LE LEGGI DEL MOTO

La DINAMICA di un punto materiale si occupa dello studio delle cause del moto dei corpi.

Qualitativamente, osserviamo che, affinché un corpo inizialmente fermo acquisisca una certa velocità, è necessario che il corpo acceleri. Per dare una accelerazione a un corpo occorre esercitare una "FORZA" su di esso. Lo stato di moto di un corpo può quindi essere modificato solo attraverso l'azione di una forza (vedremo meglio in seguito).

Intuitivamente, le "forze" possono essere classificate così:

1) FORZE DI CONTATTO: derivano dal contatto fisico tra due oggetti. Ad esempio: forza esercitata da una molla che si allunga o si comprime, carrello messo in moto da un operatore che lo tira o lo spinge, pallone deformato da un calcio, ecc.

2) FORZE AGENTI A DISTANZA o "FORZE DI CAMPO": agiscono attraverso lo spazio, senza necessità di contatto fisico tra i due oggetti. Ad esempio: forza di attrazione gravitazionale che mantiene gli oggetti legati alla Terra e i pianeti in orbita attorno al Sole, forza elettrostatica tra due cariche elettriche, forza esercitata da un magnete su un pezzo di ferro.

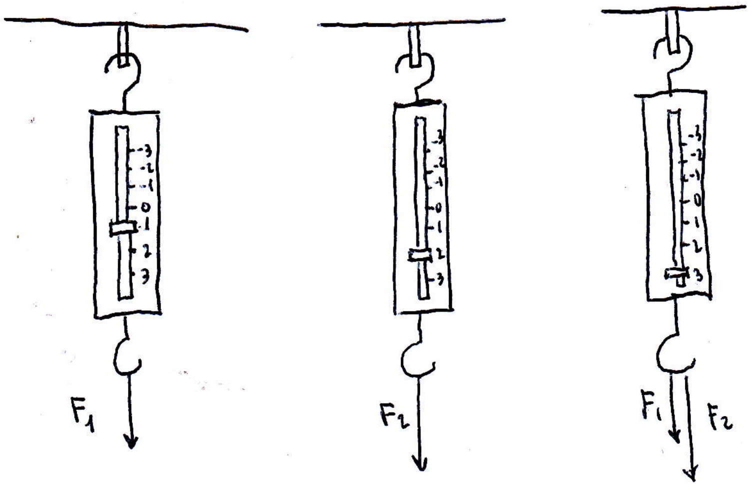
Un'analisi più rigorosa dimostra che, a livello atomico, anche le forze di contatto sono in realtà riconducibili a forze di campo, sebbene la classificazione fatta sopra resti utile nella pratica.

Operativamente, si osserva che una molla allungata o compressa esercita una "forza" nel senso che abbiamo appena detto.

Pertanto, per dare una definizione di FORZA possiamo realizzare uno strumento meccanico basato sulla deformazione della lunghezza di una molla rispetto alla sua configurazione di riposo. E' costituito da una molla e da una scala graduata che ne misura la deformazione (allungamento o compressione); si chiama DINAMOMETRO.

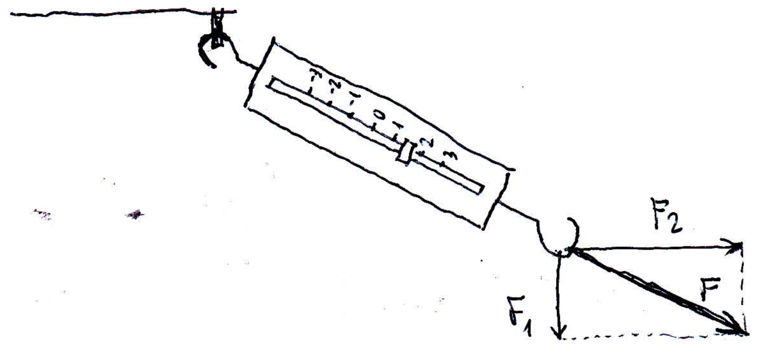
A livello statico si verifica sperimentalmente che una forza si comporta come una grandezza vettoriale.

<u>Esempio 1</u>



Supponiamo di applicare al dinamometro un'azione tale da provocare un allungamento di 1 cm, e successivamente un'azione tale da provocare un allungamento di 2 cm.
Se applichiamo al dinamometro le due azioni simultaneamente, si osserva che il dinamometro si allunga di 3 cm, proprio ciò che ci attenderemmo se le due azioni si sommassero come vettori.

Esempio 2



Dopo avere calibrato due azioni F_1 e F_2 come nell'esempio 1, applichiamole simultaneamente al dinamometro in modo che F_1 sia applicata verticalmente e F_2 orizzontalmente. La lettura del dinamometro è la stessa che si ottiene applicando un'unica azione di valore $\sqrt{F_1^2+F_2^2}$ parallelamente all'asse del dinamometro, come ci aspetteremmo se le due azioni si sommassero come vettori.

