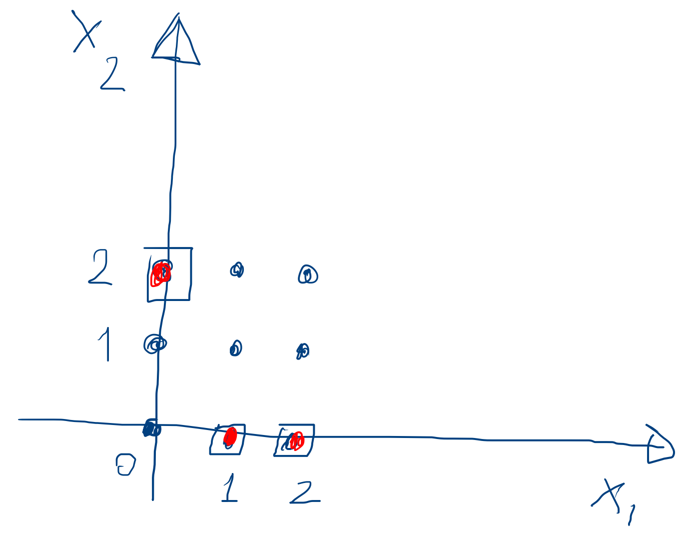
ESERCIZIO

Consideriamo una v.a. $\underline{X} = (X_1, X_2)$ con la seguente densità congiunta:

$$\begin{cases} P_{\underline{X}}(1,0) = P_{\underline{X}}(2,0) = P_{\underline{X}}(0,2) = \frac{1}{6}; \\ P_{\underline{X}}(0,0) = P_{\underline{X}}(0,1) = P_{\underline{X}}(1,1) = P_{\underline{X}}(2,1) = P_{\underline{X}}(1,2) = P_{\underline{X}}(2,2) = \frac{1}{12}. \end{cases}$$



1) Trovare la densità discreta di $Z = X_1 + X_2$
2) Trovare la densità discreta di $W = X_1 - X_2$

SVOLGIMENTO

1)
$P_Z(0) = P_{\underline{X}}(0,0) = \frac{1}{12}$

$P_Z(1) = P_{\underline{X}}(0,1) + P_{\underline{X}}(1,0) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12}$

$P_Z(2) = P_{\underline{X}}(0,2) + P_{\underline{X}}(1,1) + P_{\underline{X}}(2,0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$

$P_Z(3) = P_{\underline{X}}(1,2) + P_{\underline{X}}(2,1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12}$

$P_Z(4) = P_{\underline{X}}(2,2) = \frac{1}{12}$

SOMMA = 1 OK

2)
$P_W(-2) = P_{\underline{X}}(0,2) = \frac{1}{6} = \frac{2}{12}$

$P_W(-1) = P_{\underline{X}}(1,2) + P_{\underline{X}}(0,1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12}$

$P_W(0) = P_{\underline{X}}(0,0) + P_{\underline{X}}(1,1) + P_{\underline{X}}(2,2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12}$

$P_W(1) = P_{\underline{X}}(1,0) + P_{\underline{X}}(2,1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12}$

$P_W(2) = P_{\underline{X}}(2,0) = \frac{1}{6} = \frac{2}{12}$

SOMMA = 1 OK

ESERCIZIO

Sia $N \sim Poisson(\lambda)$.

Supponiamo di avere una moneta, e la probabilità che esca testa ad ogni lancio è $p \in (0,1)$.

Si lancia N volte la moneta, e consideriamo le seguenti v.a.:

$X_1 = \#$teste ottenute

$X_2 = \#$croci ottenute.

Trovare la densità congiunta di (X_1, X_2).

OSSERVAZIONE PRELIMINARE

In un esercizio passato avevamo visto che $X_1 \sim Poisson(\lambda p)$.

In maniera analoga si verifica che $X_2 \sim Poisson(\lambda(1-p))$

(basta scambiare il ruolo di teste e croci, e quindi di successi e fallimenti).

Allora: $p_{X_1}(x_1) = \dfrac{(\lambda p)^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda p}$ $\forall x_1 \geq 0$ intero; $p_{X_2}(x_2) = \dfrac{(\lambda(1-p))^{x_2}}{x_2!} e^{-\lambda(1-p)}$ $\forall x_2 \geq 0$ intero.

