ESERCIZIO

Sia X una v.a. con densità continua $f_X(x) = c \cdot x^{-2} \mathbb{1}_{(1,e^2)}(x)$, dove $c>0$ è una costante da determinare.

1) Trovare il valore di c

2) Trovare la densità continua di $Y = \log X$

3) Calcolare $P(1 \leq Y \leq 3)$

SVOLGIMENTO

1) Imponendo la condizione $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$, si ottiene $1 = c\int_1^{e^2} x^{-2}dx = c\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_{x=1}^{x=e^2} = c\left(-\frac{1}{e^2}+\frac{1}{1}\right) =$

$= c\,\frac{-1+e^2}{e^2} \implies c = \frac{e^2}{e^2-1}$

2) Abbiamo $Y = f(X)$ con $f(x) = \log x$ funzione crescente.

Quindi Y assume valori in $(f(1), f(e^2)) = (\log 1, \log e^2) = (0,2)$.

Allora

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \le 0 \\ * & \text{per } 0 < y < 2 \\ 1 & \text{per } y \ge 2 \end{cases}$$

Inoltre

$$e^y \in (e^0, e^2) = (1, e^2)$$

$$* = P(\log X \le y) = P(X \le e^y) = \int_{-\infty}^{e^y} f_X(x)\,dx = \int_1^{e^y} \frac{e^2}{e^2-1} x^{-2}\,dx = \frac{e^2}{e^2-1}\int_1^{e^y} x^{-2}\,dx = \frac{e^2}{e^2-1}\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_{x=1}^{x=e^y} =$$

$$= \frac{e^2}{e^2-1}\left(-\frac{1}{e^y} + 1\right) = \frac{e^2}{e^2-1}\left(1 - e^{-y}\right)$$

$\longleftrightarrow$ oss. L'espressione ottenuta è accettabile se si controlla quel che accade per $y=0$ e $y=2$. Inoltre è una funzione di y crescente come deve essere.

(In particolare si vede subito che per $y=2$ si ha

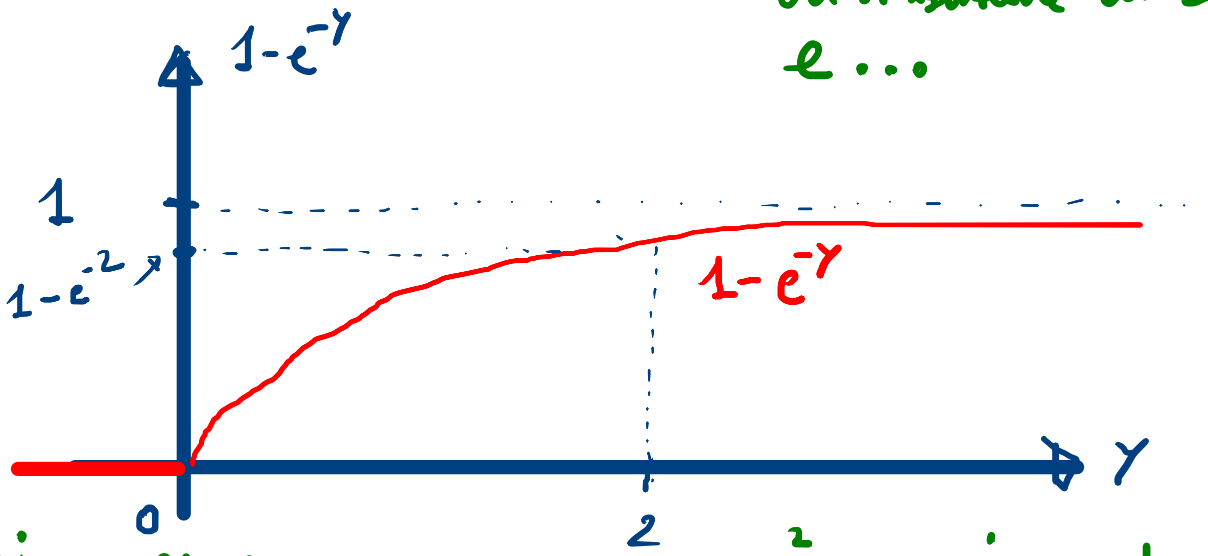
$$\frac{e^2}{e^2-1}\left(1-e^{-2}\right) = \frac{e^2-1}{e^2-1} = 1.)$$

In conclusione, derivando,

$$f_Y(y) = \frac{e^2}{e^2-1} e^{-y}\, 1_{(0,2)}(y)$$

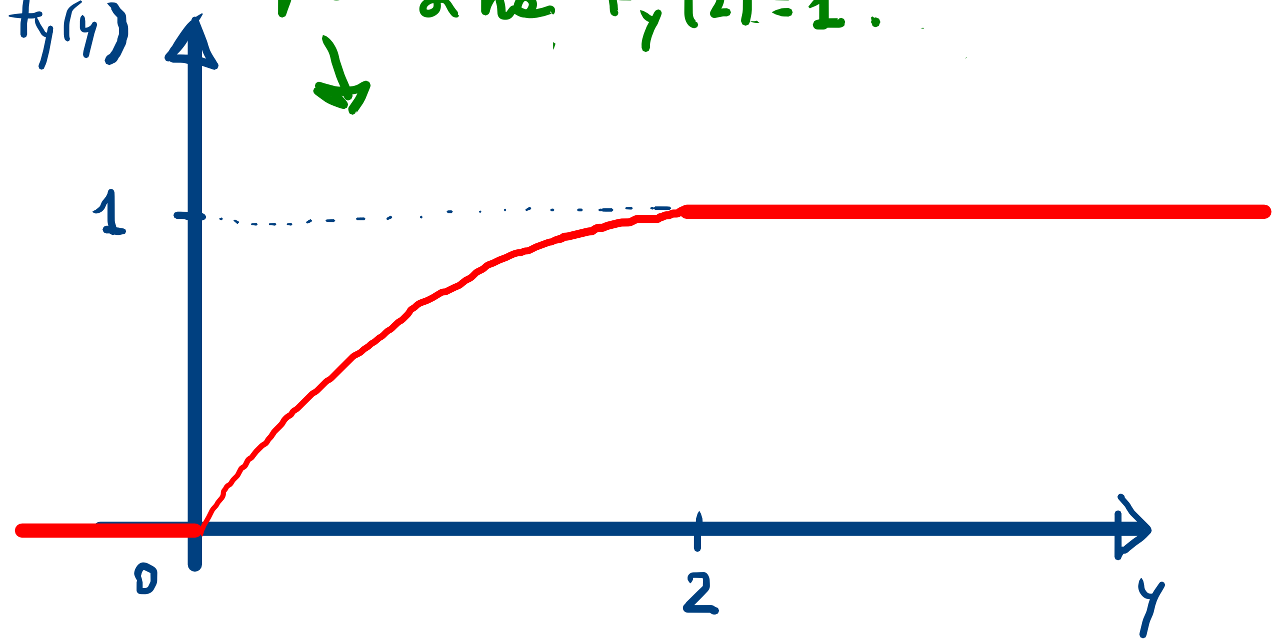
Qui faccio dei grafici.

Si parte dalla funzione di distribuzione di $Exp(\lambda=1)$ e ...



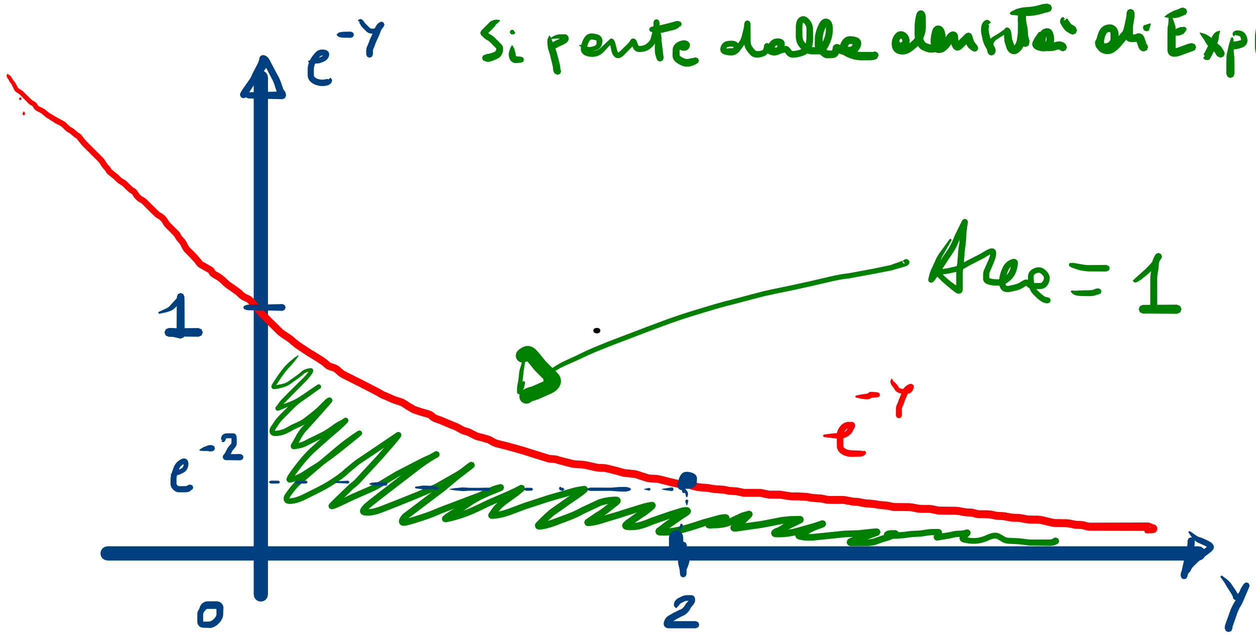
... si moltiplica per $\frac{1}{1-e^{-2}} = \frac{e^2}{e^2-1} > 1$ in modo che

qui si ha $F_Y(2)=1$.



