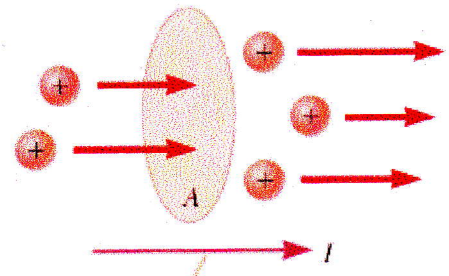
CORRENTE E CIRCUITI IN CORRENTE CONTINUA

Corrente elettrica

Consideriamo delle cariche elettriche in moto lungo la direzione perpendicolare a una superficie di area A. Si dice CORRENTE ELETTRICA la rapidità con cui la carica elettrica fluisce attraverso la superficie considerata. Se ΔQ è la carica elettrica che attraversa la superficie considerata nell'intervallo di tempo Δt, si definisce la CORRENTE MEDIA nell'intervallo di tempo Δt:



Il verso della corrente è il verso nel quale le cariche positive si muovono se sono libere di farlo.

$$\boxed{I_{med} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}}$$

Al limite per $\Delta t \to 0$ si definisce quindi la CORRENTE ISTANTANEA:

$$\boxed{I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = [Q(t)]'}$$

dove $Q(t)$ è la quantità di carica elettrica che ha attraversato la superficie considerata tra un istante fissato e l'istante t.

[Nel S.I. l'unità di misura della corrente elettrica è l'AMPERE (A). Risulta $\boxed{1\ A = 1\ \frac{C}{s}}$]

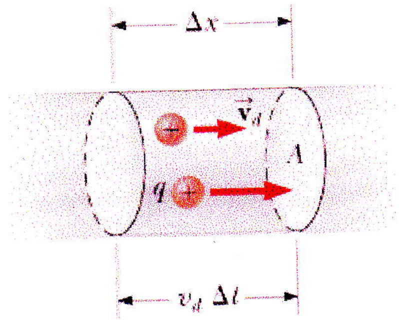
[Convenzione: il verso positivo della corrente è quello in cui fluisce la carica positiva, a prescindere dal segno delle cariche che sono effettivamente in moto.]

In un conduttore normale (ad es., rame) la corrente è generata dal moto di elettroni liberi, che hanno carica negativa: dunque, in un conduttore il verso della corrente è opposto al verso del flusso di carica degli elettroni.

Un fascio di protoni (che hanno carica positiva) in un acceleratore di particelle produce una corrente che ha lo stesso verso del flusso di carica dei protoni.

Nei gas ionizzati e nelle soluzioni elettrolitiche la corrente è dovuta al moto di cariche di entrambi i segni.

I costituenti mobili che contribuiscono alla corrente elettrica sono chiamati PORTATORI DI CARICA.



Consideriamo dei portatori di carica identici in moto in un conduttore cilindrico avente sezione trasversale di area A. Il volume di un tratto di conduttore di lunghezza Δx è quindi

$\Delta V = A\,\Delta x$. Sia n il numero di portatori di carica per unità di volume: il numero di portatori di carica nel volume ΔV è quindi $\Delta N = n\,\Delta V = n A\,\Delta x$.

Se q è la carica elettrica di ciascun portatore, allora la quantità di carica totale nell'elemento di volume ΔV è:

$$\Delta Q = q\,\Delta N = n q A\,\Delta x$$

Indichiamo con V_d la velocità media con cui i portatori di carica si muovono lungo la direzione parallela all'asse del conduttore cilindrico, detta VELOCITÀ DI DERIVA.

Sia Δt l'intervallo di tempo che un portatore di carica impiega a percorrere il tratto di lunghezza Δx lungo l'asse del cilindro. Allora risulta $\Delta x = V_d \Delta t$, e quindi Δt è anche l'intervallo di tempo necessario affinché tutti i portatori di carica contenuti nel volume ΔV escano da questo elemento di volume.

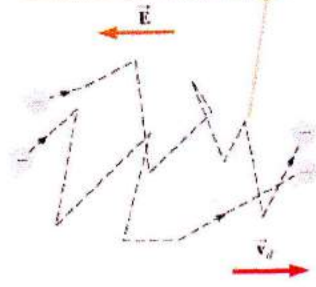
Dunque otteniamo: $\Delta Q = n q A V_d \Delta t$, e quindi

$$\boxed{I_{med} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = n q V_d A}$$

Questa relazione lega tra loro la quantità macroscopica I_{med} con le grandezze microscopiche n, q e V_d.

Vediamo meglio come si muovono gli elettroni liberi in un conduttore. In assenza di una differenza di potenziale ai capi del conduttore, gli elettroni si muovono casualmente quasi come le molecole di un gas, urtando con elevata frequenza gli atomi del conduttore: questo produce un moto caotico e complicato.

Il moto casuale dei portatori di carica viene modificato dal campo, ed essi hanno una velocità di deriva con verso opposto a quello del campo elettrico



Se applichiamo una differenza di potenziale ai capi del conduttore, viene generato un campo elettrico all'interno del conduttore (attenzione, adesso il conduttore non è in equilibrio elettrostatico, poiché stiamo studiando il caso di cariche in moto!!). Questo campo elettrico produce una forza elettrica che agisce sugli elettroni, li accelera tra un urto e il successivo, e quindi produce una corrente: il moto indotto dalla forza elettrica si sovrappone al moto casuale preesistente, e il risultato è un moto lungo la direzione del campo elettrico con velocità media $\vec{V_d}$ avente verso opposto rispetto al verso di $\vec{E}$; $\vec{V_d}$ è proprio la velocità di deriva introdotta in precedenza.

Gli elettroni, urtando gli atomi del conduttore durante il moto sotto l'azione della forza elettrica, trasferiscono energia agli atomi causando un aumento della loro energia vibrazionale (gli atomi "oscillano" attorno a posizioni di equilibrio stabile nella struttura reticolare che costituisce un metallo) e quindi un aumento di temperatura del conduttore (EFFETTO JOULE): inizialmente si ha energia potenziale elettrica degli elettroni nel campo elettrico, che poi si converte in energia cinetica degli elettroni per via del lavoro svolto dalla forza elettrica; negli urti tra gli elettroni e gli atomi del metallo una parte dell'energia cinetica degli elettroni viene trasferita agli atomi, con conseguente aumento dell'energia interna del conduttore.

Dall'equazione ottenuta a pag. 3 ricaviamo la DENSITÀ DI CORRENTE J nel conduttore, cioè la "corrente per unità di superficie":

$$\boxed{J = \frac{I}{A} = n q v_d}$$

, che si misura in A/m^2 nel S.I.

Esempio 1. Un tipico filo di rame ha una sezione $A = 3{,}31 \times 10^{-6} m^2$. Esso trasporta una corrente $I = 10$ A. Qual è la velocità di deriva degli elettroni nel filo? Assumere che ogni atomo di rame fornisca un elettrone libero di conduzione. La densità del rame è $\rho = 8{,}92 \times 10^3$ kg/m^3.

