Esercizi di cinematica del moto rettilineo

Serway n. 60

Una industria di automobili afferma che la sua macchina sportiva extra-lusso raggiunge partendo da fermo una velocità di 42 m/s in 8 s

a) Si determini l'accelerazione media dell'auto

Si faccia poi l'ipotesi che l'auto abbia un'accelerazione costante.

b) Si trovi lo spazio percorso dell'auto nei primi 8 s.

c) Qual è la velocità dell'auto dopo 10 s dalla partenza se continua con la stessa accelerazione?

a)

Per definizione, l'accelerazione media nei primi 8 s del moto dell'auto è:

$$a_{x,med} = \frac{V_x(t_1) - V_{x,0}}{t_1 - t_0}, \quad \text{essendo } t_0 = 0,\ V_{x,0} = 0,\ t_1 = 8\,s,\ V_x(t_1) = 42\ m/s$$

Allora: $a_{x,med} = \frac{42\ m/s}{8\ s} = 5,25\ m/s^2$

Nella ipotesi secondo cui $a_x(t) =$ costante, risulta

$$a_x(t) = a_x = a_{x,med} = 5{,}25 \ m/s^2 .$$

Dalla legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato otteniamo: $x(t) = x_0 + V_{x,0}\, t + \frac{1}{2} a_x t^2$, con

$x_0 = 0$, $V_{x,0} = 0$. Allora, preso $t = t_1 = 8 s$:

$$x(t = t_1) = \frac{1}{2} a_x t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(5{,}25 \frac{m}{s^2}\right) \cdot \left(64 \ s^2\right) = 168 \ m$$

Qual è la velocità dell'auto all'istante $t = 10 \ s$?

Posto $t_2 = 10 \ s$, risulta:

$V_x(t) = V_{x,0} + a_x t$; essendo $V_{x,0} = 0$, otteniamo

$$V_x(t = t_2) = a_x t_2 = \left(5{,}25 \frac{m}{s^2}\right) \cdot (10 \ s) = 52{,}5 \ m/s$$

Serway n. 61

Si ritiene che l'insetto Philaenus spumarius sia il miglior saltatore del regno animale. Nel saltare l'insetto può accelerare a $4\ km/s^2$ per una distanza di 2 mm grazie alle sue zampe da saltatore. Si faccia l'ipotesi che la sua accelerazione sia costante.

a) Si trovi la velocità verso l'alto raggiunta dall'insetto nel salto.

b) In quanto tempo acquista questa velocità?

c) A quale altezza giunge l'insetto se si trascura la resistenza dell'aria?

a) Conviene utilizzare la relazione

$$(v_x(t))^2 = v_{x,0}^2 + 2a_x\,[x(t) - x_0]$$

Partendo l'insetto da fermo, risulta $x_0 = 0$, $v_{x0} = 0$; essendo poi $x(t) = 2\ mm = 2 \times 10^{-3}\ m$, e $a_x = 4\ km/s^2 = 4 \times 10^3\ m/s^2$, otteniamo:

$$v_x(t) = \sqrt{2a_x x(t)} = \sqrt{2 \cdot \left(4\times10^3 \frac{m}{s^2}\right)\cdot\left(2\times10^{-3}\,m\right)} = 4\ m/s,$$

che è la velocità istantanea raggiunta dall'insetto al momento del salto.

b) Dalla legge $v_x(t) = v_{x,0} + a_x t$, essendo $v_{x,0} = 0$,

poniamo $t = t_1$ l'istante in cui la velocita' istantanea acquista il valore $v_x(t_1) = v_{x,1} = 4\ m/s$.

