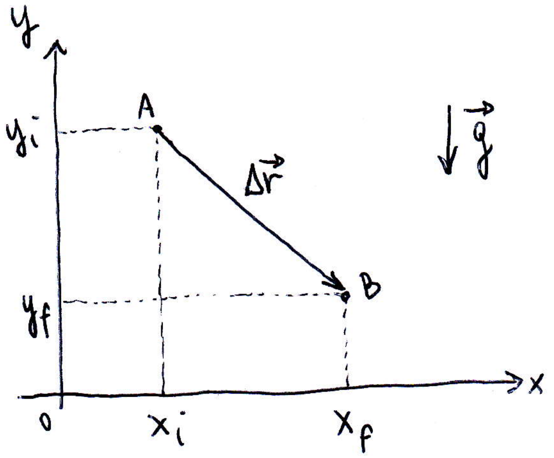
ENERGIA POTENZIALE E FORZE CONSERVATIVE

Calcoliamo il lavoro compiuto dalla forza peso allorché un corpo di massa m si sposta dalla quota $y = y_i$ alla quota $y = y_f$ partendo dal punto $A(x_i, y_i)$ e arrivando nel punto $B(x_f, y_f)$:



$\downarrow \vec{g}$

Risulta $\vec{F}_p = -mg\,\hat{j}$

$$\Delta\vec{r} = (x_f - x_i)\,\hat{i} + (y_f - y_i)\,\hat{j}$$

Allora possiamo scrivere:

$$\boxed{W_p = \vec{F}_p \cdot \Delta\vec{r} = -mg(y_f - y_i) = mgy_i - mgy_f}$$

D'altra parte sappiamo che, nel caso in cui $\vec{F}_p$ sia la forza risultante agente sul corpo, risulta anche:

$W_p = \frac{1}{2} m |\vec{v}_f|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_i|^2$ per il teorema dell'energia cinetica.

Dunque, in questo caso, possiamo scrivere:

$\frac{1}{2} m |\vec{v}_f|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_i|^2 = mgy_i - mgy_f$, e quindi:

$$\frac{1}{2} m |\vec{v}_f|^2 + mgy_f = \frac{1}{2} m |\vec{v}_i|^2 + mgy_i$$

Questo vale per qualunque coppia di istanti t_i e t_f durante il moto del corpo sotto l'azione della sola forza peso.

Pertanto possiamo concludere che la quantità

$$\frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 + mgy$$

rimane costante nel tempo durante il moto del corpo sotto l'azione della sola forza peso.

La quantità $U_p(y) = mgy$ è chiamata ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE.

Dal calcolo svolto in precedenza possiamo quindi scrivere:

$$\boxed{W_p = U_p(y_i) - U_p(y_f) = -(U_{p,f} - U_{p,i}) = -\Delta U_p}$$

Dunque, il lavoro svolto dalla forza peso è uguale all'opposto della variazione dell'energia potenziale gravitazionale allorché il corpo si sposta da una quota iniziale y_i a una quota finale y_f.

Osserviamo che il lavoro svolto dalla forza peso dipende esclusivamente dalla variazione della quota lungo l'asse verticale, ed è indipendente dalla variazione della coordinata orizzontale della posizione del corpo.

Osserviamo anche che la funzione energia potenziale gravitazionale è "definita a meno di una costante additiva arbitraria": ciò significa che potremmo porre $U_p(y) = mgy + c$, dove c è una quantità fissata avente le dimensioni di una energia.

Infatti, con c finito risulta:

$$U_{p,i} - U_{p,f} = (mg y_i + c) - (mg y_f + c) =$$

$$= mg y_i + \cancel{c} - mg y_f - \cancel{c} = mg y_i - mg y_f = -\Delta U_p$$

che è un'espressione identica a quella ottenuta in precedenza. La scelta $c = 0$ equivale a dire che risulta $U_p(y) = 0$ per $y = 0$.

La quantità $\boxed{E_m = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 + mgy = K + U_p}$ è chiamata ENERGIA MECCANICA del corpo di massa m sotto l'azione della sola forza peso.

[Per quanto visto in precedenza, quindi, sotto l'azione della sola forza peso l'energia meccanica di un corpo di massa m resta costante nel tempo o, detto in altri termini, si conserva.]

Importante: il lavoro svolto dalla forza peso si può sempre calcolare con la legge $W_p = U_{p,i} - U_{p,f}$, anche se la forza peso non è la sola forza agente sul corpo.

Esempio 1

Un corpo di massa m cade partendo da fermo da una quota h al di sopra del suolo. Trascuriamo la resistenza dell'aria.

a) Quanto vale il modulo della velocita' vettoriale istantanea del corpo quando questo si trova a una quota y al di sopra del suolo?

b) Quanto vale il modulo della velocita' del corpo alla quota y se il modulo della velocita' iniziale del corpo alla quota h e' v_0?

a) Poiché la forza peso e' l'unica forza agente sul corpo, la sua energia meccanica si conserva, per cui possiamo scrivere:

$$E_{m,f} = E_{m,i}\ , \quad \text{cioe'} \quad \frac{1}{2} m |\vec{v}_f|^2 + mg\,y_f = \frac{1}{2} m |\vec{v}_i|^2 + mg\,y_i$$

Dato che $y_i = h$, $|\vec{v}_i| = 0$, $y_f = y$, otteniamo:

$$\frac{1}{2} \cancel{m} |\vec{v}_f|^2 + \cancel{m} g y = \cancel{m} g h \Rightarrow \frac{1}{2} |\vec{v}_f|^2 = gh - gy\ ,$$ e quindi

$$|\vec{v}_f|^2 = 2g(h-y)$$ e infine $$|\vec{v}_f| = \sqrt{2g(h-y)}$$

Questo risultato ovviamente ha senso soltanto se

$$h - y \geq 0 \Rightarrow y \leq h$$

b) Poiché risulta ancora che la forza peso e' l'unica forza che compie lavoro sul corpo, l'energia meccanica del corpo si conserva:

$$E_{m,f} = E_{m,i} \Rightarrow \frac{1}{2} m |\vec{V_f}|^2 + mg y_f = \frac{1}{2} m |\vec{V_i}|^2 + mg y_i$$

