ESERCIZIO

Gli elementi prodotti da una fabbrica possono avere due tipi di difetti: il difetto 1 con probabilità $\frac{3}{100}$; il difetto 2 con probabilità $\frac{7}{100}$.
La presenza dei due difetti può essere considerata indipendente una dall'altra.
Si sceglie un elemento prodotto a caso.

1) Calcolare la probabilità che siano presenti entrambi i difetti
2) Calcolare la probabilità che l'elemento sia difettoso (sia presente almeno uno dei due difetti)
3) Calcolare la probabilità che l'elemento abbia il difetto 1 sapendo che è difettoso
4) Calcolare la probabilità che l'elemento abbia un solo difetto sapendo che è difettoso

SVOLGIMENTO

Introduciamo le seguenti notazioni:

$$D_k = \{ \text{l'elemento ha il difetto } k \} \quad \text{con } k = 1,2.$$

Allora D_1 e D_2 sono indipendenti; inoltre $P(D_1) = \frac{3}{100}$ e $P(D_2) = \frac{7}{100}$.

1) $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2) = \frac{3}{100} \cdot \frac{7}{100} = \frac{21}{10000}$

2) $P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1)P(D_2) =$

$$= \frac{3}{100} + \frac{7}{100} - \frac{3}{100} \cdot \frac{7}{100} = \frac{300 + 700 - 21}{10000} = \frac{979}{10000}$$

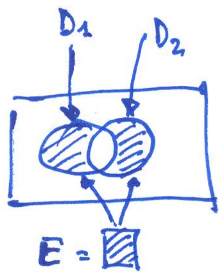
[Metodo alternativo

$$P(D_1 \cup D_2) = 1 - P((D_1 \cup D_2)^c) = 1 - P(D_1^c \cap D_2^c) \overset{\text{prop. dell'indipendenza}}{=} 1 - P(D_1^c)P(D_2^c) = 1 - \left(1 - \frac{3}{100}\right)\left(1 - \frac{7}{100}\right)$$

$$= 1 - \frac{97 \cdot 93}{10000} = \frac{10000 - 9021}{10000} = \frac{979}{10000}$$]

3) $$P(D_1 | D_1 \cup D_2) = \frac{P(D_1 \cap (D_1 \cup D_2))}{P(D_1 \cup D_2)} \overset{D_1 \subset D_1 \cup D_2}{=}$$

$$= \frac{P(D_1)}{P(D_1 \cup D_2)} = \frac{3/100}{979/10000} = \frac{3}{\cancel{100}} \cdot \frac{\overset{100}{\cancel{10000}}}{979} = \frac{300}{979}$$



4) $$P(E | D_1 \cup D_2) = \frac{P(E \cap (D_1 \cup D_2))}{P(D_1 \cup D_2)} \overset{E \subset D_1 \cup D_2}{=}$$

$$= \frac{P(E)}{P(D_1 \cup D_2)} = \frac{P(D_1 \cup D_2) - P(D_1 \cap D_2)}{P(D_1 \cup D_2)} = 1 - \frac{P(D_1 \cap D_2)}{P(D_1 \cup D_2)} =$$

$\boxed{P(D_1 \cup D_2) = P(E) + P(D_1 \cap D_2)}$

$$= 1 - \frac{21/10000}{979/10000} = 1 - \frac{21}{979} = \frac{979 - 21}{979} = \frac{958}{979}$$

ESERCIZIO

Un'urna ha 3 tipi di monete:

n_1 monete con due teste

n_2 monete con due croci

n_3 monete con una testa e una croce.

Si sceglie una moneta a caso e si scopre una faccia a caso della moneta ed è testa.