Da questi due esempi concludiamo che una forza è una grandezza vettoriale, con modulo dato dal valore assoluto dello spostamento dell'indice della scala del dinamometro rispetto alla posizione di riposo, direzione coincidente con quella dell'asse del dinamometro (se la forza agente sul dinamometro è una sola) e verso concorde con quello dello spostamento dell'indice della scala del dinamometro.

Quando più forze agiscono allo stesso tempo, l'effetto complessivo è uguale a quello di un'unica forza uguale alla somma vettoriale delle forze agenti (FORZA RISULTANTE).
È lecito quindi utilizzare il simbolo vettoriale $\vec{F}$ per una forza.

Prima legge della dinamica

In assenza di forze esterne, oppure se la risultante di tutte le forze esterne agenti su un corpo è nulla, allora il corpo possiede accelerazione nulla: cioè resta fermo se inizialmente è fermo oppure continua a muoversi di moto rettilineo uniforme con la velocità $\vec{V}_0$ posseduta inizialmente.

Un sistema di riferimento in cui un punto materiale isolato possiede accelerazione nulla è detto SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE. Ogni sistema di riferimento in moto a velocità costante rispetto a un sistema di riferimento inerziale è anch'esso un sistema di riferimento inerziale.

Un sistema di riferimento che accelera rispetto a un sistema di riferimento inerziale è un sistema di riferimento NON inerziale.

Dunque, la prima legge della dinamica permette di considerare la forza come la grandezza fisica che produce la variazione nel tempo della velocità istantanea di un corpo.

Seconda legge della dinamica

a) Primo risultato sperimentale.

Usando un dinamometro tarato, applichiamo in sequenza diverse forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ a un corpo fissato.

In corrispondenza alle diverse forze applicate il corpo acquista diverse accelerazioni. In particolare risulta

$$\vec{a} \propto \vec{F} \quad \text{, che si legge " } \vec{a} \text{ è proporzionale a } \vec{F} \text{ ",}$$

cioè il corpo acquista un'accelerazione con stessa direzione e verso della forza applicata, e modulo di $\vec{a}$ tanto maggiore quanto maggiore è il modulo di $\vec{F}$; per la precisione, $|\vec{a}|$ cresce linearmente con $|\vec{F}|$.

b) Secondo risultato sperimentale.

Consideriamo diversi corpi fatti con lo stesso materiale ma di volume diverso. Usando un dinamometro tarato, applichiamo una forza $\vec{F}$ fissata ai diversi corpi in sequenza.

I diversi corpi acquisteranno diverse accelerazioni; in particolare, $\vec{a}$ risulta in ogni caso parallela e concorde rispetto a $\vec{F}$, mentre il modulo di $\vec{a}$ è tale che

$$|\vec{a}| \propto \frac{1}{V}$$

, cioè il modulo di $\vec{a}$, fissata la sostanza di cui sono fatti i corpi in esame, è inversamente proporzionale al volume del corpo a cui è applicata la forza $\vec{F}$ fissata.

A questo punto, per generalizzare le conclusioni che stiamo per trarre a qualunque corpo (indipendentemente dal materiale di cui è composto), introduciamo una nuova grandezza fisica detta MASSA, in maniera operativa:

una quantità di acqua distillata liquida pari a un volume di $1\,dm^3$ ha una massa pari a $1\,Kg$ (un chilogrammo). Ricordiamo che $1\,dm^3 = 10^{-3}\,m^3$

Su questa base, quindi, è possibile attribuire una massa a tutti i corpi sulla base dell'accelerazione che essi acquistano sotto l'azione di una forza fissata.

In generale, quindi, questo secondo risultato sperimentale si può riassumere così:

$$|\vec{a}| \propto \frac{1}{m}$$

I due risultati sperimentali, messi assieme, forniscono quindi la relazione

$$\vec{a} \propto \frac{1}{m} \cdot \vec{F}$$

Poiché, tuttavia, non abbiamo ancora individuato quali siano le unità di misura della forza, niente ci vieta di fare la seguente scelta:

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F}$$

Poiché in generale l'accelerazione di un corpo è legata all'effetto della risultante di tutte le forze agenti in un certo istante sul corpo, la seconda legge della dinamica può essere scritta nel modo seguente:

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k ,$$

dove $\vec{F}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sono n forze agenti simultaneamente sul corpo (essenziale è che siano TUTTE le forze agenti simultaneamente sul corpo).

Spesso questa relazione si scrive così:

$$\boxed{m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k}$$

La massa di un corpo introdotta nel modo visto in precedenza si chiama MASSA INERZIALE; è una proprietà intrinseca di ogni dato corpo, indipendente dalla posizione in cui si trova il corpo e dal tipo di forze agente sul corpo.

