1° Appello estivo A.A. 2012-2013; problema n. 1 (estratto)

Un punto materiale si muove di moto rettilineo in un mezzo viscoso. La sua velocità istantanea varia con il tempo t secondo la legge $V_x(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, con $V_0 = 5\ \frac{m}{s}$ e $\tau = 10\ s$.

a) A quale istante t_1 la velocità del punto materiale ha un valore uguale alla metà del valore iniziale?

b) Come varia nel tempo l'accelerazione istantanea del corpo?

c) Quanto vale la distanza totale D percorsa dal corpo a partire dall'istante $t = 0$?

a) All'istante $t = t_1$ deve risultare

$$V_x(t=t_1) = \frac{1}{2} V_x(t=0)$$

Poiché $V_x(t=0) = V_0 \cdot e^0 = V_0$, dobbiamo risolvere l'equazione

$$\cancel{V_0} e^{-\frac{t_1}{\tau}} = \frac{1}{2} \cancel{V_0} \Rightarrow e^{\frac{t_1}{\tau}} = 2$$

(invertendo entrambi i membri dell'equazione)

Calcoliamo ora il logaritmo naturale di entrambi i membri:

$$\frac{t_1}{\tau} = \ln 2 \Rightarrow t_1 = \tau \ln 2 = (10\ s) \cdot \ln 2 = 6{,}93\ s$$

b) La funzione $a_x(t)$ si ottiene calcolando la derivata prima rispetto al tempo t della funzione $V_x(t)$.

Ricordando che, se k è un coefficiente costante, risulta $(e^{kt})' = k e^{kt}$, otteniamo:

$$a_x(t) = (V_x(t))' = -\frac{V_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

c) Lo spazio totale percorso tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = +\infty$ si ottiene così:

$$D = \int_0^{+\infty} V_x(t)\,dt = V_0 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = V_0 \tau \int_0^{+\infty} e^{-z} dz$$

avendo effettuato la sostituzione $\frac{t}{\tau} = z$

Ora, risulta

$$\int_0^{+\infty} e^{-z}\,dz = \left[-e^{-z}\Big|_0^{+\infty}\right] = 1$$, per cui possiamo scrivere

$$D = v_0 \tau = \left(5\,\frac{m}{s}\right)\cdot\left(10\,s\right) = 50\,m$$

2° Appello estivo A.A. 2012-2013; problema n. 1 (estratto)

Un punto materiale si muove di moto rettilineo con la seguente legge oraria:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t), \quad \text{con } A = 1\ \text{m} \quad \text{e} \quad \omega = 2\pi\ \text{rad/s}.$$

a) A quale istante t_1 (successivo a $t=0$) il punto materiale si trova per la prima volta nuovamente nella posizione $x=0$?

b) Come varia nel tempo la velocità istantanea $v_x(t)$?

c) Come varia nel tempo l'accelerazione istantanea $a_x(t)$?

a) Risulta $x(t)=0$ quando $sen(\omega t)=0$; il primo istante $t=t_1$, con $t_1>0$, per cui risulta $x(t=t_1)=0$ si ha per

$\omega t_1 = \pi$ rad, cioè per $t=t_1=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2\pi}$ s $= 0{,}5$ s

b) La funzione $v_x(t)$ si ottiene calcolando la derivata prima rispetto al tempo della funzione $x(t)$.

Ricordando che, se K è un coefficiente costante, risulta

$(sen(Kt))' = K\cos(Kt)$, otteniamo:

$$v_x(t) = (x(t))' = A\omega\cos(\omega t)$$

c) La funzione $a_x(t)$ si ottiene calcolando la derivata prima rispetto al tempo della funzione $v_x(t)$.

Ricordando che, se K è un coefficiente costante, risulta

$(\cos(Kt))' = -K\,sen(Kt)$, otteniamo:

$$a_x(t) = (v_x(t))' = A\omega\cdot\left[-\omega\,sen(\omega t)\right] = -\omega^2 A\,sen(\omega t)$$

Osserviamo infine che, essendo $x(t) = A\,sen(\omega t)$,

nel problema considerato questa ultima soluzione può anche essere scritta così:

$$a_x(t) = -\omega^2 x(t).$$

Appello invernale A. A. 2013-2014; problema n. 1 (estratto)

Una palla viene lasciata cadere in un pozzo avente profondità $H = 100\ m$. Si trascuri l'attrito dell'aria.

a) Se la palla viene lasciata cadere con velocità istantanea iniziale nulla, quanto vale l'intervallo di tempo T_1 tra l'istante iniziale e l'istante in cui la palla tocca il fondo del pozzo?

b) Nelle stesse condizioni del punto a), quanto vale la velocità media della palla nello stesso intervallo di tempo?

c) Come cambia la risposta alla domanda a) se inizialmente la palla viene lanciata verso l'alto con velocità istantanea $v_0 = 3\ \frac{m}{s}$ in valore assoluto? Si indichi con T_2 l'intervallo temporale da calcolare.

a) Utilizziamo un asse x orientato verticalmente, con l'origine nel punto in cui la palla inizia a cadere, e con verso positivo verso il basso.

