Serway, pr. 7.61

Due forze costanti sono applicate a un corpo avente massa $m = 5$ kg libero di muoversi nel piano xy.
Le due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ hanno modulo rispettivamente 25 N e 42 N e formano un angolo con il semiasse x positivo rispettivamente di 35° e 150° (disegnare i vettori nel piano cartesiano).
Nell'istante $t = 0$ il corpo si trova nell'origine con velocità $\vec{V}_0 = (4\hat{i} + 2{,}5\hat{j})$ m/s.

a) Si esprimano le due forze in termini dei versori, e si usi tale notazione anche per le risposte successive.

b) Si calcoli la forza risultante agente sul corpo.

c) Si calcoli l'accelerazione del corpo.

Inoltre, all'istante $t = 3$ s, si calcolino

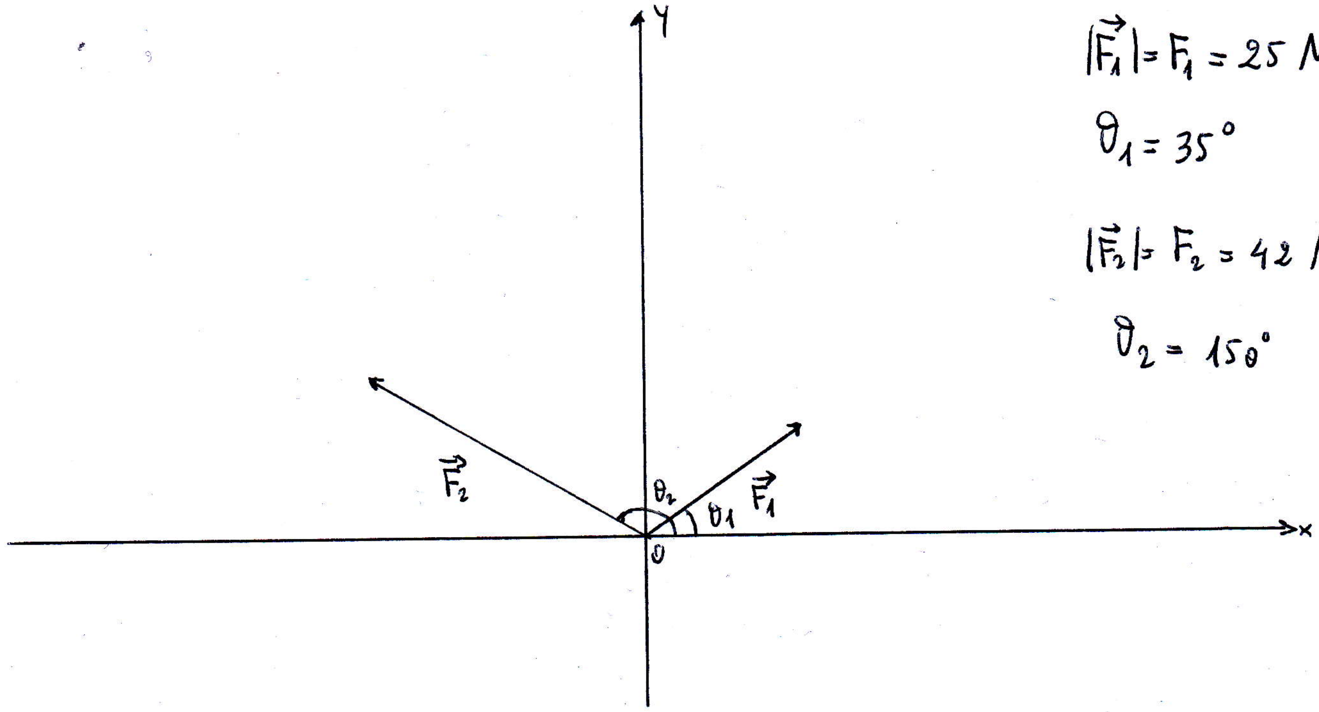
d) la velocità del corpo,

e) la sua posizione,

f) la sua energia cinetica usando l'espressione $\frac{1}{2} m |\vec{V}_f|^2$,

g) la sua energia cinetica usando l'espressione $\frac{1}{2} m |\vec{V}_i|^2 + \sum_K \vec{F}_k \cdot \Delta\vec{r}$

h) Quale conclusione si trae dal confronto delle risposte alle domande f) e g)?



$|\vec{F_1}| = F_1 = 25\ N$

$\theta_1 = 35°$

$|\vec{F_2}| = F_2 = 42\ N$

$\theta_2 = 150°$

a) Risulta:

$$F_{1x} = F_1 \cos\theta_1 = (25\ N)\cdot \cos 35° = 20,4788\ N$$

$$F_{1y} = F_1 \operatorname{sen}\theta_1 = (25\ N)\cdot \operatorname{sen} 35° = 14,3394\ N$$

$$F_{2x} = F_2 \cos\theta_2 = -36,3731\ N \qquad F_{2y} = F_2 \operatorname{sen}\theta_2 = 21\ N$$

Allora:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F_1} &= F_{1x}\,\hat{i} + F_{1y}\,\hat{j} = (20,4788\,\hat{i} + 14,3394\,\hat{j})\ N \\ F_2 &= F_{2x}\,\hat{i} + F_{2y}\,\hat{j} = (-36,3731\,\hat{i} + 21\,\hat{j})\ N \end{aligned}}$$

b) Forza risultante agente sul corpo

$$F_{ris,x} = F_{1x} + F_{2x} = F_1 \cos\theta_1 + F_2 \cos\theta_2 = -15,8943\ N$$

$$F_{ris,y} = F_{1y} + F_{2y} = F_1 \operatorname{sen}\theta_1 + F_2 \operatorname{sen}\theta_2 = 35,3394\ N$$