Calcolare la probabilità che l'altra faccia della moneta non scoperta è testa.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le seguenti notazioni:

$$T_1 = \{ \text{la faccia scoperta della moneta scelta è testa} \}$$

$$T_2 = \{ \text{la faccia non scoperta della moneta scelta è testa} \}$$

Viene chiesto di calcolare $P(T_2|T_1)$. Si ha

OSS. $M_1 = T_1 \cap T_2$

$$P(T_2|T_1) = \frac{P(T_2 \cap T_1)}{P(T_1)} = \frac{P(T_1 \cap T_2)}{\sum_{k=1}^{3} P(T_1|M_k)P(M_k)}$$

qui si considera la formula delle prob. totali a denominatore rispetto alla partizione di eventi M_1, M_2, M_3, dove $M_i = \{\text{scelta la moneta di tipo } i\}$

$$= \frac{n_1/(n_1+n_2+n_3)}{1 \cdot \frac{n_1}{n_1+n_2+n_3} + 0 \cdot \frac{n_2}{n_1+n_2+n_3} + \frac{1}{2}\frac{n_3}{n_1+n_2+n_3}} =$$

Si semplifica $n_1+n_2+n_3$

$$= \frac{n_1}{n_1 + 0 + \frac{n_3}{2}} = \frac{2n_1}{2n_1+n_3}$$

Si moltiplica numeratore e denominatore per 2

OSSERVAZIONE

Il risultato $P(T_2|T_1) = \frac{2n_1}{2n_1+n_3}$ ha la seguente interpretazione:

è il rapporto tra il "numero di facce testa delle monete del tipo 1" e il "numero di facce testa totali".

ESERCIZIO

Abbiamo un'urna con 90 palline numerate da 1 a 90.
Un giocatore gioca il terno 1,2,3, nel caso di estrazione casuale di 5 palline in blocco.

1) Calcolare la probabilità di fare terno
2) Calcolare la probabilità di fare terno con l'urna truccata aggiungendo 3 palline con i numeri 1,2,3.
3) Calcolare la probabilità che il trucco venga scoperto.

SVOLGIMENTO (OMETTO I CALCOLI DEI COEFF. BINOMIALI)

1) Si ha $P(\text{terno senza trucco}) = \dfrac{\cancel{\binom{3}{3}}\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}}$

oppure $P(\text{terno senza trucco}) = \dfrac{\cancel{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}}\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}}$

$= \dfrac{87\cdot 43}{\binom{90}{5}}$

2) Si ha $P(\text{terno con trucco}) = \dfrac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{87}{2}}{\binom{93}{5}} = \dfrac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 87\cdot 43}{\binom{93}{5}}$

OSS. Dai valori numerici si vede che con l'urna truccata la probabilità aumenta anche se è comunque piccola

3) Introduciamo gli eventi

$E_k = \{\text{estratte le due palline con il numero } k\}$ per $k=1,2,3$.

Viene chiesta $P(E_1\cup E_2\cup E_3)$ e si ha

$$P(E_1\cup E_2\cup E_3) = P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)-P(E_1\cap E_2)-P(E_1\cap E_3)-P(E_2\cap E_3)+P(E_1\cap E_2\cap E_3).$$

→ $P(E_1) = \dfrac{\binom{2}{2}\binom{91}{3}}{\binom{93}{5}}$; inoltre $P(E_2)=P(E_1)$ e $P(E_3)=P(E_1)$

→ $P(E_1\cap E_2) = \dfrac{\binom{4}{4}\binom{89}{1}}{\binom{93}{5}} = \dfrac{89}{\binom{93}{5}}$ oppure $P(E_1\cap E_2) = \dfrac{\binom{2}{2}\binom{2}{2}\binom{89}{1}}{\binom{93}{5}} = \dfrac{89}{\binom{93}{5}}$;

inoltre $P(E_1\cap E_3) = P(E_1\cap E_2)$ e $P(E_2\cap E_3) = P(E_1\cap E_2)$.

