ESERCIZIO

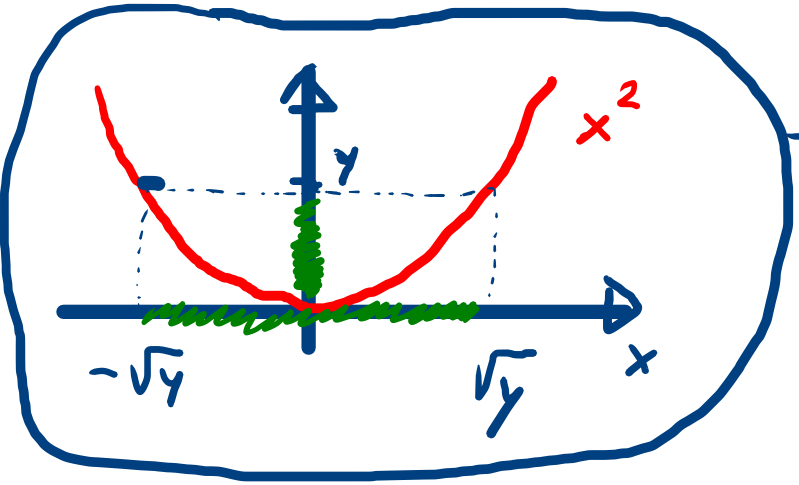
Sia $X \sim N(0, \sigma^2)$. Verificare che $Y = X^2$ ha distribuzione Gamma con parametri opportuni da determinare.

SVOLGIMENTO

Ovviamente si ha $P(Y \geq 0) = 1$ e quindi $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \leq 0 \\ (*) & \text{per } y > 0. \end{cases}$

Inoltre

$$(*) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = P\left(-\frac{\sqrt{y}}{\sigma} \leq \underbrace{\frac{X}{\sigma}}_{= X^* \sim N(0,1)} \leq \frac{\sqrt{y}}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{\sigma}\right) - \underbrace{\Phi\left(-\frac{\sqrt{y}}{\sigma}\right)}_{= 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{\sigma}\right)} =$$



$$= \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{\sigma}\right)\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{\sigma}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{\sigma}\right) - 1.$$

OSS. L'espressione ottenuta è accettabile per $y = 0$ e per $y \to \infty$. Inoltre si ha una funzione crescente di y perché Φ è crescente.

Quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \leq 0 \\ 2\,\Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{\sigma}\right) - 1 & \text{per } y > 0. \end{cases}$$

Infine, derivando (e ricordando che $\Phi'(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$), si ha

$$f_Y(y) = \cancel{2}\, \Phi'\left(\frac{\sqrt{y}}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{y}}\, 1_{(0,\infty)}(y) =$$

$$= \frac{e^{-\left(\frac{\sqrt{y}}{\sigma}\right)^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{y}}\, 1_{(0,\infty)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}\, e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}\, 1_{(0,\infty)}(y) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, y^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}\, 1_{(0,\infty)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, y^{\frac{1}{2}-1}\, e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}\, 1_{(0,\infty)}(y)$$

Qui procedo per vedere se si ha una distribuzione GAMMA

Ci si chiede se si ha $f_Y(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, y^{\alpha-1}\, e^{-\beta y}\, 1_{(0,\infty)}(y)$ per qualche $\alpha, \beta > 0$.

La risposta è SI per $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1/2\sigma^2$; in effetti basta confrontare le parti indicate dalle "frecce gialle".

OSSERVAZIONE

Nel confronto tra

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, y^{\frac{1}{2}-1}\, e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}\, 1_{(0,\infty)}(y) \quad \text{e} \quad \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, y^{\alpha-1}\, e^{-\beta y}\, 1_{(0,\infty)}(y)$$

abbiamo dedotto $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{2\sigma^2}$ confrontando le parti in giallo.

Al contrario non ci siamo interessati al confronto tra le costanti moltiplicative in rosso.

In effetti quelle costanti devono coincidere perché sono le "costanti giuste" affinché si abbia $\int_0^\infty \dots \, dy = 1$.

