APPLICAZIONI DELLE LEGGI DEL MOTO

Forze di attrito

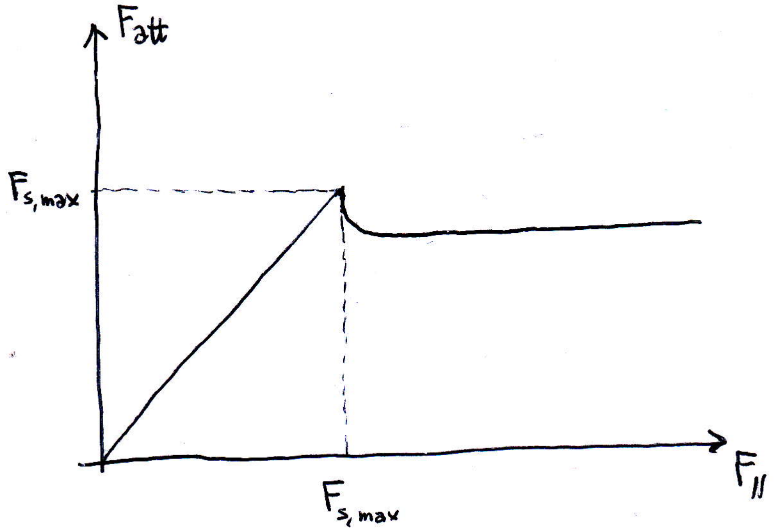
Quando due superfici a contatto scivolano l'una sull'altra si osserva una resistenza al moto, detta FORZA DI ATTRITO DINAMICO.

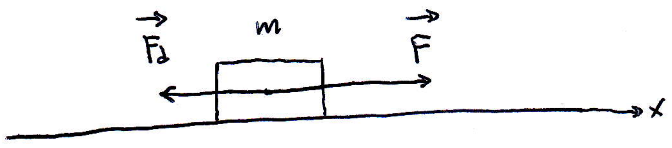
In generale si osserva una resistenza anche quando si cerca di mettere in moto parallelamente a una superficie un corpo inizialmente fermo che poggia su tale superficie (FORZA DI ATTRITO STATICO); per quanto riguarda l'attrito statico, tale forza che ostacola il moto deriva dalle rugosità delle superfici, e appare solo in presenza di altre forze agenti sul corpo parallelamente alla superficie di appoggio.

- attrito statico; si osserva sperimentalmente che, per intensità non troppo elevate della forza applicata parallela alla superficie di appoggio, un corpo inizialmente fermo resta fermo. Dunque, ciò significa che, in tali condizioni, il modulo della forza di attrito statico aumenta al crescere del modulo della forza applicata (finché il corpo resta fermo). Il modulo della forza di attrito statico è dunque massimo nell'istante in cui il corpo inizia a muoversi.

- <u>attrito dinamico</u>; detto $|\vec{F}_s|_{max}$ il massimo valore che assume il modulo della forza di attrito statico prima che un dato corpo inizi a muoversi, e detto $|\vec{F}_\parallel|$ il modulo della forza applicata al corpo parallelamente alla superficie di appoggio, si osserva che per $|\vec{F}_\parallel| > |\vec{F}_s|_{max}$ il corpo inizia a muoversi, e la forza di attrito che agisce sul corpo in moto (la forza di attrito dinamico, appunto) ha modulo costante e minore di $|\vec{F}_s|_{max}$.

Posto $F_\parallel = |\vec{F}_\parallel|$, il modulo della forza di attrito agente sul corpo in funzione di $F_\parallel$ è il seguente:





Posto $F_d = |\vec{F}_d|$ (forza di attrito dinamico) e $F = |\vec{F}|$,

per la seconda legge della dinamica deve risultare

$$m a_x = F - F_d$$

Se il corpo è in movimento e $F \simeq F_d$, il corpo si muove a velocità costante sulla superficie scabra (cioè con attrito).
Se il corpo è in movimento e $F = 0$, allora il corpo rallenta fino a fermarsi sotto l'azione della forza di attrito dinamico.

Un importante risultato sperimentale è il seguente:
sia $F_{s,max}$ sia F_d sono proporzionali al modulo della forza di reazione che agisce tra il corpo e la superficie di appoggio perpendicolarmente alla superficie.

In sintesi possiamo dire che:

1) La forza di attrito statico agisce parallelamente alla superficie di contatto quando si applica una forza al corpo fermo parallelamente alla superficie.
Detta $\vec{N}$ la forza di reazione esercitata dalla superficie sul corpo (perpendicolarmente alla superficie), vale la disuguaglianza seguente: $F_s \leq \mu_s N$, dove $N = |\vec{N}|$ e μ_s è un coefficiente costante detto COEFFICIENTE DI ATTRITO STATICO (grandezza adimensionale), dipendente dalla natura delle superfici a contatto.

2) Nel caso di attrito dinamico, risulta sempre
$|\vec{F_d}| = \mu_d N$, dove μ_d è un coefficiente costante detto COEFFICIENTE DI ATTRITO DINAMICO (grandezza adimensionale), dipendente dalla natura delle superfici a contatto.

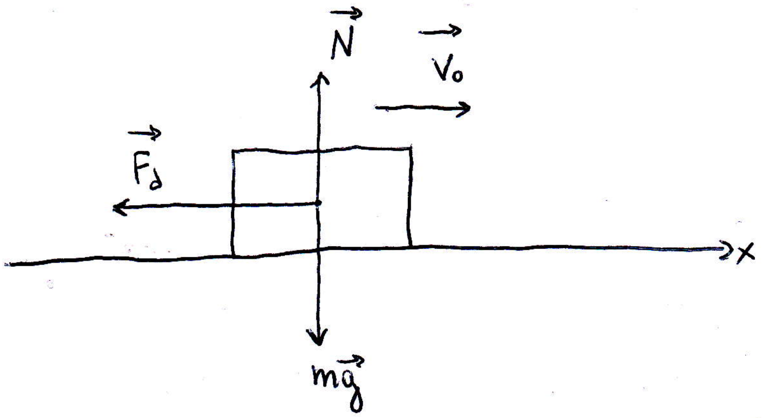
3) In generale risulta $\mu_d < \mu_s$ fissate le superfici a contatto.

4) $\vec{F}_s$ si oppone sempre alla forza $\vec{F}$ applicata parallelamente alla superficie scabra.

$\vec{F}_d$ è sempre opposta al verso della velocità istantanea del corpo in moto sulla superficie scabra.

Esempio 1

Un corpo si sta muovendo su un piano orizzontale scabro.
Il coefficiente di attrito dinamico è μ_d.
Il corpo inizialmente ha velocità istantanea $\vec{v}_0$, e si ferma dopo avere percorso un tratto di lunghezza d.
Se è nota la distanza d, quanto vale $|\vec{v}_0|$?



Già sappiamo che risulta $\vec{N} + m\vec{g} = 0$, cioè $N = mg$.
Applichiamo la seconda legge della dinamica al moto del corpo lungo l'asse x orizzontale:

$m a_x = -F_d$, essendo $F_d = |\vec{F_d}| = \mu_d N = \mu_d m g$

Allora: $\cancel{m} a_x = -\mu_d \cancel{m} g \Rightarrow a_x = -\mu_d g$

Dunque, sotto l'azione della forza di attrito dinamico il moto del corpo e' rettilineo uniformemente accelerato.

Utilizziamo quindi la legge che lega direttamente la posizione e la velocita' istantanea nel moto rettilineo uniformemente accelerato.

