

LINGUAGGI SEPARATORI

DEF

CLASSI DI COMPLESSITÀ

DATI $C_1 \subseteq C_2, C_1 \subsetneq C_2$

UN LINGUAGGIO SEPARATORE FRA C_1 E C_2

È UN LINGUAGGIO L CHE NELL'IPOTESI $C_1 \neq C_2: L \in C_2 \setminus C_1$

Π -RIDUZIONE

DEF

VA AD INDICARE UNA PROPRIETÀ DI f

$$\Pi(f) = \{f(n) \leq n\}$$

PUÒ ESSERE VERO O FALSO

SIA Π UN PREDICATO

L_1 È Π -RIDUCIBILE AD L_2 ($L_1 \leq_{\Pi} L_2$) SE:

DERIVIAMO L_2 A PARTIRE DA L_1

$$\exists f \text{ TOTALE E CALCOLABILE: } \forall x \in \{0,1\}^* [x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2] \wedge \Pi(f) = \text{VERO}$$

DEF DI RIDUZIONE

CHIUSURA DI UNA CLASSE RISPETTO AD UN PREDICATO

DEF

C_1 È CHIUSA RISPETTO A Π SE

$$\forall L_0, L: L_0 \in C_1 \wedge L \leq_{\Pi} L_0 [L \in C_1]$$

\Downarrow

$\forall L_0 \in C_1$, OGNI LINGUAGGIO RIDUCIBILE DA L_0 APPARTIENE A C_1

LINGUAGGI C-COMPLETI RISPETTO A τ

DEF

L È C_1 -COMPLETO RISPETTO ALLA τ -RIDUCIBILITÀ SE:

$\forall C_1$:

1) $L \in C_1$

2) $\forall L' \in C_1 [L' \leq_{\tau} L]$

\Rightarrow

$L \in C_2$ E OGNI ALTRO $L' \in C_1$

È RIDUCIBILE DA L

TEOREMA

SIA $C_1, C_2, C_1 \subseteq C_2$, C_1 CHIUSO RISPETTO A \leq_{τ} , SIA L C_2 -COMPLETO

$$[L \in C_1 \Leftrightarrow C_1 = C_2]$$

DIM

\Rightarrow SIA $L \in C_1$

POICHÉ L È C_2 -COMPLETO $\Rightarrow \forall L' \in C_2 [L' \leq_{\tau} L]$

POICHÉ

$\forall L \in C_1, L' \leq_{\tau} L [L' \in C_1]$

$L \in C_1 \wedge C_1$ È CHIUSA RISPETTO A $\leq_{\tau} \wedge \forall L' \in C_2 [L' \leq_{\tau} L] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall L \in C_2 [L' \in C_1] \Rightarrow C_1 = C_2$$

\Leftarrow SIA $C_1 = C_2$

POICHÉ L È C_2 -COMPLETO $\Rightarrow L \in C_2 \Rightarrow L \in C_1$

P-CHIUSURA

TEOREMA RIDUZIONE POLINOMIALE

L_1 È POLINOMIALMENTE RIDUCIBILE AD L_2

$$\exists f \in FP : \forall x \in \{0,1\}^* [x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_1 \leq_P L_2$$

$FP \Rightarrow \overline{P} \Rightarrow \tau(f) : \text{VERO SE } f \text{ È TOTALE, CALCOLABILE E POLINOMIALE}$

TEOREMA

SIA $C_1 \subseteq C_2$: C_1 CHIUSA RISPETTO A \leq_P , L C_2 -COMPLETO

$$[L \in C_1 \Leftrightarrow C_1 = C_2]$$

COROLLARIO

SE L È NP-COMPLETO:

SAPPIAMO ANCHE CHE:

1) P È CHIUSO RISPETTO A \leq_P

$$L \in NP \Leftrightarrow P = NP$$

2) $P \subseteq NP$

$\hookrightarrow DCF$

TEOREMA

P CHIUSA RISPETTO A \leq_P

DIM

$$\text{SIA } L \in P \Rightarrow \exists T, k : T \text{ DECIDE } L \text{ E } \forall x \in \{0,1\}^* [d \text{ TIME}(\overline{T}, x) \in O(|x|^k)]$$

$$\text{SIA } L' : L' \leq_P L \Rightarrow \exists T_f, c : \forall x \in \{0,1\}^* [x \in L' \Leftrightarrow T_f(x) \in L \wedge d \text{ TIME}(\overline{T}_f, x) \in O(|x|^c)]$$

$\hookrightarrow f \in FP$

$\hookrightarrow f$ È POLINOMIALE

Costruisco $T' \rightarrow$ BASATA SU T_f e T_r , T decide L'

T' : INPUT x

1) SIMULO $T_f(x)$ E SCRIVO L'OUTPUT y SU M_2

2) SIMULO $T_r(y)$:

$$\text{Se } T_f(y) = q_A \Rightarrow T'(x) = q_A$$

$$\text{Se } T_r(y) = q_R \Rightarrow T'(x) = q_R$$

CALCOLIAMO IL COSTO DI $T'(x)$:

PASSO 1: $O(|x|)$

PASSO 2: $O(|x|^c)$

PASSO 3: $O(|x|^c + |y|^k)$

MA SAPPIAMO PER IL TEO DELLA RELAZIONE FRA $dTIME$ E $dSPACE$ CHE

$$dTIME(T', x) \leq O(|x|^c + |y|^k)$$

$$\text{MA } |y| \in O(|x|^c)$$

$$dTIME(T', x) \in O(|x|^c + |x|^k) = O(|x|^{ck})$$

REMINDR TEO RELAZIONE $dTIME$ E $dSPACE$

$$\forall T \forall x \left[dSPACE(T, x) \leq dTIME(T, x) \leq dSPACE(T, x) \cdot |Q| \cdot (|\Sigma| + 1) \right]$$

GERARCHIE

$$P \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME$$

$$P \subseteq NP \subseteq EXPTIME$$

$$NP \subseteq NPSPACE \subseteq PSPACE$$

$$\hookrightarrow NPSPACE = PSPACE$$

