FORMULE LEGATE ALLE PROBABILITÀ CONDIZIONATE

1) REGOLA DEL PRODOTTO (o FORMULA INVERSA)
2) FORMULA DELLE PROBABILITÀ TOTALI
3) FORMULA DI BAYES

OSS. Vale anche per $P(B)=0$ perché si ~~ha~~ $A\cap B\subset B \Rightarrow P(A\cap B)=0$ e quindi $0=0$ anche se $P(A|B)$ è indeterminato

1) A partire da $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ si ottiene $\boxed{P(A\cap B)=P(A|B)P(B)}$

Questa formula è utile quando la probabilità condizionata segue dal ~~problema~~ testo dell'esercizio e la probabilità dell'intersezione è la grandezza da calcolare.

Questa formula può essere usata anche per l'intersezione di più di due eventi. Ad esempio, nel caso di 3 eventi, si ha $P(A\cap B\cap C)=P(A|B\cap C)P(B\cap C)$ e quindi

$$\boxed{P(A\cap B\cap C)=P(A|B\cap C)\,P(B|C)P(C)}$$

ESEMPI

Un'urna contiene 2 palline bianche, 3 rosse e 4 nere.

Si estraggono 3 palline a caso, una alla volta e senza reinserimento.

1) Calcolare la probabilità di ottenere la sequenza (rosso, non rosso) nelle prime due estrazioni.
2) Calcolare la probabilità di ottenere la sequenza (rosso, bianco, rosso).

RISPOSTE

In questi casi si deve scegliere bene quali sono gli eventi per applicare le formule; infatti, se si scelgono male, otteniamo uguaglianze non utili per ottenere i valori numerici che ~~cerchiamo~~ cerchiamo.

Tipicamente si fa riferimento al "condizionamento rispetto alle estrazioni precedenti".

1) $P(R_1\cap R_2^c)=P(R_2^c|R_1)\,P(R_1)=\dfrac{6}{8}\cdot\dfrac{3}{9}=\dots=\dfrac{1}{4}$

2) $P(R_1\cap B_2\cap R_3)=P(R_3|R_1\cap B_2)\,P(B_2|R_1)\,P(R_1)=\dfrac{2}{7}\;\dfrac{2}{8}\;\dfrac{3}{9}=\dots=\dfrac{1}{42}$

OSSERVAZIONI

a) Supponiamo di "scegliere male" gli eventi. Ad esempio possiamo scrivere

$$P(R_1 \cap B_2 \cap R_3) = P(R_3 | B_2 \cap R_1) \underbrace{P(R_1 | B_2)\, P(B_2)}_{= P(R_1 \cap B_2)}$$

Questa uguaglianza è vera ma non è direttamente utilizzabile perché non sappiamo dare un valore numerico per $P(R_1|B_2)$ e per $P(B_2)$ in maniera diretta.

b) Le probabilità di certe sequenze di risultati non cambiano se consideriamo un ordine diverso dei risultati stessi.

Ad esempio calcoliamo la probabilità di ottenere la sequenza di colori (bianco, rosso, nero) e (nero, bianco, rosso). Allora:

$$P(B_1 \cap R_2 \cap N_3) = P(N_3 | B_1 \cap R_2)\, P(R_2 | B_1)\, P(B_1) = \frac{4}{7}\,\frac{3}{8}\,\frac{2}{9} = \dots = \frac{1}{21}$$

$$P(N_1 \cap B_2 \cap R_3) = P(R_3 | N_1 \cap B_2)\, P(B_2 | N_1)\, P(N_1) = \frac{3}{7}\,\frac{2}{8}\,\frac{4}{9} = \dots = \frac{1}{21}$$

FORMULA DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Supponiamo di avere una partizione di eventi finita o numerabile

$$\{E_i : i \in I\} \qquad \left(I = \{1, \dots, n\} \text{ oppure } I = \{1, 2, 3, \dots\} \text{ per fissare le idee} \right)$$

Questo significa che $\bigcup_{i \in I} E_i = \Omega$ e che $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$

Inoltre sia A un altro evento.

