# Matrici irriducibili

## Def

Un grafo e' un diagramma formato da un certo numero di nodi e da un certo numero di archi

Es.

il nodo di arrivo puo' coincidere con quello di partenza

Gli archi sono una freccia che parte da un nodo e arriva in un'altro

Se il grafo possiede $n$ nodi questi vengono numerati da 1 ad $n$ e l'arco dal nodo $i$ al nodo $j$ e' indicato con $i \to j$

Un cammino all'interno del grafo e' un percorso che parte da un nodo $i$ e arriva ad un'altro nodo $j$ seguendo gli archi del grafo

Se il nodo di arrivo coincide con quello di partenza allora il cammino si chiama ciclo

Un grafo si dice fortemente connesso se per ogni coppia di nodi $i$ e $j$ esiste un cammino da $i$ a $j$

Equivalentemente un grafo e' fortemente connesso se esiste un ciclo che tocca tutti i nodi del grafo

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, il grafo associato ad $A$ e' il grafo così definito:

- i nodi sono $1, \dots, n$
- gli archi sono le frecce $i \to j$ t.c. $a_{ij} \neq 0$

## Def

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice irriducibile se il suo grafo e' fortemente connesso

## Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ i & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dire se $A$ e $B$ sono irriducibili

Grafo di A:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left] & 2 \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend left] \arrow[loop above] & 3 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

essendo il grafo fortemente connesso vista la presenza del ciclo: $1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 1$
la matrice A e' irriducibile

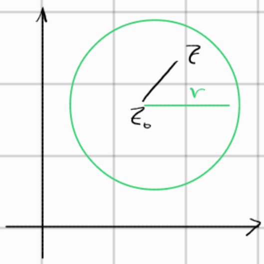
Grafo di B:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left] & 2 \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend left] \arrow[loop above] & 3 \end{tikzcd}$$

non essendo il grafo fortemente connesso vista l'assenza di un ciclo
la matrice B e' riducibile

## Localizzazione degli autovalori

$\mathcal{C}(z_0, r)$ = cerchio nel piano complesso di centro $z_0$ e $r$ = $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$




**Def**

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, i cerchi di Gershgorin (G) di A
sono i cerchi $K_1, \dots, K_n$ definiti come segue: $\forall_{i=1,\dots,n}$

$$K_i = \mathcal{C}\left(a_{ii}, |a_{i1}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}|\right) = \mathcal{C}\left(a_{ii}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|\right)$$

I cerchi di G $K_1, \dots, K_n$ si chiamano anche cerchi di G per riga di A

quando sottointeso si intendono per riga

Questo serve a distinguerli dai cerchi G per colonna di A che sono i cerchi $H_1, \dots, H_n$ definiti:

$$H_j = \mathcal{C}\left(a_{jj}, |a_{1j}| + \dots + |a_{j-1,j}| + |a_{j+1,j}| + \dots + |a_{nj}|\right) = \mathcal{C}\left(a_{jj}, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|\right)$$

**Esempio**

Determinare i cerchi di G di:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & i \\ 1+i & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 7 & 10 & 3i \end{bmatrix}$$

$$\boxed{|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$K_1 = C(0,1)$, $K_2 = C(0,3)$, $K_3 = C(0, 1+\sqrt{2})$, $K_4 = C(3i, 19)$

Teorema $\rightsquigarrow$ 1° teo. di G

Gli autovalori di una matrice $A$ in $\mathbb{C}^{n \times n}$ stanno tutti nell'unione dei cerchi di G di $A$

Dim

Sia $\lambda$ un generico autovalore di $A$, mostriamo che $\lambda$ sta nell'unione dei cerchi di G di $A$

Prendiamo $\underline{v} \neq \underline{0}$ autovettore di $A$ corrispondente a $\lambda$: $\forall i = 1, \dots, n$

$$A\underline{v} = \lambda \underline{v} \iff (A\underline{v})_i = (\lambda \underline{v})_i \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \lambda v_i \qquad (*)$$

Seleziona un indice $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ t.c. $v_{i_0}$ abbia modulo massimo rispetto tutte le altre componenti di $v$ $\rightsquigarrow$ $|v_{i_0}| = \max_{i=1,\dots,n} |v_i| \neq 0$

L'equazione $i_0$-esima in $(*)$ dice che:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} v_j = \lambda v_{i_0} \iff a_{i_0 i_0} v_{i_0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} a_{i_0 j} v_j = \lambda v_{i_0} \iff (\lambda - a_{i_0 i_0}) v_{i_0} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} a_{i_0 j} v_j$$