In ogni modo la verifica può essere fatta come segue:

$$\boxed{\text{per } \alpha = \frac{1}{2} \text{ e } \beta = \frac{1}{2\sigma^2}} \quad \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(1/2)} \underset{\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}}{=} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \quad \underline{\underline{\text{ok}}}$$

SPERANZA MATEMATICA PER VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

Una v.a. X con densità continua f_X ha speranza matematica finita se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\,dx < \infty \qquad (*)$$

RICORDO SEMPRE I VARI SINONIMI: MEDIA, VALOR MEDIO, ATTESA, VALORE ATTESO

In tal caso la speranza matematica si definisce come

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx$$

OSS. Abbiamo una analogia con quanto accade nel caso discreto: integrali al posto delle somme, $x f_X(x)$ al posto di $x_k p_X(x_k)$.

OSS. La condizione $(*)$ è verificata se f_X è positiva (strettamente) in un insieme limitato.
Infatti, se esiste $M>0$ t.c. $f(x)=0$ per $|x|>M$, allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\,dx = \int_{-M}^{M} |x| f_X(x)\,dx \le \int_{-M}^{M} M f_X(x)\,dx = M \overbrace{\int_{-M}^{M} f_X(x)\,dx}^{=1} = M < \infty.$$

A partire da questa definizione, in maniera analoga avremo che:

- i <u>momenti</u> sono $\mathbb{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)dx$

- i <u>momenti centrati</u> sono $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mathbb{E}[X])^k f_X(x)dx$

se queste grandezze esistono finite

e si ha la <u>varianza</u> per $k=2$.

Ricordiamo che anche nel caso delle v.a. continue, si ha la proprietà di linearità per $\mathbb{E}[\cdot]$; quindi si ottiene ancora la formula alternativa per la varianza vista nelle lezioni passate.

Allora:

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx\right)^2$$

La covarianza (e le formule alternative dimostrate) si può considerare anche per v.a. continue.
Però in generale bisognerebbe saper trattare le distribuzioni congiunte di due v.a. unidimensionali continue.

In generale la trattazione delle distribuzioni congiunte quando le v.a. unidimensionali sono continue va oltre gli obiettivi del corso.

Potremo dire qualcosa solo nel caso in cui le v.a. unidimensionali siano indipendenti.
In generale, come già detto, si ha

$X_1, \ldots, X_n$ indipendenti e con medie finite $\Rightarrow \mathbb{E}[X_1 \cdots X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdots \mathbb{E}[X_n]$

Quindi

X_1 e X_2 indipendenti e con medie finite $\Longrightarrow \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0.$

In generale (anche per v.a. continue) si possono costruire controesempi per $\Leftarrow$ (quindi <u>non</u> vale il viceversa)

