Matrici a diagonale dominante

Def

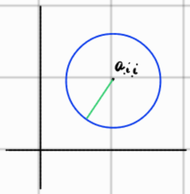
Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice

- Si dice che A e' a diagonale dominante (per righe) se: $\forall_{i=1,\dots,n}$

  i) $\overset{\text{centro}}{|a_{ii}|} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \overset{\text{raggio}}{|a_{ij}|}$ $\rightarrow$ questa condizione dice che 0 non puo' essere interno a nessun cerchio di G di A

  ii) esiste almeno un indice $k \in \{1,\dots,n\}$ t.c.:

  $$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \rightarrow \text{o non appartiene a } K_k$$



- Si dice che A e' a diagonale dominante in senso stretto (per righe) se: $\forall_{i=1,\dots,n}$

  $$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \rightarrow 0 \text{ non appartiene a nessun cerchio di } G \text{ di } A$$

Oss

La definizione di matrice a diagonale dominante per colonna e' identica a parte gli indici a quella di matrice a diagonale dominante per riga

Esempio

Dimostrare le proprieta' di diagonale dominante per righe e per colonne per la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1-2i & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Soluzione

Per riga: $|3| = |1| + |-2|$, $|-3| > |0| + |1|$, $|5| > |-1| + \sqrt{5}$

A e' diag. dominante per righe

per colonna: $|3| > \sqrt{5}$, $|-3| > |-1| + |-1|$, $5 > |1| + |-2|$

A e' a diag. dominante per colonne in senso stretto

Teorema

Supponiamo che $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ soddisfi almeno una delle due condizioni

- A e' a diagonale dominante e irriducibile
- A e' a diagonale dominante in senso stretto
- A e' a diagonale dominante per colonne e irriducibile
- A e' a diagonale dominante per colonne in senso stretto

Allora A e' invertibile

Dim → nel primo caso

Per dimostrare che A e' invertibile dimostro che 0 non e' autovalore di A usando il 3° teo di G

Poiche A e' a diagonale dominante 0 non può essere interno a nessun cerchio di G di A e dunque 0 sta sul bordo di quegli eventuali cerchi di G a cui appartiene

Inoltre sempre per def di matrice a diagonale dominante esiste un cerchio di G t.c. 0 non sta sul bordo di quel cerchio

Quindi siccome A e' irriducibile per Hp, per il 3° teo di G forte 0 non può essere autovalore di A

Oss

L'esempio del quadrifoglio mostra che nella dimostrazione dobbiamo per forza usare il 3° teo di G forte perche' quello debole non e' sufficiente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Questa matrice ha i cerchi dell'esempio del quadrifoglio ed e' irriducibile perche' c'e' un ciclo nel suo grafo

Quindi per il teo precedente e' invertibile, ma non potevo arrivare a questa conclusione con il solo 3° teo di G debole → 0 non si trova su $\mathcal{B}$