Lezione 9/06/2023

$$C = \frac{q}{V}, \quad U = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

$$\oint_C \vec{E}\, d\vec{l} = 0$$

$$\text{fem}: \oint \vec{E}_m \vec{l} \neq 0, \quad P = \frac{dE}{dt} = VI, \; I^2 R$$

$$U_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \Rightarrow U_{E_{TOT}} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)$$

$$U_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

$\vec{F}_L = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ forza di Lorentz in assenza di E

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

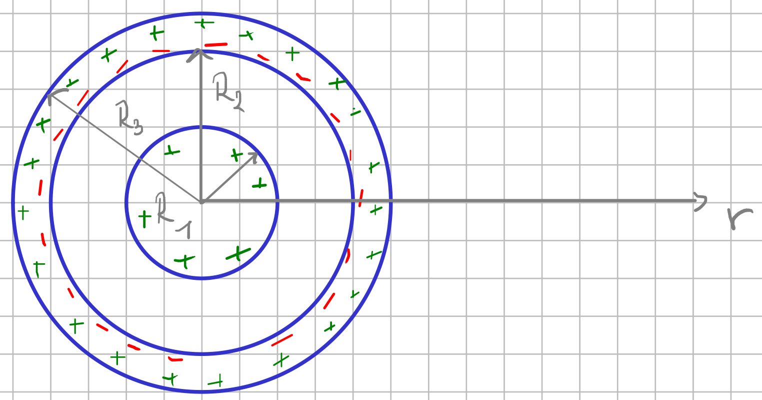
$$d\vec{F} = i\, d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$$\oint_L \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I, \quad \phi(B) = \int_S \vec{B}\, \hat{n}\, ds,$$

$$\text{fem} = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

Esercizio 1 (elettrostatica)

Un conduttore di geometria sferica, di raggio R_1 ha una carica q. Concentrica con questa sfera è presente una sfera cava conduttrice di carica q, i cui raggi sono R_2, R_3. Calcolare campo elettrico e potenziale in funzione di r.



Ci troviamo in simmetria sferica, le cariche negative vengono attratte da quelle positive.

Caso $r < R_1$

All'interno del conduttore, le cariche si sono disposte sulla superficie, perciò all'interno non ci sono cariche, perciò

$$E(r < R_1) = 0$$

Caso $r = R_1$

Dato che le cariche si sono disposte sulla superficie, per calcolare il campo elettrico possiamo usare il teorema di Gauss.

$$\Phi_E(r) = \int_S \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad ds = 4\pi R_1^2 \qquad \text{(area sfera)}$$

$$E\,4\pi R_1^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(R_1) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}$$

Caso $R_1 \leq r < R_2$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ dove r può variare tra $[R_1, R_2)$

