

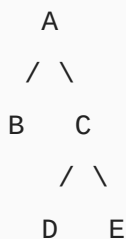
# MAT. DISCRETA 6

## ALBERI

### Che cos'è un albero (in teoria dei grafi)

- Un **grafo** è un insieme di **vertici (o nodi)** collegati da *\*archi (o linee)*.
- Un **albero** è un grafo che soddisfa due condizioni:
  1. **È connesso**: da ogni vertice puoi raggiungere qualunque altro seguendo gli archi.
  2. **Non ha cicli**: non puoi fare un giro chiuso tornando al punto di partenza senza ripassare da un arco.

Esempio visivo (un albero con 5 vertici):



### Proprietà fondamentali di un albero

Ci sono due regole molto importanti che **valgono sempre**:

#### Numero di archi

Un albero con  $n$  vertici ha sempre **esattamente**  $n-1$  archi.

- Esempio: se hai 5 vertici, gli archi sono 4.
- Se ne avessi di più, comparirebbe almeno un ciclo.
- Se ne avessi di meno, non sarebbe connesso.

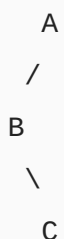
#### Cos'è il grado di un vertice

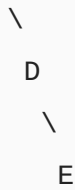
Il **grado** (o valenza) di un vertice è **quanti archi incidono su quel vertice**.

Non è “1 arco per vertice in generale”, ma dipende proprio da quanti collegamenti ha quel vertice.

Esempio: se un vertice è collegato ad altri 3, il suo grado è 3.

Se è una foglia (cioè tocca un solo arco), il suo grado è 1.





Contiamo i gradi:

- A ha **1 arco** (collegato solo a B) → grado 1
- B ha **2 archi** (uno verso A, uno verso C) → grado 2
- C ha **2 archi** (uno verso B, uno verso D) → grado 2
- D ha **2 archi** (uno verso C, uno verso E) → grado 2
- E ha **1 arco** (collegato solo a D) → grado 1

Quindi i gradi sono: 1,2,2,2,1.

La somma è:

$$1+2+2+2+1 = 8$$

### Somma dei gradi dei vertici

- Il **grado (o valenza)** di un vertice è quanti archi partono da quel vertice.  
(es. nell'albero sopra: A ha grado 1, B grado 2, C grado 2, D grado 2, E grado 1).
- C'è un teorema detto **stretta di mano**:  

$$\sum \text{gradi dei vertici} = 2 \cdot |E|$$
cioè la somma dei gradi è il doppio del numero di archi.
- Motivo: ogni arco tocca 2 vertici, quindi conta "2 gradi".

Definizione: di **Isomorfo**

Due alberi sono detti isomorfi se sono essenzialmente lo stesso albero, ma con etichette diverse o disegnati in modo diverso. Più formalmente, sono isomorfi se esiste una corrispondenza uno-a-uno tra i loro nodi (vertici) che preserva le connessioni (archi) e la struttura dell'albero, ovvero i nodi adiacenti in un albero devono essere adiacenti anche nell'altro.

## Algoritmo generale per verificare l'esistenza di un albero con gradi prefissati

**Input:**

- $n$  = numero di vertici
- Lista dei gradi dei vertici:  $d_1, d_2, \dots, d_n$

**Output:**

- “L'albero esiste” / “L'albero non esiste”

## Step 1: Controllo del numero di archi

Formula:

$$|E| = n - 1$$

dove  $|E|$  = numero di archi.

## Step 2: Controllo della somma dei gradi (Handshake Lemma)

Formula generale:

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2 \cdot |E| = 2 \cdot (n - 1)$$

**Se la somma dei gradi non è uguale a  $2(n - 1)$  → l'albero non può esistere.**

**Altrimenti** → continua.

## Step 3: Controllo delle foglie e dei vertici interni

- Definizioni:
  - **Foglie:** vertici di grado 1 → numero  $L = |\{i : d_i = 1\}|$
  - **Vertici interni:** vertici di grado  $\geq 2$  → numero  $I = |\{i : d_i \geq 2\}|$

- Controllo necessario:

Ogni foglia deve essere collegata ad almeno un vertice interno.

Formula minima di plausibilità:

$$I \geq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i \in \text{interni}} d_i \geq L + (I - 1)$$

- $\sum d_i$  degli interni  $\geq$  numero di foglie + archi interni necessari per collegare i vertici interni fra loro (I-1).
- Se non vale → albero **non esiste**.

## Step 4: Check finale

Se tutti i controlli sono soddisfatti:

- Numero archi corretto:  $|E| = n - 1$
- Somma dei gradi corretta:  $\sum d_i = 2(n - 1)$
- Foglie correttamente sostenute dai vertici interni:  $\sum d_{\text{interni}} \geq L + (I - 1)$

→ Allora l'**albero esiste**.

Altrimenti → **non esiste**.

## Step 5: Preparazione al disegno

Se l'albero esiste:

1. Ordina i vertici per grado decrescente.
  2. Inizia dai vertici di grado massimo come “nodi principali”.
  3. Distribuisci i vertici interni e poi le foglie, seguendo i gradi richiesti.
  4. Alla fine controlla che:
 
$$\forall i : \text{grado}_i = d_i \text{ numero archi} = n - 1.$$
- 

## Rappresentazione di un albero:

Quando ti chiedono di **rappresentare un albero con una certa distribuzione di gradi**, non esiste un “unico disegno preciso” da seguire. L'importante è che:

### 1. Ordina i vertici

- Dividi i vertici in due gruppi:
  - **Vertici interni:** grado  $\geq 2$
  - **Foglie:** grado = 1

### 2. Controllo preliminare:

- Verifica la somma dei gradi:
 
$$\sum \text{gradi} = 2 \cdot (n - 1)$$
 Se non è così, **l'albero non esiste**.

### 3. Scegli il “vertice principale”

- Prendi uno dei vertici di grado massimo come radice provvisoria (puoi metterlo in alto).

### 4. Attacca i vertici interni

- Collega i vertici interni fra loro in modo da distribuire i gradi:
  - Un vertice di grado 4 deve avere 4 archi in totale.
  - Ogni arco può andare verso un altro vertice interno o verso una foglia.

### 5. Attacca le foglie

- Collega ciascuna foglia a un vertice interno che **ha ancora “posti liberi”** (cioè il grado attuale è minore del grado richiesto).
- Evita di collegare foglia a foglia → altrimenti il grado cambia e non saranno più foglie.

### 6. Verifica i gradi

- Dopo aver collegato tutto, conta i gradi di ogni vertice.
- Devono coincidere **esattamente** con quelli richiesti.

### 7. Assicurati che sia un albero

- Controlla che:
  - Non ci siano cicli (non chiudere mai un giro completo),
  - Tutti i vertici siano collegati (nessun vertice isolato),
  - Numero di archi =  $n-1$

### 8. Variante per non isomorfi

- Per creare un secondo albero diverso: cambia **l'ordine dei collegamenti** tra i vertici interni, oppure cambia quali foglie si collegano a quale vertice interno.

---

Esercizi d'esempio fornito da Dott. Sblendorio:

"WhatsApp Image 2025-09-15 at 17.39.20.jpeg" could not be found.