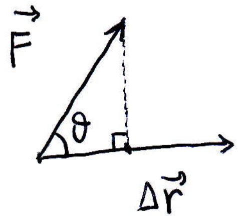
ENERGIA DI UN SISTEMA

Introduciamo alcuni concetti che, in molti problemi, ci permetteranno di non ricorrere alle leggi della dinamica per arrivare alla soluzione.

Lavoro di una forza costante

Consideriamo un corpo che compie uno spostamento $\Delta\vec{r}$ mentre su di esso agisce una forza $\vec{F}$, nell'intervallo di tempo Δt che il corpo impiega a compiere lo spostamento $\Delta\vec{r}$.

Si definisce LAVORO compiuto dalla forza $\vec{F}$ durante l'intervallo di tempo Δt il prodotto della proiezione del vettore $\vec{F}$ lungo la direzione del vettore $\Delta\vec{r}$, per il modulo di $\Delta\vec{r}$.



In formule:

$$W = |\vec{F}| \cos\theta \cdot |\Delta\vec{r}|$$ (se $\vec{F}$ è costante nell'intervallo di tempo Δt)

W sta per "work" ("lavoro" in inglese).

Se la proiezione di $\vec{F}$ lungo la direzione di $\Delta\vec{r}$ è concorde con $\Delta\vec{r}$ $(0 < \theta < 90°)$, allora il lavoro della forza $\vec{F}$ è positivo.

Se la proiezione di $\vec{F}$ lungo la direzione di $\Delta\vec{r}$ è discorde rispetto a $\Delta\vec{r}$ $(90° < \theta < 180°)$, allora il lavoro della forza $\vec{F}$ è negativo.

Dalla formula di W deduciamo che il lavoro di F può anche essere definito come il prodotto del modulo di $\vec{F}$ per la proiezione di $\Delta\vec{r}$ lungo la direzione di $\vec{F}$.

Il lavoro è una grandezza scalare.

Le dimensioni del lavoro sono quelle di una forza moltiplicata per una lunghezza, per cui l'unità di misura del lavoro di una forza è:

$$1\,N \cdot m = 1\,kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m = 1\,kg \cdot \frac{m^2}{s^2} = 1\,J$$

L'unità di misura $J = kg\,\frac{m^2}{s^2}$ si chiama Joule

(in onore del fisico inglese James Prescott Joule).

L'unità di misura del lavoro nel sistema c.g.s. è

$$1\,g \cdot \frac{cm^2}{s^2} = 1\,dyne \cdot cm = 1\,erg = 10^{-7}\,J$$

Una forza applicata a un corpo non compie lavoro:

- quando il corpo resta fermo, oppure
- quando $\Delta\vec{r}$ è perpendicolare a $\vec{F}$

(esempio: mentre un corpo si sposta lungo una superficie o lungo una guida, la reazione vincolare $\vec{N}$ risulta, a ogni istante, perpendicolare al vettore velocità istantanea del corpo; dunque $\vec{N}$ compie un lavoro nullo).

Se il vettore $\vec{F}$ e' parallelo al vettore $\Delta\vec{r}$, risulta $\theta = 0°$,

e quindi $W = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{r}| > 0$

Se $\vec{F}$ e' antiparallelo a $\Delta\vec{r}$, risulta $\theta = 180°$, e quindi

$$W = -|\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{r}| < 0$$

Quanto esposto finora e' valido, a rigore, se $\vec{F}$ e' costante.

Esempio 1

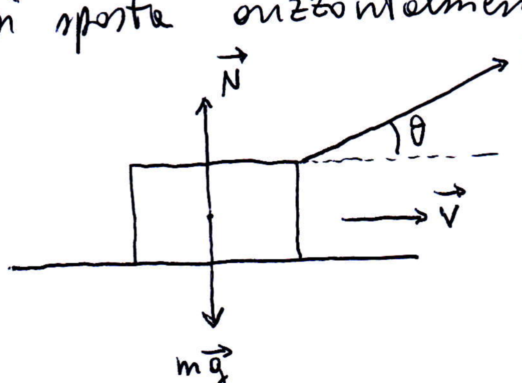
Consideriamo un corpo di massa m che cade di un tratto di lunghezza h lungo la direzione verticale sotto l'azione della sola forza peso.

Il lavoro della forza peso e', quindi:

$$W = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{r}| = mgh > 0 \quad (\vec{F} \text{ e } \Delta\vec{r} \text{ sono concordi})$$

Esempio 2

Consideriamo una cassa trascinata su un piano orizzontale liscio mediante una fune attaccata alla cassa. La fune in tensione forma un angolo $\theta = 30°$ con la direzione orizzontale, e il modulo della forza applicata dalla fune alla cassa e' $|\vec{F}| = 50\ N$ (costante) mentre la cassa si sposta orizzontalmente di un tratto $|\Delta\vec{r}| = 3\ m$.



Il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ è, in questo caso:

$$W = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{r}| \cdot \cos\theta = (50\,N)\cdot(3\,m)\cdot \cos 30^\circ = (150\,N\cdot m)\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 129,90\,J$$

La forza peso e la reazione vincolare della superficie orizzontale di appoggio non compiono lavoro mentre la cassa si sposta sulla superficie orizzontale, in quanto sia $m\vec{g}$ sia $\vec{N}$ sono perpendicolari al vettore $\Delta\vec{r}$.

Prodotto scalare di due vettori

Dati due vettori $\vec{V_1}$ e $\vec{V_2}$, si dice PRODOTTO SCALARE di $\vec{V_1}$ e $\vec{V_2}$ la grandezza scalare (si legge "V_1 scalar V_2")

$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = |\vec{V_1}| \cdot |\vec{V_2}| \cdot \cos\theta$, essendo θ l'angolo formato dalle direzioni dei due vettori.

Proprietà del prodotto scalare di due vettori

a) proprietà commutativa: $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \vec{V_2} \cdot \vec{V_1}$

b) proprietà distributiva: $\vec{V_1} \cdot (\vec{V_2} + \vec{V_3}) = \vec{V_1} \cdot \vec{V_2} + \vec{V_1} \cdot \vec{V_3}$

N.B.: $\vec{V_2}$ e $\vec{V_3}$ devono essere due vettori omogenei!

c) se $\vec{V_1} \perp \vec{V_2}$, allora $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = 0$; se $|\vec{V_1}| = 0$ oppure $|\vec{V_2}| = 0$, risulta ancora $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = 0$

d) Se $\theta = 0°$, allora $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = |\vec{V_1}| \cdot |\vec{V_2}|$

e) Se $\theta = 180°$, allora $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = -|\vec{V_1}| \cdot |\vec{V_2}|$

f) risulta $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} > 0$ se $0° < \theta < 90°$; risulta $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} < 0$ se $90° < \theta < 180°$

g) Per due vettori $\vec{V_1}$ e $\vec{V_2}$ nel piano, possiamo scrivere:

$$\vec{V_1} = V_{1x}\,\hat{i} + V_{1y}\,\hat{j}\ , \qquad \vec{V_2} = V_{2x}\,\hat{i} + V_{2y}\,\hat{j}\ ,$$

per cui, essendo $\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$, $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$, $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = 0$,

se applichiamo la proprietà distributiva otteniamo:

