Serway n. 73

Un cannoncino a molla si trova sul bordo di un tavolo, 1,2 m al di sopra del pavimento. Il cannoncino spara una biglia di acciaio con velocità vettoriale istantanea di modulo v_i e alzo di 35°.

a) Si trovi, in funzione di v_i, la posizione orizzontale della pallina nell'istante in cui questa colpisce il pavimento. Sia $x(v_i)$ questa funzione.

Si dia il valore di x per

b) $v_i = 0{,}1\ \frac{m}{s}$

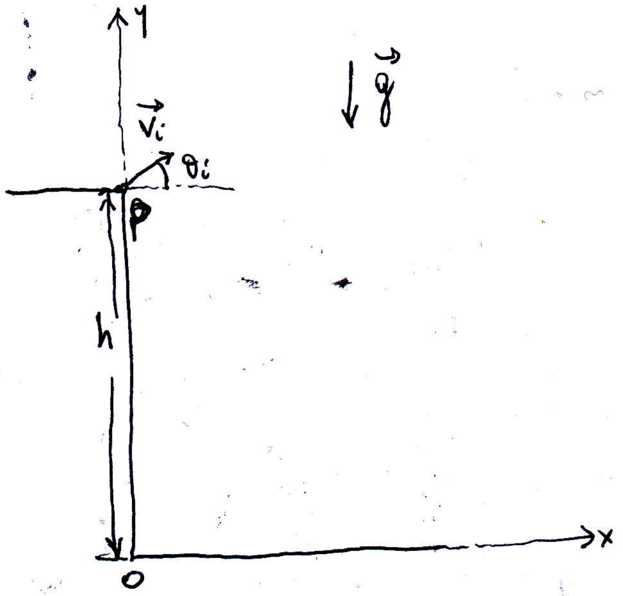
c) $v_i = 100\ \frac{m}{s}$.

d) Si faccia l'ipotesi che v_i sia molto piccola ma non esattamente zero. Si mostri che in questo caso uno dei termini che appaiono nel risultato a) diviene dominante per cui la forma della $x(v_i)$ si semplifica.

e) Nel caso in cui v_i sia molto grande, qual è la forma approssimata di $x(v_i)$?

f) Si descriva la forma generale della curva $x(v_i)$.

a)



$|\vec{v}_i| = v_i \qquad \theta_i = 35°$

$h = 1{,}2\ m$

Valgono le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x(t) = (v_i \cos\theta_i)\, t \\ y(t) = h + (v_i \,\text{sen}\,\theta_i)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Ricaviamo t dalla prima equazione:

$t = \dfrac{x(t)}{v_i \cos\theta_i}$, e sostituiamo questa espressione a t nella seconda equazione:

$$y(t) = h + (\cancel{v_i}\,\text{sen}\,\theta_i) \cdot \frac{x(t)}{\cancel{v_i} \cos\theta_i} - \frac{1}{2} g \frac{(x(t))^2}{v_i^2 \cos^2\theta_i}$$

$$y(t) = h + (\text{tg}\,\theta_i) \cdot x(t) - \frac{g}{2 v_i^2 \cos^2\theta_i} \cdot (x(t))^2$$

Vogliamo calcolare il valore di x(t) nell'istante in cui risulta $y(t) = 0$:

$$0 = h + (\text{tg}\,\theta_i) \cdot x(t) - \frac{g}{2 v_i^2 \cos^2\theta_i} (x(t))^2$$

Moltiplichiamo i due membri dell'equazione per

$$\frac{2V_i^2\cos^2\vartheta_i}{g}: \qquad 0=\frac{2hV_i^2\cos^2\vartheta_i}{g}+\left(\frac{2V_i^2\cos^2\vartheta_i\,tg\,\vartheta_i}{g}\right)x(t)-(x(t))^2$$

Risulta $\cos^2\vartheta_i\,tg\,\vartheta_i=\cos^{\cancel{2}}\vartheta_i\,\frac{\operatorname{sen}\vartheta_i}{\cancel{\cos\vartheta_i}}=\operatorname{sen}\vartheta_i\cos\vartheta_i$

Riordinando i termini dell'equazione, otteniamo:

$$(x(t))^2-\frac{2V_i^2\operatorname{sen}\vartheta_i\cos\vartheta_i}{g}x(t)-\frac{2hV_i^2\cos^2\vartheta_i}{g}=0$$