Dall'equazione scritta sopra otteniamo le dimensioni fisiche della forza:

$$[F] = [m][a] = M^1 \cdot L^1 \cdot T^{-2}$$

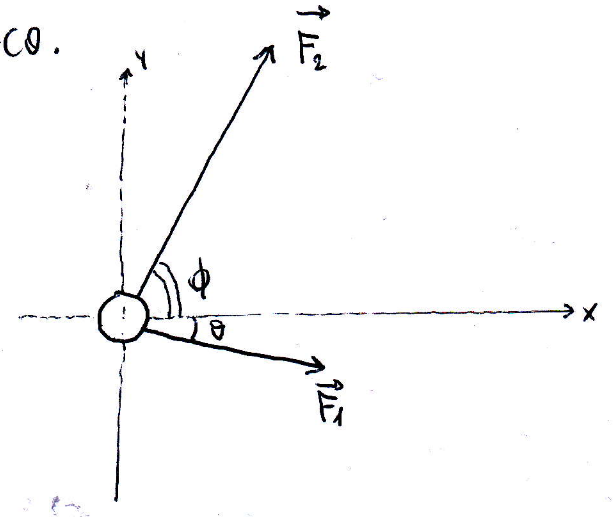
Dunque, nel S.I. di unità di misura l'unità di misura della forza, che è un'unità derivata, è la seguente:

$$1\,Kg \cdot m \cdot s^{-2} = 1\,N \quad (\text{Newton})$$

Per completezza diciamo che, nel vecchio sistema di unità di misura basato su cm, g, s (c.g.s.) l'unità di misura della forza è $1\,g \cdot cm \cdot s^{-2} = 1\,dyne = 10^{-5}\,N$

Esempio 3

Un disco da hockey di massa 0,3 kg scivola senza attrito sulla superficie orizzontale ghiacciata di un campo di hockey. Due bastoni da hockey colpiscono simultaneamente il disco, esercitando due forze come in figura.
La forza $\vec{F}_1$ ha modulo 5 N e direzione orientata $\theta = 20°$ sotto l'asse x, mentre la forza $\vec{F}_2$ ha modulo 8 N e direzione orientata a $\phi = 60°$ sopra l'asse x.
Si determini il modulo e la direzione dell'accelerazione del disco.



Per risolvere il problema proposto conviene introdurre un sistema di assi cartesiani ortogonali come nella figura, rispettando le richieste del problema.

Questi i parametri assegnati:

$$m = 0,3 \text{ kg} \; ; \quad |\vec{F_1}| = F_1 = 5 \text{ N} \; ; \quad \theta = -20° \; ;$$

$$|\vec{F_2}| = F_2 = 8 \text{ N} \; ; \quad \phi = 60°$$

La forza risultante agente sul disco e' quindi:

$$\vec{F_r} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

La componente x della forza risultante e':

$$F_{r,x} = F_{1,x} + F_{2,x} = F_1 \cos\theta + F_2 \cos\phi$$

La componente y della forza risultante e':

$$F_{r,y} = F_{1,y} + F_{2,y} = F_1 \,\text{sen}\,\theta + F_2 \,\text{sen}\,\phi$$

La componente x dell'accelerazione del disco e', quindi:

$$a_x = \frac{1}{m} \cdot F_{r,x} = \frac{1}{m}\left(F_1 \cos\theta + F_2 \cos\phi\right)$$

La componente y dell'accelerazione del disco e'

$$a_y = \frac{1}{m} \cdot F_{r,y} = \frac{1}{m}\left(F_1 \,\text{sen}\,\theta + F_2 \,\text{sen}\,\phi\right)$$

Modulo dell'accelerazione:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\frac{1}{m^2}\left[\left(F_1\cos\theta + F_2\cos\phi\right)^2 + \left(F_1 \,\text{sen}\,\theta + F_2 \,\text{sen}\,\phi\right)^2\right]} =$$

$$= \frac{1}{m}\sqrt{F_1^2\cos^2\vartheta + F_2^2\cos^2\phi + 2F_1F_2\cos\phi\cos\vartheta + F_1^2\,\mathrm{sen}^2\vartheta + F_2^2\,\mathrm{sen}^2\phi + 2F_1F_2\,\mathrm{sen}\phi\,\mathrm{sen}\vartheta} =$$

$$= \frac{1}{m}\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\phi-\vartheta)} =$$

$$= \left\{\frac{1}{0,3}\sqrt{5^2 + 8^2 + 2\cdot5\cdot8\cdot\cos(60^\circ-(-20^\circ))}\right\}\frac{m}{s^2} =$$

$$= \left\{\frac{1}{0,3}\sqrt{25+64+80\cos 80^\circ}\right\}\frac{m}{s^2} = 33,81\ \frac{m}{s^2}$$

