)$ *è una probabilità su* $\mathscr{F}$ *nel senso che*
(i) $P(A|B) \geq 0$ *per ogni* $A \in \mathscr{F}$,
(ii) $P(\Omega|B) = 1$,
(iii) Se $\{A_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ *è una successione di eventi incompatibili di* $\mathscr{F}$ *allora*

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \Big| B\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n|B).$$

Dimostrazione La Definizione 2.11 implica evidentemente che la probabilità condizionata soddisfa la *(i)*. Si ha inoltre $P(\Omega|B) = P(\Omega \cap B)/P(B) = 1$, ossia la *(ii)*. Infine, essendo per ipotesi $\{A_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ una successione di eventi incompatibili di $\mathscr{F}$, usando nuovamente la Definizione 2.11 si ha:

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \Big| B\Big) = \frac{P\Big[\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) \cap B\Big]}{P(B)} = \frac{P\Big[\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n \cap B)\Big]}{P(B)}.$$

Essendo $\{A_n \cap B;\ n = 1, 2, \ldots\}$ una successione di eventi incompatibili, segue infine:

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \Big| B\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n|B),$$

ossia la *(iii)*. $\square$

Esempio 2.21 Si consideri l'esperimento consistente in 4 prove indipendenti, in ognuna delle quali si inserisce una biglia in un'urna scelta a caso tra quattro urne. Si vuole calcolare la probabilità di trovare tre biglie nella medesima urna sapendo che le prime due biglie sono state inserite in urne diverse.

Si noti che la cardinalità dello spazio campione è $N(\Omega) = 4^4$, poiché ogni biglia può essere inserita in una qualsiasi delle 4 urne. Si considerino i seguenti eventi: $A = \{$*tre biglie finiscono nella stessa urna*$\}$, $B = \{$*le prime due biglie sono inserite in urne diverse*$\}$. Il numero dei casi favorevoli all'evento B è $N(B) = 4 \cdot 3 \cdot 4^2 = 192$; infatti la prima biglia può essere inserita in una qualsiasi delle quattro urne, la seconda in una qualsiasi delle tre rimanenti ed ognuna delle ultime due biglie può essere inserita in una qualsiasi delle quattro urne. Pertanto, per la definizione classica di probabilità, si ha $P(B) = N(B)/N(\Omega) = 3/4$. Il numero dei casi favorevoli all'evento $A \cap B$ è invece $N(A \cap B) = (4 \cdot 3)\, 2 = 24$ poiché la prima biglia può essere inserita in una qualsiasi delle quattro urne, la seconda in una qualsiasi delle rimanenti tre urne mentre le ultime due devono essere inserite nell'urna dove era stata inserita la prima biglia oppure nell'urna dove era stata inserita la seconda biglia. Utilizzando nuovamente la definizione classica di probabilità, si ha $P(A \cap B) = N(A \cap B)/N(\Omega) = 3/32$. Infine, dalla (2.19) si ricava $P(A|B) = N(A \cap B)/N(B) = 1/8$. $\diamondsuit$

Esempio 2.22 Potendo effettuare due sole telefonate ad un abbonato una cifra del cui numero è ignota, si calcoli la probabilità di comporre il numero giusto scegliendo a caso l'incognita cifra.

Si considerino all'uopo i seguenti eventi: $A_i = \{$*si compone il numero giusto alla i-esima telefonata*$\}$ $(i = 1, 2)$, $A = \{$*si compone il numero giusto in una delle due telefonate*$\}$. Poiché risulta $A = A_1 \cup (\overline{A_1} \cap A_2)$, si ha:

$$P(A) = P(A_1) + P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(A_1) + P(\overline{A_1})\, P(A_2|\overline{A_1}) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{5}.$$

