MAT. DISCRETA 1

Simboli e significato

DEFINIZIONI

PROPOSIZIONE

Una proposizione è una affermazione che è o vera o falsa, ma non può essere contemporaneamente vera e falsa.

Per esempio:

- Londra si trova in Europa.
- Madrid è la capitale d'italia.
- 3+3=8
- 8-4=4

Le affermazioni che non sono proposizioni sono:

- Che ore sono?
- Mostrami quello che hai scritto.
- Che bella musica.
- x + 6 = 1 (non è nè vera nè falsa, perchè non sappiamo il valore di x).
- Tutti i giorni in estate piove almeno due ore. (Non possiamo dire se questa affermazioni sia vera o falsa. Perchè è possibile che in certe parti della terra in estate piove almeno 2 ore)
  - per esempio se trasformassimo la frase in: *in qualche parte della terra piove alemeno 2 ore* la proposizione risulta vera.
  - oppure: *a Roma tutti i giorni in estate piove almeno due ore*, allora diventerebbe una proposizione falsa.

Le proposizioni si indicano generalmente con le lettere dell'alfabeto: p, q, r, s, t, ecc.

Negazione di una proposizione

Se abbiamo una proposizione p, possiamo costruire una nuova proposizione chiamata **negazione di** p e si indica con:
$\neg p$

- Si legge: **“non** p”
- Significa: **non è vero che** p.

Sia p la proposizione:
Ieri abbiamo battuto gli avversari.
La sua negazione è la proposizione:
$\neg p$: Non è vero che ieri abbiamo battuto gli avversari.
Cioè la proposizione:
Ieri non abbiamo battuto gli avversari.

Quantificatore esistenziale

- **Forma:** $\exists x\ P(x)$
- **Significato:** Esiste almeno un valore di x per cui P(x) è vero.
- **Esempio:**
  - $P(x):\ x^2 = 4$
  - $\exists x\ (x^2 = 4)$ significa "esiste almeno un numero il cui quadrato è 4".
  - È **vero**, perché x = 2 e x = -2 soddisfano la proprietà.

Quantificatore universale

- **Forma:** $\forall x\ P(x)$
- **Significato:** Per ogni valore di x, P(x) è vero.
- **Esempio:**
  - $P(x):\ x^2 \geq 0$
  - $\forall x\ (x^2 \geq 0)$ significa "per ogni numero reale, il suo quadrato è maggiore o uguale a zero".
  - È **vero**, perché qualunque numero prendi, il quadrato non è mai negativo.

OPERATORE DI CONGIUNZIONE

Siano p e q due proposizioni.
La proposizione "p e q" si denota con p $\vee$ q ed è vera quando entrambe p e q sono vere, falsa altrimenti, ossia quando una almeno delle due proposizioni è falsa.

È **vera solo se entrambe** le proposizioni sono vere; è **falsa** se almeno una delle due è falsa.
Esempio:

- p: "Oggi piove"
- q: "Porto l'ombrello"
- p $\wedge$ q: "Oggi piove **e** porto l'ombrello".
  - Se piove e porto l'ombrello → **vero**
  - Se piove ma non porto l'ombrello → **falso**
  - Se non piove ma porto l'ombrello → **falso**
  - Se non piove e non porto l'ombrello → **falso**

OPERATORE DI DISGIUNZIONE

Siano p e q due proposizioni.
La proposizione "p o q" si denota con p $\wedge$ q ed è falsa quando entrambe p e q sono false, vera altrimenti, ossia quando almeno una delle due proposizioni è vera.

È **falsa solo se entrambe** le proposizioni sono false; è **vera** se almeno una delle due è vera.
Esempio:

- p: “Oggi piove”
- q: “Porto l’ombrello”
- p $\vee$ q: “Oggi piove **oppure** porto l’ombrello”.
  - Se piove e porto l’ombrello → **vero**
  - Se piove ma non porto l’ombrello → **vero**
  - Se non piove ma porto l’ombrello → **vero**
  - Se non piove e non porto l’ombrello → **falso**

IMPLICAZIONE LOGICA

Siano p e q due proposizioni.
L'implicazione si scrive
p $\Rightarrow$ q
Si legge: **“se** p, allora q”.