Direzione orientata dell'accelerazione rispetto alla direzione x positiva:

$$\vartheta_a = \mathrm{arctg}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{F_1\,\mathrm{sen}\vartheta + F_2\,\mathrm{sen}\phi}{F_1\cos\vartheta + F_2\cos\phi}\right) =$$

$$= \mathrm{arctg}\left(\frac{5\cdot\mathrm{sen}(-20^\circ) + 8\cdot\mathrm{sen}\,60^\circ}{5\cdot\cos(-20^\circ) + 8\cdot\cos(60^\circ)}\right) = 31^\circ = 0,54\ \mathrm{rad}$$

Forza gravitazionale e peso

Tutti i corpi che possiamo osservare sono attratti dalla Terra con una forza diretta con ottima approssimazione verso il centro della Terra. Questa forza e' detta FORZA GRAVITAZIONALE $\vec{F}_g$, e il suo modulo e' detto PESO del corpo.

Detta $\vec{g}$ l'accelerazione che un corpo di massa m possiede in caduta libera in prossimita' della superficie terrestre al livello del mare, in assenza di altre forze agenti sul corpo possiamo scrivere $\vec{F}_g = m\vec{g}$, e $|\vec{F}_g| = F_g = mg$.

L'equazione $\vec{F}_g = m\vec{g}$ puo' essere utilizzata per definire il vettore "forza gravitazionale" agente su un dato corpo nella posizione in cui l'accelerazione di gravita' e' $\vec{g}$.

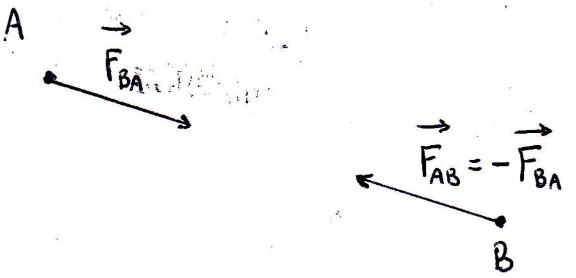
Se usiamo questa definizione, la quantita' m e' detta MASSA GRAVITAZIONALE del corpo considerato: due corpi hanno uguale "massa gravitazionale" se, messi ciascuno su uno dei due piatti di una stessa bilancia a braccia uguali, equilibrano esattamente la bilancia. Di fatto la differenza fra massa inerziale e massa gravitazionale non e' rilevante se non dal solo punto di vista concettuale. Nei calcoli i due valori coincidono, per cui da ora in avanti non faremo piu' distinzioni.

Poiché $\vec{g}$ varia con la quota rispetto al suolo, anche $\vec{F}_g$ varia con la quota. In ogni caso, in una data posizione il rapporto tra i pesi di due corpi e' uguale al rapporto tra le loro masse: $F_{g,1}/F_{g,2} = m_1/m_2$

Terza legge della dinamica (legge di "azione e reazione")

Dati due corpi A e B tra loro interagenti, la forza esercitata dal corpo A sul corpo B è uguale in modulo alla forza esercitata dal corpo B sul corpo A, ha la stessa direzione ma verso opposto.

Ad esempio:



Attenzione: le due forze $\vec{F}_{AB}$ e $\vec{F}_{BA}$ agiscono su corpi diversi.

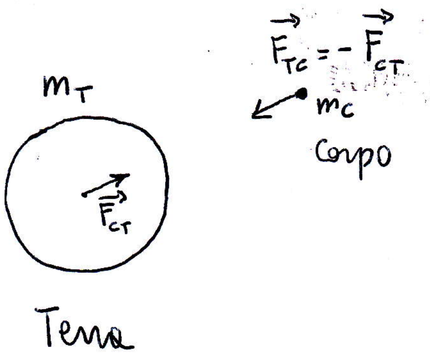
Se m_A è la massa del corpo A, m_B è la massa del corpo B e non ci sono altre forze in gioco a parte le forze di mutua interazione, le accelerazioni acquisite da ciascuno dei due corpi sono le seguenti:

$$\vec{a}_A = \frac{\vec{F}_{BA}}{m_A} \quad , \quad \vec{a}_B = \frac{\vec{F}_{AB}}{m_B} = -\frac{\vec{F}_{BA}}{m_B}$$

Poiché per la terza legge della dinamica risulta $|\vec{F}_{AB}| = |\vec{F}_{BA}| = F$, possiamo scrivere $|\vec{a}_A| = \dfrac{F}{m_A}$, $|\vec{a}_B| = \dfrac{F}{m_B}$

Se $m_A << m_B$ (che si legge "m_A molto minore di m_B"), risulta $|\vec{a}_A| >> |\vec{a}_B|$ ($|\vec{a}_A|$ molto maggiore di $|\vec{a}_B|$), ed e' per questo motivo che, quando interagiscono tra loro due corpi con masse molto diverse, il corpo di massa molto maggiore mostra un'accelerazione trascurabile rispetto all'accelerazione acquistata dal corpo di massa molto minore, sebbene il modulo delle forze di mutua interazione sia lo stesso.

