ESERCIZIO

Sia X una v.a. con densità continua $f_X(x) = c\,x(2-x)\,\mathbb{1}_{(0,2)}(x)$, dove $c>0$ è una costante da determinare.

1) Trovare il valore della costante c.

2) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.

3) Calcolare $P(X > 1/2 \mid X < 1)$.

4) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = 1/X$.

SVOLGIMENTO

1) A partire dalla condizione $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$ si ha

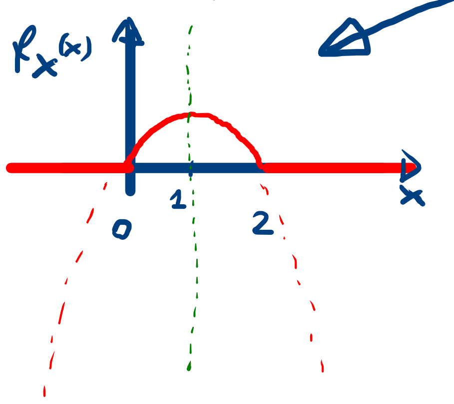
$$1 = c\int_0^2 x(2-x)\,dx = c\int_0^2 2x - x^2\,dx = c\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=2} = c\left(2^2 - \frac{2^3}{3}\right) = c\left(4 - \frac{8}{3}\right) = c\,\frac{12-8}{3} = \frac{4}{3}c$$

da cui segue $c = \frac{3}{4}$.

2) $\mathbb{E}[X] = \int_0^2 x \, \frac{3}{4} x(2-x)\,dx = \frac{3}{4}\int_0^2 2x^2 - x^3\,dx = \frac{3}{4}\left[2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{3}{4}\left[2\cdot\frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4}\right] =$

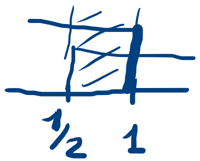
$= \frac{3}{4}\left[\frac{16}{3} - \frac{16}{4}\right] = \frac{3}{\cancel{4}}\cdot \cancel{16}^{4}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = \cancel{12}\,\frac{4-3}{\cancel{12}} = 1$

(Questo risultato è in accordo con la simmetria di $f_X(x)$ rispetto a $x=1$ come indicato qui



).

3) $P(X > \frac{1}{2} \mid X < 1) = \frac{P(\{X > \frac{1}{2}\} \cap \{X < 1\})}{P(X<1)} =$



$= \frac{P(\frac{1}{2} < X < 1)}{P(X<1)} = \frac{\int_{1/2}^{1} \frac{3}{4} x(2-x)\,dx}{\int_0^1 \frac{3}{4} x(2-x)\,dx} = \frac{\frac{3}{4}\int_{1/2}^{1} 2x - x^2\,dx}{1/2} =$

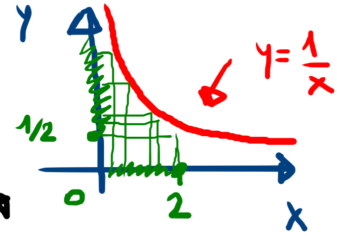
$\int_0^1 \frac{3}{4} x(2-x)\,dx = \frac{1}{2}$

per simmetria (riprovare a fare il calcolo per convincervi)

$= \frac{3}{2}\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{x=1/2}^{x=1} = \frac{3}{2}\left[1 - \frac{1}{3} - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)\right]$

$= \frac{3}{2}\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24}\right] = \frac{\cancel{3}}{2}\left[\frac{16-6+1}{\cancel{24}_{8}}\right] = \frac{11}{16}.$

4) Si vede che $\underbrace{P(Y>\tfrac{1}{2})=1}$ e quindi $F_Y(y)=\begin{cases} 0 & \text{per } y<1/2 \\ (*) & \text{per } y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$



Inoltre $(*) = P\left(\frac{1}{X} \leq y\right) = P\left(X \geq \frac{1}{y}\right) = \int_{1/y}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{1/y}^{2} \frac{3}{4} x(2-x)\,dx =$

$$= \frac{3}{4}\int_{1/y}^{2} 2x - x^2\,dx = \frac{3}{4}\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{x=1/y}^{x=2} = \frac{3}{4}\left[2^2 - \frac{2^3}{3} - \left(\left(\frac{1}{y}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y}\right)^3\right)\right] = \frac{3}{4}\left[4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{3y^3}\right] =$$

$$= \frac{3}{4}\left[\underbrace{\frac{12-8}{3}}_{=4/3} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{3y^3}\right] = 1 - \frac{3}{4y^2} + \frac{1}{4y^3}$$

COMMENTI

Ovviamente si ha $\lim_{y\to\infty} F_Y(y) = 1$. Inoltre si ha

$$\lim_{y\to(\frac{1}{2})^+} F_Y(y) = 1 - \frac{3}{4\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{4\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 1 - 3 + 2 = 0 \qquad \text{OK}$$

ESERCIZIO

Sia X una v.a. con densità continua $f_X(x) = \frac{3}{2} x^2 \mathbb{1}_{(-1,1)}(x)$.

1) Trovare la funzione di distribuzione di X.

2) Calcolare $\mathbb{E}[X^2]$.

3) Calcolare $P(|X| < \frac{1}{2} \mid X > 0)$.

4) Trovare la densità continua di $Y = X^3$.

