MAT. DISCRETA 2

INSIEMI

Un insieme è una semplice collezione di oggetti.
Pe esempio, sono i seguenti insiemi:

- L'insieme di tutti gli abitanti di Parigi
- L'insieme di tutti i bambini nati nel 2001
- L'insieme dei numeri naturali.
- L'insieme di tutte le rette su un piano.

Si è soliti indicare un insieme con la lettere maiuscola. Gli oggetti composti da un insieme A prendono il nome di *elementi* di A, e si indicano con la lettera minuscola.

Per indicare che un elemento appartiene ad un insieme utilizziamo il simbolo $\in$ per esempio: $a \in A$ e quando non appartiene $a \notin A$.
L'insieme vuoto si indica con il simbolo: $\emptyset$, cioè l'insieme che non ha nessun elemento.

Un insieme A si può definire o elencare tra parentesi graffe i suoi elementi, oppure sempre tra parentesi graffe, specificando una sua proprietà caratteristica.
Per esempio:
$A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$
oppure:
$A = \{n \in \mathbb{N} | 5 < n < 20\}$
dove il simbolo **|** si legge *tale che*.
L'ordine in cui gli elementi sono posizionati non è importante.

SOTTOINSIEME

Un sottoinsieme di A è un sottoinsieme di B tale ce ogni elemento b di B è anche elemento di A.
Si scrive: $A \subseteq B$

Per indicare la inclusione propria, ossia che esiste un elemento di A che non appartiene a B.
Si scrive: $A \subset B$.

Per indicare che un insieme B non è un sottoinsieme di A.
Si scrive: $B \nsubseteq A$

L'insieme vuoto è un sottoinsieme di ogni insieme.

INTERSEZIONE

Dati due insiemi A e B, si definisce loro *intersezione*, e si indica con $A \cap B$, l'insieme di tutti gli elementi che appartengono sia ad A sia a B.
In simboli:
$A \cap B = \{ x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$

UNIONE DI DUE INSIEMI

L'*unione* di due insiemi A e B, che si indica con $A \cup B$, è l'insieme degli elementi che appartengono ad A o a B.
In simboli:
$A \cup B = \{ x \mid x \in A \ \vee \ x \in B \}$

Esempio:
Siano:
A={1,2,3,5,8,9,10} B={2,4,6,8}
Allora:
$A \cap B = 2, 8$
$A \cup B = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

L'unione è costituita dagli elementi che appartengono ad *almeno* uno dei due insiemi A e B. Nel nostro esempio 1,3,5,9,10 appartengono solamente ad A, 4 e 6 appartengono *solamente* a B, mentre 2 e 8 appartengono sia ad A sia a B.

INTERSEZIONE E UNIONE DI UNA FAMIGLiA DI INSIEMI

Le definizioni di unione e di intersezione di due insiemi si possono generalizzare al caso si una famiglia non vuota, anche infinita $A_a | a \in I$, di insiemi:

$\bigcap_{a \in I} A_a \ =_{\text{def}} \ \{ x \in A_a \mid \forall a \in I \}$

$\bigcup_{a \in I} A_a \ =_{\text{def}} \ \{ x \in A_a \mid \exists a \in I \}$

IL COMPLEMENTO DI UN INSIEME

Sia ora *U* un *fissato universo*, ossia un insieme che contiene tutti gli oggetti che ci possono interessare.

def: Si definisce *complemento* o *complementare* di un insieme A l'insieme di tutti gli elementi di U che appartengono ad A.
Esso si indica con $\complement A$

Quindi:
$\complement A \ =_{\text{def}} \ \{ x \in U \mid x \notin A \}$

def: Il *complemento relativo* di un insieme A in un insieme B è costituito da tutti gli elementi di B che non stanno in A.
Si indica con $B \setminus A$ e prende anche il nome di *insieme differenza* di B ed A:

$B \setminus A \ =_{\text{def}} \ \{x \in B \mid x \notin A\}$

Le definizioni vengono illustrate con il *diagramma di Venn*

“Pasted image 20250908130455.png” could not be found.

IL PRODOTTO CARTESIANO DI INSIEMI

def: SI definisce *prodotto cartesiano* di due insiemi A e B, e si indica con $A \times B$, l'insieme costituito da tutte le *coppie ordinate* (a, b), dove il primo elemento varia in A e il secondo elemento in B

Per esempio, se A={3,4} e B={1,5}, allora

$A \times B = \{ \ (3,1),(3,5),(4,1),(4,5)\}$

Gli elementi del prodotto cartesiano di due insiemi A e B non sono quindi elementi di A o di B, ma solo elementi di altra natura: sono *coppie* di elementi di A e B.
È possibile definire il prodotto cartesiano di più insiemi.

def:
Si definisce *prodotto cartesiano* di *n* insiemi $A_1, A_2, \dots, A_n$, e si indica con $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, l'insieme costituito da tutte n-ple *ordinate* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dove il primo elemento varia in A_1, se il secondo varia in A_1, il secondo varia in A_2, l'*n*-esimo varia in A_n:

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n =_{\text{def}} \{ \ a_1, a_2, \dots, a_n | a_i \in A, i = 1, 2, \dots, n\}$

L'INSIME DELLE PARTI DI UN INSIME

def: Dato un insieme A, l'*insieme delle parti* (o sottoinsiemi) di , che si indica con P(A), è dato da:

$P(A) =_{\text{def}} \{ \ B | B \subseteq A\}$

Possiamo notare che gli elementi di P(A) sono sottoinsiemi di A.
Ricordo quanto detto a proposito della differenza tra *essere elemento di* e *essere contenuto in*, se A={a,b}, allora $a \in A$, ma $a \notin P(A)$.
Invece, $\{a\} \in P(A)$,e $\{a\} \subseteq P(A)$.
Per esempio, se A={a,b}, sarà:
$P(A) = \{ \ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

RELAZIONI

Immagina di avere due insiemi, A e B.
Se vogliamo collegare un elemento a che sta in A con un elemento b che sta in B, la cosa più naturale è pensare alla **coppia ordinata** (a, b), dove il primo posto è riservato a a e il secondo a b.

Tutte le coppie possibili (a, b) formano quello che chiamiamo **prodotto cartesiano** A $\times$ B.

Quindi, quando parliamo di una **relazione**, in realtà stiamo scegliendo alcune di queste coppie dal prodotto cartesiano: è proprio da lì che nasce il concetto di relazione.

def: Una **relazione** da un insieme A a un insieme B è un **sottoinsieme** del prodotto cartesiano. A $\times$ B.

- Se A = B, si parla di **relazione su** A.
- L'insieme A si chiama **dominio** della relazione.
- L'insieme B si chiama **codominio** della relazione.

Una relazione collega un elemento $a \in A$ con un elemento $b \in B$. Per indicarlo si usa la freccia:
$a \;\longrightarrow\; b$
che significa che (a, b) fa parte della relazione.

Esempio:
Prendiamo:
$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{x, y\}.$

Il prodotto cartesiano è:
$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}.$

Ora definiamo una relazione R scegliendo solo alcune coppie, ad esempio:
$R = \{(1, x), (2, y), (3, x)\}.$

Questo significa:

- $1 \to x$
- $2 \to y$
- $3 \to x$