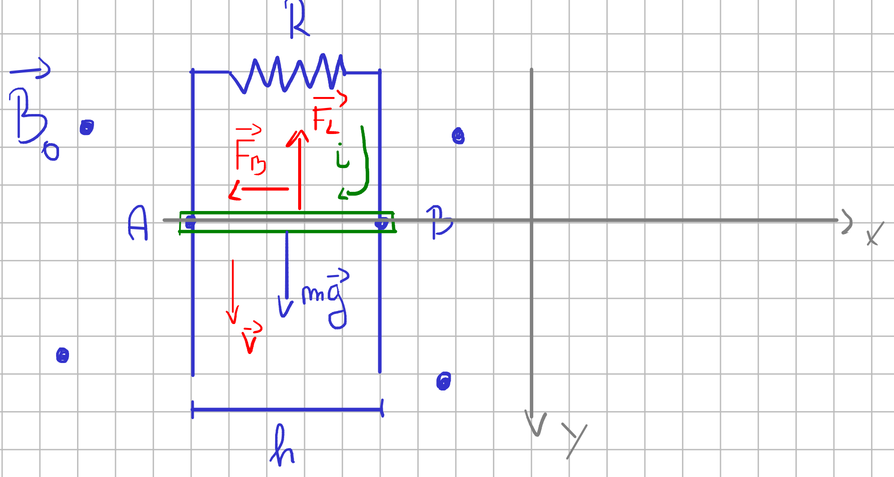
Lezione 16/06/2023

Esercizio 1



Una sbarretta omogenea di massa m e lunghezz h è libera di cadera fra le due guide conduttrici, senza attrito, in un Campo magnetico ortogonale alla sbaretta e costante.

a) Determinare i valori raggiunti all'equilibrio $(a=0)$ della corrente, della f.e.m. e della velocità.

b) Determinare come varia nel tempo $I(t)$, $v(t)$, $fem(t)$.

$h = 50\,cm$, $m = 1\,kg$, $B_0 = \dfrac{1\,Wb}{m^2}$ $(Wb = Vs)$

Ci sono due modi per svolgere l'esercizio.

1) Forza di Lorentz

2) Legge di Faraday - Neuman - Lenz.

1) Forza di Lorentz e circuitazione

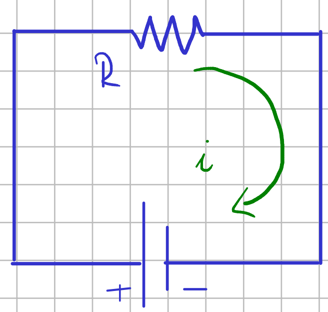
$$\vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B}, \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$f_{em}(t) = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint \left(\vec{v} \wedge \vec{B}_0\right) d\vec{s} = v(t) B_0 \oint d\vec{s} = v(t) B_0 \int_B^A ds$$

$f_{em}(t) = v(t) B_0 h$ (la forza magnetica agisce solo sulla sborra)

Il verso della corrente e concorde con il verso di $\vec{F_B}$.

Circuito equivalente:



$$i(t) = \frac{f_{em}(t)}{R} = \frac{B_0 h}{R} v(t)$$

Sul conduttore percorso da corrente agisce un'atra forza:

$$\vec{F}_L = i(t) \vec{h} \wedge B_0 = -i h B_0 \hat{y}$$

Quindi sulla sbarretta AB agiscono

$$\vec{F}_{AB} = m\vec{g} + \vec{F}_L = -i h B_0 \hat{y} + mg\hat{y}$$

$$\Downarrow$$

$$m a_y(t) = mg - i(t) h B_0$$

Se vogliamo la velocita di equilibrio, poniamo $a_y(t) = 0$

e sostituiamo a $i(t)$ la sua espressione.

$$mg - \frac{B_0 h}{R} v_{eq} h B_0 = 0 \Rightarrow \boxed{v_{eq} = \frac{mgR}{B_0^2 h^2} = 39{,}2 \ m/s}$$

Sapendo V_{eq} possiamo calcolare i_{eq} e fem_{eq}.

$$\boxed{i_{eq} = \frac{B_0 h}{R} v_{eq} = \frac{mg}{B_0 h} = 19{,}6 \ A}$$

$$\boxed{fem_{eq} = i_{eq} R = 19{,}6 \ V}$$

Volendo calcolare $v(t)$, possiamo scrivere $a_y(t) = \frac{dv}{dt}$ e risolvere l'equazione differenziale.