SVOLGIMENTO

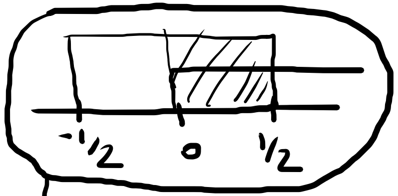
1) Si ha $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -1 \\ (*) & \text{se } -1 < t < 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1, \end{cases}$

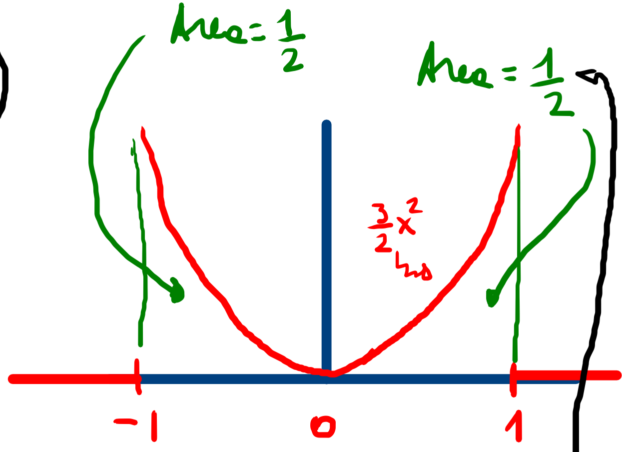
dove $(*) = \int_{-1}^{t} \frac{3}{2} x^2 dx = \cancel{\frac{3}{2}} \left[\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_{x=-1}^{x=t} = \frac{t^3 - (-1)^3}{2} = \frac{t^3 + 1}{2}$.

2) $\mathbb{E}[X^2] = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{3}{2}x^2\,dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{3}{10}\left[1^5-(-1)^5\right] = \frac{3}{10}[1+1] = \frac{3}{\cancel{10}_{5}}\cdot\cancel{2} = \frac{3}{5}.$

3) $P\left(|X|<\frac{1}{2} \,\middle|\, X>0\right) =$

$= P\left(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2} \,\middle|\, X>0\right) = \dfrac{P\left(\left\{-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\right\}\cap\{X>0\}\right)}{P(X>0)} =$





$= \dfrac{P\left(0<X<\frac{1}{2}\right)}{P(X>0)} = \dfrac{\int_0^{1/2}\frac{3}{2}x^2\,dx}{\int_0^{1}\frac{3}{2}x^2\,dx} = \dfrac{\cancel{\frac{3}{2}}\left[\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_{x=0}^{x=1/2}}{\cancel{\frac{3}{2}}\left[\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_{x=0}^{x=1}} =$

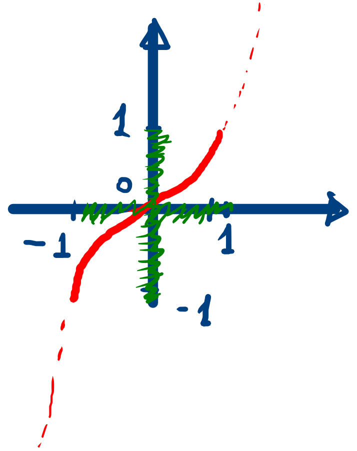
$= \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 0}{1^3 - 0} = \frac{1}{8}$

OPPURE

$P\left(|X|<\frac{1}{2} \,\middle|\, X>0\right) = \dots = \dfrac{P\left(0<X<\frac{1}{2}\right)}{P(X>0)} =$ $P(X>0)=\frac{1}{2}$

$= \dfrac{\int_0^{1/2}\frac{3}{2}x^2\,dx}{1/2} = \dfrac{\cancel{\frac{3}{2}}\left[\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_{x=0}^{x=1/2}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 0^3 = \frac{1}{8}.$

4) Si ha $\underbrace{P(-1 \le Y \le 1) = 1}$ e quindi



$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \le -1 \\ (*) & \text{se } y \in (-1,1) \\ 1 & \text{se } y \ge 1 . \end{cases}$$

Inoltre

$$(*) = P(X^3 \le y) = P(X \le \underbrace{\sqrt[3]{y}}_{= y^{1/3}}) = \int_{-1}^{y^{1/3}} \frac{3}{2} x^2 \, dx = \frac{\cancel{3}}{2} \left[\frac{x^3}{\cancel{3}} \right]_{x=-1}^{x=y^{1/3}} = \frac{(y^{1/3})^3 - (-1)^3}{2} = \frac{y+1}{2} .$$

Quindi

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} \, 1_{(-1,1)}(y)$$

<u>OSS</u>. Possiamo dire che $Y \sim U(-1,1)$.

ESERCIZIO.

Sia $X \sim U(0,3)$. Trovare la densità continua di $Y = \sqrt{9 - X^2}$.

SVOLGIMENTO

Si ha $P(0 \le Y \le 3) = 1$. Infatti $P(0 \le X \le 3) = 1$, $P(0 \le X^2 \le 9) = 1$, $P(0 \ge -X^2 \ge -9) = 1$,

$P(9 \ge 9 - X^2 \ge 0) = 1$, $P(3 \ge \sqrt{9 - X^2} \ge 0) = 1$.

Quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \le 0 \\ * & \text{se } y \in (0,3). \\ 1 & \text{se } y \ge 3 \end{cases}$$

Inoltre

$$* = P(\sqrt{9 - X^2} \le y) = P(9 - X^2 \le y^2) = P(9 - y^2 \le X^2)$$
$$= P(\sqrt{9 - y^2} \le X) = \int_{\sqrt{9-y^2}}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{\sqrt{9-y^2}}^{3} \frac{1}{3-0}\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\left[x\right]_{x=\sqrt{9-y^2}}^{x=3} = \frac{1}{3}\left(3 - \sqrt{9-y^2}\right) = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{9-y^2}.$$

In conclusione, derivando,

$$f_Y(y) = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{9-y^2}}\,(-\cancel{2}y)\,1_{(0,3)}(y) = \frac{y}{3\sqrt{9-y^2}}\,1_{(0,3)}(y).$$

ESERCIZIO

Sia X una v.a. con densità continua $f_X(x) = e^x \mathbb{1}_{(0,a)}(x)$, dove $a>0$ è una costante da determinare.

