Serway, pr. 5.84

Un blocco di alluminio di massa $m_1 = 2$ kg e un blocco di rame di massa $m_2 = 6$ kg sono collegati tra loro mediante una corda inestensibile di massa trascurabile che passa su una puleggia di massa trascurabile e priva di attrito. I blocchi poggiano su una superficie di acciaio come mostrato nella figura, con $\theta = 30°$.

a) Se i blocchi vengono lasciati liberi dalla quiete, inizieranno a muoversi?

Se sì, si determinino

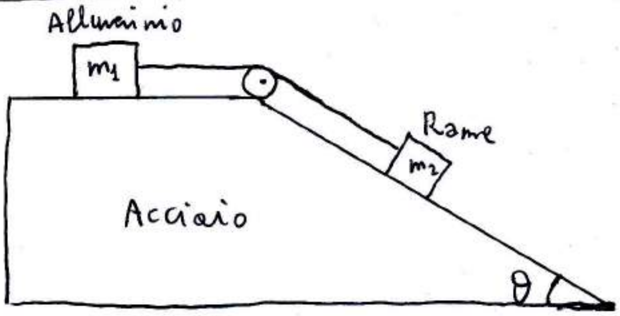
b) le loro accelerazioni e

c) il modulo della tensione della corda.

Se no,

d) si determini la somma dei moduli delle forze di attrito agenti sui blocchi.

	μ_s	μ_d
Alluminio su acciaio	0,61	0,47
Rame su acciaio	0,53	0,36

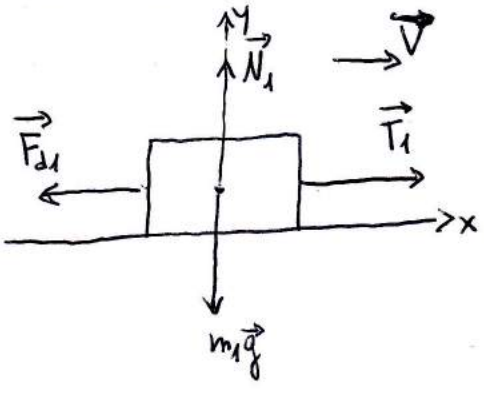


Supponiamo che i blocchi si muovano sotto l'azione della forza peso agente sul blocco di rame posto sul piano inclinato, in presenza di attrito dinamico agente su entrambi i blocchi e della forza esercitata dalla corda su entrambi i blocchi.

Al termine del calcolo, con cui otteniamo il valore comune del modulo dell'accelerazione dei due blocchi e il modulo della tensione della corda, verificheremo se il risultato è accettabile oppure no.

Tracciamo i diagrammi delle forze agenti sui due blocchi durante il moto.

Blocco di alluminio:



$\vec{T_1}$: forza esercitata dalla corda sul blocco di alluminio

$\vec{F_{d1}}$: forza di attrito dinamico esercitata dalla superficie di acciaio sul blocco di alluminio.

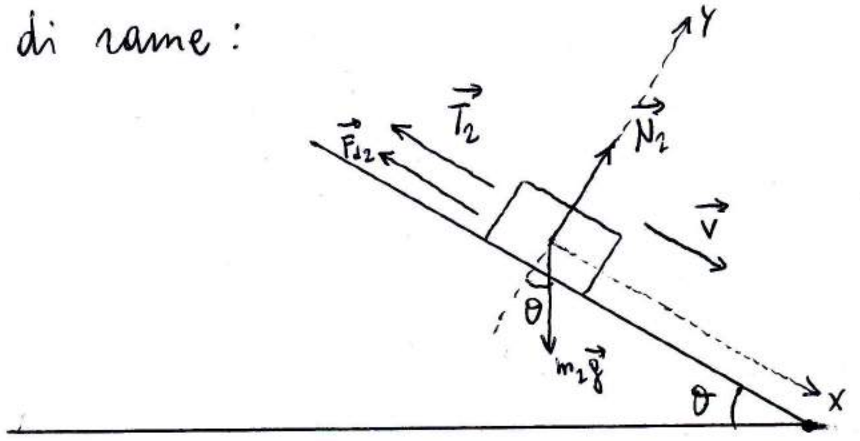
Applicando la seconda legge della dinamica tenendo conto che il moto avviene lungo l'asse x, possiamo scrivere:

$$m_1 a_{1x} = T_1 - \mu_{d1} N_1 \quad , \quad \text{dove} \quad T_1 = |\vec{T_1}| \ \text{e} \ N_1 = |\vec{N_1}|$$

Essendo $N_1 = m_1 g$, otteniamo la prima equazione

$$m_1 a_{1x} = T_1 - \mu_{d1} m_1 g \qquad (\mu_{d1} = 0{,}47)$$

Blocco di rame:



$\vec{T}_2$: forza esercitata dalla corda sul blocco di rame

$\vec{F}_{d2}$: forza di attrito dinamico esercitata dalla superficie di acciaio sul blocco di rame.

Poiché, rispetto al sistema di assi cartesiani introdotto nella figura, risulta

$$(m_2\vec{g})_x = m_2 g \operatorname{sen}\theta; \quad N_{2x} = 0; \quad T_{2x} = -T_2; \quad F_{d2,x} = -F_{d2},$$

$$(m_2\vec{g})_y = -m_2 g \cos\theta; \quad N_{2y} = N_2; \quad T_{2y} = 0; \quad F_{d2,y} = 0$$

avendo posto $T_2 = |\vec{T}_2|$, $F_{d2} = |\vec{F}_{d2}|$, $N_2 = |\vec{N}_2|$,

applicando la seconda legge della dinamica tenendo conto che il moto del blocco di rame si svolge lungo l'asse x, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} m_2 a_{2x} = m_2 g \operatorname{sen}\theta - T_2 - F_{d2} = m_2 g \operatorname{sen}\theta - T_2 - \mu_{d2} N_2 \\ -m_2 g \cos\theta + N_2 = 0 \qquad\qquad (\mu_{d2} = 0,36) \end{cases}$$

Poiché, quindi, $N_2 = m_2 g \cos\theta$, la prima equazione diventa:

$$m_2 a_{2x} = m_2 g \,\text{sen}\,\theta - T_2 - \mu_{d2} m_2 g \cos\theta$$

Tenuto conto che, a causa del fatto che la corda e' inestensibile e di massa trascurabile, risulta $a_{1x} = a_{2x} = a_x$ e $T_1 = T_2 = T$, le due equazioni del moto dei due blocchi diventano:

$$\begin{cases} m_1 a_x = T - \mu_{d1} m_1 g \\ m_2 a_x = m_2 g\,(\text{sen}\,\theta - \mu_{d2} \cos\theta) - T \end{cases}$$

Sommiamo le due equazioni membro a membro:

$$(m_1 + m_2)\, a_x = m_2 g\,(\text{sen}\,\theta - \mu_{d2} \cos\theta) - \mu_{d1} m_1 g$$

da cui otteniamo

$$a_x = \frac{[m_2(\text{sen}\,\theta - \mu_{d2}\cos\theta) - \mu_{d1} m_1]\, g}{m_1 + m_2} = 0{,}232 \ m/s^2$$

Dalla prima equazione ricaviamo T:

$$T = m_1 a_x + \mu_{d1} m_1 g = m_1 (a_x + \mu_{d1} g) =$$

$$= m_1 \left[\frac{(m_2(\text{sen}\,\theta - \mu_{d2}\cos\theta) - \mu_{d1} m_1)\, g}{m_1 + m_2} + \mu_{d1} g \right] =$$

$$= m_1 g \left[\frac{m_2(\operatorname{sen}\theta - \mu_{d2}\cos\theta) - \cancel{\mu_{d1} m_1} + \cancel{\mu_{d1} m_1} + \mu_{d1} m_2}{m_1 + m_2} \right] =$$

$$= \frac{m_1 m_2 g \left[\operatorname{sen}\theta - \mu_{d2}\cos\theta + \mu_{d1}\right)}{m_1 + m_2} = 9{,}686\ N$$

Questo e' il valore del modulo della forza che la corda esercita su ciascuno dei due blocchi.

Verifichiamo se questa forza e' sufficiente per mettere in movimento il blocco di alluminio.

Affinché un blocco fermo poggiato sopra una superficie con attrito possa essere messo in movimento da una forza applicata, e' necessario che il modulo di questa forza risulti maggiore del massimo modulo che può assumere la forza di attrito statico agente sul blocco finché questo resta fermo sulla superficie di appoggio.

Nel caso del blocco di alluminio risulta (con $\mu_{s1} = 0{,}61$):

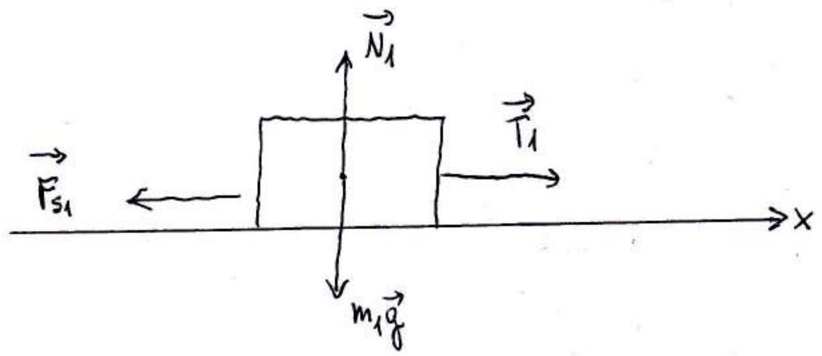
$$F_{s,max,1} = \mu_{s1} N_1 = \mu_{s1} m_1 g = 11{,}968\ N > T \quad \text{(vedi sopra)}$$

Dunque, sulla base di questo, concludiamo che il blocco di alluminio, nelle condizioni poste dal problema, non può muoversi. Di conseguenza non si muove neppure il blocco di rame.

Quindi, seguendo la traccia del problema, a questo punto valutiamo la somma dei moduli delle forze di attrito (statico) agenti sui due blocchi.

Disegnamo i diagrammi delle forze agenti sui due blocchi in condizioni statiche.

Blocco di alluminio:



$\vec{F}_{s1}$: forza di attrito statico esercitata dalla superficie di acciaio sul blocco di alluminio

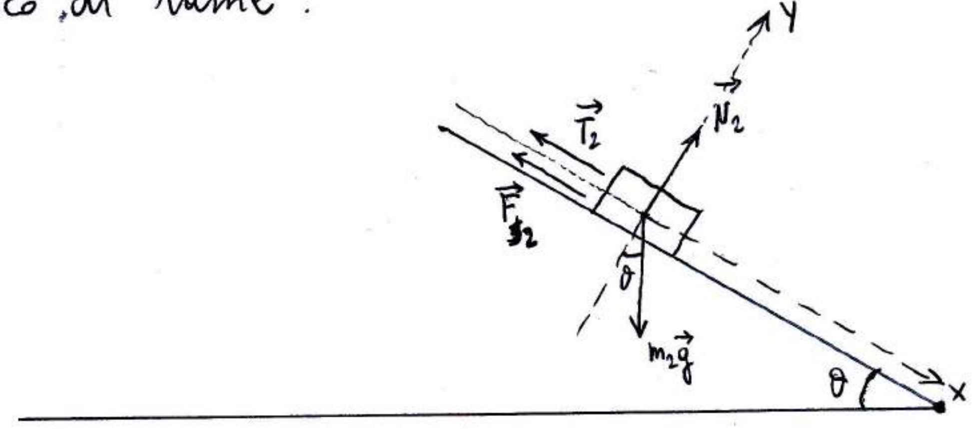
Poiché $\vec{N}_1 + m_1\vec{g} = 0$, la condizione di staticità del blocco richiede che valga la condizione

$$\vec{T}_1 + \vec{F}_{s1} = 0$$

Posto $T_1 = |\vec{T}_1|$ e $F_{s1} = |\vec{F}_{s1}|$, rispetto all'asse x mostrato nella figura vale l'equazione seguente:

$$T_1 - F_{s1} = 0$$

Blocco di rame:



$\vec{F}_{s2}$: forza di attrito statico esercitata dalla superficie di acciaio nel blocco di rame.