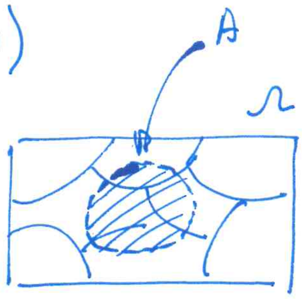
Si usa questa formula per calcolare $P(A)$ quando si conoscono $\{P(E_i)\}_{i \in I}$ e $\{P(A|E_i)\}_{i \in I}$

per i valori per cui $P(E_i) \neq 0$ (in ogni caso le cose si aggiustano)

Allora

$$P(A) \overset{A=A\cap\Omega}{=} P(A\cap\Omega) = P\Big(A\cap\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big)\Big) \overset{\text{proprietà distributiva}}{=} P\Big(\bigcup_{i\in I}(A\cap E_i)\Big)$$

$$\underset{(A\cap E_i)\cap(A\cap E_j)=\emptyset \text{ per } i\neq j}{=} \sum_{i\in I} P(A\cap E_i)$$



Ora per ciascun addendo per cui $P(E_i)\neq 0$ si ha

$$P(A\cap E_i) = P(A|E_i)\,P(E_i)$$

OSS. In ogni caso, se fosse $P(E_i)=0$, si avrebbe $P(A\cap E_i)=0$ e vale l'uguaglianza anche se $P(A|E_i)$ non è ben definita

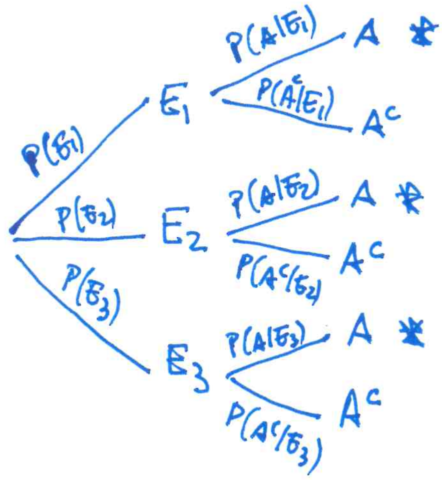
In conclusione

$$\boxed{P(A) = \sum_{i\in I} P(A|E_i)\,P(E_i)}$$

Un caso particolare è quello in cui la partizione è costituita da due eventi: $\begin{cases} E_1 = E \\ E_2 = E^c \end{cases}$. Allora $P(A) = P(A|E)P(E) + P(A|E^c)P(E^c)$.

DIAGRAMMA AD ALBERO ASSOCIATO ALLA FORMULA DELLE PROB. TOTALI

Si può costruire un diagramma ad albero associato dove ogni diramazione fa riferimento ad una partizione (ogni diramazione considera tutti i casi possibili). Ad ogni arco si associa una probabilità. Per fissare le idee consideriamo il caso $I=\{1,2,3\}$



Siamo interessati a tutte le foglie che finiscono con A indicate da un asterisco *.

Si deve considerare la somma dei pesi dei cammini che finiscono con A ottenuti con i prodotti dei pesi dei rami

$$P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + P(A|E_3)P(E_3).$$

ESEMPIO

Un'urna ha 2 palline bianche e 1 nera.

Si lancia un dado equo:

- Se esce il numero 1 si mettono 2 palline bianche nell'urna.
- Se escono i numeri 2 e 3 si mettono nell'urna 1 pallina bianca e 1 nera.
- Se escono i numeri 4, 5 e 6 si mettono 2 palline nere nell'urna.

Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.

Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.

RISPOSTA

Siamo interessati all'evento $B = \{\text{estratta pallina bianca}\}$.