Consideriamo la densità ρ del rame. Una mole di rame ha una massa $M = 0{,}0635$ kg/mol ; indichiamo con V il volume di 1 mole di rame. Risulta:

$$\rho = \frac{M}{V}\ ;$$ moltiplichiamo e dividiamo per il numero di Avogadro N_A:

$$\rho = \frac{1}{N_A}\left(\frac{N_A}{V}\right)M\ ;$$ per le ipotesi del problema, N_A/V è la densità di portatori di carica nel rame (V è il volume di 1 mole, e N_A è il numero di atomi di rame in 1 mole), quindi otteniamo:

$$\rho = \frac{nM}{N_A}, \quad \text{cioè} \quad n = \frac{N_A\rho}{M}$$

Pertanto, usando l'equazione a pag. 3 otteniamo:

$$V_d = \frac{I}{nqA} = \frac{IM}{N_A\rho qA} =$$

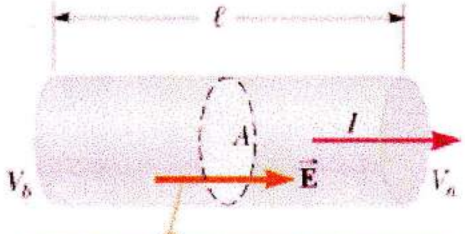
$$= \frac{(10\ \mathrm{A})(0{,}0635\ \mathrm{kg/mol})}{(6{,}02214\times10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1})(8{,}92\times10^{3}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3})(1{,}60218\times10^{-19}\ \mathrm{C})(3{,}31\times10^{-6}\ \mathrm{m}^2)} =$$

$$= 2{,}229\times10^{-4}\ \mathrm{m/s}$$

[Dunque, le velocità di deriva in un conduttore sono molto piccole. Tuttavia, le variazioni del campo elettrico nel conduttore quando viene applicata la differenza di potenziale ai suoi capi si propagano quasi alla velocità della luce, per cui tutti gli elettroni liberi nel conduttore partecipano al moto di deriva quasi simultaneamente.]

Resistenza e legge di Ohm

Vedremo più avanti che la velocità di deriva è direttamente proporzionale al modulo del campo elettrico instaurato nel conduttore.



Una differenza di potenziale $\Delta V = V_b - V_a$ applicata ai capi del conduttore genera un campo elettrico $\vec{E}$, e questo campo produce una corrente I che è proporzionale alla differenza di potenziale.

In un conduttore con sezione costante e un campo elettrico uniforme $\vec{E}$ instaurato al suo interno, la differenza di potenziale ai capi del conduttore è proporzionale al modulo del campo elettrico, come abbiamo già visto.

Dunque, mettendo insieme queste due informazioni, concludiamo che, se applichiamo una differenza di potenziale $\Delta V = V_b - V_a$ agli estremi di un conduttore come nella figura, la corrente che inizia a fluire nel conduttore è proporzionale alla tensione applicata: $I \propto \Delta V$.

Vale quindi la LEGGE DI OHM:

$$\boxed{\Delta V = RI}$$, dove R è una costante di proporzionalità denominata RESISTENZA del conduttore considerato.

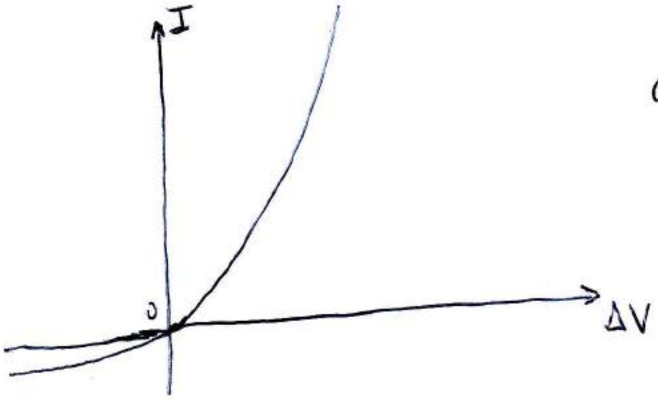
L'unità di misura della resistenza è

$$\boxed{1 \, \frac{V}{A} = 1 \, \Omega \quad (\text{ohm})}$$

[Per un dato conduttore, la sua resistenza dipende dal materiale di cui è costituito e dalla sua geometria e dimensioni.]

In molti casi la resistenza (misurata dal rapporto $\Delta V / I$) è costante su un elevato intervallo di tensione applicata.

La legge di Ohm e' una legge sperimentale valida solo per certi materiali in opportune condizioni. I materiali che obbediscono alla legge di Ohm sono chiamati OHMICI. Un esempio di dispositivo NON OHMICO e' il diodo a semiconduttore, per il quale la relazione tra tensione applicata e corrente non e' lineare:



curva tensione-corrente per un diodo a semiconduttore.

Un elemento che possiede una determinata resistenza elettrica e' detto RESISTORE (o anche RESISTENZA), e nei circuiti e' rappresentato schematicamente dal simbolo —WW—

La resistenza di un filo conduttore ohmico avente lunghezza l e sezione costante A e' data dalla legge seguente:

$$\boxed{R = \rho \frac{l}{A}}$$

dove ρ e' una costante di proporzionalita' detta RESISTIVITA' del materiale considerato (attenzione ai diversi usi del simbolo ρ che si fanno in fisica...); l'unita' di misura della resistivita' e' $\boxed{1\ \Omega \cdot m}$. La resistivita' dipende dal materiale, e varia con la temperatura.

L'inverso della resistività si chiama CONDUCIBILITÀ e si rappresenta spesso con la lettera greca σ (anche qui, attenzione ai diversi usi del simbolo σ in fisica), per cui si può anche scrivere $R = \frac{\ell}{\sigma A}$.

Poiché risulta $R = \frac{\ell}{\sigma A} = \frac{\Delta V}{I}$, possiamo scrivere

$I = \sigma A \frac{\Delta V}{\ell}$, legge simile come struttura alla legge di Fourier della conduzione termica: $P = kA\frac{\Delta T}{L}$, vista a suo tempo.

<u>Esempio 2</u>. Il raggio di un filo conduttore di nichel-cromo è $r = 0{,}32\ mm$.

a) Calcolare la resistenza per unità di lunghezza di questo filo.

b) Se viene applicata una differenza di potenziale di $10\ V$ ai capi di un filo di nichel-cromo avente lunghezza $\ell = 1\ m$, qual è la corrente nel filo?

a)
Poiché $R = \rho\frac{\ell}{A}$, risulta $\frac{R}{\ell} = \frac{\rho}{A} = \frac{(1\times 10^{-6}\ \Omega \cdot m)}{\pi\,(0{,}32\times 10^{-3}\ m)^2} = 3{,}1085\ \frac{\Omega}{m}$

b) Risulta $I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V}{\left(\frac{R}{\ell}\right)\cdot \ell} = \frac{A\ \Delta V}{\rho\ \ell} = \frac{\pi r^2\ \Delta V}{\rho \ell} =$

$= \frac{\pi\,(0{,}32\times 10^{-3}\ m)^2\ (10\ V)}{(1\times 10^{-6}\ \Omega \cdot m)\ (1\ m)} = 3{,}2170\ A$

La resistività dipende dalla temperatura, nei metalli, secondo la legge $\boxed{\rho = \rho_0 \left[1 + \alpha (T - T_0)\right]}$ dove T è la temperatura in gradi Celsius, $T_0 = 20\ °C$ e ρ_0 è la resistività del materiale alla temperatura di $20\ °C$. Il coefficiente α è detto COEFFICIENTE TERMICO DELLA RESISTIVITÀ.

Dunque, vale anche la relazione

$R = R_0 \left[1 + \alpha (T - T_0)\right]$, che esprime la dipendenza della resistenza di un dato conduttore dalla temperatura.

Materiale	Resistività[a] ($\Omega \cdot m$)	Coefficiente termico[b] α [(°C)$^{-1}$]
Argento	1.59×10^{-8}	3.8×10^{-3}
Rame	1.7×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Oro	2.44×10^{-8}	3.4×10^{-3}
Alluminio	2.82×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Tungsteno	5.6×10^{-8}	4.5×10^{-3}
Ferro	10×10^{-8}	5.0×10^{-3}
Platino	11×10^{-8}	3.92×10^{-3}
Piombo	22×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Nichel-cromo[c]	1.00×10^{-6}	0.4×10^{-3}
Carbonio	3.5×10^{-5}	-0.5×10^{-3}
Germanio	0.46	-48×10^{-3}
Silicio[d]	2.3×10^{3}	-75×10^{-3}
Vetro	da 10^{10} a 10^{14}	
Gomma dura	$\sim 10^{13}$	
Zolfo	10^{15}	
Quarzo (fuso)	75×10^{16}	

[a] Tutti i valori a 20°C. In questa tabella, tutti gli elementi sono assunti come privi di impurità.
[b] Il coefficiente di temperatura della resistività verrà discusso in seguito in questo paragrafo.
[c] Una lega di nichel-cromo usata comunemente per gli elementi di riscaldamento. La resistività del nichel-cromo cambia con la composizione e va da 1.00×10^{-6} a $1.50 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot m$.
[d] La resistività del silicio è molto sensibile alla sua purezza. Il valore può cambiare di parecchi ordini di grandezza quando viene drogato con altri atomi.