Caso $R_2 \leq r < R_3$

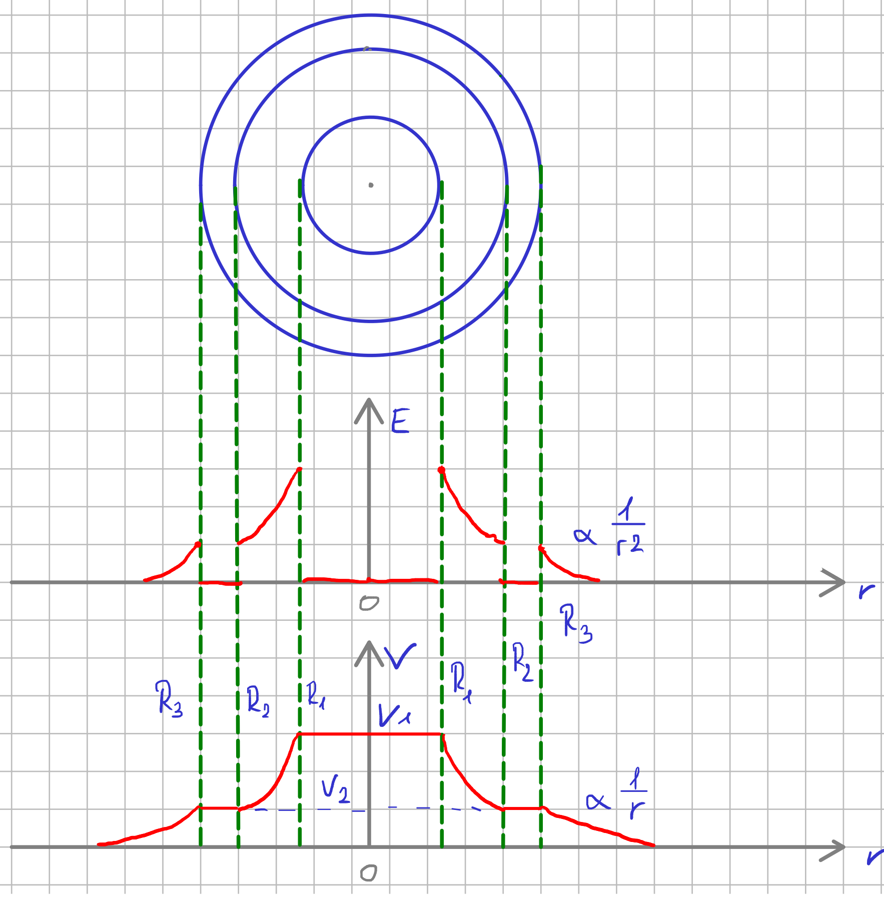
In questa superficie troviamo cariche q^+ e cariche q^- $\Rightarrow$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{q-q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = 0$$

Caso $r \geq R_3$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Quale è il potenziale in ciascun di questi casi?



$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E}\,d\vec{s} \Rightarrow E_r = -\frac{dV}{dr}, \quad \text{Se } E=0 \Rightarrow V = \text{cost}$$

Sia $V(\infty) = 0$, $\quad V \xrightarrow{r\to\infty} 0$

Determinare V_1 e V_2 $\rightarrow$ dal grafico

$$V_1 = \int_{R_1}^{+\infty} E\,dr = \int_{R_1}^{R_2} E\,dr + \int_{R_3}^{+\infty} E\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$V_2 = \int_{R_3}^{+\infty} E\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$, quindi

$$V_1 = V(\infty) - V(R_1) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

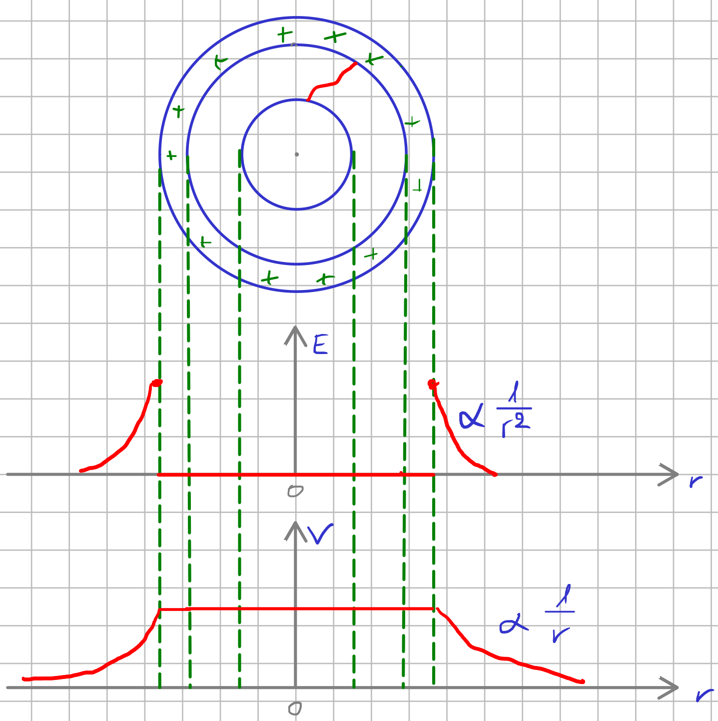
$$V_2 = (V_\infty) - V(R_3) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