RISPOSTA ALLA DOMANDA DELL'ESERCIZIO

$\forall (x_1,x_2) \in \{0,1,2,\dots\} \times \{0,1,2,\dots\}$ si ha

$$p_{\underline{X}}(x_1,x_2) = P(\{X_1=x_1\}\cap\{X_2=x_2\}) \underset{\text{FORMULA PROB. TOTALI}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P(\{X_1=x_1\}\cap\{X_2=x_2\} \mid N=n)}_{(*)} \, \underbrace{P(N=n)}_{=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}}$$

dove, essendo $N = X_1 + X_2$, si ha

$$(*) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_1+x_2 \neq n \\ \overbrace{\binom{n}{x_1} p^{x_1} (1-p)^{n-x_1}}^{\text{CASO PARTICOLARE DELLA BINOMIALE}} & \text{se } x_1+x_2 = n \\ & (\text{e quindi } x_2 = n - x_1) \end{cases}$$

OSS

Ricorda che $\binom{n}{x_1} = \binom{n}{n-x_1} = \binom{n}{x_2}$ nel 2° caso

Quindi la somma (serie) fornita dalla formula delle probabilità totali si riduce ad un unico addendo (caso $n = x_1+x_2$) e si ha

$$p_{\underline{X}}(x_1,x_2) = \binom{x_1+x_2}{x_1} p^{x_1} (1-p)^{x_2} \frac{\lambda^{x_1+x_2}}{(x_1+x_2)!} e^{-\lambda} \qquad \forall x_1,x_2 \geq 0 \text{ interi.}$$

OSSERVAZIONE Faccio alcuni calcoli a partire dalla espressione ottenuta:

$$P_{\underline{X}}(x_1,x_2) = \binom{x_1+x_2}{x_1} p^{x_1}(1-p)^{x_2} \frac{\lambda^{x_1+x_2}}{(x_1+x_2)!} e^{-\lambda} = \frac{\cancel{(x_1+x_2)!}}{x_1!\,(\cancel{x_1}+x_2-\cancel{x_1})!} p^{x_1}(1-p)^{x_2} \frac{\lambda^{x_1+x_2}}{\cancel{(x_1+x_2)!}} e^{-\lambda} =$$

$$= \frac{p^{x_1}}{x_1!} \frac{(1-p)^{x_2}}{x_2!} \lambda^{x_1+x_2} e^{-\lambda}$$

dove $\begin{cases} \lambda^{x_1+x_2} = \lambda^{x_1}\lambda^{x_2} \\ e^{-\lambda} = e^{-\lambda p} e^{-\lambda(1-p)}. \end{cases}$

Quindi

$$P_{\underline{X}}(x_1,x_2) = \frac{p^{x_1}}{x_1!} \frac{(1-p)^{x_2}}{x_2!} \lambda^{x_1}\lambda^{x_2} e^{-\lambda p} e^{-\lambda(1-p)}$$

$$= \underbrace{\frac{(\lambda p)^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda p}}_{=P_{X_1}(x_1)} \underbrace{\frac{(\lambda(1-p))^{x_2}}{x_2!} e^{-\lambda(1-p)}}_{=P_{X_2}(x_2)}$$

CONCLUSIONE:

X_1 e X_2 sono indipendenti.

Quindi, se condizionatamente alla conoscenza di N le v.a. X_1 e X_2 sono fortemente legate (perché $X_1+X_2=N$), quando N è aleatorio e $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ c'è indipendenza. Se N è aleatorio con un'altra distribuzione non c'è indipendenza.

ALTRI CALCOLI CON DENSITÀ DISCRETE:
MASSIMI e MINIMI TRA V.A.

Per semplicità consideriamo il caso di $\underline{X} = (X_1, X_2)$ e consideriamo le seguenti v.a.:

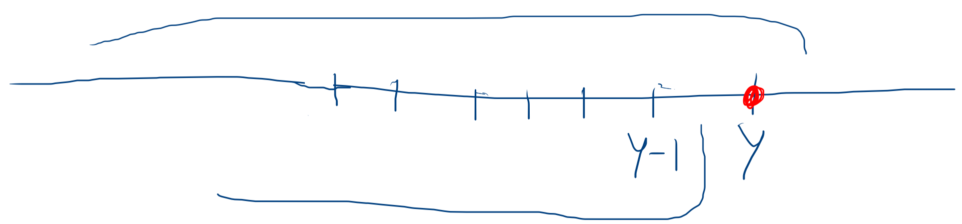
$$Y = \max\{X_1, X_2\}$$

$$W = \min\{X_1, X_2\}$$

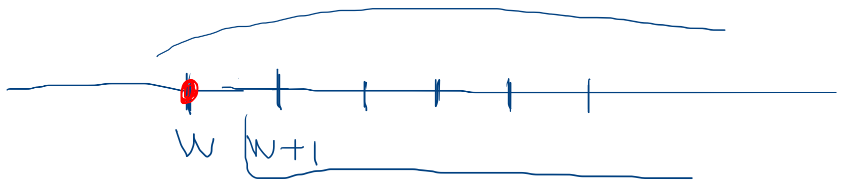
Inoltre supponiamo che le v.a. X_1 e X_2 assumano valori interi; allora lo stesso si può dire per le v.a. Y e W.

Per quel che segue è utile fare riferimento alle seguenti formule:

$$(*) \quad p_Y(y) = P(Y=y) = P(Y \leq y) - P(Y \leq y-1)$$



$$(**) \quad p_W(w) = P(W=w) = P(W \geq w) - P(W \geq w+1)$$



Per spiegare questo osserviamo che

$$\{Y \leq y\} = \{\max\{X_1, X_2\} \leq y\} = \{X_1 \leq y\} \cap \{X_2 \leq y\}$$

$$\Longrightarrow \quad p_Y(y) \overset{(*)}{=} P(Y \leq y) - P(Y \leq y-1) = P(\{X_1 \leq y\} \cap \{X_2 \leq y\}) - P(\{X_1 \leq y-1\} \cap \{X_2 \leq y-1\})$$

$$\underset{\text{se } X_1 \text{ e } X_2 \text{ indip.}}{=} P(X_1 \leq y) P(X_2 \leq y) - P(X_1 \leq y-1) P(X_2 \leq y-1)$$

$$\{W \geq w\} = \{\min\{X_1, X_2\} \geq w\} = \{X_1 \geq w\} \cap \{X_2 \geq w\}$$

$$\Longrightarrow \quad p_W(w) \overset{(**)}{=} P(W \geq w) - P(W \geq w+1) = P(\{X_1 \geq w\} \cap \{X_2 \geq w\}) - P(\{X_1 \geq w+1\} \cap \{X_2 \geq w+1\})$$

$$\underset{\text{se } X_1 \text{ e } X_2 \text{ indip.}}{=} P(X_1 \geq w) P(X_2 \geq w) - P(X_1 \geq w+1) P(X_2 \geq w+1).$$

ESEMPIO DI APPLICAZIONE DELLE FORMULE

Si lanciano due dadi equi. Siano X_1 e X_2 le v.a. che indicano i numeri che escono, e sappiamo che sono indipendenti.

Allora

$Y=\max\{X_1,X_2\}$ assume valori in $S_Y=\{1,2,3,4,5,6\}$

$W=\min\{X_1,X_2\}$ assume valori in $S_W=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Per $y\in\{1,\dots,6\}$

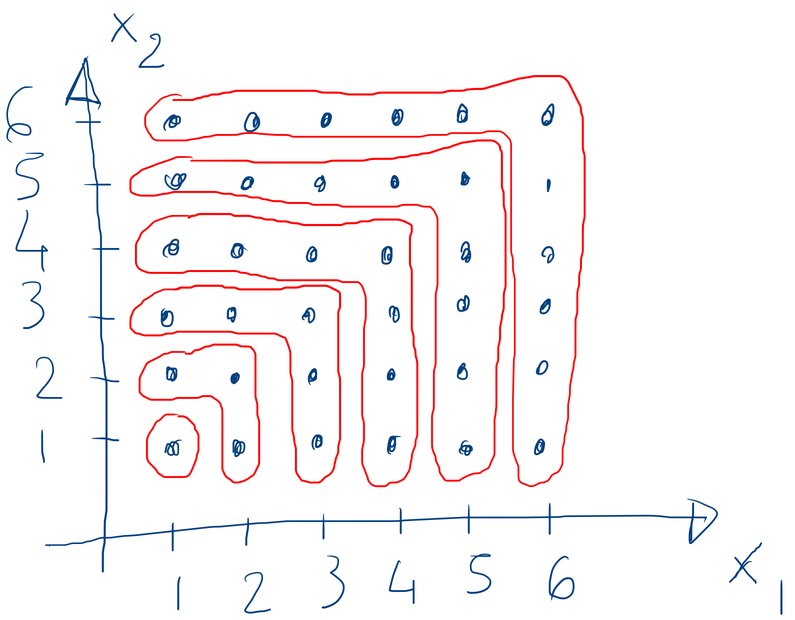
$$p_Y(y)=P(X_1\le y)P(X_2\le y)-P(X_1\le y-1)P(X_2\le y-1)=\frac{y}{6}\cdot\frac{y}{6}-\frac{y-1}{6}\cdot\frac{y-1}{6}=$$

