ESERCIZIO

Abbiamo un'urna inizialmente vuota, e una moneta la cui probabilità che esca testa lanciandola è $p \in (0,1)$. La moneta viene lanciata n volte e sia X la v.e. che conta il numero di teste ottenute. Poi si mettono nell'urna X palline bianche e $n-X$ nere. Infine si estrae una pallina a caso dall'urna.

1) Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia bianca.
2) Calcolare la probabilità di aver messo nell'urna esattamente k palline bianche sapendo di aver estratto una pallina bianca, al variare di $k \in \{0,1,\dots,n\}$.

SVOLGIMENTO

1) Con notazioni ovvie si ha

$$P(B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{FORMULA DELLE} \\ \text{PROBABILITÀ TOTALI}}}{=} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{P(B|X=k)}_{=\frac{k}{n}} \underbrace{P(X=k)}_{\substack{=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ \text{perché } X\sim Bin(n,p)}} = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}_{=\mathbb{E}[X] = np} = \frac{1}{n}\cdot np = p.$$

RISULTATO VISTO IN LEZIONI PASSATE

2) Qui si richiede di calcolare $P(X=k|B)$ per $k\in\{0,1,\dots,n\}$. Si ha

$$P(X=k|B) = \frac{P(B|X=k)\,P(X=k)}{\underbrace{P(B)}_{=p}} = \frac{\frac{k}{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}{p} = \begin{cases} 0 & \text{se } k=0 \\ \underbrace{\dfrac{\frac{k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}}{p}}_{=(*)} & \text{se } k=1,\dots,n \end{cases}$$

FORMULA DI BAYES

$=p$ calcolata nella domanda precedente con la formula delle probabilità totali (somma su k del numeratore...)

COMMENTO: Questo è in accordo con il fatto che $P(\{X=0\}\cap B)=0$ (vedere prossima slide)

dove

$$(*) = \frac{\frac{k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}}{p} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!}\,p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)} = \binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}.$$

$\frac{n!}{n} \to (n-1)!$

$\frac{k}{k!} \to \frac{1}{(k-1)!}$

$\frac{p^k}{p} \to p^{k-1}$

$n-k=n-1-(k-1)$

COMMENTI

Ricapitolando possiamo dire quanto segue:

1) $P(X=0 \mid B)=0$ e questo è in accordo, come dicevamo, con il fatto che $P(\{X=0\} \cap B)=0$. In effetti, se si verifica $\{X=0\}$, l'urna ha tutte palline nere e quindi B non si può verificare; dunque $\{X=0\} \cap B = \emptyset$.

2) $P(X=k \mid B) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)}$ per $k=1,\dots,n$.

Allora, se si considera il cambio di variabile $h=k-1 \in \{0,1,\dots,n-1\}$, abbiamo $k=h+1$ e quindi

$$P(X=h+1 \mid B) = P(X-1=h \mid B)$$

$$P(X=h+1 \mid B) = \binom{n-1}{h} p^h (1-p)^{n-1-h} \quad \text{per } h \in \{0,1,\dots,n-1\}$$

per la 2) con $k-1=h$

$$\Longrightarrow P(X-1=h \mid B) = \binom{n-1}{h} p^h (1-p)^{n-1-h} \quad \text{per } h \in \{0,1,\dots,n-1\}.$$

In conclusione $X \sim Bin(n,p)$ e $X-1 \mid B \sim Bin(n-1,p)$.

Insomma, se si verifica B, una moneta ha dato testa e, per gli altri $n-1$ lanci, il numero di teste ha ancora una distribuzione Binomiale come se ci fosse un lancio di moneta in meno.

ESERCIZIO

Abbiamo un'urna con 6 palline bianche, 2 rosse e 1 nera.
Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e con reinserimento.
Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

1) estrarre 3 colori tutti diversi;
2) estrarre 3 colori tutti uguali;
3) estrarre la sequenza di colori (B, R, B);
4) estrarre complessivamente 2 bianche e 1 rossa.

Infine sia X la v.a. che conta il numero di palline bianche estratte.

5) Trovare la densità discreta di X, e calcolare media e varianza di X.

SVOLGIMENTO

1) Si intende l'evento "estrarre 1B, 1R, 1N in un qualsiasi ordine".
La probabilità richiesta si calcola con la distribuzione multinomiale:

$$\frac{3!}{1!\,1!\,1!}\left(\frac{6}{9}\right)^1\left(\frac{2}{9}\right)^1\left(\frac{1}{9}\right)^1 = \cancel{6}^{\,2}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{8}{81}.$$

2) Si intende l'evento "estrarre 3B o 3R o 3N" e si tratta di un'unione di eventi disgiunti a due a due. Allora la probabilità richiesta è

$$\left(\frac{6}{9}\right)^3+\left(\frac{2}{9}\right)^3+\left(\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{216+8+1}{729} = \frac{225}{729} = \frac{25}{81}.$$