$\Rightarrow$ applichiamo il modulo a sinistra e a destra

$$\Rightarrow |\lambda - a_{i_0 i_0}| |v_{i_0}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} a_{i_0 j} v_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}| |v_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}| |v_{i_0}| = |v_{i_0}| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}|$$

dis. triangolare

def di $v_{i_0}$

Conclusione

$$|\lambda - a_{i_0 i_0}| \cancel{|v_{i_0}|} \leq \cancel{|v_{i_0}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}| \Rightarrow$$

Stiamo dicendo che la distanza di $\lambda$ da $a_{i_0 i_0}$ centro del cerchio di G $K_{i_0}$ e' minore uguale del raggio $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}|$ di $K_{i_0}$

$$\Rightarrow \lambda \in K_{i_0} \Rightarrow \lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

## Teorema ⇝ 2° teo. di G

Supponiamo che l'unione di $K$ cerchi di $G$ di $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sia disgiunta dall'unione degli altri $n-K$ cerchi

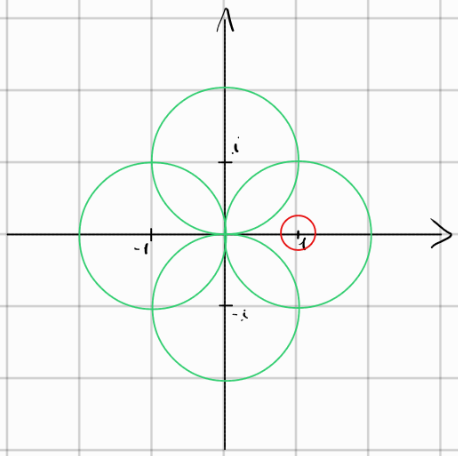
Allora $K$ autovalori di $A$ stanno nella prima unione e i rimanenti $n-K$ stanno nella seconda unione

## Teorema ⇝ 3° teo. di G forte

Supponiamo che $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sia irriducibile

Allora i punti che stanno sul bordo di quei cerchi di $G$ a cui appartengono ma non stanno sul bordo di tutti i cerchi non sono autovalori di $A$

Es




Se $A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ e' irriducibile ed ha i cerchi mostrati in figura allora:

- 1 non e' autovalore di $A$
- 0 non e' autovalore di $A$

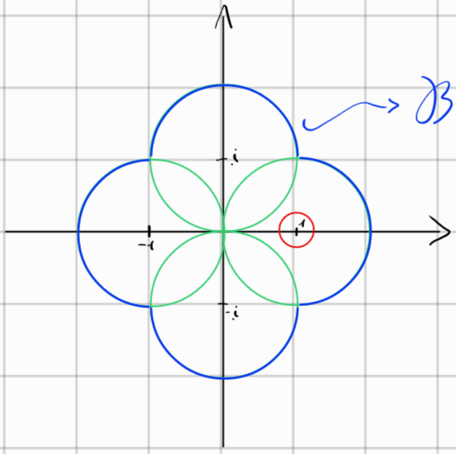
stanno sul bordo dei cerchi a cui appartengono ma non sui bordi di tutti

Teorema $\rightsquigarrow$ 3° teo. di G debole

Supponiamo che $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sia irriducibile e che $\mathcal{B}$ sia il bordo dell'unione dei cerchi di G

Allora i punti di $\mathcal{B}$ che non stanno sul bordo di tutti i cerchi non sono autovalori di A

Es




Dim

Sia $z \in \mathcal{B}$ punto che non sta sul bordo di tutti i cerchi

- Siccome $z \in \mathcal{B}$, z non può stare all'interno di nessun cerchio e dunque per forza sta sul bordo di quei cerchi a cui appartiene
- z non sta sul bordo di tutti i cerchi per ipotesi

