Dimostrazioni di NP-Completezza

Vertex Cover (VC)

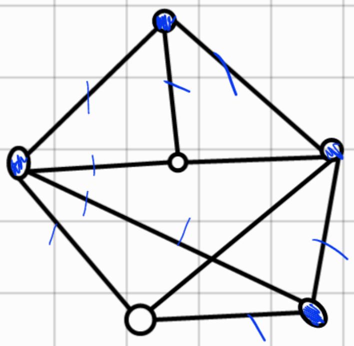
$$\mathcal{I}_{VC} = \{\langle G=(V,E), k\rangle : k \in \mathbb{N}\}$$

$$S_{VC} = \{V' \subseteq V\}$$

Banale su $\geq k$ → prendo tutti i nodi

$$\pi_{VC}(G,k) = \exists V' \in S_{VC}(G,k) : \forall (u,v) \in E\, [u \in V' \lor v \in V'] \land |V'| \leq k$$

↳ Verificabile in $O(|E| \cdot |V|)$



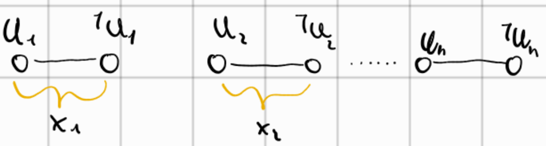
VC $\in$ NP

1) Scegliamo 3-SAT

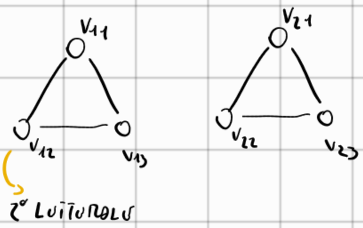
$$\mathcal{I}_{3\text{-}SAT} = \{\langle f, x\rangle : f = c_1 \land c_2 \land \dots \land c_m,\ \forall i\ |c_i| = 3\}$$

2) Creiamo i gadget

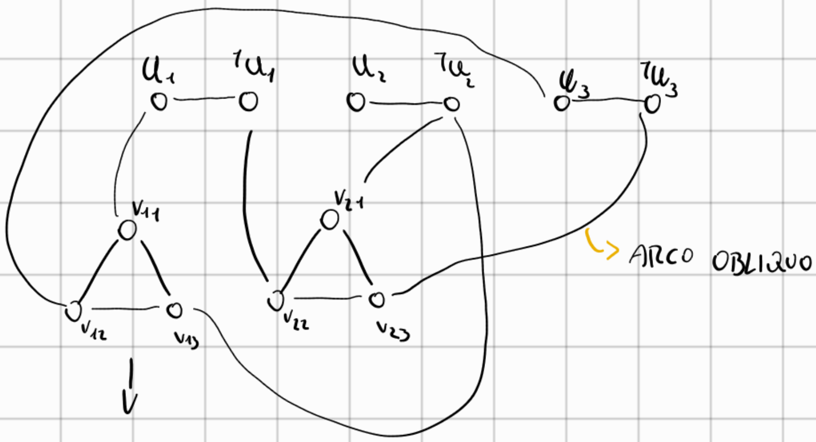
$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \Rightarrow$



$C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\} \Rightarrow$



Ora colleghiamo il nodo di ogni letterale nelle clausole alla sua controparte nei gadget delle variabili



$C_1 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$

$C_2 = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1$

\# NODI NECESSARI A UN $V_C = |X| + 2m = n + 2m$

ISTANZA SI

SE $\langle X, S \rangle \in 3\text{-SAT} \Rightarrow \langle G, k \rangle \in VC$

$\Rightarrow \exists\, a : X \to \{\text{VERO}, \text{FALSO}\} : \forall_{j=1,\dots,m} \left[C_j(a(x)) = \text{VERO} \right]$

$\left.\begin{array}{l} \text{SE } a(x_i) = \text{VERO} \Rightarrow u_i \in V' \\ \text{SE } a(x_i) = \text{FALSO} \Rightarrow \neg u_i \in V' \end{array}\right] n \text{ NODI IN } V'$

$\forall_{j=1..3}, \forall_{i=1..m}$ METTO IN V' OGNI $V_j \in C_i$ CHE NON SIA COPERTO DA UN ARCO OBLIQUO $\Big] 2m$ NODI IN V'

V' E' UN VC DI $k = n + 2m$

IL VICEVERSA PUO' ESSERE FATTO SIA CON LA CONTROINVERSA SIA CON IL VERSO CONTRARIO DELLA FRECCIA

SE $\langle G, k \rangle \in VC$

$\forall C_j\ \exists h \in \{1,2,3\} : (u_i, v_{jh}) \in E \wedge u_i \in V' \vee (\neg u_i, v_{jh}) \in E \wedge \neg u_i \in V'$

