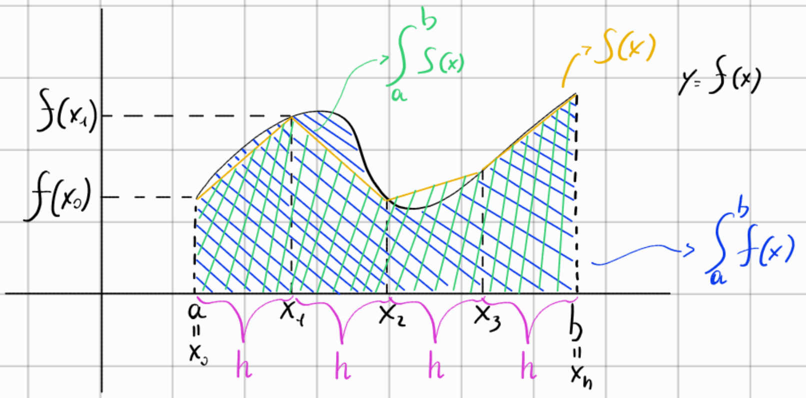
Integrazione numerica $\Rightarrow$ Formula dei trapezi

È data $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile e si vuole calcolare un' approssimazione di $\int_a^b f(x)\,dx$



Si suddivide l'intervallo $[a,b]$ in $n\geq 1$ sottointervalli tutti della stessa ampiezza $h=\frac{b-a}{2}$ e si pone $x_j=a+jh$ con $j=0,\dots,n$

Il valore che si prende come approssimazione di $\int_a^b s(x)\,dx$ e $\int_a^b s(x)\,dx$ dove:

$$s:[a,b]\to\mathbb{R}$$

$$s(x)=f(x_j)+\frac{f(x_{j+1})-f(x_j)}{x_{j+1}-x_j}(x-x_j) \qquad \text{per } [x_j,x_{j+1}] \text{ con } j=0,\dots,n-1$$

retta passante per 2 punti

Dunque il valore che prendiamo come approssimazione di $\int_a^b f(x)\,dx$ è

$$I_n=\int_a^b s(x)\,dx=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} s(x)\,dx=\sum_{j=0}^{n+1}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\left[f(x)+\frac{f(x_{j+1})-f(x)}{x_{j+1}-x_j}(x-x_j)\right]dx=$$

$x_{j+1}-x_j=h$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\left[f(x_j)(x-x_j)+\frac{f(x_{j+1})-f(x_j)}{x_{j+1}-x_j}\,\frac{(x-x_j)^2}{2}\right]_{x_j}^{x_{j+1}}=\sum_{j=0}^{n-1}\left[f(x_j)(x_{j+1}-x_j)+\frac{f(x_{j+1})-f(x_j)}{\cancel{x_{j+1}-x_j}}\,\frac{(x_{j+1}-x_j)^{2}}{2}\right]=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1} h\,\frac{f(x_j)+f(x_{j+1})}{2}=\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)+f(x_{j+1})=\frac{h}{2}\Big[f(x_0)+\underbrace{f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_{n-1})+f(x_{n-1})}_{\text{uguali 2 a 2}}+f(x_n)\Big]=$$

con $f(x_j)$ = base minore, $f(x_{j+1})$ base maggiore

abbiamo la formula per l'area del trapezio

$$=\frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j)\right]=h\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j)\right]$$

$$I_n=h\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j)\right]$$

Formula dei trapezi di ordine n per approssimare $\int_a^b s(x)\,dx$

con $h=\frac{b-a}{n}$ passo di discretizzazione di I_n

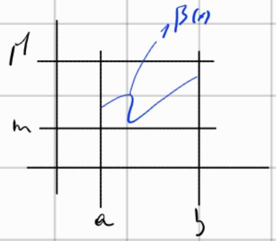
Errore della Formula dei trapezi

Vogliamo sapere qual'e' l'errore $\left|\int_a^b f(x)dx - I_h\right|$ commesso approssimando $\int_a^b f(x)\,dx$ con I_h

Lemma generalizzazione del teorema sulla media integrale

Siano $w, \alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni t.c.