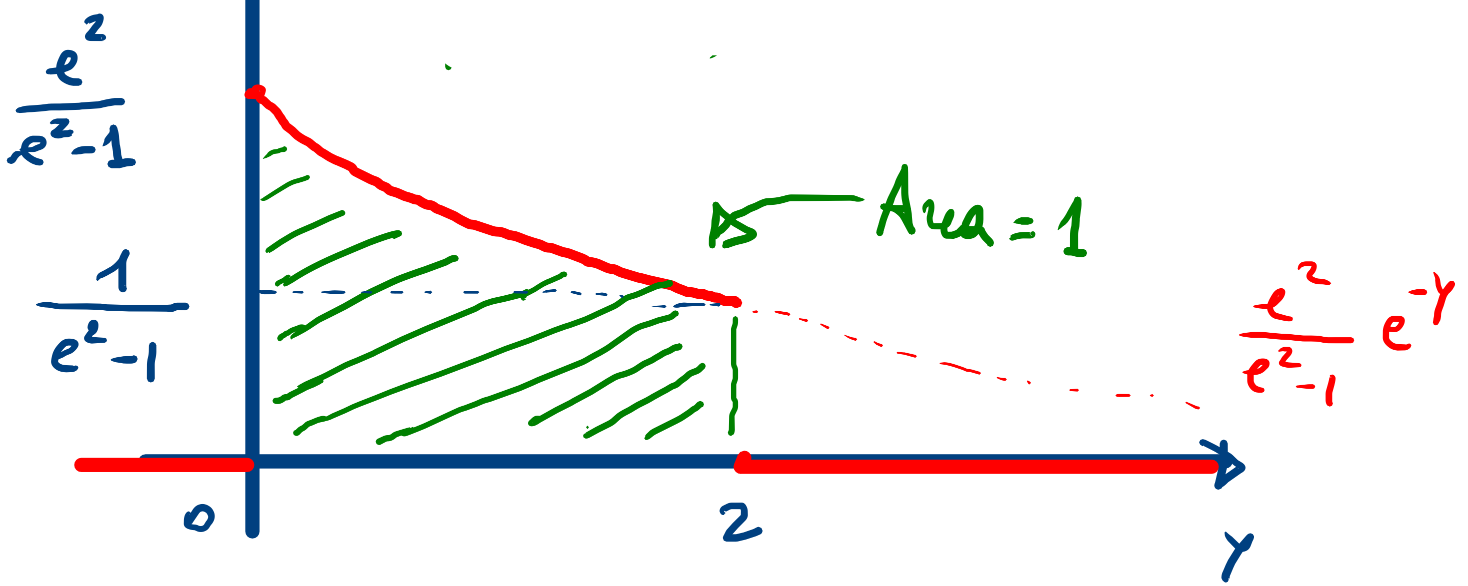
Commenti analoghi per le densità continue.

Si parte dalla densità di $Exp(\lambda=1)$ e ...



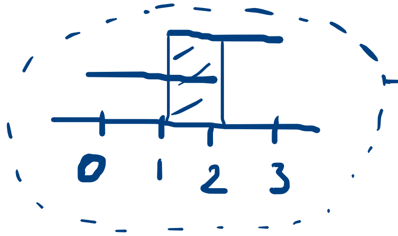
... si moltiplica per $\frac{e^2}{e^2-1} > 1$ in modo che se ci si restringe a $(0,2)$ si ha Area = 1

$f_Y(y)$



3) $P(1\le Y\le 3)=?$

1° modo: $P(1\le Y\le 3)=\int_1^3 f_Y(y)\,dy=\int_1^3 \frac{e^2}{e^2-1}e^{-y}1_{(0,2)}(y)\,dy = \frac{e^2}{e^2-1}\int_1^2 e^{-y}\,dy = \frac{e^2}{e^2-1}\left[-e^{-y}\right]_{y=1}^{y=2}$



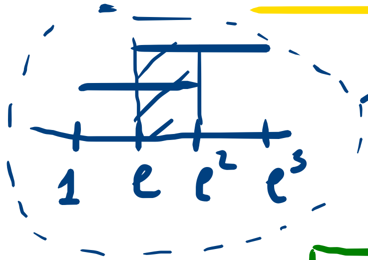
$$=\frac{e^2}{e^2-1}\left(-e^{-2}+e^{-1}\right) = \frac{e^2}{e^2-1}\left(\frac1e-\frac1{e^2}\right) = \frac{\cancel{e^2}}{e^2-1}\,\frac{e-1}{\cancel{e^2}}=\frac{1}{e+1}$$

2° modo: $P(1\le Y\le 3)=F_Y(3)-F_Y(1)=1-\frac{e^2}{e^2-1}(1-e^{-1}) = 1-\frac{e^2}{e^2-1}\left(1-\frac1e\right) = 1-\frac{e^{\cancel{2}}}{e^2-1}\,\frac{e-1}{\cancel{e}} = 1-\frac{e(e-1)}{e^2-1}$

$$=1-\frac{e}{e+1}=\frac{\cancel{e}+1-\cancel{e}}{e+1}=\frac{1}{e+1}.$$

oss: per $a<b$
$F_Y(b)-F_Y(a)$
$=P(Y\le b)-P(Y\le a)$
$=P(a<Y\le b)$
$=P(a\le Y\le b)$
Y continua

3° modo: $P(1\le Y\le 3)=P(1\le \log X\le 3)=P(e\le X\le e^3)=\int_e^{e^3} f_X(x)\,dx=\int_e^{e^3}\frac{e^2}{e^2-1}x^{-2}1_{(1,e^2)}(x)\,dx=$



$$=\frac{e^2}{e^2-1}\int_e^{e^2}x^{-2}\,dx=\frac{e^2}{e^2-1}\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_{x=e}^{x=e^2}=\frac{e^2}{e^2-1}\left[-\frac1{e^2}+\frac1e\right]=\frac{\cancel{e^2}}{e^2-1}\,\frac{e-1}{\cancel{e^2}}=\frac{1}{e+1}.$$

4° modo: $P(1\le Y\le 3)=\dots=P(e\le X\le e^3)=F_X(e^3)-F_X(e)=1-\frac{e^2}{e^2-1}\int_1^e x^{-2}\,dx=$

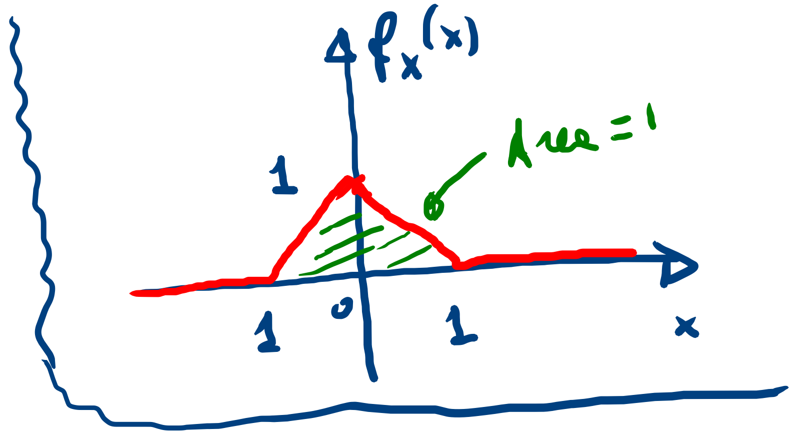
$$=1-\frac{e^2}{e^2-1}\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_{x=1}^{x=e}=1-\frac{e^2}{e^2-1}\left(-\frac1e+1\right)=\dots=\frac{1}{e+1}$$

calcoli fatti nel 2° modo

ESERCIZIO

Sia X una v.a. con densità continua $f_X(x) = (1-|x|)\, 1_{(-1,1)}(x)$

Trovare la densità continua di $Y = X^2$.

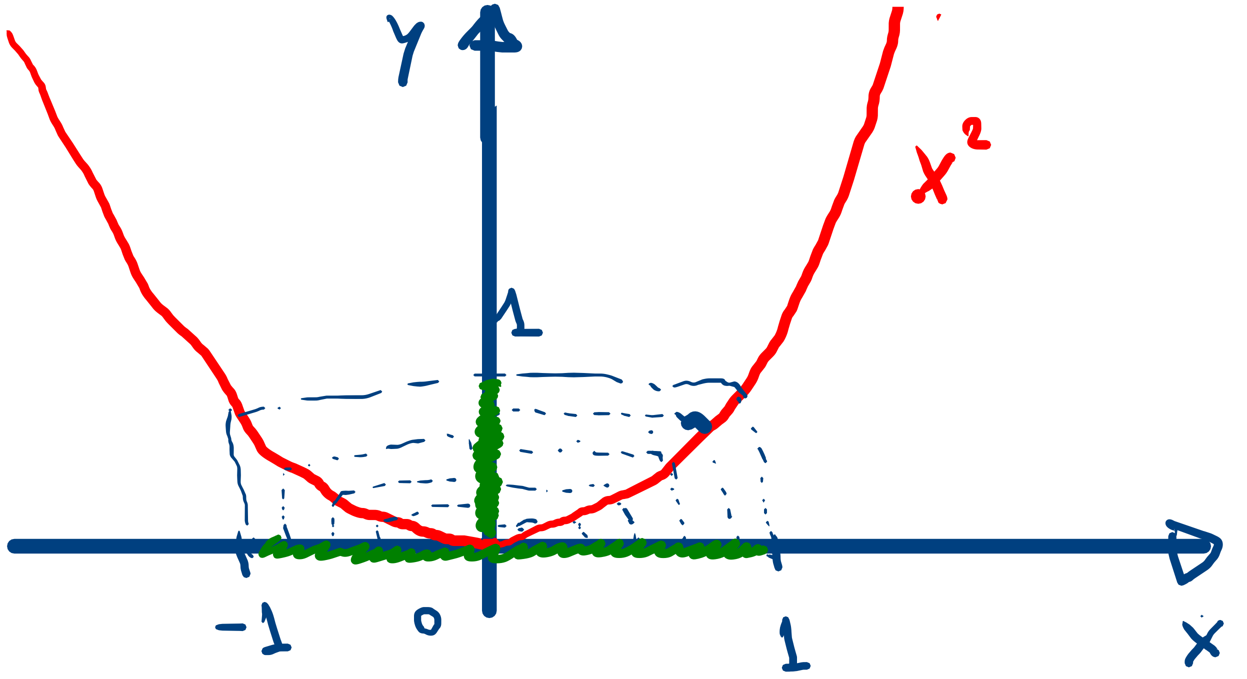


RISPOSTA

Abbiamo $Y = f(X)$ con $f(x) = x^2$ <u>non monotona</u>. Inoltre non è monotona neanche su S tale che $P(X \in S) = 1$.

