Tutorato Geometria e Algebra
Informatica

Andrea Pizzi

2 Maggio 2023

Esercizio 1. a) Si calcolino le matrici inverse delle seguenti matrici e il loro determinante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Provare a calcolare il determinante con il metodo di Gauss. Fare lo stesso con le trasposte delle matrici sopra.

b)*** Consideriamo ora la matrice qualunque

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dimostra che è invertibile se e solamente se $ad - bc \neq 0$ (Utilizzare l'esercizio 3c del foglio 5), e che l'inversa è data da

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Si calcolino le matrici inverse delle seguenti matrici e il loro determinante.

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Provare a calcolare il determinante con il metodo di Gauss. Fare lo stesso con le trasposte delle matrici sopra.

Esercizio 3. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dimostra che

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b)$$

Esercizio 4. Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss si trasformi la seguente matrice in una matrice triangolare superiore.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & b+3 & -2 \\ -3 & 3a+6 & 3a-6 & 3 \\ 1 & a-b-1 & a-b+4 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizzando il risultato ottenuto si calcoli il determinante di A e si dica per quali valori dei parametri reali a e b la matrice ha rango 3.

Esercizio 5. Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss si trasformi la seguente matrice in una matrice triangolare superiore.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6-2a & 2a+4 & -4 \\ -1 & 2a+b-4 & -2a-4 & 2 \\ 0 & 4-a-2b & a-4 & 2 \\ 1 & a+6 & -a-11 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizzando il risultato ottenuto si calcoli il determinante di A e si dica per quali valori dei parametri reali a e b la matrice ha rango 3.

Esercizio 6. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i sottospazi vettoriali

$$U := \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + w = 0 \end{cases} \quad , \quad W = Span\{(1,0,0,1),(2,0,-2,-2),(10,0,-6,-2)\}$$

a) Determinare $dimU$ e $dimW$ e trovare una base per entrambi.
b) Determinare delle equazioni parametriche di U ed equazioni parametriche e cartesiane di W.
c) Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$. In caso negativo, determinare la dimensione ed una base per $U + W$ e stabilire se la somma è diretta.

Esercizio 7. In $\mathbb{R}^4$ sia $W = Span\{(0,1,-1,1),(1,0,1,2),(0,0,2,0)\}$.
a) Determinare la dimensione di W estraendo dal sistema di generatori dato una base.
b) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di W.
c) Estendere la base di W ad una base per tutto $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 8. Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare data dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare $T((0,0))$, $T((1,0))$,$T((0,1))$,$T(1,1))$.
b) Cosa fa geometricamente T?
c) Calcolare e disegnare $T(U)$, dove $U = Span\{(3,4)\}$.

Esercizio 9. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare data dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare $T((0,0,0))$, $T((1,0,0))$,$T((0,1,0))$,$T(1,1,0))$,$T(0,0,1))$,$T(1,1,1))$.
b) Cosa fa geometricamente T?
c) Calcolare e disegnare $T(U)$, dove $U = Span\{(3,4,0)\}$. Confrontare $dimU$ e $dimT(U)$.
d) Calcolare e disegnare $T(U)$, dove $U = Span\{(3,4,5)\}$. Confrontare $dimU$ e $dimT(U)$.
e) Calcolare e disegnare $T(U)$, dove $U = Span\{(3,4,5),(0,0,1)\}$. Confrontare $dimU$ e $dimT(U)$.
f) Calcolare e disegnare $T(U)$, dove $U = Span\{(3,4,5),(1,4,1)\}$.Confrontare $dimU$ e $dimT(U)$.

Esercizio 10. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare data da

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x + z \\ x + z \\ y + w \end{pmatrix}$$

Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = Span\{(3,1,1,0),(0,1,1,0)\} \qquad W = Span\{(-1,2,2,-1),(0,1,1,0)\}$$

a) Determinare $kerT$ e dire se T è iniettiva. Esibirne una base.
b) Determinare l'immagine $T(\mathbb{R}^4)$ ed esibirne una base.
c) Calcolare la dimensione di U. Studiare $U \cap KerT$. Trovare la dimensione di $T(U)$ ed esibirne una base.
d) Calcolare la dimensione di W. Studiare $W \cap KerT$. Trovare la dimensione di $T(U)$ ed esibirne una base.
e) Spiegare i risultati ottenuti dei punti c) e d).