Consideriamo i casi particolari in cui

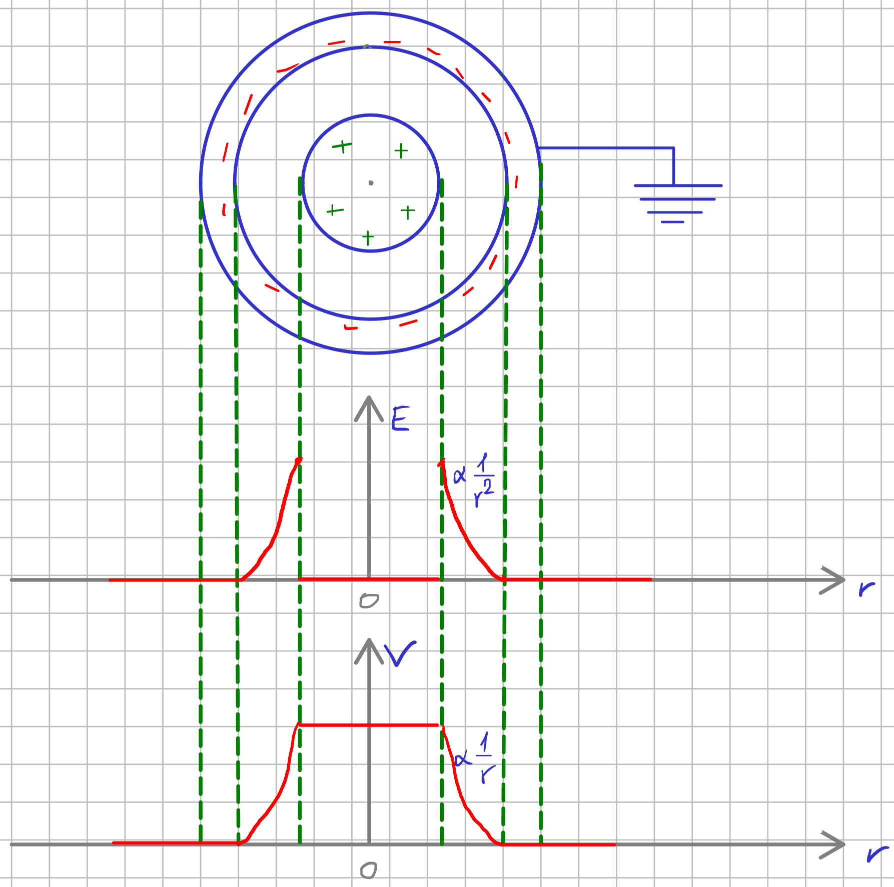
a) Il conduttore interno è collegato con la facci interna del conduttore esterno.

$$V(\infty) - V(R_3) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

Le cariche si sono disposte sulla superficie del conduttore esterno.



b) La parete esterna del conduttore esterno è messa a terra.



$V(R_3) = 0$, perché c'è la messa a terra.

Esercizio 2 (Condensatori)

Si parte da una configurazione di due condensatori C_1, C_2 collegati in serie (figura 1) con rispettive differenze di potenziale $V_1 = 30\,V$ e $V_2 = 20\,V$. Succesivamente viene aggiunto un terzo condensatore $C_3 = 2\,\mu F$ collegato in parallelo con C_1 (figura 2) con differenze di potenziale $V_1' = 5\,V$ e $V_2' = 45\,V$.
Determinare C_1 e C_2.