Vale la pena osservare che il quesito proposto in questo esempio può, più semplicemente, ma equivalentemente, formularsi al seguente modo: calcolare la probabilità che scegliendo a caso senza rimpiazzamento due tra dieci oggetti, tra i due oggetti scelti se ne ritrovi uno che è stato inizialmente fissato. Tale probabilità p è evidentemente la somma delle probabilità che il primo oggetto scelto sia quello giusto $(1/10)$ e della probabilità congiunta che non essendo giusto il primo $(1 - 1/10)$ risulti giusto il secondo tra i nove oggetti rimanenti $(1/9)$: $p = (1/10) + (1 - 1/10) \cdot (1/9) = 1/5$. ♢

Osserviamo ora che se è $P(A) > 0$, scambiando i ruoli di A e B nella (2.19) si definisce la probabilità condizionata di B dato A tramite la posizione:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \tag{2.20}$$

Dalle (2.19) e (2.20) segue immediatamente che se A e B sono eventi di $\mathscr{F}$ con $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, allora

$$P(A \cap B) = P(A)\; P(B|A) = P(B)\; P(A|B).$$

Proposizione 2.14 *Se A e B sono eventi di $\mathscr{F}$ tali che $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(i) $P(A \cap B) = P(A)\; P(B)$;

(ii) $P(A|B) = P(A)$;

(iii) $P(B|A) = P(B)$.

La definizione di probabilità condizionata è suscettibile di immediata estensione. Infatti, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono eventi di $\mathscr{F}$ tali che $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, si pone:

$$P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})}\,. \tag{2.21}$$

Il seguente teorema, detto *regola moltiplicativa* o *legge delle probabilità composte*, permette di calcolare la probabilità dell'intersezione di n assegnati eventi facendo uso delle probabilità condizionate.

Teorema 2.6 *Siano $A_1, A_2, \ldots A_n$ una collezione di eventi di $\mathscr{F}$ tali che $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. Si ha:*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\; P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}). \quad (2.22)$$

Dimostrazione Poiché risulta

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-2} \subset \cdots \subset A_1 \cap A_2 \subset A_1,$$

segue:

$$0 < P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \le P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-2}) \le \ldots \le P(A_1 \cap A_2) \le P(A_1), \quad (2.23)$$

avendo fatto uso della positività ipotizzata per la probabilità dell'intersezione degli $n-1$ eventi. Essendo tali probabilità non nulle, dalla (2.21) e dalla (2.23) si ricava poi:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})\; P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}). \quad (2.24)$$

Continuando iterativamente ad applicare la (2.21) al secondo membro della (2.24), si giunge finalmente alla (2.22). $\square$

Esempio 2.23 Tre carte sono estratte senza rimpiazzamento da un mazzo ben mescolato di 52 carte. Si calcoli la probabilità di non ottenere nessuna carta di cuori.

Si considerino i seguenti eventi: $A = \{$*nessuna delle tre carte estratte è di cuori*$\}$, $A_i = \{$*la carta i-esima estratta non è di cuori*$\}$ $(i = 1, 2, 3)$. Poiché $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, usando il Teorema 2.6 si ricava $P(A) = P(A_1)\; P(A_2|A_1)\; P(A_3|A_1 \cap A_2)$. Essendo $P(A_1) = 39/52$, $P(A_2|A_1) = 38/51$ e $P(A_3|A_1 \cap A_2) = 37/50$, segue immediatamente che $P(A) = (39 \cdot 38 \cdot 37)/(52 \cdot 51 \cdot 50) = 0.4135$. $\diamondsuit$

Esempio 2.24 Un'urna contiene quattro biglie contrassegnate con le lettere a, b, c, d. Si estraggono due biglie, una dopo l'altra, e con reinserimento. Si è interessati a calcolare la probabilità che nessuna delle due biglie sia contrassegnata con b sapendo che la stessa biglia non risulta selezionata in entrambe le estrazioni.