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = (V_{1x}\,\hat{i} + V_{1y}\,\hat{j}) \cdot (V_{2x}\,\hat{i} + V_{2y}\,\hat{j}) = (V_{1x} \cdot V_{2x}) + (V_{1y} \cdot V_{2y})$$

Per due vettori $\vec{V_1}$ e $\vec{V_2}$ nello spazio, in modo simile possiamo dimostrare che risulta:

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = (V_{1x} \cdot V_{2x}) + (V_{1y} \cdot V_{2y}) + (V_{1z} \cdot V_{2z}),$$

tenuto conto che è $\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$, e $\hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$, e

$\hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{j} = 0$

Caso particolare <u>importante</u>:

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_1} = \begin{cases} V_{1x}^2 + V_{1y}^2 & \text{(nel piano)} \\ V_{1x}^2 + V_{1y}^2 + V_{1z}^2 & \text{(nello spazio)} \end{cases}$$

Dunque: $\vec{V_1} \cdot \vec{V_1} = |\vec{V_1}|^2$, oppure $|\vec{V_1}| = \sqrt{\vec{V_1} \cdot \vec{V_1}}$.

N.B.: nel prodotto scalare $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}$ non è necessario che $\vec{V_1}$ e $\vec{V_2}$ siano quantità omogenee.

Esempio 3

$\vec{V}_1 = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ $\qquad$ $\vec{V}_2 = -\hat{i} + 2\hat{j}$

Quanto vale l'angolo tra i vettori $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$?

Calcoliamo il prodotto scalare di $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (2 \cdot (-1)) + (3 \cdot 2) = -2 + 6 = 4$$

Ma risulta anche, per definizione:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot \cos\vartheta$$

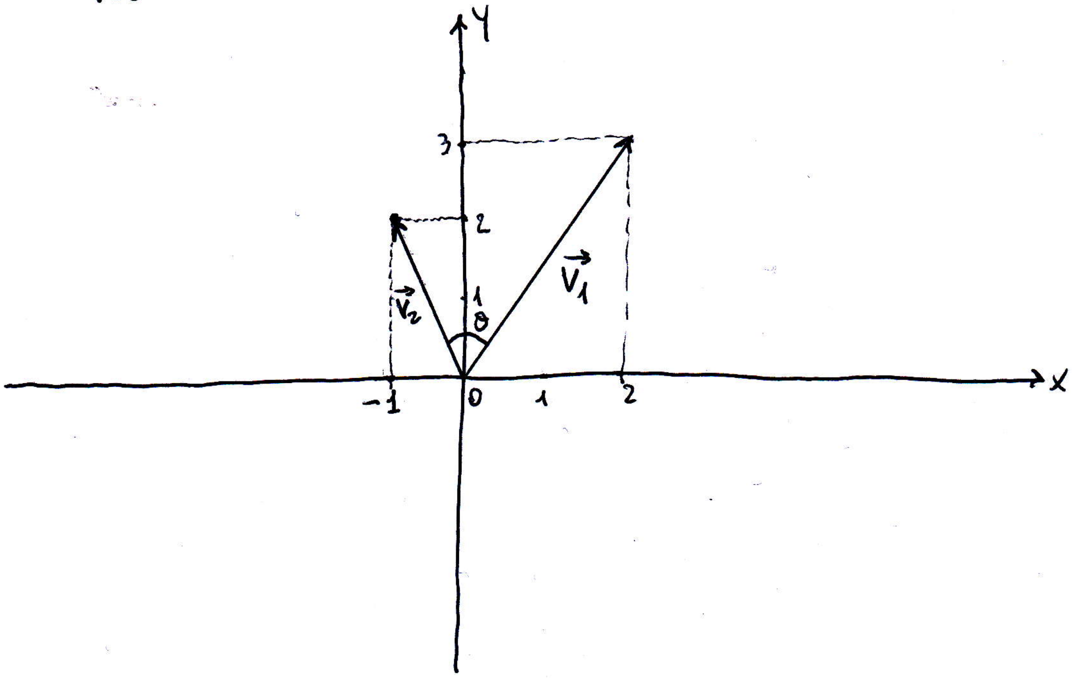
Poiché $|\vec{V}_1| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$|\vec{V}_2| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

possiamo scrivere l'equazione seguente:

$\sqrt{13} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos\vartheta = 4 \Rightarrow \sqrt{65}\cos\vartheta = 4$, da cui

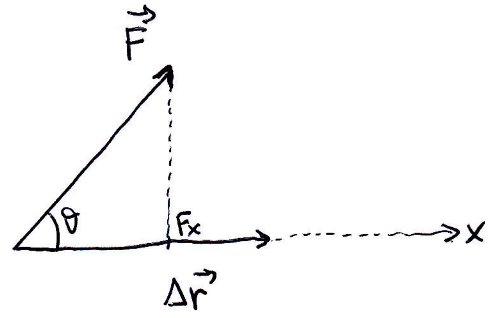
$\cos\vartheta = \dfrac{4}{\sqrt{65}}$; dunque $\vartheta = 60,26^\circ = 1,05$ rad



Significato geometrico del lavoro di una forza costante

Per quanto abbiamo appena visto, possiamo quindi esprimere il lavoro di una forza costante nel modo seguente:

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}} \qquad (\text{"F scalar } \Delta r\text{"})$$

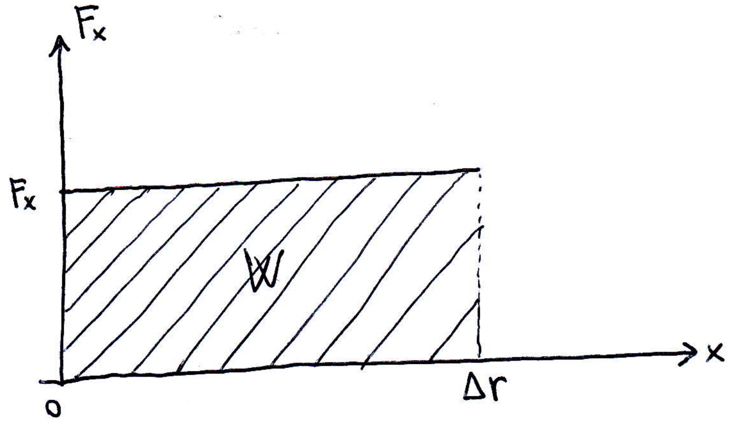


Introduciamo un asse cartesiano x lungo la direzione di $\Delta\vec{r}$, orientato positivamente come $\Delta\vec{r}$.