Troviamo le due radici dell'equazione usando la formula ridotta:

$$(x(t))=\frac{V_i^2\operatorname{sen}\vartheta_i\cos\vartheta_i}{g}\pm\sqrt{\left(\frac{V_i^2\operatorname{sen}\vartheta_i\cos\vartheta_i}{g}\right)^2+\frac{2hV_i^2\cos^2\vartheta_i}{g}}$$

La radice con il segno negativo davanti al radicale è negativa, per cui non è accettabile. La radice accettabile è quindi

$$x(t)=\sqrt{\left(\frac{V_i^2\operatorname{sen}\vartheta_i\cos\vartheta_i}{g}\right)^2+\frac{2hV_i^2\cos^2\vartheta_i}{g}}+\frac{V_i^2\operatorname{sen}\vartheta_i\cos\vartheta_i}{g}$$

La funzione cercata è, pertanto:

$$x(V_i)=\sqrt{\left(\frac{V_i^2\operatorname{sen}\vartheta_i\cos\vartheta_i}{g}\right)^2+\frac{2hV_i^2\cos^2\vartheta_i}{g}}+\frac{V_i^2\operatorname{sen}\vartheta_i\cos\vartheta_i}{g}$$

Può convenire riscrivere $x(v_i)$ in questa maniera:

$$x(v_i) = \sqrt{\left(\frac{v_i^2 \operatorname{sen}\vartheta_i \cos\vartheta_i}{g}\right)^2 \left[1 + \frac{2h\cancel{v_i^2}\cancel{\cos^2\vartheta_i}}{\cancel{g}} \cdot \frac{g^{\cancel{2}}}{v_i^{\cancel{4}2} \operatorname{sen}^2\vartheta_i \cancel{\cos^2\vartheta_i}}\right]} + \frac{v_i^2 \operatorname{sen}\vartheta_i \cos\vartheta_i}{g} =$$

$$= \frac{v_i^2 \operatorname{sen}\vartheta_i \cos\vartheta_i}{g} \cdot \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_i^2 \operatorname{sen}^2\vartheta_i}} + \frac{v_i^2 \operatorname{sen}\vartheta_i \cos\vartheta_i}{g} =$$

$$= \frac{v_i^2 \operatorname{sen}\vartheta_i \cos\vartheta_i}{g} \left[\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_i^2 \operatorname{sen}^2\vartheta_i}} + 1\right]$$

b) Per $v_i = 0{,}1 \ \frac{m}{s}$ risulta

$$x\left(v_i = 0{,}1 \ \frac{m}{s}\right) = 0{,}041 \ m = 4{,}1 \ cm$$

c) Per $v_i = 100 \ \frac{m}{s}$ risulta

$$x\left(v_i = 100 \ \frac{m}{s}\right) = 959{,}60 \ m$$

d) Se v_i è molto piccola, risulta

$$\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_i^2 \operatorname{sen}^2\vartheta_i}} + 1 \simeq \frac{\sqrt{2gh}}{v_i \operatorname{sen}\vartheta_i}, \quad \text{cioè}$$

$$x(v_i) \simeq \frac{v_i^{\cancel{2}} \cancel{\operatorname{sen}\vartheta_i} \cos\vartheta_i}{g} \cdot \frac{\sqrt{2gh}}{\cancel{v_i} \cancel{\operatorname{sen}\vartheta_i}} = v_i \cos\vartheta_i \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

e) Se v_i è molto grande, risulta

$$\sqrt{1+\frac{2gh}{v_i^2 \operatorname{sen}^2\vartheta_i}}+1 \simeq 2 \quad , \quad \text{cioè}$$