Poniamo $x_0 = 0$, e se t_1 e' l'istante in cui il corpo si ferma, poniamo $x(t_1) = d$, $V_x(t_1) = 0$.

$$(V_x(t_1))^2 = V_0^2 + 2 a_x (x(t_1) - x_0),$$ cioe'

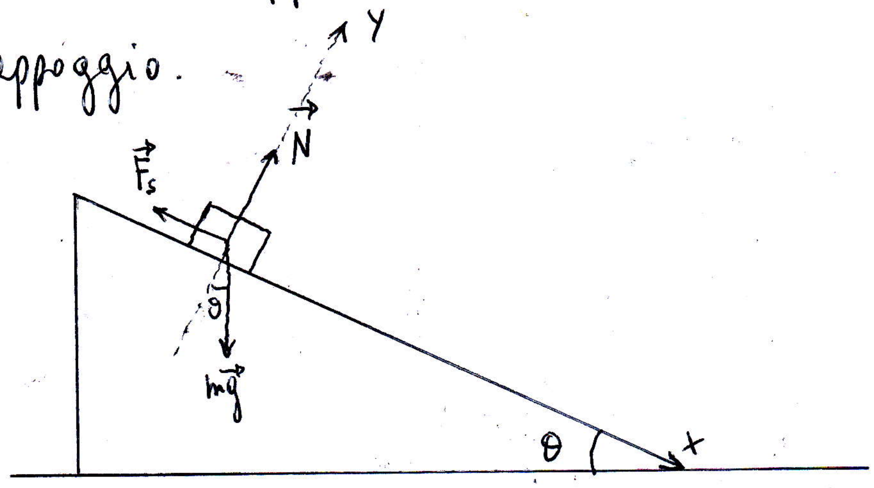
$$0 = V_0^2 - 2\mu_d g d,$$ da cui otteniamo

$$V_0^2 = 2\mu_d g d,$$ cioe' $$V_0 = \sqrt{2\mu_d g d}$$

Esempio 2

Misura dei coefficienti di attrito tra un corpo e il piano di appoggio.

a)



attrito statico

Corpo fermo su un piano inclinato sotto l'azione della forza peso, della reazione vincolare del piano inclinato e della forza di attrito statico esercitata dalla superficie del piano inclinato sul corpo.

All'equilibrio statico deve risultare:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_s = 0$$

Introduciamo un opportuno sistema di assi cartesiani ortogonali: asse x parallelo al piano inclinato, verso positivo discendente; asse y perpendicolare al piano inclinato, verso positivo uscente (vedi figura sopra).

L'equazione scritta sopra la possiamo riscrivere in termini delle componenti dei vettori lungo gli assi cartesiani appena introdotti:

$N_x = 0$, $N_y = |\vec{N}| = N$, $F_{s,x} = -F_s = -|\vec{F}_s|$, $F_{s,y} = 0$,

$(m\vec{g})_x = mg \operatorname{sen}\theta$, $(m\vec{g})_y = -mg\cos\theta$

Allora:
$$\begin{cases}(m\vec{g})_x + N_x + F_{s,x} = 0 \\ (m\vec{g})_y + N_y + F_{s,y} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mg\,\text{sen}\,\theta - F_s = 0 \\ -mg\cos\theta + N = 0\end{cases}$$

Dunque, otteniamo le seguenti relazioni:

$$\begin{cases}F_s = mg\,\text{sen}\,\theta \\ N = mg\cos\theta\end{cases}$$

Inclinando sempre di più il piano inclinato (cioè aumentando il valore dell'angolo θ), per un certo valore critico θ_c dell'angolo θ il corpo inizia a muoversi. Per $\theta = \theta_c$, dunque, il modulo della forza di attrito statico avrà il suo valore massimo, che abbiamo visto essere uguale a $\mu_s N$.

Dunque, per $\theta = \theta_c$ possiamo scrivere:

$$\begin{cases}mg\,\text{sen}\,\theta_c = \mu_s N \\ mg\cos\theta_c = N\end{cases}$$

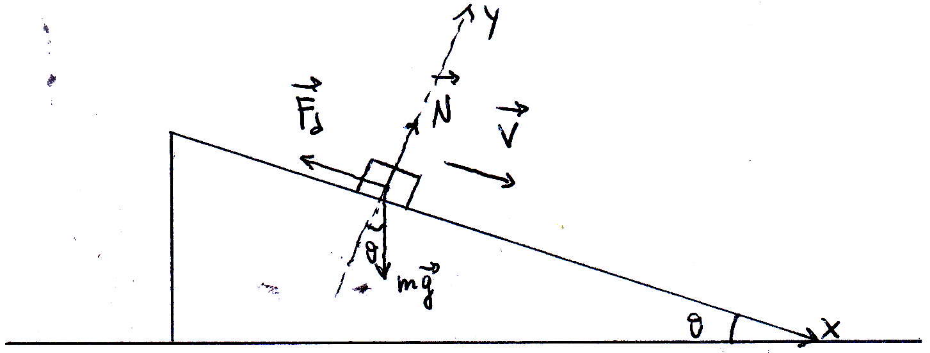
N è il valore che $|\vec{N}|$ ha quando $\theta = \theta_c$, ovviamente

Dividendo membro a membro le due relazioni, otteniamo:

$$\text{tg}\,\theta_c = \mu_s$$

Dunque, una misura diretta dell'angolo θ_c fornisce una valutazione del coefficiente di attrito statico μ_s tramite la relazione $\mu_s = \text{tg}\,\theta_c$.

b) attrito dinamico



Quando il corpo e' in moto lungo il piano inclinato, su di esso agiscono le tre forze $m\vec{g}$, $\vec{N}$ e $\vec{F_d}$ (vedi figura).
Per un certo valore θ^* dell'angolo θ si osserva che la velocita' del corpo e' costante.

Dunque, per $\theta = \theta^*$ risulta (per la prima legge della dinamica):

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_d} = 0$$

Introducendo un sistema di assi cartesiani ortogonali come nel caso precedente, possiamo quindi scrivere:

$$\begin{cases} (m\vec{g})_x + N_x + F_{d,x} = 0 \\ (mg)_y + N_y + F_{d,y} = 0 \end{cases}$$

Risulta: $N_x = 0$, $N_y = |\vec{N}| = N$, $F_{d,x} = -|\vec{F_d}| = -\mu_d N$, $F_{d,y} = 0$,

$(m\vec{g})_x = mg \operatorname{sen}\theta^*$, $(m\vec{g})_y = -mg\cos\theta^*$; allora:

$$\begin{cases} mg \operatorname{sen}\theta^* - \mu_d N = 0 \\ -mg\cos\theta^* + N = 0 \end{cases}$$

Dunque otteniamo:

$$\begin{cases} mg \, \text{sen}\, \theta^* = \mu_d N \\ mg \cos\theta^* = N \end{cases}$$

N e' il valore di $|\vec{N}|$ per $\theta = \theta^*$

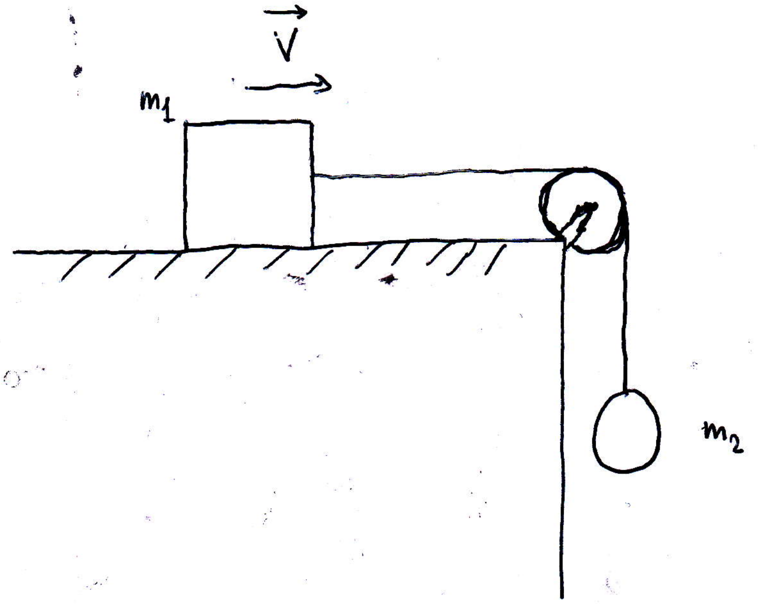
Dividendo membro a membro le due relazioni, otteniamo

$$\text{tg}\, \theta^* = \mu_d$$

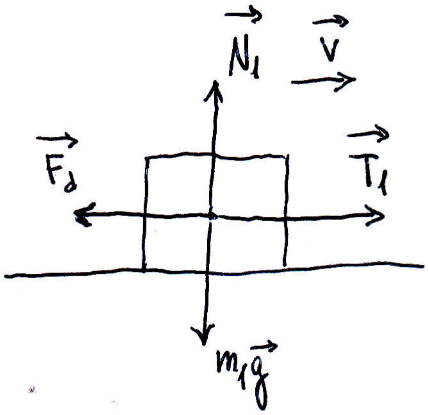
Dunque, una misura diretta dell'angolo θ^* fornisce una valutazione del coefficiente di attrito dinamico μ_d tramite la relazione $\mu_d = \text{tg}\, \theta^*$.