$\forall i = 1 \dots n \left[u_i \in V' \to a(x_i) = \text{VERO} \right]$
$\left[\neg u_i \in V' \to a(x_i) = \text{FALSO} \right]$

INDIPENDENT SET (IS)

$$\mathcal{J}_{IS} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle, k \in \mathbb{N} \}$$

$$S_{IS}(G,k) = \{ I \subseteq V \}$$

$$\pi_{IS}(G,k,S_{IS}(G,k)) = \exists I \in S_{IS}(G,k) : \forall u,v \in I \left[(u,v) \notin E \right] \land |I| \geq k$$

È IN NP $\rightarrow$ π_{IS} È VERIFICABILE IN TEMPO POLINOMIALE

I È UN IS $\iff$ $V - I$ È UN VC

$$\langle G, k \rangle \in \mathcal{J}_{VC} \iff \langle \underset{G}{\underset{\Downarrow}{G'}}, \underset{|V|-k}{\underset{\Downarrow}{k'}} \rangle \in \mathcal{J}_{IS}$$

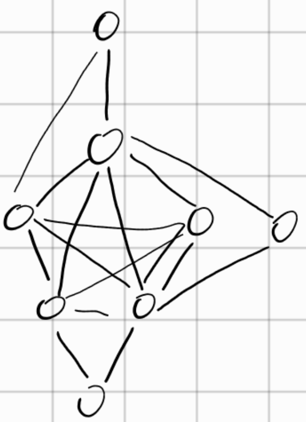
VC DI $h \leq k$ NODI $\Rightarrow$ IS DI $|V| - h \geq |V| - k$ NODI

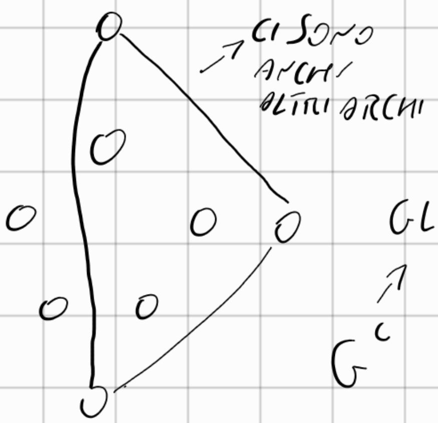
CLIQUE (CL)

$$\mathcal{J}_{CL} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : k \in \mathbb{N} \}$$

$$S_{CL}(G,k) = \{ C \subseteq V \}$$

$$\pi_{CL}(G,k,S(G,k)) = \exists C \in S_{CL}(G,k) : |C| \geq k \land \forall u,v \in C \left[(u,v) \in E \right]$$





GLI ARCHI CHE NON SONO IN G

G^c

I è un IS in $G \iff I$ è una clique in G^c

$<G,k> \in J_{CL} \rightarrow <G^c,k> \in J_{IS}$

Quando un predicato inizia con $\exists$ probabilmente è in NP

↳ con $\forall$ probabilmente è in CoNP

Dominating Set (DS)

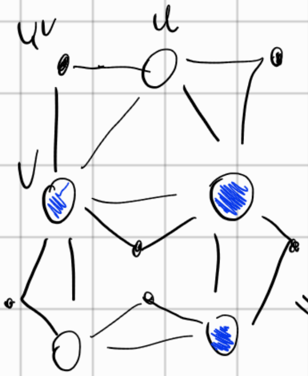
$$J_{DS} = \{ <G=(V,E),k> \mid k \in \mathbb{N} \}$$

$$S_{DS}(G,k) = \{ D \subseteq V \}$$

$$\pi_{DS}(G,k,S(G,k)) = \exists D \in S_{DS}(G,k) : |D| \leq k \wedge \forall u \in V-D \, [\exists (u,v) \in E : v \in D]$$

G, k

=>

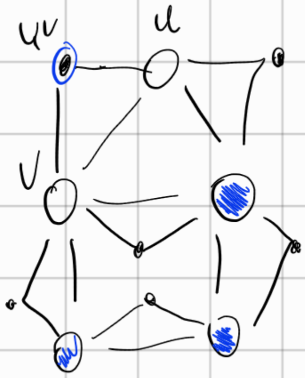


G', k

aggiungiamo dei nodi per ogni arco

dominatin

Vertex cover



G', k

=> non conviene prendere i nodi piccoli

↳ se ne prendo altri copro più nodi