Quindi, per individuare un insieme U tale che $P(Y \in U) = 1$, dovremo procedere in maniera diversa rispetto agli esercizi visti finora.

Si ha



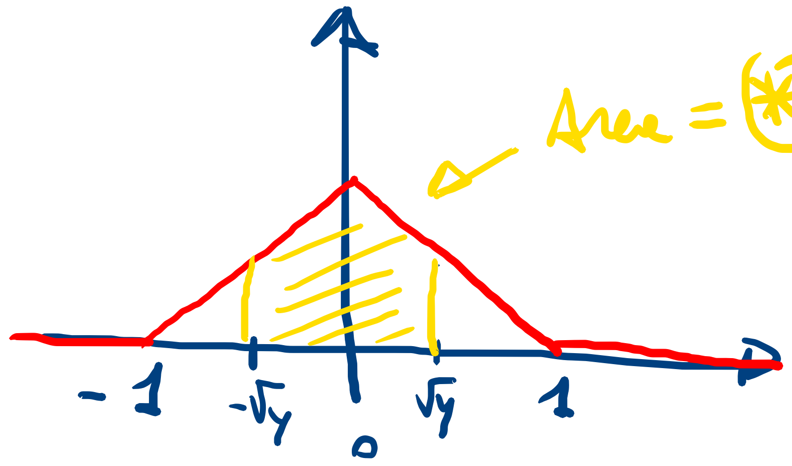
L'insieme $[-1,1]$ viene proiettato su $[0,1]$ (vedere figura).

Quindi potremo considerare l'insieme $U = [0,1]$ per il quale si avrà

$$P(Y \in U) = 1.$$

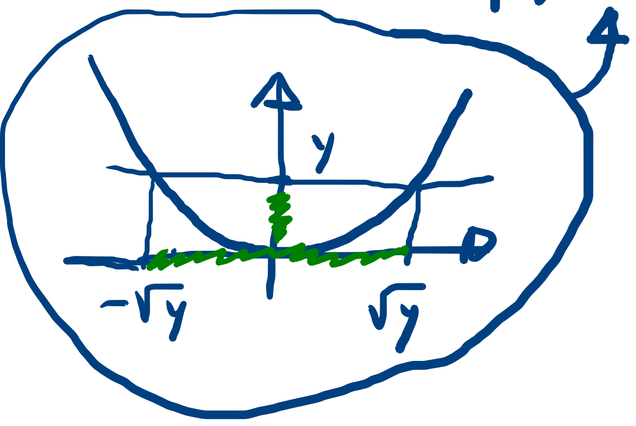
Quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \le 0 \\ (*) & \text{se } y \in (0,1) \\ 1 & \text{se } y \ge 1. \end{cases}$$



Inoltre

$$(*) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\,dx \overset{(-\sqrt{y},\sqrt{y}) \subset (-1,1)}{=} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 1 - |x| \, dx$$



1° modo

$$\overset{}{=} \int_{-\sqrt{y}}^{0} 1-(-x)\,dx + \int_{0}^{\sqrt{y}} 1-x\,dx = \int_{-\sqrt{y}}^{0} 1+x\,dx + \int_{0}^{\sqrt{y}} 1-x\,dx =$$

$$= \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_{x=-\sqrt{y}}^{x=0} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} = 0 - \left(-\sqrt{y} + \frac{(-\sqrt{y})^2}{2}\right) + \sqrt{y} - \frac{(\sqrt{y})^2}{2} =$$

$$= \sqrt{y} - \frac{y}{2} + \sqrt{y} - \frac{y}{2} = \boxed{2\sqrt{y} - y}.$$

2° modo (per simmetria)

$$= 2\int_{0}^{\sqrt{y}} 1-|x|\,dx = 2\int_{0}^{\sqrt{y}} 1-x\,dx = 2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} = 2\left(\sqrt{y} - \frac{y}{2}\right) = \boxed{2\sqrt{y} - y}.$$

Quindi

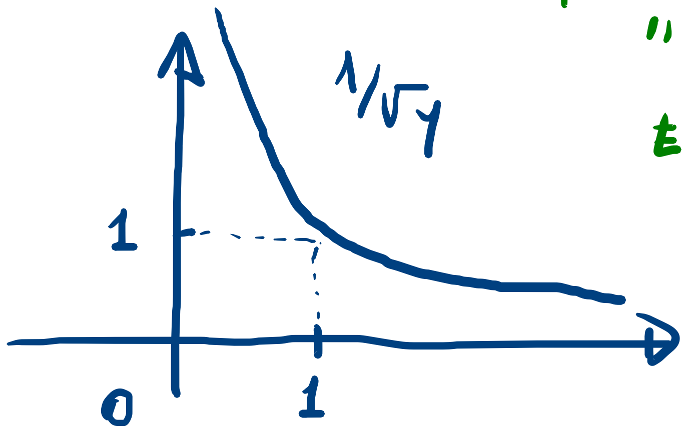
$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{per } y\le 0\\ \boxed{2\sqrt{y}-y} & \text{per } y\in(0,1)\\ 1 & \text{per } y\ge 1\end{cases}$$

oss. L'espressione è accettabile se si vede quel che accade per $y=0$ e $y=1$. Inoltre come vedremo dalla derivata (che calcoliamo per ottenere la densità) è una funzione crescente

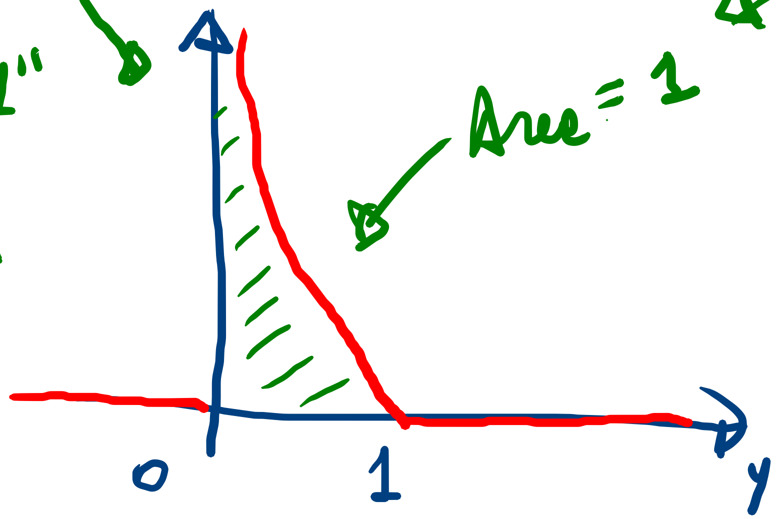
Infine derivando

$$f_Y(y)=\left(\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{y}}-1\right)\mathbb{1}_{(0,1)}(y)=\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-1\right)\mathbb{1}_{(0,1)}(y)$$

Graficamente



LA CURVA "SCENDE DI 1" E VIENE RISTRETTA A (0,1)



Area = 1

Verifica

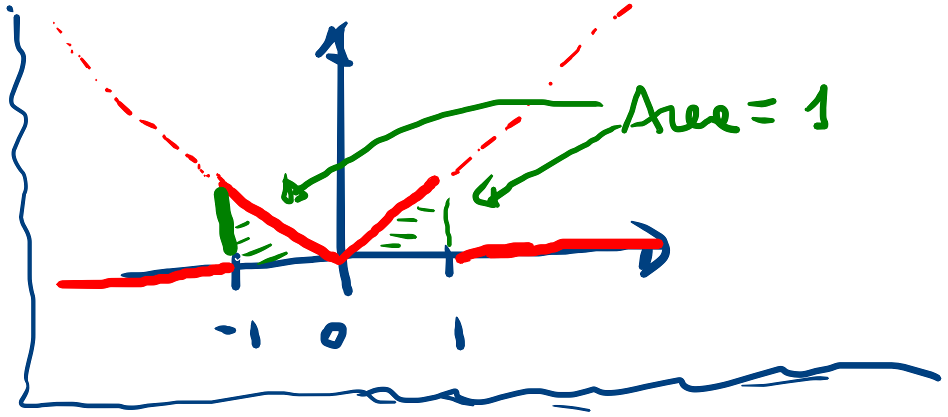
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}-1\,dy=\int_0^1 y^{-1/2}-1\,dy=$$

$$=\left[\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-y\right]_{y=0}^{y=1}=\left[2\sqrt{y}-y\right]_{y=0}^{y=1}=$$

$$=2\sqrt{1}-1-(2\sqrt{0}-0)=2-1-0=1$$

ESERCIZIO

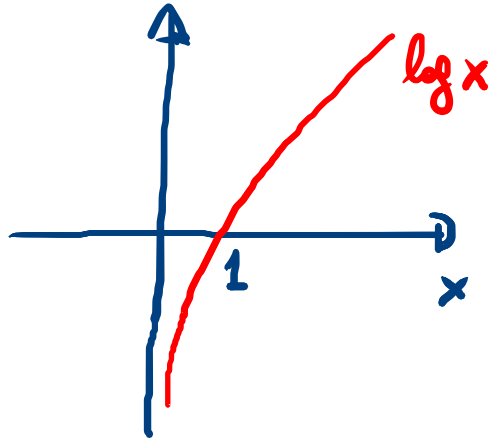
Sia X una v.a. con densità continua $f_X(x) = |x| \, 1_{(-1,1)}(x)$.
Trovare la densità continua di $Y = \log(1+X)$.



