INTRODUZIONE AI VETTORI

Approccio algebrico.

Un insieme V e' detto SPAZIO VETTORIALE sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, e i suoi elementi sono detti VETTORI, se:

1) dati $\underline{u}, \underline{v} \in V$, esiste un'operazione SOMMA, indicata con il simbolo $+$, tale che $\underline{w} = \underline{u} + \underline{v} \in V$
2) dati $\underline{u} \in V$ e $c \in \mathbb{R}$, esiste un'operazione "prodotto di un vettore per uno scalare" tale che $\underline{a} = c\underline{u} \in V$.
3) vale la proprieta' associativa della somma; cioe', per ogni $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ risulta $\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}$
4) in V esiste l'ELEMENTO NEUTRO DELLA SOMMA, indicato con $\underline{0}$, tale che $\underline{u} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{u} = \underline{u}$ per ogni $\underline{u} \in V$
5) per ogni $\underline{v} \in V$ esiste il VETTORE OPPOSTO di $\underline{v}$, indicato con $-\underline{v}$, tale che $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$
6) vale la proprieta' associativa del prodotto di un vettore per uno scalare: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $\underline{v} \in V$ risulta $a(b\underline{v}) = (ab)\underline{v}$
7) il numero reale 1 e' l'elemento neutro del prodotto di un vettore per uno scalare: $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$ per ogni $\underline{v} \in V$
8) vale la proprieta' distributiva del prodotto tra vettore e scalare:

$$(a+b)\underline{v} = a\underline{v} + b\underline{v}$$

$$a(\underline{u}+\underline{v}) = a\underline{u} + a\underline{v}$$

In algebra lineare un vettore viene rappresentato da una sequenza di n numeri reali disposti in colonna:

$$\underline{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{pmatrix}$$

VETTORE A n COMPONENTI

Valgono le seguenti regole di calcolo:

a) dati $\underline{V}, \underline{u}$ vettori a n componenti, anche $\underline{W} = \underline{V} + \underline{u}$ e' un vettore a n componenti, e risulta

$$\underline{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 + u_1 \\ V_2 + u_2 \\ \vdots \\ V_m + u_m \end{pmatrix}$$

b) dato $\underline{V}$ vettore a n componenti, e $c \in \mathbb{R}$, anche $\underline{u} = c\,\underline{V}$ e' un vettore a n componenti, e risulta:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c V_1 \\ c V_2 \\ \vdots \\ c V_m \end{pmatrix}$$

Tutti gli elementi che soddisfano le due proprieta' enunciate costituiscono uno SPAZIO VETTORIALE a n dimensioni.

In fisica di base interessano i <u>vettori a 2 e 3 componenti</u>, perché possono essere associati a grandezze fisiche.

Inoltre, in 2 e 3 dimensioni e' possibile utilizzare una rappresentazione grafica dei vettori.

Nomenclatura:

<u>grandezza scalare</u> (o semplicemente "scalare"):

è specificata da un unico valore reale con segno (in unità opportune)

<u>grandezza vettoriale</u> (o semplicemente "vettore") in 2 o 3 dimensioni:

è specificata da tre proprietà:

- MODULO (anche detto INTENSITÀ o AMPIEZZA)
- DIREZIONE
- VERSO

Esempi di grandezze scalari:

- valore di un intervallo di tempo
- valore della massa di un corpo

Esempi di grandezze vettoriali

- spostamento di un corpo su un piano o nello spazio
- velocità di un corpo in moto su un piano o nello spazio
- accelerazione di un corpo in moto su un piano o nello spazio
- forza esercitata da un corpo su un altro corpo

(vedremo meglio tutto quanto)

Simbologia per vettori in 2 o 3 dimensioni:

$\vec{v}$ vettore in 2 o 3 dimensioni

$|\vec{v}|$: modulo del vettore $\vec{v}$ (è un numero con unità di misura)

Risulta $|\vec{v}| \geq 0$ ed è una grandezza scalare ≥ 0.

Un vettore $\vec{v}$ a 2 o 3 componenti si può rappresentare mediante una freccia orientata, di lunghezza finita, nel piano o nello spazio.

$\vec{v}$

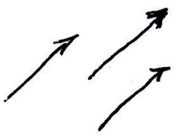
Vedremo che questa rappresentazione è compatibile con la definizione algebrica.

Risulta $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ soltanto se $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$, e se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ hanno la stessa direzione e lo stesso verso.

