aracne

PATRIZIA DI GIRONIMO
GERARDO IOVANE
ELMO BENEDETTO
ANTONIO BRISCIONE

ANALISI MATEMATICA PER INFORMATICI

TEORIA ED ESERCIZI

aracne

©

ISBN
979–12–5994–828–1

PRIMA EDIZIONE
ROMA 9 FEBBRAIO 2021

INDICE

Prefazione

Dalle esperienze degli autori nell'insegnamento dell'Analisi Matematica per il corso di laurea in Informatica nasce questo testo che vuole rappresentare un riferimento formativo per gli studenti del corso. Porre delle solide basi matematiche e allenare al ragionamento logico-deduttivo nel primo anno di studi viene ritenuto dagli autori fondamentale per il prosieguo formativo e lavorativo dello studente. Partendo dai fondamenti dell'Analisi Matematica, lo studio delle funzioni ad una variabile viene affrontato dalla teoria alla pratica grazie ai numerosi esercizi svolti e commentati presenti nel testo. Fornire allo studente un percorso chiaro di studio ed accompagnarlo nello sviluppo delle competenze in materia rappresenta il fine ultimo di questo testo frutto della condivisione dell'attività pluriennale di insegnamento degli autori.

Prerequisiti

Dio creò i numeri naturali; tutto il resto è opera dell'uomo

Leopold Kronecker

In questo capitolo richiamiamo alcuni concetti che saranno utili nei capitoli successivi. La maggior parte di essi dovrebbero essere già noti agli studenti essendo argomenti della scuola secondaria.

Insiemi

In matematica si usa la parola "insieme" per indicare un raggruppamento, una collezione di elementi. Le nozioni di insieme ed elemento di un insieme sono considerate come concetti primitivi, così come le nozioni di punto, retta, piano e spazio in geometria. Questo significa che non sono definibili mediante concetti più semplici e né riconducibili ad altri concetti definiti in precedenza. Si conviene di indicare gli insiemi con lettere maiuscole ed i suoi elementi con minuscole. Per indicare che un elemento a appartiene ad un insieme A, si usa il simbolo $\in$ e si scrive $a \in A$. Invece la scrittura $a \notin A$ indica che l'elemento in oggetto non appartiene all'insieme. Gli insiemi possono essere rappresentati in tre modi diversi:

a) rappresentazione tabulare,
b) diagrammi di Eulero-Venn,
c) rappresentazione mediante proprietà caratteristica.

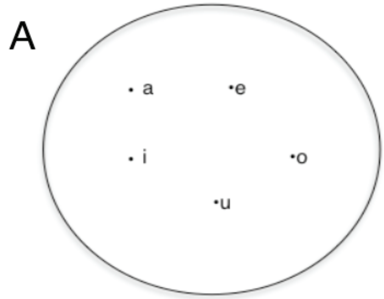
La rappresentazione tabulare si ottiene enumerando gli oggetti entro parentesi graffe. Ad esempio, l'insieme delle vocali lo possiamo scrivere nel seguente modo:

$$A = \{a, e, i, o, u\}.$$

Ovviamente questa rappresentazione è utile se l'insieme è composto da un numero abbastanza limitato di oggetti. Osserviamo che, nella rappresentazione tabulare, l'ordine degli elementi non ha importanza

$$A = \{a, e, i, o, u\} = \{i, e, o, a, u\}.$$

La rappresentazione mediante i diagrammi di Eulero-Venn, invece, prevede che gli elementi dell'insieme vengano riportati entro una linea chiusa continua e non intrecciata:



La rappresentazione mediante proprietà caratteristica, infine, consiste nell'enunciare una proprietà che caratterizza tutti gli elementi dell'insieme. Se, ad esempio, dobbiamo rappresentare l'insieme delle consonanti della parola *studente*, è possibile scrivere:

$$A = \{x : \ x \text{ è } una\ consonante\ della\ parola\ studente\}$$

dove il simbolo ": " si legge "tale che".

Un insieme che non contiene elementi è detto ***insieme vuoto*** e lo si indica con il simbolo $\emptyset$.
Ad esempio, se consideriamo l'insieme dei triangoli della geometria euclidea con un lato maggiore della somma degli altri due, esso non contiene elementi e rappresenta un esempio di insieme vuoto.

Definizione 0.1 – *Si dice che l'insieme B è un* **sottoinsieme** *di A quando ogni elemento di B appartiene ad A e si scrive $B \subseteq A$.*

Definizione 0.2 – *Si dice che l'insieme B è un* **sottoinsieme proprio** *di A se $B \neq \emptyset$ ed esistono elementi di A che non appartengono a B. In questo caso scriveremo $B \subset A$.*

Si conviene di considerare l'insieme vuoto sottoinsieme di ogni insieme.

Definizione 0.3 – *Dato un insieme A, si chiama* **insieme delle parti** *di A l'insieme di tutti i sottoinsiemi propri ed impropri di A e lo si indica con* $\wp(A)$.

Se ad esempio $A = \{a, e, i\}$, allora

$$\wp(A) = \{\emptyset, A, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{a, e\}, \{a, i\}, \{e, i\}\}.$$

Osserviamo che se A ha n elementi, allora $\wp(A)$ ha 2^n elementi.

Definizione 0.4 – *Si chiama* ***intersezione*** *tra due insiemi A e B l'insieme degli elementi appartenenti sia ad A che a B e la si indica con* $A \cap B$.

In forma simbolica possiamo scrivere

$$A \cap B = \{x : \ x \in A \ \wedge \ x \in B\}.$$

Il simbolo $\wedge$ indica la congiunzione "e". Se $A \cap B = \emptyset$, gli insiemi si dicono **disgiunti**. Ricordiamo che l'intersezione gode della proprietà commutativa e di quella associativa, cioè:

$$A \cap B = B \cap A;$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Definizione 0.5 – *Si chiama* ***unione*** *tra due insiemi A e B l'insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi e la si indica con* $A \cup B$.
In forma simbolica possiamo scrivere

$$A \cup B = \{x : \ x \in A \ \vee \ x \in B\}.$$

Il simbolo $\vee$ indica la disgiunzione logica "o". Anche l'unione gode della proprietà commutativa e di quella associativa, cioè:

$$A \cup B = B \cup A;$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Inoltre, vale sia la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione che quella dell'unione rispetto all'intersezione, cioè:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

***Definizione 0.6** – Si definisce **differenza** fra due insiemi l'insieme degli elementi del primo insieme che non appartengono al secondo insieme.*

In forma simbolica

$$A \setminus B = \{x : \ x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Ad esempio se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{c, d, e, f\}$, si ha che $A \setminus B = \{a, b\}$.

La differenza tra insiemi gode della proprietà distributiva sia rispetto all'unione che all'intersezione, cioè:

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C);$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Nel caso in cui B sia sottoinsieme proprio di A, $B \subset A$, la differenza tra i due insiemi è detta complementare di B rispetto ad A, ed è un insieme indicato con $C_A(B)$. Per il complementare di un insieme rispetto ad un insieme X, valgono le **leggi di De Morgan**

$$C_X(A \cap B) = C_X(A) \cup C_X(B);$$

$$C_X(A \cup B) = C_X(A) \cap C_X(B).$$

***Definizione 0.7** – Si chiama **differenza simmetrica** tra gli insiemi A e B e si indica con $A \triangle B$, la differenza tra l'unione e l'intersezione dei due insiemi.*

In simboli

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

La differenza simmetrica gode delle proprietà commutativa e associativa, cioè:

$$A \triangle B = B \triangle A;$$
$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

Inoltre vale la seguente proprietà:

$$(A \triangle B) \triangle (B \triangle C) = A \triangle C.$$

***Definizione 0.8** – Si chiama **prodotto cartesiano** di A per B, in simboli $A \times B$, l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate aventi come prima componente un elemento di A e come seconda un elemento di B.*

In simboli

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

Ricordiamo che

$$A \times B \neq B \times A$$

e, inoltre si conviene di porre

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset.$$

Il prodotto cartesiano di un insieme con se stesso è detto quadrato cartesiano, cioè:

$$A^2 = A \times A = \{(a,b) : a \in A, b \in A\}.$$

Un esempio di quadrato cartesiano è $\mathbb{R}^2$.

Il sottoinsieme del quadrato cartesiano costituito da coppie uguali è detto diagonale e indicato con ΔA. Cioè

$$\Delta A = \{(a,a) : a \in A\}.$$

Il prodotto cartesiano si estende anche a tre o più insiemi ed è distributivo rispetto all'unione ed alla intersezione:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C);$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

***Definizione 0.9** – Si dice che un insieme di sottoinsiemi non vuoti di un insieme A è un **ricoprimento** di A se ogni elemento di A appartiene* *ad almeno uno dei sottoinsiemi.*

Definizione 0.10 *– Se un ricoprimento è fatto con sottoinsiemi disgiunti, si parla di* ***partizione*** *di A.*

Ora ricordiamo altri simboli matematici che saranno utili nel seguito, il cosiddetto quantificatore universale $\forall$, che si legge "per ogni", ed il quantificatore esistenziale $\exists$, che si legge "esiste almeno un". La negazione, così come già visto con il simbolo di appartenenza, si indica sbarrando il simbolo. Infine, un punto esclamativo dopo il quantificatore esistenziale $\exists!$, vuol dire "esiste ed è unico". Nelle dimostrazioni sarà usato il seguente simbolo $\Rightarrow$ che vuol dire "implica".
Osserviamo che vale la seguente equivalenza

$$P \Rightarrow Q \quad \text{è equivalente a} \quad non\ Q \Rightarrow non\ P.$$

Invece $\Leftrightarrow$ si legge "se e solo se".
Concludiamo questa sezione con un richiamo storico alla teoria assiomatica e rigorosa degli insiemi. Nella seconda metà del 1800 i matematici pensarono che per fondare la matematica su solide basi tutto avrebbe dovuto basarsi sulla teoria degli insiemi. La teoria degli insiemi che abbiamo appena esposto, era stata formulata principalmente da **Cantor** e si è soliti chiamarla teoria "intuitiva" oppure teoria "ingenua" degli insiemi. Agli inizi del 1900, però, il matematico e filosofo inglese **Bertrand Russell** formulò un enunciato nell'ambito della teoria degli insiemi di Cantor, che è passato alla storia come **Paradosso di Russell.** Un paradosso è una conclusione logica e non contraddittoria che si discosta dal nostro senso comune di vedere le cose. L'enunciato di Russell, invece, è una proposizione autocontraddittoria sia nel caso che sia vera, sia nel caso che sia falsa. Quindi è una vera e propria **antinomia**. Ogni insieme ha la caratteristica o di contenere se stesso come elemento oppure di non contenere se stesso come elemento. Usando le parole dello stesso Russell, osserviamo che l'insieme di tutti i concetti astratti appartiene a se stesso perché, a sua volta, è un concetto astratto. Invece, per esempio, l'insieme di tutte le tazze da tè non è una tazza da tè e non appartiene a se stesso.
Consideriamo i seguenti due insiemi:

a) L'insieme di tutti gli insiemi che contengono se stessi come elemento.
b) L'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi come elemento.

Analizziamo l'insieme b). Possiamo scrivere

$$R = \{A: A \notin A\}.$$

Questo insieme appartiene o non appartiene a se stesso? Se R contiene se stesso come elemento, essendo l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi, allora non contiene se stesso.

Pertanto,

$$R \in R \Rightarrow R \notin R.$$

Se invece R non appartiene a se stesso, vuol dire che non è uno degli insiemi che non appartengono a se stessi. Pertanto R appartiene a se stesso.
Quindi,

$$R \notin R \Rightarrow R \in R.$$

In conclusione,

$$R \in R \Leftrightarrow R \notin R.$$

Le contraddizioni messe in luce dal paradosso di Russell sono insolubili nell'ambito della teoria intuitiva degli insiemi, se non generando altri paradossi. Per tale motivo è stata sviluppata una teoria assiomatica e rigorosa degli insiemi che è nota come teoria di Zermelo-Fraenkel indicata con **ZF**. Se agli assiomi di Zermelo-Fraenkel si aggiunge un ulteriore assioma, detto assioma della scelta, si parla di teoria **ZFC**.

I numeri naturali
Il primo insieme numerico che l'uomo ha scoperto è stato sicuramente l'insieme dei numeri naturali, in simboli:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\dots\}.$$

I filosofi e gli storici della scienza parlano di vera e propria scoperta nel senso che $2 + 3 = 5$ esisterebbe indipendentemente dall'essere umano, così come esiste l'universo ed ogni corpo materiale al suo interno, nella visione realistica del mondo.

A questo si riferiva Kronecker con la frase riportata all'inizio del capitolo. Inoltre, tutte le operazioni ben note tra numeri naturali hanno un chiaro significato. Ciò non accadrà con gli altri insiemi numerici. Sapremo fare i conti con tutti i tipi di numeri ma, il significato intuitivo delle operazioni, si perderà sempre di più ampliando gli insiemi numerici.

All'inizio ogni numero naturale era associato a cose pratiche: tre lupi, due alberi, cinque pecore ecc. Ad un certo punto l'uomo capì che se abbiamo tre lupi, tre alberi e tre pecore, questi hanno qualcosa in comune: il numero astratto 3. Questa prima astrazione dell'essere umano, molti ritengono la si possa far coincidere con la nascita della matematica. Noi tutti conosciamo le proprietà dei numeri naturali con le relative operazioni e, quindi, ci sembra che non ci sia molto da dire. Invece, il livello moderno della matematica è talmente avanzato, che per studiare nei dettagli l'insieme $\mathbb{N}$, occorrerebbe un corso specifico. Diciamo soltanto che un matematico italiano, **Giuseppe Peano**, nel 1899 ha costruito un modello ipotetico-deduttivo rigorosissimo per descrivere i numeri naturali e relative proprietà. Questo modello è fondato sui seguenti 5 assiomi

P1) $1 \in \mathbb{N}$;

P2) $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste uno ed un solo $n^* \in \mathbb{N}$ chiamato successore di n;

P3) $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $n^* \neq 1$;

P4) se $m, n \in \mathbb{N}$ e $m^* = n^*$, allora $m = n$;

P5) ogni sottoinsieme K di $\mathbb{N}$ con le proprietà

a) $1 \in K$;
b) se $k \in K$ allora $k^* \in K$ coincide con $\mathbb{N}$ (Assioma di induzione).

Sembra incredibile, ma anche le proprietà base delle operazioni somma e prodotto vengono dimostrate nel modello di Peano, laddove $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ diventa un teorema.

Si dimostra che per l'**addizione** valgono le seguenti proprietà:

- commutativa: $a + b = b + a$;
- associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Si dimostra che per la **moltiplicazione** valgono le seguenti proprietà:

- commutativa: $a \cdot b = b \cdot a$;
- associativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
- esistenza dell'elemento neutro 1
  1: $\mathrm{a} \cdot 1 = 1 \cdot \mathrm{a} = \mathrm{a} \quad \forall \mathrm{a} \in \mathrm{N}$;
- distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

La **sottrazione** è possibile in $\mathbb{N}$ solo se il minuendo è maggiore del sottraendo e per essa vale la seguente proprietà:

- invariantiva: addizionando o sottraendo, quando ciò è possibile, uno stesso numero naturale ai due termini della sottrazione, la differenza non cambia.

Anche la **divisione** non è sempre possibile in $\mathbb{N}$ e per essa valgono le due seguenti proprietà:

- invariantiva: moltiplicando o dividendo, quando è possibile, dividendo e divisore per uno stesso numero, il quoziente non cambia, mentre il resto, se c'è, viene moltiplicato o diviso per quel numero;
- distributiva: $(b + c): a = b: a + c: a$.

Inoltre vale l'importante ben nota proprietà

$$\boldsymbol{dividendo} = \boldsymbol{divisore} \cdot \boldsymbol{quoziente} + \boldsymbol{resto} \quad (\boldsymbol{resto} < \boldsymbol{divisore}).$$

Infine si definisce la **potenza** con le seguenti proprietà

- additiva: $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$;
- sottrattiva: $a^b : a^c = a^{b-c}$ con $b > c$;
- moltiplicativa: $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$;

- distributiva: $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$ e $(a : b)^c = a^c : b^c$.

Il quinto assioma di Peano è generalmente espresso in un'altra forma ad essa perfettamente equivalente e lo si chiama **Principio di induzione**, che si enuncia nel seguente modo:

*Se una proprietà P(*ℕ) *vale per* $n = 1$ *e, se supposta vera per* n*, risulta vera per* $n + 1$*, allora P(*ℕ) *risulta vera per ogni* n*.*

Infatti, chiamiamo A l'insieme dei numeri naturali per i quali *P(*ℕ) è vera

$$A = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ è } vera\}.$$

Per ipotesi $P(1)$ è vera e quindi $1 \in A$. Inoltre se $P(n)$ è vera, $n \in A$, allora lo è anche $P(n + 1)$ e quindi $n + 1 \in A$. Per il quinto assioma $A = \mathbb{N}$ e cioè $P(n)$ è vera per ogni n.

Come esempio di applicazione del principio di induzione, dimostriamo la seguente

Disuguaglianza di Bernoulli

$$\boldsymbol{(1 + a)^n \geq 1 + n \cdot a \quad \forall a \epsilon \mathbb{R} \;\; e \; a \geq -1}.$$

Dim.

Per $n = 1$ abbiamo

$$1 + a \geq 1 + a \text{ che è vera.}$$

Supponiamola vera per n e dimostriamo che è vera anche per $n + 1$ e ciò vuol dire che

$$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a.$$

Abbiamo supposto vera la relazione per un certo n e quindi

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Siccome $a \geq -1$, allora $1 + a \geq 0$. Moltiplichiamo ambo i membri della precedente disuguaglianza per il numero non negativo $1 + a$

$$(1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+na).$$

Dalla proprietà additiva delle potenze

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+a)(1+na).$$

Moltiplicando il secondo membro, possiamo scrivere

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+a+na+na^2 = 1+(1+n)a+na^2 \geq 1+(1+n)a.$$

Pertanto

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(1+n)a.$$

Per il principio di induzione, la disuguaglianza di Bernoulli è sempre vera.

Mostriamo un altro esempio di applicazione del metodo induttivo di dimostrazione:

Dimostriamo che per ogni $n \geq 2$, risulta

$$3^2+3^3+\cdots+3^n = \frac{3^{n+1}-9}{2}.$$

Per $n = 2$, si ha

$$3^2 = \frac{3^3-9}{2} \Rightarrow 9 = 9 \quad VERO.$$

Ora supponiamola vera per n e dimostriamo che è vera anche per $n+1$ e cioè

$$3^2+3^3+\cdots.3^n+3^{n+1} = \frac{3^{n+2}-9}{2}.$$

Si ha che

$$3^2+\cdots+3^n+3^{n+1} = \frac{3^{n+1}-9}{2}+3^{n+1} = \frac{3^{n+1}-9+2\cdot 3^{n+1}}{2}.$$

Quindi sommando al numeratore ed applicando la proprietà additiva delle potenze risulta

$$3^2 + \cdots + 3^n + 3^{n+1} = \frac{3 \cdot 3^{n+1} - 9}{2} = \frac{3^{n+2} - 9}{2}.$$

Concludiamo questo breve riepilogo sui numeri naturali ricordando il

Teorema fondamentale dell'aritmetica - *Ogni numero naturale maggiore di 1 o è un numero primo o si può esprimere come prodotto di numeri primi. Tale rappresentazione è unica, se si prescinde dall'ordine in cui compaiono i fattori.*

Da questo teorema si comprende che i numeri primi sono veri e propri "atomi" per la costruzione dei numeri naturali. Ogni naturale lo si può scomporre nei suoi ultimi costituenti. Così come esiste la tavola periodica degli elementi, esiste anche la tavola periodica aritmetica. Non è noto quando l'essere umano ha scoperto i numeri primi però, nel 1960 fu rinvenuto vicino a Ishango, presso il confine tra l'Uganda e il Congo, un osso di babbuino risalente al 20.000 A.C. circa. In una delle colonne in cui è suddiviso l'osso, compaiono 11, 13, 17 e 19 tacche. È un caso o già conoscevano i numeri primi 20.000 anni fa? La cosa certa è che dopo la loro scoperta ci si pose la domanda: quanti sono i numeri primi? Euclide fu il primo a dimostrare che sono infiniti. Il mondo fisico è costruito con un numero finito di mattoni (Quark e Leptoni), mentre la matematica è costruita con una infinità di mattoni! Oltre alla certezza della loro infinità abbiamo, però, ancora tanti misteri che nessuno è riuscito a dimostrare. Esiste una legge che ci permette di trovare l'ennesimo numero primo? Se io, ad esempio, voglio trovare il 51-esimo numero pari, non ho bisogno di contare ma basta che sostituisco 51 nella formula $2n$. Esiste una simile relazione per i numeri primi? Nel XVII secolo **Fermat** si convinse di aver trovato una formula che genera solo numeri primi. Pensava che la scoperta della formula generatrice di tutti i primi fosse vicina e scrisse "*La mia non li genera tutti, però è la prima che genera solo numeri primi*". Propose la formula

$$2^{2^n} + 1.$$

Fermat si sbagliava di grosso. La sua formula ne genera solo 4. Presentò inoltre un'altra proposizione sui numeri primi anche se non era legata alla loro distribuzione. Questa fu dimostrata successivamente da Leibnitz ed è passata alla storia come **Piccolo Teorema di Fermat**: *Se p è un numero primo, $\forall a \in \mathbb{N}$ si ha che $a^p - a$ è un multiplo di p.* In termini moderni, ciò significa che $a^p \equiv a(mod p)$. Nello stesso secolo, **Mersenne**, presentò la relazione $2^n - 1$ come formula per generare molti primi. La relazione di Mersenne è migliore di quella di Fermat ma in ogni caso ne genera pochi e si dimostra che se il numero di Mersenne è primo anche l'esponente è primo. Infine Eulero propose la relazione

$$n^2 + n + 41$$

ma che genera numeri primi solo per n da 0 a 39. Purtroppo, rimanendo con una sola variabile, nessuno è riuscito a trovare una relazione che genera tutti i numeri primi o almeno solo numeri primi e nessuno sa se potrà mai essere trovata. Secoli di ricerche non riuscirono a trovare una formula di generazione dei numeri primi, forse era giunto il tempo di adottare una strategia diversa. Con **Gauss**, **Legendre**, **Dirichlet** e **Riemann** si cercò una formula per determinare quanti fossero i numeri primi compresi tra 1 ed n. Possiamo almeno sapere quanti numeri primi ci sono in un certo intervallo? Purtroppo nemmeno questo sembra possibile, però nel 1896 **de la Vallée-Poussin** e **Hadamard** hanno dimostrato una precedente intuizione di Gauss e cioè il **Teorema dei numeri primi**: detta $\pi(n)$ la funzione che ci dice quanti sono i primi minori o uguali ad n, si ha che $\pi(n) \to \frac{n}{\ln(n)}$. Cioè più grande è n e più il numero di primi si avvicina a quel rapporto.
Riportiamo tre, tra le tante, proprietà non ancora dimostrate inerenti i numeri primi

Congettura di Goldbach – *Ogni numero pari maggiore di 2 può essere scritto come somma di due numeri primi (che possono essere anche uguali).*
Congettura dei primi gemelli – *Esistono infiniti primi gemelli e cioè numeri primi che differiscono di 2.*

Numeri primi di Sophie Germain – *Un numero primo* p *tale che* $2p + 1$ *è primo è detto primo di Sophie Germain. Sono finiti o infiniti i primi di Sophie Germain?*

Infine chiudiamo il paragrafo con una congettura sui numeri naturali ancora non dimostrata e cioè la cosiddetta
Congettura di Collatz – *Prendiamo un qualsiasi numero naturale; se è pari lo dividiamo per due, se è dispari lo moltiplichiamo per tre e aggiungiamo una unità al risultato. Ripetendo questo algoritmo, dopo un certo numero di passi, si ottiene sempre 1.*

Strutturare un insieme
Consideriamo l'insieme delle parole della lingua italiana. Certamente esso è una specie di mucchio indistinto. Un tale insieme sarebbe un vocabolario impossibile da consultare. Serve un principio organizzatore e cioè una relazione tra i suoi elementi. Prendiamo spunto dai numeri naturali e dalla loro naturale relazione d'ordine "minore" indicata con <. Quali sono le sue proprietà? Certamente un numero naturale non può essere minore di se stesso. Inoltre se a è minore del numero b, certamente b non è minore di a. Infine se a è minore di b e b è minore di c, allora a è minore di c. Tutte le relazioni tra elementi di un insieme che godono delle stesse proprietà del minore tra numeri naturali, sono dette **relazioni d'ordine stretto.** Queste tre proprietà sono chiamate **irriflessiva**, **asimmetrica** e **transitiva**. Nell'insieme delle parole della lingua italiana, la relazione "precedere in ordine alfabetico" è una relazione d'ordine stretto che ci permette di introdurre un criterio organizzatore nel nostro insieme inizialmente confuso. Le relazioni tra elementi di un insieme che godono delle stesse proprietà del $\leq$, sono dette **relazioni d'ordine largo**. Le tre proprietà caratteristiche sono

- riflessiva $a \leq a$;
- antisimmetrica $a \leq b \;\; e \;\; b \leq a \Rightarrow a = b$;
- transitiva $a \leq b,\; b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

Se non tutti gli elementi sono in relazione tra di loro, si parla di insieme **parzialmente ordinato**, in caso contrario si parla di **relazione d'ordine totale**. Un altro noto esempio di relazione d'ordine è la relazione di inclusione tra insiemi. Infatti $\subseteq$ è una relazione d'ordine largo, mentre $\subset$ è una relazione d'ordine stretto. I numeri naturali con la loro relazione d'ordine standard soddisfano il cosiddetto

Principio del buon ordinamento – Ogni sottoinsieme non vuoto di numeri naturali contiene un numero che è più piccolo di tutti gli altri.
Dim.
Sia $A \subset \mathbb{N}$ non dotato di un elemento più piccolo di tutti. Consideriamo $C_{\mathbb{N}}(A)$. Esso deve contenere per forza 1 altrimenti 1 apparterrebbe ad A che, pertanto, avrebbe un elemento più piccolo di tutti. Se $C_{\mathbb{N}}(A)$ contiene tutti i numeri da 1 a n, allora deve avere anche il numero $n + 1$ perché se $(n+1) \in A$ vuol dire che esso è l'elemento più piccolo poiché i numeri da 1 a n sono nel suo complementare. Per il principio di induzione otteniamo che $C_{\mathbb{N}}(A) = \mathbb{N}$. Quindi $A = \emptyset$.

A volte si preferisce considerare il principio del buon ordinamento un postulato dei numeri naturali e dimostrare il principio di induzione che, pertanto, diventa un teorema.
Sia $A \subset \mathbb{N}$ che contiene 1 e tale che se contiene n contiene anche $n+1$. Dimostriamo che, assumendo vero il principio del buon ordinamento, si ha che $A = \mathbb{N}$. Consideriamo $C_{\mathbb{N}}(A)$ e dimostriamo che è vuoto. Se non lo fosse, per il principio del buon ordinamento, avrebbe un elemento più piccolo che chiamiamo m. Sicuramente $m \neq 1$ poiché $1 \in A$ per ipotesi. Il numero $m-1$ non può stare nel complementare poiché m è il suo elemento più piccolo e pertanto $(m-1) \in A$. Per ipotesi anche il successivo di $(m-1)$ deve stare in A. Questo però è assurdo poiché il successivo è m che invece è nel complementare. Pertanto $C_{\mathbb{N}}(A) = \emptyset$ e quindi $A = \mathbb{N}$.

Gli insiemi che, rispetto ad una relazione d'ordine, soddisfano il principio del buon ordinamento sono detti insiemi **ben ordinati**. Pertanto l'insieme dei numeri naturali è un insieme ben ordinato (rispetto alla relazione d'ordine usuale). Ciò non accadrà con gli interi poiché ad esempio il sottoinsieme dei numeri negativi non ha

un elemento più piccolo rispetto alla relazione d'ordine usuale. Osserviamo però che esiste il
Teorema di Zermelo del buon ordinamento – *Ogni insieme X è ben ordinabile, ovvero è possibile trovare per X un ordinamento che sia totale, e per cui ogni sottoinsieme Y di X abbia un elemento più piccolo.*
Un altro criterio organizzatore del nostro insieme delle parole della lingua italiana è la relazione "appartenere alla stessa forma grammaticale". Indicando con $\mathcal{R}$ questa relazione, osserviamo che valgono le seguenti proprietà

- riflessiva: $a\mathcal{R}a$;
- simmetrica: $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$;
- transitiva: $a\mathcal{R}b, b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$.

In questo caso si parla di **relazione di equivalenza**. Un altro esempio di relazione di equivalenza è la relazione di parallelismo tra le rette del piano. Gli elementi equivalenti tra di loro formano una **classe di equivalenza** e l'insieme che ha per elementi le classi di equivalenza è detto **insieme quoziente**.

Strutture algebriche

Si chiama struttura algebrica un insieme munito di una o più operazioni. Cosa si intende per operazione? L'operazione è una legge che ad ogni coppia di elementi dell'insieme restituisce un altro elemento dell'insieme. Ad esempio nell'insieme V dei vettori possiamo definire il prodotto vettoriale, indicato con $\wedge$. Più precisamente, $\forall v_1, v_2 \in V$ definiamo il vettore $v_3 = v_1 \wedge v_2$ e così l'insieme dei vettori risulta munito di una struttura algebrica indicata con $(V, \wedge)$. Non tutte le operazioni godono delle stesse proprietà e le strutture algebriche hanno diversi nomi a seconda delle proprietà dell'operazione. Se vale la proprietà associativa, la struttura algebrica è detta **semigruppo**.
Indicando con $*$ una generica operazione nell'insieme A, la coppia $(A,*)$ è un semigruppo se

$$(a * b) * c = a * (b * c) \ \forall a, b, c \in A.$$

In base a questa definizione $(\mathbb{N}, +)$ ed $(\mathbb{N},\cdot)$ sono semigruppi mentre $(V, \wedge)$ non lo è. Se l'operazione gode della proprietà commutativa, la struttura algebrica è detta **abeliana.** Se valgono sia la associativa che la commutativa, si parla di semigruppo abeliano. La struttura algebrica (V, Λ) non è abeliana mentre $(\mathbb{N}, +)$ ed $(\mathbb{N}, \cdot)$ sono semigruppi abeliani. Un semigruppo dotato di **elemento neutro** è detto **monoide**. Quindi il semigruppo $(A, *)$ è un monoide se esiste $u \in A \;\; t.c. \forall a \in A$ si ha

$$a * u = u * a = a.$$

Pertanto $(\mathbb{N}, \cdot)$ è un monoide abeliano. Se consideriamo l'insieme delle parti di un insieme A con l'operazione intersezione, si vede che $(\wp(A), \cap)$ è un monoide abeliano dove l'elemento neutro è A. Se nel monoide $(A, *)$ si ha che

$$\forall a \in A \; \exists a^{-1} \in A \; tale \; che \; a * a^{-1} = a^{-1} * a = u$$

la struttura algebrica è detta **gruppo** e l'elemento a^{-1} è detto **simmetrico** o **inverso** di a. Le strutture algebriche $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$ e $(\wp(A), \cap)$ non sono un gruppo. Anche se consideriamo l'insieme delle parti con l'unione, possiamo verificare che non è un gruppo ma un monoide commutativo avente come elemento neutro l'insieme vuoto. Invece $(\wp(A), \triangle)$ è un gruppo abeliano dove l'insieme vuoto è l'elemento neutro ed ogni elemento è l'inverso di se stesso. Una struttura algebrica con due operazioni $(A, +, \cdot)$ è detta **anello** se

a) $(A, +)$ è un gruppo abeliano;
b) $(A, \cdot)$ è un semigruppo;
c) vale la proprietà distributiva di · rispetto a +.

L'anello è detto abeliano se $(A, \cdot)$ è abeliano ed è detto unitario se $(A, \cdot)$ è un monoide. Se l'insieme A meno l'elemento neutro dell'operazione + è un gruppo rispetto a ·, allora la struttura algebrica è detta **corpo**. Se $(A \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano abbiamo un **campo**.

Insiemi numerici numerabili

Il fatto che la sottrazione non è sempre possibile in $\mathbb{N}$, ha spinto l'uomo ad ampliare l'insieme dei numeri "inventando" gli interi $\mathbb{Z}$. Gli interi godono delle seguenti proprietà rispetto alla somma

- commutativa;
- associativa;

- esistenza dell'elemento neutro 0 tale che $a + 0 = 0 + a \;\; \forall a \in \mathbb{Z}$;
- esistenza dell'inverso $-a \quad t.c \quad a + (-a) = 0 \;\; \forall a \in \mathbb{Z}$.

Per la moltiplicazione le proprietà sono le stesse dei numeri naturali e ora la sottrazione è sempre possibile. Per prima cosa si può osservare che

$$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a + (-a) = a(0 + 1) + (-a).$$

Ma 0 è l'elemento neutro della somma e quindi $0 + 1 = 1$. Invece 1 è l'elemento neutro del prodotto. Pertanto ci resta

$$a \cdot 0 = a \cdot 1 + (-a) = a + (-a) = 0.$$

Quindi moltiplicando qualsiasi intero per zero ottengo zero. Per tale motivo possiamo scrivere

$$0 = a \cdot 0 = a[b + (-b)] = a \cdot b + a \cdot (-b).$$

Quindi $a \cdot (-b)$ è l'inverso di $a \cdot b$. Ne segue che $a \cdot (-b) = -a \cdot b$. Pertanto più per meno uguale meno. Analogamente meno per più fa meno. Ora osserviamo che

$$0 = -a \cdot 0 = -a \cdot [b + (-b)] = -a \cdot b - a \cdot (-b).$$

Da ciò vediamo che $-a \cdot (-b)$ è l'inverso di $-a \cdot b$. Quindi meno per meno fa più. Ricordando la definizione del precedente paragrafo, vediamo che $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo unitario ma non è un campo. Osserviamo che già con i numeri interi alcune operazioni perdono di significato intuitivo. Tutti sappiamo che $(-2) \cdot (-3) = 6$ ma, se pensiamo alla definizione di moltiplicazione, significherebbe che sommiamo -3 volte il numero -2 con sè stesso. La divisione non è sempre possibile nemmeno in $\mathbb{Z}$, e l'uomo ha "inventato" i razionali $\mathbb{Q}$. I razionali godono di tutte le proprietà degli interi ed ora la divisione è sempre possibile tranne quando il divisore è zero. Tutti i numeri tranne lo zero hanno un inverso anche rispetto alla moltiplicazione e la struttura algebrica $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un campo. Grazie all'analogia formale tra le proprietà delle potenze e delle radici, riusciamo ad effettuare anche calcoli con esponenti razionali. Cioè facciamo la seguente identificazione

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

É importante ricordare che le potenze con esponente frazionario si possono definire solo nel caso che la base sia positiva. Se si accettassero anche basi negative si andrebbe incontro a delle ambiguità. Ad esempio

$$(-8)^{\frac{2}{6}} = (-8)^{\frac{1}{3}}$$

ma

$$\sqrt[6]{(-8)^2} \neq \sqrt[3]{-8}.$$

Il significato delle operazioni diventa sempre più astratto. Ad esempio $2^{3/4}$ lo sappiamo calcolare ma è inutile cercare di comprenderlo in base alla definizione di potenza data tra numeri naturali. Sia gli interi che i razionali, come dimostrato da Cantor, possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i naturali. **Possono essere contati** e si dice che hanno la potenza di infinito del **numerabile**. Questo tipo di infinito si chiama **aleph-zero** e lo si indica con $\aleph_0$.

La potenza del continuo

Nel VI secolo A.C. la scuola pitagorica fondò una teoria filosofica basata sui numeri interi e sui loro rapporti. Tutto è numero diceva Pitagora. Per ironia della sorte, fu proprio un pitagorico, **Ippaso di Metaponto,** che fece crollare la teoria scoprendo che ci sono grandezze geometriche il cui rapporto non si può esprimere come numero razionale. I pitagorici giurarono di tenerla nascosta ma qualcuno la divulgò e la leggenda vuole che fu colpito da una maledizione e morì in un naufragio. Se ad esempio abbiamo un quadrato di lato unitario, il rapporto tra diagonale e lato è $\sqrt{2}$. Se esistesse una frazione che è la radice quadrata di 2, si avrebbe

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

con la frazione ridotta ai minimi termini. Quindi si avrebbe

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2.$$

Dall'ultima relazione vediamo che p^2 è un numero pari e di conseguenza è pari anche p. Quindi $p = 2k$ per qualche intero k. Sostituendo nella precedente relazione, otteniamo

$$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2.$$

Quindi q^2 è pari ed anche q. Abbiamo raggiunto un assurdo poiché p e q sono primi tra loro. Quindi $\sqrt{2}$ è un nuovo numero che chiamiamo **irrazionale**.
Noi sappiamo trasformare in frazione i numeri decimali finiti e quelli infiniti con periodo. Per tale motivo un numero irrazionale non può che essere un numero decimale infinito e senza periodo. Se chiamiamo *I* l'insieme dei numeri irrazionali, abbiamo che

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$$

è l'insieme dei numeri reali. Cantor ha dimostrato che l'insieme degli irrazionali ha una potenza di infinito superiore all'infinito numerabile chiamata potenza del continuo $\aleph_1$. Dopo la scoperta ebbe una emozione talmente forte che cominciò a gridare "Lo vedo ma non ci credo" ed inviò persino una lettera a **Dedekind** con scritta questa frase. Quindi quasi tutti i numeri reali sono irrazionali. Gli irrazionali si dividono a loro volta in due famiglie. Gli **irrazionali algebrici** sono quelli soluzione di una equazione polinomiale a coefficienti razionali. Ad esempio $\sqrt{2}$ è soluzione dell'equazione $x^2 - 2 = 0$ e perciò è un irrazionale algebrico. Gli irrazionali che non sono soluzione di una equazione polinomiale a coefficienti razionali, sono detti invece **irrazionali trascendenti**. Gli algebrici hanno la potenza del numerabile ed i trascendenti del continuo. Q*uasi tutti i numeri, di conseguenza, sono trascendenti*.
Un numero trascendente importante per l'analisi matematica è il numero di Nepero

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71 \ldots\ldots$$

Anche π è trascendente ma ci sono alcuni numeri che li contengono entrambi che ancora nessuno è riuscito a dimostrare se sono irrazionali o razionali. Ad esempio : $\pi \pm e$; π^e. Un altro numero irrazionale molto noto è la sezione aurea. Essendo soluzione dell'equazione $x^2 - x - 1 = 0$, è un irrazionale algebrico. Nell'insieme dei numeri reali si definiscono tutte le operazioni dei razionali e si riesce a definire anche la potenza ad esponente irrazionale come ad esempio $3^{\sqrt{2}}$. Una trattazione rigorosa sulla costruzione dei reali e delle relative operazioni richiederebbe uno specifico corso. Comunque sappiamo tutti che le operazioni godono delle stesse proprietà che valgono per i razionali e l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto all'addizione ed al prodotto. **L'unica cosa che distingue i due insiemi numerici è la proprietà di continuità.** Questa scoperta è dovuta ad un allievo di Gauss di nome Richard Dedekind che, all'età di ventiquattro anni, scrisse un lavoro dal titolo" Continuità e Numeri Irrazionali" nel quale diede la seguente

Definizione 011 – *Se A e B sono due insiemi, diciamo che (A, B) è una sezione di $\mathbb{R}$ se*

$$A \cup B = \mathbb{R}\,, A \cap B = \emptyset \text{ e } \forall a \in A \text{ e } \forall b \in B \text{ si ha } a < b.$$

Ad esempio $A = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: x < 0\}$.

Assioma di Dedekind – *Per ogni sezione (A, B) di $\mathbb{R}$ esiste un unico $L \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq L \leq b \;\; \forall a \in A$ e $\forall b \in B$.*
Il numero L è detto elemento separatore e sta in A o in B.
Questo assioma esplicita la continuità dei reali che non hanno "buchi".

Proposizione 0.1 – *I numeri razionali non verificano l'assioma di Dedekind.*

Dim.

$$A = \{x \in \mathbb{Q}: x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q}: x \geq 0, x^2 < 2\}$$

e

$$B = \{x \in \mathbb{Q}: x \geq 0, x^2 \geq 2\}.$$

É facile vedere che (A, B) è una sezione di $\mathbb{Q}$. Supponiamo che esiste l'elemento separatore e che sta in A. Quindi L è un numero positivo tale che $L^2 < 2$. Ora sia N un intero tale che

$$N > \frac{2L + 1}{2 - L^2}.$$

Allora:

$$N(2 - L^2) > 2L + 1 \Rightarrow 2 - L^2 > \frac{2L + 1}{N}.$$

Quindi:

$$L^2 + \frac{2L+1}{N} < 2.$$

Ma

$$\left(L + \frac{1}{N}\right)^2 = L^2 + \frac{1}{N^2} + \frac{2L}{N} < L^2 + \frac{1}{N} + \frac{2L}{N} = L^2 + \frac{2L+1}{N} < 2.$$

Questo vuol dire che $L + \frac{1}{N} \in A$. Ma $L + \frac{1}{N} > L$ e quindi L non è l'elemento separatore. Analogamente si esclude il caso $L \in B$.

□

Esistono altri infiniti oltre aleph-0 ed aleph-1? Sempre Cantor scoprì che se costruiamo l'insieme delle parti di $\mathbb{N}$ otteniamo aleph-1. Possiamo continuare considerando l'insieme delle parti dei reali ottenendo aleph-2. Possiamo continuare all'infinito ottenendo ancora ulteriori infiniti di ordine superiore. I numeri infiniti Cantor li chiamò numeri transfiniti. Sorge spontanea la domanda: tra aleph-0 ed aleph-1, ad esempio, esistono altri infiniti? Esiste aleph-0,3? Aleph-0,74 ecc. Esistono infiniti dentro i numeri transfiniti?
Cantor affermava di no e questa sua affermazione va sotto il nome di **ipotesi del continuo.** È vera o è falsa l'ipotesi del continuo? Grazie agli studi di **Kurt Godel** e **Paul Joseph Cohen** è stato dimostrato che l'ipotesi del continuo non può essere dimostrata, ossia è un assioma. Infatti, esiste il **teorema di incompletezza di Godel** che, detto in modo elementare, afferma proprio che dato un sistema di assiomi non contraddittori, esisteranno sempre al suo interno affermazioni non decidibili. Quindi, l'ipotesi del continuo assume un ruolo analogo al quinto postulato di Euclide per la geometria. Se lo si accetta è valida la geometria euclidea, altrimenti è possibile sostituirlo con altri postulati che danno vita alle geometrie non euclidee degli spazi curvi.

Simboli combinatori

Concludiamo questo capitolo introduttivo, richiamando alcuni simboli che saranno utili nei capitoli successivi. Per prima cosa ricordiamo che si chiama fattoriale di un numero naturale n, il prodotto di n fattori consecutivi a partire da 1. Per mostrare lo stupore che suscita il suo rapido aumento, si convenne di indicarlo con $n!$. Ad esempio $5! = 5 \cdot$

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Si conviene di porre $0! = 1$. Un altro simbolo che incontreremo è il simbolo $\binom{n}{k}$ che si legge "n su k". Si ha che

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Tramite questo simbolo è possibile scrivere in forma concisa lo sviluppo della potenza di un binomio. Infatti si dimostra la cosiddetta formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Il simbolo Σ, detto sommatoria, indica la somma di tanti termini ottenuti dando a k successivamente i valori $0,1,2, \ldots, n$.

Capitolo 1

Topologia di $\mathbb{R}$

1.1 Introduzione

La topologia è un ramo della geometria moderna che studia le proprietà delle figure geometriche che non cambiano quando viene effettuata una deformazione senza "strappi", "sovrapposizioni" o "incollature. Ad esempio, il cubo e la sfera sono equivalenti dal punto di vista topologico perché possono essere deformati con continuità l'uno nell'altro. I concetti di partenza sono le definizioni di spazio topologico, funzione continua e omeomorfismo.

Definizione 1.1 – Se X è un insieme non vuoto, una famiglia T di sottoinsiemi di X è una topologia su X se si verificano le seguenti 3 proprietà

T1) X e $\emptyset$ appartengono a T;

T2) l'unione di un numero qualsiasi di elementi di T appartiene a T;

T3) l'intersezione di due insiemi qualsiasi di T appartiene a T.

Gli elementi di T sono detti aperti e la coppia (X, T) è detta **spazio topologico**.

Esempio: sia

$$X = \{a, b, c, d, e\}.$$

Consideriamo le due classi di sottoinsiemi

$$T_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\};$$

$$T_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}.$$

Si può vedere che (X, T_1) è uno spazio topologico, mentre (X, T_2) non lo è, poiché non verifica il secondo assioma. Infatti

$$\{a, c, d\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}.$$

Ma $\{a, b, c, d\}$ non appartiene a T_2. Quindi T_1 è una topologia su X, mentre T_2 non lo è.

1.2 I numeri reali come spazio topologico

Si definisce il valore assoluto di un numero reale x nel seguente modo

$$|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases} .$$

Osserviamo che $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Inoltre $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ e si ha

$$|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y .$$

È valida anche la cosiddetta **disuguaglianza triangolare**

$$|x + y| \leq |x| + |y| .$$

Infatti dalla definizione di valore assoluto si ha che se $x, y \in \mathbb{R}$

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad e \ -|y| \leq y \leq |y| .$$

Sommando membro a membro le due precedenti relazioni si ottiene

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| \Leftrightarrow |x + y| \leq |x| + |y| .$$

Definizione 1.2 – Se X è un insieme non vuoto, una legge di composizione

$$d: XxX \to \mathbb{R}^+$$

è detta **metrica** se $\forall\ a, b, c \in X$ sono soddisfatte le seguenti proprietà

m1) $d(a, b) \geq 0$ e $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$;
m2) $d(a, b) = d(b, a)$;
m3) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

Il numero reale $d(a, b)$ è detto distanza tra a e b e la coppia (X, d) è detta **spazio metrico**. Se noi in $\mathbb{R}$ definiamo $d(a, b) = |a - b|$ otteniamo la cosiddetta metrica naturale o euclidea sulla retta reale. In ogni insieme si possono definire più metriche ma noi, quando parleremo di distanza, supporremo $\mathbb{R}$ dotato della metrica naturale.

Definizione 1.3 – Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $r > 0$, si chiama intorno di centro x_0 e raggio r l'insieme

$$I(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}: d(x, x_0) < r\}.$$

A volte l'intorno di un punto x_0 è indicato semplicemente con I_{x_0}. Un numero reale x_0 è **interno** ad $A \subset \mathbb{R}$ se esiste un intorno di x_0 contenuto in A. È **esterno,** invece, se esiste un intorno di x_0 in cui non ricadono punti di A. È un punto di **frontiera**, infine, se in ogni intorno di x_0 ricadono punti di A e punti del complementare di A.

Definizione 1.4 – $A \subset \mathbb{R}$ è **aperto** se ogni suo punto è interno.

Un intervallo è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che corrisponde ad una semiretta o ad un segmento.

Definizione 1.5 – $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2 < x_3$ se $x_1, x_3 \in I \Rightarrow x_2 \in I$.

Si chiamano intervalli di estremi a e b i seguenti insiemi

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\};$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\};$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\};$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\};$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > a\};$$
$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\};$$
$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}: x < a\};$$
$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq a\}.$$

Gli intorni di centro x_0 e raggio r sono intervalli del tipo $(x_0 - r, x_0 + r)$.
In base alla definizione 1.4 sono aperti i seguenti intervalli

$$(a, b), \qquad (-\infty, a), \qquad (a, +\infty), \qquad \mathbb{R} = (-\infty, +\infty).$$

Teorema 1.1 – *L'unione di insiemi aperti è aperto.*
Dim.
Sia $\mathcal{A} = \cup A_i$ l'unione di aperti. Se $x_0 \in \mathcal{A}$, allora esso deve appartenere ad almeno uno degli aperti A_i. Poiché A_i è aperto, x_0 è interno ad A_i e quindi a maggior ragione sarà interno all'unione $\mathcal{A} \supset A_i$. Quindi ogni punto di $\mathcal{A}$ è interno e pertanto è un insieme aperto.

Teorema 1.2 – *L'intersezione di due aperti è un aperto.*
Dim.
Siano A e B due aperti e sia $x_0 \in A \cap B$. Poiché A è aperto, esiste $I(x_0, r_1) \subset A$. Anche B è aperto e quindi esiste $I(x_0, r_2) \subset B$. Se chiamiamo r il più piccolo dei due raggi, l'intorno $I(x_0, r)$ sarà contenuto sia in A che in B e quindi nell'intersezione.

Applicando la precedente proposizione più volte, deduciamo che l'intersezione finita di aperti è un aperto. Se invece gli aperti sono infiniti in numero, non è detto che la loro intersezione sia un aperto. Basta pensare alla famiglia infinita di aperti $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. L'intersezione è il numero 0 che non è aperto. Se i due insiemi aperti sono disgiunti, la loro intersezione è vuota e per far valere in generale la precedente proposizione, si conviene di definire aperto l'insieme vuoto.
Osserviamo che gli aperti di $\mathbb{R}$ soddisfano le proprietà T1, T2 e T3 e pertanto la coppia $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ è uno spazio topologico dove con $\mathcal{A}$ si intende la famiglia di tutti gli aperti di $\mathbb{R}$.

Definizione 1.6 – $A \subset \mathbb{R}$ è **chiuso** se il suo complementare è aperto.

Ogni intervallo $[a, b]$ è chiuso poiché il complementare $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ è aperto, essendo unione di due aperti. Il complementare di $\mathbb{R}$ è l'insieme vuoto che è aperto e pertanto $\mathbb{R}$ oltre ad essere aperto è anche chiuso. Lo stesso vale per l'insieme vuoto che è pertanto sia aperto che chiuso. $\complement_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$ è aperto e quindi gli interi sono un insieme chiuso. Possono anche esserci insiemi che non sono né aperti e né chiusi come ad esempio $[a, b)$, $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
Ricordando le **leggi di De Morgan,** deduciamo facilmente che, se abbiamo una famiglia di chiusi C_i e consideriamo la loro intersezione, questa è un chiuso. Infatti, il complementare dell'intersezione è uguale all'unione dei complementari che sono tutti aperti essendo i C_i tutti chiusi. Allora il complementare dell'intersezione è aperto e quindi l'intersezione chiusa. Analogamente vediamo che l'unione finita di chiusi è un chiuso.

Definizione 1.7 – Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice di **accumulazione** per X se in ogni intorno di x_0 cade almeno un punto di X diverso da x_0.

Proposizione 1.1 – Se x_0 è un punto di accumulazione per X, allora in ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti di X.
Dim.
Infatti, se per assurdo esistesse un intorno di x_0 nel quale cadono solo un numero finito di elementi di X, siano $x_1, \ldots, x_n$ quelli distinti da x_0. Posto r = min $\{|x_1 - x_0|, \ldots, |x_n - x_0|\}$, nell'intorno $I(x_0, r)$ non cadrebbe nessun punto di X diverso da x_0 e quindi x_0 non sarebbe un punto di accumulazione.

Per l'insieme dei numeri naturali, l'unico punto di accumulazione è $+\infty$. Infatti in qualsiasi intorno di $+\infty$ cadono infiniti numeri naturali. Invece, se consideriamo un qualsiasi $x \in \mathbb{R}$, possiamo scegliere un δ sufficientemente piccolo in modo che in $I(x, \delta)$ non ricada nessun naturale. Nell'ambito dei punti di accumulazione è possibile fare la seguente ulteriore caratterizzazione.

Definizione 1.8 – Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice di **accumulazione** a destra per X se in ogni intorno destro di x_0 cade almeno un punto di X diverso da x_0. Analogamente si definisce un punto di accumulazione a sinistra.

I punti che non sono di accumulazione per un insieme, sono detti **punti isolati** e gli insiemi che non presentano punti di accumulazione sono detti insiemi discreti. Si chiama derivato di A l'insieme dei punti di accumulazione di A.

$$\mathfrak{D}(A) = \{x \in \mathbb{R}: x \text{ è } punto\ di\ accumulazione\ per\ A\}.$$

Ad esempio $\mathfrak{D}(0,1) = [0,1]$.
Si dice che A è denso in B se ogni punto di B è di accumulazione per A. Poiché si può dimostrare che ogni numero reale è di accumulazione per $\mathbb{Q}$, abbiamo che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$. Esiste una connessione tra insiemi chiusi e punti di accumulazione data dal seguente teorema.

Teorema 1.3 – *Un insieme è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.*
Dim.
Sia B un insieme chiuso e sia $x \in \mathfrak{D}(B)$. Se x appartenesse all'aperto $\complement_{\mathbb{R}}(B)$, esisterebbe un intorno di x tutto contenuto in $\complement_{\mathbb{R}}(B)$ e quindi in tale intorno non potrebbe cadere alcun punto di B. Ma questo significherebbe che $x \notin \mathfrak{D}(B)$ ed è assurdo poiché $x \in \mathfrak{D}(B)$. L'assurdo è nato dall'aver supposto $x \in \complement_{\mathbb{R}}(B)$ e perciò $x \in B$. Viceversa supponiamo che B è un insieme che contiene tutti i suoi punti di accumulazione e sia $x \in \complement_{\mathbb{R}}(B)$. Poiché $x \notin \mathfrak{D}(B)$, esisterà un suo intorno in cui non cade nessun punto di B. Per tale motivo questo intorno sarà tutto contenuto in $\complement_{\mathbb{R}}(B)$ che risulterà pertanto aperto. Quindi B è chiuso.

Definizione 1.9 – Si dice chiusura di A e si scrive $\bar{A}$, l'intersezione di tutti i chiusi che contengono A.

In pratica $\bar{A}$ è il più piccolo chiuso contenente A e si ha $\bar{A} = A \cup \mathfrak{D}(A)$. Infine, se indichiamo con ∂A l'insieme dei punti di frontiera di A, si ha $\partial A = \bar{A} \cap \overline{\complement_{\mathbb{R}}(A)}$ e quindi la frontiera è un insieme chiuso.
Ad esempio, se $A = (0,1)$, allora $\bar{A} = [0,1]$ e

$$\complement_{\mathbb{R}}(A) = \overline{\complement_{\mathbb{R}}(A)} = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty).$$

Quindi $\partial A = \bar{A} \cap \overline{\complement_{\mathbb{R}}(A)} = \{0,1\}$.

Gli insiemi finiti non presentano mai punti di accumulazione. Affinché un insieme sia dotato di punti di accumulazione, però, non è sufficiente che sia infinito. Il seguente teorema afferma che, oltre alla condizione di insieme infinito, occorre la condizione di limitatezza dello stesso.

Teorema di Bolzano-Weierstrass – *Un sottoinsieme C dei numeri reali limitato ed infinito ha almeno un punto di accumulazione.*
Dim.
Poiché il sottoinsieme C è limitato, esisterà sicuramente un intervallo chiuso e limitato che lo contiene e lo indichiamo con $[a_0, b_0]$. Quindi $C \subset [a_0, b_0]$. Dividiamolo in due intervalli di uguale lunghezza e cioè $\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$ e $\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$. Poiché C ha infiniti punti, in almeno uno dei due devono esserci infiniti punti. Chiamiamolo $[a_1, b_1]$ e ripetiamo lo stesso procedimento di divisione in due intervalli di uguale lunghezza. Avremo una sequenza di intervalli $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$,…., ognuno contenuto nel precedente ed avente infiniti punti. Definiamo i seguenti insiemi a partire da questi intervalli

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots.\};$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots.\}.$$

Si ha che

$$0 \leq infB - supA \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poiché la suddivisione continua all'infinito, si ha che $infB = supA$ ed è un punto di accumulazione per C.
Infatti, chiamando $h = infB = supA$, si ha che h è contenuto in ognuno degli intervalli $[a_n, b_n]$ e l'intorno $I(h, r)$ contiene l'intervallo $[a_i, b_i]$ non appena $2^i > \frac{b-a}{r}$. Quindi $I(h, r)$ contiene infiniti punti di C e per cui h è un punto di accumulazione.

1.3 Estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme

Sia $X \subset \mathbb{R}$. Diamo le seguenti definizioni

Definizione 1.10 – Si dice che $L \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di X se per ogni $x \in X$ risulta $x \leq L$. Si dice, invece, che $L \in \mathbb{R}$ è un minorante di X se per ogni $x \in X$ risulta $x \geq L$.

Osservazione – Se L è un maggiorante di X, allora ogni elemento $M \in \mathbb{R}$ tale che $M \geq L$ è ancora un maggiorante di X. Se L è un minorante di X, allora ogni elemento $M \in \mathbb{R}$ tale che

M ≤ L è ancora un minorante di X.

Definizione 1.11 – Si dice che X è **limitato superiormente** se $\exists M \in \mathbb{R}: x \leq M, \forall x \in X$. Si dice che X è **limitato inferiormente**, invece, se $\exists m \in \mathbb{R}: x \geq m, \forall x \in X$.

Il numero M è un maggiorante di X, mentre m è un minorante. L'insieme X è detto **limitato** se lo è sia superiormente che inferiormente.

Definizione 1.12 – Si chiama **massimo** di X il più piccolo dei maggioranti di X che appartiene ad X; si chiama **minimo** di X il più grande dei minoranti di X che appartiene ad X.

Teorema 1.4 – *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato superiormente. L'insieme dei maggioranti di A, $M(A)$, ha minimo.*
Dim.
Consideriamo $M(A)$ ed il suo complementare $\complement_{\mathbb{R}}(M(A))$. È evidente che questi due insiemi formano una sezione di $\mathbb{R}$. Per l'assioma di Dedekind esiste un elemento separatore L. Facciamo vedere che

$L \in M(A)$. Se fosse un elemento del complementare, non sarebbe un maggiorante e quindi esisterebbe un $a \in A$ con $L < a$. Se consideriamo il punto medio tra a ed L, si ha ovviamente $L < \frac{L+a}{2} < a$ con $\frac{L+a}{2} \in \complement_{\mathbb{R}}(M(A))$. Questo contraddice la definizione di elemento separatore.

Analogamente si può vedere che l'insieme dei minoranti ha massimo.

Definizione 1.13 – Si chiama **estremo superiore** di A, scrivendo $\sup(A)$, il minimo dei maggioranti. Si chiama, invece, **estremo inferiore** di A, scrivendo $\inf(A)$, il massimo dei minoranti.

Se l'insieme non è limitato superiormente e/o inferiormente, si scrive $\sup(A) = +\infty$ e/o $\inf(A) = -\infty$.

Teorema 1.5 – *Sia $X \subset \mathbb{R}$. Se esistono il massimo ed il minimo di X sono unici.*
Dim.
Dimostriamo solo l'unicità del massimo in quanto quella del minimo, viene eseguita con la stessa tecnica.
Siano M e M' due elementi di X soddisfacenti la definizione di massimo. Allora:

- $M \in X$ e $\forall x \in X$ si ha $x \leq M$;
- $M' \in X$ e $\forall x \in X$ si ha $x \leq M'$.

Scegliendo $x = M'$ nella prima e $x = M$ nella seconda, otteniamo $M' \leq M$ e $M \leq M'$. Essendo X un insieme totalmente ordinato, si ha che $M = M'$.

Il massimo ed il minimo di un insieme X si denotano con "$max\ X$" e "$min\ X$" rispettivamente.

1.4 La polvere di Cantor

Cantor propose, nel 1883, un sottoinsieme dei numeri reali molto particolare. È stato il primo oggetto frattale della storia anche se, quando fu scoperto, non si sapeva che lo fosse. Infatti i primi studi di geometria frattale ci sono stati negli anni 70 del XX secolo e la nascita ufficiale la si fa coincidere molto spesso con la pubblicazione nel 1982 del libro *The Fractal Geometry of Nature* di **Benoît Mandelbrot.** Consideriamo l'intervallo

$$C_0 = [0,1]$$

dividiamolo in tre parti uguali e togliamo l'aperto centrale $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Ci rimane l'insieme

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Ripetiamo la stessa operazione per i due intervalli di C_1 ottenendo

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Ripetendo il procedimento all'infinito, si definisce insieme di Cantor l'insieme

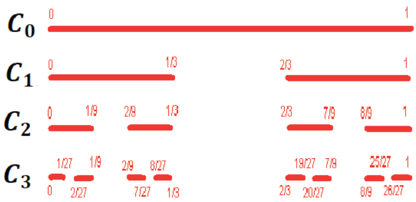
$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \, .$$

L'insieme di Cantor è chiuso ed ha lunghezza nulla poiché la lunghezza dei segmenti cancellati è

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots .. = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 \, .$$

Nonostante ha lunghezza nulla, ha la potenza del continuo. Sembra polvere, addirittura vuoto, ma contiene gli stessi punti che stanno in $[0,1]$ e addirittura in tutto $\mathbb{R}$. Se puliamo una sbarra piena di polvere e togliamo infiniti granelli, bisogna stare attenti. Se per sbaglio togliamo il complementare della polvere di Cantor, rimarranno tanti granelli in grado di coprire l'intera sbarra. Le strane proprietà di questo insieme sono numerose e ne citiamo una in particolare e cioè che la sua dimensione è $\frac{ln2}{ln3}$. La dimensione è compresa tra 0 e 1 e la polvere di Cantor non è fatta da punti ma nemmeno da segmenti

POLVERE
DI CANTOR



Capitolo 2

I numeri complessi

2.1 Premessa

Circa quattro millenni fa, i babilonesi sapevano già risolvere l'equazione di secondo grado, ed il brillante risultato raggiunto nella risoluzione dell'equazione quadratica spinse i matematici alla ricerca di una formula per la risoluzione di equazioni di grado superiore. Il primo matematico che risolse l'equazione di terzo grado fu **Scipione del Ferro** (1456 – 1526), che non pubblicò la sua scoperta forse per avvalersene in pubbliche disfide in voga all'epoca. Solo in punto di morte rivelò la scoperta ad un suo allievo, **Antonio Maria Fior**; questi sentendosi forte di tale conoscenza lanciò una pubblica sfida ad uno studioso bresciano, **Niccolò Fontana** (1499 – 1557), detto **Tartaglia**; Fior propose 30 equazioni che Tartaglia risolse brillantemente mettendo a punto un metodo di risoluzione che però non rivelò. Un altro studioso dell'epoca, **Gerolamo Cardano** (1501 – 1576), si fece rivelare da Tartaglia il metodo con la promessa di mantenerne il segreto, finché nel 1543, esaminando i manoscritti lasciati da Del Ferro, fu trovata la stessa risoluzione. Cardano si sentì sollevato dalla promessa fatta a Tartaglia e nel 1545 pubblicò un libro intitolato "Ars Magna", nel quale riportava la soluzione generale dell'equazione di terzo e quarto grado ammettendo di aver avuto l'idea del terzo grado grazie a Tartaglia e che quella di quarto grado era stata scoperta da **Ludovico Ferrari**, suo collaboratore. Per completezza storica, diciamo che dopo più di 250 anni è stato dimostrato che per equazioni di grado superiore al quarto non è possibile trovare una generica formula risolutiva come accade per i gradi inferiori (**Teorema di Abel-Ruffini**). Cosa c'entrano le equazioni di grado superiore al secondo con i numeri complessi che vogliamo introdurre? Quando nelle equazioni di secondo grado il discriminante è minore di zero, i matematici affermavano che l'equazione non ammette soluzioni e nessuno era riuscito mai a trovare un controesempio. Applicando invece la formula di Cardano ad alcune equazioni, ci si imbatteva in radici quadrate di numeri negativi ma capitava di trovare controesempi dove l'equazione ammetteva soluzioni. Ad esempio considerando l'equazione

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

possiamo verificare che 4 è soluzione ma, applicando la complicata formula di Cardano, ricaviamo $2 + \sqrt{-121}$ e $2 - \sqrt{-121}$. A questo punto, un matematico italiano del sedicesimo secolo, **Raffaele Bombelli**, ebbe una idea che chiamò "idea assurda". Quando abbiamo una radice negativa dobbiamo ragionare così:

$$\sqrt{-121} = \sqrt{121(-1)} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{-1} = 11 \cdot \sqrt{-1} = 11i.$$

2.2 Forma algebrica

I due numeri precedenti saranno scritti nel seguente modo $2 + 11i$ e $2 - 11i$ e si chiamano numeri complessi coniugati. La quantità $\sqrt{-1} = i$ è detta unità immaginaria e possiamo dedurre che

$$i^0 = 1$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Un numero complesso è del tipo $a + ib$ dove a è la parte reale e b è il coefficiente della parte immaginaria. Se la parte reale è nulla abbiamo un numero immaginario, se è nulla la parte immaginaria otteniamo un numero reale. Cioè il numero 2, ad esempio, non è altro che il numero complesso $2 + 0i$. Due numeri complessi sono uguali quando hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria. I numeri complessi non possono essere ordinati in modo compatibile con le operazioni aritmetiche e non ha senso chiedere, ad esempio se i è maggiore o minore di 0, né studiare disequazioni nel campo complesso. Infatti in ogni campo ordinato tutti i quadrati devono essere maggiori o uguali a zero. Nel calcolo, i numeri immaginari si comportano come i monomi anche se, ovviamente, non lo sono in quanto i è un numero e non una variabile. Quindi la somma, la differenza, la moltiplicazione e l'elevamento a potenza non comportano alcun tipo di problema. L'operazione meno immediata è la divisione. Cominciamo con il capire chi è il reciproco di un numero complesso $a+ib$ che indichiamo con $\frac{1}{a+ib}$. Qual è quel numero che moltiplicato per $a+ib$ ci dà 1? Proviamo a moltiplicarlo per $\frac{a-ib}{a^2+b^2}$. Abbiamo

$$\frac{(a+ib)(a-ib)}{a^2+b^2}=\frac{a^2-aib+aib-i^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1.$$

Quindi se abbiamo ad esempio

$$(3-2i):(4+i)=\frac{3-2i}{4+i}=\frac{(3-2i)(4-i)}{(4+i)(4-i)}=\frac{10-11i}{17}$$
$$=\frac{10}{17}-\frac{11}{17}i.$$

In pratica quando abbiamo una frazione con parte immaginaria al denominatore, moltiplichiamo numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore.

Il campo dei numeri complessi lo si indica con $\mathbb{C}$.

2.3 Forma trigonometrica

Per introdurre la forma trigonometrica di un numero complesso, analizziamo in modo più formale i concetti analizzati in modo intuitivo nel precedente paragrafo. Possiamo considerare i numeri complessi come coppie ordinate (a,b) di numeri reali. Il primo numero è la parte reale mentre il secondo è la parte immaginaria. Su queste coppie definiamo direttamente le operazioni di somma e prodotto nel seguente modo

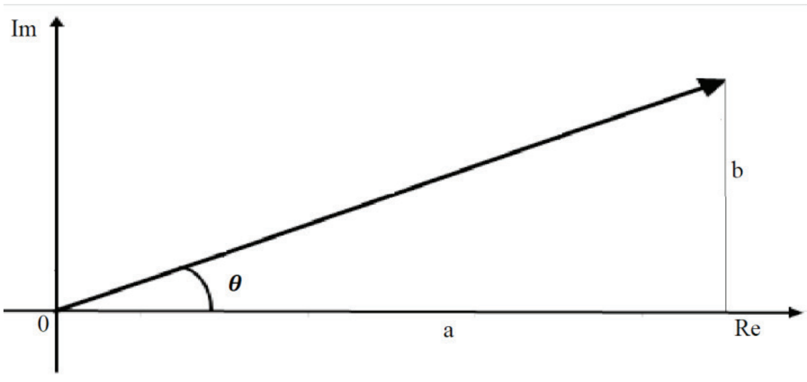
$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

Questa "somma" e questo "prodotto" verificano le proprietà commutativa, associativa e distributiva. L'elemento neutro della somma è la coppia $(0,0)$ mentre la coppia $(1,0)$ è l'elemento neutro della moltiplicazione. Il simmetrico rispetto alla somma della coppia (a, b) è la coppia $(-a, -b)$. Infine, se

$$(a, b) \neq (0,0) \; allora \; (a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = (1,0).$$

Dunque la coppia $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ è il simmetrico di (a, b) rispetto al prodotto. Le proprietà che identificano un campo sono verificate per la somma e per il prodotto e perciò l'insieme $\mathbb{R}^2$ così strutturato è un campo, che chiameremo campo dei numeri complessi e indicheremo con $\mathbb{C}$**.** Poiché un numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali, fissato un sistema di assi cartesiani, è possibile associare ad ogni numero complesso un punto del piano e viceversa. Esiste quindi una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{C} \; ed \; \mathbb{R}^2$ e si è convenuto di indicare l'asse delle ascisse come asse reale e quello delle ordinate come asse immaginario chiamando tale piano, **piano di Gauss**. Quindi se abbiamo un numero complesso $a + ib$ e lo rappresentiamo come un punto nel piano di Gauss, possiamo calcolarci la sua distanza dall'origine, che è detta modulo.



Dal teorema di Pitagora vediamo banalmente che il modulo lo si calcola con la semplice formula

(2.1) $$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Il vettore che unisce l'origine con il punto del piano di coordinate (a, b), forma un certo angolo θ , detto anomalia o argomento, con l'asse reale. Dal teorema dei triangoli rettangoli, possiamo notare che

(2.2) $$\begin{cases} a = \rho cos\theta \\ b = \rho sin\theta. \end{cases}$$

Quando $a \neq 0$ e quindi non abbiamo un numero immaginario, dalla precedente relazione ricaviamo che

(2.3) $$tg\theta = \frac{b}{a}.$$

Quindi il nostro numero complesso in forma algebrica può essere scritto

(2.4) $$a + ib = \rho cos\theta + i\rho sin\theta = \rho(cos\theta + isin\theta)$$

che è la sua rappresentazione trigonometrica.

Facciamo un esempio: scriviamo in forma trigonometrica il numero $1 + i\sqrt{3}$. Il suo modulo è $\rho = \sqrt{1+3} = 2$. Siamo nel primo quadrante e quindi l'angolo è compreso tra 0 e 90 gradi.

$tg\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$. Il nostro numero lo si può scrivere

$$2\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right).$$

Se il numero è immaginario non possiamo applicare la (2.3) ma trovare l'angolo è semplicissimo. Parte immaginaria positiva vuol dire che l'angolo è 90 gradi, negativa 270.

