MOTO BIDIMENSIONALE

Nel piano, la posizione di un corpo è individuata da un VETTORE POSIZIONE $\vec{r}$ rispetto all'origine di un sistema di riferimento fissato.

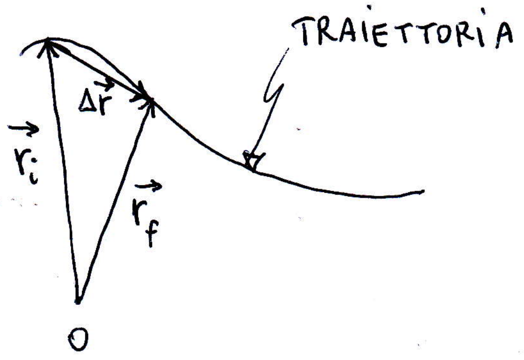
Nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$, indichiamo con $\Delta \vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$ il VETTORE SPOSTAMENTO del corpo.

Si definisce quindi la VELOCITÀ MEDIA del corpo nell'intervallo di tempo Δt:

$$\vec{V}_{med} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

; è chiaramente una grandezza vettoriale, la cui direzione e il cui verso sono definiti dalla direzione e dal verso di $\Delta \vec{r}$.

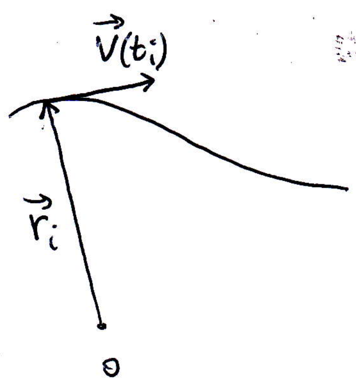
E' indipendente dal percorso seguito dal corpo tra gli istanti t_i e t_f.



Si dice TRAIETTORIA seguita dal corpo l'insieme dei vettori $\vec{r}(t)$ al variare del tempo t.

Fissato $\vec{r}_i$, considerando intervalli di tempo Δt sempre più piccoli si osserva che il vettore $\vec{v}_{med}$, per $\Delta t \to 0$, tende a orientarsi lungo la direzione tangente alla traiettoria nel punto individuato da $\vec{r}_i$.

Quindi è possibile introdurre una VELOCITÀ ISTANTANEA del corpo:
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{r}\,'(t)$$



La variazione del vettore velocità istantanea tra l'istante t_i e l'istante t_f permette di definire una ACCELERAZIONE MEDIA nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

La direzione e il verso di $\vec{a}_{med}$ sono definiti dalla direzione e dal verso di $\Delta \vec{v}$.

Passando al limite per $\Delta t \to 0$, è possibile introdurre una ACCELERAZIONE ISTANTANEA:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t)$$

[Attenzione! $\vec{a}$ è un vettore, per cui si parla di accelerazione nel piano quando varia nel tempo $|\vec{v}|$ ma anche quando varia nel tempo la direzione di $\vec{v}$!]

Studiamo il moto di un corpo in due dimensioni introducendo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel piano del moto. Utilizzando le notazioni introdotte nella lezione sui vettori, possiamo scrivere

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$$

La velocità istantanea in funzione del tempo è quindi

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = x'(t)\,\hat{i} + y'(t)\,\hat{j} = v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j}$$

Dunque le componenti cartesiane della velocità istantanea sono:

$$v_x(t) = x'(t) \quad , \quad v_y(t) = y'(t)$$

Studiamo prima di tutto il caso particolare in cui $\vec{a}$ è un vettore costante, cioè a_x e a_y sono costanti.