- $w(x)$ e' continua e $w(x) \geq 0$ su $[a,b]$
- $\alpha(x)$ e $\beta(x)w(x)$ sono continue su $[a,b]$
- $m \leq \beta(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$ dove $m = \min_{x\in[a,b]} \alpha(x)$ e $M = \max_{x\in[a,b]} \alpha(x)$



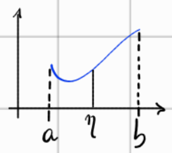
Allora $\exists\, \eta \in [a,b]$ t.c.

$$\int_a^b \beta(x) w(x)\, dx = \alpha(\eta) \int_a^b w(x)\, dx$$

Promemoria

Teo della media integrale

$$\exists\, \eta \in [a,b] : \int_a^b \alpha(x)\, dx = \alpha(\eta)(b-a)$$



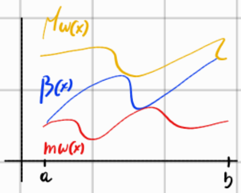
Oss

Applicando il lemma con $w(x) = 1$ e $\beta(x) = \alpha(x)$ identicamente si ottiene il teorema della media integrale

Dim

Poiche' per ipotesi $w(x) \geq 0$ su $[a,b]$ e $m \leq \beta(x) \leq M$ si ha

$$m\,w(x) \leq \beta(x) \leq M w(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$



Quindi per monotonia dell'integrale si ha

$$\int_a^b m\,w(x) \leq \int_a^b \beta(x) \leq \int_a^b M w(x) \Rightarrow m\int_a^b w(x) \leq \int_a^b \beta(x) \leq M \int_a^b w(x)$$

Consideriamo la funzione $z:[a,b]\to\mathbb{R}$, $z(y) = \alpha(y)\int_a^b \omega(x)\,dx$

diventa una costante

$z(y)$ e' continua su $[a,b]$ come $\alpha(x)$ ed inoltre

$$\min_{y\in[a,b]} z(y) = m\int_a^b \omega(x) \quad e \quad \max_{y\in[a,b]} z(y) = M\int_a^b \omega(x)$$

Per il teorema dei valori intermedi $z(y)$ assume su $[a,b]$ tutti i valori compresi tra il suo minimo ed il suo massimo

Quindi $z(y)$ assume su $[a,b]$ anche il valore $\int_a^b \beta(x)\omega(x)\,dx$, cioe' $\exists\, y\in[a,b]$ t.c.

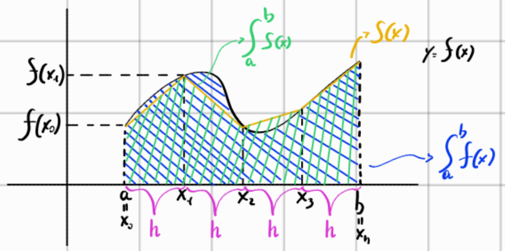
$$z(y) = \int_a^b \beta(x)\omega(x)\,dx = \alpha(\eta)\int_a^b \omega(x)\,dx$$

Teorema

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ di classe $C^2[a,b]$ e sia I_h la formula dei trapezi di ordine n e passo $h=\frac{b-a}{n}$ per approssimare $\int_a^b f(x)\,dx$

Allora $\exists\, \eta\in[a,b]$ t.c.

$$\int_a^b f(x)\,dx - I_h = -\frac{(b-a)f''(\eta)}{12}h^2 \quad (☆)$$



Dim

Siano $x_j = a + jh$ con $j=0,\dots,n$ e sia $s(x)$ la funzione lineare a tratti mostrata in figura

Oss cruciale

retta

$s(x)$ coincide in $[x_j, x_{j+1}]$ con il pol. d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_j e x_{j+1}

infatti il pol. d'inter. di $f(x)$ su $[x_j, x_{j+1}]$ e' l'unico $p(x)\in\mathbb{R}_1[x]$ t.c. $p(x_j)=f(x_j)$ e $p(x_{j+1})=f(x_{j+1})$ e dunque e' la retta gialla in figura