1) Trovare il valore della costante a.

2) Calcolare $P(X < a/2)$.

3) Trovare la densità continua di $Y = e^{bX}$, dove $b>0$ è una costante arbitraria.

SVOLGIMENTO

1) A partire dalla condizione $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$ si ha

$$1 = \int_0^a e^x\,dx = \left[e^x\right]_{x=0}^{x=a} = e^a - 1 \implies 1 = e^a - 1 \implies e^a = 2 \implies a = \log 2.$$

2) $$P(X < \tfrac{a}{2}) = P(X < \tfrac{1}{2}\log 2) = \int_0^{\frac{1}{2}\log 2} e^x\,dx = \left[e^x\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}\log 2} = e^{\frac{1}{2}\log 2} - e^0 = e^{\log 2^{1/2}} - 1 = 2^{1/2} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

$$= 0.4142\ldots$$

3) Abbiamo che $P(0 \leq X \leq \log 2) = 1$, da cui segue $P(\underbrace{e^{b\cdot 0}}_{=1} \leq \underbrace{e^{b\cdot X}}_{=Y} \leq \underbrace{e^{b\cdot \log 2}}_{=2^b}) = 1$.

Quindi $P(1 \leq Y \leq 2^b) = 1$,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \leq 1 \\ * & \text{per } 1 < y < 2^b \\ 1 & \text{per } y \geq 2^b \end{cases}, \text{ dove}$$

$$* = P(e^{bX} \leq y) = P(bX \leq \log y) = P\left(X \leq \frac{1}{b}\log y\right) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{b}\log y} f_X(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{b}\log y} e^x\,dx =$$

$$= \left[e^x\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{b}\log y} = e^{\frac{1}{b}\log y} - e^0 = e^{\log y^{1/b}} - 1 = y^{1/b} - 1.$$

In conclusione, derivando,

$$f_Y(y) = y^{1/b} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{y}\, 1_{(1,2^b)}(y) = \frac{y^{\frac{1}{b}-1}}{b}\, 1_{(1,2^b)}(y).$$

__OSS.__ Nel caso $b=1$ si vede che $F_Y(y)$ è lineare in $(1,2)$ (e uguale a zero al di fuori) e $f_Y(y)$ è costante in $(1,2)$ (e uguale a zero al di fuori); quindi $Y \sim U(1,2)$.

ESERCIZIO

Sia X una v.a. con densità continua $f_X(x) = \dfrac{e^x}{e^{9/4}-1} \mathbb{1}_{(0,\frac{9}{4})}(x)$.

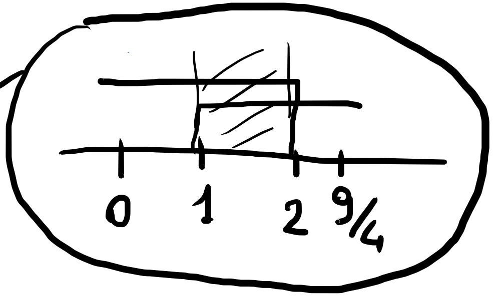
1) Calcolare $P(X<2 \mid X>1)$.

2) Trovare la densità discreta di $Y=[X]$, dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \le x\}$ è la parte intera di $x \in \mathbb{R}$.

3) Trovare la densità continua di $Z=\sqrt{X}$ e calcolare $\mathbb{E}[e^{-Z^2}]$.

SVOLGIMENTO

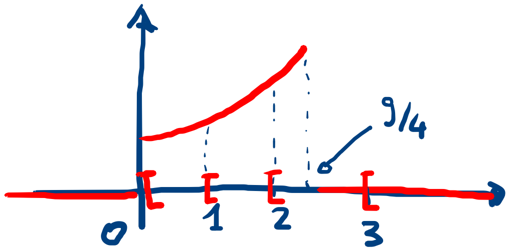
1) $$P(X<2 \mid X>1) = \frac{P(\{X<2\} \cap \{X>1\})}{P(X>1)} = \frac{P(1<X<2)}{P(X>1)} =$$



$$= \frac{\int_1^2 \frac{e^x}{e^{9/4}-1}\,dx}{\int_1^{9/4} \frac{e^x}{e^{9/4}-1}\,dx} = \frac{\cancel{\frac{1}{e^{9/4}-1}}\left[e^x\right]_{x=1}^{x=2}}{\cancel{\frac{1}{e^{9/4}-1}}\left[e^x\right]_{x=1}^{x=9/4}} = \frac{e^2-e}{e^{9/4}-e} = \frac{\cancel{e}(e-1)}{\cancel{e}(e^{5/4}-1)} = \frac{e-1}{e^{5/4}-1}$$

2) In generale, per $k \in \mathbb{Z}$, si ha

$$\{Y = k\} = \{k \leq X < k+1\}$$



e quindi

$$p_Y(k) = P(Y=k) = \int_k^{k+1} f_X(x)\,dx \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