La condizione di staticità del blocco di rame è

$$m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{s2} = 0$$

Rispetto al sistema di assi cartesiani ortogonali mostrato nella figura, risulta:

$$(m_2\vec{g})_x = m_2 g \,\text{sen}\,\theta \,; \quad N_{2x} = 0 \,; \quad T_{2x} = -T_2 \,; \quad F_{s2x} = -F_{s2}$$

$$(m_2\vec{g})_y = -m_2 g \cos\theta \,; \quad N_{2y} = N_2 \,; \quad T_{2y} = 0 \,; \quad F_{s2y} = 0$$

Abbiamo posto $|\vec{N}_2| = N_2$, $|\vec{T}_2| = T_2$, $|\vec{F}_{s2}| = F_{s2}$

La condizione di staticità per quanto riguarda le componenti x dei vettori è quindi:

$$(m_2\vec{g})_x + N_{2x} + T_{2x} + F_{s2x} = 0, \quad \text{cioè}$$

$$m_2 g \,\text{sen}\,\theta - T_2 - F_{s2} = 0$$

Dunque, le condizioni di staticità per i due blocchi sono:

$$\begin{cases} T_1 - F_{s1} = 0 \\ m_2 g \operatorname{sen}\theta - T_2 - F_{s2} = 0 \end{cases}$$

con il vincolo $T_1 = T_2 = T$ relativo al modulo della forza che la corda esercita su ciascuno dei due blocchi.

Dunque risulta:

$$\begin{cases} T - F_{s1} = 0 \\ m_2 g \operatorname{sen}\theta - T - F_{s2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$T = F_{s1}$ (dalla 1ª equazione) sostituiamo questa espressione nella 2ª equazione:

$m_2 g \operatorname{sen}\theta - F_{s1} - F_{s2} = 0$, da cui otteniamo la relazione richiesta dal problema:

$$\boxed{F_{s1} + F_{s2} = m_2 g \operatorname{sen}\theta = 29,43 \text{ N}}$$

Valgono ovviamente le seguenti disuguaglianze:

$F_{s1} \leq \mu_{s1} N_1 = \mu_{s1} m_1 g = 11,968 \text{ N}$, e (con $\mu_{s2} = 0,53$)

$F_{s2} \leq \mu_{s2} N_2 = \mu_{s2} m_2 g \cos\theta = 27,016 \text{ N}$, da cui otteniamo

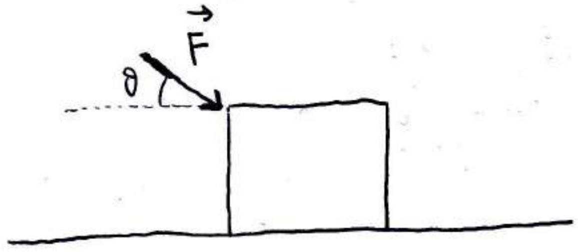
$F_{s1} + F_{s2} \leq 38,984 \text{ N}$, condizione chiaramente soddisfatta dal risultato ottenuto sopra.

Serway, pr. 5.89

Una cassa di peso $P = mg$ viene spinta da una forza $\vec{F}$ come mostrato nella figura.

a) Se il coefficiente di attrito statico è μ_s e se $\vec{F}$ è inclinata di un angolo θ rispetto alla direzione orizzontale, si esprima il minimo valore di $F = |\vec{F}|$ necessario per far muovere la cassa in termini di P, θ e μ_s.

b) Si trovi quale condizione deve soddisfare θ in funzione di μ_s affinché la cassa, qualunque sia il valore di F, non si muova.



a) Affinché la cassa possa restare in equilibrio statico sotto l'azione di tutte le forze indicate, inclusa la forza di attrito statico, deve valere la relazione

$$F_s \leq \mu_s N \,,\quad \text{cioe'}$$

$$F\cos\theta \leq \mu_s (F \operatorname{sen}\theta + mg)$$

Posto $mg = P$, deve quindi risultare

$$F\cos\theta \leq \mu_s (F \operatorname{sen}\theta + P) \,,\quad \text{cioe'}$$

$$F(\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta) \leq \mu_s P$$

Segno del fattore $\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta$;

$$\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta > 0 \quad \text{per} \quad \mu_s \operatorname{sen}\theta < \cos\theta \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta < \frac{1}{\mu_s}$$

Dunque, se $0 < \theta < \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\mu_s}\right)$, risulta $\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta > 0$, per cui la cassa resta in equilibrio se

$$F \leq \frac{\mu_s P}{\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta}$$

Pertanto, il minimo valore di $F = |\vec{F}|$ per cui la cassa può muoversi, se $0 < \theta < \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\mu_s}\right)$, e'

$$F_{min} = \frac{\mu_s P}{\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta}$$

b) Se $\theta \geq \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\mu_s}\right)$, risulta $\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta \leq 0$, per cui

la disuguaglianza $F(\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta) \leq \mu_s P$ e' sempre verificata, per cui in queste condizioni la cassa non potra' muoversi qualunque sia il valore di $F = |\vec{F}|$.

Serway, pr. 5.95

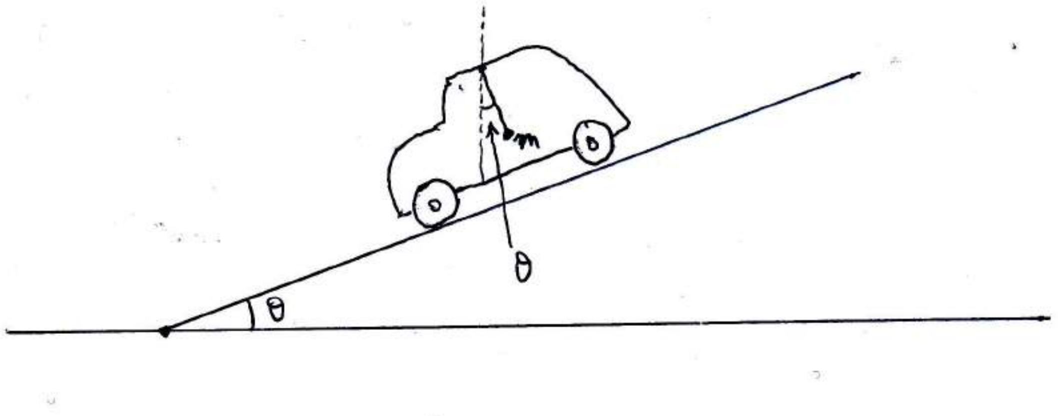
Un' auto accelera lungo una discesa e impiega, partendo da ferma, 6 s per raggiungere la velocita' di 30 m/s. Durante la fase di accelerazione, un giocattolo avente massa $m = 0,1$ kg pende, appeso con una cordicella, dal soffitto dell' auto. L' accelerazione e' tale che la cordicella mantiene una direzione perpendicolare al soffitto dell' auto durante la fase di accelerazione.

Si determinino

a) l' angolo θ di inclinazione della discesa,

e

b) il modulo della tensione della cordicella



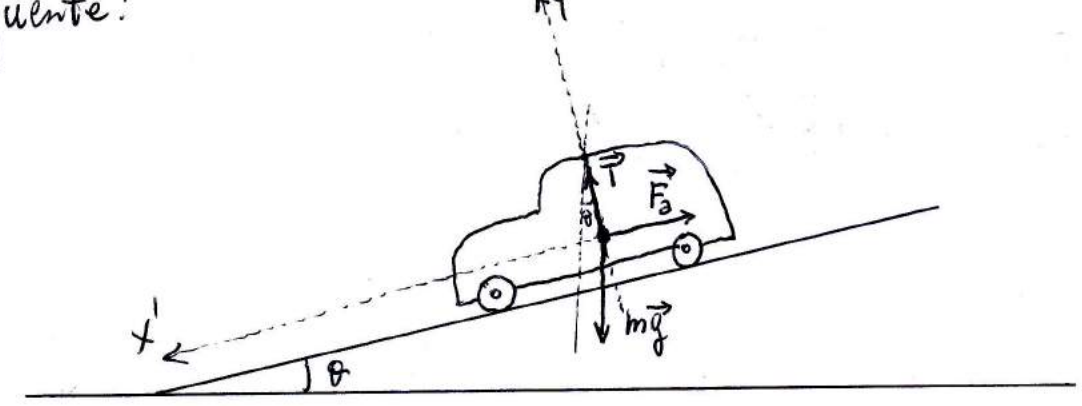
a) L'auto si muove di moto rettilineo uniforme.

Parte da ferma e, dopo un tempo $t_1 = 6\,s$, raggiunge una velocita' istantanea $V_1 = 30\,m/s$.

Risulta $V(t) = a\,t$, per cui: $V_1 = a\,t_1$, da cui ricaviamo

$$a = \frac{V_1}{t_1} = \frac{30\,m/s}{6\,s} = 5\,\frac{m}{s^2}$$

Rispetto a un osservatore solidale con il sistema di riferimento non inerziale dell'auto che accelera, il diagramma delle forze agenti sul giocattolo appeso alla cordicella e' il seguente:



$\vec{T}$: forza esercitata dalla cordicella sul giocattolo

$\vec{F_a}$: forza apparente agente sul giocattolo

Introduciamo, nel sistema di riferimento non inerziale, un sistema di assi cartesiani ortogonali (x', y') come nella figura.

Posto $T = |\vec{T}|$, $F_a = |\vec{F_a}| = ma$ (dove a e' ovviamente il modulo dell'accelerazione dell'auto rispetto a un osservatore inerziale, e $\vec{F_a} = -m\vec{a}$), possiamo scrivere:

$(m\vec{g})_{x'} = mg \operatorname{sen}\theta$, $T_{x'} = 0$, $F_{a,x'} = -ma$

$(m\vec{g})_{y'} = -mg\cos\theta$, $T_{y'} = T$, $F_{a,y'} = 0$

Poiché rispetto all'osservatore non inerziale il giocattolo e' fermo, deve risultare $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F_a} = 0$

In termini delle componenti cartesiane rispetto agli assi (x', y') risulta quindi:

$$\begin{cases} (m\vec{g})_{x'} + T_{x'} + F_{a,x'} = 0 \\ (m\vec{g})_{y'} + T_{y'} + F_{a,y'} = 0 \end{cases} \quad , \text{ cioe'}:$$

$$\begin{cases} mg \operatorname{sen}\theta - ma = 0 \\ -mg\cos\theta + T = 0 \end{cases}$$

Dunque, dalla prima equazione otteniamo:

$\cancel{m}g \operatorname{sen}\theta = \cancel{m}a$, cioe' $\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{g}$, e infine

$$\boxed{\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{a}{g}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{V_1}{g t_1}\right) = 30{,}64^\circ = 0{,}53 \text{ rad}}$$

b) Dalla seconda equazione otteniamo:

$$T = mg\cos\theta = mg\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = mg\sqrt{1-\frac{a^2}{g^2}} = m\sqrt{g^2-a^2}$$

Dunque: $\boxed{T = m\sqrt{g^2-a^2} = (0{,}1\ kg)\sqrt{\left(9{,}81\frac{m}{s^2}\right)^2 - \left(5\frac{m}{s^2}\right)^2} = 0{,}844\ N}$

Serway, pr. 6.44

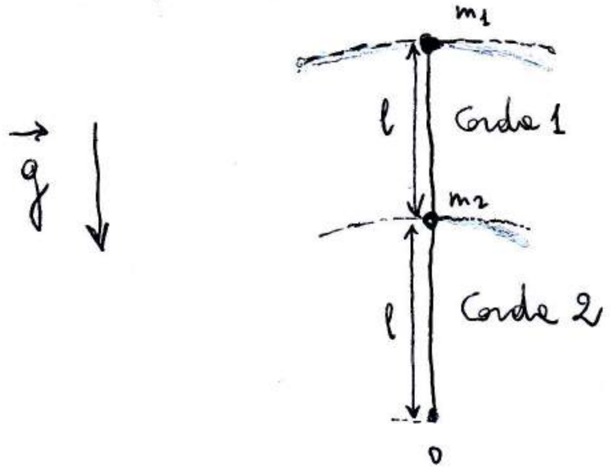
Un corpo di massa $m_1 = 4$ kg è attaccato a un altro corpo di massa $m_2 = 3$ kg mediante una corda, che chiameremo corda 1, di lunghezza $l = 0,5$ m. L'insieme dei due corpi viene fatto ruotare in un piano verticale mediante l'ausilio di una seconda corda, che chiameremo corda 2, anch'essa di lunghezza $l = 0,5$ m. Durante il moto dei due corpi, essi sono sempre allineati con l'estremo fissato della corda 2.

