RICHIAMI SULLA PARTE FINALE DELL'ULTIMA LEZIONE

$$\Omega = \{0,1\} \times \dots \times \{0,1\} = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) ; \ \omega_1, \dots, \omega_n \in \{0,1\}\}$$

1 = SUCCESSO
0 = FALLIMENTO

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

P da definire (a partire dagli insiemi del tipo $\{\omega\}$ con $\omega \in \Omega$) per due casi:

1. n prove indipendenti con probabilità di successo p in ogni prova

2. n estrazioni casuali di un oggetto alla volta, senza reinserimento, da un insieme di n_1 oggetti di tipo 1, n_2 oggetti di tipo 2 (con $n_1 + n_2 > n$) [tipo 1 successo, tipo 2 fallimento]

Siamo interessati alla v.a. X che conta il numero di successi, così definita

$$X(\omega) = X(\omega_1, \dots, \omega_n) = \omega_1 + \dots + \omega_n \qquad \forall \omega \in \Omega$$

Vogliamo trovare la densità discreta di X e si ha:

$\forall k \in S_X = \{0, 1, \dots, n\}$ $$p_X(k) = \sum_{\omega : X(\omega) = k} P(\{\omega\})$$ (*)

FINE DEI RICHIAMI DELLA LEZIONE SCORSA

Qui aggiungo un'altra cosa che accadrà nei due casi che vedremo.

Nei casi 1 e 2 avremo che:

$$X(\omega) = X(\omega') \implies P(\{\omega\}) = P(\{\omega'\})$$

Cioè, date due qualsiasi sequenze ω e ω' con lo stesso numero di successi, le rispettive probabilità coincidono

Allora sarà conveniente dire che

$\forall k \in S_X = \{0, 1, \dots, n\}$, esiste q_k tale che

$$X(\omega) = k \implies P(\{\omega\}) = q_k.$$

ESEMPIO: Con $n=3$, esistono $q_0, q_1, q_2, q_3 \geq 0$ tali che

$$\begin{cases} P(\{(0,0,0)\}) = q_0 \\ P(\{(1,0,0)\}) = P(\{(0,1,0)\}) = P(\{(0,0,1)\}) = q_1 \\ P(\{(1,1,0)\}) = P(\{(1,0,1)\}) = P(\{(0,1,1)\}) = q_2 \\ P(\{(1,1,1)\}) = q_3 \end{cases}$$

Ovviamente si dovrà avere

$$q_0 + 3q_1 + 3q_2 + q_3 = 1$$

In corrispondenza, se poniamo (nuova notazione)

$$r_{n,k} = \#\{\omega : X(\omega)=k\},$$

per ogni $k \in S_X = \{0,1,\dots,n\}$ si ha

$$p_X(k) = \sum_{\omega : X(\omega)=k} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega : X(\omega)=k} q_k = \underbrace{q_k + \dots + q_k}_{r_{n,k} \text{ volte}} = r_{n,k} \cdot q_k .$$

(✱)

Il valore di q_k verrà determinato dalle ipotesi dei casi 1 e 2.

$$\boxed{\text{Il valore di } r_{n,k} \text{ possiamo calcolarlo facilmente e si ha: } r_{n,k} = \binom{n}{k}.}$$

PROSSIMA SLIDE

Quindi nei casi 1 e 2 avremo

$$\boxed{p_X(k) = \binom{n}{k} q_k \quad \text{per } k \in \{0,1,\dots,n\}}$$

(◊)

PROPOSIZIONE. Si ha $r_{n,k} = \binom{n}{k}$.

DIMOSTRAZIONE. Ad ogni sequenza di lunghezza n e con esattamente k volte "1" possiamo abbinare il sottoinsieme di $\{1, \dots, n\}$ delle posizioni degli "1":

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \longleftrightarrow \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}.$$

con esattamente k volte 1 nelle posizioni $i_1, \dots, i_k$

OSS. Il numero di stringhe di "questo tipo" è proprio $r_{n,k} = \#\{\omega : X(\omega) = k\}$

OSS. Noi sappiamo che i sottoinsiemi di "questo tipo" sono in tutto $\binom{n}{k}$

Si ha una CORRISPONDENZA BIUNIVOCA tra l'insieme di sequenze e l'insieme dei sottoinsiemi. Essendo una corrispondenza biunivoca tra due insiemi finiti, hanno lo stesso numero di elementi. ∎