Possiamo calcolare la probabilità di B se conosciamo quale dei 3 "casi" si è verificato. I tre "casi" costituiscono una partizione

$E_1 = \{\text{esce } \boxed{1}\}$ $\quad E_2 = \{\text{esce } \boxed{2} \text{ o } \boxed{3}\}$ $\quad E_3 = \{\text{esce } \boxed{4} \text{ o } \boxed{5} \text{ o } \boxed{6}\}$

e si ha:

$$\begin{cases} P(E_1) = \frac{1}{6} \quad P(E_2) = \frac{2}{6} \quad P(E_3) = \frac{3}{6} & \text{(ovvio perché il dado è equo)} \\ P(B|E_1) = \frac{4}{5} \quad P(B|E_2) = \frac{3}{5} \quad P(B|E_3) = \frac{2}{5} \end{cases}$$

4 B	1 N

3 B	2 N

2 B	3 N

FORMULA DELLE PROB. TOTALI

In conclusione: $P(B) = P(B|E_1)P(E_1) + P(B|E_2)P(E_2) + P(B|E_3)P(E_3) =$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6} = \frac{4+6+6}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

OSSERVAZIONE

Sappiamo che la prob. di estrarre nera è $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$.

Questo risultato si ottiene ancora con la formula delle prob. totali:

$$P(B^c) = P(B^c|E_1)P(E_1) + P(B^c|E_2)P(E_2) + P(B^c|E_3)P(E_3)$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{6} + \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{6}$$

$$= \frac{1+4+9}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

FORMULA DI BAYES

Sappiamo che $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ con l'ipotesi $P(B) \neq 0$.

Inoltre $A \cap B$ e $B \cap A$ sono lo stesso evento; quindi

$$P(A\cap B) = P(B \cap A) \underset{\uparrow}{=} P(B|A)\,P(A).$$

regola del prodotto

Quindi, sostituendo nella formula iniziale, si ha $\boxed{P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}}$

Questa formula si usa quando viene chiesta una probabilità condizionata $P(A|B)$ e la probabilità condizionata $P(B|A)$ (cioè quella in cui A e B si scambiano) si calcola facilmente, e comunque questo è più agevole rispetto a valutare l'evento intersezione $A \cap B$.

Prima di procedere con alcuni esempi, si vuole sottolineare che negli esercizi talvolta (direi sempre) questa formula si usa combinandola con la formula delle probabilità totali per calcolare il denominatore $P(B)$.

In altri termini negli esercizi si potrà fare riferimento ad una partizione $\{E_n\}_{n\in I}$ finita o numerabile, sapremo calcolare facilmente $P(B|E_n)$ per $n \in I$, e verrà chiesto di calcolare probabilità condizionate del tipo

$$P(E_n|B) \qquad \text{sempre per } n \in I.$$

Quindi tipicamente si avrà

$$\boxed{P(E_n|B) = \frac{P(B|E_n)\,P(E_n)}{\sum_{i\in I} P(B|E_i)\,P(E_i)} \qquad \text{per } n \in I}$$

ESEMPIO

Consideriamo ancora l'esempio che abbiamo visto per la formula delle probabilità totali.

Si lancia un dado equo (urna iniziale $\boxed{\begin{smallmatrix}2 & 1\\ B & N\end{smallmatrix}}$)

$\xrightarrow{E_1}$ se esce $\boxed{1}$ $\quad \boxed{\begin{smallmatrix}4 & 1\\ B & N\end{smallmatrix}}$

$\xrightarrow{E_2}$ se esce $\boxed{2}$ o $\boxed{3}$ $\quad \boxed{\begin{smallmatrix}3 & 2\\ B & N\end{smallmatrix}}$

$\xrightarrow{E_3}$ se esce $\boxed{4}$ o $\boxed{5}$ o $\boxed{6}$ $\quad \boxed{\begin{smallmatrix}2 & 3\\ B & N\end{smallmatrix}}$

Supponiamo che venga chiesto di calcolare la seguente probabilità condizionata.

|| Calcolare la probabilità che sia uscito $\boxed{2}$ o $\boxed{3}$ nel lancio del dado sapendo di aver estratto una pallina bianca. ||

Con riferimento alle notazioni viste precedentemente viene chiesto di calcolare $P(E_2|B)$.

