

9 - Esercizi

Esercizi sulla generazione

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^{2n+1} | n \geq 0\}$.

Determinare una grammatica generativa per L.

Alcune parole:

$$L = \{b, ab^3, a^2b^5, a^3b^7, \dots\}$$

Parola più piccola possibile:

$$S \rightarrow b$$

Un esempio di produzione potrebbe essere:

- $S \rightarrow b \mid aSbb$

Esempio:

$$S \Rightarrow aabbbbbb$$

$$S \rightarrow aSbb$$

$$S \rightarrow aaSbbbb$$

$$S \rightarrow aabbbbbb$$

Avendo quindi la grammatica:

$$G = (X, V, S, P):$$

$$X = \{a, b\}$$

$$V = \{S\}$$

$$S$$

$$P = \{S \rightarrow b \mid aSbb\}$$

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^{n+m} c^m | n, m > 0\}$.

Determinare una grammatica generativa per L.

Alcune parole

$$L = \{ab^2c, ab^3c^2, a^2b^3c, a^2b^4c^2\}$$

Per facilitare la comprensione possiamo riscrivere il linguaggio:

$$L = \{a^n b^n b^m c^m | n, m > 0\}$$

Notiamo che vi è un legame tra a e b, ma anche tra b e c. Le coppie hanno infatti tra loro lo stesso esponente. Inoltre, siccome le due coppie hanno esponente diverso, possiamo generarle indipendentemente tra loro.

Possiamo pensare dunque ad una produzione:

$$S \rightarrow aAbbBc$$

$$A \rightarrow \lambda \mid aAb$$

$$B \rightarrow \lambda \mid bBc$$

Con la conseguente grammatica.

Un'altra possibile produzione sarebbe:

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow ab \mid aAb$$

$$B \rightarrow bc \mid bBC$$

Avendo quindi la grammatica:

$$G = (X, V, S, P):$$

$$X = \{a, b, c\}$$

$$V = \{S, A, B\}$$

$$S$$

$$P = \{S \rightarrow AB, A \rightarrow ab \mid aAb, B \rightarrow bc \mid bBc\}$$

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^{2k+1} \mid n, k \geq 0\}$.

Determinare una grammatica generativa per L.

...

Possibile produzione:

$$S \rightarrow ABb$$

$$A \rightarrow aA \mid \lambda$$

$$B \rightarrow bbB \mid \lambda$$

...

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$.

Determinare una grammatica generativa per L.

...

Possibile produzione

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaSBCBCBCBC \Rightarrow aaaaaBCBCBCBCBC \\ &\Rightarrow aaaaaBBCCBCBCBC \Rightarrow aaaaaBBCBCCBCBC \Rightarrow aaaaaBBBCCCBCBC \Rightarrow \\ &aaaaaBBBCCBCCBC \Rightarrow aaaaaBBBCBCCBC \Rightarrow aaaaaBBBBCCCCBC \Rightarrow \\ &aaaaaBBBBCCCBCC \Rightarrow aaaaaBBBBCCBCCC \Rightarrow aaaaaBBBBBCBCCCC \Rightarrow \\ &aaaaaBBBBBBCCCC \Rightarrow aaaaabBBBBCCCC \Rightarrow aaaaabbBBBBCCCC \Rightarrow \\ &aaaaabbbbBBCCCC \Rightarrow aaaaabbbbBCCCC \Rightarrow aaaaabbbbbCCCC \end{aligned}$$

Regole di produzione:

$$S \rightarrow aSBC \mid aBC$$

$$CB \rightarrow BC$$

$$aB \rightarrow ab$$

$$bB \rightarrow bb$$

$$bC \rightarrow bc$$

$$cC \rightarrow cc$$

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^m c^n \mid n, m > 0\}$.

Determinare una grammatica generativa per L.

...

$S \rightarrow aSc \mid aBc$

$B \rightarrow bB \mid b$

1) Sia dato il seguente linguaggio L sull'alfabeto $X = \{0, 1\}$

$$L = \{w \in X^* \mid w = 0^n 10^m, m > n > 0\}$$

Determinare una grammatica G libera da contesto che generi $L(G)$.

(PUNTI 10)

$G = (X, V, S, P)$:

$X = \{0, 1\}$

$V = \{S, A, B\}$

S

$P = \{S \rightarrow A1B$

$A \rightarrow 0A \mid 0$

$B \rightarrow 0B \mid 0BB \mid 0$

$\}$

Esercizi sul Pumping Lemma

Caso di studio n.1

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$.

Dimostrare che L non è C.F.

Supponiamo per assurdo che il linguaggio L sia libero allora:

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall z \in L, |z| > p$$

Studiamo una stringa $z \in L$ t.c. $|z| > p$

$$z = a^p b^p c^p \implies |z| = 3p > p$$

$$\underbrace{a \dots a}_p \underbrace{b \dots b}_p \underbrace{c \dots c}_p$$

$z = uvwxy$ t.c

$$1. |vwx| \leq p$$

$$2. (vx \neq \lambda)$$

$$3. \forall i, i \geq 0 : uv^i wx^i y \in L$$

Casi:

4. $vw x$ formato solo da a
5. $vw x$ formato solo da b
6. $vw x$ formato solo da c
7. $vw x$ formato a cavallo tra a e b
8. $vw x$ formato a cavallo tra b e c

Caso 1:

Prendiamo una stringa a caso (quella più semplice)

$$uv^2wx^2y$$

Prendendo la stringa pompata, possiamo aggiungere solo delle a .