La DIREZIONE di un vettore $\vec{v}$ è la retta (nel piano o nello spazio) lungo la quale giace il vettore (la "freccia").

Il VERSO è l'orientamento del vettore lungo la retta che definisce la direzione.

Attenzione: rette parallele individuano una stessa direzione!
Per questa ragione è lecito spostare un vettore parallelamente a se stesso nel piano o nello spazio, perché questa operazione lascia il vettore invariato.

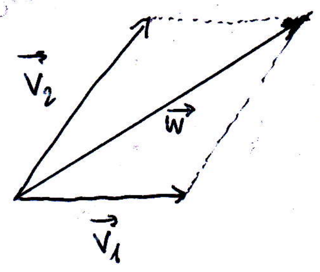


vettori uguali.

Somma di vettori tramite la rappresentazione geometrica.

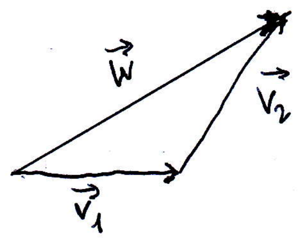
$\vec{W} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ N.B.: $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ grandezze vettoriali omogenee!

1) REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA:



N.B.: le lunghezze delle frecce sono proporzionali ai moduli dei vettori corrispondenti.

2) REGOLA DEL TRIANGOLO



Rispetto al punto 1), il vettore $\vec{V}_2$ e' stato traslato parallelamente a se stesso in modo da far coincidere la "punta" di $\vec{V}_1$ con la "coda" di $\vec{V}_2$

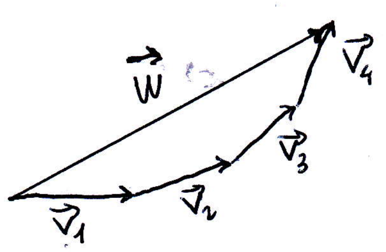
Valgono le proprieta' seguenti:

- proprieta' commutativa: $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$ (verificare)
- proprieta' associativa: $\vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3$

Somma di piu' vettori:

$\vec{W} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4$

Applicando la regola 2) in "cascata", si vede agevolmente che il vettore somma $\vec{W}$ e' rappresentato dalla freccia che congiunge la "coda" del primo vettore con la "punta" dell'ultimo vettore della catena (proprieta' associativa).



Opposto di un vettore

Il vettore $-\vec{u}$ è quel vettore che, sommato a $\vec{u}$, fornisce come risultato il vettore nullo $\vec{0}$.

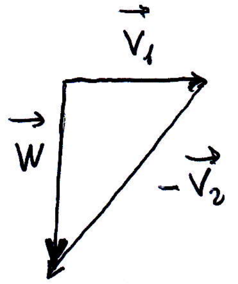
$\vec{u}$ e $-\vec{u}$ hanno stesso modulo ($|-\vec{u}| = |\vec{u}|$), stessa direzione, ma versi opposti.

Sottrazione tra vettori

$\vec{w} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2)$ (definizione!)

Si calcola sommando il primo vettore e l'opposto del secondo vettore.

$\vec{w} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \Rightarrow$



Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

$\vec{w} = c\,\vec{v}$ è un vettore, e risulta

$|\vec{w}| = |c| \cdot |\vec{v}|$ (valore assoluto di c per il modulo di $\vec{v}$)

$\vec{w}$ ha lo stesso verso di $\vec{v}$ se $c > 0$

$\vec{w}$ ha verso opposto rispetto a $\vec{v}$ se $c < 0$.

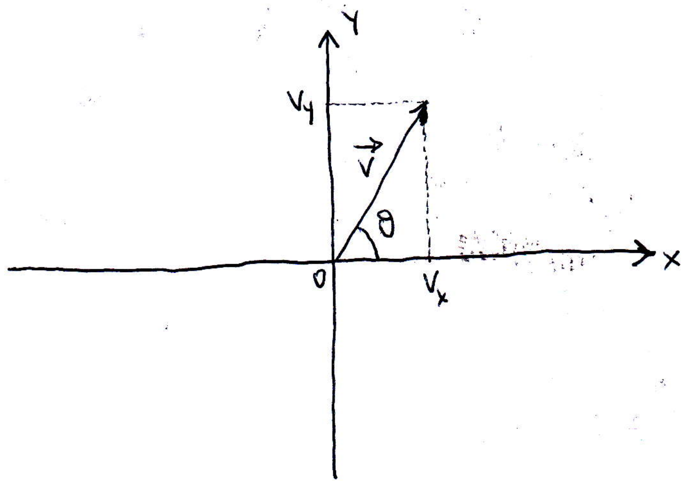
"Moltiplicazione di" due vettori

Vedremo in seguito

Componenti di un vettore e versori

Molto spesso conviene introdurre un SISTEMA DI COORDINATE CARTESIANE ORTOGONALI per eseguire calcoli con grandezze vettoriali nel piano o nello spazio.