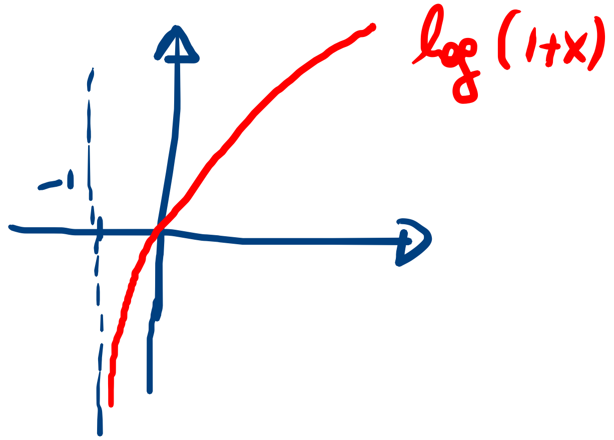
RISPOSTA

Abbiamo $Y = f(X)$ con $f(x) = \log(1+x)$ funzione crescente.

Infatti



$\Longrightarrow$



Del resto è una composizione di funzioni crescenti

Allora Y prende valori in $(f(-1), f(1)) = (\log(1-1), \log(1+1))$
$= (\log 0, \log 2) =$
$= (-\infty, \log 2)$.

Quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} * & \text{se } y < \log 2 \\ 1 & \text{se } y \geq \log 2. \end{cases}$$

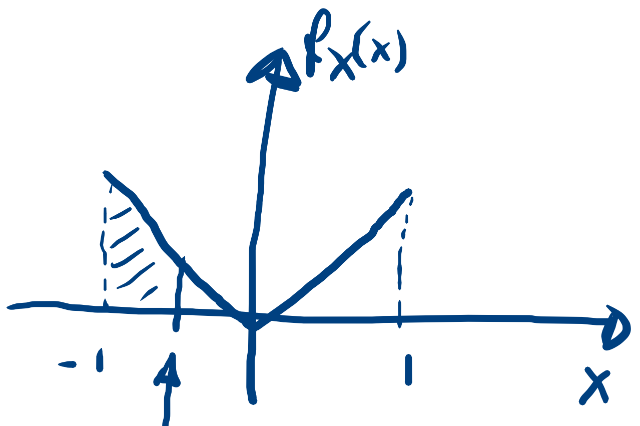
Inoltre

$$\circledast = P(\log(1+X) \le y) = P(1+X \le e^y) = P(X \le e^y - 1) = \int_{-\infty}^{e^y-1} f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{e^y-1} |x|\,dx .$$

$$\underbrace{e^y - 1 < e^{\log 2} - 1 = 2 - 1 = 1}$$

A questo punto abbiamo due sottocasi:

1



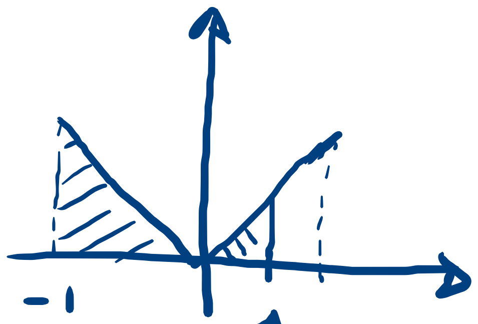
$e^y - 1 \le 0$

$\iff e^y \le 1$

$\iff y \le 0$

$$\circledast = \int_{-1}^{e^y-1} -x\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{x=e^y-1} = -\frac{(e^y-1)^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1-(e^y-1)^2}{2}$$

2



$e^y - 1 > 0$

$\iff e^y > 1$

$\iff y > 0$

(oltre che $y < \log 2$)

$$\circledast = \underbrace{\int_{-1}^{0} -x\,dx}_{= \frac{1-(e^0-1)^2}{2} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\int_{0}^{e^y-1} x\,dx}_{= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=e^y-1} = \frac{(e^y-1)^2}{2}}$$

sottocaso 1 con $y=0$

oss. E' l'area del triangolo a sinistra

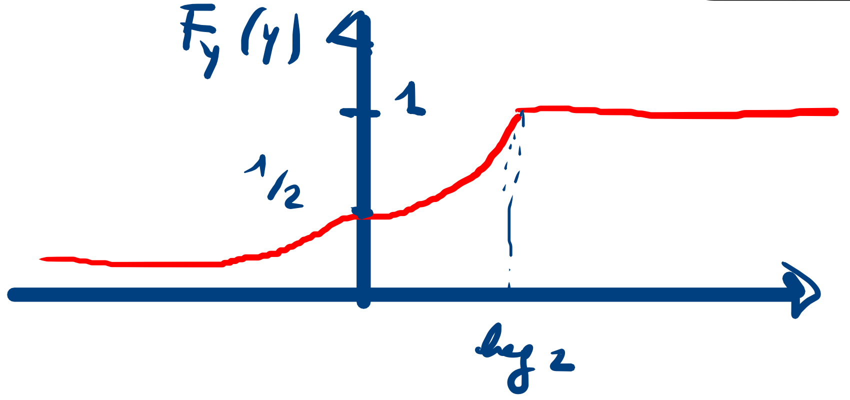
Ricapitoliamo ...

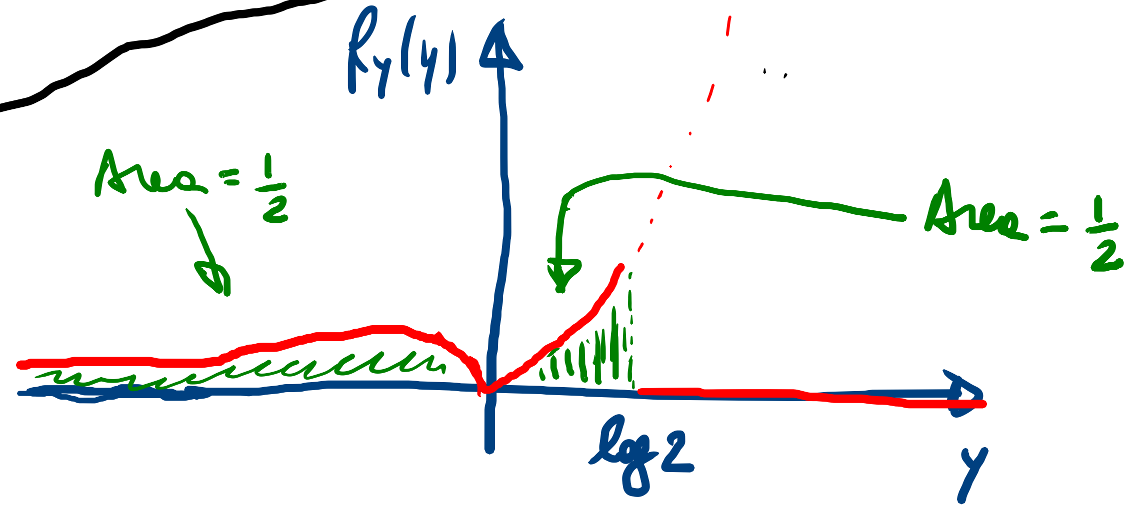
$$F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1-(e^y-1)^2}{2} & \text{per } y<0 \\[2ex] \dfrac{1+(e^y-1)^2}{2} & \text{per } y\in(0,\log 2) \\[2ex] 1 & \text{per } y \geq \log 2 \end{cases}$$

oss. Abbiamo ottenuto una funzione "continua a tratti" e che si "raccorda per continuità" nei punti $y=0$ e $y=\log 2$ dove cambia definizione (ok). Inoltre $F_Y(y) \to 0$ per $y \to -\infty$ (ok)

Infine, derivando

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{-\cancel{2}(e^y-1)e^y}{\cancel{2}} & \text{per } y<0 \\[2ex] \dfrac{\cancel{2}(e^y-1)e^y}{\cancel{2}} & \text{per } y\in(0,\log 2) \\[2ex] 0 & \text{per } y \geq \log 2 \end{cases} = |e^y-1|\,e^y\,\mathbb{1}_{(-\infty,\log 2)}(y)$$





