ESERCIZI SUL

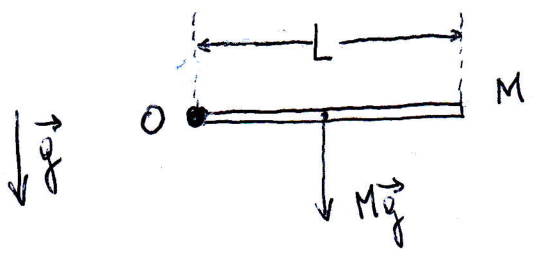
MOTO ROTAZIONALE

Esempio 1

Una sbarretta omogenea avente massa M e lunghezza L può ruotare in un piano verticale attorno a un perno senza attrito, che si trova a una estremità della sbarretta. La sbarretta, inizialmente in quiete in posizione orizzontale, viene lasciata libera di ruotare. a) Quali sono l'accelerazione angolare iniziale della sbarretta e l'accelerazione iniziale della sua estremità destra? b) Quanto vale il modulo dell'accelerazione centripeta della sbarretta nell'istante in cui, ruotando attorno al perno, si trova allineata lungo la direzione verticale? Quanto vale il modulo della forza di reazione del perno in questo istante?

---

a) La situazione iniziale può essere schematizzata nel modo seguente:



Scegliendo la posizione del perno come polo per il calcolo dei momenti, osserviamo che l'unica forza avente momento non nullo rispetto al polo O, all'istante iniziale, è la forza peso della sbarretta, che agisce nel centro di massa della sbarretta situato a metà della sua lunghezza (dato che la sbarretta è omogenea).

Per come abbiamo scelto la posizione iniziale della sbarretta, risulta in questo istante:

$$\tau_{e,TOT,z} = -\frac{L}{2} Mg = -\frac{1}{2} MgL$$

Poiché $\tau_{e,TOT,z} = I_z \alpha$ per un corpo rigido, ed essendo $I_z = \frac{1}{3} ML^2$ in questo caso specifico, possiamo scrivere:

$$\tau_{e,TOT,z} = I_z \alpha \, , \quad \text{cioe'}$$

$$-\frac{1}{2} \cancel{M} g \cancel{L} = \frac{1}{3} \cancel{M} L^{\cancel{2}} \alpha \, , \quad \text{da cui otteniamo}$$

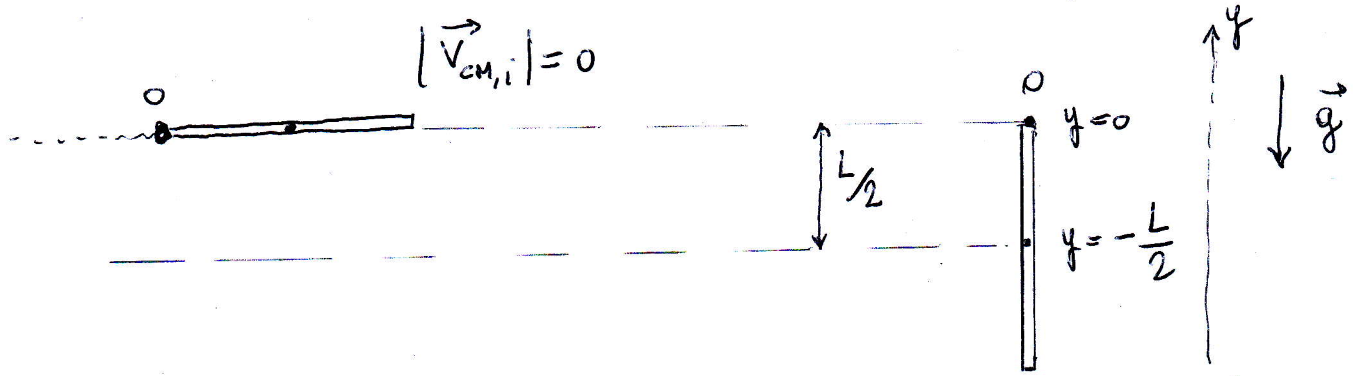
$$\boxed{\alpha = -\frac{3g}{2L}}$$ accelerazione angolare istantanea della sbarretta rotante, all'istante iniziale

Il segno negativo e' dovuto al fatto che la sbarretta, in quella posizione, possiede un'accelerazione tangenziale diretta in senso orario; infatti l'accelerazione tangenziale della sua estremita' destra nell'istante iniziale e':

$$\boxed{a_t = L\alpha = -\frac{3}{2} g}$$

b) Prima di tutto troviamo il modulo della velocità del centro di massa della sbarretta nell'istante in cui questa passa per la posizione verticale.