Dunque:

$$\boxed{\vec{F_{ris}} = F_{ris,x}\,\hat{i} + F_{ris,y}\,\hat{j} = (-15,8943\,\hat{i} + 35,3394\,\hat{j})\ N}$$

c) Dalla seconda legge della dinamica otteniamo:

$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{ris}}{m}$, per cui risulta:

$a_x = \frac{F_{ris,x}}{m} = -3,1789\ m/s^2$; $a_y = \frac{F_{ris,y}}{m} = 7,0679\ \frac{m}{s^2}$

Dunque, l'accelerazione del corpo e':

$$\boxed{\vec{a} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j} = (-3,1789\,\hat{i} + 7,0679\,\hat{j})\ \frac{m}{s^2}}$$

d) Essendo $\vec{a}$ costante (in quanto $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ sono costanti, per cui anche $\vec{F}_{ris} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ e' costante), risulta che a_x e a_y sono costanti. Sappiamo dai dati forniti dal problema che risulta $V_{0x} = 4\ \frac{m}{s}$ e $V_{0y} = 2,5\ \frac{m}{s}$

Dunque risulta:

$$V_x(t) = V_{0x} + a_x t \qquad \text{e} \qquad V_y(t) = V_{0y} + a_y t$$

Dunque: $\vec{V}(t) = (V_{0x} + a_x t)\,\hat{i} + (V_{0y} + a_y t)\,\hat{j}$

All'istante $t = 3\ s$ risulta, quindi:

$$\boxed{\vec{V}(t = 3\ s) = (-5,5367\,\hat{i} + 23,7037\,\hat{j})\ \frac{m}{s}}$$

e) Poiché $\vec{r}(t=0) = (0, 0)$ (dato del problema), otteniamo:

$$x(t) = x_0 + V_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$y(t) = y_0 + V_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

All'istante $t = 3\,s$ risulta quindi:

$$x(t = 3\,s) = -2{,}3051 \text{ m}$$

$$y(t = 3\,s) = 39{,}3056 \text{ m}$$

Dunque:

$$\boxed{\vec{r}(t = 3\,s) = (-2{,}3051\,\hat{i} + 39{,}3056\,\hat{j})\text{ m}}$$

f) $K_f = \frac{1}{2} m |\vec{V}_f|^2$, con $\vec{V}_f = \vec{V}(t = 3\,s)$

$$|\vec{V}_f|^2 = [V_x(t=3\,s)]^2 + [V_y(t=3\,s)]^2$$

Dunque (sulla base dei calcoli svolti al punto d)):

$$\boxed{K_f = 1{,}4813 \text{ kJ}}$$

g) $K_f = \frac{1}{2} m |\vec{v}_i|^2 + (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot \Delta\vec{r}$

Risulta $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = \vec{r}_f$, essendo $\vec{r}_i = \vec{r}_0 = (0,0)$

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot \Delta\vec{r} = F_{ris,x} \cdot x_f + F_{ris,y} \cdot y_f =$$

$$= (-15,8843\ N) \cdot (-2,3051\ m) + (35,3394\ N) \cdot (39,3056\ m) =$$

$$= 1,4257\ kJ$$

$$K_i = \frac{1}{2} m |\vec{v}_i|^2 = \frac{1}{2} \cdot (5\ kg) \cdot \left((4^2 + 2,5^2) \frac{m^2}{s^2} \right) = 55,625\ J$$

Dunque:

$$\boxed{K_f = K_i + (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot \Delta\vec{r} = 1,4813\ kJ}$$

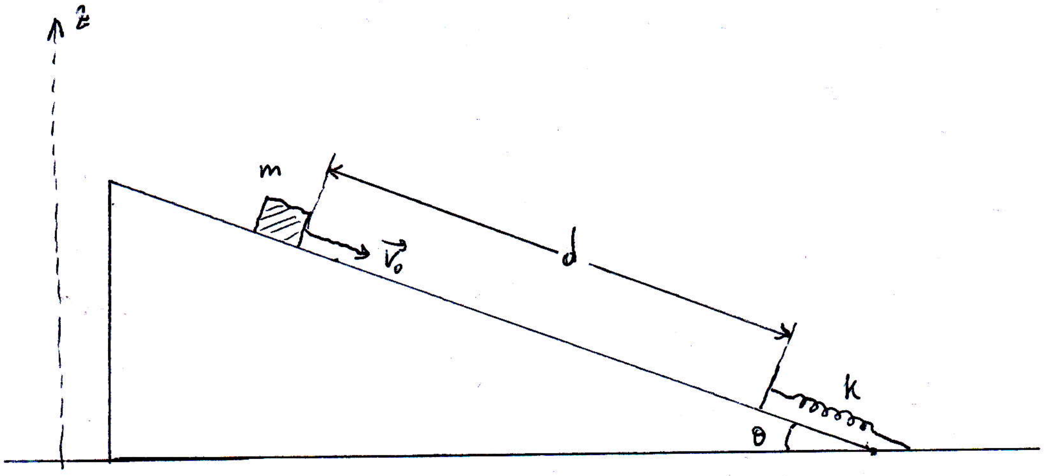
h) I risultati g) e f) coincidono. Il punto f) e' stato risolto sfruttando il risultato per $\vec{v}_f(t)$ ottenuto dalla seconda legge di Newton; il punto g) e' stato risolto usando il teorema dell' energia cinetica. Come deve essere, abbiamo ottenuto lo stesso risultato.

Serway, pr. 7.63

Un piano inclinato di un angolo $\theta = 20°$ rispetto al piano orizzontale ha una molla con costante elastica $k = 500$ N/m fissata all'estremità inferiore del piano inclinato in modo che la molla sia disposta parallelamente alla superficie del piano inclinato (vedi figura).