[1] Il simbolo ρ utilizzato per la resistività non deve essere confuso con lo stesso simbolo usato in precedenza per la densità di massa e per la densità volumica di carica.

Superconduttori

La resistività a temperature ordinarie è associata agli urti degli elettroni con gli atomi del metallo in moto vibrazionale attorno alle loro posizioni di equilibrio. A bassissime temperature, in genere la resistività tende a un valore residuo non nullo.

Ma esistono dei particolari metalli per i quali la resistenza diventa nulla al di sotto di una temperatura critica T_c caratteristica del materiale. Questi materiali sono chiamati SUPERCONDUTTORI.

La scoperta avvenne nel 1911 grazie a Heike Kamerlingh-Onnes e ai suoi studi sul comportamento del mercurio a bassissime temperature: per il mercurio risulta $T_c = 4{,}15\ K$. Per $T < T_c$ le resistività dei superconduttori sono minori di $4 \times 10^{-25}\ \Omega \cdot m$, cioè sono praticamente nulle.

Negli ultimi decenni sono stati individuati materiali ceramici con T_c più elevata. T_c dipende dalla composizione chimica, dalla pressione e dalla struttura del materiale. Non tutti i metalli diventano superconduttori a bassissima temperatura (ad esempio: rame, argento, oro non sono superconduttori, mentre alluminio, piombo, stagno e zinco sì). Caratteristica fondamentale dei superconduttori: una volta che della corrente scorre nel materiale, questa continua a scorrere senza bisogno di applicare una tensione!

Applicazioni: realizzazione di magneti superconduttori per imaging medico e per acceleratori di particelle.

Materiale	T_c (K)
$HgBa_2Ca_2Cu_3O_8$	134
Tl—Ba—Ca—Cu—O	125
Bi—Sr—Ca—Cu—O	105
$YBa_2Cu_3O_7$	92
Nb_3Ge	23.2
Nb_3Sn	18.05
Nb	9.46
Pb	7.18
Hg	4.15
Sn	3.72
Al	1.19
Zn	0.88

Modello per la conduzione elettrica

Modello classico (Paul Drude, 1900). Si tratta di un modello che collega la legge di Ohm al moto elettronico nei metalli.

Ipotesi del modello.

1) un solido conduttore è costituito da un reticolo tridimensionale di atomi ionizzati e da elettroni liberi (ELETTRONI DI CONDUZIONE); questi elettroni si "svincolano" dagli atomi del metallo quando questi atomi si legano per formare il solido;
2) gli elettroni di conduzione riempiono il volume del conduttore; in assenza di campo elettrico applicato si muovono in maniera casuale dentro il conduttore, come le molecole di un gas in una scatola ("GAS DI ELETTRONI"); l'unico modo in cui gli elettroni di conduzione interagiscono con gli atomi del reticolo del solido sono gli urti;
3) se applichiamo un campo elettrico al conduttore, gli elettroni si muovono (in media) con velocità di deriva ~~avente~~ modulo V_d e verso opposto a quello del campo elettrico; V_d è molto più piccolo del modulo della velocità media di agitazione termica (10^{-4} m/s contro 10^{6} m/s); il moto di un elettrone dopo un urto è indipendente dal suo moto prima dell'urto; l'energia cinetica acquistata dagli elettroni nel campo elettrico viene trasferita agli atomi del conduttore negli urti: l'energia vibrazionale degli atomi aumenta, con conseguente aumento della temperatura del conduttore.

Cerchiamo anzitutto di collegare la velocità di deriva elettronica ad altri parametri del sistema conduttore.

Un elettrone libero ha massa m_e e carica elettrica $q = -e$; quando si trova sotto l'azione di un campo elettrico $\vec{E}$ sente una forza $\vec{F} = q\vec{E}$, per cui la sua accelerazione è

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m_e}$$

, se è possibile ignorare tutte le interazioni tranne la forza elettrica. Essendo $\vec{E}$ uniforme, l'accelerazione dell'elettrone risulta costante. Pertanto, se la velocità dell'elettrone subito dopo un urto è $\vec{V}_i$, in un istante t subito prima che si verifichi l'urto seguente risulta

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_i + \vec{a}\,t = \vec{V}_i + \frac{q\vec{E}}{m_e}t$$

Calcoliamo ora il valore medio di $\vec{V}(t)$ su tutti gli elettroni nel conduttore, su tutti i possibili intervalli di tempo t tra due collisioni successive e su tutti i possibili valori della velocità $\vec{V}_i$; nelle ipotesi fatte in partenza, risulta $\vec{V}_{i,med} = 0$; posto $t_{med} = \tau$, otteniamo:

$$\boxed{\vec{V}_{med} = \frac{q\vec{E}}{m_e}\tau = \vec{V}_d}$$

Questa è l'espressione cercata per la velocità di deriva elettronica.

Dunque risulta $V_d = |\vec{V}_d| = \dfrac{eE}{m_e}\tau$.

L'espressione della corrente diventa quindi:

$$I = n e V_d A = n e \left(\frac{eE}{m_e} \tau \right) A = \frac{n e^2 E}{m_e} \tau A$$

Secondo la legge di Ohm risulta $\quad I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V}{\rho \frac{l}{A}} = \frac{\Delta V}{\rho l} A$

Dato che il campo elettrico nel conduttore e' uniforme, risulta $\Delta V = E l$, per cui possiamo scrivere $\quad I = \frac{E \cancel{l}}{\rho \cancel{l}} A = \frac{E}{\rho} A$

Dunque, vale l'identita'

$$\frac{\cancel{E}}{\rho} \cancel{A} = \frac{n e^2 \cancel{E}}{m_e} \tau \cancel{A}, \quad \text{da cui ricaviamo}$$

$$\boxed{\rho = \frac{m_e}{n e^2 \tau}}$$

Dunque, la resistivita' dipende da parametri caratteristici del materiale e dei portatori di carica; non dipende né dal campo elettrico né dalla differenza di potenziale applicata. Questo ovviamente vale solo per conduttori ohmici. L'intervallo di tempo medio τ tra due urti consecutivi e' dato dal rapporto tra la distanza media tra due collisioni successive (CAMMINO LIBERO MEDIO ELETTRONICO) e la velocita' media legata all'agitazione termica. Infine, osserviamo che dalla relazione $I = \frac{E}{\rho} A$ ricaviamo le seguenti espressioni per il vettore densita' di corrente: $\boxed{\vec{J} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}}$

Esempio 3.

a) Dare una stima del tempo medio tra due collisioni successive degli elettroni con gli atomi del solido nel rame a 20 °C.

b) Supponendo che la velocità media degli elettroni liberi nel rame sia $V_m = 1{,}6 \times 10^6$ m/s, calcolare il cammino libero medio degli elettroni nel rame.

a) L'intervallo di tempo medio tra due urti successivi è

$$\tau = \frac{m_e}{n e^2 \rho} \qquad (\rho \text{ qui è la resistività del rame})$$