Dunque, detta F_x la componente x del vettore $\vec{F}$, risulta

$$W = F_x \Delta r, \qquad \text{dove} \quad \Delta r = |\Delta\vec{r}|$$

Supponendo per semplicità che il corpo inizi a muoversi dal punto $x = 0$ e arrivi (nell'istante Δt) nel punto $x = \Delta r$, possiamo tracciare il seguente grafico di F_x in funzione della posizione lungo l'asse x del corpo durante il suo spostamento:

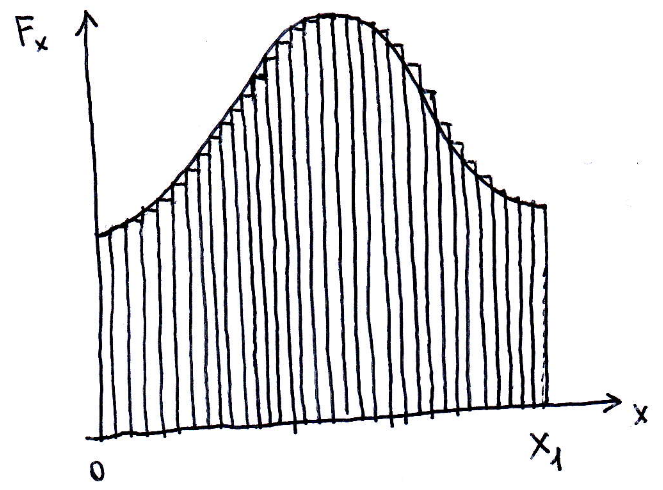


Infatti, se $\vec{F}$ si mantiene costante durante lo spostamento rettilineo del corpo, la componente F_x si mantiene anch'essa costante.

E' immediato verificare che $W = F_x \cdot \Delta r$ rappresenta l'area (positiva se $F_x > 0$, negativa se $F_x < 0$) tratteggiata nel grafico sopra.

Lavoro di una forza variabile

Consideriamo anzitutto il caso in cui il corpo si stia muovendo di moto rettilineo lungo l'asse x, e tracciamo il grafico di F_x in funzione della posizione x del corpo; esempio:



Suddividiamo l'intervallo tra il punto di partenza $x=0$ e il punto di arrivo $x=x_1$ in tanti piccoli intervallini di larghezza Δx, all'interno di ciascuno dei quali F_x si possa praticamente considerare costante (ad esempio, uguale al valore di F_x nell'estremo inferiore dell'intervallino, vedi figura).

Il lavoro di $\vec{F}$ in ciascuno degli intervallini, per quanto visto in precedenza, e' quindi:

$$\Delta W_j = F_x(x=x_j) \cdot \Delta x \,,$$ essendo x_j la posizione dell'estremo inferiore dell'intervallino j-esimo.

Il lavoro complessivo di F_x, approssimato, e' quindi:

$$W(0 \to x_1) = \sum_j \Delta W_j = \sum_j F_x(x=x_j) \cdot \Delta x \,,$$ che rappresenta la somma delle aree dei rettangolini costruiti in ciascun intervallino di larghezza Δx. Al decrescere di Δx (e quindi al crescere del numero di rettangolini tra $x=0$ e $x=x_1$), questa somma approssimera' sempre meglio l'area compresa tra la curva $F_x(x)$ e l'asse x tra $x=0$ e $x=x_1$.

Dunque, passando al limite per $\Delta x \to 0$ otteniamo la seguente formula per il lavoro di una forza non costante nel moto rettilineo:

$$\boxed{W(0 \to x_1) = \int_0^{x_1} F_x(x)\, dx}$$

, che è appunto l'area descritta in precedenza.

Se il moto avviene nel piano, e se in generale non è rettilineo, utilizziamo la rappresentazione cartesiana dei vettori:

$$\vec{F} = F_x(x,y)\,\hat{i} + F_y(x,y)\,\hat{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j}\ ,$$

per cui risulta:

$$\vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F_x(x,y)\,\Delta x + F_y(x,y)\,\Delta y$$

F_x e F_y possono dipendere, in generale, sia da x sia da y.

Dunque, ragionando in maniera analoga a quanto visto sopra, il lavoro di una forza mentre il corpo si sta muovendo lungo una traiettoria nel piano sarà espresso dalla seguente formula (se $(0,0)$ è il punto di partenza e (x_1, y_1) è il punto di arrivo):

$$W\big((0,0) \to (x_1, y_1)\big) = \int_0^{x_1} F_x(x, y(x))\, dx + \int_0^{y_1} F_y(x(y), y)\, dy$$

Infatti, la traiettoria nel piano è espressa da un'equazione che lega le coordinate x e y del corpo mentre sta percorrendo la traiettoria, per cui è possibile esprimere la y in funzione della x, e viceversa la x in funzione della y (con le dovute cautele, separando tra loro i diversi eventuali intervalli di monotonia della traiettoria).

Talvolta la legge scritta sopra viene espressa simbolicamente così:

$$W(0 \to \vec{r}_1) = \int_0^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{oppure} \quad W(\vec{r}_0 \to \vec{r}_1) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

È immediato estendere le considerazioni appena fatte al caso di moto lungo una traiettoria nello spazio.

Tenuto conto che, in una dimensione, risulta $x = x(t)$, possiamo utilizzare la formula di integrazione per sostituzione (cambiamento della variabile di integrazione) e scrivere:

$$W(x_0 \to x_1) = \int_{x_0}^{x_1} F_x(x)\, dx = \int_{t_0}^{t_1} F_x(x(t))\, x'(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, v_x(t)\, dt$$

$$[x_0 = x(t_0),\quad x_1 = x(t_1)]$$

In due dimensioni potremo quindi scrivere (stesso ragionamento):

$$W(\vec{r}_0 \to \vec{r}_1) = \int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, v_x(t)\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_y(t)\, v_y(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(F_x(t)\, v_x(t) + F_y(t)\, v_y(t)\right) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)\right] dt$$

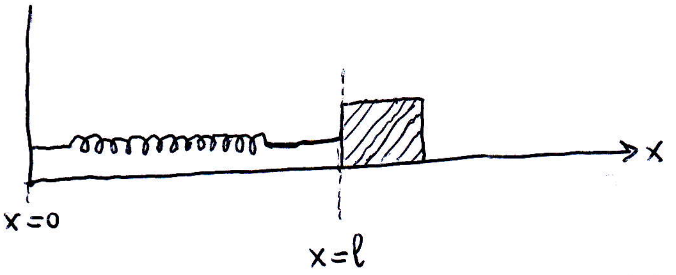
In tre dimensioni possiamo ripetere lo stesso ragionamento. La formula generale che esprime il lavoro di una forza $\vec{F}$ agente su un corpo allorché questo si sposta dalla posizione $\vec{r}_0$ (all'istante t_0) alla posizione $\vec{r}_1$ (in cui arriva all'istante t_1) è quindi:

$$\boxed{\begin{gathered} W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_1) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)\right] dt \\ \vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) \,, \quad \vec{r}_1 = \vec{r}(t_1) \end{gathered}}$$

legge valida nel moto rettilineo, nel moto su un piano e nel moto nello spazio tridimensionale.

Legge di Hooke e lavoro della forza elastica

Consideriamo un corpo poggiato su un piano orizzontale con attrito trascurabile. Il corpo e' attaccato a una estremita' di una molla. L'altra estremita' della molla, disposta lungo la direzione orizzontale, e' fissata a una parete verticale.



Molla "a riposo"

Introduciamo un asse cartesiano x orizzontale, con origine nell'estremo fisso della molla, orientato positivamente verso l'altro estremo della molla. Sia $x=\ell$ la posizione dell'estremo della molla attaccato al corpo quando la molla è a riposo (cioe' quando non e' né allungata né compressa). Se spostiamo il corpo, collegato alla molla, lungo l'asse x si osserva una forza agente sul corpo, diretta lungo l'asse x; vale la LEGGE DI HOOKE:

$$\boxed{F_x = -k(x-\ell)}$$, nello schema della figura in alto.

