Python para Físicos

Lista de Exercícios

Exercício 1 A posição em função do tempo de uma bola de tênis em queda livre está registrada no arquivo “dados_bola_caindo.dat" (tempo em segundos e posição em metros) .

a) Com os dados, faça o gráfico da posição *versus* tempo. Inclua nome dos eixos com suas respectivas **unidades**. Utilize NumPy para ler o arquivo.

b) A posição de uma partícula em função do tempo, em queda livre no vácuo, é dada por

$$y1 = y_0 - \frac{g}{2}t^2.$$

Se levarmos em conta a resistência do ar, a posição pode ser descrita pela seguinte função:

$$y2 = y_0 - \frac{v_T^2}{g} log\left(cosh\frac{gt}{v_T}\right)$$

onde $v_T = \sqrt{g/D}$, g é a aceleração da gravidade e $D = 0.065\,m^{-1}$.

Acrescente ao gráfico posição *versus* tempo dos dados o gráfico dos dois modelos $y1$ e $y2$ na mesma figura. Utilize pontos para os dados, linha azul para o modelo sem resistência do ar e vermelho para o modelo com resistência do ar. Acrescente a legenda. O valor de y_0 é 2 m. Qual modelo melhor descreve os dados ?

c) Com os dados, faça o gráfico da velocidade média da bola em função do tempo (utilize NumPy para o cálculo da velocidade). Quais os valores máximo e mínimo da velocidade ?

Exercício 2 Considerando a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

verifique numericamente que os autovalores e autovetores de **A**, para quaisquer valores de α e β de sua escolha, são:

$$\mathbf{x}_{1,2} = \begin{pmatrix} +1 \\ \mp i \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \alpha \mp i\beta.$$

Exercício 3 A matriz simétrica que representa o tensor momento de inércia de um conjunto de massas m_i, com posições x_i, y_i e z_i em relação ao **centro de massa**, é

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

onde

$$I_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2), \quad I_{yy} = \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2), \quad I_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2),$$

$$I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i, \quad I_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i, \quad I_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i.$$

Existe uma transformação no sistema coordenadas tal que essa matriz é diagonal. Os eixos dessa transformação são chamados eixos principais, e os elementos da diagonal são chamados *momentos principais de inércia*. Note que estes correspondem ao autovalores da matriz **I**.

Escreva um programa para calcular os momentos principais de inércia de uma molécula dada a massa e a posição dos seu átomos *em relação a uma origem arbitrária*. Inicialmente, seu programa deve realocar as coordenadas dos átomos da molécula em relação ao centro de massa. Teste seu programa para as moléculas NH_3, CH_4, CH_3Cl e O_3, com as informações disponíveis no arquivo `dados_moleculas.dat`.

Observação: O vetor que define a posição do centro de massa de um sistema de partículas é $\mathbf{R} = (1/M)\sum_i m_i \mathbf{r}_i$, com $M = \sum_i m_i$.

Exercício 4 Considere um sistema de tubos que conecta três tubos de entrada a três tubos de saída. O fluído que sai em cada tubo (*out*) é dado em termos do fluido que entra em cada tudo de entrada (*in*) por:

$$f_1^{out} = \frac{1}{6} f_1^{in} + \frac{1}{3} f_2^{in} + \frac{1}{2} f_3^{in},$$

$$f_2^{out} = \frac{1}{3} f_1^{in} + \frac{1}{3} f_2^{in} + \frac{1}{2} f_3^{in},$$

$$f_3^{out} = \frac{1}{2} f_1^{in} + \frac{1}{3} f_2^{in}.$$

Suponha que a vazão no primeiro tudo de saída seja (4/3) litros/segundo (L/s), (3/2) L/s no segundo, e (7/6) L/s no terceiro. Determine a vazão do fluído em cada tubo de entrada.

Exercício 5 A radiância espectral de um corpo negro a temperatura T (em Kelvin) em função do comprimento de onda λ é dada pela lei de Planck:

$$B(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1}.$$

Escreva um programa para fazer o gráfico de $B(\lambda)$ entre $\lambda = 100$ e $\lambda = 4000$ nm para três valores de T: 3000 K, 4000 k e 5000 K. Use NumPy para calcular $B(\lambda)$ e modifique o range do eixo x para (0,4000). Acrescente legendas ao gráfico e altere o tamanho padrão dos *labels* dos eixos. Valores das constantes: h = 6.626 x 10^{-34} Js, c = 2.998 x 10^8 m/s e k_B = 1.381 x 10^{-23} J/K.