Esempio 4

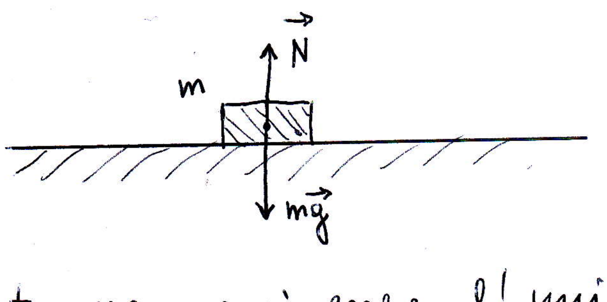


Risulta $|\vec{F}_{TC}| = |\vec{F}_{CT}|$,

ma poiché $m_T \gg m_c$,

risulta $|\vec{a}_T| \ll |\vec{a}_c|$

Una situazione da analizzare in dettaglio e' quella di un corpo appoggiato su una superficie piana in prossimita' della superficie terrestre al livello del mare.



Già sappiamo che sul corpo agisce la forza gravitazionale $m\vec{g}$ esercitata dalla Terra; ma poiché il corpo è fermo, questa non può essere l'unica forza agente sul corpo.

In generale si osserva che una superficie che sostiene un corpo esercita su di esso una REAZIONE VINCOLARE, che e' una FORZA NORMALE (cioe' perpendicolare) alla superficie stessa, diretta esternamente rispetto alla superficie.

La reazione vincolare è una forza di contatto che ha origine nella repulsione di tipo elettrostatico che si genera allorché le superfici di due corpi solidi vengono avvicinate tra loro fin quasi a toccarsi.

Dunque, utilizzando la notazione della figura precedente, per un corpo di massa m fermo e appoggiato su una superficie piana orizzontale le uniche due forze agenti sul corpo sono la forza gravitazionale della Terra e la reazione vincolare del piano d'appoggio. Per la seconda legge della dinamica deve quindi risultare:

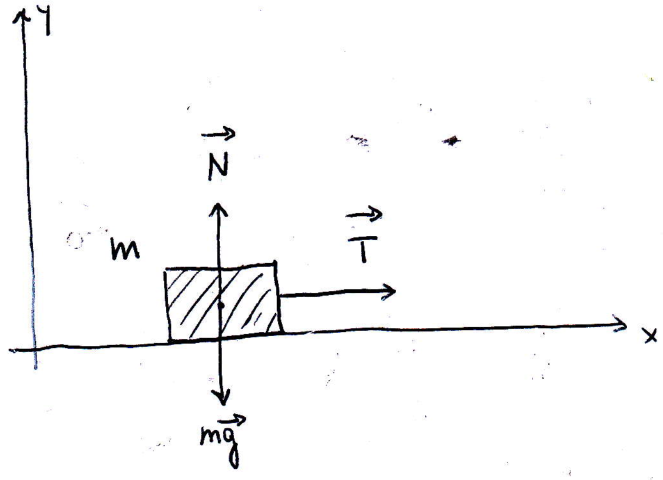
$$\vec{N} + m\vec{g} = 0$$

Questo permette di calcolare il modulo della reazione vincolare:

$$\vec{N} = -m\vec{g} \Rightarrow |\vec{N}| = N = mg$$

Attenzione: questa relazione la incontreremo in molti esercizi ed esempi, ma vale solo nel caso di superficie d'appoggio orizzontale e in assenza di ulteriori forze agenti sul corpo oltre a $m\vec{g}$ e $\vec{N}$ lungo la direzione verticale.

Esempio 5



Consideriamo una scatola avente massa m, poggiata su un piano orizzontale e tirata verso destra da una forza $\vec{T}$ parallela all'asse x.

In figura è schematizzato il diagramma vettoriale delle forze agenti sulla cassa. Secondo la seconda legge della dinamica, vale la relazione $m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{T}$.

Ma, poiché lungo l'asse verticale le uniche forze agenti sono $\vec{N}$ e $m\vec{g}$, per quanto detto sopra risulta $\vec{N} + m\vec{g} = 0$.

L'unica forza non bilanciata è quindi la forza $\vec{T}$.

