

Logica e Reti Logiche

Esercitazione

Francesco Pasquale

6 aprile 2023

Esercizio 1. Usando il metodo dei *tableaux* verificare che le seguenti formule sono tautologie

1. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
2. $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$
3. $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$
4. $\neg(p \vee q) \rightarrow \neg p \wedge \neg q$

Esercizio 2. Usando il metodo dei *tableaux* determinare se le seguenti formule sono tautologie oppure no. Per quelle che non lo sono, esibire un'interpretazione che le rende false

1. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)) \rightarrow \neg p$
2. $((p \vee q) \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
3. $((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (p \vee (q \wedge r))$

Esercizio 3. Usando il metodo dei *tableaux* determinare se le seguenti formule sono contraddizioni oppure no. Per quelle che non lo sono, esibire un'interpretazione che le rende vere

1. $p \rightarrow \neg p$
2. $((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)) \wedge \neg(p \vee r)$
3. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)) \rightarrow p$

Una formula si dice in *forma normale congiuntiva* (CNF)¹ se è una congiunzione di *clausole disgiuntive* (dette anche semplicemente *clausole*) $D_1 \wedge D_2 \wedge \dots \wedge D_n$ dove ogni

¹ *Conjunctive Normal Form*

clausola è una disgiunzione di *letterali* $D_i = \ell_{i,1} \vee \ell_{i,2} \vee \dots \vee \ell_{i,k_i}$ e ogni letterale è una variabile oppure una variabile negata. Per esempio,

$$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

è in forma normale congiuntiva. Data una formula X esiste sempre una formula Y equivalente² a X in forma normale congiuntiva.

Esercizio 4. Per ognuna delle formule negli Esercizi 1, 2 e 3, dare una formula equivalente in forma normale congiuntiva.

Esercizio 5. Trovare un metodo che, data una formula X , vi consenta di trovare una formula Y in forma normale congiuntiva equivalente a X .

Resolution. Considerate il seguente metodo che trasforma una formula $D_1 \wedge D_2 \wedge \dots \wedge D_n$ in forma normale congiuntiva in una nuova formula in forma normale congiuntiva (oppure la lascia com'è):

1. Eliminate ogni clausola D_i che contiene sia una variabile x che la sua negata $\neg x$;
2. Per ogni coppia di clausole D_i e D_j in cui una contiene una variabile x e l'altra contiene la sua negata $\neg x$ aggiungete una nuova clausola $Z_{i,j;x}$ con tutti i letterali in D_i e D_j esclusi x e $\neg x$. Per esempio, se $D_i = (p \vee \neg q \vee r)$ e $D_j = (p \vee q \vee \neg s)$, siccome in D_i compare $\neg q$ e in D_j compare q dovete aggiungere la clausola $(p \vee r \vee \neg s)$;^a
3. Eliminate tutte le clausole D_i, D_j coinvolte nel punto precedente.

^a(Nota bene: questo significa anche che, se per esempio $D_i = (p)$ e $D_j = (\neg p)$, dovete aggiungere una clausola $()$ *vuota*)

Esercizio 6. Sia X una formula in forma normale congiuntiva e sia Y la formula ottenuta da X eseguendo i punti 1, 2 e 3 qui sopra. Dimostrare che X è soddisfacibile³ se e soltanto se Y è soddisfacibile.

Esercizio 7. Per ognuna delle formule X in forma normale congiuntiva trovate nell'Esercizio 4, costruire la formula X_1 ottenuta applicando i tre punti di *Resolution* a X , poi X_2 ottenuta applicando *Resolution* a X_1 e così via fino a raggiungere una formula X_k che non viene più modificata da *Resolution*. In quali casi arrivate ad ottenere almeno una clausola vuota? Che cosa potete concludere sulla formula X di partenza quando durante queste iterazioni arrivate ad ottenere una formula che contiene una clausola vuota?