In questo caso possiamo scrivere:

$\vec{a} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j} = v_x'(t)\,\hat{i} + v_y'(t)\,\hat{j}$, per cui risulta:

$$\begin{cases} v_x'(t) = a_x \\ v_y'(t) = a_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = v_{x,0} + a_x t \\ v_y(t) = v_{y,0} + a_y t \end{cases} \quad (a_x, a_y \text{ costanti})$$

La velocità istantanea in forma vettoriale è dunque:

$\vec{v}(t) = (v_{x,0} + a_x t)\,\hat{i} + (v_{y,0} + a_y t)\,\hat{j}$, che possiamo riscrivere:

$$\vec{v}(t) = (v_{x,0}\,\hat{i} + v_{y,0}\,\hat{j}) + (a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j})\,t = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t,$$

avendo posto $\vec{v}_0 = v_{x,0}\,\hat{i} + v_{y,0}\,\hat{j}$ e $\vec{a} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j}$

Ragionando in maniera simile, otteniamo la legge oraria del moto nel piano nel caso $\vec{a}$ = costante:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$, che è la forma compatta delle due equazioni

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x,0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{y,0} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{cases}$$

per le due componenti del vettore posizione separatamente.

Da queste ultime due equazioni concludiamo che il moto piano con accelerazione costante equivale alla composizione di due "moti" indipendenti lungo gli assi cartesiani ortogonali, con accelerazioni a_x e a_y lungo gli assi x e y rispettivamente.

<u>Esempio</u>: assegnati $\vec{r}_0 = 0$, $\vec{v}_0 = (20\hat{i} - 15\hat{j})\frac{m}{s}$, $\vec{a} = 4\hat{i}\frac{m}{s^2}$ e sapendo che $\vec{a}$ resta costante durante il moto:

a) Calcolare $v_x(t)$, $v_y(t)$ e $\vec{v}(t)$.

$$v_x(t) = v_{x,0} + a_x t = (20 + 4t)\frac{m}{s}$$

$$v_y(t) = v_{y,0} + a_y t = (-15 + 0 \cdot t)\frac{m}{s} = -15\frac{m}{s}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} = [(20 + 4t)\hat{i} - 15\hat{j}]\frac{m}{s}$$

b) Calcolare la velocita' istantanea all'istante $t = 5\,s$.

$$\vec{v}(t=5\,s) = \left[(20+4\cdot 5)\hat{i} - 15\hat{j}\right]\frac{m}{s} = (40\,\hat{i} - 15\,\hat{j})\,\frac{m}{s}$$

Calcolare il modulo e la fase di $\vec{v}(t=5\,s)$:

$$|\vec{v}(t=5s)| = \sqrt{40^2 + (-15)^2}\;\frac{m}{s} = \sqrt{1600+225}\;\frac{m}{s} =$$

$$= \sqrt{1825}\;\frac{m}{s} = 42{,}72\ m/s$$

$$\theta_v = arctg\left(\frac{-15}{40}\right) = arctg\left(-\frac{3}{8}\right) = -0{,}359\ rad = -20{,}5^\circ$$ che

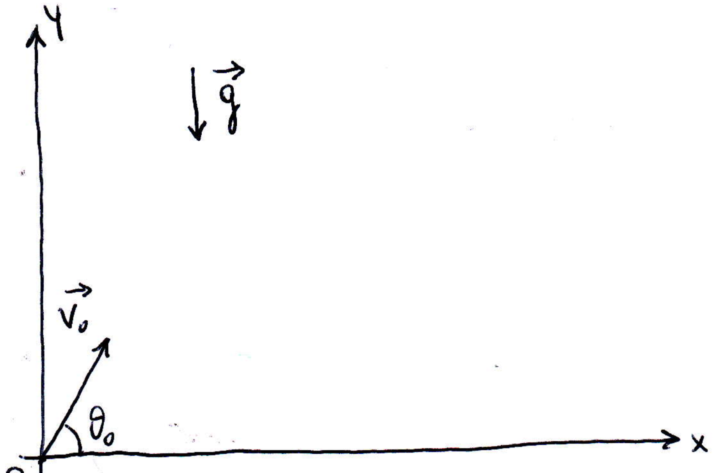
equivale a $-20{,}5^\circ + 360^\circ = 339{,}5^\circ$

($v_x > 0$ e $v_y < 0$, quindi $\vec{v}$ si trova nel 4° quadrante).