Esempio 3

Un corpo di massa $m_1 = 4\,kg$ e' collegato a un corpo di massa $m_2 = 7\,kg$ tramite una fune inestensibile di massa trascurabile. Il corpo di massa m_1 può muoversi su una superficie orizzontale scabra, con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0,3$.
Il corpo di massa m_2 può muoversi lungo la direzione verticale; la fune passa per una puleggia anch'essa di massa trascurabile, come schematizzato nella figura.
Si calcolino il modulo dell'accelerazione dei due corpi e il modulo della tensione della fune.



Disegnamo il diagramma di tutte le forze agenti sul corpo di massa m_1 durante il moto sul piano orizzontale:



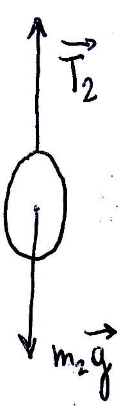
$\vec{N}_1$: reazione vincolare del piano orizzontale sul corpo di massa m_1

$\vec{T}_1$: forza esercitata dalla fune sul corpo di massa m_1

$\vec{F}_d$: forza di attrito dinamico agente durante il moto sul corpo di massa m_1.

Risulta $N_1 = |\vec{N}_1| = m_1 g$, $F_d = |\vec{F}_d| = \mu_d N_1 = \mu_d m_1 g$

Disegnamo il diagramma di tutte le forze agenti sul corpo di massa m_2:



$\vec{T}_2$: forza esercitata dalla fune sul corpo di massa m_2

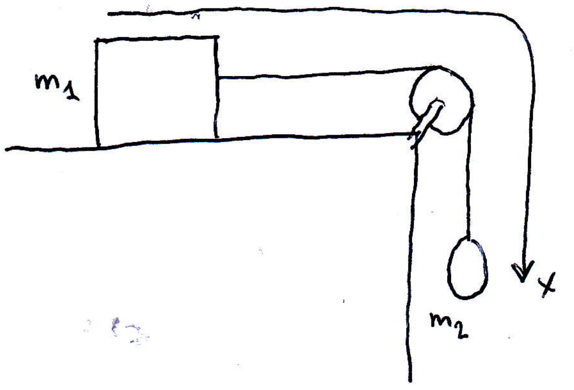
Poiché la massa della carrucola è trascurabile, risulta

$$|\vec{T}_2| = |\vec{T}_1| = T$$

Poiché la fune è inestensibile, il modulo della velocità del corpo di massa m_1 è, istante per istante, uguale al modulo della velocità del corpo di massa m_2.

Lo stesso vale per il modulo delle due accelerazioni.

Conviene introdurre un asse x che si "avvolge" attorno alla puleggia come nello schema seguente:



Applichiamo quindi la seconda legge della dinamica ai due corpi, aiutandoci con i diagrammi tracciati in precedenza:

$$\begin{cases} m_1 a_x = T - \mu_d m_1 g \\ m_2 a_x = m_2 g - T \end{cases}$$

Sommiamo le due equazioni membro a membro:

$(m_1 + m_2)\, a_x = (m_2 - \mu_d m_1) g$, da cui otteniamo:

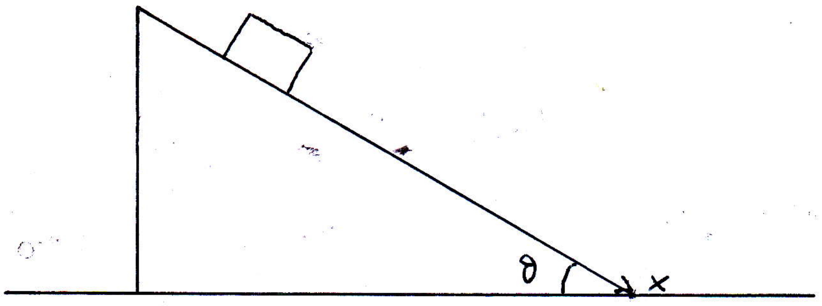
$$a_x = \left(\frac{m_2 - \mu_d m_1}{m_1 + m_2}\right) g = \left(\frac{7\,kg - 0{,}3 \cdot 4\,kg}{4\,kg + 7\,kg}\right) \cdot \left(9{,}81\,\frac{m}{s^2}\right) = 5{,}17\,\frac{m}{s^2}$$

Dalla seconda equazione otteniamo:

$$T = m_2 (g - a_x) = m_2 g \left(1 - \frac{m_2 - \mu_d m_1}{m_1 + m_2}\right) = m_2 g \left(\frac{m_1 + \cancel{m_2} - \cancel{m_2} + \mu_d m_1}{m_1 + m_2}\right) =$$

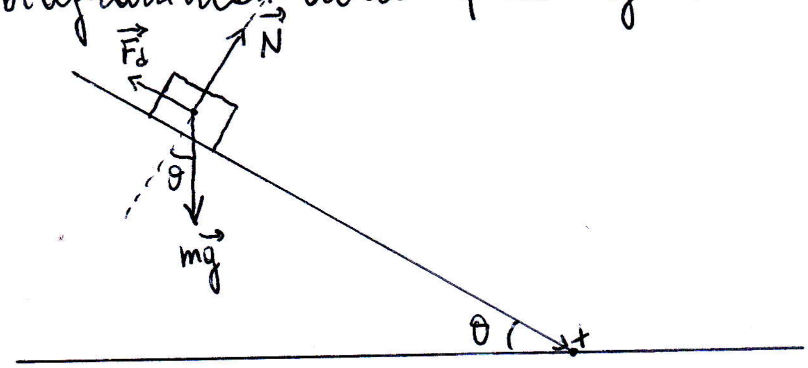
$$= \left[\frac{m_1 m_2 (1 + \mu_d)}{m_1 + m_2}\right] g = \left[\frac{4\,kg \cdot 7\,kg \cdot (1 + 0{,}3)}{4\,kg + 7\,kg}\right] \cdot \left(9{,}81\,\frac{m}{s^2}\right) = 32{,}46\,N$$

Esempio 4



Un corpo scivola lungo un piano inclinato scabro, con accelerazione $a_x = \frac{1}{3} g$. Risulta inoltre $\theta = 30°$.
Calcolare il valore del coefficiente di attrito dinamico tra il corpo e la superficie del piano inclinato.

Diagramma delle forze agenti sul corpo:



Utilizzando il sistema di assi cartesiani ortogonali già sfruttato in altri esercizi simili, possiamo scrivere le equazioni seguenti:

$$\begin{cases} N = mg\cos\theta \\ m a_x = mg \operatorname{sen}\theta - \mu_d N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = mg\cos\theta \\ \cancel{m} a_x = \cancel{m} g \operatorname{sen}\theta - \mu_d \cancel{m} g \cos\theta \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo quindi:

$\mu_d g \cos\theta = g \operatorname{sen}\theta - a_x$; poiché $a_x = \frac{1}{3} g$, otteniamo poi:

$\mu_d \cancel{g} \cos\theta = \cancel{g} \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{3} \cancel{g}$, e quindi:

$$\mu_d = \frac{\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{3}}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9} = 0,19$$

Si osservi che, per risolvere il problema, non è stato necessario conoscere il valore della massa del corpo, che si semplifica durante lo svolgimento dei calcoli.

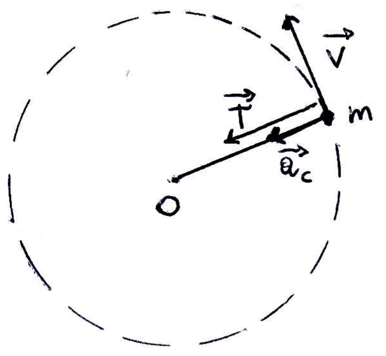
Dinamica del moto circolare uniforme

Nel moto circolare uniforme il corpo si muove con velocità vettoriale istantanea $\vec{v}$ costante in modulo, e con accelerazione centripeta $\vec{a}_c$ anch'essa costante in modulo, con $\vec{a}_c \perp \vec{v}$ ad ogni istante (si legge "$\vec{a}_c$ perpendicolare a $\vec{v}$").

