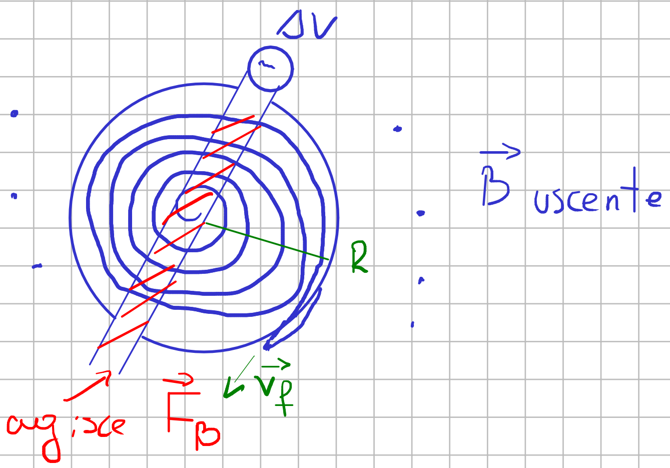
# Lezione 12/06/2023

## Esercizio 1 (Ciclotrone)




Ogni volta che la particella passa da un contenitore all'altro, guadagna un'energia cinetica $K = q\Delta V$, per cui il raggio aumenta.

Determinare $\vec{v}_f$ e $K$.

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge B, \quad a_c = \frac{v^2}{r} \Rightarrow \vec{F}_L = m\vec{a}_c \Rightarrow$$

$$qvB = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$ : raggio di ogni traiettoria

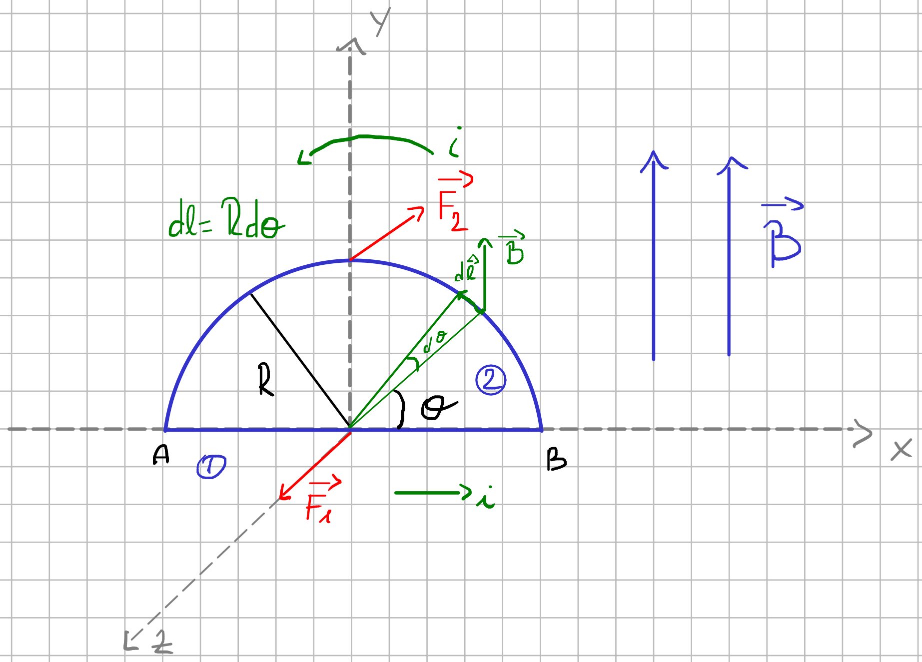
Se $R$ è il raggio finale $\Rightarrow v_f = \frac{RqB}{m}$

$$K = \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{RqB}{m}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{(RqB)^2}{m}$$

## Esercizio 2 (Esempio 4, PDF 23)

Un filo a forma di circonferenza di raggio R, richiuso da un tratto rettilineo lungo il diametro è attraversato da una corrente I.

