

8 - Esercizi

Esercizi sulla generazione

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^{2n+1} | n \geq 0\}$.

Determinare una grammatica generativa per L.

Alcune parole:

$$L = \{b, ab^3, a^2b^5, a^3b^7, \dots\}$$

Parola più piccola possibile:

$$S \rightarrow b$$

Un esempio di produzione potrebbe essere:

- $S \rightarrow b \mid aSbb$

Esempio:

$$S \Rightarrow aabbbbbb$$

$$S \rightarrow aSbb$$

$$S \rightarrow aaSbbbbb$$

$$S \rightarrow aabbbbbb$$

Avendo quindi la grammatica:

$$G = (X, V, S, P):$$

$$X = \{a, b\}$$

$$V = \{S\}$$

$$S$$

$$P = \{S \rightarrow b \mid aSbb\}$$

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^{n+m} c^m | n, m > 0\}$.

Determinare una grammatica generativa per L.

Alcune parole

$$L = \{ab^2c, ab^3c^2, a^2b^3c, a^2b^4c^2\}$$

Per facilitare la comprensione possiamo riscrivere il linguaggio:

$$L = \{a^n b^n b^m c^m | n, m > 0\}$$

Notiamo che vi è un legame tra a e b, ma anche tra b e c. Le coppie hanno infatti tra loro lo stesso esponente. Inoltre, siccome le due coppie hanno esponente diverso, possiamo generarle indipendentemente tra loro.

Possiamo pensare dunque ad una produzione:

$$S \rightarrow aAbbBc$$

$$A \rightarrow \lambda \mid aAb$$

$$B \rightarrow \lambda \mid bBc$$

Con la conseguente grammatica.

Un'altra possibile produzione sarebbe:

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow ab \mid aAb$$

$$B \rightarrow bc \mid bBC$$

Avendo quindi la grammatica:

$$G = (X, V, S, P):$$

$$X = \{a, b, c\}$$

$$V = \{S, A, B\}$$

$$S$$

$$P = \{S \rightarrow AB, A \rightarrow ab \mid aAb, B \rightarrow bc \mid bBC\}$$

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^{2k+1} \mid n, k \geq 0\}$.

Determinare una grammatica generativa per L.

...

Possibile produzione:

$$S \rightarrow ABb$$

$$A \rightarrow aA \mid \lambda$$

$$B \rightarrow bbB \mid \lambda$$

...

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$.

Determinare una grammatica generativa per L.

...

Possibile produzione

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaSBCBCBCBC \Rightarrow aaaaaBCBCBCBCBC \\ &\Rightarrow aaaaaBBCCBCBCBC \Rightarrow aaaaaBBCBCCBCBC \Rightarrow aaaaaBBBCCCBCBC \Rightarrow \\ &aaaaaBBBCCBCCBC \Rightarrow aaaaaBBBCBCCBC \Rightarrow aaaaaBBBBCCCCBC \Rightarrow \\ &aaaaaBBBBCCCBCC \Rightarrow aaaaaBBBBCCBCCC \Rightarrow aaaaaBBBBBCBCCCC \Rightarrow \\ &aaaaaBBBBBBCCCC \Rightarrow aaaaabBBBBCCCC \Rightarrow aaaaabbBBBBCCCC \Rightarrow \\ &aaaaabbbbBBCCCC \Rightarrow aaaaabbbbBCCCC \Rightarrow aaaaabbbbbCCCC \end{aligned}$$

Regole di produzione:

$$S \rightarrow aSBC \mid aBC$$

$$CB \rightarrow BC$$

$$aB \rightarrow ab$$

$$bB \rightarrow bb$$

$$bC \rightarrow bc$$

$$cC \rightarrow cc$$

Sia dato il linguaggio $L = \{a^i b^k c^j \mid i > 0, j > 0, 0 \leq k \leq i + j\}$.

Determinare una grammatica generativa per L.

Esempi di parole: {ac, abc, abbc, aac, aacc, ...}

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^m c^n \mid n, m > 0\}$.

Determinare una grammatica generativa per L.

...

$S \rightarrow aSc \mid aBc$

$B \rightarrow bB \mid b$

Esercizi sul Pumping Lemma

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$.

Dimostrare che L non è C.F..

L libero $\implies \exists p \in \mathbb{N} \forall z \in L \mid z \mid > p$

1. $\mid vwx \mid \leq p$
2. $(vx \neq \lambda)$
3. $\forall i, i \geq 0 : uv^i wx^i y \in L$

Studiamo una stringa $z \in L \mid z \mid > p$ (scegliendo la stringa con lunghezza maggiore di p più comoda per i calcoli)

$z = a^p b^p c^p \implies \mid z \mid = 3p > p$

$$\underbrace{a \dots a}_p \underbrace{b \dots b}_p \underbrace{c \dots c}_p$$

In questa stringa abbiamo un p numero di a, un p numero di b ed un numero p di c.