²Ricorda che in logica proposizionale due formule X e Y sono *equivalenti* se hanno la stessa tabella di verità

³Ricorda che una formula si dice *soddisfacibile* se esiste almeno una interpretazione che la rende vera

Una formula si dice in *forma normale disgiuntiva (DNF)*⁴ se è una disgiunzione di *clausole congiuntive* $C_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_n$ dove ogni clausola è una congiunzione di *letterali* $C_i = \ell_{i,1} \wedge \ell_{i,2} \wedge \dots \wedge \ell_{i,k_i}$ e ogni letterale è una variabile oppure una variabile negata. Per esempio,

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

è in forma normale disgiuntiva. Data una formula X esiste sempre una formula Y equivalente a X in forma normale disgiuntiva.

Esercizio 8. Per ognuna delle formule degli Esercizi 1, 2 e 3, dare una formula equivalente in forma normale disgiuntiva.

Esercizio 9. Trovare un metodo che, data una formula X , vi consenta di trovare una formula Y in forma normale disgiuntiva equivalente a X .

Esercizio 10. Riflettere sulla relazione che c'è fra il metodo dei *tableaux* e la forma normale disgiuntiva.

Sia \mathcal{A} il sistema assiomatico definito dai seguenti schemi di assiomi

$$\mathbf{A1} : X \rightarrow (Y \rightarrow X)$$

$$\mathbf{A2} : (X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z))$$

$$\mathbf{A3} : (\neg X \rightarrow Y) \rightarrow (\neg Y \rightarrow X)$$

e dalla regola di inferenza *Modus Ponens*

$$\frac{X, X \rightarrow Y}{Y}.$$

Esercizio 11. Verificare che le formule **A1**, **A2** e **A3** sono tautologie.

Esercizio 12. Dimostrare che nel sistema \mathcal{A}

$$1. \vdash p \rightarrow p$$

$$2. \vdash \neg \neg p \rightarrow p$$

Sia \mathcal{B} il sistema assiomatico definito dai seguenti schemi di assiomi

$$\mathbf{B1} : (X \wedge Y) \rightarrow X$$

$$\mathbf{B2} : (X \wedge Y) \rightarrow Y$$

$$\mathbf{B3} : ((X \wedge Y) \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow (Y \rightarrow Z))$$

$$\mathbf{B4} : ((X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow (Y \rightarrow Z))) \rightarrow (X \rightarrow Z)$$

⁴*Disjunctive Normal Form*

e dalla regola di inferenza *Modus Ponens*.

Esercizio 13. Verificare che le formule **B1**, **B2**, **B3** e **B4** sono tautologie.

Esercizio 14. Dimostrare che nel sistema \mathcal{B}

1. $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow q)$
2. $p \wedge q \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$
3. $p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash p \rightarrow r$
(Suggerimento: Usare il punto precedente, che dice che da una formula del tipo $X \wedge Y \rightarrow Z$ si può derivare la formula $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$)
4. $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$
5. $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
(Suggerimento: Usare il punto precedente, che dice che si può derivare una formula del tipo $X \rightarrow (Y \rightarrow X)$)

Esercizio 15. Per ognuna delle seguenti formule, dire se è un teorema nel sistema \mathcal{B} oppure no. In caso affermativo esibire una dimostrazione, in caso negativo spiegare perché non può essere un teorema

1. $p \rightarrow (p \rightarrow q)$
2. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
3. $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (r \rightarrow (p \wedge q))$

Esercizio 16. Riflettere sulla relazione che c'è fra la regola di inferenza *Modus Ponens* e i punti 2 e 3 del metodo *resolution*.

Esercizio 17. Avete davanti a voi quattro porte, X, Y, Z, W , e otto guardiani, A, B, C, D, E, F, G, H . Ognuno dei guardiani può dire la verità oppure mentire. I guardiani fanno le seguenti affermazioni:

- A: X è una porta buona
- B: Almeno una delle porte Y, Z è buona
- C: A e B dicono la verità
- D: X e Y sono entrambe porte buone
- E: X e Z sono entrambe porte buone
- F: Almeno uno dei guardiani D, E dice la verità
- G: Se C dice la verità, anche F dice la verità
- H: Se G e io diciamo la verità, anche A dice la verità

Almeno una delle porte è buona. Potete scegliere una sola porta. Una catastrofe si abatterà su di voi se non scegliete una porta buona. Che porta scegliete? Perché?