Trovare il modulo, la direzione e il verso della forza magnetica che agisce sulla parte rettilinea e la forza che agisce sulla parte curva

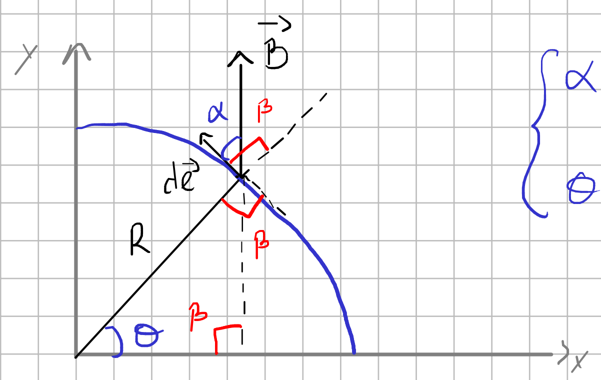



① $\overline{AB} = 2R = l$

$$d\vec{F} = i\, d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{F}_1 = i \int_A^B d\vec{l} \wedge \vec{B} = i \int_A^B dl \cdot B \cdot \hat{z} = i l B \hat{z} = 2iRB\hat{z}$$

② $\vec{F}_2 = i \int_B^A d\vec{l} \wedge \vec{B}$




$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \\ \theta + \beta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \theta$$

$$\vec{F}_2 = i\int_0^{\pi} R\,d\theta\, B\sin\theta = -\hat{z}\, iRB\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta = -\hat{z}\, iRB\int_0^{\pi}\sin d\theta$$

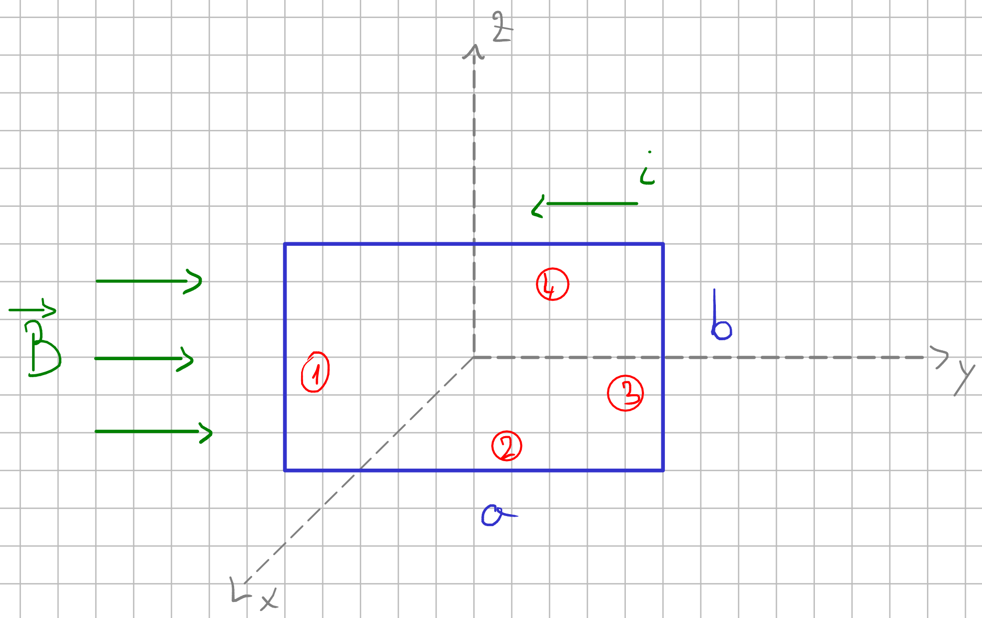
$$= -\hat{z}\, iRB\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right) = -\hat{z}\, iRB\left((-1)-1+1\right) = -2iRB\,\hat{z}$$

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Questo è vero in generale: la forza magnetica totale agente su un generico circuito chiuso percorso da corrente e posto in un campo magnetico uniforme è nulla.

## Momento delle forze agenti su una spira in un campo magnetico uniforme.

Spira percorsa da corrente posta in un campo magnetico




Calcolare le forze su ciascun ramo e il lo momento.

