MAT. DISCRETA 8

STRUTTURA ALGEBRICA BINARIE

“Pasted image 20250915200403.png” could not be found.

(Interpretazione: il secondo componente è $\frac{2}{7}yv$; questa è la lettura coerente con la traccia stampata.)

Determinare: 1) associatività; 2) commutatività; 3) elemento neutro (se esiste); 4) inverso esplicito di $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (se esiste).

1) Associatività

Calcoliamo $((x,y) \star (u,v)) \star (s,t) e (x,y) \star ((u,v) \star (s,t))$ e confrontiamoli.

- Primo:
  $(x,y) \star (u,v) = (2+x+u,\ \frac{2}{7}yv)$. Quindi
  $((x,y) \star (u,v)) \star (s,t) = \big(2+(2+x+u)+s,\ \frac{2}{7} \cdot (\frac{2}{7}yv) \cdot t\big) = \big(4+x+u+s,\ (\frac{2}{7})^2\ yvt\big).$
- Secondo:
  $(u,v) \star (s,t) = (2+u+s,\ \frac{2}{7}vt),$
  quindi
  $(x,y) \star ((u,v) \star (s,t)) = \big(2+x+(2+u+s),\ \frac{2}{7} \cdot y \cdot (\frac{2}{7}vt)\big) = \big(4+x+u+s,\ (\frac{2}{7})^2\ yvt\big).$

Le due quantità coincidono per ogni (x,y),(u,v),(s,t). Quindi \star **è associativa** (grazie alla associatività dell’addizione e della moltiplicazione e ai fattori costanti).

2) Commutatività

Verifichiamo:
$(x,y) \star (u,v) = (2+x+u,\ \frac{2}{7}yv)$

e

$(u,v) \star (x,y) = (2+u+x,\ \frac{2}{7}vy).$

Poiché $x+u = u+x$ e $yv = vy$, si ha $(x,y) \star (u,v) = (u,v) \star (x,y)$. Quindi $\star$ **è commutativa**.

3) Elemento neutro

Cerchiamo $e = (e_1, e_2) \in A$ tale che per ogni (x,y)
$(x,y) \star (e_1, e_2) = (x,y).$

Calcolando:

$$(x,y)\star(e_1,e_2)=(2+x+e_1,\ \tfrac{2}{7}ye_2)\overset{!}{=}(x,y).$$

Quindi per tutti gli x serve $2+x+e_1=x\Rightarrow e_1=-2$. Per tutti i y serve $\tfrac{2}{7}e_2=1\Rightarrow e_2=\tfrac{7}{2}$.

Quindi l'elemento neutro è

$$\boxed{e=\big(-2,\ \tfrac{7}{2}\big).}$$

4) Inverso di $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Sia\$ a=(\tfrac12,\tfrac12). $Cerchiamo\$b=(u,v)$ con $a\star b=e$. Scriviamo le condizioni:

- Prima componente: $2+\tfrac{1}{2}+u=-2\Rightarrow u=-2-\tfrac{1}{2}-2=-\tfrac{9}{2}$. (Più chiaramente: 2 + 1/2 + u = $-2\Rightarrow u=-2-2-1/2=-9/2.)$
- Seconda componente: $\tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot v=\tfrac{7}{2}\Rightarrow\tfrac{1}{7}v=\tfrac{7}{2}\Rightarrow v=\tfrac{49}{2}$.

Quindi l'inverso esiste ed è

$$\boxed{\Big(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\Big)^{-1}=\Big(-\tfrac{9}{2},\ \tfrac{49}{2}\Big).}$$

Nota: tutto è in $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$: le coordinate trovate sono razionali, quindi inverse valide.

PASSO 1 — Chiusura (controllo rapido)

1. Prendi $x,u,y,v\in\mathbb{Q}$.
2. Prima coordinata: $2+x+u$ è somma di razionali ⇒ è razionale.
3. Seconda coordinata: $\dfrac{2}{7}yv$ è prodotto di razionali ⇒ è razionale.
4. Conclusione: $(x,y)*(u,v)\in A$. (Scrivilo in una riga.)