Nell'esempio 1 abbiamo ricavato la relazione $n = \frac{N_A \rho_V}{M}$, dove ρ_V è la densità di massa del rame, per cui otteniamo:

$$\tau = \frac{m_e}{e^2 \rho} \frac{M}{N_A \rho_V} = \frac{m_e M}{N_A e^2 \rho_V \rho} =$$

$$= \frac{(9{,}10938 \times 10^{-31}\ \text{kg})(0{,}0635\ \text{kg/mol})}{(6{,}02214 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1})(1{,}60218 \times 10^{-19}\ \text{C})^2 (8{,}92 \times 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3})(1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})} =$$

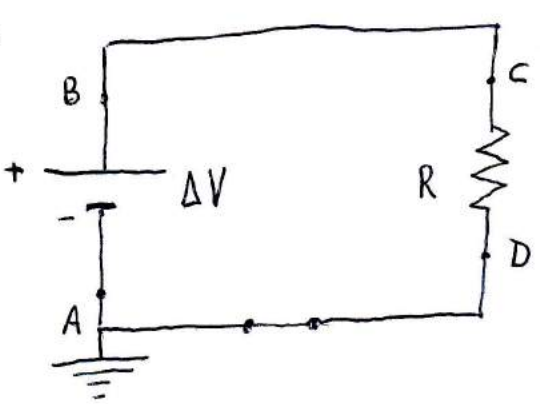
$= 2{,}5 \times 10^{-14}$ s (intervallo temporale piccolissimo)

b) Risulta $l_{med} = V_m \tau = (1{,}6 \times 10^6 \frac{m}{s})(2{,}5 \times 10^{-14} s) = 3{,}9482 \times 10^{-8}$ m

(distanza molto maggiore della distanza interatomica, che è circa 2×10^{-10} m).

Problemi legati al modello classico della conduzione elettronica: non dà risultati in accordo con i valori sperimentali per quanto riguarda la resistività e la dipendenza della resistività dalla temperatura: i valori di V_{med} ottenuti secondo un modello di "gas di elettroni" classico danno valori di ρ 10 volte al di sotto di quelli reali; altra cosa: la dipendenza di ρ dalla temperatura in questo modello varia in modo proporzionale a $\sqrt{T}$, ma sappiamo che nei metalli in realtà la dipendenza è lineare. Soltanto con un'analisi basata sulla fisica quantistica si riesce a modellare correttamente il comportamento degli elettroni di conduzione in un metallo.

Energia e potenza nei circuiti elettrici



In un circuito elettrico, una quantità di energia viene trasferita da una sorgente (ad esempio una batteria) a un componente o un dispositivo. Vediamo quanto vale la potenza trasferita in un circuito. Consideriamo il caso semplice in cui viene fornita energia a un resistore collegato ai capi di una batteria. Trascuriamo la resistenza dei fili di collegamento (spesso è un'ipotesi realistica). Consideriamo una certa quantità di carica positiva che percorre il circuito partendo dal punto A, girando in senso antiorario attraverso la batteria e il resistore e tornando quindi al punto A.

Andiamo per punti:

- quando la carica Q passa da A a B attraverso la batteria, l'energia potenziale elettrica del sistema aumenta della quantita' $Q \Delta V$, a spese dell'energia chimica della batteria (occorre lavoro per "spingere" la carica Q da A a B).

- quando la carica Q passa da C a D attraverso il resistore, l'energia potenziale elettrica del sistema diminuisce esattamente di quanto era aumentata in precedenza a causa delle collisioni con gli atomi del resistore: questa energia si trasforma in energia interna a seguito dell'aumento dell'energia vibrazionale degli atomi del resistore. Nei tratti BC e DA non c'e' nessuna variazione energetica del sistema, per le ipotesi fatte. Al netto di tutto, quando la carica Q e' tornata nel punto A, c'e' stato un trasferimento di energia chimica della batteria al resistore, la cui energia interna e' aumentata.

Poi, dato che il resistore e' in contatto con l'esterno, l'aumento di temperatura del resistore provoca un trasferimento di energia dal resistore all'aria per conduzione termica e anche per irraggiamento; quando l'aumento di energia interna e' bilanciato dall'energia emessa, la temperatura del resistore resta costante.
Molti dispositivi elettrici utilizzano parti meccaniche opportunamente sagomate per favorire il trasferimento di energia verso l'esterno in modo che il componente non raggiunga temperature troppo elevate.

Vediamo la potenza consumata dal sistema allorché la carica Q attraversa il resistore:

$$[U(t)]' = [Q(t)\,\Delta V]' = [Q(t)]' \cdot \Delta V = I(t)\,\Delta V$$

(ΔV è costante)

Questa potenza viene fornita al resistore, cioè risulta

$$\boxed{P(t) = I(t)\,\Delta V}$$

Anche se questa relazione è stata ottenuta nel caso di una batteria che invia energia a un resistore, essa è valida per calcolare la potenza trasferita da qualsiasi generatore di tensione a un dispositivo attraverso cui passi una corrente I con una differenza di potenziale ΔV ai suoi capi.

Nel caso specifico di un resistore, usando la legge di Ohm

$\Delta V = R I$, possiamo anche scrivere

$$\boxed{P = I^2 R = \frac{(\Delta V)^2}{R}}$$

Esempio 4. Un riscaldatore a immersione deve portare la temperatura di 1,5 kg di acqua da 10 °C a 50 °C in 10 min quando funziona a 110 V.

a) Qual è la resistenza del riscaldatore

b) Determinare la quantità di energia trasferita all'acqua nel processo.

a) Trascurando la variazione della resistenza con la temperatura, e considerando una velocità di trasferimento di energia costante, possiamo scrivere:

$$P = \frac{(\Delta V)^2}{R} = \frac{mc(\Delta T)}{\Delta t},$$

dove abbiamo utilizzato la legge fondamentale della calorimetria. Risulta quindi:

$$R = \frac{(\Delta V)^2 \Delta t}{mc(\Delta T)} =$$

$$= \frac{(110\ V)^2 \cdot (600\ s)}{(1{,}5\ kg)(4186\ J/kg\,°C)(40\ °C)} = 28{,}9059\ \Omega$$

b) Risulta $\Delta U = P\Delta t = mc(\Delta T) =$

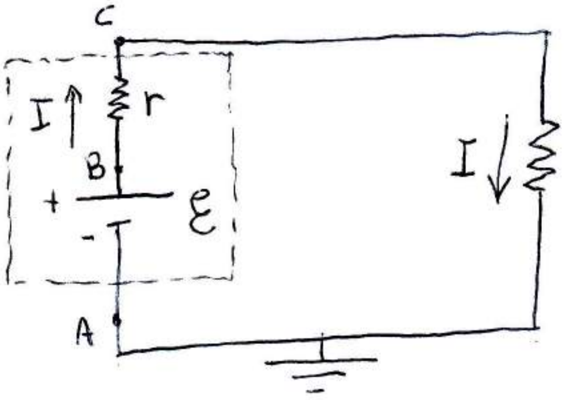
$$= (1{,}5\ kg)\left(4186\ \frac{J}{kg\ °C}\right)(40\ °C) = 2{,}5116 \times 10^5\ J =$$

$$= 69{,}7667\ Wh \simeq 0{,}0698\ kWh$$

Sorgenti di f.e.m.

Una SORGENTE DI F.E.M. è un dispositivo che mantiene una differenza di potenziale costante tra due punti: ad esempio, una batteria o un generatore. La f.e.m. $\mathcal{E}$ è il lavoro svolto per unità di carica elettrica spostata lungo il circuito, per cui ha le dimensioni di una differenza di potenziale e quindi si misura in volt nel S.I.

In una batteria o generatore reale, la tensione ai capi non coincide con la f.e.m. della sorgente a causa della RESISTENZA INTERNA del dispositivo. Un generatore di tensione reale, collegato a una resistenza esterna in un circuito, si può schematizzare così:



La batteria reale è rappresentata da una sorgente di f.e.m. ideale in serie con una resistenza interna r.

