Laurea Triennale in Scienze e Tecnologie per i Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2023-2024`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Esame del 3 Settembre 2024
L'Esercizio 6 è solo per coloro che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1. Un'urna 14 palline bianche e 28 nere. Si estraggono 3 palline a caso una alla volta e con reinserimento.
`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza di colori (bianca, bianca, nera).
`D2)` Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte. Trovare la densità discreta di X.
`D3)` Calcolare la probabilità di estrarre tre colori uguali.

Esercizio 2. Si lancia una moneta e la probabilità che esca testa è uguale a $\frac{4}{7}$. Se esce testa si lancia un dado con i numeri $1, 2, 3, 4, 5, 5$; se esce croce si lancia un dado con i numeri $1, 2, 2, 4, 4, 6$.
`D4)` Calcolare la probabilità che sia uscita testa nel lancio di moneta sapendo che è uscito un numero pari nel lancio di dado effettuato.

Esercizio 3. Siano $q, r \in (0, 1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = qr(1-q)^{x_1}(1-r)^{x_2-1} \quad \text{per } x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 1 \text{ interi.}$$

`D5)` Verificare che $P(X_1 = X_2) = \frac{qr(1-q)}{q+r-qr}$.
`D6)` Verificare che $P(X_1 + X_2 = 2) = qr(2 - q - r)$.

Esercizio 4. Sia $b > 0$ fissato arbitrariamente. Sia X una variabile aleatoria continua con densità $f_X(x) = bx^{b-1}1_{(0,1)}(x)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = \sqrt{2X}$.
`D8)` Si verifichi che $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}$ se e solo se $b = 1$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una variabile aleatoria Normale con media 3 e varianza 16.
Calcolare $P(X \geq 4)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 2 e varianza 16.
Dire per quale valore di $z \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 2n}{\sqrt{n}} > z\right) = 1 - \Phi(1/8).$$

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 1-q \\ 0 & 0 & 0 & q^2 & 1-q^2 \end{pmatrix},$$

dove $q \in (0, 1)$.
`D11)` Calcolare $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$, per $i, j \in \{4, 5\}$, dopo aver giustificato l'esistenza del limite.
`D12)` Calcolare i tempi medi di assorbimento nello stato 1 partendo da 2 e da 3, rispettivamente.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
La probabilità di estrarre pallina bianca in ogni estrazione è $p = \frac{14}{14+28} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$.
D1) La probabilità richiesta è $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$.
D2) Si ha $p_X(k) = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{3-k}$ per $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Quindi (lascio sempre il denominatore 27 in modo da verificare che la somma è uguale a 1 in accordo con la teoria)

$$p_X(0) = \frac{8}{27}, \quad p_X(1) = \frac{12}{27}, \quad p_X(2) = \frac{6}{27}, \quad p_X(3) = \frac{1}{27}.$$

D3) Viene chiesta la probabilità di estrarre 3 palline bianche, oppure 3 palline nere. Con riferimento alla variabile aleatoria X, la probabilità richiesta è (si osservi che si ha una unione disgiunta, e ci si riferisce ai valori calcolati nella risposta alla domanda precedente)

$$P(\{X = 0\} \cup \{X = 3\}) = P(X = 0) + P(X = 3) = p_X(0) + p_X(3) = \frac{8}{27} + \frac{1}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 2.
D4) Viene richiesta $P(T|A)$ dove T è l'evento "esce testa nel lancio di moneta" e A è l'evento "esce un numero pari nel lancio del dado". Si usa la formula di Bayes combinata con la formula delle probabilità totali e si ha

$$P(T|A) = \frac{P(A|T)P(T)}{P(A|T)P(T) + P(A|T^c)P(T^c)} = \frac{\frac{2}{6}\frac{4}{7}}{\frac{2}{6}\frac{4}{7} + \frac{5}{6}\frac{3}{7}} = \frac{8/42}{8/42 + 15/42} = \frac{8}{8+15} = \frac{8}{23}.$$

Esercizio 3.
D5) Si ha

$$\begin{aligned} P(X_1 = X_2) &= \sum_{k \geq 1} p_{X_1,X_2}(k,k) = \sum_{k \geq 1} qr(1-q)^k(1-r)^{k-1} = \frac{qr}{1-r} \sum_{k \geq 1} ((1-q)(1-r))^k \\ &= \frac{qr}{1-r} \frac{(1-q)(1-r)}{1-(1-q)(1-r)} = \frac{qr(1-q)}{1-(1-q)(1-r)} = \frac{qr(1-q)}{1-(1-q-r+qr)} = \frac{qr(1-q)}{q+r-qr}. \end{aligned}$$

D6) Si ha

$$P(X_1 + X_2 = 2) = p_{X_1,X_2}(0,2) + p_{X_1,X_2}(1,1) = qr(1-r) + qr(1-q) = qr(2-q-r).$$

Esercizio 4.
D7) Si ha $P(0 \leq Y \leq \sqrt{2}) = 1$ e quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0, \\ (*) & \text{se } 0 < y < \sqrt{2}, \\ 1 & \text{se } y \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Per $y \in (0, \sqrt{2})$ si ha

$$\begin{aligned} (*) &= P(Y \leq y) = P(2X \leq y^2) = P(X \leq y^2/2) \\ &= \int_0^{y^2/2} bx^{b-1}dx = \left[b\frac{x^{b-1+1}}{b-1+1}\right]_{x=0}^{x=y^2/2} = [x^b]_{x=0}^{x=y^2/2} = \left(\frac{y^2}{2}\right)^b = \frac{y^{2b}}{2^b}. \end{aligned}$$

