

## 9 - Esercizi

### Esercizi sulla generazione

Sia dato il linguaggio  $L = \{a^n b^{2n+1} | n \geq 0\}$ .

Determinare una grammatica generativa per L.

Alcune parole:

$$L = \{b, ab^3, a^2b^5, a^3b^7, \dots\}$$

Parola più piccola possibile:

$$S \rightarrow b$$

Un esempio di produzione potrebbe essere:

- $S \rightarrow b \mid aSbb$

Esempio:

$$S \Rightarrow aabbbbb$$

$$S \rightarrow aSbb$$

$$S \rightarrow aaSbbbb$$

$$S \rightarrow aabbbbb$$

Avendo quindi la grammatica:

$$G = (X, V, S, P):$$

$$X = \{a, b\}$$

$$V = \{S\}$$

$$S$$

$$P = \{S \rightarrow b \mid aSbb\}$$

Sia dato il linguaggio  $L = \{a^n b^{n+m} c^m | n, m > 0\}$ .

Determinare una grammatica generativa per L.

Alcune parole

$$L = \{ab^2c, ab^3c^2, a^2b^3c, a^2b^4c^2\}$$

Per facilitare la comprensione possiamo riscrivere il linguaggio:

$$L = \{a^n b^n b^m c^m | n, m > 0\}$$

Notiamo che vi è un legame tra a e b, ma anche tra b e c. Le coppie hanno infatti tra loro lo stesso esponente. Inoltre, siccome le due coppie hanno esponente diverso, possiamo generarle indipendentemente tra loro.

Possiamo pensare dunque ad una produzione:

$$S \rightarrow aAbbBc$$

$$A \rightarrow \lambda \mid aAb$$

$$B \rightarrow \lambda \mid bBc$$

Con la conseguente grammatica.

Un'altra possibile produzione sarebbe:

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow ab \mid aAb$$

$$B \rightarrow bc \mid bBC$$

Avendo quindi la grammatica:

$$G = (X, V, S, P):$$

$$X = \{a, b, c\}$$

$$V = \{S, A, B\}$$

$$S$$

$$P = \{S \rightarrow AB, A \rightarrow ab \mid aAb, B \rightarrow bc \mid bBC\}$$

Sia dato il linguaggio  $L = \{a^n b^{2k+1} \mid n, k \geq 0\}$ .

Determinare una grammatica generativa per L.

...

Possibile produzione:

$$S \rightarrow ABb$$

$$A \rightarrow aA \mid \lambda$$

$$B \rightarrow bbB \mid \lambda$$

...

Sia dato il linguaggio  $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ .

Determinare una grammatica generativa per L.

...

Possibile produzione

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaasBCBCBC \Rightarrow aaaaSBCBCBCBC \Rightarrow aaaaaBCBCBCBCBC \\ &\Rightarrow aaaaaBBCCBCBCBC \Rightarrow aaaaaaBBCBCCBCBC \Rightarrow aaaaaaBBBCCCBCBC \Rightarrow \\ &aaaaaaBBBCCBCCBC \Rightarrow aaaaaaBBBCBCCBC \Rightarrow aaaaaaBBBBCCCCBC \Rightarrow \\ &aaaaaaBBBBCCCBCC \Rightarrow aaaaaaBBBBBCCBCCC \Rightarrow aaaaaaBBBBBCBCCCC \Rightarrow \\ &aaaaaaBBBBBBCCCCC \Rightarrow aaaaaabBBBBCCCCC \Rightarrow aaaaaabbBBBBCCCCC \Rightarrow \\ &aaaaabbbbBBCCCCC \Rightarrow aaaaaabbbbBCCCCC \Rightarrow aaaaaabbbbbCCCCC \end{aligned}$$

Regole di produzione:

$$S \rightarrow aSBC \mid aBC$$

$$CB \rightarrow BC$$

$$aB \rightarrow ab$$

$$bB \rightarrow bb$$

$$bC \rightarrow bc$$

$$cC \rightarrow cc$$

Sia dato il linguaggio  $L = \{a^n b^m c^n \mid n, m > 0\}$ .

Determinare una grammatica generativa per L.

...

$S \rightarrow aSc \mid aBc$

$B \rightarrow bB \mid b$

1) Sia dato il seguente linguaggio  $L$  sull'alfabeto  $X = \{0, 1\}$

$$L = \{w \in X^* \mid w = 0^n 10^m, m > n > 0\}$$

Determinare una grammatica  $G$  libera da contesto che generi  $L(G)$ .

(PUNTI 10)

$G = (X, V, S, P)$ :

$X = \{0, 1\}$

$V = \{S, A, B\}$

$S$

$P = \{S \rightarrow A1B$

$A \rightarrow 0A \mid 0$

$B \rightarrow 0B \mid 0BB \mid 0$

$\}$

## Esercizi sul Pumping Lemma

### Caso di studio n.1

Sia dato il linguaggio  $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ .

Dimostrare che  $L$  non è C.F.

Supponiamo per assurdo che il linguaggio  $L$  sia libero allora:

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall z \in L, |z| > p$$

Studiamo una stringa  $z \in L$  t.c.  $|z| > p$

$$z = a^p b^p c^p \implies |z| = 3p > p$$

$$\underbrace{a \dots a}_p \underbrace{b \dots b}_p \underbrace{c \dots c}_p$$

$z = uvwxy$  t.c

$$1. |vwx| \leq p$$

$$2. (vx \neq \lambda)$$

$$3. \forall i, i \geq 0 : uv^i wx^i y \in L$$

Casi:

4.  $vwx$  formato solo da  $a$
5.  $vwx$  formato solo da  $b$
6.  $vwx$  formato solo da  $c$
7.  $vwx$  formato a cavallo tra  $a$  e  $b$
8.  $vwx$  formato a cavallo tra  $b$  e  $c$

Caso 1:

Prendiamo una stringa a caso (quella più semplice)

$$uv^2wx^2y$$

Prendendo la stringa pompata, possiamo aggiungere solo delle  $a$ .