Passando da A a B e poi a C, prima il potenziale aumenta di una quantità $\mathcal{E}$, e poi diminuisce di una quantità Ir nell'attraversamento della resistenza interna r. Dunque, ai capi della batteria, cioè tra i punti A e C, si osserva la tensione $\Delta V = V_C - V_A = \mathcal{E} - rI$. In assenza di collegamento esterno (cioè in assenza del ramo con il resistore R) risulta $I = 0$ e quindi $\Delta V = \mathcal{E}$, per cui la f.e.m. $\mathcal{E}$ è anche detta TENSIONE A CIRCUITO APERTO (cioè quando $I=0$).

Osserviamo che, continuando a percorrere il circuito in senso orario da C ad A attraverso il resistore R, la "caduta di potenziale" attraverso R deve bilanciare esattamente il "salto di potenziale" da A a C attraverso il generatore:

$$RI = \mathcal{E} - rI, \quad \text{da cui otteniamo} \quad (R+r)I = \mathcal{E}$$

R è anche detta RESISTENZA DI CARICO.

e quindi $$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$

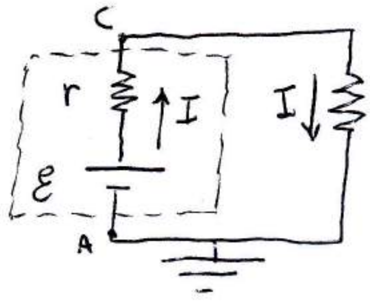
Se $R \gg r$, risulta $I \simeq \frac{\mathcal{E}}{R}$ e possiamo trascurare di fatto l'effetto della resistenza interna.

Poiché $I\mathcal{E} = I^2R + I^2r$, si vede che la potenza totale fornita dalla sorgente di f.e.m. $(I\mathcal{E})$ viene suddivisa tra la potenza ceduta alla resistenza interna e la potenza ceduta alla resistenza di carico.

<u>Esempio 5</u>. Una batteria ha una f.e.m. di 12 V e una resistenza interna $r = 0{,}05\,\Omega$. I suoi terminali sono collegati a una resistenza di carico $R = 3\,\Omega$.

a) Trovare la corrente nel circuito e la differenza di potenziale ai terminali della batteria.

b) Calcolare la potenza fornita al resistore di carico, quella fornita alla resistenza interna della batteria e la potenza fornita dalla batteria

a) 

Risulta: $$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} = \frac{12\,V}{3\,\Omega + 0{,}05\,\Omega} = 3{,}9344\ A$$

$$\Delta V = V_C - V_A = \mathcal{E} - rI = \left(1 - \frac{r}{R+r}\right)\mathcal{E} = \frac{R\mathcal{E}}{R+r} =$$

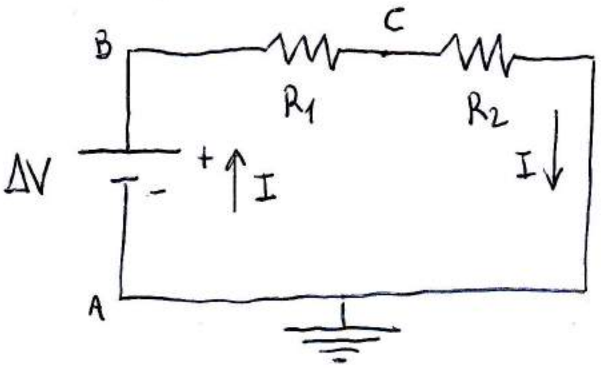
$$= \frac{\mathcal{E}}{1+\frac{r}{R}} = \frac{12\,V}{1+\frac{0{,}05\,\Omega}{3\,\Omega}} = 11{,}8033\ V$$

b) $$\mathcal{P}_R = R I^2 = \frac{R\, \mathcal{E}^2}{(R+r)^2} = \frac{(3\,\Omega)(12\,V)^2}{(3{,}05\,\Omega)^2} = 46{,}4391\ W$$

$$\mathcal{P}_r = r I^2 = \frac{r\, \mathcal{E}^2}{(R+r)^2} = \frac{(0{,}05\,\Omega)(12V)^2}{(3{,}05\,\Omega)^2} = 0{,}7740\ W$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_R + \mathcal{P}_r = \frac{\cancel{(R+r)}\, \mathcal{E}^2}{(R+r)^{\cancel{2}}} = \frac{(12\ V)^2}{3{,}05\,\Omega} = 47{,}2131\ W$$

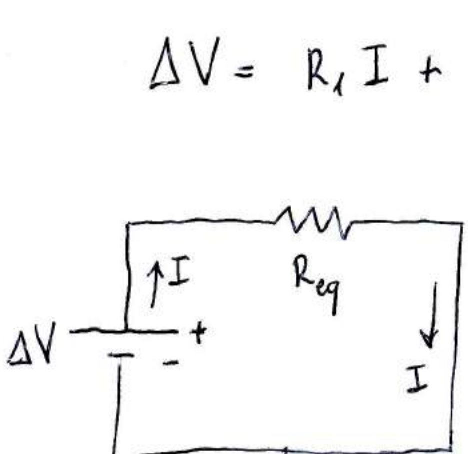
Resistori in serie e in parallelo



Lo schema qui a fianco rappresenta una sorgente di f. e. m. che alimenta due resistori collegati IN SERIE.

In un collegamento in serie, attraverso i resistori passa la stessa corrente I. Partendo dal punto A del circuito e procedendo in senso orario, abbiamo dapprima un salto di potenziale $\Delta V > 0$, e poi una doppia caduta di potenziale attraverso i due resistori in serie. Lungo il circuito completo deve quindi risultare:

$$\Delta V = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I$$



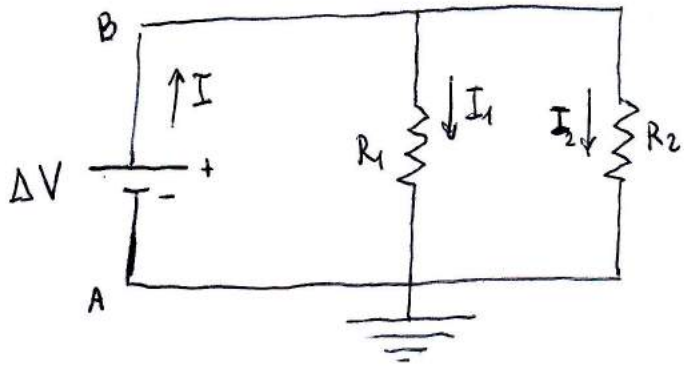
E' come se si trattasse di un circuito con un' unica resistenza di carico

$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2}$$ (RESISTENZA EQUIVALENTE DELLA SERIE DI R_1 E R_2)

In generale, la connessione in serie di n resistori equivale a un unico resistore avente resistenza equivalente $\boxed{R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i}$

In una serie di n resistori risulta sempre $R_{eq} > (R_i)_{i=1,\dots,n}$

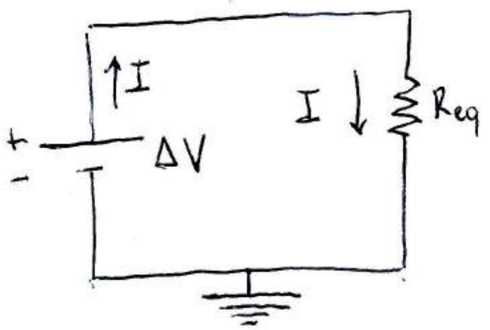
Osserviamo che se, nella connessione in serie, un resistore si guasta (e quindi il circuito "si apre" in un punto), la corrente smette di scorrere nell'intero circuito



Lo schema qui a fianco rappresenta una sorgente di f.e.m. che alimenta due resistori collegati IN PARALLELO.