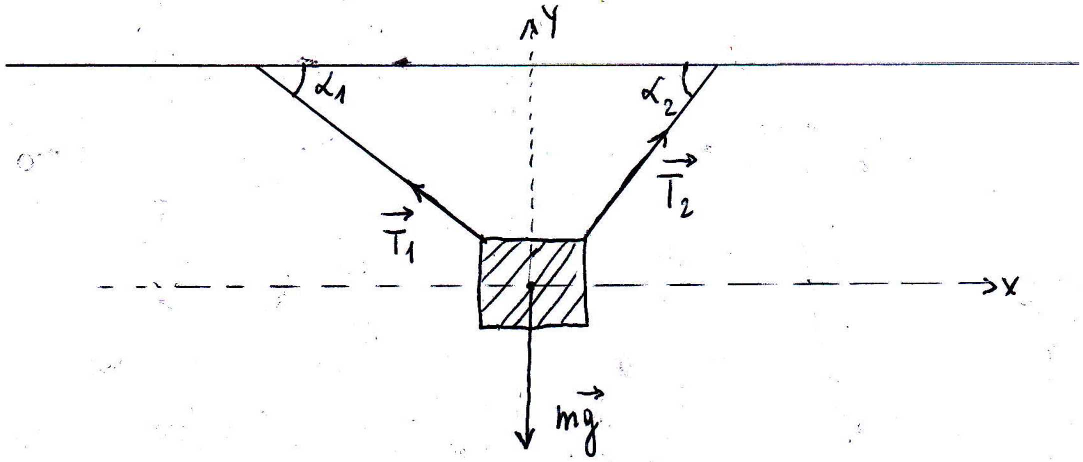
Poiché $\vec{T} = T\hat{i}$ (vedere figura), vale la relazione

$m a_x = T$, da cui ricaviamo $a_x = \dfrac{T}{m}$, che è

costante se $T = |\vec{T}|$ è costante.

Esempio 6

Blocco sospeso con funi al soffitto.



Dati del problema:

$$|m\vec{g}| = 122\ N, \qquad \alpha_1 = 37^\circ, \qquad \alpha_2 = 53^\circ$$

Quanto devono valere $T_1 = |\vec{T}_1|$ e $T_2 = |\vec{T}_2|$ affinché il blocco possa restare sospeso in equilibrio nella configurazione mostrata?

All'equilibrio deve risultare $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = 0$.

Introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali come in figura. Rispetto al sistema di assi scelto, risulta:

$$mg_x = 0, \qquad mg_y = -122\ N$$

$$T_{1x} = -T_1 \cos\alpha_1, \qquad T_{1y} = T_1 \operatorname{sen}\alpha_1$$

$$T_{2x} = T_2 \cos\alpha_2, \qquad T_{2y} = T_2 \operatorname{sen}\alpha_2$$

Dunque, l'equazione $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = 0$ fornisce due equazioni scalari che devono valere simultaneamente: una per le componenti x e una per le componenti y delle forze applicate al blocco:

$$\begin{cases} T_{1x} + T_{2x} + mg_x = 0 \\ T_{1y} + T_{2y} + mg_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -T_1 \cos\alpha_1 + T_2 \cos\alpha_2 = 0 \\ T_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + T_2 \operatorname{sen}\alpha_2 - mg = 0 \end{cases}$$

avendo posto $mg = 122\ N$ (valore assoluto del peso del blocco).

E' un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite T_1, T_2, che si risolve con uno dei procedimenti standard.

Ad esempio:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 & \operatorname{sen}\alpha_2 \end{vmatrix} = -\cos\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_2 =$$

$$= -\operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2) = -\operatorname{sen}(37^\circ + 53^\circ) = -\operatorname{sen} 90^\circ = -1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha_2 \\ mg & \operatorname{sen}\alpha_2 \end{vmatrix} = -mg \cos\alpha_2$$

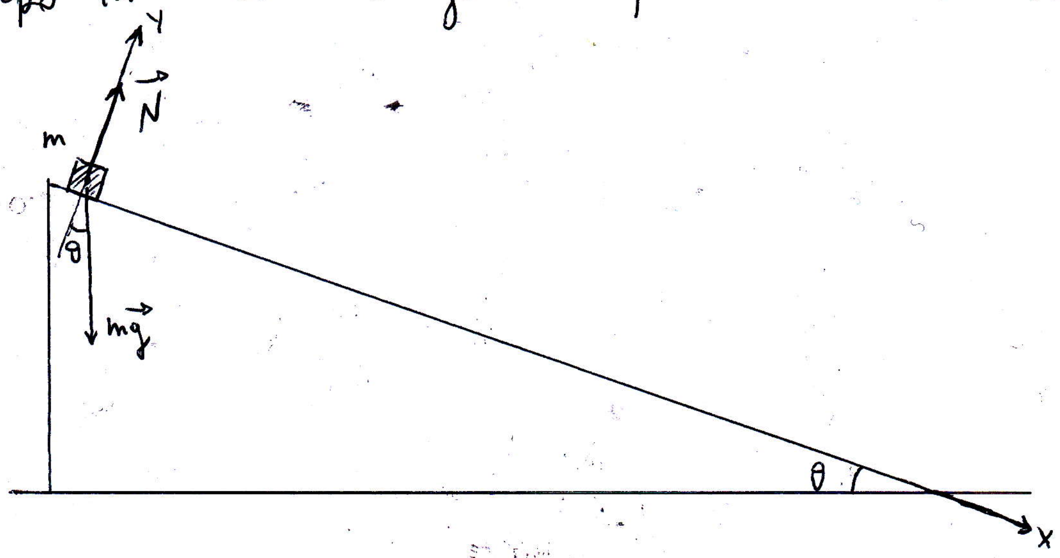
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\cos\alpha_1 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 & mg \end{vmatrix} = -mg \cos\alpha_1$$