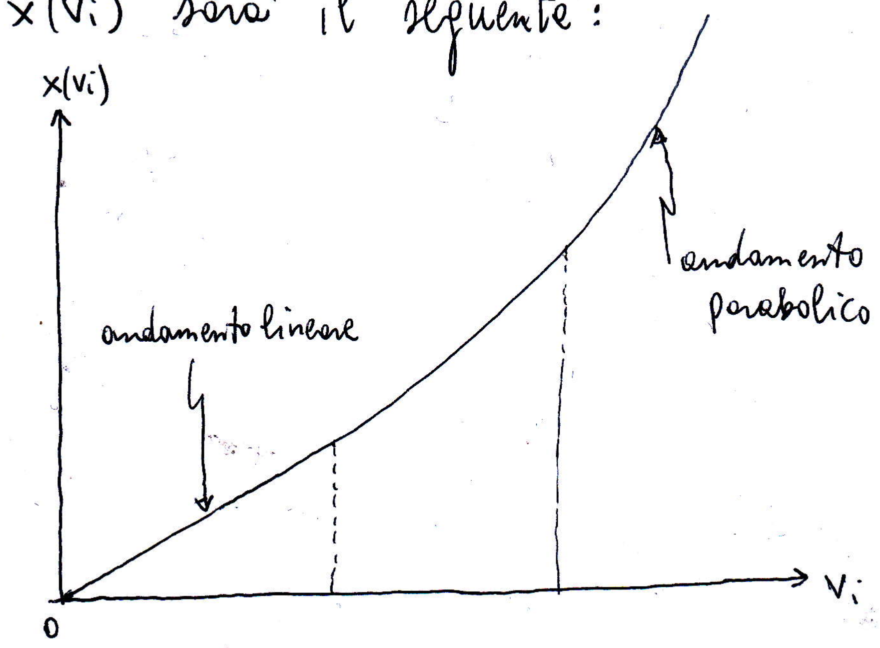
$$x(v_i) \simeq \frac{2 v_i^2 \operatorname{sen}\vartheta_i \cos\vartheta_i}{g} = \frac{v_i^2}{g} \operatorname{sen}(2\vartheta_i)$$

f) Utilizziamo i risultati dei punti d) ed e)

v_i molto piccola: $\quad x(v_i) \simeq 0{,}405\, v_i$

v_i molto grande: $\quad x(v_i) \simeq 0{,}096\, v_i^2$.

Qualitativamente, quindi, l'andamento della funzione $x(v_i)$ sarà il seguente:

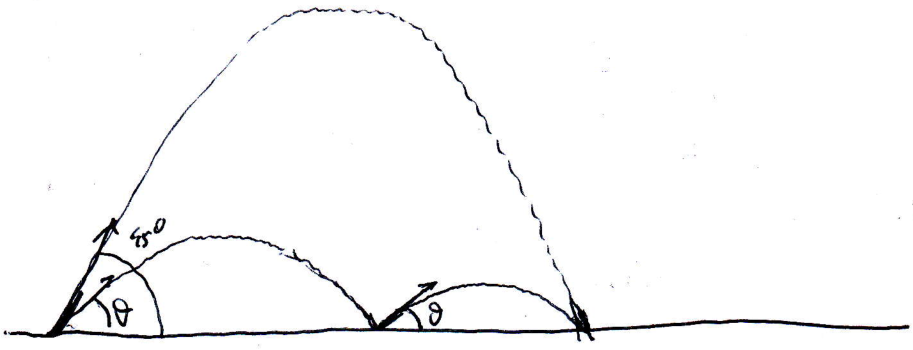


Serway n. 74

Nel baseball un "esterno" lancia la palla al suo ricevitore nel tentativo di eliminare il giocatore che corre verso la casa base. La palla rimbalza una volta prima di raggiungere il ricevitore. Si supponga che l'angolo con cui la palla rimbalza a terra sia uguale all'angolo di lancio, ma che il modulo della velocità, nel rimbalzo, si dimezzi.

a) Facendo l'ipotesi che la palla venga sempre lanciata con lo stesso valore del modulo della velocità, a quale angolo θ dovrebbe essere lanciata per arrivare, con un solo rimbalzo (tragitto inferiore) alla stessa distanza orizzontale D raggiunta senza rimbalzi (tragitto superiore) da una palla lanciata a 45°?

b) Si determini il rapporto dei tempi di volo fra il percorso con un rimbalzo e quello senza rimbalzi.



a) Indichiamo con V_0 il modulo della velocità con cui la palla viene lanciata all'istante $t=0$.

La gittata della traiettoria a 45° senza rimbalzi è:

$$D_1 = \frac{V_0^2}{g}$$ (si ricava dalla legge generale della gittata per $\theta_0 = 45°$).

