8 - Esercizi

Esercizi sulla generazione

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^{2n+1} | n \geq 0\}$.
Determinare una grammatica generativa per L.
Alcune parole:
L=$\{b, ab^3, a^2b^5, a^3b^7, ..\}$

Parola più piccola possibile:
S $\rightarrow$ b
Un esempio di produzione potrebbe essere:

- S $\rightarrow$ b | aSbb
  Esempio:
  S $\implies$ aabbbbb
  S $\rightarrow$ aSbb
  S $\rightarrow$ aaSbbbb
  S $\rightarrow$ aabbbbb
  Avendo quindi la grammatica:
  G = (X, V, S, P):
  X={a,b}
  V={S}
  S
  P = {S $\rightarrow$ b | aSbb}

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^{n+m} c^m | n, m > 0\}$.
Determinare una grammatica generativa per L.
Alcune parole
L = $\{ab^2c, ab^3c^2, a^2b^3c, a^2b^4c^2\}$
Per facilitare la comprensione possiamo riscrivere il linguaggio:
$L = \{a^n b^n b^m c^m | n, m > 0\}$
Notiamo che vi è un legame tra a e b, ma anche tra b e c. Le coppie hanno infatti tra loro lo stesso esponente. Inoltre, siccome le due coppie hanno esponente diverso, possiamo generarle indipendentemente tra loro.
Possiamo pensare dunque ad una produzione:
S $\rightarrow$ aAbbBc
A $\rightarrow$ λ | aAb
B $\rightarrow$ λ | bBc
Con la conseguente grammatica.

Un'altra possibile produzione sarebbe:
S $\rightarrow$ AB
A $\rightarrow$ ab | aAb
B $\rightarrow$ bc | bBC
Avendo quindi la grammatica:
G = (X, V, S, P):
X={a,b,c}
V={S, A, B}
S
P = {S $\rightarrow$ AB, A $\rightarrow$ ab | aAb, B $\rightarrow$ bc | bBc}

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^{2k+1} | n, k \geq 0\}$.
Determinare una grammatica generativa per L.
...
Possibile produzione:
S $\rightarrow$ ABb
A $\rightarrow$ aA | λ
B $\rightarrow$ bbB | λ
...

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$.
Determinare una grammatica generativa per L.
...
Possibile produzione
S $\Rightarrow$ aSBC $\Rightarrow$ aaSBCBC $\Rightarrow$ aaaSBCBCBC $\Rightarrow$ aaaaSBCBCBCBC $\Rightarrow$ aaaaaBCBCBCBCBC $\Rightarrow$ aaaaaBBCCBCBCBC $\Rightarrow$ aaaaaBBCBCCBCBC $\Rightarrow$ aaaaaBBBCCCBCBC $\Rightarrow$ aaaaaBBBCCBCCBC $\Rightarrow$ aaaaaBBBCBCCCBC $\Rightarrow$ aaaaaBBBBCCCCBC $\Rightarrow$ aaaaaBBBBCCCBCC $\Rightarrow$ aaaaaBBBBCCBCCC $\Rightarrow$ aaaaaBBBBCBCCCC $\Rightarrow$ aaaaaBBBBBCCCCC $\Rightarrow$ aaaaabBBBBCCCCC $\Rightarrow$ aaaaabbBBBCCCCC $\Rightarrow$ aaaaabbbBBCCCCC $\Rightarrow$ aaaaabbbbBCCCCC $\Rightarrow$ aaaaabbbbbCCCCC

Regole di produzione:
S $\rightarrow$ aSBC|aBC
CB $\rightarrow$ BC
aB $\rightarrow$ ab
bB $\rightarrow$ bb
bC $\rightarrow$ bc
cC $\rightarrow$ cc

Sia dato il linguaggio $L = \{a^i b^k c^j | i > 0, j > 0, 0 \leq k \leq i + j\}$.
Determinare una grammatica generativa per L.

Esempi di parole: {ac, abc, abbc, aac, aacc, ...}

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^m c^n | n, m > 0\}$.
Determinare una grammatica generativa per L.
...
S $\rightarrow$ aSc | aBc
B bB | b

Esercizi sul Pumping Lemma

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$.
Dimostrare che L non è C.F..

L libero $\implies \exists p \in N \, \forall z \in L |z| > p$

1. $|vwx| \leq p$
2. $(vx \neq \lambda)$
3. $\forall i, \; i \geq 0 : uv^i wx^i y \in L$

Studiamo una stringa z $\in$ L $|z| > p$ (scegliendo la stringa con lunghezza maggiore di p più comoda per i calcoli)
$z = a^p b^p c^p \implies |z| = 3p > p$

$$\underbrace{a \ldots a}_{\text{p}}\underbrace{b \ldots b}_{\text{p}}\underbrace{c \ldots c}_{\text{p}}$$

In questa stringa abbiamo un p numero di a, un p numero di b ed un numero p di c.