Allora z non è autovalore di A per il 3° teo di G forte

Esempio

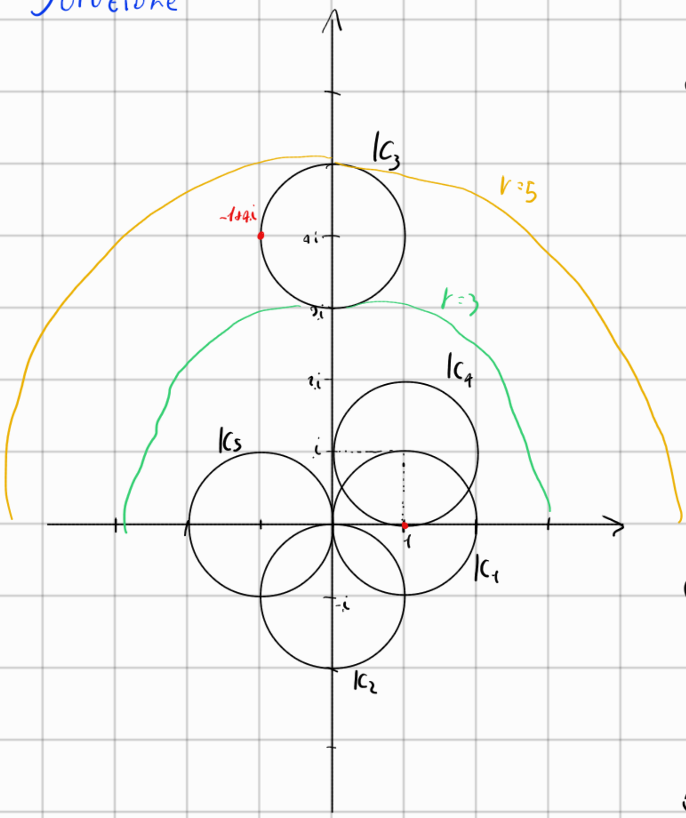
Supponiamo di sapere che una matrice $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ e' irriducibile e che i suoi cerchi di G sono i seguenti

$$K_1 = \mathcal{C}(1,1),\ K_2 = \mathcal{C}_2(-1,1),\ K_3 = \mathcal{C}_3(4i,1),\ K_4 = \mathcal{C}_4(1+i,1),\ K_5 = \mathcal{C}_5(-1,1)$$

avendo a disposizione le seguenti informazioni dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e motivare la risposta

1. 0 non e' autovalore di A
2. A e' invertibile
3. 1 potrebbe essere un autovalore di A
4. $-1+4i$ potrebbe essere un autovalore di A
5. $K_3$ privato del suo bordo contiene esattamente un autovalore di A
6. Vale la stima $3 < \rho(A) < 5$

Soluzione




1. vera ⇝ infatti A e' irriducibile e 0 sta su $\mathcal{B}$ ma non sul bordo di tutti i cerchi ⇒ 0 non può essere autovalore di A per il 3° teo di G debole
2. vera ⇝ 0 non e' autovalore di A e dunque A e' invertibile
3. vera ⇝ infatti non si può escludere che 1 sia un autovalore di A usando il 3° teo di G debole perche' 1 non sta su $\mathcal{B}$
4. Falsa ⇝ infatti $-1+4i \in \mathcal{B}$ ma non sta sul bordo di tutti i cerchi e dunque $-1+4i$ non può essere autovalore per il 3° teo di G
5. vera ⇝ per il 2° teo di G $K_3$ contiene 1 autovalore di A mentre gli altri autovalori stanno in $K_1 \cup K_2 \cup K_4 \cup K_5$, inoltre l'autovalore in $K_3$ non può stare sul bordo per lo stesso motivo per cui $-1+4i$ non lo e'

⑥ vera ⇝ infatti: l'autovalore $\lambda$ di modulo massimo di $A$ e' quello che sta in $K_3$ privato del bordo. Questo perche' $|\lambda| = dist(\lambda, 0) > 3$ (tutti i punti di $K_3$ privati del bordo hanno modulo $\geq 3$ essendo esterni al $\mathcal{C}(0,3)$) mentre gli altri autovalori hanno modulo $\leq 3$ (essendo contenuti in $\mathcal{C}(0,3)$). Inoltre $|\lambda| < 5$ perche' tutti i punti interni a $K_3$ hanno modulo $< 5$ essendo contenuti in $\mathcal{C}(0,5)$ privato del bordo.