Per la seconda legge della dinamica, l'accelerazione centripeta (come qualunque accelerazione) deve essere prodotta da una forza risultante applicata al corpo che, a ogni istante, è diretta verso il centro della traiettoria circolare.

Esempio 5

Consideriamo un corpo attaccato all'estremità di un filo e messo in moto avendo fissato l'altra estremità del filo in un punto O. Il moto si svolge su un piano orizzontale. Si calcoli il modulo della tensione del filo se v è il modulo costante della velocità del corpo e se l è la lunghezza del filo.



Per la seconda legge della dinamica applicata al corpo in moto circolare uniforme, deve risultare:

$$m\,\vec{a}_c = \vec{T} \quad , \quad \text{dove}$$

$\vec{T}$ è la forza esercitata dalla fune sul corpo.

In realtà sul corpo agiscono anche la forza peso $m\vec{g}$ e la reazione vincolare $\vec{N}$ del piano di appoggio, lungo la direzione ortogonale al piano del moto; ma sappiamo già che risulta $m\vec{g} + \vec{N} = 0$, per cui la forza risultante agente sul corpo è soltanto la forza $\vec{T}$ esercitata dalla fune.

Poiché $|\vec{a}_c| = \frac{V^2}{l}$, essendo il raggio della traiettoria circolare uguale alla lunghezza l della fune, otteniamo il modulo della tensione del filo che obbliga il corpo a muoversi di moto circolare uniforme:

$$T = m|\vec{a}_c| = m\frac{V^2}{l}$$

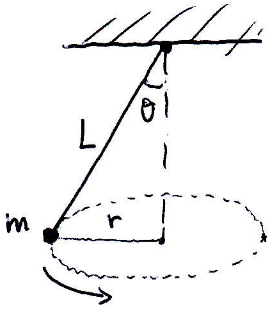
Esempio numerico: se $m = 0{,}5\ kg$, $l = 1{,}5\ m$ e $V = 12{,}2\ \frac{m}{s}$, risulta $T = (0{,}5\ kg) \cdot \frac{\left(12{,}2\ \frac{m}{s}\right)^2}{1{,}5\ m} = 49{,}61\ N$

Esempio 6

Pendolo conico

Una pallina di massa m è tenuta sospesa tramite un filo di lunghezza L. La pallina orbita con velocità di modulo costante v su una traiettoria circolare orizzontale di raggio r; poiché durante il moto della pallina il filo descrive una superficie laterale di un cono, questo sistema è noto con il nome di "pendolo conico".

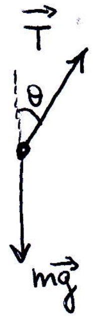
Si ricavi un'espressione di v in termini di L e dell'angolo costante θ tra il filo e la direzione verticale.



Schema del pendolo conico con la traiettoria circolare orizzontale vista in prospettiva.

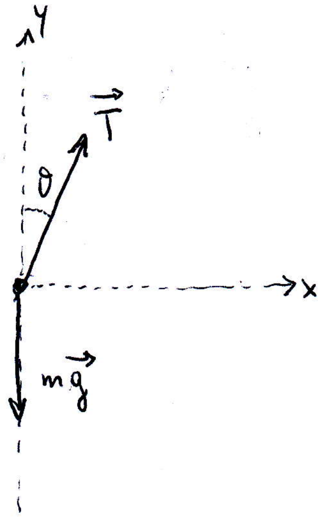
Dunque, la pallina si muove di moto circolare uniforme su un piano orizzontale.

Disegnamo il diagramma delle forze agenti sulla pallina durante il moto:



$\vec{T}$ è la forza esercitata dalla fune sulla pallina durante il moto di questa.

Introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali.
L'asse orizzontale x è diretto positivamente verso il centro della traiettoria circolare.
L'asse verticale y è orientato positivamente verso l'alto.



Risulta quindi:

$(m\vec{g})_x = 0$, $(m\vec{g})_y = -mg$

$T_x = T\operatorname{sen}\theta$, $T_y = T\cos\theta$

Lungo la direzione x, il corpo possiede un'accelerazione diretta lungo x e positiva (verso il centro della traiettoria circolare), di modulo V^2/r.

Lungo la direzione y, il corpo non si muove, per cui risulta $a_y = 0$.

Applichiamo quindi la seconda legge della dinamica al corpo:

$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$, e scriviamo le equazioni relative alle componenti x e y:

$$\begin{cases} m a_x = T_x + (m\vec{g})_x \\ m a_y = T_y + (m\vec{g})_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \dfrac{V^2}{r} = T\operatorname{sen}\theta \\ 0 = T\cos\theta - mg \end{cases}$$

Dunque:

$$\begin{cases} T\,\mathrm{sen}\,\theta = m\dfrac{v^2}{r} \\ T\cos\theta = mg \end{cases}$$

Dividiamo membro a membro le due equazioni:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{v^2}{gr}$$

Dalla geometria del problema risulta $r = L\,\mathrm{sen}\,\theta$, per cui:

$$v^2 = gr\,\mathrm{tg}\,\theta = gL\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{tg}\,\theta = gL\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{\cos\theta}$$, e infine

$$v = \mathrm{sen}\,\theta\sqrt{\frac{gL}{\cos\theta}} \quad \left(\text{o anche } \sqrt{gL\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{tg}\,\theta}\right)$$

Si può ricavare anche l'espressione del periodo di rotazione:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi L\,\cancel{\mathrm{sen}\,\theta}}{\cancel{\mathrm{sen}\,\theta}\sqrt{\frac{gL}{\cos\theta}}} = 2\pi L\sqrt{\frac{\cos\theta}{gL}} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

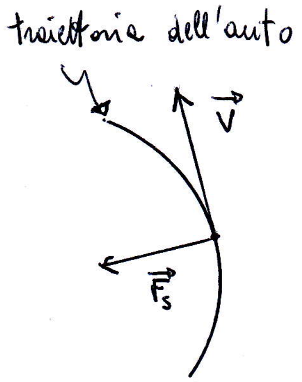
Il modulo della tensione del filo è:

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$ (si ricava immediatamente dall'equazione per le componenti y).

Esempio 7

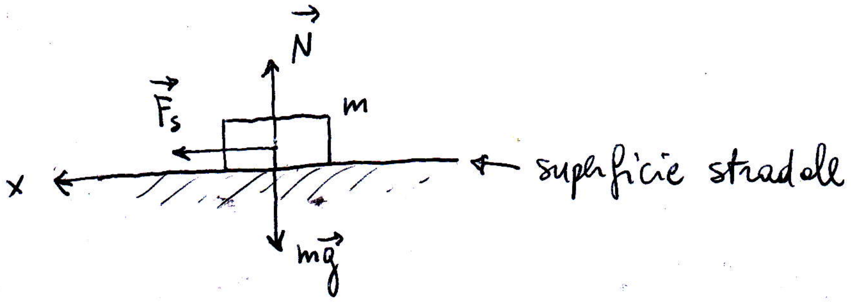
Auto che percorre una curva in piano

Un'auto sta percorrendo una curva circolare di raggio $r = 35\,m$. Il coefficiente di attrito statico tra gli pneumatici dell'auto e la superficie stradale è, su asciutto, $\mu_s = 0{,}523$. Quale è il massimo valore del modulo della velocità vettoriale istantanea dell'auto per cui l'auto riesce ad affrontare la curva senza sbandare?



L'unica forza agente sull'auto e diretta orizzontalmente, mentre l'auto sta percorrendo la curva, è la forza di attrito STATICO tra gli pneumatici dell'auto e la superficie stradale. Questa forza, che compare quando il guidatore ruota il volante (tranne che quando la superficie stradale è molto liscia o ghiacciata), è la forza che fornisce all'auto l'accelerazione centripeta necessaria per percorrere la traiettoria circolare della curva.