Ora, il numero di  $a$  aumenta:  $p + 1 \leq \#(a) \leq p + p$ . Tuttavia il numero di  $c$  e  $b$  rimane invariato, il che non rispecchia le regole del linguaggio. Quindi

$$uv^2wx^2y \notin L \text{ poich\`e } \#(a) \neq \#(b) \neq \#(c)$$

Caso 2 e 3:

Stessa cosa del caso 1, ripetuto però con le  $b$  e con le  $c$ .

Caso 4:

il punto  $vwx$  è a cavallo tra  $a$  e  $b$ .

Caso 4.1:  $v \neq \lambda$   $x = \lambda$

$v \neq \lambda \implies v$  contiene solo delle  $a$ , il che vuol dire che  $wx = ab \dots b$ . Pompando andremmo ad aumentare solo il numero delle  $a$  (non delle  $b$  poichè dovrebbero essere contenute nelle  $x$ , il quale è però vuoto). Anche in questo caso quindi avremmo un numero di  $a$  pari a:

$$p + 1 \leq \#(a) \leq p + p - 1 \text{ (p-1 poich\`e almeno una } a \text{ \u00e8 contenuta nelle } w\text{)}. \text{ Quindi}$$

$$uv^2wx^2y \notin L \text{ poich\`e } \#(a) \neq \#(b) \neq \#(c)$$

Caso 4.2:  $v = \lambda$   $x \neq \lambda$

$x \neq \lambda \implies x$  contiene solo delle  $b$ . In questo caso quindi avremmo un numero di  $b$  pari a:

$$p + 1 \leq \#(b) \leq p + p - 1 \text{ (p-1 poich\`e almeno una } b \text{ \u00e8 contenuta nelle } w\text{)}. \text{ Quindi}$$

$$uv^2wx^2y \notin L \text{ poich\`e } \#(a) \neq \#(b) \neq \#(c)$$

Caso 4.3:  $v \neq \lambda$   $x \neq \lambda$

$v \neq \lambda$   $x \neq \lambda \implies v$  contiene solo delle  $a$  e  $x$  contiene solo delle  $b$ . In questo caso quindi avremmo un numero di  $b$  pari al numero  $a$ :  $p + 1 \leq \#(b) = \#(a) \leq p + p - 1$  (p-1 poichè almeno una  $b$  è contenuta nelle  $w$ ). Quindi  $uv^2wx^2y \notin L$  poichè  $\#(a) \wedge \#(b) \neq \#(c)$

Caso 5:

Analogo al caso 4.

## Caso di studio n.2

Questo caso è diverso, lo si va a studiare in un'altra maniera rispetto a quello precedente, ovvero studiando la lunghezza della stringa

Qui il linguaggio è assurdo per una motivazione

Dimostrare che  $L = \{w \in X^* \mid w = a^n b^{2^{n^2}}\}$  è un linguaggio libero da contesto

Supponiamo per assurdo che il linguaggio  $L$  sia libero, allora:

$\exists p \in \mathbb{N}, \forall z \in L, |z| > p, z = uvwxy$  t.c

1.  $|vwx| \leq p$
2.  $vx \neq \lambda$
3.  $\forall i, i \geq 0 : uv^i wx^i y \in L$

Studiamo la parola:  $a^p b^{2^{p^2}}, |z| = p + 2^{p^2} > p$

Andiamo a considerare la stringa pompata e ne studiamo la lunghezza

$$|z| = |uvwxy| < |uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx| = |z| + |vx| \leq |z| + |vwx| \leq p + 2^{p^2} < (p+1) + 2^{(p+1)^2}$$

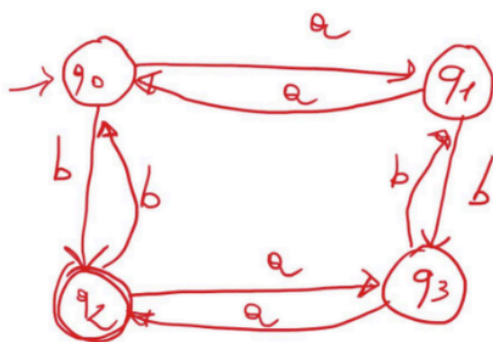
Dunque si ha che  $p + 2^{p^2} < |uv^2wx^2y| \leq (p+1) + 2^{(p+1)^2}$

Si conclude che il linguaggio è assurdo

## Esercizi su automi stati finiti

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ha num pari } a \text{ e } \text{num dispari } b\}$$

$$L = \{b, a^2b, a^4b, a^6b, \dots, b^3, a^2b^3, a^4b^3, \dots\}$$



$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

$$\begin{cases} q_0 \text{ riconosce } a \text{ e } w \\ \text{con } P(a)P(b) \\ q_1 D(a)P(b) \\ q_2 P(a)D(b) \\ q_3 D(a)D(b) \end{cases}$$

$$M = (Q, \delta, q_0, F)$$

$$\delta: Q \times X \rightarrow Q \quad F = \{q_2\}$$

$$\delta(q_0, a) = q_1$$

$$\delta(q_0, b) = q_2$$