Nella parte più alta della sua traiettoria, m_2 ha una velocità di modulo $v_2 = 4$ m/s.

a) Si calcoli il modulo della tensione della corda 1 in tale situazione.

b) Si calcoli il modulo della tensione della corda 2 in tale situazione.

c) Se aumenta indefinitamente la velocità angolare di rotazione dei due corpi, quale corda si romperà per prima?

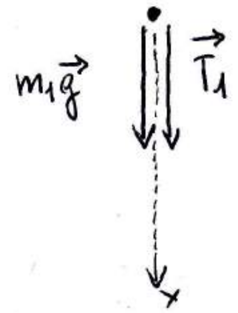


$m_1 = 4\,kg$

$m_2 = 3\,kg$

$l = 0{,}5\,m$

a) Disegnamo il diagramma delle forze agenti sul corpo di massa m_1 nel punto più alto della sua traiettoria:



$\vec{T}_1$: forza esercitata dal tratto di corda 1 sul corpo di massa m_1

Introducendo un asse cartesiano x diretto verticalmente e orientato positivamente verso il centro della traiettoria circolare, applichiamo la seconda legge della dinamica al corpo di massa m_1:

$$m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1$$

Risulta: $a_{1x} = \dfrac{v_1^2}{2l}$, essendo v_1 il modulo della velocità istantanea del corpo di massa m_1 nel punto più alto della sua traiettoria, e dove $2l$ è il raggio della traiettoria circolare del corpo di massa m_1.

Poiché i due corpi si muovono di moto circolare restando costantemente allineati lungo lo stesso raggio della traiettoria, essi hanno, istante per istante, la stessa velocità angolare di rotazione. Allora deve risultare, nel punto più alto della traiettoria: $\omega_1 = \omega_2$, cioè $\dfrac{V_1}{2\ell} = \dfrac{V_2}{\ell}$, cioè

$V_1 = 2V_2$ (V_2 è un dato del problema).

Dunque risulta $a_{1x} = \dfrac{(2V_2)^2}{2\ell} = \dfrac{4V_2^2}{2\ell} = \dfrac{2V_2^2}{\ell}$

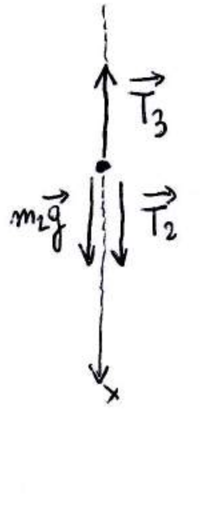
Risulta poi: $(m_1\vec{g})_x = m_1 g$, $T_{1x} = T_1$, essendo $T_1 = |\vec{T}_1|$.

Dunque: $m_1 a_{1x} = \dfrac{2m_1 V_2^2}{\ell}$, e quindi:

$$\frac{2m_1 V_2^2}{\ell} = m_1 g + T_1,$$ da cui ricaviamo

$$\boxed{T_1 = m_1\left(\frac{2V_2^2}{\ell} - g\right) = 216,76\ N}$$

b) Disegnamo il diagramma delle forze agenti sul corpo di massa m_2 nel punto più alto della sua traiettoria:



$\vec{T}_2$: forza esercitata dal tratto di corda 2 sul corpo di massa m_2

$\vec{T}_3$: forza esercitata dal tratto di corda 1 sul corpo di massa m_2

Risulta chiaramente $|\vec{T}_3| = |\vec{T}_1|$.

Introducendo un asse cartesiano x diretto verticalmente e orientato positivamente verso il centro della traiettoria circolare, applichiamo la seconda legge della dinamica al corpo di massa m_2:

$$m_2 \vec{a_2} = m_2 \vec{g} + \vec{T_2} + \vec{T_3}$$

Risulta: $a_{2x} = \frac{V_2^2}{\ell}$, essendo V_2 il modulo della velocità istantanea del corpo di massa m_2 nel punto più alto della sua traiettoria, e dove ℓ è il raggio della traiettoria circolare del corpo di massa m_2.

Risulta poi: $(m_2 \vec{g})_x = m_2 g$; $T_{2x} = T_2$; $T_{3x} = -T_3$,

essendo $T_2 = |\vec{T_2}|$ e $T_3 = |\vec{T_3}| = T_1$ (per quanto detto sopra).

Allora possiamo scrivere:

$$m_2 a_{2x} = m_2 \frac{V_2^2}{\ell} \text{, e quindi:}$$

$$m_2 \frac{V_2^2}{\ell} = m_2 g + T_2 - T_1 \text{, da cui ricaviamo:}$$

$$\boxed{T_2 = m_2\left(\frac{V_2^2}{\ell} - g\right) + T_1 = m_2\left(\frac{V_2^2}{\ell} - g\right) + m_1\left(\frac{2V_2^2}{\ell} - g\right) = (2m_1 + m_2)\frac{V_2^2}{\ell} - (m_1 + m_2)g = 283{,}33\ N}$$

c) Scriviamo le espressioni di T_1 e di T_2 in termini della velocità angolare del sistema nel punto più alto della traiettoria circolare:

$$\omega = \frac{v_2}{\ell} \Rightarrow v_2 = \omega \ell .$$

Allora risulta:

$$T_1 = m_1 \left(2\omega^2 \ell - g \right) \qquad T_2 = \left(2m_1 + m_2 \right) \omega^2 \ell - \left(m_1 + m_2 \right) g$$

Per ω molto grande risulta quindi:

$$T_1 \approx 2 m_1 \omega^2 \ell \quad , \quad T_2 \approx \left(2m_1 + m_2 \right) \omega^2 \ell$$

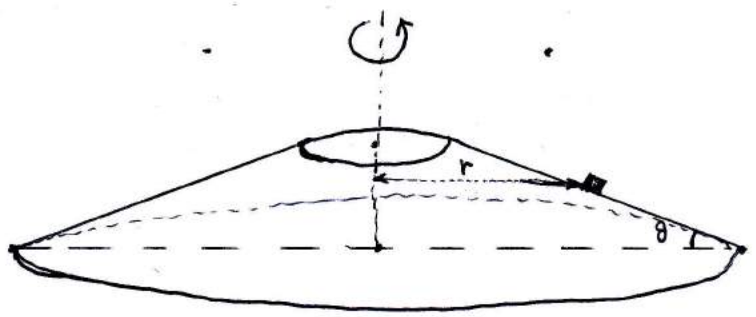
Dunque, asintoticamente risulta $T_2 > T_1$, per cui al crescere della velocità angolare ω di rotazione dei due corpi la corda che potrà rompersi per prima è la corda 2.

Serway, pr. 6.47

a) Un nastro bagagli di un aeroporto può essere schematizzato come una parte della superficie laterale di un grande cono in rotazione attorno al suo asse. Se l'inclinazione del nastro rispetto alla superficie orizzontale è 20° e un bagaglio di massa 30 kg compie un giro completo in 38 s trovandosi a una distanza dall'asse di rotazione di 7,46 m, si calcoli il modulo della forza di attrito statico esercitata dal nastro sul bagaglio.

b) Se la velocità del nastro viene improvvisamente aumentata, il bagaglio scivola un po' più in basso mettendosi in rotazione a una distanza di 7,94 m dall'asse e completando un giro in 34 s. Se in tale situazione il bagaglio è sul punto di scivolare, si calcoli il valore del coefficiente di attrito statico tra il nastro e il bagaglio.

a)



$\theta = 20°$

$m = 30\ kg$

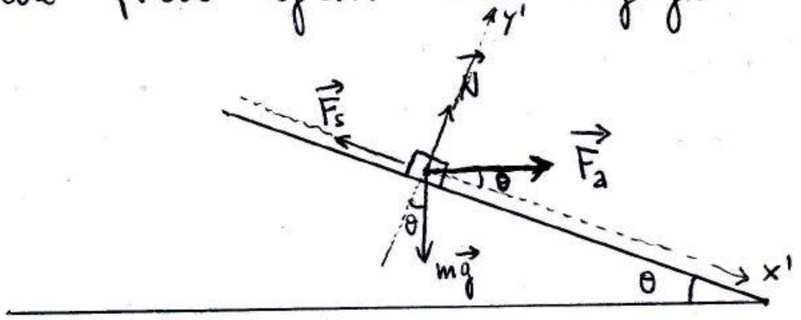
$r_1 = 7{,}46\ m$

$T_1 = 38\ s$

Il modulo della velocità con cui il bagaglio ruota restando in posizione fissa rispetto al nastro bagagli è:

$$V = \frac{2\pi r_1}{T_1} = \frac{2\pi \cdot (7{,}46\ m)}{38\ s} = 1{,}233\ m/s$$

Dal punto di vista di un osservatore non inerziale solidale con il nastro bagagli in rotazione, il diagramma delle forze agenti sul bagaglio è il seguente:



$\vec{N}$: reazione vincolare esercitata dal nastro bagagli sul bagaglio

$\vec{F_s}$: forza di attrito statico esercitata dal piano di appoggio sul bagaglio

$\vec{F_a}$: forza apparente agente sul bagaglio rispetto all'osservatore non inerziale

Poniamo $N = |\vec{N}|$, $F_s = |\vec{F_s}|$, $F_a = |\vec{F_a}|$

Rispetto al sistema di assi cartesiani ortogonali (x', y') mostrato nella figura, le componenti dei vettori sono le seguenti:

$$(m\vec{g})_{x'} = mg \operatorname{sen}\theta \;; \quad N_{x'} = 0 \;; \quad F_{s,x'} = -F_s \;; \quad F_{a,x'} = F_a \cos\theta$$

$$(m\vec{g})_{y'} = -mg\cos\theta \;; \quad N_{y'} = N \;; \quad F_{s,y'} = 0 \;; \quad F_{a,y'} = F_a \operatorname{sen}\theta$$

Rispetto all'osservatore non inerziale solidale al nostro bagagli, il bagaglio si trova in quiete sotto l'azione di tutte le forze agenti su di esso, inclusa la forza apparente.

