

9 - Esercizi

Esercizi sulla generazione

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^{2n+1} | n \geq 0\}$.

Determinare una grammatica generativa per L.

Alcune parole:

$$L = \{b, ab^3, a^2b^5, a^3b^7, \dots\}$$

Parola più piccola possibile:

$$S \rightarrow b$$

Un esempio di produzione potrebbe essere:

- $S \rightarrow b \mid aSbb$

Esempio:

$$S \Rightarrow aabbbbbb$$

$$S \rightarrow aSbb$$

$$S \rightarrow aaSbbbbb$$

$$S \rightarrow aabbbbbb$$

Avendo quindi la grammatica:

$$G = (X, V, S, P):$$

$$X = \{a, b\}$$

$$V = \{S\}$$

$$S$$

$$P = \{S \rightarrow b \mid aSbb\}$$

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^{n+m} c^m | n, m > 0\}$.

Determinare una grammatica generativa per L.

Alcune parole

$$L = \{ab^2c, ab^3c^2, a^2b^3c, a^2b^4c^2\}$$

Per facilitare la comprensione possiamo riscrivere il linguaggio:

$$L = \{a^n b^n b^m c^m | n, m > 0\}$$

Notiamo che vi è un legame tra a e b, ma anche tra b e c. Le coppie hanno infatti tra loro lo stesso esponente. Inoltre, siccome le due coppie hanno esponente diverso, possiamo generarle indipendentemente tra loro.

Possiamo pensare dunque ad una produzione:

$$S \rightarrow aAbbBc$$

$$A \rightarrow \lambda \mid aAb$$

$$B \rightarrow \lambda \mid bBc$$

Con la conseguente grammatica.

Un'altra possibile produzione sarebbe:

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow ab \mid aAb$$

$$B \rightarrow bc \mid bBC$$

Avendo quindi la grammatica:

$$G = (X, V, S, P):$$

$$X = \{a, b, c\}$$

$$V = \{S, A, B\}$$

$$S$$

$$P = \{S \rightarrow AB, A \rightarrow ab \mid aAb, B \rightarrow bc \mid bBC\}$$

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^{2k+1} \mid n, k \geq 0\}$.

Determinare una grammatica generativa per L.

...

Possibile produzione:

$$S \rightarrow ABb$$

$$A \rightarrow aA \mid \lambda$$

$$B \rightarrow bbB \mid \lambda$$

...

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$.

Determinare una grammatica generativa per L.

...

Possibile produzione

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaSBCBCBCBC \Rightarrow aaaaaBCBCBCBCBC \\ &\Rightarrow aaaaaBBCCBCBCBC \Rightarrow aaaaaBBCBCCBCBC \Rightarrow aaaaaBBBCCCBCBC \Rightarrow \\ &aaaaaBBBCCBCCBC \Rightarrow aaaaaBBBCBCCBC \Rightarrow aaaaaBBBBCCCCBC \Rightarrow \\ &aaaaaBBBBCCCBCC \Rightarrow aaaaaBBBBCCBCCC \Rightarrow aaaaaBBBBBCBCCCC \Rightarrow \\ &aaaaaBBBBBBCCCC \Rightarrow aaaaabBBBBCCCC \Rightarrow aaaaabbBBBBCCCC \Rightarrow \\ &aaaaabbbbBBCCCC \Rightarrow aaaaabbbbBCCCC \Rightarrow aaaaabbbbbCCCC \end{aligned}$$

Regole di produzione:

$$S \rightarrow aSBC \mid aBC$$

$$CB \rightarrow BC$$

$$aB \rightarrow ab$$

$$bB \rightarrow bb$$

$$bC \rightarrow bc$$

$$cC \rightarrow cc$$

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^m c^n \mid n, m > 0\}$.

Determinare una grammatica generativa per L.

...

$S \rightarrow aSc \mid aBc$

$B \rightarrow bB \mid b$

1) Sia dato il seguente linguaggio L sull'alfabeto $X = \{0, 1\}$

$$L = \{w \in X^* \mid w = 0^n 10^m, m > n > 0\}$$

Determinare una grammatica G libera da contesto che generi $L(G)$.

(PUNTI 10)

$G = (X, V, S, P)$:

$X = \{0, 1\}$

$V = \{S, A, B\}$

S

$P = \{S \rightarrow A1B$

$A \rightarrow 0A \mid 0$

$B \rightarrow 0B \mid 0BB \mid 0$

$\}$

Esercizi sul Pumping Lemma

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$.

Dimostrare che L non è C.F..

L libero $\implies \exists p \in \mathbb{N} \forall z \in L \mid z \mid > p$

1. $\mid vwx \mid \leq p$

2. $(vx \neq \lambda)$

3. $\forall i, i \geq 0 : uv^iwx^iy \in L$

Studiamo una stringa $z \in L \mid z \mid > p$ (scegliendo la stringa con lunghezza maggiore di p più comoda per i calcoli)

$$z = a^p b^p c^p \implies \mid z \mid = 3p > p$$

$$\underbrace{a \dots a}_p \underbrace{b \dots b}_p \underbrace{c \dots c}_p$$

In questa stringa abbiamo un p numero di a , un p numero di b ed un numero p di c .