Disegnamo il diagramma delle forze agenti sull'auto in curva sul piano verticale, con vista "da dietro" rispetto all'auto:



Come già visto in altri esempi, risulta $\vec{N}+m\vec{g}=0 \Rightarrow N=mg$.
Consideriamo un asse cartesiano x orientato orizzontalmente con verso positivo verso il centro della traiettoria circolare.
Per la seconda legge della dinamica possiamo scrivere:

$$m a_x = F_s \quad , \quad \text{dove} \quad F_s = |\vec{F_s}| .$$

Ma deve risultare $a_x = \dfrac{v^2}{r}$, per cui possiamo scrivere:

$$F_s = m\frac{v^2}{r}$$

Sappiamo poi che il modulo della forza di attrito statico deve soddisfare la seguente disuguaglianza:

$F_s \leq \mu_s N$. Nel caso specifico, questa disuguaglianza diventa quindi:

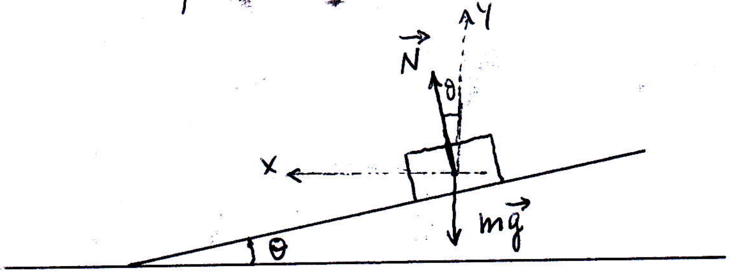
$$\cancel{m}\frac{v^2}{r} \leq \mu_s \cancel{m}g \Rightarrow v^2 \leq \mu_s g r \Rightarrow v \leq \sqrt{\mu_s g r}$$

Pertanto, l'auto può percorrere la curva a velocità costante in modulo senza sbandare se $v \leq v_{MAX} = \sqrt{\mu_s g r} = 13,40 \, \frac{m}{s} = 48,24 \, \frac{km}{h}$

Esempio 8

Auto in curva rialzata liscia

Vista nel piano verticale, da "dietro" rispetto all'auto:



Le uniche forze agenti sull'auto, in assenza di attrito tra gli pneumatici dell'auto e la superficie stradale, sono la forza peso e la reazione vincolare della superficie stradale sull'auto.

L'auto, mantenendosi sempre alla stessa quota mentre percorre la curva rialzata, percorre una traiettoria circolare su un piano orizzontale. Dunque, la risultante delle forze applicate deve fornire una accelerazione diretta orizzontalmente verso l'interno della curva (verso il centro della traiettoria circolare).

Introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali con asse orizzontale x diretto positivamente verso il centro della traiettoria circolare (che, è bene ribadirlo, si trova su un piano orizzontale anche se la sezione stradale è inclinata!), e asse verticale y orientato positivamente verso l'alto.

Risulta: $\quad (m\vec{g})_x = 0, \qquad (m\vec{g})_y = -mg$

$$N_x = N \operatorname{sen}\theta \quad , \quad N_y = N\cos\theta$$

Applichiamo la seconda legge della dinamica:

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g},$$

tenendo conto del fatto che, siccome l'auto si mantiene a una quota costante lungo l'asse y, risulta $a_y = 0$; le equazioni per le componenti cartesiane x e y sono:

$$\begin{cases} m a_x = N_x + (m\vec{g})_x \\ m a_y = N_y + (m\vec{g})_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\dfrac{v^2}{r} = N \operatorname{sen}\vartheta \\ 0 = N\cos\vartheta - mg \end{cases},$$

dove abbiamo posto $a_x = \dfrac{v^2}{r}$, essendo v il modulo della velocità vettoriale istantanea dell'auto mentre percorre la curva, e r è il raggio della curva circolare. Risulta quindi:

$$\begin{cases} N \operatorname{sen}\vartheta = m\dfrac{v^2}{r} \\ N\cos\vartheta = mg \end{cases}$$

Dividiamo membro a membro le due equazioni:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{v^2}{gr}$$

Dunque, fissato v e fissato r, è univocamente determinato l'angolo di "rialzamento" della curva tale che, in assenza di attrito, l'auto possa percorrere la curva.

$$\vartheta = \operatorname{arctg}\left(\frac{v^2}{gr}\right)$$

Con $v = 13{,}40$ m/s e $r = 35$ m risulta

$$\vartheta = 27{,}6^\circ = 0{,}48 \text{ rad}$$

Esempio 9

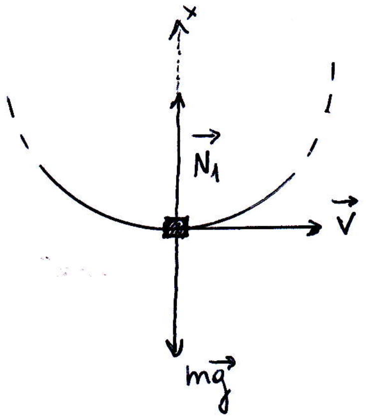
Consideriamo un vagone vincolato a muoversi lungo un binario che descrive una traiettoria circolare su un piano verticale. Il raggio della traiettoria e' $r = 2{,}7\ \text{km}$, e il vagone percorre la traiettoria con velocita' vettoriale istantanea di modulo costante $V = 225\ \frac{m}{s}$.

a) Calcolare la forza impressa dal binario sul vagone nel punto piu' basso della traiettoria.

b) Calcolare la forza impressa dal binario sul vagone nel punto piu' alto della traiettoria.

La massa del vagone e' $m = 200\ \text{kg}$.

a)



Le forze agenti sul vagone nel punto piu' basso della sua traiettoria sono la forza peso $m\vec{g}$ e la reazione vincolare del binario $\vec{N}_1$, entrambe dirette lungo la direzione verticale come mostrato nello schema a sinistra.

Introduciamo un asse cartesiano x diretto verticalmente, con verso positivo verso il centro della traiettoria circolare.

Risulta: $N_{1x} = N_1$, essendo $N_1 = |\vec{N}_1|$,

$(m\vec{g})_x = -mg$

Applichiamo la seconda legge della dinamica:

$$m\vec{a} = \vec{N}_1 + m\vec{g},$$

e teniamo conto che $a_x = \frac{v^2}{r}$, in quanto il vagone si sta muovendo con velocita' di modulo costante v lungo una traiettoria circolare di raggio r.

Allora possiamo scrivere:

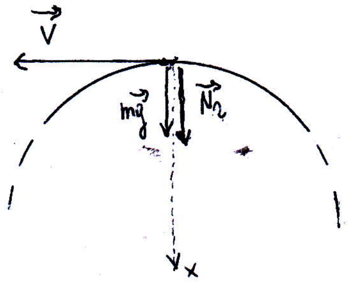
$$m a_x = N_{1x} + (m\vec{g})_x, \quad \text{cioe':}$$

$$m\frac{v^2}{r} = N_{1x} - mg, \quad \text{da cui otteniamo}$$

$$N_{1x} = m\frac{v^2}{r} + mg = m\left(\frac{v^2}{r} + g\right) = (200\ kg)\left(\frac{\left(225\ \frac{m}{s}\right)^2}{2{,}7\times10^3\ m} + \left(9{,}81\ \frac{m}{s^2}\right)\right) =$$

$$= 5{,}712 \times 10^3\ N$$

b)



Le forze agenti sul vagone nel punto più alto della sua traiettoria sono la forza peso $m\vec{g}$ e la reazione vincolare del binario $\vec{N_2}$, entrambe dirette lungo la direzione verticale come mostrato nello schema a sinistra.

Attenzione: in questo caso non è ancora chiaro, finché non saranno stati svolti i calcoli, quale è il verso effettivo di $\vec{N_2}$. Nella figura è stata tracciata $\vec{N_2}$ diretta verso il basso solo per fissare uno schema di ragionamento nella soluzione.

Introduciamo un asse contenente x diretto verticalmente, con verso positivo verso il centro della traiettoria circolare.

Risulta: $\vec{N_2} = N_{2x}\,\hat{i}$, $(m\vec{g})_x = mg$

Applichiamo la seconda legge della dinamica:

$m\vec{a} = \vec{N_2} + m\vec{g}$, e teniamo conto che $a_x = \frac{v^2}{r}$,

per lo stesso ragionamento fatto nel caso precedente.

Allora possiamo scrivere:

$ma_x = N_{2x} + mg$, da cui otteniamo:

$$N_{2x} = m a_x - mg = m(a_x - g) = m\left(\frac{v^2}{r} - g\right) =$$

$$= (200\ \mathrm{Kg})\left(\frac{\left(225\ \frac{m}{s}\right)^2}{2{,}7 \times 10^3\ m} - \left(9{,}81\ \frac{m}{s^2}\right)\right) = 1{,}788 \times 10^3\ N > 0$$

In questo caso, quindi, $\vec{N}_2$ e' diretta verso il basso, cioe' verso il centro della traiettoria circolare.