3) Con notazioni ovvie si chiede $P(B_1 \cap R_2 \cap B_3)$. Essendo le estrazioni con reinserimento, eventi legati ad estrazioni diverse sono indipendenti; quindi

$$P(B_1 \cap R_2 \cap B_3) = P(B_1)P(R_2)P(B_3) = \left(\frac{6}{9}\right)^2\frac{2}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{9} = \frac{8}{81}.$$

4) Anche in questo caso, come per la 1ª domanda, si usa la distribuzione multinomiale. Allora "2B e 1R" equivale a dire "2B, 1R, 0N" e quindi

$$\frac{3!}{2!\,1!\,0!}\left(\frac{6}{9}\right)^2\left(\frac{2}{9}\right)^1\left(\frac{1}{9}\right)^0 = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\cdot 1 = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}.$$

5) In questa domanda non ha importanza distinguere tra rosse e nere. In altri termini dobbiamo distinguere tra bianche e non bianche. Quindi $X \sim Bin\left(n=3,\ p=\cancel{\frac{6}{9}}\frac{2}{3}\right)$ e si ha

$$p_X(k) = \binom{3}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(1-\frac{2}{3}\right)^{3-k} \qquad k=0,1,2,3$$

$$= \begin{cases} 1/27 & \text{per } k=0 \\ 6/27 & \text{per } k=1 \\ 12/27 & \text{per } k=2 \\ 8/27 & \text{per } k=3 \end{cases}$$

SOMMA $=1$

Inoltre per formule note sulla Binomiale si ha:

$$\mathbb{E}[X] = np = \cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}} = 2\,;$$

$$Var[X] = np(1-p) = 3\cdot\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Del resto

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{3} k\, p_X(k) = 0 \cdot \frac{1}{27} + 1 \cdot \frac{6}{27} + 2 \cdot \frac{12}{27} + 3 \cdot \frac{8}{27} =$$

$$= \frac{0 + 6 + 24 + 24}{27} = \frac{54}{27} = 2$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = \sum_{k=0}^{3} k^2 p_X(k) - 2^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{27} + 1^2 \cdot \frac{6}{27} + 2^2 \cdot \frac{12}{27} + 3^2 \cdot \frac{8}{27} - 4$$

$$= \frac{0 + 6 + 48 + 72}{27} - \frac{108}{27} = \frac{126 - 108}{27} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}.$$

COMMENTO

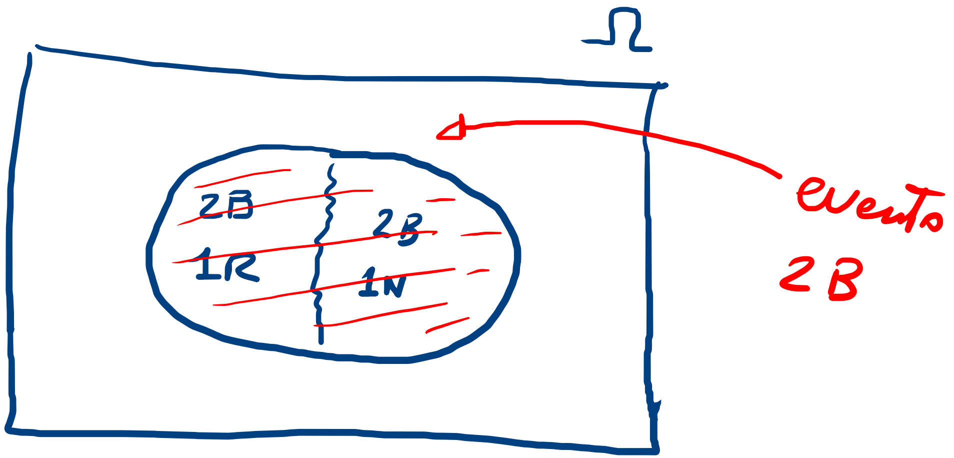
Nella risposta alla domanda 4) abbiamo visto che si ha $P(2B, 1R) = \frac{8}{27}$.

In maniera analoga si può vedere che

$$P(2B, 1N) = \frac{3!}{2!\cdot 0!\cdot 1!}\left(\frac{6}{9}\right)^2\left(\frac{2}{9}\right)^0\left(\frac{1}{9}\right)^1 = 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{9} = \frac{12}{81} = \frac{4}{27}.$$

Allora possiamo verificare banalmente la seguente uguaglianza che segue banalmente dalle proprietà della misura di probabilità P:

$$\underbrace{P(2B)}_{\substack{=P(X=2)\\ =p_X(2)\\ =\frac{12}{27}}} = \underbrace{P(2B, 1R)}_{=\frac{8}{27}} + \underbrace{P(2B, 1N)}_{=\frac{4}{27}}$$



vedere la risposta alla domanda 5)

ESERCIZIO

Un'urna ha 3 palline bianche, 2 rosse e 3 nere.

Vengono estratte 3 palline a caso, una alla volta e senza reinserimento.

