

Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 4 Ordinamento

Ordinamento

Dato un insieme S di n oggetti presi da un dominio totalmente ordinato, ordinare S

- Esempi: ordinare una lista di nomi alfabeticamente, o un insieme di numeri, o un insieme di compiti d'esame in base al cognome dello studente
- Subroutine in molti problemi
- È possibile effettuare ricerche in array ordinati in tempo $O(\log n)$

Il problema dell'ordinamento

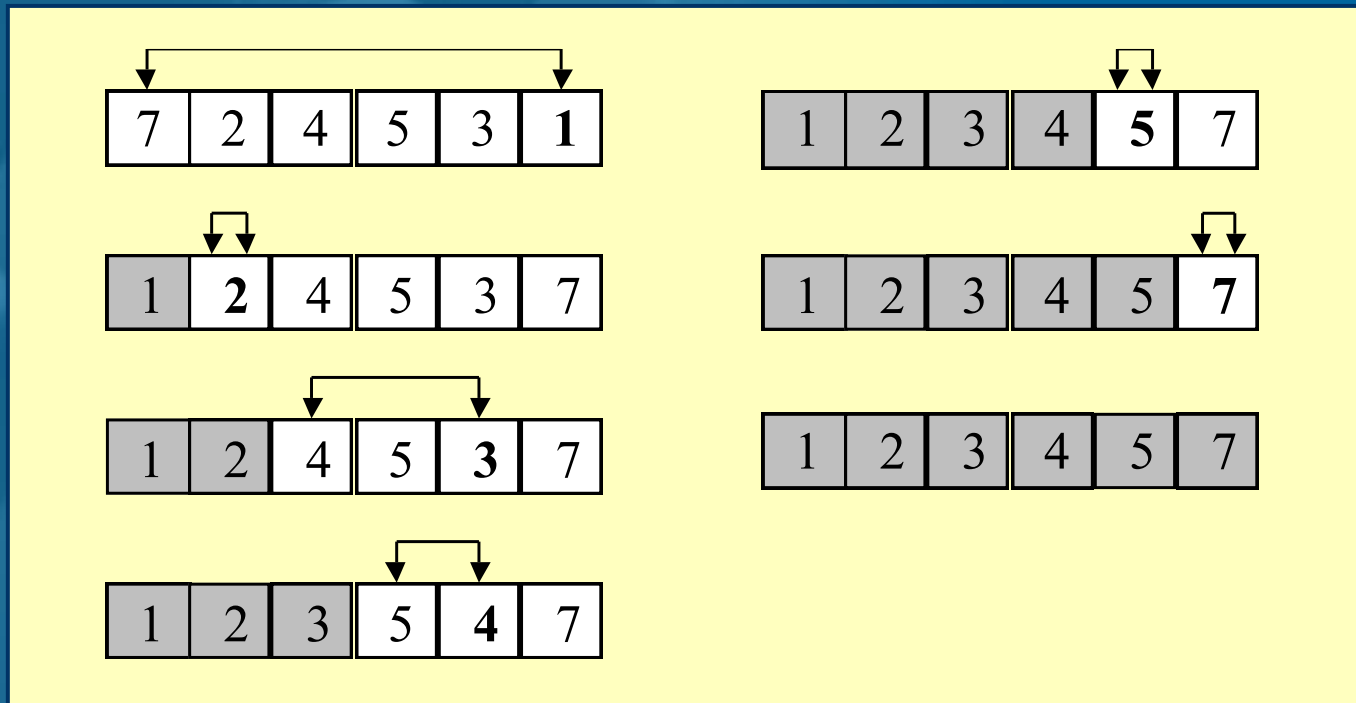
- **Input:** una sequenza di n numeri $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$
- **Output:** una permutazione (riarrangiamento) $\langle a_1', a_2', \dots, a_n' \rangle$ della sequenza di input tale che $a_1' \leq a_2' \leq \dots \leq a_n'$

Ordinare in tempo quadratico

Un algoritmo semplice,
intuitivo, facile da
programmare.
E inefficiente.

SelectionSort

Approccio incrementale: estende l'ordinamento da k a $k+1$ elementi, scegliendo il minimo degli $n-k$ elementi non ancora ordinati e mettendolo in posizione $k+1$



SelectionSort (A)

1. **for** $k=0$ **to** $n-2$ **do**
2. $m = k+1$
3. **for** $j=k+2$ **to** n **do**
4. **if** ($A[j] < A[m]$) **then** $m=j$
5. scambia $A[m]$ con $A[k+1]$

- al generico passo k , $A[1], \dots, A[k]$ sono già ordinati
- linee 2-4: ricerca del minimo fra gli elementi $A[k+1], \dots, A[n]$
- m è l'indice dell'array in cui si trova il minimo
- il minimo è messo in posizione $k+1$

Corretto?

- E' facile convincersi che l'algoritmo mantiene le seguenti *invarianti*: dopo il generico passo k ($k=0, \dots, n-2$) abbiamo che:
 - (i) i primi $k+1$ elementi sono ordinati e
 - (ii) sono i $k+1$ elementi più piccoli dell'array

Suggerimento: ragionare per invarianti è uno strumento utile per dimostrare la correttezza di un algoritmo, perché permette di isolare proprietà dell'algoritmo, spiegarne il funzionamento, capire a fondo l'idea su cui si basa.

Complessità temporale (analisi)

$T(n)$ = #operazioni elementari sul **modello RAM** a costi uniformi eseguite dall'algoritmo nel **caso peggiore** su istanze di **dimensione n** .

Complessità: un upper bound

SelectionSort (A)

```
1.  for k=0 to n-2 do
2.      m = k+1
3.      for j=k+2 to n do
4.          if (A[j] < A[m]) then m=j
5.      scambia A[m] con A[k+1]
```

} eseguite
al più n
volte per
ogni ciclo
esterno

} ciclo esterno
eseguito al più
 n volte

ogni linea di codice costa tempo $O(1)$

$$T(n) \leq 5 n^2 O(1) = \Theta(n^2) \quad \longrightarrow \quad T(n) = O(n^2)$$

L'analisi è stretta? Cioè, $T(n)$ è $\Theta(n^2)$?