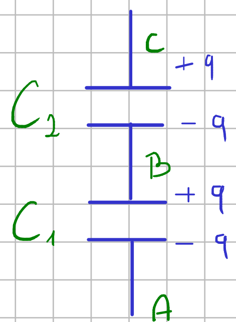


figura 1.

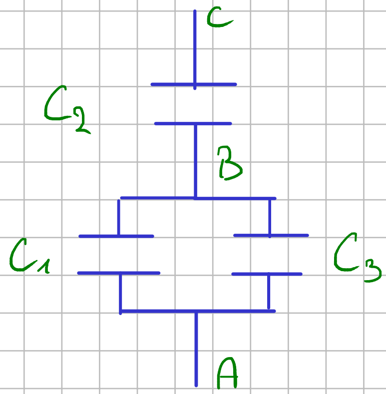


figura 2

$$C = \frac{q}{V} \Rightarrow q = CV$$

1) $C_1 V_1 = C_2 V_2 \Rightarrow q_1 = q_2$: cariche uguali in modulo sulle armature

$$\Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \boxed{\frac{C_1}{C_2} = \frac{2}{3}}$$

2) $C_2 V_2' = C' V_1' \Rightarrow \frac{C'}{C_2} = \frac{V_2'}{V_1'} \Rightarrow \frac{C'}{C_2} = 9$, $C' = C_1 + C_3$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{C_1 + C_3}{C_2} = 9}$$

Metto a sistema queste due equazio:

$$\begin{cases} \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow C_1 = \dfrac{2}{3} C_2 \\[2ex] \dfrac{C_1 + C_3}{C_2} = 9 \Rightarrow \dfrac{2}{3}\dfrac{\cancel{C_2}}{\cancel{C_2}} + \dfrac{C_3}{C_2} = 9 \Rightarrow \dfrac{C_3}{C_2} = 9 - \dfrac{2}{3} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{C_3}{C_2} = \frac{25}{3} \Rightarrow \frac{C_2}{C_3} = \frac{3}{25} \Rightarrow C_2 = \frac{3 C_3}{25} = \frac{3 \cdot 2}{25}\,\mu F$$

$$\Rightarrow C_2 = 0.24\,\mu F$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{2}{3} \cdot 0{,}24\,\mu F = 0.16\,\mu F$$

Esercizio 3 (elettrostatica)

Calcolare la densità di energia di una carica q distribuita:

a) sulla superficie di una sfera di raggio R $\left(\sigma = \frac{q}{S}\right)$

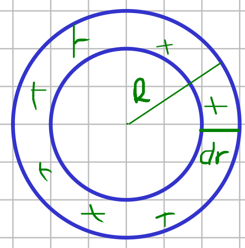
b) sul volume di una sfera di raggio R $\left(\rho = \frac{q}{V}\right)$

$q = 3{,}2 \cdot 10^{-18}\,C$, $R = 10^{-15}\,m$

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \Rightarrow U_E^{TOT} = \int_V u_E \, d\tau$$

$$d\tau = 4\pi r^2 dr$$

a) $\sigma = \frac{q}{S}$



Se $r < R \Rightarrow E = 0$

Se $r \geq R \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

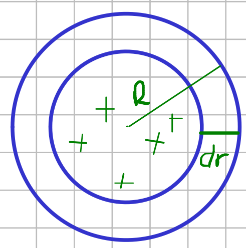
$$U_E^{TOT} = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \, d\tau = \int_R^{+\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 (4\pi r^2 dr)$$

$$= \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0}\int_R^{+\infty} \frac{q^2}{4^{\cancel{2}}\pi^{\cancel{2}}\varepsilon_0^{\cancel{2}} r^{\cancel{4}\,2}}\cancel{4\pi}\cancel{r^2}dr = \frac{1}{2}\int_R^{+\infty}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = U_E^{TOT}$$

b) $\rho = \frac{q}{V} \rightarrow q = \rho V$

Se $r < R$



Usando il teorema di Gauss per la distribuzione volumetrica:

$$\int_\Sigma E \, d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\int 2\pi r \, dr = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\cancel{4\pi}\cancel{r^2} = \frac{\rho\,\cancel{\frac{4}{3}}\cancel{\pi} r^{\cancel{3}}}{\varepsilon_0}$$