$$=\frac{y^2}{36}-\frac{(y-1)^2}{36}=\frac{y^2-(y^2-2y+1)}{36}=\frac{2y-1}{36}=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{36} & \text{per } y=1\\ \frac{3}{36} & \text{per } y=2\\ \frac{5}{36} & \text{per } y=3\\ \frac{7}{36} & \text{per } y=4\\ \frac{9}{36} & \text{per } y=5\\ \frac{11}{36} & \text{per } y=6\end{cases}$$

SOMMA = 1

OK



Per $w \in \{1, \dots, 6\}$

$$p_W(w) = P(X_1 \geq w) P(X_2 \geq w) - P(X_1 \geq w+1) P(X_2 \geq w+1) =$$

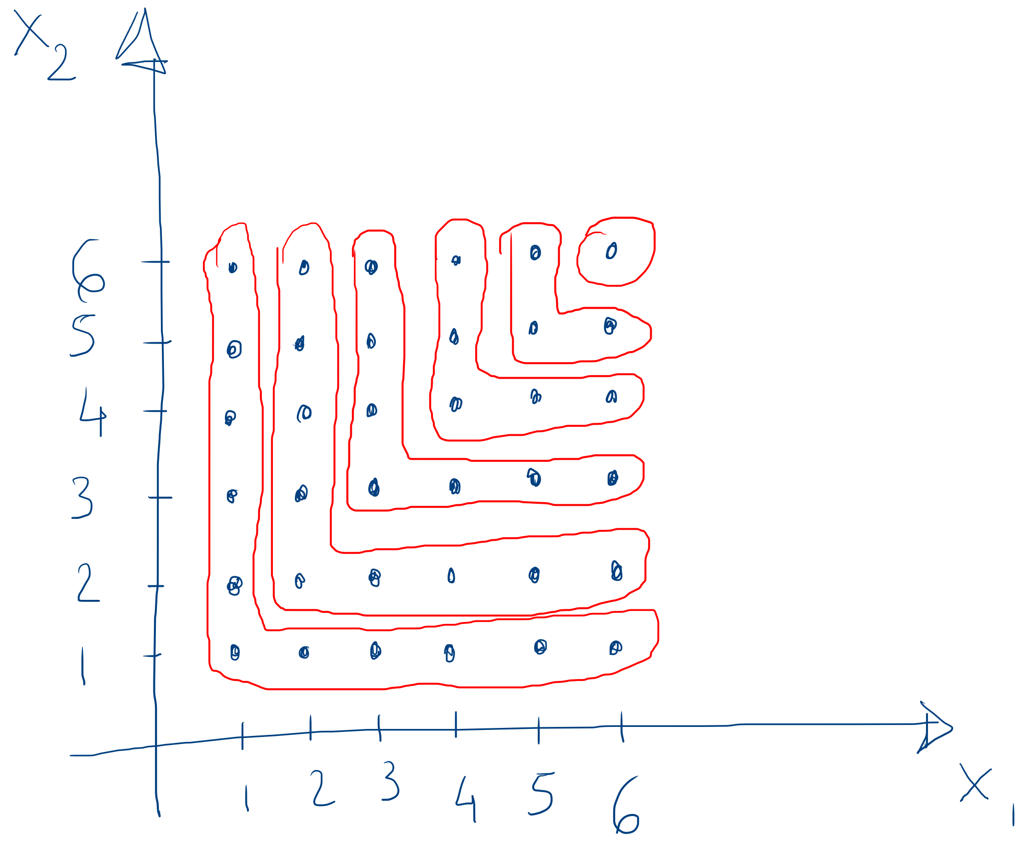
$$= \frac{6-w+1}{6} \frac{6-w+1}{6} - \frac{6-(w+1)+1}{6} \frac{6-(w+1)+1}{6} =$$

$$= \frac{(7-w)^2}{36} - \frac{(6-w)^2}{36} = \frac{49-14w+w^2-(36-12w+w^2)}{36} = \frac{13-2w}{36} =$$

$$= \begin{cases} \frac{11}{36} & \text{per } w=1 \\ \frac{9}{36} & \text{per } w=2 \\ \frac{7}{36} & \text{per } w=3 \\ \frac{5}{36} & \text{per } w=4 \\ \frac{3}{36} & \text{per } w=5 \\ \frac{1}{36} & \text{per } w=6 \end{cases}$$