Moto di un proiettile

Studiamo il moto di un corpo su un piano posto verticalmente, con accelerazione costante $\vec{a} = \vec{g}$, diretta verticalmente verso il basso in prossimità della superficie terrestre al livello del mare. Nell'approccio più semplice si trascura l'effetto dell'attrito dell'aria.

Introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali nel piano considerato, e supponiamo che all'istante $t = 0$ il corpo si trovi nell'origine del sistema di assi cartesiani e abbia velocità $\vec{v}_0$ formante un angolo θ_0 con il semiasse orizzontale positivo:



Risulta, con le scelte fatte per gli assi cartesiani:

$$\vec{a} = -g\hat{j} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$g = 9{,}81 \ m/s^2$$

Posto $|\vec{v}_0| = v_0$, possiamo scrivere $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$, $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0$

Dunque:
$$\begin{cases} \vec{v}_0 = (v_0 \cos\theta_0)\hat{i} + (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)\hat{j} \\ \vec{a} = -g\hat{j} \end{cases}$$

Tenuto conto di quanto visto alle pagg. 3-4, otteniamo:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos\theta_0 \quad \text{(costante)} \\ v_y(t) = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} x(t) = (v_0\cos\theta_0)t \\ y(t) = (v_0\operatorname{sen}\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (x_0 = y_0 = 0)$$

Ricaviamo t dalla prima delle due equazioni precedenti:

$$t = \frac{x(t)}{v_0 \cos\vartheta_0}$$

, e sostituiamo questa espressione a t nella seconda equazione:

$$y(t) = (v_0 \operatorname{sen}\vartheta_0)\,\frac{x(t)}{v_0\cos\vartheta_0} - \frac{1}{2}\,g\,\frac{(x(t))^2}{v_0^2\cos^2\vartheta_0}$$

, cioè

$$y(t) = (\operatorname{tg}\vartheta_0)\,x(t) - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\vartheta_0}\,(x(t))^2,$$

che si può anche scrivere

$$y(t) = (\operatorname{tg}\vartheta_0)\,x(t) - \frac{g}{2v_0^2}\,(1+\operatorname{tg}^2\vartheta_0)\,(x(t))^2 \quad , \text{con } 0 \le \vartheta_0 \le \frac{\pi}{2}\ \text{rad}$$

Nel piano cartesiano verticale questa equazione esprime y in funzione di x:

$$y = (\operatorname{tg}\vartheta_0)\,x - \frac{g}{2v_0^2}\,(1+\operatorname{tg}^2\vartheta_0)\,x^2$$

Questa è l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse y, vertice nel punto

$$V\left(\frac{\operatorname{tg}\vartheta_0}{\frac{g}{v_0^2}(1+\operatorname{tg}^2\vartheta_0)}\,;\ \frac{\operatorname{tg}^2\vartheta_0}{\frac{2g}{v_0^2}(1+\operatorname{tg}^2\vartheta_0)}\right)$$

(verificare utilizzando le formule valide per la parabola).

La distanza orizzontale tra la posizione di partenza e il punto in cui il corpo, ricadendo verso il basso, ritorna alla quota iniziale ($y = 0$) è detta GITTATA del proiettile.

Si può calcolare a partire dall'equazione di y in funzione di x, cercando i valori di x per cui risulta $y = 0$:

$x_1 = 0$ (ovvio, è il punto di partenza in cui risulta $y = 0$)

$$x_2 = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{tg\,\vartheta_0}{1 + tg^2\vartheta_0} = \frac{2v_0^2}{g} \frac{sen\,\vartheta_0}{\cancel{\cos\vartheta_0}} \cdot \cos^{\cancel{2}}\vartheta_0 = \frac{v_0^2}{g}\left(2\,sen\,\vartheta_0 \cos\vartheta_0\right).$$

