Tutorato Geometria e Algebra Informatica

Andrea Pizzi

18 Aprile 2023

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale. Dimostra che $0v = 0$ per ogni $v \in V$ utilizzando soltanto le altre proprietà della definizione di spazio vettoriale. (Suggerimento: parti da $0 + 0 = 0$)

Dimostra che $(-1)v + v = 0$ e che $(-1)v = -v$ per ogni $v \in V$. Come conseguenza, dimostra che se $v, v_1, v_2 \in V$ sono tali che $v_1 + v = 0 = v_2 + v$, allora $v_1 = v_2$. (L'opposto di un vettore è univocamente determinato)

Esercizio 2. Dimostra che l'insieme delle matrici diagonali, cioè quelle matrici A tali che $A_{ij} = 0$ se $i \neq j$, è un sottospazio vettoriale delle matrici quadrate. Parti mostrandolo per le matrici 2 x 2.

Fare lo stesso per le matrici triangolari inferiori, cioè quelle matrici A tali che $A_{ij} = 0$ se $j > i$.

Denotiamo con D lo spazio vettoriale delle matrici diagonali e con M_T quello delle matrici triangolari inferiori. Studiare le dimensioni e trovare delle basi per gli spazi vettoriali D, M_T, $D \cap M_T$ e $D + M_T$ facendo uso della Formula di Grassmann.

Esercizio 3. a) Mostra che $\{(2,1),(1,1)\}$, $\{(1,3),(2,3)\}$ e $\{(-1,1),(-1,-1)\}$ sono basi di $\mathbb{R}^2$.

b) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{(2,t),(t,2)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$?

c) * Dimostra che $\{(a,c),(b,d)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ se e solo se $ad - bc \neq 0$.

Esercizio 4. Dimostra che $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ mentre $\{(1,1,1),(1,2,3),(2,3,4)\}$ non lo è.

Esercizio 5. Consideriamo i polinomi $p_1(x) = 1 + x$, $p_2(x) = 1 + 2x + x^2$ e $p_3(x) = x - x^2$ in $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Dimostra che formano una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Esercizio 6. Considera i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1,1,0,1) \quad , \quad v_2 = (1,1,0,0) \quad , \quad v_3 = (0,0,0,0) \quad v_4 = (2,2,0,3)$$
$$v_5 = (1,0,1,1) \quad , \quad v_6 = (2,0,2,0) \quad , \quad v_7 = (1,7,3,2)$$

Dimostra che formano un sistema di generatori dello spazio $\mathbb{R}^4$ ed estrai una base di $\mathbb{R}^4$ dall'insieme $\{v_1, \ldots, v_7\}$.

Esercizio 7. Determinare le soluzioni del seguente sistema omogeneo

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

Sia A la matrice associata al sistema. Determinare la dimensione e una base per $Im(A)$ e per $Ker(A)$ e commentare il risultato.

Esercizio 8. Determinare le soluzioni del seguente sistema omogeneo.

$$\begin{cases} 2x + y - 2z + 3w = 0 \\ 3x + 2y - z + 2w = 0 \\ 3x + 3y + 3z - 3w = 0 \end{cases}$$

Studiare $Im(A)$ e $Ker(A)$, dove A è la matrice associata al sistema, trovando la loro dimensione e delle basi per ognuno.

Esercizio 9. Determinare le soluzioni dei seguenti sistemi omogenei.

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+8z=0 \\ 3x+2y+17z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ 3x-2y+2z=0 \\ 5x-3y-z=0 \end{cases}$$

Studiare $Im(A)$ e $Ker(A)$, dove A è la matrice associata al sistema, trovando la loro dimensione e delle basi per ognuno.

Esercizio 10. Siano $U = Span\{(1,0,1)\}$ e $W = Span\{(2,1,1),(0,1,0)\}$ due sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Dimostra che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$. Studia inoltre lo spazio vettoriale $U \cap W$, trovandone la dimensione (Formula di Grassmann) ed una base.

Esercizio 11. Considera i seguenti sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$U = Span\{(2,1,1,3),(1,0,1,4),(-1,-1,0,1)\}$$

$$V = Span\{(1,3,3,1),(2,4,3,0),(0,2,3,2)\}$$

i) Calcola la dimensione di U e di V e trovane delle basi.

ii) Qual'è la dimensione di $U \cap V$? Completa una base di $U \cap V$ a una base di $\mathbb{R}^4$.

iii) Qual'è la dimensione di $U + V$. Completala una base di $U + V$ a una base di $\mathbb{R}^4$. La somma è diretta?

Esercizio 12. Considera i seguenti sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$U = Span\{(1,0,3,0),(0,1,-1,1)\}$$

$$V = Span\{(1,1,4,1),(-1,1,2,1),(0,3,5,3)\}$$

Trova una base di U e una di V. Facendo uso della formula di Grassmann trovare le dimensioni e delle basi per $U \cap V$ e $U + V$. La somma è diretta?

Esercizio 13. Siano

$$U = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = z = 0\big\}$$

$$V = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\big\}$$

Trova una base di U e una di V. Facendo uso della formula di Grassmann trovare le dimensioni e delle basi per $U \cap V$ e $U + V$. La somma è diretta?

Esercizio 14. Sia

$$U = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

Descrivi geometricamente $Span\{U\}$, e trovane una base.

Esercizio 15. * Considera il sottoinsieme di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ dato da

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : a + b + c = 0 \right\}$$

Dimostra che V è un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ e calcolane la dimensione.

Esercizio 16. ** Per quali polinomi $p \in \mathbb{R}[x]$ il grafico $\Gamma = \{(x,p(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$?

Esercizio 17. *** Siano $v_1, \dots, v_n$ vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ V, e poniamo $u_j = v_1 + v_2 + \cdots + \hat{v}_j + \cdots + v_n$, dove $\hat{}$ indica che l'elemento non compare nella somma. Dimostra che $u_1, \dots, u_n$ sono linearmente indipendenti e deduci che $Span\{v_1, \dots, v_n\} = Span\{u_1, \dots, u_n\}$. Se consideriamo V come spazio vettoriale su $\mathbb{Z}_2$ è ancora vero?