Calcolare le probabilità dei seguenti eventi:

1) estrarre tre colori tutti diversi;
2) estrarre tre colori tutti uguali;
3) estrarre la sequenza di colori (R, R, B);
4) estrarre complessivamente 1 Bianca e 2 Rosse;
5) estrarre almeno una pallina rossa;
6) estrarre una pallina Bianca.
7) Infine calcolare media e varianza della v.a. X che conta il numero di palline bianche estratte.

SVOLGIMENTO

1) Si intende l'evento "estrarre 1B, 1R, 1N in un qualsiasi ordine". Si ha

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{3\cdot 2\cdot 3}{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{3!\,\cancel{5!}}} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28}.$$

2) Si intende l'evento "estrarre 3B o 3R o 3N" (unione di eventi disgiunti a due a due).
Allora la probabilità richiesta è

$$\frac{\binom{3}{3}\binom{2}{0}\binom{3}{0}}{\binom{8}{3}} + \underbrace{\cancel{\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{3}\binom{3}{0}}{\binom{8}{3}}}}_{=0} + \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{56} + 0 + \frac{1}{56} = \frac{2}{56} = \frac{1}{28}$$

(oppure senza distinguere tra i tre colori in ciascun addendo

$$\frac{\binom{3}{3}\binom{5}{0}}{\binom{8}{3}} + \underbrace{\cancel{\frac{\binom{2}{3}\binom{6}{0}}{\binom{8}{3}}}}_{=0} + \frac{\binom{5}{0}\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{56} + 0 + \frac{1}{56} = \frac{2}{56} = \frac{1}{28}$$

).

3) Con notazioni ovvie si chiede $P(R_1 \cap R_2 \cap B_3)$ e si ha

$$P(R_1 \cap R_2 \cap B_3) = P(B_3 \mid R_1 \cap R_2) \underbrace{P(R_1 \cap R_2)}_{= P(R_2 \mid R_1) P(R_1)} = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{56}.$$

4) L'evento "1B e 2R" equivale a dire "1B, 2R, 0N" e si ha

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{8}{3}} = \frac{3}{56}.$$

5) E' utile fare riferimento alla probabilità del complementare. La probabilità richiesta è

$$1 - P(0 \text{ ROSSE}) = 1 - \frac{\binom{6}{3}\binom{2}{0}}{\binom{8}{3}} = 1 - \frac{20}{56} = \frac{36}{56} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$$

Si deve pensare a palline rosse e non rosse, senza distinguere tra bianche e nere.

6) La probabilità richiesta è

(si deve pensare a palline bianche e non bianche senza distinguere tra palline rosse e nere)

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{5}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{3 \cdot 10}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}.$$

7) Qui facciamo riferimento alla v.a. X che conta il numero di palline bianche estratte. Tale v.a. ha distribuzione ipergeometrica e per la teoria si ha

$$\mathbb{E}[X] = \underset{\text{3 estratte}}{3} \cdot \underset{\text{3 bianche su 8 totali}}{\frac{3}{8}} = \frac{9}{8}$$

(stessa media della "binomiale associata")

$$\mathrm{Var}[X] = \underbrace{3 \cdot \frac{3}{8}\left(1 - \frac{3}{8}\right)}_{\text{Varianza della "binomiale associata".}} \cdot \underbrace{\frac{8-3}{8-1}}_{\text{FATTORE CORRETTIVO}} = 3 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{225}{448}.$$

(8 palline totali e 3 palline estratte)

COMMENTO

Nella domanda 1) abbiamo visto che $P(1B,1R,1N)=\frac{9}{28}=\frac{18}{56}$.

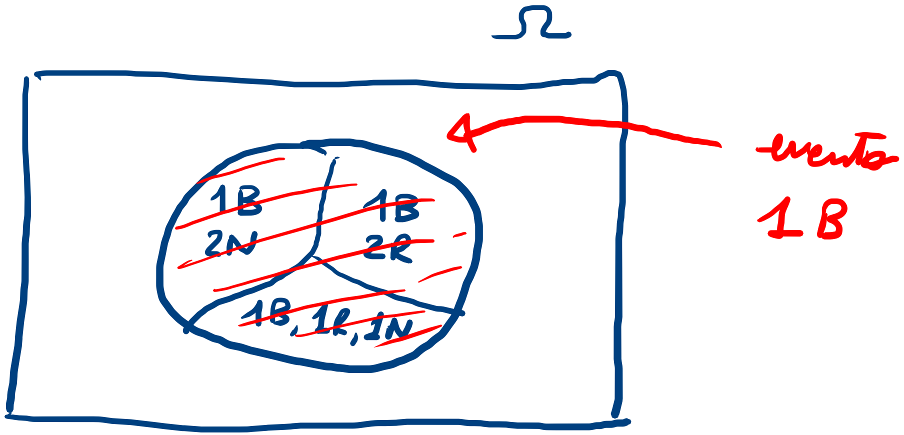
Nella domanda 4) abbiamo visto che $P(1B,2R)=\frac{3}{56}$ e, applicando la stessa formula in altro modo, possiamo anche dire che

$$P(1B,2N)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{8}{3}}=\frac{9}{56}.$$

Allora possiamo verificare la seguente uguaglianza che segue banalmente dalle proprietà della misura di probabilità P:

$$\underbrace{P(1B)}_{=\frac{30}{56}} = \underbrace{P(1B,2R)}_{=\frac{3}{56}} + \underbrace{P(1B,2N)}_{=\frac{9}{56}} + \underbrace{P(1B,1R,1N)}_{=\frac{18}{56}}$$

vedere la risposta alla domanda 6)



ESERCIZIO

Un'urna ha 100 palline numerate da 1 a 100. Si estraggono palline a caso, una alla volta e con reinserimento.

