FORMALIZZAZIONE DEI PROBLEMI

DEF

UN PROBLEMA È DEFINITO DA UNA QUINTUPLA $\langle \mathcal{I}, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \eta, \varrho \rangle$ DOVE

- $\mathcal{I}$: L'INSIEME DELLE ISTANZE
- $\mathcal{R}$: L'INSIEME DELLE RISPOSTE AMMISSIBILI
- $\mathcal{S}$: L'INSIEME DELLE POSSIBILI SOLUZIONI PER UNA DETERMINATA ISTANZA
- ETA
  η : FUNZIONE CHE DEFINISCE L'INSIEME DELLE SOLUZIONI EFFETTIVE

$$\eta : \mathcal{S}(\mathcal{I}) \longrightarrow 2^{\mathcal{S}(\mathcal{I})}$$

CARDINALITÀ DELL'INSIEME

- RHO
  ϱ : FUNZIONE CHE ESTRAPOLA LA RISPOSTA DEL PROBLEMA RELATIVA AD UNA DETERMINATA ISTANZA

$$\varrho : \mathcal{I} \times \eta(\mathcal{S}(\mathcal{I})) \longrightarrow \mathcal{R}$$

ESEMPIO

PROBLEMA BASATO SUI DIVISORI DI $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{I} = \mathbb{N}$, $\mathcal{S}(n) = \{ x \in \mathbb{N} : x \leq n \}$, $\eta(n, \mathcal{S}(n)) = \{ x \in \mathcal{S}(n) : x \text{ È DIVISORE DI } n \}$,

$\varrho : \eta(n, \mathcal{S}(n)) \longrightarrow \mathcal{R}$

TIPOLOGIE DI PROBLEMI

1) PROBLEMA DI ENUMERAZIONE

ES

ELENCARE TUTTI I DIVISORI DI n:

$$R = \eta(n, S(n)) \quad \text{E} \quad e(\eta(n, S(n))) = \eta(n, S(n))$$

2) PROBLEMA DI DECISIONE

ES

DECIDERE SE n E' PRIMO

$$R = \{\text{VERO}, \text{FALSO}\} \quad \text{E} \quad e(\eta(n, S(n))) = \eta(n, S(n)) = \{1, n\}$$

3) PROBLEMA DI RICERCA

ES

CALCOLARE UN DIVISORE NON BANALE DI n

$$R = \eta(n, S(n)) - \{1, n\} \quad \text{E} \quad e(\eta(n, S(n))) = x, \; x \in R$$

4) PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE

ES

CALCOLARE IL PIU' GRANDE DIVISORE NON BANALE DI n

$$R = \max(\eta(n, S(n)) - \{1, n\}) \quad \text{E} \quad e(\eta(n, S(n))) = R$$

OSS

SOLO I PROBLEMI DECISIONALI SI POSSONO RISOLVERE MEDIANTE MACCHINE DI TIPO RICONOSCITORE

→ ANCHE LE ALTRE TIPOLOGIE DI PROBLEMI CONTENGONO UN PROBLEMA DI TIPO RICONOSCITORE

Problemi decisionali

DEF

GAMMA

Un problema decisionale Γ è definito dalla tripla $\langle I_\Gamma, S, \Pi_\Gamma \rangle$ dove:

- I_Γ : istanze di Γ
- $S(x)$: soluzioni possibili $\forall x \in I_\Gamma$
- $\Pi_\Gamma(x, S(x))$: predicato che dato $x \in I_\Gamma$ e $S(x)$, testimonia se da S si può dedurre l'esistenza di soluzioni effettive per x

e η

è l'unione di η e e

Esercizio sullo shortest path (SP)

Dati un grafo $G=(V,E)$, $k \in \mathbb{N}$, $s,t \in V$:
$\exists$ cammino in G da s a t di lunghezza $\leq k$

- $I_{SP} = \{ \langle G(V,E), s, t, k \rangle : s,t \in V, k \in \mathbb{N} \}$
- $S_{SP} = \{ P : P \text{ è un cammino da } s \text{ a } t \}$
- $\Pi_{SP}(G,s,t,k,S_P(G,s,t,k)) = \exists P \in S_{SP}(G,s,t,k) : |P| \leq k$

ESERCIZIO SATISFIABILITY 3 (3 SAT)