PASSO 2 — Associatività (dimostrazione completa, LHS = RHS)

Obiettivo: mostrare che per ogni $(x,y),(u,v),(s,t)\in A$

$$\big((x,y)*(u,v)\big)*(s,t)\ =\ (x,y)*\big((u,v)*(s,t)\big).$$

LHS — calcolo esplicito

1. Calcola $A:=(x,y)*(u,v)$.
   $A=\big(2+x+u,\ \tfrac{2}{7}yv\big)$.
2. Calcola A\ast (s,t):
   $A*(s,t)=\Big(2+(2+x+u)+s,\ \tfrac{2}{7}\cdot\big(\tfrac{2}{7}yv\big)\cdot t\Big)$.

3. Semplifica coordinate singolarmente:
   - Prima coordinata: $2+(2+x+u)+s=(2+2)+x+u+s=4+x+u+s.$
   - Seconda coordinata: $\frac{2}{7}\cdot\left(\frac{2}{7}yv\right)\cdot t=\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7}\right)\cdot y\cdot v\cdot t=\frac{4}{49}\,yvt.$
4. Quindi
   $\mathrm{LHS}=\left(4+x+u+s,\ \frac{4}{49}\,yvt\right).$

RHS — calcolo esplicito

1. Calcola $B:=(u,v)*(s,t)$.
   $B=\left(2+u+s,\ \frac{2}{7}vt\right).$
2. Calcola $(x,y)*B:$
   $(x,y)*B=\Big(2+x+(2+u+s),\ \frac{2}{7}\cdot y\cdot\left(\frac{2}{7}vt\right)\Big).$
3. Semplifica:
   - Prima coordinata: $2+x+(2+u+s)=2+2+x+u+s=4+x+u+s.$
   - Seconda: $\frac{2}{7}\cdot y\cdot\left(\frac{2}{7}vt\right)=\frac{4}{49}\,yvt.$
4. Quindi
   $\mathrm{RHS}=\left(4+x+u+s,\ \frac{4}{49}\,yvt\right).$

Confronto

LHS = RHS (coordinata per coordinata). Quindi \ast **è associativa**.

(Scrivi la riga finale: “Perciò $((x,y)*(u,v))*(s,t)=(x,y)*((u,v)*(s,t))$ per ogni scelta.”)

PASSO 3 — Commutatività (dimostrazione completa)

Mostra che $(x,y)*(u,v)=(u,v)*(x,y)$.

1. Calcola:
   $(x,y)*(u,v)=\left(2+x+u,\ \frac{2}{7}yv\right).$
   $(u,v)*(x,y)=\left(2+u+x,\ \frac{2}{7}vy\right).$
2. Confronta le coordinate:
   - $2+x+u=2+u+x$ perché l’addizione è commutativa.
   - $\frac{2}{7}yv=\frac{2}{7}vy$ perché la moltiplicazione è commutativa.
3. Conclusione: \ast **è commutativa**.

PASSO 4 — Elemento neutro (trovare e=(e_1,e_2))

Vogliamo $e\in A$ tale che per ogni $(x,y)\in A$,

$(x,y)*e=(x,y).$

1. Scrivi l’equazione generica:
   $(x,y)*(e_1,e_2)=\left(2+x+e_1,\ \frac{2}{7}ye_2\right)\overset{!}{=}(x,y).$

Quindi dobbiamo avere, per ogni x,y,
$2 + x + e_1 = x \qquad \text{e} \qquad \frac{2}{7} y e_2 = y.$

2. Risolvi la prima equazione:
   - $2 + x + e_1 = x.$
   - Sottrai x ambo i membri: $2 + e_1 = 0.$
   - Quindi $e_1 = -2.$
3. Risolvi la seconda equazione (caso generale):
   - $\frac{2}{7} y e_2 = y.$
   - Se $y \neq 0$, possiamo dividere per $y : \frac{2}{7} e_2 = 1.$
   - Risolvi per $e_2 : e_2 = \dfrac{1}{2/7} = 1 \cdot \dfrac{7}{2} = \dfrac{7}{2}.$
     (Dettaglio aritmetico: $\frac{1}{2/7} = 1 \cdot \frac{7}{2} = 7/2.$)
   - Se $y = 0$, l'equazione è $0 = 0$ e quindi non impone nulla, ma l'identità deve funzionare per TUTTI i y. Dunque deve valere lo stesso valore e_2 che funziona quando $y \neq 0 : e_2 = \frac{7}{2}.$
4. Conclusione:
   $\boxed{e = \left(-2,\ \frac{7}{2}\right).}$
5. Verifica rapida (sostituzione):
   - Prima coord.: $2 + x + (-2) = x.$
   - Seconda coord.: $\dfrac{2}{7} y \cdot \dfrac{7}{2} = \dfrac{2 \cdot 7}{7 \cdot 2} y = 1 \cdot y = y.$
     (Mostra i passaggi di moltiplicazione: numeratore $2 \cdot 7 = 14$, denominatore $7 \cdot 2 = 14, 14/14 = 1.$)