SPERANZE MATEMATICHE E VARIANZE DI V.A. CONTINUE CON DISTRIBUZIONE NOTEVOLE

1) DISTRIBUZIONE UNIFORME $U(a,b)$

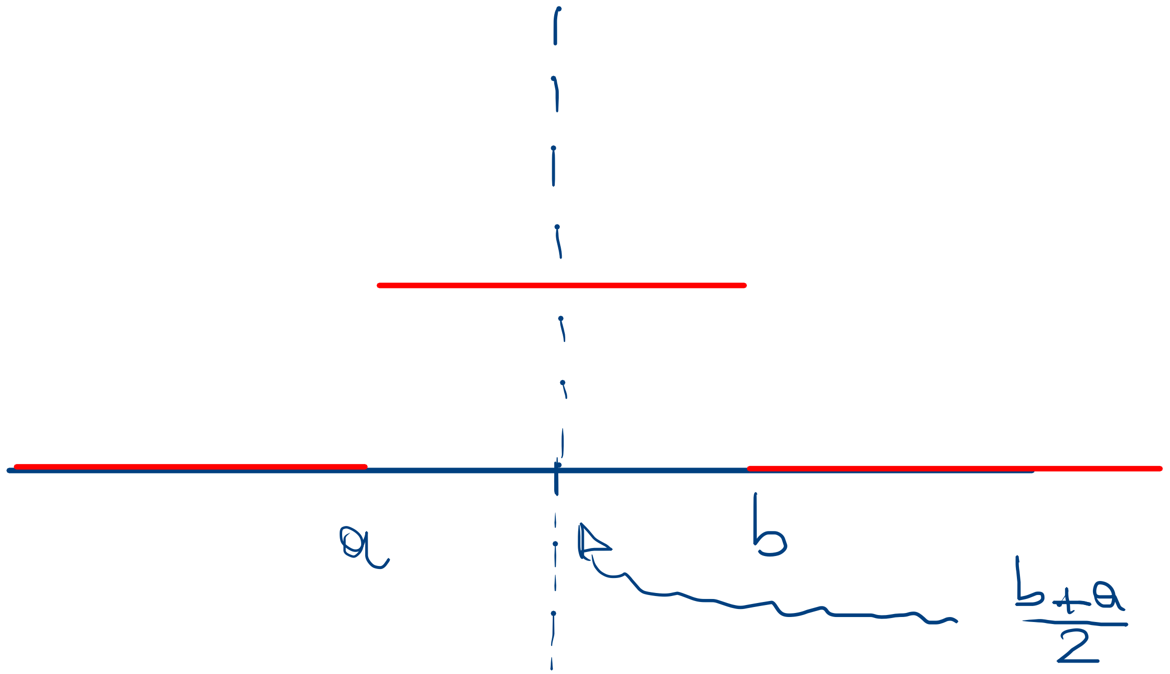
La (*) vale banalmente

$$\mathbb{E}[X] = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} x \cdot 0 \, dx}_{=0} + \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} \, dx + \underbrace{\int_b^{\infty} x \cdot 0 \, dx}_{=0} = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} \, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x \, dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{1}{\cancel{b-a}} \, \frac{\overset{b+a}{\cancel{b^2-a^2}}}{2} = \frac{b+a}{2}.$$

OSS.

Il valore ottenuto è il punto medio dell'intervallo (a,b)



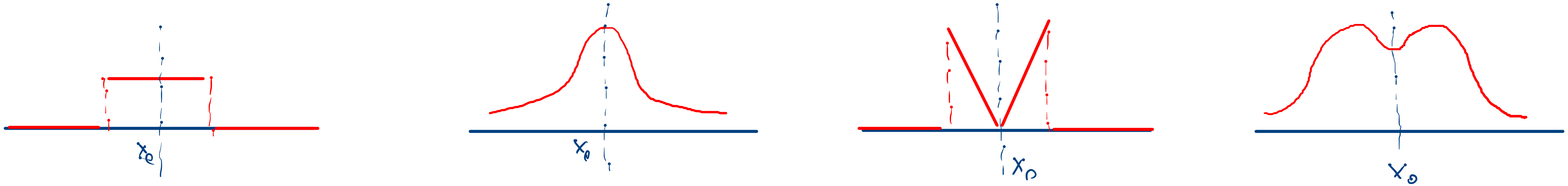
OSS.

L'osservazione appena fatta non sorprende se si tiene conto della seguente proprietà più generale:

nel caso in cui X sia una v.a. continua che ha speranza matematica finita (cioè vale (*)), e con densità simmetrica rispetto ad un certo valore x_0, cioè

$$f(x_0-x)=f(x_0+x) \qquad \forall x>0,$$

allora $\mathbb{E}[X]=x_0$. Esempi (non esaustivi):



$$\mathrm{Var}[X] = \underbrace{\mathbb{E}[X^2]}_{=\,\ldots} - \underbrace{\mathbb{E}^2[X]}_{=\left(\frac{b+a}{2}\right)^2}$$

OSS (sull'espressione finale): la varianza di v.a. con distribuzione uniforme non cambia se si considerano intervalli con la stessa lunghezza. Questo non è sorprendente

$$\Rightarrow = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} x^2 \cdot 0 \, dx}_{=0} + \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} \, dx + \underbrace{\int_b^{\infty} x^2 \cdot 0 \, dx}_{=0} = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} \, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 \, dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{1}{b-a} \, \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{1}{\cancel{b-a}} \, \frac{\cancel{(b-a)}(b^2+ab+a^2)}{3} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

Quindi $\mathrm{Var}[X] = \dfrac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\dfrac{b+a}{2}\right)^2 = \dfrac{b^2+ab+a^2}{3} - \dfrac{b^2+2ab+a^2}{4} = \dfrac{4(b^2+ab+a^2) - 3(b^2+2ab+a^2)}{12} =$

$$= \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \boxed{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

2) DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE $Exp(\lambda)$

La verifica della condizione (*) coincide con il calcolo diretto di $\mathbb{E}[X]$.

oss. Questo accade sempre quando si ha $P(X \geq 0) = 1$ (in particolare $f_X(x) = 0$ per $x \leq 0$).