Dunque la gittata di un proiettile è data da:

$$D = \frac{v_0^2}{g}\,sen\,(2\vartheta_0)$$

Si può anche calcolare determinando l'istante $t_2 > 0$ in cui risulta $y(t_2) = 0$:

$$t_2 = \frac{2v_0}{g}\,sen\,\vartheta_0$$

e calcolando poi la distanza percorsa in orizzontale dal proiettile durante questo intervallo di tempo (tra 0 e t_2):

$$D = v_{0x} \cdot t_2 = (v_0 \cos\vartheta_0) \cdot \left(\frac{2v_0}{g}\,sen\,\vartheta_0\right) = \frac{v_0^2}{g} \cdot (2\,sen\,\vartheta_0 \cos\vartheta_0) = \frac{v_0^2}{g}\,sen\,(2\vartheta_0),$$

che ovviamente coincide con il risultato ottenuto sopra.

Da questa espressione si osserva che, nelle approssimazioni fatte, se v_0 è fissato la gittata assume valore massimo quando $\operatorname{sen}(2\theta_0) = 1 \Rightarrow 2\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ rad $\Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{4}$ rad $= 45°$.

<u>Esempio</u> Un corpo si trova in cima a una torre di altezza $h = 45$ m. All'istante $t = 0$ viene fatto partire con velocità iniziale $\vec{v}_0$, formante un angolo θ_0 con la direzione orizzontale. Risulta $v_0 = |\vec{v}_0| = 20$ m/s, $\theta_0 = 30° = \frac{\pi}{6}$ rad.

a) Per quanto tempo rimane in volo il corpo?

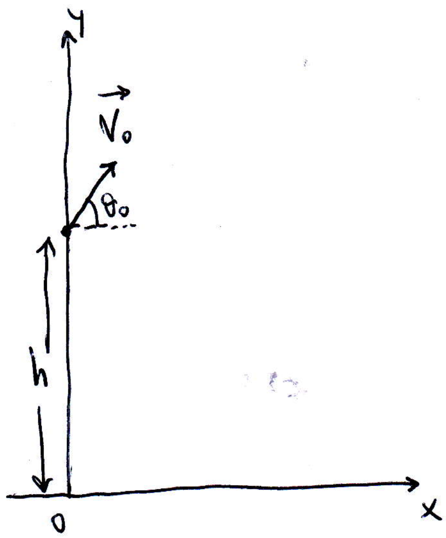
Risulta $\quad v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \,, \quad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 \,; \quad y_0 = h$

$$y(t) = y_0 + (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t - \frac{1}{2} g t^2$$

Cerchiamo il valore $\bar{t}$ di t tale che $y(\bar{t}) = 0$, con $\bar{t} > 0$:

$$y_0 + (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \Rightarrow t^2 - \frac{2(v_0 \operatorname{sen}\theta_0)}{g} t - \frac{2h}{g} = 0$$

Formula ridotta: $\quad t_{1,2} = \dfrac{v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g} \pm \sqrt{\left(\dfrac{v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g}\right)^2 + \dfrac{2h}{g}}$



La soluzione accettabile è quella con il segno positivo davanti alla radice quadrata (l'altra soluzione è negativa, quindi non accettabile).

$$\bar{t} = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} = 4{,}22 \text{ s}$$

b) Qual è la velocità $\vec{v}(\bar{t})$ del corpo subito prima di toccare terra all'istante $\bar{t}$?