Casi:

1. vwx formato solo da a

2. vwx formato solo da b
3. vwx formato solo da c
4. vwx formato a cavallo tra a e b
5. vwx formato a cavallo tra b e c
6. vwx non può contenere a e b e c , poiché non sufficientemente lunga

Caso 1:

Prendiamo una stringa a caso (quella più semplice)

$$uv^2wx^2y$$

Prendendo la stringa pompata, possiamo aggiungere solo delle a .

Ora, il numero di a aumenta: $p + 1 \leq \#(a) \leq p + p$. Tuttavia il numero di c e b rimane invariato, il che non rispetta le regole del linguaggio. Quindi

$$uv^2wx^2y \notin L \text{ poich\`e } \#(a) \neq \#(b) \neq \#(c)$$

Caso 2 e 3:

Stessa cosa del caso 1, ripetuto però con le b e con le c .

Caso 4:

il punto vwx è a cavallo tra a e b .

Caso 4.1: $v \neq \lambda$ $x = \lambda$

$v \neq \lambda \implies v$ contiene solo delle a , il che vuol dire che $wx = ab \dots b$. Pompando andremmo ad aumentare solo il numero delle a (non delle b poichè dovrebbero essere contenute nelle x , il quale è però vuoto). Anche in questo caso quindi avremmo un numero di a pari a:

$$p + 1 \leq \#(a) \leq p + p - 1 \text{ (p-1 poich\`e almeno una } a \text{ \u00e8 contenuta nelle } w\text{)}. \text{ Quindi}$$

$$uv^2wx^2y \notin L \text{ poich\`e } \#(a) \neq \#(b) \neq \#(c)$$

Caso 4.2: $v = \lambda$ $x \neq \lambda$

$x \neq \lambda \implies x$ contiene solo delle b . In questo caso quindi avremmo un numero di b pari a:

$$p + 1 \leq \#(b) \leq p + p - 1 \text{ (p-1 poich\`e almeno una } b \text{ \u00e8 contenuta nelle } w\text{)}. \text{ Quindi}$$

$$uv^2wx^2y \notin L \text{ poich\`e } \#(a) \neq \#(b) \neq \#(c)$$

Caso 4.3: $v \neq \lambda$ $x \neq \lambda$

$v \neq \lambda$ $x \neq \lambda \implies v$ contiene solo delle a e x contiene solo delle b . In questo caso quindi avremmo un numero di b pari al numero a : $p + 1 \leq \#(b) = \#(a) \leq p + p - 1$ (p-1 poichè almeno una b è contenuta nelle w). Quindi $uv^2wx^2y \notin L$ poichè $\#(a) \wedge \#(b) \neq \#(c)$

Caso 5:

Analogo al caso 4.

Come fare il pumping lemma ("algoritmo")

1. Assumiamo per assurdo che L è libero
2. Andiamo a definire una costante p e una stringa z che appartiene al linguaggio con lunghezza maggiore di p

$$2.1) \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall z \in L \mid |a| > p \quad z = uvwxy$$

Nota bene: se il linguaggio è formato da 3 caratteri il pumping lemma è quello classico, se invece è di meno bisogna fare lo studio della lunghezza della stringa pompata (guardare esempi dal professore come a^{n^2})

3) Definiamo le proprietà del pumping lemma:

- $|vwx| \leq p$
- $vx \neq \lambda$
- $\forall i, i \geq 0 : uv^iwx^iy \in L$

Proviamo a studiare un linguaggio:

Sia $L = \{a^ib^jc^k \mid i > j > k > 0 \implies \#(a) > \#(b) > \#(c) > 0\}$.

Determinare se è libero da contesto.

Generiamo delle parole del linguaggio $L = \{a^3b^2c, a^4b^3c^2, a^4b^2c, a^5b^4c^3, \dots\}$

4. Calcoliamo la lunghezza della stringa:

Consideriamo la stringa: $z = a^{p+2}b^{p+1}c^p \quad |z| = 3p + p > p$

5. Consideriamo tutti i casi possibili

Caso 1: vwx formata solo da a

Caso 2: vwx formata solo da b

Caso 3: vwx formata solo da c

Caso 4: vwx formata a cavallo tra a e b

Caso 5: vwx formata a cavallo tra b e c

Osservazione: vwx non è abbastanza lunga per contenere a, b, c insieme

6. Studiamo i casi

Nota bene: la stringa pompata e quella depompata hanno due formule diverse per poter essere descritte (oltre a dover essere applicate in base alle regole dettate dal linguaggio).