Se abbiamo due numeri complessi in forma trigonometrica

$$z_1 = \rho_1(cos\alpha + isin\alpha)$$

e

$$z_2 = \rho_2(cos\beta + isin\beta)$$

e li moltiplichiamo, si ha

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta + icos\alpha sin\beta + isin\alpha cos\beta).$$

Ricordando le formule di addizione di seno e coseno, otteniamo che

(2.5) $$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2[cos(\alpha + \beta) + isin(\alpha + \beta)].$$

Quindi ad esempio se

$$z_1 = 3\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right)$$

e

$$z_2 = 4\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right),$$

si ha

$$z_1 \cdot z_2 = 12\left[cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right].$$

Ora supponiamo di volerli dividere

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(cos\alpha + isin\alpha)}{\rho_2(cos\beta + isin\beta)}.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore, ricordando le formule di sottrazione e l'identità fondamentale della goniometria, si ottiene

(2.6) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[cos(\alpha - \beta) + isin(\alpha - \beta)].$$

Se vogliamo calcolare la potenza, basta ricordare la definizione di potenza ed applicare la proprietà della moltiplicazione ottenendo

(2.7) $$[\rho(cos\alpha + isin\alpha)]^n = \rho^n(cosn\alpha + isinn\alpha).$$

Ad esempio se

$$z = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right),$$

allora

$$z^6 = 64(cos2\pi + isin2\pi).$$

Occupiamoci infine della radice. Dati

$$z_1 = \rho_1(cos\alpha + isin\alpha)$$

e

$$z_2 = \rho_2(cos\beta + isin\beta)$$

se

$$\sqrt[n]{z_1} = z_2 \Rightarrow z_1 = z_2^n.$$

Quindi

$$\rho_1(cos\alpha + isin\alpha) = \rho_2^n(cosn\beta + isinn\beta).$$

Poiché questi due numeri sono uguali, vuol dire che hanno lo stesso modulo e stessa anomalia

(2.8) $$\begin{cases} \rho_2^n = \rho_1 \\ n\beta = \alpha + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_2 = \sqrt[n]{\rho_1} \\ \beta = \frac{\alpha+2k\pi}{n} \end{cases}.$$

Le radici distinte si ottengono per $k \in [0, n-1]$. Quindi le radici ennesime sono esattamente n. Cosa accade se continuiamo a sostituire valori successivi a k?

Prendiamo un $k \notin [0, n-1]$ e dividiamolo per n. Dal teorema della divisione euclidea

$$k = mn + h$$

con

$$0 \leq h < n.$$

Pertanto dalle precedente relazioni

$$\beta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2mn\pi}{n} + \frac{2h\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2h\pi}{n} + 2m\pi.$$

La parte $\frac{\alpha}{n} + \frac{2h\pi}{n}$ è la (2.8), poiché $h \in [0, n-1]$. Il termine $2m\pi$ è un multiplo di 2π. Poiché seno e coseno sono periodiche di 2π, vuol dire che otteniamo una soluzione equivalente ad una ottenuta dalle formule (2.8). Quindi

(2.9) $$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + isin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

con $k = 0,1,2, \dots . n-1$.

Le relazioni da (2.5) a (2.9) sono note come formule di De Moivre.

Interessante è il caso delle radici ennesime dell'unità. Infatti se le rappresentiamo sul piano di Gauss, otteniamo i vertici di un poligono regolare di n lati sulla circonferenza di raggio 1 e centro l'origine degli assi, con il primo vertice sull'intersezione fra la circonferenza e l'asse delle x.

2.4 Equazioni nel campo complesso

Questo paragrafo lo dedichiamo alla risoluzione di equazioni nella variabile complessa. Cominciamo con equazioni di primo grado:

a) $iz + 1 = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{i} = \frac{-1(-i)}{i(-i)} = i$
b) $(2+i)z - 4 + 3i = 0 \Rightarrow z = \frac{4-3i}{2+i} = \frac{(4-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5-10i}{5} = 1 - 2i$
c) $(1-i)z - 2 = 0 \Rightarrow z = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$

Esempi di equazioni di secondo grado.

a) $z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{-1+\sqrt{1-4}}{2} = (-1 \pm \sqrt{3}i)/2$
ottenendo le due soluzioni $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $iz^2 - 2z + 3i = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{1+\sqrt{4}}{i} = \frac{3}{i} = -3i\,, z_2 = \ \frac{-1}{i} = i.$

Per equazioni particolarmente “strane” si può provare con un metodo di sostituzione che, in alcuni casi, può essere utile anche per quelle di secondo grado. Proviamo ad applicarlo all’ultima equazione: poniamo $z = x + iy$ e quindi l’equazione diventa

$$i(x+iy)^2 - 2(x+iy) + 3i = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ix^2 - iy^2 - 2xy - 2x - 2iy + 3i = 0.$$

Riscrivendo nel seguente modo

$$-2xy - 2x + i(x^2 - y^2 - 2y + 3) = 0,$$

deve risultare

$$\begin{cases} -2xy - 2x = 0 \\ x^2 - y^2 - 2y + 3 = 0. \end{cases}$$

Dalla prima $x(y+1) = 0 \Rightarrow x = 0$ e $y = -1$. Sostituendo $x = 0$ nella seconda, si ha $y^2 + 2y - 3 = 0$ da cui

$$y = -1 \pm \sqrt{4} \Longrightarrow y = -3 \quad e \quad y = 1.$$

Sostituendo invece $y = -1$, si ricava $x^2 + 4 = 0$ che non ha soluzioni poiché x ed y sono numeri reali.

Pertanto $z = -3i \;\; e \;\; z = i$ sono le due soluzioni.

In questo esempio, questa procedura è stata di sicuro più laboriosa ma in alcuni casi non abbiamo alternative. Ricordiamo che quando facciamo questa posizione, se nell’equazione appare un termine $\bar{z}$, esso è il complesso coniugato $x - iy$. Se invece troviamo $|z|^2$ esso è il quadrato del modulo e cioè $x^2 + y^2$. Vale il seguente

Teorema fondamentale dell’algebra – *Una equazione di grado* n *con coefficienti complessi qualsiasi, ammette esattamente* n *radici complesse se ognuna di esse viene contata con la sua molteplicità.*

Osserviamo che, invece, nel campo reale le soluzioni sono al più n.

2.5 Formulazione esponenziale

Poiché le proprietà del prodotto tra numeri complessi in forma trigonometrica ricordano quelle del prodotto tra potenze, da un punto di vista puramente formale possiamo porre per brevità di scrittura

(2.10) $$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$$

e quindi il numero complesso scriverlo

(2.11) $$z = \rho e^{i\theta}.$$

Ricordando che $cos(-\theta) = cos\theta$ mentre $sin(-\theta) = -sin\theta$ otteniamo che

(2.12) $$e^{-i\theta} = cos\theta - isin\theta.$$

Sommando membro a membro la (2.10) e la (2.12) ricaviamo che

(2.13) $$cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}.$$

Sottraendo membro a membro la (2.10) e la (2.12) ricaviamo invece che

(2.14) $$sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Se nella (2.10) poniamo $\theta = \pi$, otteniamo

(2.15) $$e^{i\pi} = -1.$$

La relazione (2.10) è nota come **formula di Eulero** così come le relazioni (2.12)-(2.15) che da essa seguono.

2.6 Applicazioni

Consideriamo la seguente funzione iterativa

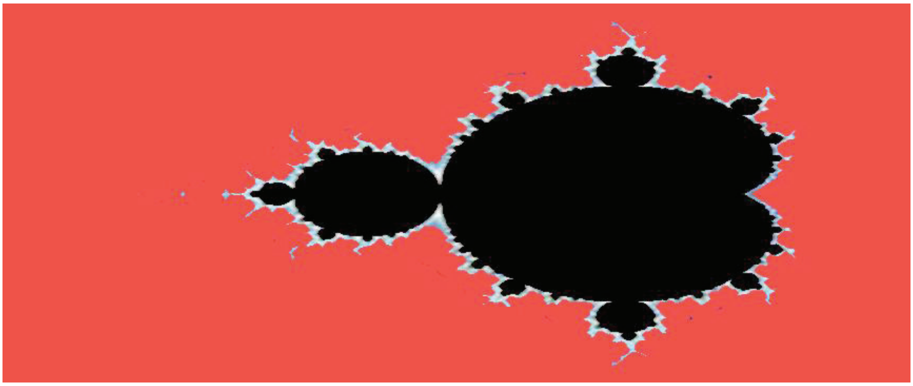
$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

cioè $z_0 = 0; z_1 = c; z_2 = c^2 + c; z_3 = (c^2 + c)^2 + c \dots \dots \dots \dots$

Per la maggior parte di $c = a + ib$ la procedura di iterazione fa tendere i punti all'infinito. Si può anche dimostrare che non appena il modulo di z_n supera 2, cioè esce dal cerchio centrato nell'origine di raggio 2, la successione diverge. Esistono invece dei valori di c per cui questo non accade ed essi costituiscono l'insieme di Mandelbrot. Cioè

$$Mandelbrot = \{c \in \mathbb{C}: 0 \to c \to c^2 + c \to (c^2 + c)^2 + c \dots \text{è } limitata\}.$$

Cosa ha di speciale questo insieme? Una cosa non banale: la sua frontiera è una curva frattale, anzi uno dei frattali più complessi che si conoscano. Il tutto tramite una semplicissima formula ricorsiva di numeri complessi.



Andate al seguente link e vedete lo zoom dell'insieme:

https://www.youtube.com/watch?reload=9&v=NQJyyJdjJAw

"*Forse quello che chiamiamo tempo immaginario è davvero più importante, mentre quello che chiamiamo tempo reale è solo un'idea inventata per descrivere il nostro modo di pensare l'universo.*" *STEPHEN HAWKING*

Stephen Hawking e James Hartle hanno spiegato come il tempo avrebbe potuto avere inizio spontaneamente in corrispondenza del Big Bang basandosi sulla meccanica quantistica. Anche se la loro teoria allo stato attuale è solo una speculazione teorica non suffragata da alcuna evidenza sperimentale, è tuttavia fondata su un solido approccio fisico-matematico che conduce all'importante concetto che il tempo avrebbe potuto essere immaginario in prossimità del Big Bang. Quindi non passavano ad esempio i secondi, i minuti, le ore ecc. ma i secondi, i minuti, le ore moltiplicate per $\sqrt{-1}$. Il tempo immaginario sarebbe diventato reale tramite una operazione matematica che si chiama rotazione di Wick. In conclusione, ipotetici abitanti dell'universo primordiale avrebbero avuto problemi con la nostra grammatica. Infatti avrebbero dovuto imparare a coniugare i verbi nel tempo immaginario.

2.7 Esercizi

2.7. a. Forma algebrica

1) $(2+i)+(5+4i)+(4-3i)=2+i+5+4i+4-3i=$
$=11+2i$

2) $(-2-i)-(-9+4i)-(3+7i)+(4+8i)=$
$=-2-i+9-4i-3-7i+4+8i=$
$=8-4i.$

3) $(2+3i)(2-3i)-(3+i)^2+i(3-2i)-6(i+2)=$
$=4-9i^2-9-i^2-6i+3i-2i^2+-6i-12=$
$=4+9-9+1-6i+3i+2-6i-12=-5-9i.$

4) $\frac{3+i}{2-i}-\frac{i-2}{3-i}+(i-1)(i+2)-i=$
$$=\frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}-\frac{(i-2)(3+i)}{(3-i)(3+i)}+i^2+2i-i-2-i=$$
$$=\frac{6+3i+2i+i^2}{4-i^2}+-\frac{3i+i^2-6-2i}{9-i^2}-1-2=$$

$$= \frac{5+5i}{5} - \frac{-7+i}{10} - 3 = \frac{10+10i+7-i-30}{10} =$$

$$= \frac{-13+9i}{10} = -\frac{13}{10} + \frac{9}{10}i.$$

5) $\left(\frac{2+i}{3-i}\right)^3 + (1-i)^2 = \frac{8+i^3+12i+6i^2}{27-i^3-27i+9i^2} + 1 + i^2 - 2i =$

$$= \frac{2+11i}{18-26i} - 2i = \frac{(2+11i)(18+26i)}{324+676} - 2i =$$

$$= \frac{36+52i+198i-286}{1000} - 2i = \frac{-250+250i}{1000} - 2i =$$

$$= \frac{-1+i}{4} - 2i = \frac{-1+i-8i}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{7}{4}i.$$

6) $(1+i)\left(\frac{2}{3+i} - \frac{1+i}{3-i}\right) + i(i+2) =$

$$= (1+i)\left(\frac{6-2i-3-3i-i-i^2}{(3+i)(3-i)}\right) + i^2 + 2i =$$

$$= (1+i)\left(\frac{4-6i}{10}\right) + -1 + 2i =$$

$$= (1+i)\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{5}i\right) - 1 + 2i =$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{3}{5}i + \frac{2}{5}i + \frac{3}{5} - 1 + 2i = \frac{9}{5}i.$$

7) $\frac{(3+i)\left(5-\frac{1}{3}i\right)}{1+\frac{1}{3}i} = \frac{15-i+5i+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}i} = \frac{\frac{46}{3}+4i}{1+\frac{1}{3}i} = \frac{\left(\frac{46}{3}+4i\right)\left(1-\frac{1}{3}i\right)}{\left(1+\frac{1}{3}i\right)\left(1-\frac{1}{3}i\right)} = \frac{\frac{46}{3}-\frac{46}{9}i+4i+\frac{4}{3}}{1+\frac{1}{9}} =$

$$= \frac{\frac{50}{3}-\frac{10}{9}i}{\frac{10}{9}} = 15 - i.$$

2.7 b. Forma trigonometrica

1) $z = 1 + i$
Il modulo è $\rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Invece $tg\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ poiché siamo nel primo quadrante del piano di Gauss. Quindi

$$z = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right).$$

2) $z = 2 - 2i$
Il modulo è $\rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Invece $tg\theta = -1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$ poiché siamo nel quarto quadrante del piano di Gauss. Quindi
$$z = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{7}{4}\pi + isin\frac{7}{4}\pi\right).$$

3) $z = -1 + i\sqrt{3}$
Il modulo è $\rho = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Invece $tg\theta = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$ poiché siamo nel secondo quadrante del piano di Gauss. Quindi
$$z = 2\left(cos\frac{2}{3}\pi + isin\frac{2}{3}\pi\right).$$

4) $z = -\sqrt{3} - i$
Il modulo è $\rho = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$. Invece $tg\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{6}$ poiché siamo nel terzo quadrante del piano di Gauss. Quindi
$$z = 2\left(cos\frac{7}{6}\pi + isin\frac{7}{6}\pi\right).$$

5) $z = 4$
Il modulo è $\rho = \sqrt{(4)^2 + (0)^2} = \sqrt{16} = 4$. Invece $tg\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ poiché siamo nel primo quadrante del piano di Gauss. Quindi
$$z = 4(cos0 + isin0).$$

6) $z = -3$

Il modulo è $\rho = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2} = \sqrt{9} = 3$. Invece $tg\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi$ poiché siamo nel secondo quadrante del piano di Gauss. Quindi

$$z = 3(cos\pi + isin\pi).$$

7) $z = 2i$

Il modulo è $\rho = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = \sqrt{4} = 2$. Non possiamo applicare la relazione con la tangente ma, essendo un numero immaginario puro positivo, si ha $\theta = \frac{\pi}{2}$. Quindi

$$z = 2\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right).$$

8) $z = -4i$

Il modulo è $\rho = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$. Non possiamo applicare la relazione con la tangente ma, essendo un numero immaginario puro negativo, si ha $\theta = \frac{3}{2}\pi$. Quindi

$$z = 4\left(cos\frac{3}{2}\pi + isin\frac{3}{2}\pi\right).$$

9) Sia $z_1 = 3\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)$ e $z_2 = \frac{1}{3}\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$.

Calcolare il prodotto

$$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot \frac{1}{3}\left[cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\right] =$$
$$= 1 \cdot \left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right).$$

Essendo valori noti, possiamo anche tornare alla forma algebrica ottenendo

$$z_1 \cdot z_2 = i$$

10) Sia $z_1 = 2\left(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3\left(cos\frac{11\pi}{4} + isin\frac{11\pi}{4}\right)$.

Calcolare il prodotto

$$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 2 \left[cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{11\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{11\pi}{4}\right)\right] =$$
$$= 6 \cdot \left(cos\frac{7\pi}{2} + isin\frac{7\pi}{2}\right)$$

Torniamo al primo giro. Si ha $\frac{7}{2}\pi - 2\pi = \frac{3}{2}\pi$.
Essendo valori noti, possiamo anche tornare alla forma algebrica ottenendo

$$z_1 \cdot z_2 = -6i$$

11) Sia $z_1 = 8\left(cos\frac{9}{16}\pi + isin\frac{9}{16}\pi\right)$ e $z_2 = 4\left(cos\frac{5}{16}\pi + isin\frac{5}{16}\pi\right)$. Calcolare il rapporto

$$z_1 : z_2 = \frac{8}{4}\left[cos\left(\frac{9}{16}\pi - \frac{5}{16}\pi\right) + isin\left(\frac{9}{16}\pi - \frac{5}{16}\pi\right)\right] =$$
$$= 2\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$$

Essendo valori noti, possiamo anche tornare alla forma algebrica ottenendo

$$z_1 : z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

12) Sia $z_1 = 5\left(cos\frac{7}{4}\pi + isin\frac{7}{4}\pi\right)$ e $z_2 = \left(cos\frac{1}{2}\pi + isin\frac{1}{2}\pi\right)$. Calcolare il rapporto

$$z_1 : z_2 = \frac{5}{1}\left[cos\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) + isin\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\right)\right] =$$
$$= 5\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right)$$

Essendo valori noti, possiamo anche tornare alla forma algebrica ottenendo

$$z_1 : z_2 = -\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i$$

13) Sia $z = 2\left(cos\frac{2}{3}\pi + isin\frac{2}{3}\pi\right)$. Calcolare z^6.
Applicando la formula di De Moivre

$$z^6 = \left[2\left(cos\frac{2}{3}\pi + isin\frac{2}{3}\pi\right)\right]^6 = 2^6\left(cos\frac{12}{3}\pi + isin\frac{12}{3}\pi\right) =$$
$$= 64(cos4\pi + isin4\pi) = 64$$

14) Calcolare la potenza del seguente numero complesso

$$(1+i)^{12}.$$

Scriviamo il numero in forma trigonometrica. Per il modulo abbiamo

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\,.$$

Inoltre

$$tg\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

poiché siamo nel primo quadrante del piano di Gauss. Pertanto

$$1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right).$$

Applicando la formula di De Moivre, otteniamo per la dodicesima potenza

$$64(cos3\pi + isen3\pi) = -64\,.$$

15) Sia $z = \frac{2}{3}\left(cos\frac{4}{3}\pi + isin\frac{4}{3}\pi\right)$. Calcolare z^3
Applicando la formula di De Moivre

$$z^3 = \left[\frac{2}{3}\left(cos\frac{4}{3}\pi + isin\frac{4}{3}\pi\right)\right]^3 = \frac{8}{27}(cos4\pi + isin4\pi) = \frac{8}{27}\,.$$

16) Calcolare $[2(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6})]^{-3}$
Applicando la formula di De Moivre

$$[2(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6})]^{-3} = 2^{-3}\left(cos\frac{-\pi}{2} + isin\frac{-\pi}{2}\right) = -\frac{1}{8}i\,.$$

17) Calcolare $\left(\frac{1}{i}\right)^4$

Per prima cosa ricaviamo la forma trigonometrica

$$\frac{1}{i} = \frac{-i}{1} = -i$$

Il modulo è $\rho = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = 1$. Non possiamo applicare la relazione con la tangente ma, essendo un numero immaginario puro negativo, si ha $\theta = \frac{3}{2}\pi$. Quindi

$$z = \left(cos\frac{3}{2}\pi + isin\frac{3}{2}\pi\right).$$

Pertanto

$$\left[\left(cos\frac{3}{2}\pi + isin\frac{3}{2}\pi\right)\right]^4 = cos6\pi + isin6\pi = 1.$$

Ovviamente, in questo caso, è stato superfluo trasformare in forma trigonometrica poiché sarebbe bastato fare $(-i)^4 = i^4 = 1$.

18) Calcolare $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$

Per prima cosa ricaviamo la forma trigonometrica

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i.$$

Quindi, senza applicare De Moivre, $i^3 = -i$

19) Esprimere $cos5\theta$ e $sin5\theta$ mediante $cos\theta, sin\theta$ e loro potenze.

Applichiamo la formula di De Moivre e la formula del binomio di Newton. Dalla prima

$$(cos\theta + isin\theta)^5 = cos5\theta + isin5\theta$$

quindi

$$\begin{cases} cos5\theta = Re(cos\theta + isin\theta)^5 \\ sin5\theta = Im(cos\theta + isin\theta)^5 \end{cases}$$

Dalla seconda

$$(cos\theta + isin\theta)^5 =$$
$$= cos^5\theta - 10cos^3\theta sin^2\theta + 5cos\theta sin^4\theta +$$
$$+i(5cos^4\theta sin\theta - 10cos^2\theta sin^3\theta + sin^5\theta).$$

Pertanto

$$\begin{cases} cos5\theta = cos^5\theta - 10cos^3\theta sin^2\theta + 5cos\theta sin^4\theta \\ sin5\theta = 5cos^4\theta sin\theta - 10cos^2\theta sin^3\theta + sin^5\theta\ . \end{cases}$$

20) Calcolare la radice quadrata di $1 - i\sqrt{3}$.

Il modulo è $\rho = \sqrt{1+3} = 2$. Calcoliamo l'argomento osservando che $tg\theta = -\sqrt{3}$. Siamo nel quarto quadrante del piano di Gauss. Quindi $\theta = \frac{5}{3}\pi$. Pertanto

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left[cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + isin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right].$$

$$z_k = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\frac{5}{3}\pi + 2k\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\frac{5}{3}\pi + 2k\pi}{2}\right)\right] \quad k = 0,1$$

$$z_0 = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + isin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right]$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + isin\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right].$$

21) Calcolare $\left(\frac{-2}{1-i\sqrt{3}}\right)^{1/4}$.

Scriviamolo prima in forma algebrica

$$\frac{-2\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Ora in forma trigonometrica

$$\rho=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$$

$$tg\theta=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=\frac{4}{3}\pi$$

Pertanto

$$z_k=\left[cos\left(\frac{\frac{4}{3}\pi+2k\pi}{4}\right)+isin\left(\frac{\frac{4}{3}\pi+2k\pi}{4}\right)\right]\quad k=0,1,2,3$$

$$z_0=\left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_1=\left[cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)+isin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right]$$

$$z_2=\left[cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)+isin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right]$$

$$z_3=\left[cos\left(\frac{11}{6}\pi\right)+isin\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right].$$

22) Calcolare la radice quadrata del seguente numero complesso

$$z=1+i\sqrt{3}\,.$$

Il modulo è

$$\rho=\sqrt{1+3}=2$$

Abbiamo

$$tg\theta=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

poiché siamo nel primo quadrante del piano di Gauss. Applicando la formula di De Moivre

$$z_k = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right)\right] \quad k = 0,1$$

$$z_0 = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right].$$

23) Calcolare la radice quadrata del seguente numero complesso

$$z = 3 + i\sqrt{3}\,.$$

Il modulo è

$$\rho = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$$

Abbiamo

$$tg\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

poiché siamo nel primo quadrante del piano di Gauss. Applicando la formula di De Moivre

$$z_k = \sqrt{2\sqrt{3}}\left[cos\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2}\right)\right] \quad k = 0,1$$

$$z_0 = \sqrt{2\sqrt{3}}\left[cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$z_1 = \sqrt{2\sqrt{3}}\left[cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right]$$

2.7 c. Equazioni

1) Risolvere la seguente equazione

$$z^2 - 4z - i + 4 = 0$$

$$z = 2 + \sqrt{4 - 4 + i} = 2 + \sqrt{i}$$

Calcoliamo la radice quadrata

$$i \Rightarrow \rho = 1 \; e \; \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$z_k = \left[cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right)\right] \quad k = 0,1$$

$$z_0 = \left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_1 = \left[cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + isin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione sono

$$2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

2) Risolvere la seguente equazione

$$z^2 + z \cdot \bar{z} - 2 + i = 0$$

Posto $z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \quad e \quad z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$

Quindi si ha

$$x^2 - y^2 + 2xyi + x^2 + y^2 - 2 + i = 0$$

Pertanto

$$Re(z) = 2x^2 - 2$$

$$Im(z) = 2xy + 1.$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - 2 = 0 \\ 2xy + 1 = 0 \end{cases}$$

Dal primo si ha $x = \pm 1$. Sostituendo 1 nella seconda equazione ricaviamo $y = -1/2$. Sostituendo -1 ricaviamo $y = 1/2$. Le soluzioni saranno

$$1 - \frac{1}{2}i$$

$$-1+\frac{1}{2}i$$

3) Risolvere la seguente equazione

$$|\bar{z}|^2-2z+2z^2=0$$

Posto $z=x+iy \Rightarrow z^2=x^2-y^2+2xyi \quad e \quad |\bar{z}|^2=x^2+y^2$

Quindi

$$x^2+y^2-2x-2yi+2x^2-2y^2+4xyi=0$$

Pertanto

$$Re(z)=3x^2-y^2-2x$$
$$Im(z)=-2y+4xy$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases}3x^2-y^2-2x=0\\ -2y+4xy=0\end{cases}$$

Dalla seconda si ha

$$2y(2x-1)=0 \Rightarrow y=0 \;\; e \;\; x=\frac{1}{2}$$

Quindi

$$\begin{cases}y=0\\ 3x^2-2x=0\end{cases} \cup \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ -y^2-\frac{1}{4}=0\end{cases}$$

Allora

$$\begin{cases}y=0\\ x=0 \; e \; x=2/3\end{cases} \cup \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y^2=-\frac{1}{4} \;\; impossibile\end{cases}$$

In conclusione le soluzioni sono $z=0 \;\; e \;\; z=\frac{2}{3}$.

4) Risolvere la seguente equazione

$$z^2 = \overline{z^2}$$

Poniamo

$$z = x + iy$$

Pertanto

$$z^2 = x^2 + 2xyi + i^2y^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

e

$$\overline{z^2} = x^2 - y^2 - 2xyi$$

Quindi

$$x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 - y^2 - 2xyi$$

ottenendo

$$4xyi = 0 \Rightarrow x = 0 \ \ oppure \ \ y = 0$$

Quindi le soluzioni sono tutti i numeri reali e tutti gli immaginari

5) Risolvere l'equazione

$$z^2 + 2iz - 3 = 0$$

Proviamo ad applicare direttamente la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado. Usiamo la formula ridottissima

$$z = -i + \sqrt{i^2 + 3} = -i + \sqrt{2} \Rightarrow z_1 = \sqrt{2} - i \ \ e \ \ z_2 = -\sqrt{2} - i$$

6) Risolvere l'equazione nel campo complesso

$$|z|^2 + z + 2\bar{z} - 1 + i = 0$$

Poniamo

$$z = x + iy$$

ottenendo

$$x^2 + y^2 + x + iy + 2x - 2iy - 1 + i = 0.$$

Quindi $Re = x^2 + y^2 + 3x - 1$ e $Im = -y + 1$.

Confrontando con il secondo membro

$$\begin{cases} -y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 3x - 1 = 0. \end{cases}$$

Dalla prima ricaviamo subito che $y = 1$ e quindi, sostituendo nella seconda, $x^2 + 3x = 0$. Da quest'ultima si ha $x = 0 \; e \; x = -3$. Quindi le soluzioni sono

$$z_1 = i \quad e \quad z_2 = -3 + i.$$

7) Risolvere l'equazione nel campo complesso

$$z^2 + z\bar{z} = 1 + i$$

Ponendo $z = x + iy$ si ricava

$$x^2 - y^2 + 2xyi + x^2 + y^2 = 1 + i$$

La parte reale al primo membro è $2x^2$, la parte immaginaria è $2xy$. Confrontando con il secondo membro, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x^2 = 1 \\ 2xy = 1. \end{cases}$$

Risolvendo

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad e \quad x = y = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Le soluzioni saranno

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \qquad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\,.$$

8) Risolvere la seguente equazione

$$z^2 + 2i = 0$$

Si ha

$$z^2 = -2i \Rightarrow z = \sqrt{-2i}\,.$$

Scriviamo $-2i$ in forma trigonometrica. Si ha

$$\rho = 2 \quad e \quad \theta = \frac{3}{2}\pi\,.$$

Applicando la formula di De Moivre

$$z_k = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right)\right] \quad k = 0{,}1$$

$$z_0 = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right]$$

9) Risolvere la seguente equazione

$$z^2 - \frac{16}{1 - i\sqrt{3}} = 0$$

Si ha

$$z^2 = \frac{16}{1 - i\sqrt{3}} \Rightarrow z = \sqrt{\frac{16}{1 - i\sqrt{3}}}.$$

Abbiamo

$$\frac{16}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{16\left(1 + i\sqrt{3}\right)}{\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(1 + i\sqrt{3}\right)} = \frac{16 + 16\sqrt{3}i}{4} = 4 + 4\sqrt{3}i.$$

Si ha

$$\rho = \sqrt{16 + 48} = 8$$

e

$$tg\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$

poiché siamo nel primo quadrante. Applicando la formula di De Moivre

$$z_k = 2\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right)\right] \quad k = 0,1$$

$$z_0 = 2\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right].$$

10) Risolvere la seguente equazione

$$(-1 + i)^3 z^3 = 1$$

Si ha

$$z^3 = \frac{1}{(-1 + i)^3} = \left(\frac{1}{-1 + i}\right)^3.$$

Ora

$$\frac{1}{-1+i}=\frac{-1-i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=-\frac{1}{2}(1+i)$$

Quindi

$$\left(\frac{1}{-1+i}\right)^3=-\frac{1}{8}(1+i)^3=-\frac{1}{8}\left[\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4}\right)\right]^3=$$
$$=-\frac{1}{8}\sqrt{8}\left(cos\frac{3\pi}{4}+isin\frac{3\pi}{4}\right)$$

In conclusione

$$z_k=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\right]\quad k=0,1,2$$
$$z_0=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)+isin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right]$$
$$z_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[cos\left(\frac{11}{12}\pi\right)+isin\left(\frac{11}{12}\pi\right)\right]$$
$$z_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[cos\left(\frac{19}{12}\pi\right)+isin\left(\frac{19}{12}\pi\right)\right].$$

11) Risolvere la seguente equazione

$$(2-i)z=3.$$

È una equazione di primo grado e si ha

$$z=\frac{3}{2-i}=\frac{6+3i}{5}=\frac{6}{5}+\frac{3}{5}i\,.$$

12) Risolvere la seguente equazione

$$4z^2-4z+3-2\sqrt{3}i=0$$

Applichiamo la formula ridotta

$$z=\frac{2+\sqrt{-8+8\sqrt{3}i}}{4}=\frac{2+\sqrt{8(-1+\sqrt{3}i)}}{4}=$$

$$=\frac{2+2\sqrt{-2+2\sqrt{3}i}}{4}=\frac{1+\sqrt{-2+2\sqrt{3}i}}{2}.$$

Poiché

$$-2+2\sqrt{3}i=4\left(cos\frac{2}{3}\pi+isin\frac{2}{3}\pi\right)$$

applicando la formula di De Moivre

$$\sqrt{-2+2\sqrt{3}i}=2\left(cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right)\bigvee\quad 2\left(cos\frac{4\pi}{3}+isin\frac{4\pi}{3}\right).$$

che in forma algebrica diventano

$$\sqrt{-2+2\sqrt{3}i}=1+\sqrt{3}i\ \vee-1-\sqrt{3}i.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono

$$1+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ \ e\ \ -\frac{\sqrt{3}}{2}i\,.$$

13) Risolvere la seguente equazione

$$z^3-\frac{1-3i}{2-i}=0$$

Si ha

$$z^3=\frac{1-3i}{2-i}\Rightarrow z=\sqrt[3]{\frac{1-3i}{2-i}}=\sqrt[3]{\frac{(1-3i)(2+i)}{5}}=\sqrt[3]{1-i}$$

$$1-i=\sqrt{2}\left(cos\frac{7}{4}\pi+isin\frac{7}{4}\pi\right)$$

$$z_k=\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\right],k=0,1,2$$

$$z_0=\sqrt[6]{2}\left[cos\left(\frac{7}{12}\pi\right)+isin\left(\frac{7}{12}\pi\right)\right]$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left[cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + isin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right]$$
$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left[cos\left(\frac{23}{12}\pi\right) + isin\left(\frac{23}{12}\pi\right)\right].$$

14) Risolvere la seguente equazione
$$(z-2)^2 = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$$
Si ha che
$$z - 2 = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1-i}{1+i}} = \sqrt{-i}$$
Quindi
$$z = 2 + \sqrt{-i}$$
Applichiamo De Moivre a $\sqrt{-i}$

$$z_k = \left[cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right)\right], k = 0,1$$
$$z_0 = 2 + \left[cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + isin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right] = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$z_1 = 2 + \left[cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + isin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right] = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\,.$$

15) Risolvere la seguente equazione

$$z^4 - \frac{(1+i)^2}{1-i} = 0$$
Si ha

$$z^4 = \frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{(2i)(1+i)}{2} = -1 + i \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1+i}$$

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{3}{4}\pi + isin\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$z_k = \sqrt[8]{2}\left[cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)+isin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)\right], k = 0,1,2,3$$

$$z_0 = \sqrt[8]{2}\left[cos\left(\frac{3}{16}\pi\right)+isin\left(\frac{3}{16}\pi\right)\right]$$

$$z_1 = \sqrt[8]{2}\left[cos\left(\frac{11}{16}\pi\right)+isin\left(\frac{11}{16}\pi\right)\right]$$

$$z_2 = \sqrt[8]{2}\left[cos\left(\frac{19}{16}\pi\right)+isin\left(\frac{19}{16}\pi\right)\right]$$

$$z_3 = \sqrt[8]{2}\left[cos\left(\frac{27}{16}\pi\right)+isin\left(\frac{27}{16}\pi\right)\right].$$

16) Risolvere la seguente equazione

$$z^2|z|^2+\bar{z}+i\bar{z}=0$$

Poiché $z\bar{z}=|z|^2$ possiamo riscrivere l'equazione come

$$z^3\bar{z}+\bar{z}+i\bar{z}=0 \Rightarrow \bar{z}(z^3+1+i)=0.$$

Quindi

$$\bar{z}=0 \Rightarrow z=0$$

$$z^3+1+i=0 \Rightarrow z=\sqrt[3]{-1-i}$$

$$-1-i=\sqrt{2}\left(cos\frac{5}{4}\pi+isin\frac{5}{4}\pi\right)$$

$$z_k = \sqrt[6]{2}\left[cos\left(\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\right], k = 0,1,2,$$

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left[cos\left(\frac{5}{12}\pi\right)+isin\left(\frac{5}{12}\pi\right)\right]$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left[cos\left(\frac{13}{12}\pi\right)+isin\left(\frac{13}{12}\pi\right)\right]$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left[cos\left(\frac{21}{12}\pi\right)+isin\left(\frac{21}{12}\pi\right)\right].$$

17) Risolvere la seguente equazione

$$\frac{1}{8}z^4 + 1 - \sqrt{3}i = 0.$$

Possiamo riscrivere

$$z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i = 16\left(cos\tfrac{2}{3}\pi + isin\tfrac{2}{3}\pi\right)$$

$$z_k = 2\left[cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right)\right], k = 0,1,2,3$$

$$z_0 = 2\left[cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) + isin\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right]$$
$$z_1 = 2\left[cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + isin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right]$$
$$z_2 = 2\left[cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) + isin\left(\frac{7}{6}\pi\right)\right]$$
$$z_3 = 2\left[cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + isin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right].$$

18) Risolvere la seguente equazione

$$z^6 - z^3 + 1 = 0.$$

Ponendo $z^3 = t$, l'equazione diventa

$$t^2 - t + 1 = 0$$

$$t = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\ .$$

Ora dobbiamo calcolare le radici terze di questi due numeri complessi

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}$$

Quindi

$$z_k = \left[cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right)\right], k = 0,1,2,$$

$$z_0 = \left[cos\left(\frac{1}{9}\pi\right) + isin\left(\frac{1}{9}\pi\right)\right]$$

$$z_1 = \left[cos\left(\frac{7}{9}\pi\right) + isin\left(\frac{7}{9}\pi\right)\right]$$

$$z_2 = \left[cos\left(\frac{13}{9}\pi\right) + isin\left(\frac{13}{9}\pi\right)\right].$$

Invece

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = cos\frac{5\pi}{3} + isin\frac{5\pi}{3}.$$

Quindi

$$z_k = \left[cos\left(\frac{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right)\right] k = 0,1,2,$$

$$z_0 = \left[cos\left(\frac{5}{9}\pi\right) + isin\left(\frac{5}{9}\pi\right)\right]$$

$$z_1 = \left[cos\left(\frac{11}{9}\pi\right) + isin\left(\frac{11}{9}\pi\right)\right]$$

$$z_2 = \left[cos\left(\frac{17}{9}\pi\right) + isin\left(\frac{17}{9}\pi\right)\right].$$

19) Risolvere la seguente equazione

$$z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0.$$

Cercando tra i divisori del termine noto, vediamo che 2 annulla il polinomio. Possiamo scrivere

$$(z-2)(z^2+1) = 0$$

ottenendo come soluzioni $2, i, -i$.

20) Risolvere la seguente equazione

$$z^2|z|^2 + \bar{z} = 0.$$

Poiché $z\bar{z} = |z|^2$ possiamo riscrivere l'equazione come
$$z^3\bar{z} + \bar{z} = 0 \Rightarrow \bar{z}(z^3 + 1) = 0.$$
Quindi una soluzione è zero e le altre sono date dalle radici terze di -1 che si calcolano facilmente e sono
$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;\ -1;\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

21) Risolvere la seguente equazione

$$|i + z|^2 - i - 2 - z = 0.$$
Ponendo $z = x + iy$ si ha

$$|x + i(1 + y)|^2 - i - 2 - x - iy = 0.$$
Quindi

$$x^2 + (1 + y)^2 - i - 2 - x - iy = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 - x - 2 + (-1 - y)i = 0$$

$$\begin{cases} -1 - y = 0 \\ x^2 + y^2 + 2y - x - 1 = 0. \end{cases}$$
Dalla prima vediamo subito che $y = -1$ e sostituendo nella seconda

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Le cui soluzioni sono $2\ e - 1$. Le soluzioni dell'equazione sono
$$z_1 = 2 - i$$
$$z_2 = -1 - i.$$

22) Risolvere la seguente equazione

$$z^2 + |z|^2 - 18 = 0.$$
Posto $z = x + iy$ si ha

$$x^2 - y^2 + 2xyi + x^2 + y^2 - 18 = 0.$$

Pertanto

$$\begin{cases} 2x^2 - 18 = 0 \\ 2xy = 0\,. \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$$z = \pm 3.$$

23) Risolvere la seguente equazione

$$|z-1| + |z+1| - 4 = 0.$$

Ponendo $z = x + iy$ si ha

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 4.$$

Scrivendo

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4 - \sqrt{(x+1)^2 + y^2}\,.$$

Elevando due volte al quadrato e svolgendo i calcoli si ottiene

$$3x^2 + 4y^2 - 12 = 0\,.$$

Pertanto i numeri cercati sono tutti i numeri complessi che si trovano sull'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

24) Risolvere la seguente equazione

$$\frac{1+zi}{zi+i} = z$$

Quindi

$$1 + zi = iz^2 + iz.$$

Ovviamente si ha $z \neq -1$ e poniamo $z = x + iy$ ottenendo

$$1 - y + ix = ix^2 - 2xy - iy^2 + ix - y \Rightarrow ix^2 - 2xy - 1 - iy^2 = 0.$$

Quindi

$$\begin{cases} 2xy + 1 = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2x} \\ x^2 - \dfrac{1}{4x^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Le soluzioni sono

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\,.$$

25) Risolvere la seguente equazione

$$Re(z^2) + iIm[z(\overline{1 - 2i})] = -3.$$

Posto $z = x + iy$ si ha

$$x^2 - y^2 + iIm[(x + iy)(1 + 2i)] = -3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - y^2 + i(2x + y) = -3.$$

Pertanto

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x^2 - y^2 + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -3x^2 + 3 = 0\,. \end{cases}$$

Si ha $x = \pm 1 \;\; e \;\; y = \mp 2$. Le soluzioni sono

$$z_1 = 1 - 2i$$
$$z_2 = -1 + 2i.$$

26) Risolvere la seguente equazione

$$10z\bar{z} - 10z - 6 + 5i = 0.$$

Posto $z = x + iy$ si ha

$$10x^2 + 10y^2 - 10x - 10yi - 6 + 5i = 0.$$

Pertanto

$$\begin{cases} 10x^2 + 10y^2 - 10x - 6 = 0 \\ -10y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{5}} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$$z_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{1}{2}i\,.$$

27) Risolvere la seguente equazione

$$|z - 1 + i| = 5.$$

Posto $z = x + iy$ si ha

$$|x + iy - 1 + i| = 5 \Rightarrow |x - 1 + (y + 1)i| = 5\,.$$

Quindi

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 5.$$

Le soluzioni dell'equazione sono i numeri complessi che stanno sulla circonferenza

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$$

di centro $(1, -1)$ e raggio 5.

28) Risolvere la seguente equazione

$$Im(z) - |z + \bar{z}|^2 = 1.$$

Posto $z = x + iy$ si ha

$$y - |2x|^2 = 1 \Rightarrow y = 1 + 4x^2.$$

Le soluzioni dell'equazione sono i numeri complessi che stanno sulla parabola.

29) Risolvere la seguente equazione

$$Im(z) = z + (\bar{z})^2.$$

Posto $z = x + iy$ si ha

$$y = x + iy + (x - iy)^2.$$

Abbiamo il sistema

$$\begin{cases} y = x + x^2 - y^2 \\ y - 2xy = 0\,. \end{cases}$$

Da cui

$$\begin{cases} y = x + x^2 - y^2 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = x + x^2 - y^2 \\ x = \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Dal primo sistema otteniamo $y = 0, x = 0\ e\ x = -1$, dal secondo $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2}\ e\ y = 1/2$. Quindi

$$z = 0, z = -1, z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i, z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

30) Risolvere l'equazione

$$z^2 - 2iz + i - 1 = 0.$$

Applicando la formula risolutiva

$$z = i + \sqrt{-i}\,.$$

Si ha che

$$\sqrt{-i} = cos\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{2}\right), k = 0{,}1$$

$$\sqrt{-i} = cos\frac{3}{4}\pi + isin\frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sqrt{-i} = cos\frac{7}{4}\pi + isin\frac{7}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono

$$z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$$
$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i\,.$$

Capitolo 3

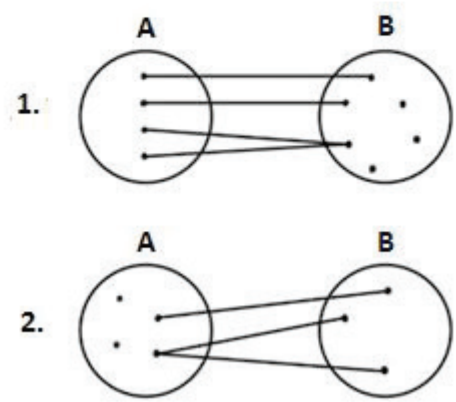
Funzioni

3.1 Introduzione

In questo capitolo diamo alcune definizioni e proprietà delle funzioni reali di variabile reale. Introduciamo anche le funzioni elementari con le loro proprietà e relativi grafici.

Definizione 3.1 – *Una funzione $f: A \to B$ è una legge che ad ogni $x \in A$ fa corrispondere uno ed un solo elemento $y = f(x) \in B$.*

Graficamente possiamo osservare che l'esempio 1. rappresenta una funzione e il 2. no:



Gli insiemi A e B si chiamano rispettivamente **dominio** e **codominio** della funzione. Indichiamo con $D(f)$ il dominio e con il $Cod(f)$ il codominio.

Noi ci occuperemo delle funzioni reali di una variabile reale e cioè funzioni dove il dominio ed il codominio coincidono con $\mathbb{R}$ o sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. La funzione $y = x^2$, che associa ad ogni numero reale il suo quadrato è un esempio di tale funzione. Un altro esempio è dato dalla cosiddetta funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 \; se \; x \text{ è } razionale \\ 0 \; se \; x \text{ è } irrazionale \end{cases}.$$

La x è detta variabile indipendente, la y variabile dipendente, in quanto il suo valore dipende da quello attribuito alla x. Se abbiamo, ad esempio, la funzione

$$y = \frac{1}{2}x + 1,$$

si può facilmente vedere che quando la variabile indipendente vale 4, la variabile dipendente vale 3 e, per indicare ciò, scriveremo

$$f(4) = 3.$$

Possiamo osservare che il codominio è convenzionale, nel senso che non si richiede che ogni elemento di B provenga da qualche elemento di A ma che tutti gli elementi di A vadano a finire in B. Per tale motivo, se consideriamo un insieme C che contiene B, una funzione $f: A \to B$ può essere anche vista come una funzione $f: A \to C$. Ad esempio, i valori assunti dalla funzione di Dirichlet sono 0 e 1, ma in genere la si vede come funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Al contrario, è possibile limitare il codominio ai valori che provengono dal dominio. In tal caso, si definisce immagine di A tramite f il seguente insieme

$$Im(f) = f(A) = \{y \in B: \exists x \in A \; tale \; che \; y = f(x)\}.$$

Se $f: A \to B$ e $C \subset B$, si chiama controimmagine o immagine inversa dell'insieme C, l'insieme

$$f^{-1}(C) = \{x \in A: f(x) \in C\}.$$

Delle funzioni che incontreremo sarà fondamentale riuscire a calcolarne il dominio, detto anche campo di esistenza. Infatti, il dominio è l'insieme dei numeri reali per i quali le operazioni hanno senso.

Definizione 3.2 – *Siano $f: X \to Y$ e $g: W \to Z$ due funzioni tali che $f(X) \subseteq W$. Si chiama funzione composta di f e g la funzione $g \circ f: X \to Z$ che ad ogni elemento $x \in X$ associa quell'unico elemento $z \in Z$ tale che $z = g(w)$ essendo $w = f(x)$.*

Osserviamo che se g è componibile con f, non è detto che f sia componibile con g. Anche quando ciò avviene, risulterà in generale $g \circ f \neq f \circ g$. Ad esempio siano

$$f(x) = \frac{1}{x-3x^2} \quad \text{e} \quad g(x) = e^{-x+2}.$$

Si ha

$$(g \circ f)(x) = e^{-\frac{1}{x-3x^2}+2};$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{e^{-x+2}-3e^{-2x+4}}.$$

Definizione 3.3 – *Una funzione $f: A \to B$ è detta iniettiva se per ogni $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$, risulta $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

In modo del tutto equivalente, è possibile affermare che una funzione $f: A \to B$ è iniettiva se comunque si scelgono due elementi di A aventi la stessa immagine, i due elementi scelti coincidono. In simboli:

$$\forall x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Definizione 3.4 – *Una funzione $f: A \to B$ è detta suriettiva, se per ogni $y \in B$, $\exists x \in A: y = f(x)$.*

In modo del tutto equivalente, è possibile affermare che una funzione $f: A \to B$ è suriettiva se $Im(f) = B$.

Definizione 3.5 – *Una funzione $f: A \to B$ è detta biunivoca (o biettiva) se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva. Cioè, se $\forall y \in B, \exists!\, x \in A: y = f(x)$.*

Quando la funzione è iniettiva, è possibile definire la funzione che associa ad ogni $y \in f(A)$ quell'unico $x \in A$ per cui $y = f(x)$. Tale funzione è detta funzione inversa e la si indica con f^{-1}. Si definisce invertibile una funzione iniettiva e suriettiva e cioè biunivoca. Se si richiede solo la iniettività, è implicito che si considera la funzione biunivoca da A in $f(A)$. Un esempio di funzioni invertibili sono le funzioni strettamente crescenti o decrescenti che sono dette strettamente monotòne.

***Definizione 3.6** – Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ si dirà:*

***crescente** se*

$$\forall x_1, x_2 \in A, con\ x_1 < x_2, \text{ si ha } f(x_1) \leq f(x_2);$$

***strettamente crescente** se*

$$\forall x_1, x_2 \in A, con\ x_1 < x_2\ si\ ha\ f(x_1) < f(x_2).$$

*Analogamente, è **decrescente** se*

$$\forall x_1, x_2 \in A, con\ x_1 < x_2, \text{ si ha } f(x_1) \geq f(x_2);$$

***strettamente decrescente** se*

$$\forall x_1, x_2 \in A, con\ x_1 < x_2\ si\ ha\ f(x_1) > f(x_2).$$

Teorema di invertibilità delle funzioni strettamente monotone - *Una funzione strettamente monotona è invertibile e la sua inversa è strettamente monotona.*
Dim.
Se la funzione $f : A \to B$ è strettamente monotona, allora $\forall x_1, x_2 \in A$ possiamo dire che, a seconda se la funzione sia strettamente crescente o decrescente, se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$ oppure $f(x_1) > f(x_2)$. In entrambi i casi avremo che *per ogni* $x_1, x_2 \in A$ *con* $x_1 \neq x_2$, *risulta* $f(x_1) \neq f(x_2)$. La funzione, quindi, è iniettiva e pertanto invertibile. Sia f strettamente crescente e proviamo che f^{-1} è strettamente crescente, cioè che risulta

$$y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2).$$

Per assurdo, se fosse $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, allora si avrebbe $x_1 \geq x_2$ e, per la crescenza di f, risulterebbe $f(x_1) \geq f(x_2)$, cioè $y_1 \geq y_2$, che contraddice l'ipotesi.

Osserviamo che la stretta monotonia implica l'invertibilità, ma non è vera l'implicazione inversa. Una funzione invertibile non è detto che debba essere strettamente monotona.

Definizione 3.7 *– Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ è detta **pari** se $f(-x) = f(x)$ mentre è detta **dispari** se $f(-x) = -f(x)$.*

Definizione 3.8 *– Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ è **periodica** di periodo T se $f(x) = f(x+T)$.*

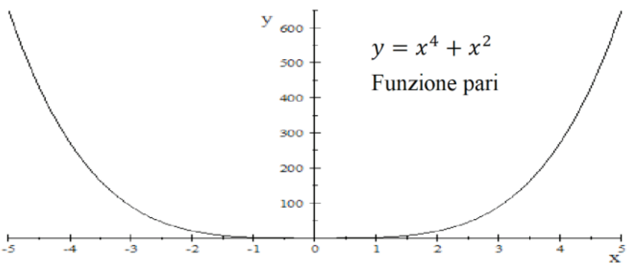
Definizione 3.9 *– Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ è **limitata** superiormente (limitata inferiormente) se $f(A)$ è limitato superiormente (limitato inferiormente).*

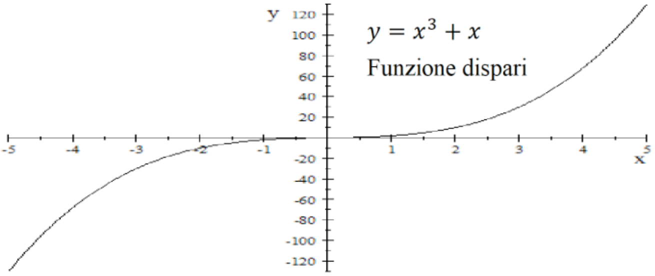
In tal caso, chiamiamo estremo superiore (estremo inferiore) della funzione l'estremo superiore (estremo inferiore) dell'immagine e cioè $sup f(A)$ $\big(inf f(A)\big)$.

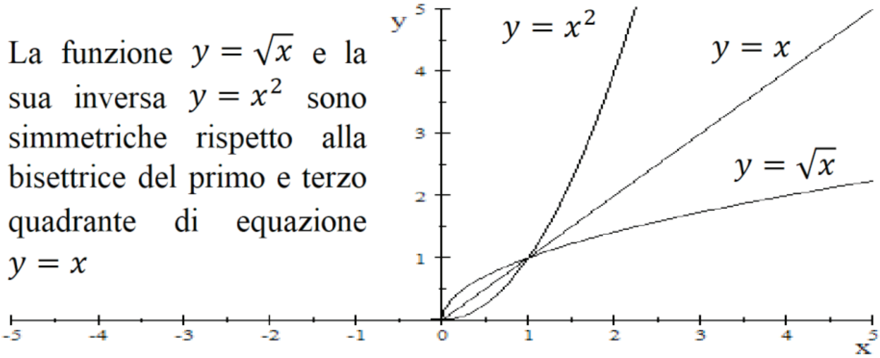
Il nostro scopo sarà quello di tracciare il grafico delle funzioni reali. Il grafico è l'insieme

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D(f), y = f(x)\}.$$

Osserviamo che le rette parallele all'asse delle ordinate devono incontrare il grafico della funzione in un solo punto. Pertanto la circonferenza, ad esempio, è una curva ma non una funzione. Le due semicirconferenze, invece, separatamente, rappresentano il grafico di una funzione. Osserviamo anche che le funzioni pari hanno il grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate ed invece quelle dispari rispetto all'origine. Invece i grafici di una funzione e della sua inversa sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Dal punto di vista grafico una funzione è iniettiva se e solo se ogni retta parallela all'asse delle ascisse tocca il grafico della funzione al massimo in un punto. Pertanto le funzioni pari e le funzioni periodiche non sono iniettive e non sono invertibili.







Prendiamo in considerazione le cosiddette funzioni elementari nel campo reale.

- **Funzione lineare**

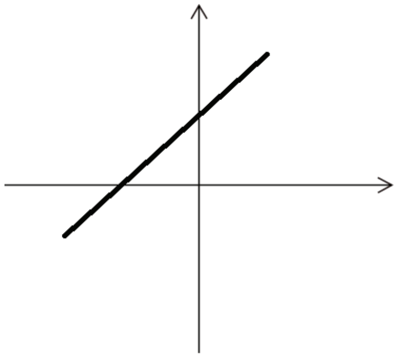
Si chiama funzione lineare o affine $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione del tipo:

$$y = mx + q,$$

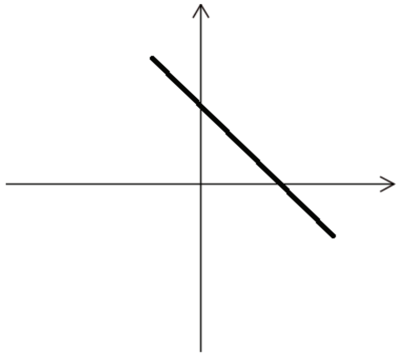
dove m e q sono numeri reali fissati. Il parametro m è detto coefficiente angolare.

Si verifica facilmente che il grafico di tale funzione è una retta.

Ogni funzione lineare è monotona, anzi strettamente monotona se $m \neq 0$. Infatti, se $x_1 < x_2$ e $f(x) = mx + q$, si ha $f(x_1) < f(x_2)$ se $m > 0$, e in questo caso $f(x)$ risulta strettamente crescente su $\mathbb{R}$. Se invece $m < 0$, si ha $f(x_1) > f(x_2)$ e la funzione lineare risulta strettamente decrescente. Se $m = 0$, allora $f(x) = q = costante$ e il grafico di $f(x)$ in questo caso è una retta parallela all'asse x.



$f(x) = mx + q \ (m > 0)$



$f(x) = mx + q \ (m < 0)$

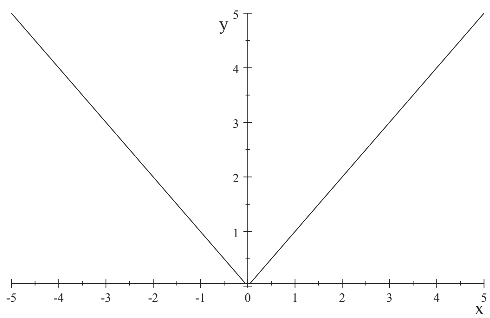
In entrambi i casi la funzione non è limitata né superiormente né inferiormente. Osserviamo che, essendo la funzione lineare strettamente monotona, se m ≠ 0 è anche invertibile.

- **Funzione valore assoluto**

La funzione valore assoluto $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, indicata con il simbolo |x|, è definita nel seguente modo

$$|x| = \begin{cases} x \ se \ x \geq 0 \\ -x \ se \ x < 0 \end{cases}.$$

La funzione valore assoluto è una funzione pari, è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty, 0]$, è strettamente crescente in $[0, +\infty)$, presenta un punto di minimo ma non è limitata superiormente. Il grafico di questa funzione è il seguente



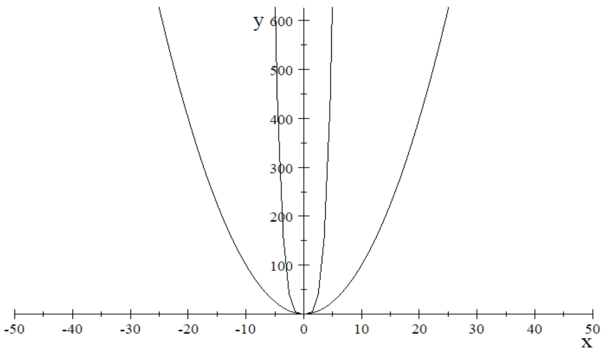
- **Funzione potenza n-esima e radice n-esima**

La funzione definita in $\mathbb{R}$

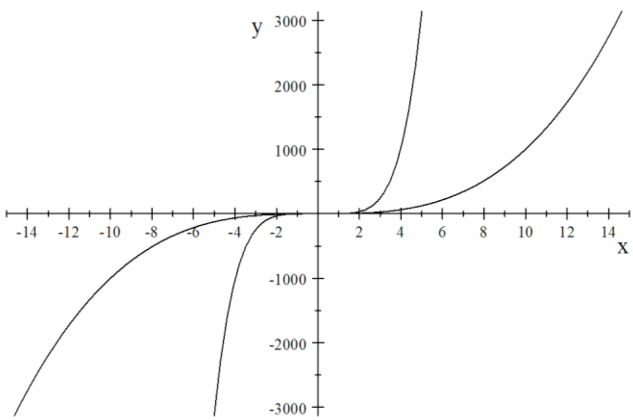
$$y = x^n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

è detta funzione potenza. Essa è pari se l'esponente è pari mentre è dispari se l'esponente è dispari. Inoltre è iniettiva se n è dispari.

Riportiamo il grafico nel caso di esponente uguale a 2 e 4 e notiamo che al crescere dell'esponente, il grafico si schiaccia sempre di più.



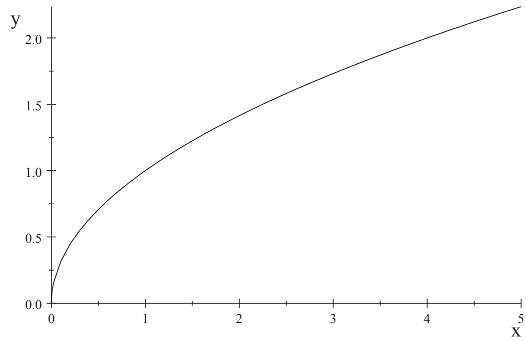
Invece, in basso è riportato il grafico per esponenti uguali a 3 e 5.

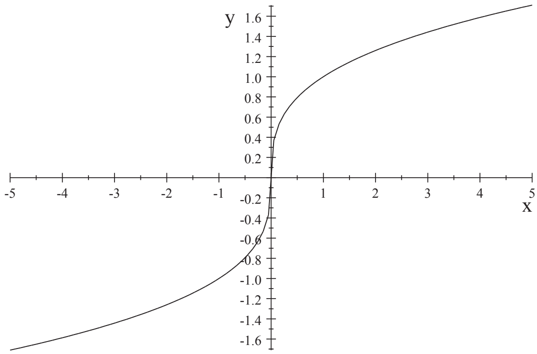


Osserviamo che se l'esponente è dispari la funzione potenza è monotona crescente, mentre se l'esponente è pari, decresce prima di zero e cresce dopo zero. Se l'esponente è dispari, pertanto, la funzione potenza è invertibile, se l'esponente è pari, restringendo, ad esempio, l'intervallo a $[0, +\infty)$, la possiamo invertire. La funzione inversa si chiama radice n-esima e si indica con:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Riportiamo i grafici per $n = 2$ e $n = 3$.





- **Funzione potenza ad esponente reale**

La funzione potenza ad esponente reale $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ gode delle seguenti proprietà

i) Se $a > 0$: $a^b > 0$;

ii) $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$;

iii) $(a^b)^c = a^{bc}$;

iv) a < b a >0 → $a^c < b^c$;

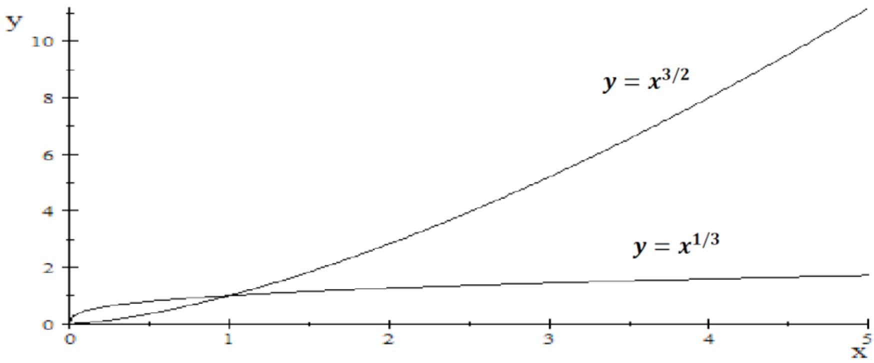
v) a < b c < 0 → $a^c > b^c$;

vi) a > 1 b < c → $a^b < a^c$;

vii) a < 1 b < c → $a^b > a^c$.

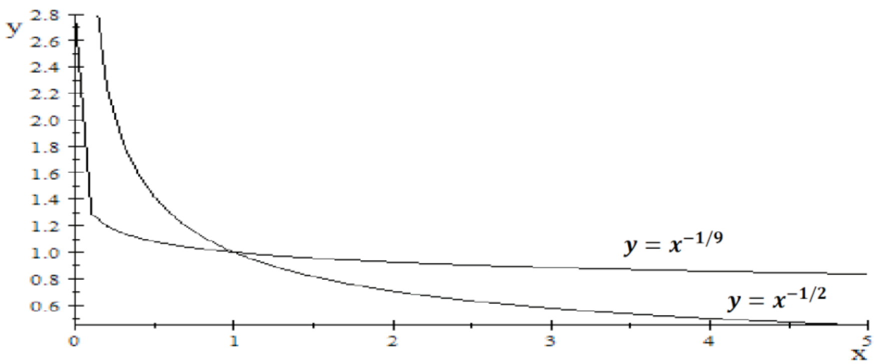
Dalle proprietà iii) e iv), deduciamo che la funzione è strettamente crescente se l'esponente è positivo e strettamente decrescente se l'esponente è negativo.

Ecco esempi di grafici nei vari casi:



$y = x^b$ *con b > 1* $y = x^b$ *con 0 < b < 1*

sup $x^a = +\infty$ *inf* $x^b = f(0) = 0$



$y = x^b$ con b < 0

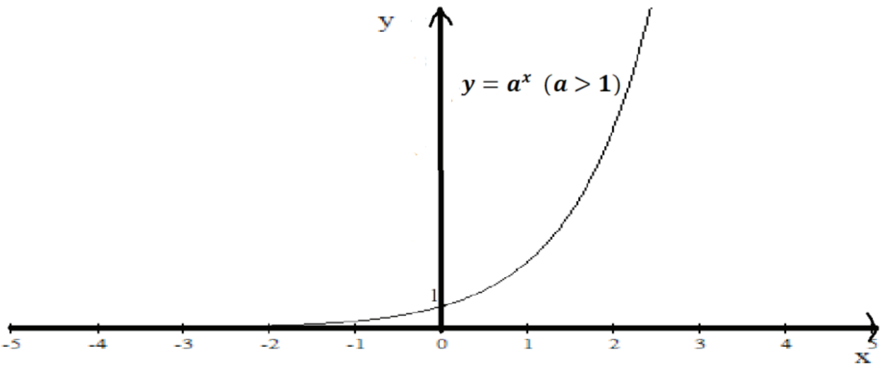
$$sup\ x^b = +\infty\ , \qquad inf\ x^b = 0.$$

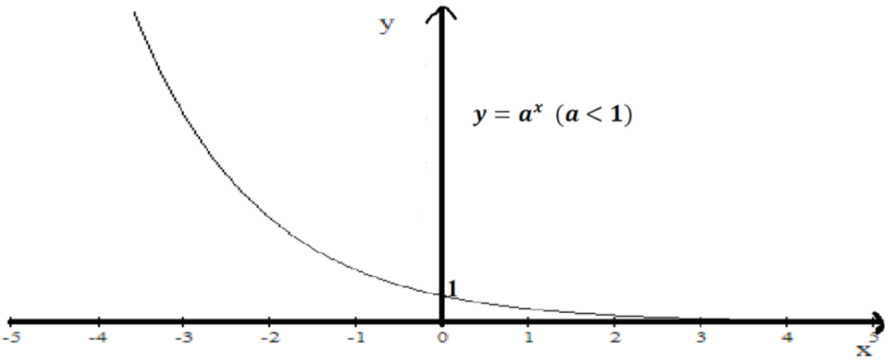
- **Funzione esponenziale**

La funzione esponenziale $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$è definita come

$$f(x) = a^x$$

con $a > 0\ e\ a \neq 1$. Se $a > 1$ la funzione è strettamente crescente mentre per $0 < a < 1$ è strettamente decrescente.





Si vede dai grafici che $inf(a^x) = 0$ e $sup(a^x) = +\infty$.

Se $a = 1$, la funzione non è altro che la retta $y = 1$ e per tale motivo si esclude questo caso banale dicendo, come fatto all'inizio,

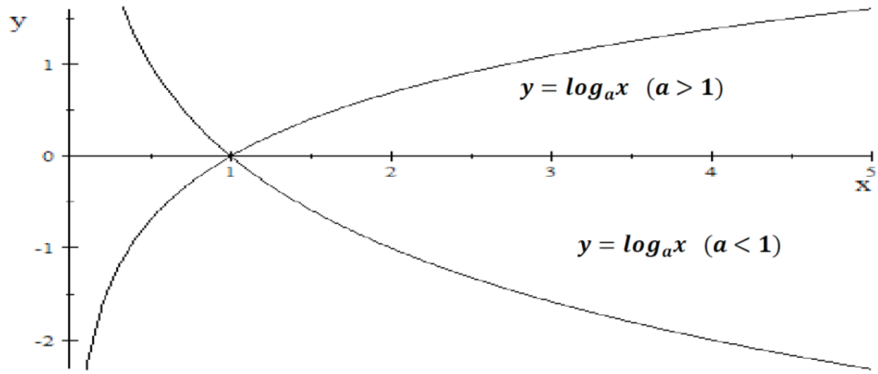
$a > 0$ e $a \neq 1$. La funzione esponenziale è invertibile e la sua inversa è la funzione logaritmo che di seguito definiamo.

- **Funzione logaritmo**

La funzione logaritmo $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ è definita dalla seguente legge

$$y = log_a x$$

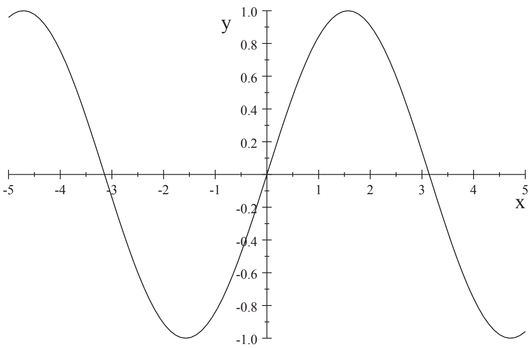
e non è altro che l'esponente da dare alla base a per ottenere l'argomento x. Se la base è il numero di Nepero, si suole ometterla nella scrittura scrivendo lnx. Se la base è 10 si scrive generalmente $logx$. Se la base è maggiore di 1, il logaritmo è una funzione strettamente crescente, se invece è compresa tra 0 e 1 è strettamente decrescente.



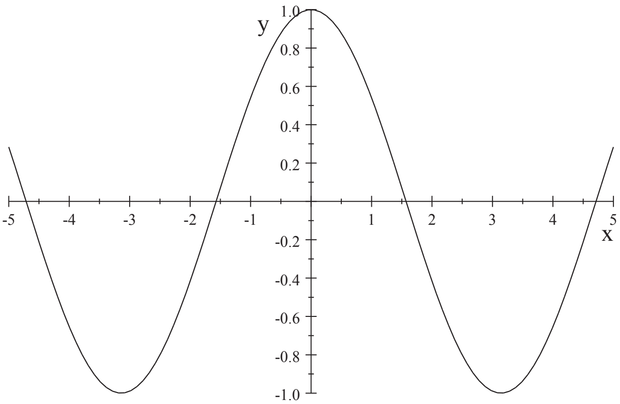
- **Funzioni goniometriche**

Riportiamo anche i grafici delle funzioni goniometriche.

