

# Tutorato Geometria e Algebra Informatica

Andrea Pizzi

29 Marzo 2023

**Esercizio 1.** Riduci a scala le seguenti matrici con il metodo di eliminazione di Gauss

$$\begin{array}{lll}
 a) \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 12 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & b) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} & c) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 30 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 31 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 d) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} & e) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} & f) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\
 g) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} & h) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} & i) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

**Esercizio 2.** Studia i seguenti sistemi lineari con il metodo di Gauss:

$$\begin{array}{lll}
 a) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_3 = -4 \end{cases} & b) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \\ 3x_2 = 6 \\ 2x_3 = -2 \end{cases} & c) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \\ 3x_3 = 6 \\ 2x_2 = -2 \end{cases}
 \end{array}$$

**Esercizio 3.** Studia i seguenti sistemi lineari con il metodo di Gauss:

$$\begin{array}{lll}
 a) \begin{cases} y + 2z = 1 \\ -y + z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} & b) \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ -3y + 2z = 0 \\ x = 0 \end{cases} & c) \begin{cases} -x + y + 2z = 5 \\ y - 4z = 0 \\ x - y = 10 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \\
 d) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ 3y + z = 1 \end{cases} & e) \begin{cases} x - y + 4z = 10 \\ 3x + y + 5z = 15 \\ x + 3y - 3z = 6 \end{cases}
 \end{array}$$

**Esercizio 4.** Studia i seguenti sistemi lineari con il metodo di Gauss:

$$\begin{array}{lll}
 a) \begin{cases} x + y - z = 1 - t \\ x - y - z = 0 \\ x - y - z = t - 1 \end{cases} & b) \begin{cases} x + y - 2w = 0 \\ 2y + 3z - w = 5 \\ 3x + y - z + w = 1 \end{cases} & c) \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 4x + 6y - 2z = -3 \end{cases} \\
 d) \begin{cases} x + 2y + z - w = 2 \\ 2x + 4y + 2z - 2w = 4 \\ -2x - 4y + 2w = -4 \end{cases} & e) \begin{cases} 2w + 2x - y + 2z = 15 \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 2x - 17y + 7z = 26 \end{cases}
 \end{array}$$

**Esercizio 5.** Studia il seguente sistema lineare di tre equazioni in 3 incognite con il metodo di Gauss:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

**Esercizio 6.** Studia il seguente sistema lineare di tre equazioni in 3 incognite con il metodo di Gauss:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

**Esercizio 7.** Studia il seguente sistema lineare di tre equazioni in 3 incognite con il metodo di Gauss:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

**PS:** Osservare che cambiamento è stato effettuato tra l'esercizio 5 e l'esercizio 6 e come ha influito sulle soluzioni. Osservare ancora che cambiamento è stato effettuato tra l'esercizio 6 e l'esercizio 7 e come ha influito sulle soluzioni.

**Esercizio 8.** Studia i seguenti sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite con il metodo di Gauss:

$$a) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

**Esercizio 9.** (Esercizio 21 bis- Foglio 1) Dato il piano  $\pi$  e la retta  $r$  di equazioni cartesiane

$$\pi : 2x + 3y - z = 4 \quad r : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

determina se sono incidenti oppure no utilizzando il metodo di Gauss. Fare lo stesso per il piano e la retta seguenti:

$$\pi : x + y + 3z + 1 \quad r : \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3}t \\ y = \frac{1}{3}t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

**Esercizio 10.** \*\*\* Trovare in  $\mathbb{R}^3$  le equazioni parametriche e cartesiane del piano  $\pi$  passante per  $P_0 = (1, 2, 5)$  e parallelo ai vettori  $v = (2, 5, 7)$  e  $w = (1, 0, 3)$ . Trovare le equazioni parametriche e cartesiane della retta  $r$  passante per il punto  $Q = (1, 4, -7)$  e parallela alla retta  $s$  di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$$

- Trovare gli eventuali punti di intersezione tra il piano  $\pi$  e la retta  $r$ .
- Trovare gli eventuali punti di intersezione tra il piano  $\pi$  e la retta  $s$ .
- Trovare gli eventuali punti di intersezione tra la retta  $r$  e la retta  $s$ .
- Trovare gli eventuali punti di intersezione tra il piano  $\pi$ , la retta  $r$  e la retta  $s$ .

**Esercizio 11.** Studiare i punti di intersezione dei due piani

$$\pi : x + y - 7 = 0 \quad \pi' : 2x + 2y - 2z + 3 = 0$$

Fare lo stesso per i piani

$$\pi : x + 2y + 4z + 1 = 0 \quad \pi' : 2x + 3y - 2z + 7 = 0$$

**Esercizio 12.** \* Determina l'equazione cartesiana del piano  $\pi$  passante per  $P = (1, -1, 2)$  e parallelo al piano  $\pi' : x - 3y + z - 1 = 0$ .

Consideriamo poi la retta  $r$  passante per il punto  $Q_1 = (3, 1, 0)$  e parallela al vettore  $v = (1, 3, 2)$ , e la retta  $s$  passante per il punto  $Q_2 = (0, 1, 1)$  e parallela al vettore  $w = (1, 1, -1)$ .

Determinare gli eventuali punti di intersezione tra le due rette  $r$  ed  $s$ , i punti di intersezione tra i due piani  $\pi$ ,  $\pi'$  e la retta  $s$ , i punti di intersezione tra i due piani  $\pi$ ,  $\pi'$  e la retta  $r$ .

**Esercizio 13.** \*\* Studia i seguenti sistemi lineari di quattro equazioni in quattro incognite con il metodo di Gauss:

$$\begin{aligned} a) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases} & \quad b) \begin{cases} 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \\ c) \begin{cases} 9x + y + z + t = 3 \\ 8x + 2y + z + t = 1 \\ 6x + 7y + 3t = 1 \\ 6x + 5y + t = 1 \end{cases} & \quad d) \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 8x + 4y + 2z + t = 5 \\ 27x + 9y + 3z + t = 14 \\ 64x + 16y + 4z + t = 30 \end{cases} \end{aligned}$$

**Esercizio 14.** Riduci a scala le seguenti matrici con il metodo di eliminazione di Gauss al variare del parametro  $k, u, a \in \mathbb{R}$

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ \frac{1}{2} & k & 1 & k \\ \frac{1}{2} & -k+1 & 0 & -k \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & u & 0 \\ 1 & u & 2 & u \\ 0 & -u & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 15.** \*\*\* Studia i seguenti sistemi al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$  utilizzando il metodo di Gauss.

$$a) \begin{cases} 2x_1 + kx_2 = 2 \\ kx_1 + 2x_2 = k \\ kx_2 + kx_3 = k \end{cases} \quad b) \begin{cases} 3x + 2y + kz = 11 \\ 2x - 6y - 3z = 0 \\ kx + 4y + 2z = 7 \end{cases}$$

**Esercizio 16.** \*\*\* Studia il seguente sistema al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$  utilizzando il metodo di Gauss.

$$\begin{cases} y + z = a \\ 2x + 3y + 7z = 5 \\ x - 3y - z = -2 \end{cases}$$