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{B_0^2 h^2}{R} v(t) \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{B_0^2 h^2}{Rm} v(t) \Rightarrow \left(\text{metto in evidenz } \frac{B_0^2 h^2}{Rm}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{B_0^2 h^2}{Rm}\left(\underbrace{\frac{g Rm}{B_0^2 h^2}}_{= V_{eq}} - v(t)\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dt} = \underbrace{-\frac{B_0^2 h^2}{Rm}}_{= \frac{1}{T}} \left(v(t) - V_{eq}\right) \Rightarrow \frac{dv}{v(t) - v_{eq}} = \frac{dt}{T}$$

Cambio variabile e ottengo: $W = v(t) - V_{eq} \Rightarrow$
$dW = dv$

$$\int_{W(0)}^{W(t)} \frac{dW}{W} = \int_0^t -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow \ln\left(\frac{W(t)}{W(0)}\right) = -\frac{t}{\tau} \overset{exp}{\Longrightarrow} \frac{W(t)}{W(0)} = e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow$$

$$\frac{v(t) - v_{eq}}{v(0) - v_{eq}} = e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} v(t) &= v_{eq} - \left(v_{eq} - v(0)\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \\ fem(t) &= v(t) B_0 h \\ i(t) &= \frac{fem(t)}{R} \end{aligned}}$$

Se chiamo $fem_{eq} := v_{eq} B_0 h$, $fem_0 := v_0 B_0 h$

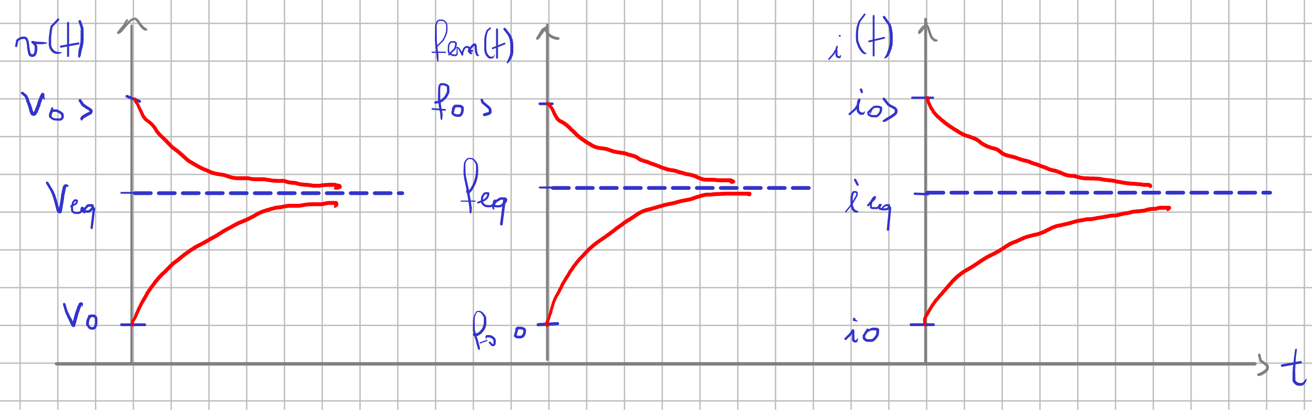
$$i_{eq} = \frac{fem_{eq}}{R}, \quad i_0 := \frac{fem_0}{R}$$

$$\boxed{\begin{aligned} i(t) &= i_{eq} - (i_{eq} - i_0) e^{-\frac{t}{\tau}} \\ fem(t) &= fem_{eq} - (fem_{eq} - fem_0) e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}}$$

La potenza $P(t) = i^2(t) R$

$$i(t=\tau) = i_{eq} - (i_{eq} - i_0) e^{-1} = i_{eq} - \frac{(i_{eq} - i_0)}{e} -$$

Grafici $v(t)$, $fem(t)$, $i(t)$



2) Legge di Faraday - Neumann - Lenz

$$f_{em} = -\frac{d\Phi(B_0)}{dt}$$

$$\Phi(B_0) = \int_\Sigma B_0 \cdot d\Sigma \cdot \hat{m} = -\int_\Sigma B_0\, d\Sigma$$

$\hat{m}$ è il vettore normale ($\perp$) alla superficie il cui verso è entrante nel pia (usando la regola del cacciavite con il verso di $i(t)$)

$$d\Sigma = h \cdot v\,dt$$

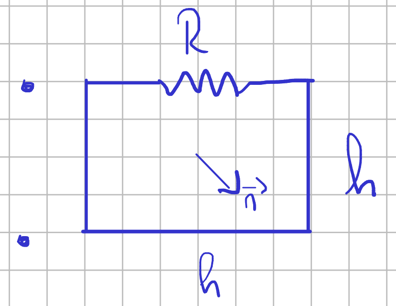
$$\Phi(B_0) = -B_0 h \int v\,dt = -B_0 h\, y(t)$$

$$f_{em} = -\frac{d\Phi(B_0)}{dt} = B_0 h\, v(t)$$

I seguenti passaggi sono identici al caso precedente.