→ $P(E_1\cap E_2\cap E_3)=0$ perché $E_1\cap E_2\cap E_3=\emptyset$ (si dovrebbero estrarre 6 palline e invece ne vengono estratte 5)

Quindi

$$P(E_1\cup E_2\cup E_3) = 3\dfrac{\binom{91}{3}}{\binom{93}{5}} - 3\dfrac{89}{\binom{93}{5}} = \dfrac{3}{\binom{93}{5}}\left[\binom{91}{3}-89\right].$$

ESERCIZIO

Abbiamo 3 urne inizialmente vuote e n palline.
Ogni pallina sceglie a caso una delle tre urne dove andare, ognuna indipendentemente dalle altre.
Calcolare la probabilità che almeno un'urna resti vuota (dopo che tutte le palline hanno scelto l'urna dove andare).

SVOLGIMENTO

Consideriamo i seguenti eventi

$$E_k = \{ \text{l'urna } k \text{ resta vuota} \} \quad \text{per } k=1,2,3.$$

Viene chiesta $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ e si ha

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3).$$

Osserviamo che:

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \underbrace{\frac{2}{3} \cdots\cdots \frac{2}{3}}_{n \text{ volte}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 \cap E_3) = P(E_2 \cap E_3) = \underbrace{\frac{1}{3} \cdots \frac{1}{3}}_{n \text{ volte}} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0 \quad (\text{evento vuoto; non può accadere che tutte le urne restino vuote})$$

Allora

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n + 0$$
$$= 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right].$$

OSSERVAZIONE

Il risultato dipende da n come è giusto che sia.
Ad esempio, anche senza fare calcoli, già sappiamo che certamente si ha un'urna vuota per $n=1$ e per $n=2$. In effetti possiamo verificare questo risultato usando la formula ottenuta:

per $n=1 \longrightarrow 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^1 - \left(\frac{1}{3}\right)^1\right] = 3\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right] = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

per $n=2 \longrightarrow 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] = 3\left[\frac{4}{9} - \frac{1}{9}\right] = 3 \cdot \frac{3}{9} = 1$

ESERCIZIO

Un'urna ha 2 palline rosse e 4 nere.
Si estraggono a caso palline, una alla volta e senza reinserimento, fino a svuotare l'urna.

1) Calcolare la probabilità che l'ultima pallina estratta sia rossa
2) Calcolare la probabilità che l'ultima pallina estratta sia rossa sapendo che la prima estratta è rossa.
3) Calcolare la probabilità che prima e ultima estratte siano rosse.

SVOLGIMENTO

Conviene fare riferimento al seguente spazio di prob. uniforme discreto

$$\Omega = D_{6,6} = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_6) : \omega_1, \dots, \omega_6 \in \{1, \dots, 6\} \text{ con } \omega_i \neq \omega_j \text{ per } i \neq j\}$$

con $P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{\# D_{6,6}} = \dfrac{1}{6!}$

La convenzione è la seguente: $\begin{cases} 1, 2 \longleftrightarrow \text{palline rosse} \\ 3, 4, 5, 6 \longleftrightarrow \text{palline nere.} \end{cases}$

1) $P(\{\omega \in \Omega : \omega_6 = 1\} \cup \{\omega \in \Omega : \omega_6 = 2\}) \overset{\text{unione disgiunta}}{=}$
$= P(\{\omega \in \Omega : \omega_6 = 1\}) + P(\{\omega \in \Omega : \omega_6 = 2\}) = \dfrac{5!}{6!} + \dfrac{5!}{6!} = \dfrac{\cancel{5!}}{6 \cdot \cancel{5!}} + \dfrac{\cancel{5!}}{6 \cdot \cancel{5!}} =$
(nel 1° addendo $(\underbrace{\_, \_, \_, \_, \_}_{\text{permutazioni di } 2,3,4,5,6}, 1)$; nel 2° addendo $(\underbrace{\_, \_, \_, \_, \_}_{\text{permutazioni di } 1,3,4,5,6}, 2)$) $= \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