Risulta quindi: $v_x(t_1) = a_x t_1$, e dunque ricaviamo

$$t_1 = \frac{v_x(t_1)}{a_x} = \frac{4\ m/s}{4 \times 10^3\ m/s^2} = 10^{-3}\ s = 1\ ms$$

c) Staccandosi dal suolo con velocita' istantanea iniziale $v_{x,0} = 4\ m/s$, essendo $x_0 = 0$, conviene utilizzare la relazione

$$(v_x(t))^2 = v_{x,0}^2 + 2 a_x x(t)$$

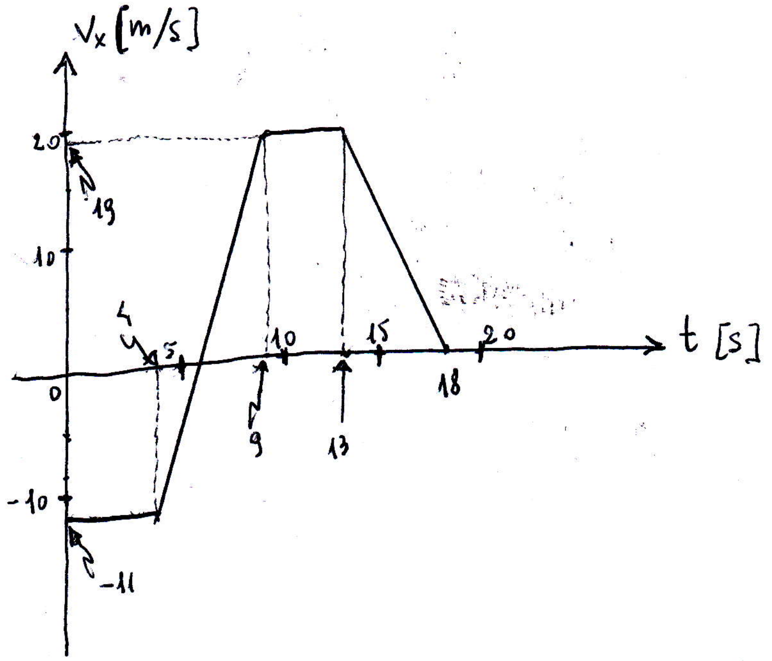
Stavolta risulta $a_x = -g = -9{,}81\ m/s^2$, e nell'istante t_2 in cui l'insetto raggiunge la quota massima risulta $v_x(t_2) = 0$; dunque risulta:

$$0 = v_{x,0}^2 - 2g\,x(t_2), \text{ da cui } x(t_2) = \frac{v_{x,0}^2}{2g} =$$

$$= \frac{16\ m^2/s^2}{2 \cdot 9{,}81\ m/s^2} = 0{,}815\ m$$

Serway n. 62

Un corpo, che si trova in $x=0$ all'istante $t=0$, si muove lungo l'asse x e il moto è descritto dal seguente diagramma velocità - tempo:



a) Qual è il valore dell'accelerazione nell'intervallo fra 0 e 4 s?

b) E nell'intervallo fra 4 s e 9 s?

c) Qual è il valore dell'accelerazione fra 13 s e 18 s?

d) A quale istante la velocità del corpo è minima?

e) A quale istante il corpo si trova alla massima distanza da $x=0$?

f) Qual è la posizione x finale del corpo a $t=18$ s?

g) Quale distanza il corpo ha complessivamente percorso fra $t=0$ e $t=18$ s?

a) Nell'intervallo di tempo $[0, 4\,s]$ $V_x(t)$ e' costante, per cui risulta $a_{x,med} = 0$, e anche $a_x(t) = 0$ per $0 \leq t < 4s$ (ovvio).

b) Nell'intervallo di tempo $[4\,s, 9\,s]$ risulta, dal grafico:

$$a_{x,med} = \frac{V_x(t=9\,s) - V_x(t=4\,s)}{9\,s - 4\,s} = \frac{19\,m/s - (-11\,m/s)}{5\,s} =$$

$$= \frac{30\,m/s}{5\,s} = 6\,m/s^2$$

Questo e' vero anche per $a_x(t)$ per $4s \leq t \leq 9s$, in quanto $V_x'(t) = 6\,m/s^2$ per $4\,s \leq t \leq 9\,s$.

