MOTO ROTAZIONALE (SECONDA PARTE)

Momento di una forza

Consideriamo un corpo rigido vincolato a ruotare attorno a un asse fissato.

Se al corpo rigido vengono applicate forze esterne, la capacità di ciascuna forza di mettere in rotazione il corpo rigido attorno all'asse considerato dipende da tre parametri:

- il modulo della forza;
- la distanza tra il punto in cui la forza è applicata e l'asse di rotazione;
- l'angolo tra la retta di azione della forza applicata e il segmento che congiunge il punto di applicazione della forza con l'asse di rotazione.

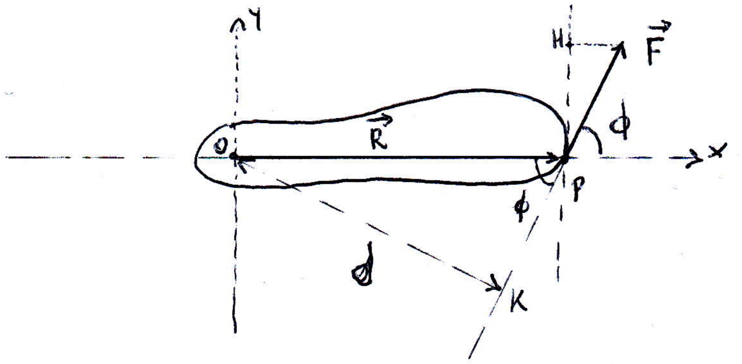
Fissiamo l'origine del sistema di riferimento in un punto sull'asse di rotazione, e indichiamo con $\vec{R}$ il vettore posizione del punto in cui la forza $\vec{F}$ è applicata.

Si definisce MOMENTO DELLA FORZA $\vec{F}$ RISPETTO AL POLO O il vettore

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F}}$$

Lo schema più semplice per iniziare a impostare i calcoli da svolgere è il seguente.

Consideriamo un corpo rigido sottile, vincolato a ruotare attorno a un asse perpendicolare al piano su cui giace il corpo rigido.



Indichiamo con O il punto in cui l'asse di rotazione interseca il corpo rigido considerato, e scegliamo O come origine del sistema di riferimento che ci servirà per svolgere i calcoli.

Applicando una forza $\vec{F}$ a un punto P del corpo rigido, se P non coincide con O e se la direzione di $\vec{F}$ non coincide con la direzione della retta OP si osserva che il corpo rigido si mette in rotazione, e il punto P si muove di moto circolare nel piano contenente il segmento OP e la retta lungo la quale agisce la forza $\vec{F}$.

Dunque, la rotazione del corpo rigido è dovuta alla componente della forza $\vec{F}$ perpendicolare al vettore posizione $\vec{R}$ del punto P rispetto all'origine O.

Il momento della forza $\vec{F}$ rispetto all'origine O è:

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F},$$ e il suo modulo è:

$|\vec{\tau}| = |\vec{R} \times \vec{F}| = RF \operatorname{sen} \phi$ (vedi figura), se poniamo

$|\vec{R}| = R$ e $|\vec{F}| = F$. $\vec{\tau}$ è perpendicolare al piano (x, y) in questo caso.

Queste uguaglianze si può interpretare in due modi:

1) $|\vec{\tau}| = R \cdot (F \operatorname{sen} \phi) = R F_t$,

cioè $|\vec{\tau}|$ è uguale al prodotto della distanza del punto P dall'asse di rotazione e della componente della forza $\vec{F}$ perpendicolare al vettore posizione $\vec{R}$ (e quindi, tangenziale).

2) $|\vec{\tau}| = F (R \operatorname{sen} \phi) = F d$,

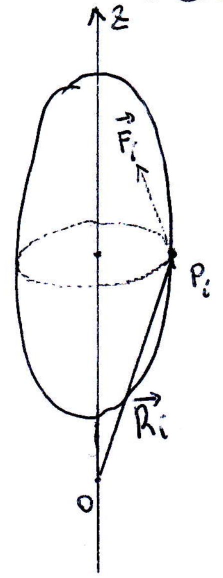
cioè $|\vec{\tau}|$ è anche uguale al prodotto del modulo di $\vec{F}$ per la distanza d tra l'asse di rotazione e la retta lungo cui $\vec{F}$ agisce; d è detto BRACCIO della forza $\vec{F}$.

In molti problemi il calcolo di $|\vec{\tau}|$ è reso più semplice utilizzando una delle due interpretazioni scritte sopra.

Con la convenzione che il verso positivo dell'asse di rotazione sia quello uscente dal piano del foglio nello schema della pagina precedente, si osserva che se risulta $\tau_z > 0$, la rotazione parte in senso antiorario, mentre se $\tau_z < 0$ la rotazione parte in senso orario (con corpo inizialmente fermo).

L'unità di misura del momento di una forza è N·m nel S.I. di unità di misura; dimensionalmente è la stessa unità di misura del lavoro e dell'energia, ma nel caso del momento di una forza non viene chiamata J, per distinguere queste grandezze dal lavoro e dall'energia.

Dinamica di un corpo rigido



Consideriamo un corpo rigido vincolato a ruotare attorno a un asse fissato z, orientato come nello schema qui a fianco. Fissiamo un origine O lungo questo asse, e sia $\vec{R}_i$ il vettore posizione di un punto generico P_i del corpo rigido. Sia $\vec{F}_i$ la forza applicata dall'esterno nel punto P_i.

Dal ragionamento fatto nel paragrafo precedente, nonché dalla definizione di momento di una forza, se il corpo rigido non può effettuare altri movimenti oltre alla rotazione attorno all'asse z concludiamo che l'unica componente del momento della forza $\vec{F}_i$ rispetto al polo O che può contribuire alla rotazione del corpo rigido attorno all'asse z è proprio τ_z.