Ricordiamo che, come conseguenza diretta del testo, si ha:

$$\begin{cases} P(E_1) = \frac{1}{6},\ P(E_2) = \frac{2}{6},\ P(E_3) = \frac{3}{6}; \\ P(B|E_1) = \frac{4}{5},\ P(B|E_2) = \frac{3}{5},\ P(B|E_3) = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Quindi si calcola agevolmente (immediatamente) dal testo $P(B|E_2)$ e viene chiesta $P(E_2|B)$. Allora si usa la formula di Bayes!

$$P(E_2|B) = \frac{P(B|E_2)\,P(E_2)}{P(B)} = \frac{P(B|E_2)\,P(E_2)}{P(B|E_1)P(E_1) + P(B|E_2)P(E_2) + P(B|E_3)\cdot P(E_3)}$$

QUI FORMULA PROB. TOTALI

$$= \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}} = \ldots = \frac{6}{4+6+6} = \frac{3}{8}.$$

Altre domande possibili ~~[illegible]~~ sono le seguenti:

|| Calcolare la prob. che sia uscito $\boxed{1}$ sapendo di aver estratto una pallina bianca. ||

|| Calcolare la probabilità che sia uscito $\boxed{4}$ o $\boxed{5}$ o $\boxed{6}$ sapendo di aver estratto una pallina bianca. ||

In questi due casi le probabilità richieste sono $P(E_1|B)$ e $P(E_3|B)$. In corrispondenza si ha

$$P(E_1|B) = \frac{P(B|E_1)P(E_1)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}} = \dots = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

stesso denominatore della domanda precedente

$$P(E_3|B) = \frac{P(B|E_3)P(E_3)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}} = \dots = \frac{3}{8}.$$

OSSERVAZIONE

Abbiamo ottenuto che $P(E_i|B) = \begin{cases} 2/8 & \text{per } i=1 \\ 3/8 & \text{per } i=2 \\ 3/8 & \text{per } i=3 \end{cases}$.

Quindi $P(E_1|B)+P(E_2|B)+P(E_3|B) = 1.$

Questo è in accordo con il fatto che <u>la somma delle probabilità degli eventi di una partizione è sempre uguale a 1</u> (infatti ad esempio $P(E_1)+P(E_2)+P(E_3) = \frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6} = 1$) <u>e che $P(\cdot|B)$ è una misura di probabilità</u>.

Consideriamo altre possibili domande.

|| Calcolare la probabilità che sia uscito $\boxed{2}$ o $\boxed{3}$ sapendo di aver estratto una pallina nera ||

|| Calcolare la probabilità che esca un numero dispari nel lancio del dado sapendo di aver estratto una pallina bianca ||

Nel primo caso si chiede di calcolare $P(E_2|B^c)$.

Si ha

$$P(E_2|B^c) = \frac{P(B^c|E_2)\,P(E_2)}{P(B^c)}.$$

Sotto E_2 l'urna è così composta:

3 B	2 N

Quindi si ha

$$P(B^c|E_2) = \frac{2}{5}$$

(del resto $P(B^c|E_2) = 1 - P(B|E_2) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$)

$P(\cdot|E_2)$ è una misura di probabilità

$P(B^c)$ è stata calcolata precedentemente:

$$1 - P(B) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15} \quad \text{oppure} \quad P(B^c) = \sum_{k=1}^{3} P(B^c|E_k)\,P(E_k) = \dots = \frac{7}{15}$$

F. PROB. TOTALI

Quindi

$$P(E_2|B^c) = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{6}}{7/15} = \frac{4}{30}\,\frac{15}{7} = \frac{2}{7}.$$

OSSERVAZIONE In generale non è vero che $P(E_2|B) + P(E_2|B^c) = 1$.