c) Nell'intervallo di tempo $[13\,s, 18\,s]$ risulta, dal grafico:

$$a_{x,med} = \frac{V_x(t=18\,s) - V_x(t=13\,s)}{18\,s - 13\,s} = \frac{0 - 19\,m/s}{5\,s} = -3{,}8\,m/s^2$$

Questo e' vero anche per $a_x(t)$ per $13\,s \leq t \leq 18\,s$, in quanto $V_x'(t) = -3{,}8\,m/s^2$ per $13\,s \leq t \leq 18\,s$

d) La funzione $V_x(t)$ assume valore minimo uguale a $-11\,m/s$ per $0 \leq t \leq 4\,s$

$|V_x(t)|$ assume valore minimo uguale a zero per $t = 6\,s$ e per $t = 18\,s$.

e) Tra l'istante $t=0$ e l'istante $t=6\,s$ il corpo si muove verso sinistra ($v_x(t)<0$), arrivando all'istante $t=6\,s$ nel punto di coordinate

$$x(t=6\,s) = -\frac{1}{2}(6+4)\cdot 11\ m = -55\ m$$ (area del trapezio rettangolo)

Tra l'istante $t=6\,s$ e l'istante $t=18\,s$ il corpo si muove verso destra ($v_x(t)>0$), spostandosi verso destra di un tratto (area del trapezio di destra)

$$\Delta x = \frac{1}{2}\cdot[(18-6)+(13-9)]\cdot 19\ m = \frac{1}{2}(12+4)\cdot 19\ m =$$

$$= 8\cdot 19\ m = 152\ m,$$ arrivando quindi

a una distanza pari a $(-55\ m + 152\ m) = 97\ m$ dall'origine.

Pertanto il corpo si trova alla massima distanza dall'origine all'istante $t=18\,s$

f) La posizione finale del corpo all'istante $t=18\,s$ è quindi $x(t=18\,s) = 97\ m$

g) La distanza complessivamente percorsa si calcola considerando tutti i singoli spostamenti in valore assoluto e sommandoli:

$$D_{TOT} = 55\ m + 152\ m = 207\ m$$

Serway n. 63

Uno studente di fisica, che è anche alpinista, scala una parete di 50 m a picco su di uno specchio d'acqua. Egli scaglia due pietre verticalmente verso il basso a 1 s l'una dall'altra e percepisce un unico tonfo. La prima pietra ha una velocità iniziale di 2 m/s.

a) Quanto tempo dopo il lancio della prima pietra le due pietre toccano l'acqua?

b) Quale velocità iniziale deve avere la seconda pietra se entrambe devono arrivare simultaneamente?

c) Quale sarà la velocità di ciascuna pietra nell'istante in cui toccano l'acqua?

a) E' sufficiente calcolare il tempo di caduta della prima pietra a partire dalla legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato. Per comodità scegliamo un asse x orientato positivamente verso il basso, in modo che $a_x = g = 9{,}81\ m/s^2$

$x_0 = 0$, $V_{x,0} = 2\ m/s$ (dati del problema). Allora:

$$x(t) = x_0 + V_{x,0}\,t + \frac{1}{2} a_x t^2 = V_{x,0}\,t + \frac{1}{2} g t^2$$

Se la pietra tocca la superficie dell'acqua all'istante $t = t_1$, risulta $x(t_1) = h = 50$ m (dato del problema). Dunque:

$$h = V_{x,0}\, t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2$$

Riarrangiamo l'equazione; anzitutto moltiplichiamo i due membri per $\frac{2}{g}$:

$$\frac{2h}{g} = \left(\frac{2V_{x,0}}{g}\right) t_1 + t_1^2 \Rightarrow t_1^2 + \left(\frac{2V_{x,0}}{g}\right) t_1 - \frac{2h}{g} = 0$$

Troviamo le due radici utilizzando la formula ridotta:

$$t_1 = -\frac{V_{x,0}}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{V_{x,0}}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}}$$