In generale, sia il vettore $\vec{R}_i$ sia il vettore $\vec{F}_i$ si possono scrivere come somma di due vettori componenti, uno parallelo all'asse z e uno perpendicolare all'asse z:

$$\vec{R}_i = \vec{R}_{i\parallel} + \vec{R}_{i\perp} \quad , \quad \vec{F}_i = \vec{F}_{i\parallel} + \vec{F}_{i\perp}$$

Il momento di $\vec{F}_i$ rispetto a O è, quindi:

$$\vec{\tau}_i = \vec{R}_i \times \vec{F}_i = (\vec{R}_{i\parallel} + \vec{R}_{i\perp}) \times (\vec{F}_{i\parallel} + \vec{F}_{i\perp}) =$$

$= (\vec{R}_{i\parallel} \times \vec{F}_{i\parallel}) + (\vec{R}_{i\parallel} \times \vec{F}_{i\perp}) + (\vec{R}_{i\perp} \times \vec{F}_{i\parallel}) + (\vec{R}_{i\perp} \times \vec{F}_{i\perp})$

- Il termine $\vec{R}_{i\parallel} \times \vec{F}_{i\parallel}$ e' nullo perché e' il prodotto vettoriale di due vettori paralleli.

- La quantità vettoriale $(\vec{R}_{i\parallel} \times \vec{F}_{i\perp}) + (\vec{R}_{i\perp} \times \vec{F}_{i\parallel})$ e' un vettore che si trova nel piano perpendicolare all'asse z, passante per il punto P_i

- La quantità vettoriale $\vec{R}_{i\perp} \times \vec{F}_{i\perp}$ e' diretta lungo l'asse z.

Dunque, il momento della forza $\vec{F}_i$ rispetto al polo O, in generale, si può scrivere come somma vettoriale di due vettori componenti:

$$\vec{\tau}_{i\perp} = (\vec{R}_{i\parallel} \times \vec{F}_{i\perp}) + (\vec{R}_{i\perp} \times \vec{F}_{i\parallel}), \text{ perpendicolare all'asse } z$$

$$\vec{\tau}_{i\parallel} = \vec{R}_{i\perp} \times \vec{F}_{i\perp}, \text{ parallelo all'asse } z$$

Per il moto di rotazione attorno all'asse z l'unico componente che conta e' chiaramente $\vec{\tau}_{i\parallel}$, se il corpo rigido e' esclusivamente vincolato a ruotare attorno all'asse z.

Risulta $|\tau_{iz}| = |\vec{\tau}_{i\parallel}| = r_i F_{i\perp} \operatorname{sen}\phi$, dove r_i e' la distanza del punto P_i dall'asse di rotazione $(= |\vec{R}_{i\perp}|)$, $F_{i\perp}$ e' il modulo di $\vec{F}_{i\perp}$ e ϕ e' l'angolo tra $\vec{R}_{i\perp} = \vec{r}_i$ e $\vec{F}_{i\perp}$ (vedi pag. 2).

Considerando il corpo rigido nel suo complesso, supponendo in prima approssimazione che sia costituito da N punti materiali, possiamo scrivere il momento totale delle forze applicate al corpo rigido in questo modo:

$$\vec{\tau}_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{R}_i \times \vec{F}_i \right) \text{ rispetto al polo } O$$

Prima di procedere, consideriamo un sistema rigido costituito da $N = 2$ punti materiali. In questo caso, risulta quindi:

$$\vec{\tau}_{TOT} = \vec{R}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{R}_2 \times \vec{F}_2$$

Come già visto quando abbiamo studiato la dinamica dei sistemi di punti materiali, la forza applicata ad un punto materiale costituente di un sistema si può scrivere come somma vettoriale di una forza esterna risultante agente sul punto materiale e delle forze esercitate sul punto materiale dagli altri corpi del sistema. Nel caso di $N = 2$ risulta quindi:

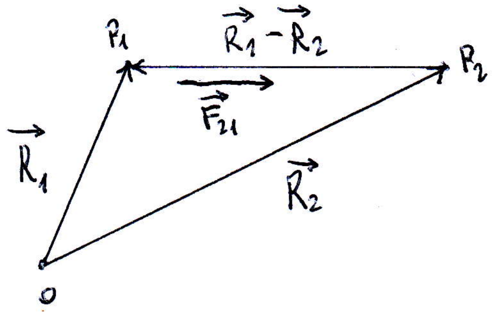
$$\vec{\tau}_{TOT} = \vec{R}_1 \times \left(\vec{F}_{1,e} + \vec{F}_{21} \right) + \vec{R}_2 \times \left(\vec{F}_{2e} + \vec{F}_{12} \right) =$$

$$= \vec{R}_1 \times \vec{F}_{1,e} + \vec{R}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{R}_2 \times \vec{F}_{2,e} + \vec{R}_2 \times \vec{F}_{12}$$

Per la terza legge della dinamica risulta $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$,

per cui il momento totale delle forze agenti sul corpo rigido con $N = 2$ è:

$$\vec{\tau}_{TOT} = \vec{R}_1 \times \vec{F}_{1,e} + \vec{R}_2 \times \vec{F}_{2,e} + (\vec{R}_1 - \vec{R}_2) \times \vec{F}_{21}$$



Ma, poiché $\vec{F}_{21}$, forza esercitata dal corpo 2 sul corpo 1, e' ovviamente diretta lungo la retta che congiunge i due corpi, che e' anche la direzione del vettore $\vec{R}_1 - \vec{R}_2$, l'ultimo termine della somma vettoriale scritta sopra e' nullo (essendo il prodotto vettoriale di due vettori tra loro paralleli!), e quindi in definitiva otteniamo:

$$\vec{\tau}_{TOT} = \vec{R}_1 \times \vec{F}_{1,e} + \vec{R}_2 \times \vec{F}_{2,e} = \vec{\tau}_{1,e} + \vec{\tau}_{2,e} ,$$

cioe' il momento totale delle forze applicate a un sistema rigido costituito da 2 punti materiali e' uguale al momento risultante delle sole forze esterne al sistema agenti sui due punti materiali, rispetto a un polo O fissato.

