MAT. DISCRETA 3

FUNZIONI

Prima di parlare di esercizi su funzioni bisogna chiarire alcuni argomenti importanti:

Che cos'è una funzione?

Una **funzione** $f : A \to B$ è una relazione che associa **a ogni elemento** x dell'insieme di partenza A (dominio) **uno ed un solo elemento** y dell'insieme di arrivo B (codominio).

Si scrive:
$y = f(x)$.

- A = **dominio**: insieme dei valori ammessi in input.
- B = **codominio**: insieme "previsto" dei valori di output.
- **Range** o immagine = sottoinsieme di B che contiene i valori che effettivamente escono dalla funzione.
  Esempio: $f(x) = x^2$ con dominio $\mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}$.

Che cos'è il dominio di una funzione?

È **l'insieme di tutti i valori che posso dare in input** a una funzione, senza avere problemi (divisioni per zero, radici quadrate di numeri negativi, ecc.).

Esempio:

- $f(x) = \frac{1}{x}$. Qui **non posso** mettere x=0, perché non si può dividere per zero.
  Quindi il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (tutti i reali tranne 0).
- $g(x) = \sqrt{x}$. Qui non posso mettere valori negativi (altrimenti non ho radici reali).
  Quindi il dominio è $[0, \infty)$.
- $h(x) = 2x + 3$. Qui non c'è nessun problema → il dominio è tutto $\mathbb{R}$.

Che cos'è il codominio ?

È **l'insieme in cui sono previsti i risultati** della funzione.

⚠️ ***Importante***: il codominio non è "deciso" dalla funzione, ma da **come definisco** la funzione.

Di solito nei problemi è scritto: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vuol dire che:

- dominio = $\mathbb{R}$ (i valori di partenza)

- codominio = $\mathbb{R}$ (i valori “previsti in arrivo”).

Però non è detto che la funzione arrivi davvero a **tutti** i numeri del codominio.
E qui entra in gioco il **range**.

Che cos’è il range (o immagine)?

È **l’insieme di tutti i valori effettivamente ottenuti dalla funzione**, cioè i risultati reali che la funzione produce quando varia il dominio.

Esempi:

- Funzione $f(x) = x^2$, con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
  - dominio = $\mathbb{R}$ (posso dare qualsiasi numero reale in input).
  - codominio = $\mathbb{R}$ (per definizione).
  - range = $[0, \infty)$, perché i quadrati non possono essere negativi.
    ⚠️ ***Vedi la differenza***: il codominio era $\mathbb{R}$, ma il range effettivo è solo la parte positiva.
- Funzione $g(x) = |x| + 1$, con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
  - dominio = $\mathbb{R}$ (posso mettere qualunque numero).
  - codominio = $\mathbb{R}$.
  - range = $[1, \infty)$, perché $|x| \geq 0$, quindi $|x| + 1 \geq 1$.
    In pratica, i valori minori di 1 non possono uscire.

Come li trovo?

1. **Dominio**: guarda la formula della funzione e chiediti: ci sono restrizioni?
   - Divisione per 0
   - Radici quadrate di negativi
   - Logaritmi di numeri ≤0
     Se non c’è nulla di problematico, il dominio è tutto $\mathbb{R}$.
2. **Codominio**: di solito è scritto nel testo (es. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). È un “contenitore” scelto dal prof. Se non è specificato, si prende di solito $\mathbb{R}$.
3. **Range**: guarda cosa esce davvero:
   - Analizza la funzione (es. quadrati ≥0, valori assoluti ≥0, ecc.).
   - Oppure calcola il minimo e massimo (se esistono).

Perché sono importanti?

- Per sapere se la funzione è **suriettiva**: serve che range = codominio.
- Per sapere se è **invertibile**: serve anche iniettività, ma range e codominio giocano un ruolo chiave.

Funzione iniettiva

Una funzione è iniettiva se **due input diversi danno sempre output diversi**.
Formalmente: se $f(x_1) = f(x_2)$ allora $x_1 = x_2$.
Immagine mentale: “Non schiaccia mai due frecce in un unico punto”.