Dunque deve risultare:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_s} + \vec{F_a} = 0$$

Questa equazione vettoriale equivale alle due equazioni scalari seguenti:

$$\begin{cases} (m\vec{g})_{x'} + N_{x'} + F_{s,x'} + F_{a,x'} = 0 \\ (m\vec{g})_{y'} + N_{y'} + F_{s,y'} + F_{a,y'} = 0 \end{cases} , \quad \text{e quindi:}$$

$$\begin{cases} mg \operatorname{sen}\theta - F_s + F_a\cos\theta = 0 \\ -mg\cos\theta + N + F_a \operatorname{sen}\theta = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo:

$$F_s = mg \operatorname{sen}\theta + F_a \cos\theta$$

o che $\vec{F_a}$, in questo caso specifico, e' la forza apparente
ri fuga, risulta $|\vec{F_a}| = F_a = m\frac{v_1^2}{r_1} = m\frac{1}{r_1}\cdot\left(\frac{2\pi r_1}{T_1}\right)^2 =$

$$= m\frac{1}{\cancel{r_1}}\frac{4\pi^2 r_1^{\cancel{2}}}{T_1^2} = \frac{4\pi^2 m r_1}{T_1^2}$$

---

ne:

$$\boxed{F_s = mg\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{4\pi^2 m r_1}{T_1^2}\cos\theta = m\left(g\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}\cos\theta\right) = 106,409\,N}$$

e' richiesto il calcolo di N, ma in ogni caso e' istruttivo
letare questa analisi del problema in vista del punto b).
la seconda equazione otteniamo:

$$N = mg\cos\theta - F_a\,\mathrm{sen}\,\theta = mg\cos\theta - \frac{4\pi^2 m r_1}{T_1^2}\mathrm{sen}\,\theta =$$

$$= m\left(g\cos\theta - \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}\mathrm{sen}\,\theta\right) = 274,459\ N$$

generale, quindi, analizzando la formula di N, si osserva che
bagaglio puo' restare in contatto con il nostro bagagli soltanto
$N>0$, cioe' se $g\cos\theta - \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}\mathrm{sen}\,\theta > 0$ (cosa che, nel caso
ecifico del problema, e' chiaramente vera).

b) Adesso il modulo della velocità con cui il bagaglio ruota restando in posizione fissa rispetto al nastro bagagli è:

$$V_2 = \frac{2\pi r_2}{T_2} \quad , \quad \text{con} \quad r_2 = 7,94 \text{ m} \quad e \quad T_2 = 34 \text{ s}$$

Ripetendo esattamente il calcolo eseguito al punto a), ma ovviamente usando i nuovi parametri del problema, otteniamo per il modulo della forza di attrito statico agente sul bagaglio:

$$F_{s_2} = m\left(g \operatorname{sen}\theta + \frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2}\cos\theta\right) = 108,301 \text{ N}$$

E per il modulo della reazione vincolare del piano di appoggio otteniamo:

$$N_2 = m\left(g\cos\theta - \frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2}\operatorname{sen}\theta\right) = 273,769 \text{ N}$$

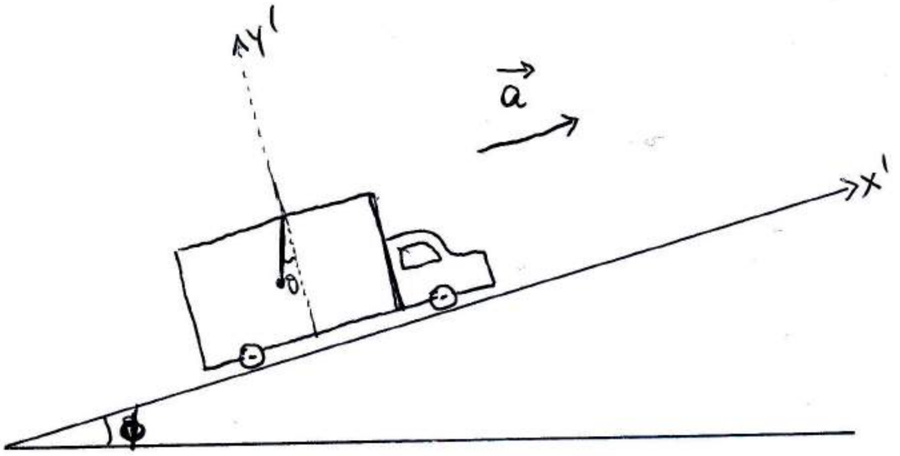
Se il bagaglio si trova sul punto di scivolare, ciò significa che risulta $F_{s2} = F_{s2,max} = \mu_s N_2$, per cui vale l'uguaglianza

$\mu_s N_2 = F_{s2}$, da cui ricaviamo:

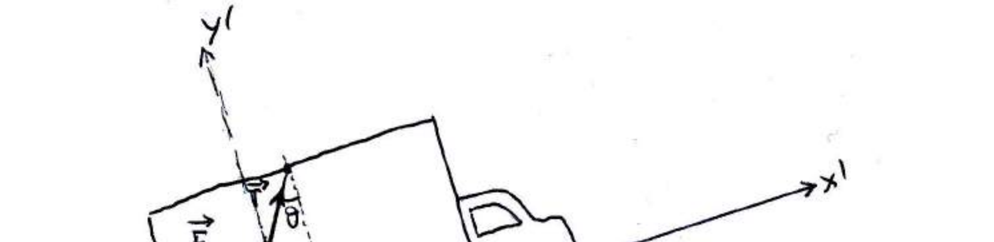
$$\boxed{\mu_s = \frac{F_{s2}}{N_2} = \frac{g \operatorname{sen}\theta + \frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2}\cos\theta}{g\cos\theta - \frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2}\operatorname{sen}\theta} = 0,396}$$

Serway; pr. 6.51

Un camioncino si sta muovendo con accelerazione costante $\vec{a}$ lungo un pendio che forma un angolo ϕ con la direzione orizzontale, e una piccola sferetta di massa m e' appesa al soffitto del camioncino tramite una corda inestensibile di massa trascurabile. Se il filo forma un angolo costante θ con la direzione perpendicolare al soffitto, quanto vale $|\vec{a}|$?



a) Tracciamo il diagramma delle forze agenti sulla sferetta dal punto di vista di un osservatore non inerziale solidale con il camioncino che sta accelerando in salita.



$\vec{T}$: forza esercitata dalla corda sulla sferetta.

$\vec{F}_a$: forza apparente agente sulla sferetta

Calcoliamo le componenti cartesiane delle forze agenti sulla sferetta rispetto al sistema di assi cartesiani ortogonali (x', y') introdotto nella figura sopra:

$$(m\vec{g})_{x'} = -mg \,\text{sen}\,\phi \,; \quad T_{x'} = T \,\text{sen}\,\theta \,; \quad F_{a,x'} = -F_a$$

$$(m\vec{g})_{y'} = -mg \cos\phi \,; \quad T_{y'} = T\cos\theta \,; \quad F_{a,y'} = 0$$

dove abbiamo posto $T = |\vec{T}|$, $F_a = |\vec{F}_a|$

Rispetto a un osservatore solidale con il camioncino, la sferetta si trova in quiete sotto l'azione di tutte le forze applicate, inclusa la forza apparente $\vec{F}_a = -m\vec{a}$.

Dunque, deve valere l'equazione vettoriale seguente:

$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_a = 0$, che equivale alle due equazioni scalari seguenti:

$$\begin{cases} (m\vec{g})_{x'} + T_{x'} + F_{a,x'} = 0 \\ (m\vec{g})_{y'} + T_{y'} + F_{a,y'} = 0 \end{cases}$$, e quindi

$$\begin{cases} -mg\,\text{sen}\,\phi + T\,\text{sen}\,\theta - F_a = 0 \\ -mg\cos\phi + T\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Risulta, ovviamente, $F_a = ma$, dove $a = |\vec{a}|$.

Moltiplichiamo la prima equazione per $\cos\theta$ e la seconda equazione per $\text{sen}\,\theta$ (lecito, essendo $0 < \theta < 90°$):

$$\begin{cases} -mg\,\text{sen}\,\phi\cos\theta + T\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - ma\cos\theta = 0 \\ -mg\cos\phi\,\text{sen}\,\theta + T\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = 0 \end{cases}$$

e quindi sottraiamo membro a membro le due equazioni ottenute:

$-\cancel{m}g\,\text{sen}\,\phi\cos\theta - \cancel{m}a\cos\theta + \cancel{m}g\cos\phi\,\text{sen}\,\theta = 0$, e quindi:

$$a \cos\theta = g\,(\cos\phi \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\phi \cos\theta)$$

$a \cos\theta = g \operatorname{sen}(\theta - \phi)$, da cui otteniamo:

$$\boxed{a = \frac{g \operatorname{sen}(\theta-\phi)}{\cos\theta} = g\,(\operatorname{tg}\theta \cos\phi - \operatorname{sen}\phi)}$$

Osserviamo che se l'angolo θ risulta uguale all'angolo ϕ, questa situazione puo' verificarsi solo se $a = 0$, cioe' solo se il camioncino si sta muovendo in salita a velocita' costante lungo il tratto di strada inclinato.

Serway, pr. 6.52

Il pilota di un aereo esegue un giro della morte nel piano verticale. Il modulo della velocita' dell'aereo e' 300 mi/h nel punto piu' alto della traiettoria circolare, e 450 mi/h nel punto piu' basso. Il raggio della traiettoria e' 1200 piedi.

a) Se la massa del pilota e' 160 lb, quanto vale il suo peso apparente nel punto piu' basso della traiettoria?

b) Quanto vale il suo peso apparente nel punto piu' alto della traiettoria?

c) Si dica in quale modo il peso apparente del pilota potrebbe essere reso nullo cambiando il raggio e il modulo della velocita' dell'aereo.

Nota: il peso apparente del pilota e' il modulo della forza normale esercitata dal sedile dell'aereo sul corpo del pilota.

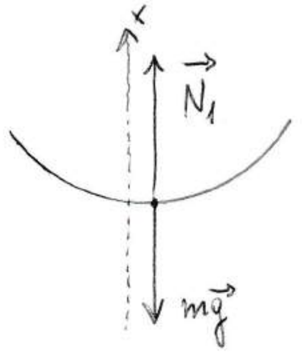
Conversioni di unita' di misura:

$1 \text{ mi} = 1{,}609 \times 10^3 \text{ m}$ $\qquad$ $1 \text{ h} = 3{,}6 \times 10^3 \text{ s}$

$1 \text{ piede} = 1 \text{ ft} = 0{,}3048 \text{ m}$

$1 \text{ lb} = 0{,}453592 \text{ Kg}$

a)



Disegnamo il diagramma delle forze agenti sul pilota dell'aereo nel punto più basso della traiettoria

$\vec{N}_1$: forza esercitata dal sedile dell'aereo sul pilota.

$|\vec{N}_1| = N_1$ è quindi, per definizione, il peso apparente del pilota in questa posizione della traiettoria dell'aereo.

Introducendo un asse cartesiano x diretto verticalmente e orientato positivamente verso il centro della traiettoria circolare, deve valere l'equazione del moto (2^a legge della dinamica)

$$m\vec{a}_1 = m\vec{g} + \vec{N}_1$$

Usando le componenti cartesiane lungo l'asse x otteniamo:

$$m a_{1x} = (m\vec{g})_x + N_{1x}, \quad \text{con} \quad N_{1x} = N_1; \ (m\vec{g})_x = -mg,$$

$a_{1x} = \dfrac{V_1^2}{R}$, dove V_1 è il modulo della velocità dell'aereo nel punto più basso della traiettoria e R è il raggio della traiettoria circolare. Allora possiamo scrivere:

$m\dfrac{V_1^2}{R} = -mg + N_1$, da cui otteniamo:

$$N_1 = m\left(\frac{V_1^2}{R} + g\right)$$

Dati del problema:

$$m = 160\ lb = 160 \cdot 0,453592\ kg = 72,57472\ kg$$

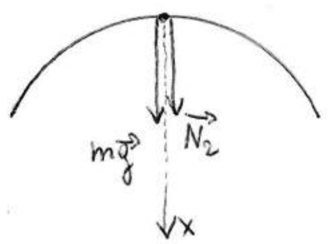
$$V_1 = 450\ \frac{mi}{h} = 450 \cdot \frac{1,609 \times 10^3\ m}{3,6 \times 10^3\ s} = 201,125\ m/s$$

$$R = 1200\ ft = 1200 \cdot 0,3048\ m = 365,76\ m$$

Allora, il peso apparente del pilota nel punto più basso della traiettoria dell'aereo è:

$$\boxed{N_1 = m\left(\frac{V_1^2}{R} + g\right) = 0,8738 \times 10^4\ N}$$

b)



Disegnamo il diagramma delle forze agenti sul pilota dell'aereo nel punto più alto della traiettoria.

$\vec{N_2}$: forza esercitata dal sedile dell'aereo sul pilota.

$N_2 = |\vec{N_2}|$ è il peso apparente del pilota in questa posizione della traiettoria dell'aereo.