Infatti $P(E_2|B) + P(E_2|B^c) = \frac{3}{8} + \frac{2}{7} = \frac{21+16}{56} = \frac{37}{56}$.

Nel secondo caso (prob. che esca dispari sapendo di aver estratto ~~dispari~~ bianca) la partizione $E_1=\{1\}$, $E_2=\{2,3\}$, $E_3=\{4,5,6\}$ non ci è di aiuto per risolvere il problema.

E' più opportuno considerare la seguente partizione:

$\{F_1,\dots,F_6\}$ dove $F_k=\{$esce $\boxed{k}$ nel lancio del dado$\}$.

Allora $P(F_1)=\dots=P(F_6)=\frac{1}{6}$.

Inoltre
$$P(B|F_k)=\begin{cases} P(B|E_1)=\frac{4}{5} & \text{per } k=1 \\ P(B|E_2)=\frac{3}{5} & \text{per } k=2,3 \\ P(B|E_3)=\frac{2}{5} & \text{per } k=4,5,6 \end{cases} \qquad (*)$$

la probabilità condizionata richiesta è

$$P(D|B), \text{ dove } D=F_1\cup F_3\cup F_5.$$

COMMENTO

Questa uguaglianza è vera ma poco utile:

$$P(D|B)=\frac{P(B|D)\,P(D)}{P(B)}$$

Infatti non sappiamo calcolare facilmente $P(B|D)$

Allora procediamo così:

$$P(D|B)=P(F_1\cup F_3\cup F_5|B)=P(F_1|B)+P(F_3|B)+P(F_5|B).$$

Poi calcoliamo $P(F_k|B)$ per $k=1,\dots,6$.

Si ha

$$P(F_k|B)=\frac{\overbrace{P(B|F_k)}^{(*)}\,\overbrace{P(F_k)}^{=\frac{1}{6}}}{\underbrace{P(B)}_{=\frac{8}{15}\text{ già calcolato}}}$$

OSS.

Il valore di $P(B)$ si recupera come segue:

$$P(B)=\sum_{k=1}^{6}P(B|F_k)P(F_k)$$

Allora

$$P(F_k|B) = \frac{P(B|F_k)\cdot\frac{1}{6}}{\frac{8}{15}} = P(B|F_k)\cdot\frac{1}{\cancel{6}_{2}}\cdot\frac{\cancel{15}^{5}}{8} =$$

$$= P(B|F_k)\cdot\frac{5}{16} \overset{\uparrow}{=} \begin{cases} \frac{4}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{5}}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} & \text{per } k=1 \\ \frac{3}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{5}}{16} = \frac{3}{16} & \text{per } k=2,3 \\ \frac{2}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{5}}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} & \text{per } k=4,5,6 \end{cases}$$

sostituendo i valori da (*)

OSS.

$$\sum_{k=1}^{6} P(F_k|B) = \frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{4+6+6+2+2+2}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

in accordo con la teoria ($\{F_1, \dots, F_k\}$ è una partizione)

In conclusione

$$P(D|B) = P(F_1|B)+P(F_3|B)+P(F_5|B) = \frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8} =$$

$$= \frac{4+3+2}{16} = \frac{9}{16}.$$

OSS.

la probabilità ~~dell'estrazione~~ che esca un numero pari sapendo che è stata estratta una pallina bianca è

$$P(D^c|B) \overset{\uparrow}{=} 1 - P(D|B) = 1-\frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

$P(\cdot|B)$ è una misura di probabilità

Del resto

$$P(D^c|B) \overset{\uparrow}{=} P(F_2|B)+P(F_4|B)+P(F_6|B) = \frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} =$$

$D^c = F_2 \cup F_4 \cup F_6$

$$= \frac{3+2+2}{16} = \frac{7}{16}$$

INDIPENDENZA TRA EVENTI

Iniziamo con il caso di due eventi.