1) Calcolare la probabilità di non estrarre i numeri da 1 a 10 nelle prime 5 estrazioni.

2) Calcolare $\mathbb{E}[Z]$ e $\mathrm{Var}[Z]$ dove Z è la v.a. che conta il numero di estrazioni necessarie per avere per la 4^a volta un numero pari.

3) Calcolare la probabilità di estrarre 6 volte il numero 79 nelle prime 100 estrazioni. Si usi l'approssimazione Poissoniana della Binomiale.

SVOLGIMENTO

1) Sia Y = # estrazioni per avere per la 1^a volta un numero da 1 a 10.

Allora $Y \sim \text{GeoTrasl.}\left(p = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}\right)$ e la probabilità richiesta è $P(Y \geq 6)$.

Quindi $P(Y \geq 6) = \sum_{h=6}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{h-1} \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \sum_{h=6}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{h-1} = \frac{1}{\cancel{10}} \frac{(9/10)^5}{\cancel{1 - \frac{9}{10}}} = \left(\frac{9}{10}\right)^5.$

2) La v.a. Z in questione ha distribuzione BIN.-NEG.-TRASLATA $\left(r=4, p=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}\right)$.

Allora $\mathbb{E}[Z]=r\cdot\frac{1}{p}=4\cdot\frac{1}{1/2}=4\cdot 2=8$ e $\mathrm{Var}[Z]=r\,\frac{1-p}{p^2}=4\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}}=4\cdot\frac{1}{2}=2$.

3) La probabilità richiesta è $P(X=6)$ con $X\sim \mathrm{Bin}\left(n=100, p=\frac{1}{100}\right)$

e quindi $P(X=6)=\binom{100}{6}\left(\frac{1}{100}\right)^6\left(1-\frac{1}{100}\right)^{100-6}=$

$$=\binom{100}{6}\left(\frac{1}{100}\right)^6\left(\frac{99}{100}\right)^{94}.$$

Usiamo l'approssimazione Poissoniana della Binomiale come richiesto (in questo modo si ha un'idea del suo valore numerico) e si ha

$$P(X=6)\approx\frac{\left(100\cdot\frac{1}{100}\right)^6}{6!}e^{-100\cdot\frac{1}{100}}=\frac{e^{-1}}{120}.$$

ESERCIZIO

Si lancia 4 volte una moneta equa, e consideriamo le seguenti v.a.:

$X = \#$ teste ottenute; $Y = \#$ croci ottenute.

Calcolare $\mathbb{E}[Z]$ e $\mathrm{Var}[Z]$ dove $Z = XY$.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che $Y = 4 - X$ e quindi $Z = X(4-X) = 4X - X^2$ con $X \sim BIN(n=4, p=1/2)$.

Allora abbiamo

X	$Z = 4X - X^2$
0	$4 \cdot 0 - 0^2 = 0$
1	$4 \cdot 1 - 1^2 = 3$
2	$4 \cdot 2 - 2^2 = 4$
3	$4 \cdot 3 - 3^2 = 3$
4	$4 \cdot 4 - 4^2 = 0$

Allora la v.a. Z assume i valori $\{0,3,4\}$ e quindi

$$p_Z(0) = P(Z=0) = P(X=0) + P(X=4) = p_X(0) + p_X(4)$$

$$p_Z(3) = P(Z=3) = P(X=1) + P(X=3) = p_X(1) + p_X(3)$$

$$p_Z(4) = P(Z=4) = P(X=2) = p_X(2)$$

Inoltre $p_X(k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4$ per $k = 0,1,2,3,4$

e quindi $p_X(0) = p_X(4) = \frac{1}{16}$, $p_X(1) = p_X(3) = \frac{4}{16}$, $p_X(2) = \frac{6}{16}$.

Allora
$$\begin{cases} P_Z(0) = P_X(0) + P_X(4) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \\ P_Z(3) = P_X(1) + P_X(3) = \frac{4}{16} + \frac{4}{16} = \frac{8}{16} = \frac{4}{8} \\ P_Z(4) = P_X(2) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \end{cases} \longrightarrow \text{SOMMA} = 1$$

$$\boxed{\mathbb{E}[Z] = 0 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{4}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} = \frac{0+12+12}{8} = \frac{24}{8} = 3}$$

$$\text{Var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}^2[Z]$$
$$= 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 3^2 \cdot \frac{4}{8} + 4^2 \cdot \frac{3}{8} - 3^2$$
$$= \frac{0+36+48}{8} - 9 = \frac{84-72}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

COMMENTO (calcolo di $\mathbb{E}[Z]$ senza usare le densità discrete di Z e X)

Abbiamo visto che $Z = 4X - X^2$ con $X \sim BIN(n=4, p=\frac{1}{2})$.