$d\Sigma = 2\pi r \, dr$

$E \cdot$ Area sfera $= E \cdot 4\pi r^2$

$$\Rightarrow E_r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

$$r \geq R, \quad E_R = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$U_E^{(2)TOT} = U_E(E_r) + U_E(E_R) = U_{E_r} + U_{E_R}$$

$$U_E^{(2)TOT} = \int_0^R U_{E_r} 4\pi r^2 dr + \int_R^{+\infty} U_{E_R} 4\pi r^2 dr$$

$$= \underbrace{\int_0^R \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\right)^2 4\pi r^2 dr}_{U_1} + \int_R^{+\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$U_{E_1} = \frac{1}{5}\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}$$

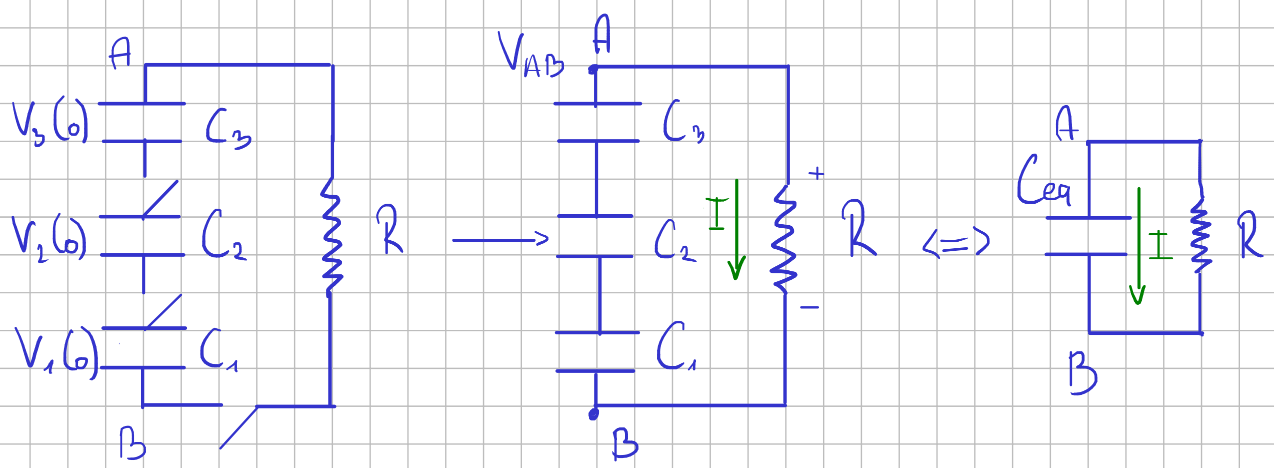
$$U_E^{TOT} = \frac{1}{5}\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} = \frac{3}{5}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$U_E^{(1)} = 4{,}61 \cdot 10^{-11} J \ (\sim 288 MeV)$$

$$U_E^{(2)TOT} = \frac{6}{5} U_e^{(1)} = 5.53 \cdot 10^{-11} J \ (\sim 346 MeV)$$

Esercizio 3 (Carica/scarica condensatore)

Tre capacità C_1, C_2, C_3 sono collegate in serie, ognuna con una differenza di potenziale V_1, V_2, V_3. Quando il circuito viene chiuso, vengono collegate ad una resistenza R.