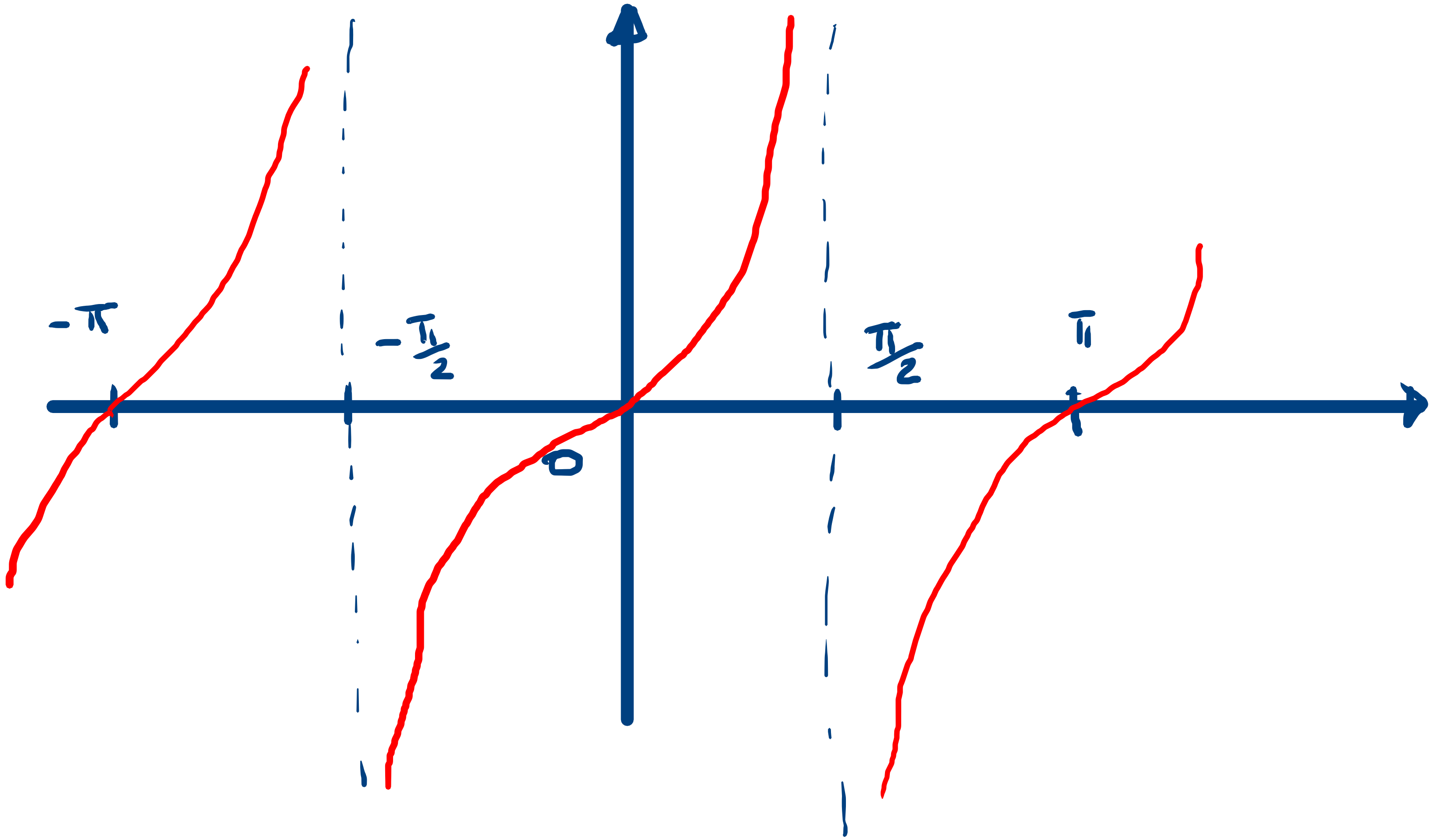
GRAFICI NON RICHIESTI

ESERCIZIO

Sia $X \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Trovare la densità continua di $Y = tg\,X$.

RISPOSTA

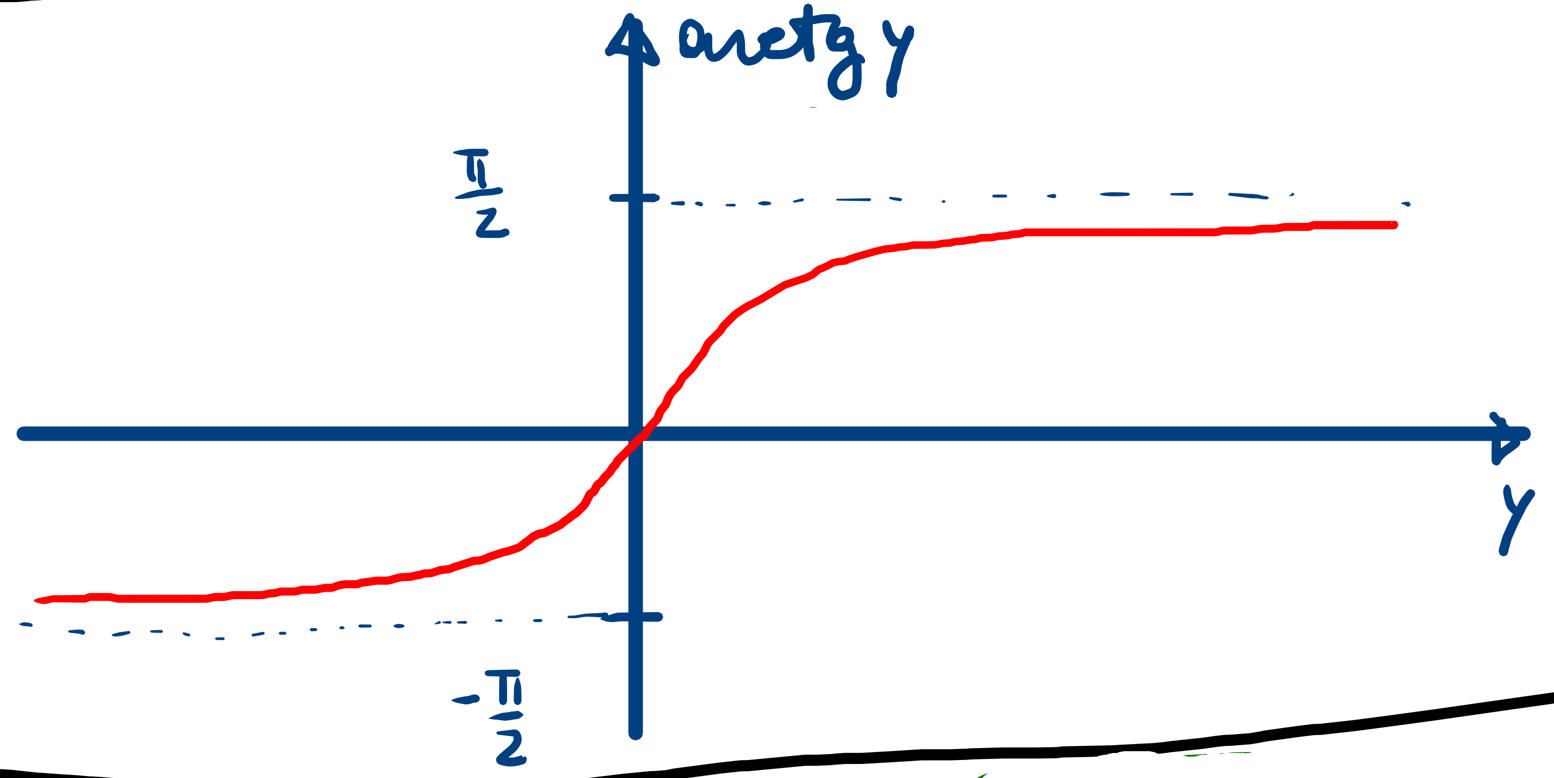
Abbiamo $Y = f(X)$ con $f(x) = tg\,x$. Questa funzione non è monotona



Però è monotona crescente su $S = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; inoltre $P(X \in S) = 1$.

La funzione inversa su tale intervallo è $\boxed{g(x) = arctg\,x}$.

Ecco il grafico della funzione inversa per fissare le idee:



Torniamo al problema e possiamo dire che Y assume valori in

$$\left(f\left(-\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (-\infty, \infty).$$

Ora calcoliamo $F_Y(y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ (si osservi che in questo caso non abbiamo un sottointervallo della retta tale che, al di fuori di questo intervallo, si ha $F_Y(y)=0$ oppure $F_Y(y)=1$). Si ha

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\mathrm{tg}\,X\le y)=P(X\le \mathrm{arctg}\,y)=\int_{-\pi/2}^{\mathrm{arctg}\,y}\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\,dx=$$

$\mathrm{arctg}\,y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\mathrm{arctg}\,y}\frac{1}{\pi}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\mathrm{arctg}\,y}dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[x\right]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\mathrm{arctg}\,y}=\frac{1}{\pi}\left(\mathrm{arctg}\,y-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{\pi}\left(\mathrm{arctg}\,y+\frac{\pi}{2}\right).$$

OSS.
È una funzione continua di y (perché lo è $\mathrm{arctg}\,y$): ok.
Inoltre

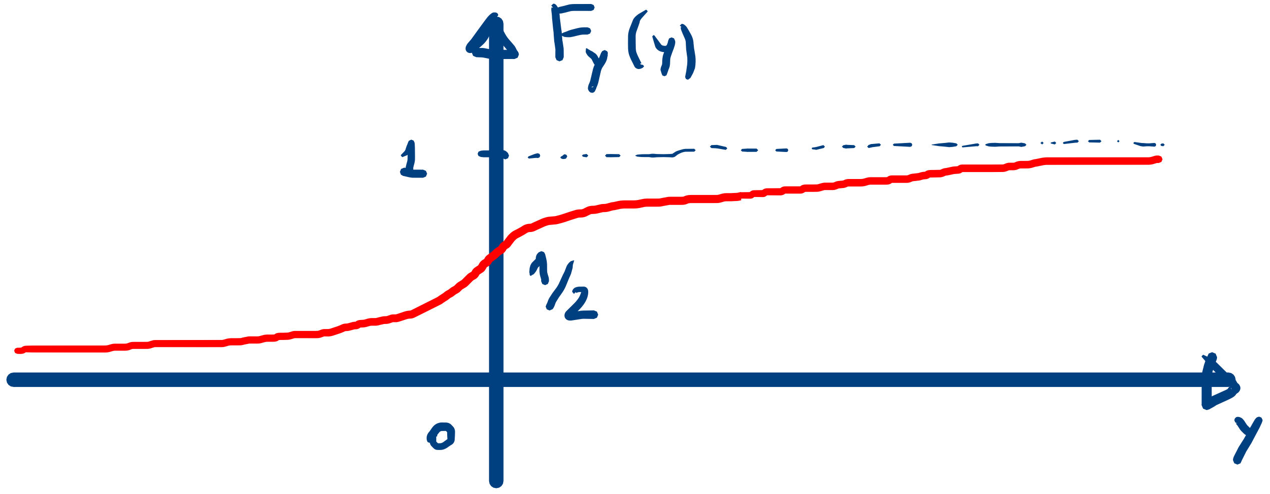
$$\begin{cases} F_Y(y)\longrightarrow 0 & \text{per } y\to-\infty\\ F_Y(y)\longrightarrow 1 & \text{per } y\to+\infty\end{cases}$$