In corrispondenza i casi con $p_Y(k) \neq 0$ sono $k=0$, $k=1$, $k=2$ da cui segue

$$p_Y(0) = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{9/4}-1}\,dx = \frac{\left[e^x\right]_{x=0}^{x=1}}{e^{9/4}-1} = \frac{e-1}{e^{9/4}-1}$$

$$p_Y(1) = \int_1^2 \frac{e^x}{e^{9/4}-1}\,dx = \frac{\left[e^x\right]_{x=1}^{x=2}}{e^{9/4}-1} = \frac{e^2-e}{e^{9/4}-1}$$

$$p_Y(2) = \int_2^{9/4} \frac{e^x}{e^{9/4}-1}\,dx = \frac{\left[e^x\right]_{x=2}^{x=9/4}}{e^{9/4}-1} = \frac{e^{9/4}-e^2}{e^{9/4}-1}$$

oss

$$p_Y(0)+p_Y(1)+p_Y(2) =$$

$$= \frac{\cancel{e}-1+\cancel{e^2}-\cancel{e}+e^{9/4}-\cancel{e^2}}{e^{9/4}-1} = \frac{e^{9/4}-1}{e^{9/4}-1} = 1$$

in accordo con la teoria.

3) Si ha $P\left(0 \le Z \le \frac{3}{2}\right) = 1$ perché $P\left(0 \le X \le \frac{9}{4}\right) = 1$.

(dove $Z = \sqrt{X}$).

Quindi $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \le 0 \\ ⊛ & \text{se } 0 < z < 3/2 \\ 1 & \text{se } z > \frac{3}{2} \end{cases}$. Inoltre

$$⊛ = P(\sqrt{X} \le z) = P(X \le z^2) = \int_{-\infty}^{z^2} f_X(x)\,dx = \int_0^{z^2} \frac{e^x}{e^{9/4}-1}\,dx = \frac{1}{e^{9/4}-1}\left[e^x\right]_{x=0}^{x=z^2} = \frac{e^{z^2}-1}{e^{9/4}-1}.$$

Quindi $f_Z(z) = \frac{2z\,e^{z^2}}{e^{9/4}-1} 1_{(0,\frac{3}{2})}(z)$.

Infine $$\mathbb{E}\left[e^{-Z^2}\right] = \int_0^{3/2} e^{-z^2} \frac{2z\,e^{z^2}}{e^{9/4}-1}\,dz = \frac{2}{e^{9/4}-1}\int_0^{3/2} z\,dz = \frac{\cancel{2}}{e^{9/4}-1}\left[\frac{z^2}{\cancel{2}}\right]_{z=0}^{z=3/2} = \frac{9/4}{e^{9/4}-1}.$$

oss.

Si può calcolare $\mathbb{E}\left[e^{-Z^2}\right]$ anche senza utilizzare $f_Z(z)$. Infatti $Z^2 = X$ e quindi

$$\mathbb{E}\left[e^{-Z^2}\right] = \mathbb{E}\left[e^{-X}\right] = \int_0^{9/4} e^{-x} \frac{e^x}{e^{9/4}-1}\,dx = \frac{1}{e^{9/4}-1}\left[x\right]_{x=0}^{x=9/4} = \frac{9/4}{e^{9/4}-1}.$$

ESERCIZIO (un po' difficile in qualche punto)

Sia $X \sim N(0, \sigma^2)$ e sia $Y = |X|$.

1) Trovare la densità continua di Y.

2) Trovare la densità discreta di $Z = [Y]$ dove $[\cdot]$ indica la "parte intera".

3) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

SVOLGIMENTO

1) Si ha $P(Y \geq 0) = 1$ e quindi $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0 \\ (*) & \text{se } y > 0 \end{cases}$.

Inoltre

$$(*) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = P\left(\frac{-y-0}{\sigma} \leq \frac{X-0}{\sigma} \leq \frac{y-0}{\sigma}\right) = \Phi(y/\sigma) - \Phi(-y/\sigma) =$$

$$= \Phi\left(\tfrac{y}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\tfrac{y}{\sigma}\right)\right) = 2\,\Phi\left(\tfrac{y}{\sigma}\right) - 1.$$

Quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ 2\,\Phi(y/\sigma) - 1 & \text{se } y \geq 0 \end{cases} \longleftrightarrow$$

$\boxed{\begin{array}{ll} \underline{\text{oss}}. \quad F_Y(0) = 2 \cdot \tfrac{1}{2} - 1 = 0 & \text{ok} \\ \lim_{y \to \infty} F_Y(y) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 & \text{ok} \end{array}}$

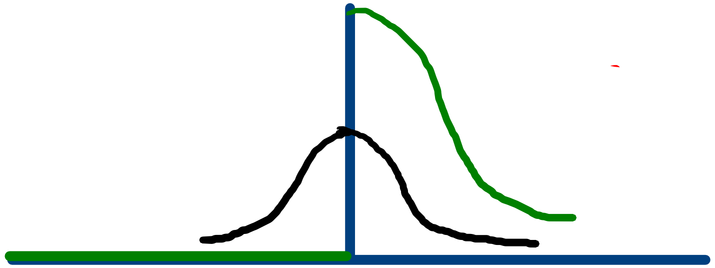
Allora, derivando,

$$f_Y(y) = 2\,\Phi'\left(\tfrac{y}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) = \frac{2}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma}\right)^2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

COMMENTO

La densità di Y si ottiene da quella di X

moltiplicando per 2 e troncando su $(0,\infty)$



2) Si ha $\{Z=k\} = \{k \leq Y < k+1\}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