Risulta $v_x(\bar{t}) = v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 = 17,32 \ m/s$

$$v_y(\bar{t}) = v_{0y} - g\bar{t} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - \left(v_0 \operatorname{sen}\theta_0 + \sqrt{(v_0 \operatorname{sen}\theta_0)^2 + 2gh}\right) =$$

$$= -\sqrt{(v_0 \operatorname{sen}\theta_0)^2 + 2gh} = -31,35 \ m/s$$

Modulo di $\vec{v}(\bar{t})$: $|\vec{v}(\bar{t})| = \sqrt{(v_x(\bar{t}))^2 + (v_y(\bar{t}))^2} = 35,82 \ m/s.$

Fase di $\vec{v}(t)$: $\theta_v = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_y(\bar{t})}{v_x(\bar{t})}\right) = -1,066 \text{ rad} = -61°$,

che equivale a $-61° + 360° = 299°$

Esempio Un corpo viene lanciato, all'istante $t = 0$, partendo da una quota $y_0 = h = 100$ m con velocità $\vec{v}_0$ diretta orizzontalmente, con $v_0 = |\vec{v}_0| = 40 \ m/s$.

a) Calcolare il tempo di caduta del corpo.

Risulta $v_{0x} = 40 \ m/s$, $v_{0y} = 0$, $y_0 = h = 100$ m. Allora:

$$v_y(t) = v_{0y} - gt \qquad y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Cerchiamo l'istante $\bar{t}$ per cui risulta $y(\bar{t}) = 0$, con $\bar{t} > 0$:

$$h - \frac{1}{2}g\bar{t}^2 = 0 \Rightarrow \bar{t} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 4,52 \ s$$

b) Calcolare la distanza percorsa dal corpo orizzontalmente tra l'istante 0 e l'istante $\bar{t}$.

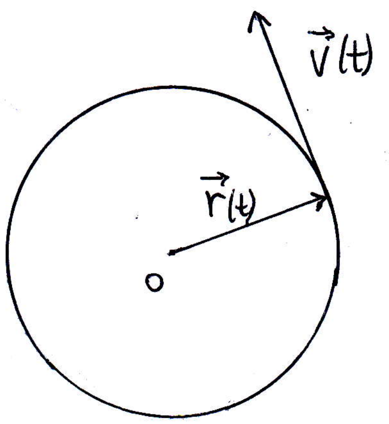
Risulta $V_{0x} \equiv V_0 =$ costante, per cui possiamo scrivere:

$$D = x(\bar{t}) = V_{0x} \cdot \bar{t} = V_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 180,61 \text{ m} \quad , \text{ essendo } x_0 = 0 .$$

Moto circolare uniforme

E' un caso importantissimo di moto bidimensionale.
La traiettoria del corpo e' una circonferenza, e il modulo della velocita' istantanea del corpo resta costante durante il moto:

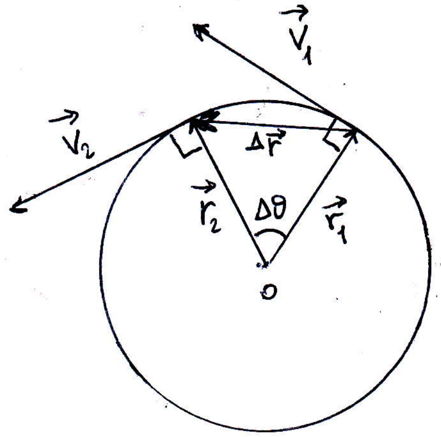
$|\vec{v}(t)| = v_0$ costante.



Conviene prendere l' origine del sistema di riferimento nel centro della circonferenza. Il vettore posizione a qualsiasi istante, con questa scelta, risulta diretto lungo un raggio della circonferenza.

Il vettore velocita' istantanea, come abbiamo dimostrato a pag. 2, e' diretto sempre lungo la direzione tangente alla traiettoria (la circonferenza in questo caso) all'istante considerato. Le direzioni di $\vec{r}(t)$ e $\vec{v}(t)$ sono quindi tra loro perpendicolari.

Calcoliamo ora il vettore accelerazione nel moto circolare uniforme. Consideriamo i vettori velocita' istantanea agli istanti t_1 e t_2, con $t_2 > t_1$:

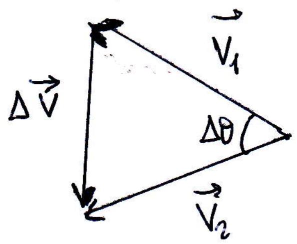


Risulta, per ipotesi, $|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2| = V_0$

Chiamiamo $\Delta\theta$ l'angolo formato dai due vettori posizione $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, misurato da $\vec{r}_1$ verso $\vec{r}_2$.

