Tutorato Geometria e Algebra
Informatica

Andrea Pizzi

Foglio 11

Esercizio 1. Sia dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{cases} f(e_1) = 2e_1 + e_2 - 2e_3 \\ f(e_2) = 2e_2 \\ f(e_3) = e_2 + e_3 \end{cases}$$

1) Determinare la matrice associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$.
2) Determinare il nucleo e l'immagine di f e una loro base ortonormale.
3) Stabilire se l'endomorfismo è diagonalizzabile, ed in caso affermativo trovare la sua forma diagonale e la matrice diagonalizzante.
4) Stabilire se gli autospazi di f sono ortogonali.

Esercizio 2. Sia dato l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito in base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

e il sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^3$ definito dal sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

1) Determinare la dimensione e una base dell'intersezione $ImA + V$.
2) Determinare la dimensione e una base per $KerA \cap V$.
3) Stabilire se l'endomorfismo è diagonalizzabile, ed in caso affermativo trovare la sua forma diagonale e la matrice diagonalizzante.

Esercizio 3. Si considerino gli spazi vettoriali $\mathbb{R}_2[x]$ e $\mathbb{R}_1[x]$ dei polinomi rispettivamente di grado minore o uguale di 2 e 1. Sia $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ l'applicazione lineare definita come

$$f(p(x)) := p'(x)$$

1) Determinare la matrice di f rispetto alle basi $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$ e $\{1, 1+x\}$ di $\mathbb{R}_1[x]$.
2) Determinare una la dimensione ed una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
3) Determinare per $\mathbb{R}_1[x]$ la matrice di passaggio dalla base $\{1, 1+x\}$ alla base $\{1, x\}$.
4) Determinare la matrice di f rispetto alle basi $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$ e $\{1, x\}$ di $\mathbb{R}_1[x]$. Che relazione c'è tra le matrici trovate nei punti 1,2 e 4?

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ con riferimento monometrico ortogonale siano dati la retta r, passante per il punto $P = (1, 1, -3)$, con vettore direttore $v = (2, 1, 0)$ e la retta s, di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

1) Determinare se le rette r e s sono parallele, incidenti o sghembe.

2) Determinare l'equazione cartesiana del piano π parallelo a r ed s e passante per l'origine degli assi.

3) Determinare l'area del parallelogramma di lati $\overline{PQ}$, dove Q è uno dei due punti a distanza 1 da P sulla retta r, e $\overline{PR}$, con R l'origine.

Esercizio 5. Consideriamo nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, munito della base canonica, i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \{X \in \mathbb{R}^3 : A \cdot X = (0, 0, 0)\}$$

$$W = \{X \in \mathbb{R}^3 : f(X) = (0, 0)\}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

ed f è l'applicaione lineare di $\mathbb{R}^3$ in R^2 definita come

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2) + (x_2, x_3) + (x_3, x_1)$$

1) Determinare le dimensioni e delle basi per i sottospazi U e W.

2) Determinare le dimensioni e delle basi per i sottospazi $U + W$ e $U \cap W$. La somma è diretta?

3) Trovare una base ortonormale per la somma $U + W$.

Esercizio 6. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Si determinino gli autovalori di A e i relativi autospazi, determinando la loro molteplicità algebrica e geometrica.

2) Si dica se A è diagonalizzabile, e in caso affermativo calcolare la matrice diagonale associata.

3) Si dica se esiste una base ortonormale di autovettori di A, e in caso affermativo calcolarla.