Istante iniziale t_i Istante finale t_f



L'unica forza che compie lavoro durante la rotazione della sbarretta è la forza peso della sbarretta stessa. Infatti l'altra forza agente sulla sbarretta è la reazione del perno O, che compie lavoro nullo in quanto il punto in cui è applicata resta fermo durante la rotazione della sbarretta.

Dunque, l'energia meccanica della sbarretta si conserva durante la rotazione. Scelto un asse cartesiano y verticale orientato positivamente verso l'alto, risulta che le posizioni del centro di massa della sbarretta all'istante t_i e all'istante t_f sono, rispettivamente: $y_i = 0$, $y_i = -\frac{L}{2}$, avendo scelto come origine dell'asse y la quota iniziale del centro di massa della sbarretta. Risulta quindi:

$$E_{m,f} = E_{m,i}, \quad \text{cioè:} \quad K_f + U_{P,f} = K_i + U_{P,i}$$

L'energia cinetica della sbarretta, in questo problema, è energia cinetica di rotazione attorno a un asse perpendicolare alla sbarretta, passante per un estremo di questa.

All'istante iniziale risulta:

$\omega_i = 0$; $y_i = 0$, per cui:

$K_i = \frac{1}{2} I_z \omega_i^2 = 0$; $U_{P,i} = M g y_i = 0$

All'istante finale risulta:

$K_f = \frac{1}{2} I_z \omega_f^2$; $U_{P,f} = M g y_f = -\frac{1}{2} M g L$

Pertanto l'equazione impostata in precedenza diventa:

$\cancel{\frac{1}{2}} I_z \omega_f^2 - \cancel{\frac{1}{2}} M g L = 0$; essendo $I_z = \frac{1}{3} M L^2$ otteniamo:

$\frac{1}{3} \cancel{M} L^{\cancel{2}} \omega_f^2 = \cancel{M} g \cancel{L}$, da cui $\omega_f^2 = \frac{3g}{L}$, e infine

$|\omega_f| = \sqrt{\frac{3g}{L}}$; per la scelta dell'orientamento iniziale della sbarretta risulta (togliendo il valore assoluto):

$\omega_f = -\sqrt{\frac{3g}{L}}$

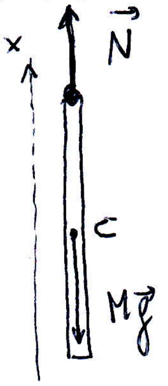
Dunque, il modulo della accelerazione centripeta del centro di massa della sbarretta all'istante t_f è:

$|\vec{a}_{CM,c,f}| = \omega_f^2 \frac{L}{2}$, essendo $\frac{L}{2}$ la distanza del centro di massa della sbarretta dall'asse di rotazione.

Dunque:

$$\boxed{|\vec{a}_{CM,c,f}| = \omega_f^2 \frac{L}{2} = \frac{3g}{\cancel{L}} \cdot \frac{\cancel{L}}{2} = \frac{3}{2} g}$$

A questo punto applichiamo la prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi alla sbarretta all'istante t_f.



Le forze esterne agenti sulla sbarretta sono la forza peso e la reazione del perno, che all'istante t_f sono disposte come nello schema a fianco.