E' accettabile solo la radice con il segno + davanti al radicale; l'altra radice e' negativa e quindi non accettabile:

$$t_1 = \sqrt{\left(\frac{V_{x,0}}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} - \frac{V_{x,0}}{g} = \left[\sqrt{\left(\frac{2}{9{,}81}\right)^2 + \frac{2 \cdot 50}{9{,}81}} - \frac{2}{9{,}81}\right] s = 3{,}00\ s$$

(arrotondato al 100° di secondo)

b) La velocita' iniziale della seconda pietra dovra' essere tale da far si' che il tempo di caduta della seconda pietra sia minore del tempo di caduta della prima pietra esattamente di una quantita' $\tau = 1$ s. In questo modo, poiché la seconda pietra viene lanciata verso il basso esattamente con un ritardo τ rispetto alla prima pietra, la seconda pietra toccherà l'acqua nello stesso istante in cui anche la prima pietra tocca l'acqua.

Indichiamo con t_2 il tempo di caduta della seconda pietra. Il calcolo è identico a quello svolto nel punto a), per cui risulta:

$$t_2 = \sqrt{\left(\frac{V_{2x,0}}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} - \frac{V_{2x,0}}{g} = t_1 - \tau$$

Riarrangiamo l'equazione:

$$\sqrt{\left(\frac{V_{2x,0}}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} = \frac{V_{2x,0}}{g} + t_1 - \tau$$

Eleviamo al quadrato i due membri dell'equazione; non occorre imporre ulteriori condizioni su $V_{2x,0}$ in quanto il 2° membro è chiaramente sempre positivo quando $V_{2x,0} > 0$:

$$\cancel{\left(\frac{V_{2x,0}}{g}\right)^2} + \frac{2h}{g} = \cancel{\left(\frac{V_{2x,0}}{g}\right)^2} + 2(t_1 - \tau)\frac{V_{2x,0}}{g} + (t_1 - \tau)^2$$

$$2(t_1 - \tau)\frac{V_{2x,0}}{g} = \frac{2h}{g} - (t_1 - \tau)^2$$

$$V_{2x,0} = \frac{g}{2(t_1 - \tau)}\left[\frac{2h}{g} - (t_1 - \tau)^2\right] = \frac{h}{t_1 - \tau} - \frac{1}{2}g(t_1 - \tau) =$$

$$= \left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 2\right)\frac{m}{s} = 15{,}19\ \frac{m}{s} \quad \text{verso il basso.}$$

c) Per quanto riguarda la prima pietra, risulta:

$$V_x(t=t_1) = V_{x,0} + g t_1 = \left(2 + 9{,}81 \cdot 3\right) \frac{m}{s} = 31{,}43 \frac{m}{s}$$

Per quanto riguarda la seconda pietra, risulta:

$$V_{2x}(t=t_2) = V_{2x,0} + g t_2 = \left(15{,}19 + 9{,}81 \cdot 2\right) \frac{m}{s} = 34{,}81 \frac{m}{s}$$

Serway n. 65

Una palla parte da ferma e accelera a $0{,}5\ m/s^2$ mentre scende lungo un piano inclinato lungo 9 m.
Quando raggiunge la fine, la palla risale lungo un secondo piano inclinato dove si ferma dopo 15 m.

a) Qual è la velocità della palla alla fine del primo piano?

b) Per quanto tempo la palla rimane sul primo piano?

c) Qual è l'accelerazione sul secondo piano?

d) Qual è la velocità scalare a 8 m lungo il secondo piano?

a) Conviene utilizzare la legge valida per il moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$(V_x(t))^2 = V_{x,0}^2 + 2a_x\,(x(t) - x_0)$$

In questo caso abbiamo (dati del problema):

$V_{x,0} = 0$, $\quad a_x = 0{,}5\ m/s^2$, $\quad x_0 = 0$, $\quad x(t) = 9m$;

$$(V_x(t))^2 = 2a_x \cdot x(t) \Rightarrow V_x(t) = \sqrt{2a_x\, x(t)} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 0{,}5\frac{m}{s^2} \cdot 9m} = 3\ \frac{m}{s}$$

b) Dalla legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato otteniamo:

$$x(t) = x_0 + V_{x,0}\,t + \frac{1}{2}a_x t^2, \quad \text{con } x_0 = 0,\ V_{x,0} = 0,\ x(t) = 9\ m;$$
$$a_x = 0{,}5\ m/s^2$$