Complessità: un lower bound

SelectionSort (A)

1. **for** k=0 **to** n-2 **do**
2. m = k+1
3. **for** j=k+2 **to** n **do**
4. **if** (A[j] < A[m]) **then** m=j
5. scambia A[m] con A[k+1]

Idea: conto solo i
confronti fra
elementi

} n-k-1
confronti

$$T(n) \geq \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k = n(n-1)/2 = \Theta(n^2)$$



$$T(n) = \Omega(n^2)$$



$$T(n) = \Theta(n^2)$$

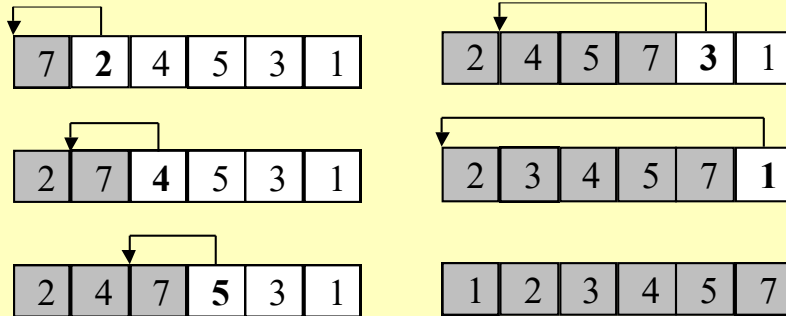


altri algoritmi di ordinamento
con tempo $O(n^2)$



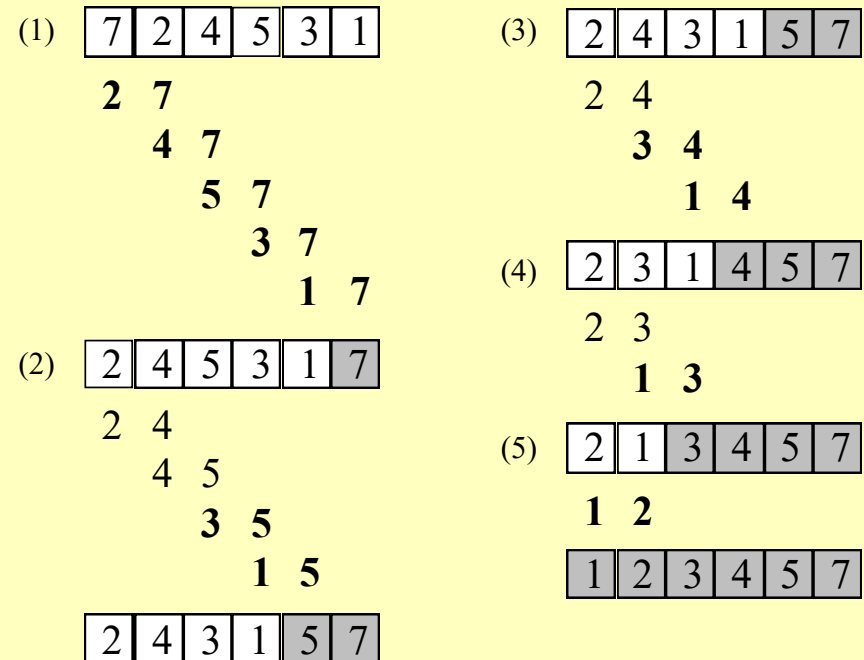
Insertion Sort

Approccio incrementale: estende l'ordinamento da k a $k+1$ elementi, posizionando l'elemento $(k+1)$ -esimo nella posizione corretta rispetto ai primi k elementi



Bubble Sort

Approccio incrementale: esegue $n-1$ scansioni. Ad ogni scansione guarda coppie di elementi adiacenti e li scambia se non sono nell'ordine corretto.





Insertion Sort

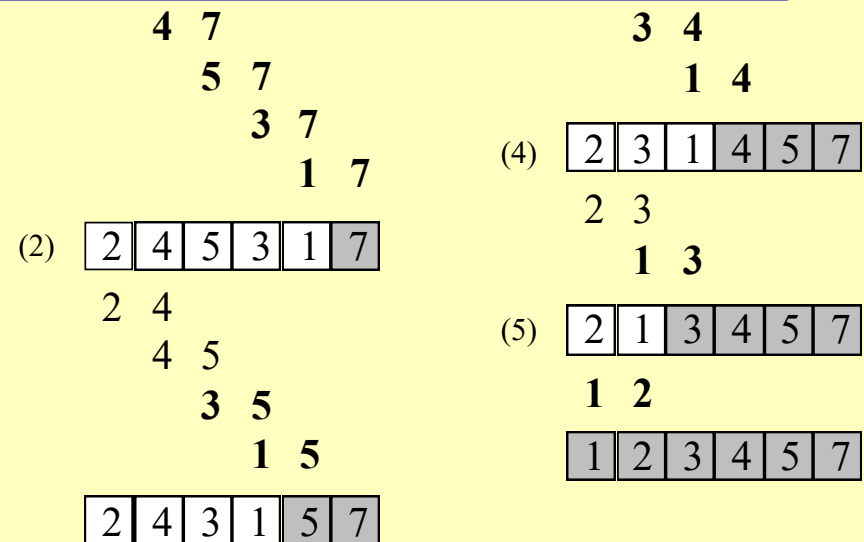
Approccio incrementale: estende l'ordinamento da k a $k+1$ elementi, posizionando l'elemento $(k+1)$ -

a

Esercizio

Scrivere lo pseudocodice dei due algoritmi e fare l'analisi della complessità temporale nel caso peggiore.

Approccio incrementale: esegue $n-1$ scansioni. Ad ogni scansione guarda coppie di elementi adiacenti e li scambia se non sono nell'ordine corretto.



Ordinare in tempo meno che quadratico

Un algoritmo semplice, un po' meno intuitivo, facile da programmare.

E temporalmente efficiente.