Questa affermazione risulta vera in generale per un sistema rigido costituito da N punti materiali, cioe':

$$\boxed{\vec{\tau}_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{R}_i \times \vec{F}_{i,e} \right)}$$

rispetto a un polo O fissato.

Per quanto riguarda la rotazione del corpo rigido attorno all'asse z, quindi, conta soltanto la componente z del momento $\vec{\tau}_{TOT}$:

$$\tau_{tot,z} = \sum_{i=1}^{N} \left[r_i (F_{i\perp})_t \right] = \sum_{i=1}^{N} (r_i \, m_i \, a_{i,t}) ,$$

dove abbiamo applicato la seconda legge della dinamica al punto materiale i-esimo, essendo m_i la sua massa e $a_{i,t}$ la componente tangenziale della sua accelerazione.

$(F_{i\perp})_t$ e' la componente del vettore $\vec{F}_{i\perp}$ tangenziale alla traiettoria circolare del punto materiale i-esimo.

Ricordiamo che le componenti tangenziali dei vettori sono positive se orientate in senso antiorario, e l'asse z e' orientato positivamente nel verso uscente dal piano del foglio.

Ricordiamo anche che, nel moto rotazionale, la componente tangenziale dell'accelerazione di un punto posto a distanza r_i dall'asse di rotazione e' legata all'accelerazione angolare dalla relazione $a_{i,t} = r_i \alpha$, dove α e' la stessa per tutti i punti del sistema rigido, come gia' visto.

Pertanto otteniamo la relazione seguente:

$$\tau_{TOT,z} = \sum_{i=1}^{N} \left[r_i \cdot m_i \cdot r_i \alpha \right] = \left[\sum_{i=1}^{N} (m_i r_i^2) \right] \alpha$$

Ma la quantità $\sum_{i=1}^{N} (m_i r_i^2)$ è il momento d'inerzia del sistema rigido relativo all'asse di rotazione z, per cui per un sistema rigido in rotazione risulta

$$(*) \qquad \boxed{\tau_{TOT,z} = I_z \alpha} \, ,$$

oltre alla condizione trovata in precedenza

$$\tau_{TOT,z} = \sum_{i=1}^{N} \tau_{i,e,z}$$

L'equazione (*) è l'equivalente per un corpo rigido in rotazione della seconda legge della dinamica per un punto materiale, con le seguenti "sostituzioni": al posto della forza risultante c'è la componente lungo l'asse di rotazione del momento risultante delle forze applicate rispetto a un polo O posto nell'asse, al posto della massa c'è il momento d'inerzia rispetto all'asse z del sistema rigido, e al posto dell'accelerazione del punto materiale c'è l'accelerazione angolare di rotazione del corpo rigido.

Equilibrio di un corpo rigido

Condizioni necessarie per l'equilibrio di un corpo rigido:

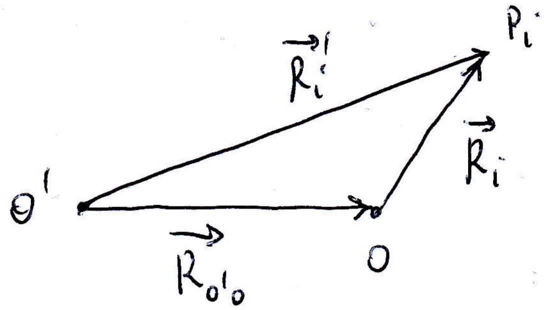
1) $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,e} = 0$; abbiamo visto che questa condizione implica $\vec{V}_{CM} =$ costante, per cui se il sistema rigido inizialmente e' fermo, questa condizione implica $\vec{V}_{CM} = 0$ (EQUILIBRIO TRASLAZIONALE)

2) $\sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{i,e} = 0$; il momento risultante delle forze esterne rispetto a un polo qualsiasi deve essere nullo.

La sommatoria va calcolata soltanto sui momenti delle forze esterne al sistema, per quanto visto nel paragrafo precedente. Il fatto che questo polo possa essere scelto arbitrariamente e' abbastanza semplice da dimostrare: supponiamo di voler calcolare $\sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{ie}$ rispetto a un altro polo O'; risulta ora:

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_{ie})_{O'} = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{R}_i' \times \vec{F}_{i,e} \right)$$; ma per una ovvia relazione di somma vettoriale risulta:

$\vec{R}_i' = \vec{R}_{O'O} + \vec{R}_i$, come si può vedere nel seguente schema:



, dove O e' l'origine scelta lungo l'asse di rotazione, ad esempio.

Allora:

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_{i,e})_{o'} = \sum_{i=1}^{N} \left[(\vec{R}_{o'o} + \vec{R}_i) \times \vec{F}_{i,e} \right] = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{R}_{o'o} \times \vec{F}_{i,e} + \vec{R}_i \times \vec{F}_{i,e} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{R}_{o'o} \times \vec{F}_{i,e} \right) + \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{R}_i \times \vec{F}_{i,e} \right) = \vec{R}_{o'o} \times \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,e} \right) + \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{R}_i \times \vec{F}_{i,e} \right)$$

Ma, se vale l'ipotesi 1), allora il primo termine si annulla, e quindi risulta

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_{i,e})_{o'} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_{i,e})_{o} ,$$

cioè il momento risultante delle forze esterne rispetto al polo O' è uguale al momento risultante delle forze esterne rispetto al polo O, per cui la scelta del polo è indifferente se risulta

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,e} = 0 .$$

Le condizioni 1) e 2), se entrambe valide, sono sufficienti per stabilire che un dato corpo rigido ha il centro di massa che si sta muovendo di moto rettilineo uniforme, e che il corpo rigido sta ruotando con velocità angolare costante attorno a un asse passante per il suo centro di massa (meditare sul perché di questo...).