Un blocco avente massa $m = 2{,}5$ kg è posto nel piano inclinato a una distanza $d = 0{,}3$ m dall'estremità libera della molla. Da questa posizione, il blocco inizia a muoversi verso la molla con velocità iniziale di modulo $v_0 = 0{,}75 \frac{m}{s}$.

Calcolare la compressione della molla nell'istante in cui il blocco si ferma.



Nell'ipotesi di piano inclinato liscio, consideriamo come istante t_i l'istante in cui il blocco inizia a muoversi dalla posizione di partenza con velocità di modulo v_0, e come istante t_f l'istante in cui il blocco si ferma con la molla compressa di un tratto D.

Durante il moto del blocco, le forze che compiono lavoro sono la forza peso e la forza elastica; la reazione vincolare del piano inclinato non compie lavoro in quanto risulta diretta perpendicolarmente alla velocità istantanea del blocco a ogni istante.

Nell'istante in cui il blocco si ferma, il blocco ha percorso un tratto di lunghezza $d + D$ lungo il piano inclinato, per cui la sua quota è diminuita di un tratto pari a

$$(d + D) \operatorname{sen} \theta$$

Dunque, il lavoro compiuto dalla forza peso tra l'istante t_i e l'istante t_f è:

$$W_p = mg(d + D) \operatorname{sen} \theta$$

Tra l'istante t_i e l'istante t_f, la molla si comprime di un tratto D, partendo inizialmente dalla posizione di riposo. Dunque, il lavoro svolto dalla forza elastica tra l'istante t_i e l'istante t_f è:

$$W_{el} = -\frac{1}{2} k D^2$$

Per il teorema dell'energia cinetica, deve risultare:

$$W_p + W_{el} = K_f - K_i$$

Risulta chiaramente $K_f = 0$, in quanto $\vec{V}_f$ e' nulla all'istante t_f. Inoltre e' $K_i = \frac{1}{2} m v_0^2$; allora vale l'uguaglianza

$$mg(d + D)\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2} k D^2 = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

L'incognita e' la compressione D della molla all'istante t_f.

Riordiniamo i termini dell'equazione:

$$\frac{1}{2} k D^2 - mg D \operatorname{sen}\theta - mg d \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2} m v_0^2 = 0$$

Moltiplichiamo i due membri dell'equazione per $\frac{2}{k}$:

$$D^2 - \frac{2mg\operatorname{sen}\theta}{k} D - \frac{2mgd\operatorname{sen}\theta}{k} - \frac{mV_0^2}{k} = 0$$

e troviamo le radici usando la formula ridotta:

$$D = \frac{mg\operatorname{sen}\theta}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg\operatorname{sen}\theta}{k}\right)^2 + \frac{2mgd\operatorname{sen}\theta}{k} + \frac{mV_0^2}{k}}$$

La radice con il segno meno davanti al radicale e' negativa e quindi non e' accettabile.

La soluzione per D e' quindi:

$$D = \sqrt{\left(\frac{mg\,sen\theta}{k}\right)^2 + \frac{2\,mgd\,sen\theta}{k} + \frac{mV_0^2}{k}} + \frac{mg\,sen\theta}{k} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{mg\,sen\theta}{k}\right)^2\left[1 + \frac{k^{\cancel{2}}}{m^{\cancel{2}}g^{\cancel{2}}sen^{\cancel{2}}\theta}\cdot\frac{2\,\cancel{mg}d\,\cancel{sen\theta}}{\cancel{k}} + \frac{k^{\cancel{2}}}{m^{\cancel{2}}g^2 sen^2\theta}\cdot\frac{\cancel{m}V_0^2}{\cancel{k}}\right]} + \frac{mg\,sen\theta}{k} =$$

$$= \frac{mg\,sen\theta}{k}\cdot\sqrt{1 + \frac{k}{mg\,sen\theta}\left(2d + \frac{V_0^2}{g\,sen\theta}\right)} + \frac{mg\,sen\theta}{k} =$$

$$= \frac{mg\,sen\theta}{k}\left[\sqrt{1 + \frac{k}{mg\,sen\theta}\left(2d + \frac{V_0^2}{g\,sen\theta}\right)} + 1\right]$$

Dunque:

$$\boxed{D = \frac{mg\,sen\theta}{k}\left[\sqrt{1 + \frac{k}{mg\,sen\theta}\left(2d + \frac{V_0^2}{g\,sen\theta}\right)} + 1\right] = 0,1315\ m}$$

Serway, pr. 7.65

a) In un sistema, si assume che l'energia potenziale $U(x)$ valga 5 J per $x = 0$. La forza agente sul punto materiale è $\vec{F} = (8e^{-2x})\hat{i}$. Si calcoli la funzione $U(x)$.

b) Si dica se la forza è conservativa o non conservativa e si spieghi come si fa a verificarlo.

a) Risulta $F_x(x) = 8e^{-2x}$, ed è l'unica componente del vettore $\vec{F}$.

Il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ allorché il corpo si sposta dalla posizione $x = x_i$ alla posizione $x = x_f$ è:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_f} 8e^{-2x}\,dx = -4\int_{x_i}^{x_f} \left(-2e^{-2x}\right) dx =$$

$$= -4\left[e^{-2x}\Big|_{x_i}^{x_f}\right] = -4\left(e^{-2x_f} - e^{-2x_i}\right) = 4e^{-2x_i} - 4e^{-2x_f}$$

Dunque, il lavoro della forza $\vec{F}$, lungo l'asse x, dipende esclusivamente dalle posizioni x_i e x_f.

Posto $W = U(x = x_i) - U(x = x_f)$, deve risultare

$U(x) = 4e^{-2x} + c$, dove c è una costante da determinare sulla base delle richieste del problema.