ℓ: lunghezza a riposo della molla

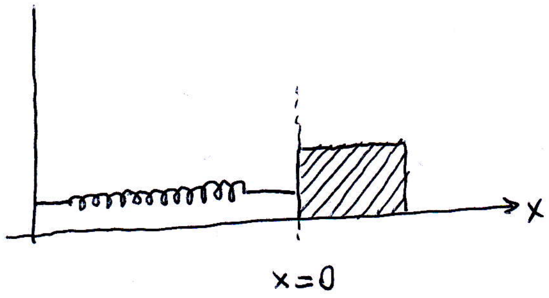
k: COSTANTE ELASTICA della molla ($k>0$ sempre)

Unita' di misura di k: $[k]=[F][L]^{-1} \Rightarrow kg\cdot\frac{m}{s^2}\cdot\frac{1}{m}=\frac{kg}{s^2}=\frac{N}{m}$

Una molla rigida ha valori elevati della costante elastica.
Una molla morbida ha valori piccoli della costante elastica.

Il verso della forza elastica è sempre opposto rispetto al verso dello spostamento dalla posizione di equilibrio:
se $\Delta x > 0$, risulta $F_x < 0$; se $\Delta x < 0$, risulta $F_x > 0$.
Dunque, la forza elastica è una "forza di richiamo".

Spesso, per maggiore comodità nei calcoli, l'origine dell'asse x viene fissata nel punto in cui la molla si trova a riposo:



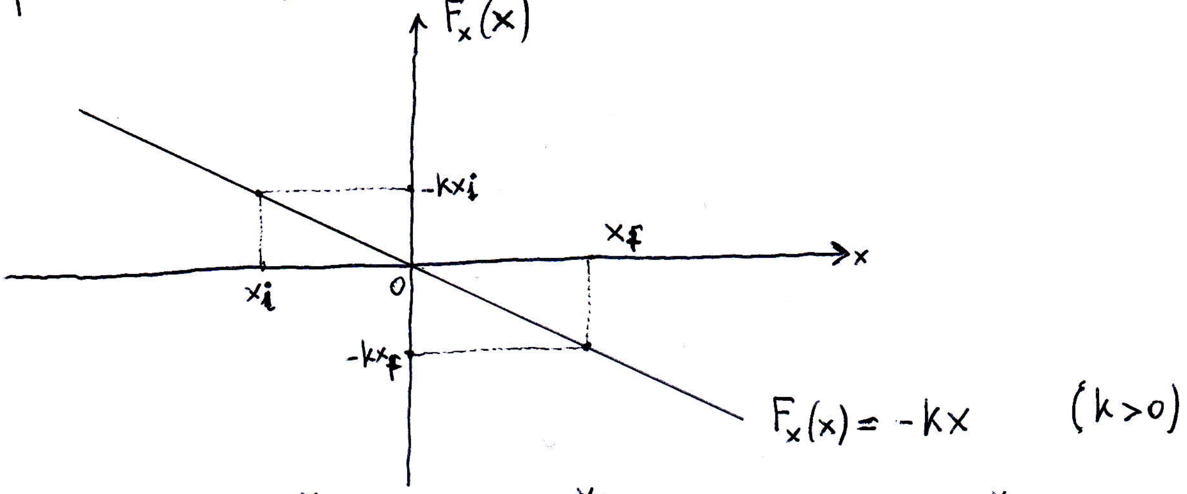
molla a riposo

Con questa scelta, l'espressione della legge di Hooke diventa:

$$\boxed{F_x = -kx}$$

Si osserva che, spostando il corpo lungo l'asse x in una posizione $x = x_{MAX}$ e lasciandolo andare da fermo, il corpo oscillerà tra le posizioni $x = x_{MAX}$ e $x = -x_{MAX}$ passando periodicamente per la posizione di riposo della molla in $x = 0$ (giustificheremo questo più avanti).

Calcoliamo il lavoro della forza elastica allorché il corpo attaccato alla molla si sposta da una posizione x_i a una posizione x_f:



$$W_{el}(x_i \rightarrow x_f) = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)\, dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\, dx = -k \cdot \int_{x_i}^{x_f} x\, dx =$$

$$= -k \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_i}^{x_f} = -\frac{1}{2}k x_f^2 + \frac{1}{2}k x_i^2 = \frac{1}{2}k x_i^2 - \frac{1}{2}k x_f^2 = \frac{1}{2}k\left(x_i^2 - x_f^2\right)$$

legge valida qualunque siano i valori di x_i e x_f.

Il lavoro della forza elastica nello spostamento $x_i \rightarrow x_f$ è dunque nullo per $x_f^2 = x_i^2$, cioè quando $x_f = \pm x_i$; dunque $W_{el}(x_i \rightarrow x_f) = 0$ quando la posizione finale coincide con la posizione iniziale, oppure quando la posizione finale è simmetrica rispetto a $x=0$ della posizione iniziale.

$W_{el}(x_i \rightarrow x_f) > 0$ se $x_i^2 > x_f^2$

$W_{el}(x_i \rightarrow x_f) < 0$ se $x_i^2 < x_f^2$

Esempio 4

Una molla disposta orizzontalmente, con costante elastica $k = 80 \frac{N}{m}$, è fissata a un suo estremo. All'estremo libero è applicata una forza dall'esterno, e in conseguenza di questo la molla si allunga (estremo libero) dalla posizione $x_i = 0$ alla posizione $x_f = 0{,}04\ m$.

a) calcolare il lavoro svolto dalla forza elastica nell'allungamento da x_i a x_f;

b) successivamente, la molla viene ulteriormente allungata dalla posizione $x_i = 0{,}04\ m$ alla posizione $x_f = 0{,}07\ m$; calcolare il lavoro svolto dalla forza elastica in questo secondo allungamento.

a) Dalla legge che fornisce il lavoro svolto dalla forza elastica per $x_i \rightarrow x_f$ otteniamo:

$$W_{el}(x_i \rightarrow x_f) = \frac{1}{2} k\,(x_i^2 - x_f^2) = \frac{1}{2} \cdot \left(80 \frac{N}{m}\right) \cdot \left(0^2 - (0{,}04\ m)^2\right) = -0{,}064\ J$$

b) Applicando la stessa legge al secondo allungamento, otteniamo:

$$W_{el}(x_i \rightarrow x_f) = \frac{1}{2} k\,(x_i^2 - x_f^2) = \frac{1}{2} \cdot \left(80 \frac{N}{m}\right)\left((0{,}04\ m)^2 - (0{,}07\ m)^2\right) = -0{,}132\ J$$

Energia cinetica e teorema dell'energia cinetica

Se il moto di un corpo e' unidimensionale, abbiamo visto che il lavoro svolto da una forza $\vec{F}$ allorché il corpo si sposta da una posizione x_i a una posizione x_f e':

$$W(x_i \to x_f) = \int_{t_i}^{t_f} F_x(t)\, v_x(t)\, dt \quad , \quad \text{con } x_i = x(t_i) \text{ e } x_f = x(t_f).$$