$$\mathbb{E}[X] = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \, dx}_{=0} + \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \overset{\text{integrale per parti}}{=} \underbrace{\left[x \cdot (-e^{-\lambda x})\right]_{x=0}^{x=\infty}}_{=0-0=0} - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda x} \cdot 1 \, dx = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{1}{\lambda} \underbrace{\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}_{=1} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \underbrace{\mathbb{E}[X^2]}_{=} - \underbrace{\mathbb{E}^2[X]}_{=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}}$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0 \, dx}_{=0} + \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \overset{\text{integrale per parti}}{=} \underbrace{\left[x^2 (-e^{-\lambda x})\right]_{x=0}^{x=\infty}}_{=0-0=0} - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda x} \cdot 2x \, dx = 2 \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} \underbrace{\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx}_{=1/\lambda} =$$

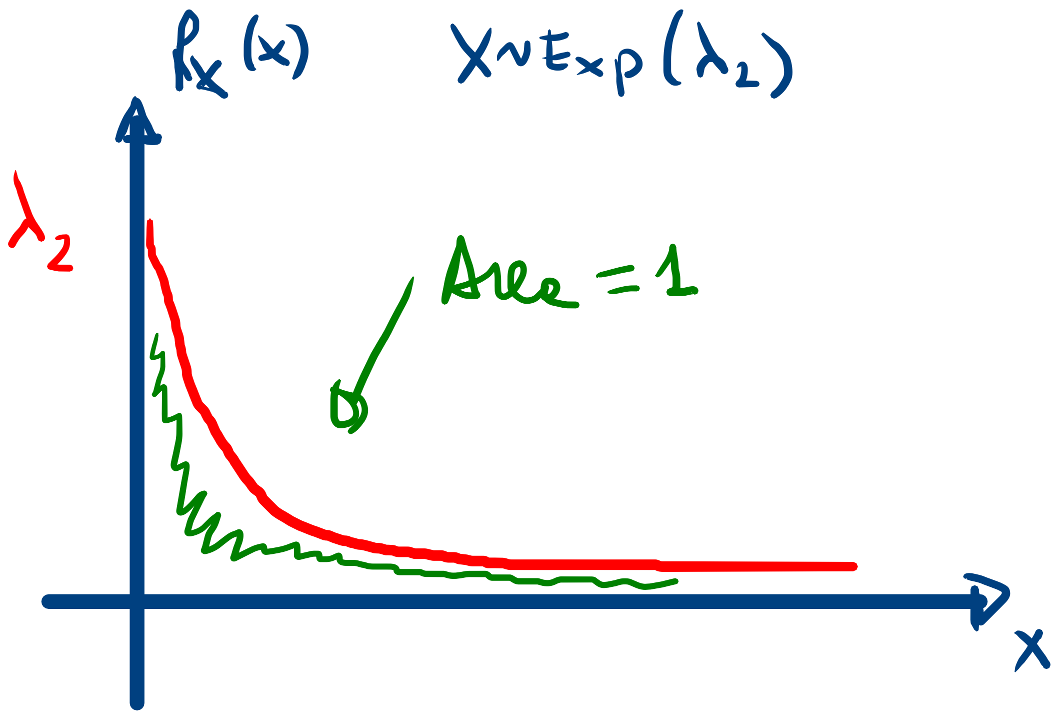
moltiplico e divido per λ...