La richiesta è che risulti $U(x = 0) = 5\,J$; allora:

$U(x = 0) = 4 + c$, per cui deve risultare:

$4 + c = 5$, da cui $c = 1\,J$

Allora la funzione $U(x)$ è:

$$\boxed{U(x) = \left(4e^{-2x} + 1\right) J}$$

b) Il procedimento che ha portato alla risoluzione del punto a) mostra che il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ per spostare il corpo da un punto a un altro lungo l'asse x dipende solo dalle coordinate del punto di partenza e del punto di arrivo, e non dal percorso seguito per andare dal punto di partenza al punto di arrivo. Pertanto, la forza $\vec{F}$ e' conservativa.

Serway, pr. 8.46

Un filo inestensibile e di massa trascurabile passa sul bordo di un tavolo e, da orizzontale che era, diviene verticale. Il filo collega un blocco avente massa $m_1 = 3,5$ kg, inizialmente in quiete sopra il piano orizzontale a 1,2 m di altezza, con un secondo blocco avente massa $m_2 = 1,9$ kg, che pende in verticale e che si trova inizialmente a una quota di 0,9 m al di sopra del pavimento. Né la superficie del tavolo né il suo bordo presentano attriti. I blocchi iniziano a muoversi con velocità iniziale nulla. Il blocco di massa m_1, una volta raggiunto il bordo del tavolo, viene proiettato orizzontalmente. Il blocco appeso di massa m_2 si ferma senza rimbalzare una volta colpito il pavimento. Si consideri il sistema blocchi - Terra.

a) Si calcoli la velocità con cui il blocco di massa m_1 scivola fuori dal bordo del tavolo.

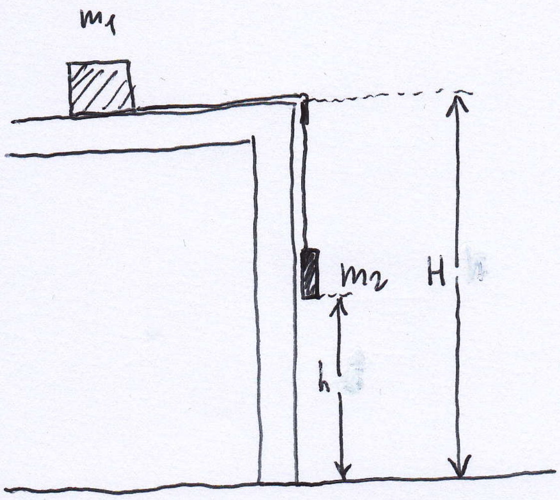
b) Si trovi il modulo della velocità d'impatto con il pavimento del blocco di massa m_1.

c) Quale lunghezza minima deve avere il filo per non tendersi durante la caduta del blocco?

d) L'energia del sistema nella configurazione iniziale e in quella un attimo prima che il corpo di massa m_1 tocchi il pavimento è la stessa?

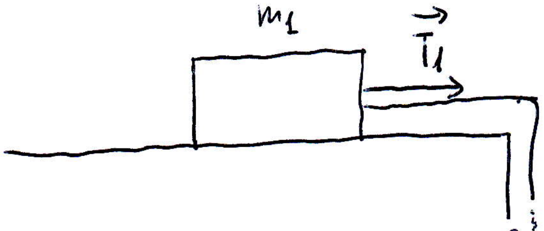
e) Motivare la risposta.

N.B. il corpo di massa m_2 tocca il pavimento prima che m_1 lasci il tavolo.

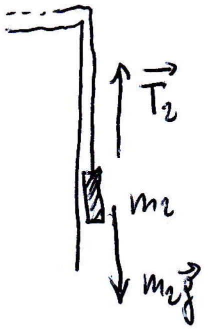


m_1
m_2
H
h

a) L'unica forza che compie lavoro sul blocco di massa m_1 è la tensione $\vec{T}_1$ della fune che tira il blocco.



Le forze che compiono lavoro sul blocco di massa m_2 sono: la forza peso e la tensione $\vec{T}_2$ della fune:



Poiché la fune è di massa trascurabile, risulta $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$

Poiché la fune è anche inestensibile, a uno spostamento δ verso il basso del corpo di massa m_2 corrisponde un uguale spostamento δ verso destra del corpo di massa m_1.

Dunque, in corrispondenza a tali spostamenti, il lavoro complessivo esercitato su ciascun corpo è (ipotesi, vera, di T costante):

$$W_1 = T\delta \qquad W_2 = -T\delta + m_2 g\,\delta$$

Per il teorema dell'energia cinetica, se consideriamo che i due corpi iniziano a muoversi allo stesso istante partendo da fermi, e che a un certo istante t successivo avranno velocità istantanee con uguale modulo (perché la fune è inestensibile), possiamo scrivere:

$W_1 = T\delta = \frac{1}{2} m_1 v^2$ $\qquad$ $W_2 = -T\delta + m_2 g \delta = \frac{1}{2} m_2 v^2$

Abbiamo quindi le seguenti due uguaglianze:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_1 v^2 = T\delta \\ \frac{1}{2} m_2 v^2 = -T\delta + m_2 g \delta \end{cases}$$

Sommiamo queste due equazioni membro a membro:

$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 = m_2 g \delta$, da cui otteniamo:

$$v^2 = \frac{2 m_2 g \delta}{m_1 + m_2}$$

Se il corpo di massa m_2, quindi, urta il pavimento dopo essere caduto verticalmente di un tratto $h = 0{,}9\ m$, prima che il blocco di massa m_1 raggiunga il bordo del tavolo, il modulo della velocita' istantanea del blocco di massa m_2 nell'istante in cui questo tocca terra e':

$v = \sqrt{\frac{2 m_2 g h}{m_1 + m_2}}$; poiché v e' anche la velocita' istantanea del blocco di massa m_1, che, dopo che il blocco di massa m_2 ha toccato terra, continua a muoversi sul tavolo orizzontale con questa velocita' (dato che la corda a quel punto non e' piu' in tensione), concludiamo che il modulo della velocita' con cui il blocco di massa m_1 scivola fuori dal bordo del tavolo e':

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{2 m_2 g h}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (1,9\ kg) \cdot (9,81\ \frac{m}{s^2}) \cdot (0,9\ m)}{3,5\ kg + 1,9\ kg}} = 2,493\ \frac{m}{s}}$$

b) Se, dopo che il corpo di massa m_1 ha lasciato il bordo del tavolo con la velocità appena calcolata, il corpo di massa m_1 continua il suo moto in caduta libera fino a toccare il pavimento, per il moto del corpo di massa m_1 vale la legge di conservazione dell'energia meccanica.