Poiché $y_i = h$, $|\vec{V_i}| = V_0$, $y_f = y$, otteniamo:

$$\frac{1}{2} \cancel{m} |\vec{V_f}|^2 + \cancel{m} g y = \frac{1}{2} \cancel{m} V_0^2 + \cancel{m} g h, \text{ cioe'}$$

$$\frac{1}{2} |\vec{V_f}|^2 = \frac{1}{2} V_0^2 + gh - gy \Rightarrow |\vec{V_f}|^2 = V_0^2 + 2g(h-y), \text{ e}$$

in fine $|\vec{V_f}| = \sqrt{V_0^2 + 2g(h-y)}$

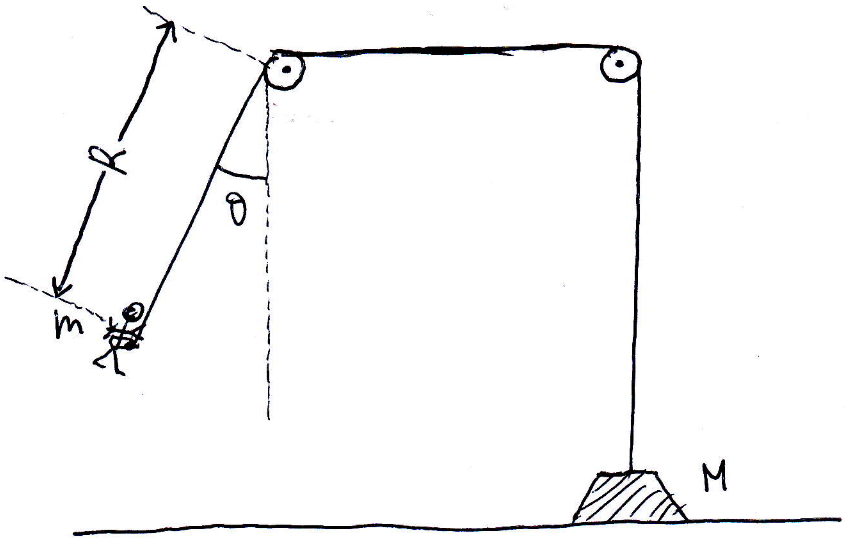
Questo risultato ovviamente ha senso soltanto se

$$V_0^2 + 2g(h-y) \geq 0, \text{ cioe' se } y \leq \frac{V_0^2}{2g} + h$$

E' essenziale riflettere sul vantaggio fornito dalla conservazione dell'energia meccanica nello svolgimento dei calcoli.

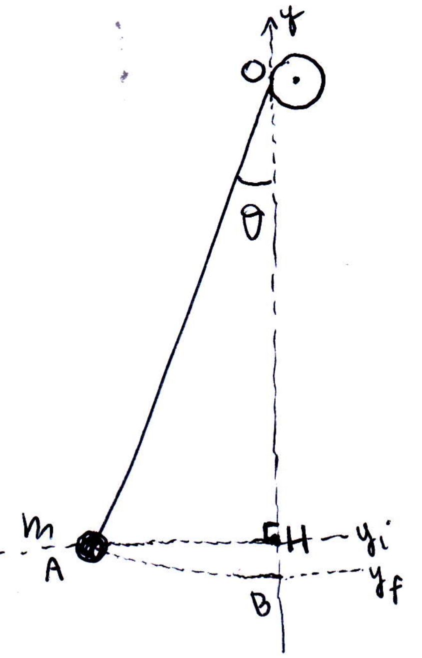
Esempio 2

Si immagini di dover progettare un meccanismo che permetta a un attore avente massa $m = 65$ kg di "planare" sul palcoscenico durante una rappresentazione. Viene deciso di utilizzare una imbracatura e di collegare l'attore a un sacco di sabbia avente massa $M = 130$ kg mediante un cavo di acciaio (inestensibile e di massa trascurabile) che scorre su due pulegge prive di attrito. La lunghezza del cavo tra l'imbracatura e la prima puleggia è $R = 3$ m. Perché l'apparato possa funzionare correttamente, nel corso di tutta la planata dell'attore il sacco di sabbia non deve mai sollevarsi da terra. Indichiamo con θ l'angolo che il cavo legato all'attore forma inizialmente con la direzione verticale. Qual è il massimo valore di θ per cui il sacco di sabbia non si staccherà mai dal suolo durante la planata dell'attore?



Osserviamo anzitutto che il sacco di sabbia si potrà sollevare soltanto se, in qualche istante, il modulo della tensione del cavo diventa maggiore del peso Mg del sacco di sabbia.

E osserviamo che la tensione del cavo risulta massima nel momento in cui l'attore, durante la planata, raggiunge la massima velocità: se l'attore riesce a percorrere la planata fino al punto più basso, questo sarà il punto in cui egli avrà la massima velocità in modulo, perché l'unica forza che compie lavoro durante il moto è la forza peso; infatti l'altra forza agente sull'attore, cioè la forza esercitata dal cavo, non compie lavoro se il tratto di cavo tra l'attore e la prima puleggia resta di lunghezza R costante: in questo caso l'attore si muove lungo un arco di circonferenza di raggio R, e siccome la forza $\vec{T}$ esercitata dal cavo è diretta lungo la direzione radiale, questa forza è, istante per istante, perpendicolare alla direzione della velocità vettoriale istantanea dell'attore, per cui il suo lavoro è nullo essendo $\vec{T} \cdot \vec{v} = 0$ ad ogni istante. Poiché l'unica forza che compie lavoro è la forza peso, quindi, l'energia meccanica dell'attore si conserva durante il moto, pertanto il modulo della velocità dell'attore risulta massimo quando la sua quota è minima, quindi quando raggiunge la verticale della prima puleggia.



Sia A la posizione iniziale dell'attore, e sia B la posizione in cui raggiunge la quota minima, lungo la verticale della prima puleggia.

Calcoliamo il dislivello verticale tra le posizioni A e B.

Dalla geometria della figura risulta:

$\overline{OA} = \overline{OB} = R \qquad \overline{OH} = R\cos\theta$, per cui $\overline{BH} = \overline{OB} - \overline{OH} =$

$= R - R\cos\theta =$

$= R(1-\cos\theta)$

Pertanto, se y_i è la quota verticale iniziale nel punto A, la quota finale dell'attore quando raggiunge il punto B è $y_f = y_i - \overline{BH} = y_i - R(1-\cos\theta)$

Poiché l'attore parte da fermo dalla posizione A, possiamo scrivere, applicando la legge di conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{m,f} = E_{m,i} \Rightarrow \frac{1}{2} m |\vec{V}_f|^2 + m g y_f = \frac{1}{2} m |\vec{V}_i|^2 + m g y_i, \text{ con}$$

$y_f = y_i - R(1-\cos\theta)$ e $|\vec{V}_i| = 0$, per cui otteniamo:

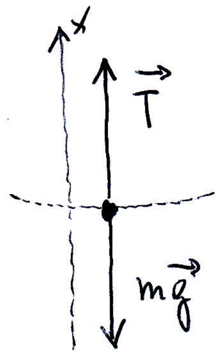
$$\frac{1}{2} m |\vec{V}_f|^2 + \cancel{m g y_i} - m g R(1-\cos\theta) = \cancel{m g y_i}, \text{ e quindi:}$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} |\vec{V}_f|^2 - \cancel{m} g R(1-\cos\theta) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} |\vec{V}_f|^2 = g R(1-\cos\theta)$$

$|\vec{v}_f|^2 = 2gR(1-\cos\theta)$ e in fine $|\vec{v}_f| = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$

Questo e' il modulo della velocita' dell'attore nel punto piu' basso della sua traiettoria, se questa si mantiene circolare di raggio R.