Abbiamo che:

$$\int_a^b f(x)\,dx - I_n = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left[f(x) - S(x)\right]dx =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[f(x) - S(x)\right]dx =$$

applichiamo il teo. del calcolo sull'errore dell'interp. sul $[x_j, x_{j+1}]$: $\xi_j(x) \in [x_j, x_{j+1}]$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{f''(\xi_j(x))}{2!} (x - x_j)(x - x_{j+1}) =$$

porto il - fuori essendo $x - x_{j+1}$ sempre negativo

$$= - \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f''(\xi_j(x)) \frac{(x - x_j)(x_{j+1} - x)}{2} \Rightarrow$$

$-\left[f(x) - S(x)\right]$

Applico il lemma precedente sull'intervallo $[x_j, x_{j+1}]$ con $\omega(x) = \frac{(x-x_j)(x_{j+1}-x)}{2}$, $\beta(x) = f''(\xi_j(x))$ e $\alpha(x) = f''(x)$

$\in [x_j, x_{j+1}]$

- $\omega(x)$ e' continua e $\omega(x) \geq 0$ su $[x_j, x_{j+1}]$
- $\alpha(x)$ e' continua su $[x_j, x_{j+1}]$ — deriva da $f \in C^2[a,b]$
- $\beta(x)\,\omega(x)$ e' continua su $[x_j, x_{j+1}]$ — riguardando indietro e' uguale a $-[f(x) - S(x)]$ che continua su $[x_j, x_{j+1}]$
- $\min_{y \in [x_j, x_{j+1}]} \alpha(y) \leq \beta(x) \leq \max_{y \in [x_j, x_{j+1}]} \alpha(y) \quad \forall x \in [x_j, x_{j+1}]$

Quindi $\beta(x) = \alpha(\xi_j(x)) \quad \forall\, \xi_j(x) \in (x_j, x_{j+1}),\ x \in [x_j, x_{j+1}]$

Concludendo $\exists\, \eta_j \in [x_j, x_{j+1}]$ t.c.

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \beta(x)\,\omega(x)\,dx = \alpha(\eta_j) \int_{x_j}^{x_{j+1}} \omega(x)\,dx =$$

$$= - \sum_{j=0}^{n-1} f''(\eta_j) \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{(x-x_j)(x_{j+1}-x)}{2}\,dx =$$

applichiamo la sostituzione con $t = x - x_j$, $x = t + x_j$, $dx = dt$

$$= - \sum_{j=0}^{n-1} f''(\eta_j) \int_0^h \frac{t(h-t)}{2}\,dt =$$

$$= - \sum_{j=0}^{n-1} f''(\eta_j) \left[\frac{h}{4} t^2 - \frac{t^3}{6}\right]_0^h = - \sum_{j=0}^{n-1} f''(\eta_j) \frac{h^3}{12} =$$

$$= -\frac{h^3 n}{12} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\eta_i) =$$

È una media aritmetica della derivata seconda valutata in n punti

$h = \frac{b-a}{n}$

$$= -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\eta)$$

Vale perchè essendo $f''(x)$ continua su $[a,b]$ per Hp ed essendo la media aritmetica un valore compreso fra il minimo ed il massimo di $f''(x)$ su $[a,b]$ e per il teo dei valori intermedi $\exists \eta \in [a,b]$ t.c. $f''(\eta) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\eta_i)$

Esempio

a) Calcolare l'approssimazione di $\int_0^1 \sqrt{\cos x}\, dx$ con I_{10} → Formula dei trapezi di ordine n

b) Stimare l'errore che si commette approssimando $\int_0^1 \sqrt{\cos x}$ con I_{10}

$$I_h = h\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\right] \quad (\tau)$$

Soluzione

a) Applichiamo (τ) con $f(x)=\sqrt{\cos x}$, $[a,b]=[0,1]$, $n=10$

$$h = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10} \qquad x_j = \frac{j}{10} \qquad j=0,\dots,n$$

$$I_{10} = \frac{1}{10}\left[\frac{\sqrt{\cos 0}+\sqrt{\cos 1}}{2} + \sum_{j=1}^{9}\sqrt{\cos\frac{j}{10}}\right] = \frac{1}{10}\left[\frac{1+\sqrt{\cos 1}}{2} + \sqrt{\cos\frac{1}{10}} + \sqrt{\cos\frac{2}{10}} + \dots + \sqrt{\cos\frac{9}{10}}\right] = 0{,}9135078\dots$$

b) $f(x)$ e' $C^\infty[0,1]$ infatti $\cos x$ non ha zeri su $[0,1]$ perche' e' decrescente su $[0,1]$ e dunque