Nel caso in cui $\vec{F}$ sia la forza risultante agente sul corpo, risulta $\vec{F}_{ris} = m\vec{a}$, per cui questa legge puo' essere riscritta così:

$$W(x_i \to x_f) = m \cdot \int_{t_i}^{t_f} a_x(t)\, v_x(t)\, dt$$

Risulta, ovviamente, $a_x(t) = v_x'(t)$, per cui:

$$W(x_i \to x_f) = m \int_{t_i}^{t_f} v_x(t)\, v_x'(t)\, dt$$

Posto $v_{x,i} = v_x(t_i)$ e $v_{x,f} = v_x(t_f)$, usando la formula di integrazione per sostituzione (cambiamento della variabile di integrazione) otteniamo (oppure usando la nota regola di integrazione $\int f(t) f'(t)\, dt = \frac{1}{2}(f(t))^2 + \text{costante}$)

$$W(x_i \to x_f) = m \cdot \int_{v_{x,i}}^{v_{x,f}} v_x\, dv_x = m \left. \frac{v_x^2}{2} \right|_{v_{x,i}}^{v_{x,f}} = \frac{1}{2} m v_{x,f}^2 - \frac{1}{2} m v_{x,i}^2$$

Se il moto del corpo e' nel piano e se $\vec{F}$ e' la forza risultante agente sul corpo, nello spostamento da $\vec{r}_i$ a $\vec{r}_f$ risulta:

$$W(\vec{r}_i \to \vec{r}_f) = \int_{t_i}^{t_f} [\vec{F}_{ris}(t) \cdot \vec{v}(t)]\, dt \quad , \text{ con } \vec{r}_i = \vec{r}(t_i) \text{ e } \vec{r}_f = \vec{r}(t_f);$$

Allora, essendo $\vec{F}_{ris}(t) = m\,\vec{a}(t)$, possiamo scrivere:

$$W(\vec{r}_i \to \vec{r}_f) = m \cdot \int_{t_i}^{t_f} [\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t)]\, dt =$$

$$= m \cdot \int_{t_i}^{t_f} [a_x(t)\, v_x(t) + a_y(t)\, v_y(t)]\, dt =$$

$$= m \cdot \left[\int_{t_i}^{t_f} v_x(t)\, v_x'(t)\, dt + \int_{t_i}^{t_f} v_y(t)\, v_y'(t)\, dt \right] =$$

$$= m \cdot \left[\int_{v_{x,i}}^{v_{x,f}} v_x\, dv_x + \int_{v_{y,i}}^{v_{y,f}} v_y\, dv_y \right]$$

(ragionamento analogo a quello fatto in precedenza)

Dunque, otteniamo:

$$W(\vec{r}_i \to \vec{r}_f) = \left(\frac{1}{2} m v_{x,f}^2 - \frac{1}{2} m v_{x,i}^2\right) + \left(\frac{1}{2} m v_{y,f}^2 - \frac{1}{2} m v_{y,i}^2\right)$$

Riordiniamo opportunamente gli addendi:

$$W(\vec{r}_i \to \vec{r}_f) = \frac{1}{2} m \left(v_{x,f}^2 + v_{y,f}^2\right) - \frac{1}{2} m \left(v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} m |\vec{v}_f|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_i|^2$$

Per un corpo in moto nello spazio, il calcolo del lavoro svolto dalla forza risultante agente su di esso porta a una formula analoga a quella appena scritta.

Pertanto, il lavoro svolto dalla forza risultante agente su un corpo di massa m tra un istante t_i in cui il corpo ha velocita' istantanea $\vec{v}_i$ e un istante t_f in cui il corpo ha velocita' istantanea $\vec{v}_f$ e':

$$\boxed{W(\vec{r}_i \to \vec{r}_f) = \frac{1}{2} m |\vec{v}_f|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_i|^2}$$

essendo ovviamente $\vec{r}_i = \vec{r}(t_i)$ e $\vec{r}_f = \vec{r}(t_f)$

La quantita' $K = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2$ e' detta ENERGIA CINETICA di un corpo di massa m che si sta muovendo con velocita' istantanea $\vec{v}$.

L'energia cinetica e' una grandezza scalare. Le sue dimensioni fisiche sono: $[m][v]^2 = [M][L]^2[T]^{-2}$, analoghe a quelle del lavoro. Dunque, nel S.I. l'energia cinetica si misura in J.

<u>Teorema dell'energia cinetica</u>: il lavoro della risultante delle forze agenti su un dato corpo tra un istante t_i e un istante t_f e' uguale alla variazione dell'energia cinetica del corpo tra gli stessi due istanti: $\boxed{\int_{t_i}^{t_f} (\vec{F}_{ris} \cdot \vec{v})\, dt = K_f - K_i}$

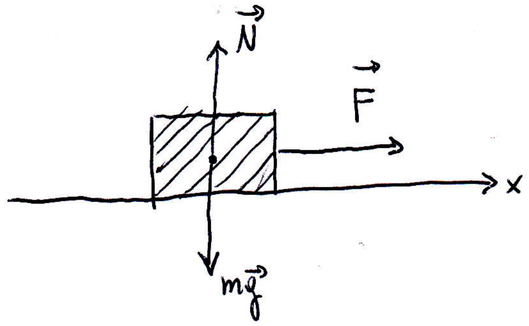
Il teorema dell'energia cinetica e' anche detto, talvolta, TEOREMA DELLE FORZE VIVE.

Dunque, se $K_f > K_i$, il lavoro di $\vec{F}_{ris}$ tra gli istanti t_i e t_f risulterà positivo; se $K_f < K_i$, il lavoro di $\vec{F}_{ris}$ tra gli istanti t_i e t_f risulterà negativo.

[Attenzione: per il calcolo del lavoro di $\vec{F}_{ris}$ tra gli istanti t_i e t_f e' sufficiente conoscere il modulo di $\vec{v}_i$ e di $\vec{v}_f$; non servono i dettagli del moto tra i punti $\vec{r}_i = \vec{r}(t_i)$ e $\vec{r}_f = \vec{r}(t_f)$]

<u>Esempio 5</u>

Consideriamo un blocco avente massa $m = 6\,kg$, poggiato su una superficie orizzontale liscia. Se il corpo inizialmente e' fermo e a esso applichiamo una forza orizzontale avente modulo $F = 12\,N$ costante, quanto vale la velocità del blocco quando si e' spostato di un tratto $d = 3\,m$ sul piano orizzontale?



Il lavoro svolto dalla forza $\vec{F}$ lungo il tratto indicato e'

$$W = Fd = 36\,J$$

L'energia cinetica iniziale del blocco e' nulla, mentre l'energia cinetica finale e', per il momento incognita.

