9 - Esercizi

Esercizi sulla generazione

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^{2n+1} | n \geq 0\}$.
Determinare una grammatica generativa per L.
Alcune parole:
L=$\{b, ab^3, a^2b^5, a^3b^7, ..\}$

Parola più piccola possibile:
S $\rightarrow$ b
Un esempio di produzione potrebbe essere:

- S $\rightarrow$ b | aSbb
  Esempio:
  S $\implies$ aabbbbb
  S $\rightarrow$ aSbb
  S $\rightarrow$ aaSbbbb
  S $\rightarrow$ aabbbbb
  Avendo quindi la grammatica:
  G = (X, V, S, P):
  X={a,b}
  V={S}
  S
  P = {S $\rightarrow$ b | aSbb}

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^{n+m} c^m | n, m > 0\}$.
Determinare una grammatica generativa per L.
Alcune parole
L = $\{ab^2c, ab^3c^2, a^2b^3c, a^2b^4c^2\}$
Per facilitare la comprensione possiamo riscrivere il linguaggio:
$L = \{a^n b^n b^m c^m | n, m > 0\}$
Notiamo che vi è un legame tra a e b, ma anche tra b e c. Le coppie hanno infatti tra loro lo stesso esponente. Inoltre, siccome le due coppie hanno esponente diverso, possiamo generarle indipendentemente tra loro.
Possiamo pensare dunque ad una produzione:
S $\rightarrow$ aAbbBc
A $\rightarrow$ λ | aAb
B $\rightarrow$ λ | bBc
Con la conseguente grammatica.

Un'altra possibile produzione sarebbe:
S $\rightarrow$ AB
A $\rightarrow$ ab | aAb
B $\rightarrow$ bc | bBC
Avendo quindi la grammatica:
G = (X, V, S, P):
X={a,b,c}
V={S, A, B}
S
P = {S $\rightarrow$ AB, A $\rightarrow$ ab | aAb, B $\rightarrow$ bc | bBc}

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^{2k+1} | n, k \geq 0\}$.
Determinare una grammatica generativa per L.
...
Possibile produzione:
S $\rightarrow$ ABb
A $\rightarrow$ aA | λ
B $\rightarrow$ bbB | λ
...

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$.
Determinare una grammatica generativa per L.
...
Possibile produzione
S $\Rightarrow$ aSBC $\Rightarrow$ aaSBCBC $\Rightarrow$ aaaSBCBCBC $\Rightarrow$ aaaaSBCBCBCBC $\Rightarrow$ aaaaaBCBCBCBCBC $\Rightarrow$ aaaaaBBCCBCBCBC $\Rightarrow$ aaaaaBBCBCCBCBC $\Rightarrow$ aaaaaBBBCCCBCBC $\Rightarrow$ aaaaaBBBCCBCCBC $\Rightarrow$ aaaaaBBBCBCCCBC $\Rightarrow$ aaaaaBBBBCCCCBC $\Rightarrow$ aaaaaBBBBCCCBCC $\Rightarrow$ aaaaaBBBBCCBCCC $\Rightarrow$ aaaaaBBBBCBCCCC $\Rightarrow$ aaaaaBBBBBCCCCC $\Rightarrow$ aaaaabBBBBCCCCC $\Rightarrow$ aaaaabbBBBCCCCC $\Rightarrow$ aaaaabbbBBCCCCC $\Rightarrow$ aaaaabbbbBCCCCC $\Rightarrow$ aaaaabbbbbCCCCC

Regole di produzione:
S $\rightarrow$ aSBC|aBC
CB $\rightarrow$ BC
aB $\rightarrow$ ab
bB $\rightarrow$ bb
bC $\rightarrow$ bc
cC $\rightarrow$ cc

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^m c^n | n, m > 0\}$.
Determinare una grammatica generativa per L.

...

S $\rightarrow$ aSc | aBc

B $\rightarrow$ bB | b

---

1) Sia dato il seguente linguaggio L sull'alfabeto $X = \{0, 1\}$

$$L = \{w \in X^* \mid w = 0^n 1 0^m ,\ m > n > 0\}$$

Determinare una grammatica G libera da contesto che generi L(G).

(PUNTI 10)

G = (X, V, S, P):

X={0,1}

V={S,A,B}

S

P = {S $\rightarrow$ A1B

A $\rightarrow$ 0A|0

B $\rightarrow$ 0B|0BB|0

}

Esercizi sul Pumping Lemma

Caso di studio n.1

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$.
Dimostrare che L non è C.F.