L'angolo formato dai due vettori $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ e' uguale a $\Delta\theta$, poiché $\vec{V}_1$ e' perpendicolare a $\vec{r}_1$ e $\vec{V}_2$ e' perpendicolare a $\vec{r}_2$: quindi, se $\Delta\theta$ e' l'angolo tra $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, anche l'angolo tra $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ e' uguale a $\Delta\theta$.

Trasliamo $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ parallelamente a se stessi in modo da far coincidere le "code" dei due vettori:



Essendo $\vec{V}_1 = \vec{V}(t_1)$ e $\vec{V}_2 = \vec{V}(t_2)$, la variazione del vettore velocita' istantanea tra l'istante t_1 e l'istante t_2 e' $\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$, vettore rappresentato graficamente nella figura. Il triangolo formato dai vettori $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\Delta\vec{V}$ e' isoscele, essendo $|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2| = V_0$. Essendo $\Delta\theta$ l'angolo al vertice del triangolo, risulta

$$|\Delta\vec{V}| = 2 V_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

Al tendere a zero dell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, la direzione del vettore $\Delta\vec{v}$ tende a coincidere con la direzione perpendicolare a quella di $\vec{v}$ ($\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ tendono a coincidere per $\Delta t \to 0$), cioe' con la direzione radiale, verso il centro della circonferenza.

Definita una ACCELERAZIONE VETTORIALE MEDIA nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

, è possibile quindi introdurre una

ACCELERAZIONE VETTORIALE ISTANTANEA:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Indicato con r il raggio della circonferenza, sfruttiamo la similitudine tra i due triangoli isosceli, quello formato dai vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \Delta\vec{v}$ e quello formato da $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \Delta\vec{r}$:

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v_0} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r}$$

, da cui otteniamo $|\Delta\vec{v}| = \frac{v_0}{r}|\Delta\vec{r}|$

Allora risulta:

$$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_0}{r} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{v_0^2}{r}$$

Pertanto, nel moto circolare uniforme il corpo possiede una accelerazione vettoriale istantanea diretta radialmente verso il centro della circonferenza, avente modulo v_0^2/r.

Poiché per ipotesi $|\vec{v}|$ è costante, osserviamo che nel moto circolare uniforme l'accelerazione vettoriale istantanea è legata esclusivamente al fatto che la direzione del vettore velocità istantanea varia continuamente nel tempo.

Essendo $\vec{a}$ diretta a ogni istante verso il centro della traiettoria circolare, $\vec{a}$ è detta ACCELERAZIONE CENTRIPETA nel moto circolare uniforme.

Nel moto circolare uniforme si possono introdurre delle grandezze caratteristiche di tale moto.

1) PERIODO: intervallo di tempo necessario affinché il corpo compia un giro completo lungo la traiettoria circolare. Risulta chiaramente:

$$T = \frac{2\pi r}{v_0}$$ (tratto di lunghezza $2\pi r$ percorso con velocità costante in modulo v_0)

2) FREQUENZA: numero di giri percorsi dal corpo in 1 s:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r}$$; si misura in s^{-1}, unità di misura anche detta Hertz (Hz)

3) VELOCITÀ ANGOLARE: è l'"angolo per unità di tempo" spazzato dal vettore posizione $\vec{r}(t)$. Poiché nell'intervallo di tempo T il raggio vettore spazza un angolo pari a $360° = 2\pi$ rad, risulta

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (\text{rad/s})$$

Risulta anche $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ovviamente.