Introducendo un asse x diretto parallelamente alla sbarretta e orientato positivamente dal centro di massa della sbarretta verso il perno, se poniamo $|\vec{N}| = N$ possiamo scrivere:

$$M a_{CM,c,f,x} = N - Mg \,,$$ da cui otteniamo

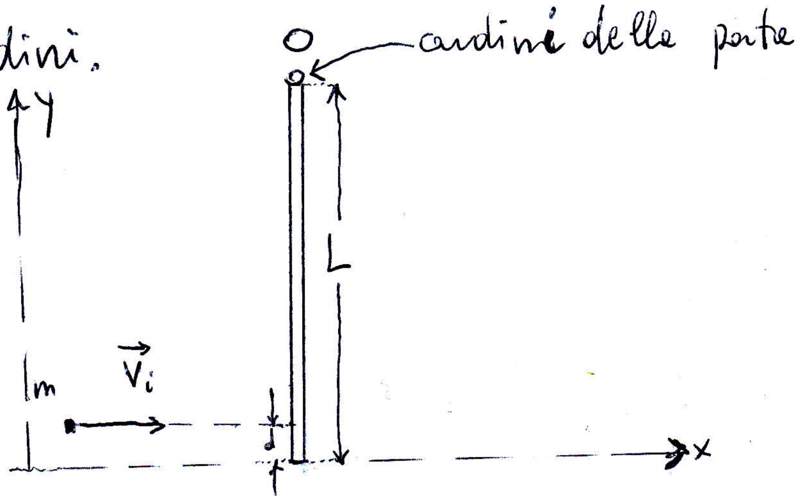
$$N = Mg + M a_{CM,c,f,x} = M(g + a_{CM,c,f,x}) = M(g + \tfrac{3}{2}g),$$

per cui in definitiva otteniamo:

$$\boxed{N = \frac{5}{2} Mg}$$

Serway_I_ pr. 11.41

Un proiettile avente massa $m = 0{,}005$ kg, sparato orizzontalmente con velocità di modulo $V_i = 10^3$ m/s si conficca in una porta avente larghezza $L = 1$ m e massa $M = 18$ kg in un punto che si trova alla distanza $d = 0{,}1$ m dal lato opposto ai cardini.



a) Il proiettile possiede un momento angolare rispetto all'asse di rotazione della porta prima di conficcarvisi?

b) Se sì, lo si calcoli, altrimenti si spieghi perché è nullo.

c) Durante l'urto, si conserva l'energia meccanica del sistema proiettile-porta? Si risponda senza eseguire calcoli.

d) Qual è il modulo della velocità angolare con cui si apre la porta immediatamente dopo l'urto?

e) Si calcoli l'energia del sistema proiettile-porta e si valuti se è inferiore o uguale all'energia cinetica del proiettile prima dell'urto.

f) Si calcoli la variazione della quantità di moto totale del sistema proiettile-porta nell'urto. Che cosa rappresenta questa quantità?

a), b) Rispetto all'asse di rotazione, coincidente con l'asse dei cardini della porta, il momento angolare del proiettile prima dell'urto con la porta e':

$$\boxed{L_{p,z,i} = (L-d)\,m v_i = 4{,}5 \text{ kg m}^2 s^{-1}}$$

come si può calcolare immediatamente a partire dallo schema della pagina precedente. Questa e' anche la componente lungo l'asse di rotazione del momento angolare totale del sistema proiettile - porta (rispetto a un polo posto nell'asse dei cardini) prima dell'urto, in quanto inizialmente la porta non e' in rotazione e quindi non contribuisce al momento angolare totale del sistema.

c) L'urto tra il proiettile e la porta, in questo problema, e' totalmente anelastico, e in urti di questo tipo c'e' sempre perdita di energia meccanica totale del sistema.

d) Tuttavia, nell'urto, si conserva la componente lungo l'asse di rotazione del momento angolare totale del sistema proiettile - porta rispetto a un polo nell'asse di rotazione. La quantità di moto totale del sistema non si conserva in un urto di questo tipo, in quanto durante l'urto i cardini della porta esercitano una forza impulsiva esterna, per cui durante l'urto il sistema proiettile - porta non e' isolato.

La componente $L_{TOT,z,i}$ l'abbiamo calcolata sopra.

Dopo l'urto, il proiettile resta conficcato nella porta e il sistema proiettile-porta ruota come un corpo rigido unico attorno all'asse dei cardini. Pertanto risulta:

$$L_{TOT,z,f} = I_{z,f}\,\omega_f ;$$

$I_{z,f}$ e' il momento d'inerzia del sistema rigido porta-proiettile dopo l'urto, quando la pallottola resta conficcata a distanza $L-d$ dall'asse di rotazione.