In un collegamento in parallelo, ai capi dei resistori è applicata la stessa differenza di potenziale. Per la conservazione della carica elettrica totale, la corrente erogata dal generatore di tensione si "divide" tra i due resistori, cioè deve risultare

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\Delta V$$



E' come se si trattasse di un circuito con un'unica resistenza di carico R_{eq}, tale che $I = \dfrac{\Delta V}{R_{eq}}$

Dalla relazione $I = I_1 + I_2$ ricaviamo quindi

$\dfrac{\Delta V}{R_{eq}} = \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)\Delta V$, e infine $\boxed{\dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$

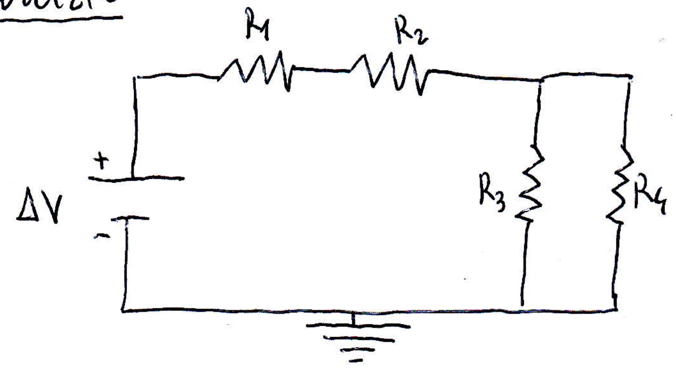
In generale, la connessione in parallelo di n resistori equivale a un unico resistore avente resistenza equivalente R_{eq} tale che:

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$$

In un parallelo di n resistori risulta sempre $R_{eq} < (R_i)_{i=1,\dots,n}$

Osserviamo che se, nella connessione in parallelo, un resistore si guasta (e quindi un ramo "si apre"), la corrente continua a fluire negli altri rami in parallelo.

Esercizio



$R_1 = 8\ \Omega$ $R_2 = 4\ \Omega$

$R_3 = 6\ \Omega$ $R_4 = 3\ \Omega$

$\Delta V = 42\ V$

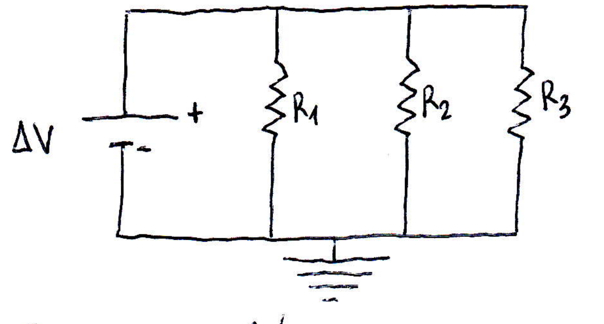
a) Calcolare la resistenza equivalente della rete di resistori del circuito

b) Calcolare la corrente che scorre attraverso ciascun resistore.

Esercizio

$R_1 = 3\ \Omega$ $R_2 = 6\ \Omega$ $R_3 = 9\ \Omega$

$\Delta V = 18\ V$



a) Calcolare la resistenza equivalente del circuito.

b) Trovare la corrente che scorre attraverso ciascun resistore.

c) Calcolare la potenza fornita a ciascun resistore e la potenza totale erogata dal generatore di tensione.

Leggi di Kirchhoff

Per analizzare circuiti più complessi di quelli appena visti è necessario ricorrere alle due LEGGI DI KIRCHHOFF.

Diamo prima di tutto alcune definizioni:

- si dice RAMO un tratto singolo di un circuito che contiene almeno un elemento (generatore, resistenza, ecc.);
- si dice NODO un punto di un circuito in cui confluiscono più di due rami;
- si dice MAGLIA di un circuito un percorso chiuso compreso nel circuito.

PRIMA LEGGE DI KIRCHHOFF (REGOLA DEI NODI): in ogni nodo di un circuito, la somma algebrica delle correnti deve essere nulla.

SECONDA LEGGE DI KIRCHHOFF (REGOLA DELLE MAGLIE): la somma algebrica delle differenze di potenziale ai capi di ciascun elemento di una maglia (scelto il senso di percorrenza della maglia) deve essere nulla.

La prima legge di Kirchhoff è conseguenza della legge di conservazione della carica elettrica: non ci può essere un accumulo di carica in un punto; per convenzione si considerano positive le correnti entranti in un nodo, e negative le correnti uscenti dal nodo.

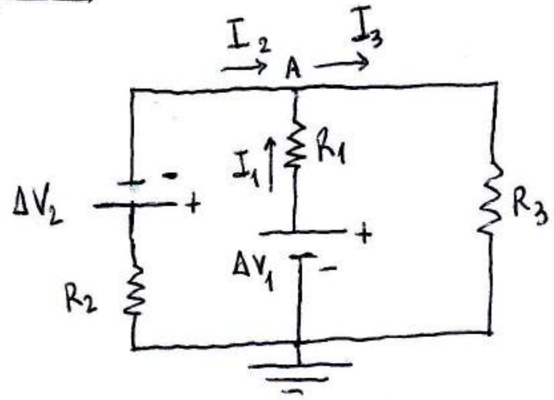
La seconda legge di Kirchhoff è conseguenza della legge di conservazione dell'energia: la variazione di energia di una carica elettrica in un giro completo lungo una maglia deve essere nulla.

Nell'applicare la seconda legge di Kirchhoff conviene considerare le variazioni del potenziale elettrico. Supponiamo di percorrere ogni maglia in senso orario; la convenzione usuale è la seguente:

1) se un resistore è percorso nello stesso verso della corrente, si ha una caduta di potenziale $-RI$;
2) se un resistore è percorso in verso opposto rispetto a quello della corrente, si ha un salto di potenziale $+RI$;
3) se una sorgente di f.e.m. viene attraversata dal polo negativo a quello positivo, si ha un aumento di potenziale $+\mathcal{E}$;
4) se una sorgente di f.e.m. viene attraversata dal polo positivo a quello negativo, si ha una caduta di potenziale $-\mathcal{E}$.

Per quanto riguarda le maglie, è necessario che ogni nuova equazione si riferisca a una maglia che contenga almeno un ramo non in comune con tutte le altre maglie.

Esempio 6



$\Delta V_1 = 10\,V$ $\Delta V_2 = 14\,V$

$R_1 = 6\,\Omega$ $R_2 = 4\,\Omega$

$R_3 = 2\,\Omega$

Determinare le correnti I_1, I_2, I_3 nel circuito schematizzato nella figura qua sopra.

Fissato $V=0$ nella parte inferiore del circuito (collegamento a terra), nel ramo centrale, procedendo dal basso verso l'alto fino al nodo A, risulta: $\Delta V_1 - R_1 I_1 = V_A$;

nel ramo di sinistra, procedendo ancora dal basso verso l'alto, risulta: $-R_2 I_2 - \Delta V_2 = V_A$;

nel ramo di destra, procedendo dal punto A verso la terra, risulta: $V_A - R_3 I_3 = 0$.

Otteniamo quindi:

$$I_1 = \frac{\Delta V_1 - V_A}{R_1} \; ; \quad I_2 = \frac{-\Delta V_2 - V_A}{R_2} \; ; \quad I_3 = \frac{V_A}{R_3}$$

V_A e' il potenziale del punto A del circuito rispetto al potenziale $V=0$ assegnato alla terra.