Tecnica: Divite et Impera

MergeSort

- Usa la tecnica del **divide et impera**:
 - 1 **Divide**: dividi l'array a metà
 - 2 Risolvi i due sottoproblemi ricorsivamente
 - 3 **Impera**: fondi le due sottosequenze ordinate

MergeSort (A, i, f)

1. **if** (i < f) **then**
2. $m = \lfloor (i+f)/2 \rfloor$
3. MergeSort(A,i,m)
4. MergeSort(A,m+1,f)
5. Merge(A,i,m,f)

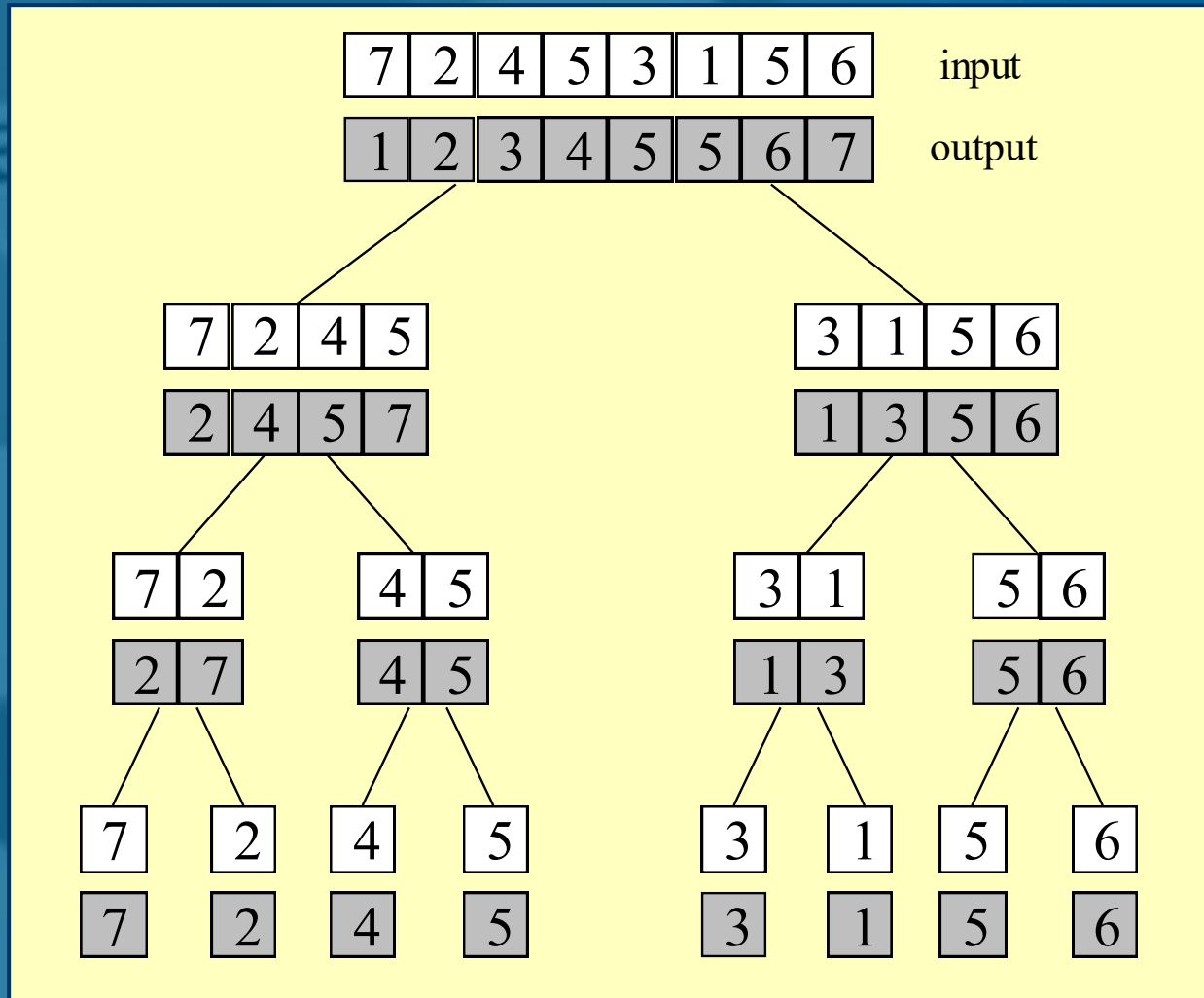
ordina $A[i;f]$

chiamata iniziale:
 $\text{MergeSort}(A,1,n)$

fonde $A[i;m]$ e $A[m+1;f]$
output in $A[i;f]$

Notazione: dato un array A e due indici $x \leq y$, denotiamo con $A[x;y]$ la porzione di A costituita da $A[x], A[x+1], \dots, A[y]$

Esempio di esecuzione



Albero delle
chiamate
ricorsive

Procedura Merge

- Due array ordinati A e B possono essere fusi rapidamente:
 - estrai ripetutamente il minimo di A e B e copialo nell'array di output, finché A oppure B non diventa vuoto
 - copia gli elementi dell'array non vuoto alla fine dell'array di output

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|--|--|--|--|--|--|--|
| 1 | | | | | | | |
|---|--|--|--|--|--|--|--|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|

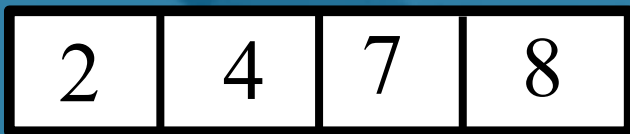
| | | | | | | | |
|---|---|--|--|--|--|--|--|
| 1 | 2 | | | | | | |
|---|---|--|--|--|--|--|--|

The diagram illustrates the merge sort algorithm in three stages. At the bottom, an array of 8 elements is shown, with the first three containing the numbers 1, 2, and 3, and the remaining five being empty. An upward arrow points from the third element (3) to the second array above. The second array has four elements: 1, 3, 4, and 5. Another upward arrow points from its second element (3) to the top array. The top array also has four elements: 2, 4, 7, and 8. All arrays are represented as horizontal rows of white boxes with black borders, and all numbers are in a black serif font.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|--|--|--|--|--|
| 1 | 2 | 3 | | | | | |
|---|---|---|--|--|--|--|--|



| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|--|--|--|--|
| 1 | 2 | 3 | 4 | | | | |
|---|---|---|---|--|--|--|--|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|--|--|--|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | | | |
|---|---|---|---|---|--|--|--|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|--|--|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | | |
|---|---|---|---|---|---|--|--|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|