Disegniamo il diagramma delle forze agenti sull'attore nel punto piu' basso della sua traiettoria:



$\vec{T}$: forza esercitata dal cavo sull'attore nel punto piu' basso della traiettoria.

Introduciamo un asse x diretto verticalmente, con verso positivo verso il centro della traiettoria circolare. Risulta:

$$(\vec{T})_x = T, \quad \text{essendo } |\vec{T}| = T, \quad \text{e } (m\vec{g})_x = -mg.$$

Per la seconda legge della dinamica possiamo scrivere:

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$, per cui per le componenti dei vettori lungo l'asse x risulta:

$$(m\vec{g})_x + T_x = ma_x \Rightarrow -mg + T = ma_x$$

Poiché $a_x = \dfrac{|\vec{v}_f|^2}{R}$ (accelerazione centripeta in quella posizione), possiamo scrivere:

$$T = mg + ma_x = mg + m\frac{|\vec{V}_f|^2}{R} = m\left(g + \frac{|\vec{V}_F|^2}{R}\right)$$

Uniamo l'espressione calcolata in precedenza per $|\vec{V}_f|^2$:

$$T = m\left[g + \frac{1}{\cancel{R}}\cdot 2g\cancel{R}(1-\cos\theta)\right] = mg\left[1+2(1-\cos\theta)\right] =$$

$$= mg(1+2-2\cos\theta) = mg(3-2\cos\theta)$$

Dunque, il massimo modulo della forza esercitata dalla fune sull'attore durante la planata è

$$T = mg(3-2\cos\theta)$$

Affinché il sacco di sabbia non si sollevi mai, quindi, deve risultare (vedi le considerazioni iniziali):

$$T < Mg \Rightarrow \cancel{mg}(3-2\cos\theta) < M\cancel{g}, \text{ da cui}$$

$$3-2\cos\theta < \frac{M}{m} \Rightarrow 2\cos\theta > 3-\frac{M}{m}, \text{ e quindi}$$

$$\cos\theta > \frac{1}{2}\left(3-\frac{M}{m}\right)$$

Sostituiamo i valori di M e m assegnati dal problema:

$$\cos\theta > \frac{1}{2}\left(3-\frac{130\text{ kg}}{65\text{ kg}}\right) \Rightarrow \cos\theta > \frac{1}{2}(3-2) \Rightarrow \cos\theta > \frac{1}{2},$$

cioè la condizione per cui il sacco di sabbia non si solleverà mai durante la planata dell'attore è $\boxed{\theta < 60°}$

Energia potenziale elastica

Abbiamo già dimostrato che il lavoro svolto dalla forza elastica di richiamo di una molla avente costante elastica K su un corpo fissato all'estremità libera della molla, allorché questa estremità si sposta lungo l'asse della molla dalla posizione x_i alla posizione x_f, è dato da:

$$\boxed{W_{el} = \frac{1}{2} K x_i^2 - \frac{1}{2} K x_f^2}$$

Se la forza elastica è l'unica forza che compie lavoro sul corpo, il lavoro svolto dalla forza elastica è uguale al lavoro svolto dalla forza risultante agente sul corpo, per cui per il teorema dell'energia cinetica possiamo scrivere:

$$W_{el} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_f|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_i|^2$$

(se il moto avviene lungo l'asse x, risulta $|\vec{v}_i|^2 = v_{x,i}^2$ e $|\vec{v}_f|^2 = v_{x,f}^2$).

Dunque vale l'uguaglianza seguente:

$$\frac{1}{2} m |\vec{v}_f|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_i|^2 = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2 \text{, e quindi}$$

$$\frac{1}{2} m |\vec{v}_f|^2 + \frac{1}{2} k x_f^2 = \frac{1}{2} m |\vec{v}_i|^2 + \frac{1}{2} k x_i^2$$

Questo vale per qualunque coppia di istanti t_i e t_f durante il moto sotto l'azione della sola forza elastica.

Pertanto possiamo concludere che la quantità

$$\frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

rimane costante nel tempo durante il moto del corpo sotto l'azione della sola forza elastica.

La quantità $U_{el}(x) = \frac{1}{2} k x^2$ è chiamata ENERGIA POTENZIALE ELASTICA.

Dall'espressione calcolata quando si è studiata per la prima volta la forza elastica, possiamo scrivere la seguente regola:

$$\boxed{W_{el} = U_{el}(x_i) - U_{el}(x_f) = -\left[U_{el}(x_f) - U_{el}(x_i)\right] = -\Delta U_{el}}$$

Dunque, il lavoro svolto dalla forza elastica è uguale all'opposto della variazione dell'energia potenziale elastica allorché il corpo si sposta lungo l'asse della molla da una posizione iniziale x_i a una posizione finale x_f.

Osserviamo che il lavoro svolto dalla forza elastica dipende solo dalla quantità $x_i^2 - x_f^2$, ed è indipendente dalla traiettoria seguita dal corpo attaccato alla molla per andare da x_i a x_f.

Osserviamo anche che la funzione $U_{el}(x)$ è definita a meno di una costante additiva arbitraria: ciò significa che potremmo porre $U_{el}(x) = \frac{1}{2}kx^2 + c$, dove c è una quantità finita avente le dimensioni di una energia.

Infatti, con c finito risulta:

$$U_{el,i} - U_{el,f} = \left(\frac{1}{2}kx_i^2 + c\right) - \left(\frac{1}{2}kx_f^2 + c\right) =$$

$$= \frac{1}{2}kx_i^2 + \cancel{c} - \frac{1}{2}kx_f^2 - \cancel{c} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 = -\Delta U_{el}$$

che è un'espressione identica a quella ottenuta in precedenza. La scelta $c = 0$ equivale a imporre che $U_{el}(x) = 0$ per $x = 0$.

La quantità $\boxed{E_m = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + \frac{1}{2}kx^2 = K + U_{el}}$ è chiamata energia meccanica del corpo di massa m sotto l'azione della sola forza elastica.

Per quanto visto in precedenza, quindi, sotto l'azione della sola forza elastica l'energia meccanica di un corpo di massa m resta costante nel tempo o, in altri termini, si conserva.

Importante: il lavoro svolto dalla forza elastica si può sempre calcolare con la legge $W_{el} = U_{el}(x_i) - U_{el}(x_f)$ anche se la forza elastica non è la sola forza agente sul corpo.