$x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2$, da cui

$$t^2 = \frac{2x(t)}{a_x} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x(t)}{a_x}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9m}{0{,}5\frac{m}{s^2}}} = 6\ s$$

c) Per quanto riguarda il moto sul secondo piano inclinato, facendo ripartire il conteggio del tempo dall'istante in cui il corpo inizia a muoversi sul secondo piano inclinato, abbiamo: $\quad x_0 = 0$, $\quad V_{x,0} = 3\frac{m}{s}$, $\quad x(t) = 15\ m$.

Utilizziamo ancora la legge sfruttata per rispondere al punto a):

$$(V_x(t))^2 = V_{x,0}^2 + 2a_x(x(t) - x_0)$$

Quando il corpo ha raggiunto la coordinata $x(t) = 15$ si ferma, risulta cioè $V_x(t) = 0$. Allora:

$$0 = V_{x,0}^2 + 2a_x x(t),$$ da cui otteniamo

$$a_x = -\frac{V_{x,0}^2}{2x(t)} = -\frac{(3\frac{m}{s})^2}{2 \cdot 15\ m} = -\frac{9}{30}\frac{m}{s^2} = -0,3\frac{m}{s^2}$$

d) Sia t_1 l'istante in cui risulta (sul secondo piano inclinato) $x(t_1) = 8\ m$; risulta

$$(V_x(t_1))^2 = V_{x,0}^2 + 2a_x(x(t_1) - x_0)$$

Essendo $x_0 = 0$, $V_{x,0} = 3\frac{m}{s}$, $a_x = -0,3\frac{m}{s^2}$, $x(t_1) = 8\ m$, otteniamo

$$(V_x(t_1))^2 = V_{x,0}^2 + 2a_x \cdot x(t_1),$$ da cui

$$|V_x(t_1)| = \sqrt{V_{x,0}^2 + 2a_x \cdot x(t_1)} = \sqrt{(3\frac{m}{s})^2 + 2 \cdot (-0,3\frac{m}{s^2}) \cdot (8\ m)} =$$

$$= \sqrt{9\frac{m^2}{s^2} - 4,8\frac{m^2}{s^2}} = \sqrt{4,2\frac{m^2}{s^2}} = 2,05\frac{m}{s}$$

Serway n. 66

Una donna è caduta per 114 ft dal 17° piano di un edificio atterrando, senza riportare gravi danni fisici, su di una scatola di ventilazione che si è schiacciata di 18 in.

Trascurando la resistenza dell'aria si calcolino:

a) la velocità della donna immediatamente prima di impattare la scatola del ventilatore;

b) la sua accelerazione media quando è in contatto con la scatola.

c) Ipotizzando la sua accelerazione costante, si calcoli l'intervallo di tempo in cui si deforma la scatola.

$h = 114 \ ft \qquad 1 \ ft = 0,3048 \ m \Rightarrow h = 114 \cdot 0,3048 \ m = 34,75 \ m$

$d = 18 \ in \qquad 1 \ in = 0,0254 \ m \Rightarrow d = 18 \cdot 0,0254 \ m = 0,46 \ m$

a) Considerando un asse x orientato verso il basso, con origine nel punto in cui è iniziata la caduta da ferma, usiamo la legge valida per il moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$(v_x(t))^2 = v_{x,0}^2 + 2a_x\left(x(t) - x_0\right), \quad \text{con}$$

$$x_0 = 0, \quad v_{x,0} = 0, \quad a_x = g = 9,81 \frac{m}{s^2}, \quad x(t) = h = 34,75 \ m$$

$$(V_x(t))^2 = 2a_x\, x(t) \Rightarrow \qquad V_x(t) = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot\left(9{,}81\ \frac{m}{s^2}\right)\cdot(34{,}75\ m)} = 26{,}11\ \frac{m}{s}$$

b) Supponendo di voler calcolare l'accelerazione media durante l'intervallo di tempo in cui c'è contatto con la scatola, utilizziamo ancora le leggi valide per il moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$(V_x(t))^2 = V_{x,0}^2 + 2a_x(x(t) - x_0)$$