ESEMPIO SPECIFICO DELLA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA

$n=4$, $k=2$

Sequenze | sottoinsiemi (sono $\binom{4}{2}=6$ per quanto sappiamo)

$(1,1,0,0) \longleftrightarrow \{1,2\}$
$(1,0,1,0) \longleftrightarrow \{1,3\}$
$(1,0,0,1) \longleftrightarrow \{1,4\}$
$(0,1,1,0) \longleftrightarrow \{2,3\}$
$(0,1,0,1) \longleftrightarrow \{2,4\}$
$(0,0,1,1) \longleftrightarrow \{3,4\}$

Questo spiega che abbiamo $r_{4,2}=6$ sequenze binarie di lunghezza 4 e con esattamente 2 volte "1".

IL CASO 1: DISTRIBUZIONE BINOMIALE

Si usa per la v.a. che conta il numero di successi su n prove indipendenti, con probabilità di successo p in ogni prova (quindi in ogni prova c'è una probabilità di fallimento $1-p$).

Esempi:

- n lanci di moneta (o lanci di n monete dello stesso tipo) e il successo è "esce testa" (oppure "esce croce")
- n lanci di dado (o lanci di n dadi dello stesso tipo) e il successo è "esce un numero in S" dove $S \subset \{1,2,3,4,5,6\}$ fissato
- n estrazioni casuali di un oggetto alla volta con reinserimento da un insieme di n_1 oggetti di tipo 1 e n_2 oggetti di tipo 2, e il successo è "estratto tipo 1" (oppure "estratto tipo 2").

Dobbiamo attribuire i valori $P(\{\omega\})$ per $\omega \in \Omega$ (oss. $\# \Omega = 2^n$).

Stiamo tenendo conto del fatto che le prove sono indipendenti e con prob. di successo p in ogni prova

Per fissare le idee consideriamo il caso $n=3$. Si ha $\# \Omega = 2^3 = 8$.

$P(\{(0,0,0)\}) = (1-p)(1-p)(1-p) = (1-p)^3$.

$P(\{(1,0,0)\}) = p(1-p)(1-p) = p(1-p)^2$

$P(\{(0,1,0)\}) = (1-p)p(1-p) = p(1-p)^2$

$P(\{(0,0,1)\}) = (1-p)(1-p)p = p(1-p)^2$

$P(\{(1,1,0)\}) = p \cdot p \cdot (1-p) = p^2(1-p)$

$P(\{(1,0,1)\}) = p(1-p)p = p^2(1-p)$

$P(\{(0,1,1)\}) = (1-p) \cdot p \cdot p = p^2(1-p)$

$P(\{(1,1,1)\}) = p \cdot p \cdot p = p^3$

Si vede che:

$X(\omega) = 0 \implies P(\{\omega\}) = (1-p)^3 \longleftrightarrow q_0$

$X(\omega) = 1 \implies P(\{\omega\}) = p(1-p)^2 \longleftrightarrow q_1$

$X(\omega) = 2 \implies P(\{\omega\}) = p^2(1-p) \longleftrightarrow q_2$

$X(\omega) = 3 \implies P(\{\omega\}) = p^3 \longleftrightarrow q_3$

dove q_0, q_1, q_2, q_3 sono quelli già introdotti

Ora consideriamo il caso generale. Si ha

Si ha il prodotto per ipotesi di indipendenza

$$P(\{\omega\}) = \underbrace{p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1}}_{1^a \text{ prova}} \underbrace{p^{\omega_2}(1-p)^{1-\omega_2}}_{2^a \text{ prova}} \cdots\cdots \underbrace{p^{\omega_n}(1-p)^{1-\omega_n}}_{n^a \text{ prova}}$$

$$= p^{\omega_1+\dots+\omega_n}(1-p)^{1-\omega_1+1-\omega_2+\dots\dots+1-\omega_n} \qquad 1-\omega_1+1-\omega_2+\dots+1-\omega_n = n-(\omega_1+\dots+\omega_n)$$

$$= p^{X(\omega)}(1-p)^{n-X(\omega)}$$

<u>OSS.</u>

Per ogni $k \in S_X = \{0, 1, \dots, n\}$ possiamo dire che:

per ogni ω tale che $X(\omega)=k$ si ha $P(\{\omega\}) = p^{k}(1-p)^{n-k}$.

Quindi per ogni sequenza di n prove con esattamente k successi si ha la stessa probabilità.

Il valore $p^k(1-p)^{n-k}$ rappresenta il valore q_k introdotto in passato.