Forze conservative e forze non conservative

Se l'energia meccanica di un corpo resta costante nel tempo, cioè se si conserva, le forze che compiono lavoro sul corpo sono dette FORZE CONSERVATIVE.

Importante: il lavoro svolto da una forza conservativa allorché il corpo su cui tale forza agisce si sposta da una posizione iniziale a una posizione finale è indipendente dalla traiettoria seguita dal corpo tra queste due posizioni, e dipende solo dalla posizione iniziale e dalla posizione finale.

Di conseguenza, il lavoro svolto da una forza conservativa quando la posizione finale coincide con la posizione iniziale (cioè il lavoro svolto lungo una traiettoria CHIUSA) è nullo.

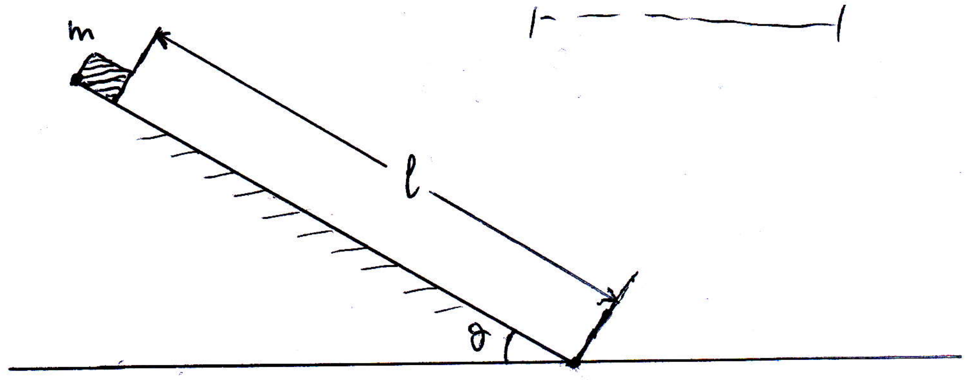
Una FORZA NON CONSERVATIVA è una forza che non gode delle proprietà appena enunciate. In generale, il lavoro di una forza non conservativa dipende dalla traiettoria che il corpo (su cui tale forza agisce) segue per andare da una posizione iniziale fissata a una posizione finale anch'essa fissata. Ad esempio, una forza non conservativa è la forza di attrito dinamico, che compie lavoro negativo solo quando il corpo si muove tra i due punti scivolando sulla superficie di appoggio scabra.

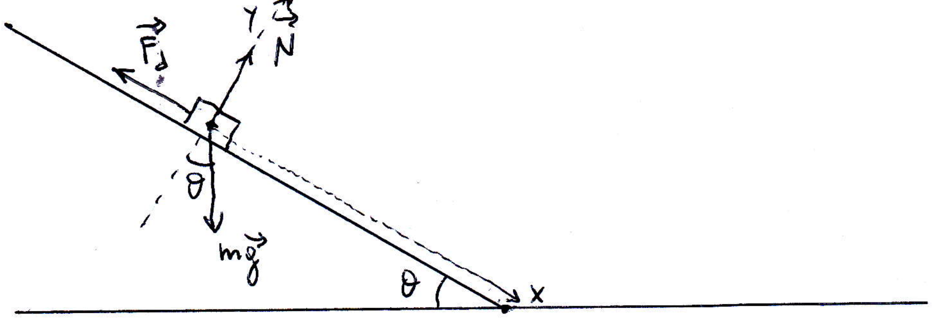
Esempio 3

Una cassa avente massa $m = 3 kg$ scivola lungo una rampa avente lunghezza $l = 1 m$. La cassa parte da ferma dal punto più elevato della rampa ed è soggetta a una forza di attrito dinamico, con coefficiente $\mu_d = 0,2$; l'angolo di inclinazione della rampa rispetto alla direzione orizzontale è $\theta = 30°$. La cassa, dopo avere lasciato la rampa, continua a muoversi sul piano orizzontale.

a) Determinare il modulo della velocità istantanea della cassa nel punto più basso della rampa.

b) Supponendo che il coefficiente di attrito dinamico fra la cassa e il piano orizzontale sia $\mu_{d_1} = 0,17$, quale distanza percorrerà la cassa sul piano orizzontale prima di arrestarsi?





a) Qua sopra è disegnato il diagramma delle forze agenti sulla cassa mentre questa sta scivolando lungo la rampa.

Poiché la cassa si muove di moto rettilineo lungo la rampa, la componente lungo l'asse y della forza risultante agente sulla cassa deve essere nulla.

Posto $N = |\vec{N}|$, risulta quindi: $N = mg\cos\theta$

Il modulo della forza di attrito dinamico è

$|\vec{F}_d| = F_d = \mu_d N = \mu_d mg\cos\theta$, con $F_{d,x} = -\mu_d mg\cos\theta$

Inizialmente la cassa si trova a una quota $h_i = l\,\mathrm{sen}\theta$ al di sopra del piano orizzontale, nel punto da cui inizia a muoversi da ferma.

La forza peso, allorché il corpo si sposta dalla quota $h_i = l\,\mathrm{sen}\theta$ alla quota $h_f = 0$, compie un lavoro

$W_p = mgh_i - mgh_f = mgl\,\mathrm{sen}\theta$

La forza di attrito dinamico, allorché il corpo percorre un tratto di lunghezza l lungo la rampa, compie un lavoro $W_d = F_{d_x} \cdot l = -\mu_d mgl\cos\theta$

La reazione vincolare $\vec{N}$ non compie lavoro in quanto $\vec{N}$ risulta, istante per istante, perpendicolare alla direzione di $\vec{v}$.

Dunque il lavoro della forza risultante agente sulla cassa tra l'istante iniziale e l'istante in cui raggiunge il piano orizzontale è:

$$W_{ris} = W_p + W_d = mgl \,\text{sen}\,\theta - \mu_d mgl \cos\theta =$$

$$= mgl\,(\text{sen}\,\theta - \mu_d \cos\theta)$$

Ma, dal teorema dell'energia cinetica, sappiamo che risulta anche

$$W_{ris} = \frac{1}{2} m |\vec{V}_f|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{V}_i|^2$$

Dunque, vale la relazione seguente:

$$\frac{1}{2} \cancel{m} |\vec{V}_f|^2 - \frac{1}{2} \cancel{m} |\vec{V}_i|^2 = \cancel{m} gl\,(\text{sen}\,\theta - \mu_d \cos\theta)$$

Poiché $|\vec{V}_i| = 0$ (dato del problema), possiamo scrivere:

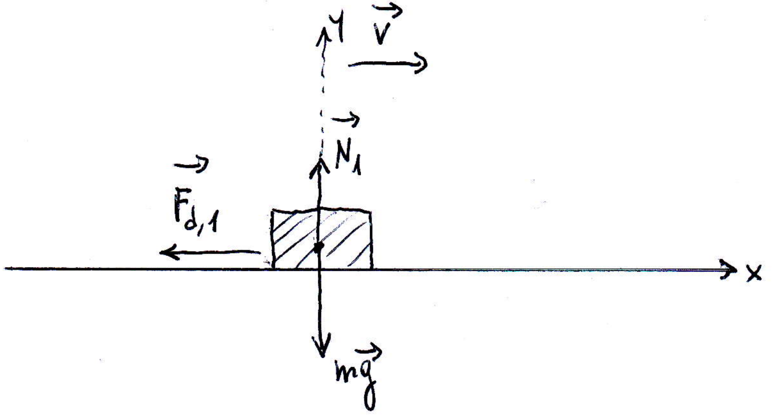
$$\frac{1}{2} |\vec{V}_f|^2 = gl\,(\text{sen}\,\theta - \mu_d \cos\theta) \Rightarrow |\vec{V}_f|^2 = 2gl\,(\text{sen}\,\theta - \mu_d \cos\theta)$$

e infine $\boxed{|\vec{V}_f| = \sqrt{2gl\,(\text{sen}\,\theta - \mu_d \cos\theta)}}$

Usando i dati del problema, otteniamo:

$$|\vec{V}_f| = \sqrt{2 \cdot (9{,}81\ \frac{m}{s^2}) \cdot (1\ m) \cdot \left(\frac{1}{2} - 0{,}2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 2{,}53\ \frac{m}{s}$$

b)



Qua sopra è tracciato lo schema delle forze agenti sulla cassa mentre si sta muovendo verso destra nel piano orizzontale. Poiché la cassa si sta muovendo di moto rettilineo lungo la direzione x orizzontale, la componente verticale della forza risultante agente sulla cassa deve essere nulla, e quindi, posto $N_1 = |\vec{N}_1|$, risulta $N_1 - mg = 0 \Rightarrow N_1 = mg$.

Risulta inoltre: $F_{d,1} = |\vec{F}_{d,1}| = \mu_{d_1} N_1 = \mu_{d_1} mg$

Poiché $\vec{N}_1$ e $m\vec{g}$ sono, istante per istante, perpendicolari a $\vec{v}$, queste due forze compiono lavoro nullo mentre la cassa si muove sul piano orizzontale. L'unica forza che compie lavoro mentre la cassa si muove sul piano orizzontale è, quindi, $\vec{F}_{d,1}$. Poiché $F_{d,1,x} = -\mu_{d_1} mg$, risulta $W_{d,1} = F_{d,1,x} \cdot d_x$, dove d_x è la distanza percorsa dalla cassa verso destra, a partire dal momento in cui inizia a muoversi sul piano orizzontale, fino al momento in cui si ferma.

Il lavoro della forza risultante agente sulla cassa tra questi stessi due istanti è quindi:

$$W_{ris} = W_{d,1} = -\mu_{d_1} mg\, d_x$$

Ma, per il teorema dell'energia cinetica, risulta anche

$$W_{ris} = \frac{1}{2} m |\vec{v_f}|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v_i}|^2$$

$\vec{V_i}$: velocità istantanea della cassa nel momento in cui questa inizia a muoversi sul piano orizzontale.

$\vec{V_f} = 0$ (velocità istantanea della cassa nell'istante in cui si ferma...)

Allora vale la relazione seguente:

$$-\mu_{d_1} \cancel{m} g\, d_x = -\frac{1}{2} \cancel{m} |\vec{v_i}|^2,$$ da cui otteniamo

$$d_x = \frac{|\vec{v_i}|^2}{2\mu_{d_1} g}$$

Ma $|\vec{v_i}|$, nel nostro caso, è il modulo della velocità istantanea della cassa nel momento in cui questa raggiunge la base della rampa, risultato ottenuto nel punto a) del problema. Allora, in termini dei dati di partenza del problema otteniamo:

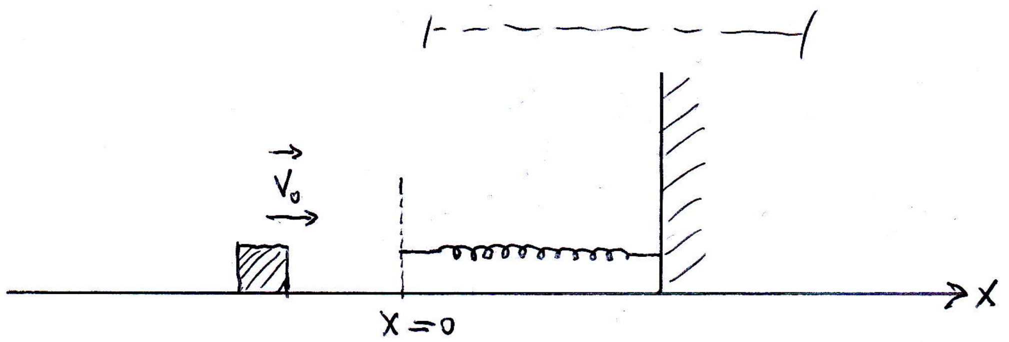
$$\boxed{d_x = \frac{\cancel{2}\cancel{g}\ell(\operatorname{sen}\theta - \mu_s\cos\theta)}{\cancel{2}\mu_{d_1}\cancel{g}} = \frac{\ell}{\mu_{d_1}}(\operatorname{sen}\theta - \mu_s\cos\theta) = 1{,}92\ \text{m}}$$

Esempio 4

Un blocco avente massa $m = 0{,}8$ kg, con velocità iniziale $V_{x_0} = 1{,}2$ m/s come mostrato nella figura, urta una molla disposta orizzontalmente, di massa trascurabile, con costante elastica $k = 50$ N/m.

a) Se il piano orizzontale è liscio, si calcoli la massima compressione della molla dopo l'urto.

b) Supponiamo che tra il blocco e la superficie agisca una forza di attrito dinamico con $\mu_d = 0{,}5$. Se la velocità del blocco nell'istante in cui urta la molla è $V_{x_0} = 1{,}2$ m/s, quale sarà la massima compressione d_{max} della molla?



a) Il corpo si muove su un piano orizzontale, per cui la forza peso e la reazione vincolare del piano non compiono lavoro in quanto sono, a ogni istante, perpendicolari al vettore velocità istantanea del corpo.

L'unica forza che compie lavoro in questo caso, in assenza di attrito tra blocco e piano orizzontale, è quindi la forza elastica.

Consideriamo $x_i = 0$, e $x_f = x_M$ (posizione in cui la molla raggiunge la compressione massima.

Risulta poi $v_{x_i} = v_{x_0}$, e $v_{x_f} = 0$ in quanto, nell'istante in cui la molla raggiunge la massima compressione, la velocita' istantanea del blocco e' nulla.