Introducendo un asse cartesiano x diretto verticalmente e orientato positivamente verso il centro della traiettoria circolare, risulta: $(m\vec{g})_x = mg$; $N_{2,x} = N_2$ (se il verso di $\vec{N}_2$ è quello rappresentato nella figura: ipotizziamo che sia così, in partenza; se al termine del calcolo risulterà $N_2 > 0$, allora l'ipotesi di partenza sarà stata confermata, altrimenti dovremo ripetere il calcolo disegnando $\vec{N}_2$ orientato verso l'alto... vedremo).

Applicando la seconda legge della dinamica al pilota dell'aereo nell'istante in cui egli si trova nel punto più alto della traiettoria, possiamo scrivere:

$$m\vec{a}_2 = m\vec{g} + \vec{N}_2$$

Per quanto riguarda le componenti cartesiane lungo l'asse x, risulta quindi:

$$m a_{2,x} = (m\vec{g})_x + N_{2,x} \quad , \quad \text{cioè, essendo } a_{2,x} = \frac{V_2^2}{R}:$$

$$m\frac{V_2^2}{R} = mg + N_2, \text{ da cui otteniamo:}$$

$$N_2 = m\frac{V_2^2}{R} - mg = m\left(\frac{V_2^2}{R} - g\right)$$

Allora, il peso apparente del pilota nel punto più alto della traiettoria dell'aereo è:

$$\boxed{N_2 = m\left(\frac{V_2^2}{R} - g\right) = 2,8553 \times 10^3 N} \quad (>0, \text{ quindi ok!})$$

c) Dai risultati dei punti a) e b) si vede chiaramente che il peso apparente del pilota nel punto piu' basso della traiettoria dell'aereo e' sempre positivo (per l'esattezza, e' sempre maggiore di mg); nel punto piu' alto della traiettoria dell'aereo, invece, il peso apparente del pilota risulta nullo se vale la relazione $\frac{V_2^2}{R} = g$, come si vede subito ponendo la condizione $N_2 = 0$.

N.B. Nel calcolo svolto al termine del punto b) risulta

$$V_2 = 300 \text{ mi/h} = 300 \cdot \frac{1,609 \times 10^3 \text{ m}}{3,6 \times 10^3 \text{ s}} = 134,083 \text{ m/s}$$

Serway, pr. 6.54

Un disco di massa m_1 è legato a una corda e posto in rotazione su un piano orizzontale con attrito trascurabile. Il raggio della traiettoria circolare del disco è R e all'altro estremo la corda, una volta passata attraverso un piccolo buco nel tavolo, è legata a un contrappeso di massa m_2. Se il contrappeso è in equilibrio mentre il disco sta ruotando, si determinino:

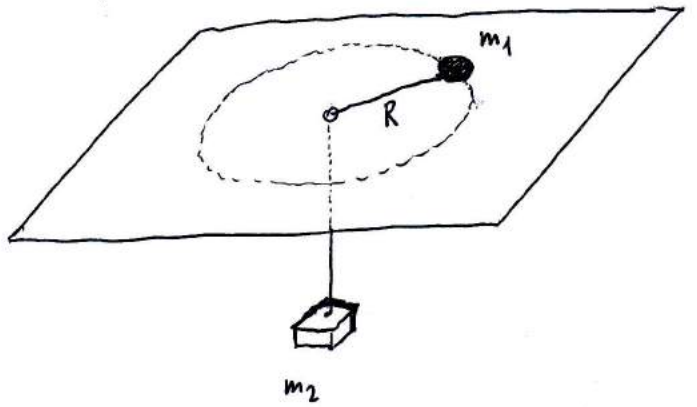
a) il modulo della tensione della corda,

b) il modulo della forza radiale agente sul disco,

c) il modulo della velocità del disco.

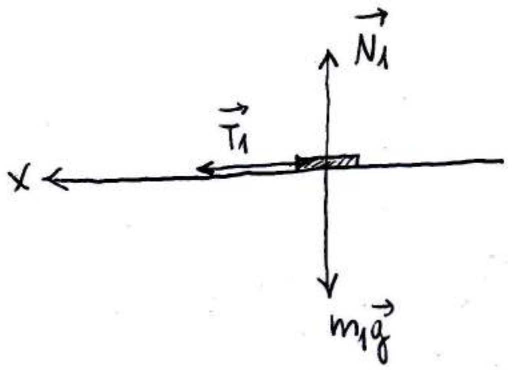
d) Si descriva qualitativamente il moto del disco se un piccolo carico aggiuntivo viene posto sul contrappeso di massa m_2.

e) Si descriva qualitativamente il moto del disco se invece viene rimossa una parte del carico del contrappeso.



Disegnamo i diagrammi delle forze agenti su ciascuno dei due corpi;

• <u>Disco sul tavolo</u>, vista sul piano verticale:



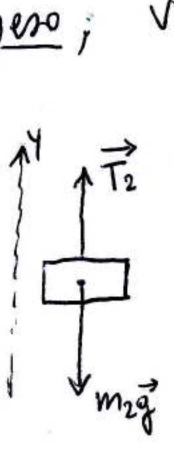
$\vec{N}_1$: forza esercitata dalla superficie del tavolo sul disco

$\vec{T}_1$: forza esercitata dalla corda sul disco

Risulta, dato che il disco e' vincolato a muoversi sopra il piano orizzontale: $\vec{N}_1 + m_1\vec{g} = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g$,

se $N_1 = |\vec{N}_1|$

• <u>Contrappeso</u>, vista sul piano verticale:



$\vec{T}_2$: forza esercitata dalla corda sul contrappeso

Per le note proprieta' delle corde di massa trascurabile, risulta $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$

Applichiamo la seconda legge della dinamica al disco in moto circolare uniforme sul tavolo orizzontale:

$$m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 = \vec{T}_1 \quad (\text{dato che } m_1 \vec{g} + \vec{N}_1 = 0)$$

Se indichiamo con v_1 il modulo della velocità istantanea costante del disco durante il suo moto, risulta, scegliendo un asse cartesiano x orizzontale orientato come nella figura:

$$m_1 a_{1x} = T_{1x}$$

Posto $T = |\vec{T}_1|$, otteniamo quindi:

$$m_1 \frac{v_1^2}{R} = T$$

Applichiamo la seconda legge della dinamica al contrappeso. Dato che il raggio della traiettoria del disco sul tavolo è costante e la corda è inestensibile, il contrappeso resta fermo mentre il disco ruota sul tavolo. Allora la risultante delle forze agenti sul contrappeso deve essere nulla:

$$m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 = 0$$

Introducendo un asse cartesiano y verticale, orientato positivamente verso l'alto, abbiamo:

$(m_2 \vec{g})_y = -m_2 g$, $\quad T_{2,y} = |\vec{T}_2| = T$, per cui per le componenti lungo l'asse y delle forze agenti sul contrappeso deve risultare:

$$-m_2 g + T = 0, \quad \text{cioè} \quad m_2 g = T$$

Pertanto possiamo iniziare a rispondere alle domande del problema.

a) il modulo della tensione della corda è

$$\boxed{T = m_2 g}$$

b) il modulo della forza radiale agente sul disco è ancora

$$\boxed{T = m_2 g}$$

c) Dalle uguaglianze $T = m_2 g$ e $T = m_1 \frac{V_1^2}{R}$, otteniamo:

$$m_1 \frac{V_1^2}{R} = m_2 g \text{ , da cui ricaviamo } V_1^2 = \frac{m_2 g R}{m_1} \text{ ,}$$

e infine $\boxed{V_1 = \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \cdot g R}}$

d) Se un piccolo carico aggiuntivo viene posto sul contrappeso di massa m_2, il "nuovo" contrappeso di massa $m_2' > m_2$ si sposterà verso il basso. Supponendo che questo spostamento avvenga molto lentamente, il disco sul tavolo orizzontale di fatto continuerà a muoversi lungo una traiettoria circolare con raggio lentamente variabile (lentamente decrescente in questo caso). Per capire, in mancanza di concetti ancora non spiegati a questo punto del corso, come varia il modulo della velocità del disco in rotazione sul tavolo al variare del raggio della sua traiettoria, procediamo nel modo seguente.

Un punto sul piano può essere caratterizzato, oltre che dal vettore posizione $\vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j}$, anche dallo stesso vettore scritto utilizzando coordinate polari piane. Risulta (*)

$\vec{r} = r \hat{u}_r$, dove r e' semplicemente il modulo del vettore posizione $\vec{r}$, e $\hat{u}_r$ e' il "versore radiale", cioe' il versore dell' asse che parte dall' origine del sistema di coordinate ed e' diretto verso il punto individuato da $\vec{r}$.

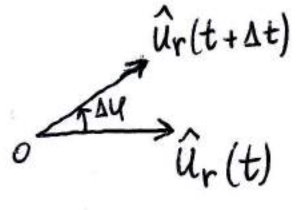
Il vettore velocita' istantanea si ottiene derivando rispetto al tempo il vettore $\vec{r}$. Per le proprieta' della derivata di un prodotto di funzioni, risulta quindi:

$$\left(\vec{r}(t)\right)' = \left(r(t)\right)' \hat{u}_r + r(t) \cdot \left(\hat{u}_r\right)'$$

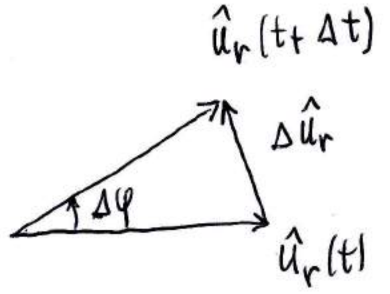
[(*) meglio scrivere $\vec{r}(t) = r(t)\, \hat{u}_r(t)$]

Il primo addendo non dovrebbe creare problemi nella sua comprensione, ma che cosa e' il secondo addendo??

Quando il vettore posizione $\vec{r}(t)$ varia nel tempo, può tra le altre cose ruotare "facendo perno" sull' origine. Dunque, anche il versore $\hat{u}_r$ può variare la sua direzione nel tempo. Consideriamo il caso in cui, nell' intervallo di tempo Δt, il versore $\hat{u}_r$ ruoti di un angolo $\Delta\varphi$ in senso antiorario sul piano. Dunque, graficamente, la situazione e' la seguente:



Calcoliamo la variazione del versore $\hat{u}_r(t)$ nell'intervallo di tempo Δt:



Dalla regola ovvia

$$\Delta\hat{u}_r = \hat{u}_r(t+\Delta t) - \hat{u}_r(t),$$

si vede che il vettore $\Delta\hat{u}_r$ e' rappresentabile graficamente come sopra.

Al tendere di Δt a zero, la direzione di $\Delta\hat{u}_r$ tende a diventare perpendicolare a quella di $\hat{u}_r(t)$, e il modulo di $\Delta\hat{u}_r$ (sempre in questo limite!!) tende al valore della lunghezza dell'arco di circonferenza di raggio 1 (essendo $|\hat{u}_r(t)| = |\hat{u}_r(t+\Delta t)| = 1$) sotteso dall'angolo $\Delta\varphi$.

Se $\Delta\varphi$ e' misurato in radianti, risulta quindi:

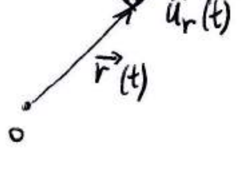
$$|\Delta\hat{u}_r| \simeq |\Delta\varphi|$$

Pertanto, risulta $\left|\frac{\Delta\hat{u}_r}{\Delta t}\right| \simeq \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|$, e nel limite $\Delta t \to 0$

otteniamo quindi, tenendo conto dei segni effettivi:

$$(\hat{u}_r(t))' = (\varphi(t))'\,\hat{u}_\varphi(t),$$ dove $\hat{u}_\varphi(t)$ e' il versore ortogonale a $\hat{u}_r(t)$, ruotato di $90°$ in senso antiorario rispetto a $\hat{u}_r(t)$.