Considerando un asse x diretto positivamente verso il basso, con origine sulla faccia superiore della scatola, posto che all'istante $t=0$ inizi il contatto con la scatola, risulta:

$$V_{x,0} = \sqrt{2gh} = 26{,}11\ \frac{m}{s}, \quad x_0 = 0, \quad x(t_1) = d = 0{,}46\ m$$

$V_x(t_1) = 0$, essendo t_1 l'istante in cui la donna arriva a fermarsi. Allora:

$$0 = 2gh + 2d\,a_x \Rightarrow \qquad a_x = -\frac{h}{d}g = -\left(\frac{34{,}75\ m}{0{,}46\ m}\right)\cdot\left(9{,}81\ \frac{m}{s^2}\right) =$$

$$= -741{,}08\ \frac{m}{s^2}$$

c) Usando la legge del moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$x(t) = x_0 + V_{x,0}\, t + \frac{1}{2} a_x t^2 \,, \quad \text{con} \quad x_0 = 0, \; V_{x,0} = \sqrt{2gh}, \; x(t) = d,$$

$a_x = -\frac{h}{d} g$ costante (ipotesi del problema), otteniamo

$$d = \sqrt{2gh}\, t - \frac{h}{2d} g t^2$$

Moltiplichiamo i due membri dell'equazione per il fattore $\frac{2d}{gh}$:

$$\frac{2d^2}{gh} = \frac{2d}{gh}\sqrt{2gh}\, t - t^2,$$ e riordiniamo i termini dell'equazione:

$$t^2 - 2\frac{d}{gh}\sqrt{2gh}\, t + \frac{2d^2}{gh} = 0$$

Le radici dell'equazione sono:

$$t_{1,2} = \frac{d}{gh}\sqrt{2gh} \pm \sqrt{\cancel{\frac{d^2}{g^2 h^2}\cdot 2gh} - \cancel{\frac{2d^2}{gh}}} = d\sqrt{\frac{2}{gh}} =$$

$$= (0{,}46\ \text{m}) \cdot \sqrt{\frac{2}{\left(9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(34{,}75\ \text{m})}} = 0{,}035\ \text{s} = 35\ \text{ms}$$

Alternativa:

$$V_x(t) = V_{x,0} + a_x t \,, \quad \text{con} \quad V_{x,0} = \sqrt{2gh}, \quad a_x = -\frac{h}{d} g, \quad V_x(t) = 0:$$

$$0 = \sqrt{2gh} - \frac{h}{d} g t \;\Rightarrow\; t = \frac{d}{gh}\sqrt{2gh} = d\sqrt{\frac{2}{gh}} \quad \text{(ok!!)}$$

Serway n. 67

Un ascensore si muove verso il basso alla velocità costante di 5 m/s. Il tetto dell'ascensore smuove un bullone fissato alla parete entro cui scorre, e il bullone inizia a cadere da fermo esattamente 5 s dopo essere stato smosso.

a) A quale istante il bullone colpisce il tetto dell'ascensore che sta ancora scendendo?

b) Si stimi l'altezza del piano dal quale cade il bullone se l'ascensore raggiunge il piano terra prima che il bullone colpisce il suo tetto.

---

a) Poniamo $V_{ax} = 5 \frac{m}{s}$, e $T = 5\,s$.