Lo spazio campione Ω è costituito da $4^2 = 16$ eventi elementari, cioè da tutte le disposizioni con ripetizione di 4 oggetti su due posti. Si considerino i seguenti eventi: $A = \{$*nessuna delle due biglie è contrassegnata con b*$\}$, $B = \{$*la stessa biglia non è selezionata in entrambe le estrazioni*$\}$. Il numero dei casi possibili è $N(\Omega) = 16$, il numero dei casi favorevoli all'evento A è $N(A) = 9$, il numero di casi favorevoli all'evento B è $N(B) = 12$ ed il numero di casi favorevoli all'evento $A \cap B$ è $N(A \cap B) = 6$. Pertanto risulta $P(A) = 9/16$, $P(B) = 3/4$ e $P(A \cap B) = 3/8$. Dalla (2.19) si ottiene quindi $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = 1/2$. $\diamondsuit$

Esempio 2.25 Ci proponiamo di calcolare la probabilità che una mano di poker sia costituita solo da carte di cuori sapendo che essa consiste unicamente di carte rosse (cuori e quadri).

La mano di poker consiste di cinque carte scelte a caso da un mazzo di 52 carte. Si considerino gli eventi: $A = \{$*una mano di poker è formata solo da carte di cuori*$\}$, $B = \{$*una mano di poker consiste solo di carte rosse*$\}$. Il numero dei casi possibili è $N(\Omega) = \binom{52}{5}$, il numero dei casi favorevoli all'evento A è $N(A) = \binom{13}{5}$ ed il numero di casi favorevoli all'evento B è $N(B) = \binom{26}{5}$. Dalla definizione classica si ha dunque $P(A) = \binom{13}{5} \Big/ \binom{52}{5}$, $P(B) = \binom{26}{5} \Big/ \binom{52}{5}$. Poiché $A \subset B$ segue $A = A \cap B$ e quindi $P(A \cap B) = P(A) = \binom{13}{5} \Big/ \binom{52}{5}$. Pertanto, dalla (2.19), si ottiene $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = \binom{13}{5} \Big/ \binom{26}{5}$. Si nota che $P(A|B) = 0.0196$ è di circa dieci volte maggiore di $P(A) = 0.0021$, cioè della probabilità che una mano di poker consista solo di carte di cuori. $\diamondsuit$

Esempio 2.26 Un'urna contiene 10 biglie contrassegnate con le lettere $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$. Cinque biglie sono estratte senza reinserimento. Si è interessati a calcolare la probabilità che tra le biglie estratte siano incluse quelle contrassegnate con b_i e b_j $\;(i, j = 1, 2, \ldots, 10,\ i \neq j)$ ed inoltre la probabilità che tra le biglie estratte sia inclusa quella contrassegnata con b_i dato che è stata già inclusa la biglia contrassegnata con b_j $\;(i, j = 1, 2, \ldots, 10,\ i \neq j)$.

Lo spazio campione Ω consiste di tutte le possibili combinazioni delle 10 biglie a gruppi di 5; quindi $N(\Omega) = \binom{10}{5}$. Consideriamo i seguenti eventi: $A_i = \{$*tra le biglie estratte compare quella contrassegnata con* $b_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, 10)$. Il numero di casi favorevoli ad A_i è $N(A_i) = \binom{9}{4}$ poiché dopo che la biglia contrassegnata con b_i è stata scelta debbono essere scelte altre 4 biglie tra le rimanenti 9. Ne segue che $P(A_i) = \binom{9}{4}\Big/\binom{10}{5}$ $\;(i = 1, 2, \ldots, 10)$. Inoltre, il numero di casi favorevoli all'evento $A_i \cap A_j$ è $N(A_i \cap A_j) = \binom{8}{3}$ poiché dopo aver scelto le biglie contrassegnate con b_i e b_j debbono essere scelte altre 3 biglie dalle rimanenti 8. Quindi, si ha $P(A_i \cap A_j) = \binom{8}{3}\Big/\binom{10}{5}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, 10,\ i \neq j)$. Essendo $P(A_i \cap A_j) \neq P(A_i)\,P(A_j)$ $(i \neq j)$, gli eventi A_i e A_j non sono indipendenti. Infine, dalla Definizione 2.11, si ottiene $P(A_i|A_j) = P(A_i \cap A_j)/P(A_j) = \binom{8}{3}\Big/\binom{9}{4} = 4/9$. $\diamondsuit$

Esempio 2.27 Si consideri l'esperimento consistente nel lanciare tre volte un dado. Ci si propone di calcolare la probabilità che uno ed uno solo dei lanci dia come risultato 1 sapendo che nessuno dei lanci fornisce lo stesso risultato.