Esempi:

- $f(x) = 2x + 1$ (una retta inclinata): ogni valore di x produce un valore unico, mai ripetuto.
- $f(x) = x^3$: anche qui, ogni input diverso dà output diverso.

Non iniettive:

- $f(x) = x^2$: sia $x = 2$ che $x = -2$ danno lo stesso valore 4.
- $g(x) = |x| : g(3) = g(-3) = 3.$
- *Consiglio pratico:* Portare nella maggior parte delle volte la x a 1 o -1 dovrebbe verificare la sua iniettività.

Funzione suriettiiva

Una funzione è suriettiva se **copre tutto il codominio**: per ogni valore y nel codominio, esiste almeno un x nel dominio che ci arriva.
Immagine mentale: “Nessun buco rimane vuoto nel codominio”.

Esempi:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 1$. È suriettiva perché qualsiasi $y \in \mathbb{R}$ si ottiene risolvendo $y = 2x + 1$.
- $f : \mathbb{R} \to 0, \infty),\ f(x) = x^2$. È suriettiva su $[0, \infty)$ perché ogni numero positivo è il quadrato di qualcosa.

Non suriettive:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. Qui il codominio è $\mathbb{R}$, ma la funzione produce solo numeri ≥0. Quindi i negativi non sono coperti → non è suriettiva.

Funzione biettiva

Una funzione è biettiva se è **sia iniettiva che suriettiva**.
Quindi:

- Non schiaccia due input nello stesso output (iniettiva).
- Copre tutto il codominio (suriettiva).
  Immagine mentale: “È una corrispondenza perfetta, tipo coppie uno-a-uno”.

Esempi:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 1.$
  Iniettiva (retta inclinata, mai valori ripetuti) + suriettiva (copre tutto $\mathbb{R}$) = biettiva.
  Non biettive:
- $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Non iniettiva e non suriettiva → quindi non biettiva.

Funzione invertibile

Una funzione è invertibile se esiste un'altra funzione f^{-1} che "annulla" f, cioè:
f$^{-1}(f(x)) = x \quad \text{e} \quad f(f^{-1}(y)) = y$
Una funzione è **invertibile se e solo se è biettiva**.

Esempi:

- $f(x) = 2x + 1$. Inversa: $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$.
- $f(x) = x^3$. Inversa: $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

Non invertibili:

- $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Non è iniettiva (sia 2 che -2 vanno su 4) → non invertibile.
- Però se restringo il dominio a $[0, \infty)$, diventa invertibile con inversa $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

ESERCIZIO D'ESEMPIO da traccia d'esame

Soluzione passo-passo e spiegazioni (Esercizio 3)

Riprendo l'enunciato:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2 - \dfrac{x}{5}.$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = |x| + 1.$

Richiesto: calcolare $f \circ g$ e $g \circ f$; determinare se f e g sono invertibili e, se sì, trovare le inverse.
Ti mostro ogni passaggio e ti spiego **perché** faccio quella scelta.

1) Dominio / codominio / range (per orientarsi)

- **Dominio**: l'enunciato dice $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ → dominio e codominio dichiarati sono $\mathbb{R}$ per entrambe.
  (Se la funzione avesse avuto una radice o una divisione per espressione che può essere 0, il dominio sarebbe stato diverso.)
- **Range** (immagine effettiva):
  - Per f: essendo una retta inclinata (affine) con coefficiente$-\frac{1}{5}$ non nullo, f assume **tutti** i reali → range di $f = \mathbb{R}$.

- Per g : $g(x) = |x| + 1$. Poiché $|x| \geq 0$ per ogni x, $g(x) \geq 1$. Quindi range di $g = [1, \infty)$.

Queste informazioni servono spesso per decidere se una funzione è suriettiva o se una composizione è ben definita.

2) Calcolo di $f \circ g$ (cioè $f(g(x))$) — passo per passo

Definizione: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

1. Calcoliamo $g(x) : g(x) = |x| + 1$.
2. Mettiamo g(x) dentro f:
   $f(g(x)) = 2 - \frac{g(x)}{5} = 2 - \frac{|x|+1}{5}$.
3. Svolgiamo l'algebra:
   $2 = \dfrac{10}{5}$, quindi
   $f(g(x)) = \frac{10}{5} - \frac{|x|+1}{5} = \frac{10-(|x|+1)}{5} = \frac{9-|x|}{5}$.

