Calcolo dei determinanti

Ripassiamo il metodo di Laplace usandolo per calcolare $\det(A)$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Ricordiamo come funziona

- Si sceglie una riga oppure una colonna della matrice
- Si sviluppa il det. lungo quella riga o colonna tenendo conto della regola della scacchiera per la determinazione dei segni

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

in pos in alto a sx c'è sempre +

Scegliendo la prima riga si ottiene

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 3 \quad 2} \\ 0 \quad 1 \quad 4 \\ 2 \quad 5 \quad 10 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(10-20) - 3(-8) + 2(-2) = -10 + 24 - 4 = 10$$

Scegliendo la seconda colonna si ottiene

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{3} & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 4 \\ 2 & \boxed{5} & 10 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\cdot(-8) + 1(10-4) - 5(4) = 24 + 6 - 20 = 10$$

Sono uguali

Teo di Binet

date $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$: $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$

Teorema

data $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$: $\det(A^T) = \det(A)$

Esempio

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e U:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Stabilire per quali valori la matrice $A = LU$ e' nulla nei seguenti 2 casi:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \qquad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Soluzione

Per il teo di Binet $\det(LU) = \det(L)\det(U) = \det(L)\cdot(6-\alpha)$

- Nel primo caso $\det(L_1) = 0 \Rightarrow \det(LU) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

- Nel primo caso $\det(L_2) = 2 \Rightarrow \det(LU) = 2(6-\alpha) = 0 \iff \alpha = 6$

Traccia, determinante, raggio spettrale e autovalori

Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice di autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Ciascun λ compare nella lista un numero di volte pari alla sua molteplicita' algebrica come radice del pol. caratt. di A

- $\operatorname{traccia}(A) \overset{\text{def}}{=} a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$
- $\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$
- $\rho(A) \overset{\text{def}}{=}$ raggio spettrale di $A \overset{\text{def}}{=} \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|) \geq 0$

rho

Esempio

Sia A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -2i \\ 3 & -1 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

parte immaginaria

i) dimostrare che A possiede un autovalore λ non reale $\rightarrow \operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$

ii) dimostrare che A possiede un autovalore μ con parte reale $\leq 2 \rightarrow \operatorname{Re}(\mu) \leq 2$

parte reale

Soluzione

i) $\text{traccia}(A) = -8+i \Rightarrow$ siccome traccia di A e' la somma degli autovalori di A, deve esistere almeno un autovalore di A non reale

ii) deve esistere per forza un autovalore μ di A con $Re(\mu) \leq -2$ perche' se tutti gli autovalori avessero parte reale > -2 allora $\text{traccia}(A)$ avrebbe parte reale > -8 infatti:

$$Re(\text{traccia}(A)) = Re(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = Re(\lambda_1) + Re(\lambda_2) + Re(\lambda_3) + Re(\lambda_4) >$$
$$> -2 + (-2) + (-2) + (-2) = -8$$

Esercizio

Con lo stesso ragionamento usato per dimostrare che A ha almeno un autov. con parte reale ≤ -2, dimostriamo che A ha almeno un autovalore con parte immaginaria $\geq \frac{1}{4}$

Esercizio

Considerare

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

i) calcolare gli autovalori di A e B

ii) Verifichiamo che per B, come per ogni matrice triangolare, gli autovalori sono gli elementi diagonali

iii) Calcolare traccia, determinante e raggio spettrale di A e B

iv) Verificare che sia per A che per B la somma degli autovalori e' uguale alla traccia e il prodotto degli autovalori e' uguale al det.

Matrici invertibili

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice invertibile se esiste una matrice $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ t.c.

$$AB = BA = I$$

In tal caso, la matrice B e' unicamente determinata, si chiama matrice inversa di A e si denota con A^{-1}

Teorema

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e' invertibile $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow 0$ non e' autovalore di A

Teorema

Date $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, si ha che:

AB e' invertibile $\Leftrightarrow A, B$ sono invertibili e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Verifica

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

Esempio $\rightsquigarrow$ Calcolo dell'inversa della matrice

Verificare che

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

e' invertibile e calcolare A^{-1}

Soluzione

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ \boxed{1 \quad 0 \quad 4} \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 4 \cdot 5 = 23 \neq 0$$