Dunque $3 < \rho(A) = |\lambda| < 5$ ∎

Esempio

Sia $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ irriducibile e con i cerchi di $\mathcal{G}$:

$$K_1 = \mathcal{C}(-3,2),\ K_2 = \mathcal{C}(-1,1),\ K_3 = \mathcal{C}(2,0),\ K_4 = \mathcal{C}(7,1)$$

dire se le seguenti affermazioni sono vere

① 0 non e' autovalore di $A$ e dunque non invertibile

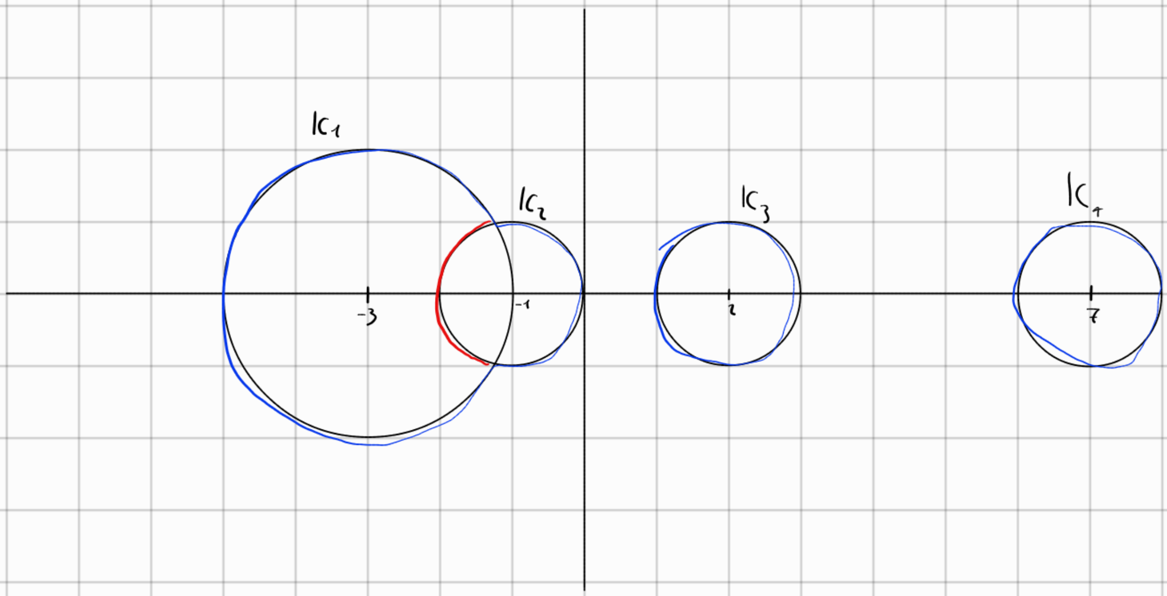
② Un autovalore di $A$ potrebbe trovarsi sul bordo di $K_3$

③ Un autovalore di $A$ potrebbe trovarsi sul bordo di $K_2$

④ Due autovalori di $A$ si trovano nell'unione $K_1 \cup K_2$ privata del bordo, un autovalore si trova in $(1,3)$ e un autovalore si trova in $(6,8)$

⑤ Vale la stima $6 < \rho(A) < 8$ e inoltre esiste un autovalore di $A = \rho(A)$

Disegno



① vero $\leadsto$ per il 3° teo di G debole 0 e' su $\mathcal{B}$ ma non su quello di tutti gli altri quindi non può esserlo ed e' invertibile

② falso $\leadsto$ per lo stesso motivo di ①

③ vero $\leadsto$ può stare sul bordo rosso $\leadsto$ non e' $\mathcal{B}$ $\leadsto$ no 3° teo.

④ vera $\leadsto$ a) per il 2° teo di G applicato prima a $K_1 \cup K_2 \cup K_3, K_4$ e poi a $K_1 \cup K_2 \cup K_4, K_3$ (e poi anche alle unioni $K_1 \cup K_2, K_3 \cup K_4$)

si deduce che 2 autovalori stanno in $K_1 \cup K_2$, uno sta in $K_3$ e l'ultimo sta in $K_4$

b) siccome tutti i punti di $\mathcal{B}$ (verde) non stanno sul bordo di tutti i cerchi, tutti questi punti non sono autov. di A

$\Rightarrow$ 2 autov. di A stanno in $K_1 \cup K_2$ privato dal bordo

1 autov. di A stanno in $K_3$ privato dal bordo

1 autov. di A stanno in $K_4$ privato dal bordo

c) dimostriamo che l'autovalore in $K_3$ e' reale

poiche' A e' a coefficienti reali, se $\lambda$ e' un autovalore di A, allora anche $\bar{\lambda}$ e' un autovalore di A

$\boxed{\text{Dim}}$

poiche' A e' a coefficienti reali $\leadsto$ il pol. car. di A e' un pol a coefficienti reali

pertanto le sue radici $\overset{\leadsto \text{autov. di } A}{}$ compaiono in coppie complesse coniugate