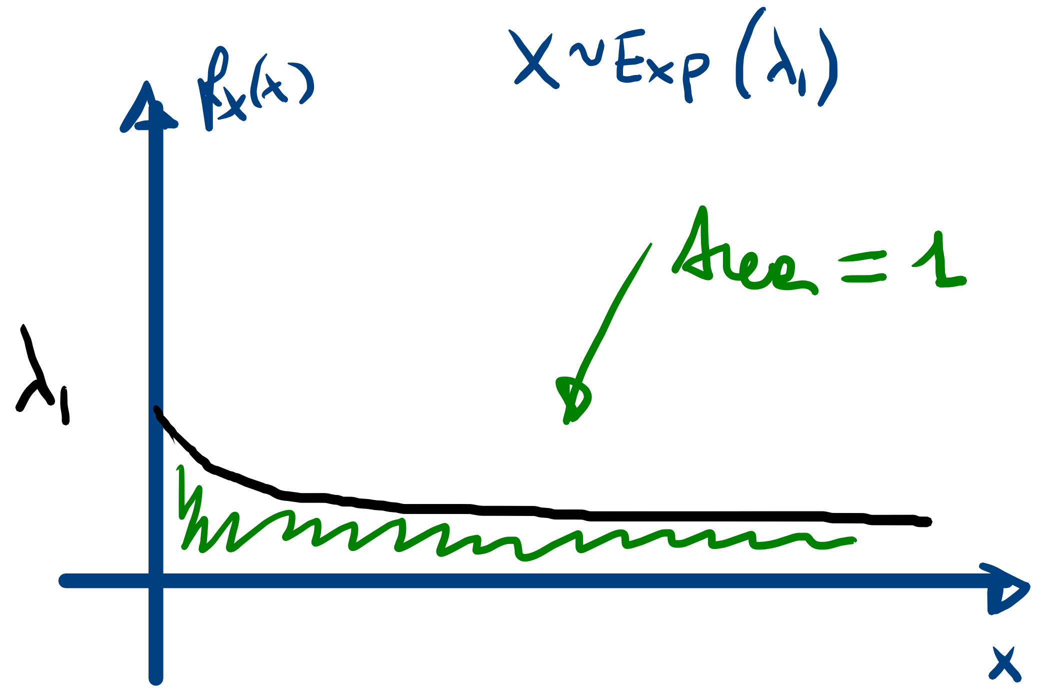
è il calcolo fatto sopra

$$= \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Quindi $\mathrm{Var}[X] = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

oss. Al crescere di λ la densità si concentra maggiormente vicino a $x=0$; si vedano i grafici di seguito con riferimento a due valori di λ, cioè λ_1 e λ_2, dove $\lambda_1 < \lambda_2$:





In corrispondenza ci si aspetta che $\mathbb{E}[X]$ e $Var[X]$ si avvicinano a zero al crescere di λ. In effetti per le formule trovate si ha $\frac{1}{\lambda_2} < \frac{1}{\lambda_1}$ e $\frac{1}{\lambda_2^2} < \frac{1}{\lambda_1^2}$.

3) Distribuzione Normale

Iniziamo con il caso standard $X \sim N(0,1)$.

La condizione (*), cioè $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\,dx < \infty$, si verifica come segue:

funzione simmetrica, intervallo simmetrico

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx = 2\int_{0}^{\infty} \underbrace{|x|}_{=x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x\, e^{-x^2/2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-x^2/2}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(-e^{-\infty} - (-e^{0})\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}(0+1) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} < \infty.$$

Allora possiamo calcolare $\mathbb{E}[X]$. Poiché vale $(*)$ e la densità è simmetrica rispetto a $x_0 = 0$ (si ha $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ è una funzione pari) per quanto abbiamo detto possiamo subito dire che $\mathbb{E}[X] = 0$.

Del resto si ha

$$\boxed{\mathbb{E}[X]} = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx}_{} + \int_{0}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 0.$$

OSS: Qui abbiamo l'integrale su un intervallo simmetrico $(-\infty, \infty)$ di $g(x) = x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ che è una funzione dispari; allora, poiché vale $(*)$, l'integrale deve essere uguale a zero.

Cambio di variabile: $z = -x$

$$= \int_{\infty}^{0} -z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} (-dz) =$$

$$= -\int_{0}^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

abbiamo un valore e il suo opposto;

precisamente si ha $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (per calcoli nella slide precedente)

Ora la varianza. La verifica della condizione (*) per X^2, che serve per usare la formula alternativa $Var[X]=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}^2[X]$, equivale al calcolo diretto di $\mathbb{E}[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx$ (del resto $P(X^2\geq 0)=1$ ovviamente).

Inoltre, come per tutti i casi in cui $\mathbb{E}[X]=0$, si ha $Var[X]=\mathbb{E}[X^2]$.

Abbiamo

funzione simmetrica, intervallo simmetrico

$$Var[X]=\mathbb{E}[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx = 2\int_0^\infty x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx =$$

$z=\frac{x^2}{2}$

$x^2=2z \qquad x=\sqrt{2z}$

$dx=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{z}}\,dz=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{z}}\,dz$

$$=2\int_0^\infty \cancel{2}z\,\frac{1}{\sqrt{\cancel{2}\pi}}\,e^{-z}\,\frac{1}{\sqrt{\cancel{2}}\sqrt{z}}\,dz=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \underbrace{\sqrt{z}}_{=z^{\frac{1}{2}}=z^{\frac{3}{2}-1}}\, e^{-z}\,dz=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)=$$

perché come visto in precedenza $\Gamma(y)=(y-1)\,\Gamma(y-1)$ per $y>1$

$$=\frac{\cancel{2}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\cancel{2}}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=1.$$

perché come visto in precedenza $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$