Risulta quindi:

$$I_{z,f} = \frac{1}{3} M L^2 + m(L-d)^2$$

Dunque, dalla conservazione di $L_{TOT,z}$ otteniamo:

$$L_{TOT,z,f} = L_{TOT,z,i} \Rightarrow I_{z,f}\,\omega_f = (L-d)\,m\,v_i \text{, e quindi}$$

$$\boxed{\omega_f = \frac{(L-d)\,m\,v_i}{I_{z,f}} = \frac{(L-d)\,m\,v_i}{\frac{1}{3}ML^2 + m(L-d)^2} = 0{,}7495 \text{ rad/s}}$$

e) L'energia del sistema proiettile-porta dopo l'urto e':

$$\boxed{K_{TOT,f} = \frac{1}{2} I_{z,f}\,\omega_f^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{(L-d)^2 m^2 v_i^2}{\frac{1}{3}ML^2 + m(L-d)^2} = 1{,}6864 \text{ J}}$$

L'energia del sistema prima dell'urto e'

$$\boxed{K_{TOT,i} = \frac{1}{2} m v_i^2 = 2{,}5\times10^3 \text{ J}} \Rightarrow \boxed{K_{TOT,f} < K_{TOT,i}}$$

f) La quantità di moto totale iniziale (cioè, prima dell'urto) del sistema è $P_{tot,x,i} = m V_i$ (la porta è ferma prima dell'urto, per cui contribuisce solo la quantità di moto del proiettile; diretta lungo l'asse orizzontale x della figura).

Risulta poi, chiaramente:

$$P_{tot,y,i} = 0$$

La quantità di moto totale finale (cioè, subito dopo l'urto) è:

$$P_{tot,x,f} = P_{pr,x,f} + P_{porta,x,f}$$

dove $P_{pr,x,f}$ è la componente x della quantità di moto del proiettile subito dopo l'urto.

Poiché subito dopo l'urto la porta e il proiettile iniziano a ruotare attorno al perno con stessa velocità angolare ω_f, le velocità del proiettile e del centro di massa della porta subito dopo l'urto sono, rispettivamente:

$$V_{pr,x,f} = \omega_f (L-d) \quad , \quad V_{porta,x,f} = \omega_f \frac{L}{2}$$

Allora: $P_{tot,x,f} = m V_{pr,x,f} + M V_{porta,x,f} =$

$$= \omega_f \left[m(L-d) + M\frac{L}{2} \right] = \frac{(L-d)\, m V_i}{\frac{1}{3}ML^2 + m(L-d)^2} \left[m(L-d) + M\frac{L}{2} \right]$$

Risulta $P_{tot,y,f} = 0$

Risulta quindi:

$$\Delta P_{tot,x} = P_{tot,x,f} - P_{tot,x,i} =$$

$$= m V_i \left[\frac{(L-d)\left(m(L-d)+M\frac{L}{2}\right)}{\frac{1}{3}ML^2+m(L-d)^2} - 1 \right] =$$

$$= m V_i \left[\frac{\cancel{m(L-d)^2} + \frac{1}{2}ML(L-d) - \frac{1}{3}ML^2 - \cancel{m(L-d)^2}}{\frac{1}{3}ML^2+m(L-d)^2} \right] =$$

$$= m V_i \left[\frac{\frac{1}{2}ML^2 - \frac{1}{2}MLd - \frac{1}{3}ML^2}{\frac{1}{3}ML^2 + m(L-d)^2} \right] = \frac{m V_i\left(\frac{1}{6}ML^2 - \frac{1}{2}MLd\right)}{\frac{1}{3}ML^2+m(L-d)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{M m V_i L \left(\frac{L}{3} - d\right)}{\frac{1}{3}ML^2 + m(L-d)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(18\ kg)\cdot(0{,}005\ kg)\cdot(10^3\ m/s)\cdot(1\ m)\cdot\left(\frac{1}{3}\ m - 0{,}1\ m\right)}{\frac{1}{3}\cdot(18\ kg)\cdot(1\ m)^2 + (0{,}005\ kg)\cdot(1\ m - 0{,}1\ m)^2} =$$

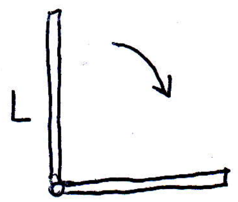
$$= 1{,}7512\ kg\ m\ s^{-1} > 0$$

Risulta chiaramente $\Delta P_{tot,y} = 0$.