Analizziamo in modo più specifico il caso di un vettore nel piano.



Per semplificare questo primo approccio, trasliamo il vettore $\vec{V}$ parallelamente a se stesso finché la "coda" della freccia coincide con l'origine del sistema di coordinate.

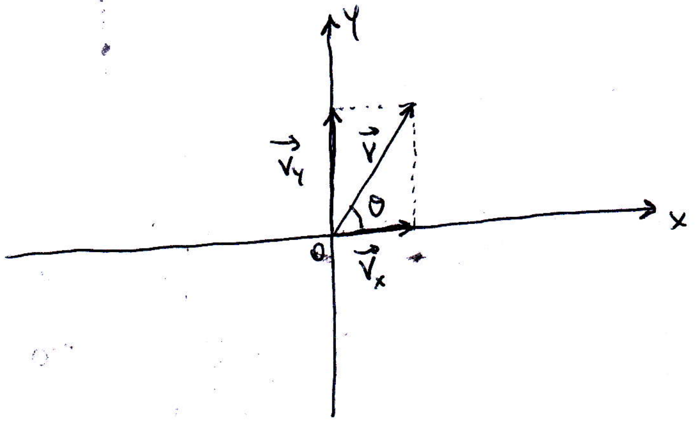
Indichiamo con la lettera greca θ ("theta") l'angolo formato dal vettore con il semiasse positivo delle ascisse, misurato in senso antiorario a partire dal semiasse positivo delle ascisse. Le proiezioni ortogonali della "punta" della freccia sui due assi cartesiani individuano le COMPONENTI di $\vec{V}$ nel sistema di coordinate cartesiane considerato. Le componenti sono quantità algebriche con segno; cioè, sono grandezze scalari.

$\vec{V}$ nel 1° quadrante: $V_x > 0$, $V_y > 0$; $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ rad

$\vec{V}$ nel 2° quadrante: $V_x < 0$, $V_y > 0$; $\frac{\pi}{2}$ rad $< \theta < \pi$ rad

$\vec{V}$ nel 3° quadrante: $V_x < 0$, $V_y < 0$; π rad $< \theta < \frac{3}{2}\pi$ rad

$\vec{V}$ nel 4° quadrante: $V_x > 0$, $V_y < 0$; $\frac{3}{2}\pi$ rad $< \theta < 2\pi$ rad



Si possono considerare i due vettori che partono dall'origine e hanno il secondo estremo nei punti individuati dalle proiezioni ortogonali di $\vec{V}$ sugli assi cartesiani.

Questi vettori sono i VETTORI COMPONENTI $\vec{V}_x$ e $\vec{V}_y$ del vettore $\vec{V}$.

Per come sono costruiti, si vede facilmente che risulta

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y \, .$$

Dunque, quando si considera una somma di vettori in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, è spesso utile sostituire a un vettore la somma dei suoi vettori componenti.

Indichiamo con V il modulo del vettore $\vec{V}$, cioè poniamo

$$V \equiv |\vec{V}| .$$

Dalle figure a pag. 7 e pag. 8 ricaviamo quindi, usando relazioni trigonometriche di base:

$$V_x = V \cos\theta \quad , \qquad V_y = V \,\mathrm{sen}\,\theta$$

Al variare di θ tra 0 e 2π rad il segno di V_x e di V_y assume il valore corretto in accordo con quanto detto a pag. 7.

L'angolo θ talvolta si chiama anche FASE del vettore $\vec{V}$, o ARGOMENTO del vettore $\vec{V}$.

Usando il teorema di Pitagora, si vede subito che risulta:

$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$, e inoltre risulta $\operatorname{tg}\vartheta = \dfrac{V_y}{V_x}$

(se $V_x = 0$, puo' solo risultare $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ oppure $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ a seconda del segno di V_y)

Possiamo quindi anche scrivere, se $V_x \neq 0$:

$\vartheta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{V_y}{V_x}\right)$ se $V_x > 0$; e $\vartheta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{V_y}{V_x}\right) + \pi$ se $V_x < 0$

(ricordo che la funzione arctg fornisce valori compresi tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$; se $V_x > 0$ e $V_y < 0$, quindi, ϑ risulterà uguale a un valore compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e 0; per riottenere il valore previsto secondo quanto scritto a pag. 7 e' sufficiente aggiungere 2π rad, cosa lecita in quanto nel piano ogni angolo e' definito a meno di un multiplo intero di 2π rad).