La cardinalità dell'insieme Ω è $N(\Omega) = 6^3$, pari al numero delle possibili disposizioni con ripetizione di 6 oggetti su tre posti. Consideriamo i seguenti eventi: $A = \{$*uno ed uno solo dei tre dadi fornisce come risultato* $1\}$, $B = \{$*nessuno dei tre dadi fornisce lo stesso risultato*$\}$. Il numero di casi favorevoli all'evento B è $N(B) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ e il numero di casi favorevoli all'evento $A \cap B$ è $N(A \cap B) = 3\,(5 \cdot 4) = 60$. Pertanto si ha $P(A \cap B) = 5/18$ e $P(A|B) = N(A \cap B)/N(B) = 1/2$. $\diamondsuit$

Esempio 2.28 Due carte sono estratte a caso da un mazzo ben mescolato di 52 carte. Si intende calcolare la probabilità che vengano scelti il Re di Picche ed il Re di Cuori distinguendo il caso in cui l'estrazione è effettuata con rimpiazzamento dal caso in cui l'estrazione è effettuata senza rimpiazzamento.

Consideriamo i seguenti eventi: $A_i = \{$*la carta i-esima estratta è il Re di Picche*$\}$ $(i = 1, 2)$, $B_i = \{$*la carta i-esima estratta è il Re di Cuori*$\}$ $(i = 1, 2)$, $C = \{$*le carte scelte nelle due estrazioni sono il Re di Picche ed il Re di Cuori*$\}$. L'evento C si può rappresentare come unione di due eventi incompatibili: $C = (A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1)$; segue quindi $P(C) = P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap B_1)$. Se l'estrazione è effettuata con rimpiazzamento, per l'indipendenza si ha $P(C) = P(A_1)P(B_2) + P(B_1)P(A_2) = 2 \cdot (1/52)^2$. Invece, se l'estrazione è effettuata senza rimpiazzamento, risulta $P(C) = P(A_1)P(B_2|A_1) + P(B_1)P(A_2|B_1) = 2 \cdot (1/52) \cdot (1/51)$. $\diamondsuit$

Esempio Durante una partita a poker un curioso vede una carta di uno dei giocatori che è un asso. Calcolare la probabilità che quel giocatore abbia almeno due assi in mano nei seguenti casi:

1. la carta vista è un asso qualsiasi,
2. la carta vista è un asso nero,
3. la carta vista è un asso di picche.

Sia *A* l'evento {*Il giocatore ha almeno due assi in mano*}.

1. Denotando con *B* l'evento {*il curioso ha visto un asso qualsiasi*} si ha:

$$P(A|B) = 1 - \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{4}}{\sum_{i=1}^{4}\binom{4}{i}\binom{48}{5-i}} \simeq 0.12$$

2. Denotando con *C* l'evento {*il curioso ha visto un asso nero*} si ha:

$$P(A|C) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{48}{3} + \binom{2}{1}\binom{2}{2}\binom{48}{2} + \binom{2}{2}\binom{50}{3}}{\binom{2}{1}\binom{50}{4} + \binom{2}{2}\binom{50}{3}} \simeq 0.18$$

3. Denotando con D l'evento $\{$*il curioso ha visto un asso di picche*$\}$ si ha:

$$P(A|D) = \frac{\sum_{i=1}^{3}\binom{3}{i}\binom{48}{4-i}}{\binom{51}{4}} \simeq 0.26$$