Errore (resto dell'interpolazione polinomiale)

Teorema

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione di classe $C^{n+1}[a,b]$ e sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sugli $n+1$ nodi distinti $x_0,\dots,x_n\in[a,b]$

Promemoria

$C^{n+1}[a,b]$ e' l'insieme delle funzioni $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ t.c. f e' derivabile $n+1$ volte e $f,f',\dots,f^{(n+1)}$ sono continue su $[a,b]$

$\forall x\in[a,b]\ \exists\,\xi:\xi(x)\in(a,b)$ t.c.

$$f(x)-p(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\underline{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)} \qquad (\epsilon)$$

Dim

Sia $x\in[a,b]$ fissato:

ⓐ x coincide con uno dei nodi $x_0,x_1,\dots,x_n$:

in questo caso posso scegliere un qualsiasi $\xi\in(a,b)$ allora la formula (ϵ) vale

perche' $0=0$

il primo membro e' 0 perche' $p(x_i)=f(x_i)$ $\forall i=0,1,\dots,n$ per def di $p(x)$

il secondo membro e' 0 perche' la parte sottolineata in rosso si annulla

ⓑ x non coincide con uno dei nodi $x_0,x_1,\dots,x_n$:

definiamo

$$\pi(y)=(y-x_0)(y-x_1)\dots(y-x_n)$$

$$r(y)=f(y)-p(y)$$

$$z:[a,b]\to\mathbb{R}\ ,\ z(y)=r(y)-\frac{r(x)}{\pi(x)}\pi(y)$$

dove z ha le seguenti proprieta':

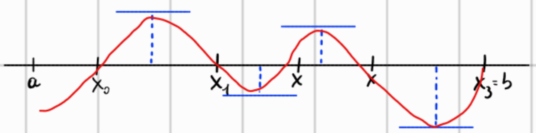
① $z(y)$ e' una funzione di $C^{n+1}[a,b]$ ereditata da $f(y)$

② $z(y)$ si annulla in almeno $n+2$ punti di $[a,b]$ perche':

si annulla in tutti i nodi $x_0,x_1,\dots,x_n$ $\rightsquigarrow$ $z(x_0)=r(x_0)-\frac{r(x)}{\pi(x)}\pi(x_0)=f(x_0)-p(x_0)-\frac{r(x)}{\pi(x)}\pi(x_0)=0$

si annulla in tutti i nodi x $\rightsquigarrow$ $z(x)=r(x)-\frac{r(x)}{\cancel{\pi(x)}}\cancel{\pi(x)}=0$

Possibile grafico per $n=3$



$z^{(n+1)}(y)$ si annulla in almeno 1 punto di (a,b)
chiamato ξ

per il teorema di Rolle:

$z'(y)$ si annulla in almeno $n+1$ punti di (a,b)

$z''(y)$ si annulla in almeno n punti di (a,b)

$z'''(y)$ si annulla in almeno $n-1$ punti di (a,b)

$\vdots$

$z^{(n+1)}(y)$ si annulla in almeno 1 punto di (a,b)

chiamato ξ

Dimostriamo ora che il punto ξ fa valere la formula (€)

$$z(y)=r(y)-\frac{r(x)}{\pi(x)}\pi(y)=f(y)-p(y)-\frac{r(x)}{\pi(x)}(y-x_0)(y-x_1)\dots(y-x_n)$$

essendo un pol. di grado al massimo $n+1$

dopo $n+1$ derivazioni diventa 0

$$z^{(n+1)}(y)=f^{(n+1)}(y)-p^{(n+1)}(y)-\frac{r(x)}{\pi(x)}\pi^{(n+1)}(y)$$

diventa una costante

per capire che costante sia $\pi^{(n+1)}(y)$ guardiamo il caso $n=2$:

$\pi(y)=(y-x_0)(y-x_1)(y-x_2)=y^3-(x_0+x_1+x_2)y^2+(x_0x_1+x_0x_2+x_1x_2)y-x_0x_1x_2=$