Allora $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[4X - X^2] \underset{\text{linearità}}{=} 4\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X^2]$.

Inoltre sappiamo che $\mathbb{E}[X] = np = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ e $\text{Var}[X] = np(1-p) = 4 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$

dove $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X^2] = \text{Var}[X] + \mathbb{E}^2[X] = 1 + 2^2 = 5.$$

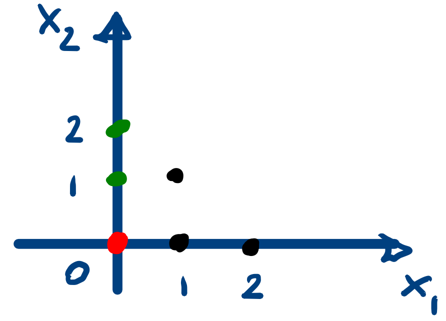
Allora
$$\boxed{\mathbb{E}[Z] = 4\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X^2] = 4 \cdot 2 - 5 = 8 - 5 = 3}$$

Qui abbiamo usato formule di media e varianza di X e la linearità di $\mathbb{E}[\cdot]$.

ESERCIZIO

Consideriamo la seguente densità congiunte:

$P_{\underline{X}}(0,0)=\frac{1}{3}$, $P_{\underline{X}}(0,1)=P_{\underline{X}}(0,2)=\frac{1}{6}$, $P_{\underline{X}}(1,1)=P_{\underline{X}}(1,0)=P_{\underline{X}}(2,0)=\frac{1}{9}$



Rispondere alle seguenti domande.

1) Calcolare la retta di regressione di X_2 rispetto a X_1.
2) Trovare la densità discreta di $Y=\max\{X_1,X_2\}$.
3) Trovare la densità discreta di $W=\min\{X_1,X_2\}$.
4) Trovare la densità discreta di $Z=X_1+X_2$.
5) Calcolare $P(X_1=X_2 \mid X_1+X_2=2)$.
6) Calcolare $P(X_1 \geq X_2)$.

SVOLGIMENTO

1) Marginale di X_1

$$\begin{cases} P_{X_1}(0)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2+1+1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=\frac{6}{9} \\ P_{X_1}(1)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9} \\ P_{X_1}(2)=\frac{1}{9} \end{cases}$$

SOMMA $=1$

Marginale di X_2

$$\begin{cases} P_{X_2}(0)=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{3+1+1}{9}=\frac{5}{9}=\frac{10}{18} \\ P_{X_2}(1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{3+2}{18}=\frac{5}{18} \\ P_{X_3}(2)=\frac{1}{6}=\frac{3}{18} \end{cases}$$

SOMMA $=1$

$$\mathbb{E}[X_1]=0\cdot\frac{6}{9}+1\cdot\frac{2}{9}+2\cdot\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$$

$$\mathrm{Var}[X_1]=\mathbb{E}[X_1^2]-\mathbb{E}^2[X_1]=0^2\cdot\frac{6}{9}+1^2\cdot\frac{2}{9}+2^2\cdot\frac{1}{9}-\left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{6}{9}-\frac{16}{81}=\frac{54-16}{81}=\frac{38}{81}$$

$$\mathbb{E}[X_2]=0\cdot\frac{10}{18}+1\cdot\frac{5}{18}+2\cdot\frac{3}{18}=\frac{11}{18}$$

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \mathbb{E}[X_1 X_2] - \underbrace{\mathbb{E}[X_1]\,\mathbb{E}[X_2]}_{=\frac{4}{9}\cdot\frac{11}{18}}$$

$$\mathbb{E}[X_1 X_2] = \underbrace{0\cdot 0\cdot \tfrac{1}{3}}_{=0} + \underbrace{0\cdot 1\cdot \tfrac{1}{6}}_{=0} + \underbrace{0\cdot 2\cdot \tfrac{1}{6}}_{=0} + 1\cdot 1\cdot \tfrac{1}{9} + \underbrace{1\cdot 0\cdot \tfrac{1}{9}}_{=0} + \underbrace{2\cdot 0\cdot \tfrac{1}{9}}_{=0} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \frac{1}{9} - \frac{44}{162} = \frac{18-44}{162} = -\frac{26}{162}$$

OSS. L'insieme dei punti dove la densità congiunta è positiva non è un prodotto cartesiano; quindi $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) \neq 0$. Inoltre il "trend" dei punti fa pensare ad una covarianza negativa...