D8) Calcoliamo $\mathbb{E}[X]$, e poi consideriamo l'equazione $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}$ con incognita b. Si ha

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 xbx^{b-1}dx = b\int_0^1 x^b dx = b\left[\frac{x^{b+1}}{b+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{b}{b+1}.$$

Allora per l'equazione si ha

$$\frac{b}{b+1}=\frac{1}{2},\quad \text{da cui segue}\quad 2b=b+1,\quad b=1.$$

Osservazione. Il valore ottenuto non è sorprendente. Infatti per $b=1$ si ha $f_X(x)=1_{(0,1)}(x)$; quindi in questo caso X ha distribuzione uniforme in $(0,1)$, ed è noto che il valore medio è il punto medio dell'intervallo $\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$.

Esercizio 5.
`D9)` Sia $X^*=\frac{X-3}{\sqrt{16}}=\frac{X-3}{4}$ la standardizzata della variabile aleatoria X. Allora si ha

$$P(X\geq 4)=P\left(X^*\geq\frac{4-3}{\sqrt{16}}\right)=P(X^*\geq 1/4)=1-\Phi(1/4).$$

`D10)` Si ha

$$P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-2n}{\sqrt{n}}>z\right)=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-2n}{\sqrt{16}\sqrt{n}}>\frac{z}{\sqrt{16}}\right)$$

e, per il Teorema Limite Centrale, il secondo membro tende a $1-\Phi(z/\sqrt{16})=1-\Phi(z/4)$. Quindi anche il primo membro converge allo stesso limite. Infine il valore di z richiesto è tale che $\frac{z}{4}=\frac{1}{8}$, da cui segue $z=\frac{1}{2}$.

Esercizio 6.
`D11)` Osserviamo che la catena ristretta agli stati $\{4,5\}$ è irriducibile e, per l'Osservazione 5.16, è anche regolare (infatti si ha $p_{44},p_{55}>0$). Quindi si può applicare il Teorema di Markov e si ha

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\pi_j\quad(\text{per ogni } i,j\in\{4,5\}),$$

dove (π_4,π_5) è l'unica distribuzione stazionaria per la catena ristretta a $\{4,5\}$. Inoltre abbiamo il seguente sistema

$$\begin{cases}\pi_4=\pi_4q+\pi_5q^2\\ \pi_5=\pi_4(1-q)+\pi_5(1-q^2).\end{cases}$$

Si sa che il sistema è indeterminato e, con la condizione $\pi_4+\pi_5=1$, ammette un'unica soluzione. Entrambe le equazioni forniscono la condizione $(1-q)\pi_4=q^2\pi_5$, da cui segue $\pi_4=\frac{q^2}{1-q}\pi_5$. Quindi dalla condizione $\pi_4+\pi_5=1$ si ottiene

$$\frac{q^2}{1-q}\pi_5+\pi_5=1,\quad\frac{q^2+1-q}{1-q}\pi_5=1,\quad\pi_5=\frac{1-q}{q^2+1-q},$$

e anche

$$\pi_4=\frac{q^2}{1-q}\frac{1-q}{q^2+1-q}=\frac{q^2}{q^2+1-q}.$$

In conclusione

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\begin{cases}\frac{q^2}{q^2+1-q} & \text{se } j=4\\ \frac{1-q}{q^2+1-q} & \text{se } j=5.\end{cases}$$

`D12)` Consideriamo la catena ristretta agli stati $\{1,2,3\}$. Questa è una classe chiusa, ma non irriducibile; infatti 1 è uno stato assorbente e gli altri due stati sono transitori. In corrispondenza consideriamo il sistema per i valori medi richiesti μ_2 e μ_3 (con riferimento alla catena ristretta a $\{1,2,3\}$), e si ha

$$\begin{cases}\mu_2=1+\mu_2p_{22}+\mu_3p_{23}\\ \mu_3=1+\mu_2p_{32}+\mu_3p_{33},\end{cases}\qquad\begin{cases}\mu_2=1+\frac{\mu_2}{3}+\frac{\mu_3}{3}\\ \mu_3=1+\frac{\mu_2}{2}+\frac{\mu_3}{2},\end{cases}$$

$$\begin{cases}3\mu_2=3+\mu_2+\mu_3\\ 2\mu_3=2+\mu_2+\mu_3,\end{cases}\qquad\begin{cases}2\mu_2=3+\mu_3\\ \mu_3=2+\mu_2.\end{cases}$$

Allora, sostituendo la seconda equazione nella prima, si ottiene $2\mu_2=3+2+\mu_2$, da cui segue (con semplici passaggi) $\mu_2=5$; quindi, sostituendo questo valore ottenuto nella seconda equazione, si ottiene $\mu_3=2+5=7$. In conclusione si ha $\mu_2=5$ e $\mu_3=7$.
Osservazione. Non è sorprendente che si abbia $\mu_3>\mu_2$; infatti, partendo dallo stato 3, la catena deve passare per lo stato 2 prima di essere assorbita nello stato 1.