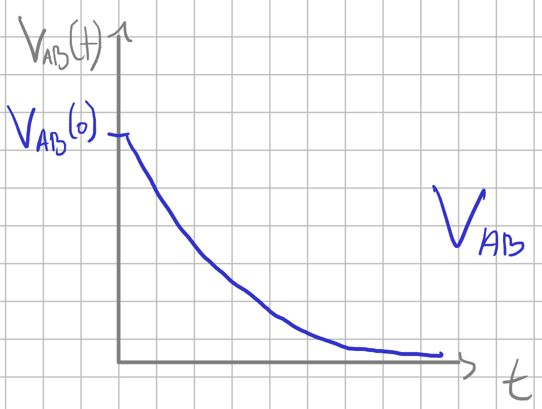


$$V_{AB}(0) = V_1(0) + V_2(0) + V_3(0)$$

a) Determinare $V_{AB}(t)$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}$$

$$V_{AB}(t) = V_{AB}(0)\, e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = C_{eq} \cdot R$$



$$V_{AB} \xrightarrow{t \to \infty} 0$$

b) Determinare la carica residua per C_j, $j = 1, 2, 3$

$q_j(0) = C_j V_j(0)$: carica iniziale

$\Delta q_j = q_j(0) - q_{dissipata}$: carica residua

$$I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \int_0^{\infty} I\, dt = \int_0^{\infty} \frac{dq}{\cancel{dt}} \cancel{dt} \Rightarrow q_{dissipata} = \int_0^{\infty} I\, dt$$

$$\underline{I}(t) = \frac{V_{AB}(0)}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \left(\text{ricavata da } V_{AB}(t) = V_{AB}(0) e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$q_{dis} = \int_0^{+\infty} I(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{V_{AB}(0)}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}\, dt = \frac{\tau V_{AB}(0)}{R}$$

$$\Rightarrow q_{dis} = C_{eq} V_{AB}(0), \quad \tau = C_{eq} R$$

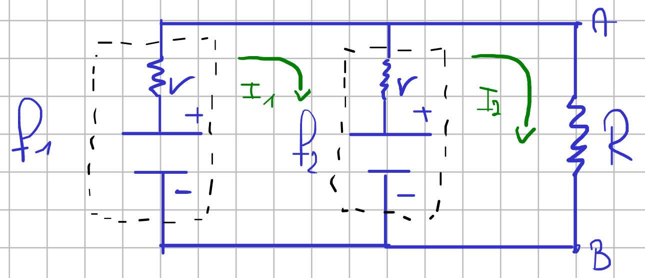
$\Delta q_{,j} = C_j V_j(0) - C_{eq} V_{AB}(0)$: carica residua sul condensatore C_j, $j = 1,2,3$

c) Determinare l'energia residua.

$$U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \qquad q = \Delta V C \Rightarrow C = \frac{q}{\Delta V}$$

$U_{r,j} = \frac{1}{2} \frac{(\Delta q_{,j})^2}{C_j}$: energia residua sul condensatore C_j, $j = 1,2,3$

Esercizio 4 (Leggi di Kirchoff)



$\Delta V_{AB} = V_A - V_B$, $f_1 = 1{,}4V$, $f_2 = 1{,}6V$, $r = 1\Omega$, $R = 2\Omega$

Determinare ΔV_{AB}

$$\begin{cases} f_1 - I_1 r - I_1 r + I_2 r - f_2 = 0 \\ f_2 - I_2 r + I_1 r - I_2 R = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2r I_1 - r I_2 = f_1 - f_2 \\ -r I_1 + (r+R) I_2 = f_2 \end{cases}$$

$\Delta V_{AB} = I_2 R$, percio bisogna calcolare I_2 con Cramer

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2r & f_1 - f_2 \\ -r & f_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2r & -r \\ -r & r+R \end{vmatrix}} = \frac{2r f_2 + r(f_1 - f_2)}{2r(r+R) - r^2} = \frac{\cancel{r}(f_2 + f_1)}{\cancel{r}(2R + r)}$$

$$\Rightarrow \Delta V_{AB} = I_2 \cdot R = \frac{f_2 + f_1}{2R + r} R \cong 1{,}2V$$