Allora la retta di regressione è $X_2 = a X_1 + b$ dove

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\mathrm{Var}[X_1]} = \frac{-26/162}{38/81} = -\frac{26}{162}\cdot\frac{81}{38} = -\frac{13}{38}$$

$$b = \mathbb{E}[X_2] - a\,\mathbb{E}[X_1] = \frac{11}{18} - \left(-\frac{13}{38}\right)\cdot\frac{4}{9} = \frac{11}{18} + \frac{26}{171} = \frac{209+52}{342} = \frac{261}{342} = \frac{29}{38}.$$

2-3-4)

X_1, X_2		$Y=\max\{X_1,X_2\}$	$W=\min\{X_1,X_2\}$	$Z=X_1+X_2$
$(0,0)$	$1/3$	0	0	0
$(0,1)$	$1/6$	1	0	1
$(0,2)$	$1/6$	2	0	2
$(1,1)$	$1/9$	1	1	2
$(1,0)$	$1/9$	1	0	1
$(2,0)$	$1/9$	2	0	2

$$P_Y(0)=\frac{1}{3}=\frac{6}{18}$$
$$P_Y(1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{3+2+2}{18}=\frac{7}{18}$$
$$P_Y(2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{3+2}{18}=\frac{5}{18}$$

$$P_W(0)=\dots\dots=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$
$$P_W(1)=1/9$$

$$P_Z(0)=1/3=\frac{6}{18}$$
$$P_Z(1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\dots=\frac{5}{18}$$
$$P_Z(2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\dots=\frac{7}{18}$$

OSS
Si ha somma $=1$ in ciascuno dei 3 casi

5) $$P(X_1=X_2 \mid X_1+X_2=2)=\frac{P(\{X_1=X_2\}\cap\{X_1+X_2=2\})}{P(X_1+X_2=2)}=\frac{P_{\underline{X}}(1,1)}{P_Z(2)}=\frac{1/9}{7/18}=\frac{1}{\cancel{9}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{18}}}{7}=\frac{2}{7}.$$

$$\{X_1=X_2\}\cap\{X_1+X_2=2\}=\{X_1=1\}\cap\{X_2=1\}$$

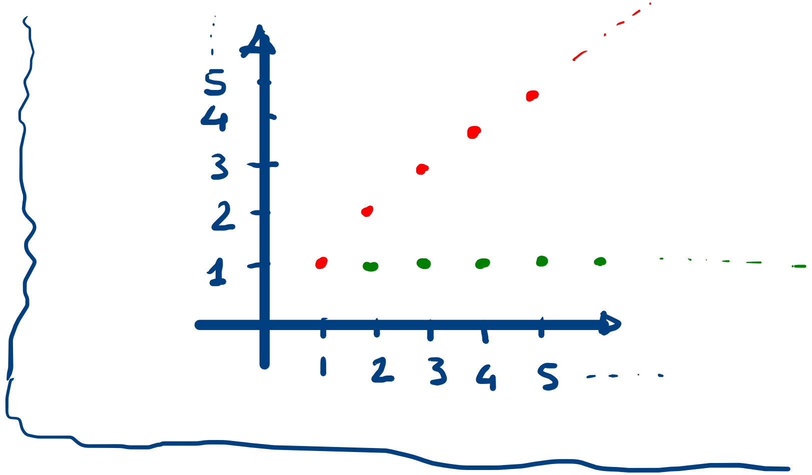
6) $$P(X_1\geq X_2)=P_{\underline{X}}(0,0)+P_{\underline{X}}(1,1)+P_{\underline{X}}(1,0)+P_{\underline{X}}(2,0)=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{3+1+1+1}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

ESERCIZIO

Consideriamo le seguente densità congiunte:

$p_{\underline{X}}(k,k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ per $k \geq 1$ intero;

$p_{\underline{X}}(k,1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$ per $k \geq 2$ intero.



1) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.
2) Calcolare $P(X_2 = 1)$.
3) Calcolare $P(X_1 = X_2 \mid X_2 = 1)$.
4) Calcolare $P(X_2 = 1 \mid X_1 = X_2)$.
5) Trovare le densità discreta di $Y = X_1 + X_2$.

SVOLGIMENTO

1) $$P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{\underline{X}}(k,k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{1}{2} \, \frac{\cancel{1/2}}{\cancel{1-1/2}} = \frac{1}{2}.$$

2) $$P(X_2 = 1) = p_{\underline{X}}(1,1) + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+1} + \frac{(1/2)^2}{1-1/2} = \frac{1}{4} + \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}.$$

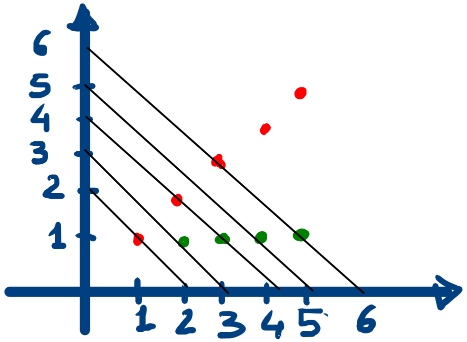
3) Si ha $$P(X_1=X_2|X_2=1) = \frac{P(\{X_1=X_2\}\cap\{X_2=1\})}{P(X_2=1)} = \frac{p_X(1,1)}{3/4} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1+1}}{3/4} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

calcolato in 2)

