Esercizio

Scrivere in forma canonica e in forma di Newton il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di

$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\log_2(x)$ sui nodi $x_0=1,\ x_1=2,\ x_2=4,\ x_3=8$

$f[x_0]$

$f[x_1]\quad f[x_0,x_1]$

$f[x_2]\quad f[x_0,x_2]\quad f[x_0,x_1,x_2]$

$f[x_3]\quad f[x_0,x_3]\quad f[x_0,x_1,x_3]\quad f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

$f[x_0] = 0$

$f[x_1] = -1 \qquad f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = -1$

$f[x_2] = 2 \qquad f[x_0,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_0]}{x_2-x_0} = \frac{2}{3} \qquad f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1} = \frac{5}{9}$

$f[x_3] = 3 \qquad f[x_0,x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_0]}{x_3-x_0} = \frac{3}{7} \qquad f[x_0,x_1,x_3] = \frac{f[x_0,x_3]-f[x_0,x_1]}{x_3-x_1} = \frac{10}{42}$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_0,x_1,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_2} = \frac{5}{147}$$

$$p(x) = 0-(x-1)+\frac{5}{9}(x-1)(x-2)+\frac{5}{147}(x-1)(x-2)(x-4)$$

$\Downarrow$ ⇝ in forma canonica

$$p(x) = -x+1+\frac{5}{9}x^2-\frac{5}{3}x+\frac{10}{9}+\frac{5}{147}x^3-\frac{5}{21}x^2+\frac{10}{21}x-\frac{40}{147}$$

$$p(x) = \frac{5}{147}x^3+\left(\frac{5}{9}-\frac{5}{21}\right)x^2+\left(\frac{10}{21}-\frac{5}{3}-1\right)x+1+\frac{10}{9}-\frac{40}{147}$$

$$p(x) = 0{,}034013605\,4\,x^3+0{,}317460317\,5\,x^2-2{,}190476190\,5\,x+1{,}839002267\,6$$

Esercizio

Scrivere in forma canonica, di Lagrange e in forma di Newton il polinomio d'interpolazione $p(x)$ dei valori

$y_0 = 0, y_1 = 3, y_2 = -3$ sui nodi $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$

$f[x_0]$

$f[x_1] \quad f[x_0, x_1]$

$f[x_2] \quad f[x_0, x_2] \quad f[x_0, x_1, x_2]$

$f[x_0] = 0$

$f[x_1] = 3 \qquad f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = 3$

$f[x_2] = -3 \qquad f[x_0, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_0]}{x_2 - x_0} = -\frac{3}{2} \qquad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = -\frac{9}{2}$

$p(x) = 0 + 3x - \frac{9}{2} x(x-1) = -\frac{9}{2}x^2 + \frac{15}{2}x$

Lagrange

$p(x) = 3L_1(x) - 3L_2(x) = 3\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} - 3\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \Rightarrow$

$p(x) = -3x(x-2) - \frac{3x(x-1)}{2} = -3x^2 + 6x + \frac{-3x^2 + 3x}{2} = -\frac{9}{2}x^2 + \frac{15}{2}x$