OSSERVAZIONE

La probabilità che abbiamo ottenuto coincide con la probabilità che la 1ª estratta sia rossa e cioè $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

In generale si può dimostrare che la probabilità che la i-esima estratta sia rossa è sempre la stessa, cioè $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

2) Abbiamo una probabilità condizionata

evento intersezione

$$P(\text{ultime rosse} \mid 1^a \text{ rossa}) = \frac{P(\{1^a \text{ e ultime rosse}\})}{P(1^a \text{ rossa})} = \frac{P(\{1^a \text{ e ultime rosse}\})}{1\,\cancel{2}/\cancel{6}\,3}.$$

$$P(\{1^a \text{ e ultima rosse}\}) = P(\{\omega\in\Omega:\ \omega_1=1 \text{ e } \omega_6=2\} \cup \{\omega\in\Omega:\ \omega_1=2 \text{ e } \omega_6=1\})$$

$$= P(\{\omega\in\Omega:\omega_1=1 \text{ e } \omega_6=2\}) + P(\{\omega\in\Omega:\ \omega_1=2 \text{ e } \omega_6=1\}) =$$

unione disgiunta

$$= \frac{4!}{6!} + \frac{4!}{6!} = \frac{\cancel{4!}^{1}}{6\cdot5\cdot\cancel{4!}} + \frac{\cancel{4!}^{1}}{6\cdot5\cdot\cancel{4!}}$$

$$= \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

nel 1° addendo	nel 2° addendo
$(1,-,-,-,-,2)$ permutazioni di 3,4,5,6	$(2,-,-,-,-,1)$ permutazioni di 3,4,5,6

Quindi si ha

$$P(\text{ultima rossa} \mid 1^a \text{ rossa}) = \frac{1/15}{1/3} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

OSSERVAZIONE

Il valore ottenuto può essere interpretato come segue: estratta la 1ª rossa, resta 1 pallina rossa su 5 totali e quindi, tenendo conto quanto abbiamo osservato dopo la risposta precedente, è naturale aspettarsi che venga $\frac{1}{5}$.

3) La prob. richiesta è stata calcolata durante la risposta alla domanda precedente e si ha

$$P(\{1^a \text{ e ultima rosse}\}) = \frac{1}{15}.$$

OSSERVAZIONE

Il valore ottenuto può essere interpretato come segue: tutte le possibili posizioni delle due palline rosse sono date dai sottoinsiemi di 2 elementi dell'insieme $\{1,\dots,6\}$; il loro numero è $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6\cdot5\cdot\cancel{4!}}{2\cdot\cancel{4!}} = 15$ e tutti questi insiemi sono equiprobabili; noi abbiamo il sottoinsieme $\{1,6\}$ e quindi si ha la probabilità $\frac{1}{15}$.

ESERCIZIO

Un'urna contiene n palline numerate da 1 a n, con $n \geq 2$.
Si estraggono a caso due palline, una alla volta e senza reinserimento.

Calcolare la probabilità di estrarre due numeri consecutivi.

SVOLGIMENTO

Propongo due modi per risolvere l'esercizio. Indico con E l'evento di interesse.

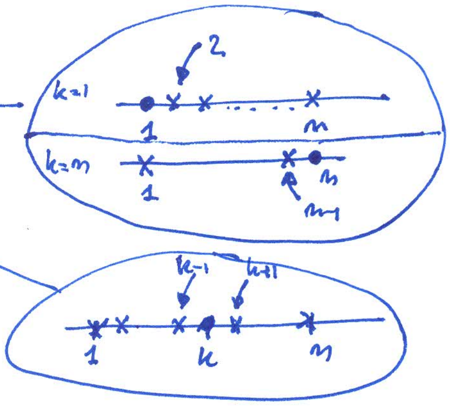
1° modo

Consideriamo la seguente partizione: $\{E_1, \dots, E_n\}$ dove

$$E_k = \{\text{il } 1^\circ \text{ numero estratto è } k\} \qquad k = 1, \dots, n.$$