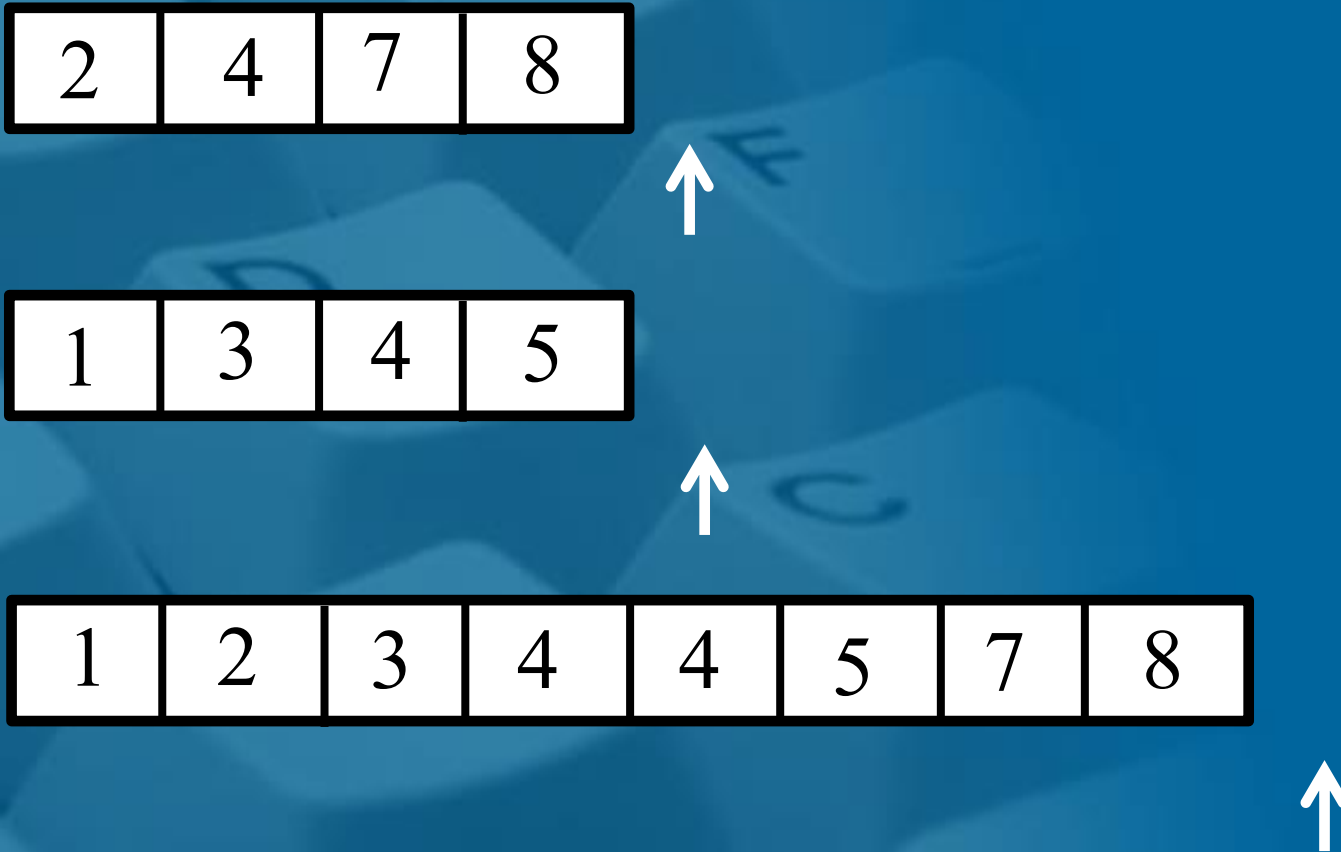
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|--|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|



A diagram illustrating a sequence of operations on arrays. It features three horizontal arrays of numbers, each enclosed in a black border. The bottom array contains the numbers 1, 2, 3, 4, 4, 5, 7, and 8. The middle array contains 1, 3, 4, and 5. The top array contains 2, 4, 7, and 8. Three white arrows point upwards: one from the 4th element (4) of the bottom array to the 3rd element (4) of the middle array, another from the 5th element (4) of the bottom array to the 2nd element (3) of the middle array, and a third from the 6th element (5) of the bottom array to the 1st element (1) of the middle array.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

Merge (A, i_1, f_1, f_2)

1. Sia X un array ausiliario di lunghezza $f_2 - i_1 + 1$
2. $i = 1; k_1 = i_1$
3. $k_2 = f_1 + 1$
4. **while** ($k_1 \leq f_1$ e $k_2 \leq f_2$) **do**
5. **if** ($A[k_1] \leq A[k_2]$)
6. **then** $X[i] = A[k_1]$
7. incrementa i e k_1
8. **else** $X[i] = A[k_2]$
9. incrementa i e k_2
10. **if** ($k_1 \leq f_1$) **then** copia $A[k_1; f_1]$ alla fine di X
11. **else** copia $A[k_2; f_2]$ alla fine di X
12. copia X in $A[i_1; f_2]$


fonde $A[i_1; f_1]$ e $A[f_1 + 1; f_2]$
output in $A[i_1; f_2]$

Osservazione: sto
usando un array
ausiliario

Lemma

La procedure **Merge** fonde due sequenze ordinate di lunghezza n_1 e n_2 in tempo $\Theta(n_1 + n_2)$.

dim

Ogni confronto “consuma” un elemento di una delle due sequenze. Ogni posizione di X è riempita in tempo costante. Il numero totale di elementi è $n_1 + n_2$. Anche la Linea 12 (copia del vettore ausiliario) costa $\Theta(n_1 + n_2)$. 

MergeSort (A, i, f)

1. **if** (i < f) **then**
2. $m = \lfloor (i+f)/2 \rfloor$
3. MergeSort(A,i,m)
4. MergeSort(A,m+1,f)
5. Merge(A,i,m,f)

Corretto?

Sì.

- chiamate ricorsive ordinano le due metà
- il Merge le fonde correttamente

Complessità?