Poiché $(\varphi(t))'$ e' la velocita' angolare istantanea di rotazione del versore $\hat{u}_r(t)$, possiamo scrivere:



$(\vec{r}(t))' = (r(t))'\,\hat{u}_r(t) + r(t)\,\omega(t)\,\hat{u}_\varphi(t)$, dove abbiamo posto

$(\varphi(t))' = \omega(t)$

A questo punto possiamo ottenere l'espressione di $\vec{a}(t) = (\vec{r}(t))''$ derivando ancora rispetto al tempo l'espressione vettoriale appena ricavata. Con un ragionamento simile a quello svolto in precedenza, si dimostra che la derivata rispetto al tempo del versore $\hat{u}_\varphi(t)$ è la seguente:

$$(\hat{u}_\varphi(t))' = -\,\omega(t)\,\hat{u}_r(t)$$

Dunque possiamo scrivere l'espressione dell'accelerazione vettoriale nel moto su un piano in coordinate polari piane:

$$\vec{a}(t) = (\vec{r}(t))'' = (r(t))''\,\hat{u}_r(t) + (r(t))'\,(\hat{u}_r(t))' + r'(t)\,\omega(t)\,\hat{u}_\varphi(t) +$$

$$+\, r(t)\,(\omega(t))'\,\hat{u}_\varphi(t) + r(t)\,\omega(t)\,(\hat{u}_\varphi(t))' =$$

$$= (r(t))''\,\hat{u}_r(t) + \omega(t)(r(t))'\,\hat{u}_\varphi(t) + \omega(t)(r(t))'\,\hat{u}_\varphi(t) +$$

$$+\, r(t)\,(\omega(t))'\,\hat{u}_\varphi(t) - r(t)\,(\omega(t))^2\,\hat{u}_r(t) =$$

$$= \left[(r(t))'' - r(t)\,(\omega(t))^2\right]\hat{u}_r(t) + \left[2\,(r(t))'\,\omega(t) + r(t)\,(\omega(t))'\right]\hat{u}_\varphi(t)$$

Adesso, osserviamo che vale l'identità seguente:

$$2\,(r(t))'\,\omega(t) + r(t)\,(\omega(t))' = \frac{1}{r(t)}\left[(r(t))^2\,\omega(t)\right]' \quad \text{(verificare)}$$

In definitiva, quindi, possiamo scrivere:

$$\vec{a}(t) = \left[\left(r(t)\right)'' - r(t)\left(\omega(t)\right)^2 \right] \hat{u}_r(t) + \frac{1}{r(t)} \left[\left(r(t)\right)^2 \omega(t) \right]' \hat{u}_\varphi(t)$$

Nel caso del problema che stiamo studiando, l'unica forza che agisce sul disco in moto sul tavolo orizzontale e' diretta lungo la direzione radiale, per cui la componente della forza risultante agente sul disco lungo la direzione tangente alla traiettoria e' nulla, se la traiettoria si può considerare circolare anche mentre il suo raggio sta cambiando (questo e' praticamente vero se il raggio varia molto lentamente nel tempo, cosa che ragionevolmente accade se la variazione della massa del contrappeso e' molto piccola).

Dunque, a ogni istante, lungo la direzione tangente alla traiettoria circolare, <u>la componente dell'accelerazione del disco lungo questa direzione deve essere nulla</u>. Poiché questa direzione e' individuata a ogni istante dal versore $\hat{u}_\varphi(t)$, quello che accade mentre il raggio della traiettoria del disco varia molto lentamente e' che vale l'equazione

$\frac{1}{r(t)} \left[\left(r(t)\right)^2 \omega(t) \right]' = 0$ che, poiché $r(t) > 0$ sempre, permette di scrivere alla condizione $\left(r(t)\right)^2 \omega(t) = \text{costante}$, che vale esattamente quando la componente tangenziale di $\vec{a}(t)$ e' nulla, come nel caso in questione.

Dunque, in termini del modulo della velocità istantanea, che è legato ai valori della velocità angolare istantanea $\omega(t)$ e al raggio della traiettoria $r(t)$ dalla relazione (vera solo se $r(t)$ sta variando molto lentamente nel tempo, cioè se la traiettoria si mantiene quasi circolare): $V(t) = \omega(t) \cdot r(t)$, la condizione che sfruttiamo

è la seguente: $\boxed{r(t)\, V(t) = \text{costante}}$

Nella situazione di partenza risulta:

$r_i = R$, $V_i = V_1$, per cui, quando r inizia a variare lentamente nel tempo deve sempre risultare:

$$r(t)\, v(t) = R\, V_1$$

Dunque: $$V(t) = \frac{R\, V_1}{r(t)}$$

Al decrescere di $r(t)$, $V(t)$ aumenta secondo la legge appena scritta.

e) Se il contrappeso viene alleggerito di una piccola frazione della sua massa, il raggio della traiettoria del disco in moto sul tavolo aumenterà lentamente nel tempo, e possiamo ripetere esattamente le stesse considerazioni fatte nel punto precedente.

Dalla legge $v(t) = \dfrac{R\, V_1}{r(t)}$, concludiamo quindi che, se $r(t)$ cresce lentamente, $v(t)$ diminuirà lentamente secondo la legge appena scritta.

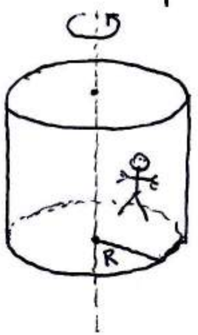
Serway, pr. 6.59

Un' attrazione di un parco di divertimenti è costituita da un grande cilindro disposto verticalmente e posto in rotazione attorno al suo asse in modo sufficientemente rapido affinché ogni persona all' interno rimanga attaccata alla parete laterale una volta che il pavimento venga rimosso. Il coefficiente di attrito statico tra una persona e la parete sia μ_s, mentre sia R il raggio del cilindro.

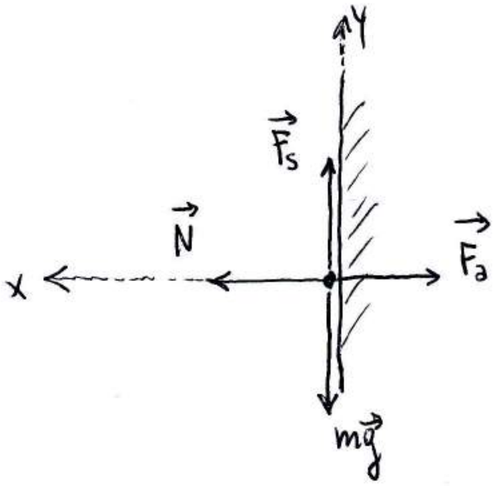
a) Si calcoli l' espressione del massimo valore che può avere il periodo di rotazione del cilindro affinché una persona possa restare attaccata alla parete laterale senza cadere.

b) Se la frequenza di rotazione del cilindro viene leggermente aumentata, come cambia il modulo di ognuna delle forze agenti su una persona? Come cambia il moto di una persona?

c) Se la frequenza di rotazione viene leggermente diminuita, come cambia il modulo di ognuna delle forze agenti su una persona? Come cambia il moto di una persona?



a) Studiamo il problema dal punto di vista di un osservatore solidale con il cilindro rotante (quindi un osservatore non inerziale). Dal punto di vista di questo osservatore, il diagramma delle forze agenti su una persona attaccata alla parete interna del cilindro in rotazione, in assenza del pavimento, è il seguente:



Il centro del cilindro è verso sinistra in questo schema.
$\vec{N}$: reazione vincolare della parete del cilindro

$\vec{F}_s$: forza di attrito statico esercitata dalla parete interna del cilindro su una persona

$\vec{F}_a$: forza apparente (centrifuga) agente su una persona rispetto a un osservatore solidale con il cilindro rotante.

Risulta: $\quad |\vec{F}_a| = m|\vec{a}_c| = m\omega^2 R = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$,

dove ω è la velocità angolare di rotazione del cilindro e T è il periodo di rotazione del cilindro.

Rispetto all'osservatore non inerziale, la persona si trova in quiete sotto l'azione di tutte le forze agenti, inclusa la forza apparente.

Posto: $N = |\vec{N}|$, $F_s = |\vec{F_s}|$, $F_a = |\vec{F_a}|$, deve quindi risultare:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_s} + \vec{F_a} = 0.$$

Introdotto un sistema di assi cartesiani ortogonali (x, y) come mostrato in figura, le componenti cartesiane delle forze agenti sono:

$$(m\vec{g})_x = 0; \quad N_x = N; \quad F_{s,x} = 0; \quad F_{a,x} = -F_a$$

$$(m\vec{g})_y = -mg; \quad N_y = 0; \quad F_{s,y} = F_s; \quad F_{a,y} = 0$$

Dunque, l'equazione vettoriale scritta sopra equivale alle due seguenti equazioni scalari:

$$\begin{cases} (m\vec{g})_x + N_x + F_{s,x} + F_{a,x} = 0 \\ (m\vec{g})_y + N_y + F_{s,y} + F_{a,y} = 0 \end{cases}$$

, cioè:

$$\begin{cases} N - F_a = 0 \\ -mg + F_s = 0 \end{cases}$$

Dunque, otteniamo:

$$\begin{cases} N = F_a = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R \\ F_s = mg \end{cases}$$

Affinché l'attrito statico tra la persona e la parete interna del cilindro possa mantenersi, deve risultare

$$F_s \leq \mu_s N$$

Dunque deve risultare

$$\cancel{m}g \leq \mu_s \cancel{m} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R \quad , \text{ cioe'}$$

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \leq \frac{\mu_s R}{g} \quad , \text{ cioe'} \quad \frac{T}{2\pi} \leq \sqrt{\frac{\mu_s R}{g}} \quad , \text{ e infine}$$

$$T \leq 2\pi \sqrt{\frac{\mu_s R}{g}}$$

Pertanto, il massimo valore che può avere il periodo di rotazione del cilindro affinché una persona possa restare attaccata alla parete interna senza cadere e':

$$\boxed{T_{max} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu_s R}{g}}}$$

b) Se la frequenza di rotazione $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ del cilindro viene aumentata leggermente, il modulo della reazione vincolare della parete interna aumenta, essendo $N = m(2\pi f)^2 R$, quindi aumenta anche $F_{s,max} = \mu_s N$, per cui il valore di $F_s = mg$ continuera' a rispettare la condizione $F_s \leq F_{s,max}$, e la persona continuera' a restare attaccata alla parete.
Allo stesso tempo aumenta il modulo della forza apparente $\vec{F_a}$, che bilancia a ogni istante la forza $\vec{N}$.

c) Se la frequenza di rotazione viene leggermente diminuita, allora il modulo della reazione vincolare della parete interna decresce, essendo $N = m(2\pi f)^2 R$, quindi decresce anche $F_{s,max} = \mu_s N$.

Se $F_{s,max}$ decresce fino al punto che risulti $F_s = mg > F_{s,max}$, la persona si staccherà dalla parete e cadrà.

Questo accade quando $\cancel{m}g > \mu_s \cancel{m}(2\pi f)^2 R$, cioè per

$$(2\pi f)^2 < \frac{g}{\mu_s R} \Rightarrow 2\pi f < \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}} \text{, e quindi per}$$

$$f < \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\mu_s R}}$$ (o, che è la stessa cosa, per $T > T_{max}$).

Allo stesso tempo (se la persona non si stacca dalla parete) decresce il modulo della forza apparente $\vec{F_a}$, che bilancia a ogni istante la forza $\vec{N}$.