ok

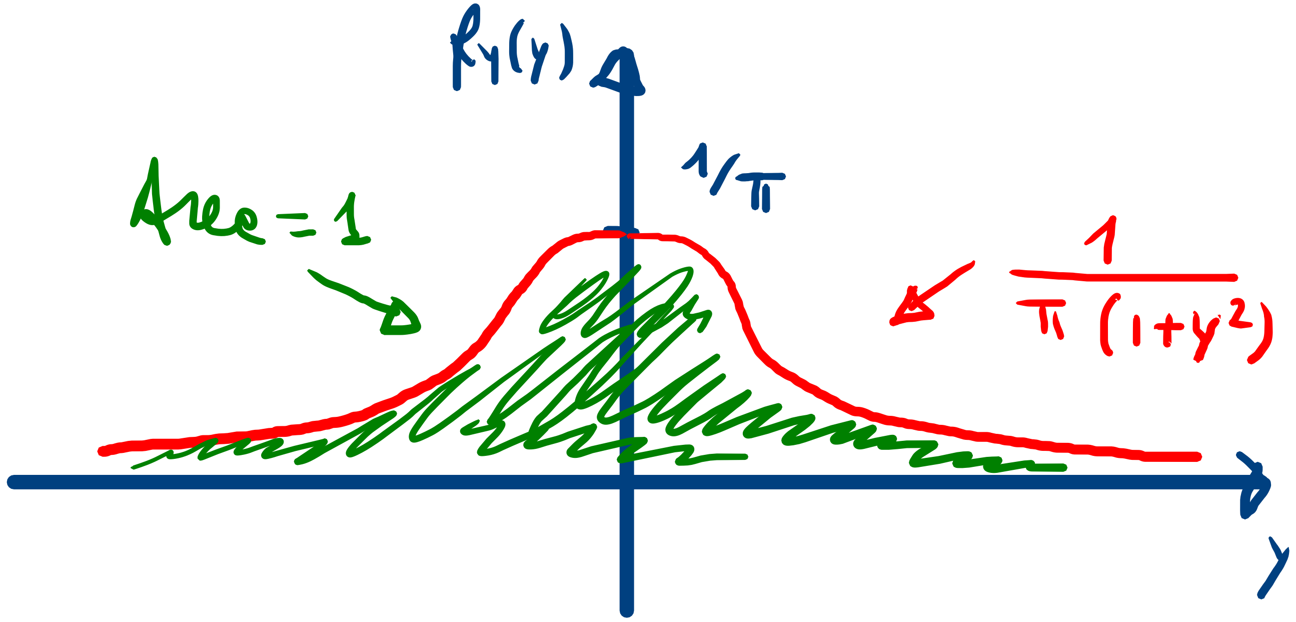
Infine, derivando,

$$f_Y(y)=\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+y^2}.$$

Graficamente si ha



È il grafico dell'arcotangente che "sale in alto" ed è "schiacciato" in modo che gli asintoti siano quelli che devono essere per essere una funzione di distribuzione



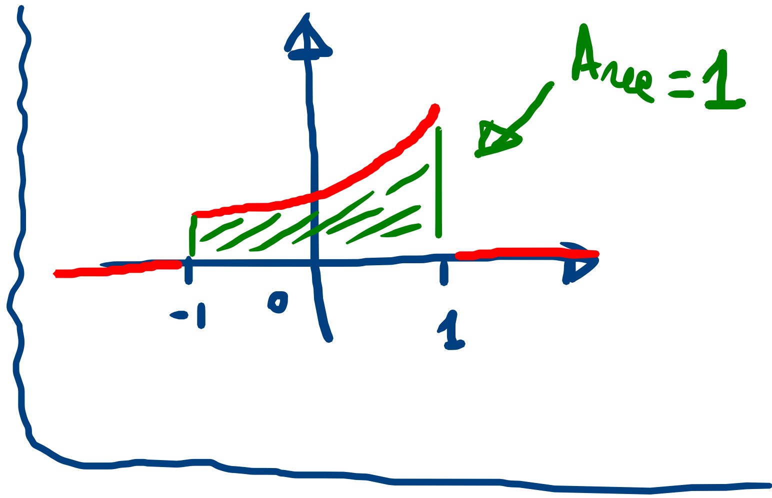
Dall'espressione analitica si deduce che è una funzione "pari" (cioè $f_Y(y) = f_Y(-y)$)

La distribuzione della Y in questo esercizio è detta DISTRIBUZIONE DI CAUCHY e rappresenta un esempio di v.a. continua che NON ha media finita (al momento non abbiamo ancora visto cosa significa nel continuo e lo vedremo prossimamente).

ESERCIZIO

Sia X una v.a. con densità continua $f_X(x) = \frac{e}{e^2-1} e^x \mathbb{1}_{(-1,1)}(x)$.

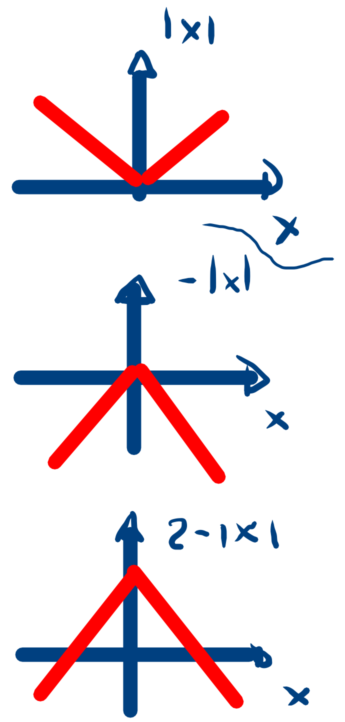
Trovare la densità continua di $Y = 2-|X|$.

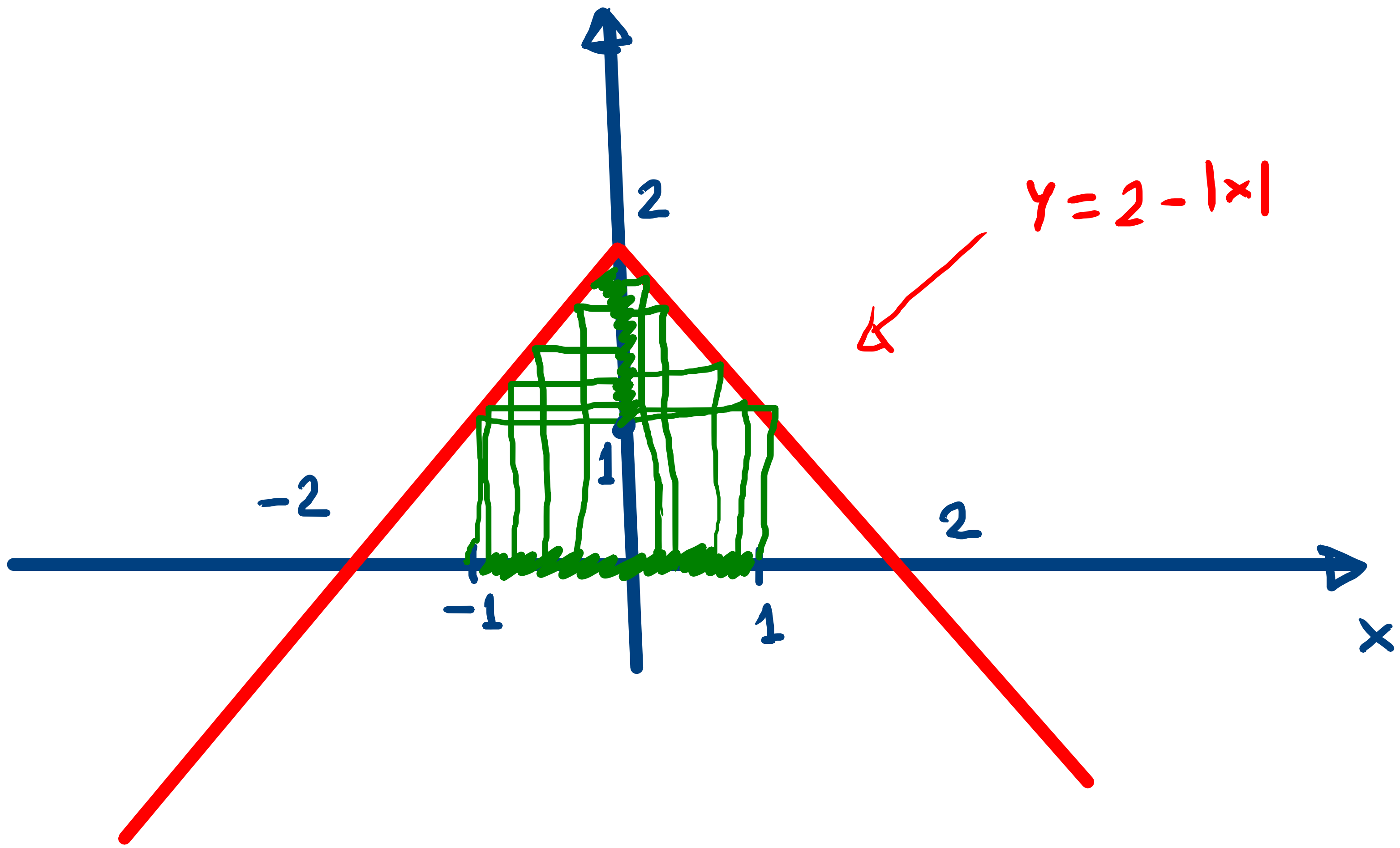


RISPOSTA

Abbiamo $Y = f(X)$ con $f(x) = 2-|x|$ non monotona. Inoltre, più importante, non è monotona su $S=(-1,1)$, dove $P(X\in S)=1$.