Se, oltre alle condizioni 1) e 2), risulta $v_{CM} = 0$ e $\omega = 0$ all'istante $t=0$, allora il corpo rigido si trova in una condizione di equilibrio statico. Vediamo alcuni esempi.

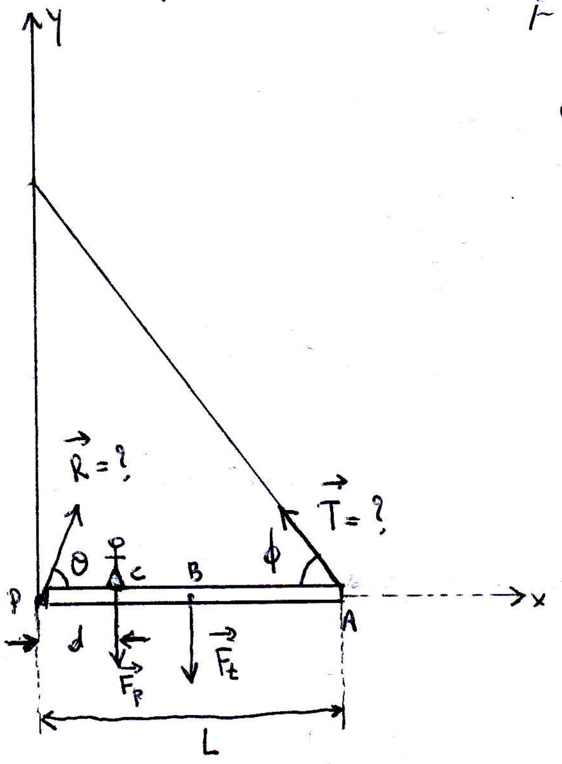
Esempio 1

Una trave orizzontale omogenea avente lunghezza $L = 8\,m$ e peso $F_t = 200\,N$ è incernierata a una parete mediante un giunto snodato. L'altra estremità è sorretta da un cavo che forma un angolo $\phi = 53°$ con la trave.

Se una persona si trova in piedi sulla trave (peso della persona $F_p = 600\,N$) a una distanza $d = 2\,m$ dalla parete, si determinino:

a) la tensione del cavo;

b) la forza (modulo, direzione e verso) esercitata dalla parete sulla trave.



a) Considerando il sistema costituito dalla trave e dalla persona in piedi su di essa, per l'equilibrio statico dell'intero sistema occorre imporre le condizioni seguenti:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,e} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{i,e} = 0$$

Le forze esterne agenti sul sistema sono: la forza peso della trave, la forza peso della persona, la tensione del cavo e la reazione esercitata dalla parete sulla trave tramite il giunto snodato.

Nel diagramma delle forze esterne agenti sul sistema abbiamo usato le seguenti denominazioni:

$\vec{T}$: forza esercitata dal cavo sulla trave

$\vec{R}$: forza di reazione esercitata dal giunto snodato sulla trave.

La forza di reazione esercitata dalla trave sull'uomo e la forza esercitata dall'uomo sulla trave sono forze interne al sistema considerato, e che pertanto non sono rilevanti ai fini di questa analisi.

Introducendo un sistema di assi cartesiani ortogonali (x, y) come nel diagramma, risulta:

$T_x = -T\cos\phi$, $T_y = T\,\mathrm{sen}\,\phi$ (posto $|\vec{T}| = T$)

R_x, R_y quantità ignote da determinare

$F_{t,x} = 0$, $F_{t,y} = -F_t$ (posto $|\vec{F}_t| = F_t$)

$F_{p,x} = 0$, $F_{p,y} = -F_p$ (posto $|\vec{F}_p| = F_p$)

Allora, le condizioni richieste per l'equilibrio statico diventano:

$$\vec{F}_t + \vec{F}_p + \vec{T} + \vec{R} = 0$$

I momenti possiamo calcolarli rispetto al polo P:

$$\vec{PB} \times \vec{F}_t + \vec{PC} \times \vec{F}_p + \vec{PA} \times \vec{T} = 0$$ (il momento di $\vec{R}$ e' nullo rispetto al polo P)

[Ricordare che, nel caso di un corpo esteso, la forza peso deve essere considerata applicata nel centro di massa del corpo.]

La prima equazione equivale a due equazioni scalari, una per le componenti x e una per le componenti y dei vettori:

$$\begin{cases} -T\cos\phi + R_x = 0 \\ -F_t - F_p + T\,\mathrm{sen}\,\phi + R_y = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione, dato che i vettori si trovano tutti nel piano (x,y), si riduce a un'unica equazione per la sola componente lungo l'asse z dei momenti delle forze esterne:

$$-\frac{L}{2}F_t - d\,F_p + L\,T\,\mathrm{sen}\,\phi = 0,$$

dove abbiamo tenuto conto delle regole del segno nei diversi prodotti vettoriali.

Le incognite sono T, R_x, R_y.

Possiamo ricavare T dalla terza equazione, dove T è la sola quantità incognita:

$$L\,T\,\mathrm{sen}\,\phi = \frac{L}{2}F_t + d\,F_p, \quad \text{cioè:}$$

$$\boxed{T = \frac{\frac{L}{2}F_t + d\,F_p}{L\,\mathrm{sen}\,\phi} = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\phi}\left(\frac{F_t}{2} + \frac{d}{L}F_p\right) = 313{,}0339\ N}$$

b) Utilizzando l'espressione di T determinata nel punto a), possiamo risolvere le altre due equazioni e calcolare R_x, R_y:

$$R_x = T\cos\phi = \left(\frac{F_t}{2} + \frac{d}{L}F_p\right)\cot g\,\phi = 188,3885\ N = R\cos\theta$$

$$R_y = F_t + F_p - T\,\mathrm{sen}\,\phi = F_t + F_p - \frac{F_t}{2} - \frac{d}{L}F_p =$$

$$= \frac{F_t}{2} + \left(1-\frac{d}{L}\right)F_p = 550\ N = R\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Risulta quindi:

$$\boxed{|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(\frac{F_t}{2} + \frac{d}{L}F_p\right)^2\cot g^2\phi + \left[\frac{F_t}{2} + \left(1-\frac{d}{L}\right)F_p\right]^2} = 581,3693\ N}$$

L'angolo θ che $\vec{R}$ forma con il semiasse x positivo è tale che

$$tg\,\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{\frac{F_t}{2} + \left(1-\frac{d}{L}\right)F_p}{\left(\frac{F_t}{2} + \frac{d}{L}F_p\right)\cot g\,\phi} \simeq 2,9195,$$ da cui

$$\boxed{\theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = 71,092^\circ \simeq 1,2408\ rad}$$

Poiché $R_x > 0$ e $R_y > 0$, $\vec{R}$ si trova nel primo quadrante.