Dunque otteniamo:

$$T_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = mg \cos\alpha_2 = 73{,}42\ N \qquad T_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = mg \cos\alpha_1 = 97{,}43\ N$$

Esempio 7

Corpo in moto lungo un piano inclinato liscio



Le uniche forze agenti sul corpo di massa m sono:
la forza gravitazionale terrestre (forza peso) e la reazione vincolare $\vec{N}$ del piano inclinato di appoggio.

Introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali come in figura.

Possiamo scrivere:

$$m\vec{g} = mg\,\text{sen}\vartheta\,\hat{i} - mg\cos\vartheta\,\hat{j}$$

$$\vec{N} = N\hat{j}$$

Dalla seconda legge della dinamica otteniamo:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}, \quad \text{cioè:}$$

$$ma_x = mg\,\text{sen}\vartheta \quad \text{e} \quad ma_y = -mg\cos\vartheta + N$$

Ma il corpo non si muove lungo l'asse y, per cui risulta $a_y = 0$.

Dunque otteniamo le relazioni

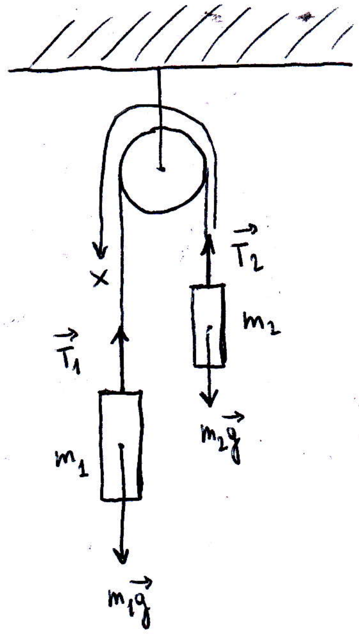
$$a_x = g \operatorname{sen}\vartheta \quad , \qquad N = mg\cos\vartheta$$

Pertanto, lungo un piano inclinato con ϑ costante un corpo si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione $a_x = g \operatorname{sen}\vartheta$, se il piano è liscio.
Il modulo della reazione vincolare è $mg\cos\vartheta$.

Esercizio: se d è la lunghezza complessiva del piano inclinato e se il corpo inizia a scivolare da fermo, quanto tempo impiega a raggiungere la base del piano inclinato? Quale è la sua velocità istantanea finale?

Esempio 8

Macchina di Atwood



È un dispositivo costituito da due corpi di masse m_1, m_2 collegati tra loro da una fune inestensibile di massa trascurabile, che si avvolge in un piano verticale attorno a una puleggia priva di attrito e di massa trascurabile.

Nei problemi in cui la puleggia è priva di massa e senza attrito, il modulo della tensione della fune è lo stesso sui due lati della puleggia.

Inoltre, a causa della inestensibilità della fune, uno spostamento verso il basso di una delle due masse implica uno spostamento di pari entità verso l'alto dell'altra massa. Dunque anche le velocità istantanee e le accelerazioni istantanee dei due corpi a ogni istante saranno opposte per un osservatore fermo al suolo.

Conviene dunque, per svolgere i calcoli in questo problema, introdurre un asse x unico che si "avvolge" attorno alla puleggia, orientato positivamente verso l'alto a destra e positivamente verso il basso a sinistra.

In questo modo risulta:

$$a_{1x} = a_{2x} = a_x$$

Posto $|\vec{T_1}| = |\vec{T_2}| = T$, le equazioni del moto dei due corpi sono:

$$\begin{cases} m_1 a_{1x} = m_1 g - T_1 \\ m_2 a_{2x} = T_2 - m_2 g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 a_x = m_1 g - T \\ m_2 a_x = T - m_2 g \end{cases}$$

Sommiamo membro a membro le due equazioni:

$(m_1 + m_2) a_x = (m_1 - m_2) g$, da cui ricaviamo

$$a_x = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) g$$

Dalla seconda equazione ricaviamo:

$$T = m_2 (a_x + g) = m_2 g \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + 1\right) =$$

$$= m_2 g \left(\frac{m_1 - \cancel{m_2} + m_1 + \cancel{m_2}}{m_1 + m_2}\right) = \left(\frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g$$

Dunque, il sistema si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione $a_x = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) g$

(attenzione al segno!)