Ora, il numero di a aumenta: $p + 1 \leq \#(a) \leq p + p$. Tuttavia il numero di c e b rimane invariato, il che non rispecchia le regole del linguaggio. Quindi

$$uv^2wx^2y \notin L \text{ poich\`e } \#(a) \neq \#(b) \neq \#(c)$$

Caso 2 e 3:

Stessa cosa del caso 1, ripetuto però con le b e con le c .

Caso 4:

il punto $vw x$ è a cavallo tra a e b .

Caso 4.1: $v \neq \lambda \ x = \lambda$

$v \neq \lambda \implies v$ contiene solo delle a , il che vuol dire che $w x = ab \dots b$. Pompando andremmo ad aumentare solo il numero delle a (non delle b poichè dovrebbero essere contenute nelle x , il quale è però vuoto). Anche in questo caso quindi avremmo un numero di a pari a:

$$p + 1 \leq \#(a) \leq p + p - 1 \text{ (p-1 poich\`e almeno una } a \text{ \u00e8 contenuta nelle } w \text{). Quindi}$$

$$uv^2wx^2y \notin L \text{ poich\`e } \#(a) \neq \#(b) \neq \#(c)$$

Caso 4.2: $v = \lambda \ x \neq \lambda$

$x \neq \lambda \implies x$ contiene solo delle b . In questo caso quindi avremmo un numero di b pari a:

$$p + 1 \leq \#(b) \leq p + p - 1 \text{ (p-1 poich\`e almeno una } b \text{ \u00e8 contenuta nelle } w \text{). Quindi}$$

$$uv^2wx^2y \notin L \text{ poich\`e } \#(a) \neq \#(b) \neq \#(c)$$

Caso 4.3: $v \neq \lambda \ x \neq \lambda$

$v \neq \lambda \quad x \neq \lambda \implies v$ contiene solo delle a e x contiene solo delle b . In questo caso quindi avremmo un numero di b pari al numero a : $p + 1 \leq \#(b) = \#(a) \leq p + p - 1$ (p-1 poichè almeno una b è contenuta nelle w). Quindi $uv^2wx^2y \notin L$ poichè $\#(a) \wedge \#(b) \neq \#(c)$

Caso 5:

Analogo al caso 4.

Caso di studio n.2

Questo caso è diverso, lo si va a studiare in un'altra maniera rispetto a quello precedente, ovvero studiando la lunghezza della stringa

Qui il linguaggio è assurdo per una motivazione

Dimostrare che $L = \{w \in X^* \mid w = a^n b^{2^{n^2}}\}$ è un linguaggio libero da contesto

Supponiamo per assurdo che il linguaggio L sia libero, allora:

$\exists p \in \mathbb{N}, \forall z \in L, |z| > p, z = uvwxy$ t.c

1. $|vwx| \leq p$
2. $vx \neq \lambda$
3. $\forall i, i \geq 0 : uv^iwx^iy \in L$

Studiamo la parola: $a^p b^{2^{p^2}}, |z| = p + 2^{p^2} > p$

Andiamo a considerare la stringa pompata e ne studiamo la lunghezza

$$|z| = |uvwxy| < |uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx| = |z| + |vx| \leq |z| + |vwx| \leq p + 2^{p^2} < (p+1) + 2^{(p+1)^2}$$

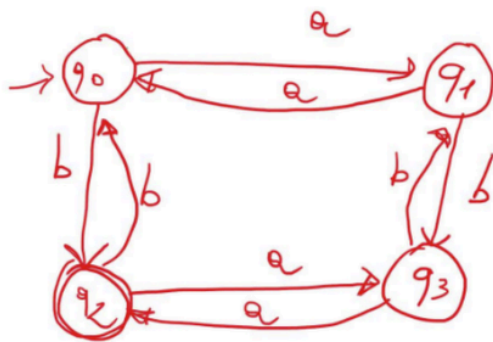
Dunque si ha che $p + 2^{p^2} < |uv^2wx^2y| \leq (p+1) + 2^{(p+1)^2}$

Si conclude che il linguaggio è assurdo

Esercizi su automi stati finiti

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ ha num pari } a \text{ e } \text{num dispari } b\}$$

$$L = \{b, a^2b, a^4b, a^6b, \dots, b^3, a^2b^3, a^4b^3, \dots\}$$



$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

$$\begin{cases} q_0 \text{ riconosce } a \text{ e } w \\ \text{con } P(a)P(b) \\ q_1 D(a)P(b) \\ q_2 P(a)D(b) \\ q_3 D(a)D(b) \end{cases}$$

$$M = (Q, \delta, q_0, F)$$

$$\delta: Q \times X \rightarrow Q \quad F = \{q_2\}$$

$$\delta(q_0, a) = q_1$$

$$\delta(q_0, b) = q_2$$