Avere scelto come polo il punto in cui si trova il giunto snodato ha permesso di semplificare l'equazione dell'equilibrio dei momenti delle forze, in quanto il momento della forza $\vec{R}$ rispetto a questo polo è nullo.

Esempio 2

Una scala a pioli uniforme, avente lunghezza l, poggia su una parete liscia verticale. La massa della scala e' m, e il coefficiente di attrito statico tra la scala e il suolo e' $\mu_s = 0,4$. Si calcoli il minimo valore che deve avere l'angolo che la scala forma con la direzione orizzontale affinché la scala non scivoli.

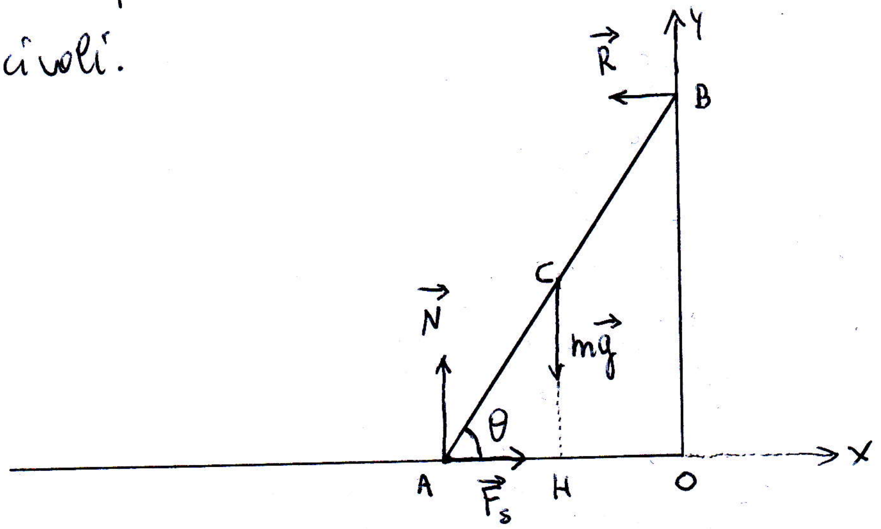


Diagramma schematico del sistema in esame e delle forze agenti, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (X,Y).

$\overline{AC} = \frac{l}{2}$, $\overline{AB} = l$

Forze agenti sulla scala:

- forza peso $m\vec{g}$
- reazione vincolare del piano orizzontale $\vec{N}$
- reazione vincolare del piano verticale $\vec{R}$ (e' solo un punto di appoggio, non un giunto snodato come quello dell' esempio precedente!)
- forza di attrito statico esercitata dal pavimento sulla base della scala.

Condizioni di equilibrio statico della scala:

1) $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,e} = 0 \Rightarrow m\vec{g} + \vec{N} + \vec{R} + \vec{F}_s = 0$

2) Momento risultante delle forze esterne applicate al sistema rispetto al polo A:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{i,e} = 0 \Rightarrow \vec{AC} \times m\vec{g} + \vec{AB} \times \vec{R} = 0$$

Rispetto al polo A, i momenti delle forze $\vec{N}$ e $\vec{F}_s$ sono nulli; per cui questa scelta del polo per il calcolo dei momenti delle forze è molto conveniente.

Componenti delle forze; posto $|\vec{N}| = N$, $|\vec{R}| = R$, $|\vec{F}_s| = F_s$:

$$(m\vec{g})_x = 0\ ; \quad (m\vec{g})_y = -mg\ ; \quad N_x = 0; \quad N_y = N;$$

$$R_x = -R\ ; \quad R_y = 0; \quad F_{s,x} = F_s\ ; \quad F_{s,y} = 0$$

La prima equazione vettoriale equivale alle due equazioni scalari seguenti (una per le componenti x e una per le componenti y dei vettori):

$$\begin{cases} -R + F_s = 0 \\ -mg + N = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione, dato che i vettori si trovano tutti nel piano (x, y), si riduce a un'unica equazione per la sola componente lungo l'asse z dei momenti delle forze esterne:

Il braccio di $m\vec{g}$ rispetto al polo A è $\frac{l}{2}\cos\theta$;

il braccio di $\vec{R}$ rispetto al polo A è $l \operatorname{sen}\theta$.