A questo punto, con riferimento alla formula (♢), si ha

$$p_X(k) = \binom{n}{k} \underbrace{p^k (1-p)^{n-k}}_{\text{questo è } q_k} \qquad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

Questa è la densità discreta della v.a. con distribuzione Binomiale.

Abbiamo due parametri: $\begin{cases} n = \#\text{ delle prove indipendenti} \\ p = \text{probabilità di successo in ogni prova} \end{cases}$ Talvolta si scrive $X \sim BIN(n, p)$.

OSSERVAZIONI

1) Si deve avere $\sum_{k=0}^{n} p_X(k) = 1$. In effetti $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \underset{\text{BINOMIO DI NEWTON}}{=} (p + (1-p))^n = 1^n = 1$

2) Per $p = \frac{1}{2}$ si ha $1-p = \frac{1}{2}$; quindi la formula si semplifica un po':

$$p_X(k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

(REGOLA: $0^0 = 1$)

3) Per $p = 0$ si ha* $p_X(0) = 1$ e $p_X(k) = 0$ per $k \neq 0$
Per $p = 1$ si ha* $p_X(n) = 1$ e $p_X(k) = 0$ per $k \neq n$

Come ci si aspetta

Inoltre, se $0 < p < 1$, si ha $p_X(k) > 0$ per ogni $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Il caso 2 : DISTRIBUZIONE IPERGEOMETRICA

Supponiamo di avere

n_1 oggetti di "tipo 1"

n_2 oggetti di "tipo 2"

Si estraggono a caso n oggetti

(dove $n < n_1 + n_2$)

uno alla volta e <u>senza</u> reinserimento

(non c'è indipendenza come nel caso di estrazioni <u>con</u> reinserimento)

SUCCESSO $\longleftrightarrow$ "estrazione oggetto di tipo 1"

FALLIMENTO $\longleftrightarrow$ "estrazione oggetto di tipo 2"

Consideriamo il caso

$$\omega = (\underbrace{1,\dots,1}_{k \text{ volte}}, \underbrace{0,\dots,0}_{n-k \text{ volte}})$$

$P(\{\omega\}) = 0$ se $k > n_1$ oppure $n-k > n_2$ (ovvio)

Al contrario ($0 \le k \le n_1$ e $0 \le n-k \le n_2$)

$$P(\{\omega\}) = \frac{n_1}{n_1+n_2} \cdot \frac{n_1-1}{n_1+n_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{n_1-(k-1)}{n_1+n_2-(k-1)} \cdot \frac{n_2}{n_1+n_2-k} \cdot \frac{n_2-1}{n_1+n_2-k-1} \cdots\cdots \frac{n_2-(n-k)}{n_1+n_2-(n-1)} \cdot$$

prob. 1 alla 1^a estrazione

prob. 1 alla 2^a estraz. sapendo

prob. 1 alla k^a estraz. sapendo il passato

prob. 0 alla $(k+1)^a$ estraz. sapendo il passato

ecc.

OSS. Se si cambia sequenza (sempre con k volte "1" e $n-k$ volte "0") si ha sempre lo stesso valore (i denominatori sono gli stessi, cambia l'ordine dei fattori a numeratore).

Quindi siamo nella condizione di dire che

$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$ esiste q_k t.c., se $X(\omega) = k$, allora $P(\{\omega\}) = q_k$

dove

$$q_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k > n_1 \text{ oppure } n-k > n_2 \\ \boxed{\dfrac{n_1}{n_1+n_2} \dfrac{n_1-1}{n_1+n_2-1} \cdots \dfrac{n_1-(k-1)}{n_1+n_2-(k-1)} \dfrac{n_2}{n_1+n_2-k} \dfrac{n_2-1}{n_1+n_2-k-1} \cdots \dfrac{n_2-(n-k-1)}{n_1+n_2-(n-1)}} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\to \; = \frac{\dfrac{n_1!}{(n_1-k)!} \dfrac{n_2!}{(n_2-(n-k))!}}{\dfrac{(n_1+n_2)!}{(n_1+n_2-n)!}} = \frac{\dfrac{n_1!}{k!(n_1-k)!} k! \dfrac{n_2!}{(n-k)!(n_2-(n-k))!} (n-k)!}{\dfrac{(n_1+n_2)!}{n!(n_1+n_2-n)!} n!} = \frac{\binom{n_1}{k} k! \binom{n_2}{n-k} (n-k)!}{\binom{n_1+n_2}{n} n!}$$

$$= \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}\binom{n}{k}}$$

<u>OSS</u>. Questa formula si estende anche al caso $k > n_1$ e $n-k > n_2$ con la regola $\binom{a}{b} = 0$ per $b > a$

In conclusione, con riferimento alla formula (◊), si ha

$$p_X(k) = \cancel{\binom{n}{k}} \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}{\underbrace{\binom{n_1+n_2}{n}\cancel{\binom{n}{k}}}_{\text{questo è } q_k}} = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}} \qquad \forall k\in\{0,1,\dots,n\}.$$

Questa è la densità discreta della v.a. con distribuzione ipergeometrica.