A partire dall'istante in cui il bullone inizia a cadere, indichiamo con Δt_1 l'intervallo di tempo necessario per arrivare a toccare il tetto dell'ascensore che si sta muovendo verso il basso a velocità costante, e con l_1 il tratto verticale percorso dal bullone in caduta libera partendo da fermo:

$$l_1 = \frac{1}{2} g (\Delta t_1)^2$$

A partire dall'istante in cui l'ascensore tocca il bullone, fino all'istante in cui il bullone tocca nuovamente il tetto dell'ascensore, l'intervallo di tempo necessario è

$\Delta t_2 = T + \Delta t_1$; in questo intervallo di tempo l'ascensore percorre in verticale un tratto $l_2 = V_{ex} \cdot (T + \Delta t_1)$ muovendosi di moto rettilineo uniforme.

Chiaramente deve risultare $l_1 = l_2$, cioè:

$$\frac{1}{2} g (\Delta t_1)^2 = V_{ex} (T + \Delta t_1).$$

Moltiplichiamo i due membri per $\frac{2}{g}$:

$$(\Delta t_1)^2 = \frac{2 V_{ex} T}{g} + \frac{2 V_{ex}}{g} (\Delta t_1)$$, e riordiniamo i termini:

$$(\Delta t_1)^2 - 2 \frac{V_{ex}}{g} \Delta t_1 - \frac{2 V_{ex} T}{g} = 0$$

Troviamo le radici usando la formula ridotta:

$$\Delta t_1 = \frac{V_{ex}}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{V_{ex}}{g}\right)^2 + \frac{2 V_{ex} T}{g}}$$

E' accettabile la sola soluzione con il segno positivo di fronte al radicale (l'altra radice è negativa):

$$\Delta t_1 = \sqrt{\left(\frac{V_{ex}}{g}\right)^2 + \frac{2 V_{ex} T}{g}} + \frac{V_{ex}}{g} = 2,82 \text{ s}$$

b) Indichiamo con h l'altezza del piano dal quale inizia a cadere il bullone. Il tempo Δt_2 impiegato dal bullone per raggiungere il suolo è tale che

$$h = \frac{1}{2} g (\Delta t_2)^2 \Rightarrow \Delta t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Il tempo impiegato dall'ascensore per raggiungere il suolo a partire dall'istante in cui tocca il bullone è uguale a $T + \Delta t_3$, dove Δt_3 è l'intervallo di tempo misurato a partire dall'istante in cui il bullone inizia a cadere, e risulta $h = V_{ex}(T + \Delta t_3)$, da cui otteniamo $T + \Delta t_3 = \frac{h}{V_{ex}} \Rightarrow \Delta t_3 = \frac{h}{V_{ex}} - T$

Affinché l'ascensore tocchi terra prima ~~della~~ che il bullone colpisca il tetto dell'ascensore, deve risultare

$$\Delta t_2 > \Delta t_3 \Rightarrow \sqrt{\frac{2h}{g}} > \frac{h}{V_{ex}} - T$$

Due possibilità da considerare separatamente:

- $h < V_{ex} T = 25\ m \Rightarrow$ disuguaglianza sempre verificata

- $h \geq V_{ex} T$; eleviamo al quadrato i due membri delle disuguaglianze:

$$\frac{2h}{g} > \frac{h^2}{V_{ex}^2} - \frac{2T}{V_{ex}} h + T^2$$

Moltiplichiamo i due membri per V_{ex}^2:

$$2\frac{V_{ex}^2}{g} h > h^2 - 2V_{ex} T h + V_{ex}^2 T^2$$

e riordiniamo i termini:

$$h^2 - 2\left(V_{ex} T + \frac{V_{ex}^2}{g}\right) h + V_{ex}^2 T^2 < 0$$

Radici del trinomio di 2° grado:

$$h_{1,2} = V_{ex} T + \frac{V_{ex}^2}{g} \pm \sqrt{\left(V_{ex} T + \frac{V_{ex}^2}{g}\right)^2 - V_{ex}^2 T^2} =$$

$$= V_{ex} T + \frac{V_{ex}^2}{g} \pm \sqrt{\cancel{V_{ex}^2 T^2} + \frac{2V_{ex}^3 T}{g} + \frac{V_{ex}^4}{g^2} - \cancel{V_{ex}^2 T^2}} =$$