Prendiamo come istante iniziale t_i l'istante in cui il blocco esce dal bordo del tavolo, e come istante finale l'istante in cui il blocco tocca il pavimento.

Deve quindi risultare:

$$E_{m,f} = E_{m,i}, \qquad \text{cioè:}$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m_1} |\vec{V}_f|^2 + \cancel{m_1} g h_f = \frac{1}{2} \cancel{m_1} |\vec{V}_i|^2 + \cancel{m_1} g h_i$$

Risulta: $h_f = 0$, $h_i = H = 1,2\ m$ (dato del problema), e

$|\vec{V}_i| = \sqrt{\frac{2 m_2 g h}{m_1 + m_2}}$ (risultato del punto a) del problema).

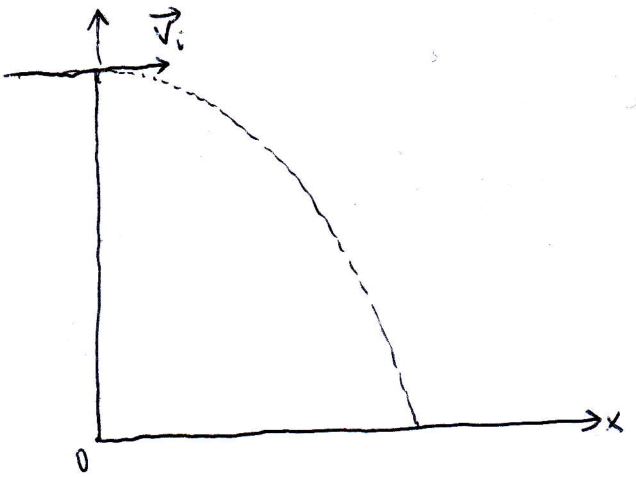
Allora:

$$|\vec{V}_f|^2 = |\vec{V}_i|^2 + 2gH = \frac{2 m_2 g h}{m_1 + m_2} + 2gH = 2g\left[H + \frac{m_2 h}{m_1 + m_2}\right]$$

$$\boxed{|\vec{V}_f| = \sqrt{2g\left[H + \frac{m_2 h}{m_1 + m_2}\right]} = 5,455\ m/s}$$

c) Affinché il filo che congiunge i due corpi non si tenda mai durante la caduta del blocco di massa m_1, occorre che il blocco in caduta segua la traiettoria parabolica di caduta libera, e che ogni punto di questa traiettoria si trovi a una distanza dalla base del tavolo (dove si trova l'altro blocco caduto a terra in precedenza, al quale e' fissato l'altro capo del filo) minore della lunghezza del filo. Pertanto, il filo dovra' essere piu' lungo della massima distanza tra la base del tavolo e i punti della traiettoria di caduta libera del corpo di massa m_1.

A questo scopo, per eseguire questo calcolo, occorre prima di tutto scrivere l'equazione della traiettoria parabolica di caduta libera del corpo di massa m_1.



Introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali (x, y), con origine coincidente con la base del tavolo, asse x orizzontale (orientato positivamente verso destra) e asse y verticale (orientato positivamente verso l'alto). La traiettoria parabolica ha il vertice in $x = 0$, in quanto la velocita' istantanea in quel punto e' diretta orizzontalmente, e la concavita' rivolta verso il basso, per cui l'equazione della traiettoria e' regolata dalle equazioni

$$\begin{cases} x(t) = v_i t \\ y(t) = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo:

$$t = \frac{x}{v_i}$$, che sostituito nella seconda equazione dà:

$$y = H - \frac{g x^2}{2 v_i^2} = \frac{g}{2 v_i^2}\left(\frac{2 H v_i^2}{g} - x^2\right)$$

Pertanto, un punto generico della traiettoria è individuato dalle coordinate $P(x; y) = P\left(x; H - \frac{g x^2}{2 v_i^2}\right)$, con la condizione $0 \leq x \leq v_i \sqrt{\frac{2H}{g}}$ (deve risultare $y \geq 0$)

La distanza del punto P dall'origine è quindi:

$$d = \sqrt{x^2 + \left(H - \frac{g x^2}{2 v_i^2}\right)^2}$$

Di questa quantità vogliamo determinare il valore minimo nell'intervallo $0 \leq x \leq v_i \sqrt{\frac{2H}{g}} \simeq 1{,}233 \text{ m}$

Basta determinare il minimo, su questo intervallo, della funzione $f(x) = x^2 + \left(H - \frac{g x^2}{2 v_i^2}\right)^2$

Risulta anzitutto (valori di $f(x)$ negli estremi dell'intervallo):

$$f(x = 0) = H^2 = 1{,}44 \text{ m}^2 ; \quad f\left(x = v_i \sqrt{\frac{2H}{g}}\right) = \frac{2 H v_i^2}{g} = 1{,}521 \text{ m}^2$$

Cerchiamo eventuali punti stazionari di $f(x)$ interni all'intervallo considerato.