Ora dobbiamo calcolare $\mathbb{E}[Y]$ e $\mathrm{Var}[Y]$ quando $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Ricordiamo che $Y = \sigma X + \mu$ con $X \sim N(0,1)$. Teniamo conto di alcune proprietà di $\mathbb{E}[\cdot]$ e $\mathrm{Var}[\cdot]$. Si ha:

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\sigma X + \mu] \overset{\text{linearità}}{=} \sigma \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{=0} + \mu = \mu$$

calcolato prima

e

$$\mathrm{Var}[Y] = \mathrm{Var}[\sigma X + \mu] = \mathrm{Var}[\sigma X] = \sigma^2 \underbrace{\mathrm{Var}[X]}_{=1} = \sigma^2$$

calcolato prima

proprietà della varianza viste in passato

4) Distribuzione Gamma

Qui si ripete il commento sulla condizione (*) fatto per la distrib. esponenziale.

Si ha

$$\mathbb{E}[X] = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \, dx}_{=0} + \int_0^{\infty} x \cdot \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha+1-1} e^{-\beta x} dx =$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha+1-1} e^{-\beta x} dx}_{=1} = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}} = \frac{\cancel{\beta^{\alpha}}}{\cancel{\Gamma(\alpha)}} \frac{\alpha \cancel{\Gamma(\alpha)}}{\cancel{\beta^{\alpha}} \cdot \beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

$=1$ perché si ha l'integrale della densità della Gamma $(\alpha+1, \beta)$

<u>OSS</u>. Per $\alpha = 1$ si ottiene $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\beta}$ in accordo con il fatto che $X \sim Exp(\beta)$.

$$\mathrm{Var}[X] = \underbrace{\mathbb{E}[X^2]}_{=} - \underbrace{\mathbb{E}^2[X]}_{=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}}$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0 \, dx}_{=0} + \int_0^{\infty} x^2 \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha+2-1} e^{-\beta x} dx =$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Gamma(\alpha+2) &= (\alpha+1)\Gamma(\alpha+1) \\ &= (\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)\end{aligned}}$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^{\alpha+2}} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\beta^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} x^{\alpha+2-1} e^{-\beta x} dx}_{=1} = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^{\alpha+2}} = \frac{\cancel{\beta^\alpha}}{\cancel{\Gamma(\alpha)}} \frac{(\alpha+1)\alpha\cancel{\Gamma(\alpha)}}{\cancel{\beta^\alpha}\beta^2} = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2}$$

$=1$ perchè si ha l'integrale della densità della Gamma $(\alpha+2, \beta)$.

Quindi $\mathrm{Var}[X] = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\cancel{\alpha^2} + \alpha - \cancel{\alpha^2}}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

OSS. Per $\alpha = 1$ si ottiene $\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{\beta^2}$ in accordo con il fatto che $X \sim \mathrm{Exp}(\beta)$.

PROPOSIZIONE (speranza matematica di una trasformazione di una v.a. continua)

Sia X una v.a. continua, e sia $Y=g(X)$ un'altra v.a. continua. (SENZA DIMOSTRAZIONE)

Allora, se Y ha speranza matematica finita, si ha

$$\mathbb{E}[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\,dx$$

(il risultato si può estendere anche a casi con $\mathbb{E}[Y]=+\infty$, o $\mathbb{E}[Y]=-\infty$).

OSS. Tramite questa proposizione possiamo calcolare $\mathbb{E}[Y]$ senza conoscere la densità f_Y. In quel che segue faremo riferimento ad alcuni esercizi proposti.

ESERCIZIO / ESEMPIO 1

X con densità continua $f_X(x) = \dfrac{e^x}{e-1} 1_{(0,1)}(x)$.

Sia $Y = e^X$.

Allora $\mathbb{E}[Y] = \displaystyle\int_0^1 e^x \cdot \frac{e^x}{e-1}\, dx = \frac{1}{e-1}\int_0^1 e^{2x}\, dx = \frac{1}{e-1}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{e^2-1}{2(e-1)}$

$$= \frac{(e+1)\cancel{(e-1)}}{2\cancel{(e-1)}} = \frac{e+1}{2}.$$

Non ci serve conoscere f_Y. Comunque in un esercizio passato avevamo visto che $Y \sim U(1,e)$ e, di conseguenza, si poteva dire che $\mathbb{E}[Y] = \dfrac{e+1}{2}$. il punto medio dell'intervallo

ESERCIZIO / ESEMPIO 2

X con densità $f_X(x) = \alpha x^{\alpha-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$ per $\alpha > 0$.