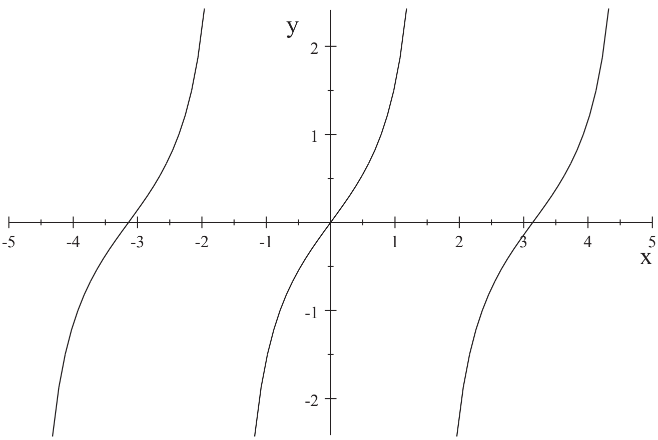
Cominciamo con la funzione $sinx: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$. Essa ha il seguente grafico



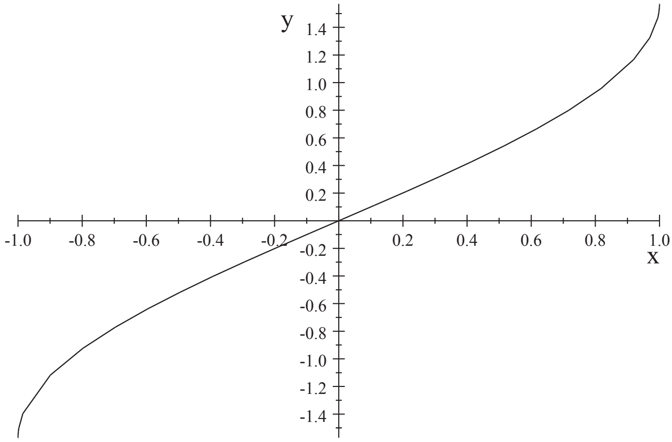
Invece, la funzione $cosx\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$, ha il seguente grafico



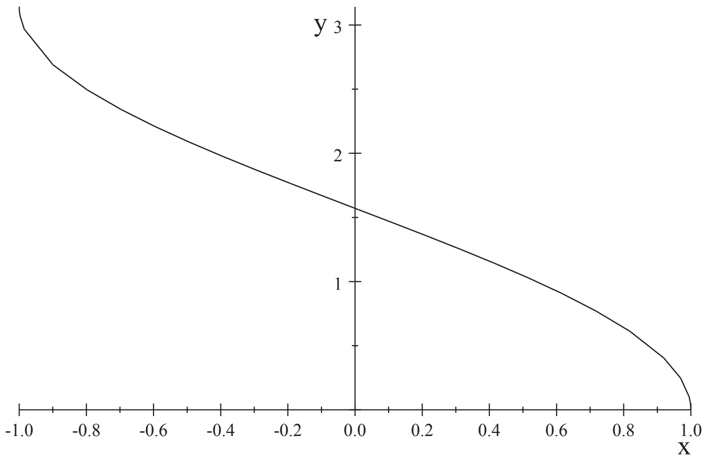
La funzione tg$x\colon \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ ha il seguente grafico



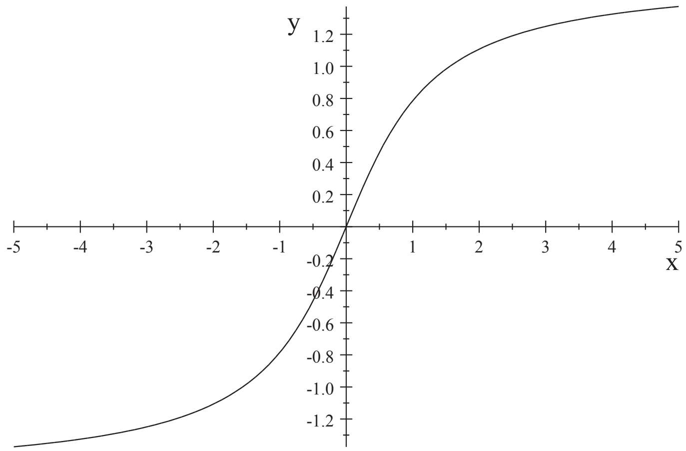
Le funzioni goniometriche, essendo periodiche, non sono invertibili. É possibile, però, restringerle in intervalli dove sono iniettive. Ad esempio, restringendo il seno a $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, è possibile definire la sua inversa, la funzione $arcsin$: $[-1,1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, che ha il seguente grafico



Allo stesso modo, restringendo il coseno all'intervallo $[0,\pi]$, otteniamo la funzione inversa $arccos$: $[-1,1] \rightarrow [0,\pi]$, che ha il seguente grafico



È possibile, ancora, restringere il dominio della tangente a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ottenendo la funzione inversa $arctg \colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, che ha il seguente grafico



3.2 Le successioni

Le funzioni il cui dominio è costituito dai numeri naturali

$$\boldsymbol{f} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

sono dette successioni. Pertanto diamo la seguente definizione

Definizione 3.10 – *Una successione è una legge che ad ogni numero naturale n fa corrispondere uno ed un solo numero reale a_n.*

In genere la si indica con uno dei seguenti simboli

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;\; ; \;\; a_n \; ; \;\; a_1, a_2, \dots . a_n \dots .$$

Ad esempio, la successione $a_n = n^2 - n$ è costituita dagli infiniti numeri

$$a_1 = 0; \; a_2 = 2; a_3 = 6; a_4 = 12; a_5 = 20; \dots \dots$$

Parleremo di successione anche se non sono definiti i termini a_n per i primi indici n.

Esempi di successioni sono:

$$a_n = \frac{1}{n}; \; a_n = \frac{n-1}{n}; \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n}; \quad a_n = (-1)^n; \quad a_n = n^2.$$

Definizione 3.11 **-** *Una successione si dice limitata se esiste un numero reale* $M > 0$ *tale che*

$$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

In particolare, una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata superiormente se esiste un numero M tale che per ogni n risulta $a_n < M$, cioè si ha

$$sup\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} < +\infty.$$

Invece è limitata inferiormente se

$$inf\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} > -\infty.$$

Esempio:

$$a_n = \sin(n) \quad \text{è } limitata;$$

$$a_n = n^2 \quad \text{è } limitata\ inferiormente;$$

$$a_n = -n + 1 \quad \text{è } limitata\ superiormente.$$

Definizione 3.12 – *Una successione è detta monotona se verifica una delle seguenti condizioni*

$$a_n \;\; strettamente\ crescente \;\; \Leftrightarrow a_n < a_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_n \;\; crescente \;\; \Leftrightarrow a_n \leq a_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_n \;\; strettamente\ decrescente \;\; \Leftrightarrow a_n > a_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_n \;\; decrescente \;\; \Leftrightarrow a_n \geq a_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $a_n = a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$, con a numero reale fissato, si dice che a_n è una successione costante. In questo caso la successione è sia crescente che decrescente.

Definizione 3.13 – *Si dice che b_n è una successione estratta da a_n se esiste una successione strettamente crescente di numeri naturali k_n tale che $b_n = a_{k_n}$.*

In pratica la successione estratta prende solo alcuni termini della successione originaria. Diamo alcuni esempi:

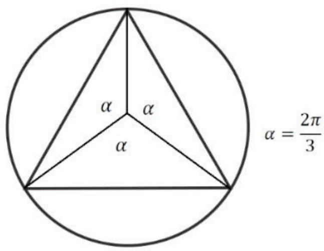
- $b_n = \sqrt{2n}$ è estratta dalla successione $a_n = \sqrt{n}$ con $k_n = 2n$;
- $b_n = \frac{5n-1}{5n+2}$ è estratta da $a_n = \frac{n-1}{n+2}$ con $k_n = 5n$;
- $b_n = n$ è estratta da $a_n = \sqrt{n}$ con $k_n = n^2$;
- $b_n = \frac{1}{n!}$ è estratta da $a_n = \frac{1}{n}$ con $k_n = n!$.

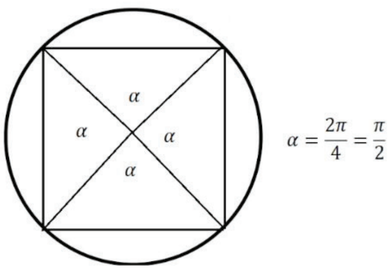
Capitolo 4

I limiti

4.1 Limiti di successioni

In questo capitolo daremo la nozione di "limite" di successione e ne studieremo le proprietà. Per introdurre questo concetto utilizziamo un esempio.
Ricaviamo un metodo per il calcolo dell'area di un cerchio di raggio unitario attraverso l'approssimazione del cerchio stesso con poligoni inscritti che differiscono di poco da esso e di cui sia possibile calcolare l'aria. Per ogni $n \geq 3$ indichiamo con P_n un poligono regolare di n lati inscritto nel cerchio di raggio 1. Per ogni poligono regolare P_n ci sono n angoli al centro congruenti fra loro, ognuno dei quali è l'ennesima parte dell'angolo giro, quindi, di misura pari a $\frac{2\pi}{n}$ radianti. Ogni angolo al centro di quelli appena considerati, formato unendo il centro del cerchio con gli estremi di un lato, individua un triangolo isoscele che possiamo dividere in due triangoli rettangoli.





Denotando con β l'angolo corrispondente alla metà dell'angolo al centro,

risulta $\beta = \frac{\pi}{n}$.

Considerato il triangolo rettangolo in figura, avendo il cerchio raggio unitario, i due cateti misurano proprio $sin\beta$ e $cos\beta$. L'area di tale triangolo sarà quindi

$$A = \frac{sin\beta \cdot cos\beta}{2}.$$

Ad ogni lato del poligono regolare corrispondono due di questi triangoli rettangoli e, pertanto, l'area dell'intero poligono vale

$$a_n = 2n \cdot \left(\frac{sin\beta \cdot cos\beta}{2}\right) = n \cdot sin\beta \cdot cos\beta.$$

Per la formula di duplicazione $sin2\beta = 2sin\beta cos\beta$, sostituendo a β il valore ricavato in precedenza, otteniamo

$$a_n = \frac{n \cdot sin2\beta}{2} = \frac{n}{2} \cdot sin\frac{2\pi}{n}.$$

Nella seguente tabella sono indicati alcuni valori di a_n che al crescere di n tendono sempre più al valore di π=3,14159265……,

n	3	4	6	8	20	50	100	200
a_n	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	2	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$2\sqrt{2}$	3.09	3.133	3.139	3.1410

L'esempio utilizzato ci consente di introdurre il concetto di limite di una successione come il valore $a \in \mathbb{R}$ a cui man mano tendono gli elementi della successione al crescere di n, cioè per $n \to +\infty$. Possiamo pertanto dare le seguenti definizioni.

Definizione 4.1 – *Un numero reale L è il limite della successione* a_n *e si scrive*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\nu \in \mathbb{R}\ tale\ che\ |a_n - L| < \varepsilon\ \forall n > \nu.$$

Definizione 4.2 – *Si ha che*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \iff \quad \forall M > 0\ \exists\nu \in \mathbb{R}\ tale\ che\ \ a_n > M\ \forall n > \nu,$$
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M > 0\ \exists\nu \in \mathbb{R}\ tale\ che\ \ a_n < -M\ \ \forall n > \nu.$$

Definizione 4.3 –
Una successione si dice ***convergente*** *se* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$.
Una successione si dice ***divergente*** *se* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$.
Le successioni convergenti e divergenti si dicono ***regolari,*** *quelle che non ammettono limite di dicono* ***non regolari.*** *Una successione che converge a zero si dice* ***infinitesima*** *mentre una divergente si dice* ***infinita.***

4.2 Teoremi sui limiti

In questo paragrafo diamo una serie di risultati relativi ai limiti di successione, il primo dei quali non può che essere la dimostrazione dell'unicità del limite.

Teorema dell'unicità del limite – *Se una successione è convergente con*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L_1$$

tale limite è unico.
Dim.
Supponiamo per assurdo che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L_1$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L_2$ con $L_1 \neq L_2$. Prendiamo un $\varepsilon > 0$ tale che

$$\varepsilon < \frac{|L_1 - L_2|}{2}.$$

Dalla definizione di limite $\exists\upsilon_1\ tale\ che\ \forall n > \nu_1$ si ha che

$$|a_n - L_1| < \varepsilon.$$

Analogamente $\exists v_2$ $tale\ che$ $\forall n > \nu_2$ si ha che

$$|a_n - L_2| < \varepsilon.$$

Se noi prendiamo un $n > max\{\nu_1, \nu_2\}$, le due precedenti relazioni valgono contemporaneamente e, sommandole membro a membro, si ha

$$|a_n - L_1| + |a_n - L_2| < 2\varepsilon.$$

Dalla definizione di valore assoluto possiamo scrivere in modo equivalente

$$|L_1 - a_n| + |a_n - L_2| < 2\varepsilon.$$

Per la disuguaglianza triangolare si ha

$$|L_1 - a_n + a_n - L_2| \leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| < 2\varepsilon.$$

Quindi

$$|L_1 - L_2| < 2\varepsilon,$$

cioè

$$\varepsilon > \frac{|L_1 - L_2|}{2}.$$

Questo contraddice l'ipotesi di partenza su ε e, poiché la contraddizione è sorta dal fatto di aver considerato due limiti distinti, si ha che

$$L_1 = L_2.$$

Teorema 4.1 – *Una successione convergente è limitata.*
Dim.
Supponiamo $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$, allora per la definizione di limite, scelto $\varepsilon = 1$, $\exists \nu \in \mathbb{R}$ $tale\ che$ $|a_n - L| < 1 \;\; \forall n > \nu$. Risulta

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < 1 + |L|, \qquad \forall n > \nu.$$

Quanto sopra scritto non sarà valido per un numero finito di termini, cioè $a_1, a_2, \dots, a_\nu$. Chiamiamo m il più grande tra questi termini e sia

$$M = max\{m, 1 + |L|\}.$$

Allora

$$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e cioè la successione è limitata.

Il viceversa non è sempre vero. Ad esempio $a_n = (-1)^n$ è limitata ma non è convergente.

Teorema 4.2 – *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ *e* $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$, *con* $a, b \in \mathbb{R}$, *allora*

1) $\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = a + b$;
2) $\lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = a - b$;
3) $\lim_{n\to+\infty} (a_n b_n) = ab$;
4) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b} \quad se\ b \neq 0$;
5) $\lim_{n\to+\infty} \lambda a_n = \lambda a$.

È pur vero che in assenza di convergenza delle singole successioni, è talvolta possibile ricavare il valore del limite della loro somma. Ad esempio,

$$\lim_{n\to+\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}] = 0$$

nonostante le singole successioni non siano regolari.

Nel caso in cui una o entrambe le successioni siano divergenti, si prova che valgono le seguenti operazioni con $a \in \mathbb{R}$:

$$a + \infty = +\infty;$$

$$a - \infty = -\infty;$$

$$+\infty + \infty = +\infty;$$

$$-\infty - \infty = -\infty;$$

$$a \cdot \infty = \pm\infty \quad (\,normale\ regola\ dei\ segni\,);$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0;$$

$$\frac{\infty}{a} = \pm\infty \quad (normale\ regola\ dei\ segni).$$

Le forme seguenti sono dette **forme indeterminate.**

$$+\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \qquad 1^{\infty}, \qquad \infty^{0}, \qquad 0^{0}.$$

Elenchiamo alcuni limiti immediati che saranno utili successivamente:

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty\ \ se\ \ a > 1 \\ 1\ \ se\ \ a = 1 \\ 0\ \ se\ \ |a| < 1 \\ non\ esiste\ se\ a \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^b = \begin{cases} +\infty\ \ se\ \ b > 0 \\ 1\ \ se\ \ b = 0 \\ 0\ \ se\ \ b < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{\alpha}} = 1 \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = e^b.$$

Teorema della permanenza del segno – *Se* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L > 0$ *allora esiste* $v \epsilon \mathbb{R}$ *tale che* $\forall n > v$ *risulta* $a_n > 0$.

Dim.

Dalla definizione di limite per $\varepsilon = L$, $\exists \nu \in \mathbb{R}\ tale\ che\ \forall n > \nu$ si ha

$$L - L < a_n < L + L.$$

Cioè

$$0 < a_n < 2L,$$

da cui otteniamo il risultato.

Corollario 4.1 – *Se* $a_n \geq 0$ *per* $n > \nu,\ \nu \in \mathbb{R}$, *allora il limite della successione, se esiste, sarà non negativo.*

Dim.

Se per assurdo il limite della successione fosse negativo, allora, per il teorema della permanenza del segno, esisterebbe un ν_1 $tale\ che$ $\forall n > \nu_1\ a_n < 0$. Questo è assurdo poiché se prendiamo $n > max\{\nu_1, \nu\}$ valgono contemporaneamente $a_n \geq 0\ e\ a_n < 0$ il che è impossibile. Pertanto il limite della successione è positivo.

Corollario 4.2 - *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ $con\ a_n \geq b_n$ *per* $n > \nu,\ \nu \in \mathbb{R}, allora\ a \geq b.$

Dim.

Si applica il corollario precedente alla successione $a_n - b_n$.

Teorema del confronto (dei carabinieri) – *Siano* a_n, b_n, c_n *tre successioni verificanti la relazione* $a_n \leq c_n \leq b_n\quad \forall n \in \mathbb{N}$ *con* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = L$. *Allora anche* $\lim_{n\to+\infty} c_n = L$.

Dim.

Scelto un $\varepsilon > 0$, $\exists \nu_1 \in \mathbb{R}\ tale\ che\ \forall n > \nu_1\ \ si\ ha\ |a_n - L| < \varepsilon$.

Analogamente $\exists \nu_2 \in \mathbb{R}\ tale\ che\ \forall n > \nu_2\ \ si\ ha\ |b_n - L| < \varepsilon$.

Quindi

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \quad per\ \ n > \nu_1,$$
$$L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon \quad per\ \ n > \nu_2.$$

Se $n > \nu = max\{\nu_1, \nu_2\}$, valgono entrambe e possiamo scrivere

$$L - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \varepsilon$$

ossia

$$\forall\, n > \nu \qquad L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} c_n = L.$$

Teorema 4.3 – *Sia* a_n *una successione crescente. Allora esiste il limite della successione e si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = sup a_n.$$

Dim.

Sia $L = sup a_n$ e consideriamo $L < +\infty$. Ovviamente si ha per $\varepsilon > 0$

$$a_n \leq L < L + \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Siccome $L - \varepsilon$ non è un maggiorante, esisterà n_0 tale che

$$a_{n_0} > L - \varepsilon.$$

La successione è crescente e, per tale motivo, se $n > n_0$ si ha

$$a_n > a_{n_0} > L - \varepsilon.$$

Quindi

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = L.$$

Ora consideriamo $sup a_n = +\infty$. La successione non è limitata superiormente e scelto un $M \in \mathbb{R}$, $\exists\, n_0\ tale\ che\ a_{n_0} > M$. La successione è crescente e quindi $\forall n > n_0$ avremo $a_n > a_{n_0} > M$.

Questo vuol dire che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Analogamente si può vedere che se la successione è monotona decrescente, essa tende all'estremo inferiore.

Ricordiamo anche che

Teorema 4.4 – *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$, *allora ogni sua successione estratta ha lo stesso limite.*

Quando i limiti di successioni estratte sono diversi vuol dire che la successione non ha limite. Ad esempio $a_n = (-1)^n$ non ha limite ed infatti $a_{2n} \to 1$ mentre $a_{2n+1} \to -1$. Il Teorema precedente è utile per calcolare dei limiti all'apparenza difficili come il seguente

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n!n^2]{7}$$

Questo limite vale 1 poichè la successione è estratta da $\sqrt[n]{7}$ di cui conosciamo il risultato.
Abbiamo dimostrato che ogni successione a_n convergente è limitata. Abbiamo visto che il viceversa non sussiste. Tuttavia vale il seguente teorema di cui non proponiamo dimostrazione.

Teorema di Bolzano - Weierstrass – *Da ogni successione limitata si può estrarre una successione convergente.*

Enunciamo anche il seguente

Criterio del rapporto per successioni – *Sia a_n una successione a termini positivi e consideriamo la successione dei rapporti $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Sia*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

se

- $0 \leq l < 1 \quad \Rightarrow \ a_n \to 0$;
- $l > 1 \quad \Rightarrow \ a_n$ è $divergente$;
- $l = 1 \quad non\ possiamo\ dire\ nulla\ su\ a_n$.

Esempi.
Sia

$$a_n = \frac{n^b}{a^n}\ con\ a > 1\ e\ b > 0.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^b}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^b} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^b}{a^n \cdot a} \cdot \frac{a^n}{n^b} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^b}{n^b} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} < 1,$$

pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \ \ (a > 1, b > 0).$$

Ora consideriamo

$$a_n = \frac{a^n}{n!}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n a}{(n+1)n!}\cdot\frac{n!}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1.$$

Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Ora sia

$$a_n = \frac{n!}{n^n}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n!}{(n+1)^n(n+1)}\cdot\frac{n^n}{n!} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1,$$

pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Infine si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{logn}{n^b} = 0 \quad (b > 0).$$

I risultati appena ottenuti ci permettono di ottenere una scala di infiniti che riportiamo di seguito in ordine crescente

$$logn;\ n^b;\ a^n; n!;\ n^n.$$

Un matematico scozzese del diciottesimo secolo, **James Stirling**, dimostrò una interessante proprietà e cioè che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1.$$

Pertanto, nei limiti di successioni con il fattoriale, possiamo dire che $n!$ è asintotico al valore $\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}$. Quindi, in simboli

$$n! \cong \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}.$$

Esempio:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{3n-5}n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{3n-5}\sqrt{2\pi n}}{e^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{8}{e}\right)^n\frac{1}{32}\sqrt{2\pi n} = +\infty.$$

Esistono interessanti proprietà di collegamento tra le successioni e la topologia della retta. Ad esempio si può dimostrare che

- se $A \subset \mathbb{R}$, un numero reale x_0 appartiene alla chiusura di A se e solo se esiste una successione a valori in A che tende a x_0;
- Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è chiuso se e solo se comunque si prenda una successione a valori in A e convergente, il limite è ancora un elemento di A.

Definizione 4.4 – Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice **compatto** se da ogni successione a valori in A si può estrarre una successione convergente ad un punto di A.

Nell'insieme dei reali sono compatti tutti e soli gli insiemi chiusi e limitati. Segnaliamo una importante definizione:

Definizione 4.5 – Si dice che una successione è una **successione di Cauchy** se

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\nu \in \mathbb{R}\ tale\ che\ \ \forall n,m > \ \nu \text{ si abbia } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Per le successioni reali, **una successione è convergente se e solo se è una successione di Cauchy**. Questo non vale per tutti gli spazi metrici. Ogni successione convergente è di Cauchy ma non è sempre vero il contrario. Se tutte le successioni di Cauchy convergono, lo spazio metrico è detto completo.

E' possibile anche definire per ricorrenza le successioni, come la ben nota successione di Fibonacci definita di seguito

$$F_0 = 0;$$
$$F_1 = 1;$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ \forall n > 1.$$

Dalla definizione otteniamo la successione :

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89……

In tal caso si ha anche si ha anche che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$$

è uguale alla sezione aurea.

4.3 Limiti di funzioni reali

Ora consideriamo il concetto di limite per funzioni definite in sottoinsiemi dei numeri reali.

Definizione 4.6 – Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione e x_0 un punto di accumulazione per A. Diremo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \ tale\ che \ \ \forall x \in A, con\ 0 < |x - x_0| < \delta,$ risulti

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

oppure (con l'utilizzo di intorni)

se $\forall J \epsilon \Im(L) \ \ \exists I \in \Im(x_0)\ tale\ che \ \ f(x) \in J \ \ \ \forall x \in I \cap (A \backslash \{x_0\})$.

Avendo esposto la definizione di limite anche attraverso l'utilizzo degli intorni, ci limitiamo per brevità all'utilizzo della prima notazione in ciascuna nelle definizioni successive.

Definizione 4.7 – Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione e x_0 un punto di accumulazione per A. Diremo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty,$$

se $\forall M > 0\ \exists\delta(M) > 0\ \ tale\ che\ \ \forall x \in A, con\ 0 < |x - x_0| < \delta,$ risulti

$$f(x) > M.$$

Definizione 4.8 – Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione e x_0 un punto di accumulazione per A. Diremo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty,$$

se $\forall M > 0\ \exists\delta(M) > 0\ \ tale\ che\ \ \forall x \in A, con\ 0 < |x - x_0| < \delta,$ risulti

$$f(x) < -M.$$

Definizione 4.9 – Sia $f: A \to \mathbb{R}$ con A non limitato superiormente. Diremo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L,$$

se $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ \ tale\ che\ \forall x \in A, con\ x > \delta,$ risulti

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definizione 4.10 – Sia $f: A \to \mathbb{R}$ con A non limitato superiormente. Diremo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad (\ oppure -\infty\ ),$$

se $\forall M > 0\ \exists\delta(M) > 0\ \ tale\ che\ \ \forall x \in A, con\ x > \delta,$ risulti

$$f(x) > M \quad (\ ovvero\ f(x) < -M\ ).$$

Definizione 4.11 – Sia $f: A \to \mathbb{R}$ con A non limitato inferiormente. Diremo che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L,$$

se $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ \ tale\ che\ \ \forall x \in A, con\ x < \delta,$ risulti

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definizione 4.12 – Sia $f: A \to \mathbb{R}$ con A non limitato inferiormente. Diremo che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad (\, oppure - \infty\,),$$

se $\forall M > 0\ \exists \delta(M) > 0\ \ tale\ che\ \ \forall x \in A, con\ x < \delta,$ risulti

$$f(x) > M \quad (\, ovvero\ f(x) < -M\,).$$

Si possono definire anche i limiti destri e sinistri in un punto e si indicano rispettivamente

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)\,,\ \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

In questo caso ci avviciniamo solo da destra o da sinistra al punto di accumulazione e, per tale motivo, la disuguaglianza, ad esempio, $|f(x) - L| < \varepsilon$ deve essere verificata per ogni x appartenente all'intorno destro o sinistro.

Riportiamo di seguito un importante teorema che consente di estendere alle funzioni tutto quanto già esposto per le successioni.

Teorema ponte – *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione per A. Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione. Si ha*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

se e solo se per ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a valori in $A - \{x_0\}$ e convergente a x_0, risulta

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L.$$

Dim.

Supponiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ e che $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia una successione a valori in $A - \{x_0\}$ e convergente a x_0. Dalla definizione di limite risulta che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \ tale\ che\ \ \forall x \in A, con\ 0 < |x - x_0| < \delta, si\ ha$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

La successione converge a x_0 ed in corrispondenza di δ esiste un numero reale ν tale che se $n > \nu$ si ha

$$|x_n - x_0| < \delta.$$

Pertanto si ha

$$|f(x_n) - L| < \varepsilon.$$

Questo vuol dire proprio che

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L.$$

Ora supponiamo che $f(x_n) \to L$ per ogni successione $\{x_n\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$ a valori in $A - \{x_0\}$ e convergente a x_0. Se fosse $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq l$, dovrebbe esistere un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ sarebbe possibile trovare un $x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| \geq \varepsilon$.

Prendendo $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ si troverebbero dei punti $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ *di* A per i quali si ha $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ e $|f(x) - L| \geq \varepsilon$.

Questa successione converge a x_0 ma non si ha $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$ contraddicendo l'ipotesi.

Questo teorema può essere usato per provare che una funzione non è dotata di limite per $x \to x_0$. Basta in questo caso trovare due successioni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entrambe convergenti a x_0 tali che*:*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L_1 \qquad \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = L_2 \qquad con\ L_1 \neq L_2.$$

Ad esempio proviamo che non esiste il limite per *x* → *0* di $cos\frac{1}{x}$. Consideriamo le successioni

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \; e \; y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$$

entrambe convergenti a 0. Evidentemente risulta

$$f(x_n) = cos2n\pi = 1 \; e \; f(y_n) = cos(2n+1)\,\pi = -1.$$

Pertanto per il teorema ponte possiamo dedurre che

$$\lim_{x\to 0} cos\frac{1}{x}$$

non esiste.

Il ***teorema ponte*** ci fa comprendere l'importanza dei limiti di successione. Sfruttando questo teorema possiamo estendere alle funzioni le proprietà dei limiti riguardo la somma, la differenza, il prodotto e la divisione. Sono altrettanto validi il teorema della permanenza del segno, di unicità del limite e quello del confronto anche se noi mostreremo una nuova dimostrazione di essi.

Teorema dell'unicità del limite – *Se il limite di una funzione in un punto esiste, esso è unico.*

Dim.

Sia f una funzione definita in A. Supponiamo per assurdo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$. Sia $l_1 < l_2$ e scegliamo $0 < \varepsilon < \frac{l_2-l_1}{2}$. Dalla definizione di limite, con questa scelta di ε, abbiamo che

$$\exists\delta_1 > 0 \text{ tale che } |f(x) - l_1| < \varepsilon \quad \forall x \in A \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta_1,$$

$$\exists\delta_2 > 0 \text{ tale che } |f(x) - l_2| < \varepsilon \quad \forall x \in A \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta_2.$$

Scelto $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, allora $\forall x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ valgono entrambe le disuguaglianze precedenti e quindi possiamo scrivere

$$\begin{cases} l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon \\ l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon \end{cases}$$

da cui

$$l_2 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon.$$

Quindi

$$l_2 - \varepsilon < l_1 + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad l_2 - l_1 < 2\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon > \frac{l_2 - l_1}{2}$$

contro l'ipotesi. Poiché l'assurdo è nato dall'aver supposto l'esistenza di più limiti, il limite è unico.

Teorema della permanenza del segno – *Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq 0$*, allora la funzione è localmente concorde con il limite.*

Dim.

Sia f una funzione definita in A. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, allora

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \;\; tale\ che \;\; \forall x \in A, con\ 0 < |x - x_0| < \delta, \text{risulta}$$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon.$$

Scegliamo $\varepsilon = |l|$ ottenendo

$$l - |l| < f(x) < l + |l|.$$

Dalla relazione appena scritta notiamo che se $l > 0$

$$0 < f(x) < 2l$$

e quindi la funzione è positiva. Se invece $l < 0$,

$$2l < f(x) < 0$$

e quindi la funzione è negativa.

Teorema del confronto (dei carabinieri) – *Se* $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in I(x_0, r)$*e* $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$*, allora anche*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Dim.
Dalla definizione di limite si ha che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |h(x) - l| < \varepsilon \ \ \forall x \in I(x_0, r_1)$$

e

$$|g(x) - l| < \varepsilon \ \ \forall x \in I(x_0, r_2).$$

Nell'insieme $I(x_0, r_1) \cap I(x_0, r_2)$, le due relazioni valgono contemporaneamente e possiamo scrivere

$$l - \varepsilon < h(x) \le f(x) \le g(x) < l + \varepsilon.$$

Quindi si ha che

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon.$$

Pertanto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

4.4 Limiti notevoli

Al fine di agevolare il calcolo dei limiti di funzioni più articolate, introduciamo alcuni limiti di forme indeterminate che vanno sotto il nome di limiti notevoli.

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1.$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Osserviamo per prima cosa che, essendo $sin\ x$ e x funzioni dispari, $\frac{sinx}{x}$ è funzione pari. Infatti

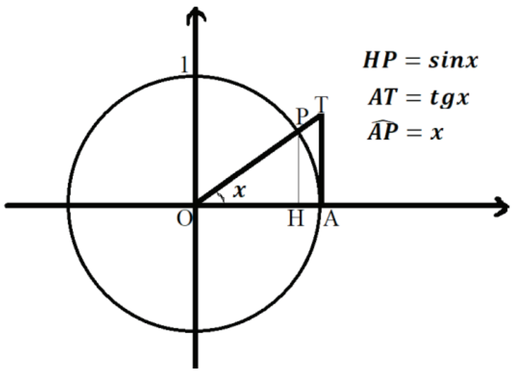
$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-sinx}{-x} = \frac{sinx}{x}.$$

Pertanto la funzione è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate e si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{sinx}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{sinx}{x}.$$

Quindi nella dimostrazione è sufficiente calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$. A tale scopo, osservando la figura si vede che

$$\overline{PH} < \widehat{AP} < \overline{TA}$$



Ne segue

$$sinx < x < tgx.$$

Dividendo per $sinx$, che è positivo perché $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ si ha

$$1 < \frac{x}{sinx} < \frac{1}{cosx}$$

e infine, passando ai reciproci

$$cosx < \frac{sinx}{x} < 1.$$

Essendo $\lim_{x\to 0} cosx = 1$, la funzione sarà compresa tra due funzioni che tendono ad 1 e quindi, per il teorema del confronto, anch'essa tende a 1.

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x} = 0.$

Si ha

$$\frac{1-cosx}{x} = \frac{(1-cosx)(1+cosx)}{x(1+cosx)} = \frac{1-cos^2x}{x(1+cosx)} = \frac{sin^2x}{x(1+cosx)}.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} \cdot sinx \cdot \frac{1}{1+cosx} = 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$

Applicando lo stesso procedimento precedente, otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} \cdot \frac{sinx}{x} \cdot \frac{1}{1+cosx} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Dalle proprietà del logaritmo possiamo scrivere

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(1+x) = ln(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Se poniamo $y = \frac{1}{x}$, si ha che $x \to 0 \Rightarrow y \to \pm\infty$. Ricordando che

$$\lim_{x\to \mp\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0} ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \lim_{y\to\pm\infty} ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=lne=1.$$

Nel caso in cui la base del logaritmo non è neperiana, si ha che

$$\lim_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x}=log_a e.$$

- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

Poniamo $y=e^x-1 \Rightarrow e^x=1+y \Rightarrow x=\ln(1+y)$. Inoltre, se $x\to 0$ anche $y\to 0$. Pertanto si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{1}=1.$$

Nel caso in cui la base della potenza non è il numero di Nepero, si ha che

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=lna.$$

- $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k$

Scriviamo $(1+x)^k=e^{ln(1+x)^k}=e^{kln(1+x)}$. Pertanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{kln(1+x)}-1}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{kln(1+x)}-1}{x}\frac{kln(1+x)}{kln(1+x)}.$$

Sfruttando i limiti notevoli precedenti si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{kln(1+x)}-1}{kln(1+x)}\frac{ln(1+x)}{x}\cdot k=1\cdot 1\cdot k.$$

Osservazione: osserviamo che i limiti notevoli esposti possono essere generalizzati a tutti i casi in cui in luogo della x compare una funzione $f(x)$ che tende a zero.

4.5 Infinitesimi ed infiniti

Di seguito riportiamo le definizioni di infinitesimo e di infinito e le rispettive proprietà.

Definizione 4.13 – Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $f(x)$ si dice infinitesima in x_0.

Siano $f(x) e\ g(x)$ infinitesime in x_0. Se

- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, allora $f(x)\ e\ g(x)$ sono dette infinitesime dello stesso ordine in x_0. Cioè esse tendono a zero con la stessa rapidità;
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, allora i due infinitesimi si dicono equivalenti e si scrive $f(x) \sim g(x)$;
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, allora $f(x)$ è infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$. Cioè tende a zero più rapidamente di $g(x)$. Si scrive $f(x) = o(g(x))$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, allora $f(x)$ è infinitesimo di ordine inferiore a $g(x)$. Cioè tende a zero più lentamente di $g(x)$. Quindi è $g(x) = o(f(x))$;
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste, i due infinitesimi non sono confrontabili.

Definizione 4.14 – Dati due infinitesimi $f(x)\ e\ g(x)\ per\ x \to x_0$, si dice che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine α *(>0)* rispetto a $g(x)$, quando $f(x)$ è dello stesso ordine di $[g(x)]^\alpha$e cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l \neq 0.$$

In questo caso si dice che $g(x)$ è stato preso come infinitesimo campione. In generale, se $x \to x_0$, si prende come infinitesimo campione $g(x) = x - x_0$. Se invece $x \to \pm\infty$, si prende come infinitesimo campione $g(x) = \frac{1}{x}$.

Esempio:

$f(x) = \frac{x-2}{x^5+3}$, per $x \to +\infty$, è di ordine 4 poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x-2}{x^5+3}}{\frac{1}{x^4}} = 1 \neq 0.$$

Principio di sostituzione degli infinitesimi – *Se esiste il limite del rapporto di due infinitesimi, esso resta invariato se si sostituisce ciascun infinitesimo con un infinitesimo equivalente.*

Dim.

Se $f \sim f_1$ *e* $g \sim g_1$, abbiamo

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_1}{f} \cdot \frac{g}{g_1} \cdot \frac{f}{g}.$$

Quindi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1}{g_1} = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}.$$

Nel calcolo dei limiti è spesso utile avere presente l'equivalenza tra i seguenti infinitesimi

$$sinf(x) \sim f(x) \quad se\ f(x) \to 0.$$

$$tgf(x) \sim f(x) \quad se\ f(x) \to 0.$$

$$arctgf(x) \sim f(x) \quad se\ f(x) \to 0.$$

$$arcsinf(x) \sim f(x) \quad se\ f(x) \to 0.$$

$$e^{f(x)} - 1 \sim f(x) \quad se\ f(x) \to 0.$$

$$1 - cosf(x) \sim \frac{1}{2} \cdot f^2(x) \qquad se\ f(x) \to 0.$$

$$(1 + f(x))^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot f(x) \qquad se\ f(x) \to 0.$$

Esempi.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x)}{sin3x} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}.$

Infatti

$$\ln(1 + 4x) \sim 4x\ e\ \ sin3x \sim 3x.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{sin^3 x}-1}{\ln(1-x^3)} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{sin^3 x}{-x^3} = \frac{x^3}{-x^3} = -1.$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos2x}{\ln(1+x)+\ln(1-x)} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos2x}{ln(1-x^2)}.$

Dal limite notevole

$$\lim_{f(x)\to 0} \frac{1 - cosf(x)}{(f(x))^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(1 - cosf(x)\right) \sim \frac{1}{2}\left(f(x)\right)^2.$$

Perciò

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cos2x}{ln(1 - x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot 4x^2}{-x^2} = -2.$$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2}-1} = \frac{1}{3}$

Supponiamo che in x_0 f_1 sia infinitesimo di ordine inferiore rispetto a g_1 e f_2 sia infinitesimo di ordine inferiore rispetto a g_2. Allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1 + g_1}{f_2 + g_2} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1\left(1 + \frac{g_1}{f_1}\right)}{f_2\left(1 + \frac{g_2}{f_2}\right)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(1+0)}{f_2(1+0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1}{f_2}.$$

Definizione 4.15 – Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $f(x)$ si dice un infinito in x_0.

Siano $f(x) e\ g(x)$ due infiniti in x_0. Se

- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, allora $f(x)\ e\ g(x)$ sono infiniti dello stesso ordine in x_0. Cioè esse tendono a infinito con la stessa rapidità;
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, allora i due infiniti si dicono equivalenti e si scrive $f(x) \sim g(x)$;
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, allora $f(x)$ è infinito di ordine inferiore a $g(x)$. Cioè tende a infinito più lentamente di $g(x)$.
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, allora $f(x)$ è infinito di ordine superiore a $g(x)$. Cioè tende a infinito più rapidamente di $g(x)$.
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste, i due infiniti non sono confrontabili.

Definizione 4.16 – Dati due infiniti $f(x)\ e\ g(x)$ per $x \to x_0$, si dice che $f(x)$ è un infinito di ordine α *(>0)* rispetto a $g(x)$, quando $f(x)$ è dello stesso ordine di $[g(x)]^\alpha$e cioè

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l \neq 0.$$

In generale, se $x \to x_0$, si prende come infinito campione $g(x) = \frac{1}{x - x_0}$. Se invece $x \to \pm\infty$, si prende come infinitesimo campione $g(x) = x$.

Principio di sostituzione degli infiniti – *Se esiste il limite del rapporto di due infiniti, esso resta invariato se si sostituisce ciascun infinito con un infinito equivalente.*

Supponiamo che in x_0 f_1 sia infinito di ordine superiore rispetto a g_1 e f_2 sia infinito di ordine superiore rispetto a g_2. Allora

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1+g_1}{f_2+g_2}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1\left(1+\frac{g_1}{f_1}\right)}{f_2\left(1+\frac{g_2}{f_2}\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(1+0)}{f_2(1+0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1}{f_2}.$$

Esercizi.

1) Calcoliamo

$$\lim_{x\to -5}\frac{x^2+3x-10}{x^2-25}=\frac{0}{0}.$$

Scomponendo in prodotti, si ha

$$\lim_{x\to -5}\frac{(x-2)(x+5)}{(x-5)(x+5)}=\lim_{x\to -5}\frac{x-2}{x-5}=\frac{7}{10}.$$

2) Calcoliamo

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x-2}=\frac{0}{0}.$$

Il numeratore si annulla per $x=2$ e possiamo scomporlo in fattori tramite la regola di Ruffini ottenendo

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-1)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-1)(x+1)=3.$$

3) Calcoliamo

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}=\frac{0}{0}.$$

Scomponendo in fattori si ha

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+3}=\frac{1}{5}.$$

4) Calcoliamo

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2-x-6}{x^3+5x^2+8x+4}=\frac{0}{0}.$$

Scomponendo in fattori

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x+2)(x+1)}=\lim_{x\to -2^+}\frac{(x-3)}{(x+2)(x+1)}=$$
$$=\frac{-5}{0^-}=+\infty.$$

5) Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x^2-x}=\frac{0}{0}.$$

Scomponiamo in fattori il denominatore e facciamo sparire la radice dal numeratore sfruttando la differenza di quadrati

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x(x-1)}\frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-x-1}{x(x-1)(1+\sqrt{x+1})}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(x-1)(1+\sqrt{x+1})}=\frac{1}{2}.$$

6) Calcoliamo

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-8x^2+16}{x^3-8}=\frac{0}{0}.$$

Scomponendo si ha

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x+2)^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)^2}{(x^2+2x+4)}=\frac{0}{12}=0.$$

7) Calcoliamo $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-2x+9}-3}{x^3-x^2-x-2}=\frac{0}{0}.$

Scomponendo il denominatore con la regola di Ruffini e moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x^2-2x+9}+3$, si ha

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x+9-9}{(x-2)(x^2+x+1)(\sqrt{x^2-2x+9}+3)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x}{(x^2+x+1)(\sqrt{x^2-2x+9}+3)}=$$
$$=\frac{1}{21}.$$

8) Calcoliamo
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}=\frac{0}{0}.$$
Scomponendo numeratore e denominatore con la regola di Ruffini, si ha
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x+1)}{(x-2)^2(x+2)}=\frac{3}{4}.$$

9) Calcoliamo
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{5x}=\frac{0}{0}.$$
Moltiplichiamo e dividiamo per $\sqrt{4+x}+2$ ottenendo
$$\lim_{x\to 0}\frac{4+x-4}{5x(\sqrt{4+x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{5(\sqrt{4+x}+2)}=\frac{1}{20}.$$

10) Calcoliamo
$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{3-\sqrt{8-x^3}}=\frac{0}{0}.$$
Moltiplichiamo e dividiamo sia per $\sqrt{x^2+3}+2$ che per $3+\sqrt{8-x^3}$ ottenendo

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x^2+3-4)(3+\sqrt{8-x^3})}{(9-8+x^3)(\sqrt{x^2+3}+2)}=$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2-1)(3+\sqrt{8-x^3})}{(1+x^3)(\sqrt{x^2+3}+2)}.$$

Dalla differenza di quadrati e dalla somma di cubi otteniamo

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(3+\sqrt{8-x^3})}{(x^2-x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = -1.$$

11) Calcoliamo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3-3x+2}{3x^3+x^2+x+1} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Mettiamo in evidenza la variabile di grado maggiore. Ricordando che $\frac{a}{\pm\infty} = 0$, si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3(2-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3})}{x^3(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{2}{3}.$$

12) Calcoliamo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{4x^3+2x+7}{-x^2+x+1} = \frac{+\infty}{-\infty}.$$

Mettiamo in evidenza la variabile di grado maggiore ottenendo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3(4+\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3})}{x^2(-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x(4+\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3})}{-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} =$$
$$= \frac{+\infty}{-1} = -\infty.$$

13) Calcoliamo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^2+8x-6}{x^3+2x^2+5x+2} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Mettiamo in evidenza la variabile di grado maggiore ottenendo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2(5+\frac{8}{x}-\frac{6}{x^2})}{x^3(1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3})} = \lim_{x\to +\infty} \frac{5+\frac{8}{x}-\frac{6}{x^2}}{x(1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3})} =$$
$$= \frac{5}{+\infty} = 0.$$

14) Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - 1 + \sqrt{x^4 + x + 2}}{x - 1 + \sqrt{x^4 + x - 2}} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Possiamo scrivere

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - 1 + \sqrt{x^4(1 + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4})}}{x - 1 + \sqrt{x^4(1 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4})}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - 1 + x^2}{x - 1 + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(3 - \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})} = 3.$$

15) Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x - 2}{\sqrt{4x - 1} + \sqrt{x + 1}} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

Scriviamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(3 - \frac{2}{x})}{\sqrt{x(4 - \frac{1}{x})} + \sqrt{x(1 + \frac{1}{x})}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{2\sqrt{x} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

16) Calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{7x - 2} = \frac{+\infty}{-\infty}.$$

Scriviamo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x^2})}}{x(7-\frac{2}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{7x} = -\frac{1}{7}.$$

17) Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+5x^2-6x+2}{4x^2-2x+5} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Possiamo procedere come i limiti precedenti oppure in modo molto più rapido sfruttando l'ordine degli infiniti. Infatti, trascurando gli infiniti di ordine inferiore, possiamo rapidamente scrivere

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3}{4x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{4} = \frac{+\infty}{4} = +\infty.$$

18) Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-4x^2+2x-4}{4x^3+9x+11} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Trascurando gli infiniti di ordine inferiore si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{4x^3} = \frac{1}{2}.$$

19) Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x-6}}{5x+6} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Possiamo scrivere

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{5x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{5x} = \frac{1}{5}.$$

20) Calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^4 - 7x + 6}}{x^2 + 1} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Possiamo scrivere

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^4}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3.$$

21) Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 5x + 6} - x = +\infty - \infty.$$

Moltiplichiamo e dividiamo per $\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x$ ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x\right) \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 5x + 6 - x^2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x}.$$

Semplificando e trascurando gli infiniti di ordine inferiore si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-5x}{|x| + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x}{2x} = -\frac{5}{2}.$$

22) Calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{x^2 - 1}) = +\infty - \infty.$$

Scriviamo

$$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{x^2 - 1}) \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 1}}$$

ottenendo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x+2-x^2+1}{\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{|x|+|x|} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{2|x|} = \frac{3}{2}.$$

23) Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-x\right) = +\infty-\infty.$$

Sfruttiamo la differenza di cubi moltiplicando e dividendo per

$(\sqrt[3]{x^3-x^2})^2 + x\sqrt[3]{x^3-x^2} + x^2$ e trascurando gli infiniti di ordine inferiore si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-x\right) \frac{(\sqrt[3]{x^3-x^2})^2 + x\sqrt[3]{x^3-x^2} + x^2}{(\sqrt[3]{x^3-x^2})^2 + x\sqrt[3]{x^3-x^2} + x^2} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^2-x^3}{(\sqrt[3]{x^3})^2 + x\sqrt[3]{x^3} + x^2}.$$

Pertanto abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2+x^2+x^2} = -\frac{1}{3}.$$

24) Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\ln\left(5x^3+2\sqrt{x}+4\right) - \ln\left(2x^3-\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x+1}\right)\right]$$
$$= +\infty-\infty.$$

Applichiamo le proprietà dei logaritmi e trascuriamo gli infiniti di ordine inferiore

$$\lim_{x\to+\infty} ln\left[\frac{5x^3+2\sqrt{x}+4}{2x^3-\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x+1}}\right] = \lim_{x\to+\infty} ln\left[\frac{5x^3}{2x^3}\right] = ln\left(\frac{5}{2}\right).$$

25) Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} [\ln(e^x+x^4+3x^2+arctgx)-x] = +\infty-\infty.$$

Possiamo scrivere $x = lne^x$ ed applicare la proprietà dei logaritmi ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty} ln\left[\frac{e^x + x^4 + 3x^2 + arctgx}{e^x}\right] = \lim_{x\to+\infty} ln\left[\frac{e^x}{e^x}\right] = ln1 = 0.$$

26) Calcoliamo

$$\lim_{x\to0^+} 5sin2x \cdot cotgx = 0 \cdot (+\infty)$$

Usando le formule di duplicazione, si ha

$$\lim_{x\to0^+} 10sinxcosx \cdot \frac{cosx}{sinx} = \lim_{x\to0^+} 10cosx \cdot cosx = 10.$$

27) Calcoliamo

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} 3cos^3x \cdot tgx = 0 \cdot (+\infty).$$

Scriviamo

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} 3cos^3x \cdot \frac{sinx}{cosx} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} 3cos^2x \cdot sinx = 0.$$

28) Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{3x+2}\left(\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+3}} - 1\right) = +\infty \cdot 0.$$

Ogni volta che abbiamo $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot (g(x)^\alpha - 1)$ con $f(x) \to \infty$ e $g(x) \to 1$ è utile seguire il seguente procedimento. Aggiungiamo e sottraiamo 1 sotto radice ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{3x+2}\left(\sqrt{1 + \frac{x^2+x+1}{x^2-x+3} - 1} - 1\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{3x+2}\left(\sqrt{1 + \frac{2x-2}{x^2-x+3}} - 1\right)$$

. Quindi scriviamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{3x+2}\cdot\frac{\left(1+\frac{2x-2}{x^2-x+3}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{2x-2}{x^2-x+3}}\cdot\frac{2x-2}{x^2-x+3}.$$

Moltiplicando la prima e l'ultima frazione e trascurando gli infiniti di ordine inferiore, considerando il limite notevole, si ha che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{3x^3}\cdot\frac{\left(1+\frac{2x-2}{x^2-x+3}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{2x-2}{x^2-x+3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

29) Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{4x^2+3}}-\frac{1}{2}\right)=+\infty\cdot 0.$$

Per ricondurci al caso precedente, mettiamo in evidenza $\frac{1}{2}$ ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2\left(\sqrt{\frac{4x^2+4}{4x^2+3}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2\left(\sqrt{1+\frac{4x^2+4}{4x^2+3}-1}-1\right).$$

Sottraendo -1 alla frazione sotto radice si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x^2+3}}-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2\frac{\left(1+\frac{1}{4x^2+3}\right)^{1/2}-1}{\frac{1}{4x^2+3}}\frac{1}{4x^2+3}=\frac{1}{16}.$$

30) Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{2x^2+3}}-\sqrt{\frac{x^3+5}{2x^3-1}}\right)=+\infty\cdot 0.$$

Mettiamo in evidenza $\sqrt{\frac{x^3+5}{2x^3-1}}$ ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \sqrt{\frac{x^3+5}{2x^3-1}}\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{2x^2+3}\cdot\frac{2x^3-1}{x^3+5}}-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^2 \sqrt{\frac{x^3+5}{2x^3-1}}\left(\sqrt{\frac{2x^5+2x^3-x^2-1}{2x^5+3x^3+10x^2+15}}-1\right).$$

Ci siamo ricondotti al caso analizzato nei due precedenti esercizi. Con lo stesso procedimento otteniamo che il risultato del limite è $-\frac{1}{4\sqrt{2}}$.

31) Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x+2}{x+sinx}\left(2^{arctg\frac{1}{x}}-1\right)=+\infty\cdot 0.$$

In questo caso cerchiamo di sfruttare il limite notevole $\lim_{x\to x_0}\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)}=lna$. Moltiplichiamo e dividiamo per $arctg\,\frac{1}{x}$ ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x+2}{x+sinx}\left(\frac{2^{arctg\frac{1}{x}}-1}{arctg\,\frac{1}{x}}\cdot arctg\,\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x+2}{x+sinx}\left(ln2\cdot\frac{arctg\,\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x+2}{x^2+xsinx}\left(ln2\cdot\frac{arctg\,\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)$$

$$=1\cdot ln2\cdot 1=ln2.$$

32) Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x+2}{x^2+x-4} \ln\left(\frac{2x^3+3x-4}{2x^3-x^2+1}\right) = +\infty \cdot 0.$$

Aggiungiamo e sottraiamo 1 nell'argomento del logaritmo ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x+2}{x^2+x-4} ln\left(1+\frac{2x^3+3x-4}{2x^3-x^2+1}-1\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x+2}{x^2+x-4} ln\left(1+\frac{x^2+3x-5}{2x^3-x^2+1}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x+2}{x^2+x-4} \frac{ln\left(1+\frac{x^2+3x-5}{2x^3-x^2+1}\right)}{\frac{x^2+3x-5}{2x^3-x^2+1}} \frac{x^2+3x-5}{2x^3-x^2+1}.$$

Ricordando il limite notevole e trascurando gli infiniti di ordine inferiore, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{2x^5} = \frac{1}{2}.$$

33) Calcoliamo

$$\lim_{x\to0^+} x^{\frac{3}{lnx}} = 0^0.$$

Scriviamo

$$\lim_{x\to0^+} e^{ln\left(x^{\frac{3}{lnx}}\right)} = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{3}{lnx}ln(x)} = e^3.$$

34) Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{5}{x}\right)^{\frac{2}{lnx}} = +\infty^0.$$

Scriviamo

$$\lim_{x\to 0^+} e^{ln\left[\left(\frac{5}{x}\right)^{\frac{2}{lnx}}\right]} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{2}{lnx}ln\left[\frac{5}{x}\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{2}{lnx}[ln5-lnx]} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{2ln5}{lnx}-2} = e^{-2}.$$

35) Calcoliamo

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt[5]{1+e^x}-1\right)^{\frac{3x+1}{x^2+5}} = 0^0.$$

Calcoliamo il limite di $ln\left(\sqrt[5]{1+e^x}-1\right)^{\frac{3x+1}{x^2+5}}$ e quindi

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{3x+1}{x^2+5}ln\left(\sqrt[5]{1+e^x}-1\right).$$

Sfruttando l'equivalenza tra gli infinitesimi e utilizzando le proprietà dei logaritmi otteniamo

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{3x+1}{x^2+5}ln\left(\frac{1}{5}e^x\right) = \lim_{x\to -\infty}\frac{3x+1}{x^2+5}\left[ln\left(\frac{1}{5}\right)+x\right] =$$
$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{3x+1}{x^2+5}ln\frac{1}{5}+\frac{3x^2+1}{x^2+5}.$$

Il primo prodotto tende a zero ed il secondo a 3. Pertanto il nostro limite tende ad e^3.

36) Calcoliamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+4x)}{sin3x} = \frac{0}{0}.$$

Sappiamo che

$$\ln(1+x) \sim 4x \ \ e \ \ \ sin3x \sim 3x.$$

Pertanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+4x)}{sin3x} = \lim_{x \to 0} \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}.$$

37) Calcoliamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{sin^3 x} - 1}{\ln(1-x^3)} = \frac{0}{0}.$$

Si hanno le seguenti equivalenze tra infinitesimi

$$e^{sin^3 x} - 1 \sim sin^3 x.$$
$$sin^3 x = sinx \cdot sinx \cdot sinx \sim x \cdot x \cdot x = x^3.$$
$$ln(1-x^3) \sim -x^3.$$

Pertanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{sin^3 x} - 1}{\ln(1-x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{sin^3 x}{-x^3} = \frac{x^3}{-x^3} = -1\,.$$

38) Calcoliamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos2x}{\ln(1+x) + \ln(1-x)} = \frac{0}{0}.$$

Utilizzando le proprietà dei logaritmi possiamo scrivere il limite nel seguente modo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos2x}{ln(1-x^2)}.$$

Tenendo conto delle seguenti equivalenze tra infinitesimi:

$$[1-cosf(x)]\sim\frac{1}{2}\big(f(x)\big)^2$$

$$ln(1-x^2)\sim -x^2$$

possiamo concludere che

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos2x}{ln(1-x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot 4x^2}{-x^2}=-2.$$

39) Calcoliamo

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2}-1}=\frac{0}{0}.$$

Poiché $e^{f(x)}-1\sim f(x)$, si ha

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{3(x-1)^2}=\frac{1}{3}.$$

40) Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+sinx}{5x+x^4cosx}=\frac{0}{0}.$$

Considerando che

$$1 - cosx \sim \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow cosx \sim 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$sinx \sim x$$

risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + sinx}{5x + x^4 cosx} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + x}{5x + x^4\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + x}{5x + x^4 - \frac{1}{2}x^6}.$$

Trascurando, infine, gli infinitesimi di ordine superiore, otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{5x} = \frac{1}{5}.$$

41) Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x + sin2x + 1 - cos4x}{-2x^4 + sin^2x} = \frac{0}{0}.$$

Sostituendo gli infinitesimi equivalenti, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x + sin2x + 1 - cos4x}{-2x^4 + sin^2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x + 2x + 8x^2}{-2x^4 + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{4x}{x^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty.$$

42) Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{tgx + 3x^2 + \ln(1 + x)}{6x + sin^3x} = \frac{0}{0}.$$

Sostituendo gli infinitesimi equivalenti e trascurando quelli di ordine superiore si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx+3x^2+\ln(1+x)}{6x+sin^3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+3x^2+x}{6x+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{6x}=\frac{1}{3}.$$

Capitolo 5

Funzioni continue

5.1 Continuità

In questo paragrafo introduciamo il concetto di continuità e studiamo le principali proprietà delle funzioni continue.

Definizione 5.1 *– Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ è continua in un punto x_0 se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Dalla definizione di limite vista nel precedente capitolo, possiamo analogamente dire che una funzione è continua in un punto x_0 se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \ tale\ che\ \ \forall x \in A, con\ |x - x_0| < \delta, risulti$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Se la funzione f è continua in ogni punto di un insieme A, scriveremo $f \in C^0(A)$.

Esempi.

- Sono continue in $\mathbb{R}$ le funzioni polinomiali
  $$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$
  pertanto
  $$\lim_{x \to 3}(x^3 + 4x - 5) = 34.$$
- Sono continue in $\mathbb{R}$ le funzioni $sinx$ e $cosx$, quindi
  $$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} sinx = sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
- La funzione tgx è continua in $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- La funzione $cotgx$ è continua in $\mathbb{R} - \{k\pi\}$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- La funzione esponenziale è continua in $\mathbb{R}$.
- La funzione logaritmica è continua in R^+.

Ora enunciamo e dimostriamo i principali teoremi che caratterizzano le funzioni continue. I primi due sono dovuti ad un matematico boemo del XIX secolo Bernard Bolzano.

Teorema degli zeri – *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua.*

Se $f(a)\cdot f(b)<0$, allora esiste almeno un $x_0\in(a,b)$ tale che $f(x_0)=0$.

Dim.

Sia $f(a)<0$ e $f(b)>0$. Per assurdo, supponiamo, che

$f(x)\neq 0\ \forall x\in[a,b]$ e consideriamo l'insieme

$$A=\{x\in[a,b]: f(x)<0\}.$$

Sicuramente $A\neq\emptyset$ poiché contiene almeno a. Inoltre è limitato superiormente e risulterà $supA=x_0<b$. Certamente $f(x_0)\neq 0$ poiché $f(x)\neq 0\ \forall x\in[a,b]$. Se $f(x_0)<0$, per la permanenza del segno $\exists r>0\ tale\ che\ \forall x\in I(x_0,r)$ si ha $f(x)<0$. Quindi in (x_0,x_0+r) si ha $f(x)<0$, pertanto, x_0 non è un maggiorante. Se $f(x_0)>0$, sempre per la permanenza del segno, in (x_0-r,x_0) si ha $f(x)>0$ e vuol dire che x_0 non è il minimo dei maggioranti. Pertanto la funzione si annulla in x_0, cioè $f(x_0)=0$.

Teorema dei valori intermedi – *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua con $f(a)<f(b)$. Allora la funzione assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.*

Dim.

Consideriamo un $y\in(f(a),f(b))$ e la funzione continua

$g(x)=f(x)-y$. Possiamo osservare che

$$g(a)=f(a)-y<0,$$
$$g(b)=f(b)-y>0.$$

Per il teorema degli zeri esiste $x_0\in(a,b)$ tale che

$$g(x_0) = f(x_0) - y = 0.$$

Quindi $y = f(x_0)$.

Per molti anni si è ritenuto che la proprietà dei valori intermedi dimostrata da Bolzano, fosse equivalente alla continuità. Così non è, come mostrato dal seguente esempio. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} sin\left(\frac{1}{x}\right) & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases}$$

verifica la proprietà dei valori intermedi pur non essendo continua in 0.

Si può dimostrare che se abbiamo $f: A \to B$ e $g: B \to C$ con f continua in un punto x_0 di A e g continua in $f(x_0) \in B$, allora $g \circ f: A \to C$ è continua in x_0.

Inoltre se f è definita in un intervallo (che può essere anche una semiretta o tutto $\mathbb{R}$) ed è continua e invertibile, anche la funzione inversa lo è.

È possibile dimostrare che *se una funzione è continua in un intervallo I, allora* $f(I)$ *è un intervallo*; *se invece è continua in un insieme chiuso e limitato I, allora* $f(I)$ *è chiuso e limitato*. Quest'ultima proprietà può essere usata per dimostrare il seguente teorema.

***Teorema di Weierstrass* –** *Una funzione continua in un insieme chiuso e limitato ha massimo e minimo.*
Dim.

Se *f* è continua in *X* chiuso e limitato, allora *f(X)* è un insieme chiuso e limitato e come tale è dotato di minimo e massimo.

Definizione 5.2 – Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ si dice uniformemente continua in *A,* se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \ tale\ che\ \ \forall x, x_0 \in A, con\ |x - x_0| < \delta,$$
$$risulti\ |f(x) - f(\,x_0)| < \varepsilon.$$

La differenza con la continuità è che il numero δ dipende solo da ε e non dal punto x_0. Citiamo il seguente

Teorema di Cantor – *Una funzione continua in un insieme chiuso e limitato è uniformemente continua.*

Definizione 5.3 – Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ si dice lipschitziana se esiste una costante $M > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \quad \forall\, x, y \in A.$$

Definizione 5.4 – Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ si dice hölderiana di ordine α $(0 < \alpha \leq 1\,)$ se esiste una costante $M > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{\alpha} \quad \forall\, x, y \in A.$$

Le funzioni lipschitziane e hölderiane sono uniformemente continue.

5.2 Punti di discontinuità

Definizione 5.5 – *Un punto x_0 è detto punto di* ***discontinuità di prima specie*** *se il limite destro ed il limite sinistro sono finiti e diversi tra loro. In questo caso*

$$\lim_{x \to {x_0}^+} f(x) - \lim_{x \to {x_0}^-} f(x)$$

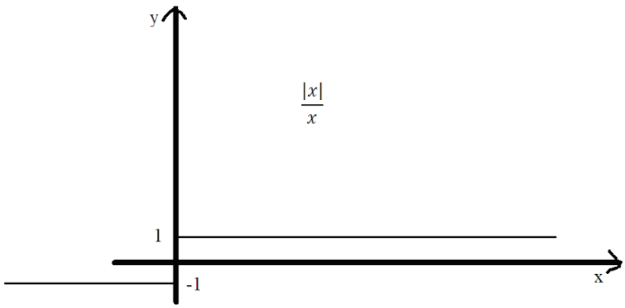
si chiama salto della funzione.

Esempio:

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & se\ x > 0 \\ -1 & se\ x < 0 \end{cases}$$

è continua per $x \neq 0$, ma non lo è in $x = 0$. Il grafico di questa funzione presenta in 0 un salto, ossia una discontinuità di prima specie (vedi figura). Infatti

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) - \lim_{x \to 0^-} f(x) = 2.$$



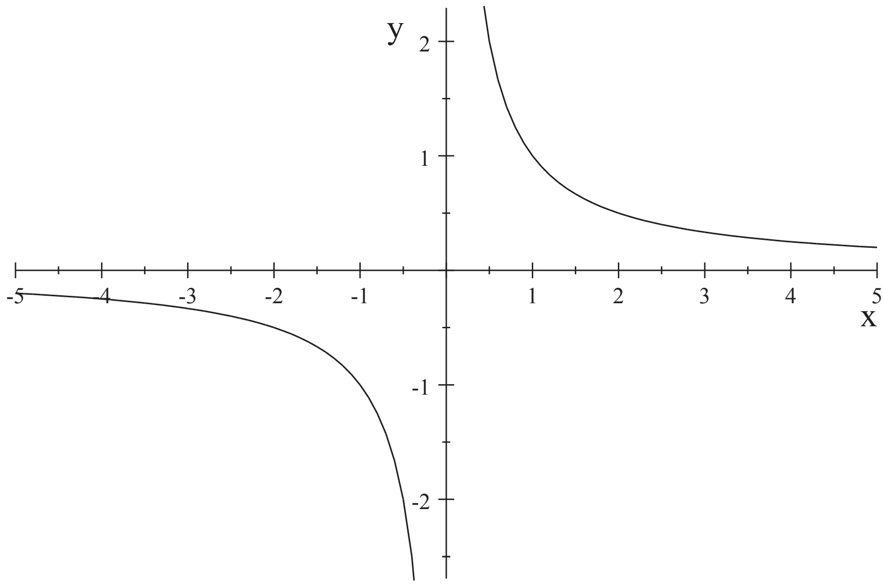
Possiamo provare ad estendere la funzione anche in 0 con un valore $l \in \mathbb{R}$ definendo la nuova **funzione prolungamento** di $f(x)$ indicata con $\bar{f}(x)$ e definita nel modo seguente

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x} & se \quad x \neq 0 \\ l & se \quad x = 0 \end{cases} .$$

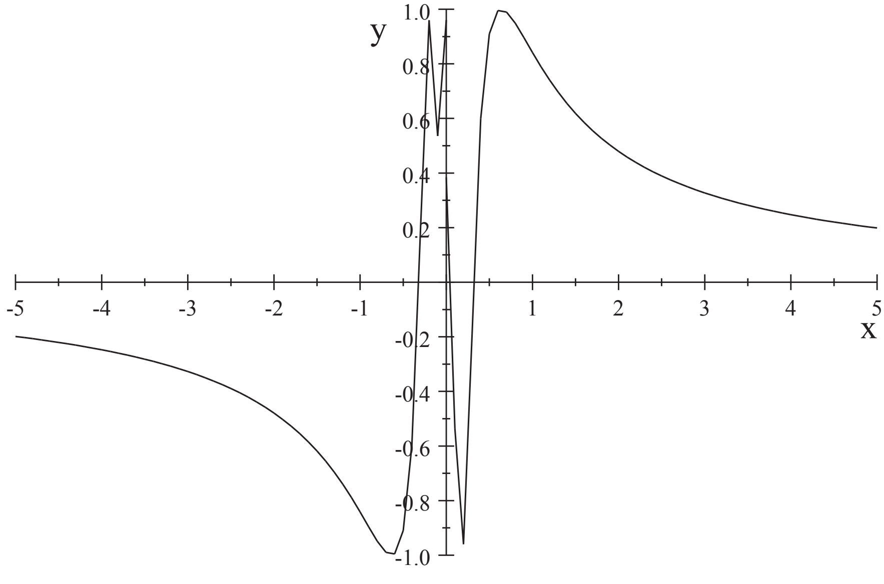
Per come è stata costruita, tale funzione è definita nel punto $x_0 = 0$, ma non è continua in tale punto, presentando ancora limite destro e limite sinistro distinti qualunque sia il valore di l scelto. Questo tipo di discontinuità risulta non eliminabile a differenza della successiva definizione 5.7.

Definizione 5.6 – *Se almeno uno dei due limiti destro e sinistro non esiste o è infinito, si parla di* ***discontinuità di seconda specie.***

Esempio.
La funzione $\frac{1}{x}$ presenta in 0 una discontinuità di seconda specie.



La funzione $sin\frac{1}{x}$ presenta in 0 una discontinuità di seconda specie



Definizione 5.7 *– Se il limite esiste ed è uguale ad L ma la funzione non è definita in x_0 oppure se lo è ma risulta $f(x_0) \neq L$, si parla di* ***discontinuità eliminabile****.*

Esempio.

La funzione

$$f(x) = \frac{sen\ x}{x}$$

presenta in 0 una discontinuità eliminabile ed è possibile prolungarla per continuità mediante la funzione:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{sen\ x}{x} & se\ x \neq 0 \\ 1 & se\ x = 0. \end{cases}$$

Capitolo 6

Asintoti di una funzione

6.1 Asintoti rettilinei

In questa sezione introduciamo il concetto di asintoto di una funzione $f(x)$, che è una retta tale che la distanza tra essa ed il grafico di $f(x)$ tende a zero per x che tende a $\pm\infty$ oppure ad un punto dove la funzione non è definita oppure è discontinua.

Definizione 6.1 – Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Allora la retta di equazione

$$x = x_0$$

*è un **asintoto verticale** a destra (a sinistra) per il grafico della funzione se si ha*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad \left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \right).$$

Esempi.

Data la funzione

$$y = \frac{1}{x}$$

si ha che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Quindi l'asse delle ordinate e cioè la retta

$$x = 0$$

è asintoto verticale bilatero.

Per la funzione

$$y = ln(x-2)$$

si ha che

$$\lim_{x\to 2^+} ln(x-2) = -\infty.$$

Quindi la retta

$$x = 2$$

è asintoto verticale destro.

Definizione 6.2 – Sia $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione e sia

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = q \in \mathbb{R}.$$

Allora la retta di equazione

$$y = q$$

è detta **asintoto orizzontale destro** per il grafico della funzione.

Una analoga definizione vale per l'**asintoto orizzontale sinistro** per $x \to -\infty$.

Esempi.

La funzione

$$y = \frac{2x-1}{x+10}$$

ammette asintoti orizzontali destri e sinistri ed essi coincidono poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x+10} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x} = 2.$$

Quindi la retta

$$y = 2$$

è asintoto orizzontale sia a destra che a sinistra.

Invece la funzione

$$y = \frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x}}$$

ammette asintoti orizzontali destri e sinistri ma essi non coincidono poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|} = 1,$$

$$\mathit{lim}_{x\to-\infty} \frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x}} = \mathit{lim}_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \mathit{lim}_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|} = -1.$$

Quindi la retta

$$y = 1$$

è asintoto orizzontale destro mentre la retta

$$y = -1$$

è asintoto orizzontale sinistro.

La funzione

$$y = e^x$$

ha un asintoto orizzontale sinistro

$$y = 0$$

poiché

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Non ammette asintoto orizzontale destro poiché

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Infine la funzione

$$y = x^2 + x + 1$$

non ammette asintoti orizzontali poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x^2+x+1)=+\infty.$$

Definizione 6.3 – Sia $f\colon[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ una funzione. Diremo che la retta

$$y=mx+q$$

è un **asintoto obliquo destro** se

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx-q)=0.$$

Una analoga definizione vale per l'**asintoto obliquo sinistro**.

Teorema 6.1 – *Se il grafico della funzione ha asintoto obliquo di equazione $y=mx+q$, con $m\neq0$, allora si ha*

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$q=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx].$$

Dim.

Se esiste un asintoto obliquo, allora

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx-q)=0.$$

Dividendo tutto per $x\neq0$, si ha

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(f(x)-mx-q)}{x}=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-m-\frac{q}{x}\right]=0.$$

Poiché $\frac{q}{x}\to0$, allora vuol dire che

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Inoltre, se

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx-q)=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}[(f(x)-mx)]-q=0.$$

Quindi

$$q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx].$$

Se uno dei due limiti che caratterizzano m e q non esiste o è infinito, la funzione non ha asintoto obliquo. Il caso $m = 0$ e $q \in \mathbb{R}$ ovviamente ci restituisce un asintoto orizzontale.