Risulta pertanto: $W_{ris} = W_{el} = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2 = -\frac{1}{2} k x_M^2$

Per il teorema dell'energia cinetica deve risultare anche:

$$W_{ris} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_f|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_i|^2 = -\frac{1}{2} m v_{x_0}^2$$

Dunque, possiamo scrivere:

$-\cancel{\frac{1}{2}} k x_M^2 = -\cancel{\frac{1}{2}} m v_{x_0}^2$, da cui otteniamo

$x_M^2 = \frac{m}{k} v_{x_0}^2$, e infine $\boxed{x_M = v_{x_0} \sqrt{\frac{m}{k}} = \left(1{,}2\ \frac{m}{s}\right)\sqrt{\frac{0{,}8\ kg}{50\ N/m}} = 0{,}15\ m}$

b) Se tra il blocco e la superficie del piano orizzontale agisce una forza di attrito dinamico, quest'ultima forza compie un lavoro aggiuntivo mentre il blocco si muove sul piano.

Rispetto all'asse x della figura, risulta:

$F_{d,x} = -\mu_d m g$ (come ben noto in una situazione di questo genere).

La forza peso e la reazione vincolare del piano orizzontale non compiono lavoro per il motivo spiegato in precedenza.

Dunque risulta $W_{ris} = W_{el} + W_d$

Posto $x_i = 0$ e $x_f = d_{max}$, risulta

$$W_{el} = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2 = -\frac{1}{2} k d_{max}^2$$

$$W_d = F_{d,x} \cdot d_{max} = -\mu_d m g d_{max}$$

Dunque risulta $W_{ris} = -\frac{1}{2} k d_{max}^2 - \mu_d m g d_{max}$

Ma per il teorema dell' energia cinetica risulta anche:

$$W_{ris} = \frac{1}{2} m |\vec{V}_f|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{V}_i|^2$$

Nel nostro caso abbiamo: $|\vec{V}_i| = V_{x_0}$, e $|\vec{V}_f| = 0$ dato che nell'istante in cui la molla raggiunge la massima compressione risulta $|\vec{V}_f| = 0$. Allora: $W_{ris} = -\frac{1}{2} m V_{x_0}^2$

Dunque, possiamo scrivere:

$$-\frac{1}{2} m V_{x_0}^2 = -\frac{1}{2} k d_{max}^2 - \mu_d m g d_{max}.$$

Riordiniamo i termini dell'equazione:

$$\frac{1}{2} k\, d_{max}^2 + \mu_d m g\, d_{max} - \frac{1}{2} m V_{x_0}^2 = 0 \, ,$$

e moltiplichiamo i due membri dell'equazione per $\frac{2}{k}$:

$$d_{max}^2 + \frac{2 \mu_d m g}{k} d_{max} - \frac{m V_{x_0}^2}{k} = 0$$

Troviamo le radici dell'equazione usando la formula ridotta:

$$(d_{max})_{1,2} = -\frac{\mu_d m g}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu_d m g}{k}\right)^2 + \frac{m V_{x_0}^2}{k}}$$

La radice con il segno meno davanti al radicale e' negativa, e quindi non accettabile. Risulta quindi:

$$d_{max} = \sqrt{\left(\frac{\mu_d m g}{k}\right)^2 + \frac{m V_{x_0}^2}{k}} - \frac{\mu_d m g}{k} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\mu_d m g}{k}\right)^2 \left[1 + \frac{k^{\cancel{2}}}{\mu_d^2 m^{\cancel{2}} g^2} \cdot \frac{\cancel{m} V_{x_0}^2}{\cancel{k}}\right]} - \frac{\mu_d m g}{k} =$$

$$= \frac{\mu_d m g}{k} \sqrt{1 + \frac{k}{m}\left(\frac{V_{x_0}}{\mu_d g}\right)^2} - \frac{\mu_d m g}{k} = \frac{\mu_d m g}{k}\left[\sqrt{1 + \frac{k}{m}\left(\frac{V_{x_0}}{\mu_d g}\right)^2} - 1\right] =$$

$$= \frac{0{,}5 \cdot (0{,}8\,kg) \cdot (9{,}81\,m/s^2)}{50\,\frac{N}{m}} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{50\,\frac{N}{m}}{0{,}8\,kg}\left(\frac{1{,}2\,m/s}{0{,}5 \cdot 9{,}81\,m/s^2}\right)^2} - 1\right] = 0{,}092\,m$$

Forze conservative ed energia potenziale

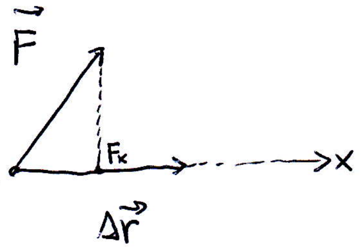
Abbiamo visto, nei casi specifici della forza peso e della forza elastica, che il lavoro svolto da tali forze allorché il corpo si muove da una posizione iniziale a una posizione finale dipende soltanto da queste due posizioni e non dalla traiettoria seguita dal corpo per andare dalla posizione iniziale alla posizione finale. Questo ci ha permesso, in entrambi i casi di introdurre una FUNZIONE DI STATO denominata ENERGIA POTENZIALE tale che il lavoro in questione e' dato dalla differenza tra il valore assunto da tale funzione nella posizione iniziale e il valore assunto nella posizione finale.

Questa caratteristica e' vera in generale per tutte le forze conservative.

Nel caso di forze non conservative, in generale il lavoro compiuto da queste dipende dalla traiettoria seguita dal corpo per andare dalla posizione iniziale alla posizione finale, per cui non e' possibile introdurre una energia potenziale nel caso di forze non conservative.

Viceversa, se è nota la funzione energia potenziale associata a una forza conservativa, è possibile determinare la forza $\vec{F}$ associata a questa energia potenziale.

Consideriamo un piccolo spostamento $\Delta\vec{r}$ diretto lungo l'asse x: $\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{i}$



Il corrispondente lavoro ΔW svolto dalla forza $\vec{F}$ (che si può considerare costante se $|\Delta\vec{r}|$ è piccolo) è dunque:

$$\Delta W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F_x\,\Delta x$$

Ma se $\vec{F}$ è conservativa, risulta $\Delta W = -\Delta U$, dove U è la funzione energia potenziale della forza $\vec{F}$.