$\cos x \in [\cos 1, 1] = [0{,}54\dots, 1]$ $\forall x \in [0,1]$ quindi $f(x)$ e' $C^\infty[0,1]$ come composizione di $\cos x: [0,1] \to [0{,}54\dots,1]$ e $\sqrt{y}: [0{,}54\dots,1] \to \mathbb{R}$ entrambe C^∞ sui domini indicati

Applichiamo il teorema con $f(x)=\sqrt{\cos x}$, $n=10$, $h=\frac{1}{10}$, $[a,b]=[0,1]$

$$\left|\int_0^1 \sqrt{\cos x} - I_{10}\right| = \left|-\frac{1\cdot f''(\eta)}{12}\left(\frac{1}{10}\right)^2\right| = \frac{|f''(\eta)|}{1200} \qquad \eta \in [0,1]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}}\cdot -\sin x = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$$

$$f''(x) = \frac{-\cos x \cdot 2\sqrt{\cos x} - (-\sin x)\,2\cdot -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{4\cos x} = -\frac{\sqrt{\cos x}}{2} - \frac{\sin^2 x}{4(\cos x)^{3/2}}$$

$$|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|$$

$\forall x \in [0,1]$

$$|f''(x)| = \Big|\underbrace{-\frac{\sqrt{\cos x}}{2}}_{\alpha} \underbrace{-\frac{\sin^2 x}{4(\cos x)^{3/2}}}_{\beta}\Big| \le \left|\frac{\sqrt{\cos x}}{2}\right| + \left|\frac{\sin^2 x}{4(\cos x)^{3/2}}\right| = \frac{\sqrt{\cos x}}{2} + \frac{\sin^2 x}{4(\cos x)^{3/2}} \le$$

$$\le \frac{1}{2} + \frac{\sin^2 1}{4(\cos 1)^{3/2}} \le 0{,}9458$$

Quindi:

$$\left|\int_0^1 \sqrt{\cos x} - I_n\right| \leq \frac{0,9458}{1200} = 0,000788\ldots$$

Esempio

Fissato $\varepsilon = 10^{-8}$ determiniamo un n t.c. la formula dei trapezi I_n fornisca un'approssimazione di $\int_0^1 \sqrt{\cos x}\,dx$ con errore $\left|\int_0^1 \sqrt{\cos x}\,dx - I_n\right| \leq \varepsilon$

Soluzione

Posto $f(x) = \sqrt{\cos x}$, per il teo. vale che

$$\left|\int_0^1 \sqrt{\cos x}\,dx - I_n\right| = \left|-\frac{1 \cdot f''(\eta)}{12}\left(\frac{1-0}{n}\right)^2\right| = \frac{|f''(\eta)|}{12n^2} \leq \frac{0,9458}{12n^2} \leq \frac{1}{12n^2} \qquad \eta \in [0,1]$$

Imponiamo

$$\frac{1}{12n^2} \leq \varepsilon \iff n^2 \geq \frac{1}{12\varepsilon} \Rightarrow n \geq \sqrt{\frac{1}{12\varepsilon}} = n(\varepsilon)$$

Conclusione $\rightarrow$ Se prendo $n \geq n(\varepsilon)$ allora sono sicuro che $\left|\int_0^1 \sqrt{\cos x}\,dx - I_n\right| \leq \varepsilon$

Per $\varepsilon = 10^{-8}$, $n(\varepsilon) = n(10^{-8}) = \sqrt{\frac{1}{12 \cdot 10^{-8}}} = 2886,75\ldots$