$$f'(x) = 2x + \cancel{2}\left(H - \frac{gx^2}{2v_i^2}\right)\cdot\left(-\frac{g}{\cancel{2}v_i^2}\cdot 2x\right) =$$

$$= 2x\left[1 - \frac{g}{v_i^2}\left(H - \frac{gx^2}{2v_i^2}\right)\right] =$$

$$= 2x\left[1 - \frac{gH}{v_i^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{gx}{v_i^2}\right)^2\right] = 2x\left[\frac{1}{2}\left(\frac{gx}{v_i^2}\right)^2 - 0{,}8941\right] =$$

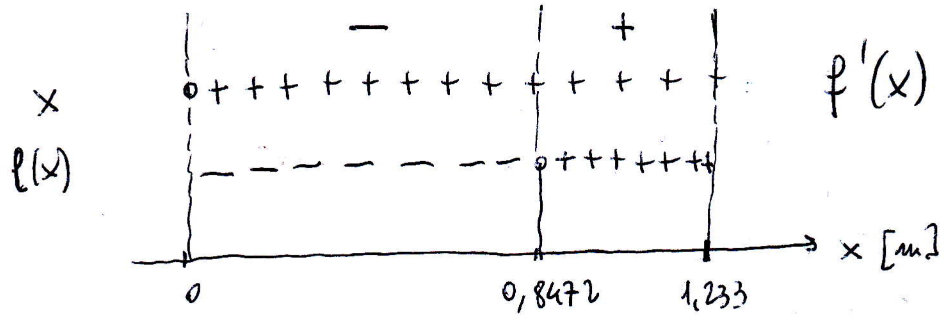
$$= x\left[\left(\frac{gx}{v_i^2}\right)^2 - 1{,}7882\right]$$

Fattore $\left(\frac{gx}{v_i^2}\right)^2 - 1{,}7882 = \ell(x)$

risulta ≥ 0 per $\left(\frac{gx}{v_i^2}\right)^2 \geq 1{,}7882$, cioè per

$$\frac{g|x|}{v_i^2} \geq 1{,}3372 \Rightarrow |x| \geq 0{,}8472 \text{ m}$$

Allora, lo studio del segno di $f'(x)$ si riassume così:



(solo nell'intervallo di interesse in questo problema!)

Dunque, $f(x)$ ha un minimo relativo per $x \simeq 0{,}8472$ m.
Pertanto, non essendoci ulteriori punti stazionari interni all'intervallo considerato, il minimo assoluto di $f(x)$ deve essere cercato agli estremi dell'intervallo.
Il minimo relativo trovato per $f(x)$ è anche minimo assoluto di $f(x)$ sull'intervallo considerato.

Ma i valori agli estremi li abbiamo già calcolati, e quindi, per confronto diretto, concludiamo che il massimo di $f(x)$ si ha per $x = V_i \sqrt{\frac{2H}{g}}$, cioè nell'istante in cui il corpo di massa m_1 tocca terra.

Dunque, affinché il filo non si tenda mai durante la caduta del blocco di massa m_1, dovrà avere una lunghezza minima pari a

$$\ell_{min} = V_i \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2H}{\cancel{g}}} \cdot \sqrt{\frac{2 m_2 \cancel{g} h}{m_1 + m_2}}, \quad \text{cioè:}$$

$$\boxed{\ell_{min} = 2 \sqrt{\frac{m_2 H h}{m_1 + m_2}} = 1,233 \text{ m}}$$

d) Nella configurazione iniziale, l'energia del sistema è

$$E_{m,i} = m_1 g H + m_2 g h = (m_1 H + m_2 h) g = 57,9771 \text{ J}$$

Un attimo prima che il blocco di massa m_1 tocchi terra, risulta

$$E_{m,f} = \frac{1}{2} m_1 |\vec{V}_f|^2, \quad \text{dove } |\vec{V}_f| \text{ è stato calcolato nel punto b):}$$

$$E_{m,f} = \frac{1}{\cancel{2}} m_1 \cdot \cancel{2} g \left(H + \frac{m_2 h}{m_1 + m_2} \right) = m_1 g \left(H + \frac{m_2 h}{m_1 + m_2} \right) = 52,07475 \text{ J}$$

Dunque, risulta $\boxed{E_{m,i} > E_{m,f}}$.

e) Si poteva intuire a priori che risultasse $E_{m,f} < E_{m,i}$, perché, tra l'istante iniziale t_i in cui i due blocchi iniziano a muoversi partendo da fermi e l'istante finale t_f in cui il blocco di massa m_1 tocca terra al termine della sua traiettoria parabolica, c'è stata la dissipazione dell'energia cinetica acquistata dal blocco di massa m_2 un attimo prima che toccasse terra (il testo del problema infatti dice che questo corpo si ferma senza rimbalzare una volta colpito il pavimento).

L'energia cinetica acquistata dal blocco di massa m_2 subito prima di colpire il pavimento era:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{1}{\cancel{2}} m_2 \cdot \left(\frac{\cancel{2} m_2 g h}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_2^2 g h}{m_1 + m_2} = 5{,}90235\ J$$

Si vede dalle formule trovate in precedenza che risulta:

$$E_{m,i} - E_{m,f} = (m_1 H + m_2 h) g - m_1 g \left(H + \frac{m_2 h}{m_1 + m_2} \right) =$$

$$= g \left[\cancel{m_1 H} + m_2 h - \cancel{m_1 H} - \frac{m_1 m_2 h}{m_1 + m_2} \right] =$$

$$= m_2 g h \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) = m_2 g h \cdot \left(\frac{\cancel{m_1} + m_2 - \cancel{m_1}}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_2^2 g h}{m_1 + m_2} = K_2,$$