Allora risulta $\Delta \vec{P}_{tot} = (1{,}7512\ kg\ m s^{-1})\,\hat{i}$, e rappresenta l'impulso trasmesso al sistema dalla reazione dei cardini della porta durante l'urto, che è l'unica forza esterna al sistema avente componente x non nulla durante l'urto.

Serway, pr. 10.73

Una sbarretta omogenea di lunghezza L e massa M e' incernierata in un estremo a un asse orizzontale senza attrito.
La sbarretta viene lasciata andare, in quiete, in posizione verticale, come mostrato nello schema:



Quando la sbarretta si trova in posizione orizzontale, si calcolino:

a) la velocita' angolare della sbarretta,

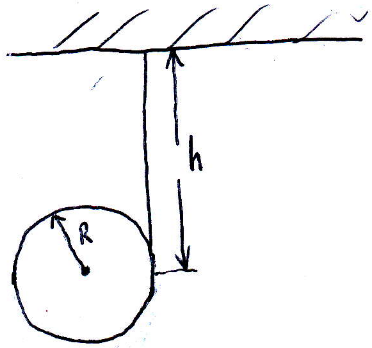
b) il modulo della sua accelerazione angolare,

c) le componenti x e y dell'accelerazione del suo centro di massa,

d) le componenti della reazione vincolare della cerniera.

Serway, pr. 10.78

Un filo di massa trascurabile è avvolto intorno a un disco omogeneo avente raggio R e massa M; l'altro estremo del filo è agganciato a un supporto fisso.



Il disco è lasciato cadere da fermo e il filo si mantiene verticale durante la caduta del disco.

Mentre il disco scende:

a) si calcoli il modulo della tensione del filo;

b) si calcoli il modulo dell'accelerazione del centro di massa del disco;

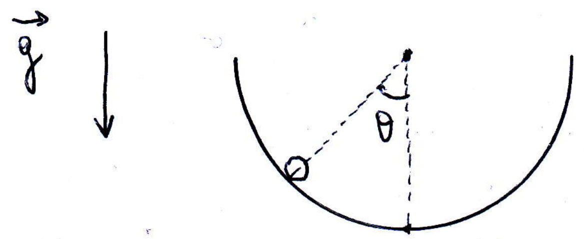
c) si calcoli il modulo della velocità del centro di massa del disco nell'istante in cui questo è sceso di un tratto di lunghezza h partendo da fermo.

d) Si verifichi il risultato del punto c) usando l'approccio energetico.

Serway, pr. 10.81

Una sfera piena omogenea avente raggio r si trova sulla superficie interna scabra di una ciotola semisferica avente raggio R, molto maggiore di r. La sfera parte da ferma in un punto definito dall'angolo θ con la verticale e rotola senza strisciare.

Si determini la velocita' angolare della sfera nell'istante in cui tocca il fondo della ciotola.



Serway, pr. 10.84

Una sbarra sottile avente massa $M = 0{,}63$ kg e lunghezza $L = 1{,}24$ m e' inizialmente ferma in posizione verticale appesa con il suo estremo superiore a un gancio.
Improvvisamente una forza orizzontale impulsiva
$\vec{F}_i = (14{,}7\ \hat{i})$ N viene ~~esercitata~~ sulla sbarra.

a) Se la forza e' applicata nell' estremita' inferiore della sbarra, si calcoli l'accelerazione del centro di massa della sbarra, e

b) la forza di reazione orizzontale esercitata dal gancio.

c) Se la forza e' applicata nel centro della sbarra, si calcoli l'accelerazione del centro di massa, e

d) la forza di reazione orizzontale esercitata dal gancio.

e) Dove deve essere applicata la forza affinché la reazione orizzontale del gancio sia nulla? Tale punto e' chiamato CENTRO DI PERCUSSIONE.