$\pi^3(y)=\frac{d^3}{dy^3}y^3=3!$

in genere $\pi^{(n+1)}(y)=(n+1)!$

è monico

$$z^{(n+1)}(y)=f^{(n+1)}(y)-\frac{r(x)}{\pi(x)}(n+1)!$$

$$z^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-\frac{r(x)}{\pi(x)}(n+1)!=0 \Rightarrow \frac{r(x)}{\pi(x)}(n+1)!=f^{(n+1)}(\xi)\Rightarrow$$

esplicito $r(x)$

$$\Rightarrow \frac{r(x)}{\pi(x)}(n+1)!=f^{(n+1)}(\xi)\Rightarrow f(x)-p(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)-p(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\quad (€)$$

Esempio

Fissiamo un punto $t \in [0,1]$. Stimare l'errore che si commette approssimando $\sin(x)$ con $p(x)$ dove $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione sui nodi $x_0 = 0,\ x_1 = \pi/6,\ x_2 = \pi/4$

Soluzione

più piccolo intervallo contenente i vari punti

applichiamo il teo precedente con $f(x) = \sin(x)$, $n = 2$, con $[a,b] = [0,1]$ e il punto t:

$\sin(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

derivabile ∞-volte su tutto $\mathbb{R}$

Promemoria

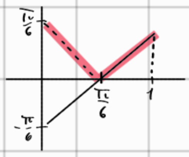
$$\boxed{f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}$$

$$\left|\sin(t) - p(t)\right| = \left|\frac{-\cos(\xi)}{3!}(t-x_0)(t-x_1)(t-x_2)\right| = \qquad \xi \in [0,1]$$

$$= \left|\frac{-\cos(\xi)}{6}\, t\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|\frac{-\cos(\xi)}{6}\right| |t| \left|t-\frac{\pi}{6}\right| \left|t-\frac{\pi}{4}\right| =$$

Provo con $t = 0,1$ e scelgo il max

ottenuto studiando la funzione



$$= \frac{\cos(\xi)}{6} |t| \left|t-\frac{\pi}{6}\right| \left|t-\frac{\pi}{4}\right| \leq \frac{1}{6} + 1 + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \approx 0{,}0685$$

volendo ottenere una stima più precisa si può procedere nel modo seguente $\quad \xi = [0,1]$

$$\left|\sin(t) - p(t)\right| = \left|\frac{-\cos(\xi)}{6}\, t\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\cos(\xi)}{6}\left|t\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right| \leq \frac{1}{6} \max_{y\in[0,1]} \underbrace{\left|y\left(y-\frac{\pi}{6}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)\right|}_{\omega(y)} \qquad (+)$$

calcoliamo il massimo di $|\omega(y)|$ su $[0,1]$

Per farlo dobbiamo cercare tutti i massimi e i minimi relativi di $\omega(y)$ su $[0,1]$ e scegliere il più grande di essi in modulo

Per un teorema dell'analisi i massimi e i minimi relativi di $\omega(y)$ su $[0,1]$ si trovano

o nei punti di bordo $[0,1]$ oppure nei punti stazionari di $\omega(y)$ in cui si annulla $\omega'(y)$

$$\omega(y) = y\left(y-\frac{\pi}{6}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right) = y^3 - \frac{5}{12}\pi y^2 - \frac{\pi^2}{24}y \qquad = 3y^2 - \frac{5\pi}{6}y - \frac{\pi^2}{24}$$

$$\omega'(y) = 3y^2 - \frac{5}{6}\pi y - \frac{\pi^2}{24}$$

$$\omega'(y) = 0 \iff y = y_{12} = \frac{\frac{5}{6}\pi \pm \sqrt{\frac{25}{36}\pi + \frac{\pi^2}{2}}}{6} = \frac{5}{36}\pi \pm \frac{1}{6}\sqrt{\frac{25\pi^2 - 18\pi^2}{36}} = \frac{5}{36}\pi \pm \frac{\pi\sqrt{7}}{36}$$

notiamo che $y_{1,2} \in (0,1)$ quindi sono punti stazionari di $w(y)$ nell'intervallo $(0,1)$

