Laurea Triennale in Scienze e Tecnologie per i Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2023-2024`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Esame del 21 Giugno 2024
L'Esercizio 6 è solo per coloro che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1. Consideriamo lanci ripetuti di un dado equo.
`D1)` Nel caso di due lanci, calcolare la probabilità di ottenere il numero 3 in uno dei due lanci sapendo che la somma dei due numeri ottenuti è uguale a 8.
`D2)` Nel caso di due lanci, calcolare la probabilità che esca la sequenza $(6, \text{diverso da } 6)$.
`D3)` Nel caso di quattro lanci, calcolare la probabilità che esca esattamente un numero pari.

Esercizio 2. Abbiamo una prima urna che contiene b palline bianche e r rosse. Si estrae una pallina a caso, e viene messa in una seconda urna, la quale contiene 1 pallina bianca e 1 rossa. Poi si estrae una pallina a caso dalla seconda urna.
`D4)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca dalla seconda urna.

Esercizio 3. Sia $q \in (0,1)$ arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = (1-q)^{x_1}(1-q^2)^{x_2}q^3 \quad \text{per } x_1, x_2 \geq 0 \text{ interi.}$$

`D5)` Verificare che $P(X_1X_2 = 0) = q + q^2 - q^3$.
`D6)` Verificare che $P(\{X_1 \leq 1\} \cap \{X_2 = X_1^2\}) = q^3(1 + (1-q)(1-q^2))$.

Esercizio 4. Sia $a > 0$ arbitrariamente fissato. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(-a^2, a^2)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = \sqrt{|X|}$.
`D8)` Calcolare $\mathbb{E}[e^X]$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una variabile aleatoria Normale standard.
Calcolare $P(-1 \leq X \leq 3/2)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomenti positivi.
`D10)` Siano $X_1, \ldots, X_{100}$ variabili aleatorie i.i.d. con media 1 e varianza 100.
Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{100} < 140)$ con l'approssimazione Normale esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1,2,3,4,5\}$ e con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 1-c \\ 0 & 0 & 0 & c^2 & 1-c^2 \end{pmatrix},$$

dove $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c \in (0,1)$ tali che $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ e $b_1 + b_2 + b_3 = 1$.
`D11)` Calcolare $\lim_{n\to\infty} p_{55}^{(n)}$ dopo aver giustificato l'esistenza del limite.
`D12)` Verificare che le probabilità di assorbimento in $\{4,5\}$ partendo da 2 e da 3 sono $\lambda_2 = \frac{a_3b_3}{a_1b_1+a_1b_3+a_3b_3}$ e $\lambda_3 = \frac{a_1b_3+a_3b_3}{a_1b_1+a_1b_3+a_3b_3}$, rispettavemente.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Nel caso di due lanci ognuna delle 36 coppie di risultati possibili ha probabilità $\frac{1}{36}$.
`D1)` La probabilità condizionata richiesta è

$$P(\{\text{almeno un } 3\}|\{\text{somma } 8\}) = \frac{P(\{\text{almeno un } 3\} \cap \{\text{somma } 8\})}{P(\{\text{somma } 8\})} = \frac{P(\{(3,5),(5,3)\})}{P(\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\})} = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}.$$

`D2)` La probabilità richiesta è $P(\{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}) = \frac{5}{36}$.
Osservazione. In altro modo, sfruttando l'indipendenza degli eventi legati a lanci di dadi diversi, con notazioni ovvie si ha

$$P(E_1 \cap E_2^c) = P(E_1)P(E_2^c) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}.$$

`D3)` Per la teoria della distribuzione binomiale, la probabilità richiesta è $\binom{4}{1}(\frac{1}{2})^4 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie viene chiesto di calcolare $P(B_2)$. Si usa la formula delle probabilità totali e si ha

$$P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|B_1^c)P(B_1^c) = \frac{2}{3}\frac{b}{b+r} + \frac{1}{3}\frac{r}{b+r} = \frac{2b+r}{3(b+r)}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha

$$\begin{aligned} P(X_1X_2 = 0) &= P(X_1 = 0) + P(X_2 = 0) - P(X_1 = 0, X_2 = 0) \\ &= \sum_{k \geq 0} p_{X_1,X_2}(0,k) + \sum_{k \geq 0} p_{X_1,X_2}(k,0) - p_{X_1,X_2}(0,0) \\ &= \frac{q^3}{1-(1-q^2)} + \frac{q^3}{1-(1-q)} - q^3 = \frac{q^3}{q^2} + \frac{q^3}{q} - q^3 = q + q^2 - q^3. \end{aligned}$$

`D6)` Si ha

$$\begin{aligned} P(\{X_1 \leq 1\} \cap \{X_2 = X_1^2\}) &= \sum_{x_1=0}^{1} p_{X_1,X_2}(x_1, x_1^2) = p_{X_1,X_2}(0,0^2) + p_{X_1,X_2}(1,1^2) \\ &= p_{X_1,X_2}(0,0) + p_{X_1,X_2}(1,1) = q^3 + q^3(1-q)(1-q^2) = q^3(1 + (1-q)(1-q^2)). \end{aligned}$$