Casi:

1. vwx formato solo da a
2. vwx formato solo da b
3. vwx formato solo da c
4. vwx formato a cavallo tra a e b
5. vwx formato a cavallo tra b e c
6. vwx non può contenere a b e c, poichè non sufficientemente lunga

Caso 1:

Prendiamo una stringa a caso (quella più semplice)

uv^2wx^2y

Prendendo la stringa pompata, possiamo aggiungere solo delle a.

Ora, il numero di a aumenta: $p + 1 \leq \#(a) \leq p + p$. Tuttavia il numero di c e b rimane

invariato, il che non rispecchia le regole del linguaggio. Quindi

$uv^2wx^2y \notin L$ poichè $\#(a) \neq \#(b) \neq \#(c)$

Caso 2 e 3:

Stessa cosa del caso 1, ripetuto però con le b e con le c.

Caso 4:

il punto vwx è a cavallo tra a e b.

Caso 4.1: $v \neq \lambda \ x = \lambda$

$v \neq \lambda \implies v$ contiene solo delle a, il che vuol dire che $wx = ab \dots b$. Pommando andremmo ad aumentare solo il numero delle a (non delle b poichè dovrebbero essere contenute nelle x, il quale è però vuoto). Anche in questo caso quindi avremmo un numero di a pari a:

$p + 1 \leq \#(a) \leq p + p - 1$ (p-1 poichè almeno una a è contenuta nelle w). Quindi

$uv^2wx^2y \notin L$ poichè $\#(a) \neq \#(b) \neq \#(c)$

Caso 4.2: $v = \lambda \ x \neq \lambda$

$x \neq \lambda \implies x$ contiene solo delle b. In questo caso quindi avremmo un numero di b pari a:

$p + 1 \leq \#(b) \leq p + p - 1$ (p-1 poichè almeno una b è contenuta nelle w). Quindi

$uv^2wx^2y \notin L$ poichè $\#(a) \neq \#(b) \neq \#(c)$

Caso 4.3: $v \neq \lambda \ x \neq \lambda$

$v \neq \lambda \ x \neq \lambda \implies v$ contiene solo delle v e x contiene solo delle b. In questo caso quindi avremmo un numero di b pari al numero a: $p + 1 \leq \#(b) = \#(a) \leq p + p - 1$ (p-1 poichè almeno una b è contenuta nelle w). Quindi $uv^2wx^2y \notin L$ poichè $\#(a) \wedge \#(b) \neq \#(c)$

Caso 5:

Analogo al caso 4.

Sia L il linguaggio $L = \{a^{n^2} \text{ con } n \geq 0\}$.

$L = \{\lambda, a, a^4, a^9, a^{16}, \dots\}$

Per assurdo L libero \implies

• $\exists p \in \mathbb{N} \quad \forall z \in L \quad |a| > p \quad z = uvwxy$

1. $|vwx| \leq p$

2. $vx \neq \lambda$

3. $\forall i, i \geq 0 : uv^iwx^iy \in L$

Prendiamo in considerazione la stringa: $z = a^{p^2} \implies |z| = p^2 > p$

Caso 1: vwx formato solo da a

$uv^2wx^2y \in L? \quad p + 1 \leq \#(a) \leq p + p$

$L = \{\lambda, a, a^4, a^9, a^{16}, \dots, a^{p^2}, a^{(p+1)^2}\}$

$|uvwxy| < |uv^2wx^2y| = |\underline{uvvwxxy}| = |uvwxy| + |vx| = ||$ [PORCODDIO CONTINUA]

Sia $L = \{a^i b^j c^k \mid i > j > k > 0 \implies \#(a) > \#(b) > \#(c) > 0\}$.

Parole del linguaggio $L = \{a^3 b^2 c, a^4 b^3 c^2, a^4 b^2 c, a^5 b^4 c^3, \dots\}$

Per assurdo L libero \implies

$$\bullet \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall z \in L \mid |z| > p \quad z = uvwxy$$

$$1. |vwx| \leq p$$

$$2. vx \neq \lambda$$

$$3. \forall i, i \geq 0 : uv^i wx^i y \in L$$

Consideriamo la stringa: $z = a^{p+2} b^{p+1} c^p \quad |z| = 3p + 3 > p$

Caso 1: vwx formata solo da a

Caso 2: vwx formata solo da b

Caso 3: vwx formata solo da c

Caso 4: vwx formata a cavallo tra a e b

Caso 5: vwx formata a cavallo tra b e c

[GUARDA FOTO E COMPLETA]