6.2 Asintoti curvilinei

Gli asintoti di funzioni razionali fratte generalmente non sono di tipo lineare. La funzione razionale fratta ammette asintoto obliquo quando la differenza tra i gradi del numeratore e del denominatore è 1. Se tale differenza, invece, è maggiore o uguale a 2, l'asintoto non è più una funzione lineare. In particolare, se la differenza dei gradi è 2 la funzione presenta un **asintoto parabolico**

$$y = ax^2 + bx + c$$

i cui coefficienti coincidono con

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x^2}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - ax \right)$$

$$c = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax^2 - bx).$$

Se la differenza dei gradi è 3, la funzione ammette un **asintoto cubico**

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

con

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x^3}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x^2} - ax \right)$$

$$c = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - ax^2 - bx\right)$$

$$d = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax^3 - bx^2 - cx).$$

Analogamente, quanto appena esposto può essere generalizzato ad asintoti curvilinei di grado qualsiasi.

Esempio.

Consideriamo la funzione definita in $\mathbb{R}\backslash\{3\}$

$$y = \frac{x^3 + 2x - 1}{x - 3}.$$

Si ha che

$$\lim_{x\to 3^\pm}\frac{x^3 + 2x - 1}{x - 3} = \pm\infty.$$

Quindi la retta

$$x = 3$$

è asintoto verticale. Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3 + 2x - 1}{x - 3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty,$$

quindi non ammette asintoto orizzontale.

Verifichiamo se esiste asintoto obliquo, per cui

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 - 3x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty.$$

Dunque, la funzione non ammette asintoto obliquo.

Ricerchiamo, infine, l'eventuale asintoto parabolico

$$a = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3 + 2x - 1}{x^3 - 3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 - 3x} - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 3x} = 3$$

$$c = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{x - 3} - x^2 - 3x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{11x - 1}{x - 3} = 11.$$

Dal riscontro eseguito, risulta che

$$y = x^2 + 3x + 11$$

è un asintoto parabolico per la nostra funzione.

Osserviamo che eseguendo la divisione tra numeratore e denominatore otteniamo come quoziente $Q = x^2 + 3x + 11$ e come resto $R = 32$. Sappiamo che la nota relazione aritmetica tra numeri naturali

$$\boldsymbol{dividendo} = \boldsymbol{divisore} \cdot \boldsymbol{quoziente} + \boldsymbol{resto} \ \ (\boldsymbol{resto} < \boldsymbol{divisore})$$

è valida anche nella divisione tra polinomi, quindi

$$\frac{x^3 + 2x - 1}{x - 3} = x^2 + 3x + 11 + \frac{32}{x - 3}.$$

Ma

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{32}{x - 3} = 0.$$

Pertanto gli asintoti curvilinei, rettilinei obliqui o orizzontali, coincidono, nelle funzioni razionali fratte, con il quoziente della divisione tra i polinomi.

Esercizi.

Calcolare gli asintoti delle seguenti funzioni

- $y = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1}$

  La funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{x^2}{x^2-2x+1} = +\infty\,.$$

Quindi

$$x = 1$$

è asintoto verticale. Inoltre

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-2x+1} = 1\,.$$

Quindi

$$y = 1$$

è asintoto orizzontale.

- $y = \frac{x^2+2x+5}{x+1}$

La funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\lim_{x\to -1^\pm} \frac{x^2+2x+5}{x+1} = \pm\infty\,.$$

Quindi

$$x = -1$$

è asintoto verticale. Inoltre

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2+2x+5}{x+1} = \pm\infty\,.$$

Quindi non c'è l'asintoto orizzontale. Cerchiamo l'obliquo

$$m = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2+2x+5}{x^2+x} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x+5}{x+1} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+5}{x+1} = 1\,.$$

Quindi

$$y = x + 1$$

è asintoto obliquo.

- $y = \frac{1-2lnx}{x^2}$

La funzione è definita $\forall x > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-2lnx}{x^2} = \frac{1-2\cdot(-\infty)}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty\,.$$

Pertanto la retta

$$x = 0$$

è asintoto verticale destro. Ora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-2lnx}{x^2} = \frac{-\infty}{+\infty}\,.$$

Sappiamo dall'ordine degli infiniti che il polinomio è un infinito di ordine superiore al logaritmo. Quindi, essendo il denominatore un infinito superiore rispetto al numeratore, questo limite tende a zero. Pertanto

$$y = 0$$

è asintoto orizzontale.

- $y = e^{\frac{x-2}{x-1}}$

La funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$\lim_{x \to 1^+} e^{\frac{x-2}{x-1}} = e^{\frac{-1}{0^+}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} e^{\frac{x-2}{x-1}} = e^{\frac{-1}{0^-}} = e^{+\infty} = +\infty\,.$$

Quindi

$$x = 1$$

è asintoto verticale sinistro. Invece

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{x-2}{x-1}} = e^1 = e.$$

Quindi

$$y = e$$

è asintoto orizzontale.

- $y = \frac{x-1}{e^x}$

La funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Non può avere asintoti verticali. Cerchiamo gli asintoti orizzontali

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty}\,.$$

Sappiamo che l'esponenziale è un infinito di ordine superiore rispetto al polinomio e, poiché sta al denominatore, questo limite vale zero. Invece

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{e^x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty\,.$$

Quindi

$$y = 0$$

è asintoto orizzontale destro. Vediamo se esiste asintoto obliquo sinistro

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{xe^x} = \frac{x-1}{x}\frac{1}{e^x} = 1 \cdot \frac{1}{0^+} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty\,.$$

Non esiste l'asintoto obliquo sinistro.

- $y = e^{\frac{2-x}{x}}$

La funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{2-x}{x}} = e^{\frac{2}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{2-x}{x}} = e^{\frac{2}{0^-}} = e^{-\infty} = 0\,.$$

Quindi

$$x = 0$$

è asintoto verticale destro. Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{2-x}{x}} = e^{-1}.$$

Pertanto

$$y = \frac{1}{e}$$

è asintoto orizzontale.

- $y = \frac{\sqrt{ln(x)^2 - 1}}{x}$

La funzione è definita per $x \leq -\sqrt{e} \quad e \quad x \geq \sqrt{e}$

$$\lim_{x \to -\sqrt{e}^-} \frac{\sqrt{ln(x)^2 - 1}}{x} = \frac{0}{-\sqrt{e}} = 0$$

$$\lim_{x \to \sqrt{e}^+} \frac{\sqrt{ln(x)^2 - 1}}{x} = \frac{0}{\sqrt{e}} = 0$$

Non ci sono asintoti verticali. Cerchiamo gli orizzontali

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{ln(x)^2-1}}{x}=\frac{\infty}{\infty}.$$

Essendo il polinomio del denominatore un infinito di ordine superiore, si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{ln(x)^2-1}}{x}=0\,.$$

Quindi l'asse x e cioè la retta

$$y=0$$

è asintoto orizzontale.

- $y = \ lnx - ln^2x$

Il dominio è $(0+\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+}(lnx-ln^2x)=-\infty-[(-\infty)^2]=-\infty-(+\infty)=-\infty-\infty=-\infty$$

Quindi

$$x=0$$

è asintoto verticale destro. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}(lnx-ln^2x) \ =+\infty-\infty.$$

È una forma indeterminata ma, trascurando l'infinito di ordine inferiore, si vede che tale limite diverge a $-\infty$. Non esiste asintoto orizzontale ed è facile vedere che non ci sono nemmeno asintoti obliqui.

- $y=\frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}}$

Il dominio è $x<0\cup x>1$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}} = \frac{3}{0^+} = +\infty.$$

Quindi

$$x = 0$$

è asintoto verticale sinistro mentre

$$x = 1$$

asintoto verticale destro. Cerchiamo gli orizzontali

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{|x|} = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{|x|} = -1$$

Pertanto

$$y = 1$$

è asintoto orizzontale a destra mentre

$$y = -1$$

è asintoto orizzontale a sinistra.

- $y = \frac{(2-x)^3}{3x-12}$

La funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R} - \{4\}$

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{(2-x)^3}{3x-12} = \frac{-8}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{(2-x)^3}{3x-12} = \frac{-8}{0^+} = -\infty$$

Quindi la retta

$$x = 4$$

è asintoto verticale. Poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2-x)^3}{3x-12} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^3+6x^2-12x+8}{3x-12} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^3}{3x} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2}{3} = -\infty$$

non ci sono asintoti orizzontali. Anche gli obliqui non ci sono poiché

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^3+6x^2-12x+8}{3x^2-12x} = \mp\infty.$$

Si può vedere che ci sarà un asintoto parabolico di equazione

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}.$$

- $y = \left(\frac{x^2}{x+1}\right) e^{\frac{x}{x+1}}$

La funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\lim_{x\to -1^-} \left(\frac{x^2}{x+1}\right) e^{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{0^-} e^{\frac{-1}{0^-}} = -\infty \cdot e^{+\infty} = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \left(\frac{x^2}{x+1}\right) e^{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{0^+} e^{\frac{-1}{0^+}} = +\infty \cdot e^{-\infty} =$$
$$= +\infty \cdot (0) \; forma\ indeterminata.$$

Noi sappiamo che

$$a \cdot b = \frac{a}{\frac{1}{b}},$$

pertanto

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)e^{\frac{x}{x+1}} = \frac{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)}{\frac{1}{e^{\frac{x}{x+1}}}} = \frac{\frac{x^2}{x+1}}{e^{\frac{-x}{x+1}}}.$$

Ora abbiamo $\frac{\infty}{\infty}$ con il denominatore di ordine superiore e quindi il limite è zero. Pertanto

$$x = -1$$

è asintoto verticale solo a sinistra. È facile vedere che

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}\right)e^{\frac{x}{x+1}} = \pm\infty\,,$$

e concludere che non ci sono asintoti orizzontali.

Vediamo se ammette asintoti obliqui

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x}\right)e^{\frac{x}{x+1}} = 1\cdot e^1 = e$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(\frac{x^2}{x+1}\right)e^{\frac{x}{x+1}} - ex\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} e\left[\left(\frac{x^2}{x+1}\right)e^{\frac{x}{x+1}-1} + \left(\frac{x^2}{x+1}\right) - \left(\frac{x^2}{x+1}\right) - x\right] =$$

$$= e\lim_{x\to\pm\infty}\left\{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)\left[e^{\frac{x}{x+1}-1} - 1\right] + \left(\frac{x^2}{x+1}\right) - x\right\} =$$

$$= e\lim_{x\to\pm\infty}\left\{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)\left[e^{\frac{x}{x+1}-1} - 1\right] + \frac{-x}{x+1}\right\} =$$

$$= e\lim_{x\to\pm\infty}\left\{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)\left[\frac{e^{\frac{x}{x+1}-1} - 1}{\frac{x}{x+1}-1}\left(\frac{x}{x+1} - 1\right)\right] + \frac{-x}{x+1}\right\}.$$

Ma $\frac{e^{\frac{x}{x+1}-1}-1}{\frac{x}{x+1}-1} \to 1$ e pertanto

$$q = e \lim_{x \to \pm\infty} \left\{ \left(\frac{x^2}{x+1} \right) \left[\left(\frac{-1}{x+1} \right) \right] + \frac{-x}{x+1} \right\} =$$

$$= e \lim_{x \to \pm\infty} \left\{ \frac{-x^2}{(x+1)^2} + \frac{-x}{x+1} \right\} =$$

$$= e \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{-2x^2 - x}{(x+1)^2} \right) = e \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{-2x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} \right) = -2e.$$

Allora

$$y = ex - 2e$$

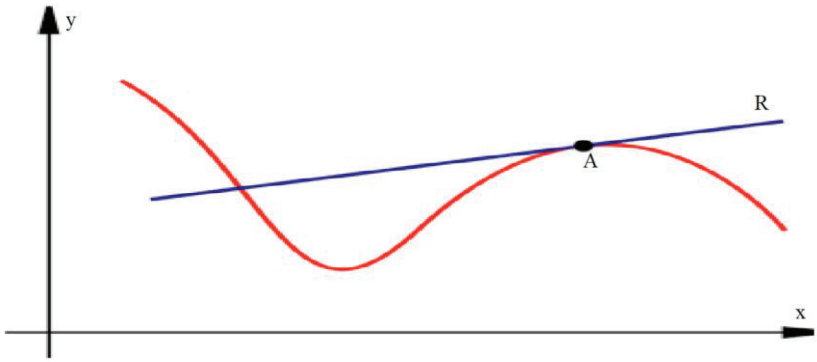
è asintoto obliquo.

Capitolo 7

Calcolo differenziale

7.1 Introduzione

La nascita del concetto di derivata è segnata da un lungo e duraturo scontro tra Leibniz e Newton. Scontro durissimo fatto di reciproche accuse di plagio. Dopo più di tre secoli gli storici della matematica tendono a dividere equamente il merito. Forse Leibniz è stato mosso più da ragioni geometriche, mentre Newton più da motivazioni fisiche. Analizziamo prima l'aspetto geometrico partendo dalla domanda: cosa è una retta tangente ad una curva? In genere, in geometria analitica, laddove è stato affrontato lo studio di funzioni lineari e delle coniche, la retta tangente ad una curva è definita come la retta che ha un solo punto in comune con la curva e lascia il resto della curva dalla stessa parte rispetto alla retta stessa. Questa descrizione, come possiamo notare, non può andar bene per funzioni qualsiasi, come mostra il seguente grafico.



In che modo, quindi, possiamo estendere la definizione di retta tangente a qualsiasi curva? Noi diremmo naturalmente che la retta r in figura è tangente in A alla curva, ma non è vero che la interseca solo in A, né che lascia il resto della curva dalla stessa parte rispetto ad r. Il tentativo di trovare una definizione di retta tangente valida in generale, ha condotto al concetto di derivata, a cui si è giunti attraverso un procedimento di approssimazioni di rette secanti. Più precisamente, sia

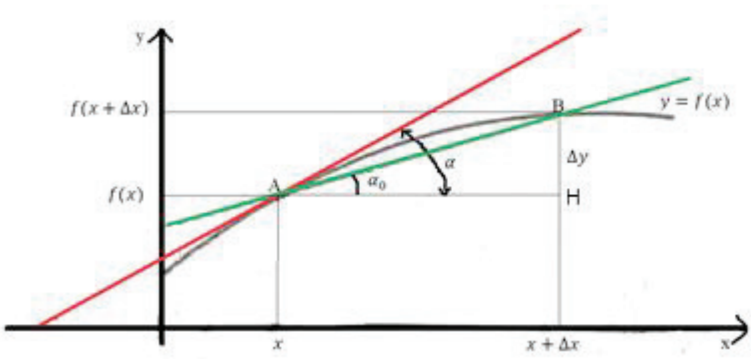
$y = f(x)$ una funzione definita in un intervallo (a, b) e sia $x \in (a, b)$ che individua un punto A del grafico di coordinate $(x, f(x))$. Al punto x diamo un incremento Δx in modo che il punto $x + \Delta x$ sia ancora nel dominio (a, b). In tal modo individuiamo un altro punto B di ordinata $f(x + \Delta x)$. La quantità Δx è **l'incremento della variabile indipendente** e può essere sia positivo che negativo con la sola ovvia condizione che $x + \Delta x$ cada nell'intervallo di definizione della funzione. La quantità

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

è detta **incremento della funzione,** mentre il rapporto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

è detto **rapporto incrementale** e rappresenta il coefficiente angolare della retta secante passante per A e B, come mostrato nella seguente figura.



Se il seguente limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

esiste ed è finito, esso si chiama derivata della funzione in x. Possiamo quindi dare la seguente definizione.

Definizione 7.1 – Sia $f: A \to \mathbb{R}$ e $x \in A$. Diremo che f è derivabile in x se esiste ed è finito il limite del rapporto incrementale al tendere comunque a zero dell'incremento Δx.

Indichiamo la derivata con uno dei seguenti simboli

$$y'; \quad f'(x); \quad f\dot{(x)}; \quad Df(x).$$

Esempio.

Calcoliamo la derivata della funzione

$$y = 2x^2 - 4x$$

nel punto di ascissa $x = 3$. Consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{[2(3+\Delta x)^2 - 4(3+\Delta x)] - [2(3)^2 - 4 \cdot 3]}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\{2[9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2] - 12 - 4\Delta x\} - [18 - 12]}{\Delta x} =$$

$$= \frac{[18 + 12\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 12 - 4\Delta x] - 6}{\Delta x} =$$

$$= \frac{8\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x}.$$

Quindi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{8\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} 8 + 2\Delta x = 8 + 0 = 8,$$

pertanto

$$f'(3) = 8.$$

Cosa rappresenta la derivata di una funzione? Con l'ausilio della figura precedente, ricordando la definizione di tangente dell'angolo α_0, relativo al triangolo ABH, si vede che

$$tg\alpha_0 = \frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Possiamo osservare che il rapporto incrementale è uguale alla tangente dell'angolo che la retta passante per i punti A e B forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse. Passando al limite per $\Delta x \to 0$, l'arco $\widehat{AB} \to 0$ cioè $B \to A$ e la retta secante ruoterà intorno ad A portandosi al limite nella posizione di retta tangente in A. L'angolo $\alpha_0 \to \alpha$ che è l'angolo che la retta tangente alla curva forma con il semiasse positivo delle ascisse. Quindi

$$f'(x) = tg\alpha$$

da cui: **la derivata di una funzione in un punto di ascissa x è il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto di ascissa x considerato.**

Analizziamo ora l'interpretazione di natura fisica proposta da Newton. Sia P un punto che si muove di moto vario ed indichiamo con s lo spazio che percorre e con t il tempo impiegato a percorrerlo. Quindi abbiamo una funzione

$$s = f(t).$$

Consideriamo il moto di P dal tempo t al tempo $t + \Delta t$. Durante tale intervallo di tempo il punto ha percorso uno spazio dato da

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t).$$

Il rapporto incrementale

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

rappresenta la velocità media nell'intervallo di tempo considerato. Quindi

$$v_m = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Passando al limite per $\Delta t \to 0$, la velocità media tende alla velocità istantanea e quindi la velocità di un punto mobile è la derivata rispetto al tempo della funzione $s = f(t)$.

7.2 Derivabilità e continuità

Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Essa è continua in 1 poiché

$$\lim_{x\to 1} \sqrt[3]{x-1} = f(1) = 0.$$

Calcoliamo

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\Delta x-1}-\sqrt[3]{1-1}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty$$

Per la definizione 7.1 la funzione non è derivabile in 1. Analogamente possiamo facilmente vedere che la funzione $y = |x|$ è continua ma non derivabile in 0, essendo il limite destro del rapporto incrementale (impropriamente detto derivata destra ed indicato con f'_+) diverso dal limite sinistro (impropriamente detto derivata sinistra ed indicato con f'_-).

Con questi due esempi abbiamo visto che

continuità $\not\Rightarrow$ *derivabilità.*

Poniamoci la domanda inversa. Esistono funzioni derivabili in un punto che non sono continue in quel punto? Il seguente teorema esclude questa possibilità.

Teorema 7.1 – *Se una funzione è derivabile in un punto x_0, la funzione è ivi anche continua.*

Dim.

Consideriamo l'uguaglianza

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

che riscriviamo nel seguente modo

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\Delta x.$$

Facciamo tendere Δx a zero ricordando il teorema sulla somma dei limiti

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Delta x.$$

Il primo limite del secondo membro è il limite di una funzione costante che non dipende da Δx e quindi

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0) = f(x_0).$$

La funzione è derivabile e risulta

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = c \in \mathbb{R}.$$

Pertanto

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} c \cdot \Delta x = f(x_0) + c \cdot 0 = f(x_0).$$

Ma

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow x \to x_0,$$

per cui

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

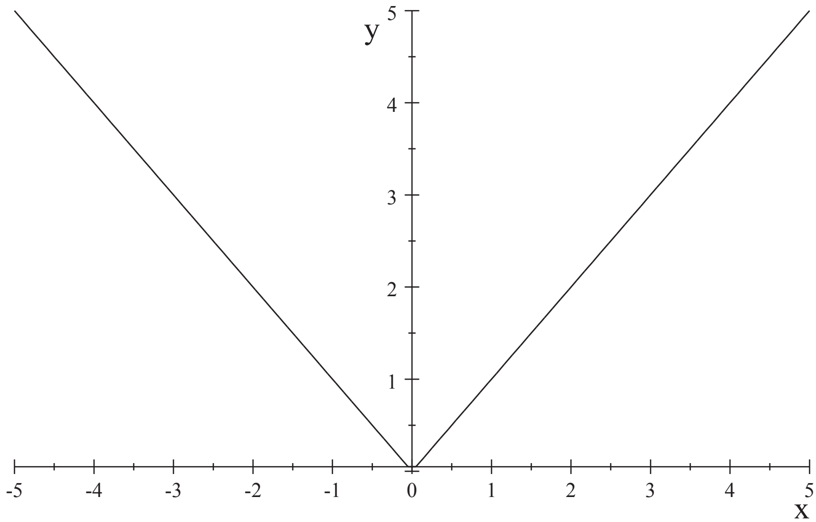
cioè, la funzione è continua.

Quindi

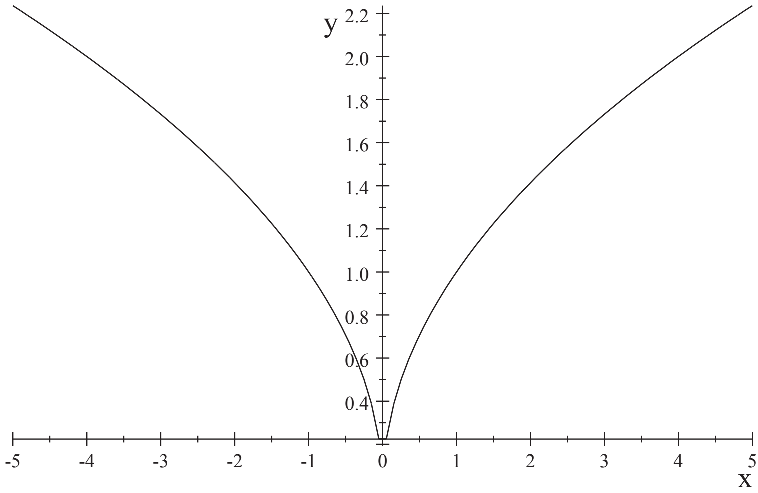
$$\textit{derivabilità} \Longrightarrow \textit{continuità}.$$

Da quanto visto, possiamo affermare che l'insieme delle funzioni derivabili è un sottoinsieme proprio di quello delle funzioni continue. Negli esempi atti a mostrare che la continuità non implica la derivabilità, abbiamo visto due funzioni che non sono derivabili in un particolare punto. Ora cerchiamo di classificare i punti di non derivabilità.

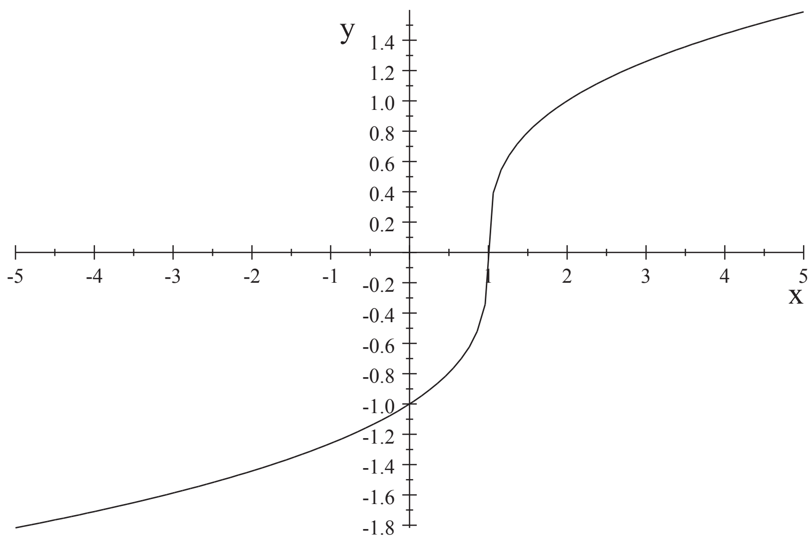
- **Punto angoloso**: se esiste sia la derivata destra che sinistra e sono diverse tra loro e cioè
$$f'_+ \neq f'_-.$$
Nell'esempio visto precedentemente della funzione $y = |x|$, abbiamo un punto angoloso in 0. In un punto angoloso il grafico della funzione forma un angolo. Ad esempio nel caso della funzione valore assoluto di x, si ha il seguente grafico.



- **Cuspide**: se i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale sono infiniti e di segno opposto. Ad esempio la funzione $y = \sqrt{|x|}$ ha una cuspide in 0.



- **Flesso a tangente verticale**: se i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale sono infiniti e di segno uguale. Ad esempio la funzione vista precedentemente $y = \sqrt[3]{x-1}$ ha un flesso a tangente verticale in 1.



Ci si rende conto che le possibilità di non derivabilità non si esauriscono con questi tre tipi da noi analizzati ed a volte i nomi cambiano a seconda della letteratura di riferimento. Ad esempio se la derivata destra esiste finita e la sinistra è infinita, alcuni testi parlano comunque di punto angoloso, altri di cuspide, altri ancora di semicuspide. Noi, invece, i casi che non rientrano nei tre sopra descritti, li chiamiamo semplicemente punti di non derivabilità.

7.3 Derivate fondamentali

Ora calcoliamo le derivate in un punto generico. In questo caso il valore $f'(x)$ che otteniamo, è funzione di x. Per tale motivo abbiamo una **funzione derivata**. La derivata in un particolare punto noi sappiamo che è invece un numero. Fortunatamente per calcolare la derivata non dobbiamo ogni volta applicare la definizione e calcolare il limite del rapporto incrementale. Infatti è possibile determinare una tabella di funzioni derivate e, per ottenere il valore della derivata in un particolare punto, basta calcolare il valore che assume la funzione derivata in tale punto.

1) $\boldsymbol{y = k \Rightarrow y' = 0}$**.**

   La derivata di una costante è 0, infatti

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k-k}{\Delta x} = 0.$$

2) $\boldsymbol{y = x^{\alpha} \Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1}}$**.**

   Infatti

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} x^{\alpha} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\Delta x}$$

   Essendo $x^{\alpha} = x^{\alpha-1} \cdot x = \frac{x^{\alpha-1}}{\frac{1}{x}}$ e ricordando il limite notevole $\lim_{f(x) \to 0} \frac{(1+f(x))^k - 1}{f(x)} = k$, abbiamo

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} x^{\alpha-1} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Nel caso particolare di $y = x$, si ha $y' = 1 \cdot x^0 = 1$. Oppure, se abbiamo delle radici, scrivendole in forma esponenziale, possiamo applicare la stessa regola di derivazione.

3) $\boldsymbol{y = sinx \Rightarrow y' = cosx.}$

Ricordando le formule di addizione del seno possiamo scrivere

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin(x + \Delta x) - sinx}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sinx \cdot cos\Delta x + cosx \cdot sin\Delta x - sinx}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sinx \cdot (cos\Delta x - 1) + cosx \cdot sin\Delta x}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[sinx \frac{cos\Delta x - 1}{\Delta x} + cosx \frac{sin\Delta x}{\Delta x} \right].$$

Dai limiti notevoli si ha

$$y' = sinx \cdot 0 + cosx \cdot 1 = cosx.$$

4) $\boldsymbol{y = cosx \Rightarrow y' = -sinx.}$

Ricordando le formule di addizione del coseno possiamo scrivere

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cos(x + \Delta x) - cosx}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cosx \cdot cos\Delta x - sinx \cdot sin\Delta x - cosx}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cosx \cdot (cos\Delta x - 1) - sinx \cdot sin\Delta x}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[cosx \frac{cos\Delta x - 1}{\Delta x} - sinx \frac{sin\Delta x}{\Delta x} \right].$$

Dai limiti notevoli si ha

$$y' = cosx \cdot 0 - sinx \cdot 1 = -sinx.$$

5) $\boldsymbol{y = log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \cdot lna}}$**.**

Infatti

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{log_a(x + \Delta x) - log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{x \cdot \Delta x} \cdot log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Posto

$$z = \frac{x}{\Delta x} \ \ allora\ \Delta x \to 0 \Rightarrow z \to \infty$$

$$y' = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{x} log_a \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = \frac{1}{x} log_a e = \frac{1}{xlna}.$$

Quindi nel caso di $y = lnx$ si ha $y' = \frac{1}{x}$.

6) $\boldsymbol{y = f(x) + g(x) \Rightarrow y' = f'(x) + g'(x)}$ **supposte *f e g* f derivabili in *x*.**

Infatti

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}.$$

Ricordando che il limite di una somma è uguale alla somma dei limiti, possiamo scrivere

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$
$$= f'(x) + g'(x).$$

È ovvio che la stessa proprietà vale per la differenza.

7) $\boldsymbol{y = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$ **supposte $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ derivabili in *x*.**

Infatti

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - g(x+\Delta x) \cdot f(x) + g(x+\Delta x) \cdot f(x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}.$$

Mettiamo in evidenza tra i primi due termini e tra gli ultimi due

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)[f(x+\Delta x) - f(x)] + f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x+\Delta x) \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] =$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Da questo segue subito che se $\boldsymbol{y = k \cdot f(x) \Rightarrow y' = k \cdot f'(x)}$. Infatti dalla derivata del prodotto segue

$$y' = 0 \cdot f(x) + k \cdot f'(x) = k \cdot f'(x).$$

8) $\boldsymbol{y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}}$ **supposte $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ derivabili in *x* e $\boldsymbol{g(x) \neq 0}$.**

Infatti

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x+\Delta x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x+\Delta x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x) \cdot g(x+\Delta x)} \left[g(x) \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] =$$

$$= \frac{1}{g(x) \cdot g(x)} [g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

9) $\boldsymbol{y = tgx \Rightarrow y' = \frac{1}{cos^2 x}}$**.**

Dalla regola di derivazione di una frazione si ha

$$y = \frac{sinx}{cosx} \Rightarrow y' = \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}.$$

10) $\boldsymbol{y = cotgx \Rightarrow y' = -\frac{1}{sin^2 x}}$**.**

Dalla regola di derivazione di una frazione si ha

$$y = \frac{cosx}{sinx} \Rightarrow y' = \frac{-sin^2 x - cos^2 x}{sin^2 x} = -\frac{1}{sin^2 x}.$$

11) $\boldsymbol{y = f(z)}$ ***e*** $\boldsymbol{z = g(x) \Rightarrow f'\big(g(x)\big) = g'(x) \cdot f'(z)}$
supposte *f* derivabile in *z* e *g* derivabile in *x*.

Si ha

$$f'\big(g(x)\big) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\big(g(x+\Delta x)\big) - f(g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\big(g(x+\Delta x)\big) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

con

$$g(x+\Delta x)-g(x)\neq 0.$$

Poiché $z=g(x)$, allora

$$g(x+\Delta x)-g(x)=\Delta z$$

da cui

$$g(x+\Delta x)=g(x)+\Delta z=z+\Delta z.$$

Sostituendo nel limite si ha

$$f'\big(g(x)\big)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}=f'(z)\cdot g'(x).$$

Il caso

$$g(x+\Delta x)-g(x)=0$$

viene tralasciato.

12) $\boldsymbol{y=f(x)\Rightarrow[f^{-1}(y)]'=\frac{1}{f'(x)}}$ **supposta $\boldsymbol{f}$ continua ed invertibile nel suo dominio e $\boldsymbol{f'\neq 0}$ in $\boldsymbol{x}$ punto interno al dominio.**

Infatti

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{f(x+\Delta x)-f(x)}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{f(x+\Delta x)-f(x)}.$$

Pertanto

$$[f^{-1}(y)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}.$$

13) $\boldsymbol{y=a^x\Rightarrow y'=a^x\ln a.}$

La funzione inversa di $y=a^x$ è

$$x=\log_a y.$$

Pertanto $y' = \frac{1}{\frac{1}{ylna}} = ylna = a^x lna.$

Nel caso in cui $a = e$, si ha che $y' = e^x$.

14) $\boldsymbol{y = arcsinx \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$**.**

Ricordiamo che l'arcoseno è la funzione inversa del seno. La funzione seno non è biunivoca e quindi non è possibile avere la sua inversa. Tuttavia è possibile restringere il suo dominio in modo da renderla biunivoca. Si conviene di restringere il dominio all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Fatta questa premessa, scriviamo

$$x = siny.$$

Pertanto $y' = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Osserviamo che la radice ha segno positivo poiché siamo in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

15) $\boldsymbol{y = arccosx \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

Il coseno non è una funzione invertibile. Per tale motivo lo si restringe all'intervallo $[0, \pi]$. In tale intervallo abbiamo

$$x = cosy.$$

Pertanto

$$y' = -\frac{1}{siny} = -\frac{1}{\sqrt{1-cos^2y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

16) $\boldsymbol{y = arctgx \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}}$**.**

Restringendo la tangente all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ si ha

$$x = tgy.$$

Pertanto

$$y' = \frac{1}{\frac{1}{cos^2 y}} = cos^2 y.$$

Poiché

$$cos^2 y = \frac{1}{1 + tg^2 y},$$

si ha

$$y' = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

17) $\boldsymbol{y = arccotgx \Rightarrow y' = -\frac{1}{1+x^2}}$.

Restringendo la cotangente all'intervallo $(0, \pi)$ si ha

$$x = cotgy.$$

Pertanto

$$y' = -\frac{1}{\frac{1}{sin^2 y}} = -sin^2 y.$$

Poiché

$$sin^2 y = \frac{1}{1 + cotg^2 y},$$

si ha

$$y' = -\frac{1}{1 + cotg^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

18) $\boldsymbol{y = [f(x)]^{g(x)} \Rightarrow y' = [f(x)]^{g(x)} \cdot \left[g'(x) ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right]}$.

Si ha che $f(x) > 0$ ed anche $[f(x)]^{g(x)} > 0$, e quindi possiamo considerare i logaritmi dei due membri della relazione $y = [f(x)]^{g(x)}$, ottenendo

$$lny = ln[f(x)]^{g(x)} = g(x)ln[f(x)].$$

Dalla derivazione della funzione composta e del prodotto, otteniamo

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \cdot ln[f(x)] + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Essendo $y \neq 0$ si ha

$$y' = y\left[g'(x) \cdot ln[f(x)] + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right] =$$
$$= [f(x)]^{g(x)}\left[g'(x) \cdot ln[f(x)] + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

Tabella

Dalle 18 proprietà dimostrate, possiamo costruire la seguente tabella

FUNZIONE	**FUNZIONE DERIVATA**
$[f(x)]^n$	$n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$
$\sqrt[n]{[f(x)]^m}$	$\frac{m \cdot f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{[f(x)]^{n-m}}}$
$sinf(x)$	$f'(x) \cdot cosf(x)$
$cosf(x)$	$-f'(x) \cdot sinf(x)$
$tgf(x)$	$\frac{f'(x)}{cos^2 f(x)}$
$cotgf(x)$	$-\frac{f'(x)}{sin^2 f(x)}$
$arcsinf(x)$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}$

$arccosf(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$arctgf(x)$	$\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$
$arccotgf(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$
$log_a f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)\cdot lna}$
$a^{f(x)}$	$f'(x)\cdot a^{f(x)}\cdot lna$
$[f(x)]^{g(x)}$	$[f(x)]^{g(x)}\left[g'(x)ln[f(x)]+g(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]$

Diamo un esempio di applicazione della derivata calcolando l'equazione della retta tangente alla curva $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ nel suo punto di ascissa $x_0 = -1$. L'equazione della retta tangente è la seguente

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Osservando che $f(-1) = 1$ e $f'(x) = 4x^3 - 2x$, da cui risulta $f'(-1) = -2$, si ha, sostituendo, l'equazione cercata

$$y = 1 - 2(x + 1) = 1 - 2x - 2 \Rightarrow y = -2x - 1.$$

7.4 Differenziale

Nelle applicazioni è molto comune approssimare un problema non lineare con uno lineare, la cui soluzione è sufficientemente vicina alla soluzione del problema originario; si dice che si linearizza il problema. Il più semplice esempio di applicazione di tale tecnica è quello che illustreremo ora, mostrando come sia possibile sostituire l'incremento di una funzione, a seguito di una variazione della sua variabile indipendente da x_0 ad un valore $x_0 + \Delta x$, con l'incremento di una funzione lineare.

Incominciamo con il ricordare la definizione e le proprietà di una applicazione lineare.

Definizione 7.1 – *Una funzione* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è una applicazione lineare se verifica le seguenti proprietà*

1) $f(x+y) = f(x) + f(y), \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$;
2) $f(\alpha x) = \alpha f(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}, \; \alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema 7.2 - $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è una applicazione lineare se e solo se esiste* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$f(x) = \alpha x.$$

Dim.

Se $f(x) = \alpha x$ si ha che

$$f(x+y) = \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$$

$$f(\beta x) = \alpha \beta x = \beta f(x) \qquad \forall \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Viceversa se f è lineare si ha $f(x) = f(1 \cdot x) = x \cdot f(1) = \alpha x$

dove $\alpha = f(1)$.

Definizione 7.2 – *Sia* $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in (a,b)$. *Si dice che* f *è* ***differenziabile*** *in* x_0 *se esiste una applicazione lineare* $d: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$\lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - d(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

In tal caso l'applicazione lineare è detta differenziale della funzione in x_0 *e lo si indica con* df.

La precedente definizione permette allora di sostituire l'incremento della funzione nel passaggio da x_0 ad $x_0 + \Delta x$ con l'incremento della funzione lineare df, quando Δx tende a zero, in modo che l'errore che si commette con tale sostituzione sia un infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δx. Pertanto, quando la funzione è differenziabile si ha che

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(\Delta x) + o(\Delta x).$$

La quantità $o(\Delta x)$ rappresenta l'errore che si commette nell'approssimare Δf con df. Quale forma assume l'applicazione lineare detta differenziale? Il seguente teorema risponde a questa domanda.

Teorema 7.3 – *Una funzione f è differenziabile in x_0 se e solo se è derivabile in x_0 e si ha*

$$df(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x \quad \forall \Delta x \in \mathbb{R}.$$

Dim.

Supponiamo che la funzione sia differenziabile. Si ha che

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - df(\Delta x)}{\Delta x} + \frac{df(\Delta x)}{\Delta x}\right] = \frac{df(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Quindi

$$f'(x_0) = \frac{df(\Delta x)}{\Delta x} = df(1).$$

Ne segue che f è derivabile in x_0 ed il valore della derivata coincide con il valore del differenziale nel punto 1. Viceversa, supponiamo la funzione derivabile e sia $df = f'(x_0)\Delta x$. Allora

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - df(\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = 0$$

da cui la differenziabilità.

Esempi.

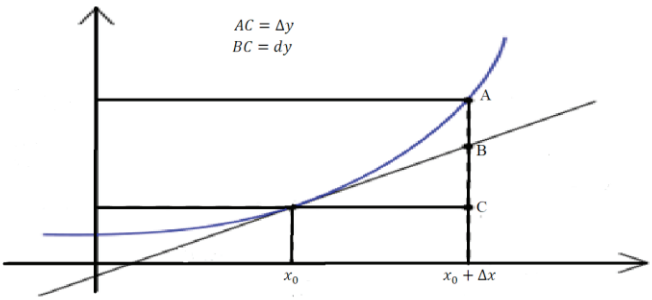
$$dsinx = cosx\Delta x; \quad dlnx = \frac{1}{x}\Delta x; \quad dx^2 = 2x\Delta x \; ecc.$$

Osserviamo che $dx = 1\Delta x$. Quindi l'incremento della variabile indipendente è uguale al differenziale della variabile stessa. Pertanto possiamo scrivere il differenziale come

$$df = dy = f'(x)dx$$

da qui deriva un ulteriore simbolo per indicare la derivata e cioè $\frac{dy}{dx}$.

Ricordando il significato geometrico di derivata, tutto questo vuol dire che in un intorno opportunamente piccolo di x_0 è possibile sostituire l'incremento della funzione nel passaggio da x_0 a $x_0 + \Delta x$, con l'incremento di ordinata sulla retta tangente. Una tale approssimazione è detta approssimazione del primo ordine.



Affrontiamo con il seguente esempio il concetto appena espresso.

Esempio.

Consideriamo la funzione $y = x^3 - 2x^2$ ed il punto $x_0 = 1$. Incrementando di $\Delta x = 0{,}023$ la variabile indipendente, si ha che l'incremento corrispondente della variabile dipendente coincide con

$$\Delta y = f(1{,}023) - f(1) \cong -0{,}02246$$

e il valore del differenziale della funzione con

$$dy = f'(1) \cdot (0{,}023) = -0{,}023.$$

Possiamo osservare dal confronto tra Δy e dy, che l'errore commesso è di appena 0,00054.

Il differenziale è comodo anche per calcolare il valore approssimato di una funzione in un punto utilizzando la relazione precedentemente ricavata

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + df(\Delta x).$$

Esempi.

Calcoliamo il valore di $\ln(1{,}34)$. Consideriamo la funzione $f(x) = lnx$ e siano $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}34$ e $f'(1) = 1$. Dalla relazione già vista otteniamo che

$$f(1 + 0{,}34) = f(1) + f'(1)\Delta x = ln1 + 1\Delta x = 0{,}34.$$

Calcoliamo ora il valore di $\sqrt{4{,}005}$. Consideriamo $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$ e $\Delta x = 0{,}005$. Risultando

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}\ ,$$

si ha

$$f(4 + 0{,}005) = f(4) + f'(4)\Delta x = 2 + \frac{1}{4}(0{,}005) = \\ = 2{,}00125.$$

Allo stesso modo, è semplice ricavare che il differenziale secondo di una funzione coincide con

$$d(dy) = d\{f'(x)dx\} = f''(x)dx \cdot dx + f'(x)d(dx).$$

Indicando il differenziale secondo con d^2y, si ha

$$d^2y = f''(x)(dx)^2.$$

Infatti la x è la variabile indipendente e dx è un numero. Se la x fosse a sua volta funzione di un'altra variabile, il termine $f'(x)d(dx)$ non andrebbe via ma varrebbe $f'(x)d^2x$. Nel caso delle funzioni oggetto di questo corso, questa situazione non interessa e possiamo pertanto indicare la derivata seconda nel seguente modo

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Più in generale si ha

$$d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n$$

e

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} \ .$$

Capitolo 8

Sviluppi del calcolo differenziale

In questo capitolo diamo i risultati principali che ci permetteranno di rappresentare graficamente una funzione.

8.1 Massimi e minimi relativi

Cominciamo con le seguenti definizioni.

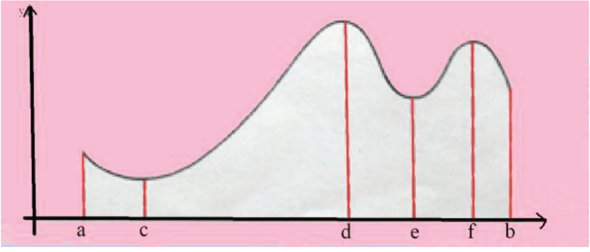
Definizione 8.1 – *Sia $f(x)$ una funzione definita nel dominio A. Il punto $x_0 \in A$ si dice* **massimo relativo** *per f se esiste un intorno di x_0 denotato con I_{x_0} tale che*

$$f(x_0) \geq f(x), \qquad \forall x \in I_{x_0}.$$

Definizione 8.2 – *Sia $f(x)$ una funzione definita nel dominio A. Il punto $x_0 \in A$ si dice* **minimo relativo** *per f se esiste un intorno di x_0 denotato con I_{x_0} tale che*

$$f(x_0) \leq f(x), \qquad \forall x \in I_{x_0}.$$

Osservando la figura, i punti di massimo relativo sono d, f ed a. Poiché $f(d) \geq f(x), \ \forall x \in [a,b]$ il punto di coordinate $(d, f(d))$ è un **massimo assoluto**. Analogamente i punti c, e e b sono punti di minimo relativo ed il punto $(c, f(c))$ è un **minimo assoluto**. Possiamo concludere che un massimo (minimo) assoluto è anche relativo mentre il viceversa non è vero.



Geometricamente la retta tangente al grafico della funzione nei punti di massimo e minimo relativi interni al dominio, è parallela all'asse delle ascisse. Negli estremi del dominio potrebbe non accadere.
Di seguito riportiamo una condizione necessaria per l'esistenza dei punti di massimo e di minimo relativi di una funzione.

Teorema di Fermat – *Sia $f: A \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di massimo o di minimo relativo interno ad A. Se f è derivabile in x_0, risulta $f'(x_0) = 0$.*

Dim.
Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo interno. Allora esiste un intorno completo I_{x_0} di x_0 tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in I_{x_0},$$

e quindi, considerato $x_0 + h \in I_{x_0}$, con $h \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0).$$

Pertanto

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \qquad per\ h > 0$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \qquad per\ h < 0.$$

Siccome la funzione è derivabile in x_0, ricordando il teorema della permanenza del segno si ha

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Essendo la funzione derivabile in x_0, risulterà $f'(x_0) = 0$. Con un ragionamento analogo si dimostra il caso in cui x_0 è un punto di minimo relativo interno.

Un punto dove la derivata si annulla è detto **punto stazionario**.

Analizziamo meglio le ipotesi del teorema. Supporre x_0 interno al dominio ci ha consentito di poter considerare incrementi h sia positivi che negativi e, pertanto, di calcolare sia la derivata destra che sinistra giungendo alla tesi. Questo non sarebbe stato dimostrabile nel caso in cui avessimo considerato il punto x_0 coincidente con uno degli estremi del dominio. In tal caso, infatti, sarebbe possibile considerare solo uno dei due limiti incontrati nella dimostrazione.

Anche l'ipotesi di derivabilità è fondamentale poiché potrebbe accadere che la funzione ha un minimo relativo in un punto dove non è derivabile come in un punto angoloso o una cuspide. Ovviamente il teorema di Fermat vale in particolare per i punti di massimo e di minimo assoluto che vanno cercati:

1) negli estremi dell'intervallo;
2) nei punti di non derivabilità;
3) nei punti stazionari.

8.2 Teoremi sulle funzioni derivabili

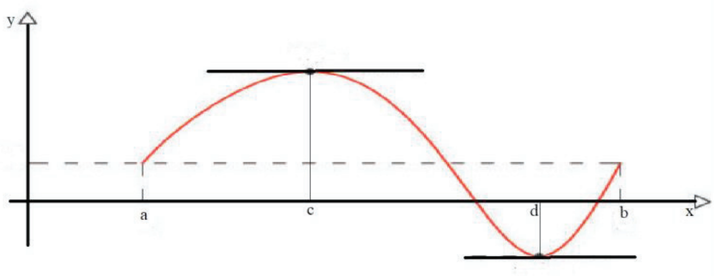
La derivabilità di una funzione consente di affrontare alcuni importanti teoremi che ci permettono di risolvere questioni fondamentali relative alle proprietà di una funzione.

Teorema di Rolle – *Se $f(x)$ è continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) con $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.*

Dim.

La funzione è continua nell'insieme chiuso e limitato e, per il teorema di Weierstrass, ha massimo e minimo assoluti. Nel caso banale che questi si trovano agli estremi dell'intervallo, la funzione è costante e quindi ha derivata sempre nulla. Infatti dalla terza ipotesi del teorema si ha che il massimo coinciderà con il minimo e dunque la funzione non può che essere costante. Se almeno uno dei due è interno ed è raggiunto per una certa ascissa c, poiché la funzione è derivabile, il teorema di Fermat ci garantisce che $f'(c) = 0$.

Geometricamente il teorema di Rolle afferma che esiste almeno un punto interno in cui la retta tangente è parallela all'asse delle x.



Esempio.
Verifichiamo che la funzione $f(x) = -x^2 + 3x$ considerata nell'intervallo $[1,2]$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle.
Si ha che $f(1) = f(2) = 2$. La funzione è continua in $[1,2]$ e derivabile in $(1,2)$.
Quindi è applicabile il teorema di Rolle ed esisterà un $c \in (1,2)$ con $f'(c) = 0$. Infatti

$$f'(x) = -2x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3/2.$$

Esempio.
Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & se \quad x \in [0,4) \\ 0 & se \quad x = 4 \end{cases}$$

e verifichiamo se soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle.

Essa è derivabile in $(a, b) = (0,4)$, è continua in $x = 0$ ma non è continua in $x = 4$. Inoltre, soddisfa l'ipotesi $f(0) = f(4)$, ma non soddisfa la tesi del teorema di Rolle, perché la derivata è costantemente uguale ad 1 in (0,4). La funzione non soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle e , pertanto, possiamo osservare come la continuità di $f(x)$ agli estremi dell'intervallo sia un'ipotesi indispensabile per il teorema di Rolle.

Teorema di Cauchy – *Se f e g sono due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b), allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Dim.

Costruiamo la seguente funzione

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x).$$

Essa è continua in $[a, b]$ poiché è somma di funzioni continue, derivabile in (a, b) poiché è somma di funzioni derivabili ed inoltre si ha che

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) = \\ = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

$$h(b) = f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b) = \\ = -f(a)g(b) + g(a)f(b).$$

Notiamo che $h(a) = h(b)$ e, quindi, la funzione $h(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Allora esiste almeno un $c \in (a, b)\ tale\ che\ \ h'(c) = 0$, cioè

$$h'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c) = 0,$$

da cui

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Ad esempio siano $f(x) = x^2 - 2x + 4$ e $g(x) = 4x^2 + 2x$ considerate nell'intervallo $[1,3]$. Entrambe le funzioni verificano le ipotesi del teorema di Cauchy e quindi

$$[f(3) - f(1)]g'(c) = [g(3) - g(1)]f'(c).$$

Cioè

$$(7-3)(8c+2) = (42-6)(2c-2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 32c + 8 = 72c - 72 \quad \Rightarrow \quad c = 2.$$

Teorema di Lagrange – *Se $f(x)$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b), allora esiste almeno un $c \in (a,b)$ tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

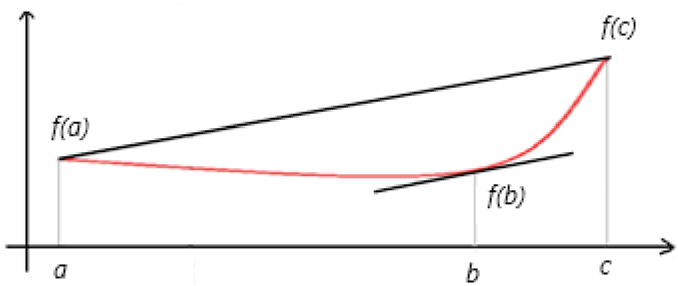
Dim.
Consideriamo la funzione $g(x) = x$ che verifica le due ipotesi qualunque sia l'intervallo $[a,b]$. Inoltre $g'(x) = 1$. Applichiamo il teorema di Cauchy ad $f(x)$ *e* $g(x)$ ottenendo

$$[f(b) - f(a)] = [b - a]f'(c).$$

Cioè

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometricamente vuol dire che, in queste ipotesi, ci sarà almeno un punto dove la retta tangente al grafico della funzione è parallela alla retta che congiunge gli estremi della funzione stessa.



Ad esempio, sia $f(x) = lnx - x$ nell'intervallo $[1, e]$. La funzione è continua in $[1, e]$ e derivabile in $(1, e)$. Ci sarà almeno un $c \in (1, e)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c} - 1 = \frac{1 - e + 1}{e - 1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad e - 1 - c \cdot e + c = 2c - c \cdot e \quad \Rightarrow \quad c = e - 1.$$

Noi sappiamo che la derivata di una costante è zero. Una conseguenza del teorema di Lagrange è che questo risultato si può invertire, come dimostrato dal seguente corollario.

Corollario 8.1 – *Se una funzione* $f(x)$ *è continua in* $[a, b]$, *derivabile in* (a, b) *e tale che la derivata è sempre nulla in* (a, b), *allora* $f(x)$ *è costante in tutto* $[a, b]$.

Dim.

Applichiamo il teorema di Lagrange all'intervallo $[a, x]$, dove x è un punto qualsiasi di $[a, b]$. Allora esiste un $c \in (a, x)$ per cui si ha

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

La derivata è sempre nulla e quindi $f'(c) = 0$. Questo vuol dire che $f(x) = f(a)$. Poichè x è arbitrario, la funzione assume lo stesso valore in ogni punto e dunque è costante.

Osserviamo che se la funzione non è definita in un intervallo come ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in (0,1) \\ 1 & \forall x \in (2,3) \end{cases}$$

può accadere che la derivata è nulla ma la funzione non è costante.

Corollario 8.2 – *Se due funzioni* $f(x)$ *e* $g(x)$ *sono continue in* $[a,b]$, *derivabili in* (a,b) *e tali che* $f'(x) = g'(x)$ *per ogni* $x \in (a,b)$, *allora esse differiscono per una costante.*

Dim.

Sia $$z(x) = f(x) - g(x),$$

ne segue che $$z'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Per il precedente corollario, $z(x)$ è costante in $[a,b]$ e quindi le funzioni differiscono per una costante.

Una importante conseguenza del teorema di Lagrange è il seguente

Criterio di monotonia – *Una funzione* $f(x)$, *continua in* $[a,b]$ *e derivabile in* (a,b) *è crescente (decrescente) se e solo se* $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$ $\big(f'(x) \leq 0 \; \forall x \in (a,b)\big)$.

Dim.

Cominciamo con il dimostrare che se la funzione è crescente, allora $f'(x) \geq 0, \; \forall x \in (a,b)$.

Osserviamo che la funzione è crescente se e solo se

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad \forall x, x_0 \in (a,b).$$

Infatti, se è verificata la disuguaglianza, numeratore e denominatore hanno lo stesso segno. Pertanto, se $x < x_0$ si ha $f(x) \leq f(x_0)$ e se

$x > x_0$ si ha $f(x) \geq f(x_0)$ e la funzione risulta crescente.

Viceversa, se la funzione è crescente, $x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ mentre $x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$. In ogni caso numeratore e denominatore hanno lo stesso segno e la disuguaglianza scritta sopra è verificata.

Per l'ipotesi e per il teorema della permanenza del segno, risulta

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Data l'arbitrarietà di x_0, la derivata sarà sempre maggiore o uguale a zero. In questa prima implicazione l'ipotesi che il dominio sia un intervallo è superflua.

Viceversa, se si ha $f'(x) \geq 0$, consideriamo $x_0, x \in (a,b)$. Per il teorema di Lagrange esiste un $c \in (x_0, x)$ tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c) \geq 0,$$

quindi la funzione è crescente. In modo perfettamente analogo si dimostra l'altro caso.

Ripetiamo che nell'implicazione $f'(x) \geq 0 \Rightarrow crescente$ è fondamentale l'ipotesi di intervallo. Ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} x & \forall x \in (0,1) \\ x - 3 & \forall x \in (2,3) \end{cases}$$

ha derivata sempre positiva ed uguale a 1 ma la funzione non è crescente. Infatti si può verificare ad esempio che

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

È chiaro dalla dimostrazione che se la derivata è strettamente positiva, allora la funzione è strettamente crescente. Il viceversa non è vero sempre. Ad esempio la funzione x^3 è strettamente crescente ma ha derivata nulla nel punto $x = 0$.

Consideriamo alcuni esempi di applicazione del criterio precedente. La funzione $y = 3^x$ è strettamente crescente su tutto ℝ, perché $y' = 3^x ln3$ è positiva. Così pure la funzione

$y = arccotg\ x$ è decrescente su tutto ℝ, perché $y' = \frac{-1}{1+x^2} < 0$.

La funzione $y = -2x^2$ ha derivata uguale a $-4x$, che è positiva per $x < 0$, negativa per $x > 0$; quindi la funzione $y = -2x^2$ è decrescente per $x > 0$ e crescente per $x < 0$; $x = 0$ è perciò un punto di massimo.

Lo studio dei massimi e dei minimi hanno anche interessanti applicazioni geometriche. Ad esempio, supponiamo di voler sapere tra tutti i rettangoli di perimetro fissato qual è quello di area massima. Chiamiamo x ed y i lati del rettangolo. Chiamando $2p$ il perimetro, possiamo scrivere che

$$x + y = p \Rightarrow y = p - x.$$

Esprimiamo l'area in funzione di una sola variabile

$$A(x) = x \cdot y = x \cdot (p - x) = px - x^2.$$

La derivata della nostra funzione area sarà

$$A'(x) = p - 2x > 0 \Rightarrow x < p/2.$$

Quindi la funzione area avrà un massimo nel punto di coordinate $\left(\frac{p}{2}, \frac{p^2}{4}\right)$. Inoltre per $x = p/2$ si ha $y = p - \frac{p}{2} = p/2$. Quindi, tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato, quello di area massima è il quadrato. Al contrario, è possibile dedurre che fra tutti i rettangoli di area fissata, il quadrato ha perimetro minimo. Questa è una proprietà sempre valida e non solo per il rettangolo. Infatti, fra tutti i poligoni di un numero fissato di lati e di uguale area, il poligono regolare è quello di perimetro minimo. Inoltre, fissata un'area, maggiore è il numero di lati e minore è il perimetro. Facendo tendere il numero di lati all'infinito, si ottiene che, fissata l'area, il cerchio ha il perimetro più piccolo. Analogamente nello spazio, a parità di volume, la sfera è la figura con minore area. Le bolle di sapone, ad esempio, sono sferiche.in quanto la natura cerca sempre di minimizzare l'energia privilegiando configurazioni di area minima.

8.3 Derivate e forme indeterminate $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Il calcolo delle derivate è importante anche per risolvere i limiti che si presentano nelle due forme indeterminate $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Ad essi è applicabile il seguente teorema che riportiamo senza dimostrazione.

Teorema di de l'Hopital – *Siano* $f(x)$ *e* $g(x)$ *due funzioni definite nell'intorno* I *di un punto* x_0*, derivabili in* $I-\{x_0\}$ *e* $g'(x) \neq 0$ $\forall x \neq x_0$. *Sia inoltre*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty\,.$$

Se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

esiste anche il limite del rapporto delle funzioni e si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Il teorema si estende anche al caso $x \to \pm\infty$

Consideriamo

$$\lim_{x\to 1} \frac{4x^2-4}{lnx} = \frac{0}{0}.$$

Sono verificate le ipotesi in un intorno di 1.

Scriviamo

$$\lim_{x\to 1} \frac{4x^2-4}{lnx} \underset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{8x}{\frac{1}{x}} = 8.$$

Oppure

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{lnx} = \frac{+\infty}{+\infty} \underset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = +\infty.$$

Osserviamo che se non esiste il limite delle derivate, non è detto che non possa esistere il limite di partenza. Consideriamo, ad esempio

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x+sinx}{2x-sinx}.$$

Sia al numeratore che al denominatore abbiamo la somma tra un infinito ed una funzione oscillante tra -1 e 1 e, quindi, entrambi i limiti risultano infiniti. Rispetto alla forma indeterminata ricavata, proviamo a considerare il limite delle derivate

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1+cosx}{2-cosx}.$$

Questo limite non esiste in quanto al numeratore e al denominatore presenta la somma tra un numero ed una funzione oscillante tra -1 e 1. Esiste, però, il limite assegnato. Infatti, dividendo numeratore e denominatore per x ed osservando che $\lim_{x\to\infty} \frac{sinx}{x} = 0$, risulta

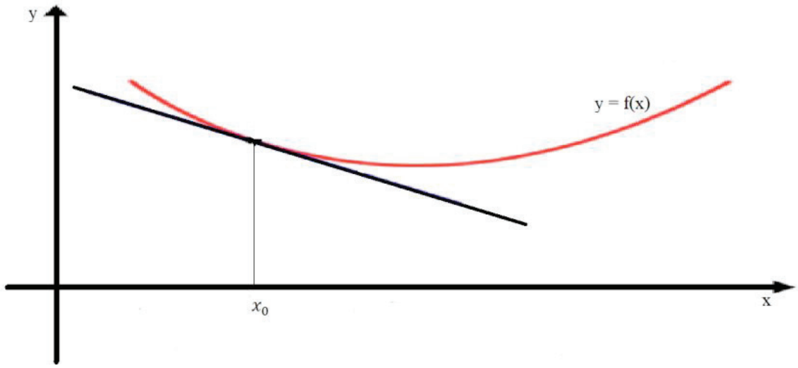
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{sinx}{x}}{2-\frac{sinx}{x}} = \frac{1}{2}.$$

8.4 Funzioni convesse e concave

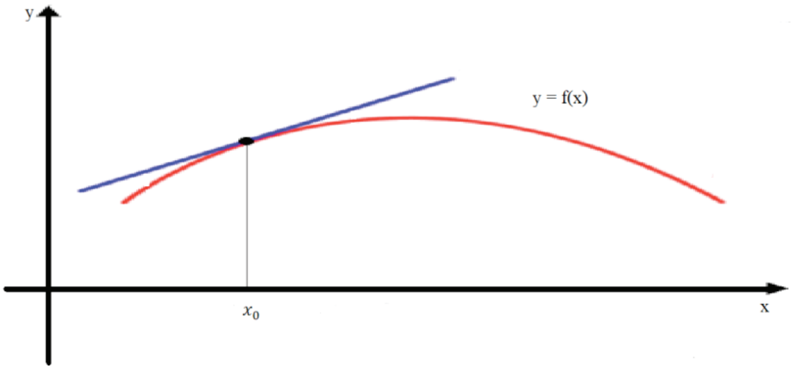
Indichiamo con $t(x)$ la retta tangente al grafico di una funzione.

Definizione 8.3 – *Si dice che in x_0 la funzione è convessa (concavità verso l'alto) se esiste un intorno completo I_{x_0} di x_0 tale che* $\forall x \in I_{x_0} \backslash \{x_0\}$, $f(x) > t(x)$.

La figura è molto utile per chiarire il concetto



Definizione 8.4 – *Si dice che in x_0 la funzione è concava (concavità verso il basso) se esiste un intorno completo I_{x_0} di x_0 tale che* $\forall x \in I_{x_0} \backslash \{x_0\}$, $f(x) < t(x)$.



Definizione 8.5 *– Si dice che una funzione $f(x)$ ha in x_0 un* ***punto di flesso*** *se in tale punto il grafico cambia concavità.*

Una funzione derivabile k volte con continuità su un insieme A si dice di classe $C^k(A)$.

Criterio di convessità – *Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo I e di classe $C^2(I)$. Sia x_0 un punto interno di questo intervallo. Se $f''(x_0) > 0$ la funzione è convessa in x_0. Se $f''(x_0)<0$, la funzione è concava in x_0.*

Dim.

Consideriamo l'equazione della retta tangente $t(x)$ al grafico della funzione nel punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Chiamiamo

$$g(x) = f(x) - t(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)].$$

Notiamo subito, come è ovvio, che $g(x_0) = 0$.

La funzione $g(x)$ è derivabile due volte essendo differenza di funzioni derivabili due volte e si ha

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0).$$

Pertanto $g'(x_0) = 0$. Inoltre

$$g''(x) = f''(x).$$

Supponiamo $f''(x_0) > 0$. Essendo $g''(x) = f''(x)$ continua, si ha che

$$\lim_{x \to x_0} g''(x) = g''(x_0) = f''(x_0) > 0.$$

Per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che $g''(x) > 0 \quad \forall x \in I_{x_0}$.

Ma $g''(x)$ è la derivata prima della funzione $g'(x)$ che risulta quindi crescente in I_{x_0}. Pertanto si ha

$$g'(x) < g'(x_0) = 0 \;\; \forall x \in I_{x_0} \; con \; x < x_0,$$

$$g'(x) > g'(x_0) = 0 \;\; \forall x \in I_{x_0} \; con \; x > x_0.$$

Possiamo allora concludere che x_0 è un minimo relativo per $g(x)$, cioè

$$g(x) > g(x_0) = 0 \;\; \forall x \in I_{x_0} \; con \; x \neq x_0.$$

Questo vuol dire che

$$f(x) > t(x) = 0 \;\; \forall x \in I_{x_0} \; con \; x \neq x_0.$$

Pertanto la funzione $f(x)$ è convessa in x_0. Analogamente si dimostra che se $f''(x_0)$<*0* la funzione $f(x)$ è concava in x_0.

Ad esempio, se consideriamo la funzione $y = 2x^3 + 11$, si ha

$$y'(x) = 6x^2 \quad e \quad y''(x) = 12x.$$

La funzione è convessa in tutti i valori positivi della variabile indipendente ed è concava per i valori negativi. Il punto $(0,11)$ è un punto di flesso.

Esiste una condizione necessaria ma non sufficiente per i flessi.

Teorema 8.1 – *Sia data una funzione $y = f(x)$ definita in $[a, b]$ e derivabile due volte. Se la funzione ha un flesso in un punto $x_0 \in (a, b)$ allora $f''(x_0) = 0$.*

La condizione non è sufficiente. Ad esempio sia

$$y(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad y'(x) = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad y''(x) = 12x^2.$$

La derivata seconda si annulla in $x = 0$ ma in tale punto c'è un minimo relativo e non un flesso. La funzione potrebbe anche non essere derivabile ed avere un flesso. Consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & se\ x \leq -1 \\ 2x^2 + 4x + 1 & se\ x > -1 \end{cases}.$$

Tale funzione è di classe $C^0(\mathbb{R})$ ma non è derivabile in $x = -1$. Infatti la derivata sinistra vale 2 e quella destra zero. Cioè $x = -1$ è un punto angoloso. Prima di tale punto la funzione è un ramo di parabola concavo e dopo diventa un ramo di parabola convesso. Per definizione quindi il punto $(-1, -1)$ è un punto di flesso. Come immediata conseguenza del criterio di convessità, si ha il seguente teorema.

Teorema 8.2 – *Se $y = f(x)$ è derivabile due volte in un intorno completo I_{x_0} di x_0 e si verifica $\forall x \in I_{x_0} - \{x_0\}$ una delle due seguenti condizioni*

- $f''(x) > 0\ per\ x < x_0\ e\ f''(x) < 0\ per\ x > x_0$
- $f''(x) < 0\ per\ x < x_0\ e\ f''(x) > 0\ per\ x > x_0$

allora x_0 è un punto di flesso.

Se la funzione è derivabile nel punto di flesso, allora esiste la retta tangente in tale punto. Si parla di **flesso orizzontale** se la tangente è parallela all'asse x. Altrimenti si parla di **flesso obliquo.** Se la derivata è infinita si parla, come già detto, di **flesso verticale**. Se esiste un intorno del punto di flesso in cui la funzione è concava a sinistra e convessa a destra, si parla di **flesso ascendente.** Se invece è convessa a sinistra e concava a destra, si parla di **flesso discendente.**

Ad esempio sia $y = x^3 - 2x^2 + x$. Si ha $y''(x) = 6x - 4$. Quindi la funzione è convessa dopo $2/3$ e concava prima. Il punto $x = 2/3$ è un flesso ascendente. Si ha anche che $y''\left(\frac{2}{3}\right) = 0$. Invece $y'\left(\frac{2}{3}\right) = -1/3$ e pertanto il flesso è obliquo. Consideriamo, invece, $y = \sqrt[3]{8 - x^3}$. Si ha

$$y'(x) = -\frac{x^2}{\sqrt[3]{(8 - x^3)^2}}$$
$$y''(x) = \frac{-16x}{(8 - x^3)\sqrt[3]{(8 - x^3)^2}}\,.$$

Entrambe le derivate sono definite in $\mathbb{R} - \{2\}$. Si ha

$$y''(x) > 0 \;\forall x < 0 \cup x > 2\,.$$

La funzione è convessa per $x < 0 \cup x > 2$ ed è concava per $0 < x < 2$. Abbiamo due punti di flesso in $x = 0$ e $x = 2$. Si ha

$$y'(0) = 0\,.$$

Quindi il punto $(0,2)$ è un flesso discendente orizzontale. Invece

$$\lim_{x \to 2} y'(x) = -\infty\,.$$

Il punto $(2,0)$ è un flesso ascendente verticale.

Nel caso non sia semplice studiare il segno delle derivate, è possibile cercare massimi, minimi e flessi orizzontali con le derivate successive.

Queste vengono indicate con il simbolo $f^{(n)}(x)$. Se l'indice è pari, si dice **derivata di ordine pari,** se è dispari si dice **derivata di ordine dispari.**

Teorema 8.3 – *Sia $f(x) \in C^{(n)}(a,b)$ e sia $x_0 \in (a,b)$ con*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0\ ;$$
$$f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad \forall\, n \geq 2.$$

Se la derivata n-esima diversa da zero è di ordine pari, allora in x_0 si ha

- *un massimo relativo se $f^{(n)}(x_0) < 0$;*
- *un minimo relativo se $f^{(n)}(x_0) > 0$.*

Se la derivata n-esima diversa da zero è di ordine dispari, allora in x_0 si ha

- *un flesso orizzontale discendente se $f^{(n)}(x_0) < 0$;*
- *un flesso orizzontale ascendente se $f^{(n)}(x_0) > 0$.*

Sia $y = 4x^3 - 3x + 1$. Si ha

$$y'(x) = 12x^2 - 3 \Rightarrow y'(x) = 0\ per\ x = \pm\frac{1}{2}.$$

Inoltre

$$y''(x) = 24x$$

$$y''\left(\frac{1}{2}\right) = 12 > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ minimo\ relativo;$$

$$y''\left(-\frac{1}{2}\right) = -12 < 0\ \Rightarrow x = -\frac{1}{2}\ massimo\ relativo.$$

Capitolo 9

Studio di funzioni

Questo capitolo è dedicato allo studio delle proprietà delle funzioni e della loro rappresentazione grafica. Si chiamano **funzioni algebriche** le funzioni razionali intere, razionali fratte e irrazionali. Le prime sono espresse tramite un polinomio, le seconde tramite il rapporto tra polinomi, mentre le ultime presentano la variabile indipendente sotto il segno di radice. Si chiamano invece **trascendenti** le funzioni logaritmiche, esponenziali e goniometriche. É importante avere presente che

- le funzioni razionali intere hanno come dominio $\mathbb{R}$;
- le funzioni razionali fratte hanno per dominio $\mathbb{R}$ esclusi i punti che annullano il denominatore;
- la funzione radice con indice pari ha come dominio i valori non negativi di x;
- le funzioni goniometriche $sinx$ e $cosx$ hanno come dominio $\mathbb{R}$, la funzione tgx è definita per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ mentre la funzione $cotgx$ è definita per $x \neq k\pi$;
- le funzioni $arctgx$ e $arccotgx$ hanno come dominio $\mathbb{R}$, mentre le funzioni $arcsinx$ e $arccosx$ sono definite $\forall x \in [-1,1]$;
- la funzione esponenziale ha come dominio $\mathbb{R}$;
- la funzione logaritmica ha come dominio i numeri reali positivi.