4) Si ha $$P(X_2=1|X_1=X_2) = \frac{P(\{X_2=1\}\cap\{X_1=X_2\})}{P(X_1=X_2)} = \frac{p_X(1,1)}{1/2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1+1}}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

calcolato in 1)

5) I valori assunti da $Y=X_1+X_2$ sono interi ≥ 2
(il caso 2 si ottiene come $1+1$; poi si hanno sempre valori maggiori)



Per $h\geq 2$ dispari si ha $\{Y=h\} = \{X_1=h-1\}\cap\{X_2=1\}$,
Per $h=2$ pari si ha $\{Y=2\} = \{X_1=1\}\cap\{X_2=1\}$,
Per $h>2$ pari $(4,6,8,\dots)$ si ha $\{Y=h\} = \left(\{X_1=\frac{h}{2}\}\cap\{X_2=\frac{h}{2}\}\right)\cup\left(\{X_1=h-1\}\cap\{X_2=1\}\right)$.

Allora possiamo dire quanto segue:

$$p_Y(h) = \begin{cases} h \geq 2 \text{ dispari} & p_{\underline{X}}(h-1,1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{h-1} \\ h=2 & p_{\underline{X}}(1,1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+1} = \frac{1}{4} \\ h>2 \text{ pari} & p_{\underline{X}}\left(\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right) + p_{\underline{X}}(h-1,1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{2}+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{h-1}. \end{cases}$$

COMMENTO

Verifichiamo che si ha $\sum_{y=2}^{\infty} p_Y(y) = 1$ in accordo con la teoria.

Si ha

$$\sum_{h=2}^{\infty} p_Y(h) = p_Y(2) + \sum_{J=2}^{\infty} p_Y(2J) + \sum_{J=1}^{\infty} p_Y(2J+1) = \frac{1}{4} + \sum_{J=2}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2J}{2}+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2J-1} \right\} + \sum_{J=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2J\cancel{+1-1}} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{J=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{J} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \sum_{J=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{J} + \sum_{J=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{J} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{(1/2)^2}{1-\frac{1}{2}} + 2 \frac{(1/4)^2}{1-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{1/16}{3/4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{2}{16} \cdot \frac{4}{3}}_{=1/6} + \frac{1}{3} = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2}} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1+2}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{6}_{2}} = 1.$$

ESERCIZIO.

Abbiamo due giocatori.

Il primo lancia ripetutamente una moneta equa fino a quando esce per la 1ª volta testa;
il secondo lancia ripetutamente due monete eque fino a quando escono per la 1ª volta due teste.
Siano X_1 e X_2 le v.a. che contano i numeri di lanci effettuati dal primo e dal secondo giocatore rispettivamente.

1) Calcolare $P(X_1 = 2X_2)$
2) Calcolare $P(X_1 + X_2 = 4)$
3) Calcolare $P(X_1 \geq X_2)$
4) Calcolare $P(X_1 = X_2 \mid X_1 + X_2 = 4)$

SVOLGIMENTO

X_1 e X_2 sono indipendenti e geometriche traslate di parametri $p_1 = \frac{1}{2}$ e $p_2 = \frac{1}{4}$ rispettivamente.

Quindi $p_{\underline{X}}(x_1, x_2) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{x_1 - 1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{x_2 - 1} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \left(\frac{3}{4}\right)^{x_2 - 1} \cdot \frac{1}{4}$ per $x_1, x_2 \geq 1$ interi.

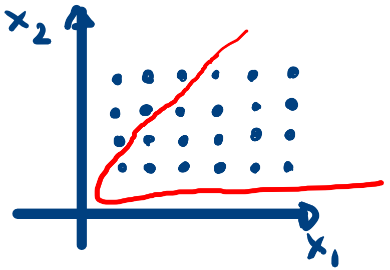
1) $P(X_1=2X_2)=\sum_{k=1}^{\infty} p_{\underline{X}}(2k,k)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\frac{1}{\cancel{4}}}{\frac{3}{\cancel{4}}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right)^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\frac{3}{4}}_{=\frac{3}{16}}\right)^{k}=$

$$=\frac{1}{3}\,\frac{\frac{3}{16}}{1-\frac{3}{16}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3/16}{13/16}=\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{16}}\cdot\frac{\cancel{16}}{13}=\frac{1}{13}.$$

2) $P(X_1+X_2=4)=p_{\underline{X}}(1,3)+p_{\underline{X}}(2,2)+p_{\underline{X}}(3,1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{3-1}\frac{1}{4}+\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{2-1}\cdot\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{1-1}\cdot\frac{1}{4}=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}+\frac{1}{8}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{128}+\frac{3}{64}+\frac{1}{32}=\frac{9+6+4}{128}=\frac{19}{128}.$$