Per la prima legge di Kirchhoff, deve risultare

$I_1 + I_2 = I_3$ (seguendo i versi delle correnti indicati nello schema). Dunque, possiamo scrivere un'equazione contenente la quantita' incognita V_A:

$$\frac{\Delta V_1 - V_A}{R_1} + \frac{-\Delta V_2 - V_A}{R_2} = \frac{V_A}{R_3} \; ; \text{ riordiniamo i termini:}$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) V_A = \frac{\Delta V_1}{R_1} - \frac{\Delta V_2}{R_2} \; , \text{ da cui otteniamo:}$$

$$V_A = \frac{\dfrac{\Delta V_1}{R_1} - \dfrac{\Delta V_2}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}} = -2 \text{ V}$$

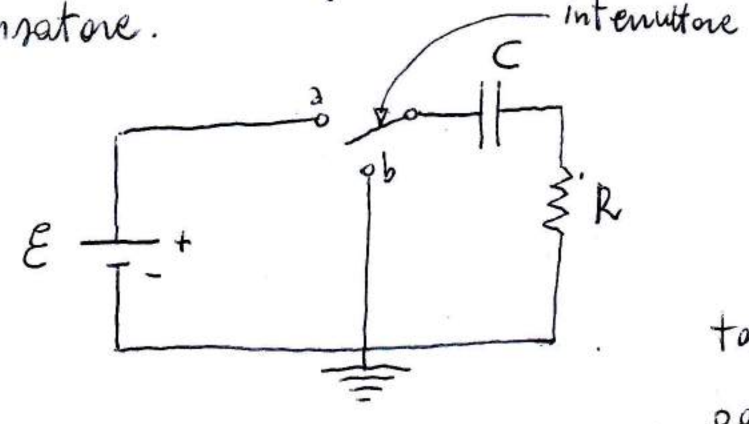
E quindi otteniamo:

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{\Delta V_1 - V_A}{R_1} = \dfrac{10\,V-(-2V)}{6\,\Omega} = \dfrac{12\,V}{6\,\Omega} = 2\,A \\ I_2 = \dfrac{-\Delta V_2 - V_A}{R_2} = \dfrac{-14V-(-2V)}{4\,\Omega} = \dfrac{-12\,V}{4\,\Omega} = -3\,A \\ I_3 = \dfrac{V_A}{R_3} = \dfrac{-2\,V}{2\,\Omega} = -1\,A \end{cases}$$

I segni negativi delle correnti I_2 e I_3 indicano che il verso di queste correnti e' opposto rispetto a quello scelto per l'impostazione del problema, ma non si tratta assolutamente di un errore di impostazione: e' corretto così, e il risultato indica quale e' il verso effettivo della corrente nei diversi rami rispetto al verso scelto in partenza (stesso verso per I_1, verso opposto per I_2 e I_3).

Circuiti RC

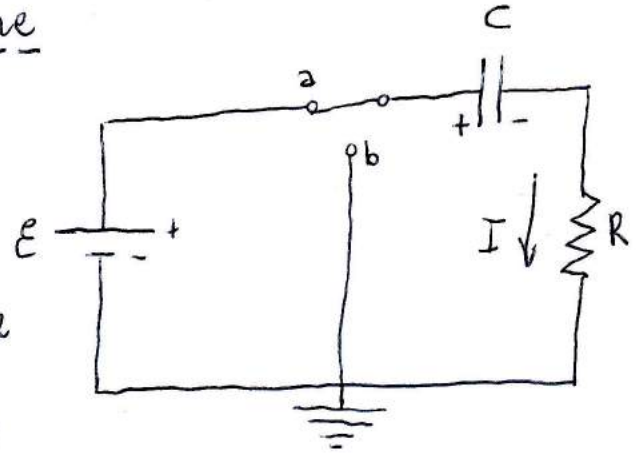
Quando un circuito elettrico contiene condensatori (oltre a sorgenti di f.e.m. e resistori) le correnti che circolano nei rami del circuito possono variare nel tempo. Un CIRCUITO RC contiene almeno un collegamento in serie di un resistore e di un condensatore.



Consideriamo lo schema circuitale qui a sinistra, e studiamo il comportamento del circuito spostando l'interruttore prima nella posizione a e poi nella posizione b.

A] Carica di un condensatore

Supponiamo che il condensatore, all'istante $t = 0$, sia scarico, e in tale istante l'interruttore venga disposto



come nello schema a destra. A partire da questo istante il condensatore inizia a caricarsi in quanto nel circuito inizia a scorrere una corrente. Ovviamente le cariche non passano da un'armatura all'altra attraverso lo spazio tra di esse, bensì attraverso la connessione circuitale e a causa del campo elettrico generato dalla batteria nei fili di connessione.

Durante questo processo la tensione tra le armature aumenta, finché diventa uguale alla differenza di potenziale fornita dalla batteria: a questo punto la corrente nel circuito diventa nulla.

Usiamo la seconda legge di Kirchhoff per il circuito schematizzato sopra:

$$\mathcal{E} - \frac{q(t)}{C} - I(t)R = 0$$

$\frac{q(t)}{C}$ è la differenza di potenziale tra le armature del condensatore; $I(t)R$ è la differenza di potenziale ai capi del resistore; sono entrambe cadute di potenziale se percorriamo il circuito in senso orario.

All'istante $t=0$ risulta $q(0)=0$, per cui la corrente nel circuito è $I(0)=\frac{\mathcal{E}}{R}$

Dopo che il condensatore si è caricato completamente la corrente va a zero, e risulta $Q_{max}=C\mathcal{E}$ nel condensatore.

Poiché la corrente è la stessa in tutto il circuito, risulta

$I(t)=[q(t)]'$, per cui l'equazione scritta a pag. 28

diventa
$$\mathcal{E}-\frac{1}{C}q(t)-R\,[q(t)]'=0 \quad , \text{ cioè}$$

(*) $$\boxed{[q(t)]'=\frac{\mathcal{E}}{R}-\frac{1}{RC}q(t)}$$

La soluzione di questa equazione con la condizione iniziale

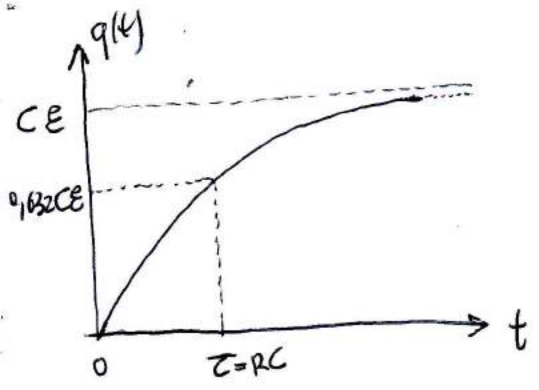
$q(0)=0$ è la seguente:

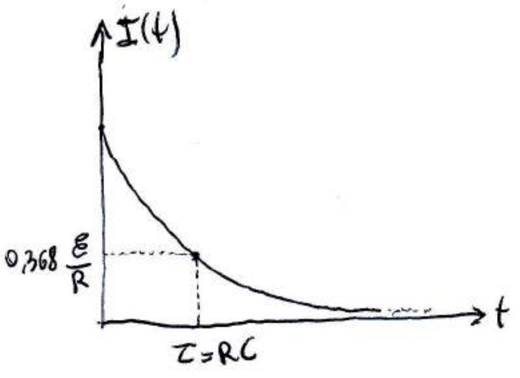
$$\boxed{q(t)=C\mathcal{E}\left[1-e^{-(t/RC)}\right]}$$, e la corrente $I(t)$ è:

$$\boxed{I(t)=[q(t)]'=\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-(t/RC)}}$$

La quantità RC ha le dimensioni di un tempo, ed è nota come COSTANTE DI TEMPO del circuito RC: all'istante $t=\tau=RC$ risulta $q(t=\tau)=C\mathcal{E}\left(1-e^{-1}\right)\simeq 0{,}632\,C\mathcal{E}$ e

$$I(t=\tau)=\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-1}\simeq 0{,}368\,\frac{\mathcal{E}}{R}.$$

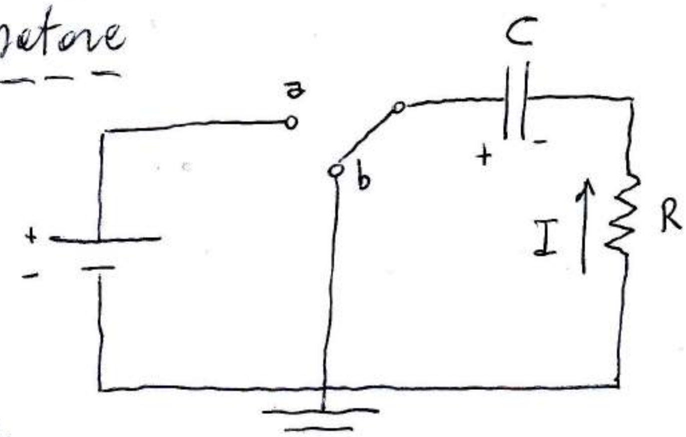




Per caricare il condensatore la batteria deve fornire una quantità di energia pari a $Q\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$: l'energia immagazzinata nel condensatore è $\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$, e la differenza, ancora pari a $\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$, si è trasformata in energia interna del resistore.