Serway, pr. 11.46

Due ragazzi scivolano per gioco sulla superficie ghiacciata di un parcheggio. A un certo istante il ragazzo avente massa $m_1 = 45$ kg sta scivolando con velocità di modulo $|\vec{V}_{1i}| = 8$ m/s, mentre il ragazzo avente massa $m_2 = 31$ kg sta scivolando con velocità di modulo $|\vec{V}_{2i}| = 11$ m/s. I due ragazzi si muovono lungo la stessa direzione ma in versi opposti. Quando giungono vicini si aggrappano l'uno all'altro e procedono insieme.

a) Si calcoli il modulo della velocità dei due ragazzi quando si muovono insieme.

b) Qual è il rapporto tra la loro energia cinetica totale finale e la loro energia cinetica totale iniziale?

Essendo il gioco troppo divertente, lo ripetono. Stavolta però le loro direzioni iniziali di moto distano di un tratto $d = 1,2$ m. Una volta vicini, si aggrappano nuovamente l'uno all'altro e iniziano così a ruotare attorno al centro di massa del sistema costituito da ambedue. Si schematizzino i due ragazzi come punti materiali e si supponga che le loro braccia restino allungate durante tutto il processo.

c) Si calcoli la velocità del loro centro di massa.

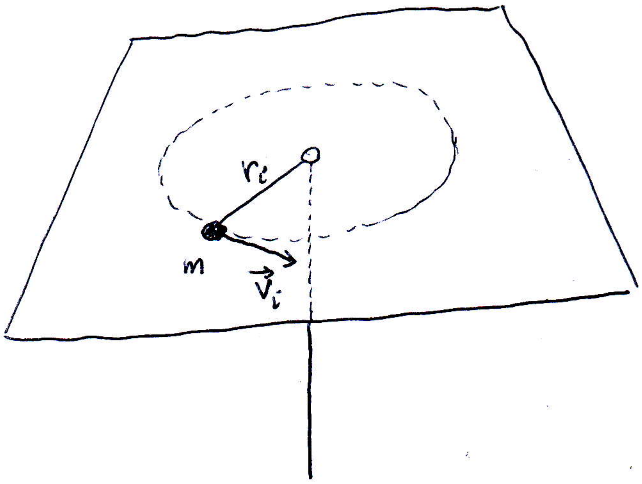
d) Si calcoli la velocità angolare di rotazione dei due ragazzi attorno al loro centro di massa.

e) Qual è il rapporto tra la loro energia cinetica totale finale e la loro energia cinetica totale iniziale?

f) Perché le risposte alle domande b) ed e) sono così diverse?

Serway, pr. 11.52

Un piccolo disco avente massa $m = 0{,}05$ Kg, attaccato a un filo passante per un piccolo foro, giace su un piano orizzontale privo di attrito:



Inizialmente il piccolo disco si muove di moto circolare di raggio $r_i = 0{,}3$ m con velocità di modulo $|\vec{v}_i| = v_i = 1{,}5$ m/s.

Il filo viene poi tirato molto lentamente verso il basso, e il raggio della circonferenza diminuisce fino al valore $r_f = 0{,}1$ m.

a) Qual è il modulo della velocità del disco quando si trova a percorrere la traiettoria di raggio r_f?

b) Si trovi il modulo della tensione del filo in tale situazione.

c) Quanto lavoro è stato fatto per portare il disco dalla traiettoria di raggio r_i alla traiettoria di raggio r_f?

Serway, 11. 61

Un disco omogeneo e' posto in rotazione intorno al suo asse di simmetria con velocita' angolare ω_i e, successivamente, e' appoggiato e abbandonato su un piano orizzontale scabro.

a) Qual e' la velocita' angolare del disco una volta che si e' instaurato il moto di puro rotolamento?

b) Si determini la frazione dell' energia cinetica persa dall'istante in cui il disco e' stato rilasciato all'istante in cui inizia il moto di puro rotolamento.

c) Indicando con μ_d il coefficiente di attrito dinamico tra il disco e la superficie scabra, si calcoli quanto tempo occorre da quando il disco e' stato appoggiato all'istante in cui si instaura il moto di puro rotolamento.

d) In tale intervallo di tempo, qual e' stato lo spostamento orizzontale del disco?