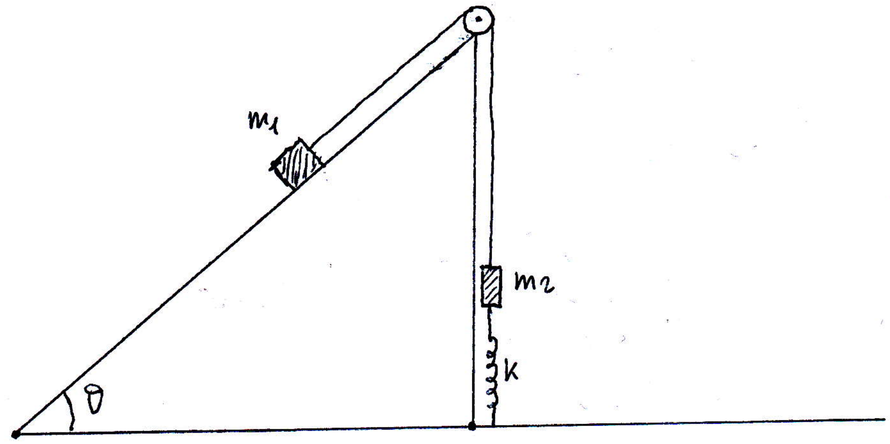
e pertanto questo conferma che, nel processo descritto, viene interamente dissipata l'energia cinetica che il corpo di massa m_2 aveva acquistato prima di toccare terra.

Serway, pr. 8.64

Un blocco avente massa $m_1 = 20$ kg e' collegato a un altro blocco avente massa $m_2 = 30$ kg tramite una corda avente massa trascurabile che passa attorno a una puleggia priva di attrito. Il blocco di massa m_2 e' attaccato a una molla, pure questa di massa trascurabile, avente costante elastica $K = 250$ N/m.

Quando il sistema si trova nelle condizioni indicate nella figura, la molla si trova nella posizione di riposo; il piano inclinato e' liscio. Inizialmente il blocco di massa m_1 viene tirato verso il basso di un tratto $d = 0,2$ m lungo il piano inclinato, che forma un angolo $\vartheta = 40°$ con il piano orizzontale, e quindi viene lasciato libero di muoversi dalla quiete.

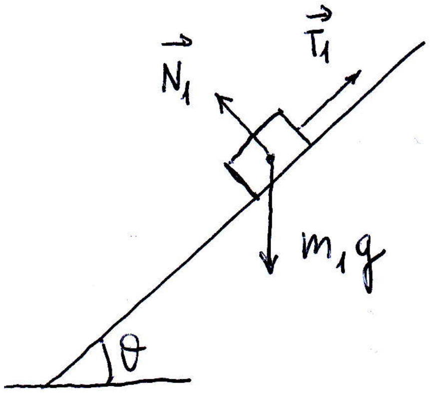
Si calcoli il modulo della velocita' di ciascun blocco quando la molla si trova nuovamente nella posizione di riposo.



Quando si sposta il blocco di massa m_1 in salita lungo il piano inclinato di un tratto δ, il blocco di massa m_2 si sposta verso il basso di un tratto δ in verticale, e la molla si accorcia di un tratto δ se in precedenza era allungata di un tratto $\geq \delta$.

Disegniamo i diagrammi delle forze agenti su ciascun blocco, e valutiamo il lavoro della forza risultante agente su ciascun blocco:

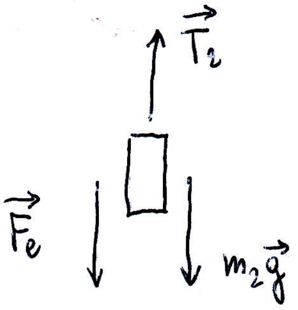
blocco di massa m_1



$\vec{N}_1$: reazione vincolare del piano inclinato sul blocco di massa m_1

$\vec{T}_1$: forza esercitata dalla corda sul blocco di massa m_1.

blocco di massa m_2



$\vec{F}_e$: forza elastica esercitata dalla molla sul blocco di massa m_2

$\vec{T}_2$: forza esercitata dalla corda sul blocco di massa m_2

Risulta, come già ampiamente noto: $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$

Lavoro svolto dalla risultante delle forze sul blocco di massa m_1 allorché questo si sposta di un tratto di lunghezza δ in salita lungo il piano inclinato:

$$W_1 = -m_1 g \delta \operatorname{sen}\theta + T\delta$$

Infatti, in questo spostamento il blocco aumenta la sua quota rispetto al suolo di un tratto $\delta \operatorname{sen}\theta$, e se T è costante il lavoro della forza $\vec{T}_1$ è espresso da $T\delta$ (se δ è uno spostamento piccolo, questo è vero con ottima approssimazione anche se T non dovesse essere costante).

Lavoro svolto dalla risultante delle forze sul blocco di massa m_2 allorché questo si sposta di un tratto di lunghezza δ verso il basso lungo la verticale e al termine dello spostamento la molla è a riposo:

$$W_2 = m_2 g \delta + \frac{1}{2} k \delta^2 - T\delta$$

Per il teorema dell'energia cinetica, tenuto conto del fatto che inizialmente i due blocchi sono a riposo e al termine dello spostamento il modulo delle loro velocità istantanee è lo stesso (indicato con v), possiamo scrivere:

$$W_1 = \frac{1}{2} m_1 v^2 \quad \text{e} \quad W_2 = \frac{1}{2} m_2 v^2$$

Dunque, valgono le seguenti due uguaglianze:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_1 v^2 = -m_1 g \delta \operatorname{sen}\theta + T\delta \\ \frac{1}{2} m_2 v^2 = m_2 g \delta + \frac{1}{2} k \delta^2 - T\delta \end{cases}$$

Sommiamo membro a membro queste due equazioni:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 = (m_2 - m_1 \operatorname{sen}\theta) g \delta + \frac{1}{2} k \delta^2$$