Risultato:

$$\boxed{(f \circ g)(x) = \frac{9 - |x|}{5}.}$$

Osservazioni utili:

- Dominio: tutto $\mathbb{R}$ (nessuna restrizione).
- Range: massimo quando $|x| = 0$ → valore $= 9/5$. Per $|x| \to \infty$ la funzione $\to -\infty$. Quindi range $= (-\infty,\ 9/5]$.
- **Iniettività**: non è iniettiva perché dipende da |x|. Per esempio x=2 e x=-2 danno lo stesso valore:
  $(f \circ g)(2) = \frac{9-2}{5} = \frac{7}{5} = (f \circ g)(-2)$.

Quindi $f \circ g$ non è iniettiva e (dato che il range è solo $(-\infty, 9/5]$) neanche suriettiva su $\mathbb{R}$.

3) Calcolo di $g \circ f$ (cioè $g(f(x))$) — passo per passo

Definizione: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

1. Calcoliamo $f(x) = 2 - \dfrac{x}{5}$.
2. Mettiamo dentro g:
   $g(f(x)) = \left| f(x) \right| + 1 = \left|2 - \frac{x}{5}\right| + 1$.

Risultato:

$$\boxed{(g \circ f)(x) = \left|2 - \frac{x}{5}\right| + 1.}$$

Osservazioni:

- Dominio: tutto $\mathbb{R}$.
- Range: se poniamo $u = 2 - \dfrac{x}{5}$, allora u varia su tutto $\mathbb{R}$ (perché f è suriettiva), quindi $|u| + 1$ varia su $[1, \infty)$. Quindi range di $g \circ f$ è $[1, \infty)$.
- **Iniettività**: non è iniettiva.
  Quindi $g \circ f$ non è iniettiva; inoltre il suo range $[1, \infty)$ non è tutto $\mathbb{R}$, quindi non è suriettiva su $\mathbb{R}$.

4) Verifica invertibilità di f

Strategia: verificare iniettività e suriettività (bijettività).

- $f(x) = 2 - \dfrac{x}{5}$ è una funzione affine con coefficiente angolare $-\frac{1}{5} \neq 0$. Le funzioni affini con coefficiente diverso da zero sono **monotone** (qui monotona decrescente), quindi **iniettive**.
- Per la suriettività: dato un $y \in \mathbb{R}$, risolvo $y = 2 - \dfrac{x}{5}$ per x:
  $x = 5(2 - y) = 10 - 5y$,
  che è sempre un reale: quindi per ogni y esiste x tale che f(x)=y. Quindi f è suriettiva.

Conclusione: f è **bijettiva** su $\mathbb{R}$ e quindi **invertibile**.

Trovo f^{-1}: risolvo $y = 2 - \dfrac{x}{5}$ per x e poi scambio ruolo delle variabili:
$x = 10 - 5y \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(y) = 10 - 5y.$

Usando x come argomento dell'inversa:
$\boxed{f^{-1}(x) = 10 - 5x.}$

5) Verifica invertibilità di g

- $g(x) = |x| + 1$. Per **iniettività** osserva subito che $g(x) = g(-x)$ per ogni x. Quindi esistono sempre coppie diverse $(x, -x)$ con la stessa immagine (a meno di $x = 0$). Quindi **non iniettiva** su $\mathbb{R}$.
- Per **suriettività** su $\mathbb{R}$: poiché $g(x) \geq 1$, non si ottengono valori <1. Quindi **non suriettiva** su $\mathbb{R}$.

Conclusione: g **non è invertibile** come funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Schema operativo — Verifica di Iniettività, Suriettività, Biiettività (e calcolo dell'inversa)

Scopo: fornire uno schema chiaro e riutilizzabile per affrontare esercizi su iniettività, suriettività, biiettività e calcolo delle inverse, con tutti i controlli necessari e i metodi più usati.