Se indichiamo con I il dominio di una certa funzione $f(x)$, allora

- $y = [f(x)]^n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow D(y) = I$;
- $y = [f(x)]^{-n}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow D(y) = \{x \in I: f(x) \neq 0\}$;
- $y = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow D(y) = \begin{cases} x \in I: se\ n \text{ è } dispari \\ x \in I: f(x) \geq 0\ se\ n \text{ è } pari; \end{cases}$

- $y = [f(x)]^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow D(y) = \begin{cases} x \in I: f(x) \geq 0 \ \ se\ \alpha > 0 \\ x \in I: f(x) > 0 \ \ se\ \alpha < 0; \end{cases}$
- $y = sinf(x) \Rightarrow D(y) = I$;
- $y = cosf(x) \Rightarrow D(y) = I$;
- $y = tgf(x) \Rightarrow D(y) = \left\{x \in I: f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$;
- $y = cotgf(x) \Rightarrow D(y) = \{x \in I: f(x) \neq k\pi\}$;
- $y = arcsinf(x) \Rightarrow D(y) = \{x \in I: -1 \leq f(x) \leq 1\}$;
- $y = arccosf(x) \Rightarrow D(y) = \{x \in I: -1 \leq f(x) \leq 1\}$;
- $y = arctgf(x) \Rightarrow D(y) = I$;
- $y = arccotgf(x) \Rightarrow D(y) = I$.

Se abbiamo due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ che hanno come campi di esistenza gli insiemi A e B rispettivamente, allora

- $D[f(x) \pm g(x)] = A \cap B$;
- $D[f(x) \cdot g(x)] = A \cap B$;
- $D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \{x \in A \cap B: g(x) \neq 0\}$;
- $D[f(x)]^{g(x)} = \{x \in A \cap B: f(x) > 0\}$.

9.1 Studio di funzioni razionali

1) $\boldsymbol{y = \frac{x^2-1}{x}}$

Il campo di esistenza è $\mathbb{R} - \{0\}$. Essendo

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{-x} = -\frac{x^2 - 1}{x} = -f(x),$$

la funzione è dispari e sarà simmetrica rispetto all'origine.

La funzione assegnata non presenta intersezioni con l'asse delle ordinate. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2-1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

ricaviamo le intersezioni $(-1,0)$, $(1,0)$ con l'asse delle ascisse. Studiamo ora il segno della funzione

$$f(x) > 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x} > 0.$$

Svolgendo la disequazione, si vede che la funzione è positiva per $-1 < x < 0 \cup x > 1$.

Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-1}{x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty.$$

Pertanto la retta $x = 0$ è asintoto verticale.

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2-1}{x} = \pm\infty$$

quindi non ci sono asintoti orizzontali.

Essendo

$$m = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1,$$

$$q = \lim_{x\to \pm\infty} \left(\frac{x^2-1}{x} - x\right) = \mathit{lim}_{x\to \pm\infty} \frac{-1}{x} = 0,$$

la retta $y = x$ è asintoto obliquo.

Studiamo gli intervalli di crescenza e decrescenza calcolando la derivata prima e studiandone il segno

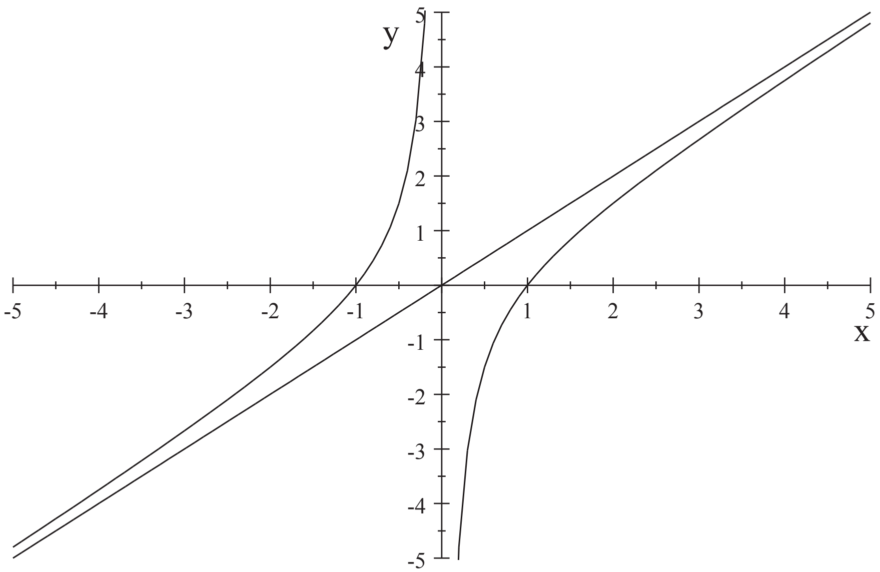
$$y'(x) = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

La funzione è sempre crescente.

Studiamo gli intervalli di concavità e convessità calcolando la derivata seconda e studiandone il segno

$$y''(x) = \frac{-2}{x^3} > 0 \ \ \forall x < 0.$$

La funzione è convessa per $x < 0$ e concava per $x > 0$.



2) $\boldsymbol{y = \frac{(2-x)^3}{3x-12}}$

La funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R} - \{4\}$. La funzione non è né pari e né dispari e non presenta simmetrie, essendo

$$f(-x) \neq f(x) \; e \; f(-x) \neq -f(x).$$

Ricaviamo le intersezioni con gli assi risolvendo i seguenti sistemi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{8}{-12} = -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

Otteniamo le seguenti intersezioni

$$\left(0, -\frac{2}{3}\right) \quad e \quad (2,0).$$

Studiamo il segno della funzione

$$f(x) > 0 \Rightarrow \frac{(2-x)^3}{3x-12} > 0.$$

Risolvendo la disequazione, si ottiene che la funzione è positiva per $2 < x < 4$.

Determiniamo gli asintoti della funzione. Essendo

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{(2-x)^3}{3x-12} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{(2-x)^3}{3x-12} = -\infty,$$

la retta $x = 4$ è asintoto verticale.

Invece

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(2-x)^3}{3x-12} = -\infty,$$

pertanto non ci sono asintoti orizzontali.

Inoltre, essendo

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2-x)^3}{3x^2-12x} = \mp\infty.$$

non ci sono asintoti obliqui.

Cerchiamo ora gli asintoti parabolici calcolando i seguenti limiti

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2-x)^3}{3x^3-12x^2} = -\frac{1}{3},$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{-x^3+6x^2-12x+8}{3x^2-12x} + \frac{1}{3}x\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{-3x^3+18x^2-36x+24+3x^3-12x^2}{9x^2-36x}\right]$$

$$= \frac{2}{3},$$

$$c = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{-x^3+6x^2-12x+8}{3x-12} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x\right] = -\frac{4}{3},$$

e si ha che

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

è asintoto parabolico.

Studiamo gli intervalli di crescenza e decrescenza calcolando la derivata prima e studiandone il segno

$$y'(x) = \frac{3\cdot(2-x)^2\cdot(-1)\cdot(3x-12) - 3\cdot(2-x)^3}{(3x-12)^2}$$

$$= \frac{(2-x)^2[-9x+36-6+3x]}{(3x-12)^2} =$$

$$= \frac{(2-x)^2[-6x+30]}{(3x-12)^2}.$$

Quindi

$$y' > 0 \Rightarrow x < 5.$$

Pertanto la funzione è crescente per $x < 5$. Il punto $(5, -9)$ è un massimo relativo.

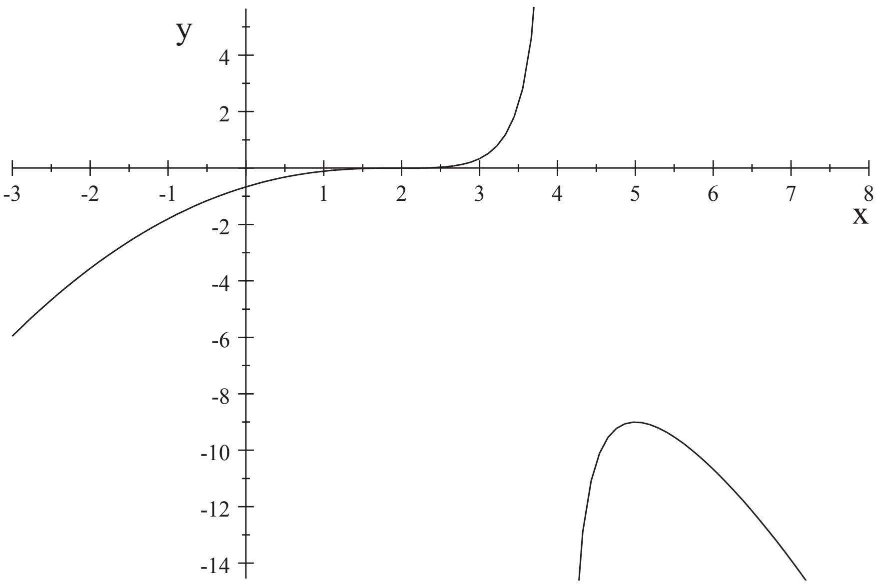
Studiamo gli intervalli di concavità e convessità calcolando la derivata seconda e studiandone il segno

$$y''(x) = \frac{(-2x + 4)(x^2 - 10x + 28)}{3(x - 4)^3}.$$

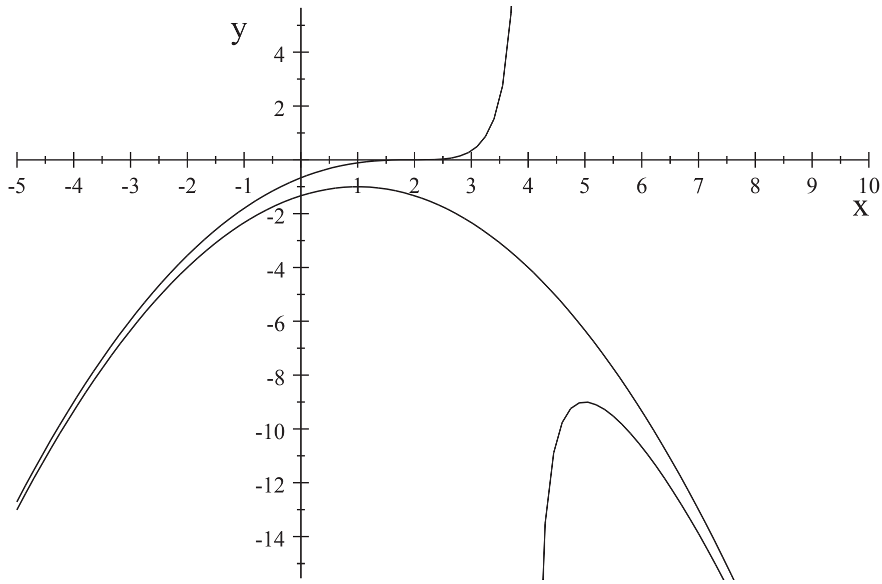
Quindi

$$y'' > 0 \Rightarrow 2 < x < 4.$$

Pertanto la funzione è convessa per $2 < x < 4$ e concava per $x < 2$ e $x > 4$. Il punto $F(2{,}0)$ è un punto di flesso orizzontale ascendente.



Riportiamo il grafico anche con l'asintoto parabolico



3) $y = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$

Poiché $x^2 + 1$ non si annulla mai, il dominio è $\mathbb{R}$. La funzione non ha simmetrie essendo

$$f(-x) \neq f(x) \; e \; f(-x) \neq -f(x).$$

Ricaviamo le intersezioni con gli assi risolvendo i due seguenti sistemi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x = 1\,. \end{cases}$$

Otteniamo, quindi, i punti $(1,0), (0,1)$.

Studiamo ora il segno della funzione

$$f(x) > 0 \Rightarrow \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} > 0.$$

Il denominatore è sempre positivo, il numeratore non è mai negativo. La funzione, quindi, non è mai negativa.

Determiniamo gli asintoti della funzione. Calcoliamo i limiti agli estremi del campo di esistenza

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = 1 \,.$$

Quindi la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale.

Studiamo ora la crescenza e decrescenza della funzione calcolando la derivata prima

$$y'(x) = \frac{(2x - 2)(x^2 + 1) - (x^2 - 2x + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2} \,.$$

Risulta

$$y'(x) > 0 \; \forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \,.$$

Pertanto la funzione ha un minimo relativo in $(1,0)$ ed un massimo relativo in $(-1,2)$.

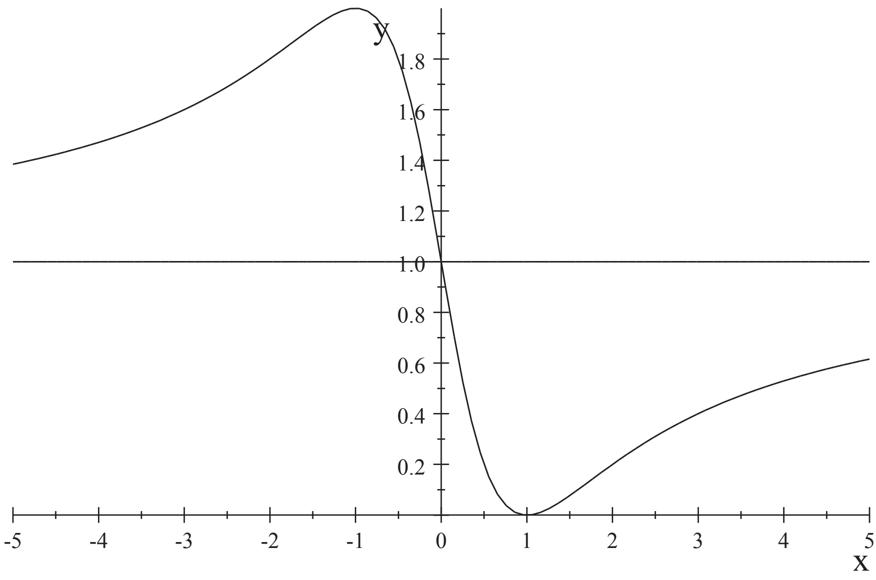
Analizziamo la convessità e concavità calcolando la derivata seconda

$$y''(x) = \frac{4x \cdot (x^2 + 1)^2 - (2x^2 - 2) \cdot 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4}$$
$$= \frac{(x^2 + 1)[-4x^3 + 12x]}{(x^2 + 1)^4} \,.$$

Quindi

$$y''(x) > 0 \;\; \forall x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) .$$

I punti $F_1 = \left(-\sqrt{3}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$ $F_2 = \left(\sqrt{3}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$ $F_3 = (0,1)$ sono punti di flesso.



4) $y = \frac{x-1}{x^2}$

Il campo di esistenza della funzione è $\mathbb{R} - \{0\}$. La funzione non ha simmetrie essendo

$$f(-x) \neq f(x) \; e \; f(-x) \neq -f(x)\,.$$

Ricaviamo le intersezioni con gli assi. La funzione non può intersecare l'asse delle ordinate essendo $x \neq 0$. Determiniamo le intersezioni con l'asse delle ascisse risolvendo il seguente sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1. \end{cases}$$

Otteniamo una intersezione nel punto (1,0).

Studiamo ora il segno della funzione

$$f(x) > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x^2} > 0.$$

La funzione risulta positiva per $x > 1$ e negativa per $x < 1$.

Determiniamo gli asintoti della funzione. Dal limite

$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{x-1}{x^2} = -\infty$$

ricaviamo che la retta $x = 0$ è asintoto verticale per la funzione.

Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-1}{x^2} = 0.$$

Quindi la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale.

Studiamo la crescenza e decrescenza della funzione calcolando la derivata prima

$$y'(x) = \frac{x^2 - (x-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x^2 + 2x}{x^4} = \frac{-x+2}{x^3}.$$

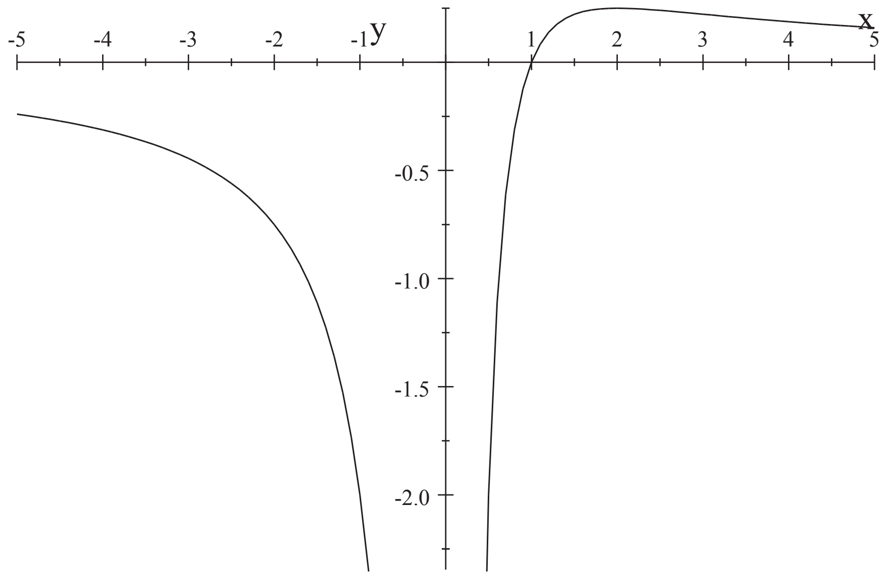
La derivata prima è maggiore di zero per $0 < x < 2$ e la funzione presenta un massimo relativo nel punto $\left(2, \frac{1}{4}\right)$.

Analizziamo la convessità e concavità calcolando la derivata seconda

$$y''(x) = \frac{-x^3 - (-x+2) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2x^3 - 6x^2}{x^6} = \frac{2x-6}{x^4}.$$

$$y''(x) > 0 \quad \forall x \in (3, +\infty)$$

La funzione, quindi, è convessa per $x > 3$ e concava per $x < 3$. Il punto $F(3, \frac{2}{9})$ è un punto di flesso.



5) $\boldsymbol{y = \frac{x^3+1}{x}}$

La funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

La funzione non ha simmetrie essendo

$$f(-x) \neq f(x) \; e \; f(-x) \neq -f(x).$$

Ricaviamo le intersezioni con gli assi. La funzione non può intersecare l'asse delle ordinate essendo $x \neq 0$. Determiniamo le intersezioni con l'asse delle ascisse risolvendo il seguente sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^3+1}{x} = 0 \Rightarrow x = -1 \,. \end{cases}$$

Otteniamo un'intersezione nel punto $(-1{,}0)$.

Studiamo il segno della funzione

$$f(x) > 0 \Rightarrow \frac{x^3+1}{x} > 0.$$

Risolvendo la disequazione otteniamo che la funzione è positiva per $x < -1$ e per $x > 0$ e negativa per $-1 < x < 0$.

Determiniamo gli asintoti della funzione. Dal limite

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{x^3+1}{x} = \pm\infty$$

ricaviamo che l'asse delle ordinate, $x = 0$, è un asintoto verticale.
Calcolando i limiti agli estremi del campo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1}{x} = +\infty.$$

vediamo che la funzione non presenta asintoti orizzontali.

La differenza di grado tra numeratore e denominatore è pari a 2. Ricerchiamo, quindi, l'eventuale asintoto parabolico. Risulta

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1}{x^3} = 1\,;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3+1}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0\,;$$

$$c = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+1}{x} - x^2\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0\,.$$

La parabola $y = x^2$ è dunque asintoto curvilineo.

Studiamo il segno della derivata prima per stabilire la crescenza e la decrescenza della funzione

$$y'(x) = \frac{2x^3-1}{x^2} > 0$$

La derivata prima risulta positiva per $x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ e negativa per $x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. In $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ la funzione presenta un minimo relativo.

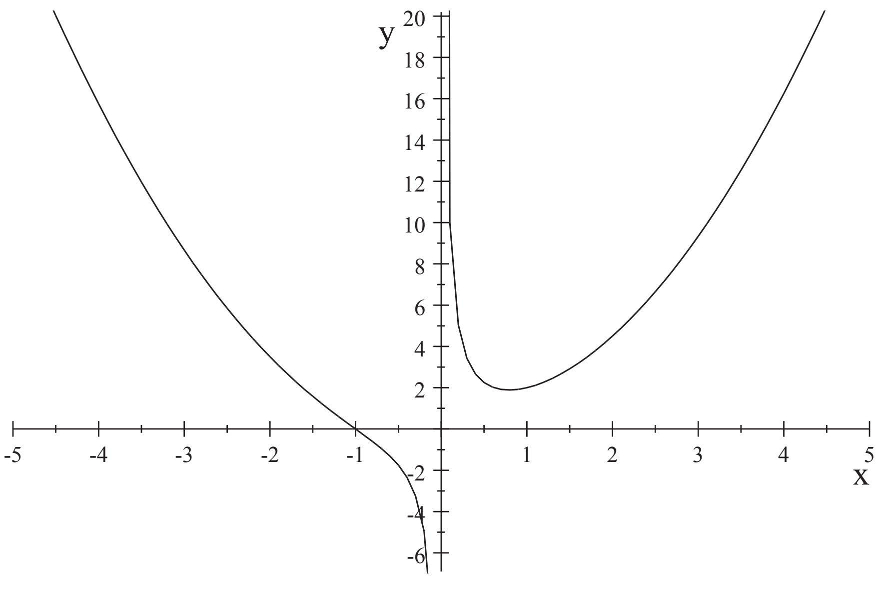
Analizziamo la convessità e concavità calcolando la derivata seconda

$$y''(x) = \frac{2x^4 + 2x}{x^4} = \frac{2x^3 + 2}{x^3}.$$

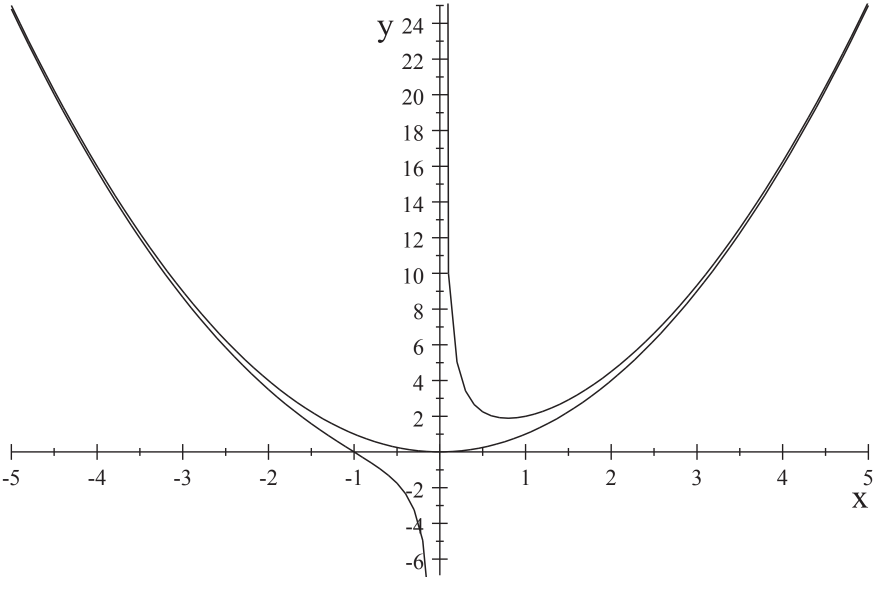
Risulta

$$y''(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty).$$

La funzione è quindi convessa per $x < -1$ e per $x > 0$ e concava per $-1 < x < 0$. Il punto di intersezione (-1,0) è anche punto di flesso



Aggiungiamo al grafico anche l'asintoto parabolico



6) $y = \frac{1}{4x^4 - 5x^2 + 1}$

Determiniamo il campo di esistenza della funzione.

Poniamo $4x^4 - 5x^2 + 1 \neq 0$.

Dalla sostituzione $x^2 = y$ ricaviamo:

$$4y^2 - 5y + 1 = 0 \Rightarrow \quad y = \frac{+5 \mp \sqrt{25-16}}{8} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{4}, y_2 = 1$$

cioè:

$$x_{1,2} \neq \pm\frac{1}{2}\ , x_{3,4} \neq \pm 1$$

C.E.$\equiv \left\{x \in \mathbb{R}: (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)\right\}$

Poiché $f(-x) = f(x)$ la funzione è pari ed è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate.

Ricaviamo le intersezioni con gli assi.

$$\begin{cases} \frac{1}{4x^4-5x^2+1} = 0 \; mai \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4x^4-5x+1} \longrightarrow \; y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Il punto di coordinate $(0,1)$ è l'unica intersezione della funzione con l'asse y. Studiamo ora il segno della funzione. Scomponendo il trinomio al denominatore, otteniamo

$$\frac{1}{4\left(x^2-\frac{1}{4}\right)(x^2-1)} > 0\,.$$

Con la regola dei segni, dal momento che entrambe le disequazioni di secondo grado ottenute risultano verificate per valori esterni, otteniamo che la funzione è positiva per $x < -1, -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, x > 1.$

Determiniamo gli asintoti della funzione.

Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to -1^{\pm}} \frac{1}{4x^4-5x^2+1} = \pm\infty.$$

La retta $x = -1$ è asintoto verticale.

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^{\pm}} \frac{1}{4x^4-5x^2+1} = \pm\infty$$

La retta $x = -\frac{1}{2}$ è asintoto verticale.

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^{\pm}} \frac{1}{4x^4-5x^2+1} = \pm\infty$$

La retta $x = \frac{1}{2}$ è asintoto verticale.

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{1}{4x^4-5x^2+1} = \pm\infty$$

La retta $x = 1$ è asintoto verticale.

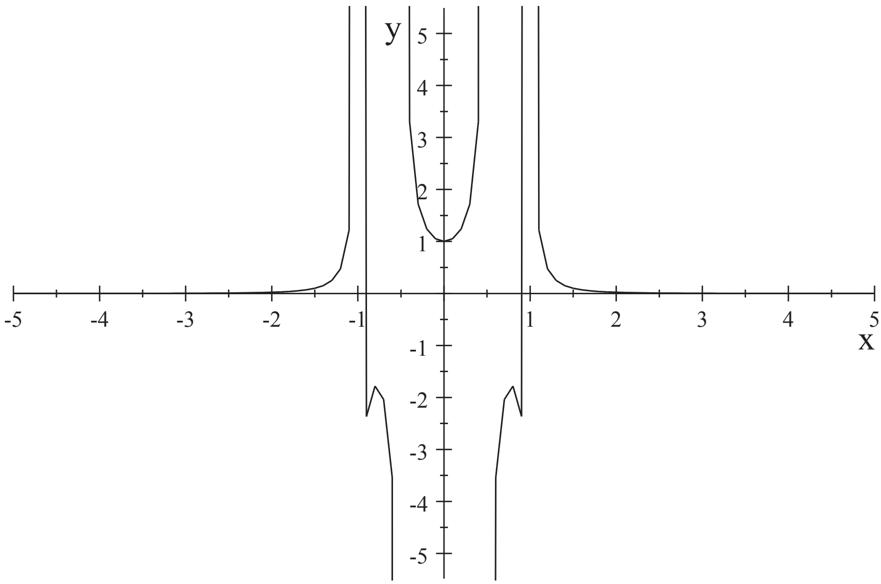
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{4x^4-5x^2+1}=0$$

La retta $y=0$ è asintoto orizzontale per la funzione.
Studiamo il segno della derivata prima per stabilire la crescenza e la decrescenza della funzione

$$y'(x)=\frac{-16x^3+10x}{(4x^4-5x^2+1)^2}=\frac{x\cdot(-16x^2+10)}{(4x^4-5x^2+1)^2}$$

Si ha che $y'(x)>0\Rightarrow x<-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}\cup 0<x<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}$.

Avremo due massimi relativi per $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}$ ed un minimo relativo nel punto $(0,1)$. Omettiamo lo studio della derivata seconda.



7) $\boldsymbol{y=\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2-2x}}$

Da $x^2-2x\neq 0$ otteniamo $x\neq 0$ e $x\neq 2$. Quindi la funzione è definita $\forall x\in\mathbb{R}-\{0,2\}$.

La funzione non presenta simmetrie dal momento che risulta

$$f(-x) \neq f(x) \; e \; f(-x) \neq -f(x)$$

Ricaviamo le intersezioni con gli assi.

La funzione non può intersecare l'asse delle ordinate. Verifichiamo le intersezioni con l'asse delle ascisse

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 2x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \end{cases}$$

Tra i divisori del termine noto, vediamo che 1 è radice del polinomio. Applicando la regola di Ruffini oppure dividendo per $x - 1$, otteniamo che

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 1)(x^2 - 2x - 3) = 0$$

Applicando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado, vediamo che ci sono altre due soluzioni dell'equazione e cioè -1 e 3. Quindi i punti di coordinate $(-1{,}0)$ $(1{,}0)$ $(3{,}0)$ sono i punti di intersezione della funzione con l'asse delle x.

Studiamo ora il segno della funzione

$$\frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 2x} > 0 \Rightarrow \frac{(x - 1)(x^2 - 2x - 3)}{x^2 - 2x} > 0.$$

Svolgendo la disequazione, otteniamo che la funzione è positiva per

$$-1 < x < 0 \cup 1 < x < 2 \cup x > 3.$$

Determiniamo gli asintoti della funzione.
Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 2x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 2x} = -\infty$$

Quindi la retta $x = 0$ è asintoto verticale.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 2x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 2x} = -\infty$$

Quindi la retta $x = 2$ è asintoto verticale.

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 2x} = \pm\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali.

Verifichiamo la presenza di asintoti obliqui.

$$m = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2} = +1$$

$$q = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 2x} - x = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{-x^2 - x + 3}{x^2 - 2x} = -1$$

La retta $y = x - 1$ è asintoto obliquo per la funzione.

Studiamo il segno della derivata prima per stabilire la crescenza e la decrescenza della funzione.

Calcoliamo la derivata

$$y'(x) = \frac{(3x^2 - 6x - 1)(x^2 - 2x) - (x^3 - 3x^2 - x + 3)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} =$$

$$= \frac{x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 6}{(x^2 - 2x)^2}.$$

Purtroppo nessun divisore del termine noto è radice. Le soluzioni reali, se esistono, non sono razionali. Potremmo in linea teorica provare ad applicare le formule di Cardano ma sono lunghissime e pertanto gravose. Notiamo invece che il polinomio $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 6$, sia a $-\infty$ che a $+\infty$, tende a $+\infty$.

Inoltre la sua derivata $4x^3 - 12x^2 + 14x - 6$ è positiva per $x > 1$. Quindi la funzione $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 6$ ha un minimo nel punto $(1,4)$. Quindi il polinomio è sempre positivo. Pertanto

$$y'(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 6}{(x^2 - 2x)^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

La nostra funzione è quindi sempre crescente.

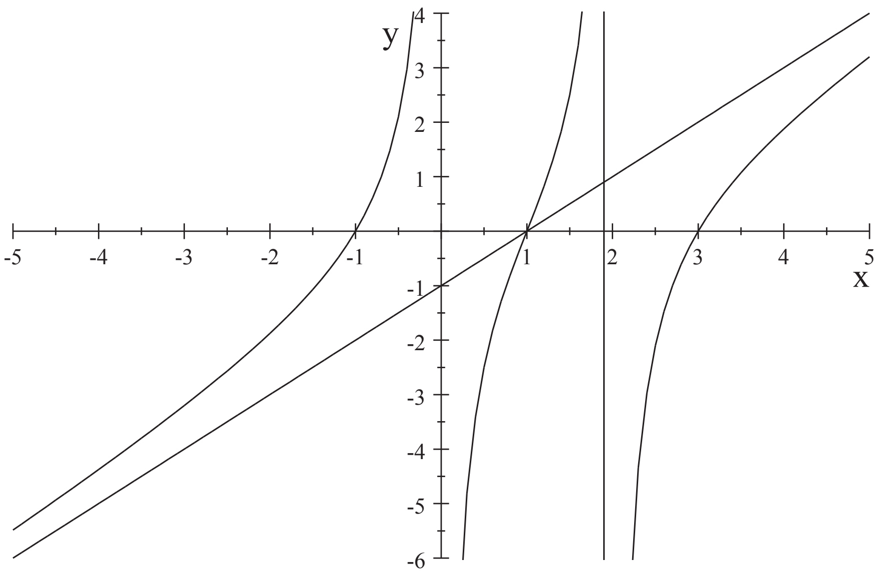
Analizziamo la convessità e concavità calcolando la derivata seconda

$$y''(x) = \frac{-6x^5 + 30x^4 - 72x^3 + 96x^2 - 48x}{(x^2 - 2x)^4}$$

È possibile abbassare di grado il numeratore ottenendo che

$$y''(x) > 0, \qquad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (1,2).$$

Quindi la funzione è convessa per $x < 0$ e tra $1 < x < 2$ e concava negli altri intervalli. Dal dominio della funzione deduciamo che $F(1,0)$ è l'unico punto di flesso.



8) $\boldsymbol{y = \frac{2|x|-x^2-x}{x+1}}$

Dividiamo la funzione in due

$$y_1 = \frac{-x^2 + x}{x + 1} \quad per\ x \geq 0$$

$$y_2 = \frac{-x^2 - 3x}{x + 1} \quad per\ x < 0$$

La prima funzione è sempre definita in $\mathbb{R}^+$.

Ricaviamo le intersezioni con gli assi.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ \dfrac{-x^2 + x}{x + 1} = 0 \Rightarrow x = 1\ e\ x = 0 \end{cases}$$

I punti di coordinate $(0,0)$ e $(1,0)$ sono punti di intersezione della funzione con gli assi.

Studiamo ora il segno della funzione

$$\frac{-x^2 + x}{x + 1} > 0\,.$$

La funzione risulta positiva per $0 < x < 1$.

Determiniamo gli asintoti della funzione.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2 + x}{x + 1} = -\infty\,.$$

La funzione non presenta pertanto asintoti orizzontali.

Verifichiamo la presenza di asintoti obliqui.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2 + x}{x^2 + x} = -1\,.$$

$$q = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x^2+x}{x+1}+x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x}{x+1}\right] = 2\,.$$

La retta $y = -x + 2$ è asintoto obliquo per la funzione

Studiamo il segno della derivata prima per stabilire la crescenza e la decrescenza della funzione.

$$y'_1(x) = \frac{(-2x+1)(x+1)-(-x^2+x)}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x+1)^2}\,.$$

La derivata è positiva per $0 < x < -1+\sqrt{2}$. Quindi abbiamo un massimo relativo per $x = -1+\sqrt{2}$.

Analizziamo la convessità e concavità calcolando la derivata seconda

$$y''_1(x) = \frac{(-2x-2)(x+1)^2-(-x^2-2x+1)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{(x+1)(-4)}{(x+1)^4} = \frac{-4}{(x+1)^3}\,.$$

La derivata seconda è sempre negativa per $x > 0$ e quindi la funzione è concava.

Analizziamo la seconda funzione da studiare per $x < 0$.

Essa non è definita nel punto $x = -1$.

Ricaviamo le intersezioni con gli assi.

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{-x^2-3x}{x+1} = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

Il punto di coordinate $(-3{,}0)$ è l'unica intersezione della funzione con l'asse delle x.

Studiamo il segno della funzione

$$\frac{-x^2-3x}{x+1}>0\,.$$

Svolgendo la disequazione, ricaviamo che la funzione è positiva da $(-\infty,-3)\cup(-1,0)$ cioè per $x<-3\ \vee\ -1<x<0$.

Determiniamo gli asintoti della funzione e calcoliamo i limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to+0^-}\frac{-x^2-3x}{x+1}=0$$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{-x^2-3x}{x+1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{-x^2-3x}{x+1}=+\infty\,.$$

La retta $x=-1$ è asintoto verticale.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2-3x}{x+1}=+\infty\,.$$

Verifichiamo l'esistenza di asintoti obliqui.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2-3x}{x^2+x}=-1$$

$$q=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2-3x}{x+1}+x=\mathit{lim}_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x+1}=-2\,.$$

La retta $y=-x-2$ è asintoto obliquo per la funzione.

Studiamo la derivata prima

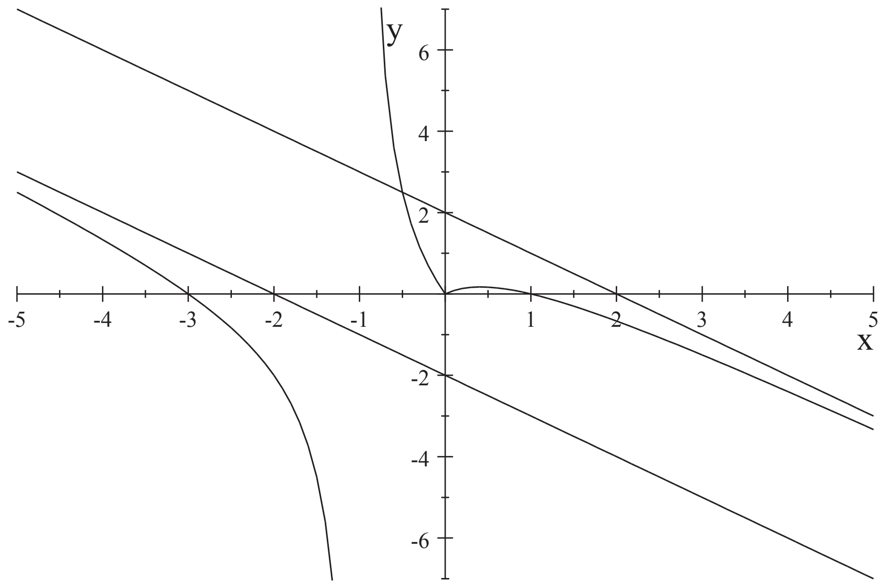
$$y'_2(x)=\frac{(-2x-3)(x+1)+x^2+3x}{(x+1)^2}=\frac{-x^2-2x-3}{(x+1)^2}\,.$$

La derivata è sempre negativa e la funzione è sempre decrescente.
Studiamo la derivata seconda

$$y''_2(x)=\frac{(-2x-2)(x+1)^2-(-x^2-2x-3)\cdot 2\cdot(x+1)}{(x+1)^4}=$$

$$= \frac{4}{(x+1)^3}.$$

La derivata seconda è positiva per $x > -1$. Quindi la funzione è concava per $x < -1$ e convessa dopo. Non ci sono flessi poiché -1 non fa parte del dominio.



9) $\boldsymbol{y = \frac{x}{|x|+|x-1|}}$

Per determina l'insieme di definizione della funzione procediamo allo studio dei seguenti sistemi.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \\ y = \dfrac{x}{2x-1} \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 1 \\ y = x \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ x \geq 1 \\ y = -x \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ x < 1 \\ y = \dfrac{x}{-2x+1} \end{cases}$$

Dal primo osserviamo che è necessario studiare per $x \geq 1$ la funzione

$$y_1(x) = \frac{x}{2x-1}.$$

Dal secondo sistema osserviamo che è necessario studiare per

$0 \leq x < 1$ la funzione

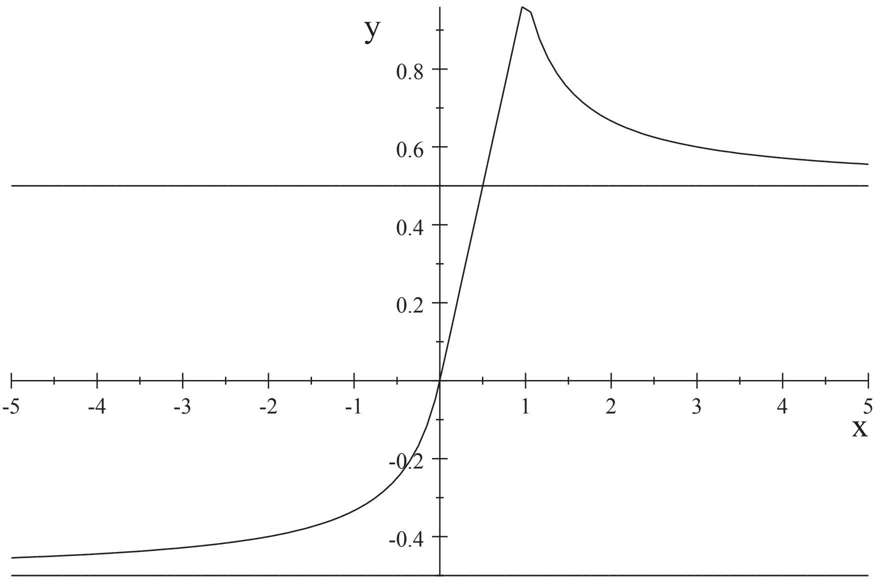
$$y_2(x) = x.$$

Il terzo sistema è impossibile.

Dal quarto sistema osserviamo che è necessario studiare per $x < 1$ la funzione

$$y_3(x) = \frac{x}{-2x+1}.$$

Studiando le tre funzioni nei loro rispettivi intervalli, otteniamo il seguente grafico



9.2 Studio di funzioni irrazionali

10) $\boldsymbol{y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$

Dalle condizioni di esistenza della funzione

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$$

ricaviamo che essa è definita per $x \leq -1 \vee x > 1$.

La funzione non è né pari e né dispari e non presenta simmetrie, essendo

$$f(-x) \neq f(x) \; e \; f(-x) \neq -f(x) \, .$$

Ricaviamo le intersezioni con gli assi.

La funzione non può intersecare l'asse delle ordinate essendo $x = 0$ escluso dal dominio. Ricaviamo le intersezioni con l'asse delle ascisse

$$\begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{x+1}{x-1} = 0 \end{cases} .$$

Quindi, avremo una intersezione nel punto di coordinate $(-1,0)$.

Il segno della funzione coincide ovviamente con il dominio.

Determiniamo gli asintoti della funzione.
Calcoliamo i limiti agli estremi del campo di esistenza

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 1$$

Quindi la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale per la funzione.

$$\lim_{x \to 1^+} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty$$

Quindi la retta $x = 1$ è asintoto verticale destro.

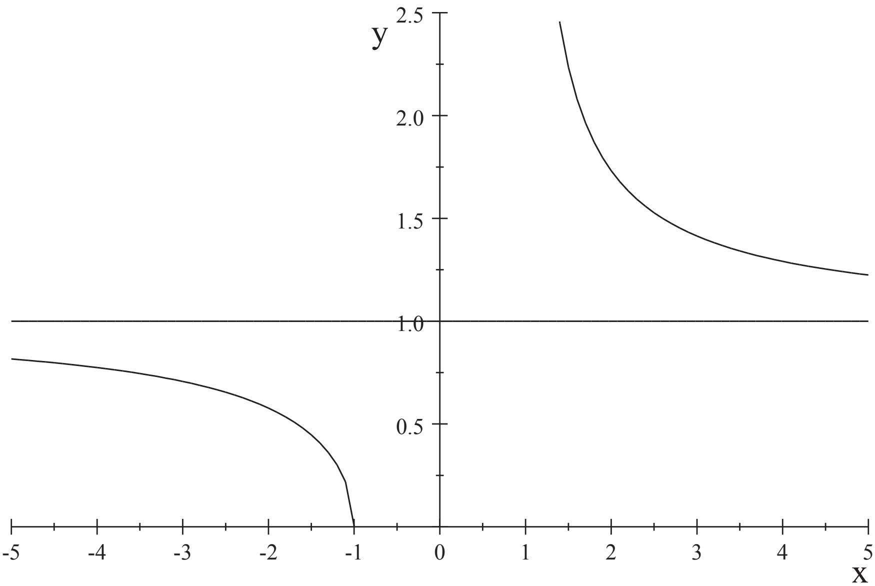
Studiamo la crescenza e decrescenza con il segno della derivata prima

$$y'(x) = -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$$

La derivata è sempre negativa e la funzione, quindi, sempre decrescente. La derivata seconda, dopo un po' di calcoli, è

$$y''(x) = \sqrt{(x+1)(x-1)^3} \cdot \frac{2x+1}{(x+1)^2(x-1)^4}.$$

Essa è positiva per $x > -1/2$.



11) $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

Le condizioni per il calcolo del dominio sono

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ 4 - x^2 \neq 0 \end{cases}$$

Quindi la funzione è definita per $-2 < x < 2$.

Essendo $f(-x) = f(x)$ la funzione è pari ed è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate.

Ricaviamo le intersezioni con gli assi.

È facile vedere che la funzione non può intersecare l'asse delle ascisse poiché $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ non si annulla mai. Quando $x = 0$, invece, si ha $y = 1/2$. Quindi $(0, \frac{1}{2})$ è un punto di intersezione della funzione con l'asse delle ordinate.

Studiamo il segno della funzione.

La funzione sarà sempre positiva nel suo dominio.

Determiniamo gli asintoti della funzione calcolando i limiti agli estremi del campo

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} = +\infty$$

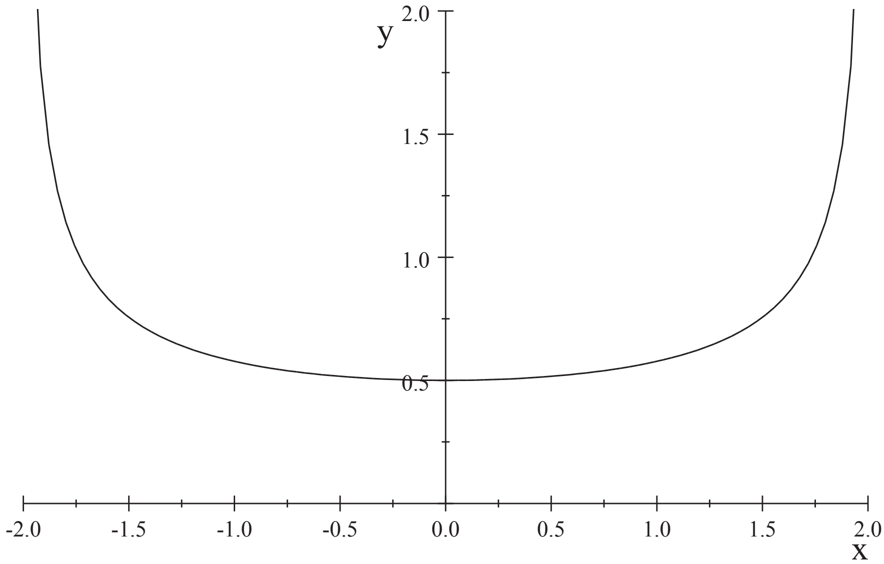
$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} = +\infty \, .$$

Quindi la retta $x = -2$ è asintoto verticale destro, mentre $x = 2$ è asintoto verticale sinistro.

Studiamo il segno della derivata prima

$$y'(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}(4 - x^2)}$$

La derivata è positiva per $x > 0$ e, quindi, per tali valori la funzione è crescente. Per $x < 0$ la funzione è decrescente. Quindi il punto $(0, \frac{1}{2})$ è un minimo relativo. Omettiamo lo studio della derivata seconda.



12) $y = \sqrt{8 - x^3}$

La funzione esiste per $8 - x^3 \geq 0 \Rightarrow x^3 \leq 8 \Rightarrow x \leq 2$. Quindi il dominio della funzione è $(-\infty, 2]$.

La funzione non è né pari e né dispari e non presenta simmetrie, essendo

$$f(-x) \neq f(x) \; e \; f(-x) \neq -f(x)$$

Ricaviamo le intersezioni con gli assi.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

I punti di coordinate $(2{,}0)$ $(0{,}2\sqrt{2})$ sono i punti di intersezione della funzione con gli assi.

La funzione è ovviamente sempre positiva.

Determiniamo gli asintoti della funzione calcolando i limiti agli estremi del campo

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{8-x^3} = +\infty\,.$$

Non esiste l'asintoto orizzontale.

Verifichiamo l'esistenza di asintoti obliqui.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{8-x^3}}{x}\,.$$

Nel trasporto interno al segno di radice, poiché la x è negativa, rimane il segno meno fuori dalla radice

$$m = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{8-x^3}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{-x^3}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{-x}\right) =$$

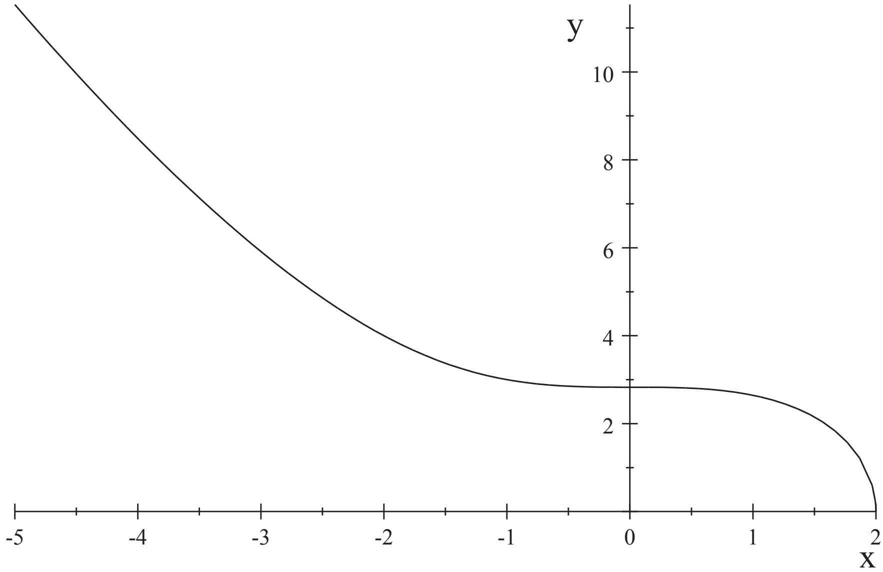
$$= -\infty$$

Non esiste l'asintoto obliquo.

Studiamo il segno della derivata prima per ricavare la crescenza e la decrescenza della funzione

$$y'(x) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{8-x^3}}\,.$$

Dallo studio ricaviamo che la funzione è sempre decrescente.
Omettiamo lo studio della derivata seconda



13) $\boldsymbol{y = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}}$

Le condizioni per la determinazione del dominio della funzione sono

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \\ 1-x \neq 0 \\ 1+x \neq 0 \end{cases}.$$

Quindi la funzione è definita per $-1 < x < 1$. Poiché

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} = -f(x)$$

la funzione è dispari ed è simmetrica rispetto all'origine.

Ricaviamo le intersezioni con gli assi.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = 0 \Rightarrow \sqrt{1+x} = \sqrt{1-x} \Rightarrow x = 0 \end{cases}.$$

La funzione presenta una sola intersezione nel punto di coordinate (0,0).

Studiamo il segno della funzione

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} > \frac{1}{\sqrt{1+x}} \Rightarrow (invertendo\ le\ frazioni)\sqrt{1-x} < \sqrt{1+x}\,.$$

Risolvendo la disequazione irrazionale

$$\begin{cases} \sqrt{1+x} > 0 \\ 1-x \geq 0 \\ 1-x < 1+x \end{cases}$$

otteniamo che la funzione è positiva per $0 < x < 1$.

Determiniamo gli asintoti della funzione calcolando i limiti agli estremi del campo

$$\lim_{x\to -1^+}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right] = +\infty$$

Quindi la retta $x = -1$ è asintoto verticale destro, mentre la retta $x = 1$ è asintoto verticale sinistro.

Studiamo il segno della derivata prima

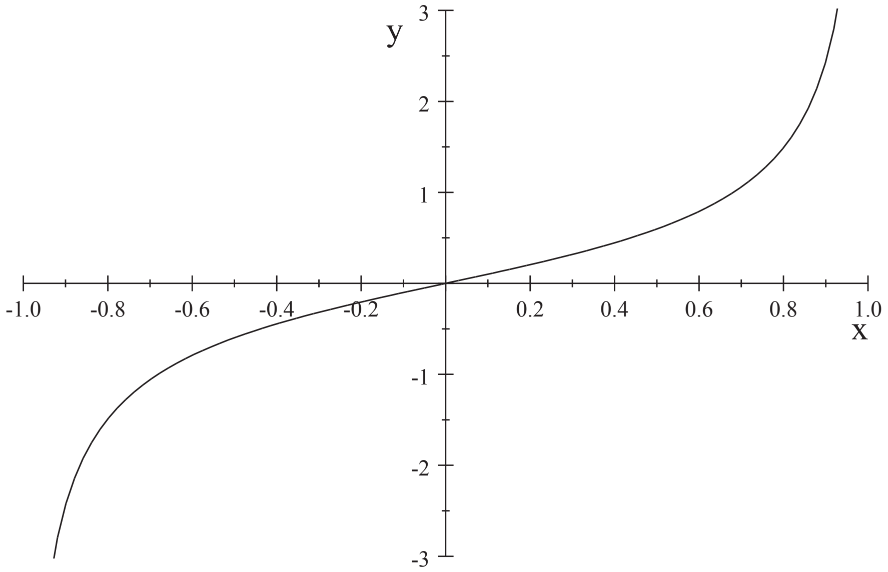
$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}} + \frac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}}$$

Essendo positiva la somma di due quantità positive, la derivata è sempre positiva e la funzione sempre crescente.

Analizziamo la convessità e concavità calcolando la derivata seconda

$$y''(x) = \frac{3}{4\sqrt{(1-x)^5}} - \frac{3}{4\sqrt{(1+x)^5}}$$

Procedendo analogamente allo studio del segno, si vede che la funzione è convessa per $x > 0$ e concava per $x < 0$. Il punto $F(0,0)$ è un punto di flesso.



14) $y = 2\sqrt{x} - x$

La funzione è definita nell'intervallo $[0, +\infty)$.

La funzione, inoltre, non è né pari e né dispari e non presenta simmetrie, essendo

$$f(-x) \neq f(x) \; e \; f(-x) \neq -f(x)\,.$$

Ricaviamo le intersezioni con gli assi.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ 2\sqrt{x} = x \Rightarrow 4x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \; e \; x = 4 \end{cases}.$$

I punti di coordinate $(0,0)$ e $(4,0)$ rappresentano le intersezioni con gli assi.

Studiamo il segno della funzione

$$2\sqrt{x} - x > 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} > x.$$

Risolviamo la disequazione irrazionale

$$\begin{cases} x < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x > x^2 \Rightarrow 4x - x^2 > 0 \end{cases}$$

La funzione, quindi, è positiva per $0 < x < 4$.

Determiniamo gli asintoti della funzione calcolando i limiti agli estremi del campo

$$\lim_{x\to+\infty} \left[2\sqrt{x} - x\right] = +\infty - \infty$$

Eliminando l'infinito di ordine inferiore, si vede subito che il limite diverge negativamente. Moltiplichiamo numeratore e denominatore per $2\sqrt{x} + x$. Questo metodo è spesso utile per la risoluzione delle forme indeterminate $+\infty - \infty$. In tal caso si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2\sqrt{x} - x\right)(2\sqrt{x} + x)}{2\sqrt{x} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x - x^2}{2\sqrt{x} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$$

La funzione non presenta asintoti orizzontali.

Verifichiamo la presenza di asintoti obliqui.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2\sqrt{x} - x}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \left(2\sqrt{x} - x + x\right) = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{x} = +\infty\,.$$

Non esiste nemmeno l'asintoto obliquo.

Studiamo il segno della derivata prima

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$$

Quindi

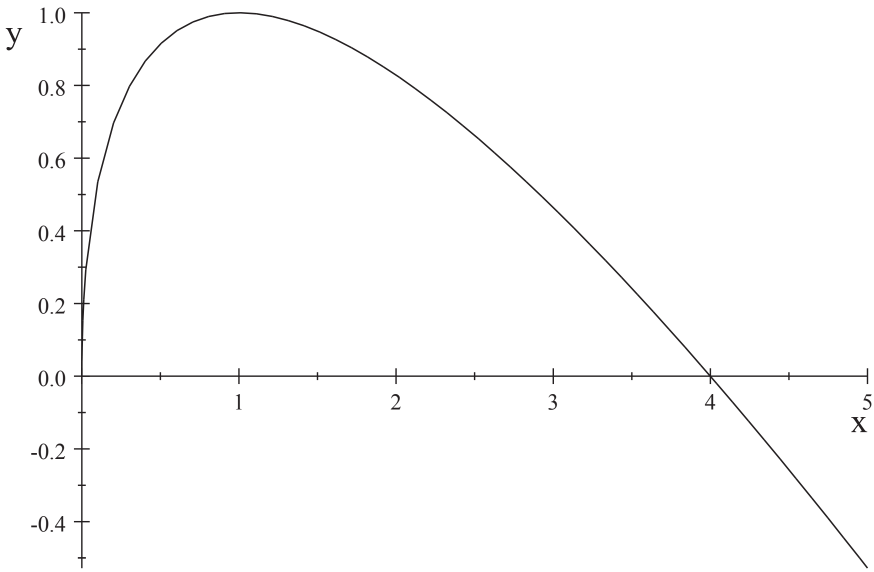
$$\frac{1}{\sqrt{x}} > 1 \Rightarrow \sqrt{x} < 1 \Rightarrow x < 1$$

La funzione è quindi crescente per $x < 1$. Il punto di coordinate $(1,1)$ è un massimo relativo.

Analizziamo la convessità e concavità calcolando la derivata seconda

$$y''(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

La derivata seconda è sempre negativa e la funzione, quindi, sempre concava.



15) $\boldsymbol{y = \frac{x}{\sqrt{x}-1}}$

Dalle condizioni di esistenza della funzione

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 1 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases}$$

otteniamo che il dominio è $[0,1) \cup (1,+\infty)$.

La funzione non è né pari e né dispari e non presenta simmetrie, essendo

$$f(-x) \neq f(x) \; e \; f(-x) \neq -f(x)\,.$$

Ricaviamo le intersezioni con gli assi.

È immediato vedere che l'unica intersezione è data dal punto di coordinate (0,0).

Studiamo il segno della funzione

$$\frac{x}{\sqrt{x}-1} > 0\,.$$

Svolgendo la disequazione vediamo che la funzione è positiva nell'intervallo $(1, +\infty)$.

Determiniamo gli asintoti della funzione calcolando i limiti agli estremi del campo

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{x}{\sqrt{x}-1} = \pm\infty$$

La retta $x = 1$ è asintoto verticale.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}-1} = +\infty\,.$$

Non ci sono asintoti orizzontali.

Verifichiamo l'esistenza di asintoti obliqui.

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x\sqrt{x}-x} = 0\,.$$

Non ci sono asintoti obliqui.

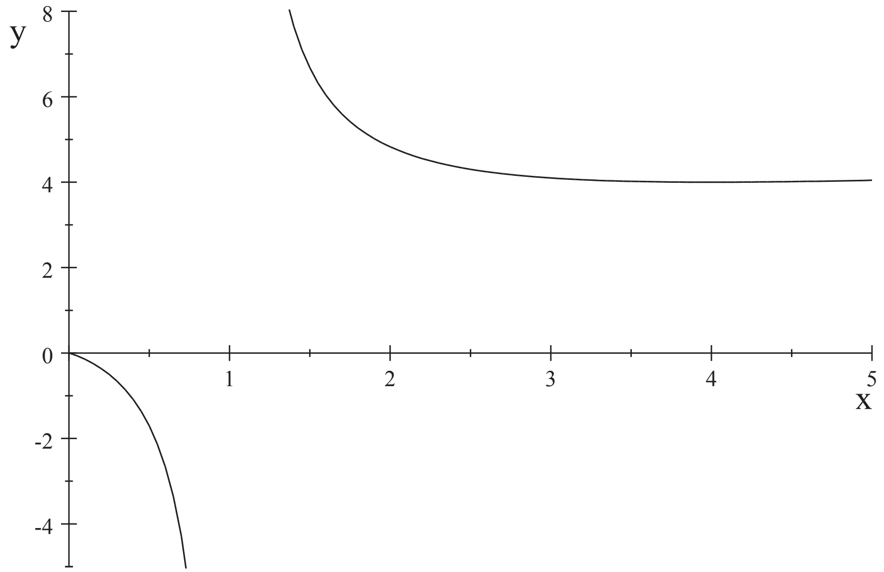
Studiamo il segno della derivata prima della funzione

$$y'(x) = \frac{\sqrt{x}-1-x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} = \frac{\sqrt{x}-1-\frac{\sqrt{x}}{2}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} = \frac{\sqrt{x}-2}{2\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

La derivata risulta quindi positiva per $\sqrt{x} > 2 \Rightarrow x > 4$.

Il punto di coordinate (4,4) è un minimo relativo.

Analizziamo la convessità e concavità calcolando la derivata seconda. Dopo un po' di calcoli, dallo studio della derivata seconda, ricaviamo che la funzione è convessa in $1 < x < 9$. Il punto $(9, \frac{9}{2})$ è un punto di flesso.



16) $y = \sqrt{\frac{x^3 - x^2}{x+1}}$

Dalle condizioni di esistenza della funzione

$$\begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2}{x+1} \geq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases}$$

ricaviamo che il dominio è $(-\infty, -1) \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$.

La funzione non è né pari e né dispari e non presenta simmetrie, essendo

$$f(-x) \neq f(x) \; e \; f(-x) \neq -f(x).$$

Ricaviamo le intersezioni con gli assi.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ \sqrt{\dfrac{x^3 - x^2}{x+1}} = 0 \Rightarrow x = 0 \; e \; x = 1 \, . \end{cases}$$

I punti di intersezione della funzione con gli assi sono (0,0) e (1,0). Determiniamo gli asintoti della funzione calcolando i limiti agli estremi del campo

$$\lim_{x \to -1^-} \sqrt{\frac{x^3 - x^2}{x+1}} = +\infty \, .$$

Quindi la retta $x = -1$ è un asintoto verticale sinistro. Essendo

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\frac{x^3 - x^2}{x+1}} = +\infty,$$

non ci sono asintoti orizzontali.

Verifichiamo l'esistenza di asintoti obliqui.

Quando calcoliamo il limite per $x \to +\infty$ di $\frac{f(x)}{x}$, portando la x, che è positiva, all'interno del segno di radice elevando all'indice della radice, otteniamo

$$m = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3 - x^2}{x^3 + x^2}} = 1 \, .$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{\frac{x^3 - x^2}{x+1}} - x \right] = +\infty - \infty$$

Per risolvere la forma indeterminata precedente, moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\sqrt{\frac{x^3 - x^2}{x+1}} + x$

$$q = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{x^3-x^2}{x+1}-x^2}{\sqrt{\frac{x^3-x^2}{x+1}}+x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{-2x^2}{x+1}}{\sqrt{\frac{x^3-x^2}{x+1}}+x}\right]$$

Applichiamo l'eliminazione degli infiniti di ordine inferiore e otteniamo

$$q = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{-2x^2}{x}}{\sqrt{\frac{x^3}{x}}+x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{2x} = -1.$$

Quindi la retta $y = x - 1$ è un asintoto obliquo a destra.

Per cercare l'asintoto obliquo a sinistra, quando calcoliamo il limite per $x \to -\infty$ di $\frac{f(x)}{x}$, portiamo la x, che è negativa, all'interno del segno di radice elevando all'indice della radice e lasciando il segno meno fuori ottenendo:

$$m = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^3-x^2}{x^3+x^2}} = -1,$$

$$q = \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{\frac{x^3-x^2}{x+1}}+x\right] = +\infty - \infty.$$

Per risolvere la forma indeterminata precedente, moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\sqrt{\frac{x^3-x^2}{x+1}} - x$

$$q = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\frac{-2x^2}{x+1}}{\sqrt{\frac{x^3-x^2}{x+1}}-x}\right].$$

Applichiamo l'eliminazione degli infiniti di ordine inferiore e ricordando che

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x \; per \; x > 0 \\ -x \; per \; x < 0, \end{cases}$$

otteniamo

$$q = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{\frac{-2x^2}{x}}{\sqrt{\frac{x^3}{x}} - x} \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{-2x} = 1.$$

Quindi la retta $y = -x + 1$ è asintoto obliquo a sinistra.

Studiamo il segno della derivata prima

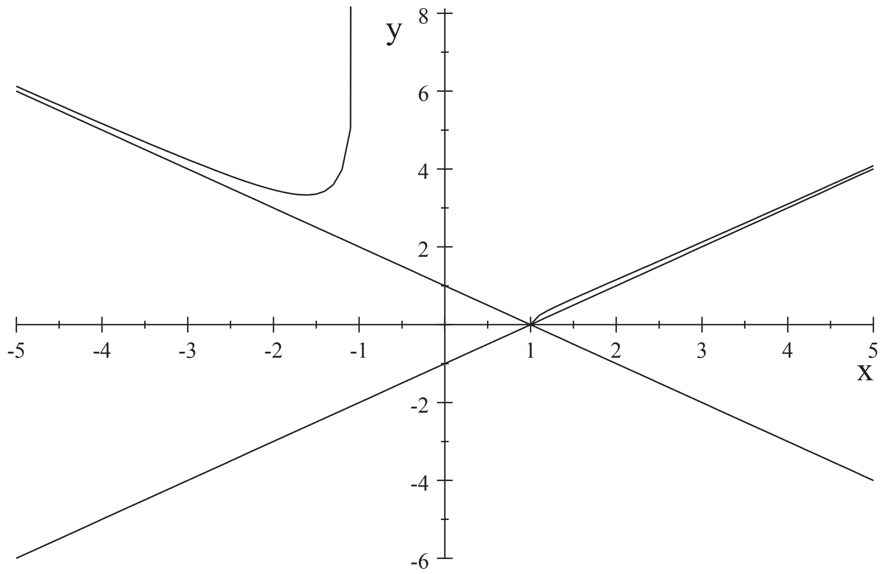
$$y'(x) = \frac{x(x^2 + x - 1)}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{x^3 - x^2}{x+1}}}$$

La funzione risulta crescente per $x > \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e il punto $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ è un minimo relativo.

La derivata seconda, dopo lunghi calcoli, è

$$y''(x) = \frac{x^3(x-2)}{(1+x)^4 \sqrt{\left(\frac{x^3 - x^2}{x+1}\right)^3}}$$

La funzione è convessa in $(-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$. Il punto $F(2, \frac{2}{3}\sqrt{3})$ è un flesso.



17) $\boldsymbol{y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}}}$

Dalle condizioni di esistenza della funzione

$$\begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ x^2 - x \neq 0 \end{cases}$$

ricaviamo che il dominio è $x < 0 \vee x > 1$.

La funzione non è né pari e né dispari e non presenta simmetrie, essendo

$$f(-x) \neq f(x) \ e \ f(-x) \neq -f(x).$$

Ricaviamo le intersezioni con gli assi.

La funzione non può intersecare l'asse delle ordinate. Invece, da

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-x}} = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

ricaviamo che il punto di coordinate $(-2{,}0)$ è un punto di intersezione con l'asse delle ascisse.

Studiamo il segno della funzione

$$\frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}} > 0.$$

La funzione risulta quindi positiva per $x > -2$.

Determiniamo gli asintoti della funzione calcolando i limiti agli estremi del campo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

Quindi $x = 0$ è asintoto verticale sinistro, mentre $x = 1$ asintoto verticale destro.

Verifichiamo l'esistenza di asintoti orizzontali

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{|x|} = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{|x|} = -1$$

Pertanto, $y = 1$ è asintoto orizzontale a destra, mentre $y = -1$ è asintoto orizzontale a sinistra.

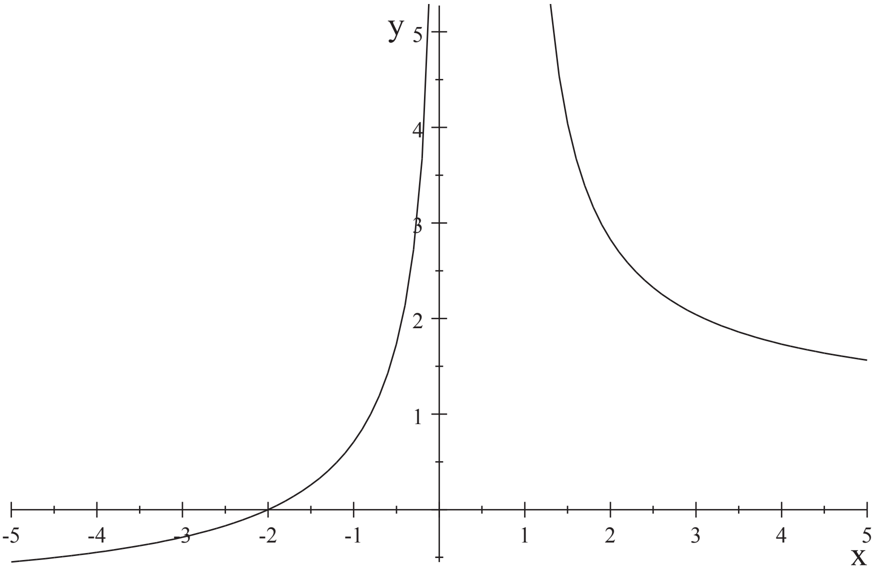
Studiamo il segno della derivata prima

$$y'(x) = \frac{\sqrt{x^2-x} - (x+2)\cdot\left(\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}\right)}{x^2-x} = \frac{\frac{-5x+2}{2\sqrt{x^2-x}}}{x^2-x} =$$

$$= \frac{-5x+2}{2(x^2-x)\sqrt{x^2-x}}$$

La derivata è positiva da $(-\infty, 0)$ ed in tale intervallo la funzione cresce.

Omettiamo lo studio della derivata seconda



18) $y = x - \sqrt{x - x^2}$

La funzione è definita per $x - x^2 \geq 0$ e cioè nell'intervallo [0,1].

La funzione non presenta simmetrie, essendo

$$f(-x) \neq f(x) \; e \; f(-x) \neq -f(x).$$

Ricaviamo le intersezioni con gli assi.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - \sqrt{x - x^2} = 0 \Rightarrow \sqrt{x - x^2} = x \Rightarrow x - x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0 \; e \; x = 1/2 \end{cases}$$

I punti di coordinate $(0,0) \; e \; (\frac{1}{2}, 0)$ rappresentano i punti di intersezione della funzione con gli assi.