In particolare si ha

$$P_Z(k) = \int_k^{k+1} f_Y(y)\,dy \quad \text{oppure} \quad P_Z(k) = F_Y(k+1) - F_Y(k) \quad \forall k \geq 0 \text{ intero.}$$

Allora (tenendo conto della F_Y trovata nella risposta alla domanda precedente)

$$P_Z(k) = 2\,\Phi\left(\frac{k+1}{\sigma}\right) - 1 - \left(2\,\Phi\left(\frac{k}{\sigma}\right) - 1\right) = 2\left(\Phi\left(\frac{k+1}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k}{\sigma}\right)\right) \quad \forall k \geq 0 \text{ intero.}$$

3) $$\mathbb{E}[Y] = \int_0^{\infty} y \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-y^2/2\sigma^2}\,dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\sigma^2 \int_0^{\infty} \frac{y}{\sigma^2} e^{-y^2/2\sigma^2}\,dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma \left[-e^{-y^2/2\sigma^2}\right]_{y=0}^{y=\infty} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma\,[0-(-1)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma.$$

COMMENTO ALLA RISPOSTA ALLA DOMANDA 2

In accordo con la teoria si deve avere $\sum_{k=0}^{\infty} p_Z(k) = 1$ e quindi

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \Phi\left(\frac{k+1}{6}\right) - \Phi\left(\frac{k}{6}\right) \right\} = 1 \iff \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \Phi\left(\frac{k+1}{6}\right) - \Phi\left(\frac{k}{6}\right) \right\} = \frac{1}{2}.$$

In effetti $\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \Phi\left(\frac{k+1}{6}\right) - \Phi\left(\frac{k}{6}\right) \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\frac{k}{6} < X^* \le \frac{k+1}{6} \right) = P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{k}{6} < X^* \le \frac{k+1}{6} \right\} \right) =$

$$= P\left(X^* \ge 0 \right) = \frac{1}{2}.$$

Oppure $\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \Phi\left(\frac{k+1}{6}\right) - \Phi\left(\frac{k}{6}\right) \right\} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \left\{ \Phi\left(\frac{k+1}{6}\right) - \Phi\left(\frac{k}{6}\right) \right\}} =$

SOMMA TELESCOPICA

$$= \cancel{\Phi\left(\frac{1}{6}\right)} - \Phi(0) + \cancel{\Phi\left(\frac{2}{6}\right)} - \cancel{\Phi\left(\frac{1}{6}\right)} + \cancel{\dots} + \Phi\left(\frac{n+1}{6}\right) - \cancel{\Phi\left(\frac{n}{6}\right)} = \Phi\left(\frac{n+1}{6}\right) - \Phi(0)$$

$$= \Phi\left(\frac{n+1}{6}\right) - \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{n+1}{6}\right) - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

perché $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$

ESERCIZIO

Sia $X \sim N(\mu=2, \sigma^2=4)$. Rispondere alle seguenti domande facendo riferimento alla funzione Φ.

1) Calcolare $P(X \geq 3)$ e dire per quale valore di $z \in \mathbb{R}$ si ha $P(X \leq z) = P(X \geq 3)$.

2) Calcolare $P(0 \leq X \leq 3)$.

SVOLGIMENTO

Consideriamo la standardizzata di X, cioè $X^* = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-2}{\sqrt{4}} = \dfrac{X-2}{2}$.

1) $P(X \geq 3) = P\left(X^* \geq \dfrac{3-2}{2}\right) = 1 - \Phi(1/2)$.

Quindi si cerca z t.c. $P(X \leq z) = 1 - \Phi(1/2)$.

Osserviamo che $P(X \leq z) = P\left(X^* \leq \dfrac{z-2}{2}\right) = \Phi\left(\dfrac{z-2}{2}\right)$;

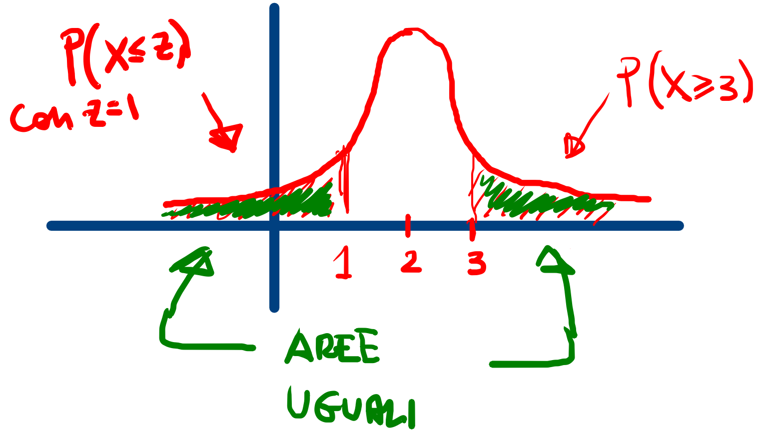
allora, essendo $1 - \Phi(1/2) = \Phi(-1/2)$, si ha

$$\Phi\left(\frac{z-2}{2}\right) = \Phi(-1/2) \Rightarrow \frac{z-2}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{z}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{z}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{z = 1}.$$

COMMENTO

Si poteva rispondere "graficamente"



2) $P(0 \leq X \leq 3) = P\left(\frac{0-2}{2} \leq X^* \leq \frac{3-2}{2}\right) = P\left(-1 \leq X^* \leq \frac{1}{2}\right) =$

$= \Phi(1/2) - \Phi(-1) =$

Se volessimo tutti argomenti positivi

$= \Phi(1/2) - (1 - \Phi(1)) =$

$= \Phi(1/2) + \Phi(1) - 1.$

ESERCIZIO

Consideriamo due v.a. indipendenti $X_1 \sim N(\mu_1 = 1, \sigma_1^2 = 4)$ e $X_2 \sim N(\mu_2 = 3, \sigma_2^2 = 12)$.