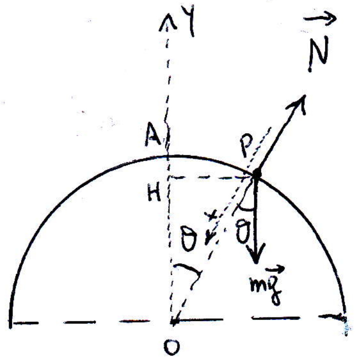
Nel nostro caso risulta $\delta = d = 0{,}2\ m$, per cui otteniamo:

$$v^2 = \frac{2(m_2 - m_1 \operatorname{sen}\theta) g d + k d^2}{m_1 + m_2}$$, e infine:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1 \operatorname{sen}\theta) g d + k d^2}{m_1 + m_2}} = 1{,}2432\ \frac{m}{s}}$$

Serway, pr. 8.66

Il silo di una fattoria ha una copertura di forma semisferica che, quando e' bagnata, non presenta attrito. Qualcuno ha depositato una zucca nel punto piu' alto del tetto e li' la zucca sta in equilibrio. In questa situazione la semiretta che parte dal centro di curvatura della semisfera e passa per la posizione della zucca forma un angolo $\theta_i = 0°$ con la direzione verticale. In una notte di pioggia un soffio di vento smuove appena la zucca dalla sua posizione di equilibrio, e questa inizia a scivolare lungo la copertura. Si osserva che la zucca perde contatto con la superficie sferica quando la semiretta che parte dal centro di curvatura della semisfera e passa per la posizione della zucca forma un certo angolo con la direzione verticale. Qual e' il valore θ^* di questo angolo?



(schema per l'impostazione della risoluzione del problema)

Anzitutto, occorre calcolare il modulo della velocità istantanea della zucca quando questa, scivolando lungo la superficie sferica, si trova in una posizione P in cui il raggio vettore tracciato dal centro della sfera forma un angolo θ con la direzione verticale (vedi figura).

Le forze agenti sono: la forza peso e la reazione vincolare della superficie sferica. Come accade sempre, la reazione vincolare della superficie di appoggio non compie lavoro in quanto risulta, in ogni istante, perpendicolare alla velocità vettoriale istantanea del corpo.
Allora, l'unica forza che compie lavoro sulla zucca mentre questa scivola lungo la superficie sferica liscia è la forza peso.
Dato che la forza peso è conservativa, ed è l'unica forza che compie lavoro, concludiamo che, durante il moto della zucca, l'energia meccanica si conserva.

Calcoliamo il dislivello verticale tra le posizioni A e H:

$$\overline{AH} = \overline{OA} - \overline{OH} = \overline{OA} - \overline{OP}\cos\theta$$

Poiché $\overline{OA} = \overline{OP} = R$ (raggio della sfera)

Allora:

$$\overline{AH} = R(1-\cos\theta)$$

Poiché $|\vec{V}_A| = 0$, per la conservazione dell'energia meccanica possiamo scrivere:

$$E_{m,P} = E_{m,A}\,,$$ cioè:

$$\cancel{m} g R(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\cancel{m}|\vec{V}_P|^2 ,$$

dove m e' la massa della zucca, e dove abbiamo considerato come quota $y=0$ la quota del punto P.

Avremmo potuto anche procedere in quest'altra maniera:

$$\cancel{m} g R = \frac{1}{2}\cancel{m}|\vec{V}_P|^2 + \cancel{m} g R\cos\theta ,$$

cioe' considerando come quota $y=0$ quella del centro della sfera. Si osserva immediatamente che le due vie sono totalmente equivalenti.

Allora, risulta:

$$|\vec{V}_P|^2 = 2gR(1-\cos\theta)$$

Adesso, calcoliamo il modulo della reazione vincolare della superficie sferica nel punto P.

Introduciamo un asse x, diretto secondo la direzione del raggio della sfera nel punto P, orientato positivamente verso il centro della sfera.

Per la seconda legge della dinamica, risulta:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} ,$$

dove $\vec{a}$ e' l'accelerazione istantanea della zucca nella posizione P.

Dunque, lungo la direzione x deve valere l'uguaglianza:

$$m a_x = (m\vec{g})_x + N_x$$

Posto $|\vec{N}| = N$, risulta (vedi figura): $N_x = -N$

Risulta poi: $(m\vec{g})_x = mg\cos\theta$, e $a_x = \frac{|\vec{V}_P|^2}{R}$,

dove a_x e' l'accelerazione centripeta della zucca nel punto P.

Allora otteniamo:

$$m\frac{|\vec{V}_P|^2}{R} = mg\cos\theta - N, \quad \text{e quindi:}$$

$$N = mg\cos\theta - m\frac{|\vec{V}_P|^2}{R} = m\left(g\cos\theta - \frac{|\vec{V}_P|^2}{R}\right)$$

Essendo N il modulo della reazione vincolare, osserviamo che la zucca potra' restare in contatto con la superficie sferica se risulta $N \geq 0$, cioe' se

$$g\cos\theta - \frac{|\vec{V}_P|^2}{R} \geq 0, \quad \text{dunque se} \quad g\cos\theta \geq \frac{|\vec{V}_P|^2}{R}$$

Utilizziamo l'espressione di $|\vec{V}_P|^2$ trovata in precedenza:

$$\cancel{g}\cos\theta \geq \frac{2\cancel{g}\cancel{R}(1-\cos\theta)}{\cancel{R}}, \quad \text{da cui otteniamo}$$

$$\cos\theta \geq 2 - 2\cos\theta, \text{ cioe' } 3\cos\theta \geq 2 \Rightarrow \cos\theta \geq \frac{2}{3}$$

La condizione $\cos\theta \geq \frac{2}{3}$ implica $\theta \leq \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$.

Dunque, la zucca resta in contatto con la superficie sferica finché risulta $\theta \leq \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$, e quindi perde contatto con la superficie sferica quando $\theta = \theta^*$, dove

$$\boxed{\theta^* = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48{,}190^\circ = 0{,}841 \text{ rad}}$$