Tracciato il diagramma delle forze agenti sul blocco, osserviamo che $m\vec{g} + \vec{N} = 0$, per cui la forza risultante agente sul blocco è:
$$\vec{F}_{ris} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = \vec{F}.$$

Applichiamo il teorema dell'energia cinetica al blocco, tra l'istante in cui $x = 0$ e l'istante in cui $x = d$:

$$K_f - K_i = W = Fd.$$ Poiché $K_f = \frac{1}{2} m |\vec{v}_f|^2$, risulta:

$$\frac{1}{2} m |\vec{v}_f|^2 = Fd \Rightarrow |\vec{v}_f|^2 = \frac{2Fd}{m} \Rightarrow |\vec{v}_f| = \sqrt{\frac{2Fd}{m}} =$$

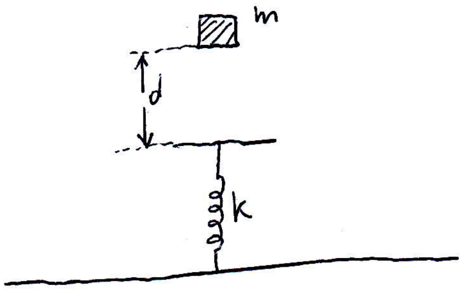
$$= \sqrt{\frac{2 \cdot (12\,N) \cdot 3\,m}{6\,kg}} = 3{,}46\,\frac{m}{s},$$ con $\vec{v}$ diretta orizzontalmente e orientata nel verso positivo dell'asse x (quest'ultima cosa si deduce dalle condizioni del problema, non dal calcolo svolto, che ha fornito solo $|\vec{v}_f|$).

Esempio 6

Consideriamo una molla di massa trascurabile, con $K = 10^3\,\frac{N}{m}$, posta verticalmente con un estremo fissato a un ripiano orizzontale. Un blocco avente massa $m = 1{,}6\,kg$ inizia a cadere da fermo da un punto posto $1\,m$ al di sopra dell'estremità libera della molla. Quanto vale la compressione massima della molla durante il moto del blocco?

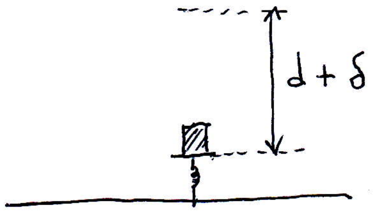
$m = 1{,}6\ kg \qquad K = 10^3\ \frac{N}{m} \qquad d = 1\ m$

$\boxed{\text{inizio}}$



Se indichiamo con δ la compressione massima della molla durante il moto del blocco, allora tra l'istante iniziale e l'istante finale le due forze che compiono lavoro sono: la forza peso del blocco e la forza elastica esercitata dalla molla sul blocco.

$\boxed{\text{fine}}$



- Lavoro della forza peso. Tra l'istante iniziale e l'istante finale il blocco percorre verso il basso un tratto di lunghezza $d + \delta$, per cui il lavoro della forza peso (che e' costante) e':

$$W_p = mg\,(d + \delta)$$

- Lavoro della forza elastica. La forza elastica compie lavoro a partire dall'istante in cui il blocco viene a contatto con la molla, dopodiché la molla (inizialmente a riposo) si comprime di un tratto δ. Dunque, per quanto visto in precedenza, risulta

$$W_{el} = -\frac{1}{2} K \delta^2$$

Dunque, il lavoro della forza risultante agente nel blocco tra l'istante iniziale e l'istante finale e':

$$W = W_p + W_{el} = mg(d+\delta) - \frac{1}{2}k\delta^2$$

Per il teorema dell' energia cinetica, questo lavoro e' uguale alla variazione dell' energia cinetica del blocco tra l'istante iniziale e l'istante finale.

Risulta $K_i = 0$ (dato del problema), ma e' anche $K_f = 0$, in quanto, nell' istante in cui la compressione della molla e' massima, la velocita' istantanea del blocco e' nulla.

Allora possiamo scrivere la seguente equazione:

$$mg(d+\delta) - \frac{1}{2}k\delta^2 = 0$$

Moltiplichiamo i due membri dell' equazione per $\frac{2}{k}$:

$$2\frac{mg}{k}(d+\delta) - \delta^2 = 0$$, e riordiniamo i termini:

$$\delta^2 - 2\frac{mg}{k}\delta - \frac{2mgd}{k} = 0$$

Usiamo la formula ridotta per trovare le radici dell' equazione:

$$\delta_{1,2} = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgd}{k}}$$

La radice in cui compare il segno meno davanti al radicale è negativa, pertanto non è accettabile. Risulta quindi:

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgd}{k}} + \frac{mg}{k} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 \left[1 + \frac{k^2}{m^2 g^2} \cdot \frac{2mgd}{k}\right]} + \frac{mg}{k} =$$

$$= \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2kd}{mg}} + \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k}\left(\sqrt{1+\frac{2kd}{mg}} + 1\right)$$

Sostituendo i dati del problema, otteniamo:

$$\delta \simeq 0,19 \text{ m}$$

Esempio 7

Un corpo di massa $m = 6$ kg parte da fermo su un piano orizzontale in seguito all'applicazione di una forza orizzontale di modulo costante $F = |\vec{F}| = 12$ N. Il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo e la superficie orizzontale è $\mu_d = 0,15$.

a) Calcolare il modulo della velocità del corpo dopo che ha percorso un tratto $l = 3$ m.

b) Se la forza $\vec{F}$ è applicata in modo da formare un angolo θ con la direzione orizzontale, per quale valore di θ il modulo della velocità nell'istante in cui il corpo ha percorso $l = 3$m risulta massimo?

a)

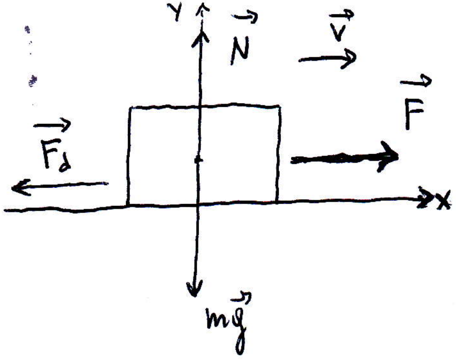


Diagramma delle forze agenti nel corpo nel punto a) del problema.
Risulta $N = |\vec{N}| = mg$

La risultante delle forze agenti nel corpo e'

$$\vec{F}_{ris} = \vec{F} + \vec{F_d} + m\vec{g} + \vec{N} = \vec{F} + \vec{F_d}, \text{ in quanto } m\vec{g} + \vec{N} = 0.$$

Lungo l'asse x risulta: $F_x = F$ (essendo $F = |\vec{F}|$),

$$F_{d,x} = -\mu_d N = -\mu_d mg$$

Pertanto il lavoro della forza risultante agente nel corpo allorché il corpo si sposta di un tratto l verso destra e':

$$W = (F_x + F_{d,x}) \cdot l = (F - \mu_d mg) l$$

L'energia cinetica iniziale del corpo e' nulla (dato del problema), per cui applicando il teorema dell'energia cinetica otteniamo:

$$K_f - K_i = W \Rightarrow \frac{1}{2} m |\vec{v}_f|^2 = (F - \mu_d mg) l, \text{ da cui}$$

$$|\vec{v}_f|^2 = \frac{2l}{m}(F - \mu_d mg) = 2l\left(\frac{F}{m} - \mu_d g\right), \text{ e infine}$$

$$|\vec{v}_f| = \sqrt{2l\left(\frac{F}{m} - \mu_d g\right)} = \sqrt{2 \cdot (3\,m) \cdot \left(\frac{12\,N}{6\,kg} - 0{,}15 \cdot \left(9{,}81\,\frac{m}{s^2}\right)\right)} = 1{,}78\,\frac{m}{s}$$

b)