1) Trovare la distribuzione di $3X_1 - X_2$.

2) Calcolare $P(X_1 + X_2 \leq 3)$.

SVOLGIMENTO

In entrambi i casi abbiamo combinazioni lineari di v.a. indipendenti $\nearrow 3X_1 - X_2$, $\searrow X_1 + X_2$

Quindi in entrambi i casi abbiamo v.a. Normali con medie e varianze opportune.

1) $3X_1 - X_2 \sim N(\underbrace{3 \cdot \mu_1 - \mu_2}_{3 \cdot 1 - 3 = 0}, \underbrace{3^2 \sigma_1^2 + (-1)^2 \sigma_2^2}_{= 9 \cdot 4 + 12 = 48})$

2) $X_1 + X_2 \sim N(\underbrace{\mu_1 + \mu_2}_{1+3=4}, \underbrace{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}_{4+12=16})$

questa ha distribuzione $N(0,1)$

$$P(X_1 + X_2 \leq 3) = P\left(\frac{X_1 + X_2 - 4}{\sqrt{16}} \leq \frac{3-4}{\sqrt{16}}\right) = \Phi\left(-\frac{1}{4}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(1/4).$$

Se si vuole un argomento positivo

ESERCIZIO

Sia X una v.a. Normale con media μ e varianza σ^2.

1) Supponiamo che $\sigma^2 = 16$. Trovare μ t.c. $P(X \leq 4) = \Phi(3/2)$.

2) Supponiamo che $\mu = 1$. Trovare σ^2 t.c. $P(X \geq 3) = 1 - \Phi(1)$.

3) Trovare μ e σ^2 tali che $P(1 < X < 2) = \Phi(1) - \Phi(3/4)$.

SVOLGIMENTO

In tutti i casi sia $X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}$ la standardizzata di X.

1) $P(X \leq 4) = P\left(X^* \leq \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{4-\mu}{\sqrt{16}}\right) = \Phi\left(\frac{4-\mu}{4}\right) \Rightarrow \frac{4-\mu}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{4-\mu}{\cancel{4}} = \frac{6}{\cancel{4}} \Rightarrow \underline{\mu = -2}$

2) $P(X \geq 3) = P\left(X^* \geq \frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{3-1}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) \Rightarrow \frac{2}{\sigma} = 1 \Rightarrow \sigma = 2 \Rightarrow \underline{\sigma^2 = 4}.$

3) $P(1 < X < 2) = P\left(\frac{1-\mu}{\sigma} < X^* < \frac{2-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2-\mu}{\sigma} = 1 \\ \frac{1-\mu}{\sigma} = \frac{3}{4}. \end{cases}$

Sottraendo membro a membro si ottiene $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{4}$ e quindi $\sigma = 4$. Allora sostituendo nella 1ª eq. si ha $\frac{2-\mu}{4} = 1$, $2-\mu = 4$, $\mu = -2$. In conclusione si ha $\underline{\mu = -2 \text{ e } \sigma^2 = 16}$.

ESERCIZIO

Si lancia 400 volte una moneta equa.

1) Calcolare la probabilità che il numero di teste ottenute sia compreso tra 190 e 205 (estremi compresi).

2) Rispondere alla stessa domanda nel caso in cui la probabilità che esce testa in ogni lancio è uguale a $p = \frac{190}{400}$.

Usare l'approssimazione Normale e la correzione di continuità.

SVOLGIMENTO

In entrambi i casi il numero di teste ottenute è $X \sim Bin(n=400, p)$

1^a $p = \frac{1}{2}$, $np = 200$

2^a $p = \frac{190}{400}$, $np = 190$

1) $P(190 \leq X \leq 205) = P(189.5 \leq X \leq 205.5) \simeq \Phi\left(\frac{205.5 - 200}{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}\sqrt{400}}\right) - \Phi\left(\frac{189.5 - 200}{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}\sqrt{400}}\right) = \Phi(0.55) - \Phi(-1.05) = 0.56198$

2) $P(190 \leq X \leq 205) = P(189.5 \leq X \leq 205.5) \simeq \Phi\left(\frac{205.5 - 190}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{400}}\right) - \Phi\left(\frac{189.5 - 190}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{400}}\right) =$

$= \Phi(1.55) - \Phi(-0.55) = 0.45937$

oss. $\sqrt{p(1-p)} \cong 0.499$

COMMENTI

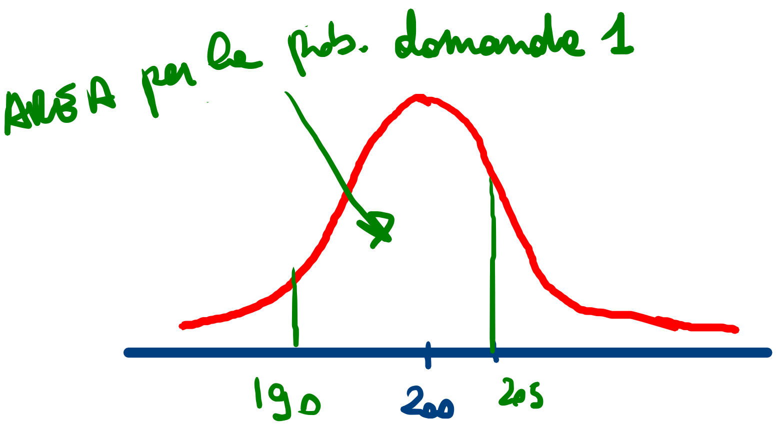
1) Senza correzione di continuità si ha:

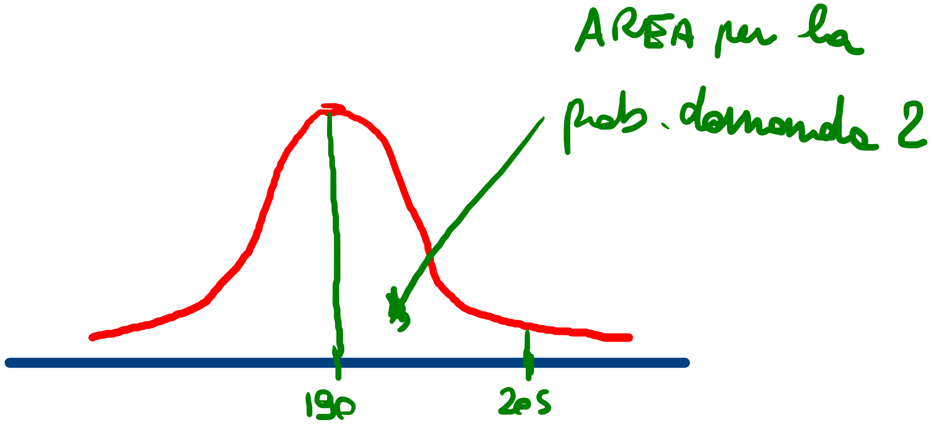
$\to$ 1ª $\Phi(0.5) - \Phi(-1) = 0,5328$

$\to$ 2ª $\Phi(1.5) - \Phi(0) = 0.43319$

Quindi valori vicini e, ovviamente, un po' più piccoli.

2) Graficamente l'approssimazione Normale fa riferimento a queste aree.





Quindi si può dedurre che nel 1° caso si ha una probabilità maggiore (anche se non di tanto...).

ESERCIZIO

Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. iid con media μ e varianza 16.

1) Calcolare $\lim_{n\to\infty} P\left(\mu < \frac{X_1+\dots+X_n}{n} < \mu + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

2) Trovare il valore di μ affinché, con l'approssimazione Normale, si abbia
$$P(X_1+\dots+X_{100} > 102\mu) \cong 1-\Phi(2).$$

SVOLGIMENTO

TLC per le medie

1) $$P\left(\mu < \frac{X_1+\dots+X_n}{n} < \mu+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = P\left(0 < \frac{X_1+\dots+X_n}{n} - \mu < \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = P\left(0 < \frac{\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-\mu}{1/\sqrt{n}} < 1\right) =$$
$$= P\left(\frac{0}{\sqrt{16}} < \frac{\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-\mu}{\sqrt{16}/\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{16}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{16}}\right) - \Phi(0) = \Phi(1/4) - 0.5$$

TLC per le somme

Oppure si può fare riferimento al caso con le somme come segue:
$$P\left(\mu < \frac{X_1+\dots+X_n}{n} < \mu+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = P(n\mu < X_1+\dots+X_n < n\mu+\sqrt{n}) = P(0 < X_1+\dots+X_n - n\mu < \sqrt{n}) =$$
$$= P\left(\frac{0}{\sqrt{16}\sqrt{n}} \leq \frac{X_1+\dots+X_n-n\mu}{\sqrt{16}\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{16}\sqrt{n}}\right) = P\left(0 \leq \frac{X_1+\dots+X_n-n\mu}{\sqrt{16}\sqrt{n}} \leq \frac{1}{4}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi\left(\frac{1}{4}\right)-\Phi(0) =$$
$$= \Phi\left(\frac{1}{4}\right) - 0.5.$$

2) Si ha

$$P(X_1+\dots+X_{100}>102\mu)=P\left(\frac{X_1+\dots+X_{100}-100\mu}{\sqrt{16}\sqrt{100}}>\underbrace{\frac{102\mu-100\mu}{\sqrt{16}\sqrt{100}}}_{=\frac{2\mu}{4\cdot 10}=\frac{\mu}{20}}\right)\simeq 1-\Phi\left(\frac{\mu}{20}\right)$$

per ogni valore di μ.

Poi si cerca il valore di μ affinchè si abbia

$$1-\Phi\left(\frac{\mu}{20}\right)=1-\Phi(2);$$

quindi si ottiene $\Phi\left(\frac{\mu}{20}\right)=\Phi(2)$ e, tenendo conto che Φ è invertibile, possiamo dire che $\frac{\mu}{20}=2$, da cui segue $\mu=40$.

ESERCIZIO

Siano $\{X_n\}$ v.a. i.i.d. $\sim Exp(\lambda=2)$.

1) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(0 \leq \frac{X_1+\dots+X_n-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}} < \frac{3}{4}\right).$$

2) Dire per quale valore di $x>0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-\frac{1}{2}\right| > \frac{2}{5}\frac{x}{\sqrt{n}}\right) = 2\left(1-\Phi(1)\right).$$

3) Calcolare $P(X_1+\dots+X_{100} \geq 57)$ sfruttando l'approssimazione Normale.

4) Calcolare $P(180 \leq X_1+\dots+X_{400} \leq 210)$ sfruttando l'approssimazione Normale.

SVOLGIMENTO

Per proprietà della distribuzione esponenziale si ha $\mu=\frac{1}{\lambda}$ e $\sigma^2=\frac{1}{\lambda^2}$; quindi $\mu=\sigma=\frac{1}{2}$.