Utilizziamo la legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$x(t) = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Nel nostro caso abbiamo: $x_0 = 0$, $v_{x_0} = 0$, $a_x = g$, per cui otteniamo

$$x(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

All'istante $t = T_1$ risulta $x(t = T_1) = H$, per cui:

$H = \frac{1}{2} g T_1^2$, da cui $T_1^2 = \frac{2H}{g}$, e infine

$$T_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (100\ m)}{9{,}81\ \frac{m}{s^2}}} = 4{,}52\ s$$

b) Per definizione, la velocità media della palla nell'intervallo di tempo tra $t = 0$ e $t = T_1$ è:

$$v_{x,med} = \frac{H}{T_1} = \frac{H}{\sqrt{\frac{2H}{g}}} = H \cdot \sqrt{\frac{g}{2H}} = \sqrt{\frac{1}{2} g H} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(9{,}81\ \frac{m}{s^2}\right) \cdot (100\ m)} = 22{,}15\ \frac{m}{s}$$

c) Mantenendo lo stesso asse x introdotto nel punto a), risulta $x_0 = 0$, $V_{x,0} = -3 \frac{m}{s}$, per cui otteniamo:

$$x(t) = V_{x,0}\, t + \frac{1}{2} g t^2$$

All'istante $t = T_2$ deve risultare $x(t = T_2) = H$, per cui:

$$H = V_{x,0} T_2 + \frac{1}{2} g T_2^2$$

Moltiplichiamo i due membri per $\frac{2}{g}$:

$$\frac{2H}{g} = \frac{2 V_{x,0}}{g} T_2 + T_2^2$$

e riordiniamo i termini dell'equazione:

$$T_2^2 + 2 \frac{V_{x,0}}{g} T_2 - \frac{2H}{g} = 0$$

Calcoliamo le radici dell'equazione usando la formula ridotta:

$$T_2 = -\frac{V_{x,0}}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{V_{x,0}}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}}$$

La soluzione con il segno meno di fronte al radicale e' negativa, per cui non e' accettabile. La soluzione accettabile e':

$$T_2 = \sqrt{\left(\frac{V_{x,0}}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}} - \frac{V_{x,0}}{g} = \sqrt{\left(\frac{V_{x,0}}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}} + \frac{|V_{x,0}|}{g}$$

(essendo $V_{x,0} < 0$); allora $T_2 = 4{,}83\ s$

Esercizio

Un corpo si muove di moto rettilineo, e la sua velocità istantanea varia nel tempo secondo la legge

$$V_x(t) = V_{x,0} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{t}{T}\right)^2} \quad , \quad \text{con } V_{x,0} = 5\ m/s, \ T = 10\ s.$$

a) Si calcoli l'accelerazione istantanea del corpo in funzione del tempo.

b) Si calcoli la distanza complessivamente percorsa dal corpo per $t>0$.

a) La funzione $a_x(t)$ si ottiene calcolando la derivata prima rispetto al tempo della funzione $v_x(t)$.

Ricordando che, se K è un coefficiente costante, risulta:

$$\left(\frac{1}{1+(kt)^2}\right)' = -\frac{2(kt)\cdot k}{[1+(kt)^2]^2}$$

, otteniamo:

$$a_x(t) = -v_{x,0}\cdot\frac{2\left(\frac{t}{T}\right)\cdot\frac{1}{T}}{\left[1+\left(\frac{t}{T}\right)^2\right]^2} = -\frac{2v_{x,0}}{T}\cdot\frac{\frac{t}{T}}{\left[1+\left(\frac{t}{T}\right)^2\right]^2}$$

Si verifica agevolmente che questa espressione ha le corrette dimensioni (come deve essere).

b) La distanza complessivamente percorsa per $t>0$ si ottiene così:

$$D = \int_0^{+\infty} v_x(t)\,dt = v_{x,0}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{T}\right)^2}\,dt =$$

$$= v_{x,0}\,T\,\mathrm{arctg}\left(\frac{t}{T}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}v_{x,0}T = \frac{\pi}{2}\cdot\left(5\,\frac{m}{s}\right)\cdot(10\,s) = 78{,}54\ m$$

L'integrale si può anche calcolare eseguendo la sostituzione $\frac{t}{T} = z$, ottenendo ovviamente lo stesso risultato finale.