Infatti detto $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ con coeff. reali se $\lambda$ e' radice di $p(x)$ allora

$$0 = p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n \lambda^n \Rightarrow 0 = \overline{p(\lambda)} = \overline{a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n} =$$

$$= \overline{a_0} + \overline{a_1\lambda} + \dots + \overline{a_n\lambda^n} =$$

$$= \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\bar{\lambda} + \dots + \overline{a_n}\,\bar{\lambda}^n$$

$$= a_0 + a_1\bar{\lambda} + \dots + a_n\bar{\lambda}^n$$

$$= p(\bar{\lambda}) \leadsto \text{fa } 0 \leadsto \bar{\lambda} \text{ e' radice}$$

$\boxed{\begin{array}{l}\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} \\ \overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}\end{array}}$

d) Quindi l'autovalore in $K_3$ e' reale perche' se non lo fosse il suo coniugato sarebbe anch'esso in $K_3$ e cio' e' impossibile perche per il 2° teo di G abbiamo detto che $K_3$ ha un solo autovalore

$|z| =$ dist. da $0 \leadsto z \in \mathbb{C}$

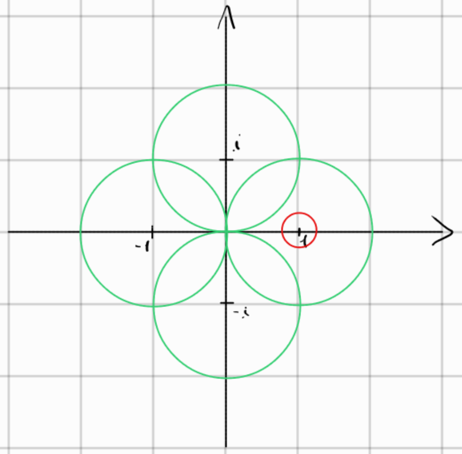
⑤ vera $\leadsto$ infatti l'autovalore in $(6,8)$ e' quello di modulo massimo in quanto e' il più lontano da 0, inoltre essendo positivo si ha che e' uguale a $\rho(A)$

# Es del quadrifoglio

Supponiamo che $A \in \mathbb{C}^{5\times5}$ sia irriducibile e con i seguenti cerchi di G:

$$K_1 = C(1,1),\ K_2 = C(i,1),\ K_3 = C(-1,1),\ K_4 = C(-i,1),\ K_5 = C(1,\tfrac{1}{4})$$

con disegno:




Determiniamo se A sia invertibile:

mi accorgo che 0 sta sul bordo dei cerchi a cui appartiene ma non su tutti i cerchi dunque 0 soddisfa le ipotesi del 3° teo di G forte ed essendo A irriducibile, 0 non può essere autovalore

## Oss ①

Non potevamo escludere 0 dai possibili autovalori di A usando il 3° teo di G debole perchè $0 \notin \partial B$

## Oss ②

Supponiamo che $A \in \mathbb{C}^{4\times4}$, irriducibile e come cerchi di G quelli sopra senza quello rosso allora 0 non soddisfa più l'ipotesi del 3° teo di G forte

↳ sta sul bordo di tutti i cerchi

Quindi non posso escludere 0 dai possibili autovalori di A

## Oss importante

Premettendo che gli autovalori di $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ coincidano con quelli di $A^T$

i polinomi caratteristici di $A$ e $A^T$ coincidono:

$$C_{A^T}(\lambda) = det(\lambda \underline{I} - A^T) = det((\lambda \underline{I} - A)^T) = det(\lambda \underline{I} - A) = C_A(\lambda)$$

### Conseguenza

Possiamo applicare i teo di G non solo ad $A$ ma anche ad $A^T$ così da ottenere una localizzazione migliore degli autovalori di $A$

**Teorema** $\rightsquigarrow$ 1° teo di G migliorato

i cerchi di G per $A$ sono i cerchi di G per colonna di $A^T$

In particolare, il 1° teo di G applicato ad $A$ e $A^T$ ci dice che:

Gli autovalori di una matrice di $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ stanno tutti sia nell'unione dei cerchi di G $K_1, \dots, K_n$ di $A$ sia nell'unione dei cerchi di G per colonna $H_1, \dots, H_n$ di $A$ $\rightsquigarrow$ cerchi di G per $A^T$

dunque stanno nell'intersezione delle due unioni $(K_1 \cup \dots \cup K_n) \cap (H_1 \cup \dots \cup H_n)$