Esempio

Fissato $\varepsilon > 0$, determinare un n t.c. la formula dei trapezi con n fornisca un'approssimazione di $\int_0^1 \frac{x+2}{\log(x+2)}$ con errore $\left|\int_0^1 \frac{x+2}{\log(x+2)} - I_n\right| \leq \varepsilon$

con $\eta \in [0,1]$

Soluzione

$f(x) = \frac{x+2}{\log(x+2)} \in C^\infty[0,1]$. Applico il teo. e scopro che $\left|\int_0^1 \frac{x+2}{\log(x+2)}\,dx - I_n\right| = \left|-\frac{1 \cdot f''(\eta)}{12} \cdot \left(\frac{1-0}{n}\right)^2\right| = \frac{|f''(\eta)|}{12n^2}$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \log(x+2) - \cancel{x+2} \cdot \frac{1}{\cancel{x+2}}}{\log^2(x+2)} = \frac{\log(x+2) - 1}{\log^2(x+2)}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x+2}\log^{\cancel{2}}(x+2) - \left(\log(x+2)-1\right)2\cancel{\log(x+2)}\cdot\frac{1}{(x+2)}}{\log^{\cancel{4}\,3}(x+2)} = \frac{2-\log(x+2)}{(x+2)\log^3(x+2)}$$

$\forall x \in [0,1]$

$$\left|f''(x)\right| = \left|\frac{2-\log(x+2)}{(x+2)\log^3(x+2)}\right| = \frac{2-\log(x+2)}{(x+2)\log^3(x+2)} \leq \frac{2-\log 2}{2\cdot\log^3(2)} \leq 1{,}97$$

In conclusione: $\left|\int_0^1 \frac{x+2}{\log(x+2)}\,dx - I_h\right| \leq \frac{1{,}97}{12h^2}$

Cresce di questo fattore

prenderò $n = 4052$

Impongo che $\frac{1{,}97}{12h^2} \leq \varepsilon \iff h \geq \sqrt{\frac{1{,}97}{12\varepsilon}} = h(\varepsilon) = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}$

Se $\varepsilon = 10^{-8}$ allora per garantire $\left|\int_0^1 \frac{x+2}{\log(x+2)}\,dx - I_h\right| \leq \varepsilon$ prenderò $h \geq h(\varepsilon) = h(10^{-8}) = \sqrt{\frac{1{,}97}{12\cdot 10^{-8}}} = 4051{,}79\ldots$

Oss

Negli esempi precedenti, l'$h(\varepsilon)$ è della forma $\frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}$ con C costante

$\to$ fatto generale

Infatti in base alla (☆), detta $\bar{K}$ una costante t.c.

