Passaggio da problemi a linguaggi

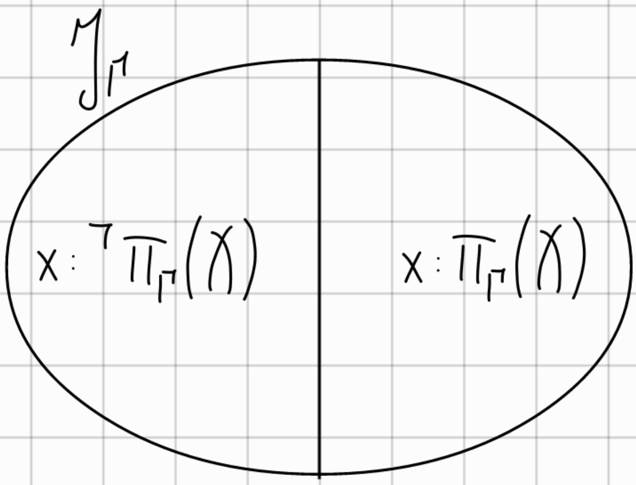
Dato Γ problema decisionale

$$\Gamma = < I_\Gamma, S_\Gamma, \pi_\Gamma >$$

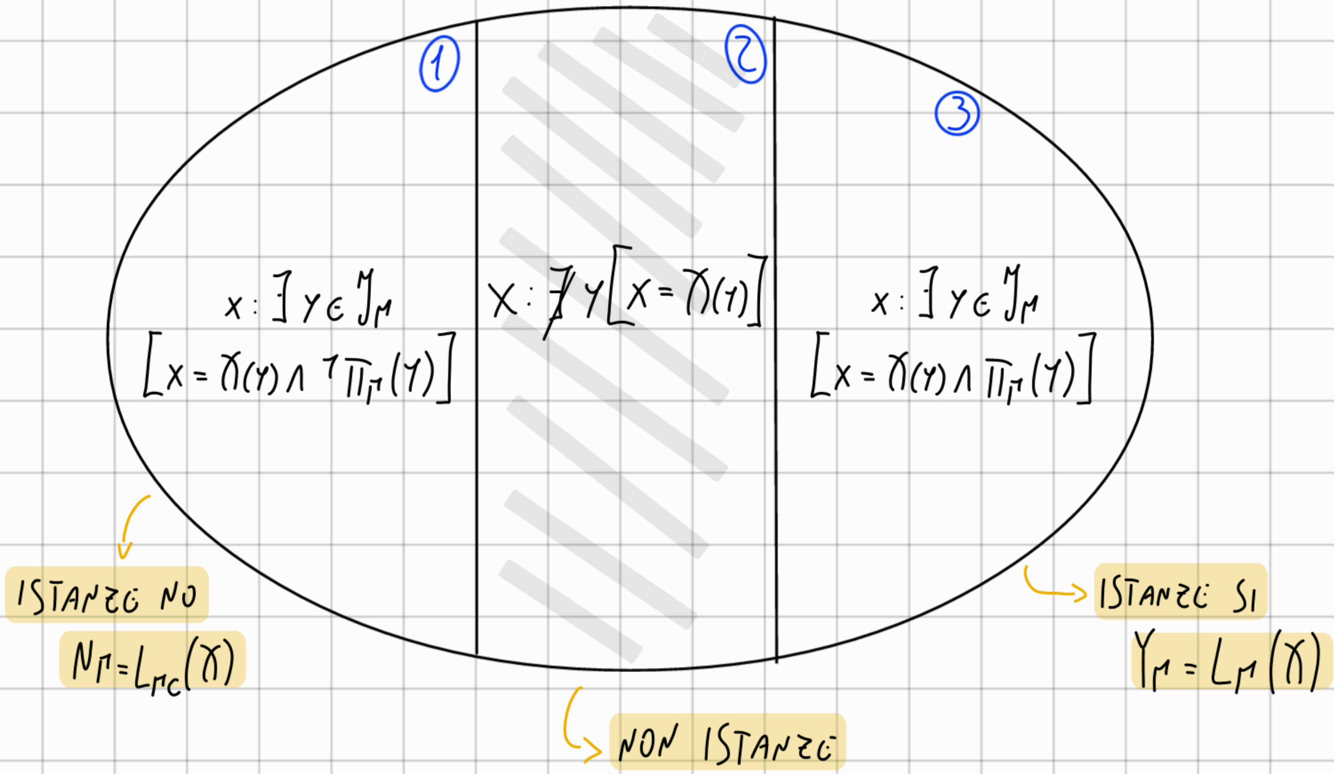
Sia γ una codifica ragionevole di I_Γ

$$\gamma : I_\Gamma \longrightarrow \Sigma^*$$

Possiamo rappresentare l'insieme delle istanze I_Γ come:



Rappresentiamo ora Σ^*



1) ESISTE UNA CODIFICA CHE RENDE IL PREDICATO SEMPRE NO

2) NON ESISTE $Y \in \mathcal{J}_M$, UNA NON CODIFICA

3) ESISTE UNA CODIFICA CHE RENDE IL PREDICATO SEMPRE SI:

$$L_M(\gamma) = \{ x \in \Sigma^* : y \in \mathcal{J}_M [x = \gamma(y) \wedge \Pi_M(y)] \}$$

ESEMPIO

$3\text{-}SAT(\gamma_1)$

DATA $x \in \{0, \dots, 4\}^*$, $x \in L_{3\text{-}SAT}(\gamma_1)$?

1) DECIDERE SE $\exists y \in \mathcal{J}_{3\text{-}SAT} : x = \gamma(y)$ → $\gamma : \mathcal{J}_M \longrightarrow \Sigma^*$

2) SE CODIFICA, DECIDERE SE $\Pi_{3\text{-}SAT}(y)$ È VERO

POSSIAMO VEDERE $\gamma(\mathcal{J})$ COME IL LINGUAGGIO DEFINITO:

$$\gamma(\mathcal{J}) = \{ x \in \Sigma^* : \exists y \in \mathcal{J}_M [x = \gamma(y)] \}$$

QUINDI POSSIAMO SCRIVERE

$x = \gamma(y) \Rightarrow y = \gamma^{-1}(x)$

$$L_M(\gamma) = \{ x \in \Sigma^* : x \in \gamma(\mathcal{J}_M) \wedge \Pi_M(\gamma^{-1}(x)) \}$$ → PORTIAMO TUTTO IN RELAZIONE AD X

NOTIAMO PERÒ CHE

a) TROVARE UNA CODIFICA CHE SIA UN'ISTANZA SI È NP-COMPLETO $(x \in \gamma(\mathcal{J}_{3\text{-}SAT}))$

b) VERIFICARE IL PREDICATO $\Pi_{3\text{-}SAT}(\chi^{-1}(x)) \in P$ QUESTE OSSERVAZIONI VERRANNO ESAMINATE NELLE PROSSIME LEZIONI

CLASSE DI COMPLESSITÀ

SIA $\mathcal{C}$ UNA CLASSE DI COMPLESSITÀ

$$\Gamma \in \mathcal{C} \iff \exists \text{ una codifica ragionevole } \chi \left[L_\Gamma(\chi) \in \mathcal{C} \right]$$

ESEMPIO

P_{HC}

DATI UN GRAFO $G=(V,E)$ CHE CONTIENE UN CICLO HAMILTONIANO E 2 NODI s, t

CAPIRE SE $\exists$ UN CAMMINO DA s A t

FORMALIZZIAMO ORA IL PROBLEMA

$$\mathcal{I}_{PHC} = \{ \langle G(V,E), s, t \rangle : G \text{ contiene un ciclo hamiltoniano e } s, t \in V \}$$