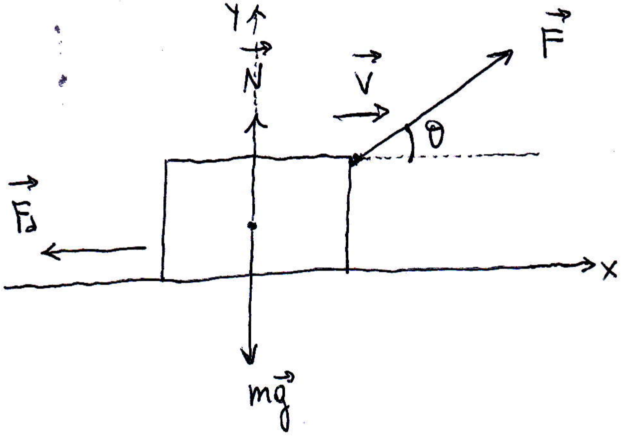


Diagramma delle forze agenti sul corpo nel punto b) del problema

Il corpo si muove di <u>moto rettilineo</u> lungo l'asse x, per cui la componente lungo l'asse y della risultante delle forze applicate deve essere nulla:

$$N + F \operatorname{sen}\theta - mg = 0, \quad \text{dove} \quad N = |\vec{N}| \quad \text{e} \quad F = |\vec{F}|$$

Risulta poi: $\quad F_x = F\cos\theta, \quad F_{d,x} = -\mu_d N$

Dalla prima equazione ricaviamo N:

$$N = mg - F\operatorname{sen}\theta \geq 0 \Rightarrow \quad F \leq \frac{mg}{\operatorname{sen}\theta}$$

La risultante di tutte le forze applicate e' quindi diretta lungo l'asse x, verso destra. Il lavoro di questa risultante, allorché il corpo si sposta di un tratto l verso destra, e':

$$W = (F\cos\theta - \mu_d N)\, l = \left[F\cos\theta - \mu_d(mg - F\operatorname{sen}\theta)\right] l =$$

$$= \left[F(\cos\theta + \mu_d \operatorname{sen}\theta) - \mu_d mg \right] l$$

L'energia cinetica iniziale del corpo è nulla (dato del problema), per cui se applichiamo il teorema dell'energia cinetica otteniamo:

$$K_f - K_i = W \quad , \quad \text{cioè}$$

$$\frac{1}{2} m |\vec{V}_f|^2 = [F(\cos\vartheta + \mu_d \,\text{sen}\,\vartheta) - \mu_d m g]\ell \quad , \quad \text{dunque:}$$

$$|\vec{V}_f|^2 = \frac{2\ell}{m}[F(\cos\vartheta + \mu_d \,\text{sen}\,\vartheta) - \mu_d m g] \quad , \quad \text{e infine}$$

$$|\vec{V}_f| = \sqrt{\frac{2\ell}{m}[F(\cos\vartheta + \mu_d \,\text{sen}\,\vartheta) - \mu_d m g]} =$$

$$= \sqrt{2\ell\left[\frac{F}{m}(\cos\vartheta + \mu_d \,\text{sen}\,\vartheta) - \mu_d g\right]}$$

$|\vec{V}_f|$ risulta massimo quando è massima l'espressione sotto la radice quadrata:

$$f(\vartheta) = \frac{F}{m}(\cos\vartheta + \mu_d \,\text{sen}\,\vartheta) - \mu_d g$$

Abbiamo tralasciato la costante 2ℓ, che non è rilevante per il calcolo da svolgere.

Risulta: $f'(\theta) = \frac{F}{m}(-\text{sen}\,\vartheta + \mu_d \cos\vartheta) \geq 0$ per $\mu_d \cos\vartheta \geq \text{sen}\,\vartheta$,

cioè per $\text{tg}\,\vartheta \leq \mu_d \Rightarrow \vartheta \leq \text{arctg}(\mu_d)$

Dunque, $f(\theta)$ (e quindi anche $|\vec{V}_f|$) è massima per

$$\vartheta = \text{arctg}(\mu_d) = \text{arctg}(0{,}15) = 8{,}53^\circ = 0{,}15 \text{ rad}$$

Dunque, se $tg\vartheta = \mu_d$, risulta:

$$\operatorname{sen}\vartheta = \frac{tg\vartheta}{\sqrt{1+tg^2\vartheta}} = \frac{\mu_d}{\sqrt{1+\mu_d^2}}, \qquad \cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\vartheta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu_d^2}}$$

e quindi il valore massimo di $|\vec{V}_f|$ è:

$$|\vec{V}_f|_{max} = \sqrt{2\ell\left[\frac{F}{m}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\mu_d^2}} + \frac{\mu_d^2}{\sqrt{1+\mu_d^2}}\right) - \mu_d g\right]} =$$

$$= \sqrt{2\ell\left[\frac{F}{m}\cdot\frac{1+\mu_d^2}{\sqrt{1+\mu_d^2}} - \mu_d g\right]} = \sqrt{2\ell\left[\frac{F}{m}\sqrt{1+\mu_d^2} - \mu_d g\right]} =$$

$$= \sqrt{2\cdot(3m)\left[\frac{12N}{6kg}\sqrt{1+(0{,}15)^2} - 0{,}15\cdot\left(9{,}81\,\frac{m}{s^2}\right)\right]} =$$

$$= 1{,}82\,\frac{m}{s}$$

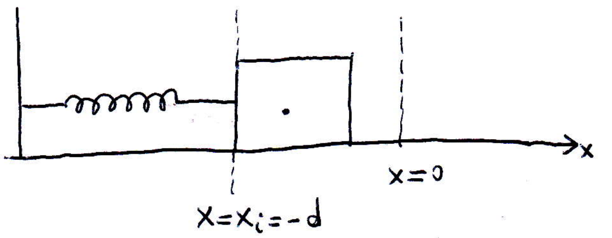
Esempio 8

Consideriamo un blocco avente massa $m = 1{,}6\ kg$, collegato a un'estremità di una molla orizzontale avente costante elastica $k = 10^3 \frac{N}{m}$; il blocco si trova su un piano orizzontale, e l'altro estremo della molla è fissato a una parete verticale. Il corpo viene spinto fino a comprimere la molla di un tratto $d = 0{,}02\ m$, e lasciato andare da questa posizione con velocità iniziale nulla.

a) Calcolare la velocità del blocco quando passa dalla posizione $x = 0$ in assenza di attrito tra blocco e superficie di appoggio.

b) Calcolare il modulo della velocità del blocco quando passa dalla posizione $x = 0$ se una forza $\vec{F}$ di modulo $F = 4\,N$ si oppone al suo moto.

a)



Risulta $x_i = -d$, $x_f = 0$, $v_{x,i} = 0$ (dati del problema).

Applichiamo il teorema dell'energia cinetica, tenuto conto del fatto che la risultante delle forze applicate si riduce alla sola forza elastica $(\vec{N} + m\vec{g} = 0)$.