Tempo di esecuzione

- La complessità temporale del MergeSort è descritto dalla seguente relazione di ricorrenza:

$$T(n) = 2 T(n/2) + O(n)$$

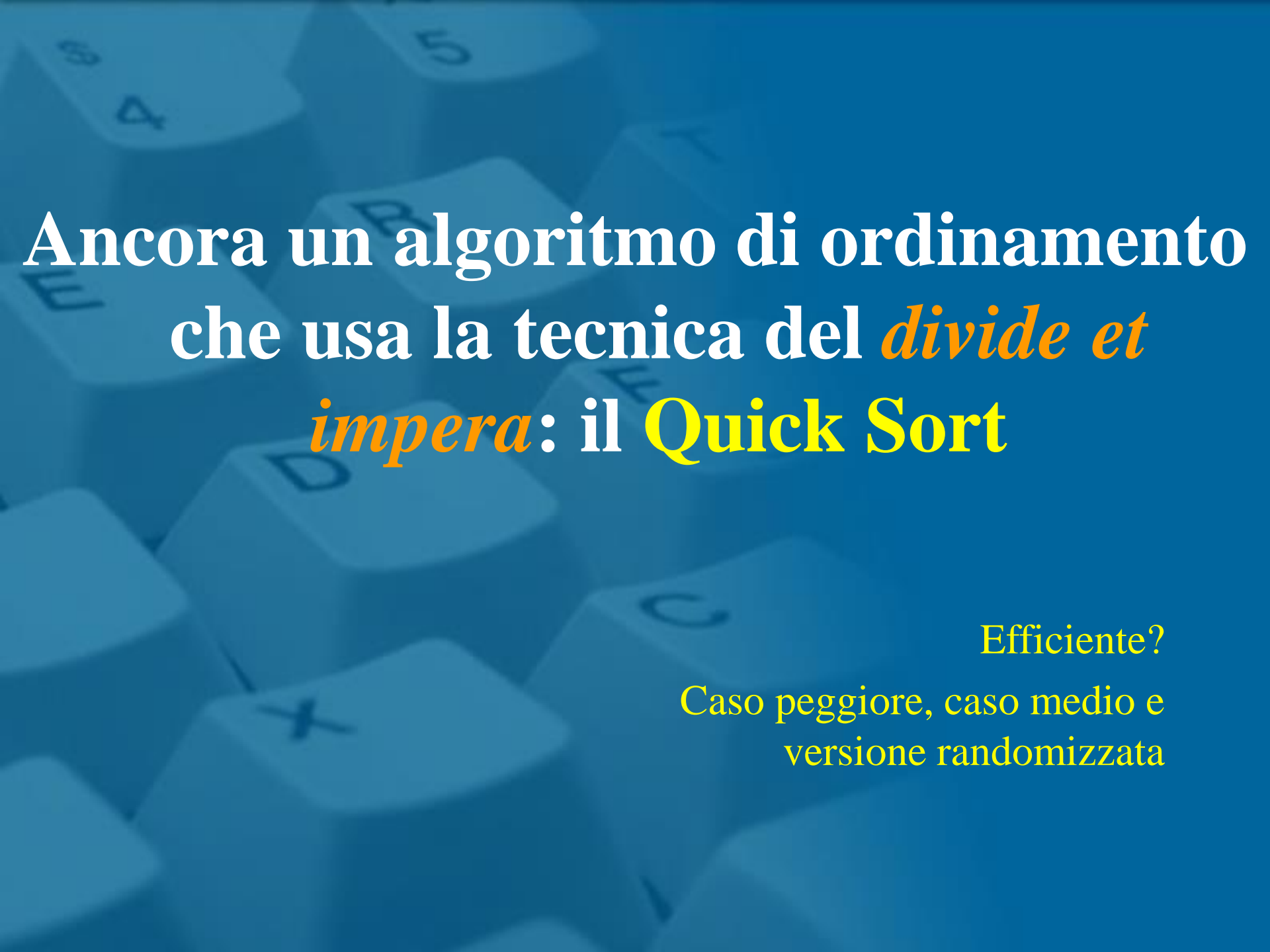
- Usando il Teorema Master si ottiene

$$T(n) = O(n \log n)$$

$$a=b=2, f(n)=O(n) \rightarrow \text{caso 2}$$

Quanta memoria (ausiliaria) usiamo?

- La complessità spaziale del **MergeSort** è $\Theta(n)$
 - la procedura Merge usa memoria ausiliaria pari alla dimensione di porzione da fondere;
 - non sono mai attive due procedure di Merge contemporaneamente;
 - ogni chiamata di MergeSort usa memoria costante (esclusa quella usata dalla procedura Merge);
 - numero di chiamate di MergeSort attive contemporaneamente sono $O(\log n)$;
- Il **MergeSort** non ordina *in loco*
 - occupazione di memoria ausiliaria (oltre input) pari a $\Theta(n)$



Ancora un algoritmo di ordinamento che usa la tecnica del *divide et impera*: il **Quick Sort**

Efficiente?

Caso peggiore, caso medio e
versione randomizzata

QuickSort

- Usa la tecnica del **divide et impera**:
 - 1 **Divide**: scegli un elemento x della sequenza (perno) e partiziona la sequenza in elementi $\leq x$ ed elementi $> x$
 - 2 Risolvi i due sottoproblemi ricorsivamente
 - 3 **Impera**: restituisci la concatenazione delle due sottosequenze ordinate