$$S_{PHC}(G,s,t) = \{ P : \text{cammino in } G \}$$

$$\Pi_{PHC}(G,s,t,S(G,s,t)) = \exists\, P \text{ che connette } s \text{ a } t$$

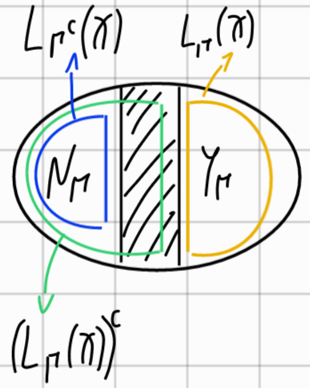
POSSIAMO VEDERE CHE TUTTA LA COMPLESSITÀ DEL PROBLEMA È IN $\mathcal{I}_{HC}$ IN QUANTO CAPIRE SE UN GRAFO AMMETTA UN CAMMINO HAMILTONIANO È NP-C

QUINDI $L_{PHC}(\chi) \in NP\text{-completo} \longrightarrow (L_{PHC}(\chi))^c \in CoNP\text{-completo}$

COMPRENDE SIA $N(\Gamma)$ CHE LA STRISCIA

$(L_{\Pi^c}(\gamma))^c$ COMPRENDE SIA N_Π CHE LE NON ISTANZE, PUÒ CREARE PROBLEMI IN QUANTO NON SAPPIAMO DEFINIRE $L_{\Pi^c}(\gamma)$

N_Π



TEOREMA

DATO $\Pi = \langle \mathcal{I}_\Pi, S_\Pi, \pi_\Pi \rangle$ E UNA CODIFICA RAGIONEVOLE $\gamma : \mathcal{I}_\Pi \longrightarrow \Sigma^*$

SE $\gamma(\mathcal{I}_\Pi) \in P$ E $L_\Pi(\gamma) \in NP \Rightarrow L_{\Pi^c}(\gamma) \in \text{CO-}NP$

DIMOSTRAZIONE

DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE $(L_{\Pi^c}(\gamma))^c \in NP$

$(L_{\Pi^c}(\gamma))^c$ COMPRENDE SIA Y_Π CHE LE NON ISTANZE

1) $\gamma(\mathcal{I}_\Pi) \in P \Rightarrow \exists T, h : \forall x \in \Sigma^* [T(x) = q_A \Leftrightarrow x \in \gamma(\mathcal{I}_\Pi) \land dTime(T, x) \in O(|x|^h)]$

MACCHINA CHE DECIDE SE UNA STRINGA SIA ISTANZA

2) $L_\Pi(\gamma) \in NP \Rightarrow \exists NT, k : \forall x \in L_\Pi(\gamma) [NT(x) = q_A \Leftrightarrow nTime(NT, x) \in O(|x|^k)]$ E $\forall x \notin L_\Pi(\gamma) [NT(x) \neq q_A]$

MACCHINA CHE VERIFICA CHE x SIA UN'ISTANZA SI

3) CREO LA MACCHINA NT_0 CHE ACCETTA $(L_{\Pi^c}(\gamma))^c$:

3.a) ESEGUO $T(x)$:

SE $T(x)$ RIGETTA: NT_0 ACCETTA

SE $T(x)$ ACCETTA: PROCEDI A FASE b

3.b) ESEGUO $NT(x)$:

SE $NT(x)$ ACCETTA: NT_0 ACCETTA

SE $NT(x)$ NON ACCETTA: NON CI INTERESSA

ABBIAMO USATO LA DEFINIZIONE DI NT CON L'ACCETTAZIONE

4) NT_0 ACCETTA $\left(L_{\Pi^c}(\gamma)\right)^c = \left(\gamma(\mathcal{I}_\Pi)\right)^c \lor L_\Pi(\gamma)$

NON ISTANZE — ISTANZE SI

5) $\forall x \in \left(L_{\Pi^c}(\gamma)\right)^c : ntime(NT_0, x) \in O\left(|x|^h + |x|^k\right),\ NT_0 \in NP$

6) $\left(L_{\Pi^c}(\gamma)\right)^c \in NP \Rightarrow L_{\Pi^c}(\gamma) \in coNP$