$K_f - K_i = W$, cioè:

$\frac{1}{2} m |\vec{v}_f|^2 = \frac{1}{2} k d^2$, essendo $W = W_{el} = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2 =$

$= \frac{1}{2} k (-d)^2 = \frac{1}{2} k d^2$

Allora risulta:

$|\vec{v}_f|^2 = \frac{k}{m} d^2$, e infine $|\vec{v}_f| = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot d = \sqrt{\frac{10^3 \, N/m}{1{,}6 \, kg}} \cdot (0{,}02 \, m) =$

$= 0{,}5 \, \frac{m}{s}$

b) In presenza di una forza orizzontale aggiuntiva di modulo costante che si oppone al moto, il lavoro della forza risultante diventa:

$$W = W_{el} + W_F = \frac{1}{2} k d^2 - F d$$

Dunque, applicando il teorema dell'energia cinetica otteniamo:

$K_f - K_i = W \Rightarrow \frac{1}{2} m |\vec{v}_f|^2 = \frac{1}{2} k d^2 - F d$, da cui:

$|\vec{v}_f|^2 = \frac{k}{m} d^2 - \frac{2Fd}{m} \Rightarrow |\vec{v}_f| = \sqrt{\frac{k}{m} d^2 - \frac{2Fd}{m}} \simeq 0{,}39 \, \frac{m}{s}$

Potenza

Indichiamo con ΔW il lavoro compiuto da una data forza in un intervallo di tempo Δt.

Si definisce POTENZA MEDIA sviluppata da questa forza nell'intervallo di tempo Δt la quantità

$$\mathcal{P}_{med} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Dalla relazione $W(\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f) = \int_{t_i}^{t_f} [\vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)]\, dt$, vista in precedenza, se consideriamo un intervallo di tempo $t_f - t_i = \Delta t$ molto piccolo, il lavoro compiuto in tale intervallo di tempo diventa:

$$\Delta W \simeq [\vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)] \cdot \Delta t,$$ da cui otteniamo

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} \simeq \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)$$

Al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ l'uguaglianza diventa esatta:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) = \mathcal{P}(t),$$ che è la

POTENZA ISTANTANEA sviluppata dalla forza $\vec{F}$ all'istante t, in cui il corpo su cui agisce la forza $\vec{F}$ ha una velocità vettoriale istantanea $\vec{v}(t)$.

La potenza ha chiaramente le dimensioni di un lavoro diviso un tempo, per cui la sua unità di misura nel S. I.

è $1 \frac{J}{s} \equiv 1 W$ (si legge Watt, in onore dell'ingegnere e inventore scozzese James Watt)

In unità fondamentali risulta:

$$1 W = 1 \frac{J}{s} = 1 \frac{N \cdot m}{s} = 1 \, Kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot \frac{m}{s} = 1 \, Kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$$

Un'unità di misura di potenza utilizzata nel mondo anglosassone è il CAVALLO VAPORE BRITANNICO (hp); risulta $1 \, hp = 745{,}7 \, W$

Un'altra conversione utile è la seguente:

$1 J = 1 W \cdot s$; dunque risulta anche:

$1 W \cdot h = 3{,}6 \times 10^3 J$, e quindi $1 KW \cdot h = 3{,}6 \times 10^6 J$

$1 KW \cdot h$ si legge "chilowattora", ed è una unità di misura di energia, chiaramente.

[$1 KW \cdot h$ è l'energia trasferita in 1 ora da una potenza applicata costante pari a $1 KW$.]

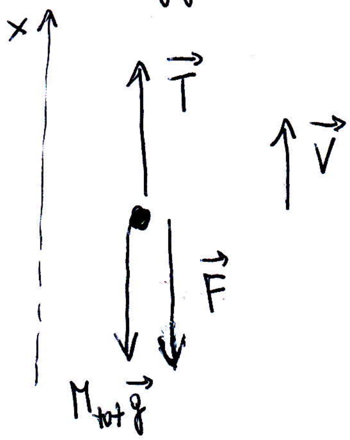
Esempio 9

Un ascensore ha una massa di 1600 kg e trasporta alcuni passeggeri di massa complessiva 200 kg. Il moto viene frenato da una forza di attrito costante avente modulo 4000 N.

a) Quale potenza deve fornire il motore per sollevare l'ascensore alla velocita' costante di 3 m/s?

b) Si determini la potenza istantanea che il motore, progettato per fornire un'accelerazione verso l'alto di 1 m/s², deve sviluppare in funzione del tempo se l'ascensore parte da fermo all'istante t = 0.

a) Diagramma delle forze agenti sul sistema ascensore + + passeggeri:



$\vec{T}$: forza esercitata dal motore

$M_{tot} = 1600\ kg + 200\ kg = 1800\ kg$

$\vec{F}$: forza di attrito frenante, con

$$F = |\vec{F}| = 4000\ N$$

Affinché l'ascensore abbia velocita' costante nel suo moto rettilineo, la risultante delle forze agenti lungo un asse x verticale deve essere nulla:

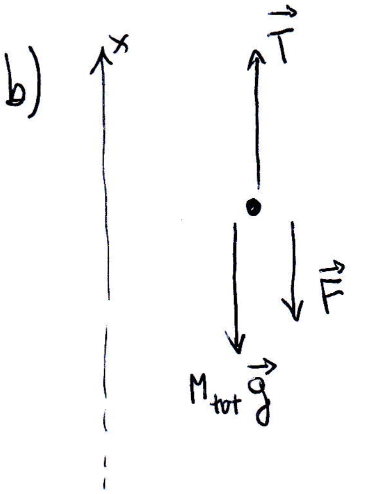
$$T - M_{tot}g - F = 0 \Rightarrow T = M_{tot}g + F$$

Dunque, la potenza istantanea che il motore deve sviluppare è:

$$\mathcal{P}(t) = \vec{T} \cdot \vec{V} = T_x V_x = (M_{tot}\, g + F) \cdot |\vec{V}| =$$

$$= \left[(1800\,kg) \cdot \left(9{,}81\,\frac{m}{s^2}\right) + 4000\,N\right] \cdot \left(3\,\frac{m}{s}\right) = 6{,}497 \times 10^4\,W = 64{,}97\,kW$$

b)



Stavolta l'ascensore sta accelerando verso l'alto con accelerazione costante, pertanto dalla seconda legge della dinamica otteniamo:

$$M_{tot}\, a_x = T - M_{tot}\, g - F \text{ , da cui:}$$

$$T = M_{tot}\,(a + g) + F$$

La potenza istantanea che il motore deve fornire è, quindi:

$$\mathcal{P}(t) = \vec{T} \cdot \vec{v}(t) = [M_{tot}\,(a+g) + F] \cdot |\vec{v}(t)|$$

Ma il moto dell'ascensore è rettilineo uniformemente accelerato, con partenza da fermo, per cui risulta $|\vec{v}(t)| = a\,t$; in definitiva, risulta:

$$\mathcal{P}(t) = [M_{tot}\,(a+g) + F]\,a\,t \text{ ,}$$ cioè la potenza istantanea che deve essere fornita dal motore deve crescere linearmente con il tempo.

$\mathcal{P}(t) = 23458 \cdot t[s]$ W