Dunque, possiamo scrivere:

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

Passando al limite per $\Delta x \to 0$, otteniamo quindi

$$\boxed{F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad \text{nel caso di moto rettilineo sotto l'azione di } \vec{F} \text{ conservativa}}$$

Se il corpo si muove nel piano sotto l'azione di una forza conservativa, risulta (per uno spostamento $\Delta\vec{r}$ piccolo):

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F} \cdot (\Delta x\, \hat{i} + \Delta y\, \hat{j}) = F_x \Delta x + F_y \Delta y$$

Poiché per una forza conservativa risulta $\Delta W = -\Delta U$, possiamo quindi scrivere

$$F_x \Delta x + F_y \Delta y = -\Delta U$$

Se il moto avviene parallelamente all'asse x, risulta $\Delta y = 0$, per cui in tal caso otteniamo:

$$F_x \Delta x = -\Delta U \Rightarrow F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

Passando al limite per $\Delta x \to 0$ con y fissato, otteniamo:

$$F_x = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}$$ (DERIVATA PARZIALE della funzione $U(x,y)$ rispetto alla x)

Questa derivata si calcola considerando y come una costante, e derivando solo rispetto a x.

Se il moto avviene parallelamente all'asse y, risulta $\Delta x = 0$, per cui in tal caso otteniamo:

$$F_y \Delta y = -\Delta U \Rightarrow F_y = -\frac{\Delta U}{\Delta y}$$

Passando al limite per $\Delta y \to 0$ con x fissato, otteniamo:

$$F_y = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$$ (derivata parziale della funzione $U(x,y)$ rispetto alla y)

In tre dimensioni l'energia potenziale può dipendere anche dalla coordinata z, e risulta:

$$F_x = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} \quad (y, z \text{ costanti})$$

$$F_y = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} \quad (x, z \text{ costanti})$$

$$F_z = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} \quad (x, y \text{ costanti})$$

Queste formule sono sintetizzate nella seguente legge generale, valida per le sole forze conservative:

$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$, dove il simbolo $\vec{\nabla} U$ indica il vettore $\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right)$ nel piano e $\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$ nello spazio. Il simbolo $\vec{\nabla}$ si chiama GRADIENTE, e "opera" su funzioni scalari nel modo indicato qui sopra.

Esempi

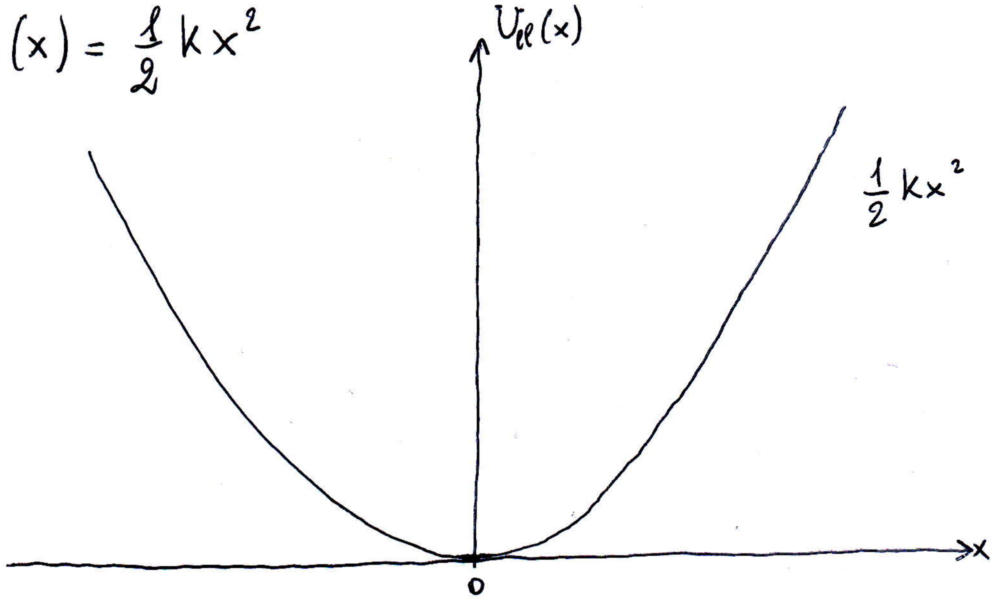
- Forza peso. $U_p(y) = mgy$, con asse y orientato positivamente verso l'alto. Risulta: $F_y = -\frac{dU_p(y)}{dy} = -mg$, come già noto.

- Forza elastica. $U_{el}(x) = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow F_x = -\frac{dU_{el}(x)}{dx} = -kx$, come già noto.

Energia potenziale ed equilibrio di un corpo

Consideriamo il grafico dell'energia potenziale elastica attorno alla posizione $x=0$.

$$U_{el}(x) = \frac{1}{2}kx^2$$



Abbiamo appena visto che risulta, in un caso di questo tipo:

$$F_{el,x} = -\frac{dU_{el}(x)}{dx} = -kx$$

- Per $x=0$ risulta $F_{el,x}=0$, cioe' la forza agente sul corpo e' nulla.
- Per $x>0$ risulta $F_{el,x}<0$, cioe' $a_x<0$, per cui il corpo accelera verso sinistra: se parte da fermo in $x=x_i>0$, si muovera' verso la posizione di equilibrio.
- Per $x<0$ risulta $F_{el,x}>0$, cioe' $a_x>0$, per cui il corpo accelera verso destra: se parte da fermo in $x=x_i<0$, si muovera' verso la posizione di equilibrio.

Nel caso della forza elastica la posizione $x = 0$ e' una posizione di EQUILIBRIO STABILE: qualsiasi spostamento da questa posizione produce una forza di richiamo che tende a riportare il corpo verso la posizione suddetta.

Piu' in generale, una posizione di equilibrio stabile sotto l'azione di una forza conservativa e' un punto di MINIMO RELATIVO per la funzione energia potenziale. Se $x = x_0$ e' tale punto, per l'equilibrio stabile deve risultare $U'(x_0) = 0$, $U''(x_0) > 0$.

Consideriamo ancora il caso del moto sotto l'azione di una forza elastica. Supponiamo che la posizione iniziale sia $x_i = x_M$, e la velocita' iniziale sia $v_{x,i} = 0$.

Dunque, l'energia meccanica del corpo e'

$$E_m = \frac{1}{2} k x_M^2$$

Quando il corpo si trova in una posizione x generica con velocita' v_x, possiamo scrivere $E_m = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} k x^2$.