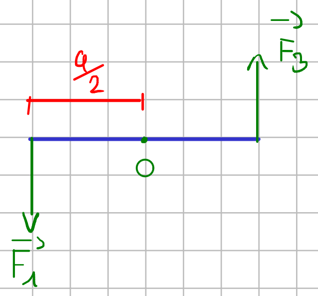
$$d\vec{F} = i\,d\vec{\ell}\wedge\vec{B} \xrightarrow{\int} \vec{F} = i\vec{\ell}\wedge\vec{B}$$

$$\vec{F}_3 = i\vec{b} \wedge \vec{B} = -ibB\hat{x}$$

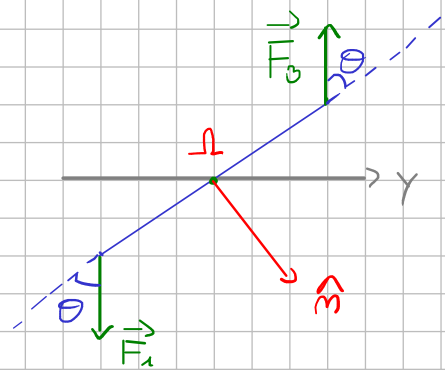
$$\vec{F}_1 = i\vec{b} \wedge \vec{B} = ibB\hat{x}$$

$\vec{F}_2 = F_4 = \vec{0}$, B e l sono paralleli

Vista "dall' alto":




Supponiamo che la spira sia ruotata




$$\vec{M}^{(e)}_{TOT} = \vec{\tau}_{F_1} + \vec{\tau}_{F_3}$$

$$|\vec{\tau}_{F_3}| = \left|\frac{a}{2} \wedge \vec{F}_3\right| = \frac{a}{2} F_3 \, sen(\theta)$$

$$|\vec{\tau}_{F_1}| = \left|\frac{a}{2} \wedge \vec{F}_1\right| = \frac{a}{2} F_1 \, sen(\theta)$$

$$|\vec{M}^{(e)}_{TOT}| = \left(\frac{a}{2} F_1 + \frac{a}{2} F_3\right) sen(\theta) = abiB \, sen(\theta)$$

Definiamo $\vec{\mu} = iA\hat{m}$ momento di dipolo magnetico

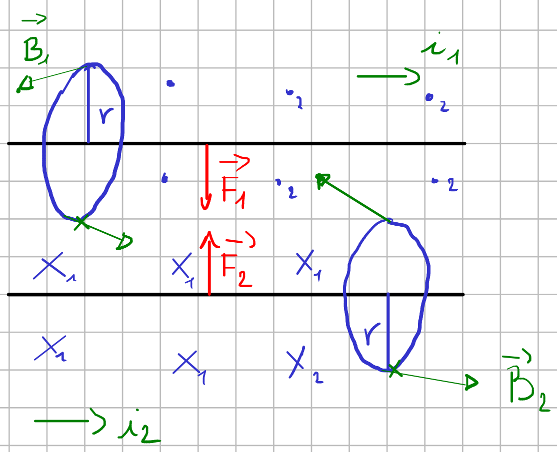
con $A = ab$ (area), quindi $\vec{M}^{(e)}_{TOT} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos\theta.$$

# Forza magnetica tra due conduttori paralleli.

## Caso 1 :

Due fili paralleli, con corrente di segno concorde.




- $\oint B_1 \, d\vec{\ell} = \mu_0 i_1 \Rightarrow B_1 2\pi r = \mu_0 i_1 \Rightarrow B_1 = \dfrac{\mu_0 i_1}{2\pi r}$

$\vec{F}_2 = i_2 \vec{\ell} \wedge \vec{B}_1 \Rightarrow F_2 = i_2 \ell B_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$$F_2 = \frac{i_2 i_1 \mu_0 \ell}{2\pi r}$$

- $\oint \vec{B}_2 \, d\vec{\ell} = \mu_0 i_2 \Rightarrow B_2 = \dfrac{\mu_0 i_2}{2\pi r}$