Tenuto conto dei segni dei τ_z delle singole forze, risulta:

$$-mg\frac{\cancel{l}^{\,1}}{2}\cos\theta + R\cancel{l}\operatorname{sen}\theta = 0$$

Dunque, per l'equilibrio statico della scala devono valere le seguenti tre condizioni:

$$\begin{cases} F_s = R \\ N = mg \\ R = \frac{1}{2} mg \cot g\,\theta \end{cases}$$

Dunque, per il modulo della forza di attrito statico otteniamo:

$$F_s = R = \frac{1}{2} mg \cot g\,\theta$$

Il modulo della forza di attrito statico deve soddisfare la condizione seguente:

$$F_s \leq \mu_s N \quad , \quad \text{per cui risulta}$$

$$\frac{1}{2} \cancel{mg} \cot g\,\theta \leq \mu_s \cancel{mg} \quad , \quad \text{da cui} \quad \cot g\,\theta \leq 2\mu_s \, ,$$

oppure (che è la stessa cosa) $\operatorname{tg}\theta \geq \frac{1}{2\mu_s}$, per cui

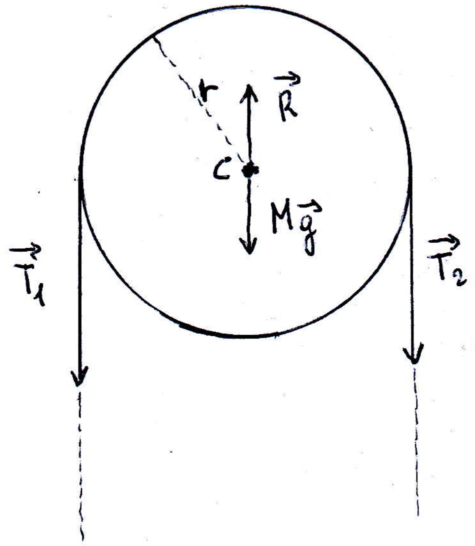
deve risultare $\theta \geq \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2\mu_s}\right)$

Pertanto, il minimo valore che deve avere l'angolo formato dalla scala con la direzione orizzontale affinché la scala non scivoli è

$$\boxed{\theta_{min} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2\mu_s}\right) = 51,34^\circ = 0,8961 \text{ rad}}$$

Osservazione preliminare agli esempi che seguiranno.

Consideriamo una carrucola su cui si avvolge una fune o corda inestensibile. Se la massa della carrucola non è trascurabile, e se i corpi (punti materiali) a cui sono collegati gli estremi della fune stanno accelerando, i moduli delle tensioni sui due lati della carrucola non possono essere uguali; infatti, disegnamo il diagramma delle forze agenti sulla carrucola:



Se la carrucola, posta in un piano verticale, è vincolata a ruotare attorno a un asse fisso, e se indichiamo con $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ le forze esercitate dalla fune sui due lati della carrucola, anzitutto deve risultare

$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + M\vec{g} + \vec{R} = 0$ in quanto il centro di massa della carrucola (coincidente con la proiezione dell'asse di rotazione) è fermo durante la rotazione della carrucola.

Inoltre, dovrà valere l'equazione per il momento risultante delle forze esterne rispetto a un punto posto sull'asse di rotazione:

$$I_z \alpha = \sum_{i=1}^{N} \tau_{i,z}$$, dove I_z e' il momento d'inerzia della carrucola relativo all'asse di rotazione, e α e' l'accelerazione angolare della carrucola.

Rispetto al polo C, che si trova nell'asse di rotazione, le uniche forze che hanno momento non nullo sono $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$.

Posto $|\vec{T}_1| = T_1$, $|\vec{T}_2| = T_2$, tenuto conto che il braccio di entrambe queste forze rispetto al polo C e' uguale al raggio r della carrucola, otteniamo:

$$I_z \alpha = r T_1 - r T_2$$, tenendo conto dei diversi segni dei due momenti.

Se la carrucola e' schematizzabile come un disco omogeneo avente massa m, risulta $I_z = \frac{1}{2} m r^2$, come noto, e quindi:

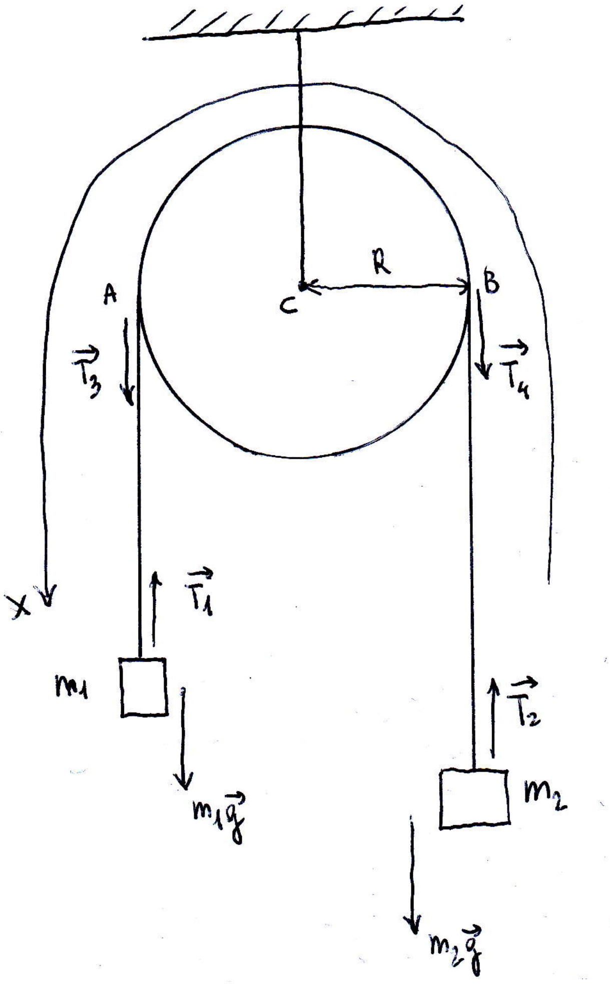
$$\frac{1}{2} m r^{\cancel{2}} \alpha = \cancel{r}(T_1 - T_2) \Rightarrow \frac{1}{2} m r \alpha = T_1 - T_2$$

Nel caso in cui la massa della carrucola e' trascurabile, il primo membro di questa uguaglianza si annulla, e risulta

$T_1 - T_2 = 0$, cioe' $T_1 = T_2$. Questo dimostra l'enunciato che, nel caso in cui una carrucola abbia massa trascurabile, il modulo della tensione dei due tratti di fune ai due lati della carrucola e' lo stesso. In generale, tuttavia, non e' così, e di questo occorre tenere conto negli esercizi.