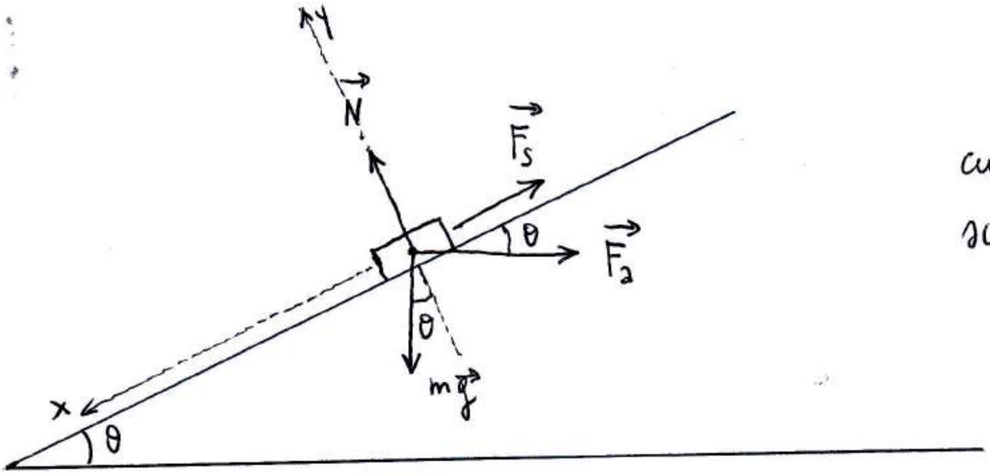
Serway, pr. 6.61

Un' auto affronta una curva rialzata, come mostrato nella figura. Il raggio di curvatura della strada è R, l'angolo di sopraelevazione è θ e il coefficiente di attrito statico tra l'auto e la strada è μ_s.

a) Si determini l'intervallo di valori che può assumere il modulo della velocità dell'auto senza che questa scivoli né verso il basso né verso l'alto.

b) Si calcoli il minimo valore di μ_s per cui tale velocità è nulla.

a)



Situazione in cui l'auto non scivola verso il basso

Consideriamo la situazione vista da un osservatore solidale con l'auto (quindi, un osservatore non inerziale), e consideriamo dapprima la situazione in cui la forza di attrito statico è diretta nel verso ascendente della curva rialzata.

Dal punto di vista dell'osservatore non inerziale l'auto è ferma (richiesta del problema), per cui deve essere in equilibrio sotto l'azione di tutte le forze agenti, inclusa la forza apparente (centrifuga, in questo caso).

Dunque:
$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_s} + \vec{F_a} = 0$$

Introdotto un sistema di assi cartesiani ortogonali come nella figura, risulta:

$$(m\vec{g})_x = mg\,\mathrm{sen}\,\theta\,; \quad N_x = 0\,; \quad F_{s,x} = -F_s\,; \quad F_{a,x} = -F_a\cos\theta$$

$$(m\vec{g})_y = -mg\cos\theta\,; \quad N_y = N\,; \quad F_{s,y} = 0\,; \quad F_{a,y} = -F_a\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Abbiamo posto $N = |\vec{N}|, \quad F_s = |\vec{F_s}|, \quad F_a = |\vec{F_a}|$

L'equazione vettoriale scritta sopra equivale alle seguenti due equazioni scalari:

$$\begin{cases} (m\vec{g})_x + N_x + F_{s,x} + F_{a,x} = 0 \\ (m\vec{g})_y + N_y + F_{s,y} + F_{a,y} = 0 \end{cases} \quad , \quad \text{cioe':}$$

$$\begin{cases} mg \operatorname{sen}\theta - F_s - F_a \cos\theta = 0 \\ -mg\cos\theta + N - F_a \operatorname{sen}\theta = 0 \end{cases}$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{cases} F_s = mg \operatorname{sen}\theta - F_a \cos\theta \\ N = mg\cos\theta + F_a \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Poiché risulta $F_a = m|\vec{a}_c| = m\frac{v^2}{R}$, dove v e' il modulo della velocita' dell'auto, deve risultare:

$$\begin{cases} F_s = mg \operatorname{sen}\theta - m\frac{v^2}{R}\cos\theta = m\left(g \operatorname{sen}\theta - \frac{v^2}{R}\cos\theta\right) \\ N = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}\operatorname{sen}\theta = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{R}\operatorname{sen}\theta\right) \end{cases}$$

Deve ovviamente risultare $0 \le F_s \le \mu_s N$, cioe':

$$\begin{cases} g \operatorname{sen}\theta - \frac{v^2}{R}\cos\theta \ge 0 \\ g \operatorname{sen}\theta - \frac{v^2}{R}\cos\theta \le \mu_s\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{R}\operatorname{sen}\theta\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{v^2}{R}\cos\theta \le g\,\mathrm{sen}\,\theta \\[2ex] (\cos\theta + \mu_s\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\dfrac{v^2}{R} \ge g(\mathrm{sen}\,\theta - \mu_s\cos\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2 \le gR\,\mathrm{tg}\,\theta \\[1ex] v^2 \ge \dfrac{gR(\mathrm{sen}\,\theta - \mu_s\cos\theta)}{\cos\theta + \mu_s\,\mathrm{sen}\,\theta} = \dfrac{gR(\mathrm{tg}\,\theta - \mu_s)}{1+\mu_s\,\mathrm{tg}\,\theta} \end{cases}$$

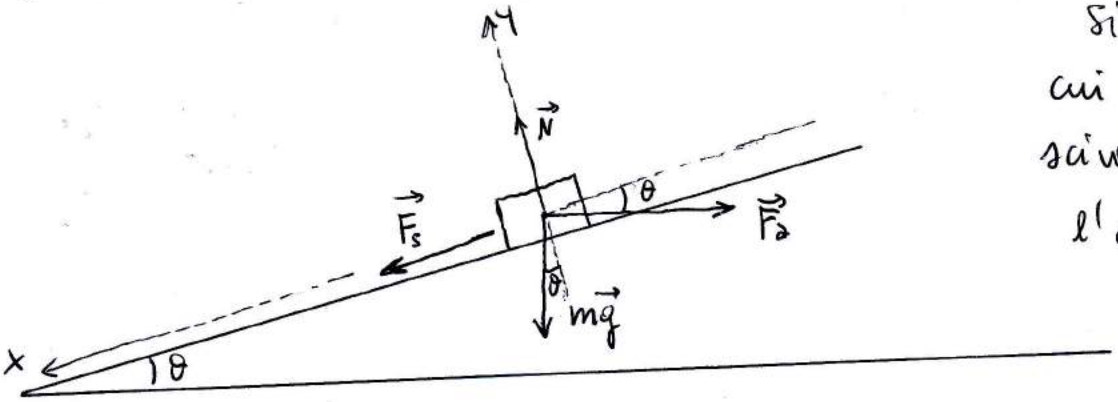
(se $\mu_s > \mathrm{tg}\,\theta$ la seconda disuguaglianza è sempre verificata)

Dunque, questa situazione può verificarsi se vale la condizione

$$\sqrt{\frac{gR(\mathrm{tg}\,\theta - \mu_s)}{1+\mu_s\,\mathrm{tg}\,\theta}} \le v \le \sqrt{gR\,\mathrm{tg}\,\theta} \quad \text{se} \quad \mu_s \le \mathrm{tg}\,\theta \text{, oppure}$$

$$0 \le v \le \sqrt{gR\,\mathrm{tg}\,\theta} \quad \text{se} \quad \mu_s > \mathrm{tg}\,\theta$$

Consideriamo adesso la situazione in cui la forza di attrito statico è diretta nel verso discendente della curva rialzata.



Situazione in cui l'auto non scivola verso l'alto

Consideriamo la situazione vista da un osservatore solidale con l'auto (quindi, un osservatore non inerziale).

Dal punto di vista dell' osservatore non inerziale l' auto e' ferma (richiesta del problema), per cui deve essere in equilibrio sotto l'azione di tutte le forze agenti, inclusa la forza apparente (centrifuga, in questo caso).

Dunque:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_s} + \vec{F_a} = 0$$

Introdotto un sistema di assi cartesiani ortogonali come nella figura, risulta:

$$(m\vec{g})_x = mg\,\text{sen}\,\theta \;;\quad N_x = 0 \;;\quad F_{s,x} = F_s \;;\quad F_{a,x} = -F_a \cos\theta$$

$$(m\vec{g})_y = -mg\cos\theta \;;\quad N_y = N \;;\quad F_{s,y} = 0 \;;\quad F_{a,y} = -F_a\,\text{sen}\,\theta$$

Abbiamo posto, come in precedenza: $N = |\vec{N}|$, $F_s = |\vec{F_s}|$, $F_a = |\vec{F_a}|$

L'equazione vettoriale scritta sopra equivale alle seguenti due equazioni scalari:

$$\begin{cases} (m\vec{g})_x + N_x + F_{s,x} + F_{a,x} = 0 \\ (m\vec{g})_y + N_y + F_{s,y} + F_{a,y} = 0 \end{cases}, \quad \text{cioe':}$$

$$\begin{cases} mg\,\text{sen}\,\theta + F_s - F_a\cos\theta = 0 \\ -mg\cos\theta + N - F_a\,\text{sen}\,\theta = 0 \end{cases}$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{cases} F_s = F_a\cos\theta - mg\,\text{sen}\,\theta \\ N = F_a\,\text{sen}\,\theta + mg\cos\theta \end{cases}$$

Poiché risulta $F_a = m|\vec{a}_c| = m\frac{v^2}{R}$, dove v è il modulo della velocità dell'auto, deve risultare:

$$\begin{cases} F_s = F_a\cos\theta - mg\,\text{sen}\theta = m\frac{v^2}{R}\cos\theta - mg\,\text{sen}\theta = m\left(\frac{v^2}{R}\cos\theta - g\,\text{sen}\theta\right) \\ N = F_a\,\text{sen}\theta + mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}\text{sen}\theta + mg\cos\theta = m\left(\frac{v^2}{R}\text{sen}\theta + g\cos\theta\right) \end{cases}$$

Deve ovviamente risultare $0 \leq F_s \leq \mu_s N$, cioè:

$$\begin{cases} \frac{v^2}{R}\cos\theta - g\,\text{sen}\theta \geq 0 \\ \frac{v^2}{R}\cos\theta - g\,\text{sen}\theta \leq \mu_s\left(\frac{v^2}{R}\text{sen}\theta + g\cos\theta\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{v^2}{R}\cos\theta \geq g\,\text{sen}\theta \\ (\cos\theta - \mu_s\,\text{sen}\theta)\frac{v^2}{R} \leq g(\text{sen}\theta + \mu_s\cos\theta) \end{cases}$$

$v^2 \geq gR\,\text{tg}\,\theta$ dalla prima disuguaglianza

Per la seconda disuguaglianza, occorre distinguere due casi:

a) $\cos\theta - \mu_s\,\text{sen}\theta > 0 \Rightarrow \mu_s\,\text{sen}\theta < \cos\theta \Rightarrow \mu_s < \text{cotg}\,\theta$

In questo caso la seconda disuguaglianza diventa

$$v^2 \leq gR\frac{\text{sen}\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\,\text{sen}\theta} = gR\left(\frac{\text{tg}\theta + \mu_s}{1 - \mu_s\,\text{tg}\theta}\right)$$

cioè: $V \leq \sqrt{gR\left(\frac{tg\theta + \mu_s}{1-\mu_s tg\theta}\right)}$

Dunque, per $\mu_s < cotg\,\theta$ la situazione considerata è possibile

per $\sqrt{gR\,tg\theta} \leq V \leq \sqrt{gR\left(\frac{tg\theta + \mu_s}{1-\mu_s tg\theta}\right)}$

b) $\cos\theta - \mu_s \,sen\,\theta \leq 0$ per $\mu_s \geq cotg\,\theta$

In questo caso la seconda disuguaglianza è verificata per tutti i valori di v, per cui la situazione considerata risulta possibile per

$$V \geq \sqrt{gR\,tg\theta}$$

A questo punto siamo in grado di svolgere una discussione globale del problema.

1] $0 < \theta < 45°$; in questo intervallo angolare risulta

$tg\,\theta < cotg\,\theta$

Discutiamo la situazione al variare di μ_s.