Quindi esiste un'inversa $\rightsquigarrow \det(A) \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{23} \begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ 9 & 5 & 1 \\ -1 & +2 & 5 \end{vmatrix} = A^{-1}$$

Esercizio

Stabilire quali delle seguenti matrici sono invertibili e calcolarne l'inversa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrici diagonalizzabili

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice diagonalizzabile se esistono una matrice invertibile $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e matrice diagonale $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ t.c.:

$[\underline{x}_1 | \cdots | \underline{x}_n]$ → colonne

$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$A = XDX^{-1} \quad (*)$$

Nella $(*)$ c'e' scritto che $\forall i = 1, \dots, n$ l'elemento diagonale λ_i di D e' un autovalore di A con il corrispondente autovettore $\underline{x}_i$ = i-esima colonna di X

Dim

Moltiplichiamo a destra la $(*)$ per X:

$$AX = XDX^{-1}X = XD$$

che sono uguali perche' $AX = XD$

Guardiamo ora la prima colonna di AX e XD

$$(AX)^{(1)} = AX^{(1)} = A\underline{x}_1$$

$X^{(1)}$ → 1ª colonna

$$(XD)^{(1)} = XD^{(1)} = X \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \lambda_1 x_{11} \\ \lambda_1 x_{21} \\ \vdots \\ \lambda_1 x_{n1} \end{matrix} = \lambda_1 \underline{x}_1$$

Promemoria

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \left[\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{matrix} \middle| \; \text{-----} \; \right]$$

Quindi $A\underline{x}_1 = \lambda_1 \underline{x}_1$

$\underline{x}_1$ e' l'autovettore di A relativo ad λ_1

In generale $\forall i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} (AX)^{(i)} &= AX^{(i)} = A\underline{x}_i \\ (XD)^{(i)} &= XD^{(i)} = \lambda_i \underline{x}_i \end{aligned} \implies A\underline{x}_i = \lambda_i \underline{x}_i \Rightarrow \underline{x}_i \text{ e' autovettore di } A \text{ con autovalore } \lambda_i$$

Teorema

Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ possiede n autovalori distinti allora A e' diagonalizzabile

Matrici hermitiane e simmetriche

Data $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, indichiamo con A^* la matrice trasposta coniugata di A

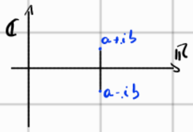
Teorema

date A, B matrici moltiplicabili:

$$(AB)^T = B^T A^T \quad e \quad (AB)^* = B^* A^*$$

Promemoria

$z = a+ib \;,\; \bar{z} = \overline{a+ib} = a-ib$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2-3i \\ 1+i & i \end{bmatrix} \qquad A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 2+3i & -i \end{bmatrix}$$

$$(a+ib)\overline{(a+ib)} = (a+ib)(a-ib) = $$
$$= a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |a+ib|^2$$

Def

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice hermitiana se $A = A^*$

Oss

Nel caso in cui le componenti di A sono reali ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$) si ha $A^T = A^*$ e

dunque A e' hermitiana $\Leftrightarrow$ A e' simmetrica $\Leftrightarrow$ $A^T = A$

Oss

Gli elementi diagonali di una matrice hermitiana A sono uguali ai loro coniugati

per via dell'uguaglianza $A^* = A$ e dunque sono reali

Teo

Gli autovalori di una matrice hermitiana sono reali

Dim

Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitiana e sia λ un autovalore di A, dimostro che λ e' reale

Prendo $\underline{x} \neq 0$ autovettore di A corrispondente a λ:

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x} \Rightarrow \underline{x}^* A \underline{x} = \underline{x}^* \lambda \underline{x} = \lambda(\underbrace{\underline{x}^* \underline{x}}_{\text{prod. scalare}}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i x_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\underline{x}^* A \underline{x}}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}_{\text{reale} > 0}}$$

Dimostriamo che il numeratore $\underline{x}^* A \underline{x}$ e' reale perche' uguale al suo complesso coniugato:

$$\overline{\underline{x}^* A \underline{x}} = \left(\underline{x}^* A \underline{x}\right)^* = \underline{x}^* A^* (\underline{x}^*)^* = \underline{x}^* A \underline{x}$$

per def $A = A^*$ → A hermitiana