Il percorso orizzontale con un solo rimbalzo è dato chiaramente dalla somma di due termini:

$$D_2 = \frac{V_0^2}{g}\,\mathrm{sen}(2\theta) + \frac{\left(\frac{V_0}{2}\right)^2}{g}\,\mathrm{sen}(2\theta) = \frac{V_0^2}{g}\,\mathrm{sen}(2\theta)\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{5V_0^2}{4g}\,\mathrm{sen}(2\theta).$$

Imponiamo $D_2 = D_1$ in accordo con le richieste del problema:

$$\frac{5\cancel{V_0^2}}{4\cancel{g}}\,\mathrm{sen}(2\theta) = \frac{\cancel{V_0^2}}{\cancel{g}},$$ da cui ricaviamo

$$\mathrm{sen}(2\theta) = \frac{4}{5},$$ da cui otteniamo

$$\theta = 26,6° = 0,46 \text{ rad}$$

b) Già in altri esercizi abbiamo calcolato il tempo necessario per un proiettile per compiere l'intero arco di parabola tra l'istante dello sparo e quello in cui il proiettile tocca terra alla stessa quota da cui era stato sparato:

$$T = \frac{2V_{0y}}{g}$$

Per la traiettoria con un rimbalzo risulta quindi:

$$T_{tot,a} = \frac{2V_{oy,a}}{g} + \frac{2\left(V_{oy,a}/2\right)}{g} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2V_{oy,a}}{g} = \frac{3V_{oy,a}}{g} = \frac{3V_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

essendo $\operatorname{sen}(2\theta) = \frac{4}{5}$ come calcolato al punto a).

Per la traiettoria senza rimbalzo risulta:

$$T_{tot,b} = \frac{2V_{oy,b}}{g} = \frac{2V_0 \operatorname{sen}45^\circ}{g}$$

Risulta pertanto:

$$\frac{T_{tot,a}}{T_{tot,b}} = \frac{3\cancel{V_0}\operatorname{sen}\theta}{\cancel{g}}\cdot\frac{\cancel{g}}{2\cancel{V_0}\operatorname{sen}45^\circ} = \frac{3\operatorname{sen}\theta}{2\operatorname{sen}45^\circ}$$

Volendo svolgere alcuni calcoli più accuratamente, scriviamo:

$$\cos(2\theta) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(2\theta)} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\operatorname{sen}45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, per cui:

$$\frac{T_{tot,a}}{T_{tot,b}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0{,}95 < 1$$

Dunque, la traiettoria con un rimbalzo arriva a destinazione più rapidamente rispetto alla traiettoria senza rimbalzo di gittata massima.

Serway n. 78

Il vecchio coyote non può correre abbastanza velocemente per catturare lo struzzo corridore Beep Beep. Il coyote calza un paio di pattini a rotelle a propulsione, che gli forniscono una accelerazione orizzontale costante di 15 $\frac{m}{s^2}$.

Il coyote parte da fermo da un punto posto a 70 m dal ciglio di un burrone nell'istante in cui Beep Beep gli passa davanti correndo verso il burrone.

a) Quale deve essere la velocità costante minima che Beep Beep deve mantenere per arrivare all'orlo del burrone prima del coyote?

Arrivato in quel punto lo struzzo effettua una inversione di marcia improvvisa, mentre il coyote continua diritto.
Anche in aria i pattini continuano a spingere in orizzontale per cui l'accelerazione del coyote in volo è $(15\,\hat{i} - 9{,}81\,\hat{j})\,\frac{m}{s^2}$.

b) Il ciglio del burrone si trova 100 m al di sopra del fondo del canyon. Si determini a che distanza dalla parete verticale atterra il coyote.

c) Si determinino le componenti della velocità del coyote nell'istante del suo impatto con il fondo.

a) Calcoliamo anzi tutto il tempo t_1 necessario affinché il coyote, partendo da fermo con accelerazione costante $a_x = 15\ \frac{m}{s^2}$, percorra il tratto di lunghezza $l = 70\ m$; usiamo la legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$x(t) = x_0 + V_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

Nel nostro caso risulta $x_0 = 0$, $V_{0x} = 0$, $t = t_1$, $x(t_1) = l = 70\ m$, $a_x = 15\ \frac{m}{s^2}$. Allora:

$$l = \frac{1}{2}a_x t_1^2 \Rightarrow t_1^2 = \frac{2l}{a_x} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a_x}}$$