SOMMA = 1

ok



UN LEGAME TRA BINOMIALE NEGATIVA (TRASLATA) e GEOMETRICA (TRASLATA)

Consideriamo lo schema della Binomiale Negativa (traslata)

$X = \#$ fallimenti prima del successo r-simo

$Y = \#$ prove per avere il successo r-simo

Es. $r = 4$ F S F F F S S F F S $X = 6$ $Y = 10$

Possiamo considerare: $X_i = \#$ fallimenti tra il successo $(i-1)^\circ$ e il successo i° $i = 1, \dots, r$

$Y_i = \#$ prove dopo il successo $(i-1)^\circ$ per avere il successo i° $i = 1, \dots, r$

Quindi: $\begin{cases} Y_1 + \dots + Y_r = Y \\ Y_i = X_i + 1 \iff X_i = Y_i - 1 \\ X_1 + \dots + X_r = X \end{cases}$

Nel caso dell'esempio

$X_1 = 1,\ X_2 = 3,\ X_3 = 0,\ X_4 = 2 \rightsquigarrow$ somma $= 6$ ok

$Y_1 = 2,\ Y_2 = 4,\ Y_3 = 1,\ Y_4 = 3 \rightsquigarrow$ somma $= 10$ ok

Allora:

$Y = Y_1 + \dots + Y_r$ e si può dimostrare che $Y_1, \dots, Y_r$ sono indipendenti Geo. traslate (p);

$X = X_1 + \dots + X_r$ e si può dimostrare che $X_1, \dots, X_r$ sono indipendenti Geo(p).

RIVISITAZIONE DI UN ESERCIZIO FATTO IN PASSATO

Avevamo dimostrato che $P(Y_1 = k \mid Y_1 + Y_2 = n) = \dfrac{1}{n-1}$ per $k \in \{1, \dots, n-1\}$ con $n \geq 2$.

Ora recuperiamo questo risultato tenendo conto di quanto detto qui

Si ha

$$P(Y_1 = k \mid Y_1 + Y_2 = n) = \frac{P(\{Y_1 = k\} \cap \{Y_1 + Y_2 = n\})}{P(Y_1 + Y_2 = n)} = \frac{P(\{Y_1 = k\} \cap \{Y_2 = n-k\})}{\binom{n-1}{2-1} p^2 (1-p)^{n-2}} = \frac{P(Y_1 = k) P(Y_2 = n-k)}{(n-1) p^2 (1-p)^{n-2}} =$$

$$= \frac{(1-p)^{k-1} \cancel{p} (1-p)^{n-k-1} \cancel{p}}{(n-1) \cancel{p^2} (1-p)^{n-2}} = \frac{\cancel{(1-p)^{n-2}}}{(n-1) \cancel{(1-p)^{n-2}}} = \frac{1}{n-1}$$

OK

"SPERANZA MATEMATICA" DI UNA V.A. DISCRETA

(SINONIMI: "MEDIA", "VALORE MEDIO", "ATTESA", "VALORE ATTESO")

Questa grandezza si introduce per definire un grandezza analoga al baricentro per una distribuzione di masse in fisica, il cui ruolo è giocato dalla distribuzione della v.a. (non necessariamente discreta).

Inoltre, se la speranza matematica esiste finita, possiamo dire che fornisce un valore riassuntivo della distribuzione della v.a. (anche se questo fa perdere delle informazioni rispetto alla conoscenza della distribuzione stessa).