Casi:

1. vwx formato solo da a
2. vwx formato solo da b
3. vwx formato solo da c
4. vwx formato a cavallo tra a e b
5. vwx formato a cavallo tra b e c
6. vwx non può contenere a b e c, poichè non sufficientemente lunga

Caso 1:
Prendiamo una stringa a caso (quella più semplice)
uv^2wx^2y
Prendendo la stringa pompata, possiamo aggiungere solo delle a.
Ora, il numero di a aumenta: $p + 1 \leq \#(a) \leq p + p$. Tuttavia il numero di c e b rimane

invariato, il che non rispecchia le regole del linguaggio. Quindi
$uv^2wx^2y \notin L$ poichè $\#(a) \neq \#(b) \neq \#(c)$

Caso 2 e 3:
Stessa cosa del caso 1, ripetuto però con le b e con le c.

Caso 4:
il punto vwx è a cavallo tra a e b.
Caso 4.1: $v \neq \lambda \; x = \lambda$
$v \neq \lambda \implies$ v contiene solo delle a, il che vuol dire che $wx = ab \dots b$. Pompando andremmo ad aumentare solo il numero delle a (non delle b poichè dovrebbero essere contenute nelle x, il quale è però vuoto). Anche in questo caso quindi avremmo un numero di a pari a:
$p + 1 \leq \#(a) \leq p + p - 1$ (p-1 poichè almeno una a è contenuta nelle w). Quindi
$uv^2wx^2y \notin L$ poichè $\#(a) \neq \#(b) \neq \#(c)$
Caso 4.2: $v = \lambda \; x \neq \lambda$
$x \neq \lambda \implies$ x contiene solo delle b. In questo caso quindi avremmo un numero di b pari a:
$p + 1 \leq \#(b) \leq p + p - 1$ (p-1 poichè almeno una b è contenuta nelle w). Quindi
$uv^2wx^2y \notin L$ poichè $\#(a) \neq \#(b) \neq \#(c)$
Caso 4.3: $v \neq \lambda \; x \neq \lambda$
$v \neq \lambda \quad x \neq \lambda \implies$ v contiene solo delle v e x contiene solo delle b. In questo caso quindi avremmo un numero di b pari al numero a: $p + 1 \leq \#(b) = \#(a) \leq p + p - 1$ (p-1 poichè almeno una b è contenuta nelle w). Quindi $uv^2wx^2y \notin L$ poichè $\#(a) \wedge \#(b) \neq \#(c)$

Caso 5:
Analogo al caso 4.

Sia L il linguaggio $L = \{a^{n^2} \text{ con } n \geq 0\}$.
$L = \{\lambda, a, a^4, a^9, a^{16}, \dots\}$

Per assurdo L libero $\implies$

- $\exists p \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \quad L |a| > p \quad z = uvwxy$

1. $|vwx| \leq p$
2. $vx \neq \lambda$
3. $\forall i,\ i \geq 0 : uv^iwx^iy \in L$

Prendiamo in considerazione la stringa: $z = a^{p^2} \implies |z| = p^2 > p$

Caso 1: vwx formato solo da a
$uv^2wx^2y \in L? \quad p + 1 \leq \#(a) \leq p + p$
$L = \{\lambda, a, a^4, a^9, a^{16}, \dots\ a^{p^2}, a^{(p+1)^2}\}$

$|uvwxy| < |uv^2wx^2y| = |\underline{uv}v\underline{wx}x\underline{y}| = |uvwxy| + |vx| = ||$ [PORCODDIO CONTINUA]

Sia $L = \{a^i b^j c^k \quad i > j > k > 0 \implies \#(a) > \#(b) > \#(c) > 0\}$.

Parole del linguaggio $L = \{a^3b^2c, a^4b^3c^2, a^4b^2c, a^5b^4c^3, \ldots\}$

Per assurdo L libero $\implies$

- $\exists p \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \quad L|a| > p \quad z = uvwxy$

1. $|vwx| \leq p$
2. $vx \neq \lambda$
3. $\forall i,\ i \geq 0 : uv^iwx^iy \in L$

Consideriamo la stringa: $z = a^{p+2}b^{p+1}c^p \quad |z| = 3p + p > p$

Caso 1: vwx formata solo da a
Caso 2: vwx formata solo da b
Caso 3: vwx formata solo da c
Caso 4: vwx formata a cavallo tra a e b
Caso 5: vwx formata a cavallo tra b e c

[GUARDA FOTO E COMPLETA]