Allora $P(E_1) = \dots = P(E_n) = \frac{1}{n}$. Inoltre

$$P(E|E_k) = \begin{cases} \text{per } k=1 \text{ e } k=n & \frac{1}{n-1} \\ \text{per } k=2, \dots, k=n-1 & \frac{2}{n-1} \end{cases}$$



Quindi per la formula delle prob. totali si ha

$$P(E) = \sum_{k=1}^{n} P(E|E_k) \cdot P(E_k) = \sum_{k=1}^{n} P(E|E_k) \cdot \frac{1}{n} =$$

$\frac{1}{n}$ esce fuori dalla sommatoria

$$= \frac{1}{n} \Big(\frac{1}{n-1} + \underbrace{\frac{2}{n-1} + \dots + \frac{2}{n-1}}_{n-2 \text{ volte}} + \frac{1}{n-1} \Big) = \frac{2(n-2)+1+1}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{2(n-2)+2}{n(n-1)} = \frac{2(n-2+1)}{n(n-1)} = \frac{2\cancel{(n-1)}}{n\cancel{(n-1)}} = \frac{2}{n}.$$

2° modo

Tutte le sequenze ordinate di elementi di $1, \dots, n$ senza ripetizioni sono $n(n-1)$ e tutte equiprobabili (spazio uniforme discreto ....). Quindi

$$P(E) = \frac{\#E}{n(n-1)} = \frac{\#\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),\dots,(n-1,n),(n,n-1)\}}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{2\cancel{(n-1)}}{n\cancel{(n-1)}} = \frac{2}{n}.$$

ESERCIZIO

Si considera il lancio di due dadi equi (due volte lo stesso dado, o anche due dadi diversi; non c'è differenza).

1) Calcolare la probabilità di ottenere due numeri minori o uguali a 4.

2) Calcolare la probabilità dello stesso evento della domanda precedente sapendo che la somma dei due numeri ottenuti è uguale a 7.

SVOLGIMENTO

1) ~~Supponendo che~~ In questi casi gli eventi di lanci di dadi diversi sono indipendenti. In generale per $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega = \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\}$ si ha

$P(\{\omega\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$; quindi, essendo $\#\Omega = 36$, si ha uno spazio di probabilità uniforme discreto.

Quindi $P(A) = \frac{\# A}{36} = \frac{\#\{(i,j) : i,j \in \{1, \dots, 4\}\}}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

$(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)$
$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4)$
$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4)$
$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4)$

OSS. Possiamo anche ragionare così: Consideriamo gli eventi

$A_k = \{$ si ha ≤ 4 nel lancio del k^o dado$\}$ $k = 1, 2.$

Allora $A = A_1 \cap A_2$, con A_1 e A_2 indipendenti; quindi

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

2) Sia $E = \{$la somma dei due valori ottenuti è $7\}$. Allora

$$P(A|E) = \frac{\#(A \cap E)}{\# E} = \frac{\#\{(3,4), (4,3)\}}{\#\{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

OSS. Sappiamo che A_1 e A_2 sono indipendenti. Ci si chiede se lo sono anche sotto l'evento E, cioè $P(A_1 \cap A_2 | E) = P(A_1|E)P(A_2|E)$?

Abbiamo appena visto che $P(A|E) = P(A_1 \cap A_2 | E) = \frac{1}{3}$. Inoltre

$$P(A_1|E) = \frac{\#(A_1 \cap E)}{\# E} = \frac{\#\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3)\}}{\#\{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (4,3), (3,4)\}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(A_2|E) = \frac{\#(A_2 \cap E)}{\# E} = \frac{\#\{(6,1), (5,2), (4,3), (3,4)\}}{\#\{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (4,3), (3,4)\}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$P(A_1|E)P(A_2|E) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \neq$. Quindi la risposta è NO.