DEFINIZIONE

Sia X una v.a. discreta con densità p_X. Allora si dice che X ha <u>speranza matematica finita</u> se

$$\sum_{x_k \in S_X} |x_k| \, p_X(x_k) < \infty \qquad (*)$$

In corrispondenza, se vale $(*)$, allora la speranza matematica di X è definita come segue:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x_k \in S_X} x_k \, p_X(x_k).$$

COMMENTO

La condizione (*) è verificata se l'insieme S_X è <u>limitato</u>, cioè se esiste $M>0$ tale che

$$\left.\begin{array}{ll} |x_k| \leq M & \forall x_k \in S_X . \\ \iff -M \leq x_k \leq M & \end{array}\right] \quad (**)$$

Infatti in corrispondenza si ha $\sum_{x_k \in S_X} |x_k| P_X(x_k) \leq M \underbrace{\sum_{x_k \in S_X} P_X(x_k)}_{=1} = M < \infty$

Osserviamo che

$$S_X \text{ finito} \implies S_X \text{ limitato}$$

perché, se $S_X = \{x_1, \dots, x_n\}$ per qualche n, vale (**) con $M = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$.
Al contrario esistono insiemi limitati non finiti; si pensi a intervalli limitati (es. $[a,b]$) o, se vogliamo un caso di insieme al più numerabile consideriamo $\{\frac{1}{n} : n \geq 1\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ dove vale (**) con $M=1$.

Alcune proprietà di $\mathbb{E}[X]$ (non solo per il caso in cui X è discreto)

→ X si dice centrata se $\mathbb{E}[X]=0$ (TERMINOLOGIA)

→ Siano $X_1,\dots,X_n$ v.a. definite in uno stesso spazio di probabilità, con speranza matematica finita.
(LINEARITÀ) Siano $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$. Allora anche $a_1X_1+\dots+a_nX_n$ ha speranza matematica finita e si ha

$$\mathbb{E}[a_1X_1+\dots+a_nX_n]=a_1\mathbb{E}[X_1]+\dots+a_n\mathbb{E}[X_n]$$

(Come caso particolare possiamo considerare $X_1+\dots+X_n$ ponendo $a_1=\dots=a_n=1$).

→ Siano $X_1,\dots,X_n$ definite su uno stesso spazio di probabilità, con speranza matematica finita, e indipendenti. Allora $X_1\cdot\ldots\cdot X_n$ ha speranza matematica finita e si ha

$$\mathbb{E}[X_1\cdot\ldots\cdot X_n]=\mathbb{E}[X_1]\cdot\ldots\cdot\mathbb{E}[X_n].$$

→ (MONOTONIA) Supponiamo che $X(\omega)\geq Y(\omega)$ $\forall\omega\in\Omega$. Allora, se X e Y hanno speranza matematica finita, si ha $\mathbb{E}[X]\geq\mathbb{E}[Y]$. (In realtà basta avere $P(X\geq Y)=1$).

PROPOSIZIONE

Sia $\underline{X}$ una v.a. discreta m-dimensionale con densità congiunta $p_{\underline{X}}$

Sia $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e sia $Y = f(\underline{X})$.

Allora, se Y ha speranza matematica finita, si ha

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{\underline{x}_k \in S_{\underline{X}}} f(\underline{x}_k)\, p_{\underline{X}}(\underline{x}_k).$$

(oss. Per $m=1$ si ha una densità discreta non congiunta perché $\underline{X}$ è una v.a. unidimensionale)

COMMENTO

In altri termini non serve conoscere esplicitamente la densità discreta p_Y della v.a. Y, ma basta fare riferimento a $p_{\underline{X}}$ (oltre che ad f).

DIMOSTRAZIONE

Si ha

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{y_h \in S_Y} y_h \cdot \underbrace{p_Y(y_h)}_{=P(Y=y_h)} = \sum_{y_h \in S_Y} y_h P\Big(\underbrace{\bigcup_{\substack{\underline{x}_k \in S_{\underline{X}}:\\ f(\underline{x}_k)=y_h}} \{\underline{X} = \underline{x}_k\}}\Big) =$$

unione finita o numerabile (perché $S_{\underline{X}}$ è un insieme discreto) di eventi disgiunti a due a due.