1) Si ha

$$P\left(0\le \frac{X_1+\dots+X_n-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}}\le \frac{3}{4}\right)=P\left(\frac{0}{\sqrt{\frac14}}\le \frac{X_1+\dots+X_n-\overset{n\mu}{\frac{n}{2}}}{\underset{\sigma}{\sqrt{\frac14}}\sqrt{n}}\le \frac{\frac34}{\sqrt{\frac14}}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{TLC per le somme}}\Phi\left(\frac{\frac34}{\sqrt{\frac14}}\right)-\Phi(0)$$

$$=\Phi\left(\frac34\cdot 2\right)-0.5$$

$$=\Phi\left(\frac32\right)-0.5.$$

2) Si ha

$$P\left(\left|\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-\frac12\right|>\frac25\frac{x}{\sqrt{n}}\right)=P\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-\frac12>\frac25\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$$

$$+P\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-\frac12<-\frac25\frac{x}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$=P\left(\frac{\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-\overset{\mu}{\frac12}}{\underset{\sigma}{\sqrt{1/4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}>\frac{\frac25x}{\sqrt{1/4}}\right)+P\left(\frac{\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-\overset{\mu}{\frac12}}{\underset{\sigma}{\sqrt{1/4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}<-\frac{\frac25x}{\sqrt{1/4}}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{TLC per le medie}}1-\Phi\left(\frac{\frac25x}{\sqrt{1/4}}\right)+\Phi\left(-\frac{\frac25x}{\sqrt{1/4}}\right)$$

$$=1-\Phi\left(\frac45x\right)+\Phi\left(-\frac45x\right)=1-\Phi\left(\frac45x\right)+1-\Phi\left(\frac45x\right)=2\left(1-\Phi\left(\frac45x\right)\right)$$

Si cerca x t.c. $2\left(1-\Phi\left(\frac45x\right)\right)=2\left(1-\Phi(1)\right)$ da cui segue $\frac45x=1$, $x=\frac54$.

COMMENTI

Si può rispondere alla domanda facendo comparire le somme al posto delle medie. Inoltre, sia con le medie, sia con le somme si può passare al complementare. Qui considero solo il caso con le medie. Si ha

$$P\left(\left|\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-\frac{1}{2}\right|>\frac{2}{5}\frac{x}{\sqrt{n}}\right)=1-P\left(\left|\cdots\cdots\right|\leq\frac{2}{5}\frac{x}{\sqrt{n}}\right)=1-P\left(-\frac{2}{5}\frac{x}{\sqrt{n}}\leq\cdots\leq\frac{2}{5}\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=1-P\left(\frac{-\frac{2}{5}x}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\leq\frac{\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}\leq\frac{\frac{2}{5}x}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{TLC per le medie}}1-\left(\Phi\left(\frac{\frac{2}{5}x}{\sqrt{1/4}}\right)-\Phi\left(\frac{-\frac{2}{5}x}{\sqrt{1/4}}\right)\right)=$$

$$=1-\left(\Phi\left(\frac{4}{5}x\right)-\Phi\left(-\frac{4}{5}x\right)\right)=1-\Phi\left(\frac{4}{5}x\right)+\Phi\left(-\frac{4}{5}x\right)=1-\Phi\left(\frac{4}{5}x\right)+1-\Phi\left(\frac{4}{5}x\right)=2\left(1-\Phi\left(\frac{4}{5}x\right)\right)$$

e poi si conclude come visto in precedenza.

3) $$P(X_1+\dots+X_{100}>57)=P\left(\frac{X_1+\dots+X_{100}-100\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{100}}>\underbrace{\frac{57-100\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{100}}}_{=\frac{57-50}{5}=\frac{7}{5}}\right)$$

$$\simeq 1-\Phi\left(7/5\right).$$

4) $$P(180<X_1+\dots+X_{400}<210)=P\left(\underbrace{\frac{180-400\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{400}}}_{=\frac{180-200}{10}=-2}<\frac{X_1+\dots+X_{400}-400\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{400}}<\underbrace{\frac{210-400\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{400}}}_{=\frac{210-200}{10}=1}\right)$$

$$\simeq \Phi(1)-\Phi(-2)\overset{*}{=}$$

$$=\Phi(1)-(1-\Phi(2))=\Phi(1)+\Phi(2)-1.$$

se si vogliono argomenti tutti positivi

3) Si ha

$$P(X_1+\dots+X_{100}\geq 57)=P\left(\frac{X_1+\dots+X_{100}-100\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{100}}\geq \underbrace{\frac{57-100\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{1/4}\cdot\sqrt{100}}}_{=\frac{57-50}{5}=\frac{7}{5}}\right)\simeq 1-\Phi\left(\frac{7}{5}\right).$$

4) Si ha

$$P(180\leq X_1+\dots+X_{400}\leq 210)=P\left(\frac{180-400\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{400}}\leq\frac{X_1+\dots+X_{400}-400\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{400}}\leq\frac{210-400\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{400}}\right)$$

$$\simeq\Phi\left(\frac{210-400\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{400}}\right)-\Phi\left(\frac{180-400\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{400}}\right)=\Phi\left(\frac{\cancel{10}^{1}}{\cancel{10}}\right)-\Phi\left(\frac{-\cancel{20}^{2}}{\cancel{10}}\right)=\Phi(1)-\Phi(-2)=$$

$$=\Phi(1)-(1-\Phi(2))=\Phi(1)+\Phi(2)-1.$$

se si vogliono argomenti positivi per Φ