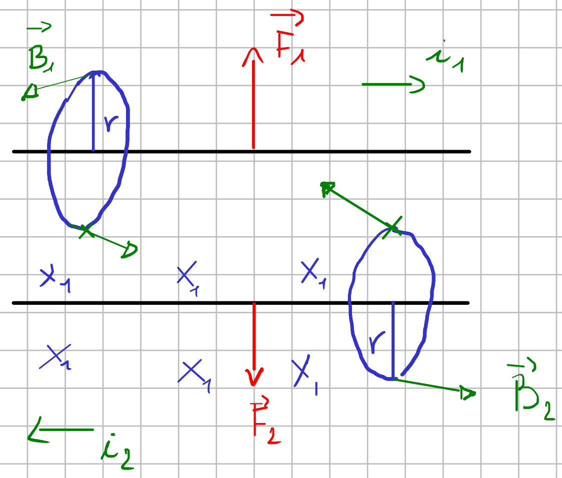
$\vec{F}_1 = i_1 \vec{\ell} \wedge \vec{B}_2 \Rightarrow F_1 = i_1 \ell B_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$$F_1 = \frac{i_2 i_1 \mu_0 \ell}{2\pi r}$$

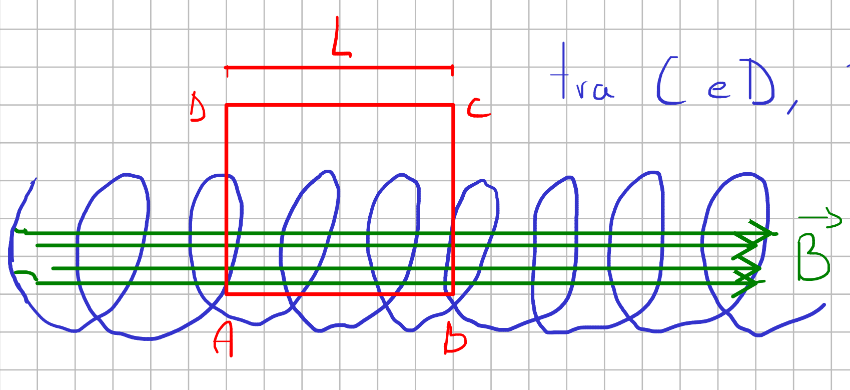
$\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ sono uguali in moduli, ma hanno direzioni opposte.

Caso 2 :

Due fili paralleli, con corrente di segno discorde:




Campo magnetico di un solenoide




tra C e D, $B=0$

$$\oint_L B\,d\vec{l} = \mu_0 \sum_{j=1}^{m} i_j$$

Sia $N = \frac{\#\text{ spire}}{L} \Rightarrow \#\text{ Spire} = N \cdot L$

$$i_{TOT} = \#\text{ spire} \cdot i = N L i$$

$$\oint_L \vec{B}\,dl = \int_A^B B\cos(0)\,dl + \int_B^C B\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{=0} dl + \int_C^D \underbrace{0}_{=0}\,dl + \int_D^A B\underbrace{\cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)}_{=0} dl$$

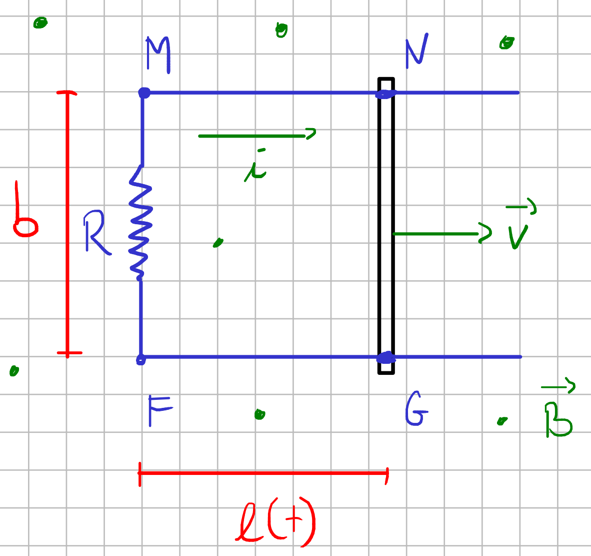
$$= \int_A^B B\,dl = BL$$

$$\Rightarrow B\cancel{L} = \mu_0 N \cancel{L} i \Rightarrow B = \mu_0 N i$$

## Esercizio 3. (forza elettromotrice dinamica, PDF 24 pag 6)

Un circuito rettangolare costituito da due conduttori paralleli, chiuso a sinistra da un conduttore di resistenza R e a destra da una sbarra conduttrice mobile.
Il circuito è posto in un campo magnetico $\vec{B}$, uniforme, ortogonale al piano del ciruito. La sbarra si muove di moto traslatorio con velocità costante.