- **Ipotesi**: p (la condizione di partenza)
- **Conclusione/Tesi**: q (ciò che deve seguire)

È possibile anche pensarla in altri modi:

- p è condizione sufficiente di q.
- q è condizione necessaria per p.

È **falsa solo** se p è vera **e** q è falsa.
In tutti gli altri casi, è **vera**.
Esempio pratico

- p: “Piove”
- q: “Porto l’ombrello”
  L’implicazione p $\Rightarrow$ q: “Se piove, allora porto l’ombrello”.
- Se piove e porto l’ombrello → **vero**
- Se piove e non porto l’ombrello → **falso** (qui l’implicazione crolla)
- Se non piove e porto l’ombrello → **vero**
- Se non piove e non porto l’ombrello → **vero**

PROPOSIZIONE PRIMITIVA e COMPOSTA

Una proposizione si dice primitiva se non si può spezzare in proposizioni più semplici mediante connettivi logici.
Una proposizione non primitiva si dice composta.

Per esempio la proposizione:
"Giovanni è alto e ha vinto la gara" non è una proposizione primitiva, perchè si può scrivere come congiunzione delle due proposizioni.
p: *Giovanni è alto*
q: Giovanni ha vinto una gara
Ossia:
$p \wedge q$
Invece la proposizione: *"Giovanni ha studiato"* è primitiva.

TAUTOLOGIA E CONTRADDIZIONE

Una proposizione composta che è sempre vera, indipendentemente dal valore di verità delle proposizioni da cui è composta, prende il nome di *tautologia.*
Esempio: La $p \vee \neg p$ è un esempio di tautologia, dato che, qualunque sia p, o p o $\neg p$ è sicuramente vera, quindi $p \vee \neg p$ è sempre vera.

Una proposizione composta che è sempre falsa prende il nome di *contraddizione*.
Esempio: La $p \wedge \neg p$ è un esempio di contraddizione, dato che, qualunque sia p e $\neg p$ non possono essere contemporaneamente vere, quindi la $p \wedge \neg p$ è sempre falsa.

Due proposizioni p e q si dicono *logicamente equivalenti* se p è vera (o falsa) se e solo se q è vera (o falsa).

Ad ogni proposizione possiamo associare un valore di verità rispettivamente attraverso dei simboli: T e F con T vera e F falsa.

TAVOLE DI VERITA'

Possiamo costruire le tavole di verità.
Per esempio sappiamo che la negazione $\neg p$ di una proposizione p, sappiamo che essa è falsa quando p è vera e viceversa.
La sua tavola corrisponde:

p	$\neg p$
T	F
F	T

La tavola di verità che corrisponde alla proposizione di congiunzione e disgiunzione è la seguente:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

Dalle tavole di verità è possibile controllare per esempio due proposizioni logicamente equivalenti.
Per verificare prendiamo due proposizioni:
$\neg(p \wedge q)$ e $\neg p \vee \neg q$
Queste due proposizioni solo logicamente equivalenti.
Possiamo verificare attraverso la tavola di verità:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

Un'altro esempio di proposizione logicamente equivalente è la seguente:
$p \Rightarrow q$ e $(\neg p) \vee q$
La tavola si svolge come si segue:

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$(\neg p) \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Esempio di traccia:
$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

P	**Q**	**P ∧ Q**	**¬(P ∧ Q)**	**¬P**	**¬Q**	**¬P ∨ ¬Q**
V	V	V	F	F	F	F

P	**Q**	**P ∧ Q**	**¬(P ∧ Q)**	**¬P**	**¬Q**	**¬P ∨ ¬Q**
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V