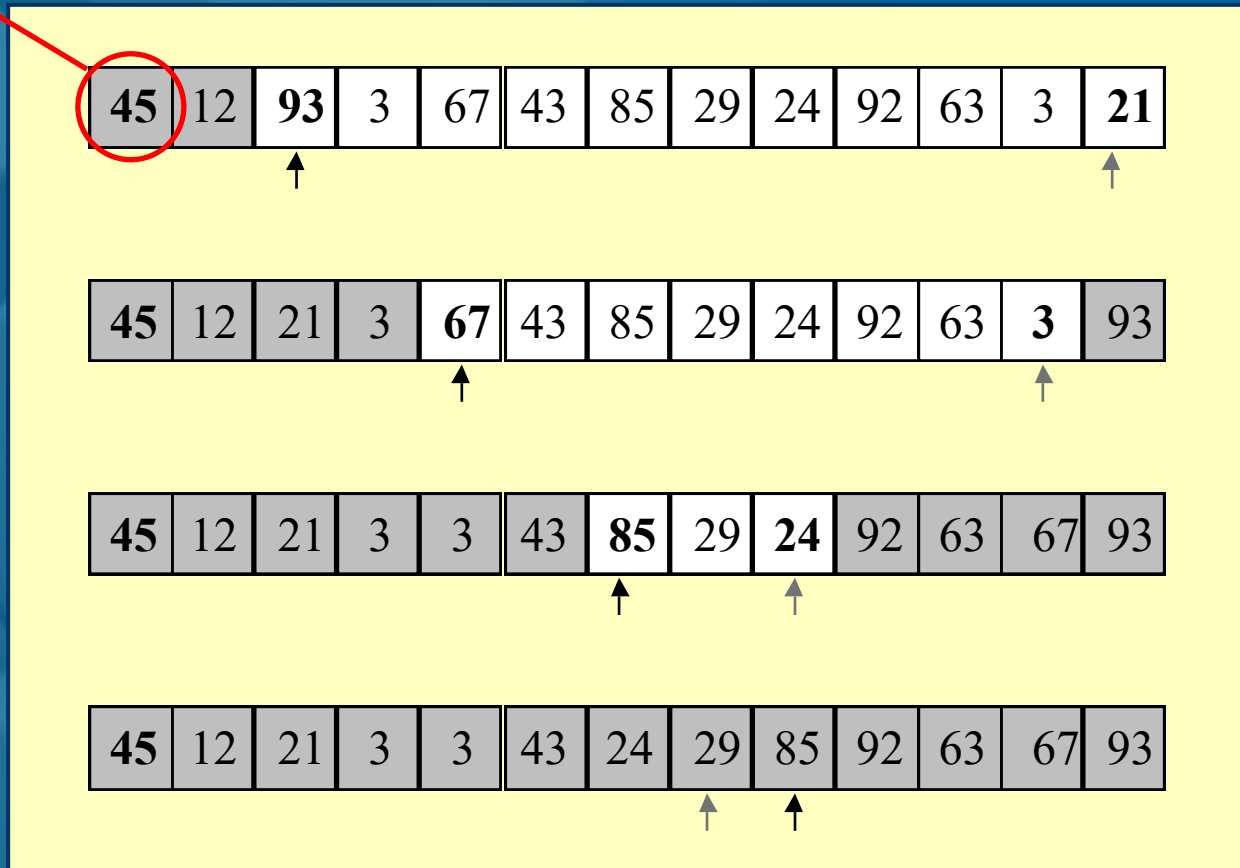
Rispetto al MergeSort, divide complesso ed impera semplice

Partizione (in loco)

- Scegli il perno
- Scorri l'array “in parallelo” da sinistra verso destra e da destra verso sinistra
 - da sinistra verso destra, ci si ferma su un elemento maggiore del perno
 - da destra verso sinistra, ci si ferma su un elemento minore del perno
- Scambia gli elementi e riprendi la scansione

Partizione in loco: un esempio

perno



Partition (A, i, f)

1. $x = A[i]$
2. $inf = i$
3. $sup = f + 1$
4. **while** (true) **do**
5. **do** ($inf = inf + 1$) **while** ($inf \leq f$ e $A[inf] \leq x$)
6. **do** ($sup = sup - 1$) **while** ($A[sup] > x$)
7. **if** ($inf < sup$) **then** scambia $A[inf]$ e $A[sup]$
8. **else break**
9. scambia $A[i]$ e $A[sup]$
10. **return** sup

partiziona $A[i;f]$
rispetto a $A[i]$

Tempo di
esecuzione:

$O(n)$

mette il perno “al centro”

restituisce l'indice del “centro”

Proprietà (invariante):

In ogni istante, gli elementi $A[i], \dots, A[inf-1]$ sono \leq del perno,
mentre gli elementi $A[sup+1], \dots, A[f]$ sono $>$ del perno

QuickSort (A, i, f)

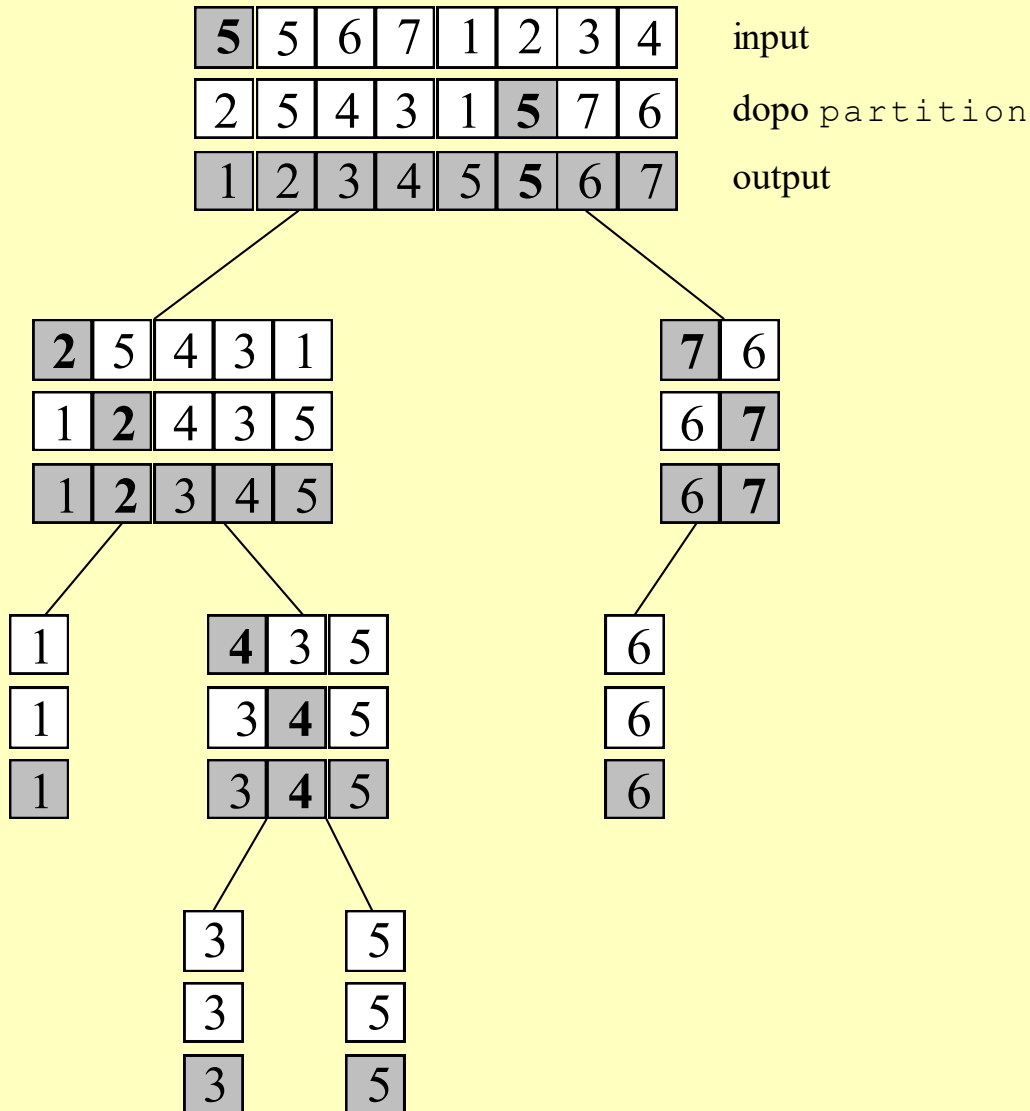
1. **if** ($i < f$) **then**
2. $m = \text{Partition}(A, i, f)$
3. QuickSort(A, i, m-1)
4. QuickSort(A, m + 1, f)