Calcolare la f.e.m ($\Delta V$) e la corrente indotta.




Ci sono 2 modi per calcolare la f.e.m.

a) $\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}_L}{q} \Rightarrow$

$$f_{em} = \oint \vec{E}\,dl \neq 0$$

b) $$f_{em} = \frac{-d\,\phi(B)}{dt}$$

Legge di Faraday - Neuman - Lentz

a) $$f_{em} = \oint_{\ell} \vec{E}\, d\vec{\ell} \neq 0 \,, \quad \vec{E} = \vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow$$

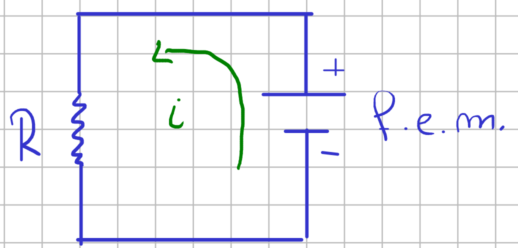
$$f_{em} = \oint_{\ell} (\vec{v} \wedge \vec{B})\, d\vec{\ell} = \int_N^G (\vec{v} \wedge \vec{B})\, d\ell = vB \int_N^G d\ell = vBb$$

b) $$f_{em} = -\frac{d\,\Phi(B)}{dt}$$

$$\phi(B) = \int_{\Sigma} \vec{B}\, d\vec{\Sigma} = B\,\ell(t)\,b \Rightarrow$$

$$f_{em} = -\frac{d}{dt}\Big(B\,\ell(t)\,b\Big) = -Bb\,\overbrace{\frac{d}{dt}\Big(\ell(t)\Big)}^{v} = -Bb\,v$$

Se consideriamo la sbarra come un generatore:

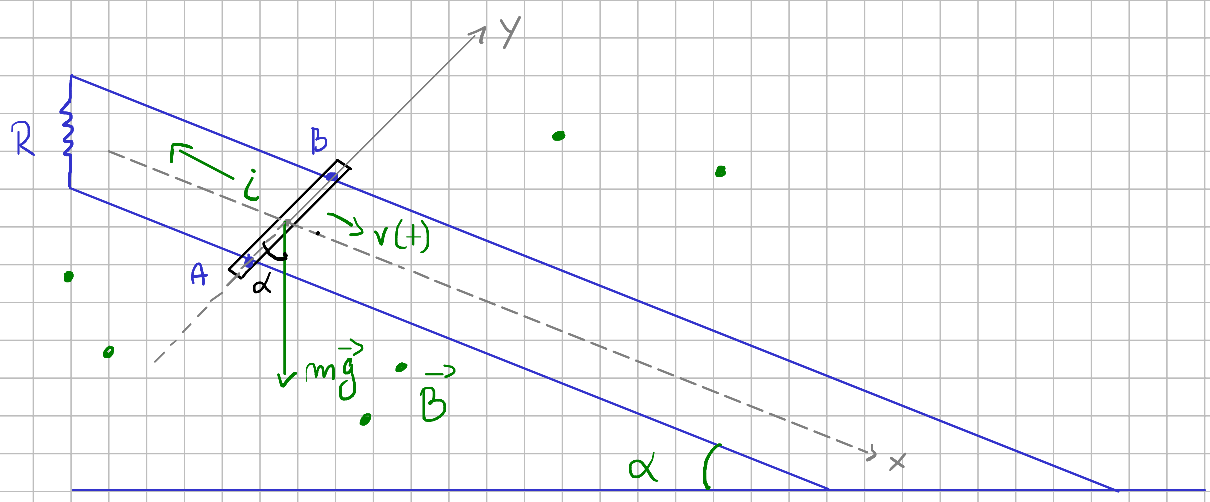



$$i = \frac{f.e.m.}{R} = \frac{-Bbv}{R}$$

Esercizio 4 (Simile all'esempio 4, PDF 24)

Una sbarretta conduttrice si muove senza attrito su due guida parallele formando un piano inclinato di un angolo $\alpha$, in presenza di un campo magnetico uniforme entrante. La sbarretta ha massa $m$ e lunghezza $\ell$.