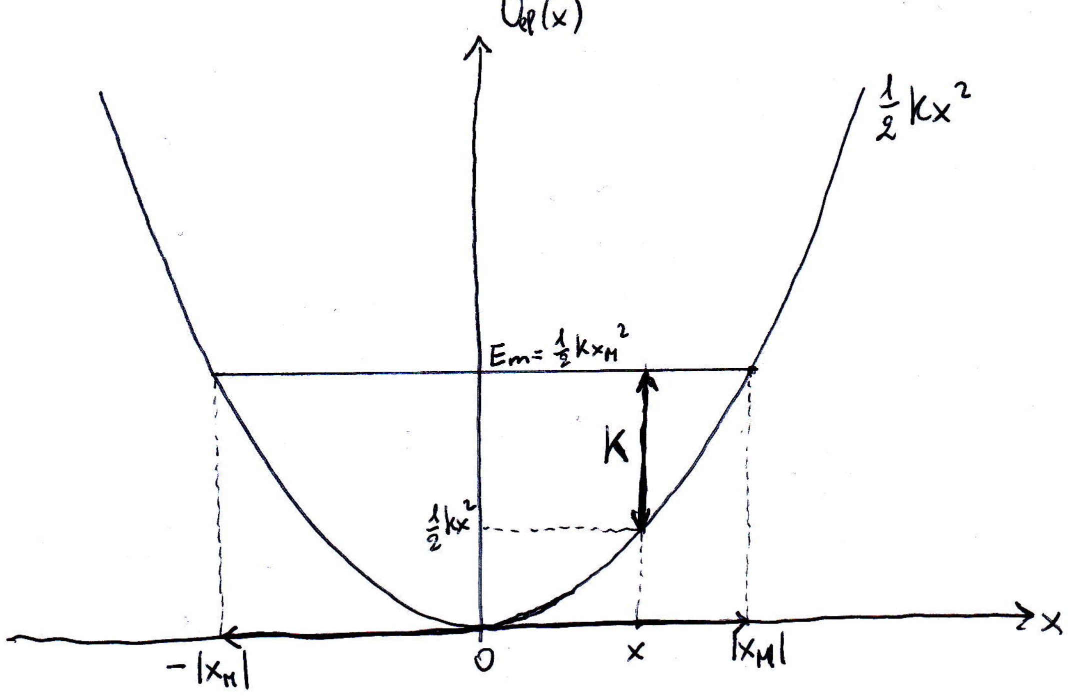
Ma E_m e' costante durante il moto, per cui risulta

$$\frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k x_M^2, \text{ da cui } \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} k (x_M^2 - x^2).$$

Il primo membro e' chiaramente ≥ 0, per cui deve risultare

$$x_M^2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq x_M^2 \Rightarrow -|x_M| \leq x \leq |x_M|$$

Dunque, se un corpo soggetto alla sola forza elastica parte da fermo da una posizione $x = x_M$, durante il moto potrà muoversi soltanto nell'intervallo di posizioni $-|x_M| \leq x_M \leq |x_M|$ lungo l'asse x.



L'energia cinetica del corpo in una posizione generica all'interno dell'intervallo consentito per le posizioni che il corpo può occupare è data, come abbiamo visto in precedenza, da:

$$K = \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} k x_M^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

E' immediato verificare che l'energia cinetica è rappresentata graficamente dal segmento verticale evidenziato nella figura qua sopra, quando il corpo si trova nella posizione x.

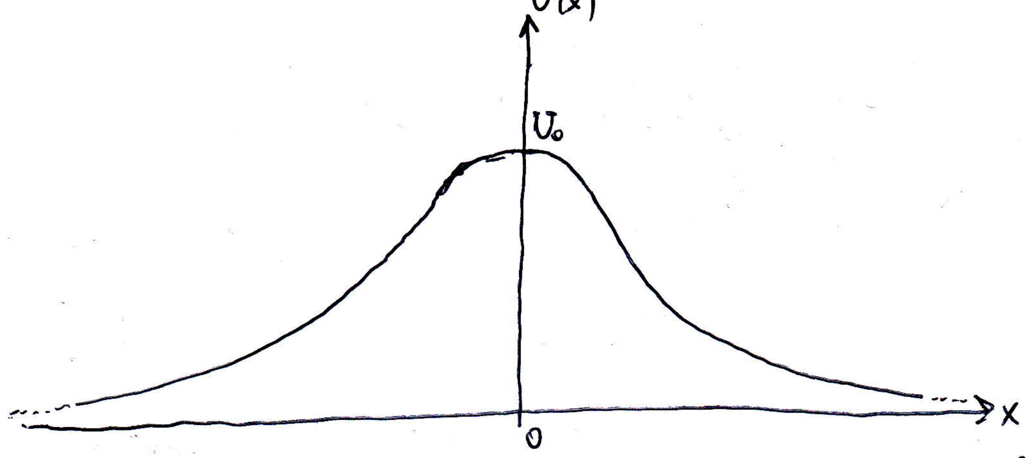
Nei punti $x = \pm|x_M|$ il corpo ha energia cinetica nulla, e quindi velocità istantanea nulla: sono i PUNTI DI INVERSIONE del moto, e sono anche le posizioni possibili più distanti dalla posizione di equilibrio stabile $x = 0$.

Consideriamo adesso un moto sotto l'azione di una forza conservativa avente una funzione energia potenziale $U(x) = U_0 e^{-x^2/x_0^2}$, dove U_0 è una costante positiva avente le dimensioni di una energia, e x_0 è una costante avente le dimensioni di una lunghezza.

Risulta: $U'(x) = U_0 \left(-\frac{2x}{x_0^2}\right) e^{-x^2/x_0^2}$ > 0 per $x < 0$; < 0 per $x > 0$

Risulta $U'(x) = 0$ per $x = 0$; per cui la posizione $x = 0$ è di equilibrio.

Il grafico di $U(x)$ è il seguente:



- Per $x \geq 0$ risulta: $F_x = -\frac{dU(x)}{dx} = \frac{2U_0}{x_0^2} x e^{-x^2/x_0^2} > 0$, cioè $a_x > 0$, per cui il corpo accelera verso destra: se parte da fermo in $x = x_i > 0$, si allontanerà dalla posizione di equilibrio.
- Per $x < 0$ risulta $F_x = -\frac{dU(x)}{dx} = \frac{2U_0}{x_0^2} x e^{-x^2/x_0^2} < 0$, cioè $a_x < 0$, per cui il corpo accelera verso sinistra: se parte da fermo in $x = x_i < 0$, si allontanerà dalla posizione di equilibrio.

Dunque, la posizione di equilibrio sotto l'azione di una forza conservativa con energia potenziale $U(x) = U_0\, e^{-x^2/x_0^2}$

è una posizione di EQUILIBRIO INSTABILE: qualsiasi spostamento da questa posizione produce una forza che tende ad allontanare il corpo dalla posizione di equilibrio.

Più in generale, una posizione di equilibrio instabile sotto l'azione di una forza conservativa è un punto di MASSIMO RELATIVO per la funzione energia potenziale.
Se $x = x_0$ è tale punto, per l'equilibrio instabile deve risultare $U'(x_0) = 0$, $U''(x_0) < 0$.

Le considerazioni fatte valgono in generale (con le dovute precisazioni matematiche) anche quando U dipende da più coordinate (es., moto nel piano o nello spazio sotto l'azione di una forza conservativa).

E' immediato verificare che, se la funzione energia potenziale risulta costante in una certa regione di spazio, in tale regione la forza agente su un corpo è nulla, per cui ogni punto di questa regione è di EQUILIBRIO INDIFFERENTE.