DATA UNA FUNZIONE (f) BOOLEANA IN FORMA 3 CONGIUNTIVA NORMALE (3CNF) SULL'INSIEME DI VARIABILI X:

DECIDERE SE f È SODDISFACIBILE

DEFINIZIONI

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$f(x) = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$$

$C_j = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$, C_j CLAUSOLA COMPOSTA DA 3 LETTERALI (VARIABILE ASSERITA O NEGATA)

- $\mathcal{I}_{3SAT} = \{ \langle X, f \rangle : f = f(x) \text{ è in 3CNF} \}$
- $S_{3SAT}(X, f) = \{ a : x_i \longrightarrow \{0,1\}, \forall x_i \in X \}$ (ASSEGNAZIONE)
- $\Pi_{3SAT}(X, f, S(X, f)) = \exists\, a \in S_{3SAT}(X, f) : f(a(x)) = 1$

CREIAMO DELLE CODIFICHE PER USARE LE MACCHINE DI TURING

1) χ_1 (CHI) :

$$\mathcal{I}_{3SAT} \longrightarrow \{0,1,2,3,4\}^*$$

DATO $x_n = x_4$ E $f = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$ SCRIVIAMO:

$$\chi_1(f) = \underbrace{1111}_{n=4}\ \overset{\text{SEPARATORE}}{2}\ 1\ \underbrace{1000}_{x_1}\ \overset{\text{OR}}{3}\ 0\ \underbrace{0100}_{x_2}\ 3\ 1\ \overbrace{0010}^{x_3}\ \overset{\text{AND}}{4}\ 1\ \overbrace{0100}^{x_2}$$

$n=4$: INDICA IL NUMERO DI VARIABILI

1 SE ASSERITA, 0 SE NEGATA

VARIABILE x_i INDICATA CON n 0 TRANNE UN 1 IN POSIZIONE i A PARTIRE DA SINISTRA

2) γ_2:

$$\mathcal{I}_{3SAT} \longrightarrow \{0,1,2\}^*$$

DATO $x_n = x_4$ E $f = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$

COMPILIAMO LA TAVOLA DI VERITÀ PER f:

X_1	X_2	X_3	X_4	f	
0	0	0	0	1	$\rightarrow \alpha_1$
0	0	0	1	1	$\rightarrow \alpha_2$
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

SCRIVIAMO OGNI RIGA DELLA TAVOLA SEPARATA DA UN CARATTERE DIVISORE

$$\gamma_2(f) = \underbrace{00001}_{\alpha_1}\ 2\ \underbrace{00011}_{\alpha_2}\ \underbrace{2}_{\text{SEPARATORE}} \ldots$$

CAPIAMO ORA QUALE SIA LA CODIFICA PIÙ CONVENIENTE DA USARE

- COMPLESSITÀ PER γ_1:

$$|\gamma_1(f)| = n+1\,[\underbrace{3(n+1)}_{\text{LETTERALI IN UNA CLAUSOLA}}+\overbrace{2}^{\text{OR}}]\,\underbrace{m}_{\text{NUMERO CLAUSOLE}} + \overbrace{m-1}^{\text{AND}} \Rightarrow m \le \binom{2n}{3} \le (2n)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\gamma_1(f)| = n^5 \dashrightarrow \text{AL RIALZO}$$

$$dTIME(T_1, \gamma_1(f)) > 2^n = 2^{\sqrt[5]{\gamma_1(f)}}$$

- COMPLESSITÀ PER γ_2: $\longrightarrow$ IRRAGIONEVOLE

$$dTIME(T_2, \gamma_2(f)) = |\gamma_2(f)| = \Omega\left(2^{\sqrt[5]{|\gamma_1|}}\right)$$

CODIFICA LUNGA $O(2^n)$ E CONTIENE GIÀ LA SOLUZIONE

PER SCRIVERE LA TAVOLA DI VERITÀ PRIMA DEVO AVERLA RISOLTA

CODIFICHE IRRAGIONEVOLI

γ_2 È IRRAGIONEVOLE SE:

$$\exists x \in \mathcal{Y}\left[\,|\gamma_2(x)| \notin O(|\gamma_1(x)|^k)\ \forall k \in \mathbb{N}\,\right]$$