Sia $Y = X^\beta$ per $\beta > 0$.

Allora $\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 x^\beta \alpha x^{\alpha-1} dx = \alpha \int_0^1 x^{\alpha+\beta-1} dx = \alpha \left[\frac{x^{\alpha+\beta-\cancel{1}+\cancel{1}}}{\alpha+\beta-\cancel{1}+\cancel{1}} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \left(1^{\alpha+\beta} - 0^{\alpha+\beta} \right) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

Non ci serve conoscere f_Y. Comunque in un esercizio passato avevamo visto che Y ha densità $f_Y(y) = \frac{\alpha}{\beta} y^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(y)$ e, di conseguenza, si poteva dire

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 y \frac{\alpha}{\beta} y^{\frac{\alpha}{\beta}-1} dy = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^1 y^{\cancel{1}+\frac{\alpha}{\beta}\cancel{-1}} dy = \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{y^{\frac{\alpha}{\beta}+1}}{\frac{\alpha}{\beta}+1} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\alpha}{\beta}+1} \left(1^{\frac{\alpha}{\beta}+1} - 0^{\frac{\alpha}{\beta}+1} \right) =$$

$$= \frac{\alpha/\beta}{\frac{\alpha}{\beta}+1} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

ESERCIZIO / ESEMPIO 3

$X \sim U(a,b)$ per $0 < a < b$

Sia $Y = X^r$ per $r > 0$.

Allora $\mathbb{E}[Y] = \int_a^b x^r \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^r dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^{r+1}}{r+1} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(b-a)(r+1)}$

Non ci serve conoscere f_Y. Comunque si ha $P(a^r \leq Y \leq b^r) = 1$, $y^{1/r} \in (a,b)$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \leq a^r \\ * & \text{per } a^r < y < b^r \\ 1 & \text{per } y \geq b^r \end{cases} \qquad * = P(X^r \leq y) = P(X \leq y^{1/r}) = \int_a^{y^{1/r}} \frac{1}{b-a} dx = \left[\frac{x}{b-a} \right]_{x=a}^{x=y^{1/r}} = \frac{y^{1/r} - a}{b-a}$$

da cui segue

$f_Y(y) = \frac{1}{r} \frac{y^{\frac{1}{r}-1}}{b-a} 1_{(a^r, b^r)}(y)$, e quindi $\mathbb{E}[Y] = \int_{a^r}^{b^r} y \frac{1}{r} \frac{y^{\frac{1}{r}-1}}{b-a} dy = \frac{1}{r(b-a)} \int_{a^r}^{b^r} y^{\frac{1}{r}} dr =$

$$= \frac{1}{r(b-a)} \left[\frac{y^{\frac{1}{r}+1}}{\frac{1}{r}+1} \right]_{y=a^r}^{y=b^r} = \frac{(b^r)^{\frac{1}{r}+1} - (a^r)^{\frac{1}{r}+1}}{r(b-a)\left(\frac{1}{r}+1\right)} = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(b-a)(r+1)}.$$

ESERCIZIO / ESEMPIO 4 (un esempio che funziona con $\mathbb{E}[Y] = +\infty$).

$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ con $\lambda = 1$ (quindi $f_X(x) = 1 \cdot e^{-1 \cdot x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$).

Sia $Y = e^X$

Allora $\mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty e^x \cdot e^{-x} \, dx = \int_0^\infty dx = [x]_{x=0}^{x=\infty} = +\infty$.

Non ci serve conoscere f_Y. Comunque si ha $P(Y \geq \underbrace{e^0}_{=1}) = 1$, da cui segue

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \leq 1 \\ \circledast & \text{per } y > 1 \end{cases}$$

$\log y > 0$

$$\circledast = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) \stackrel{!}{=} \int_0^{\log y} e^{-x} \, dx = \left[-e^{-x}\right]_{x=0}^{x=\log y} = -\frac{1}{y} + 1$$

da cui segue

$f_Y(y) = \frac{1}{y^2} \mathbb{1}_{(1,\infty)}(y)$, e quindi $\mathbb{E}[Y] = \int_1^\infty y \frac{1}{y^2} \, dy = \int_1^\infty \frac{1}{y} \, dy = [\log y]_{y=1}^{y=\infty} = +\infty$.