Tutorato Geometria e Algebra
Informatica

Andrea Pizzi

5 Aprile 2023

Esercizio 1. Risolvi i seguenti sistemi lineari utilizzando la forma ridotta della matrice associata (Eliminazione di Gauss + Riduzione dal basso) al variare dei parametri $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 3x-y+2z=-4 \\ -2x+3y+z=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+3z=t \\ 2x+y+z=2t \\ x+y+z=3t \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y+3z=1 \\ 3x+2y-5z=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+tz=3 \\ 2x+(t-1)y+z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y+3z=5 \\ 3x+2y-z=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+2z=2 \\ 2x+(t-1)y+z=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 3x-y+2z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+z=t \\ 2x-y+3z=2t \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+2z-w=1 \\ 2x-y+3z+tw=4 \\ -x+4y-z+2tw=2 \end{cases}$$

Esercizio 2. Dire se le seguenti collezioni di vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ nelle diverse situazioni

a) $v=(1,2,3), w=(2,4,6), u=(3,6,9)$ *b*) $v=(1,2,3), w=(-1,-2,-3), u=(2,4,6)$

c) $v=(1,0,0), w=(0,1,0), u=(0,0,1)$ *d*) $v=(1,2,3), w=(2,3,5), u=(3,5,8)$

e) $v=(1,2,3), w=(2,3,5), u=(3,5,8)$ *f*) $v=(1,-2,3), w=(2,4,-6), u=(-3,6,-9)$

g) $v=(1,0,0), w=(0,1,0), u=(0,0,2), t=(1,1,2)$

h) $v=(1,1), w=(2,3), u=(3,4)$ *i*) $v=(1,2), w=(2,4), u=(3,6)$

l) $v=(1,2,3), w=(2,3,4), u=(3,5,7)$ *m*)$v=(1,2,0), w=(2,-1,1), u=(-1,4,-2)$

Studiare l'indipendenza lineare delle collezioni sopra descritte in $\mathbb{Q}^2$ o $\mathbb{Q}^3$.

Esercizio 3. Dire quando le seguenti collezioni di vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti al variare del parametro $t \in \mathbb{Q}$ ed al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.

$$a) \quad v_1=(t,1,0) \quad , \quad v_2=(0,t,1)$$
$$b) \quad v_1=(t,t+1,2t-1) \quad , \quad v_2=(1-t,t,3t)$$
$$c) \quad v_1=(t,2t,3) \quad , \quad v_2=(1,t,4-t)$$
$$d) \quad v_1=(t,2t,t+1) \quad , \quad v_2=(1,t,2t+1)$$
$$e) \quad v_1=(t,2t+1,3t-1) \quad , \quad v_2=(2t-1,3t,4t-2)$$

Esercizio 4. Dati i vettori $v=(1,0)$ e $w=(2,3)$ in $\mathbb{R}^2$, dire quali dei seguenti vettori appartengono allo $Span\{v,w\}$ a coefficienti in $\mathbb{R}$, anche denotato $Span_{\mathbb{R}}\{v,w\}$:

$$(0,0) \quad , \quad (0,1) \quad , \quad (4,5) \quad , \quad (1,-1) \quad , \quad (-2,2) \quad , \quad (5,-3)$$

In generale, determinare tutti i vettori $(b_1,b_2) \in Span_{\mathbb{R}}\{v,w\}$.

Supporre che i due vettori $v,w \in \mathbb{Q}$. Determinare se i vettori descritti sopra appartengono a $Span_{\mathbb{Q}}\{v,w\}$ e determinare ancora tutti i vettori in $(b_1,b_2) \in Span_{\mathbb{Q}}\{v,w\}$.

Esercizio 5. Dati i vettori $v = (1,0,0)$, $w = (0,1,0)$ e $u = (1,1,1)$ in $\mathbb{R}^3$, dire quali dei seguenti vettori appartengono allo $Span_{\mathbb{R}}\{v, w\}$:

$$(0,0,0) \quad , \quad (0,1,1) \quad , \quad (2,3,1) \quad , \quad (1,1,0) \quad , \quad (-2,2,1) \quad , \quad (-1,-2,-1)$$

In generale, determinare tutti i vettori $(b_1, b_2, b_3) \in Span_{\mathbb{R}}\{v, w, u\}$. Supporre che i vettori $v, w, u \in \mathbb{Q}$. Determinare se i vettori descritti sopra appartengono a $Span_{\mathbb{Q}}\{v, w, u\}$ e determinare ancora tutti i vettori in $(b_1, b_2, b_3) \in Span_{\mathbb{Q}}\{v, w, u\}$.

Esercizio 6. * Date le matrici su $\mathbb{R}$

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Considerare tutti i sottoinsiemi di colonne e mostrare la loro dipendenza o indipendenza lineare. Fare lo stesso per i sottoinsiemi delle righe.

Cosa possiamo osservare sul massimo numero di elementi linearmente indipendenti per colonne e per righe in tutti i casi?

Esercizio 7. ** Si dimostri che ogni insieme di vettori che contiene il vettore nullo è linearmente dipendente.

Esercizio 8. ** Si dimostri che un sottoinsieme di un insieme di vettori linearmente indipendenti è linearmente indipendente.

Esercizio 9. ***(Indipendenza lineare in $\mathbb{Z}_2$)

a) Quanti vettori esistono in $(\mathbb{Z}_2)^2$? Considera una coppia qualsiasi di questi vettori e discutine la dipendenza o l'indipendenza lineare. Considera una terna qualsiasi di questi vettori e discutine la dipendenza o l'indipendenza lineare.

   Esiste in questo caso una terna di vettori linearmente indipendenti?

b) Quanti vettori esistono in $(\mathbb{Z}_2)^3$?Considera una coppia qualsiasi di questi vettori e discutine la dipendenza o l'indipendenza lineare. Considera una terna qualsiasi di questi vettori e discutine la dipendenza o l'indipendenza lineare.

   Se sono assegnati quattro vettori in questa situazione, questi sono linearmente dipendenti o indipendenti?