Dall'espressione ricavata per N_{2x}, e' possibile trovare per quali valori di v risulta $N_{2x} < 0$, cioe' per quali valori di v la reazione vincolare del binario nel punto piu' alto della traiettoria e' diretta verso l'alto. Questo accade quando $N_{2x} < 0$,

cioe' per $\frac{v^2}{r} - g < 0 \Rightarrow \frac{v^2}{r} < g \Rightarrow v^2 < gr$,

cioe' per $v < \sqrt{gr} = \sqrt{\left(9{,}81\ \frac{m}{s^2}\right) \cdot \left(2{,}7 \times 10^3\ m\right)} =$

$$= 162{,}75\ \frac{m}{s} = 585{,}89\ \frac{Km}{h}$$

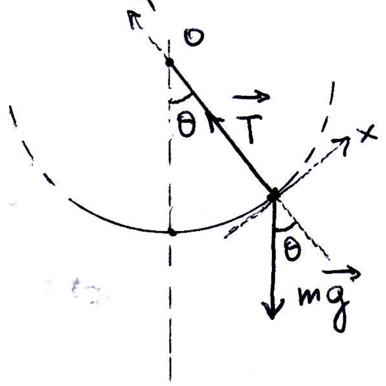
Dinamica del moto circolare non uniforme

Se in un moto circolare, oltre alla direzione di $\vec{v}$ varia anche il modulo di $\vec{v}$, ciò significa che la forza risultante agente sul corpo ha anche una componente parallela a $\vec{v}$, oltre alla componente perpendicolare a $\vec{v}$ che genera l'accelerazione centripeta.

Esempio 10

Consideriamo una pallina di massa m legata all'estremità di un filo di lunghezza l, inestensibile e di massa trascurabile. L'altra estremità del filo è fissata a un punto O, e la pallina può muoversi su un piano verticale sotto l'azione della forza peso e della tensione del filo.

Si calcoli il modulo T della tensione del filo nell'istante in cui il modulo della velocità della pallina è v e il filo forma un angolo $\theta \neq 0$ con la direzione verticale.



Qui a sinistra è mostrato il diagramma delle forze agenti sulla pallina nell'istante considerato, e il sistema di assi cartesiani ortogonali xy che useremo per lo svolgimento dei calcoli.

L'asse x e' tangente alla traiettoria circolare nel punto considerato, con verso positivo nel senso dell'angolo θ crescente. L'asse y e' diretto lungo il raggio della traiettoria circolare nel punto considerato, con verso positivo verso il centro della traiettoria circolare.

Risulta quindi: $(m\vec{g})_x = -mg\,\text{sen}\,\theta$, $(m\vec{g})_y = -mg\cos\theta$,

$T_x = 0$, $T_y = T$, essendo $T = |\vec{T}|$.

Applichiamo la seconda legge della dinamica:

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$$

Le equazioni per le componenti x e y sono quindi:

$$\begin{cases} m a_x = T_x + (m\vec{g})_x \\ m a_y = T_y + (m\vec{g})_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m a_x = -mg\,\text{sen}\,\theta \\ m a_y = T - mg\cos\theta \end{cases}$$

Ma risulta $a_y = \frac{v^2}{\ell}$, poiché v e' il modulo della velocita' istantanea della pallina nell'istante considerato, ℓ e' la lunghezza del filo che coincide con il raggio della traiettoria circolare, e a_y e' l'accelerazione centripeta della pallina nell'istante considerato.

Risulta quindi:

$$\begin{cases} a_x = -g \operatorname{sen} \vartheta \\ m \dfrac{v^2}{\ell} = T - mg\cos\vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = -g \operatorname{sen} \vartheta \\ T = m\left(\dfrac{v^2}{\ell} + g\cos\vartheta\right) \end{cases}$$

Attenzione!! Un errore molto diffuso è quello di porre $a_y = 0$ "perché la pallina non si muove lungo l'asse y"... questo ragionamento sarebbe corretto se la pallina si muovesse di moto rettilineo lungo l'asse x; ma in questo caso la pallina si muove di moto circolare, e ciò è possibile soltanto se l'accelerazione vettoriale istantanea della pallina possiede una componente centripeta (cioè lungo l'asse y) diversa da zero. Nel moto circolare (uniforme e non uniforme) risulta sempre $a_y = \dfrac{v^2}{r}$, dove v è il modulo della velocità vettoriale istantanea nell'istante considerato e r è il raggio della traiettoria circolare.

Nei punti in cui $v = 0$ risulta $T = mg\cos\vartheta$, e ciò è vero soltanto nei punti estremi della traiettoria, laddove la pallina istantaneamente si ferma prima di invertire il verso del suo moto.

Moto visto in sistemi di riferimento accelerati

Quando abbiamo studiato le relazioni tra grandezze cinematiche di uno stesso corpo misurate da osservatori in moto l'uno rispetto all'altro, abbiamo alla fine ottenuto la relazione seguente:

$$\vec{a}_{0}(t) = \vec{a}_{00'}(t) + \vec{a}_{0'}(t)$$

$\vec{a}_{0}$: accelerazione di un dato punto materiale misurata da un osservatore O

$\vec{a}_{0'}$: accelerazione dello stesso punto materiale misurata da un osservatore O'

$\vec{a}_{00'}$: accelerazione dell'osservatore O' rispetto all'osservatore O

Se moltiplichiamo i due membri dell'equazione per la massa del punto materiale, otteniamo la relazione

$$m\,\vec{a}_{0}(t) = m\,\vec{a}_{00'}(t) + m\,\vec{a}_{0'}(t)$$

Per fissare le idee, poniamo che l'osservatore O sia un <u>osservatore inerziale</u>. Se $\vec{a}_{OO'}(t) \neq 0$, allora, automaticamente l'osservatore O' sarà un osservatore non inerziale.

Per l'osservatore O, la seconda legge della dinamica permette di scrivere:

$m\vec{a}_O(t) = \vec{F}_{ris,O}(t)$, dove $\vec{F}_{ris,O}(t)$ è la risultante di tutte le forze agenti sul corpo all'istante t rispetto all'osservatore inerziale O.

Per l'osservatore O', la seconda legge della dinamica permette di scrivere:

$m\vec{a}_{O'}(t) = \vec{F}_{ris,O'}(t)$, dove $\vec{F}_{ris,O'}(t)$ è la risultante di tutte le forze agenti sul corpo all'istante t rispetto all'osservatore O' (non inerziale).

Dalla relazione scritta all'inizio possiamo quindi ricavare la seguente importante relazione:

$$\vec{F}_{ris,O'}(t) = m\vec{a}_{O'}(t) = m\vec{a}_O(t) - m\vec{a}_{OO'}(t),$$ cioè

$$\vec{F}_{ris,O'}(t) = \vec{F}_{ris,O}(t) - m\vec{a}_{OO'}(t)$$

Dunque, per l'osservatore <u>non inerziale</u> la forza risultante agente sul corpo considerato è data dalla somma vettoriale della forza risultante $\vec{F}_{ris}(t)$ delle forze agenti sul corpo rispetto all'osservatore inerziale, e di una forza aggiuntiva $\vec{F}_a(t) = -m\,\vec{a}_{OO'}(t)$ legata esclusivamente all'accelerazione dell'osservatore O' rispetto all'osservatore O.

Per l'osservatore O' la forza $\vec{F}_a(t)$ è reale, in quanto è necessaria per descrivere il moto del corpo dal suo punto di vista. Poiché, tuttavia, si tratta di una forza non provocata da un agente fisico ma legata esclusivamente al moto accelerato dell'osservatore O', dal punto di vista della nomenclatura $\vec{F}_a(t)$ è denominata FORZA APPARENTE.

Esempi di forze apparenti.

1) In un'auto che si sta muovendo di moto rettilineo accelerato, vedremo (da bordo dell'auto) ogni oggetto non fissato dentro l'auto accelerare rispetto ai passeggeri dell'auto: se $a_x(t)$ è l'accelerazione dell'auto rispetto a un osservatore fermo, un osservatore a bordo dell'auto vedrà una forza apparente $-m a_x(t)$ agire su un oggetto di massa m posto dentro l'auto.