Studiamo il segno della funzione

$$x - \sqrt{x - x^2} > 0 \Rightarrow \sqrt{x - x^2} < x\,.$$

Risolvendo la disequazione irrazionale

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - x^2 \geq 0 \\ x - x^2 < x^2 \Rightarrow 2x^2 - x > 0 \end{cases}$$

Otteniamo che la funzione è positiva per $\frac{1}{2} < x < 1$.

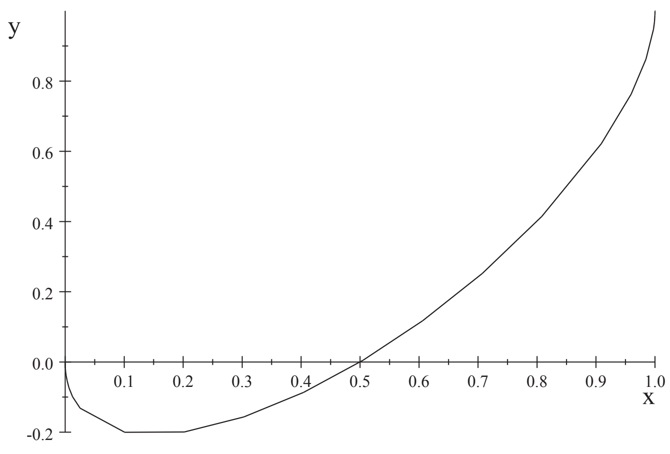
Studiamo la derivata prima della funzione

$$y'(x) = 1 - \frac{1 - 2x}{2\sqrt{x - x^2}} = \frac{2\sqrt{x - x^2} - 1 + 2x}{2\sqrt{x - x^2}}\,.$$

Risolvendo $2\sqrt{x - x^2} - 1 + 2x > 0 \Rightarrow \sqrt{x - x^2} > \frac{1}{2} - x$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - x < 0 \\ x - x^2 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{1}{2} - x \geq 0 \\ x - x^2 > \frac{1}{4} - x + x^2 \end{cases}$$

ricaviamo che $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$ è un minimo relativo.



9.3 Studio di funzioni trascendenti

19) $y = xlnx$

La funzione è definita per $x > 0$. Non ha simmetrie e non può intersecare l'asse delle ordinate, cerchiamo le intersezioni con l'asse delle ascisse

$$\begin{cases} y = 0 \\ xlnx = 0 \Rightarrow x = 0 \ (non\ accettabile) e\ lnx = 0 \Rightarrow x = 1. \end{cases}$$

Quindi il punto di coordinate (1,0) è l'unica intersezione con gli assi. Studiamo il segno della funzione

$$xlnx > 0.$$

Svolgendo la disequazione ricaviamo che la funzione è positiva per $x > 1$.

Ricaviamo gli asintoti della funzione calcolando i limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to 0^+} xlnx = 0 \cdot (-\infty).$$

La forma indeterminata può essere risolta utilizzando il teorema di de l'Hôpital, scrivendo

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{lnx}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} xlnx = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$$

La funzione, quindi, non presenta asintoti verticali ed orizzontali. Verifichiamo la presenza di asintoti obliqui

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{xlnx}{x} = \lim_{x \to +\infty} lnx = +\infty.$$

La funzione non presenta asintoti obliqui.

Studiamo il segno della derivata prima

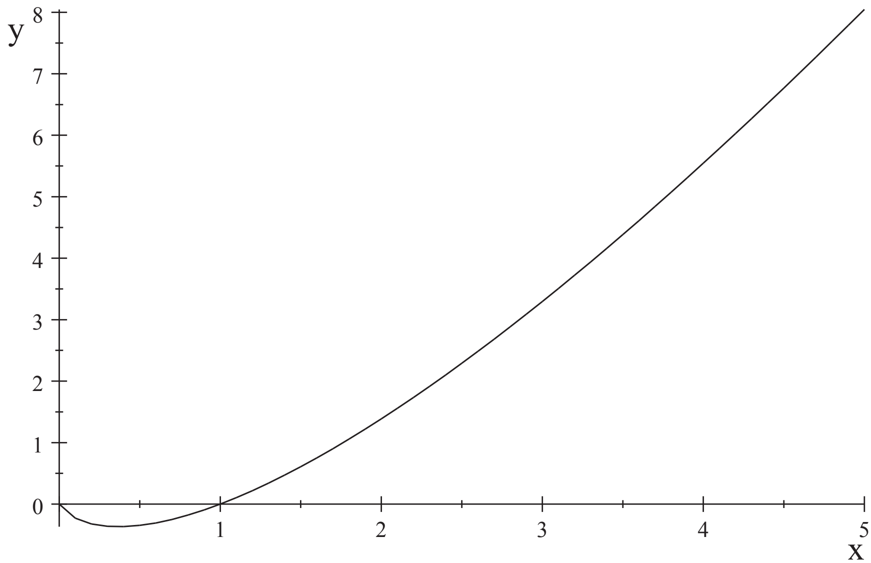
$$y'(x) = lnx + 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{e}.$$

La funzione, quindi, è crescente nell'intervallo $(\frac{1}{e}, +\infty)$. Il punto $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$ è un minimo relativo.

La derivata seconda della funzione è

$$y''(x) = \frac{1}{x}$$

Essa è sempre positiva nel dominio e la funzione è sempre convessa.



20) $y = x^2 e^x$

La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$.

La funzione non presenta simmetrie dal momento che

$$f(-x) = x^2 e^{-x}$$

e quindi $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) = -f(x)$.

Ricaviamo le intersezioni con gli assi.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ x^2 e^x = 0 \Rightarrow x = 0 \; e \; e^x = 0 \; mai \end{cases}$$

Quindi abbiamo una sola intersezione con gli assi nel punto di coordinate (0,0).

Studiamo il segno della funzione.

$$x^2 e^x > 0$$

x^2 non è mai negativo, mentre e^x è sempre positivo. Quindi, la funzione non sarà mai negativa.

Ricaviamo gli asintoti della funzione calcolando i limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = +\infty \cdot 0 \,.$$

Per risolvere la forma indeterminata, possiamo utilizzare il teorema di de l'Hôpital scrivendo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \frac{-\infty}{-\infty} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0 \,.$$

Quindi, la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale a sinistra.

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^x = +\infty \,.$$

A destra non esiste l’asintoto orizzontale.

Verifichiamo l’esistenza di un asintoto obliquo a destra

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} x e^x = +\infty \,.$$

Non esiste l’asintoto obliquo.

Studiamo il segno della derivata prima della funzione

$$y'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = e^x(2x + x^2).$$

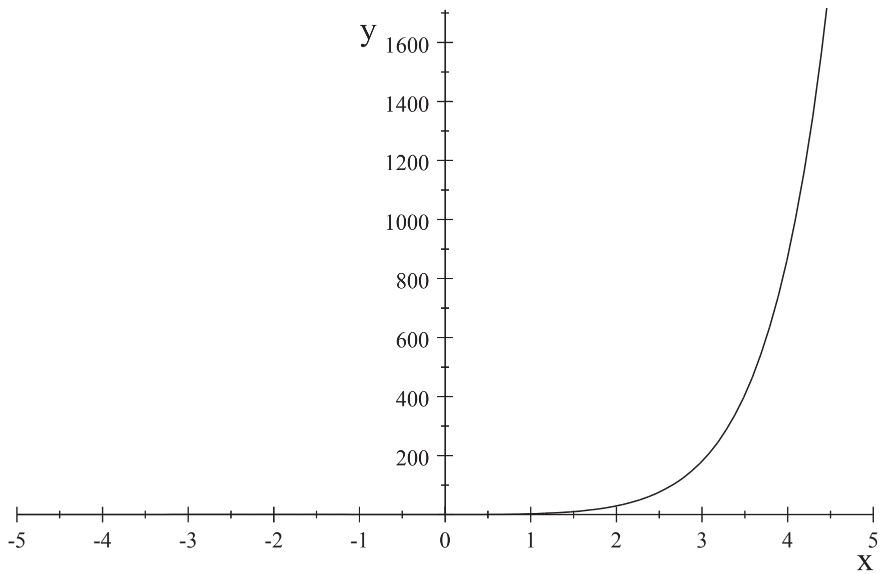
$2x + x^2 > 0$ è una disequazione di secondo grado verificata per $x < -2 \ \vee x > 0$, invece e^x è sempre positivo.

Quindi la funzione cresce in $(-\infty, -2)$, decresce in $(-2{,}0)$ e cresce nuovamente in $(0, +\infty)$. Il punto (0,0) è un minimo relativo. Il punto $\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$ è un massimo relativo.

La derivata seconda della funzione è

$$y''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$$

Studiandone il segno svolgendo la disequazione, si vede che la funzione è convessa per $x < -2 - \sqrt{2}$ e $x > -2 + \sqrt{2}$. Questi sono due punti di flesso.



21) $y = \frac{1-2lnx}{x^2}$

La funzione è definita $\forall x > 0$.

La funzione non presenta simmetrie essendo

$$f(-x) \neq f(x) \ e \ f(-x) = -f(x).$$

Ricaviamo le intersezioni con gli assi.

La funzione non può intersecare l'asse delle ordinate. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{1 - 2lnx}{x^2} = 0 \Rightarrow lnx = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{e} \end{cases}$$

ricaviamo una intersezione nel punto di coordinate $\left(\sqrt{e}, 0\right)$ con l'asse delle ascisse.

Studiamo il segno della funzione

$$\frac{1 - 2lnx}{x^2} > 0 \Rightarrow lnx < \frac{1}{2} \Rightarrow x < \sqrt{e}\,.$$

Ricaviamo gli asintoti della funzione calcolando i limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - 2lnx}{x^2} = \frac{1 - 2 \cdot (-\infty)}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty.$$

Pertanto la retta $x = 0$ è asintoto verticale destro.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 2lnx}{x^2} = \frac{-\infty}{+\infty}.$$

Dall'ordine degli infiniti, sappiamo che il polinomio è un infinito di ordine superiore rispetto al logaritmo. Quindi, essendo il denominatore un infinito superiore rispetto al numeratore, questo limite tende a zero. Altrimenti, applicando il teorema di de l'Hôpital, arriveremmo allo stesso risultato.

Pertanto la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale.

Studiamo il segno della derivata prima della funzione

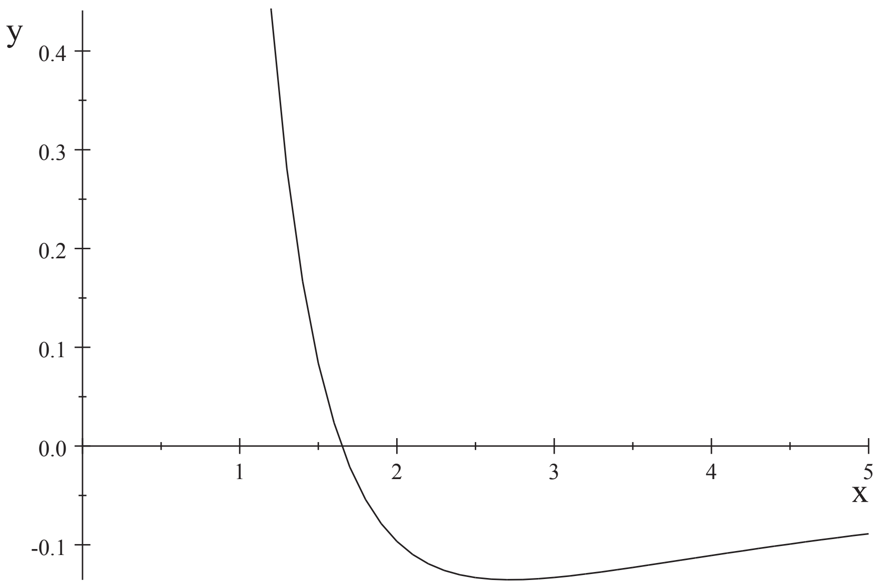
$$y'(x) = \frac{-4 + 4lnx}{x^3}$$

Risolvendo osserviamo che la funzione decresce fino ad e e poi cresce. Il punto $(e, -\frac{1}{e^2})$ è un minimo relativo.

Studiando il segno della derivata seconda

$$y''(x) = \frac{16x^2 - 12x^2 lnx}{x^6}$$

otteniamo che la funzione è convessa nell'intervallo $(0, e^{\frac{4}{3}})$, dove abbiamo un punto di flesso.



22) $y = e^{\frac{x-1}{x}}$

La funzione è definita $\forall x \neq 0$.

Non presenta simmetrie in quanto

$$f(-x) \neq f(x) \ e \ f(-x) = -f(x).$$

Non può intersecare l'asse delle ascisse poiché l'esponenziale è sempre positiva e nemmeno l'asse delle ordinate poiché 0 non appartiene al dominio.

Ricaviamo gli asintoti della funzione calcolando i limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{x-1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{x-1}{x}} = e^{-\infty} = 0 \,.$$

Quindi la retta $x = 0$ è asintoto verticale sinistro.

$$\lim_{x\to \pm\infty} e^{\frac{x-1}{x}} = e^{1} = e \,.$$

Quindi la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale.

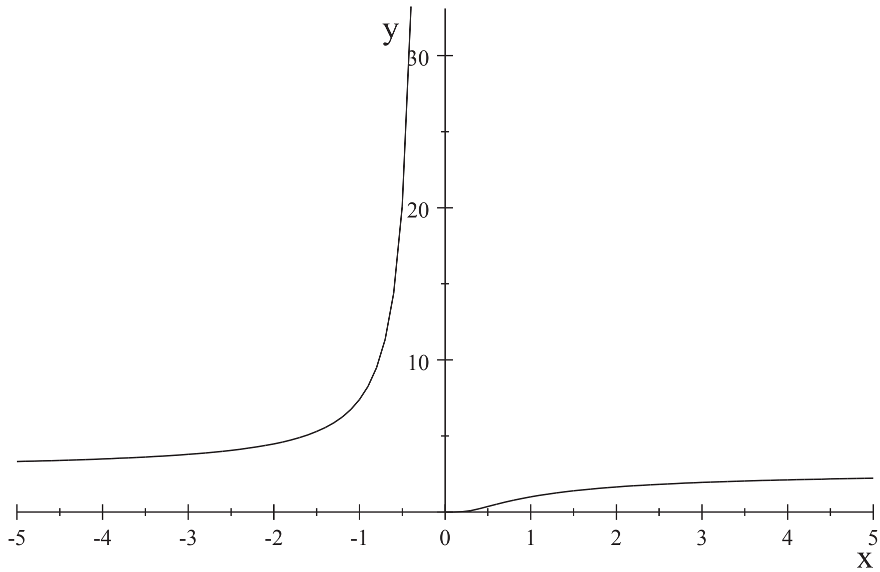
Studiamo il segno della derivata prima

$$y'(x) = \frac{e^{\frac{x-1}{x}}}{x^2} \,.$$

La derivata è sempre positiva e quindi la funzione è sempre crescente.
La derivata seconda è

$$y''(x) = -\frac{e^{\frac{x-1}{x}}(2x-1)}{x^4} \,.$$

Studiandone il segno, vediamo che la funzione è convessa per $x < \frac{1}{2}$ ed il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e}\right)$ è un punto di flesso.



23) $\boldsymbol{y = \frac{x-2}{e^x}}$

La funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R}$.

Non presenta simmetrie in quanto

$$f(-x) \neq f(x) \; e \; f(-x) = -f(x).$$

Calcoliamo le intersezioni con gli assi.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x-2}{e^x} = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Ricaviamo che i punti di coordinate $(0, -2)$ e $(2,0)$ sono punti di intersezione della funzione con gli assi.

Studiamo il segno della funzione

$$\frac{x-2}{e^x} > 0\,.$$

La funzione è positiva per $x > 2$.

Ricaviamo gli asintoti della funzione calcolando i limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-2}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Poiché l'esponenziale è un infinito di ordine superiore rispetto al polinomio, questo limite tende a zero.

La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale destro.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-2}{e^x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty\,.$$

Verifichiamo l'esistenza di un asintoto obliquo a sinistra

$$m = \mathop{lim}_{x \to -\infty} \frac{x-2}{xe^x} = \mathop{lim}_{x \to -\infty} \frac{x-2}{x} \cdot \frac{1}{e^x} = 1 \cdot 0 = 0\,.$$

Non esiste l'asintoto obliquo.

Studiamo il segno della derivata prima

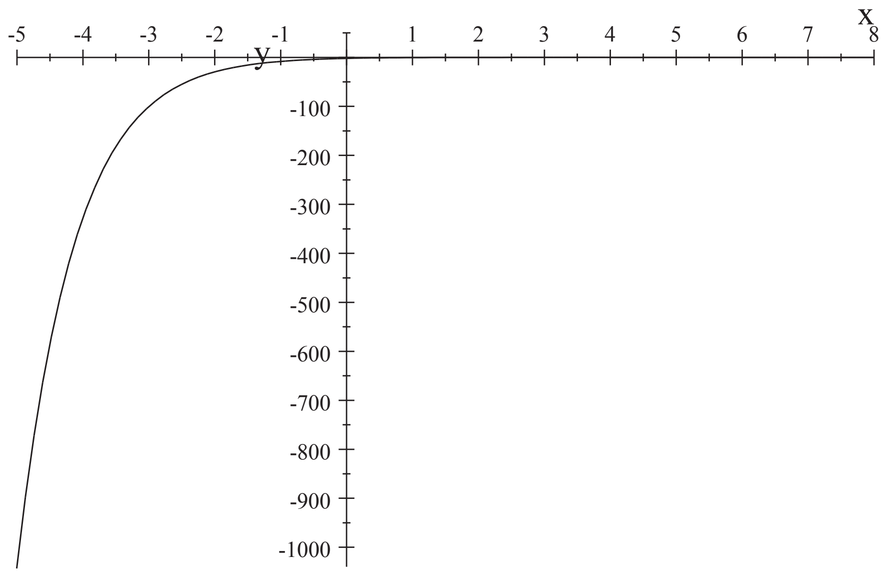
$$y'(x) = \frac{e^x(3-x)}{e^{2x}} = \frac{3-x}{e^x}.$$

La derivata è positiva per $x < 3$ ed il punto $\left(3, \frac{1}{e^3}\right)$ è un minimo relativo.

Studiamo infine il segno della derivata seconda

$$y''(x) = \frac{e^x(x-4)}{e^{2x}}.$$

La funzione è convessa per $x > 4$ 4 ed il punto $\left(4, \frac{2}{e^4}\right)$ è un punto di flesso.



24) $y = ln^2x - 2|ln(x) - 4|$

Studiamo le due funzioni

$$\begin{cases} y_1(x) = ln^2x - 2lnx + 8 \ \ per \ \ lnx - 4 \geq 0 \\ y_2(x) = ln^2x + 2lnx - 8 \ \ per \ lnx - 4 < 0 \end{cases}.$$

La prima funzione va studiata per $x \geq e^4$ e la seconda per $0 < x < e^4$. Il punto di "aggancio" è $(e^4, 16)$, come è facile verificare.

Si ha che

$$\begin{cases} y_1(x) = 0 \\ ln^2x - 2lnx + 8 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y_2(x) = 0 \\ ln^2x + 2lnx - 8 = 0 \end{cases}$$

Ponendo $lnx = t$, si ha che la prima equazione ha discriminante negativo e non ha soluzioni reali, mentre la seconda ha per soluzioni i valori 2 e -4. Quindi y_1 non ha intersezioni con l'asse delle ascisse, mentre y_2, poiché $lnx = 2 \Rightarrow x = e^2, lnx = -4 \Rightarrow x = e^{-4}$, presenta intersezioni con gli assi nei punti di coordinate $(e^2, 0), (e^{-4}, 0)$.

Ovviamente non ha senso ricercare le intersezioni con l'asse delle ordinate in quanto $x = 0$ non fa parte del dominio.

Con la stessa posizione $lnx = t$, possiamo studiare il segno della funzione, osservando che y_1 è sempre positiva essendo negativo il discriminante, mentre y_2 sarà positiva per valori esterni e quindi per $0 < x < e^{-4}$ e $x > e^2$.

Ricaviamo gli asintoti della funzione calcolando i limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to 0^+} ln^2x + 2lnx - 8 = \lim_{x \to 0^+} ln^2x = +\infty\,.$$

Quindi l'asse delle ordinate è asintoto verticale destro.

Invece, dal momento che

$$\lim_{x \to +\infty} ln^2x - 2lnx + 8 = +\infty$$

non esiste l'asintoto orizzontale.

Verifichiamo l'esistenza di asintoti obliqui.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln^2x - 2lnx + 8}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln^2x}{x} = 0.$$

Dunque non esiste nemmeno l'asintoto obliquo.

Studiando il segno della derivata prima della funzione

$$y'_1(x) = \frac{2lnx}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2lnx - 2}{x}.$$

otteniamo

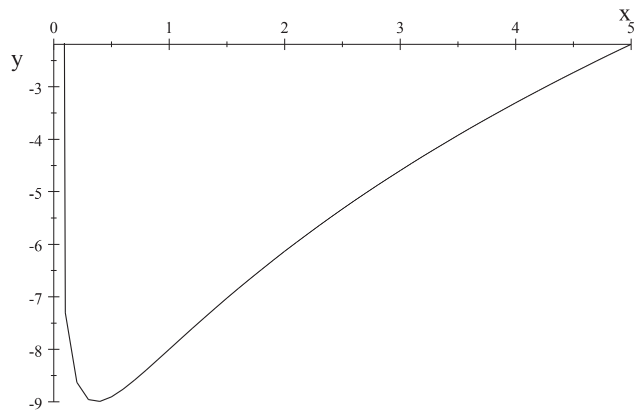
$$x > 0, lnx > 1 \Rightarrow x > e.$$

Pertanto il rapporto considerato risulta positivo per $x > e$. Dal momento che la funzione è da studiare per $x \geq e^4$, essa sarà sempre crescente.

Invece, da

$$y'_2(x) = \frac{2lnx}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2lnx + 2}{x}$$

ricaviamo che essa è positiva per $x > e^{-1}$ e presenta un minimo relativo in $(e^{-1}, -9)$.



25) $y = \frac{cos^2x}{1+2sinx}$

La funzione è periodica di periodo 2π e la studiamo nell'intervallo $[0,2\pi]$.

Per il calcolo del dominio poniamo

$$1 + 2sinx \neq 0 \Rightarrow sinx \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow x \neq \frac{7}{6}\pi, x \neq \frac{11}{6}\pi.$$

Ricaviamo le intersezioni della funzione con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

Il numeratore è sempre positivo e quindi la funzione sarà positiva per $sinx > -1/2$ e quindi

$$\forall x \in [0, \frac{7}{6}\pi) \cup (\frac{11}{6}\pi, 2\pi].$$

Poiché

$$\lim_{x \to \frac{7}{6}\pi^{\pm}} \frac{cos^2 x}{1 + 2sinx} = \lim_{x \to \frac{11}{6}\pi^{\pm}} \frac{cos^2 x}{1 + 2sinx} = \mp\infty,$$

le rette $x = \frac{7}{6}\pi$ e $x = \frac{11}{6}\pi$ sono asintoti verticali bilateri.

Dal calcolo della derivata prima

$$y' = \frac{-2sinxcosx - 4sin^2xcosx - 2cos^3x}{(1 + 2sinx)^2} =$$

$$= \frac{-2cosx(sinx + 2sin^2x + cos^2x)}{(1 + 2sinx)^2}.$$

si ha

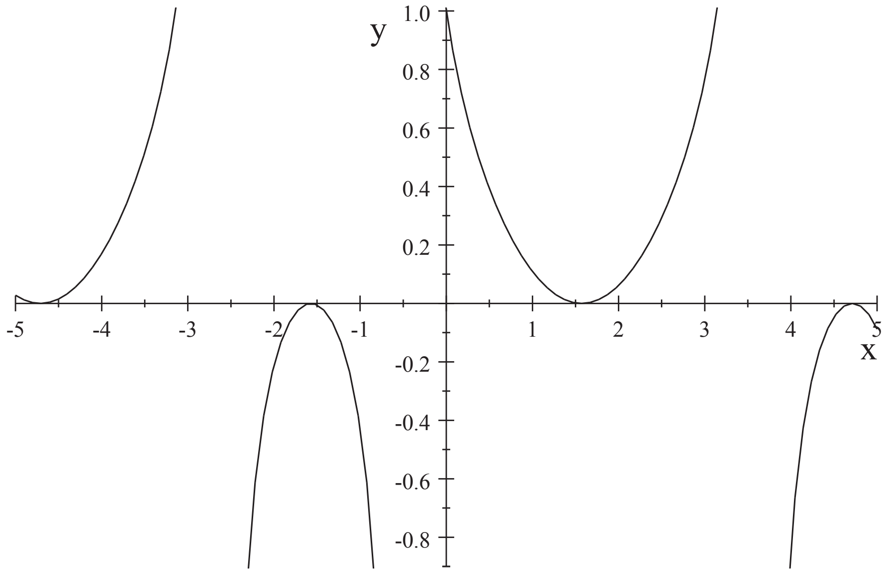
$$-2cosx > 0 \Rightarrow cosx < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right).$$

Inoltre

$$sinx + 2sin^2x + cos^2x = sinx + sin^2x + sin^2x + cos^2x =$$

$$= sinx + sin^2x + 1.$$

Ponendo $sinx = t$, osserviamo che abbiamo un trinomio di secondo grado sempre positivo. Quindi la derivata prima è positiva nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ dove la funzione è crescente. Abbiamo un minimo di coordinate $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ed un massimo di coordinate $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$.



26) $y = arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$

La funzione è definita per $-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$ e quindi bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \geq -1 \\ \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene che la funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$.

Si osserva facilmente che $f(-x) = f(x)$ e quindi la funzione è pari. Inoltre

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = arcsin 1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} y = 0 \\ arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = 0 \end{cases}$$

Si ha che $y = arcsin1 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$, mentre $arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2} = 0 \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1-x^2}{1+x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Pertanto, ricaviamo le seguenti intersezioni con gli assi

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), (-1,0), (1,0).$$

Per studiare il segno della funzione, osserviamo che

$$arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2} > 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{1+x^2} > 0.$$

La disequazione fratta è di facile risoluzione. Da essa ricaviamo che la funzione è positiva $\forall x \in (-1,1)$ ed è negativa altrove.

La funzione non può avere asintoti verticali.

Ricerchiamo eventuali asintoti orizzontali. Si ha che

$$\lim_{x \to \pm\infty} arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2} = arcsi\,n(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Pertanto la retta

$$y = -\frac{\pi}{2}$$

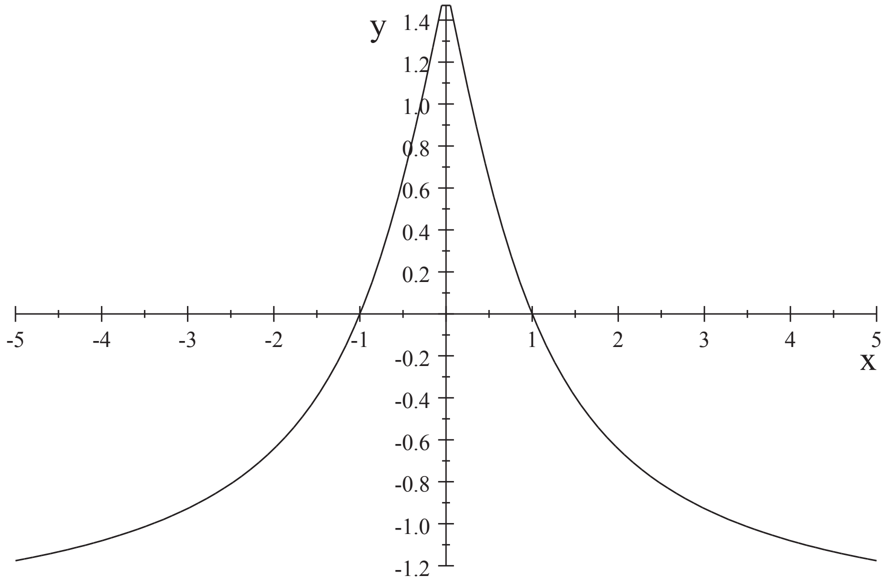
è asintoto orizzontale bilatero.

Studiando il segno della derivata prima

$$y' = \frac{-4x}{(1+x^2)^2\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2\sqrt{\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}$$

otteniamo che essa è positiva per $x < 0$ e la funziona ha un massimo in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Studiando il segno della derivata seconda, è possibile scoprire che la funzione è convessa per $x > 0$.



Capitolo 10

Integrale di Riemann

10.1 Integrabilità secondo Riemann

Il procedimento che ha portato alla nascita del moderno integrale, risale addirittura all'antica Grecia con il cosiddetto metodo di esaustione che consiste nel cercare di approssimare l'area di una figura con contorni non rettilinei, tramite poligoni inscritti e circoscritti di cui si sapeva calcolare l'area.

Utilizziamo questo metodo per introdurre il concetto di funzione integrabile secondo Riemann.

Supponiamo di voler calcolare l'area della regione piana chiamata **trapezoide**, cioè l'area della figura compresa tra il grafico di una funzione limitata $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, l'asse delle ascisse e le due rette $x = a$ e $x = b$.

Per farlo, indichiamo con P una partizione di $[a, b]$, cioè un insieme ordinato di punti distinti $x_0, x_1, \dots, x_n$ con $n \in \mathbb{N}$ tale che $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Qualunque sia la partizione P, l'intervallo $[a, b]$ sarà l'unione di un numero finito di intervalli del tipo $[x_i, x_{i+1}]$ con $i = 0,1,2, \dots. n - 1$. Essendo la funzione limitata, ammetterà estremo superiore ed inferiore in ciascuno di questi intervalli. Denotiamo tali estremi con

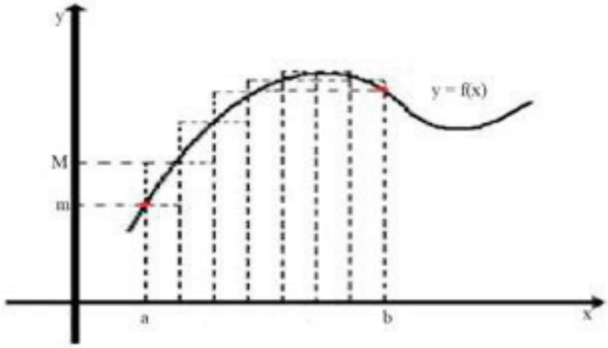
$$M_i = \sup\{f(x): x \in [x_i, x_{i+1}]\}, \;\; m_i = \inf\{f(x): x \in [x_i, x_{i+1}]\}.$$

Chiamiamo ***somma superiore*** la somma delle aree dei rettangoli circoscritti

$$S = M_0(x_1 - x_0) + M_1(x_2 - x_1) + \cdots M_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = \\ = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i),$$

e ***somma inferiore*** quella dei rettangoli inscritti

$$s = m_0(x_1 - x_0) + m_1(x_2 - x_1) + \cdots m_{n-1}(x_n - x_{n-1}) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i).$$



Al variare della partizione P in tutti i modi possibili, otteniamo che le somme superiori e le somme inferiori descrivono due insiemi numerici, denotati con

$$\Sigma = \{S(P): P \text{ è } una\ partizione\ di\ [a,b]\},$$

$$\sigma = \{s(P): P \text{ è } una\ partizione\ di\ [a,b]\}.$$

Quindi le somme superiori rappresentano l'area del trapezoide per eccesso, mentre le somme inferiori rappresentano una stima per difetto di questa area. Più la partizione di punti è fitta, migliore sarà l'approssimazione sia per eccesso che per difetto. Pertanto, all'aumentare delle suddivisioni dell'intervallo $[a,b]$, queste due somme si avvicinano sempre di più al valore dell'area del trapezoide.

È possibile dimostrare in modo rigoroso la seguente proprietà intuitiva

$$inf\Sigma \geq \sup\sigma \quad \forall P.$$

Definizione 10.1 – *Diremo che f è integrabile secondo Riemann se*

$$inf\Sigma = sup\sigma.$$

Tale valore comune si indica con

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Questo valore è detto **integrale definito** della funzione f in $[a, b]$.

I numeri a e b si dicono estremi di integrazione, la funzione f si dice funzione integranda e la variabile x si dice variabile di integrazione.

Esempio.

Consideriamo una funzione costante $f(x) = k$. Risulta $M_i = m_i = k$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e $inf\Sigma = \sup\sigma = k(b - a)$. Pertanto, ogni funzione costante è integrabile secondo Riemann e si ha

(10.1) $$\int_a^b kdx = k(b - a).$$

Vale il seguente criterio di integrabilità

Criterio di integrabilità – *Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Condizione necessaria e sufficiente affinché essa sia integrabile secondo Riemann è che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione di $[a, b]$ tale che $S(P) - s(P) < \varepsilon$.*

Il precedente criterio di integrabilità è di fondamentale importanza perché permette di determinare alcune classi di funzioni integrabili secondo Riemann quali:

1) le funzioni continue;
2) le funzioni generalmente continue e cioè quelle con un numero finito di punti di discontinuità di prima specie;
3) le funzioni monotone.

10.2 Proprietà degli integrali definiti

L'integrale di Riemann gode delle seguenti proprietà:

(10.2) $$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx;$$

(10.3) $$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

(10.4) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,,\ c \in (a,b);$$

(10.5) $$\text{se } f(x) \geq 0 \text{ allora } \int_a^b f(x)dx \geq 0;$$

(10.6) $$\text{se } f(x) \leq g(x) \text{ allora } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx;$$

(10.7) $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Un importante teorema è il seguente

Teorema della media – *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrabile secondo Riemann, allora*

$$inf f(x) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq sup f(x) \cdot (b-a).$$

Se f *è anche continua, esiste un* $c \in [a,b]$ *tale che*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a).$$

Dim.

Si ha ovviamente che

$$inf f(x) \leq f(x) \leq sup f(x)$$

e dunque, integrando, si ottiene subito da (10.1) e (10.6) la prima parte del teorema

$$inf f(x) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq sup f(x) \cdot (b-a).$$

Se la funzione è continua nell'insieme chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo e la precedente relazione si scrive nel seguente modo

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b-a).$$

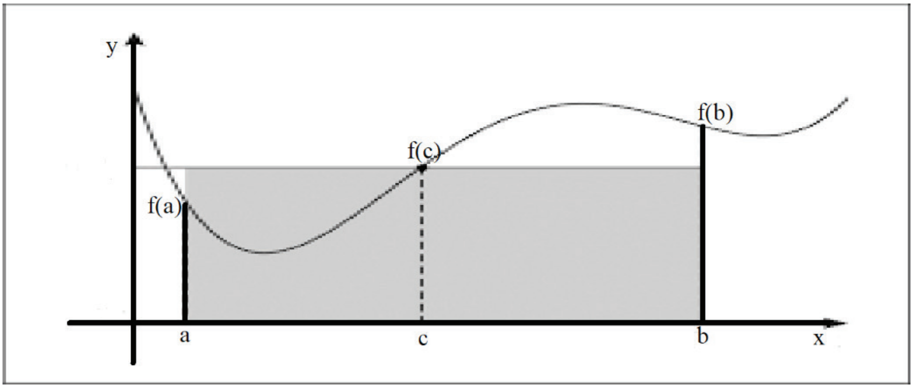
Pertanto

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Il numero $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ è compreso tra il minimo ed il massimo e per il teorema dei valori intermedi esisterà un $c \in [a,b]$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Geometricamente ciò vuol dire che esisterà un rettangolo di base $(b-a)$ ed altezza $f(c)$ con area uguale all'integrale di Riemann della funzione.



Definizione 10.2 – Si dice che una funzione G, derivabile in $[a,b]$ è una **primitiva** di f in $[a.b]$ se

$$G'(x) = f(x) \ \forall x \in [a, b].$$

Esempio.

Se $f(x) = 3x^2 + x$, la funzione $F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2$ è una sua primitiva poiché $F'(x) = 3x^2 + x$.

Poiché la derivata di una costante è nulla, si vede che la primitiva, se esiste, non è unica. Infatti, anche

$$F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 7;$$

$$F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3; \qquad F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 11.$$

sono primitive della funzione.

Quindi se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, le funzioni $F(x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$ sono tutte e sole le primitive di $f(x)$. Graficamente le primitive sono rappresentate da infinite curve ottenute dal grafico di $F(x)$ con una traslazione verticale.

Definizione 10.3 – *Se $f(x)$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$, si definisce funzione integrale*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

al variare di x in $[a, b]$.

Lo studio delle relazioni che intercorrono tra $F(x)$ e $f(x)$ è alla base del calcolo integrale.

Teorema fondamentale del calcolo integrale – *Se $f(x)$ è continua in $[a, b]$, la sua funzione integrale è derivabile e si ha che*

$$F'(x) = f(x).$$

Dim.

Consideriamo il rapporto incrementale della funzione integrale

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{\Delta x}.$$

Dalla (10.4) abbiamo che

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{\Delta x}.$$

Utilizzando il teorema della media integrale

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}=f(z)$$

dove $z \in [x, x+\Delta x]$. Se l'incremento tende a zero, ovviamente *z* tende a *x*. Quindi

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x)=f(x).$$

Osserviamo che la funzione integrale $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$. Inoltre, essendo la derivata di una costante zero, anche $F(x)+c$ è una primitiva di $f(x)$.

Vale la seguente

Formula fondamentale del calcolo integrale – Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a,b]$ e $G(x)$ una sua primitiva su $[a,b]$, allora

$$\int_a^b f(t)dt=G(b)-G(a).$$

Dim.

Osservando che se $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive di $f(x)$, allora

$$F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Per il Corollario 8.1, la funzione $F(x)-G(x)$ è una costante. Pertanto

(10.8) $$G(x)=F(x)+c.$$

Presa la funzione integrale $F(x)$, dalla (10.8) si ha

(10.9) $$G(x) = \int_a^x f(t)dt + c.$$

Se $x = a$, si ottiene

$$G(a) = c\,.$$

Quindi sostituendo c nella (10.9) si ha

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + G(a).$$

Infine, ponendo $x = b$, si ottiene

$$G(b) = \int_a^b f(t)dt + G(a)\,,$$

da cui

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a).$$

Essendo l'operazione di integrazione l'inversa dell'operazione di derivazione, il calcolo degli integrali è ricondotto alla ricerca delle primitive di una funzione.

Esempio.

Consideriamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx.$$

Sappiamo che $-cosx$ ha per derivata $sinx$ e, quindi, è una sua primitiva. Applicando la formula fondamentale, otteniamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx = [-cosx]_0^{\frac{\pi}{2}} = -cos\frac{\pi}{2} - (-cos0) = 1.$$

Osserviamo che esistono funzioni dotate di primitive, le quali non possono essere espresse in termini di funzioni elementari e cioè non esiste per esse una espressione analitica. In questo caso si parla di **funzioni non integrabili elementarmente.** Ad esempio

$$\frac{e^x}{x}; \quad \frac{sinx}{x}; \quad \frac{cosx}{x}; \quad \frac{1}{lnx}; \quad cosx^2; \quad e^{\alpha x^2}(\alpha \neq 0);$$

non hanno primitive in forma analitica.

10.3 Misura di Peano-Jordan

Questo procedimento è stato formalizzato in modo rigoroso alla fine del diciannovesimo secolo attraverso la misura secondo Peano-Jordan che cerca di estendere il concetto di area della geometria euclidea a figure con contorni non rettilinei. Si parte considerando misurabile l'insieme vuoto ponendo

$$m(\emptyset) = 0.$$

Il passo successivo consiste nel considerare i cosiddetti **insiemi elementari.** Essi non sono altro che i rettangoli chiusi con lati paralleli agli assi coordinati del piano. Cioè sono insiemi del tipo $\Delta = [a,b] \times [c,d],\ con\, a < b, c < d.$ Gli insiemi elementari sono misurabili secondo Peano-Jordan e, seguendo il concetto di area ben noto dalla geometria euclidea, si definisce come loro misura il numero

$$m(\Delta) = (b - a)(d - c).$$

Si chiama **plurintervallo** o **plurirettangolo** ogni insieme che risulta unione di un numero finito di insiemi elementari a due a due privi di punti interni comuni; un tale insieme è misurabile secondo Peano-Jordan e la sua misura $m(X)$ è la somma delle misure degli insiemi elementari che lo compongono. Ovviamente un plurirettangolo può essere decomposto in differenti modi come unione di insiemi elementari ma la sua misura non dipende dalla decomposizione scelta per calcolarla. Riguardo la misura dei plurirettangoli vale la seguente proprietà:

se P,Q sono due plurirettangoli con $P \subset Q$ *allora* $m(P) \leq m(Q)$.

Dopo queste premesse, analizziamo insiemi meno elementari considerando le tre seguenti classi di sottoinsiemi del piano

1) insiemi X con punti interni e limitati;

2) insiemi X privi di punti interni e limitati;

3) insiemi X non limitati.

Se X è del tipo 1), ci saranno sia plurirettangoli contenuti in X che plurirettangoli contenenti X. Consideriamo l'insieme formato dalle misure di tutti i plurirettangoli contenuti in X e quello formato dalle misure di tutti i plurirettangoli che contengono X

$$s = \{m(P): P \subset X, P\ plurirettangolo\},$$

$$S = \{m(Q): Q \supset X, Q\ plurirettangolo\}.$$

Si chiama **misura interna** di X e la si indica $m_i(X)$, l'estremo superiore di s. Si chiama invece **misura esterna** di X e la si indica $m_e(X)$, l'estremo inferiore di S. Si ha, ovviamente,

$$m_i(X) \leq m_e(X).$$

Definizione 10.3 *– Diremo che X è misurabile secondo Peano-Jordan se*

$$m_i(X) = m_e(X)$$

e in tale caso porremo

$$m(X) = m_i(X) = m_e(X).$$

Se X è del tipo 2), non esistono plurirettangoli contenuti in X e quindi l'insieme $s = \emptyset$.

Definizione 10.4 – *Diremo che X è misurabile secondo Peano-Jordan se*

$$m_e(X) = 0$$

e porremo, in tale caso,

$$m(X) = 0 .$$

Ad esempio un segmento ha misura di Peano-Jordan nulla.

Infine, studiamo gli insiemi del tipo 3). Se consideriamo l'intersezione con un qualsiasi insieme elementare Δ, si ha che $X \cap \Delta$ è limitato e quindi è di tipo 1) o 2).

Definizione 10.5 – *Diremo che X è misurabile secondo Peano-Jordan se gli insiemi $X \cap \Delta$ sono misurabili al variare in tutti i modi possibili di Δ nella famiglia degli insiemi elementari; in tale caso porremo*

$$m(X) = sup\{m(X \cap \Delta) : \Delta \text{ } insieme \text{ } elementare\}.$$

Osserviamo che un insieme non limitato non è detto che abbia misura infinita. Ad esempio una retta è non limitata ma ha misura nulla.

La misura di Peano-Jordan gode delle seguenti proprietà

1) Positività: $m(X) \geq 0$ per ogni insieme misurabile;
2) Monotonia: $m(X) \leq m(Y) \text{ } se \text{ } X \subset Y$;
3) Finita subadditività: $m(X \cup Y) \leq m(X) + m(Y)$;
4) Finita additività: $m(X \cup Y) = m(X) + m(Y) \text{ } se \text{ } X \cap Y = \emptyset$;
5) Modularità: $m(X \cup Y) = m(X) + m(Y) - m(X \cap Y)$;
6) Sottrattività: $m(X - Y) = m(X) - m(Y)$.

Definizione 10.6 – *Sia $f : [a,b] \rightarrow R$ una funzione integrabile che assume valori non negativi. Definiamo rettangoloide (o trapezioide) il seguente insieme del piano*

$$T = \{(x,y) : x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Si dimostra che *f* è integrabile secondo Riemann, se e solo se T è misurabile secondo Peano-Jordan e si ha

$$m(T) = \int_a^b f(x)dx.$$

Quindi se abbiamo una funzione non negativa, l'integrale $\int_a^b f(x)dx$, detto anche **integrale definito**, rappresenta l'area della figura formata dal grafico della funzione e l'asse delle ascisse.

Definizione 10.7 *– Se abbiamo due funzioni integrabili*

$$f, g: [a, b] \to \mathbb{R} \qquad con \quad f(x) \leq g(x),$$

chiamiamo dominio normale rispetto a x il seguente insieme

$$D = \{(x, y): x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

L'insieme *D* è misurabile secondo Peano-Jordan e si ha

$$m(D) = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx\,.$$

Capitolo 11

Metodi di integrazione

11.1 Integrali indefiniti

Il teorema fondamentale del calcolo integrale, ci porta ad affrontare il problema inverso dell'operazione di derivazione. Pertanto diamo la seguente definizione.

Definizione 11.1 – Si chiama **integrale indefinito** della funzione $f(x)$ e si indica con $\int f(x)dx$, l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$.

Dalla tabella delle derivate di una funzione, possiamo ricavare la seguente tabella di integrali indefiniti

Funzione integranda		Primitive
1)	$\int kdx$	$kx + c$
2)	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx$	$\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$
3)	$\int f'(x) \cdot sinf(x)dx$	$-cosf(x) + c$
4)	$\int f'(x) \cdot cosf(x)dx$	$sinf(x) + c$
5)	$\int \frac{f'(x)}{cos^2 f(x)} dx$	$tgf(x) + c$
6)	$\int \frac{f'(x)}{sin^2 f(x)} dx$	$-cotgf(x) + c$
7)	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx$	$arcsinf(x) + c =$ $= -arccosf(x) + c$
8)	$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx$	$arctgf(x) + c =$ $= -arccotgf(x) + c$
9)	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$	$ln\|f(x)\| + c$
10)	$\int f'(x) \cdot e^{f(x)}dx$	$e^{f(x)} + c$
11)	$\int f'(x) \cdot a^{f(x)}dx$	$\frac{a^{f(x)}}{lna}$

Facciamo degli esempi di applicazione dei casi riportati nella tabella precedente:

Caso 1)

$$\int 3dx = 3x + c,$$

$$\int 8dx = 8x + c.$$

Caso 2)

$$\int sin^3x \cdot cosxdx = \frac{sin^4x}{4} + c$$

$$\int (x^2 + cosx + e^{3x})^6 \cdot (2x - sinx + 3e^{3x})dx =$$
$$= \frac{(x^2 + cosx + e^{3x})^7}{7} + c$$

$$\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\int \frac{lnx}{x}dx = \frac{ln^2x}{2} + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+2}}dx = \int (x+2)^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{x+2} + c,$$

$$\int \frac{tg^3x}{cos^2x}dx = \frac{tg^4x}{4} + c,$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c.$$

Caso 3)

$$\int 2x \cdot sinx^2dx = -cosx^2 + c,$$

$$\int sinxdx = -cosx + c.$$

Caso 4)

$$\int 3x^2 cosx^3 dx = sinx^3 + c,$$

$$\int cosxdx = sinx + c.$$

Caso 5).

$$\int \frac{3}{cos^2 3x} dx = tg3x + c,$$

$$\int \frac{2x}{cos^2 x^2} dx = tgx^2 + c.$$

Caso 6)

$$\int \frac{5}{sin^2 5x} dx = -cotg5x + c.$$

Caso 7)

$$\int \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} dx = \int \frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}} dx = arcsin3x + c,$$

$$\int \frac{4x}{\sqrt{1-4x^4}} dx = arcsin2x^2 + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsinx + c.$$

Caso 8)

$$\int \frac{4}{1+16x^2} dx = arctg4x + c,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + c.$$

Caso 9)

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx = ln|x^2+x| + c,$$

$$\int \frac{1}{xlnx}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{lnx}dx = ln|lnx| + c,$$

$$\int \frac{e^x}{e^x - 10}dx = ln|e^x - 10| + c,$$

$$\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + c,$$

$$\int cotgxdx = \int \frac{cosx}{sinx}dx = ln|sinx| + c,$$

$$\int \frac{1}{sinx \cdot cosx}dx = \int \frac{1}{tgx \cdot cos^2x}dx = ln|tgx| + c.$$

Caso 10)

$$\int cosx \cdot e^{sinx}dx = e^{sinx} + c,$$

$$\int e^x dx = e^x + c.$$

Caso 11)

$$\int 2x \cdot 5^{x^2}dx = \frac{5^{x^2}}{ln5} + c,$$

$$\int 3^x dx = \frac{3^x}{ln3} + c.$$

Con artifici algebrici, alcuni integrali che sembrano non appartenere ad uno dei casi riportati in tabella, possono essere ricondotti ad essi

Esempio.

Per calcolare

$$\int cos8x\ dx,$$

moltiplichiamo e dividiamo per 8 la funzione integranda, riconducendoci al caso 4). Si ha

$$\int cos8xdx = \frac{1}{8}\int 8cos8xdx = \frac{1}{8}sin8x + c\,.$$

In maniera analoga si risolvono gli integrali seguenti

$$\int 2e^{5x}dx = \frac{2}{5}e^{5x} + c$$

$$\int \frac{sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx = -2cos\sqrt{x} + c$$

$$\int \frac{1}{sin^2xcos^2x}dx = \int \frac{1}{\left(\frac{sin2x}{2}\right)^2}dx = 4\int \frac{1}{sin^2 2x}dx =$$
$$= -2cotg2x + c$$

In quest'ultimo integrale abbiamo applicato la **formula di duplicazione** del seno e cioè

$$sin2x = 2sinxcosx.$$

Ricordando le funzioni iperboliche

$$sinhx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$coshx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

è facile vedere che

$$cos^2hx - sin^2hx = 1$$

$$D[sinhx] = coshx$$

$$D[coshx] = sinhx$$

$$D[tghx] = \frac{1}{cos^2hx}$$

$$D[cotghx] = \frac{-1}{sin^2 hx}$$

$$D[arcsinhx] = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$D[arccoshx] = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$D[arctghx] = \frac{1}{1-x^2}.$$

Pertanto, sono da aggiungere ai casi riportati nella tabella iniziale anche i seguenti integrali

12) $\int sinhxdx = coshx + c$;

13) $\int coshxdx = sinhx + c$;

14) $\int \frac{1}{cos^2 hx} dx = tghx + c$;

15) $\int \frac{1}{sin^2 hx} dx = -cotghx + c$;

16) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = arcsinhx + c$;

17) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = arccoshx + c$;

18) $\int \frac{1}{1-x^2} dx = arctghx + c$;

19) $\int \frac{1}{x^2-1} dx = arccotghx$.

Di seguito riportiamo alcuni esempi di integrali di funzioni trigonometriche inverse che sono generalizzazioni degli integrali fondamentali riportati in tabella. Impariamo a riconoscerli

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int \frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = arcsin\frac{x}{a} + c.$$

Esempio.

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}dx = arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + c.$$

Ora generalizziamo l'integrale dell'arcotangente

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \int \frac{1}{a^2\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}dx =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{a\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + c\,.$$

Esempio.

$$\int \frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{2}arctg\frac{x}{2} + c.$$

Con procedimento analogo, possiamo generalizzare anche gli integrali delle inverse iperboliche. Pertanto, completiamo la tabella con i seguenti risultati.

(11.1) $$\boldsymbol{\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = arcsinh\frac{x}{a} + c}$$

(11.2) $$\boldsymbol{\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = arccosh\frac{x}{a} + c}$$

(11.3) $$\boldsymbol{\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{a}arctgh\frac{x}{a} + c}$$

(11.4) $$\boldsymbol{\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = arcsin\frac{x}{a} + c}$$

(11.5) $$\boldsymbol{\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + c}$$

11.2 Integrali goniometrici con le formule di Werner

Se abbiamo integrali del tipo

$$\int sinpx \cdot cosqxdx; \int sinpx \cdot sinqxdx; \int cospx \cdot cosqxdx,$$

dobbiamo semplicemente ricordare dalla goniometria le formule di Werner, che permettono di trasformare un prodotto in somma. In tal modo li riconduciamo ai casi degli integrali riportati in tabella. Le **formule di Werner** sono le seguenti

$$sin\alpha sin\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta) - cos\,(\alpha+\beta)]$$

$$cos\alpha cos\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta) + cos\,(\alpha-\beta)]$$

$$sin\alpha cos\beta = \frac{1}{2}[sin(\alpha+\beta) + sin\,(\alpha-\beta)].$$

Esempio.

Calcoliamo

$$\int sin4xcos2xdx.$$

Dalla terza formula di Werner e dalla 3) della tabella, si ha

$$\int sin4xcos2xdx = \frac{1}{2}\int (sin6x + sin2x)dx =$$

$$= -\frac{1}{12}cos6x - \frac{1}{4}cos2x + c.$$

Esempio.

$$\int cos3xcos2xdx = \frac{1}{2}\int (cos5x + cosx)dx =$$

$$= \frac{1}{10}sin5x + \frac{1}{2}sinx + c.$$

11.3 Integrazione delle funzioni razionali fratte

Studiamo il calcolo di integrali del tipo

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}dx$$

dove il numeratore ed il denominatore sono funzioni polinomiali. Se il grado del numeratore è maggiore o uguale al grado del denominatore, bisogna fare la divisione tra i polinomi ottenendo un quoziente $Q(x)$ ed un resto $R(x)$, con il grado del resto, come noto, sempre minore del grado del denominatore. Pertanto l'integrale si può scrivere nel seguente modo

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int \left[Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}\right] dx.$$

Esempio.

Calcoliamo il seguente integrale

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + 1} dx.$$

Eseguendo la divisione risulta $Q(x) = x + 2$ ed $R(x) = -1$. Quindi

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + 1} dx = \int \left(x + 2 + \frac{-1}{x^2 + 1}\right) dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + 2x - arctgx + c.$$

L'integrale $\int [Q(x)] dx$ è sempre un integrale immediato, mentre ciò non vale in generale per $\int \frac{R(x)}{D(x)} dx$. Quando questo integrale non risulta di tipo immediato, come nell'esempio visto, sono fondamentali i concetti di seguito esposti.

Definizione 11.2 – Due polinomi nella stessa variabile si dicono **uguali** quando hanno lo stesso grado e i coefficienti dei termini di uguale grado sono uguali.

Definizione 11.3 – Due polinomi nella stessa variabile si dicono **identicamente uguali** quando assumono lo stesso valore per qualunque numero venga sostituito alla variabile.

È ovvio che due polinomi uguali sono identicamente uguali. Meno ovvia è l'implicazione inversa ma che è possibile dimostrare. Per tale motivo vale il seguente

Principio di identità dei polinomi – *Due polinomi*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \, ,$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \, ,$$

sono identicamente uguali se e solo se per ogni valore di x risultano uguali i corrispondenti coefficienti

$$a_n = b_n; \; a_{n-1} = b_{n-1}; \; \dots \dots; \; a_1 = b_1; \;\; a_0 = b_0.$$

Distinguiamo 4 casi

1) **il denominatore si può scomporre in binomi di primo grado $\boldsymbol{ax + b}$.**

Consideriamo

$$\int \frac{5x-1}{x^2 - x - 2} dx.$$

Il denominatore ha due radici -1 e 2. Per tale motivo può essere scomposto in $(x+1)(x-2)$. Vale la seguente scomposizione in fratti semplici

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Eseguiamo la somma tra le due frazioni

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax - 2A + Bx + B}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A + B}{(x+1)(x-2)}.$$

Per il principio di identità dei polinomi, affinchè

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{(A+B)x - 2A + B}{(x+1)(x-2)},$$

deve essere soddisfatto il seguente sistema

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ -2A + B = -1 \,. \end{cases}$$

Risolvendolo si ha $A = 2$ e $B = 3$. Pertanto

$$\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}\right) dx =$$
$$= 2ln|x+1| + 3ln|x-2| + c.$$

Esempio.

Calcolare l'integrale

$$\int \frac{2x^2-3x-11}{x^3+2x^2-x-2}\,dx.$$

Essendo $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x+1)(x-1)(x+2)$, si ha

$$\frac{2x^2-3x-11}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} =$$
$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (A+3B)x + 2B - 2A - C}{(x+1)(x-1)(x+2)}.$$

Per il principio di identità dei polinomi risulta

$$\begin{cases} A + B + C = 2 \\ A + 3B = -3 \\ 2B - 2A - C = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -2 \\ C = 1 \end{cases}.$$

Quindi

$$\int \frac{2x^2-3x-11}{x^3+2x^2-x-2}\,dx = \int \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2}\right) dx =$$
$$= 3ln|x+1| - 2ln|x-1| + ln|x+2| + c\,.$$

2) il denominatore ha radici multiple e scomponendolo abbiamo termini del tipo $(\boldsymbol{ax+b})^{\boldsymbol{n}}$

Esempio.

Calcolare l'integrale

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1}dx.$$

Essendo $x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$, risulta

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=$$
$$=\frac{(A+B)x^2+(C-2A)x+A-B+C}{(x+1)(x-1)^2}.$$

Per il principio di identità dei polinomi

$$\begin{cases} A+B=1 \\ C-2A=0 \\ A-B+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1/2 \\ B=1/2 \\ C=1 \end{cases}.$$

Quindi

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1}dx =$$
$$=\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{2}ln|x+1|+\frac{1}{2}ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c$$

3) Il denominatore ha polinomi di secondo grado non scomponibili nel campo reale

Esempio.

Calcolare l'integrale

$$\int \frac{x^2+4x+4}{(x-1)(x^2+x+1)}dx.$$

Osservando che il trinomio x^2+x+1 non ha radici reali, scriveremo

$$\frac{x^2+4x+4}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} =$$
$$= \frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Per il principio di identità dei polinomi

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B+C=4 \\ A-C=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-2 \\ C=-1 \end{cases}.$$

Quindi, applicando il caso 9) della tabella, si ha

$$\int \frac{x^2+4x+4}{(x-1)(x^2+x+1)} dx =$$
$$= \int \left(\frac{3}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} \right) dx =$$
$$= 3ln|x-1| - \ln(x^2+x+1) + c.$$

In generale gli integrali del tipo

$$\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d} dx$$

non sono immediatamente riconducibili al caso 9). Si dimostra che

(11.6) $\boldsymbol{\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d} dx = \frac{a}{2} ln\left|x^2+cx+d\right| + \frac{2b-ac}{\sqrt{-\Delta}} arctg\left(\frac{2x+c}{\sqrt{-\Delta}}\right) + c.}$

Esempio.

$$\int \frac{4x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)} dx.$$

Il trinomio x^2+2x+4 non ha radici reali risultando $\Delta = -12$.
Procediamo alla scomposizione della funzione integranda.

$$\frac{4x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4} =$$
$$= \frac{(A+B)x^2 + (2A-2B+C)x + 4A - 2C}{(x-2)(x^2+2x+4)}.$$

Per il principio di identità dei polinomi, risulta

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-2B+C=4 \\ 4A-2C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3/4 \\ B=-3/4 \\ C=1 \end{cases}.$$

Quindi

$$\int \frac{4x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)}dx = \int \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{-\frac{3}{4}x+1}{x^2+2x+4} \right) dx =$$

$$= \frac{3}{4} ln|x-2| - \frac{3}{8} ln(x^2+2x+4) + \frac{2+\frac{3}{2}}{2\sqrt{3}} arctg\left(\frac{2x+2}{2\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{3}{4} ln|x-2| - \frac{3}{8} ln(x^2+2x+4) + \frac{7\sqrt{3}}{12} arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

4) il denominatore è un trinomio di secondo grado non scomponibili con molteplicità $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

Per la risoluzione di integrali di questo tipo

$$\boldsymbol{I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx}$$

è utile la seguente formula ricorsiva

(11.7) $$\boldsymbol{I_n = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}}}.$$

La primitiva di I_1 è la funzione $f(x) = arctgx$. Invece per $n > 1$ diamo alcuni esempi di applicazione della (11.7):

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}arctgx + \frac{x}{2(1+x^2)} + c;$$
$$\int \frac{1}{(1+x^2)^3}dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx + \frac{x}{4(1+x^2)^2} =$$
$$= \frac{3}{8}arctgx + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{x}{4(1+x^2)^2} + c.$$

Nel caso 4) di integrale di funzione razionale fratta, è spesso utile ricordare il **metodo del completamento del quadrato**

$$\boldsymbol{x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c =}$$
$$\boldsymbol{= \frac{1}{4}[(2x+b)^2 - (b^2 - 4c)].}$$

Esempio.

$$3x^2 + 6x + 1 = 3\left(x^2 + 2x + \frac{1}{3}\right) = 3\left[(x+1)^2 - 1 + \frac{1}{3}\right] =$$
$$= 3\left[(x+1)^2 - \frac{2}{3}\right].$$

Esempio.

Calcolare l'integrale

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)^2}dx.$$

Procedendo come negli esempi precedenti, risulta

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2} + \frac{Ex+F}{(1+x^2)^2}$$

ed applicando il principio di identità dei polinomi, si ha

$$A = C = E = 0, B = 1, D = F = -1.$$

Pertanto

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)^2}dx =$$
$$= \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx =$$
$$= -\frac{1}{x} - arctgx - \frac{1}{2}arctgx - \frac{x}{2(1+x^2)} + c.$$

11.4 Integrazione per parti

La risoluzione dell'integrale di un prodotto è una diretta conseguenza della formula di derivazione del prodotto

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Infatti, integrando ambo i membri si ottiene

$$\int D[f(x) \cdot g(x)]dx = \int [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)]dx,$$

da cui

$$f(x) \cdot g(x) = \int \left[f^{'(x)} \cdot g(x)\right]dx + \int [f(x) \cdot g^{'}(x)]dx.$$

Pertanto si ha

(11.8) $\boldsymbol{\int[f'(x) \cdot g(x)]dx = f(x) \cdot g(x) - \int[f(x) \cdot g'(x)]dx}$

detta formula di **integrazione per parti.**

Esempio.

Calcolare il seguente integrale

$$\int xlnxdx.$$

Ponendo $f' = x,\ f = \frac{x^2}{2},\ g = lnx,\ g' = \frac{1}{x}$ ed applicando la (11.8), si ha

$$\int xlnxdx = \frac{x^2}{2}lnx - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}lnx - \int \frac{x}{2}dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}lnx - \frac{x^2}{4} + c.$$

In generale quando la funzione integranda è il prodotto di un polinomio per una funzione logaritmica si sceglie il polinomio come f'.

Esempio.

Calcolare il seguente integrale

$$\int xsinxdx.$$

Ponendo $f' = sinx,\ f = -cosx,\ g = x,\ g' = 1$ ed applicando la (11.8), si ha

$$\int xsinxdx = -xcosx - \int -cosxdx = -xcosx + \int cosxdx =$$
$$= -xcosx + sinx + c.$$

In generale quando la funzione integranda è il prodotto di un polinomio per una funzione goniometrica si sceglie la funzione goniometrica come f'.

Esempio.

Calcolare il seguente integrale

$$\int xe^x dx.$$

Ponendo $f' = e^x,\ f = e^x,\ g = x,\ g' = 1$ ed applicando la formula di integrazione per parti, si ha

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$$

In generale quando la funzione integranda è il prodotto di un polinomio per una funzione esponenziale si sceglie la funzione esponenziale come f'.

Esempio.

Calcolare il seguente integrale

$$\int arcsinxdx.$$

Ponendo $f' = 1,\ f = x,\ g = arcsinx,\ g' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ed applicando la (11.8), si ha

$$\begin{aligned}\int arcsinxdx &= xarcsinx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \\ &= xarcsinx - \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot xdx = \\ &= xarcsinx + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)dx = \\ &= xarcsinx + \sqrt{1-x^2} + c.\end{aligned}$$

In generale quando la funzione integranda è il prodotto di un polinomio per una funzione goniometrica inversa si sceglie il polinomio come f'.

Esempio.

Calcolare il seguente integrale

$$\int e^x cosxdx.$$

Ponendo $f' = cosx,\ f = sinx,\ g = e^x,\ g' = e^x$ ed applicando la formula di integrazione per parti, si ha

$$\int e^x cosxdx = e^x sinx - \int e^x sinxdx.$$

Ora bisogna riapplicare la (11.8) all'integrale $\int e^x sinxdx$, ponendo $f' = sinx,\ f = -cosx,\ g = e^x,\ g' = e^x$. Pertanto

$$\begin{aligned}\int e^x sinxdx &= -e^x cosx - \int -e^x cosxdx = \\ &= -e^x cosx + \int e^x cosxdx\end{aligned}$$

e per l'integrale iniziale varrà la seguente uguaglianza

$$\int e^x cosxdx = e^x sinx + e^x cosx - \int e^x cosxdx.$$

Trasportando al primo membro l'integrale al secondo membro, si ottiene

$$2\int e^x cosxdx = e^x sinx + e^x cosx.$$

Quindi

$$\int e^x cosxdx = \frac{e^x sinx + e^x cosx}{2} + c.$$

In generale quando la funzione integranda è il prodotto di una funzione esponenziale per una funzione goniometrica si sceglie la funzione goniometrica come f'.

11.5 Formule ricorsive per integrali $\int \boldsymbol{sin^p x \cdot cos^q xdx}$

Applicando ripetutamente la formula di integrazione per parti, si ha

$$I_n = \int sin^n xdx = \int sin^{n-1}x \cdot sinxdx =$$

$$= -cosxsin^{n-1}x + \int cos^2 x \cdot (n-1)sin^{n-2}xdx =$$

$$= -cosxsin^{n-1}x + (n-1)\int (1 - sin^2 x)sin^{n-2}xdx =$$

$$= -cosxsin^{n-1}x + (n-1)\int sin^{n-2}xdx - (n-1)\int sin^n xdx =$$

$$= -cosxsin^{n-1}x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Dalla seguente uguaglianza

$$I_n = -cosxsin^{n-1}x + (n-1)I_{n-2} - nI_n + I_n,$$

otteniamo

(11.9) $$\boldsymbol{I_n = \int sin^n x dx = -\frac{1}{n} sin^{n-1}x \cdot cosx + \frac{n-1}{n} I_{n-2}}.$$

Con procedimento analogo, possiamo ricavare

(11.10) $$\boldsymbol{I_n = \int cos^n x dx = \frac{1}{n} cos^{n-1}x \cdot sinx + \frac{n-1}{n} I_{n-2}},$$

(11.11) $$\boldsymbol{I_n = \int tg^n x dx = \frac{tg^{n-1}x}{n-1} - I_{n-2}}.$$

Queste formule ricorsive possono essere utili se gli esponenti delle funzioni goniometriche sono alti e se questi integrali compaiono all'interno di un integrale che stiamo risolvendo e che è già lungo di per sé.

Esempio.

Calcolare il seguente integrale

$$\int cos^4 xdx.$$

Applicando la (11.10), si ha

$$\int cos^4 xdx = \frac{1}{4} cos^3 x \cdot sinx + \frac{3}{4} \int cos^2 xdx.$$

Ancora per la formula ricorsiva si ha

$$\int cos^2 xdx = \frac{1}{2} cosxsinx + \frac{1}{2} \int cos^0 xdx = \frac{1}{2} cosxsinx + \frac{1}{2} x.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int cos^4 xdx &= \frac{1}{4} cos^3 x \cdot sinx + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} cosxsinx + \frac{1}{2} x\right) = \\ &= \frac{1}{4} cos^3 x \cdot sinx + \frac{3}{8} cosxsinx + \frac{3}{8} x + c.\end{aligned}$$

Le formule (11.9) – (11.11) e l'identità fondamentale della goniometria permettono di calcolare gli integrali $\int sin^p x \cdot cos^q xdx$ con gli esponenti entrambi pari. Se, invece, almeno uno degli esponenti è dispari si riconducono ad integrali della tabella.

Esempio.

Calcolare il seguente integrale

$$\int sin^3x \cdot cos^2xdx.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\int sin^3x \cdot cos^2x\, dx &= \int sin^2x \cdot cos^2x \cdot sinx\, dx = \\ &= \int (1 - cos^2x) \cdot cos^2x \cdot sinx\, dx =\end{aligned}$$

$$= \int cos^2x \cdot sinx\, dx - \int cos^4x \cdot sinx\, dx = -\frac{cos^3x}{3} + \frac{cos^5x}{5} + c.$$

Quando entrambi gli esponenti sono dispari conviene trasformare la funzione con esponente minore. Se sono entrambi pari, come nel seguente esempio,

$$\begin{aligned}\int cos^2x \cdot sin^2x\, dx &= \int (1 - sin^2x) \cdot sin^2x\, dx = \\ &= \int sin^2x\, dx - \int sin^4x\, dx\end{aligned}$$

si ottengono due integrali da risolvere con la formula ricorsiva.

11.6 Integrali per sostituzione

L'integrazione per sostituzione è un importante strumento per il calcolo di primitive. Esso consiste in un cambio di variabile in modo da ricondurci ad un integrale più facilmente risolvibile. Vale la seguente formula

$$\left[\int f(x)\, dx\right]_{x=g(t)} = \int f(g(t))g'(t)\, dt.$$

Schematizziamo alcuni casi di integrali risolvibili per sostituzione.

1) Integrali del tipo $\int F\left(x^{\frac{a}{b}}, x^{\frac{c}{d}}, ..\right) dx$

Si pone $x = t^s \Rightarrow dx = st^{s-1}dt$ dove s è il minimo comune multiplo tra gli indici delle radici.

Esempio.

$$\int \frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\, dx.$$

Poiché $m.c.m(2{,}3{,}4) = 12$, poniamo

$$x = t^{12} \Rightarrow dx = 12t^{11}dt.$$

Quindi

$$\sqrt[3]{x} = x^{1/3} = t^4, \quad \sqrt{x} = x^{1/2} = t^6, \quad \sqrt[4]{x} = x^{1/4} = t^3.$$

Pertanto

$$\int \frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} dx = \int \frac{1-t^4}{t^6+t^3} 12t^{11}dt = 12\int \frac{t^8-t^{12}}{t^3+1} dt.$$

Eseguendo la divisione tra numeratore e denominatore, si ottiene

$$12\int \frac{t^8-t^{12}}{t^3+1} dt =$$

$$= 12\int (-t^9+t^6+t^5-t^3-t^2+1)dt + 12\int \frac{t-1}{t^2-t+1} dt.$$

Il primo integrale è immediato, mentre il secondo è un integrale di funzione razionale con il trinomio non scomponibile avendo discriminante negativo risolvibile applicando la (11.6). Pertanto

$$12\int \frac{t^8-t^{12}}{t^3+1} dt =$$

$$= -\frac{6}{5}t^{10} + \frac{12}{7}t^7 + 2t^6 - 3t^4 - 4t^3 + 12t + 6ln(t^2-t+1) +$$

$$+\frac{-12}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Ritornando alla variabile iniziale, il risultato sarà

$$-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{12}{7}\sqrt[12]{x^7}+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x}+12\sqrt[12]{x}+$$

$$+6ln\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[12]{x}+1\right)-4\sqrt{3}arctg\left(\frac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{3}}\right)+c.$$

2) Integrali del tipo $\int \boldsymbol{F(sinx, cosx, tgx)dx}$

Per risolvere questi integrali si utilizzano le seguenti formule parametriche

$$\begin{cases} sinx=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ cosx=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ tgx=\dfrac{2t}{1-t^2} \\ t=tg\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

e le seguenti uguaglianze

$$t=tg\frac{x}{2}\Rightarrow x=2arctgt\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Esempio.

$$\int\frac{1}{sinx}dx=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{1}{t}dt=ln|t|+c=$$
$$=ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+c.$$

Se notiamo che $\int f(x)dx$ non varia mutando x in $-x$, possiamo anche fare la sostituzione $cosx = t$.