B] Scarica di un condensatore

Supponiamo che il condensatore si sia caricato e che sulle sue armature si sia accumulata



una carica Q. A questo punto spostiamo l'interruttore nella posizione b, all'istante $t = 0$: quello che accade è che il condensatore inizia a scaricarsi attraverso il resistore. L'equazione che descrive il circuito si può derivare dall'equazione (*) a pag. 29 ponendo $\mathcal{E} = 0$ in quanto adesso non ci sono sorgenti di f.e.m. nel circuito. Con la condizione iniziale $q(0) = Q$, la soluzione dell'equazione è

$$\boxed{q(t) = Q\, e^{-(t/RC)}}$$

La corrente che circola nel circuito adesso è quindi:

$$\boxed{I(t) = [q(t)]' = -\frac{Q}{RC}\, e^{-(t/RC)}}$$

Il segno negativo della corrente mostra che, in regime di scarica, la corrente fluisce nel verso opposto rispetto al caso precedente (regime di carica). Sia $q(t)$ sia $|I(t)|$ hanno andamento decrescente in maniera esponenziale, con costante di tempo $\tau = RC$ (che è la stessa costante di tempo del regime di carica).

<u>Esempio 7</u>. Un condensatore e un resistore sono collegati in serie a una batteria, in regime di carica. Si determinino la costante di tempo del circuito, la carica massima accumulata nel condensatore, la corrente massima nel circuito, e gli andamenti della carica e della corrente in funzione del tempo.

Dati del problema: $\mathcal{E} = 12\ V$, $C = 5\ \mu F$, $R = 8 \times 10^5\ \Omega$

Usando le leggi enunciate in precedenza, otteniamo:

$$\tau = RC = (8 \times 10^5\ \Omega)(5 \times 10^{-6}\ F) = 4\ s$$

$$Q = C\mathcal{E} = (5 \times 10^{-6}\ F)(12\ V) = 60 \times 10^{-6}\ C = 60\ \mu C$$

$$I_{max} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{12\ V}{8 \times 10^5\ \Omega} = 1{,}5 \times 10^{-5}\ A = 15\ \mu A$$

$$q(t) = C\mathcal{E}\left[1 - e^{-(t/RC)}\right].$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\, e^{-(t/RC)}$$

Esempio 8. Consideriamo un condensatore avente capacità C che si sta scaricando attraverso un resistore avente resistenza R.

a) Dopo quante costanti di tempo la carica del condensatore scenderà a 1/4 del suo valore iniziale?

b) L'energia accumulata nel condensatore decresce durante la sua scarica. Dopo quante costanti di tempo l'energia immagazzinata scenderà a 1/4 del suo valore iniziale?

a) Se indichiamo con t_1 l'istante in cui risulta $Q(t=t_1) = \frac{1}{4} Q$ (dove Q è la carica accumulata nel condensatore all'istante $t=0$), risulta:

$$\cancel{Q} e^{-(t_1/RC)} = \frac{1}{4}\cancel{Q}\,,$$ da cui otteniamo:

$$e^{(t_1/RC)} = 4 \Rightarrow \frac{t_1}{RC} = \ln 4 \Rightarrow t_1 = RC \ln 4 =$$
$$= \tau \ln 4 \simeq 1{,}3863\, \tau$$

b) Se indichiamo con t_2 l'istante in cui risulta $U(t=t_2) = \frac{1}{4} U(t=0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{Q^2}{2C}$ (dove Q è la carica accumulata nel condensatore all'istante $t=0$), risulta:

$$U(t=t_2) = \frac{[Q(t=t_2)]^2}{2C} = \frac{1}{4}\frac{Q^2}{2C}\,,$$ da cui

$$\frac{\cancel{Q^2}}{\cancel{2C}} e^{-(2t_2/RC)} = \frac{1}{4}\frac{\cancel{Q^2}}{\cancel{2C}} \Rightarrow e^{(2t_2/RC)} = 4 \Rightarrow \frac{2t_2}{RC} = \ln 4 \Rightarrow t_2 = \frac{RC}{2}\ln 4 \simeq$$
$$\simeq 0{,}6931\, \tau$$

Appendice:

Risoluzione dell'equazione differenziale

$$[q(t)]' = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{1}{RC}\, q(t)$$

Riscriviamola così:

$$[q(t)]' = \frac{\mathcal{E}}{R}\left[1 - \frac{q(t)}{C\mathcal{E}}\right]$$

Questa equazione ha una SOLUZIONE STAZIONARIA quando $q(t)$ assume il valore che annulla l'espressione al 2º membro:

$$\bar{q}(t) = C\mathcal{E} \quad \text{costante}$$

Poniamo $q(t) \neq C\mathcal{E}$ e ricerchiamo soluzioni non stazionarie. Dividiamo i due membri per l'espressione tra parentesi:

$$\frac{[q(t)]'}{1 - \frac{q(t)}{C\mathcal{E}}} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Moltiplichiamo i due membri per $-\frac{1}{C\mathcal{E}}$:

$$\left(-\frac{1}{C\mathcal{E}}\right) \frac{[q(t)]'}{1 - \frac{q(t)}{C\mathcal{E}}} = -\frac{1}{RC}$$

A questo punto, effettuiamo una integrazione dei due membri tra l'istante $t=0$ e un istante t generico con $t>0$; la condizione iniziale è $q(t=0)=0$.

Pertanto otteniamo:

$$\ln\left[1-\frac{q(t)}{C\mathcal{E}}\right]\Bigg|_{q(0)}^{q(t)} = -\frac{1}{RC}\,t \quad , \text{ cioe'}$$

$$\ln\left[1-\frac{q(t)}{C\mathcal{E}}\right] = -\frac{t}{RC} \Rightarrow 1-\frac{q(t)}{C\mathcal{E}} = e^{-(t/RC)} \quad , \text{ e quindi:}$$

$$\frac{q(t)}{C\mathcal{E}} = 1-e^{-(t/RC)} \quad , \text{ e infine } \quad q(t) = C\mathcal{E}\left[1-e^{-(t/RC)}\right],$$

che e' la soluzione cercata.

Per quanto riguarda l'equazione

$$[q(t)]' = -\frac{1}{RC}\,q(t) \quad ,$$

osserviamo che la soluzione stazionaria e' $\bar{q}(t)=0$.

Se $q(t)\neq 0$, possiamo dividere i due membri per $q(t)$:

$$\frac{[q(t)]'}{q(t)} = -\frac{1}{RC} \quad ,$$ e quindi effettuare una integrazione dei due membri tra l'istante $t=0$ e un istante t generico con $t>0$; la condizione iniziale e' $q(t=0)=Q$. Alla fine otteniamo:

$$\ln\left(\frac{q(t)}{Q}\right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{q(t)}{Q} = e^{-(t/RC)} \Rightarrow q(t) = Q\,e^{-(t/RC)} \, ,$$

che e' la soluzione cercata.