2) Consideriamo un'auto in moto lungo una traiettoria circolare con velocità vettoriale istantanea costante in modulo (moto circolare uniforme). Se v è il modulo costante della velocità dell'auto, e se consideriamo un asse cartesiano x orientato positivamente verso il centro della traiettoria circolare, allora già sappiamo che l'auto possiede un'accelerazione centripeta

$a_x = \frac{v^2}{r}$, dove r è il raggio della traiettoria circolare.

Rispetto a un osservatore a bordo dell'auto, quindi, un oggetto di massa m a bordo dell'auto sarà soggetto a una forza apparente $-m a_x = -m\frac{v^2}{r}$ diretta verso l'esterno della curva (FORZA "CENTRIFUGA").

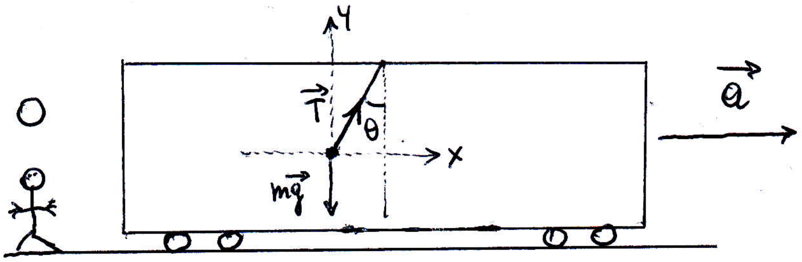
3) Supponiamo di lanciare una palla dal bordo di una piattaforma rotante liscia verso il suo centro. Un osservatore che si trova sulla piattaforma diverso dal centro, vedrà la palla muoversi lungo una traiettoria curva, mentre l'osservatore che ha lanciato la palla vede la palla muoversi di moto rettilineo uniforme mentre la piattaforma liscia ruota sotto. Per l'osservatore sulla piattaforma, sulla palla agisce una forza apparente in direzione perpendicolare a quella della velocità vettoriale istantanea della palla, a ogni istante.

Questa forza apparente è detta FORZA DI CORIOLIS, ed è sempre presente rispetto a un osservatore che si trova in un sistema di riferimento rotante, che sta studiando il moto di oggetti non fissati al suolo.

Esempio 11

Una piccola sfera di massa m è appesa tramite un filo al soffitto di un vagone che sta accelerando verso destra (vedi figura). Sia l'osservatore inerziale a terra sia l'osservatore non inerziale posizionato nel treno concordano nel fatto che il filo forma, all'equilibrio, un angolo θ rispetto alla direzione verticale. Si colleghi il modulo della forza apparente "vista" dall'osservatore nel treno con l'accelerazione del treno misurata dall'osservatore inerziale.

Dal punto di vista dell'osservatore a terra, la situazione si può schematizzare nel modo seguente:



Rispetto all'osservatore a terra, le uniche forze agenti sulla sferetta sono la forza peso e la tensione della fune.

Per la seconda legge della dinamica, quindi, poiché all'equilibrio la sferetta si muove solidalmente con il treno, quindi con accelerazione $\vec{a}$ come il treno, possiamo scrivere:

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$$

Introducendo un sistema di assi cartesiani ortogonali come in figura, le equazioni per le componenti x e y sono:

$$\begin{cases} m a_x = T_x + (m\vec{g})_x \\ m a_y = T_y + (m\vec{g})_y \end{cases}$$

Risulta: $a_x = a$ (essendo $a = |\vec{a}|$), $a_y = 0$,

$T_x = T \operatorname{sen}\vartheta$, $T_y = T\cos\vartheta$ (essendo $T = |\vec{T}|$),

$(m\vec{g})_x = 0$, $(m\vec{g})_y = -mg$

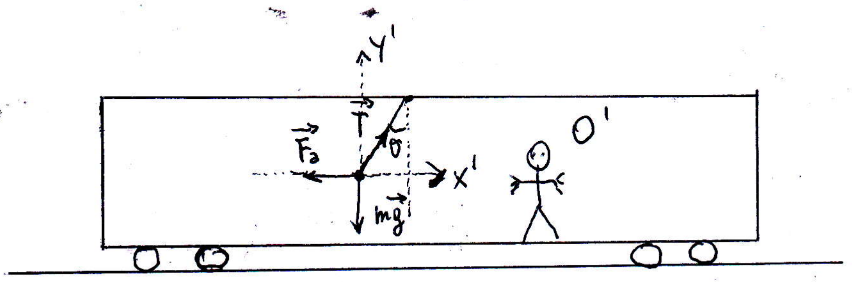
Allora:

$$\begin{cases} m a = T \operatorname{sen}\vartheta \\ 0 = T\cos\vartheta - mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \operatorname{sen}\vartheta = m a \\ T\cos\vartheta = mg \end{cases}$$

Dividendo membro a membro le due equazioni otteniamo:

$\operatorname{tg}\vartheta = \dfrac{a}{g}$ $\Rightarrow$ l'angolo ϑ cresce al crescere di a, e tende a 90° per $a \to +\infty$.

Dal punto di vista dell'osservatore a bordo del treno, la situazione si può schematizzare nel modo seguente:



Per l'osservatore O', oltre alle forze $\vec{T}$ e $m\vec{g}$ e' necessaria una forza aggiuntiva che le equilibri, $\vec{F_a}$, in quanto dal suo punto di vista la sferetta e' ferma in equilibrio in quella posizione. Dato che le due sole forze $\vec{T}$ e $m\vec{g}$ non sono allineate, la loro somma vettoriale non e' nulla. Occorre quindi una forza aggiuntiva $\vec{F_a}$ tale che

$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F_a} = 0$$

Supponendo che $\vec{F_a}$ sia diretta orizzontalmente, scriviamo questa relazione per le componenti dei vettori rispetto a un sistema di assi cartesiani ortogonali x'y' orientati come nella figura.

$$T_{x'} = T\,\text{sen}\theta \qquad T_{y'} = T\cos\theta \qquad (m\vec{g})_{x'} = 0 \qquad (m\vec{g})_{y'} = -mg$$

$$F_{a,x'} = -F_a \quad , \quad F_{a,y'} = 0 ,$$ avendo posto $F_a = |\vec{F_a}|$.

Dunque possiamo scrivere

$$\begin{cases} T_{x'} + (m\vec{g})_{x'} + F_{a,x'} = 0 \\ T_{y'} + (m\vec{g})_{y'} + F_{a,y'} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T\,\text{sen}\,\theta - F_a = 0 \\ T\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo:

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

Sostituiamo questa espressione nella prima equazione:

$$F_a = T\,\text{sen}\,\theta = \frac{mg}{\cos\theta} \cdot \text{sen}\,\theta = mg\,\text{tg}\,\theta$$

Dallo studio del sistema rispetto all'osservatore inerziale avevamo ottenuto la relazione

$g\,\text{tg}\,\theta = a$, per cui possiamo scrivere

$$F_a = ma$$

Tenuto conto dei versi relativi dei vettori $\vec{F_a}$ e $\vec{a}$, possiamo quindi scrivere la relazione vettoriale

$$\vec{F_a} = -m\vec{a},$$

che conferma la trattazione generale fatta all'inizio del paragrafo.

Moto in presenza di attrito viscoso

Si verifica quando il mezzo in cui si muove il corpo si oppone al moto del corpo esercitando su questo una forza frenante. Esempi di forze frenanti di questo tipo sono la resistenza dell'aria sui veicoli in moto e la forza agente su corpi che stanno cadendo dentro un liquido.

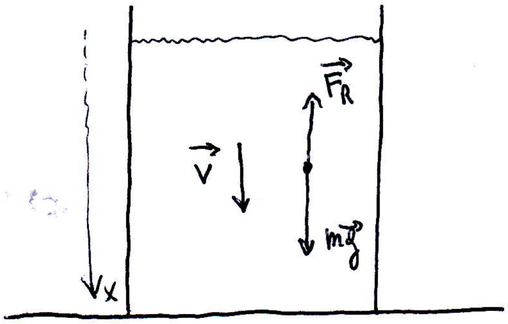
Consideremo due casi schematici.

1) Forza frenante con modulo proporzionale alla velocità del corpo

Risulta $\vec{F}_R = -b\vec{v}$, dove b è un parametro >0 costante avente unità di misura $\frac{N}{m/s} = \frac{kg}{s}$, e dipende sia dalle caratteristiche del mezzo attraversato sia dalla forma e dalle dimensioni del corpo.