Qui abbiamo tre parametri: $n_1, n_2 > 1$ interi, e n intero con $n < n_1+n_2$.

Si può verificare che $\sum_{k=0}^{n} p_X(k) = 1$ (ometto i dettagli)

A differenza del caso della distribuzione Binomiale si può avere qualche caso con $p_X(k)=0$ "non banale"; si tratta di trovare valori di k tali che $k>n_1$ e $n-k>n_2$.

(In qualche caso si riesce a trovarli, in altri no; dipende da n_1 e n_2).

UN COMMENTO SULLA VALIDITÀ DELLA FORMULA ($\Diamond$)

La formula ($\Diamond$) segue dall'ipotesi che $\boxed{\forall k \in \{0,1,\dots,n\} \text{ esiste } q_k \text{ tale che } X(\omega)=k \Rightarrow P(\{\omega\})=q_k}$.

$(\bullet\bullet)$

(cioè ogni sequenza con esattamente k successi ha la stessa probabilità).

Ora presentiamo un esempio dove $(\bullet\bullet)$ <u>non</u> è vera. Prendiamo:

$n=2$, prove indipendenti, probabilità di successo p_1 e p_2 diverse tra loro ($p_1 \neq p_2$). Si ha

$$P(\{(0,0)\}) = (1-p_1)(1-p_2), \quad P(\{(1,0)\}) = p_1(1-p_2), \quad P(\{(0,1)\}) = (1-p_1)p_2, \quad P(\{(1,1)\}) = p_1 p_2.$$

<u>Se per assurdo si avesse $(\bullet\bullet)$</u>, per $k=1$ si avrebbe $P(\{(1,0)\}) = P(\{(0,1)\})$ da cui seguirebbe

$p_1(1-p_2) = p_2(1-p_1)$, $p_1 - p_1p_2 = p_2 - p_1p_2$, $p_1 = p_2$ (<u>contro l'ipotesi $p_1 \neq p_2$</u>).

In questo caso si ha $p_X(0) = (1-p_1)(1-p_2)$, $p_X(1) = p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)$, $p_X(2) = p_1p_2$.

ESERCIZIO / ESEMPIO

Un'urna ha 3 palline bianche e 6 nere. Si estraggono a caso 4 palline, una alla volta e con reinserimento.

1) Trovare la densità discreta della v.a. X che conta il numero di palline bianche estratte.

2) Rispondere alla stessa domanda nel caso di estrazioni senza reinserimento.

SVOLGIMENTO

1) Si ha $X \sim BIN\left(n=4,\ p=\cancel{\frac{3}{9}}\ \frac{1}{3}\right)$

$\boxed{k \in \{0,1,2,3,4\}}$

$$p_X(k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(1-\frac{1}{3}\right)^{4-k} = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{4-k} = \begin{cases} 16/81 & \text{per } k=0 \\ 32/81 & \text{per } k=1 \\ 24/81 & \text{per } k=2 \\ 8/81 & \text{per } k=3 \\ 1/81 & \text{per } k=4 \end{cases}$$

SOMMA = 1

2) Si ha X ipergeometrica con $n_1=3$, $n_2=6$, $n=4$

$k \in \{0,1,2,3,4\}$

$$p_X(k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{6}{4-k}}{\binom{9}{4}} = \begin{cases} 15/126 & \text{per } k=0 \\ 60/126 & \text{per } k=1 \\ 45/126 & \text{per } k=2 \\ 6/126 & \text{per } k=3 \\ 0 & \text{per } k=4 \end{cases}$$

SOMMA = 1

QUI SI HA ZERO perché $k > n_1$ $(4>3)$

IN EFFETTI $\binom{n_1}{k} = \binom{3}{4} = 0$

ESERCIZIO/ESEMPIO

Abbiamo 4 urne tutte con 2 palline bianche e 3 rosse. Da ogni urna si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e <u>senza</u> reinserimento.