Infine, determiniamo il legame tra v_0 e ω:

$$v_0 = \frac{2\pi r}{T} = \left(\frac{2\pi}{T}\right) \cdot r = \omega r \Rightarrow \boxed{v_0 = \omega r} \quad \text{e anche}$$

$$a = \frac{v_0^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \frac{\omega^2 r^{\cancel{2}}}{\cancel{r}} = \omega^2 r$$

<u>Esempio</u> Modelliamo il moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole come moto circolare uniforme, con orbita avente raggio $r = 1,5 \times 10^{11}$ m e periodo $T = 1$ anno $= 3,16 \times 10^7$ s.

Il modulo dell'accelerazione centripeta è quindi

$$a = \frac{v_0^2}{r} = \frac{1}{r}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 r^{\cancel{2}}}{\cancel{r}T^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 0,593 \times 10^{-2} \; m/s^2$$

Per quanto riguarda il moto della Luna attorno alla Terra, schematizzando anche questo come moto circolare uniforme, risulta (dati sperimentali):

$$r = 384400 \text{ km} = 3,844 \times 10^8 \text{ m} \qquad T = 27,32 \text{ giorni} = 2,36 \times 10^6 \text{ s}$$

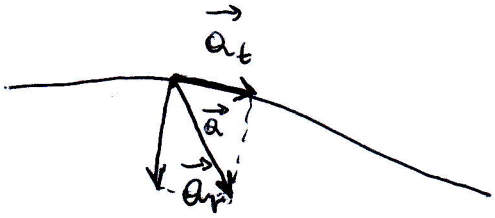
Il modulo dell'accelerazione centripeta è quindi, adesso:

$$a = \frac{v_0^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 2,72 \times 10^{-3} \; m/s^2$$

Accelerazione vettoriale istantanea nel moto bidimensionale

Consideriamo la situazione più generale in cui il moto avviene nel piano lungo una traiettoria qualsiasi, con $\vec{v}(t)$ il cui modulo può variare nel tempo.

Tenendo conto del fatto che in generale può variare anche la componente della velocità istantanea "tangenziale", cioè lungo la tangente alla traiettoria, in ogni punto lungo la traiettoria l'accelerazione vettoriale istantanea si potrà esprimere come somma vettoriale di due vettori componenti:



$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$, dove

$\vec{a}_r$ indica il componente radiale dell'accelerazione vettoriale istantanea,

e $\vec{a}_t$ indica il componente tangenziale dell'accelerazione vettoriale istantanea.

$\vec{a}$ è quindi un vettore diretto, a ogni istante, verso l'interno della traiettoria curva.

$\vec{a}_t$ è legata alla variazione nel tempo del modulo della velocità vettoriale istantanea: $|\vec{a}_t| = |a_t| = \left|\frac{d\,|\vec{v}|}{dt}\right|$

$\vec{a}_r$ è legata alla variazione nel tempo della direzione della velocità vettoriale istantanea, e risulta

$|\vec{a}_r| = \frac{v^2}{r}$, dove r è il raggio della CIRCONFERENZA OSCULATRICE della traiettoria nel punto considerato: il punto di contatto tra la circonferenza osculatrice e la traiettoria è "triplo"; il raggio della circonferenza osculatrice è detto RAGGIO DI CURVATURA della traiettoria nel punto considerato.

Giusto per completezza, se la traiettoria nel piano cartesiano è rappresentata da una funzione $y = f(x)$ almeno di classe C^2, si può dimostrare che risulta, in $x = x_0$:

$$r = \frac{\left[1 + (f'(x_0))^2\right]^{3/2}}{|f''(x_0)|}$$

Fissato $|\vec{v}|$, quindi, $|\vec{a}_r|$ cresce al decrescere del raggio di curvatura.

$\vec{a}_r$ è diretto lungo la direzione ortogonale alla traiettoria, verso il centro della circonferenza osculatrice in quel punto.
$\vec{a}_t$ è diretto lungo la direzione di $\vec{v}$, concorde con $\vec{v}$ se $|\vec{v}|$ è crescente, discorde rispetto a $\vec{v}$ se $|\vec{v}|$ è decrescente.
Nel moto circolare uniforme risulta $\vec{a}_t = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_r$