Detto t_2 l'intervallo di tempo tra l'istante in cui Beep Beep passa accanto al coyote e l'istante in cui Beep Beep arriva all'orlo del burrone muovendosi a velocità costante V_{2x} in linea retta, deve risultare

$$l = V_{2x}t_2, \quad \text{da cui ricaviamo} \quad t_2 = \frac{l}{V_{2x}}$$

Affinché Beep Beep raggiunga l'orlo del burrone prima del coyote deve risultare

$$t_2 < t_1 \Rightarrow \frac{l}{V_{2x}} < \sqrt{\frac{2l}{a_x}} \Rightarrow \frac{V_{2x}}{l} > \sqrt{\frac{a_x}{2l}}$$

$$\Rightarrow V_{2x} > l\sqrt{\frac{a_x}{2l}} \Rightarrow V_{2x} > \sqrt{\frac{1}{2}a_x l} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(15\ \frac{m}{s^2}\right)\cdot(70\ m)} =$$

$$= 22{,}91\ \frac{m}{s} = 82{,}49\ \frac{km}{h}$$

b) Calcoliamo la componente x della velocità del coyote nell'istante in cui si stacca dal ciglio del burrone a $t = t_1$:

$$V_{x,1} = a_x t_1 = a_x \sqrt{\frac{2l}{a_x}} = \sqrt{2 a_x l}$$

Durante il volo risulta:

$$a_x = 15 \frac{m}{s^2} \qquad a_y = -9{,}81 \frac{m}{s^2}$$

Dunque otteniamo; facendo ripartire la misura dei tempi dall'istante in cui il coyote si stacca dal ciglio del burrone:

$$V_x(t) = V_{x,1} + a_x t \qquad V_y(t) = a_y t$$

E quindi risulta, poi:

$$x(t) = V_{x,1} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad y(t) = H + \frac{1}{2} a_y t^2 ,$$

avendo indicato con $H = 100$ m la quota, al di sopra del fondo del canyon, da cui il coyote lascia il ciglio del burrone.

Nell'istante in cui il coyote tocca terra risulta $t = t_3$,

$$y(t_3) = 0 \Rightarrow \qquad 0 = H + \frac{1}{2} a_y t_3^2 ;$$ poiché $a_y < 0$, possiamo scrivere

$$H - \frac{1}{2} |a_y| t_3^2 = 0 \Rightarrow t_3^2 = \frac{2H}{|a_y|}$$

Sostituiamo questa espressione nell'equazione di $x(t)$ per $t = t_3$ per ottenere la coordinata orizzontale del punto in cui il coyote tocca terra:

$$x(t_3) = V_{x,1}\, t_3 + \frac{1}{2} a_x t_3^2 = V_{x,1}\sqrt{\frac{2H}{|a_y|}} + \frac{1}{\cancel{2}} a_x \left(\frac{\cancel{2}H}{|a_y|}\right) =$$

$$= V_{x,1}\sqrt{\frac{2H}{|a_y|}} + \left(\frac{a_x}{|a_y|}\right) H = \sqrt{2a_x \ell}\,\sqrt{\frac{2H}{|a_y|}} + \left(\frac{a_x}{|a_y|}\right) H =$$

$$= 2\sqrt{\frac{a_x}{|a_y|}\,\ell H} + \left(\frac{a_x}{|a_y|}\right) H =$$

$$= \left[2\sqrt{\frac{15}{9{,}81}\cdot 70 \cdot 100} + \left(\frac{15}{9{,}81}\right)\cdot 100\right] m = 359{,}82\ m$$

c) Nell'istante $t = t_3$ le componenti della velocità del coyote sono:

$$V_x(t_3) = V_{x,1} + a_x t_3 = \sqrt{2a_x \ell} + a_x \sqrt{\frac{2H}{|a_y|}} =$$

$$= \left[\sqrt{2\cdot 15 \cdot 70} + 15\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 100}{9{,}81}}\right] \frac{m}{s} = 113{,}55\ \frac{m}{s} = 408{,}78\ \frac{km}{h}$$

$$V_y(t_3) = a_y t_3 = -|a_y|\sqrt{\frac{2H}{|a_y|}} = -\sqrt{2|a_y| H} =$$

$$= -\sqrt{2\cdot 9{,}81 \cdot 100}\ \frac{m}{s} = -44{,}29\ \frac{m}{s} = -159{,}46\ \frac{km}{h}.$$