Serway, pr. 11.62

Nell' esempio a pag. 13 delle parte "Moto rotazionale (terza parte)" abbiamo analizzato un urto elastico tra un piccolo disco e un'asta appoggiata su una superficie con attrito trascurabile. Si supponga, a partire dagli stessi dati di partenza, che ora il piccolo disco rimanga attaccato all' estremo dell' asta.

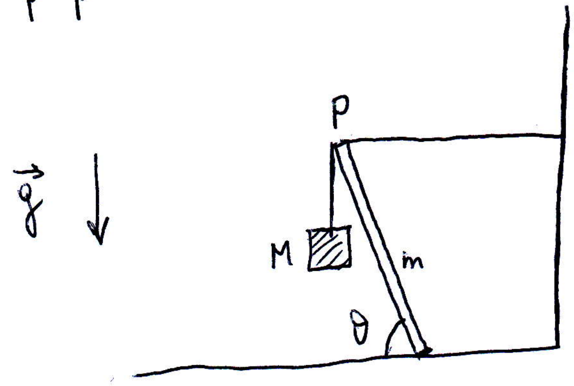
Si calcolino, dopo l'urto:

a) il modulo della velocita' del centro di massa del sistema, e

b) la velocita' angolare di rotazione del sistema.

Serway, 12. 51

Una trave avente massa m è inclinata rispetto al suolo di un angolo θ. Sul suo estremo superiore passa un cavo che sostiene un blocco avente massa M e che è attaccato, con l'altro capo, perpendicolarmente a una parete.



L'altro estremo della trave è appoggiato lontano dalla parete sul piano orizzontale scabro. Se μ_s è il coefficiente di attrito statico tra piano orizzontale e trave, e se μ_s è minore di $\cot g\,\theta$,

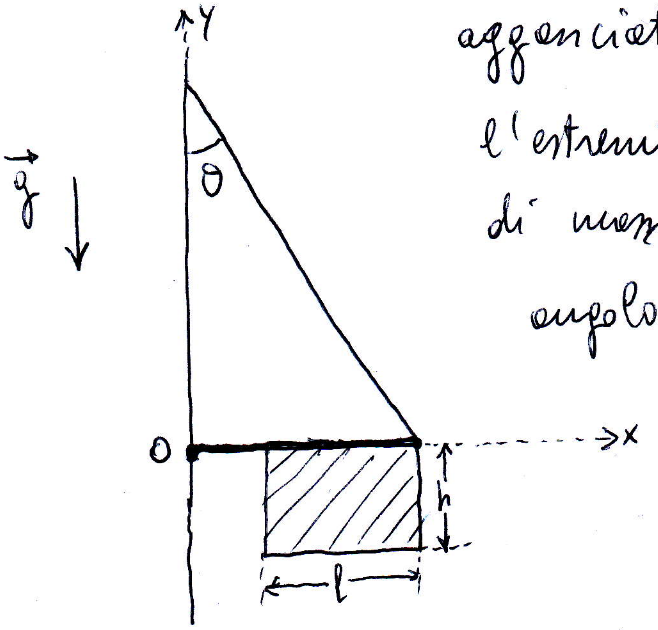
a) si determini il massimo valore della massa M che può essere appesa al cavo senza che la trave sliti sul piano.

b) Si determini, in funzione di m, M e μ_s, il modulo della forza di reazione del piano, e

c) il modulo della forza che la trave esercita sul cavo nel punto P.

Serway, pr. 12.63

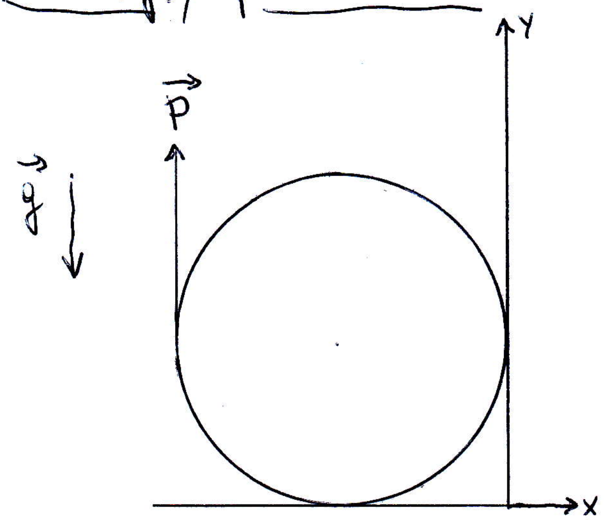
Un' insegna omogenea avente un peso $F_i = 500\ N$ ha lunghezza $l = 4\,m$ e altezza $h = 3\ m$, ed e' attaccata a una sbarra omogenea avente peso $F_s = 100\ N$ e lunghezza $L = 6\ m$, disposta orizzontalmente. L' estremita' sinistra della sbarra e' agganciata a un cardine, mentre l'estremita' destra e' attaccata a un cavo di massa trascurabile che forma un angolo $\vartheta = 30°$ con la direzione verticale.