3) $P(X_1\geq X_2)=\sum_{x_2=1}^{\infty}\sum_{x_1=x_2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\left(\frac{3}{4}\right)^{x_2-1}\frac{1}{4}=\frac{\frac{1}{\cancel{4}}}{3/\cancel{4}}\sum_{x_2=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{x_2}\underbrace{\sum_{x_1=x_2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}}_{=\frac{(1/2)^{x_2}}{1-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{3}\sum_{x_2=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{x_2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}}{1/2}=$



$$=\frac{1/3}{1/2}\sum_{x_2=1}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^{x_2}=\frac{2}{3}\,\frac{\frac{3}{8}}{1-\frac{3}{8}}=\frac{2}{3}\,\frac{3/8}{5/8}=\frac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{8}}{5}=\frac{2}{5}.$$

4) $P(X_1=X_2\,|\,X_1+X_2=4)=\frac{P(\{X_1=X_2\}\cap\{X_1+X_2=4\})}{P(X_1+X_2=4)}=\frac{p_{\underline{X}}(2,2)}{19/128}=\frac{\underline{3/64}}{19/128}=\frac{3}{\cancel{64}}\,\frac{\overset{2}{\cancel{128}}}{19}=\frac{6}{19}.$

ESERCIZIO

Un'urna ha 6 palline numerate da 1 a 6. Si estraggono 3 palline a caso, una alla volta e senza reinserimento. Sia X la v.a. che conta il numero di palline estratte con numero dispari.

Poi sia $E = \{$estratta la pallina 1 alla 1ª estrazione$\}$.

1) Trovare la densità discreta di X.

2) Calcolare $P(X=k|E)$ e $P(E|X=k)$ per $k \in \{0,1,2,3\}$.

SVOLGIMENTO

1)
$$p_X(k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{3}{3-k}}{\underbrace{\binom{6}{3}}_{=20}} = \begin{cases} k=0 \text{ e } k=3 & \frac{1}{20} \\ k=1 \text{ e } k=2 & \frac{9}{20} \end{cases}$$

SOMMA:
$$\frac{1}{20} + \frac{9}{20} + \frac{9}{20} + \frac{1}{20} = 1.$$

2)
$$P(X=k|E) = \frac{P(\{X=k\} \cap E)}{P(E)} = \frac{P(\{X=k\} \cap E)}{1/6} = ?$$

Calcoliamo a parte il numeratore $P(\{X=k\} \cap E)$.

$$\begin{cases} P(\{X=0\}\cap E)=0 \quad (\text{intersezione vuota, ovvio}) \\ P(\{X=1\}\cap E)=P(\{(1,\text{pari},\text{pari})\})=\frac{1}{6}\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{20} \\ P(\{X=2\}\cap E)=P(\{(1,3\text{ o }5,\text{pari})\})+P(\{(1,\text{pari},3\text{ o }5)\})=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10} \\ P(\{X=3\}\cap E)=P(\{(1,3,5)\})+P(\{(1,5,3)\})=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{6\cdot5\cdot4}=\frac{1}{60} \end{cases}$$

Quindi:

$$P(X=k|E)=\frac{P(\{X=k\}\cap E)}{1/6}=6\,P(\{X=k\}\cap E)=\begin{cases} 6\cdot0=0 & \text{per } k=0 \\ 6\cdot\frac{1}{20}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10} & \text{per } k=1 \\ 6\cdot\frac{1}{10}=\frac{6}{10}=\frac{6}{10} & \text{per } k=2 \\ 6\cdot\frac{1}{60}=\frac{6}{60}=\frac{1}{10} & \text{per } k=3 \end{cases}$$

Si ha $\sum_{k=0}^{3}P(X=k|E)=\frac{0+3+6+1}{10}=1$ in accordo con la teoria perché $\{\{X=k\}: k\in\{0,1,2,3\}\}$ è una partizione di eventi e $P(\cdot|E)$ è una misura di probabilità.

3) $P(E \mid X=k) = \dfrac{P(E \cap \{X=k\})}{\underbrace{P(X=k)}_{=p_X(k)}}$

OSS. Abbiamo gli stessi numeratori della domanda precedente; cambiamo i denominatori

Vedere la risposta alla domanda 1)

$$P(E \mid X=k) = \begin{cases} \dfrac{0}{1/20} = 0 & \text{per } k=0 \\[2mm] \dfrac{1/20}{9/20} = \dfrac{1}{9} & \text{per } k=1 \\[2mm] \dfrac{1/10}{9/20} = \dfrac{2}{9} & \text{per } k=2 \\[2mm] \dfrac{1/60}{1/20} = \dfrac{20}{60} = \dfrac{1}{3} & \text{per } k=3 \end{cases}$$

SOMMA $= 0 + \dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{3} =$

$= \dfrac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{9}_{3}} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3} \neq 1.$

In effetti $P(E \mid \cdot)$ <u>non è</u> una misura di probabilità e non c'è nessun motivo per dire che quella somma debba essere uguale a 1.