Esempio.

$$\int \frac{tgx}{1 - cosx} dx$$

Applicando il metodo generale con le formule parametriche, l'integrale è facilmente risolvibile, però potrebbe accadere che il calcolo sia molto lungo e laborioso. In questi casi può essere utile osservare cosa accade sostituendo x con $-x$. Ricordando che

$$\begin{cases} \sin(-x) = -sinx \\ \cos(-x) = cosx \\ tg(-x) = -tgx \\ d(-x) = -dx \end{cases}$$

si verifica che vale la seguente uguaglianza

$$\int \frac{tg(-x)}{1 - \cos(-x)} d(-x) = \int \frac{tgx}{1 - cosx} dx.$$

Possiamo procedere con la seguente sostituzione

$$cosx = t \Rightarrow -sinxdx = dt$$

da cui

$$-tgxdx = \frac{dt}{t}.$$

Il nostro integrale diventerà

$$\int \frac{tgx}{1 - cosx} dx = -\int \frac{1}{t(1 - t)} dt.$$

Scomponendo in fratti semplici

$$-\int \frac{1}{t(1-t)}dt =$$
$$= -\int \frac{dt}{t} - \int \frac{1}{1-t}dt = -ln|t| + ln|1-t| + c =$$
$$= -ln|cosx| + ln|1-cosx| + c.$$

Se notiamo che $\int f(x)dx$ non varia sostituendo x con $\pi - x$, possiamo anche procedere con la sostituzione $sinx = t$.

Esempio.

$$\int \frac{cosx}{cos^2x - 4sinx - 6}dx.$$

Applicando il metodo generale con le formule parametriche l'integrale questa volta è molto lungo e laborioso. Sostituendo x con $-x$ l'integrale non resta invariato. Vediamo cosa accade sostituendo x con $\pi - x$. Ricordando che

$$\begin{cases} sin(\pi - x) = sinx \\ \cos(\pi - x) = -cosx \\ tg(\pi - x) = -tgx \\ d(\pi - x) = -dx \end{cases}$$

si ha

$$\int \frac{\cos(\pi - x)}{cos^2(\pi - x) - 4\sin(\pi - x) - 6}d(\pi - x) =$$
$$= \int \frac{cosx}{cos^2x - 4sinx - 6}dx.$$

Poniamo

$$sinx = t \Rightarrow cosxdx = dt.$$

Applicando l'identità fondamentale della goniometria

$$cos^2x = 1 - sin^2x,$$

risulterà

$$\int \frac{cosx}{cos^2x - 4sinx - 6}dx = \int \frac{dt}{-t^2 - 4t - 5}.$$

Il trinomio non è scomponibile ed ha discriminante -4, quindi dalla (11.6) si ha

$$\int \frac{dt}{-t^2 - 4t - 5} = \frac{2}{\sqrt{4}}arctg\left(\frac{-2t - 4}{\sqrt{4}}\right) = arctg(-t - 2) =$$
$$= arctg(-sinx - 2) + c.$$

Se notiamo che $\int f(x)dx$ non varia sostituendo x con $\pi + x$, possiamo anche procedere con la sostituzione $tgx = t$.

Esempio.

$$\int \frac{sin^2x}{cos^6x}dx.$$

Applicando il metodo generale con le formule parametriche l'integrale è molto lungo e laborioso. Sostituendo x con $-x$ oppure con $\pi - x$, l'integrale non resta invariato. Vediamo cosa accade sostituendo x con $\pi + x$. Ricordando che

$$\begin{cases} sin(\pi + x) = -sinx \\ \cos(\pi + x) = -cosx \\ tg(\pi + x) = -tgx \\ d(\pi + x) = dx \end{cases}$$

si ha

$$\int \frac{sin^2(\pi + x)}{cos^6(\pi + x)} dx = \int \frac{sin^2 x}{cos^6 x} dx.$$

Ponendo

$$tgx = t \Rightarrow \frac{1}{cos^2 x} dx = dt$$

otteniamo

$$\int \frac{sin^2 x}{cos^6 x} dx = \int \frac{sin^2 x}{cos^2 x} \frac{1}{cos^2 x} \frac{1}{cos^2 x} dx =$$
$$= \int \frac{sin^2 x}{cos^2 x} \frac{sin^2 x + cos^2 x}{cos^2 x} \frac{1}{cos^2 x} dx =$$
$$= \int tg^2 x (tg^2 x + 1) dt =$$
$$= \int (t^4 + t^2) dt = \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + c = \frac{tg^5 x}{5} + \frac{tg^3 x}{3} + c.$$

3) Integrali di differenziale binomio che sono del tipo $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ con $m, n, p \in \mathbb{Q}$.

Se p è un numero naturale basta svolgere la potenza ottenendo integrali immediati. Se non è un numero naturale distinguiamo i seguenti casi

a) p intero negativo. In questo caso l'integrale è del tipo $\int F\left(x^{\frac{a}{b}}, x^{\frac{c}{d}}, ..\right) dx$ visto all'inizio di questo paragrafo.

Esempio.

$$\int x^{-1/3} (1 + x^{\frac{1}{6}})^{-1} dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx.$$

Il minimo comune multiplo tra gli indici delle radici è 6, quindi poniamo

$$x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$$

ottenendo

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx = \int \frac{6t^5}{t^2+t^3}dt = \int \frac{6t^3}{1+t}dt.$$

Eseguendo la divisione tra numeratore e denominatore si ha

$$\int \frac{6t^3}{1+t}dt = \int (6t^2-6t+6)dt + \int \frac{-6}{t+1}dt =$$
$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6ln|t+1| + c.$$

Quindi

$$\int x^{-1/3}(1+x^{\frac{1}{6}})^{-1}dx =$$
$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + c.$$

b) Se $p = \frac{r}{s}$ e risulta che $\frac{m+1}{n}$ è un numero intero, si effettua la sostituzione

$$a + bx^n = t^s.$$

Esempio.

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

è un integrale di differenziale binomio poiché

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-1/2}\left(1+x^{1/4}\right)^{1/3}dx.$$

Essendo $p = \frac{1}{3}$ e $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2$, poniamo

$$1 + x^{1/4} = t^3 \Rightarrow x^{1/4} = t^3 - 1 \Rightarrow x = (t^3-1)^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = 12(t^3 - 1)^3 t^2 dt.$$

Dalla precedente relazione si ha

$$x = (t^3 - 1)^4 \Rightarrow x^{-1/2} = (t^3 - 1)^{-2}.$$

Pertanto

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx =$$

$$= \int \frac{12(t^3 - 1)^3 t^3}{(t^3 - 1)^2} dt =$$

$$= \int (12t^6 - 12t^3) dt = \frac{12}{7} t^7 - 3t^4 + c =$$

$$= \frac{12}{7} \sqrt[3]{\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)^7} - 3\sqrt[3]{\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)^4} + c.$$

c) Se $p = r/s$ e $p + \frac{m+1}{n}$ è un numero intero, si effettua la seguente sostituzione

$$\frac{a + bx^n}{x^n} = t^s.$$

Esempio.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}} dx = \int x^{1/2}(1 - x)^{-1/2} dx.$$

Poiché $p + \frac{m+1}{n} = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}+1}{1} = 1$, poniamo

$$\frac{1 - x}{x} = t^2 \Rightarrow x^{-1} - 1 = t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{t^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = -\frac{2t}{(t^2 + 1)^2} dt$$

da cui ricaviamo che

$$1 - x = xt^2 = \frac{t^2}{t^2 + 1}.$$

Sostituendo nell'integrale si ha

$$\int x^{1/2}(1-x)^{-1/2}dx = \int \frac{-2}{(t^2+1)^2}dt.$$

Applicando la (11.7) risulta

$$-2\int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt = -arctgt - \frac{t}{t^2+1} + c =$$

$$= -arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}}}{\frac{1}{x}} + c.$$

d) Se p è irrazionale e $\frac{m+1}{n}$ è un numero naturale, si pone

$$a + bx^n = t$$

Esempio.

$$\int x(2-\sqrt{x})^{\sqrt{3}}dx.$$

Poiché $\frac{m+1}{n} = 4$, effettuiamo la sostituzione

$$2 - \sqrt{x} = t \Rightarrow x = (2-t)^2 \Rightarrow dx = -2(2-t)dt.$$

Quindi

$$\int x(2-\sqrt{x})^{\sqrt{3}}dx = -2\int (2-t)^3 t^{\sqrt{3}}dt.$$

Sviluppando il cubo del binomio e moltiplicando si ha

$$-2\int (2-t)^3 t^{\sqrt{3}}dt =$$

$$= -16\frac{t^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1} + 24\frac{t^{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{3}+2} - 12\frac{t^{\sqrt{3}+3}}{\sqrt{3}+3} + 2\frac{t^{\sqrt{3}+4}}{\sqrt{3}+4} + c.$$

Si può tornare alla variabile iniziale da $2-\sqrt{x}=t$ per dare la soluzione dell'integrale in x.

e) Se p è irrazionale e $p+\frac{m+1}{n}$ è un numero intero negativo, facciamo la sostituzione

$$\frac{a+bx^n}{x^n}=t.$$

Esempio.

$$\int x^{\sqrt{2}}(2-x^2)^{\frac{-3-\sqrt{2}}{2}}dx.$$

Poiché $p+\frac{m+1}{n}=\frac{-3-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}+1}{2}=-1$ ponendo

$$\frac{2-x^2}{x^2}=t \Rightarrow \frac{2}{x^2}=t+1 \Rightarrow x^2=\frac{2}{t+1} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx=\frac{-\sqrt{2}}{2(t+1)\sqrt{t+1}}dt.$$

È possibile risolvere l'integrale che viene lasciato per esercizio.

4) Integrali del tipo $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ e $\sqrt{a^2-x^2}$

Se abbiamo

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx$$

poniamo

$$x=a\,sinht \Rightarrow t=arcsinh\frac{x}{a},$$

inoltre

$$dx=a\,cosht\,dt.$$

Sostituendo, l'integrale diventa

$$\int \sqrt{a^2(sinh^2 t + 1)}a\ cosht\ dt = a^2 \int cosh^2 t\ dt.$$

Integrando per parti, si ha che

$$\int cosh^2 t\ dt = \frac{1}{2}(cosht\ sinht + t) + c.$$

Dall'identità fondamentale segue la prima delle seguenti uguaglianze e la seconda dalla sostituzione

$$cosht = \sqrt{1 + sinh^2 t} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{x^2 + a^2}.$$

Dalle relazioni precedenti si ha

$$a^2 \int cosh^2 t dt = \frac{a^2}{2}\left(\frac{x\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2} + arcsinh\frac{x}{a}\right).$$

Diamo la seguente formula generale

$$(11.12) \qquad \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 arcsinh\frac{x}{a}\right) + c.$$

Con la sostituzione $x = a\ cosht$ e procedendo come nell'esercizio precedente, si ottiene

$$(11.13) \qquad \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 arccosh\frac{x}{a}\right) + c.$$

Infine, con la sostituzione $x = a\ sint$ si ottiene che

$$(11.14) \qquad \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 arcsin\frac{x}{a}\right) + c.$$

5) Sostituzioni di Eulero per $\int F\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$

Le sostituzioni di Eulero molto spesso conducono a calcoli molto lunghi e, per tale motivo, conviene usarle solo quando non è possibile trovare altri metodi per calcolare i dati integrali. La **prima sostituzione di Eulero** la si può applicare ogni volta che $a > 0$. Si pone

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}\,x + t$$

prendendo indifferentemente il segno + o – davanti la radice.

Esempio.

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}\,dx.$$

Poniamo

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t. \tag{11.15}$$

Elevando al quadrato si ha

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2tx + t^2$$

da cui

$$x = \frac{1 - t^2}{2t - 1} \Rightarrow dx = -2\frac{t^2 - t + 1}{(2t - 1)^2}\,dt. \tag{11.16}$$

Dalla (11.15) e dalla prima delle (11.16) si ha

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t = \frac{1 - t^2}{2t - 1} + t = \frac{t^2 - t + 1}{2t - 1}.$$

Pertanto l'integrale diventa

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}\,dx = -2\int \frac{2t - 1}{1 - t^2}\,\frac{2t - 1}{t^2 - t + 1}\,\frac{t^2 - t + 1}{(2t - 1)^2}\,dt =$$
$$= \int \frac{2}{t^2 - 1}\,dt.$$

Scomponendo in fratti semplici, si ottiene

$$\int \frac{2}{t^2-1}dt = ln|t-1| - ln|t+1| + c.$$

Quindi

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx =$$
$$= ln\left|\sqrt{x^2+x+1}-x-1\right| - ln\left|\sqrt{x^2+x+1}-x+1\right| + c.$$

La **seconda sostituzione di Eulero** la si può applicare ogni volta che $c > 0$. Si pone

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}.$$

Esempio.

Calcoliamo il seguente integrale

$$\int \frac{\left(1-\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}dx.$$

In questo caso possiamo applicare sia la prima che la seconda sostituzione di Eulero. Applichiamo la seconda

$$\sqrt{x^2+x+1} = xt+1$$

da cui

$$x^2+x+1 = x^2t^2+2xt+1.$$

Dunque

$$x = \frac{2t-1}{1-t^2} \Rightarrow dx = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}dt$$

Pertanto, risulta

$$\sqrt{x^2+x+1} = xt+1 = \frac{2t-1}{1-t^2}t+1 = \frac{t^2-t+1}{1-t^2},$$

mentre

$$1-\sqrt{x^2+x+1}1 = 1-(xt+1) = -xt = \frac{-2t^2+t}{1-t^2}.$$

L'integrale diventa

$$\int \frac{\left(1-\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}\,dx =$$
$$= \int \left(\frac{-2t^2+t}{1-t^2}\right)^2 \left(\frac{1-t^2}{2t-1}\right)^2 \frac{1-t^2}{t^2-t+1}\,\frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}\,dt.$$

Semplificando si ottiene un integrale di una funzione razionale. Dividendo numeratore e denominatore tra di loro e scomponendo in fratti semplici è facile verificare che

$$\int \frac{2t^2}{1-t^2}\,dt = -2t + ln|1+t| - ln|1-t| + c.$$

In conclusione

$$\int \frac{\left(1-\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}\,dx =$$
$$= -\frac{2\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)}{x} + ln\left|1+\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\right| +$$
$$-ln\left|1-\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\right| + c.$$

La **terza sostituzione di Eulero** la si può applicare ogni volta il trinomio ammette due radici reali e distinte α e β, per cui vale la seguente uguaglianza

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}.$$

La sostituzione sarà una delle due

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t$$

oppure

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\beta)t.$$

Esempio.

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+5x-6}}dx.$$

Non possiamo applicare né la prima e né la seconda sostituzione di Eulero, però il trinomio ha due soluzioni distinte che sono 2 e -3. Scegliendo ad esempio 2, si ha

$$\sqrt{-(x-2)(x-3)} = (x-2)t \Rightarrow (x-2)(3-x) = (x-2)^2t^2.$$

Quindi

$$3 - x = xt^2 - 2t^2 \Rightarrow x = \frac{2t^2+3}{t^2+1} \Rightarrow dx = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}dt.$$

Pertanto, poiché $x = \frac{2t^2+3}{t^2+1}$, si ha

$$\sqrt{-(x-2)(x-3)} = (x-2)t = \left(\frac{2t^2+3}{t^2+1} - 2\right)t = \frac{t}{1+t^2}$$

e l'integrale si calcola nel seguente modo

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+5x-6}}dx = \int \frac{1+t^2}{t}\frac{-2t}{(1+t^2)^2}dt = \int \frac{-2}{1+t^2}dt =$$
$$= -2arctgt + c.$$

Ritornando alla variabile iniziale

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+5x-6}}dx = -2arctg\sqrt{\frac{3-x}{x-2}} + c.$$

11.7 Integrali particolari contenenti $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Durante lo svolgimento di integrali, ci si può imbattere in uno dei seguenti 5 integrali

$$\mathbf{1)}\ \int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^{2}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}}}\boldsymbol{d}\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{2)}\ \int \sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^{2}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}}\,\boldsymbol{d}\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{3)}\ \int \frac{\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}}{\sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^{2}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}}}\boldsymbol{d}\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{4)}\ \int \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})\sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^{2}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}}}\boldsymbol{d}\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{5)}\ \int \frac{\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})}{\sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^{2}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}}}\boldsymbol{d}\boldsymbol{x}$$

Per questi integrali non sempre è possibile poter applicare le sostituzioni di Eulero. Ad esempio se a e c sono negativi ed il discriminante è minore di zero, nessuna delle tre sostituzioni è applicabile.

Esempi.

Consideriamo il seguente integrale di tipo **1**)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^{2}-3x+2}}dx.$$

Applicando il completamento del quadrato

$$x^{2}-3x+2=\frac{1}{4}[(2x-3)^{2}-(1)]$$

si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} dx = 2 \int \frac{1}{\sqrt{(2x-3)^2 - 1}} dx.$$

Moltiplicando e dividendo per 2 si ricava

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} dx = \int \frac{2}{\sqrt{(2x-3)^2 - 1}} dx = \\ = \operatorname{arccosh}(2x - 3) + c.$$

Consideriamo il seguente integrale di tipo **2**)

$$\int \sqrt{x^2 + 4x + 13}\, dx.$$

Applicando il completamento del quadrato

$$x^2 + 4x + 13 = \frac{1}{4}[(2x+4)^2 - (16 - 52)]$$

si ha

$$\int \sqrt{x^2 + 4x + 13} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{(2x+4)^2 + 36}\, dx.$$

Procedendo con la seguente sostituzione

$$2x + 4 = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{2},$$

si ha

$$\frac{1}{2} \int \sqrt{(2x+4)^2 + 36}\, dx = \frac{1}{4} \int \sqrt{t^2 + 36}\, dt.$$

Dalla (11.12) si ottiene

$$\int \sqrt{x^2 + 4x + 13} dx = \\ = \frac{1}{8}\left[(2x+4)\sqrt{(2x+4)^2 + 36} + 36 arcsinh \frac{2x+4}{36}\right] + c.$$

Per quanto riguarda l'integrale di tipo **3**), se il numeratore è la derivata del radicando si riduce al caso 2) della tabella degli integrali immediati, altrimenti si può sempre ricondurre ad un integrale tipo **1**) ed a un integrale del secondo caso della tabella. Infatti consideriamo

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx = $$
$$= \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx + \int \frac{3}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx.$$

Nel primo integrale moltiplichiamo e dividiamo per 2 e poi sommiamo e sottraiamo 2 riconducendoci ad un integrale immediato sommato ad un integrale di tipo 1)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx.$$

Pertanto l'integrale da risolvere sarà il seguente

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx.$$

Applicando il secondo caso della tabella e quello di tipo 1), si ottiene

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx = \sqrt{x^2+2x+10},$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx = 2ln\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\sqrt{x^2+2x+10} + \frac{1}{3}\right).$$

In definitiva

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx =$$
$$= \sqrt{x^2+2x+10} + 2ln\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\sqrt{x^2+2x+10} + \frac{1}{3}\right) + c.$$

Per quanto riguarda l'integrale di tipo 4), viene sempre ricondotto ad un integrale di tipo 1) o ad uno più semplice con la sostituzione $x - k = \frac{1}{t}$. Ad esempio dato il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}},$$

posto $x - 1 = \frac{1}{t}$ $si\ ha\ dx = -\frac{1}{t^2}dt$, pertanto

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}} =$$
$$= \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{-\left(\frac{1}{t}+1\right)^2 + 2(\frac{1}{t}+1) + 3}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}}.$$

L'ultimo integrale lo possiamo scrivere nella forma seguente

$$-\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}} = -\frac{1}{2}arccosh2t$$

e quindi

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}} =$$
$$= -\frac{1}{2}arccosh2t = -\frac{1}{2}arccosh\frac{2}{x-1} + c.$$

Infine gli integrali di tipo 5), si calcolano a partire dalla seguente identità

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$$
$$= Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + k\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

dove $P_n(x)$ è un polinomio di grado n, $Q_{n-1}(x)$ è un polinomio di grado $n-1$ e k è una costante. Si derivano i due membri dell'identità e, sfruttando il principio di identità dei polinomi si ricavano i coefficienti di $Q_{n-1}(x)$ e la costante k.

Esempio.

$$\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx =$$
$$= (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+2x+2} + k\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Derivando ambo i membri dell'identità, si ottiene

$$\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}} =$$
$$= (2Ax+B)\sqrt{x^2+2x+2} + (Ax^2+Bx+C)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} +$$
$$+k\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

da cui

$$x^3+2x^2+3x+4 =$$
$$= (2Ax+B)(x^2+2x+2) + (Ax^2+Bx+C)(x+1) + k.$$

Moltiplicando il secondo membro e confrontandolo con il primo, per il principio di identità dei polinomi si ha

$$\begin{cases} 3A = 1 \\ 3A + 2B = 2 \\ 4A + 3B + C = 3 \\ 2B + C + k = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{3} \\ B = \dfrac{1}{6} \\ C = \dfrac{7}{6} \\ k = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Pertanto

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

La soluzione si otterrà applicando il metodo di risoluzione di un integrale di tipo 1).

11.8 Integrali del tipo

$$\int \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x^2-1})^{\boldsymbol{n}}}\,\boldsymbol{dx}\,,\int \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x^2-a^2})^{\boldsymbol{n}}}\,\boldsymbol{dx},\int \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x^2+a^2})^{\boldsymbol{n}}}\,\boldsymbol{dx},\int \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{ax^2+bx+c})^{\boldsymbol{n}}}\,\boldsymbol{dx}$$

Riportiamo le soluzioni dei seguenti integrali:

$$\boldsymbol{I_n} = \int \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x^2 - 1})^{\boldsymbol{n}}}\boldsymbol{dx}$$

Se $n = 1$ sappiamo che la primitiva è l'arcocotangente iperbolica.

Se $n > 1$ vale la seguente formula ricorsiva

$$\boldsymbol{I_n} = -\frac{\boldsymbol{2n-3}}{\boldsymbol{2n-2}}\boldsymbol{I_{n-1}} - \frac{\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{2n-2})(\boldsymbol{x^2-1})^{\boldsymbol{n-1}}}.$$

Riportiamo le formule risolutive dei seguenti due integrali

$$\int \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x^2 - a^2})^{\boldsymbol{n}}}\boldsymbol{dx} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a^{2n-1}}}\int \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{t^2 - 1})^{\boldsymbol{n}}}\boldsymbol{dt} \quad con\ t = \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}})^{\boldsymbol{n}}}\,\boldsymbol{dx} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}}\int \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}+\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}}\,\boldsymbol{dt} \quad con\ t = \frac{x}{a}.$$

Infine per il seguente integrale

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx,$$

poiché

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2-(b^2-4ac)\right]$$

se $b^2-4ac>0$, si pone $2ax+b=t$ e ci si riconduce ad un integrale del tipo $\int \frac{1}{(x^2-a^2)^n}\,dx$;

se $b^2-4ac=0$ si ha

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2\right]$$

e ci riconduciamo ad un integrale immediato;

se $b^2-4ac<0$, si pone $2ax+b=t$ e ci si riconduce ad un integrale del tipo $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx$.

Capitolo 12

Aree e volumi

12.1 Introduzione

Abbiamo visto che $\int_a^b f(x)dx$, se la funzione è positiva, rappresenta l'area della parte di piano delimitata dal grafico, dall'asse delle ascisse e dalle rette verticali $x = a \;\; e \; x = b$. Se la funzione è negativa in tale intervallo, per calcolare l'area bisogna considerare $-\int_a^b f(x)dx$. Se $f(x)$ cambia segno in tale intervallo, bisogna suddividere $[a, b]$ in sottointervalli in ognuno dei quali la funzione abbia lo stesso segno. Infine si sommano algebricamente gli integrali calcolati in ciascun sotto intervallo. Tutto ciò se lo scopo dell'integrale è il calcolo dell'area. Altrimenti calcoliamo l'integrale definito ed il risultato può essere anche negativo o nullo e non rappresenta l'area del trapezoide se la funzione cambia segno nell'intervallo di integrazione. Ad esempio

$$\int_{-2}^{2} 4x^3 dx = [x^4]_{-2}^{2} = (2)^4 - (-2)^4 = 16 - 16 = 0.$$

Questo perchè la funzione $f(x) = 4x^3$ è dispari ed è simmetrica rispetto all'origine degli assi. Se avessimo voluto stabilire l'area, avremmo dovuto calcolare

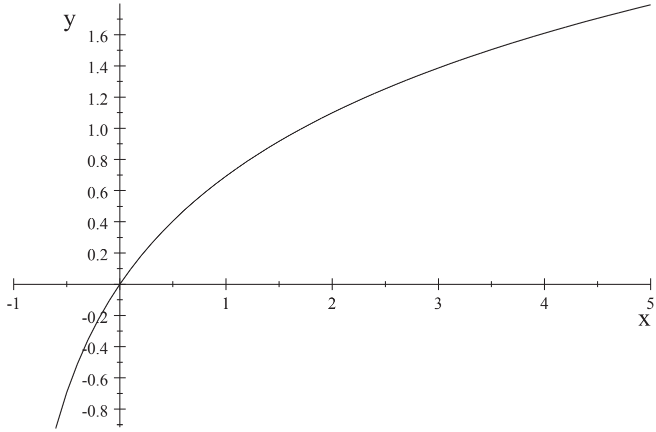
$$-\int_{-2}^{0} 4x^3 dx + \int_{0}^{2} 4x^3 dx = 32.$$

12.2 Funzione positiva

Di seguito diamo degli esempi di calcolo di aree di regioni piane.

- Calcoliamo l'area della parte di piano compresa tra

$y = \ln(x+1)$ e l'asse delle ascisse nell'intervallo [0,1]. Osserviamo che la funzione è non negativa nell'intervallo di integrazione



L'area è data da

$$A = \int_0^1 ln(x+1)dx.$$

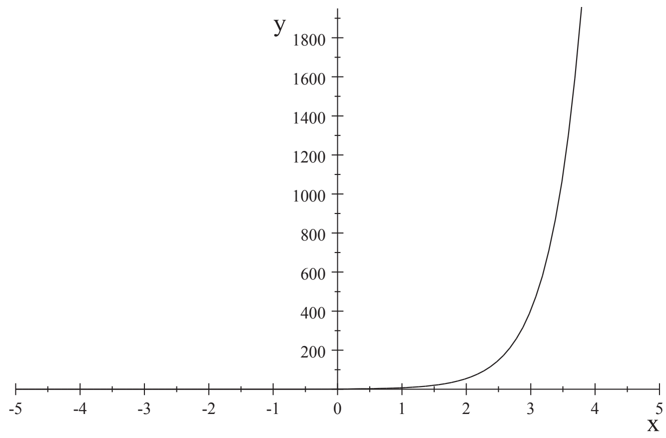
Calcoliamo le primitive integrando per parti

$$xln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx = xln(x+1) - x + ln|x+1| + c.$$

Quindi

$$A = [xln(x+1) - x + \ln|x+1|]_0^1 = ln2 - 1 + ln2 = 2ln2 - 1.$$

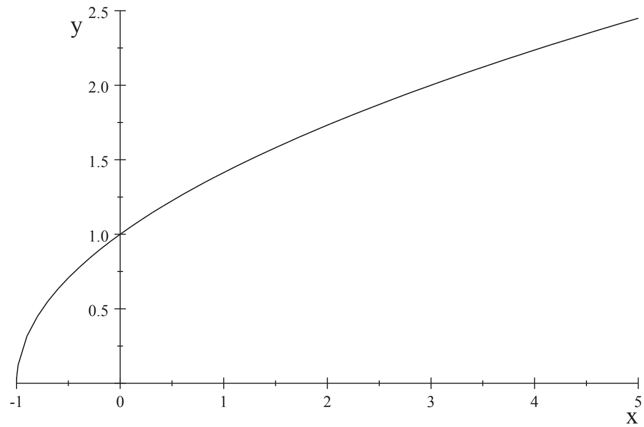
- Determiniamo l'area della parte di piano compresa tra $y = e^{2x}$ e l'asse delle ascisse nell'intervallo [2,3].



Si ha che

$$A = \int_{2}^{3} e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_{2}^{3} = \frac{e^6}{2} - \frac{e^4}{2}.$$

- Determiniamo l'area della parte di piano compresa tra $y = \sqrt{x+1}$ e l'asse delle ascisse nell'intervallo $[-1,1]$.



Abbiamo come integrando una funzione per la sua derivata e quindi

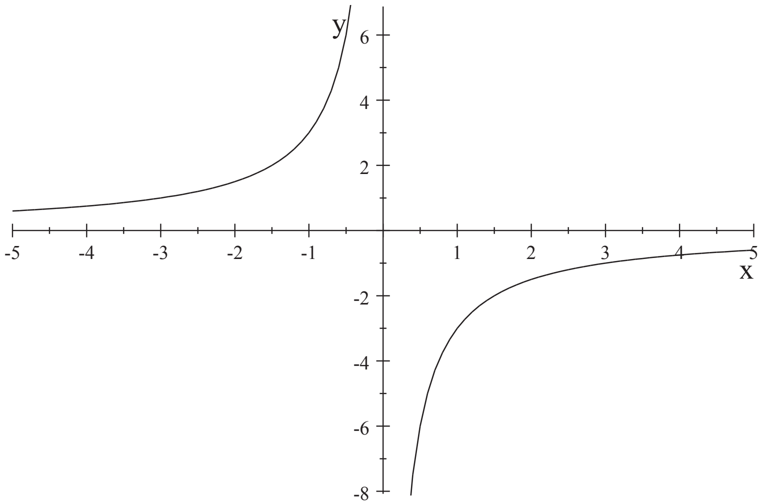
$$\int \sqrt{x+1}\, dx = \int (x+1)^{1/2}\, dx = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + c.$$

Pertanto

$$A = \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\sqrt{8} = \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

12.3 Funzione negativa

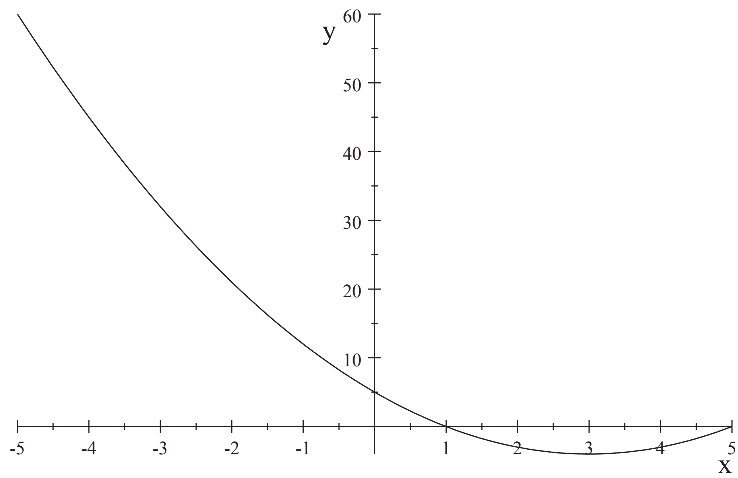
- Determiniamo l'area della parte di piano compresa tra $y = -\frac{3}{x}$ e l'asse delle ascisse nell'intervallo [3,5].



La primitiva è $-3ln|x| + c$ e quindi

$$A = \left|\int_3^5 -\frac{3}{x}dx\right| = \left|[-3lnx]_3^5\right| = |-3ln5 + 3ln3|.$$

- Determiniamo l'area della parte di piano compresa tra $y = x^2 - 6x + 5$ e l'asse delle ascisse nell'intervallo [2,4].



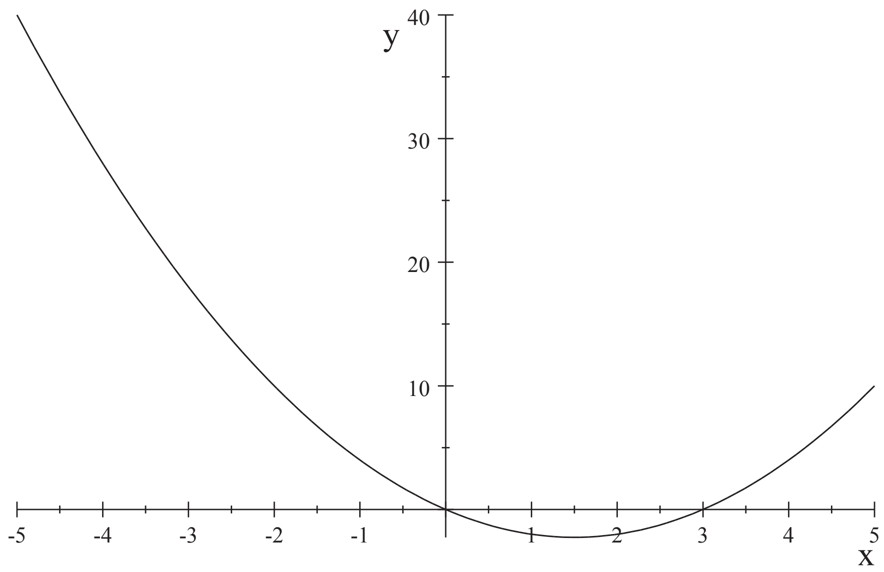
$$\int (x^2 - 6x + 5)dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + c.$$

Quindi

$$A = \left|\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x\right]_2^4\right| = \left|\frac{64}{3} - 48 + 20 - \frac{8}{3} + 12 - 10\right|$$
$$= \left|\frac{56}{3} - 26\right| = \frac{22}{3}.$$

12.4 Funzione sia positiva che negativa

- Determiniamo l'area della parte di piano compresa tra $y = x^2 - 3x$ e l'asse delle ascisse nell'intervallo [-2,1].

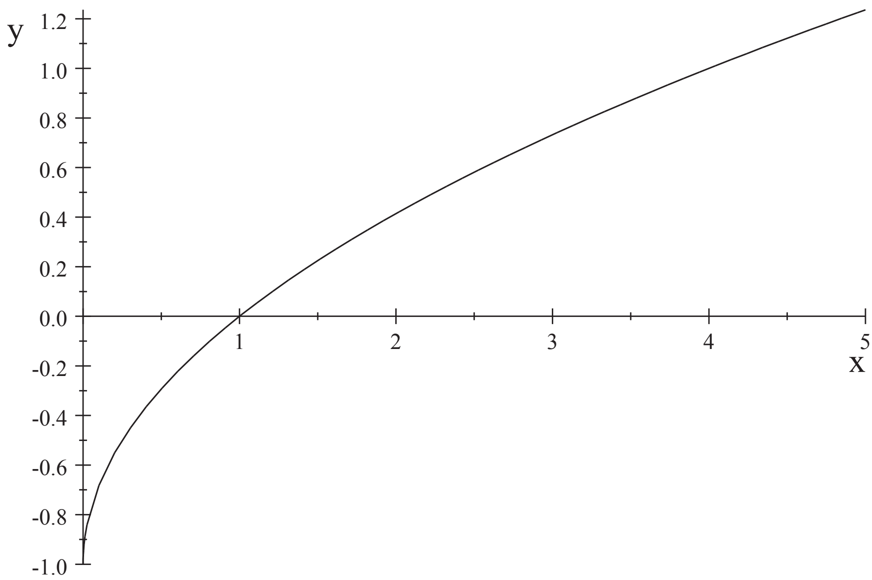


$$\int (x^2 - 3x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + c.$$

Quindi

$$A = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{0} + \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{1}\right| = \frac{8}{3} + 6 + \left|\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right| = \frac{26}{3} + \frac{7}{6} =$$
$$= \frac{59}{6}.$$

- Determiniamo l'area della parte di piano compresa tra $y = \sqrt{x} - 1$ e l'asse delle ascisse nell'intervallo [0,4].



Si ha che

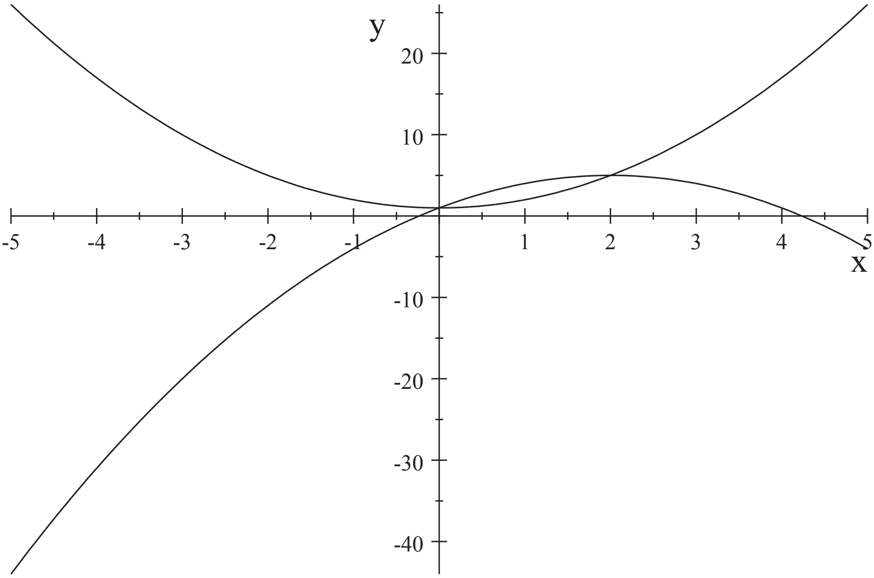
$$\int \left(\sqrt{x}-1\right)dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + c.$$

Quindi

$$A = \left|\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x\right]_0^1\right| + \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x\right]_1^4 = \left|\frac{2}{3} - 1\right| + \frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + 1 =$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2.$$

12.5 Area racchiusa da più funzioni

- Calcoliamo l'area racchiusa dalle due funzioni $y = x^2 + 1$ e $y = -x^2 + 4x + 1$.



Calcoliamo le ascisse dei punti di intersezione risolvendo il sistema

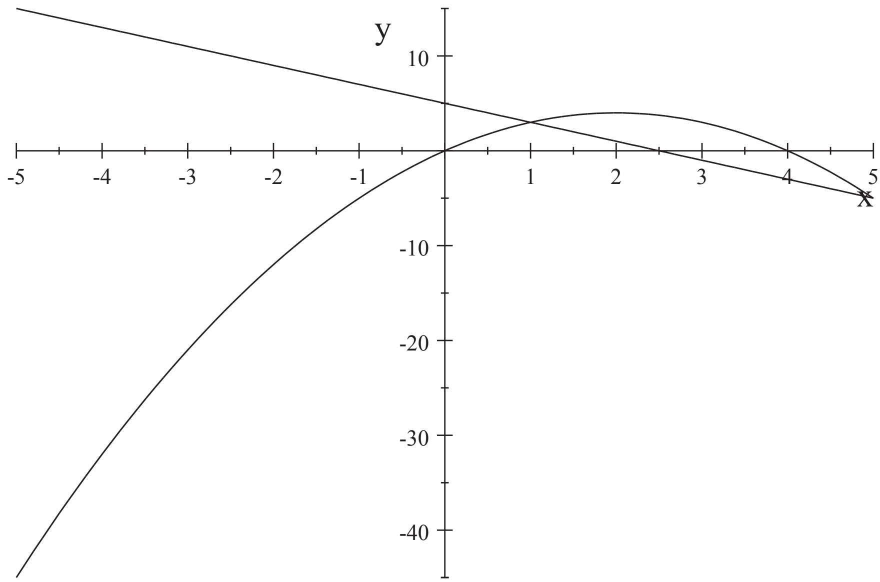
$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = -x^2 + 4x + 1 \,. \end{cases}$$

Si ottiene $x = 0 \; e \; x = 2$. Pertanto l'area racchiusa sarà

$$A = \int_0^2 (-x^2 + 4x + 1)dx - \int_0^2 (x^2 + 1)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + x \right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

- Determiniamo l'area della parte di piano compresa tra la parabola $y = -x^2 + 4x$ e la retta $y = -2x + 5$. Disegniamo entrambe le funzioni.



Calcoliamo le ascisse dei loro punti di intersezione e, per tale motivo, consideriamo il sistema

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = -2x + 5 \end{cases}$$

che risolto dà $x = 1\ e\ x = 5$. Inoltre determiniamo l'intersezione delle funzioni con l'asse delle ascisse

$$-x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x = 0\ e\ x = 4$$

$$-2x + 5 = 0 \Rightarrow x = 5/2.$$

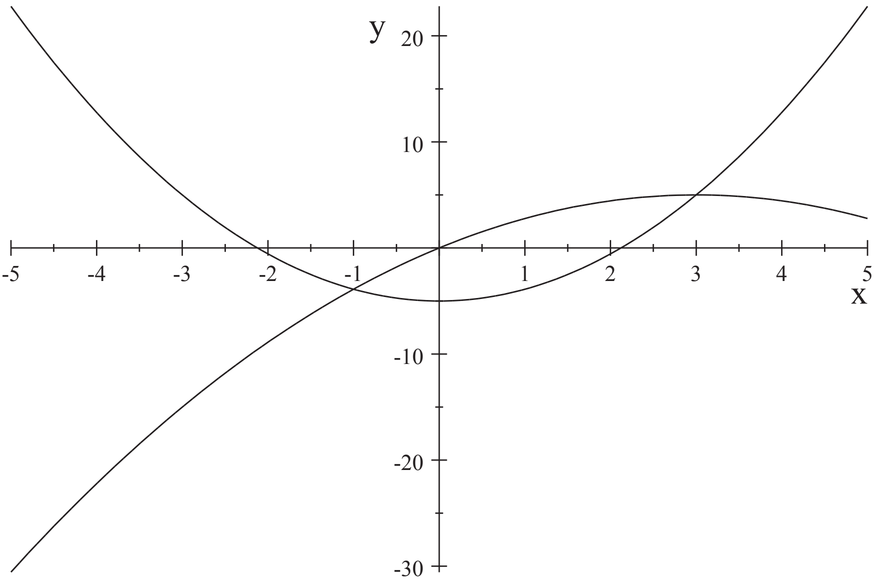
$$A = \int_1^4 (-x^2 + 4x)dx - \int_1^{\frac{5}{2}} (-2x + 5)dx +$$

$$+ \left| \int_{\frac{5}{2}}^5 (-2x + 5)dx - \int_4^5 (-x^2 + 4x)dx \right| =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_1^4 - [-x^2 + 5x]_1^{\frac{5}{2}} + \left| [-x^2 + 5x]_{\frac{5}{2}}^{5} - \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_4^5 \right| =$$

$$= \frac{32}{3}.$$

- Determiniamo l'area della superficie compresa tra le curve $y = -\frac{5}{9}x^2 + \frac{10}{3}x$ e $y = \frac{10}{9}x^2 - 5$. Disegniamo i grafici



Calcoliamo le ascisse dei loro punti di intersezione e consideriamo il seguente sistema

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{9}x^2 + \frac{10}{3}x \\ y = \frac{10}{9}x^2 - 5 \end{cases}$$

che risolto dà $x = -1$ e $x = 3$. Inoltre determiniamo l'intersezione delle funzioni con l'asse delle ascisse

$$-\frac{5}{9}x^2 + \frac{10}{3}x = 0 \Rightarrow x = 0 \; e \; x = 6$$

$$\frac{10}{9}x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Quindi

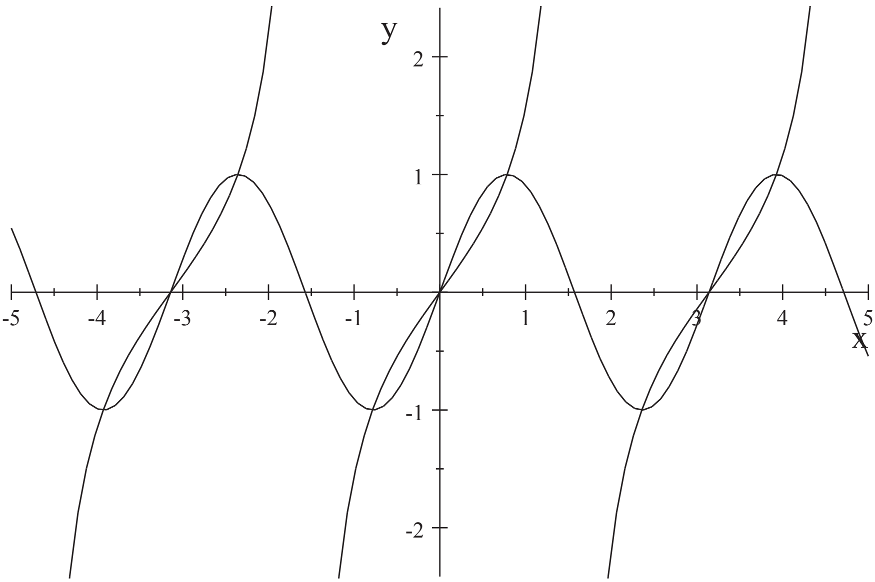
$$A = \int_0^3 \left(-\frac{5}{9}x^2 + \frac{10}{3}x\right) dx - \int_{\frac{3}{\sqrt{2}}}^{3} \left(\frac{10}{9}x^2 - 5\right) dx +$$

$$+\left|\int_{-1}^{3/\sqrt{2}} \left(\frac{10}{9}x^2 - 5\right) dx - \int_{-1}^{0} \left(-\frac{5}{9}x^2 + \frac{10}{3}x\right) dx\right|.$$

Svolgendo si ottiene

$$A = \frac{160}{9}.$$

- Determiniamo l'area della superficie compresa tra le curve $y = sin2x$ e $y = tgx$ nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Disegniamo grafici

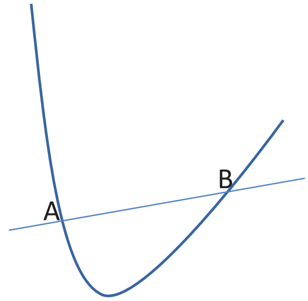


Le funzioni si intersecano proprio in 0 e $\frac{\pi}{4}$ quindi

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin2xdx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tgxdx = \left[-\frac{1}{2}cos2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - [-ln|cosx|]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$
$$= \frac{1}{2} + ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

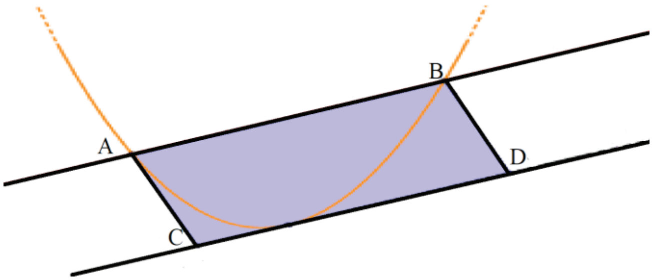
12.6 Segmento parabolico

Dati in un piano una parabola e una retta che la interseca in due punti distinti A e B, la parte finita di piano delimitata dall'arco AB della parabola e dal segmento AB della retta è detta **segmento parabolico**.

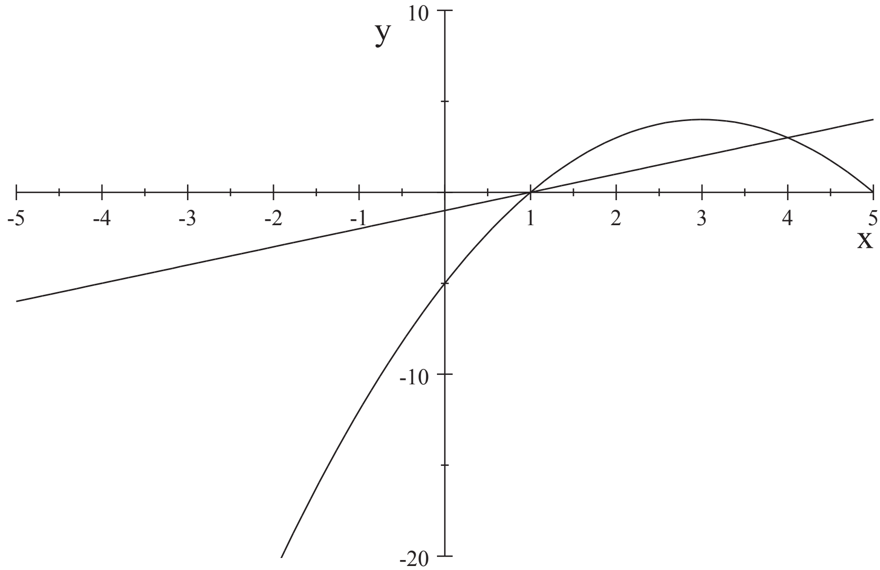


Per calcolare l'area di un segmento parabolico è possibile anche non usare l'integrazione definita poiché sussiste il seguente

Teorema di Archimede *- L'area di un segmento parabolico è i* $\frac{2}{3}$ *dell'area del rettangolo ad esso circoscritto.*



Ad esempio determiniamo l'area del segmento parabolico delimitato dalla parabola $y = -x^2 + 6x - 5$ e dalla retta $y = x - 1$.



Individuiamo i punti di intersezione

$$\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 5 \\ y = x - 1. \end{cases}$$

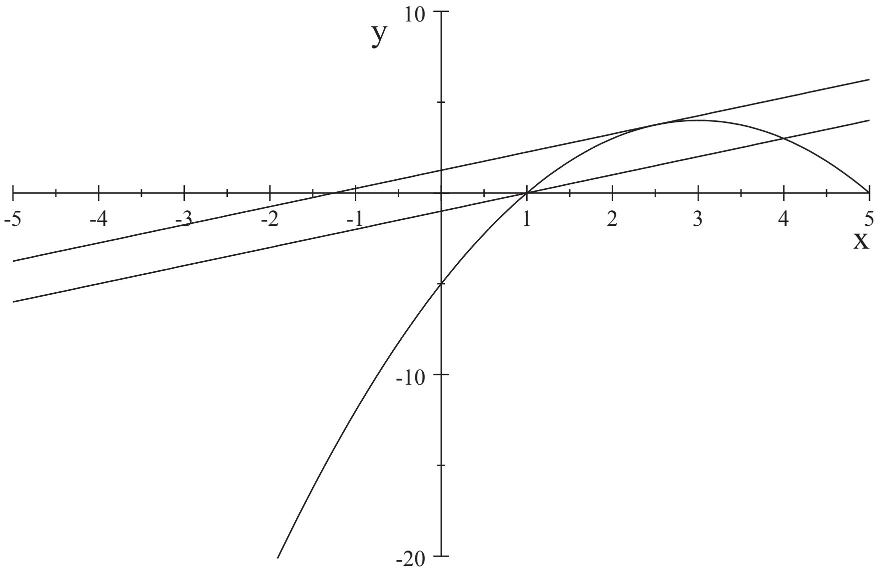
Risolvendo il sistema otteniamo i punti $(1,0)$, $(4,3)$. Il fascio improprio delle rette parallele alla retta $y = x - 1$ sono del tipo $y = x + k$. Mettiamole a sistema con la parabola

$$\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 5 \\ y = x + k. \end{cases}$$

In tal modo ricaviamo $x^2 - 5x + k + 5 = 0$. Affinchè la retta sia tangente alla parabola è necessario ci sia una sola soluzione e quindi il discriminante dell'equazione deve essere nullo

$$25 - 4k - 20 = -4k + 5 = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{4}.$$

Pertanto la retta $y = x + \frac{5}{4}$ è la retta parallela a $y = x - 1$ tangente alla parabola.



Consideriamo la retta passante per (1,0) perpendicolare a $y = x - 1$. Il coefficiente angolare deve essere antireciproco ottenendo

$$y = -1(x - 1) = -x + 1.$$

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = x + \dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

Le due rette si intersecano nel punto $(-\frac{1}{8}, \frac{9}{8})$.

La lunghezza del segmento individuato da $(1,0)(4,3)$ è

$$\sqrt{(4-1)^2 + 9} = 3\sqrt{2}.$$

La lunghezza del segmento individuato da $(1,0)(-\frac{1}{8}, \frac{9}{8})$ è

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{8}\right)^2+\frac{81}{64}}=\frac{9}{8}\sqrt{2}.$$

Quindi l'area del rettangolo circoscritto è

$$\frac{9}{8}\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=\frac{27}{4}.$$

L'area del segmento parabolico è, per il teorema di Archimede,

$$A=\frac{2}{3}\cdot\frac{27}{4}=\frac{9}{2}.$$

Sicuramente il calcolo sarebbe stato meno lungo con l'integrale definito. Infatti

$$A=\int_1^4(-x^2+6x-5)dx-\int_1^4(x-1)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2-5x\right]_1^4-\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^4=$$

$$=-\frac{64}{3}+48-20+\frac{1}{3}-3+5-8+4+\frac{1}{2}-1=25+\frac{-126+3}{6}=$$
$$=\frac{150-123}{6}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}.$$

12.7 Solidi di rotazione

Una importante applicazione degli integrali definiti è quella della determinazione del volume di un solido di rotazione. Se abbiamo un arco di curva in $[a,b]$ di equazione $y=f(x)$, dividiamo l'intervallo in n parti di lunghezza $h=\frac{b-a}{n}$. In ognuno di questi intervalli consideriamo

$$M_i=max\{f(x):x\in[x_i,x_{i+1}]\},\quad m_i=mi\,n\{f(x):x\in[x_i,x_{i+1}]\}.$$

Quindi in ognuno di questi intervalli abbiamo un rettangolo inscritto ed uno circoscritto al trapezoide entrambi di base h ed altezze m_i ed M_i

rispettivamente. Ognuno di questi due rettangoli, ruotando intorno all'asse x, descrive un cilindro di base m_i o M_i ed altezza h. I volumi sono

$$v_i = \pi m_i^2 \cdot h$$

$$V_i = \pi M_i^2 \cdot h.$$

La somma di tutti i volumi v_i approssima per difetto il volume del solido generato dalla rotazione della curva, mentre la somma di tutti i V_i è una approssimazione per eccesso. Se $n \to \infty$ la somma dei due volumi converge allo stesso valore e si ha che il volume del solido di rotazione generato dalla curva $y = f(x)$ è

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)dx.$$

Ad esempio, se vogliamo il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse delle ascisse della parabola $y = -x^2 + 2x + 1$ considerata nell'intervallo [0,1], si ha

$$V = \pi \cdot \int_0^1 (-x^2 + 2x + 1)^2 dx =$$

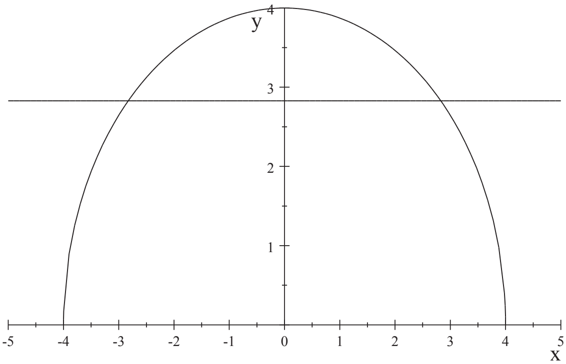
$$= \pi \cdot \int_0^1 (x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^3 - 2x^2 + 4x)dx =$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + x\right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} - 1 + \frac{2}{3} + 2 + 1\right) = \frac{43}{15}\pi.$$

Se vogliamo calcolare il volume del solido di rotazione intorno all'asse x della parte di piano limitata dal grafico di due funzioni con lo stesso segno, si ha

$$\boldsymbol{V = \pi \cdot \int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right| dx.}$$

Se in tale intervallo è sempre $f(x) > g(x)$ è possibile togliere il valore assoluto. Ad esempio consideriamo la superficie piana delimitata dall'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 16$ e dalla retta $y = 2\sqrt{2}$. Nel tratto considerato, la circonferenza la si può scrivere come $y = \sqrt{16 - x^2}$.



I punti di intersezione sono $x = \pm 2\sqrt{2}$. Quindi

$$V = \pi \cdot \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} (16 - x^2 - 8)dx = \pi \left[8x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} = \frac{64\sqrt{2}}{3}\pi.$$

Se la rotazione avviene intorno all'asse y il volume del solido di rotazione è

$$\boldsymbol{V = 2\pi \cdot \int_a^b |xf(x)|dx.}$$

Ovviamente se $f(x)$ è non negativa e $0 \leq a < b$, non c'è bisogno del valore assoluto. Se ad esempio facciamo ruotare il grafico della funzione $y = x^2 + 1$ attorno all'asse y con $x \in [0,1]$, il volume del solido generato sarà

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x^2 + 1)dx = 2\pi \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\pi.$$

È anche possibile calcolare l'area della superficie di rotazione. Si dimostra che

$$\boldsymbol{A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.}$$

Infine se ci interessa la lunghezza della curva

$$\boldsymbol{l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.}$$

Ad esempio supponiamo di voler calcolare la lunghezza del tratto di grafico della funzione

$y = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}$ tra -2 e -1. Si ha $y'(x) = \frac{2}{3}\frac{3}{2\sqrt{(x+2)^{-1}}} = \sqrt{x+2}$ e pertanto

$$l = \int_{-2}^{-1} \sqrt{3+x}dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{(3+x)^3}\right]_{-2}^{-1} = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}.$$

Supponiamo infine di voler calcolare l'area della superficie ottenuta ruotando intorno all'asse delle ascisse la retta $y = 3x \; con \; x \in [0,1]$. Allora

$$A = 2\pi \int_0^1 3x\sqrt{10}\,dx = 2\pi \left[\frac{3\sqrt{10}}{2}x^2\right]_0^1 = 3\sqrt{10}\pi.$$

12.8 Integrale improprio

Fino ad ora abbiamo studiato l'integrale definito in un intervallo limitato e con la funzione limitata. Ora generalizziamo al caso in cui l'intervallo è illimitato o la funzione è illimitata. In questo caso si parla di **integrale improprio** o **integrale in senso generalizzato**. Consideriamo

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

La funzione non è limitata in questo intervallo, infatti avvicinandoci a 1 da sinistra diverge positivamente. Una primitiva è $arcsinx$. Quindi scriviamo

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{t\to 1^-}[arcsinx]_0^t =$$
$$= \lim_{t\to 1^-}(arcsint - arcsin0) = \frac{\pi}{2}.$$

L'integrale improprio è convergente e quindi il trapezoide ha area finita pur essendo la funzione non limitata. Ora calcoliamo

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx.$$

La funzione non è limitata in questo intervallo, infatti avvicinandoci a 3 da sinistra diverge positivamente

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx = \lim_{t\to 3^-}\int_1^t \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx = \lim_{t\to 3^-}\left[-2\sqrt{3-x}\right]_1^t =$$
$$= \lim_{t\to 3^-}\left(-2\sqrt{3-t}+2\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}.$$

Calcolare

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2}dx.$$

La funzione non è limitata in questo intervallo, infatti avvicinandoci a 2 da sinistra diverge positivamente

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \lim_{t\to 2^-}\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \lim_{t\to 2^-}\left[\frac{-1}{x-2}\right]_0^t = +\infty - \frac{1}{2} = \\ = +\infty.$$

Quindi la funzione non è integrabile in questo intervallo. Calcoliamo ora

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Nel punto 0 di questo intervallo la funzione diverge. Non possiamo fare

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2.$$

Il risultato è palesemente assurdo poiché la funzione è positiva e non può avere integrale negativo. Bisogna procedere così

$$\lim_{t\to 0^-}\left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{t} + \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{-1}{x}\right]_{t}^{1} = +\infty - 1 - 1 + \infty = +\infty.$$

Analogamente si procede se l'intervallo è illimitato. Ad esempio se abbiamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

calcoliamo

$$\lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right) = 1.$$

Calcoliamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

In questo caso

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} [arctgx]_a^b = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} (arctgb - arctga) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Capitolo 13

Serie numeriche

13.1 Somme infinite

Le serie numeriche sono somme di infiniti termini di una successione di numeri reali, indicate nel seguente modo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Per studiare questa somma di infiniti termini è necessario riguardarla come una particolare successione. Infatti sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione, la serie numerica si può rivedere come la successione delle somme parziali (o ridotte) di seguito definita

$$\begin{gathered} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \dots.. \\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 \dots . a_n \end{gathered}$$

che prende il nome di serie di termine generale a_n. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Il comportamento della successione S_n, per $n \to \infty$, è detto carattere della serie. Se tale limite esiste ed è un numero finito s, la serie è detta **convergente** ed s è detto **somma** della serie. Se il limite è $+\infty$ o $-\infty$ la serie è detta **divergente**. In questi due casi la serie si dice **regolare**. Se il limite non esiste la serie è **indeterminata**.

Cominciamo con l'affrontare le caratteristiche di una particolare serie, detta serie geometrica.

Definizione 13.1 *– La* ***serie geometrica*** *è la somma infinita delle potenze naturali di un numero reale x, detto* ***ragione*** *della serie, della forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots .. + x^n + \cdots.$$

Teorema di caratterizzazione della serie geometrica *– La serie geometrica converge se $|x| < 1$, diverge se $x \geq 1$ ed è indeterminata se $x \leq -1$. Inoltre, quando converge, la sua somma è*

$$\frac{1}{1-x}.$$

Dim.

Posto

$$S_n = \sum_{n=0}^{n} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n,$$

moltiplicando ambo i membri per x, otteniamo

$$xS_n = x + x^2 + \cdots + x^{n+1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n+1} - 1,$$

da cui

$$xS_n = S_n + x^{n+1} - 1.$$

Risolvendo la precedente relazione rispetto a S_n, si ottiene

$$S_n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

e quindi

- se $|x| < 1$, si ha che $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$ e quindi la serie converge ed ha per somma $\frac{1}{1-x}$;

- se $x \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = +\infty$ e la serie, pertanto, diverge;
- se $x \leq -1$ non esiste il limite e la serie è indeterminata.

Esempi.

Rispetto a quanto esposto, possiamo facilmente comprendere come

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n \text{ è } indeterminata.$$

Osserviamo che l'avere una somma di infiniti numeri che tende ad un numero finito, non è una cosa ovvia. I famosi paradossi del filosofo Zenone, si fondano sulla supposizione che una somma di infiniti termini è necessariamente infinita.

Purtroppo sono poche le serie di cui riusciamo a calcolare la somma. Nonostante ciò, ci sono molti criteri che ci permettono di studiarne almeno il carattere. Iniziamo con l'osservare che

Teorema 13.1 – *Condizione necessaria affinché la serie converga è che il suo termine generale sia infinitesimo.*

Dim.

Indichiamo con S_n la successione delle somme parziali e con $s \in \mathbb{R}$ la somma della serie. Osservando che $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{n+1} - S_n) = s - s = 0.$$

Esempio.

La seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+2}{n+1},$$

per il teorema precedente non può convergere poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{n+1} = 2$.

La condizione però non è sufficiente, infatti la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

vedremo nel successivo paragrafo che diverge nonostante $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

La condizione necessaria appena esposta, è soddisfatta negli esempi seguenti. Per determinare con certezza il carattere di tali serie però, è in ogni caso necessario procedere all'individuazione del tipo di serie e all'eventuale applicazione dei criteri di convergenza che saranno esposti più avanti.

Esempi.

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{sin\frac{\pi}{2} + 5^n}{6^n}.$$

Essa soddisfa la condizione necessaria esposta. Al fine di verificare il carattere della stessa, possiamo verificare che, essendo $sin\frac{\pi}{2} = 1$, la serie è la somma di due serie geometriche convergenti e, pertanto, si ha

$$\frac{1}{1-\frac{1}{6}}+\frac{1}{1-\frac{5}{6}}=\frac{6}{5}+6=\frac{36}{5}.$$

Allo stesso modo, considerata la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(tg\frac{\pi}{6})^n,$$

si osserva che il termine generale della serie è infinitesimo. Poiché è una serie geometrica con la ragione che soddisfa la limitazione $-1<\frac{\sqrt{3}}{3}<1$, essa è convergente e la somma è

$$\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}-1=\frac{3}{3-\sqrt{3}}-1=\frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}.$$

Lo stesso vale per la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}$$

la cui somma è

$$\frac{1}{1-2/5}+\frac{1}{1-3/5}=\frac{5}{3}+\frac{5}{2}=\frac{25}{6}.$$

Infine, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

è convergente ed ha somma

$$\frac{1}{1-(-\frac{2}{3})}-1=-\frac{2}{5}.$$

Definizione 13.2 – Si definisce **serie telescopica** una serie che ha la seguente forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+k}).$$

Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste ed è finito, la serie converge ed ha per somma $a_1 + \cdots + a_k$.

Esempio.

Consideriamo la seguente serie telescopica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right)$$

Poiché $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$, la serie converge ed ha per somma $a_1 + a_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

La seguente serie è detta **serie di Mengoli**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right),$$

che scomposta in fratti semplici, diventa la serie telescopica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Poiché $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ la serie converge ed ha per somma $a_1 = 1$.

13.2 Criteri di convergenza per le serie a termini non negativi.

Cominciamo osservando che una serie a termini non negativi è sempre regolare. Infatti la successione delle somme parziali S_n è crescente e, per il teorema sulle successioni monotone, non può essere indeterminata. Per studiare il carattere di serie a termini non negativi può essere utilizzato uno dei seguenti criteri di convergenza.

Criterio di condensazione di Cauchy – *Se a_n è positiva e decrescente, allora $\sum a_n$ converge se e solo se converge la serie $\sum 2^n a_{2^n}$.*

Introduciamo un'altra particolare serie di grande importanza applicativa e studiamone le caratteristiche.

Definizione 13.3 – Si chiama **serie armonica di ordine $\boldsymbol{\alpha}$** una serie del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

con α numero reale positivo.

Teorema di caratterizzazione della serie armonica – *La serie armonica di ordine α converge se $\alpha > 1$ e diverge se $0 < \alpha \leq 1$.*

Dim.

Applicando il criterio di condensazione otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (2^n)^{-\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-n\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n.$$

Questa non è altro che una serie geometrica che, come sappiamo, converge se $2^{1-\alpha} < 1$ e diverge se $2^{1-\alpha} \geq 1$ da cui la tesi.

Un altro criterio molto utile è il seguente

Criterio del confronto *– Se* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *sono due serie con*

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

allora se $\sum b_n$ *converge, converge anche* $\sum a_n$ *mentre se* $\sum a_n$ *diverge, diverge anche* $\sum b_n$.

Esempi.

La serie

$$\sum \frac{1}{n^2+1}$$

converge poiché

$$\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}.$$

Infatti la serie di termine generale $\frac{1}{n^2}$ è proprio la serie armonica di ordine 2, che è convergente.

La serie

$$\sum \frac{n}{4n^2-3}$$

diverge essendo

$$\frac{n}{4n^2-3} > \frac{n}{4n^2} = \frac{1}{4n}.$$

Infatti, la serie di termine generale $\frac{1}{n}$ coincide con la serie armonica di ordine 1 che, come visto, diverge.

Esiste anche il seguente

Criterio del confronto asintotico *– Siano* $a_n \geq 0$ *e* $b_n > 0$ *con*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$$

a) *se* $0 < l < +\infty$*, allora* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$*sono entrambe convergenti o entrambi divergenti;*
b) *se* $l = 0$ *e la serie* $\sum b_n$ *converge, allora anche* $\sum a_n$ *converge;*
c) *se* $l = +\infty$ *e la serie* $\sum b_n$ *diverge, allora anche* $\sum a_n$ *diverge.*

Esempio.

La serie

$$\sum sin\frac{1}{n^2}$$

è convergente poiché $\lim_{n\to\infty}\frac{sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1.$

Una conseguenza del confronto asintotico è il seguente

Criterio degli infinitesimi *– Sia* $a_n \geq 0$ *e sia* $\lim_{n\to\infty} n^p a_n = l$*. Allora*

a) $0 < l < +\infty \Rightarrow \begin{cases} \sum a_n \;\; convergente\ se\ p > 1 \\ \sum a_n \;\; divergente\ se\ p \leq 1 \end{cases}$
b) $l = 0 \Rightarrow \sum a_n \;\; convergente\ se\ p > 1$
c) $l = +\infty \Rightarrow \sum a_n \;\; divergente\ se\ p \leq 1.$

Esempio.

La seguente serie

$$\sum \frac{3n^2+1}{n^4+n+1}$$

è convergente essendo $\lim_{n\to\infty} n^2\frac{3n^2+1}{n^4+n+1} = 3.$

Un altro criterio di grande utilità è il seguente

Criterio della radice *– Sia* $a_n \geq 0$ *con* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$

- *se* $l < 1$ *la serie* $\sum a_n$ *converge;*

- *se* $l > 1$ $\sum a_n$ *diverge.*

Esempio.

Consideriamo la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} = 0.$$

Quindi la serie converge per il criterio della radice.

A volte è utilissimo anche il seguente

Criterio del rapporto *– Sia* $a_n \geq 0$ *con* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

- *se* $l < 1$ *la serie* $\sum a_n$ *converge;*
- *se* $l > 1$ $\sum a_n$ *diverge.*

Esempio.

Considerando la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{n^n},$$

ed applicando il criterio del rapporto, si ha

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n!}{(n+1)^n (n+1)} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Ricordiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 1/e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e\,.$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}$$

e pertanto la serie converge.

Il criterio della radice è "più forte" di quello del rapporto. Pertanto, se il criterio della radice non ci permette di stabilire il carattere della serie è inutile applicare quello del rapporto.

Infine vale il seguente

Criterio di Raabe – *Sia* $a_n \geq 0$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = l$,

- *se* $l > 1$ *la serie* $\sum a_n$ *converge;*
- *se* $l < 1$ *la serie* $\sum a_n$ *diverge.*

Esempio.