- **Pompare:** $p + 1 \leq \#(carattere) \leq p + p$
- **Depompare:** $p - p \leq \#(carattere) \leq p - 1$

Caso 1) Studiamo uv^0wx^0y

(Perché studiamo ora la de-pompata? Dalla regola, se le a non sono maggiori di b e c sappiamo che non rispettiamo le regole del linguaggio)

$uv^0wx^0y \rightarrow$

- $p - p \leq \#(a) \leq p - 1$
- $\#(b) = p$
- $\#(c) = p$

$uv^0wx^0y \notin L$ poiché $\#(a) \leq (\#(b), \#(c))$

Caso 2) Uguale al caso 1 (ovviamente all'esame bisogna ricopiarlo)

Caso 3) uv^2wx^2y

(Qui conviene pompare la stringa, poiché nella de-pompata dimostreremmo esattamente il contrario di quello che vogliamo smentire, cioè il numero delle c non dovrebbe essere superiore a quello delle a)

$uv^2wx^2y \rightarrow$

- $\#(a) = p$
- $\#(b) = p$
- $p + 1 \leq \#(c) \leq p + p$

$uv^2wx^2y \notin L$ poiché $\#(c) \leq (\#(a), \#(b))$

Caso 4) Creiamo diversi casi

Caso 4.1): $v \neq \lambda x = \lambda$; v contiene solo delle a (de-pompiano per poter dimostrare che togliendo il numero delle a andiamo a rompere la regola):

$uv^0wx^0y \rightarrow$

- $p - p \leq \#(a) \leq p + 1$
- $\#(b) = p + 1$
- $\#(c) = p \Rightarrow \#(a) \leq \#(b) \Rightarrow uv^0wx^0y \notin L$

Caso 4.2: $v = \lambda x \neq \lambda$; v contiene solo delle b :

$uv^0wx^0y \rightarrow$

- $\#(a) = p + 2$
- $p - p \leq \#(b) \leq p$
- $\#(c) = p$
 $\Rightarrow \#(b) \leq \#(c)$
 $\Rightarrow uv^0wx^0y \notin L$

Caso 4.3: $v \neq \lambda x \neq \lambda$; v contiene solo delle a e x contiene solo delle b .

$uv^0wx^0y \rightarrow$

- $\#(a) = p + 2 - |v|$
- $\#(b) = p + 1 - |x|$
- $\#(c) = p$

$\Rightarrow \#(a), \#(b) \leq \#(c) \Rightarrow uv^0wx^0y \notin L$

Caso 5) Creiamo diversi casi

Caso 5.1): $v \neq \lambda x = \lambda$; v contiene solo delle b (de-pompiano per poter dimostrare che togliendo il numero delle b andiamo a rompere la regola):

$uv^0wx^0y \rightarrow$

- $\#(a) = p + 2$
- $p - p \leq \#(b) \leq p$

- $\#(c) = p$
 $\Rightarrow \#(b) \leq \#(c) \Rightarrow uv^0wx^0y \notin L$

Caso 5.2): $v = \lambda x \neq \lambda$; x contiene solo delle c (pompriamo per aumentare il numero delle c e rompere la regola):

$uv^2wx^2y \rightarrow$

- $\#(a) = p + 2$
- $\#(b) = p + 1$
- $p + 1 \leq \#(c) \leq p + p$
 $\Rightarrow \#(c) \geq \#(b) \Rightarrow uv^2wx^2y \notin L$

Caso 5.3): $v \neq \lambda x \neq \lambda$; v contiene solo delle b e x contiene solo delle c .

$uv^2wx^2y \rightarrow$

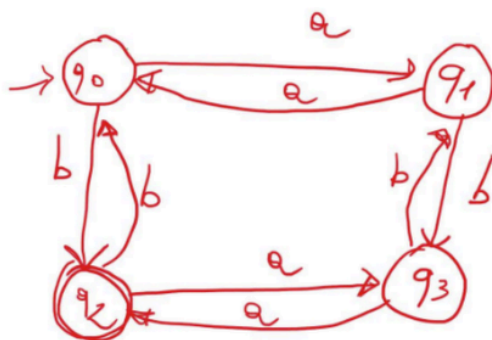
- $\#(a) = p + 2$
- $\#(b) = p + 1 + |v|$
- $\#(c) = p + |x|$
 $\Rightarrow \#(b) \geq \#(a)$ oppure $\#(c) \geq \#(b) \Rightarrow uv^2wx^2y \notin L$

7. Conclusioni: Concludiamo che il linguaggio non è C.F.

Esercizi su automi

$$L = \{ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ha num pari } a \text{ e } \text{num dispari } b \}$$

$$L = \{ b, a^2b, a^4b, a^6b, \dots, b^3, a^2b^3, a^4b^3, \dots \}$$



$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 \text{ riconosce } a \text{ e } w \\ \text{con } P(a)P(b) \\ q_1 D(a)P(b) \\ q_2 P(a)D(b) \\ q_3 D(a)D(b) \end{array} \right.$$

$$M = (Q, \delta, q_0, F)$$

$$\delta: Q \times X \rightarrow Q \quad F = \{q_2\}$$

$$\delta(q_0, a) = q_1$$

$$\delta(q_0, b) = q_2$$

Gerarchia di Chomsky

Linguaggio C.F. o C.S:

Conviene generare la grammatica o applicare il pumping lemma

Lineari destri:

Bisogna costruire l'automa