$$= V_{ex} T + \frac{V_{ex}^2}{g} \pm \sqrt{\frac{V_{ex}^4}{g^2}\left(1 + \frac{2gT}{V_{ex}}\right)} = V_{ex} T + \frac{V_{ex}^2}{g} \pm \frac{V_{ex}^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gT}{V_{ex}}} =$$

$$= V_{ex} T + \frac{V_{ex}^2}{g}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gT}{V_{ex}}}\right) = \begin{cases} V_{ex} T + \frac{V_{ex}^2}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gT}{V_{ex}}}\right) > V_{ex} T \\ V_{ex} T + \frac{V_{ex}^2}{g}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2gT}{V_{ex}}}\right) < V_{ex} T \end{cases}$$

Dunque la disequazione e' risolta, quando $h \geq V_{ex} T$, per

$$V_{ex} T \leq h < V_{ex} T + \frac{V_{ex}^2}{g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gT}{V_{ex}}}\right)$$

Unendo ~~a~~ questo intervallo di soluzioni l'intervallo $h < V_{ex} T$, ugualmente accettabile, si ottiene che il bullone non raggiunge il tetto dell'ascensore prima che questo tocchi terra purché risulti

$$h < V_{ex} T + \frac{V_{ex}^2}{g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gT}{V_{ex}}}\right) = 39,12 \text{ m}$$

(all'incirca il 13° piano, se l'altezza di ogni piano e' 3 m)

1° Appello estivo A.A. 2012-2013; problema n. 1 (estratto)

Un punto materiale si muove di moto rettilineo in un mezzo viscoso. La sua velocità istantanea varia con il tempo t secondo la legge $v_x(t) = v_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$, con $v_0 = 5\ \frac{m}{s}$ e $\tau = 10\ s$.

a) A quale istante t_1 la velocità del punto materiale ha un valore uguale alla metà del valore iniziale?

b) Come varia nel tempo l'accelerazione istantanea del corpo?

c) Quanto vale la distanza totale D percorsa dal corpo a partire dall'istante $t = 0$?

2° Appello estivo A.A. 2012-2013; problema n. 1 (estratto)

Un punto materiale si muove di moto rettilineo con la seguente legge oraria:

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t), \quad \text{con } A = 1\ \mathrm{m} \quad \text{e} \quad \omega = 2\pi\ \mathrm{rad/s}.$$

a) A quale istante t_1 (successivo a $t=0$) il punto materiale si trova per la prima volta nuovamente nella posizione $x=0$?

b) Come varia nel tempo la velocità istantanea $v_x(t)$?

c) Come varia nel tempo l'accelerazione istantanea $a_x(t)$?

Appello invernale A. A. 2013-2014 ; problema n. 1 (estratto)

Una palla viene lasciata cadere in un pozzo avente profondità $H = 100$ m. Si trascuri l'attrito dell'aria.

a) Se la palla viene lasciata cadere con velocità istantanea iniziale nulla, quanto vale l'intervallo di tempo T_1 tra l'istante iniziale e l'istante in cui la palla tocca il fondo del pozzo?

b) Nelle stesse condizioni del punto a), quanto vale la velocità media della palla nello stesso intervallo di tempo?

c) Come cambia la risposta alla domanda a) se inizialmente la palla viene lanciata verso l'alto con velocità istantanea $v_0 = 3 \frac{m}{s}$ in valore assoluto? Si indichi con T_2 l'intervallo temporale da calcolare.

Esercizio

Un corpo si muove di moto rettilineo, e la sua velocità istantanea varia nel tempo secondo la legge

$$v_x(t) = v_{x,0} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{t}{T}\right)^2} \quad , \quad \text{con } v_{x,0} = 5\ m/s,\ T = 10\ s.$$

a) Si calcoli l'accelerazione istantanea del corpo in funzione del tempo.

b) Si calcoli la distanza complessivamente percorsa dal corpo per $t>0$.