MAT. DISCRETA 6

ALBERI

Che cos’è un albero (in teoria dei grafi)

- Un **grafo** è un insieme di **vertici (o nodi)** collegati da *archi (o linee)*.
- Un **albero** è un grafo che soddisfa due condizioni:
  1. **È connesso**: da ogni vertice puoi raggiungere qualunque altro seguendo gli archi.
  2. **Non ha cicli**: non puoi fare un giro chiuso tornando al punto di partenza senza ripassare da un arco.
  Esempio visivo (un albero con 5 vertici):

```
    A
   / \
  B   C
     / \
    D   E
```

Proprietà fondamentali di un albero

Ci sono due regole molto importanti che **valgono sempre**:
Numero di archi
Un albero con n vertici ha sempre **esattamente** n-1 **archi**.
- Esempio: se hai 5 vertici, gli archi sono 4.
- Se ne avessi di più, comparirebbe almeno un ciclo.
- Se ne avessi di meno, non sarebbe connesso.

Cos’è il grado di un vertice
Il **grado** (o valenza) di un vertice è **quanti archi incidono su quel vertice**.
Non è “1 arco per vertice in generale”, ma dipende proprio da quanti collegamenti ha quel vertice.
Esempio: se un vertice è collegato ad altri 3, il suo grado è 3.
Se è una foglia (cioè tocca un solo arco), il suo grado è 1.

```
    A
   /
  B
   \
    C
```

```
        \
         D
          \
           E
```

Contiamo i gradi:

- A ha **1 arco** (collegato solo a B) → grado 1
- B ha **2 archi** (uno verso A, uno verso C) → grado 2
- C ha **2 archi** (uno verso B, uno verso D) → grado 2
- D ha **2 archi** (uno verso C, uno verso E) → grado 2
- E ha **1 arco** (collegato solo a D) → grado 1

Quindi i gradi sono: 1,2,2,2,1.
La somma è:
1+2+2+2+1 = 8

Somma dei gradi dei vertici

- Il **grado (o valenza)** di un vertice è quanti archi partono da quel vertice.
  (es. nell'albero sopra: A ha grado 2, B grado 1, C grado 2, D grado 1, E grado 1).
- C'è un teorema detto **stretta di mano**:
  $\sum \text{gradi dei vertici} = 2 \cdot |E|$
  cioè la somma dei gradi è il doppio del numero di archi.
- Motivo: ogni arco tocca 2 vertici, quindi conta "2 gradi".

Definizione: di **Isomorfo**
Due alberi sono detti isomorfi se sono essenzialmente lo stesso albero, ma con etichette diverse o disegnati in modo diverso. Più formalmente, sono isomorfi se esiste una corrispondenza uno-a-uno tra i loro nodi (vertici) che preserva le connessioni (archi) e la struttura dell'albero, ovvero i nodi adiacenti in un albero devono essere adiacenti anche nell'altro.

Algoritmo generale per verificare l'esistenza di un albero con gradi prefissati

Input:

- n = numero di vertici
- Lista dei gradi dei vertici: $d_1, d_2, \ldots, d_n$

Output:

- "L'albero esiste" / "L'albero non esiste"

Step 1: Controllo del numero di archi

Formula:

$|E| = n - 1$
dove $|E|$ = numero di archi.

Step 2: Controllo della somma dei gradi (Handshake Lemma)

Formula generale:

$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2 \cdot |E| = 2 \cdot (n-1)$

Se la somma dei gradi non è uguale a $2(n-1)$ → l'albero **non può esistere**.
Altrimenti → continua.

Step 3: Controllo delle foglie e dei vertici interni

- Definizioni:
  - **Foglie**: vertici di grado 1 → numero $L = |\{i : d_i = 1\}|$
  - **Vertici interni**: vertici di grado ≥ 2 → numero $I = |\{i : d_i \geq 2\}|$
- Controllo necessario:
  Ogni foglia deve essere collegata ad almeno un vertice interno.
  Formula minima di plausibilità:

  $I \geq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i \in \text{interni}} d_i \geq L + (I-1)$
  - $\sum d_i$ degli interni ≥ numero di foglie + archi interni necessari per collegare i vertici interni fra loro (I-1).
  - Se non vale → albero **non esiste**.

Step 4: Check finale

Se tutti i controlli sono soddisfatti:

- Numero archi corretto: $|E| = n - 1$
- Somma dei gradi corretta: $\sum d_i = 2(n-1)$
- Foglie correttamente sostenute dai vertici interni: $\sum d_{\text{interni}} \geq L + (I-1)$

→ Allora **l'albero esiste**.
Altrimenti → **non esiste**.

Step 5: Preparazione al disegno

Se l'albero esiste:

1. Ordina i vertici per grado decrescente.
2. Inizia dai vertici di grado massimo come “nodi principali”.
3. Distribuisci i vertici interni e poi le foglie, seguendo i gradi richiesti.
4. Alla fine controlla che:
   $\forall i : \text{grado}_i = d_i enumeroarchi = n - 1.$

Rappresentazione di un albero:

Quando ti chiedono di **rappresentare un albero con una certa distribuzione di gradi**, non esiste un “unico disegno preciso” da seguire. L’importante è che:

1. **Ordina i vertici**
   - Dividi i vertici in due gruppi:
     - **Vertici interni**: grado ≥ 2
     - **Foglie**: grado = 1
2. **Controllo preliminare**:
   - Verifica la somma dei gradi:
     $\sum \text{gradi} = 2 \cdot (n-1)$
     Se non è così, **l’albero non esiste**.
3. **Scegli il “vertice principale”**
   - Prendi uno dei vertici di grado massimo come radice provvisoria (puoi metterlo in alto).
4. **Attacca i vertici interni**
   - Collega i vertici interni fra loro in modo da distribuire i gradi:
     - Un vertice di grado 4 deve avere 4 archi in totale.
     - Ogni arco può andare verso un altro vertice interno o verso una foglia.
5. **Attacca le foglie**
   - Collega ciascuna foglia a un vertice interno che **ha ancora “posti liberi”** (cioè il grado attuale è minore del grado richiesto).
   - Evita di collegare foglia a foglia → altrimenti il grado cambia e non saranno più foglie.
6. **Verifica i gradi**
   - Dopo aver collegato tutto, conta i gradi di ogni vertice.
   - Devono coincidere **esattamente** con quelli richiesti.
7. **Assicurati che sia un albero**
   - Controlla che:
     - Non ci siano cicli (non chiudere mai un giro completo),
     - Tutti i vertici siano collegati (nessun vertice isolato),
     - Numero di archi = n−1
8. **Variante per non isomorfi**

- Per creare un secondo albero diverso: cambia **l’ordine dei collegamenti** tra i vertici interni, oppure cambia quali foglie si collegano a quale vertice interno.

Esercizi d'esempio fornito da Dott. Sblendorio:

“WhatsApp Image 2025-09-15 at 17.39.20.jpeg” could not be found.