- $0 < \mu_s < tg\,\theta$; l'auto non scivola né verso il basso né verso l'alto per

$$\sqrt{\frac{gR\,(tg\theta - \mu_s)}{1+\mu_s tg\theta}} \leq V \leq \sqrt{\frac{gR\,(tg\theta + \mu_s)}{1-\mu_s tg\theta}}$$

- $tg\theta < \mu_s < cotg\theta$; l'auto non scivola né verso il basso né verso l'alto per $\quad 0 \le V \le \sqrt{\dfrac{gR(tg\theta + \mu_s)}{1 - \mu_s tg\theta}}$

- $\mu_s > cotg\,\theta$; l'auto non scivola mai né verso il basso né verso l'alto

2] $45° < \theta < 90°$; in questo intervallo angolare risulta

$$cotg\theta < tg\theta$$

Discutiamo la situazione al variare di μ_s.

- $0 < \mu_s < cotg\theta$; l'auto non scivola né verso il basso né verso l'alto per

$$\sqrt{\frac{gR\,(tg\theta - \mu_s)}{1 + \mu_s tg\theta}} \le V \le \sqrt{\frac{gR(tg\theta + \mu_s)}{1 - \mu_s tg\theta}}$$

- $cotg\theta < \mu_s < tg\theta$; l'auto non scivola né verso il basso né verso l'alto per

$$V \ge \sqrt{\frac{gR\,(tg\theta - \mu_s)}{1 + \mu_s tg\theta}}$$

- $\mu_s > tg\,\theta$; l'auto non scivola mai né verso il basso né verso l'alto.

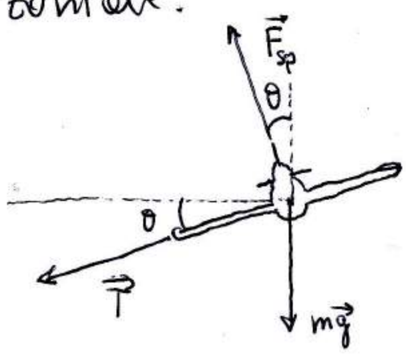
b) Dalla discussione dettagliata svolta al punto precedente, possiamo vedere che il minimo valore di μ_s per cui l'auto non scivola verso il basso né verso l'alto con velocità nulla è

$$\boxed{\mu_{s_{min}} = tg\,\theta}$$

Questo risultato è ovvio, e viene fuori anche da un semplice studio nel sistema statico.

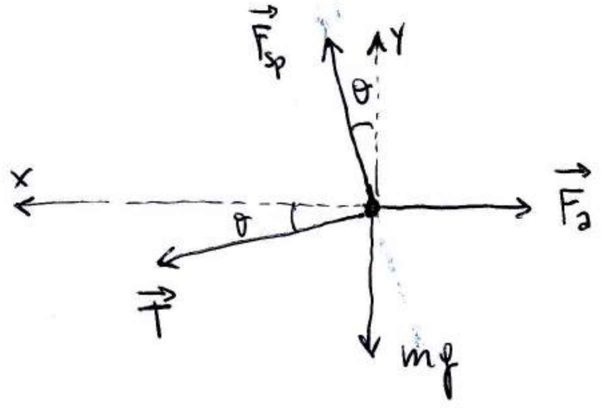
Serway, pr. 6.63

Un modellino di aeroplano di massa 0,75 kg e' in volo lungo una traiettoria circolare disposta su un piano orizzontale. Il modulo della velocita' dell' aeroplano e' 35 m/s e la lunghezza del filo di controllo e' 60 m. Le forze agenti sull' aeroplano sono: la tensione del filo di controllo, la forza peso e la spinta aerodinamica che agisce verso l' interno della traiettoria formando un angolo $\vartheta = 20°$ con la direzione verticale. Si calcolino il modulo della tensione del filo e il modulo della spinta aerodinamica assumendo che il filo formi costantemente un angolo $\vartheta = 20°$ con la direzione orizzontale.



Studiamo il problema dal punto di vista di un osservatore non inerziale solidale con l'aeroplano.

Disegnamo il diagramma delle forze agenti sull'aeroplano rispetto all'osservatore non inerziale:



$\vec{T}$: forza esercitata dal filo sul modellino

$\vec{F}_{sp}$: spinta aerodinamica agente sul modellino

$\vec{F}_a$: forza apparente agente sul modellino rispetto all'osservatore non inerziale

Per l'osservatore non inerziale, solidale con il modellino, questo e' fermo, per cui deve risultare (tenuto conto di tutte le forze agenti, inclusa la forza apparente):

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{sp} + \vec{F}_a = 0$$

Poniamo $T = |\vec{T}|$, $F_{sp} = |\vec{F}_{sp}|$, $F_a = |\vec{F}_a|$

Risulta inoltre $F_a = m|\vec{a}_c| = m\dfrac{v^2}{r}$, dove r e' il raggio della circonferenza che il modellino percorre su un piano orizzontale. Se $L = 60$ m e' la lunghezza del filo di controllo, risulta $r = L\cos\theta$

Introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali come nella figura.

Le componenti cartesiane delle forze agenti sono:

$$(m\vec{g})_x = 0 \; ; \quad T_x = T\cos\theta \; ; \quad F_{sp,x} = F_{sp}\,\text{sen}\,\theta \; ; \quad F_{a,x} = -F_a$$

$$(m\vec{g})_y = -mg \; ; \quad T_y = -T\,\text{sen}\,\theta \; ; \quad F_{sp,y} = F_{sp}\cos\theta \; ; \quad F_{a,y} = 0$$

L'equazione vettoriale scritta in precedenza equivale alle due equazioni scalari seguenti:

$$\begin{cases} (m\vec{g})_x + T_x + F_{sp,x} + F_{a,x} = 0 \\ (m\vec{g})_y + T_y + F_{sp,y} + F_{a,y} = 0 \end{cases} \quad , \text{ cioe':}$$

$$\begin{cases} T\cos\theta + F_{sp}\,\text{sen}\,\theta - F_a = 0 \\ -mg - T\,\text{sen}\,\theta + F_{sp}\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T\cos\theta + F_{sp}\,\text{sen}\,\theta = F_a = m\dfrac{v^2}{L\cos\theta} \\ -T\,\text{sen}\,\theta + F_{sp}\cos\theta = mg \end{cases}$$

Sistema di due equazioni nelle due incognite T e F_{sp}

Metodo di Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1 \qquad \Delta_T = \begin{vmatrix} m\dfrac{v^2}{L\cos\theta} & \text{sen}\,\theta \\ mg & \cos\theta \end{vmatrix} = m\left(\frac{v^2}{L} - g\,\text{sen}\,\theta\right)$$

$$\Delta_{F_{sp}} = \begin{vmatrix} \cos\theta & m\dfrac{v^2}{L\cos\theta} \\ -\text{sen}\,\theta & mg \end{vmatrix} = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{L}\,\text{tg}\,\theta\right)$$

Dunque, otteniamo:

$$\boxed{\begin{aligned} T &= \frac{\Delta_T}{\Delta} = m\left(\frac{v^2}{L} - g\,\mathrm{sen}\theta\right) = 12{,}796\ N \\[2ex] F_{sp} &= \frac{\Delta_{F_{sp}}}{\Delta} = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{L}\,\mathrm{tg}\,\theta\right) = 12{,}487\ N \end{aligned}}$$

Serway, pr. 6.64

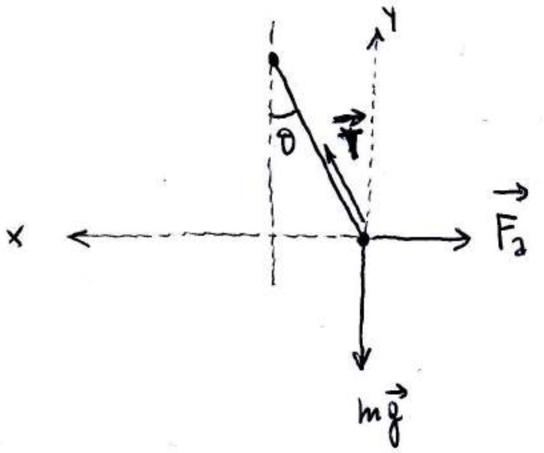
Uno studente costruisce e calibra un accelerometro in modo da usarlo per determinare il modulo della velocità della propria auto quando questa si trova su una curva (non sopraelevata). L'accelerometro è essenzialmente costituito da un goniometro e da un filo con un piombo a un'estremità; l'altra estremità viene fissata al tetto dell'auto. Quando un amico è alla guida, lo studente osserva che il filo si discosta dalla verticale di un angolo pari a 15° quando l'auto affronta la curva alla velocità di 23 m/s.

a) Quanto vale l'accelerazione centripeta dell'auto?

b) Quanto vale il raggio della curva?

c) Quanto vale la velocità dell'auto se, affrontando di nuovo la stessa curva, la deflessione misurata è pari a 9°?

Schema dell'accelerometro e diagramma delle forze agenti sul piombo:



$\vec{T}$: forza esercitata dal filo sul piombo

$\vec{F}_a$: forza apparente (centrifuga) esercitata sul piombo nel sistema di riferimento non inerziale solidale con l'auto.

Rispetto a un osservatore solidale con l'auto, il piombo si trova in quiete con il filo a un angolo θ rispetto alla verticale mentre l'auto sta percorrendo una curva piana circolare a una velocità di modulo costante.

Introduciamo un sistema di assi cartesiani come indicato nella figura, e scriviamo le componenti delle forze agenti sul piombo:

$$(m\vec{g})_x = 0 \quad ; \quad T_x = T \operatorname{sen}\theta \quad ; \quad F_{a,x} = -F_a$$

$$(m\vec{g})_y = -mg \quad ; \quad T_y = T\cos\theta \quad ; \quad F_{a,y} = 0$$

Abbiamo posto $\quad T = |\vec{T}|, \quad F_a = |\vec{F}_a|$

Per l'osservatore non inerziale deve risultare

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F_a} = 0$$

Questa equazione vettoriale equivale alle due equazioni scalari seguenti:

$$\begin{cases} (m\vec{g})_x + T_x + F_{a,x} = 0 \\ (m\vec{g})_y + T_y + F_{a,y} = 0 \end{cases}$$, cioè:

$$\begin{cases} T\,\mathrm{sen}\,\theta - F_a = 0 \\ -mg + T\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Risulta $F_a = m|\vec{a_c}| = m\dfrac{v^2}{r}$, dove v è il modulo della velocità dell'auto e r è il raggio della curva.

$$\begin{cases} F_a = T\,\mathrm{sen}\,\theta \\ mg = T\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m|\vec{a_c}| = T\,\mathrm{sen}\,\theta \\ mg = T\cos\theta \end{cases}$$

Dividiamo le due equazioni membro a membro:

$$\frac{|\vec{a_c}|}{g} = \mathrm{tg}\,\theta \qquad \theta = 15°, \quad v = 23\ m/s$$

a) Risulta quindi $\boxed{|\vec{a_c}| = g\,\mathrm{tg}\,\theta = 2{,}629\ m/s^2}$

b) Da $|\vec{a_c}| = \dfrac{v^2}{r}$, otteniamo $\boxed{r = \dfrac{v^2}{|\vec{a_c}|} = \dfrac{v^2}{g\,\mathrm{tg}\,\theta} = 201{,}249\ m}$

c) L'auto affronta poi la stessa curva, ma stavolta si osserva una deflessione del filo a piombo $\theta' = 9°$.

L'accelerazione centripeta è $|\vec{a}_c'| = g \, tg \, \theta'$

Dalla relazione $|\vec{a}_c'| = \frac{(v')^2}{r}$ (r è lo stesso) otteniamo

$(v')^2 = r \, |\vec{a}_c'| = g r \, tg \, \theta'$, da cui otteniamo (con $\theta' = 9°$):

$$\boxed{v' = \sqrt{g r \, tg \, \theta'} = \sqrt{\cancel{g} \frac{v^2}{\cancel{g} \, tg \, \theta} \cdot tg \, \theta'} = v \sqrt{\frac{tg \, \theta'}{tg \, \theta}} = 17{,}683 \ m/s}$$

Abbiamo utilizzato l'espressione di r ottenuta nella risoluzione del punto precedente.