Consideriamo la serie armonica di ordine 2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,.$$

Applicando il criterio della radice o del rapporto non si può stabilire il carattere della serie dato che risulta in entrambi i casi il limite uguale ad 1. Applicando invece il criterio di Raabe abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 - 1\right] = 2$$

e la serie pertanto converge, come già sappiamo.

13.3 Serie non positive

Al fine di poter studiare il carattere di serie non positive, è utile introdurre il concetto di serie assolutamente convergente. Diamo, quindi, la seguente definizione.

Definizione 13.4 **–** Si dice serie dei valori assoluti associata alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

La serie dei valori assoluti, essendo una serie a termini positivi, è regolare.

Possiamo dare, a questo punto, la definizione di convergenza assoluta di una serie.

Definizione 13.5 **–** *Una serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

è detta assolutamente convergente se è convergente la serie dei valori assoluti ad essa associata.

Vale il seguente

Teorema 13.2 **–** *Una serie assolutamente convergente è convergente.*

Non vale il viceversa.

Ovviamente per le serie positive i due concetti coincidono.

La serie della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

con $a_n \geq 0$, si dice **serie di segno alterno**.

Per queste serie vale il

Criterio di Leibniz: *Se la serie di segno alterno ha* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *ed* a_n *è una successione non crescente, allora essa converge.*

Esempio.

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

verifica le ipotesi del criterio di Leibniz e per tale motivo converge. Possiamo anche osservare che la serie dei moduli della serie data non è altro che la serie armonica di ordine 1, che sappiamo essere divergente. Quindi, come già sottolineato in precedenza, pur essendo la serie data convergente, non lo è assolutamente.

13.4 Operazioni tra serie

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono due serie, si definisce serie somma, la serie numerica

$$\sum(a_n + b_n).$$

È possibile dimostrare che

a) se $\sum a_n$ e $\sum b_n$convergono rispettivamente a k e k', allora $\sum(a_n + b_n)$ converge a $k + k'$;
b) se almeno una delle due diverge, la serie somma diverge;
c) se entrambe convergono assolutamente, allora la serie somma converge assolutamente.

Se k è un numero reale, le serie $\sum a_n$ e $\sum ka_n$ hanno lo stesso carattere e se $\sum a_n$ converge ad l, la seconda converge a kl. Per le serie vale la **proprietà distributiva**. Invece la **proprietà associativa** vale solo per le serie convergenti o divergenti. Per quelle indeterminate non vale quest'ultima proprietà.

Esempio.

Se abbiamo la serie indeterminata

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots.$$

associando il primo con il secondo, il terzo con il quarto ecc., si ottiene la serie

$$0 + 0 + 0 + \cdots.$$

che converge a zero.

Per quanto riguarda la proprietà commutativa, scambiando infiniti termini la serie può cambiare carattere. Infatti si parla di serie **commutativamente convergente** quando per essa vale la proprietà commutativa. Riportiamo due teoremi importanti

Teorema di Dirichlet: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie sia commutativamente convergente è che essa converga assolutamente.*

Teorema di Riemann-Dini: *Modificando opportunamente l'ordine dei termini di una serie non commutativamente convergente, si può fare in modo che la serie che si ottiene abbia per somma un numero prefissato ad arbitrio o anche che risulti divergente o indeterminata.*

È facile vedere che

$$\sum a_n \cdot \sum b_n \neq \sum a_n \cdot b_n \,.$$

Esempio.

La serie geometrica $\sum(\frac{1}{2})^n$ converge a 2 e $\sum(\frac{1}{3})^n$ converge a 3/2. Invece la serie $\sum(\frac{1}{6})^n$ converge a 5/6 e non a 3.

Al fine di ottenere che $\sum a_n \cdot \sum b_n = \sum a_n \cdot b_n$, Cauchy ha dato una nuova formulazione del prodotto di due serie, nel seguente modo.

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono due serie numeriche, si chiama **serie prodotto secondo Cauchy** la serie $\sum p_n = p_1 + p_2 + \cdots$ i cui termini sono

$$\begin{cases} p_1 = a_1 b_1 \\ p_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ p_3 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 \\ \dots\dots. \end{cases}$$

Definendo così il prodotto, valgono le seguenti proprietà:

1) se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono entrambe assolutamente convergenti ed hanno per somma $k\ e\ k'$, si dimostra che la serie prodotto secondo Cauchy è assolutamente convergente ed ha per somma il prodotto $k \cdot k'$;
2) ***Teorema di Mertens*** – Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono convergenti a $k\ e\ k'$, e almeno una lo è assolutamente, la serie prodotto secondo Cauchy è convergente ed ha per somma il prodotto $k \cdot k'$;
3) ***Teorema di Abel*** – Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono convergenti a $k\ e\ k'$ il loro prodotto secondo Cauchy può risultare non convergente. Se però è convergente, la somma sarà $k \cdot k'$.

13.5 La serie armonica ed i numeri primi

Consideriamo la seguente **funzione zeta** introdotta da Eulero

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Noi sappiamo che la serie armonica converge per $x > 1$. Inoltre

$$\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty \, .$$

Si dimostra che la funzione è continua e derivabile infinite volte. Lo stesso Eulero calcolò alcuni valori. Ad esempio

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \, ;$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \, ;$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \, .$$

Eulero dimostrò che questa funzione si può esprimere come un prodotto di infinite frazioni con numeri primi

$$\zeta(x) = \frac{2^x}{2^x - 1} \cdot \frac{3^x}{3^x - 1} \cdot \frac{5^x}{5^x - 1} \cdot \frac{7^x}{7^x - 1} \dots.$$

Proprio questa relazione è alla base della notevole importanza assunta dalla funzione zeta nella teoria dei numeri riguardo la distribuzione dei numeri primi. Successivamente Bernhard Riemann ha esteso questa funzione nel campo complesso ed ha formulato una ipotesi detta "**Ipotesi di Riemann**" riguardante la distribuzione degli zeri della funzione zeta.

Capitolo 14

Serie di Taylor

14.1 Polinomio di Taylor

Come noto, un polinomio di grado n è derivabile infinite volte e le derivate di ordine maggiore di n sono tutte nulle. Scegliendo un polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

sappiamo che esiste una relazione tra i coefficienti e le derivate del polinomio:

$$p(0) = a_0,$$

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$$

da cui

$$p'(0) = a_1,$$

$$p''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + .. + n(n-1)a_n x^{n-2}$$

da cui

$$p''(0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{p''(0)}{2},$$

$$p'''(x) = 6a_3 + 24a_4 x + .. + n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3}$$

da cui

$$p'''(0) = 6a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{p'''(0)}{6} = \frac{p'''(0)}{3!}$$

e così via. Quindi abbiamo che i coefficienti sono legati al valore delle derivate del polinomio in $x = 0$, ossia

$$a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!}.$$

Quindi, un polinomio di grado n è univocamente determinato noti i valori assunti dal polinomio e dalle sue derivate in $x = 0$.

Se abbiamo una funzione derivabile n volte, costruiamo un polinomio $p(x)$ di grado n i cui coefficienti siano dipendenti dalle derivate della funzione calcolate in $x = 0$ secondo quanto appena visto:

$$p_n = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

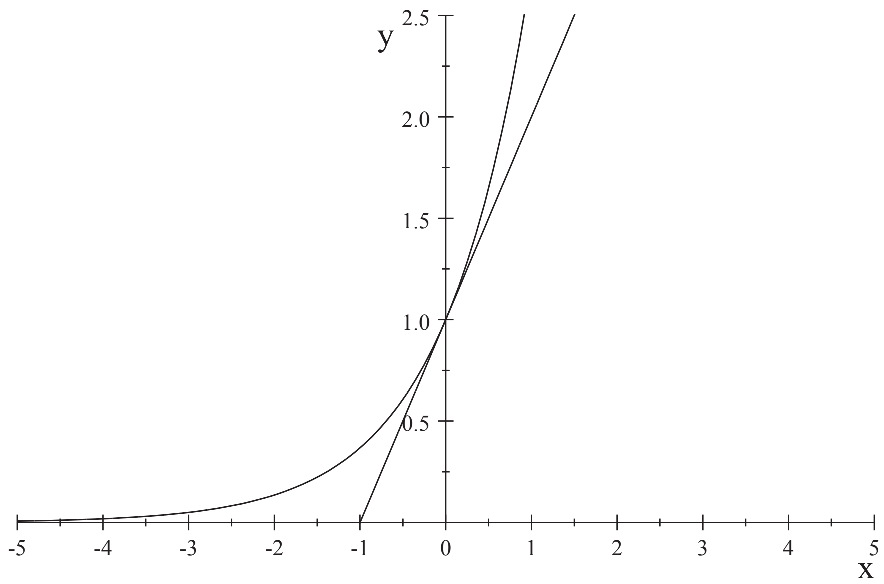
Come applicazione della precedente relazione, consideriamo ad esempio la funzione esponenziale

$$f(x) = e^x.$$

Osservando che $f(0) = f'(0) = 1$, risulta

$$p_1(x) = x + 1.$$

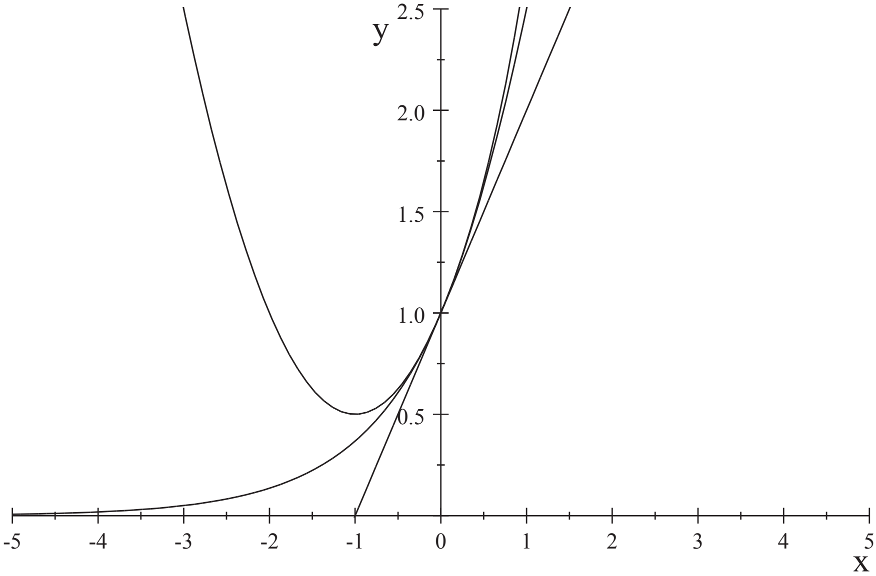
Si ha che questa retta approssima la funzione nell'intorno del punto $x = 0$ come mostrato nel seguente grafico.



Se consideriamo il polinomio di secondo grado

$$p_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1,$$

$$p_2(0) = p'_2(0) = p''_2(0) = 1.$$



Questo polinomio di secondo grado approssima ancora meglio la funzione esponenziale nell'intorno di zero. Possiamo verificarlo calcolando, ad esempio, il valore nel punto 0,1. Si ha

$$f(0{,}1) = e^{0{,}1} = 1{,}1052$$

$$p_1(0{,}1) = 1{,}1$$

$$p_2(0{,}1) = 1{,}105.$$

Possiamo generalizzare il risultato appena ottenuto andando a costruire il polinomio che ha le stesse caratteristiche di quello precedente, ma considerando un punto generico $x = x_0 \neq 0$. Per cui, otteniamo

$$p_n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots .. + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Ossia

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Il precedente polinomio è detto **polinomio di Taylor** della funzione $f(x)$ in x_0. Sostituendo $x_0 = 0$, otteniamo il **polinomio di Mc-Laurin**.

La formulazione del polinomio di Taylor può essere ottenuta anche come conseguenza dei teoremi di Lagrange e Cauchy. Infatti, data una funzione continua in un intervallo I con $x_0, x \in I$, se essa è derivabile nell'intervallo (x_0, x), per il teorema di Lagrange esiste almeno un $c \in (x_0, x)$ tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

da cui

$$f(x) = f(x_0) + f'(c) \cdot (x - x_0).$$

Se $f(x)$ ha derivata prima continua in I ed ammette derivata seconda in (x_0, x), consideriamo le due funzioni

$$g(x) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0) \cdot f'(x_0)$$

$$h(x) = (x - x_0)^2.$$

Poiché $f(x_0)$ e $f'(x_0)$ sono numeri reali, si ha

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0),$$

$$g''(x) = f''(x),$$

$$h'(x) = 2(x - x_0),$$

$$h''(x) = 2.$$

Osservando che

(14.1) $$g(x_0) = g'(x_0) = h(x_0) = h'(x_0) = 0,$$

e applicando in (x_0, x) il teorema di Cauchy a queste due funzioni, si ha che esiste un punto $d \in (x_0, x)$ tale che

(14.2) $$[g(x)-g(x_0)]h'(d)=[h(x)-h(x_0)]g'(d).$$

Da (14.1) e (14.2) si ricava

$$\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{g'(d)}{h'(d)} \;\; con \;\; d\in(x_0,x).$$

Se nell'intervallo (x_0,d) applichiamo il teorema di Cauchy alle funzioni $g'(x)$ e $h'(x)$, otteniamo che esiste un $\xi\in(x_0,d)$ tale che

(14.3) $$[g'(d)-g'(x_0)]h''(\xi)=[h'(d)-h'(x_0)]g''(\xi).$$

Da (14.1) e (14.3) si ha

$$\frac{g'(d)}{h'(d)}=\frac{g''(\xi)}{h''(\xi)} \;\; con \;\; \xi\in(x_0,d)\subset(x_0,x).$$

Pertanto, si ha

$$\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{g''(\xi)}{h''(\xi)}.$$

Poiché $g''(x)=f''(x)$ e $h''(x)=2$, ricaviamo che

$$\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{f''(\xi)}{2}.$$

Infine, ricordando che le due funzioni sono

$$g(x)=f(x)-f(x_0)-(x-x_0)\cdot f'(x_0) \quad \text{e} \quad h(x)=(x-x_0)^2$$

otteniamo

$$f(x)-f(x_0)-(x-x_0)\cdot f'(x_0)=\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(\xi)$$

da cui, in definitiva, si ha

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\cdot f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(\xi).$$

Supponendo che la funzione abbia derivate continue fino all'ordine n e sia derivabile fino all'ordine $(n+1)$, con un procedimento analogo si dimostra che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Il termine

$$P_n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots .. + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

è il polinomio di Taylor della funzione con un punto iniziale x_0. Il termine

$$R_n = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

fornisce l'errore che si commette prendendo come valore della funzione in un intorno di x_0 il valore del polinomio ed è detto **Resto secondo Lagrange.** Il numero ξ che figura nel resto, in generale non è noto ma sappiamo soltanto che sta in (x_0, x). Data la funzione, si ha che ξ dipende dal punto iniziale, dal valore di x e dall'ordine n della derivata, cioè

$$\xi = f(x_0, x, n).$$

Se il punto iniziale è $x_0 = 0$, si ha

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots .. + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

e si parla, come detto, di polinomio di Mac-Laurin**.** Ad esempio, per quanto riguarda la funzione esponenziale dell'introduzione, il suo polinomio di Mac-Laurin è

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}.$$

Ci sono anche altri modi di quantificare il resto. Un modo qualitativo è dato dal **Resto secondo Peano**

$$R_n = o(x - x_0)^n.$$

Questa espressione ci dice semplicemente che il resto nell'intorno di x_0 tende a zero più velocemente di $(x - x_0)^n$.

Invece il resto secondo Lagrange, come abbiamo visto, ci dà una informazione quantitativa anche se di fatto non conosciamo qual è il punto ξ.

Riportiamo di seguito altre due modalità possibili di esprimere il resto:

il **Resto secondo Cauchy**

$$R_n = \frac{(x-\xi)^n (x - x_0)}{n!} f^{(n+1)}(\xi),$$

il **Resto integrale**

$$R_n = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n.$$

14.2 Serie di Taylor

Se la funzione è derivabile infinite volte (si indica con $f(x) \in C^\infty$), possiamo scrivere per ogni n il polinomio di Taylor che, in forma compatta, assume la forma

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n.$$

Cosa accade se n tende all'infinito? Le domande sono due

1) per quali $x \in \mathbb{R}$ la corrispondente serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

è convergente?

2) Trovati i valori di x per cui converge, la somma è proprio $f(x)$?

Poiché

$$f(x) = P_n + R_n,$$

si vede subito che **condizione necessaria e sufficiente affinché la serie di Taylor converga nel punto x alla funzione $f(x)$ è che si abbia**

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

In tal caso la funzione si dice sviluppabile in serie di Taylor. Nella pratica il calcolo di questo limite presenta difficoltà non sempre superabili. Per dimostrare che una funzione è sviluppabile in serie, si sfrutta la seguente condizione sufficiente.

Teorema 14.1 – *Se una funzione $f(x)$ è infinitamente derivabile in un intorno Idi un punto x_0 ed esiste un numero positivo M tale che $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M \ \ \forall x \in I$, allora la funzione è sviluppabile in serie di Taylor.*

Dim.

Dalla definizione di resto e dalla ipotesi di limitatezza della derivata, si ha

$$|R_n| = \left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\right| \leq \left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right| M.$$

Ma

$$\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \Rightarrow R_n \to 0.$$

Gli sviluppi in serie possono anche essere applicati per il calcolo di limiti. Ad esempio consideriamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-sinx}=\frac{0}{0}.$$

Possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)-2-2x-x^2}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots..\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^2}{2!}-x^2+\frac{2x^3}{3!}}{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}}.$$

Quindi, trascurando al denominatore gli infinitesimi di ordine superiore

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{3!}}{\frac{x^3}{3!}}=2.$$

Consideriamo ora

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx-arctgx}{x^3}=\frac{0}{0}.$$

Scriviamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots.-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}}{x^3}=\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

Appendice

In questa appendice riportiamo una breve ricapitolazione di argomenti fondamentali per il calcolo matematico necessario per il corso di Analisi Matematica.

Divisione tra Polinomi

Ricordiamo che quando il grado del dividendo è maggiore o uguale al grado del divisore, è possibile eseguire la divisione tra polinomi. Ne illustriamo il procedimento nei seguenti esempi:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 5x - 3}{x^2 - x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 2x^2 + 5x - 3 & x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^3 + x^2 - x \phantom{{}-3} & \quad x - 1 \\ \cline{1-1}
-x^2 + 4x - 3 & \\
+x^2 - x + 1 & \\ \cline{1-1}
3x - 2 &
\end{array}$$

Spieghiamo il procedimento eseguito: inizialmente si dividono i due monomi di grado maggiore, cioè

$$\frac{x^3}{x^2} = x.$$

Si moltiplica x per il divisore e lo si sottrae dal dividendo. Il risultato lo assumiamo come nuovo dividendo se il suo grado non è inferiore al grado del divisore. Ripetiamo la procedura iniziale ottenendo

$$\frac{-x^2}{x^2} = -1\,.$$

Moltiplichiamo -1 per il divisore e sottraiamo dal nuovo dividendo. Il polinomio ottenuto è di grado inferiore al divisore e pertanto la procedura finisce.

Chiamando

$$N(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 3\ ;\ \ D(x) = x^2 - x + 1\ ;$$

$$Q(x) = x - 1\ ;\ \ R(x) = 3x - 2\ .$$

analogamente a quanto visto tra numeri naturali, si ha la relazione

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}.$$

Il termine $Q(x)$ è il quoziente mentre $R(x)$ è il resto, che ha il grado sempre minore rispetto a quello di $D(x)$.

Pertanto possiamo scrivere

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 5x - 3}{x^2 - x + 1} = x - 1 + \frac{3x - 2}{x^2 - x + 1}\ .$$

La divisione tra polinomi è fondamentale per risolvere alcuni tipi di integrali che incontreremo e può essere utile anche nel calcolo dei limiti.

Consideriamo un altro esempio dividendo $x^3 - 2x^2 + 4x - 2$ per il polinomio $x - 1$. Con lo stesso procedimento appena visto, si ha

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -2x^2 & +4x & -2 & \quad x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2-x+3 \\ \cline{1-4}
 & -x^2 & +4x & -2 & \\
 & x^2 & -x & & \\ \cline{1-4}
 & & +3x & -2 & \\
 & & -3x & +3 & \\ \cline{3-4}
 & & & 1 &
\end{array}
$$

da cui

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 2}{x - 1} = x^2 - x + 3 + \frac{1}{x - 1}.$$

Con procedimento analogo possiamo verificare che vale la seguente uguaglianza

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 4}{x - 2} = x^2 + 4x + 3 + \frac{2}{x - 2}.$$

Ricordiamo che la divisione con un binomio di primo grado è possibile eseguirla con un procedimento dimostrato da un matematico italiano **Paolo Ruffini** vissuto tra il XVIII e XIX secolo. Esso è noto come **regola di Ruffini** ed ora applichiamo tale regola all'ultima divisione.

	1	2	-5	-4
2		$1*2$	$4*2$	$3*2$
	1	4	3	2

Si procede nel seguente modo: si allineano i coefficienti del dividendo mettendo uno zero al posto delle potenze di x eventualmente mancanti e si isola il termine noto. Si pone alla sinistra in basso il numero che annulla il divisore che nel nostro esempio è 2. Si scrive in basso il primo coefficiente, nel nostro esempio 1, moltiplicandolo per 2 e scrivendo il risultato sotto il secondo coefficiente. Sommiamo questi due numeri ottenendo 4. Moltiplichiamo 4 per 2 scrivendo il risultato sotto il terzo coefficiente e poi sommiamo ottenendo 3. Moltiplichiamo 3 per 2 scrivendo il risultato sotto il coefficiente successivo che è il termine noto. Sommando i numeri dell'ultima colonna, otteniamo il resto della divisione. Gli altri numeri invece sono i coefficienti del quoziente, che è un polinomio di un grado inferiore rispetto al dividendo.

Applichiamo ora la regola di Ruffini per dividere $-x^3 + x^2 + 18$ per il binomio $x - 3$, ottenendo il seguente schema

	-1	1	0	18
3		$-1 * 3$	$-2 * 3$	-18
	-1	-2	-6	$/$

In questo caso il resto è nullo, pertanto si ha

$$\frac{-x^3 + x^2 + 18}{x - 3} = -x^2 - 2x - 6.$$

Dividiamo ora $-3x^4 - 2x^2 + x$ per $x + 2$, ottenendo

	-3	0	-2	1	0
-2		$-2(-3)$	$-2 * 6$	$-2(-14)$	-58
	-3	6	-14	29	-58

da cui

$$\frac{-3x^4 - 2x^2 + x}{x + 2} = -3x^3 + 6x^2 - 14x + 29 - \frac{58}{x + 2}.$$

Consideriamo ora il caso in cui il divisore è un binomio il cui primo coefficiente non è 1 ma un generico numero $a \neq 1$. In questo caso è possibile dividere tutto per a e poi applicare la regola di Ruffini. Come accade nella divisione tra numeri naturali, il quoziente non cambia ma il resto viene diviso per a. Pertanto, per ottenere il resto della divisione, dobbiamo alla fine moltiplicare il resto del nuovo rapporto per a. Diamo un esempio:

supponiamo di dover dividere $6x^3 - 27$ per il binomio $2x - 3$. Dividiamo tutti i termini per 2 ottenendo il seguente rapporto

$$\frac{3x^3-\frac{27}{2}}{x-\frac{3}{2}}.$$

Applichiamo il procedimento di Ruffini e otteniamo

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 0 & 0 & -\frac{27}{2} \\ \frac{3}{2} & & \frac{9}{2} & \frac{27}{4} & \frac{81}{8} \\ \hline & 3 & \frac{9}{2} & \frac{27}{4} & -\frac{27}{8} \end{array}$$

Ricordando di moltiplicare per 2 il resto ottenuto, si ha

$$\frac{6x^3-27}{2x-3}=3x^2+\frac{9}{2}x+\frac{27}{4}-\frac{\frac{27}{4}}{2x-3}.$$

Tabella riassuntiva scomposizione polinomi notevoli

1) $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$.
2) $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$.
3) $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$.
4) $a^2x^2\pm 2abx+b^2=(ax\pm b)^2$.
5) $x^3\pm 3ax^2+3a^2x\pm a^3=(x\pm a)^3$.
6) $x^2+y^2+z^2\pm 2xy+2xz\pm 2yz=(x\pm y+z)^3$.

Valgono le seguenti generalizzazioni

$$x^n+a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\cdots)\ se\ n\ \text{è}\ dispari.$$

$$x^n-a^n=\left(x^{\frac{n}{2}}-y^{\frac{n}{2}}\right)\left(x^{\frac{n}{2}}+y^{\frac{n}{2}}\right)\ se\ n\ \text{è}\ pari.$$

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots.)\ se\ n\ \text{è}\ dispari.$$

Se il polinomio non è in nessuna delle precedenti forme possiamo provare a scomporre con il raccoglimento a fattore comune totale o parziale. Ad esempio nel polinomio

$$49x^4y^2z + 35x^3y^3z^2 - 21x^5yz,$$

possiamo raccogliere a fattore comune totale il massimo comune divisore, ottenendo

$$7x^3yz(7xy + 5y^2z - 3x^2).$$

Se non è possibile un raccoglimento totale, si prova con il raccoglimento parziale cercando di far uscire termini uguali da poter mettere in evidenza in un successivo passaggio. Ad esempio

$$3x - 6y - x^2 - 4y^2 + 4xy = 3(x - 2y) - (x^2 + 4y^2 - 4xy) =$$
$$= 3(x - 2y) - (x - 2y)^2 = (x - 2y)(3 - x + 2y).$$

Proprietà dei radicali ed operazioni su di essi

1) $\sqrt[n]{a^n} = a$
2) $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m$
3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
4) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$
5) $\sqrt[n]{a^m} = a^q\sqrt[n]{a^r}$ con $m=nq+r$
6) $b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n a}$
7) $a\sqrt[n]{c} \pm b\sqrt[n]{c} = (a \pm b)\sqrt[n]{c}$
8) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
9) $(\sqrt[n]{a})/(\sqrt[n]{b}) = \sqrt[n]{a/b}$
10) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
11) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m \cdot b^n}$
12) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[nm]{\dfrac{a^m}{b^n}}$
13) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$ con $c = \sqrt{a^2 - b}$.

Con $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

Ricordiamo che si parla di razionalizzazione quando si vuole rendere razionale il numeratore o il denominatore di una espressione. Se al denominatore abbiamo il termine $\sqrt[n]{x^m}$, si moltiplica e si divide per $\sqrt[n]{x^{n-m}}$. Ad esempio

$$\frac{2}{3\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{15};\quad \frac{1}{\sqrt[5]{3^2}}=\frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}\sqrt[5]{3^3}}=\frac{\sqrt[5]{3^3}}{3}.$$

Se al denominatore abbiamo il termine $\sqrt{x}\pm a$, si moltiplica e divide per $\sqrt{x}\mp a$. Utilizzando la differenza di quadrati si razionalizza. Ad esempio

$$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{5-2}=\frac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{3}.$$

Se al denominatore abbiamo il termine $\sqrt[3]{x}\pm\sqrt[3]{a}$ si moltiplica e si divide per $\sqrt[3]{x^2}\mp\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}$.

Ad esempio

$$\frac{2}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}}=\frac{2\left(\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{4}\right)}{6-2}=\frac{\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Proprietà delle potenze

Considerando $a\in\mathbb{R}^+$ e $m,n\in\mathbb{R}$, si ha

1) $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$

Esempio.

$$2^3\cdot 2^5=2^8.$$

2) $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

Esempio.

$\frac{2^5}{2^3}=2^{5-3}=2^2.$

3) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Esempio.

$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$.

4) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Esempio.

$2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2$.

5) $\frac{a^n}{b^n}=(\frac{a}{b})^n$

Esempio.

$\frac{2^3}{3^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$.

6) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Esempio.

$(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$.

Equazioni polinomiali
Una equazione di primo grado è del tipo

$$ax + b = 0.$$

Se $a \neq 0$ e $b = 0$ ammette la radice $x = 0$. Se $a = 0$ e $b \neq 0$ è impossibile. Se entrambi i coefficienti sono nulli, l'equazione è indeterminata mentre se sono entrambi non nulli essa ammette la radice $x = -\frac{b}{a}$.

Una equazione di secondo grado è del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Le radici è possibile calcolarle tramite la formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Se $\Delta = b^2 - 4ac$, detto discriminante, è positivo, l'equazione ammette due radici distinte. Se il discriminante è nullo l'equazione ammette due soluzioni coincidenti e se Δ è negativo non ammette soluzioni reali. Ricordiamo che se $b = 0$, l'equazione $ax^2 + c = 0$ è detta pura e le eventuali soluzioni è possibile cercarle senza utilizzare la formula risolutiva ma calcolando $\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Se invece è $c = 0$ le soluzioni dell'equazione spuria $ax^2 + bx = 0$, sempre esistenti, si calcolano rapidamente mettendo in evidenza l'incognita e sono $x = 0$ e $x = -\frac{b}{a}$. Ricordiamo anche che, se b è un numero pari, possiamo anche utilizzare la seguente formula ridotta

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}.$$

Se, oltre a b pari si ha anche $a = 1$, la formula ridotta è detta ridottissima.

Ricordiamo, infine, che se il trinomio $ax^2 + bx + c$ ha due radici x_1 e x_2, esso si può scomporre nel seguente modo

$$a(x - x_1)(x - x_2).$$

Se l'incognita appare al denominatore, l'equazione si dice fratta. In questi casi bisogna scomporre i denominatori e fare il minimo comune multiplo assicurandosi di scartare le soluzioni che annullano il denominatore. Ad esempio

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1} = \frac{2}{x^2-1}$$

Per risolvere l'equazione definita per x diverso da 1,-1 e -2, scomponiamo il terzo denominatore ottenendo

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$
$$\Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)-(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-1)(x+1)} =$$
$$= \frac{2(x+2)}{(x+2)(x-1)(x+1)}.$$

Svolgendo i calcoli al numeratore si determina la soluzione

$$x^2 - 1 - x^2 - x - 2x - 2 = 2x + 4 \Rightarrow -5x = 7 \Rightarrow x = -\frac{7}{5}$$

che è accettabile.

Una equazione del tipo

$$a[f(x)]^{2n} + b[f(x)]^n + c = 0$$

con f razionale o irrazionale, è detta **equazione trinomia.** Si risolve ponendo $y = [f(x)]^n$. Ad esempio consideriamo la seguente equazione

$$\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + 5 = 0.$$

Osserviamo che essa è definita per $x \neq 2$ e poniamo $\frac{x+2}{x-2} = y$ ottenendo

$$y^2 + 6y + 5 = 0.$$

Applicando la formula risolutiva troviamo le due soluzioni y = -5 e y = -1. Sostituendo si ottengono le due soluzioni dell'equazione

$$\frac{x+2}{x-2} = -5 \Rightarrow x + 2 = -5x + 10 \Rightarrow 6x = 8 \Rightarrow x = \frac{4}{3},$$
$$\frac{x+2}{x-2} = -1 \Rightarrow x + 2 = -x + 2 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0,$$

che sono entrambe accettabili.

L'equazione trinomia con $f(x) = x$ e $n = 2$ è detta **equazione biquadratica**. Ad esempio, data l'equazione

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

e posto $x^2 = y$ si ha

$$y^2 - 13y + 36 = 0.$$

Applicando la formula risolutiva si ottiene

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}.$$

Le soluzioni in y sono 9 e 4 e pertanto risulta

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$$

Una equazione del tipo

$$ax^n + b = 0,$$

è detta **equazione binomia**. Se n è dispari l'equazione avrà una sola soluzione reale

$$x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}.$$

Se invece l'esponente è pari, l'equazione avrà due soluzioni reali ed opposte oppure nessuna soluzione reale a seconda del segno di $-\frac{b}{a}$.

Per le equazioni di grado superiore al secondo non rientranti nei casi precedenti, bisogna ricorrere alla regola di Ruffini. Inizialmente bisogna cercare una soluzione nel seguente modo: esse sono da ricercare fra i rapporti di ogni divisore del termine noto, preso con segno sia positivo che negativo, ed ogni divisore del primo coefficiente. Se le eventuali soluzioni sono tutte irrazionali, questo metodo non ci permette di determinarle. Ad esempio data l'equazione

$$x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0,$$

individuiamo i divisori del termine noto, che sono $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$. Calcolando il polinomio in -1 esso si annulla e applichiamo Ruffini

	1	3	6	12	8
-1		-1	-2	-4	-8
	1	2	4	8	0

ottenendo

$$(x + 1)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8) = 0.$$

Continuando con lo stesso procedimento, il polinomio di terzo grado si annulla per $x = -2$ ed applichiamo Ruffini

	1	2	4	8
-2		2	0	-8
	1	0	4	0

giungendo a

$$(x + 1)(x + 2)(x^2 + 4) = 0.$$

L'equazione di secondo grado non ha soluzioni reali e quindi le radici saranno solo -1 e -2.

Ci sono alcune equazioni che si possono, facilmente, abbassare di grado con Ruffini, esse si chiamano **equazioni reciproche** e sono le seguenti

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \; (\, prima\ specie\,)$$

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0 \; (\, seconda\ specie\,).$$

Infatti la reciproca di terzo grado e di prima specie avrà sempre -1 come soluzione mentre quella di seconda specie avrà sempre 1 come soluzione. Ad esempio consideriamo

$$3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0.$$

Essa è reciproca di terzo grado di prima specie e, applicando Ruffini, la si scompone nel seguente modo

$$(x + 1)(3x^2 + 10x + 3) = 0.$$

Risolvendo anche l'equazione di secondo grado ottenuta, le soluzioni saranno -1, -3,-1/3.

La seguente equazione

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0,$$

è reciproca di terzo grado di seconda specie e utilizzando la regola di Ruffini l'abbassiamo di grado ottenendo

$$(x - 1)(2x^2 - 5x + 2) = 0.$$

Le soluzioni saranno 1, 2, e 1/2.

Le reciproche di quarto grado sono del tipo

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \; (\, prima\ specie\,),$$
$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0 \; (\, seconda\ specie\,).$$

Per risolvere quelle di prima specie si divide tutto per x^2 ottenendo

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0.$$

Raccogliendo i coefficienti uguali, si ha

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

Ponendo $x+\frac{1}{x}=y \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2,$ l'equazione diventa

$$a(y^2-2)+by+c=0 \Rightarrow ay^2+by+c-2a=0.$$

Infine determinate le soluzioni y_1 e y_2, le soluzioni dell'equazione assegnata si otterranno svolgendo le seguenti equazioni

$$x+\frac{1}{x}=y_1 \; e \; x+\frac{1}{x}=y_2.$$

Ad esempio, consideriamo la seguente equazione

$$8x^4+54x^3+101x^2-54x+8=0$$

e procediamo come mostrato sopra

$$8(x^2+\frac{1}{x^2})-54\left(x+\frac{1}{x}\right)+101=0$$
$$8(y^2-2)-54y+101=0$$
$$8y^2-54y+85=0$$

$$y=\frac{54\pm\sqrt{2916-2720}}{16}=\frac{54\pm14}{16}$$

$$y_1=\frac{5}{2} \; e \; y_2=\frac{17}{4}$$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2-5x+2=0$$
$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4} \Rightarrow x=\frac{1}{2} \; e \; x=2$$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{17}{4} \Rightarrow 4x^2-17x+4=0$$

$$x=\frac{17\pm15}{8} \Rightarrow x=\frac{1}{4} \; e \; x=4.$$

Le soluzioni sono $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{4}$ e 4.

La reciproca di quarto grado di seconda specie, invece, ha sempre soluzioni 1 e -1 e pertanto si riconduce rapidamente ad una equazione di secondo grado con la regola di Ruffini.

Anche le reciproche di quinto grado, di seguito riportate, è possibile abbassarle di grado ricordando che quelle di prima specie si annullano per -1 e quelle di seconda specie per 1

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \; (\,prima\ specie),$$

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \; (\,seconda\ specie).$$

Disequazioni polinomiali

Ricordiamo brevemente che le disequazioni di primo grado si risolvono in modo analogo alle equazioni con la sola differenza che, cambiando i segni a tutti i termini, si inverte il segno della disequazione. Ad esempio

$$2x - 6 > 4x + 8 \Rightarrow -2x > 14 \Rightarrow 2x < -14 \Rightarrow x < -7.$$

La disequazione sarà verificata $\forall x \in (-\infty, 7)$.

Per quanto riguarda le disequazioni di secondo grado è necessario analizzare l'equazione associata e ricordare il seguente schema. Per minimizzare i casi possibili consideriamo sempre $a > 0$ infatti, se non lo fosse, basterà cambiare i segni e invertire il segno della disequazione.

- $ax^2 + bx + c > 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$

Se $\Delta > 0$, l'equazione associata ha due radici x_1 e x_2 e la soluzione della disequazione sarà compresa nel seguente intervallo $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$.

Se $\Delta = 0$, l'equazione associata ha una radice doppia x_1 e la soluzione della disequazione apparterrà a $\mathbb{R} - \{x_1\}$.

Se $\Delta < 0$, l'equazione associata non ha radici reali e la soluzione della disequazione sarà in $\mathbb{R}$.

- $ax^2 + bx + c < 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$

Se $\Delta > 0$, l'equazione associata ha due radici x_1 e x_2 e la soluzione della disequazione sarà nell'intervallo (x_1, x_2).

Se $\Delta = 0$, l'equazione associata ha una radice doppia x_1 e la soluzione della disequazione sarà $\emptyset$.

Se $\Delta < 0$, l'equazione associata non ha radici reali e la soluzione della disequazione sarà $\emptyset$.

- $ax^2 + bx + c \geq 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$

Se $\Delta > 0$, l'equazione associata ha due radici x_1 e x_2 e la soluzione della disequazione sarà nell'intervallo $(-\infty, x_1\,] \cup [x_2, +\infty)$.

Se $\Delta = 0$, l'equazione associata ha una radice doppia x_1 e la soluzione della disequazione sarà in $\mathbb{R}$.

Se $\Delta < 0$, l'equazione associata non ha radici reali e la disequazione è sempre verificata in $\mathbb{R}$.

- $ax^2 + bx + c \leq 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$

Se $\Delta > 0$, l'equazione associata ha due radici x_1 e x_2 e la soluzione della disequazione sarà nell'intervallo chiuso $[x_1, x_2]$.

Se $\Delta = 0$, l'equazione associata ha una radice doppia x_1 e la soluzione della disequazione sarà $\{x_1\}$.

Se $\Delta < 0$, l'equazione associata non ha radici reali e la soluzione della disequazione sarà $\emptyset$.

Un **sistema di disequazioni** è costituito da più disequazioni che devono essere soddisfatte contemporaneamente. Consideriamo ad esempio

$$\begin{cases} 4x + 5 > 2x - 3 \\ 6x - 3 < x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x < 1 \end{cases}$$

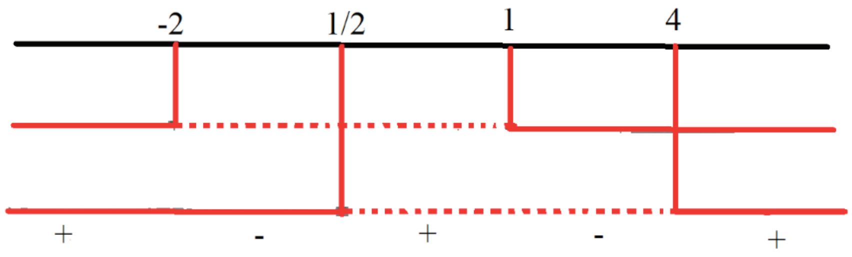
Riportiamo graficamente i risultati ottenuti

e vediamo che il sistema è verificato nell'intervallo (-4,1).

Le **disequazioni fratte o con prodotti**, vanno risolte con il "falso sistema" come illustrato nel seguente esempio

$$\frac{x^2+x-2}{2x^2-9x+4} \geq 0.$$

Risolviamo separatamente $x^2+x-2 \geq 0$ e $2x^2-9x+4>0$. La prima disequazione sarà soddisfatta nell'insieme $(-\infty,-2] \cup [1,+\infty)$ e la seconda in $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right) \cup (4,+\infty)$. Riportando con una linea continua (che indica +) gli intervalli delle soluzioni e con una tratteggiata (che indica -) quella complementare, si ha il seguente grafico.



Applicando la regola dei segni, si ha che la disequazione è soddisfatta per $x \in (-\infty, -2] \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right] \cup (4, +\infty)$.

Equazioni e disequazioni irrazionali

La risoluzione delle equazioni irrazionali nella seguente forma

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$$

si risolvono distinguendo due casi:

- se l'indice della radice è dispari si studia l'equazione

$$A(x) = B^n(x)$$

- se invece l'indice della radice è pari si studia il seguente sistema

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = B^n(x) \end{cases}$$

Osserviamo che la condizione di esistenza del radicale, $A(x) \geq 0$, è implicita in $A(x) = B^n(x\ )$ e per questo motivo si tralascia. Se *B(x)* è un numero e l'indice della radice è pari, ovviamente se il numero è negativo l'equazione non ha soluzione, mentre, se è positivo basta elevarla all'indice della radice e risolverla. Ad esempio, se abbiamo

$$\sqrt[3]{-3+6x} + 3 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{-3+6x} = -3 \Rightarrow -3 + 6x = -27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x = -24 \Rightarrow x = -4.$$

Consideriamo ora la seguente equazione irrazionale

$$\sqrt{x+5} = -4.$$

Essa non ha soluzioni essendo il secondo membro negativo. Se invece abbiamo

$$\sqrt{x+5} = 7,$$

il secondo membro è positivo e quindi basta elevare al quadrato e risolvere l'equazione seguente

$$x + 5 = 49 \Rightarrow x = 44.$$

Se abbiamo

$$\sqrt{6 - 2x} = x - 3,$$

impostiamo il sistema

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 6 - 2x = x^2 - 6x + 9 \end{cases}.$$

L'equazione diventa

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Applicando la formula risolutiva troviamo le due soluzioni 1 e 3. Solo 3 è accettabile poiché la disequazione del sistema ci dice che deve essere $x \geq 3$.

Per equazioni della forma

$$\sqrt[n]{A(x)} = \sqrt[m]{B(x)}$$

i. Se n ed m sono dispari si risolve $[A(x)]^m = [B(x)]^n$

ii. Se un indice è pari ed uno è dispari dobbiamo considerare i seguenti sistemi

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ [A(x)]^m = [B(x)]^n \end{cases} \quad m\, pari$$

oppure

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ [A(x)]^m = [B(x)]^n \end{cases} \quad n\, pari.$$

iii. Se entrambi gli indici sono pari si studierà il seguente sistema

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ [A(x)]^m = [B(x)]^n \end{cases} .$$

Ad esempio

$$\sqrt[3]{4-x^2} = \sqrt[3]{x^2-12} \Rightarrow 4-x^2 = x^2-12 \Rightarrow 2x^2 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}.$$

Risolviamo la seguente equazione

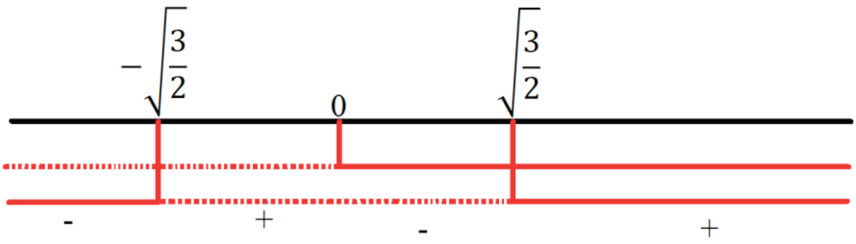
$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt[3]{x^3-\frac{3}{2}x}.$$

Per ii si ha

$$\begin{cases} x^3 - \dfrac{3}{2}x \ \geq 0 \\ (x^2-1)^3 = \left(x^3-\dfrac{3}{2}x\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\left(x^2 - \dfrac{3}{2}x\right) \geq 0 \\ x^6 - 1 - 3x^4 + 3x^2 = x^6 + \dfrac{9}{4}x^2 - 3x^4 \end{cases}$$

La disequazione ci conduce al seguente grafico



Pertanto è verificata per $-\sqrt{\frac{3}{2}} \leq x \leq 0 \cup x \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$. Riportando il risultato nel sistema, si ha

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 0, x \geq \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{3}{4}x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

L'unica soluzione accettabile è $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Se le radici sono più di due, le condizioni potrebbero diventare talmente tante che conviene razionalizzarle, risolverle e fare la verifica delle soluzioni.

Consideriamo ora le disequazioni irrazionali e sia k un numero reale

1) $\sqrt[n]{A(x)} < k, \quad k \in \mathbb{R}$.

Se n è dispari basta risolvere

$$A(x) < k^n.$$

Se n è pari e $k < 0$, la disequazione non ha soluzioni poiché il primo membro è non negativo. Se invece k non è negativo bisogna risolvere il sistema

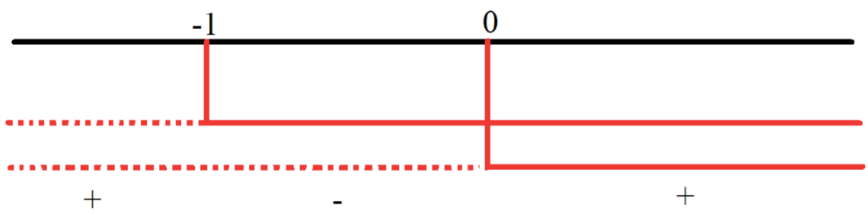
$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) < k^n. \end{cases}$$

Risolviamo la seguente disequazione

$$\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} < -1.$$

Essendo n dispari non è necessario imporre la condizione di esistenza, pertanto

$$\frac{x-1}{x+1} < -1 \Rightarrow \frac{2x}{x+1} < 0$$



La soluzione è $x \in (-1{,}0)$.

Ora risolviamo la seguente disequazione

$$\sqrt{2x-3} < 7.$$

Si ha che la soluzione della disequazione è

$$\tfrac{3}{2} \leq x < 26,$$

infatti

$$\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 2x-3 < 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ x < 26. \end{cases}$$

Ora risolviamo la seguente disequazione

$$\sqrt{4x+5} < -6.$$

L'indice della radice è pari ed il secondo membro negativo, pertanto non ha soluzioni.

2) $\sqrt[n]{A(x)} > k.$

Se n è dispari allora basta risolvere

$$A(x) > \ k^n.$$

Se n è pari e k < 0 allora si risolve

$$A(x) \geq 0.$$

Se n è pari e k > 0 allora basta risolvere

$$A(x) > k^n.$$

Diamo degli esempi.

Se consideriamo la seguente disequazione $\sqrt[3]{x+3} \geq -2$, si ha

$$x + 3 \geq -8 \Rightarrow x \geq -11.$$

Quindi la disequazione è verificata nell'intervallo $[-11, +\infty)$.

Data $\sqrt{2x-8} > -2$, ricaviamo la soluzione nel seguente modo

$$2x - 8 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4.$$

Infine, la disequazione $\sqrt[4]{x-6} > 2$ è soddisfatta per $x > 22$ poichè

$$x - 6 > 16 \Rightarrow x > 22.$$

3) $\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$.

Se n è dispari, basta risolvere

$$A(x) < [B(x)]^n.$$

Se n è pari dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} B(x) > 0 \\ A(x) \geq 0 \\ A(x) < [B(x)]^n \end{cases}.$$

Diamo degli esempi. Partiamo considerando la disequazione

$$\sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + 7x - 6} < x - 2.$$

Razionalizzando otteniamo

$$x^3 - 4x^2 + 7x - 6 < x^3 - 8 - 6x^2 + 12x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 < 0.$$

Le radici dell'equazione associata sono date da

$$x = \frac{+5 \mp \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{+5 \mp \sqrt{9}}{4} = \frac{+5 \mp 3}{4} = \frac{1}{2}; 2.$$

Le soluzioni sono pertanto per $\frac{1}{2} < x < 2$.

Ora invece risolviamo $\sqrt{x^2 - 4x + 3} < 3 - 2x$.

Dal sistema

$$\begin{cases} 3 - 2x > 0 \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 9 + 4x^2 - 12x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3/2 \\ x \leq 1 \cup x \geq 3 \\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

si ricava che la soluzione sarà costituita da tutti i valori compresi nell'intervallo $(-\infty, 1]$.

4) $\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$.

Se n è dispari, allora

$$A(x) > [B(x)]^n.$$

Se n è pari, la soluzione viene dalla risoluzione simultanea dei due sistemi.

$$\begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^n \end{cases}$$

Consideriamo la disequazione $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 1} > x - 1$.
Razionalizziamo ottenendo

$$x^3 - 3x^2 + 1 > x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Rightarrow 3x - 2 < 0 \Rightarrow x < \frac{2}{3}.$$

Consideriamo ora $\sqrt{4 - x} > x - 2$.

Il primo sistema sarà

$$\begin{cases} x - 2 < 0 \\ 4 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \leq 4. \end{cases}$$

La soluzione sarà compresa nell'intervallo $(-\infty, 2)$.

Il secondo sistema sarà

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 4 - x > x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 3x < 0. \end{cases}$$

Il polinomio $x^2 - 3x$ ha radici 0 e 3 e le soluzioni della disequazione sono per valori interni. Quindi il secondo sistema sarà verificato nell'intervallo $[2,3)$. Unendo le soluzioni dei due sistemi, si ottiene la soluzione della disequazione che è verificata $\forall x \in (-\infty, 3)$.

Equazioni e disequazioni trascendenti

Ricordiamo che affinchè a^x abbia un significato per ogni valore di x, è sufficiente che sia $a > 0$ ed il valore assunto $b = a^x$ sia sempre positivo. Generalmente si aggiunge anche $a \neq 1$ poiché per $a = 1$ si ha che $b = 1\ \forall x$. Quindi per $a > 0, a \neq 1, b > 0$, l'equazione esponenziale

$$a^x = b,$$

ammette una ed una sola soluzione. Ad esempio l'equazione

$$3^x = 27$$

ammette $x = 3$ come soluzione. L'equazione

$$3^x = 7,$$

avrà una soluzione irrazionale compresa tra 1 e 2. In questi casi scriveremo tale soluzione come

$$x = log_3 7.$$

Quindi l'espressione $log_a b$, che si legge *logaritmo in base a di b*, traduce in simboli il problema di determinare un numero che assegnato come esponente ad *a* dia *b*. Da quanto detto, il logaritmo ha l'**argomento** *b* positivo e la **base** *a* positiva e diversa da 1. Ricordiamo le seguenti proprietà del logaritmo

1) $log_a(x \cdot y) = log_a x + log_a y;$

2) $log_a \left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y;$

3) $log_a x^n = n log_a x;$

4) $log_a b = -log_a \frac{1}{b};$

5) $log_a b = -log_{\frac{1}{a}} b;$

6) $log_a b = log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b};$

7) $log_a b = \frac{1}{log_b a};$

8) $log_a a^n = n;$

9) $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}.$

La proprietà 9) è la formula del cambiamento di base. Se la base del logaritmo è 10, il logaritmo è detto decimale o di Briggs e generalmente è indicato con log omettendo di scrivere la base. Se la base è il numero di Nepero $e \cong 2.71$, il logaritmo è detto naturale o neperiano e lo si indica con ln. Poiché le calcolatrici tascabili calcolano solo i logaritmi decimali e neperiani, possiamo servirci della proprietà 9) per calcolare il valore di un logaritmo che abbiamo in un'altra base. Ad esempio

$$log_4 11 = \frac{ln11}{ln4}.$$

Per risolvere una equazione del tipo

$$log_a f(x) = log_a g(x),$$

basta considerare il seguente sistema

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Esempio.

$$log(5x - 10) = log\ (2x - 16)$$

$$\begin{cases} 5x - 10 > 0 \\ 2x - 16 > 0 \\ 5x - 10 = 2x - 16 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x > 2 \\ x > 8 \\ 3x = -8. \end{cases}$$

La soluzione $x = -8/3$ non è quindi accettabile.

Esempio.

Consideriamo l'equazione

$$logx + log(x + 3) = log2 + log(2x + 3).$$

Mediante le proprietà dei logaritmi, è possibile ricondurre l'equazione alla seguente forma

$$log(x^2 + 3x) = log(4x + 6)$$

quindi

$$\begin{cases} x > 0 \\ x > -3 \\ x > -\dfrac{3}{2} \\ x^2 + 3x = 4x + 6. \end{cases}$$

Dalla risoluzione del sistema sistema si ottiene facilmente che la soluzione è $x = 3$.

Se abbiamo una equazione del tipo

$$log_a f(x) = k \in \mathbb{R},$$

per risolverla basterà applicare la definizione di logaritmo e la condizione di esistenza, ottenendo

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^k. \end{cases}$$

Esempio.
Data la seguente equazione

$$log_2(3x - 6) = 4,$$

risolviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} 3x - 6 > 0 \\ 3x - 6 = 2^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x = 22/3. \end{cases}$$

ottenendo la soluzione $x = 22/3$ che è accettabile.
Esistono equazioni logaritmiche che si risolvono riconducendole ad equazioni polinomiali.

Esempio.
Data l'equazione

$$ln^2x - 5lnx + 6 = 0,$$

e posto $lnx = t$ otteniamo

$$t^2 - 5t + 6 = 0.$$

Con la formula risolutiva ricaviamo le due soluzioni $t_1 = 2;\ t_2 = 3$.
Per tale motivo, sostituendo si ha

$$lnx_1 = 2 \Rightarrow x_1 = e^2$$

$$lnx_2 = 3 \Rightarrow x_2 = e^3.$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili essendo la condizione di esistenza del logaritmo soddisfatta.
Per quanto riguarda le disequazioni, il procedimento è perfettamente identico con la sostituzione del segno di uguaglianza con il segno di disuguaglianza. Bisogna solo ricordare che, quando si eliminano i logaritmi, se la base è minore di 1 si inverte il verso della disequazione.

Esempio.

$$log_3 x > 2 \Rightarrow x > 9$$
$$log_{\frac{1}{2}} x > 3 \Rightarrow x < 1/8$$
$$log_{\frac{2}{3}}(2x-6) < log_{\frac{2}{3}}(-5x+1) \Rightarrow 2x-6 > -5x+1$$
$$log_4(5x+10) > log_4(2x-1) \Rightarrow 5x+10 > 2x-1.$$

Le equazioni esponenziali le si possono quasi sempre ricondurre ai seguenti 4 tipi fondamentali

1) $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x);$
2) $a^{f(x)} = b^{f(x)} \Rightarrow f(x) = 0;$
3) $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Rightarrow f(x)log_c a = g(x)log_c b.$

Possiamo osservare che, per risolvere l'equazione del caso 3, la scelta della base del logaritmo da utilizzare è arbitraria. Ad esempio, se scegliamo come base a, otteniamo

$$f(x) = g(x)log_a b.$$

Se scegliamo come base b, otteniamo

$$f(x)log_b a = g(x).$$

Se consideriamo come base il numero di Nepero otteniamo

$$f(x)lna = g(x)lnb.$$

4) $a \cdot d^{2f(x)} + b \cdot d^{f(x)} + c = 0.$

In questo caso si pone $d^{f(x)} = t$ riconducendoci ad una equazione polinomiale.

Esempi.

$$2^{7x-6} = 8^{2x+1} \Rightarrow 2^{7x-6} = 2^{6x+3} \Rightarrow 7x - 6 = 6x + 3 \Rightarrow x = 9.$$

$$2^{4x-12} = 3^{4x-12} \Rightarrow 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

$$2^{4x-1} = 3^x \Rightarrow (4x-1)ln2 = xln3 \Rightarrow 4xln2 - xln3 = ln2$$
$$\Rightarrow x(4ln2 - ln3) = ln2 \Rightarrow x == \frac{ln2}{4ln2 - ln3}.$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - \frac{25}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{x} + 1 = 0.$$

Poniamo $\left(\frac{3}{4}\right)^{x} = t$ ottenendo

$$t^2 - \frac{25}{12}t + 1 = 0,$$

che risolta ci dà come soluzioni 3/4 e 4/3. Quindi

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 1$$
$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \Rightarrow x = -1.$$

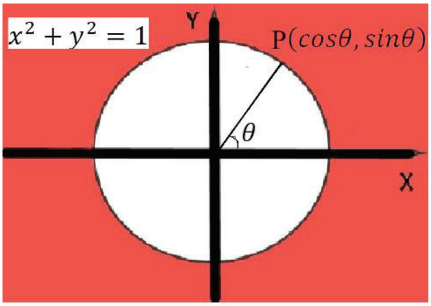
Per quanto riguarda le disequazioni il procedimento è analogo. Anche in questo caso bisogna ricordare che, se la base della potenza è minore di 1, si inverte il verso della disequazione.
Esempio:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{10x+4} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+12} \Rightarrow 10x + 4 < 2x + 12 \Rightarrow x < 1.$$

Ricordiamo le definizioni e le principali proprietà delle funzioni goniometriche. Una circonferenza di raggio unitario e con centro nell'origine degli assi cartesiani è detta circonferenza goniometrica.
Il punto A, di intersezione tra la circonferenza goniometrica e il semiasse positivo delle x, viene assunto come origine degli archi (degli angoli). Ogni punto P sulla circonferenza, detto punto

Arco	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2/3π	3/4π	5/6π
Angolo	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°

goniometrico, individua, quindi, un angolo θ avente primo estremo in A. Si considera positivo il senso antiorario di percorrenza degli archi (degli angoli) a partire da A. Le coordinate del punto P sono per definizione $(cos\theta, sin\theta)$.



Inoltre si definiscono

$$tg\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}; \quad cotg\theta = \frac{cos\theta}{sin\theta}; \quad sec\theta = \frac{1}{cos\theta}; \quad cosec\theta = \frac{1}{sin\theta}.$$

Ricordiamo l'identità fondamentale della goniometria

$$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$$

e i valori delle funzioni goniometriche per gli angoli principali

Seno	0	1/2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
Cosecante	∞	2	$\sqrt{2}$	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
Secante	1	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-2\frac{\sqrt{3}}{3}$
Cotangente	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

Arco Angolo	π 180°	7/6π 210°	5/4π 225°	4/3π 240°	3/2π 270°	5/3π 300°	7/4π 315°	11/6π 330°
Seno	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Coseno	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
Cosecante	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-2\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-2\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2
Secante	-1	$-2\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	∞	2	$\sqrt{2}$	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$
Cotangente	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

Di seguito diamo degli esempi delle **equazioni goniometriche elementari**

$$sinx = k, \; cosx = k, \quad tgx = k.$$

Esempio:

consideriamo

$$sinx = \frac{1}{2}.$$

Nell'intervallo $[0,2\pi]$ il seno assume il valore 1/2 a $\frac{\pi}{6}$ e $\pi - \frac{\pi}{6}$, pertanto le soluzioni generali dell'equazione saranno

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad k = 0,1,2, \ldots.$$

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \qquad k = 0,1,2, \ldots.$$

Risolviamo ora

$$sin2x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Si ha

$$2x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{8} + k\pi,$$

$$2x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \Rightarrow x_2 = \frac{3}{8}\pi + k\pi.$$

Risolviamo ora

$$cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Il coseno in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ assume questo valore a $\pm\frac{\pi}{6}$. Le soluzioni generali saranno le seguenti

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

Risolviamo ora

$$cos\frac{2}{3}x = -\frac{1}{2}.$$

Si ha

$$\frac{2}{3}x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \Rightarrow x = \pm\pi + 3k\pi.$$

Risolviamo ora

$$tgx = \sqrt{3}.$$

La tangente in $[0, \pi]$ assume questo valore a $\frac{\pi}{3}$ e le soluzioni generali saranno le seguenti

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Risolviamo ora

$$tg5x = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Si ha

$$5x = \frac{5}{6}\pi + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k}{5}\pi.$$

Le equazioni con la cotangente, la secante e la cosecante si riconducono a queste ricordando la loro definizione. Nel caso il valore non rientra tra quelli noti in tabella, la soluzione si scrive come negli esempi che seguono

$$cosx = \frac{5}{6} \Rightarrow x = \pm arccos\frac{5}{6} + 2k\pi.$$

$$tgx = 4 \Rightarrow x = arctg4 + k\pi.$$

$$sinx = \frac{7}{8} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = arcsin\frac{7}{8} + 2k\pi \\ x_2 = \pi - arcsin\frac{7}{8} + 2k\pi. \end{cases}$$

Ricordiamo altre **particolari equazioni elementari**

1) $sin\alpha = sin\alpha' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' + 2k\pi \cup \alpha = \pi - \alpha' + 2k\pi.$

Esempio.

Sia

$$sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Allora

$$x + \frac{\pi}{6} = 2x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow -x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \pi - \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi.$$

2) $sin\alpha = -sin\alpha' \Leftrightarrow sin\alpha = \sin(-\alpha').$

Esempio.

$$sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = -sin\left(-x + \frac{\pi}{3}\right).$$

L’equazione diventa

$$sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$$

e va risolta come visto al punto 1).

3) $sin\alpha = cos\alpha' \Leftrightarrow sin\alpha = sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right).$

Esempio.

$$sin3x = cos2x.$$

L’equazione diventa

$$sin3x = sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right),$$

e per il punto 1) si ha

$$3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \Rightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi$$

$$3x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

4) $sin\alpha = -cos\alpha' \Leftrightarrow sin\alpha = sin\left(\alpha' - \frac{\pi}{2}\right)$.

Esempio.

$$sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = -cos7x,$$

equivale alla seguente equazione

$$sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = sin\left(7x - \frac{\pi}{2}\right)$$

che si riconduce al caso 1).

5) $cos\alpha = cos\alpha' \Leftrightarrow \alpha = \pm\alpha' + 2k\pi$.

Esempio.

$$cos5x = cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$$

allora

$$5x = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow 4x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k}{2}\pi$$

$$5x = -x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow 6x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{k}{3}\pi.$$

6) $cos\alpha = -cos\alpha' \Leftrightarrow cos\alpha = cos(\pi - \alpha')$.

Esempio.

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -cos2x,$$

diventa

$$\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=cos(\pi-2x)$$

che corrisponde al punto 5).

7) $tg\alpha = tg\alpha' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' + k\pi.$

Ovviamente bisogna porre $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha' \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

8) $tg\alpha = -tg\alpha' \Leftrightarrow tg\alpha = tg(-\alpha').$

Equazioni del seguente tipo

$$2cos^2x + cosx - 1 = 0,$$

si riconducono ad equazioni elementari. Infatti, ponendo $cosx = t$, otteniamo

$$2t^2 + t - 1 = 0.$$

Con la formula risolutiva, ricaviamo le soluzioni -1 e 1/2. Pertanto

$$cosx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$cosx = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi.$$

Consideriamo ora

$$\frac{cosx}{1+sinx} + \frac{sinx}{cosx} - 2 = 0$$

Innanzitutto poniamo le condizioni di esistenza della frazione

$$1 + sinx \neq 0 \Rightarrow sinx \neq -1 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

$$cosx \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi.$$

Moltiplicando per il minimo comune multiplo si ha

$$cos^2x + sinx + sin^2x - 2cosx(1 + sinx) = 0$$

e ricordando l'identità fondamentale della goniometria, si ha

$$1 + sinx - 2cosx(1 + sinx) = (1 + sinx)(1 - 2cosx) = 0.$$

Poiché $1 + sinx \neq 0$, non ci resta che risolvere

$$1 - 2cosx = 0 \Rightarrow cosx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Equazioni del tipo

$$asinx + bcosx + c = 0,$$

sono dette **equazioni lineari in seno e coseno**. Se $c = 0$, basta dividere tutto per $cosx$ ottenendo una equazione elementare in tgx. Poiché $cosx = 0$ non può essere soluzione dell'equazione, non c'è bisogno di considerare la limitazione $cosx \neq 0$.

Esempio.

$$3sinx - \sqrt{3}cosx = 0 \Rightarrow 3tgx - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow tgx = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Se l'equazione ha anche il termine noto, bisogna applicare le seguenti formule parametriche che saranno utili per risolvere gli integrali goniometrici (vedi capitolo 11)

$$\begin{cases} sinx = \dfrac{2t}{1 + t^2} \\ cosx = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ tgx = \dfrac{2t}{1 - t^2} \\ t = tg\dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

Poiché le formule parametriche sono verificate per $x \neq \pi + 2k\pi$, bisogna controllare se $\pi + 2k\pi$ è soluzione o meno dell'equazione.

Esempio.

$$\sqrt{3}sinx - cosx - 1 = 0.$$

Sostituendo π si ha

$$\sqrt{3}sin\pi - cos\pi - 1 = \sqrt{3} \cdot 0 - (-1) - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Quindi $\pi + 2k\pi$ è soluzione. Poi applichiamo le formule parametriche ottenendo

$$\sqrt{3}\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1 = 0.$$

Moltiplicando per il minimo comune multiplo si ha

$$2\sqrt{3}t - 1 + t^2 - 1 - t^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Pertanto

$$tg\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Equazioni del tipo

$$a\, sin^2x + b\, sin\, x\, cos\, x + c\, cos^2\, x = d,$$

sono dette **omogenee di secondo grado in seno e coseno**. Questo tipo di equazione si risolve dividendo per cos^2x e osservando che

$$\frac{1}{cos^2x} = \frac{sin^2x + cos^2x}{cos^2x} = tg^2x + 1.$$

In tal modo l'equazione diventa

$$a\, tg^2x + b\, tg\, x + c = d(tg^2x + 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a-d)tg^2x + b\, tg\, x + (c-d) = 0.$$

Osserviamo che se $a \neq d$, $cosx = 0$ non è mai soluzione mentre se $a = d, cosx = 0$ è soluzione.

Esempio.

Consideriamo

$$2\,sin^2x + \sqrt{3}\,sin\,x\,cos\,x + cos^2x = 2.$$

Poiché abbiamo visto che l'equazione si riduce a

$$(a-d)tg^2x + b\;tg\;x + (c-d) = 0,$$

$$\text{con} \quad a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1, d = 2$$

$$\sqrt{3}tgx - 1 = 0 \Rightarrow tgx = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

A questa dobbiamo aggiungere, essendo $a = d$, la soluzione di $cosx = 0$ e cioè $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Infine ricordiamo le **equazioni simmetriche in seno e coseno**.

Esempio.

$$2sinx + 2cosx = 1 + 2sinxcosx.$$

Notiamo che resta immutata scambiando il seno con il coseno. Queste equazioni si risolvono ponendo $x = y + \frac{\pi}{4}$ ed applicando le formule di addizione

$$sin(\alpha+\beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$$

$$cos(\alpha+\beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta.$$

L'equazione diventa

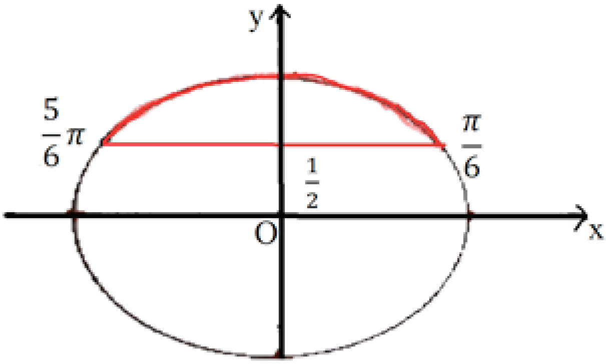
$$2sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right) + 2cos\left(y+\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)cos\left(y+\frac{\pi}{4}\right).$$

Sviluppando le formule di addizione, si cerca di ricondurre l'equazione ad un caso noto trovando le soluzioni nella variabile y. Una volta trovate, le soluzioni in x le otterremo sommando $\frac{\pi}{4}$.

Se dobbiamo risolvere una disequazione goniometrica, è fondamentale l'ausilio grafico. Supponiamo di dover risolvere

$$sinx > \frac{1}{2} \text{ oppure } sinx < \frac{1}{2}.$$

Disegniamo la circonferenza goniometrica e troviamo i due angoli che verificano l'equazione corrispondente. Uniamoli con un segmento parallelo all'asse delle ascisse. La parte superiore individua la regione che soddisfa $sinx > \frac{1}{2}$ mentre la parte inferiore individua la regione che soddisfa $sinx < \frac{1}{2}$.



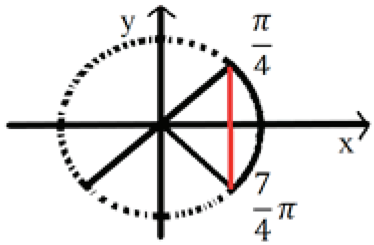
Quindi $sinx > \frac{1}{2}$ è verificata per $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,$ mentre $sinx < \frac{1}{2}$ ha le soluzioni in

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \cup \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi.$$

Ora supponiamo di avere

$$cosx > \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ oppure } cosx < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Troviamo gli angoli che soddisfano l'uguaglianza e li uniamo con un segmento parallelo all'asse delle ordinate. La zona a destra è quella che verifica $cosx > \frac{\sqrt{2}}{2}$, quella a sinistra è la zona che verifica $cosx < \frac{\sqrt{2}}{2}$.



La soluzione di $cosx > \frac{\sqrt{2}}{2}$ possiamo scriverla

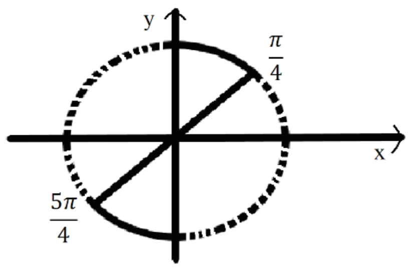
$$2k\pi \leq x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \cup \frac{7}{4}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi.$$

La soluzione di $cosx < \frac{\sqrt{2}}{2}$ è $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$.

Ora risolviamo

$$tgx > 1 \; e \; tgx < 1.$$

Troviamo i valori angolari che verificano l'uguaglianza e tracciamo la retta passante per questi due punti



Vediamo che la tangente è maggiore di 1 per $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k$, mentre è minore di 1 per

$$k\pi < x < \frac{\pi}{4} \cup \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi.$$

Nel caso di disequazioni goniometriche fratte, esse si risolvono come appreso nelle disequazioni fratte polinomiali e cioè studiando il falso sistema.

Finito di stampare nel mese di febbraio del 2021
dalla tipografia «The Factory S.r.l.»
via Tiburtina, 912 – 00156 Roma