$$\max_{y\in[0,1]} |w(y)| = \max\left(|w(0)|, |w(1)|, \left|w\left(\frac{5\pi}{36}+\frac{\sqrt{7\pi}}{36}\right)\right|, \left|w\left(\frac{5\pi}{36}-\frac{\sqrt{7\pi}}{36}\right)\right|\right) \leq 0.103$$

sostituendo in $(+)$ otteniamo $|\sin(t) - p(t)| \leq \frac{1}{6} \cdot 0{,}103 = 0{,}0172$

migliore di 0.0685

Esempio

Sia $f(x) = e^{x^2}$ e sia $p(x)$ il suo polinomio d'interpolazione sui nodi $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1$

① Fornire una stima dell'interpolazione $|f(x) - p(x)|$ $\forall x \in [0,1]$, cioe' determiniamo una costante C t.c. $|f(x)-p(x)| \leq C$ $\forall x \in [0,1]$

② Stimiamo l'errore che si commette approssimando $\sqrt[9]{5}$ con $p(\frac{1}{3})$ senza calcolare ne $\sqrt[9]{e}$ ne' $p(\frac{1}{3})$

Soluzione

① Applichiamo il teorema prec. con $f(x) = e^{x^2}$, $[a,b] \in [0,1]$, $n=2$

$$|f(x) - p(x)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1) \right| \qquad \forall x \in [0,1],\ \forall \xi \in (0,1)$$

calcoliamo ora le varie derivate

$f'(x) = 2xe^{x^2}$

$f''(x) = 2e^{x^2} + 2x2xe^{x^2} = (2+4x^2)e^{x^2}$

$f'''(x) = 8x^2e^{x^2} + (2+4x^2)2xe^{x^2} = (8x^3+12x)e^{x^2}$

$f'''(x) = 8xe^{x^2} + (2+4x^2)2xe^{x^2} = (8x^3+12x)e^{x^2}$

funzioni crescenti su $(0,1)$

$$\forall x \in (0,1) \quad |f'''(x)| = |(8x^3+12x)e^{x^2}| = (8x^3+12x)e^{x^2} \leq 20e$$

tornando a $(€)$, $\forall x \in [0,1]$

$$|f(x) - p(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}\right| |x| \left|x-\frac{1}{2}\right| |x-1| \leq \frac{20e}{6} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \simeq 4.530$$

volendo una stima più precisa: $\forall x \in [0,1]$ vale

$$|f(x) - p(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}\right| \left|x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\right| \leq \frac{20e}{6} \max_{y\in[0,1]} \underbrace{\left|y\left(y-\frac{1}{2}\right)(y-1)\right|}_{w(y)} \qquad (\$\$)$$

come prima calcoliamo

$$\omega(y) = y\left(y-\frac{1}{2}\right)(y-1) = y^3 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{2}y$$

$$\omega'(y) = 3y^2 - 3y + \frac{1}{2} = 0 \iff y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} \in [0,1]$$

$$\max_{y \in [0,1]} |\omega(y)| = \max\left(|\omega(0)|\ |\omega(1)|\ \left|\omega\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)\right|\ \left|\omega\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)\right|\right) = \frac{\sqrt{3}}{36}$$

sostituendo in (§§) otteniamo $\forall x \in [0,1]$

costante C

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{20e}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{36} \approx 0.436$$

ⓒ dobbiamo stimare

$$\left|\sqrt[3]{e} - p\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|e^{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - p\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|f\left(\frac{1}{3}\right) - p\left(\frac{1}{3}\right)\right|$$

siccome $\frac{1}{3} \in [0,1]$, per la stima precedente vale che $\left|f\left(\frac{1}{3}\right) - p\left(\frac{1}{3}\right)\right| \leq 0{,}436$

in alternativa volendo ottenere una stima più precisa applichiamo il teorema prec. direttamente con $x = \frac{1}{3}$

$$\left|f\left(\tfrac{1}{3}\right) - p\left(\tfrac{1}{3}\right)\right| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}\,\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\right| = \left|\frac{f'''(\xi)}{6}\right| \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \leq 20e \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \approx 0.336$$