ordina $A[i;f]$

chiamata iniziale:

$\text{QuickSort}(A, 1, n)$

Esempio di esecuzione



L'albero delle chiamate ricorsive può essere sbilanciato

QuickSort (A, i, f)

1. **if** ($i < f$) **then**
2. $m = \text{Partition}(A, i, f)$
3. QuickSort(A, i, m-1)
4. QuickSort(A, m + 1, f)

Corretto?

Sì.

- dopo Partition:

$A[i:m-1]$ contiene elem \leq del perno, $A[m]$ il perno, $A[m+1:f]$ elementi $>$ del perno

- le chiamate ricorsive ordinano $A[i:f]$

Complessità?

Analisi nel caso peggiore

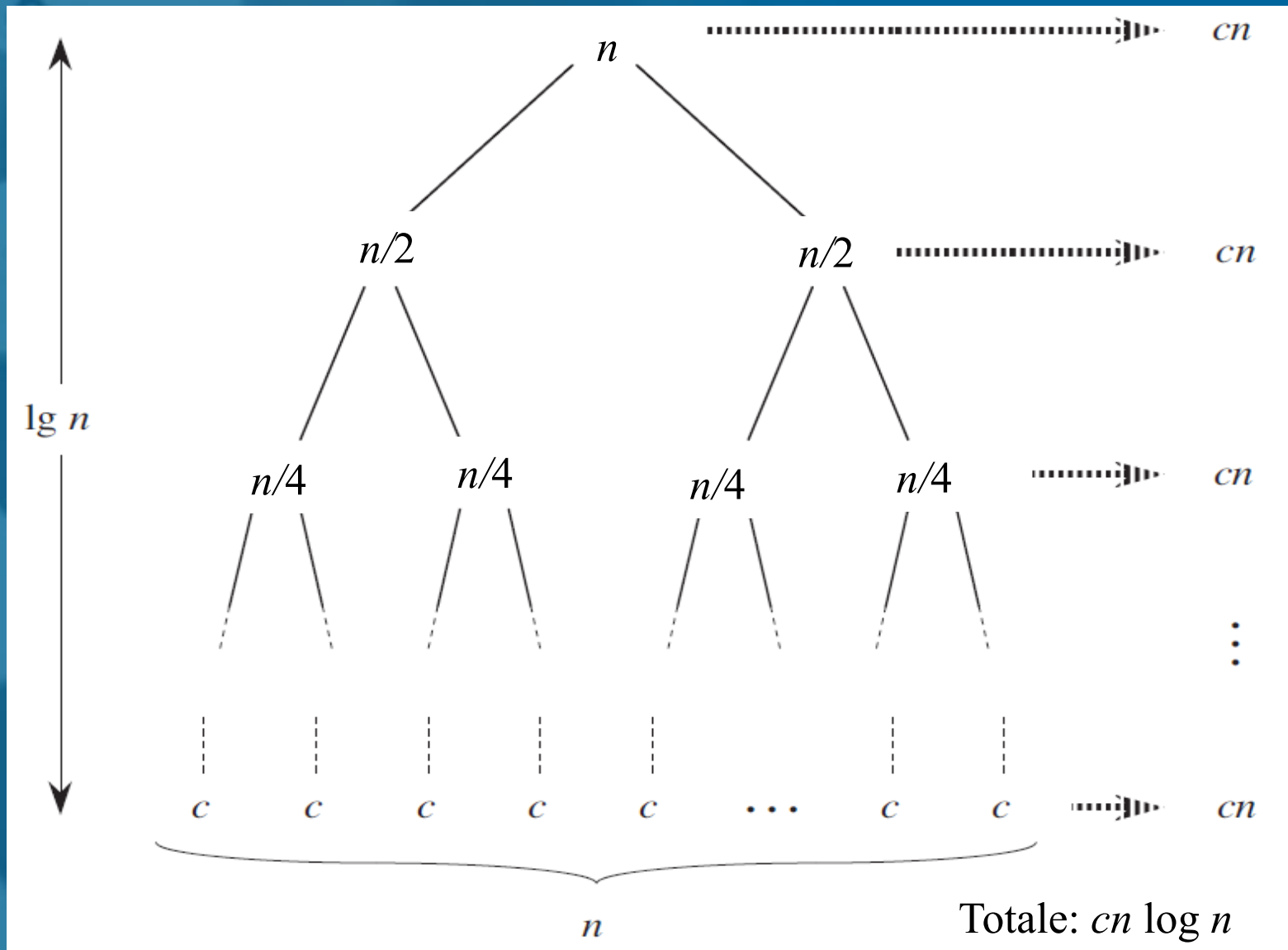
- Ogni invocazione di Partition posiziona almeno un elemento in modo corretto (il perno)
- Quindi dopo n invocazioni di Partition, ognuna di costo $O(n)$ ho il vettore ordinato. Il costo complessivo è quindi $O(n^2)$
- Il caso peggiore si verifica quando il perno scelto ad ogni passo è il minimo o il massimo degli elementi nell'array
- La complessità in questo caso è:

$$\begin{aligned}T(n) &= T(n-1) + T(0) + O(n) \\&= T(n-1) + O(1) + O(n) \\&= T(n-1) + O(n)\end{aligned}$$

➔ $T(n) = O(n^2)$

complessità nel caso migliore?