1) Trovare la densità discreta della v.a. X_1 che conta il numero di urne dalle quali si estraggono 2 palline di colori diversi.

2) Trovare la densità discreta della v.a. X_2 che conta il numero di urne dalle quali si estraggono una pallina rossa e una pallina bianca in quest'ordine.

SVOLGIMENTO.

Le estrazioni da urne diverse non si influenzano e quindi definiscono famiglie di eventi indipendenti.

Quindi, in entrambi i casi, si tratta di contare il numero di successi su 4 prove indipendenti e tutte con la stessa probabilità di successo cioè

$X_1 \sim BIN(n=4, p_1)$ $\quad$ p_1 = Probabilità di estrarre colori diversi da una singola urna

$X_2 \sim BIN(n=4, p_2)$ $\quad$ p_2 = Probabilità di estrarre la sequenza di colori (R, B) da una singola urna.

1) Calcolo p_1 in due modi diversi:

1° modo $\quad p_1 = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2 \cdot 3}{10} = \frac{3}{5}$

2° modo $\quad p_1 = P(R_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|R_1)\,P(R_1)$

$= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} =$

$= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$$p_{X_1}(k) = \binom{4}{k} p_1^k (1-p_1)^{4-k} = \qquad k \in \{0,1,2,3,4\}$$

$$= \begin{cases} 16/625 & \text{per } k=0 \\ 96/625 & \text{per } k=1 \\ 216/625 & \text{per } k=2 \\ 216/625 & \text{per } k=3 \\ 81/625 & \text{per } k=4 \end{cases}$$

SOMMA = 1

2) Calcolo p_2 come segue

$$p_2 = P(B_2|R_1)P(R_1) = \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$p_{X_2}(k) = \binom{4}{k} p_2^k (1-p_2)^{4-k} \qquad k \in \{0,1,2,3,4\}$$

$$= \begin{cases} 2401/10000 & \text{per } k=0 \\ 4116/10000 & \text{per } k=1 \\ 2646/10000 & \text{per } k=2 \\ 756/10000 & \text{per } k=3 \\ 81/10000 & \text{per } k=4 \end{cases}$$

SOMMA = 1

ESEMPIO (estrazioni senza reinserimento con n_1+n_2 "molto più grande" di n)

Un'urna ha 500 palline bianche e 500 nere. Si estraggono 3 palline a caso una alla volta e <u>senza</u> reinserimento. Trovare la densità della v.a. X che conta il numero di palline bianche estratte.

RISPOSTA

$$P_X(k) = \frac{\binom{500}{k}\binom{500}{3-k}}{\binom{1000}{3}} = \begin{cases} \binom{500}{3}\Big/\binom{1000}{3} = \dfrac{\cancel{500}^{\,1}\cdot 499\cdot 498}{\cancel{1000}_{\,2}\cdot 999\cdot 998} \simeq \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8} & \text{per } k=0 \text{ e } k=3 \\ \binom{500}{1}\binom{500}{2}\Big/\binom{1000}{3} = \dfrac{{}^{1}\cancel{500}\ \dfrac{500\cdot 499}{\cancel{2}}}{\dfrac{2\,\cancel{1000}\cdot 999\cdot 998}{3\cdot\cancel{2}}} \simeq 3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8} & \text{per } k=1 \text{ e } k=2. \end{cases}$$

COMMENTO

Se si considerasse il caso di estrazioni <u>con</u> reinserimento si avrebbe $X \sim BIN\left(n=3,\ p=\frac{\cancel{500}^{\,1}}{\cancel{1000}_{\,2}}\right)$ e si ha

$$P_X(k) = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \begin{cases} 1/8 & \text{per } k=0 \text{ e } k=3 \\ 3/8 & \text{per } k=1 \text{ e } k=2. \end{cases}$$

Quando n_1+n_2 è "molto più grande" di n si ha una situazione "<u>molto vicina al caso di estrazioni con reinserimento</u>".

ESERCIZIO (con agganci con argomenti passati)

Si lancia 4 volte un dado equo.

1) Calcolare la probabilità che esca almeno una volta il numero 1.
2) Calcolare la probabilità che esca al più una volta un numero minore o uguale a 2.
3) Calcolare la probabilità che esca la sequenza (pari, 1, dispari, 1 oppure 2).
4) Calcolare la probabilità che esca la sequenza (1, dispari, pari, pari) sapendo che il numero 1 è uscito esattamente una volta.