~~Il concetto di dipendenza~~

Siamo interessati al caso in cui

$P(A|B) = P(A)$ se $P(B) \neq 0$ (e si potrebbe dire "A indipendente da B")

oppure al caso

$P(B|A) = P(B)$ se $P(A) \neq 0$ (e si potrebbe dire "B indipendente da A")

In questo senso abbiamo due concetti apparentemente diversi. Inoltre sembra che si debbano escludere in qualche caso gli eventi di probabilità zero.

In realtà la trattazione è più semplice e consideriamo la seguente definizione dove gli eventi di probabilità zero sono consentiti

DEFINIZIONE (indipendenza tra due eventi)

$A, B \in \mathcal{A}$ sono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

<u>OSS</u>

Se A e B sono indipendenti, allora lo sono anche B e A.
Infatti $A \cap B = B \cap A$ e il prodotto tra due numeri è commutativo.

Quindi quello che si dimostra per A e B in un certo ordine, si dimostra anche per A e B presi in ordine inverso.

PROPOSIZIONE

Siano $A, B \in \mathcal{A}$ con $P(B) \neq 0$. Allora

A e B sono indipendenti $\iff P(A|B) = P(A)$.

DIMOSTRAZIONE

Si ha

si divide per $P(B)$

A e B indipendenti $\overset{\text{def.}}{\iff} P(A \cap B) = P(A)P(B) \iff \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)\cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}}$

$\iff P(A|B) = P(A)$. $\square$

def. di prob. condizionata.

Per quanto osservato prima sulla simmetria tra A e B nella definizione di indipendenza, si ha anche la seguente proposizione che si dimostra in maniera analoga.

PROPOSIZIONE

Siano $A, B \in \mathcal{A}$ con $P(A) \neq 0$. Allora

A e B sono indipendenti $\iff P(B|A) = P(B)$.

CONSEGUENZE

1) Se un evento ha probabilità zero, allora è indipendente da qualunque altro. Infatti, se ~~[illegible]~~ prendiamo $A, B \in \mathcal{A}$ con $P(A) = 0$, si ha

$$\begin{cases} \underset{\text{ovvia}}{0 \leq} P(A\cap B) \underset{A\cap B \subset A}{\leq} P(A) = 0 \quad \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \\ P(A)P(B) = 0 \cdot P(B) = 0 \end{cases}$$

e quindi $\underbrace{P(A\cap B)}_{=0} = \underbrace{P(A)P(B)}_{=0}$

2) Supponiamo che A e B siano indipendenti.
Allora, se uno dei due eventi, o entrambi, vengono complementati, allora abbiamo ancora eventi indipendenti:

A^c, B sono indipendenti

A, B^c sono indipendenti

A^c, B^c sono indipendenti.

~~Infatti Supponiamo~~ Iniziamo verificando la prima relazione.

- Si ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ per ipotesi.

  Allora
  $$\boxed{P(A^c \cap B)} = P(B) - P(A\cap B) \overset{\text{ipotesi}}{=} P(B) - P(A)P(B) = P(B)\left(1 - P(A)\right)$$
  $$= P(B)P(A^c)$$
  $$= \boxed{P(A^c)P(B)}$$
  $$P(A\cap B) + P(A^c \cap B) = P(B)$$

- L'uguaglianza $P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c)$ si dimostra in maniera analoga (del resto dato che si può scambiare il ruolo di A e B per simmetria nella definizione, quel che accade solo il primo evento vale anche complementando il secondo evento).

- Infine

  A e B sono indipendenti $\Rightarrow$ A e B^c sono indipendenti
  $\Rightarrow$ A^c e B^c sono indipendenti.

3) Mettendo insieme 1) e 2) si ha che
Se un evento ha probabilità 1, allora è indipendente da qualunque altro. Del resto abbiamo già visto in passato che $\boxed{P(B) = 1 \Rightarrow P(A|B) = P(A)}$.