### Oss

In vista dell'applicazione del 3° teo di G:

$$A \text{ è irriducibile} \iff A^T \text{ è irriducibile}$$

Esempio

Consideriamo la matrice $A$

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & i/2 \\ 1 & 0 & -1 & -i \end{bmatrix}$$

a) usando i teo di G (solo la ver. debole) localizzare gli autovalori di a nel modo più preciso possibile

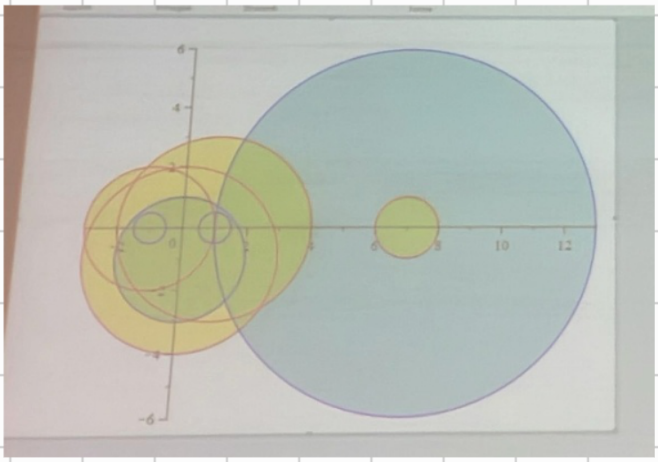
b) sulla base delle informazioni spettrali ottenute, dimostrare che $\alpha \underline{I}+A$ e' invertibile $\forall \alpha \geq 2$.

Soluzione

a) dovendo localizzare lo spettro di A nel modo più preciso possibile consideriamo sia i cerchi di G per riga $K_1, K_2, K_3, K_4$ sia i cerchi di G per colonna $H_1, H_2, H_3, H_4$

$K_1=(7,6)$, $K_2=(-1,\frac{1}{2})$, $K_3=(1,\frac{1}{2})$, $K_4=(-i,2)$

$H_1=(7,1)$, $H_2=(-1,2)$, $H_3=(1,3)$, $H_4=(-i,3)$



1° Teo di G applicato sia su A che $A^T$

Gli autovalori di A stanno su $(K_1\cup K_2\cup K_3\cup K_4)\cap(H_1\cup H_2\cup H_3\cup H_4)$ ↳ regione verde

2° Teo di G (applicato sia ad A che ad $A^T$)

$H_1$ e' disgiunto da $H_2, H_3, H_4 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ per il 2° Teo di G applicato ad $A^T$ 1 autov. di A sta in $H_1$ e gli altri 3 stanno in $H_2\cup H_3\cup H_4$ ⇝ sempre nella parte verde

3° Teo di G applicato sia ad A che $A^T$

il grafo di A contiene il ciclo che tocca tutti i nodi

$1 \rightleftarrows 2 \longrightarrow 4 \rightleftarrows 3$

quindi A e' irriducibile ⇝ anche $A^T$ che contiene il ciclo al contrario

↗ Vale anche per $A^T$

Poiche' nessun punto del bordo di $K_1\cup K_2\cup K_3\cup K_4$ sta sul bordo di tutti i cerchi $K_1, K_2, K_3, K_4$ concludiamo per il 3° Teo di G debole che nessun punto del bordo di $K_1\cup K_2\cup K_3\cup K_4$ puo' essere autovalore di A

$\Rightarrow$ Nessun punto del bordo verde puo' essere autovalore di A

b) Siccome $\alpha I + A$ e' un pol. di $A$ $\left(\alpha I + A = p(A) \text{ con } p(\lambda) = \alpha + \lambda\right)$ per il teo sui pol. di matrici gli autov. di $\alpha I + A$ sono $\alpha+\lambda_1, \alpha+\lambda_2, \alpha+\lambda_3, \alpha+\lambda_4$ dove $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sono autov. di $A$

Dal punto a) sappiamo che gli autov. di $A$ stanno nella parte verde privata del suo bordo e dunque hanno parte reale strettamente $> -2$.

Dunque

$$\operatorname{Re}(\alpha+\lambda_i) = \operatorname{Re}(\alpha) + \operatorname{Re}(\lambda_i) = \alpha + \operatorname{Re}(\lambda_i) \underset{\uparrow\, \alpha \geq 2}{>} 0 \quad \forall i = 1,2,3,4$$

$\Rightarrow \forall \alpha \geq 2$ gli autov. di $\alpha I + A$