a) Si calcoli il modulo della tensione del cavo.

b) Si calcolino le componenti orizzontale e verticale della forza esercitata dal cardine nell' estremita' sinistra della sbarra.

Serway, pr. 12.67



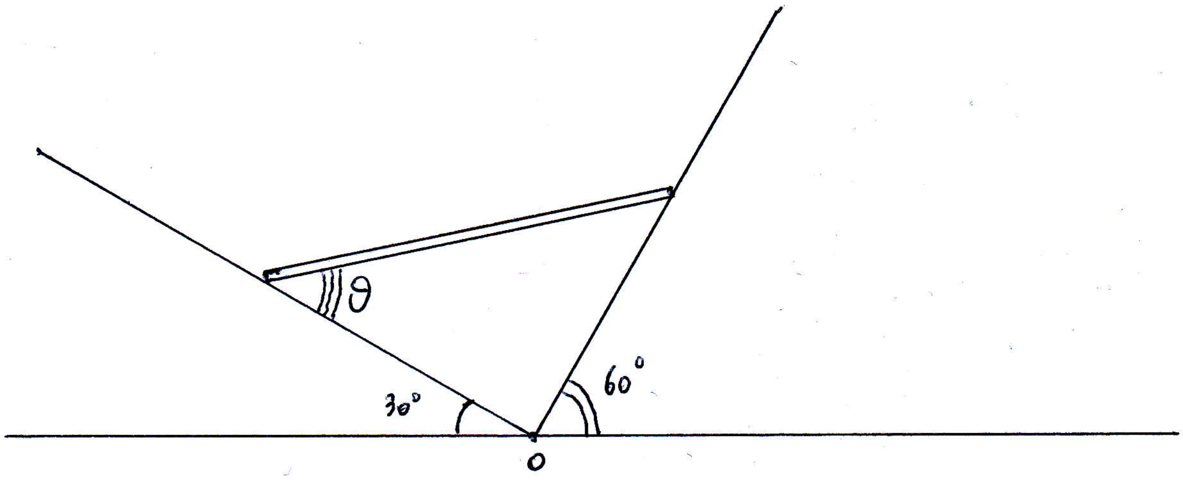
La figura qui a fianco mostra un cilindro omogeneo avente peso F_g su cui agisce, lungo la direzione tangente verticale di sinistra, una forza verticale $\vec{P}$ verso l'alto. Il coefficiente di attrito statico tra il cilindro e le due superfici è $\mu_s = \frac{1}{2}$.

Il modulo della forza $\vec{P}$ viene aumentato finché il cilindro non inizia a ruotare. Si determini, in funzione del peso F_g, il massimo valore di $P = |\vec{P}|$ che può essere applicato senza che il cilindro si metta in rotazione.

N.B.: prestare MOLTA attenzione ai versi delle forze di attrito statico agenti sul cilindro quando questo si trova ancora in quiete sotto l'azione anche della forza $\vec{P}$: guardate bene in che senso ruoterebbero i punti di contatto con le due pareti, e applicate le due forze di attrito statico in modo da contrastare tale rotazione.

Serway, pr. 12.68

Una trave omogenea avente peso F_g e lunghezza L è appoggiata al profilo privo di attrito mostrato nella figura:



a) Si mostri che, se la trave è in equilibrio, il suo centro di massa si trova sulla verticale condotta da O.

b) Si determini, sempre all'equilibrio, il valore dell'angolo θ.

c) L'equilibrio della trave è stabile o instabile?