Exercício 6 Faça um gráfico polar, no intervalo $0 \leq \theta \leq 24\pi$, da curva da borboleta, dada pela seguinte equação:

$$r = e^{\operatorname{sen}\theta} - 2\cos 4\theta + \operatorname{sen}^5\left(\frac{2\,\theta - \pi}{24}\right).$$

Exercício 7 Suponha que uma pedra caia numa piscina, produzindo ondas que se propagam a partir do ponto de impacto. Esse sistema pode ser modelado como ondas senoidais se propagando em círculos. Se o centro do círculo tem coordenadas (x_1, y_1), então a distância r_1 do centro a um ponto x, y é

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

e o descolamento da onda pode ser escrito como

$$\psi_1 = \psi_0 \operatorname{sen} kr_1,$$

onde ψ_0 é a amplitude e k o número de onda, relacionado ao comprimento de onda λ por $k = 2\pi/\lambda$. Suponha que uma outra pedra caia na piscina no ponto x_2, y_2, produzindo também ondas circulares de mesma amplitude e comprimento de onda:

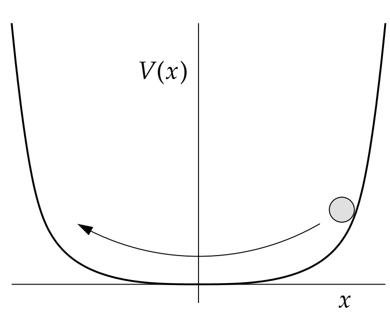
$$\psi_2 = \psi_0 \operatorname{sen} kr_2, \quad \text{com} \quad r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}.$$

A onda resultante da superposição é dada por

$$\psi(x, y) = \psi_0 \operatorname{sen} kr_1 + \psi_0 \operatorname{sen} kr_2.$$

Sendo $\lambda = 5$ cm, $\psi_0 = 1$ cm e assumindo que os centros dos círculos estão afastados por 20 cm, escreva um programa em Python para calcular $\psi(x, y)$ e use a função `plt.imshow()` para obter uma imagem do padrão de interferência das ondas numa área de 1 m^2 da piscina.

Exercício 8 Um movimento oscilatório pode ser modelado como uma partículas de massa m confinada num "poço" de potencial simétrico $V(x)$, como mostrado na figura abaixo.



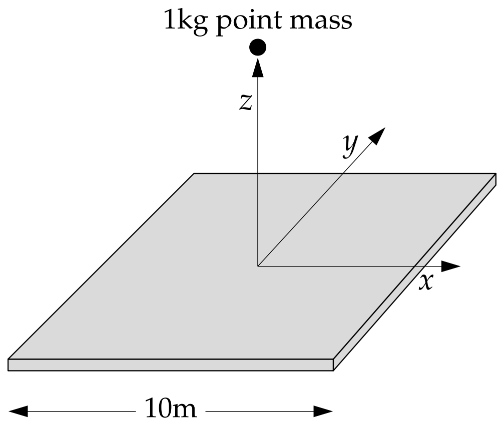
A medida que a partículas se desloca, para direita ou para esquerda, sua energia potencial $V(x)$ aumenta. Suponha que a partículas é solta, a partir do repouso, da posição $x = a$. Nesse caso, sua energia potencial (e total) é $V(a)$, e o período de oscilação do movimento é dado por

$$T = \sqrt{8m} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{V(a) - V(x)}}$$

a) Suponha que $V(x) = x^4$ e $m = 1$. Escreva uma função em Python para calcular o período T e faça o gráfico de T em função de a para valores de a entre $a = 0$ e $a = 2$. Não esqueça de incluir no gráfico o nome dos eixos.

b) O que acontece com o período a medida que a amplitude a aumenta ? Explique o resultado.

Exercício 9 Suponha que uma placa de metal quadrada e uniforme está flutuando no espaço. A placa tem 10 m de lado, espessura desprezível e massa de 10 toneladas.



A força gravitacional entre a placa e uma massa pontual de 1 kg, localizada a uma distância z do centro da placa, é:

$$F_z = G\sigma z \iint_{-L/2}^{L/2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

onde $G = 6.674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}$ é a constante gravitacional e σ a densidade superficial da placa (massa por unidade de área). Utilizando a função `scipy.integrate.dblquad`, calcule e faça um gráfico da força F_z em função de z no intervalo $z = 0$ a $z = 10\,\mathrm{m}$. Esse cálculo pode ser usado como um modelo simplificado da atração gravitacional de uma galáxia. Para galáxias espirais, como a Via Láctea, a maior parte da massa está distribuída num plano de espessura relativamente pequena.

Exercício 10 Considere o seguinte sistema de EDOs:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma(y - x), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = rx - y - xz, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - bz,$$

onde σ, r, e b são constantes. As equações acima foram estudadas por Edward Lorenz em 1963, que as obteve a partir de uma modelagem simplificada do clima.

a) Escreva um programa para resolver as equações de Lorenz para o caso $\sigma = 10$, $r = 28$, e $b = \frac{8}{3}$ no intervalo $t = 0$ a $t = 50$, com condições iniciais $(x, y, z) = (0, 1, 0)$. Faça um gráfico de y em função do tempo. Você considera esse sistema previsível ?

b) Faça um gráfico de z em função de x. O belo gráfico produzido, que lembra uma borboleta, é conhecido como "atrator estranho".