E' importante osservare che, per un vettore $\vec{V}$ fissato, una rotazione del sistema di assi cartesiani comporta un cambiamento dei valori di V_x e V_y e quindi dei vettori $\vec{V}_x$ e $\vec{V}_y$, ma risulta in ogni caso $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$ e

$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

Osservazione: il modulo di un vettore componente e' uguale al valore assoluto della componente corrispondente:

$|\vec{V}_x| = |V_x|$, $|\vec{V}_y| = |V_y|$

Si chiama VERSORE di un asse cartesiano un particolare vettore, orientato lungo l'asse considerato, di modulo unitario, con verso concorde con il verso positivo dell'asse cartesiano.
Il modulo di un versore e' una quantita' adimensionale (numero puro).

Notazioni tipiche:

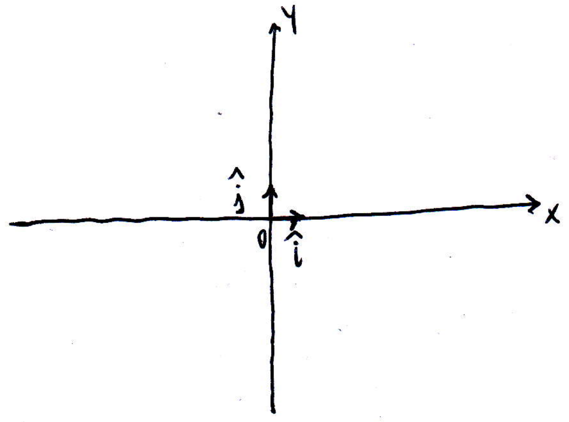
Versore dell'asse delle ascisse: $\hat{i}$, oppure $\hat{u}_x$

Versore dell'asse delle ordinate: $\hat{j}$, oppure $\hat{u}_y$

Se V_x e V_y sono le due componenti cartesiane del vettore $\vec{V}$, possiamo quindi "riscrivere" il vettore $\vec{V}$ così:

$$\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j}$$

Risulta ovviamente $\vec{V}_x = V_x \hat{i}$ e $\vec{V}_y = V_y \hat{j}$



Usando queste notazione, scriviamo la somma di due vettori riferiti a uno stesso sistema di assi cartesiani ortogonali:

$$\vec{V}_1 = V_{1x}\,\hat{i} + V_{1y}\,\hat{j} \quad , \quad \vec{V}_2 = V_{2x}\,\hat{i} + V_{2y}\,\hat{j}$$

$$\vec{W} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \left(V_{1x}\,\hat{i} + V_{1y}\,\hat{j}\right) + \left(V_{2x}\,\hat{i} + V_{2y}\,\hat{j}\right) =$$

$$= \left(V_{1x} + V_{2x}\right)\hat{i} + \left(V_{1y} + V_{2y}\right)\hat{j}$$

Dunque, le componenti del vettore somma sono

$$W_x = V_{1x} + V_{2x} \quad , \quad W_y = V_{1y} + V_{2y} \, ,$$

che e' proprio quello che ci attenderemmo a partire dalla definizione algebrica; infatti possiamo scrivere

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \end{pmatrix} \qquad \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \end{pmatrix} \qquad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} V_{2x} \\ V_{2y} \end{pmatrix} ,$$

e risulta

$$\begin{pmatrix} W_x \\ W_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{2x} \\ V_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{1x} + V_{2x} \\ V_{1y} + V_{2y} \end{pmatrix}$$

in accordo con quanto esposto a pag. 2.

Risulta poi: $|\vec{W}| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \sqrt{\left(V_{1x} + V_{2x}\right)^2 + \left(V_{1y} + V_{2y}\right)^2}$

$$\mathrm{tg}\,\theta_W = \frac{W_y}{W_x} = \frac{V_{1y} + V_{2y}}{V_{1x} + V_{2x}}$$

Per un vettore riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali nello spazio si applicano ragionamenti simili, con la complicazione di una dimensione aggiuntiva rispetto al caso di un vettore nel piano.

Non entreremo in questi dettagli per il momento.