Caso migliore: $O(n \log n)$, partizionamento sempre bilanciato

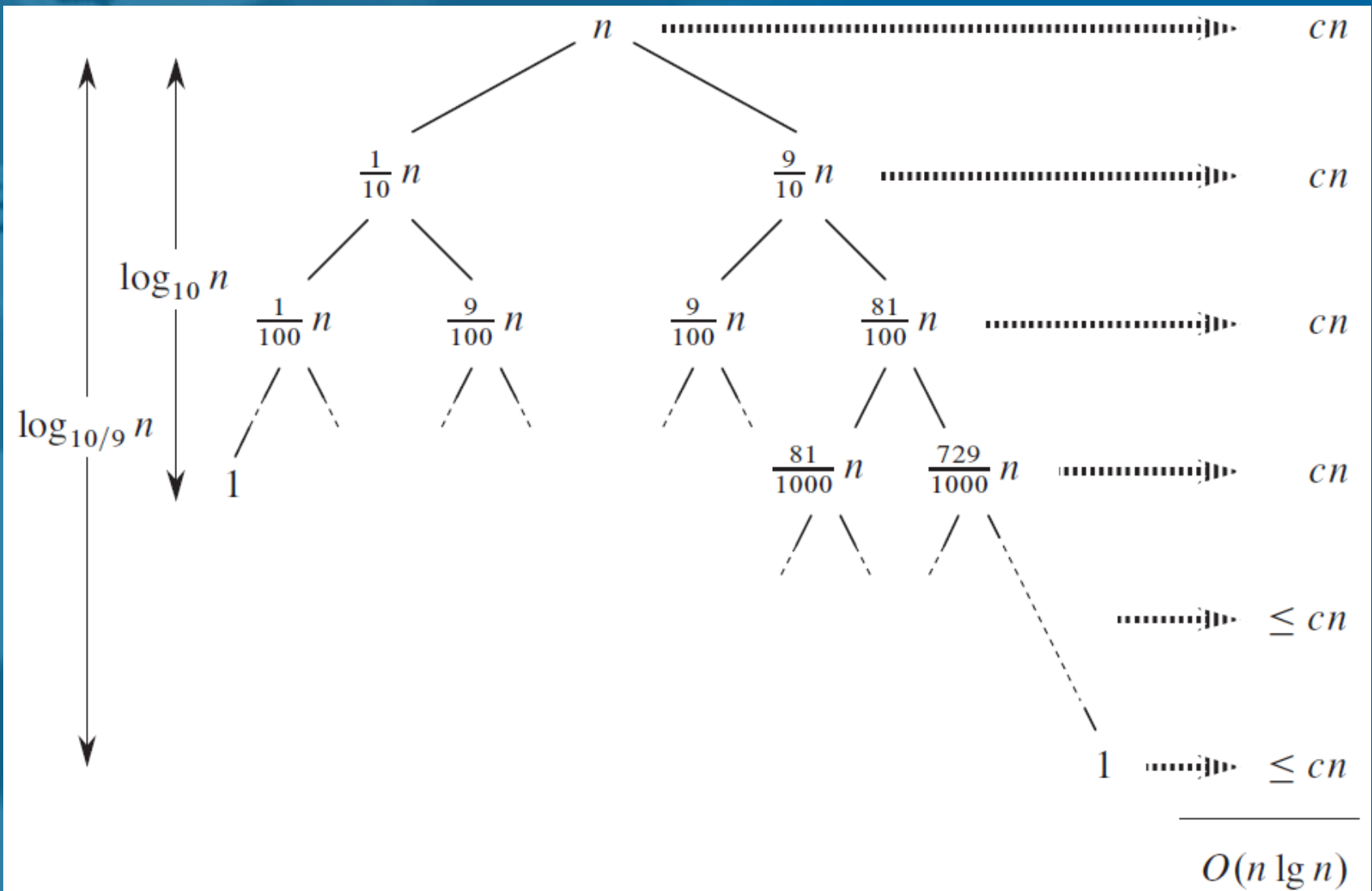


...intuizioni sul caso medio...

(penso al caso di istanze equiprobabili)

- **problema:** la partizione può essere sbilanciata
- la probabilità che ad ogni passo si presenti la partizione peggiore è molto bassa
- per partizioni che non sono “troppo sbilanciate” l’algoritmo è veloce
- **domanda:** quale è la complessità dell’algoritmo supponendo che l’algoritmo di partizionamento produca sempre una partizione proporzionale $9-a-1$?
- E se la partizione fosse sempre proporzionale a $99-a-1$?
- **Nota:** sembrano partizioni piuttosto sbilanciate...

...la complessità è ancora $O(n \log n)$



...e se le istanze non sono equiprobabili?

Versione randomizzata: scegli il perno x a caso fra gli elementi da ordinare

Teorema

L'algoritmo **quickSort** randomizzato ordina in loco un array di lunghezza n in tempo $O(n^2)$ nel caso peggiore e $O(n \log n)$ tempo atteso

...e se le istanze non sono equiprobabili?

Versione randomizzata: scegli il perno x a caso fra gli elementi da ordinare

Teorema

L'algoritmo **quickSort** randomizzato ordina in loco un array di lunghezza n in tempo $O(n^2)$ nel caso peggiore e $O(n \log n)$ con alta probabilità, ovvero con probabilità almeno $1 - 1/n$.

quickSort randomizzato

(randomizzazione \neq caso medio)

- nessuna assunzione sulla distribuzione di probabilità delle istanze
- nessun input specifico per il quale si verifica il caso peggiore
- il caso peggiore determinato solo dal generatore di numeri casuali

Analisi e progettazione di algoritmi randomizzati:
ampia e importante area di studio e ricerca