$$= \sum_{y_h \in S_Y} y_h \sum_{\substack{\underline{x}_k \in S_{\underline{X}}:\\ f(\underline{x}_k)=y_h}} P(\underline{X} = \underline{x}_k) = \sum_{\dots} p_{\underline{X}}(\underline{x}_k)$$

$$= \sum_{y_h \in S_Y} y_h \sum_{\substack{\underline{x}_k \in S_{\underline{X}}:\\ f(\underline{x}_k)=y_h}} p_{\underline{X}}(\underline{x}_k) =$$

$$= \sum_{y_h \in S_Y} \sum_{\substack{\underline{x}_k \in S_{\underline{X}}:\\ f(\underline{x}_k)=y_h}} y_h p_{\underline{X}}(\underline{x}_k) = \sum_{y_h \in S_Y} \sum_{\substack{\underline{x}_k \in S_{\underline{X}}\\ f(\underline{x}_k)=y_h}} f(\underline{x}_k) p_{\underline{X}}(\underline{x}_k) = \sum_{\underline{x}_k \in S_{\underline{X}}} f(\underline{x}_k) p_{\underline{X}}(\underline{x}_k). \qquad \square$$

si può sostituire y_h con $f(\underline{x}_k)$

qui tutti i valori $\underline{x}_k$ sono stati "raggruppati" in base al valore y_h assunto da $f(\underline{x}_k)$; qui non sono più "raggruppati"

ESEMPIO (con uso della formula nell'ultima proposizione)

Consideriamo una v.a. X con la seguente densità discreta:

$$p_X(-2)=\frac{1}{10},\quad p_X(-1)=\frac{3}{10},\quad p_X(0)=\frac{1}{10},\quad p_X(1)=\frac{4}{10},\quad p_X(2)=\frac{1}{10}.$$

Calcolare $\mathbb{E}[Y]$ dove $Y=X^2$.

RISPOSTA

La v.a. Y assume valori in un insieme finito, cioè $S_Y=\{0,1,4\}$ e

$$\mathbb{E}[Y]=0\cdot p_Y(0)+1\cdot p_Y(1)+4\,p_Y(4).$$

Però non è necessario calcolare i valori di $p_Y(y)$ per $y\in S_Y$; infatti per la prop. precedente (con $n=1$) si ha

$$\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[X^2]=(-2)^2\cdot\frac{1}{10}+(-1)^2\cdot\frac{3}{10}+0^2\cdot\frac{1}{10}+1^2\cdot\frac{4}{10}+2^2\cdot\frac{1}{10}=\frac{4}{10}+\frac{3}{10}+0+\frac{4}{10}+\frac{4}{10}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}.$$

ESEMPIO (con uso della formula nell'ultima proposizione)

Consideriamo il lancio di due dadi equi e sia $Y = X_1 + X_2$ la v.a. che indica la somma dei due numeri estratti.

Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

RISPOSTA

Un modo consiste nel fare riferimento alla densità discreta di Y vista in passato (nella lezione precedente):

$p_Y(2) = \frac{1}{36}$, $p_Y(3) = \frac{2}{36}$, $p_Y(4) = \frac{3}{36}$, $p_Y(5) = \frac{4}{36}$, $p_Y(6) = \frac{5}{36}$, $p_Y(7) = \frac{6}{36}$

$p_Y(8) = \frac{5}{36}$, $p_Y(9) = \frac{4}{36}$, $p_Y(10) = \frac{3}{36}$, $p_Y(11) = \frac{2}{36}$, $p_Y(12) = \frac{1}{36}$.

Allora

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=2}^{12} k\, p_Y(k) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} =$$

$$= \dots = \frac{252}{36} = 7.$$

Ora vogliamo rispondere alla domanda (cioè calcolare $\mathbb{E}[Y]$) considerando l'ultima proposizione con

$$m=2, \quad f(x_1,x_2)=x_1+x_2, \quad p_{\underline{X}}(x_1,x_2)=\frac{1}{36} \quad \text{per } x_1,x_2\in\{1,\dots,6\}.$$

Si ha

$$\mathbb{E}[Y]=\sum_{x_1,x_2=1}^{6}(x_1+x_2)\underbrace{p_{\underline{X}}(x_1,x_2)}_{=1/36}=\frac{1}{36}\sum_{x_1,x_2=1}^{6}(x_1+x_2)=$$

$$=\frac{1}{36}\left\{\sum_{x_2=1}^{6}\sum_{x_1=1}^{6}x_1+\sum_{x_1=1}^{6}\sum_{x_2=1}^{6}x_2\right\}=\frac{1}{36}\left\{\sum_{x_2=1}^{6}\underbrace{(1+2+3+4+5+6)}_{\text{non dipende da } x_2}+\sum_{x_1=1}^{6}\underbrace{(1+2+3+4+5+6)}_{\text{non dipende da } x_1}\right\}$$

$$=\frac{1}{36}\left\{6\cdot(1+2+3+4+5+6)+6\cdot(1+2+3+4+5+6)\right\}=\frac{2\cdot6\cdot(1+2+3+4+5+6)}{36}$$

$$=\frac{2\cdot6\cdot21}{36}=\frac{252}{36}=7$$ come ottenuto in precedenza.