PASSO 5 — Inverso generale e condizione di invertibilità

Vogliamo per un generico $(x, y) \in A$ trovare (a,b) tale che

$$(x, y) * (a, b) = e = \left(-2, \frac{7}{2}\right).$$

1. Scrivi le equazioni coordinate:
   $2 + x + a = -2, \qquad \frac{2}{7} y b = \frac{7}{2}.$
2. Risolvi la prima:
   - $2 + x + a = -2.$
   - Sottrai $2 + x$ da entrambi i membri:
     $a = -2 - (2 + x) = -2 - 2 - x = -4 - x.$
3. Risolvi la seconda:
   - $\frac{2}{7} y b = \frac{7}{2}.$
   - Se $y = 0 : LHS = \frac{2}{7} \cdot 0 \cdot b = 0. RHS = \frac{7}{2} \neq 0$. Contraddizione ⇒ **se $y = 0$ non esiste inverso**.

- Se $y \neq 0$: dividi entrambi i membri per $tfrac{2}{7}y: $b = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{2}{7}y}$. Esegui la divisione di frazioni:
  $b = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2y} = \frac{7 \cdot 7}{2 \cdot 2y} = \frac{49}{4y}$.

4. Conclusione generale:
   - Per (x, y) con $y \neq 0$ l'inverso esiste ed è
     $(x, y)^{-1} = \left(-4 - x,\ \frac{49}{4y}\right)$.
   - Per (x,0) **non esiste** inverso.
5. Interpretazione strutturale:
   - A con $*$ è **un monoid commutativo** (associativo + elemento neutro) su tutto A.
   - L'insieme $G = \mathbb{Q} \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\})$ è un **gruppo abeliano** rispetto a $*$ (tutti gli elementi hanno inverso come sopra).
   - Gli elementi con seconda coordinata 0 non sono invertibili → non è gruppo sull'intero A.

**PASSO 6 — Inverso specifico di $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (tutti i passaggi aritmetici)

Vogliamo (a,b) con:
$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) * (a, b) = \left(-2, \frac{7}{2}\right)$.

Prima coordinata

1. Scrivi l'equazione: $2 + \frac{1}{2} + a = -2$.
2. Calcola $2 + \frac{1}{2}$:
   - Scrivi $2 = \frac{4}{2}$.
   - Quindi $2 + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.
3. Quindi $\frac{5}{2} + a = -2$.
4. Risolvi per a : $a = -2 - \frac{5}{2}$.
   - Scrivi $-2 = -\frac{4}{2}$.
   - Quindi $-\frac{4}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{9}{2}$.
5. Quindi $a = -\frac{9}{2}$.

Seconda coordinata

1. Scrivi l'equazione: $\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot b = \frac{7}{2}$.
2. Calcola il coefficiente davanti a b:

    - $\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{7 \cdot 2} = \frac{2}{14}$.
    - Semplifica $\frac{2}{14} = \frac{1}{7} (perché 2/14 = 1/7)$.
3. Quindi $\frac{1}{7} b = \frac{7}{2}$.
4. Moltiplica entrambi i membri per 7:
   $b = 7 \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{2}$.
   (Dettaglio: $7 \cdot 7 = 49$, quindi $49/2$.)

Conclusione

$$\boxed{\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)^{-1} = \left(-\tfrac{9}{2},\ \tfrac{49}{2}\right).}$$

Verifica (sostituisci e mostra passaggi)

Calcola

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) * \left(-\frac{9}{2}, \frac{49}{2}\right) \left(2 + \frac{1}{2} - \frac{9}{2},\ \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{49}{2}\right)$.

- Prima coordinata:
    - $2 + \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = \frac{4 + 1 - 9}{2} = \frac{-4}{2} = -2$.
- Seconda coordinata:
    - Calcola $\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{7}$ (già fatto).
    - Quindi $\frac{1}{7} \cdot \frac{49}{2} = \frac{49}{14}$.
    - Semplifica $\frac{49}{14} = \frac{49 \div 7}{14 \div 7} = \frac{7}{2}$.

Risultato = $\left(-2, \frac{7}{2}\right)$ cioè l'identità: verifica completa.