Supponiamo per assurdo che il linguaggio L sia libero allora:
$\exists p \in N, \ \forall z \in L, |z| > p$

Studiamo una stringa $z \in L$ t.c $|z| > p$
$z = a^p b^p c^p \implies |z| = 3p > p$

$$\underbrace{a \dots a}_{\text{p}}\underbrace{b \dots b}_{\text{p}}\underbrace{c \dots c}_{\text{p}}$$

$z = uvwxy \quad \text{t.c}$

1. $|vwx| \leq p$
2. $(vx \neq \lambda)$
3. $\forall i, \ i \geq 0 : uv^i wx^i y \in L$
   Casi:

4. vwx formato solo da a
5. vwx formato solo da b
6. vwx formato solo da c
7. vwx formato a cavallo tra a e b
8. vwx formato a cavallo tra b e c

Caso 1:
Prendiamo una stringa a caso (quella più semplice)
uv^2wx^2y
Prendendo la stringa pompata, possiamo aggiungere solo delle a.
Ora, il numero di a aumenta: $p+1 \leq \#(a) \leq p+p$. Tuttavia il numero di c e b rimane invariato, il che non rispecchia le regole del linguaggio. Quindi
$uv^2wx^2y \notin L \text{ poichè } \#(a) \neq \#(b) \neq \#(c)$

Caso 2 e 3:
Stessa cosa del caso 1, ripetuto però con le b e con le c.

Caso 4:
il punto vwx è a cavallo tra a e b.
Caso 4.1: $v \neq \lambda\ x = \lambda$
$v \neq \lambda \implies \text{ v contiene solo delle a}$, il che vuol dire che $wx = ab \dots b$. Pompando andremmo ad aumentare solo il numero delle a (non delle b poichè dovrebbero essere contenute nelle x, il quale è però vuoto). Anche in questo caso quindi avremmo un numero di a pari a:
$p+1 \leq \#(a) \leq p+p-1$ (p-1 poichè almeno una a è contenuta nelle w). Quindi
$uv^2wx^2y \notin L \text{ poichè } \#(a) \neq \#(b) \neq \#(c)$
Caso 4.2: $v = \lambda\ x \neq \lambda$
$x \neq \lambda \implies \text{ x contiene solo delle b}$. In questo caso quindi avremmo un numero di b pari a:
$p+1 \leq \#(b) \leq p+p-1$ (p-1 poichè almeno una b è contenuta nelle w). Quindi
$uv^2wx^2y \notin L \text{ poichè } \#(a) \neq \#(b) \neq \#(c)$
Caso 4.3: $v \neq \lambda\ x \neq \lambda$
$v \neq \lambda \quad x \neq \lambda \implies \text{ v contiene solo delle a e x contiene solo delle b}$. In questo caso quindi avremmo un numero di b pari al numero a: $p+1 \leq \#(b) = \#(a) \leq p+p-1$ (p-1 poichè almeno una b è contenuta nelle w). Quindi $uv^2wx^2y \notin L \text{ poichè } \#(a) \wedge \#(b) \neq \#(c)$

Caso 5:
Analogo al caso 4.

Caso di studio n.2

Questo caso è diverso, lo si va a studiare in un altra maniera rispetto a quello precedente, ovvero studiando la lunghezza della stringa
Qui il linguaggio è assurdo per una motivazione

Dimostrare che $L = \{w \in X^* | w = a^n b^{2^{n^2}}\}$ è un linguaggio libero da contesto

Supponiamo per assurdo che il linguaggio L sia libero, allora:
$\exists p \in N,\ \forall z \in L, |z| > p, z = uvwxy \quad \text{t.c}$

1. $|vwx| \leq p$
2. $vx \neq \lambda$
3. $\forall i,\ i \geq 0 : uv^i wx^i y \in L$

Studiamo la parola: $a^p b^{2^{p^2}}$, $|z| = p + 2^{p^2} > p$

Andiamo a considerare la stringa pompata e ne studiamo la lunghezza

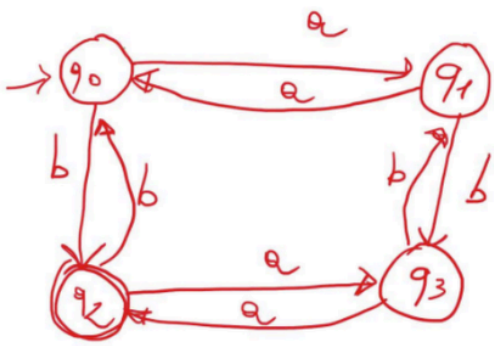
$$|z| = |uvwxy| < |uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx| = |z| + |vx| \leq |z| + |vwx| \leq p + 2^{p^2} < (p+1) + 2^{(p+1)^2}$$

Dunque si ha che $p + 2^{p^2} < |uv^2wx^2y| \leq (p+1) + 2^{(p+1)^2}$
Si conclude che il linguaggio è assurdo

Esercizi su automi stati finiti

$L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid w$ ha num pari a e num dispari $b \}$

$L = \{ b, a^2b, a^4b, a^6b, \dots, b^3, a^2b^3, a^4b^3, \dots \}$



q_0 riconosce le w con $P(a)\ P(b)$
q_1 $D(a)\ P(b)$
q_2 $P(a)\ D(b)$
q_3 $D(a)\ D(b)$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

$M = (Q, \delta, q_0, F)$
$\delta : Q \times X \to Q$ $\quad F = \{q_2\}$
$\delta(q_0, a) = q_1$
$\delta(q_0, b) = q_2$