Esempio 3

Macchina di Atwood (versione 2.0)



Risulta, per ciascuno dei tratti di fune ai lati della carrucola:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_3 = 0 \Rightarrow |\vec{T}_1| = |\vec{T}_3| = T_1$$

$$\vec{T}_2 + \vec{T}_4 = 0 \Rightarrow |\vec{T}_2| = |\vec{T}_4| = T_2$$

Adesso consideriamo la situazione in cui la puleggia ha massa M non trascurabile, e raggio R. La fune è inestensibile e di massa trascurabile.

Come nel caso dello stesso sistema analizzato a suo tempo con altre ipotesi di partenza sulla puleggia, introduciamo un "asse x" che si avvolge attorno alla puleggia nel senso mostrato nello schema qua sopra. Scriviamo le equazioni del moto per ciascuna delle due masse e l'equazione dei momenti delle forze rispetto al polo C per la puleggia:

corpo di massa m_1: $\quad m_1 a_x = m_1 g - T_1$

corpo di massa m_2: $\quad m_2 a_x = T_2 - m_2 g$

puleggia: $\quad I_z \alpha = R(T_1 - T_2)$ (vedi pag. 20)

Se la fune non slitta sulla carrucola, ogni punto sul bordo di questa ha la stessa accelerazione tangenziale, e poiché la fune è inestensibile, questa accelerazione tangenziale risulta uguale all'accelerazione lineare dei corpi di massa m_1 e m_2:

$$a_x = R\alpha, \quad \text{cioè} \quad \alpha = \frac{a_x}{R}.$$

Se la carrucola è un disco omogeneo, risulta $I_z = \frac{1}{2}MR^2$.

Allora:

$$\begin{cases} m_1 a_x = m_1 g - T_1 \\ m_2 a_x = T_2 - m_2 g \\ \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{a_x}{R}\right) = R\,(T_1 - T_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 a_x = m_1 g - T_1 \\ m_2 a_x = T_2 - m_2 g \\ \frac{M}{2} a_x = T_1 - T_2 \end{cases}$$

Sommiamo le tre equazioni membro a membro:

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right) a_x = (m_1 - m_2)\, g, \quad \text{da cui otteniamo:}$$

$$a_x = \frac{(m_1 - m_2)\, g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$$

Si noti che, per $M \to 0$, si riottiene il risultato dell'esercizio semplificato svolto a suo tempo.

Risulta poi: $T_1 = m_1(g - a_x) = m_1 g \left[1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}\right] =$

$$= m_1 g \left(\frac{\cancel{m_1} + m_2 + \frac{M}{2} - \cancel{m_1} + m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}\right) = \frac{m_1\left(2m_2 + \frac{M}{2}\right) g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$$

$$T_2 = m_2(g + a_x) = m_2 g \left[1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}\right] = m_2 g \left(\frac{m_1 + \cancel{m_2} + \frac{M}{2} + m_1 - \cancel{m_2}}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}\right) =$$

$$= \frac{m_2\left(2m_1 + \frac{M}{2}\right) g}{m_1 + m_2 + M/2} \neq T_1, \quad \text{come deve essere se } M \neq 0.$$

Lavoro e potenza nel moto rotazionale

Abbiamo visto nel capitolo sulla dinamica dei sistemi di punti materiali che il lavoro complessivamente svolto da tutte le forze agenti su un sistema di punti materiali tra un istante $t = t_i$ e un istante $t = t_f$ e' uguale alla variazione dell' energia cinetica totale del sistema tra gli stessi due istanti:

$$W_{TOT}(t_i \to t_f) = K_{TOT,f} - K_{TOT,i}$$

Nel caso specifico di un corpo rigido rotante attorno a un asse fisso z, risulta pertanto:

$$\boxed{W_{TOT}(t_i \to t_f) = \frac{1}{2} I_z \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_i^2}$$

dove $\omega_i = \omega(t = t_i)$ e $\omega_f = \omega(t = t_f)$ per il corpo rigido.

Adesso, analizziamo piu' in dettaglio l' espressione di W_{TOT} nel moto rotatorio di un corpo rigido.

In generale, il lavoro totale compiuto da tutte le forze agenti su un sistema rigido costituito da N punti materiali si puo' esprimere nel modo seguente:

$$W_{TOT}(t_i \to t_f) = \sum_{j=1}^{N} \int_{t_i}^{t_f} \left[\vec{F}_j(t) \cdot \vec{v}_j(t)\right] dt \quad , \quad \text{dove}$$

$\vec{F}_j(t)$ e' la forza complessiva agente sul corpo j-esimo, e $\vec{v}_j(t)$ e' la velocita' istantanea del corpo j-esimo.

Ma nel caso del moto rotatorio di un corpo rigido la velocità istantanea di ogni suo punto è una velocità tangenziale, cioè:

$|\vec{v}_j(t)| = r_j\,|\omega(t)|$, dove r_j è la distanza fissa del punto j-esimo dall'asse di rotazione.

Risulta quindi: $\vec{F}_j(t)\cdot\vec{v}_j(t) = F_{t,j}(t)\,v_{t,j}(t) = r_j\,F_{t,j}(t)\,\omega(t)$,

dove l'indice t sta a indicare la componente tangenziale del vettore. Risulta poi: $r_j\,F_{t,j}(t) = \tau_{j,z}(t)$, dove

$\tau_{j,z}(t)$ è la componente lungo l'asse di rotazione del momento della forza complessiva agente sul punto materiale j-esimo all'istante t. Dunque possiamo scrivere:

$$W_{TOT}(t_i \to t_f) = \sum_{j=1}^{N}\int_{t_i}^{t_f}\left[r_j\,F_{t_j}(t)\,\omega(t)\right]dt = \sum_{j=1}^{N}\int_{t_i}^{t_f}\left[\tau_{j,z}(t)\,\omega(t)\right]dt$$

$$= \int_{t_i}^{t_f}\left\{\left[\sum_{j=1}^{N}\tau_{j,z}(t)\right]\omega(t)\right\}dt = \int_{t_i}^{t_f}\left[\tau_{TOT,z}(t)\,\omega(t)\right]dt$$