Calcolare la f.e.m. e la velocità in funzione del tempo usando la seconda legge della dinamica.




La f.e.m. l'abbiamo già calcolata: $f_{em} = -\ell v B$

$$i = -\frac{\ell v B}{R}$$

$$\vec{F}_{TOT} = m\vec{g} + \vec{F}_L \,, \quad m g_x = mg \sin\alpha \,, \quad F_L = i \ell B = \frac{-\ell^2 v B^2}{R}$$

$$m a_x = mg\sin\alpha - \frac{\ell^2 v B^2}{R} \,, \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow$$

$$m \frac{dv_x}{dt} = mg\sin\alpha - \frac{\ell^2 v B^2}{R}$$

La velocità di equilibrio si ha quando $a(t) = 0$

$$mg\sin\alpha - \frac{\ell^2 v B^2}{R} = 0 \Rightarrow v_{eq} = \frac{R mg \operatorname{sen}\alpha}{\ell^2 B^2}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{\ell^2 B^2}{mR}\left(\frac{R mg \sin\alpha}{\ell^2 B^2} - v\right)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\underbrace{\frac{\ell^2 B^2}{mR}}_{\frac{1}{\tau}}\left(v - v_{eq}\right)$$

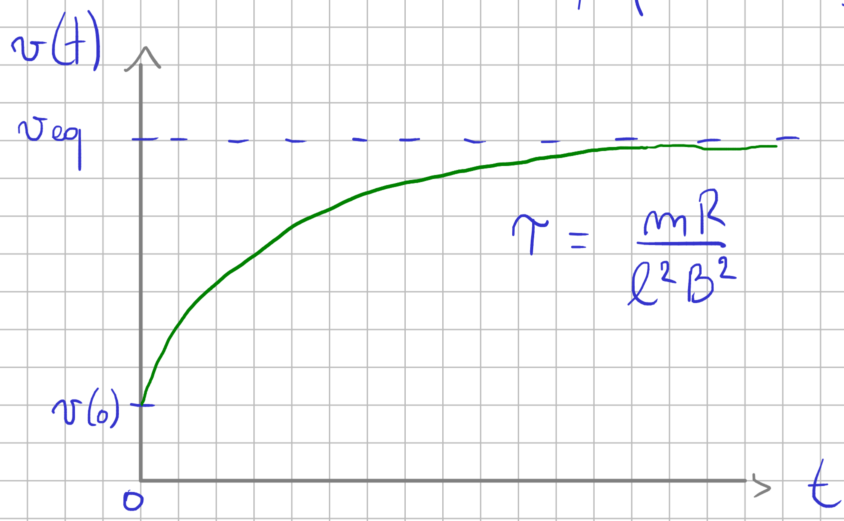
$$\frac{dv(t)}{v - v_{eq}} = -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow \qquad x = v - v_{eq} \Rightarrow dx = dv$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow \ln(x) = -\frac{t}{\tau} \overset{e}{\Rightarrow} \frac{x(t)}{x(0)} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$x(0) = v(0) - v_{eq}$$
$$x(t) = v(t) - v_{eq}$$

$$\Rightarrow \frac{v(t) - v_{eq}}{v(0) - v_{eq}} = e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow v(t) - v_{eq} = \left(v(0) - v_{eq}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow v(t) = v_{eq} + \left(v(0) - v_{eq}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$




$$\tau = \frac{mR}{\ell^2 B^2}$$

$$v(t) \xrightarrow{t \to +\infty} v(eq)$$