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(0 \leq Y \leq a) = 1$ e quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0, \\ (*) & \text{se } 0 < y < a, \\ 1 & \text{se } y \geq a. \end{cases}$$

Per $y \in (0,a)$ si ha

$$\begin{aligned} (*) &= P(Y \leq y) = P(\sqrt{|X|} \leq y) = P(|X| \leq y^2) = P(-y^2 \leq X \leq y^2) \\ &= \int_{-y^2}^{y^2} \frac{1}{a^2 - (-a^2)} dx = \int_{-y^2}^{y^2} \frac{1}{2a^2} dx = \left[\frac{x}{2a^2}\right]_{x=-y^2}^{x=y^2} = \frac{y^2 - (-y^2)}{2a^2} = \frac{2y^2}{2a^2} = \left(\frac{y}{a}\right)^2. \end{aligned}$$

`D8)` Si ha

$$\mathbb{E}[e^X] = \int_{-a^2}^{a^2} \frac{e^x}{a^2 - (-a^2)} dx = \int_{-a^2}^{a^2} \frac{e^x}{2a^2} dx = \left[\frac{e^x}{2a^2}\right]_{x=-a^2}^{x=a^2} = \frac{e^{a^2} - e^{-a^2}}{2a^2}.$$

Esercizio 5.

`D9)` Si ha $P(-1 \le X \le 3/2) = \Phi(3/2) - \Phi(-1) = \Phi(3/2) - (1 - \Phi(1)) = \Phi(3/2) + \Phi(1) - 1$.

`D10)` Si ha

$$P(X_1 + \cdots + X_{100} < 140) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{100} - 100 \cdot 1}{\sqrt{100}\sqrt{100}} < \frac{140 - 100 \cdot 1}{\sqrt{100}\sqrt{100}}\right)$$
$$\approx \Phi\left(\frac{140 - 100}{100}\right) = \Phi\left(\frac{40}{100}\right) = \Phi\left(\frac{2}{5}\right).$$

Esercizio 6.

`D11)` Osserviamo che la classe $\{4,5\}$ è chiusa e irriducibile. Inoltre la catena ristretta a $\{4,5\}$ è regolare (per l'Osservazione 5.16; infatti qui abbiamo $p_{44}, p_{55} > 0$). Quindi si può applicare il Teorema di Markov alla catena ristretta a $\{4,5\}$, e si ha

$$\lim_{n\to\infty} p_{55}^{(n)} = \pi_5,$$

dove (π_4, π_5) è l'unica distribuzione stazionaria per la catena ristretta a $\{4,5\}$. Inoltre abbiamo il seguente sistema

$$\begin{cases} \pi_4 c + \pi_5 c^2 = \pi_4 \\ \pi_4(1-c) + \pi_5(1-c^2) = \pi_5. \end{cases}$$

Con semplici calcoli si vede che entrambe le equazioni si scrivono come $\pi_4 = \frac{c^2}{1-c}\pi_5$. Poi, tenendo conto che $\pi_4 + \pi_5 = 1$, si ha $\frac{c^2}{1-c}\pi_5 + \pi_5 = 1$, $\pi_5 \frac{c^2+1-c}{1-c} = 1$, $\pi_5 = \frac{1-c}{c^2+1-c}$. In conclusione

$$\lim_{n\to\infty} p_{55}^{(n)} = \frac{1-c}{c^2+1-c}.$$

`D12)` Consideriamo il sistema per le probabilità di assorbimento in $C = \{4,5\}$, e quindi con $D_C = \{2,3\}$:

$$\begin{cases} \lambda_2 = 0 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 \\ \lambda_3 = b_3 + b_1\lambda_2 + b_2\lambda_3; \end{cases}$$

allora

$$\begin{cases} (1-a_2)\lambda_2 = a_3\lambda_3 \\ (1-b_2)\lambda_3 = b_3 + b_1\lambda_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_3 = \frac{1-a_2}{a_3}\lambda_2 = \frac{a_1+a_3}{a_3}\lambda_2 \\ (b_1+b_3)\lambda_3 = b_3 + b_1\lambda_2. \end{cases}$$

Si sostituisce la prima nella seconda e si ha

$$\frac{(b_1+b_3)(a_1+a_3)}{a_3}\lambda_2 = b_3 + b_1\lambda_2, \quad \left(\frac{(b_1+b_3)(a_1+a_3)}{a_3} - b_1\right)\lambda_2 = b_3,$$

$$\frac{a_1b_1 + a_3b_1 + a_1b_3 + a_3b_3 - a_3b_1}{a_3}\lambda_2 = b_3, \quad \frac{a_1b_1 + a_1b_3 + a_3b_3}{a_3}\lambda_2 = b_3$$

da cui segue

$$\lambda_2 = \frac{a_3b_3}{a_1b_1 + a_1b_3 + a_3b_3};$$

allora, risostituendo questo valore ottenuto nella prima equazione, con semplici calcoli si ottiene

$$\lambda_3 = \frac{a_1+a_3}{a_3}\frac{a_3b_3}{a_1b_1 + a_1b_3 + a_3b_3} = \frac{a_1b_3 + a_3b_3}{a_1b_1 + a_1b_3 + a_3b_3}.$$