SVOLGIMENTO

I lanci di dadi diversi non si influenzano; quindi eventi legati a lanci di dadi diversi sono indipendenti.

1) Sia $X = \#$ di volte che esce il numero 1 ; $X \sim BIN(n=4, p=1/6)$

La probabilità richiesta è $P(X \geq 1) = \sum_{k=1}^{4} p_X(k) = \sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-k} = \ldots$

È più conveniente passare per il complementare:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1 - p_X(0) = 1 - \overbrace{\binom{4}{0}}^{=1}\overbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^0}^{=1}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-0} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{1296-625}{1296} = \frac{671}{1296}.$$

2) Sia Y = # di volte che esce 1 o 2 ; $Y \sim BIN(n=4, p=\cancel{\tfrac{2}{6}}\tfrac{1}{3})$

La probabilità richiesta è $P(Y \leq 1)$. Quindi

$$P(Y\leq 1) = \sum_{k=0}^{1} p_Y(k) = \sum_{k=0}^{1} \binom{4}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(1-\frac{1}{3}\right)^{4-k} = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{16+32}{81} = \frac{48}{81} = \frac{16}{27}.$$

3) $$P(\text{pari}, 1, \text{dispari}, 1 \text{ oppure } 2) \underset{\text{indipendenze}}{=} \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{6}_{2}} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{\cancel{3}}{6} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{6}} = \frac{1}{72}.$$

4) Sia $E = \{\text{esce } (1, \text{dispari}, \text{pari}, \text{pari})\}$ e sia X la v.a. alla domanda 1.

La probabilità richiesta è $P(E|X=1)$. Quindi

$$P(E|X=1) = \frac{P(E \cap \{X=1\})}{P(X=1)} = \frac{P(\{\text{esce } (1, 3 \text{ o } 5, \text{pari}, \text{pari})\})}{\binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-1}} = \frac{\frac{1}{\cancel{6}}\cdot\frac{2}{\cancel{6}}\cdot\frac{3}{\cancel{6}}\cdot\frac{3}{\cancel{6}}}{4\cdot\frac{5^3}{\cancel{6^4}}} =$$

$$= \frac{\cancel{2}\cdot 3\cdot 3}{\cancel{4}_{2}\cdot 5^3} = \frac{9}{250}.$$

ESERCIZIO (con agganci con argomenti passati)

Si considerino lanci ripetuti di una coppia di dadi.

1) Calcolare la probabilità che, su tre lanci, esca "somma 7" al più 2 volte.

2) Calcolare la probabilità che, su due lanci, esce $((\text{pari}, \text{dispari}), (\text{dispari}, \text{pari}))$ sapendo che esce due volte "somma 11".

SVOLGIMENTO

1) Sia $X = \#$ di volte che esce "somma 7" su tre lanci. Quindi $X \sim Bin\left(n=3, p = \frac{\cancel{6}^{\,1}}{\cancel{36}_{\,6}}\right)$

$$\boxed{\begin{matrix} (1,6) & (6,1) \\ (2,5) & (5,2) \\ (3,4) & (4,3) \end{matrix}}$$

La probabilità richiesta è $P(X \leq 2)$. Conviene passare per il complementare:

$$P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2) = 1 - P(X = 3) = 1 - p_X(3) = 1 - \underbrace{\binom{3}{3}}_{=1}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \underbrace{\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-3}}_{=1} = 1 - \frac{1}{216} = \frac{216-1}{216} =$$

$$= \frac{215}{216}.$$

2) Sia $E = \{$ esce la sequenza $((\text{pari}, \text{dispari}), (\text{dispari}, \text{pari}))\}$

Sia $Y = \#$ di volte che esce "somma 11" su due lanci. Quindi $Y \sim BIN\left(n=2,\ p = \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{36}_{\,18}}\right)$ $(6,5)\ (5,6)$

La probabilità richiesta è $P(E \mid Y=2)$. Si ha

$$P(E \mid Y=2) = \frac{P(E \cap \{Y=2\})}{P(Y=2)} = \frac{P(\{\text{esce } ((6,5),(5,6))\})}{\underbrace{\binom{2}{2}}_{=1}\left(\frac{1}{18}\right)^2\underbrace{\left(1-\frac{1}{18}\right)^{2-2}}_{=1}} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{18}} =$$

$$= \frac{\cancel{18}^{\,1}\cdot\cancel{18}^{\,1}}{\cancel{36}_{\,2}\cdot\cancel{36}_{\,2}} = \frac{1}{4}.$$