$\vec{F}_R$ ha la stessa direzione di $\vec{v}$ ma verso opposto.

Consideriamo una pallina di piccole dimensioni che sta cadendo dentro un liquido contenuto in un recipiente; ecco il diagramma delle forze:



Introduciamo un asse cartesiano x diretto verticalmente e orientato positivamente verso il basso.

Per la seconda legge della dinamica possiamo scrivere:

$$m a_x = mg - F_R \quad , \quad \text{con} \quad F_R = |\vec{F}_R|$$

Dunque:

$$m\, a_x(t) = mg - b\, v_x(t) \; ;$$

dividiamo i due membri per m e teniamo conto del fatto che $a_x(t) = v_x'(t)$:

$$v_x'(t) = g - \frac{b}{m} v_x(t) \, , \quad \text{con la condizione iniziale} \quad v_x(0) = 0 \, ,$$

cioè consideriamo il caso in cui la pallina viene fatta cadere da ferma.

L'equazione appena scritta è un'equazione differenziale per la funzione $v_x(t)$, del primo ordine, lineare e a coefficienti costanti. Nella forma scritta sopra può anche essere risolta con la tecnica della "separazione delle variabili". Qualitativamente, l'equazione mostra che, al crescere di $v_x(t)$, la sua derivata rispetto al tempo decresce, e diventa nulla quando $v_x(t) = v_L = \frac{mg}{b}$

(VELOCITÀ LIMITE).

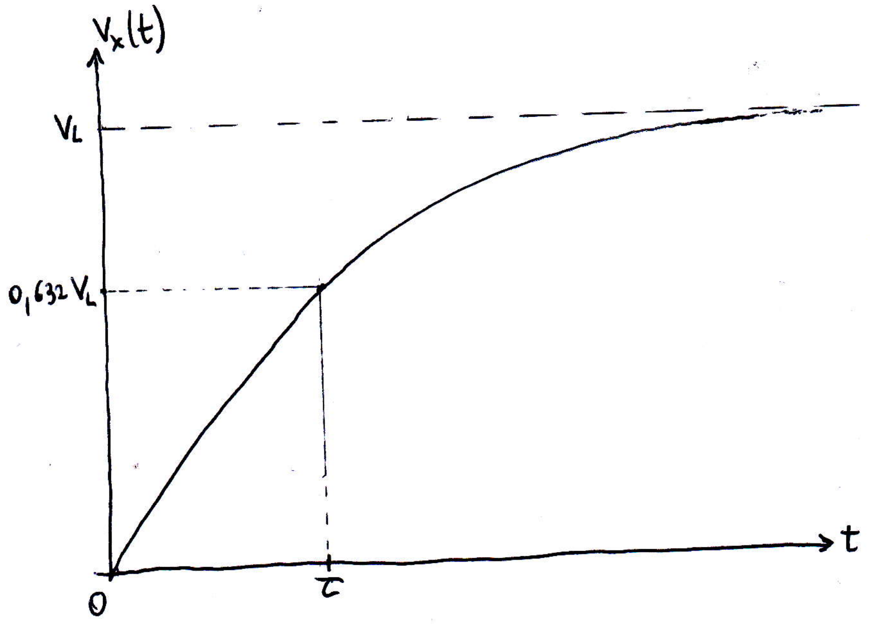
Si può dimostrare che la soluzione per $V_x(t)$ con la condizione $V_x(0)=0$ è la seguente:

$$V_x(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-bt/m}\right) = V_L\left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

avendo posto $\tau = \frac{m}{b}$ (COSTANTE DI TEMPO)

Per $t=\tau$ risulta $V_x(t=\tau) = (1-e^{-1})\,V_L \simeq 0{,}632\,V_L$

L'andamento di $V_x(t)$ in funzione del tempo è il seguente:



Esempio 12

$m = 2\,g = 2\times10^{-3}\,kg$

Caduta da fermo in un recipiente pieno di olio, con forza frenante proporzionale al modulo della velocità. Risulta $V_L = 5\,cm/s = 0{,}05\,m/s$. Determinare la costante di tempo τ e l'istante in cui la sferetta raggiunge il 90% della sua velocità limite.

Poiché $V_L = \frac{mg}{b}$ e $\tau = \frac{m}{b}$, possiamo scrivere

$V_L = \tau g$, da cui ricaviamo $\tau = \frac{V_L}{g} = \frac{0{,}05\ \frac{m}{s}}{9{,}81\ \frac{m}{s^2}} = 5{,}1 \times 10^{-3}\ s$

Dalla legge $V_x(t) = V_L\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, determiniamo l'istante $t = t_1$ tale che $1 - e^{-t_1/\tau} = 0{,}9$, risulta

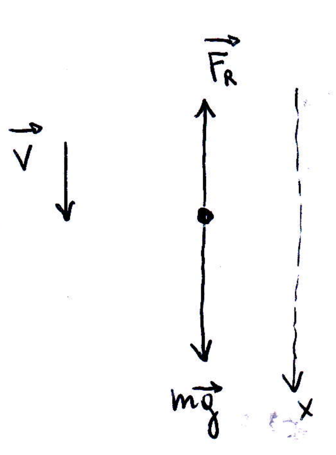
$e^{-t_1/\tau} = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, cioè $e^{t_1/\tau} = 10$, da cui

$\frac{t_1}{\tau} = \ln 10 \Rightarrow t_1 = \tau \ln 10 = \frac{V_L}{g} \ln 10 = 11{,}74\ ms$

2) Forza frenante con modulo proporzionale al quadrato della velocità del corpo.

E' un modello che si adatta a corpi che si muovono in aria ad alta velocità.

Consideriamo quindi la caduta di un corpo in aria; nel caso in esame il modulo di $\vec{F}_R$ si esprime nel modo seguente: $|\vec{F}_R| = F_R = \frac{1}{2} D \rho A v^2$,



dove D è una costante adimensionale detta COEFFICIENTE DI ATTRITO VISCOSO, ρ è la densità dell'aria e A è la sezione trasversale perpendicolare alla velocità del corpo in moto.

$D \simeq 0{,}5 \div 2$

Applichiamo la seconda legge della dinamica al corpo in caduta:

$$(m\vec{g})_x = mg \qquad F_{R,x} = -\frac{1}{2} D \rho A V_x^2 \; ; \text{ allora:}$$

$$m a_x = mg - \frac{1}{2} D \rho A V_x^2 \; ; \text{ dividiamo per } m \text{ i due membri:}$$

$$a_x(t) = g - \frac{D\rho A}{2m} (V_x(t))^2 \; ; \text{ poiché } a_x(t) = V_x'(t), \text{ risulta:}$$

$$V_x'(t) = g - \frac{D\rho A}{2m} (V_x(t))^2, \text{ con la condizione } V_x(0) = 0.$$

Come nel caso precedente, anche ora la velocità istantanea del corpo cresce fino a raggiungere un valore limite, quando $V_x'(t) = 0$; ciò avviene per

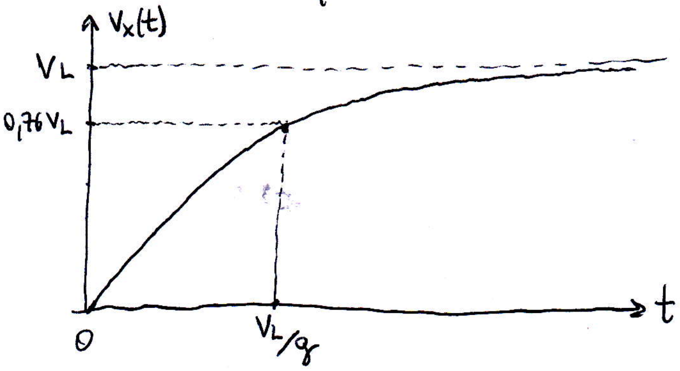
$$V_x(t) = V_L = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}}$$

L'equazione differenziale per la funzione $V_x(t)$, risolta con la tecnica della separazione delle variabili, fornisce la soluzione

$$V_x(t) = V_L \, tgh\left(\frac{gt}{V_L}\right)$$

(tgh indica la tangente iperbolica)

Andamento qualitativo:



Per $t = \frac{V_L}{g}$, risulta

$$V_x\left(t = \frac{V_L}{g}\right) = V_L \cdot tgh(1) \simeq 0,76\, V_L$$