Esempio n° 1

Dato un vettore $\vec{v}$ nel piano, con $V = |\vec{v}| = 100\ m$ e $\vartheta = -30°$, si calcolino le componenti cartesiane di $\vec{v}$.

Osserviamo anzitutto che $\vartheta = -30°$ equivale a $\vartheta = -30° + 360° = 330°$, per i motivi esposti a pag. 9.

Risulta
$$V_x = V \cos\vartheta = (100\ m) \cdot \cos 330° = (100\ m) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 86,60\ m$$
$$V_y = V \operatorname{sen}\vartheta = (100\ m) \cdot \operatorname{sen} 330° = (100\ m) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -50\ m$$

Esempio n° 2

Dato un vettore $\vec{v}$ con componenti $V_x = -25$ e $V_y = 40$, si calcolino il modulo e la fase di $\vec{v}$.

Risulta :
$$|\vec{v}| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(-25)^2 + 40^2} = \sqrt{625 + 1600} =$$
$$= \sqrt{2225} = 47,17$$

$$\tan\vartheta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{40}{-25} = -1,6 \Rightarrow \vartheta = \operatorname{arctg}\left(\frac{V_y}{V_x}\right) + \pi\ rad =$$
$$= 2,13\ rad = 122°$$

Esempio n° 3

Dati i vettori $\vec{V}_1 = 2\hat{i} + 6\hat{j}$ e $\vec{V}_2 = 3\hat{i} - 2\hat{j}$,

si trovino i vettori $\vec{c} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ e $\vec{d} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$ e si disegnino.

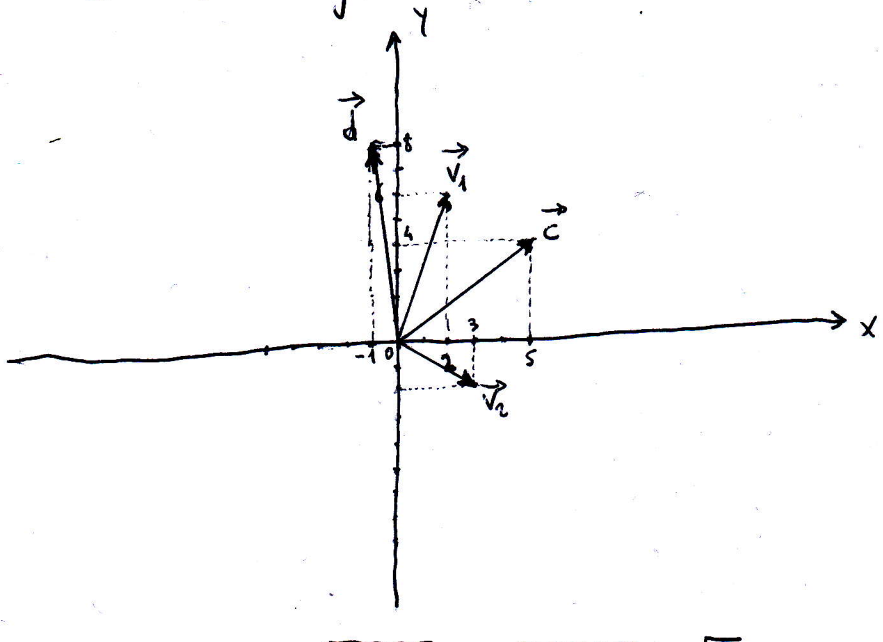
Quindi, si calcolino modulo e fase dei vettori $\vec{c}$ e $\vec{d}$.

Risulta $\vec{c} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (2\hat{i} + 6\hat{j}) + (3\hat{i} - 2\hat{j}) =$

$= (2+3)\hat{i} + (6-2)\hat{j} = 5\hat{i} + 4\hat{j}$

$\vec{d} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = (2\hat{i} + 6\hat{j}) - (3\hat{i} - 2\hat{j}) = (2-3)\hat{i} + (6+2)\hat{j} =$

$= -\hat{i} + 8\hat{j}$



Modulo di $\vec{c}$: $|\vec{c}| = \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41} = 6,40$

Fase di $\vec{c}$: $\theta_c = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{5}\right) = 0,675 \text{ rad} = 38,66°$

Modulo di $\vec{d}$: $|\vec{d}| = \sqrt{(-1)^2 + 8^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65} = 8,06$

Fase di $\vec{d}$: $\theta_d = \operatorname{arctg}(-8) + \pi \text{ rad} = 1,695 \text{ rad} = 97,1°$