Osserviamo che





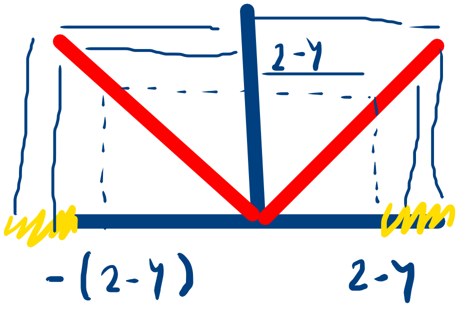
Il grafico mostra che

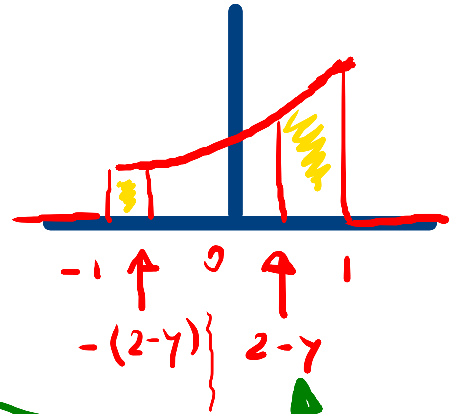
$P(Y\in U)=1$

con $U=(1,2)$

da cui segue...

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{per } y\le 1\\ \circledast & \text{per } y\in(1,2)\\ 1 & \text{per } y\ge 2\end{cases}$$





$1<y<2$

$-1>-y>-2$

$2-1>2-y>2-2$

$1>2-y>0$

$0<2-y<1$

Inoltre

$$\circledast = P(2-|X|\le y) = P(2-y\le |X|) = P(|X|\ge 2-y) =$$

$$= \int_{-1}^{-(2-y)} \frac{e}{e^2-1}e^x\,dx + \int_{2-y}^{1} \frac{e}{e^2-1}e^x\,dx = \frac{e}{e^2-1}\Big[e^x\Big]_{x=-1}^{x=-(2-y)} + \frac{e}{e^2-1}\Big[e^x\Big]_{x=2-y}^{x=1} =$$

$$= \frac{e}{e^2-1}\left(e^{-(2-y)} - e^{-1} + e^{1} - e^{2-y}\right)$$

oss. L'espressione è accettabile per quel che accade per $y=1$ e $y=2$

$$\frac{e}{e^2-1}\left(e^{-1}-e^{-1}+e-e\right)=0 \qquad \frac{e}{e^2-1}\left(\cancel{1}-e^{-1}+e-\cancel{1}\right)=\frac{e^2-1}{e^2-1}=1$$

Infine, derivando,

$$f_Y(y)=\frac{e}{e^2-1}\left(e^{y-2}-e^{2-y}(-1)\right)1_{(1,2)}(y)=\frac{e}{e^2-1}\left(e^{y-2}+e^{2-y}\right)1_{(1,2)}(y)$$

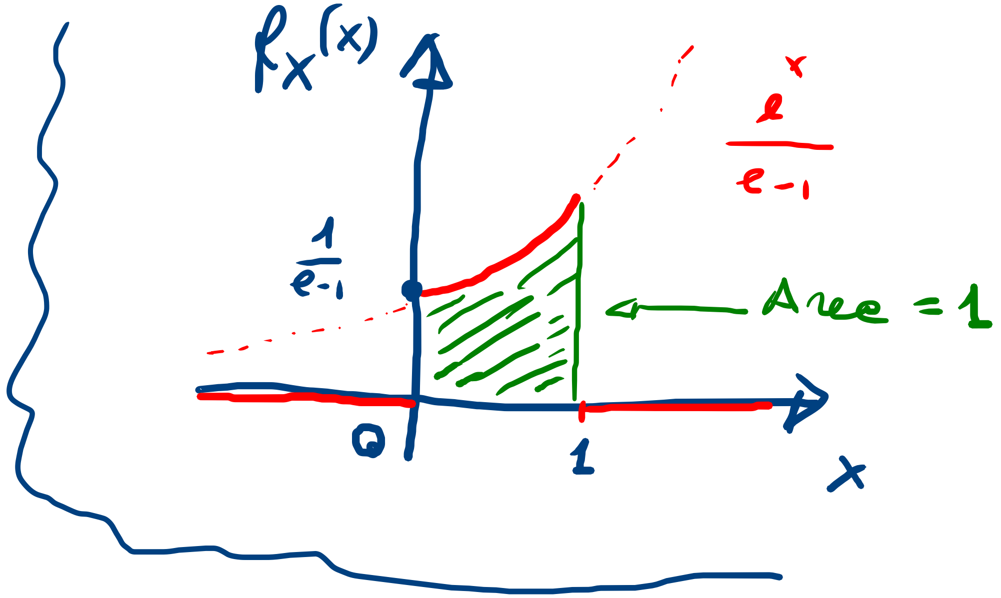
ESERCIZIO

Sia X una v.a. con densità continua $f_X(x) = \frac{e^x}{e-1} 1_{(0,1)}(x)$.

1) Trovare la densità continua di $Y = e^X$.

2) Calcolare $P(\frac{3}{2} \le Y \le 2)$.

3) Calcolare $P(0 \le Y \le \frac{e}{2})$.



SVOLGIMENTO

Abbiamo $Y = f(X)$ dove $f(x) = e^x$ funzione crescente.

Quindi Y assume valori in $(f(0), f(1)) = (e^0, e^1) = (1, e)$.

Allora $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \le 1 \\ * & \text{per } y \in (1,e). \\ 1 & \text{per } y \ge e \end{cases}$

Inoltre $* = P(e^X \le y) = P(X \le \log y) = \int_{-\infty}^{\log y} f_X(x)\,dx \overset{\log y \in (0,1)}{=} \int_0^{\log y} \frac{e^x}{e-1}\,dx = \frac{1}{e-1}\left[e^x\right]_{x=0}^{x=\log y} = \frac{e^{\log y} - e^0}{e-1} = \frac{y-1}{e-1}$.

Ricapitolando

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ \dfrac{y-1}{e-1} & y \in (1,e) \\ 1 & y \geq e. \end{cases}$$

OSS. Abbiamo ottenuto una funzione "continua a tratti" che si "raccorda per continuità" per $y=0$ e $y=1$ (ok)

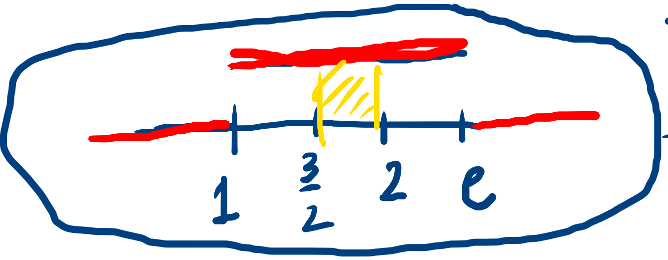
{ Inoltre nell'intervallo centrale è una retta ... }

Infine, derivando,

$$f_Y(y) = \frac{1}{e-1} \mathbb{1}_{(1,e)}(y)$$

OSS. Abbiamo ottenuto che $Y \sim U(1,e)$

2) $$P\left(\frac{3}{2} \leq Y \leq 2\right) = \int_{3/2}^{2} f_Y(y)\,dy = \int_{3/2}^{2} \frac{1}{e-1}\,dy = \frac{1}{e-1}\int_{3/2}^{2} dy =$$



$$= \frac{1}{e-1}\Big[y\Big]_{y=3/2}^{y=2} = \frac{2-3/2}{e-1} = \frac{1/2}{e-1} = \frac{1}{2(e-1)}$$

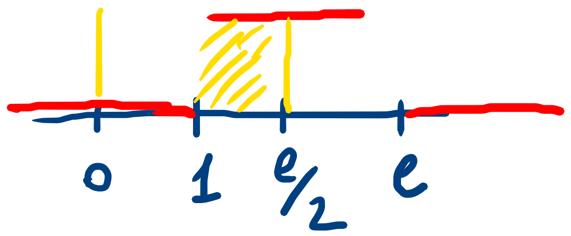
oppure

$$P\left(\frac{3}{2} \leq Y \leq 2\right) = P\left(\frac{3}{2} \leq e^X \leq 2\right) = P\left(\log\left(\frac{3}{2}\right) \leq X \leq \log 2\right) = \int_{\log(3/2)}^{\log 2} f_X(x)\,dx = \frac{1}{e-1}\int_{\log(3/2)}^{\log 2} e^x\,dx = \frac{\Big[e^x\Big]_{x=\log(3/2)}^{x=\log 2}}{e-1} = \frac{2-\frac{3}{2}}{e-1}$$

