# Tutorato Geometria e Algebra Informatica

Andrea Pizzi

12 Aprile 2023

**Esercizio 1.** Dimostrare che $Fun(S, \mathbb{R})$, l'insieme delle funzioni $f : S \to \mathbb{R}$, è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con le seguenti operazioni:

$$\text{Moltiplicazione per scalare} :(k \cdot f)(x) := k \cdot f(x) \quad k \in \mathbb{R}\ ,\ f \in Fun(S, \mathbb{R})$$
$$\text{Somma} :(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad f, g \in Fun(S, \mathbb{R})$$

**Esercizio 2.** In virtù dell'esercizio 1, commentare se l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$, denotato con $\mathbb{R}[x]$, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Denotiamo con $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale ad $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che è un sottospazio vettoriale dell'insieme delle funzioni $Fun(S, \mathbb{R})$. E' anche un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$?

Trovare un insieme di generatori di $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$. Sono un numero finito?

Trovare un insieme di generatori di $\mathbb{R}[x]$. Sono un numero finito?

A conclusione di tutto l'esercizio considerare $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$:

a) Esistono 3 vettori linearmente indipendenti?

b) Esistono 4 vettori linearmente indipendenti?

c) Lo spazio vettoriale dato puo' essere scritto come span di 4 vettori?

d) Lo spazio vettoriale dato puo' essere scritto come span di 2 vettori?

Dimostrare la veridicità delle domande sopra oppure mostrare un controesempio.

**Esercizio 3.** Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$

- $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\} \subset \mathbb{R}^2$.
- $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.
- $S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{esiste } t \in \mathbb{R} \text{ tale che } x = 2t,\ y = -3t\} \subset \mathbb{R}^2$.
- $S_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\} \subset \mathbb{R}^2$.
- $S_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.
- $S_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 1\} \subset \mathbb{R}^2$.
- $S_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

Quali sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$?

**Esercizio 4.** Verificare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \right\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ ed è generato da $(1, 1, 1)$, cioè $W = Span\{(1, 1, 1)\}$.

**Esercizio 5.** Verificare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \right\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Determinare un insieme di generatori, una base e la dimensione di $U$.

**Esercizio 6.** a) Si dica per quali valori di $k$ si ha $w = (2, 5) \in Span\{(k, 1), (1, -2)\}$.

b) Si dica per quali valori di $k$ (se esistono), $\{(k, 1), (1, -2)\}$ e' un insieme digeneratori di $\mathbb{R}^2$.

c) Si dica per quali valori di $k$ (se esistono), $\{(k, 1), (1, -2)\}$ e' un insieme divettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^2$.

**Esercizio 7.** Consideriamo lo spazio vettoriale delle matrici 2 x 2, $Mat(2, 2)$, con le operazioni viste a lezione. Una matrice quadrata $A$ si dice simmetrica se è uguale alla sua trasposta $A^T$ (La $i$-esima riga della matrice $A$ diventa la $i$-esima colonna della nuova matrice $A^T$, in formule $a_{ij} = a_{ji}$). Per le 2 x 2 abbiamo che deve valere

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A^T$$

Mostrare che il sottoinsieme delle matrici 2 x 2 simmetriche, denotato con $Sym(2, 2)$ è un sottospazio vettoriale di $Mat(2, 2)$.

E' vero anche per le matrici $n$ x $n$, $M(n, n)$?

Determinare una base di $Sym(2, 2)$.

**Esercizio 8.** Consideriamo lo spazio vettoriale delle matrici 2 x 2, $Mat(2, 2)$, con le operazioni viste a lezione. Una matrice quadrata $A$, $n$ x $n$, si dice triangolare superiore se $a_{ij} = 0$ per ogni $i > j$. Per le 2 x 2 abbiamo matrici del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Mostrare che il sottoinsieme delle matrici 2 x 2 triangolari superiori è un sottospazio vettoriale di $Mat(2, 2)$. E' vero anche per le matrici $n$ x $n$?

Determinare una base del sottospazio delle matrici 2 x 2 triangolari superiori.

**Esercizio 9.** Dimostrare che l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

**Esercizio 10.** Provare le la collezione di vettori numerici $e_i = (0, \ldots, 0, 1_i, 0 \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ sono una base per l' $\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$.

Consideriamo ora i seguenti vettori in $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1, 1, 1, 1) \qquad v_1 = (3, 1, 0, 0) \qquad v_1 = (1, -1, 0, 0) \qquad v_1 = (0, 0, 0, 1)$$

Verificare che sono una base di $\mathbb{R}^4$.

**Esercizio 11.** Siano $U$ e $W$ due spazi vettoriali con operazioni di somma $+_U$ e $+_W$ e prodotto per scalari $\cdot_U$ e $\cdot_W$ rispettivamente. Si consideri l'insieme prodotto cartesiano $V = U \times W$, definito così:

$$U \times W = \{(u, w) : u \in U, w \in W\}$$

Su $V$ definisco somma $+_V$ e prodotto per gli scalari $\cdot_V$ nel seguente modo:

$$(u, w) +_V (u', w') = (u +_U u', w +_W w')$$

$$\lambda \cdot_V (u, w) = (\lambda \cdot_U u, \lambda \cdot_W w)$$

Dimostrare che il prodotto cartesiano $V$ con queste operazioni di somma e prodotto per gli scalari è uno spazio vettoriale.

**Esercizio 12.** * Sia $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ una base dello spazio vettoriale $V$ . Dimostrare che per ogni $v \in V$ la lista di vettori $(v_1, v_2, v_3, v_4, v)$ è un sistema di generatori per $V$ ma non è linearmente indipendente.

**Esercizio 13.** * Siano $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ dei vettori linearmente indipendenti e sia $v \in V$ . Dimostrare che $v_1, v_2, ..., v_n, v$ sono linearmente indipendenti se e solo se $v \notin Span\{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

**Esercizio 14.** ** Sia $V$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $v_1, v_2, v_3 \in V$ tali che:

i $v_1 \neq 0$

ii $v_2 \notin Span(v_1)$

iii $v_3 \notin Span(v_1, v_2)$

Dimostrare che $v_1, v_2, v_3$ sono linearmente indipendenti.

**Esercizio 15.** *** Si consideri l'insieme $V = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ con le seguenti operazioni di somma: $x +_V y = xy$, e di prodotto per scalari: $\lambda \cdot_V x = x^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Verificare se è uno spazio vettoriale verificando tutti gli assiomi oppure dimostrare che non lo è trovando un controesempio.