RIDUCIBILITÀ → (MANY TO ONE)

DEF

DATI $L_1 \subseteq \Sigma_1^*, L_2 \subseteq \Sigma_2^*$

$L_1 \preceq L_2$ SE → L_1 È RIDUCIBILE A L_2

$\forall x \in \Sigma_1^*, \exists f: \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ TOTALE E CALCOLABILE $[x \in L_1 \iff f(x) \in L_2]$

ES

T_{PPAL}: $x \in \{a,b\}^*$, DECIDE SE x È PARI E PALINDROMA

T_{PPAL12}: $y \in \{1,2\}^*$, DECIDE SE y È PARI E PALINDROMA

L'UNICA DIFFERENZA FRA T_{PPAL} E T_{PPAL12} È L'ALFABETO

MODELLIAMO T_{PPAL12} CON INPUT $y \in \{1,2\}^*$:

1) $\langle q_0, 1, a, q_0, D \rangle, \langle q_0, 2, b, q_0, D \rangle, \langle q_0, \square, \square, q_1, S \rangle$ → TRASFORMIAMO 1 IN a E 2 IN b

$\langle q_1, a, a, q_1, S \rangle \langle q_1, b, b, q_1, S \rangle, \langle q_1, \square, \square, q_2, D \rangle$ → RIPOSIZIONIAMO LA TESTINA A SINISTRA

2) ESEGUIAMO T_{PPAL}

A CONTI FATTI IL PASSO 1) È LA NOSTRA f IN QUANTO TRADUCE Σ_2^* IN Σ_1^*

COSTRUENDO COSÌ T_{PPAL12} ABBIAMO CHE:

i) $\exists f$ TOTALE E CALCOLABILE

ii) $\forall x \in L_{PPAL12} \iff f(x) \in L_{PPAL}$

$L_{PPAL12} \preceq L_{PPAL}$

TEOREMA 1

DATI $L_1 \subseteq \Sigma_1^*, L_2 \subseteq \Sigma_2^*, L_1 \propto L_2$

L_2 È DECIDIBILE $\Longrightarrow L_1$ È DECIDIBILE

DIM

$$L_2 \text{ È DECIDIBILE} \Longrightarrow \exists\, T_2 : \forall y \in \Sigma_2^* \left[T_2(y) = \begin{cases} q_A \text{ SE } y \in L_2 \\ q_R \text{ SE } y \notin L_2 \end{cases} \right]$$

$$L_1 \propto L_2 \iff \exists\, T_f : \forall x \in \Sigma_1^* \left[x \in L_1 \iff T_f(x) \in L_2 \right]$$

COSTRUIAMO T_1 CON INPUT $x \in \Sigma_1^*$:

1) SIMULO $T_f(x)$, SIA Y L'OUTPUT DI $T_f(x)$ $\longrightarrow$ TOTALE E CALCOLABILE
2) ESEGUO $T_2(Y)$:

SE ACCETTA VA IN q_A

SE RIGETTA VA IN q_R

TEOREMA 2

DATI $L_1 \subseteq \Sigma_1^*, L_2 \subseteq \Sigma_2^*, L_1 \propto L_2$

L_1 NON È DECIDIBILE $\Longrightarrow L_2$ NON È DECIDIBILE

DIM

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE L_2 SIA DECIDIBILE

POICHÉ $L_1 \propto L_2$

PER IL TEOREMA 1

L_2 È DECIDIBILE $\Longrightarrow L_1$ È DECIDIBILE $\longrightarrow$ ASSURDO

TEOREMA 3

DATI $L_1 \subseteq \Sigma_1^*, L_2 \subseteq \Sigma_2^*, L_1 \propto L_2$

L_2 È ACCETTABILE $\Rightarrow L_1$ È ACCETTABILE

L_2 È ACCETTABILE $\Rightarrow \forall x \in L_2 \ T_2(x) = q_A$ E $\forall x \notin L \ T_2(x) \neq q_A$

$L_1 \propto L_2 \iff \exists T_f : \forall x \in \Sigma_1^* [x \in L_1 \iff T_f(x) \in L_2]$

DEFINISCO T_1 CON INPUT $x \in \Sigma_1^*$:

1) SIMULO $T_f(x)$ CON OUTPUT y
2) ESEGUO $T_2(y)$

?

ES

$L_{H0} = \{ i \in \mathbb{N} : i$ È LA CODIFICA DI UNA MACCHINA $T_i \wedge T_i(0)$ TERMINA $\}$

$L_H = \{ \langle i, x \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i$ È LA CODIFICA DI UNA MACCHINA $T_i \wedge T_i(x)$ TERMINA $\}$

$L_H \propto L_{H0}$

DIMOSTRIAMO CHE L_{H_0} È NON DECIDIBILE

i) $\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ TOTALE E CALCOLABILE

$$\forall (i,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \left[(i,x) \in L_H \Longleftrightarrow f(i,x) = K \in L_{H_0} \right]$$

$\downarrow$ TRASPONIAMO f A T_f

$$\forall (i,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \left[(i,x) \in L_H \Longleftrightarrow T_f(i,x) = K \in L_{H_0} \right]$$

ii) FISSIAMO UNA QUALUNQUE COPPIA $(i,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

X FISSATO $\to$ $X = x_1, x_2 \ldots x_n$ $\to$ n È COSTANTE

MACCHINA CHE IMPLEMENTA K

iii) DEFINIAMO LA MACCHINA M CON INPUT 0:

1) SE i NON È CODIFICA DI T ENTRA IN LOOP

2) $\langle q_1, 0, x_1, q_2, Dx \rangle$

$\langle q_2, \square, x_2, q_3, Dx \rangle$

$\vdots$ $\to$ SCRIVO L'INPUT x AL POSTO DI 0

$\langle q_n, \square, x_n, q_0', Sx \rangle$

<MI RIPOSIZIONO A SINISTRA DELL'INPUT>

3) SIMULA $U(T_i, x)$

COSTRUITA INTORNO ALLA COPPIA (i,x) FISSATA

iv) POSSIAMO CODIFICARE M CON L'INTERO K_{ix} OUTPUT DI $f(i,x)$

V) POSSIAMO RICONOSCERE ORA 2 POSSIBILI CASI:

DEF DI L_H

1) $(i, x) \in L_H \rightarrow$ K_{ix} È CODIFICA DI UNA MACCHINA DI TURING $\wedge$ $T_{K_{ix}}$ TERMINA

1.a) K_{ix} È CODIFICA DI UNA MACCHINA DI TURING
1.b) $T_{ix}(0) = M(0)$
1.c) ESEGUIAMO $M(0)$
1.d) i È CODIFICA DI MACCHINA DI TURING $\longrightarrow$ M SALTA IL PASSO 1
1.e) $T_i(x)$ TERMINA $\longrightarrow$ M TERMINA AL PASSO 3
1.d) $K_{ix} \in L_{H0}$

DEF DI L_H

2) $(i, x) \notin L_H \rightarrow$ K_{ix} NON È CODIFICA DI UNA MACCHINA DI TURING $\vee$ $T_{K_{ix}}$ NON TERMINA

2.a) K_{ix} È CODIFICA DI UNA MACCHINA DI TURING
2.b) $T_{ix}(0) = M(0)$
2.c) ESEGUIAMO $M(0)$
2.d) SE i NON È CODIFICA DI MACCHINA DI TURING $\longrightarrow$ M NON TERMINA AL PASSO 1
2.e) SE $T_i(x)$ NON TERMINA $\longrightarrow$ M NON TERMINA AL PASSO 3
2.d) $K_{ix} \notin L_{H0}$