Come sopra

OSS. $0 < \log \frac{3}{2} < \log 2 < 1$

3) $P\left(0 \le Y \le \frac{e}{2}\right) = \int_1^{e/2} \frac{1}{e-1}\, dx =$



$$= \frac{1}{e-1}\Big[x\Big]_{x=1}^{x=e/2} = \frac{\frac{e}{2}-1}{e-1}$$

$$\underbrace{\log 1}_{=0} < \log \frac{e}{2} < \underbrace{\log e}_{=1}$$

oppure

$$P\left(0 \le Y \le \frac{e}{2}\right) = P\left(0 \le e^X \le \frac{e}{2}\right) = P\left(e^X \le \frac{e}{2}\right) = P\left(X \le \log\left(\frac{e}{2}\right)\right) = \int_0^{\log\left(\frac{e}{2}\right)} \frac{e^x}{e-1}\, dx =$$

sempre vera

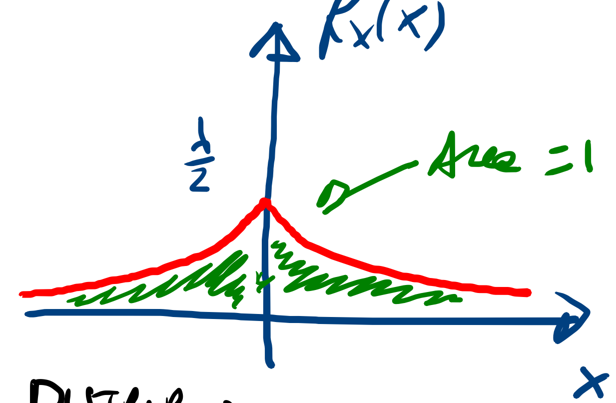
$$= \frac{1}{e-1}\Big[e^x\Big]_{x=0}^{x=\log\frac{e}{2}} =$$

$$= \frac{1}{e-1}\left(e^{\log\left(\frac{e}{2}\right)} - e^0\right) = \frac{1}{e-1}\left(\frac{e}{2}-1\right) = \frac{\frac{e}{2}-1}{e-1}.$$

ESERCIZIO

Sia X una v.a. con densità continua $f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$, dove $\lambda > 0$.

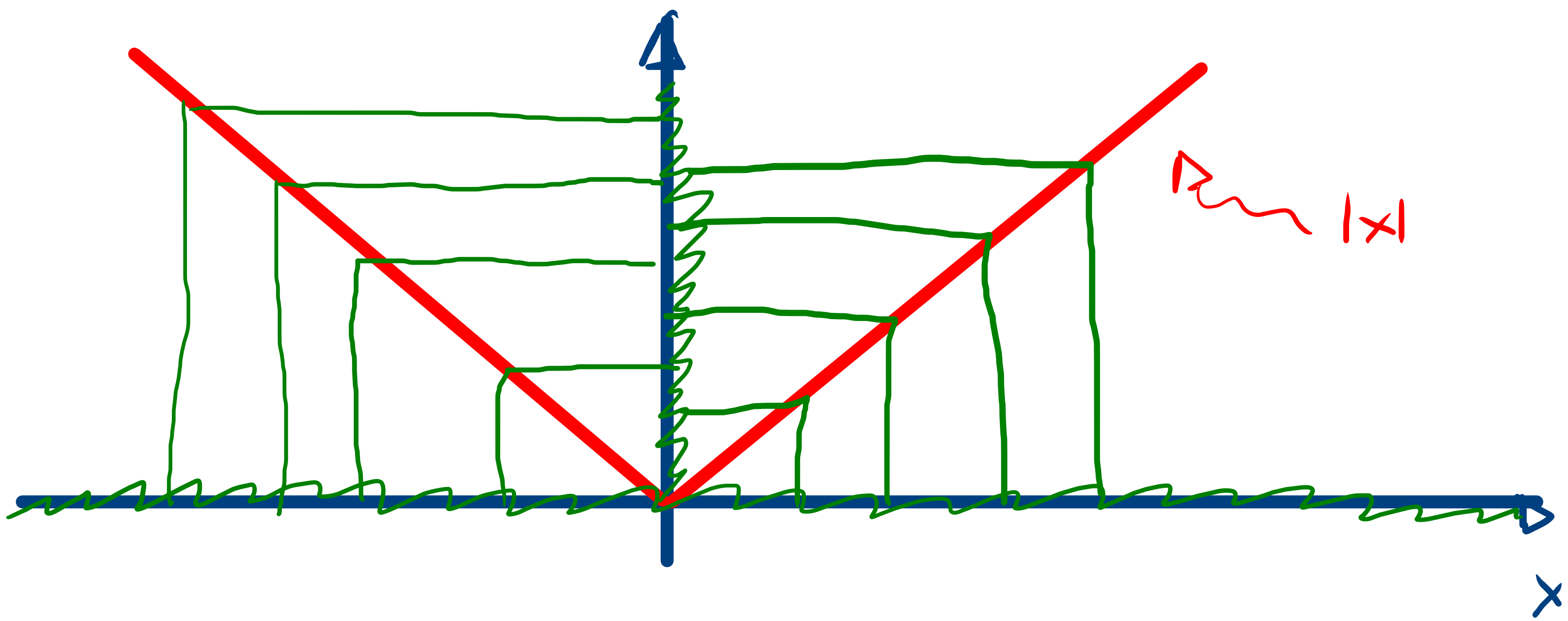
Trovare la densità continua di $Y = |X|$.



DISTRIBUZIONE DI LAPLACE
O DISTRIBUZIONE BIESPONENZIALE

RISPOSTA

Abbiamo $Y = f(X)$ con $f(x) = |x|$ non monotona e, più importante, non monotona su un insieme S t.c. $P(X \in S) = 1$ (devo prendere $S = \mathbb{R}$).



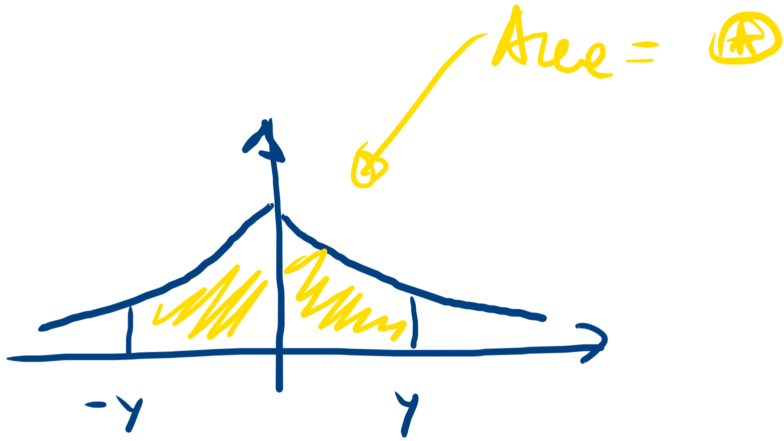
Il grafico ci consente di dire che

$P(Y \in U) = 1$

dove $U = (0, \infty)$.

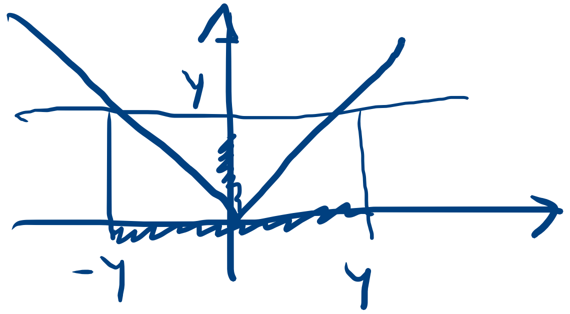
Quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \le 0 \\ \circledast & \text{per } y > 0 \end{cases}$$



Inoltre

$$\circledast = P(|X| \le y) = P(-y \le X \le y) = \int_{-y}^{y} f_X(x)\,dx = \int_{-y}^{y} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}\,dx \overset{\text{simmetria}}{=}$$



$$= \cancel{2}\int_0^y \frac{\lambda}{\cancel{2}} e^{-\lambda x}\,dx = \Big[-e^{-\lambda x}\Big]_{x=0}^{x=y} = -e^{-\lambda y} + e^0 = 1 - e^{-\lambda y}$$

Infine, derivando, $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$.

<u>OSS</u>. $Y \sim Exp(\lambda)$.

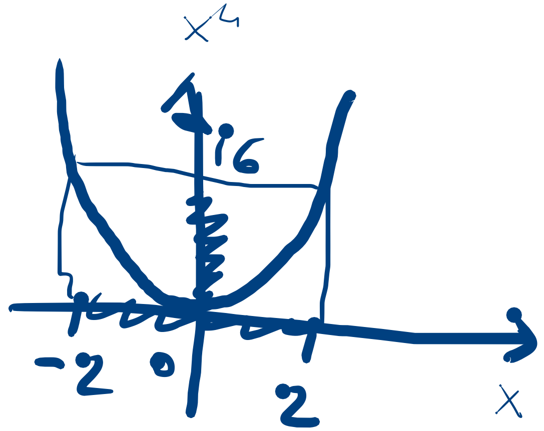
ESERCIZIO

Sia $X \sim U(-2,2)$. Trovare la funzione di distribuzione di $Y = X^4$.

RISPOSTA

La funzione $y = x^4$ non è monotone su $(-2,2)$.

Graficamente si ha la seguente situazione



Quindi $P(0 \leq Y \leq 16) = 1$, da cui segue

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \leq 0 \\ (*) & \text{per } 0 < y < 16 \\ 1 & \text{per } y \geq 16 \end{cases}.$$

Inoltre

$[-\sqrt[4]{y}, \sqrt[4]{y}] \subset [-2,2]$

$$(*) = P(X^4 \leq y) = P(-\sqrt[4]{y} \leq X \leq \sqrt[4]{y}) = \int_{-\sqrt[4]{y}}^{\sqrt[4]{y}} \frac{1}{2-(-2)}\,dx =$$

$$= \int_{-\sqrt[4]{y}}^{\sqrt[4]{y}} \frac{1}{4}\,dx = \frac{[x]_{x=-\sqrt[4]{y}}^{x=\sqrt[4]{y}}}{4} = \frac{\sqrt[4]{y} - (-\sqrt[4]{y})}{4} = \frac{2\sqrt[4]{y}}{4} = \frac{\sqrt[4]{y}}{2}.$$