$$|f''(x)| \leq \bar{K} \quad \forall x \in [a,b]$$

allora si ha

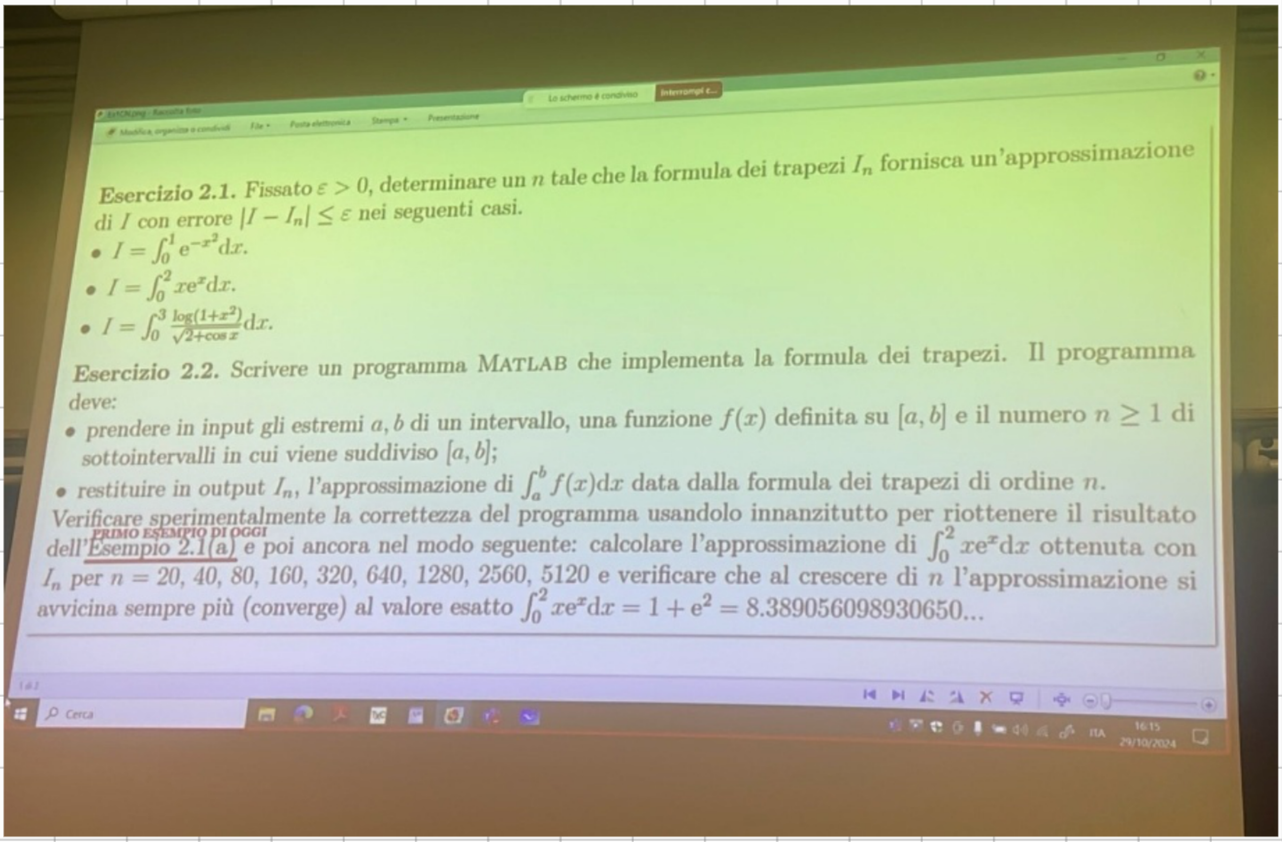
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - I_h\right| = \left|-\frac{(b-a)f''(\eta)}{12}\left(\frac{b-a}{h^2}\right)^2\right| = \frac{(b-a)^3\overbrace{|f''(\eta)|}^{\leq \bar{K}}}{12h^2} \leq \frac{(b-a)^3\bar{K}}{12h^2}$$

Impongo

$$\frac{(b-a)^3\bar{K}}{12h^2} \leq \varepsilon \iff h \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3\bar{K}}{12\varepsilon}} = h(\varepsilon) = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \quad \left(C = \sqrt{\frac{(b-a)^3 K}{12}}\right)$$

Conclusione

risulta garantito che $\left|\int_0^1 \frac{x+2}{\log(x+2)}\,dx - I_h\right| \leq h(\varepsilon)$ se prendo $h \geq h(\varepsilon)$



Esercizio 2.1. Fissato $\varepsilon > 0$, determinare un n tale che la formula dei trapezi I_n fornisca un'approssimazione di I con errore $|I - I_n| \leq \varepsilon$ nei seguenti casi.

- $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$.
- $I = \int_0^2 x e^x dx$.
- $I = \int_0^3 \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{2+\cos x}} dx$.

Esercizio 2.2. Scrivere un programma MATLAB che implementa la formula dei trapezi. Il programma deve:

- prendere in input gli estremi a, b di un intervallo, una funzione $f(x)$ definita su $[a, b]$ e il numero $n \geq 1$ di sottointervalli in cui viene suddiviso $[a, b]$;
- restituire in output I_n, l'approssimazione di $\int_a^b f(x) dx$ data dalla formula dei trapezi di ordine n.

Verificare sperimentalmente la correttezza del programma usandolo innanzitutto per riottenere il risultato PRIMO ESEMPIO DI OGGI dell'Esempio 2.1(a) e poi ancora nel modo seguente: calcolare l'approssimazione di $\int_0^2 x e^x dx$ ottenuta con I_n per $n = 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560, 5120$ e verificare che al crescere di n l'approssimazione si avvicina sempre più (converge) al valore esatto $\int_0^2 x e^x dx = 1 + e^2 = 8.389056098930650\ldots$