Esercizio 2

Calcolare la fem indotta.



$|\vec{B}| = B_0 \, sen(\omega t)$: campo che varia nel tempo

$$f_{em} = \frac{-d\Phi(B)}{dt}$$

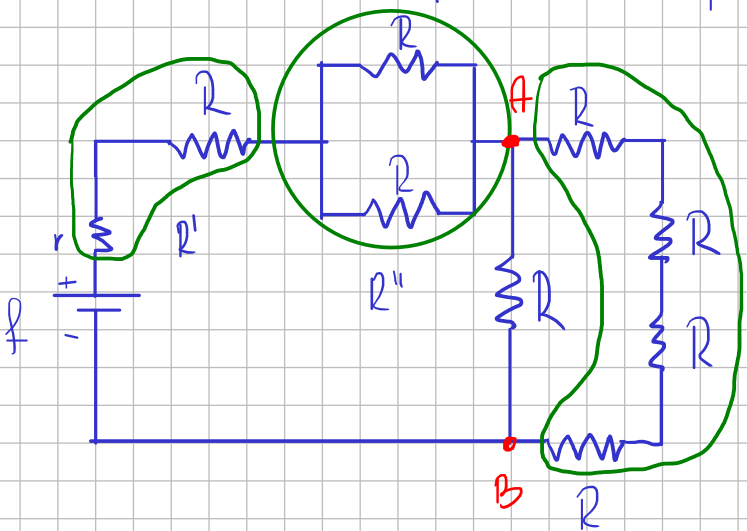
$$\Phi(B) = \int \vec{B} \, d\vec{\Sigma} = B h^2$$

$$f_{em} = -\frac{d}{dt}\left(B_0 \, sen(\omega t) \, h^2\right) = -h^2 B_0 \frac{d}{dt}\left(sen(\omega t)\right)$$

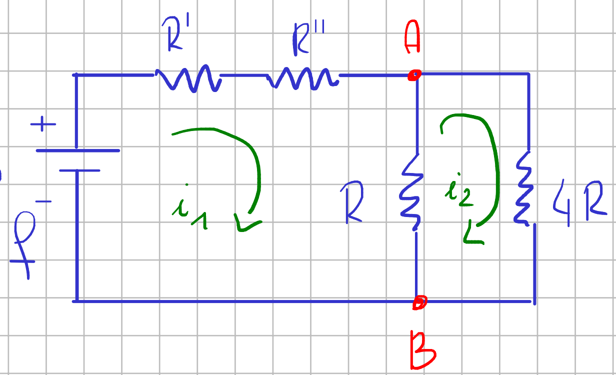
$$= -h^2 B_0 \, \omega \cos(\omega t)$$

Esercizio 3

Calcolare la differenza di potenziale ai capi A e B.



$\Leftarrow\Rightarrow$



$$R' = r + R$$

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{2R}{R^2} = \frac{2}{R}$$

$$R'' = \frac{R}{2}$$

$$\begin{cases} f - i_1(r+R) - i_1\left(\frac{R}{2}\right) - i_1 R + i_2 R = 0 \\ -i_2 4R - i_2 R + i_1 R = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} i_1\left(r + 2R + \frac{R}{2}\right) - i_2 R = f \Rightarrow 5 i_2 \left(r + \frac{5}{2}R\right) - i_2 R = f \\ -i_1 R + i_2 5 R = 0 \Rightarrow i_1 = 5 i_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow i_2\left(5r + \frac{25}{2}R - R\right) = f \Rightarrow i_2\left(5r + \frac{23R}{2}\right) = f$$

$$\Rightarrow i_2 = \frac{f}{10r + 23R} \quad , i_1 = 5 i_2$$

$$V_{AB} = -i_1 R + i_2 R = R(i_2 - i_1) = -4 i_2 R$$