COMMENTO

In realtà in questo caso $\mathbb{E}[Y]$ si calcola ancora più facilmente con riferimento alla linearità della speranza matematica vista in precedenza (slide 13 di questa lezione) con $n=2$ e $a_1=a_2=1$:

$$\mathbb{E}[X_1+X_2]=\mathbb{E}[X_1]+\mathbb{E}[X_2].$$

Infatti entrambe le v.a. X_1 e X_2 hanno distribuzione uniforme discreta su $\{1,\dots,6\}$ e quindi

$$\mathbb{E}[X_i]=\sum_{k=1}^{6}k\cdot\underbrace{p_{X_i}(k)}_{=1/6}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}\qquad \text{per } i=1,2$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_1+X_2]=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=7.$$

ESEMPIO (ancora con uso della formula nell'ultima proposizione).

Un'urna ha 4 palline numerate da 1 a 4. Si estraggono 2 palline a caso, una alla volta e senza reinserimento. Siano X_1 e X_2 le v.a. che indicano il massimo e il minimo tra i due numeri estratti.

Calcolare $\mathbb{E}[Y]$ dove $Y = X_1 - X_2$.

RISPOSTA

perché le estrazioni sono senza reinserimento

Abbiamo $\Omega = \{ \omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_1, \omega_2 \in \{1,2,3,4\}$ con $\omega_1 \neq \omega_2 \}$

Allora

$$X_1(\omega) = \max\{\omega_1, \omega_2\}$$

$$X_2(\omega) = \min\{\omega_1, \omega_2\} \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

$$Y(\omega) = X_1(\omega) - X_2(\omega)$$

Per ogni $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ abbiamo $P(\{\omega\}) = \underbrace{P(\text{estrarre } \omega_1)}_{=1/4} \underbrace{P(\text{estrarre } \omega_2 \mid \text{è stato estratto } \omega_1)}_{=1/3} = \frac{1}{12}$

Inoltre $\# \Omega = 12$. In dettaglio si ha:

ω	$X_1(\omega)$	$X_2(\omega)$	$Y(\omega)$
(1,2)	2	1	1
(2,1)	2	1	1
(1,3)	3	1	2
(3,1)	3	1	2
(1,4)	4	1	3
(4,1)	4	1	3
(2,3)	3	2	1
(3,2)	3	2	1
(2,4)	4	2	2
(4,2)	4	2	2
(3,4)	4	3	1
(4,3)	4	3	1

$$P_Y(y) = \begin{cases} 6/12 & \text{per } y = 1 \\ 4/12 & \text{per } y = 2 \\ 2/12 & \text{per } y = 3 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[Y] = 1 \cdot \frac{6}{12} + 2 \cdot \frac{4}{12} + 3 \cdot \frac{2}{12} =$$

$$= \frac{6+8+6}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}.$$

Usando la proposizione possiamo evitare di trattare con $p_Y(y)$ e possiamo limitarci a $p_{\underline{X}}(\underline{x})$ che è la seguente [Si hanno le 6 coppie che si ottengono dalle 12 coppie della slide precedente, ordinate con (massimo, minimo); tutte con prob. $\frac{1}{6}$]

$$p_{\underline{X}}(2,1) = \frac{2}{12},\ p_{\underline{X}}(3,1) = \frac{2}{12},\ p_{\underline{X}}(4,1) = \frac{2}{12},\ p_{\underline{X}}(3,2) = \frac{2}{12},\ p_{\underline{X}}(4,2) = \frac{2}{12},\ p_{\underline{X}}(4,3) = \frac{2}{12}$$

Allora

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{(x_1,x_2)\in\Omega} (x_1 - x_2)\, p_{\underline{X}}(x_1,x_2) =$$

$$= (2-1)\cdot\frac{2}{12} + (3-1)\frac{2}{12} + (4-1)\frac{2}{12} + (3-2)\frac{2}{12} + (4-2)\frac{2}{12} + (4-3)\cdot\frac{2}{12}$$

$$= \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2 + 1\cdot 2 + 2\cdot 2 + 1\cdot 2}{12} = \frac{2+4+6+2+4+2}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$