In un piccolo intervallo di tempo Δt, dunque, il lavoro totale svolto sul sistema di N corpi è:

$\Delta W_{TOT} = \tau_{TOT,z}(t)\,\omega(t)\,\Delta t$, e quindi:

$$\frac{\Delta W_{TOT}}{\Delta t} = \tau_{TOT,z}(t)\,\omega(t)$$

(POTENZA MEDIA in Δt)

Ovviamente abbiamo posto $\sum_{j=1}^{N}\tau_{j,z}(t) = \tau_{TOT,z}(t)$

Al limite per $\Delta t \to 0$ otteniamo la relazione esatta

$$[W_{TOT}(t)]' = \tau_{TOT,z}(t)\,\omega(t),$$ dove $W_{TOT}(t)$ e' il lavoro della forza risultante tra l'istante $t=t_i$ e t.

Questo e' il lavoro svolto da tutte le forze agenti sul sistema nell' unita' di tempo, per cui per un sistema rigido in rotazione la quantita'

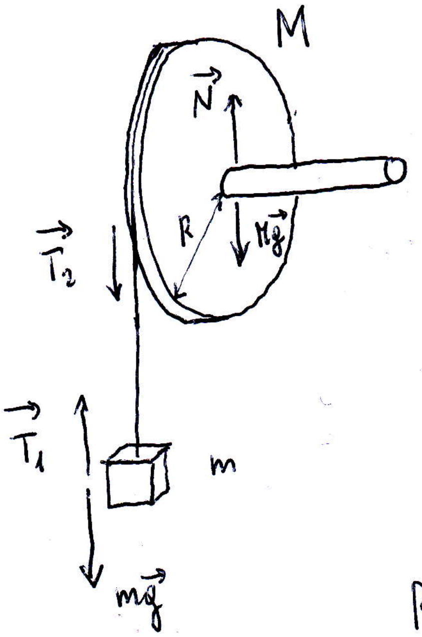
$$\boxed{\mathcal{P}(t) = \tau_{TOT,z}(t)\,\omega(t)}$$

esprime la POTENZA ISTANTANEA fornita al corpo rigido (vincolato a ruotare attorno a un dato asse) da tutte le forze agenti su di esso all' istante t.

In questa analisi tutti i momenti delle forze agenti sul corpo rigido devono essere calcolati rispetto a un polo posto sull' asse di rotazione, fissato.

Esempio 4

Una carrucola omogenea avente raggio R e massa M è montata su un asse orizzontale senza attrito. Un corpo avente massa m è sospeso alla carrucola tramite una corda, avente massa trascurabile, inestensibile e avvolta intorno al bordo della carrucola. A un certo istante si lascia la carrucola libera di ruotare. Si calcoli il modulo della velocità finale del blocco nell'istante in cui si è spostato in basso di un tratto di lunghezza D partendo da fermo.



$M = 2$ kg , $R = 0{,}3$ m

$m = 0{,}5$ kg

$D = 1$ m

Qui di fianco è disegnato il diagramma delle forze agenti sul sistema in esame.

Risulta $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$, ovviamente;

dunque possiamo porre $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$

$\vec{N}$ è la reazione del perno. Poiché il centro di massa della carrucola è fermo, deve risultare $\vec{N} + M\vec{g} + \vec{T}_2 = 0$

Poiché la fune è inestensibile, a uno spostamento Δx verso il basso del corpo di massa m, corrisponde una rotazione $\Delta\theta$ della carrucola tale che $R\Delta\theta = \Delta x$.

Per questo spostamento, la forza $\vec{T}_2$ compie sulla carrucola un lavoro $\Delta W_2 = |\vec{T}_2| \Delta x = R |\vec{T}_2| \Delta\theta = T \Delta x$, mentre la forza $\vec{T}_1$ compie sul corpo di massa m_1 un lavoro

$$\Delta W_1 = - T \Delta x = - \Delta W_2$$

Allora, al netto di tutto, tenuto conto che le forze $M\vec{g}$ e $\vec{N}$ non compiono lavoro, essendo applicate al centro della carrucola che è un punto fisso, l'unica forza che compie lavoro nel sistema (visto che ΔW_1 e ΔW_2 si cancellano tra loro) è la forza peso del corpo di massa m_2.

Il lavoro svolto dalla forza peso di m_1 in questo processo è:

$$W_p = W_{TOT} = mgD$$

L'energia cinetica iniziale del sistema è nulla sulla base delle informazioni fornite dal testo del problema.

L'energia cinetica finale del sistema sarà data dalla somma dell'energia cinetica di traslazione del corpo di massa m_1 e dell'energia cinetica di rotazione della carrucola, entrambe calcolate nell'istante finale:

$$K_f = \frac{1}{2} m V_{1f}^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_f^2$$; poiché la fune è inestensibile, V_{1f} e ω_f sono legate dalla relazione

$$\omega_f = \frac{V_{1f}}{R}.$$

Allora risulta:

$$K_f = \frac{1}{2} m \, v_{1f}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M \cancel{R^2} \cdot \frac{v_{1f}^2}{\cancel{R^2}} = \frac{1}{2} m \, v_{1f}^2 + \frac{1}{4} M \, v_{1f}^2 =$$

$$= \frac{1}{4} (2m + M) \, v_{1f}^2$$

Pertanto, applicando il teorema dell'energia cinetica tra gli istanti t_i e t_f, otteniamo:

$W_p = K_f$, cioè

$mgD = \frac{1}{4} (2m + M) \, v_{1f}^2$, da cui ricaviamo

$v_{1f}^2 = \frac{4mgD}{2m + M}$, e infine

$$\boxed{|\vec{v}_{1f}| = \sqrt{\frac{4mgD}{2m + M}} = 2{,}5573 \text{ m/s}}$$