Regole preliminari (prima di iniziare)

1. **Scrivi esplicitamente dominio e codominio** richiesti dall'esercizio. Non darli per scontati.
2. **Semplifica** l'espressione della funzione (espandi, riscrivi valore assoluto, pezzi, etc.).
3. Se la funzione è *a tratti*, tratta ogni intervallo separatamente.
4. Se compaiono simboli particolari (valore assoluto, radici, log, trig), annota le proprietà utili.

Procedura passo-passo

Segui i punti nell'ordine indicato — ogni punto contiene i metodi principali da usare.

1 Verifica di iniettività

Obiettivo: dimostrare $f(x1) = f(x2) \Rightarrow x1 = x2$ oppure fornire un controesempio.

Metodi utili:

- **Metodo algebrico (diretto):** scrivi $f(x1) = f(x2)$ e riduci fino a ottenere x1=x2.
- **Derivata (per funzioni reali, differenziabili):** se $f\prime(x) > 0$ per tutti $x \in D$ (o sempre <0) allora f è monotona e quindi iniettiva. ATTENZIONE: $f\prime(x) \geq 0$ non basta; devono esserci segni stretti o monotonia provata per altri metodi.
- **Controesempio (per mostrare non iniettività):** trova $x1 \neq x2$ con $f(x1) = f(x2)$ (es.: funzioni pari, valore assoluto, quadratica tipicamente falliscono).

Scrittura della risposta:

- Se dimostri iniettività: mostra i passaggi algebrici o argomento con derivata; concludi chiaramente.
- Se non è iniettiva: fornisci un controesempio numerico e spiega perché è sufficiente.

2 Verifica di suriettività

Obiettivo: dimostrare che per ogni $y \in C$ esiste x∈D con $f(x) = y$.

Metodi utili:

- **Risolvi** $y = f(x)$ **per x** in funzione di y. Se riesci a esprimere $x = \phi(y)$ e $\phi(y) \in D$ per ogni $y \in C$, allora f è suriettiva.
- **Studio dell'immagine (range):** determina l'insieme delle immagini tramite:
  - analisi dei limiti per $x \to \pm\infty$,
  - comportamento ai punti singolari (es. discontinuità, punti a pezzi).

- **Controesempio (per mostrare non suriettività):** trova $y0 \in C$ tale che l'equazione $f(x) = y0$ non abbia soluzioni in D.

Scrittura della risposta:

- Se è suriettiva: mostra la soluzione $x = \phi(y)$ con la verifica che $\phi(y) \in D$ per ogni $y \in C$.
- Se non è suriettiva: fornisci $y0 \in C$ (spesso un valore limite) e mostra che non esiste x con $f(x) = y0$.

3 Conclusione su biiettività

- Se **iniettiva** E **suriettiva** su $D \to C$ allora **biiettiva**.
- Se biiettiva ⇒ **esiste** f$-1 : C \to D$.

4. Calcolo dell'inversa (se biiettiva)

1. Scrivi $y = f(x)$.
2. Scambia i ruoli: considera $x = f(y)$.
3. Risolvi per y in funzione di x: y=F(x). Allora $f - 1(x) = F(x)$.
4. **Specifica dominio e codominio** dell'inversa: il dominio di $f - 1$ è la **immagine** di f, il codominio è il dominio di f.
5. Verifica (controllo rapido): $f - 1(f(x)) = x$ per ogni $x \in D$ e $f(f - 1(y)) = y$ per ogni y nell'immagine.

5. Composizioni e proprietà d'invertibilità

- Se f e g sono invertibili allora $f \circ g$ è invertibile e $(f \circ g) - 1 = g - 1 \circ f - 1$.
- Se $f \circ g$ è invertibile allora **g** deve essere iniettiva e **f** deve essere suriettiva (ma questo non garantisce che f e g siano entrambe invertibili separatamente).

6. Come rendere una funzione invertibile (restringendo il dominio)

- Se f non è iniettiva per simmetria (es. x2, (|x|)), scegli un ramo monotono (es. per x2 prendi x≥0).
- Se f non è suriettiva sul codominio scelto, o cambia il codominio all'immagine naturale di f.
- Documenta sempre la restrizione: scrivi la nuova funzione e i nuovi insiemi dominio/codominio.