Casi particolari:

- $m_1 = m_2 \Rightarrow \quad a_x = 0 \Rightarrow$ i due corpi restano fermi oppure si muovono di moto rettilineo uniforme.

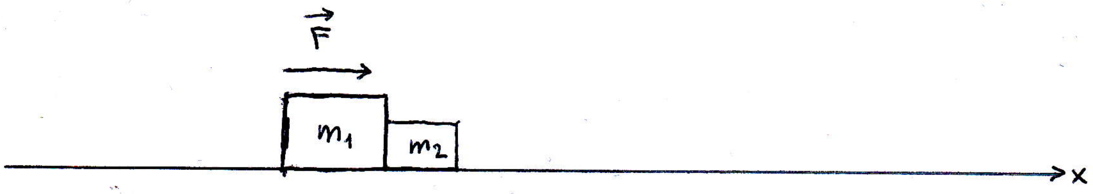
- $m_1 \gg m_2$: $\quad a_x \simeq g, \quad T \simeq 2m_2 g \ll m_1 g$

<u>Esempio 9</u>

Due blocchi di massa m_1 e m_2, con $m_1 > m_2$, sono in contatto tra di loro e sono posti su una superficie orizzontale priva di attrito. Al blocco di massa m_1 viene applicata una forza costante $\vec{F}$ orizzontale.

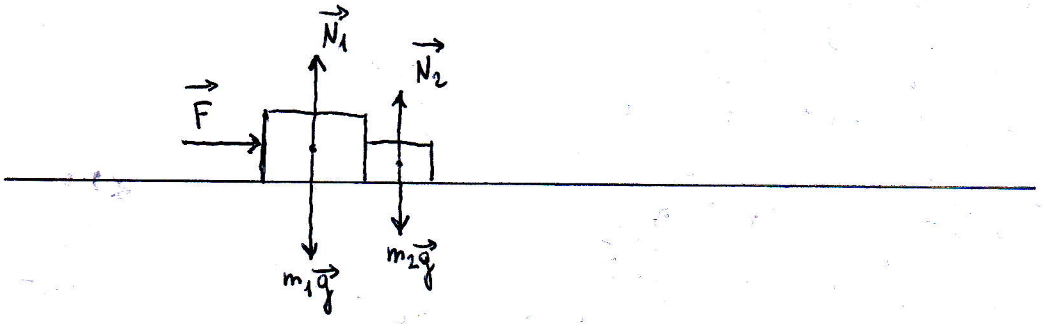
a) Si determini il valore dell'accelerazione del sistema.

b) Si determini il modulo della forza di contatto tra i due blocchi.



Schematizziamo la situazione del problema come in figura.

Diagramma vettoriale delle forze in gioco (solo forze esterne al sistema):



a) Applicando la forza $\vec{F}$ orizzontale al blocco di sinistra, i due blocchi inizieranno a muoversi come un unico blocco di massa $m_1 + m_2$ soggetto a un'unica forza risultante.
Le forze agenti lungo la direzione verticale si bilanciano esattamente a due a due, per cui la risultante di tutte le forze esterne applicate al sistema dei due blocchi è propio la forza $\vec{F}$ orizzontale.
Dunque risulta, per la seconda legge della dinamica:

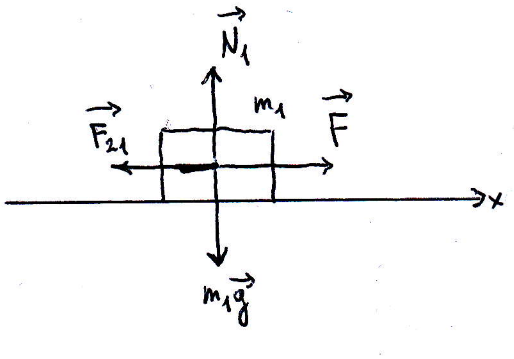
$$(m_1 + m_2)\,\vec{a} = \vec{F}$$

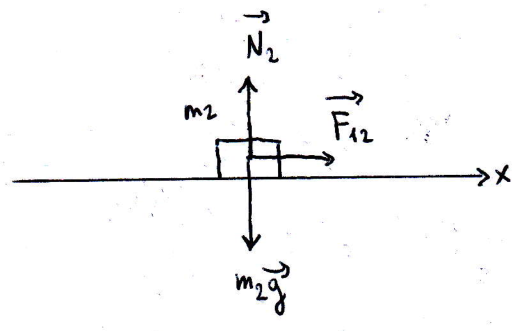
Poiché $\vec{F} = F\hat{i}$, avendo posto $|\vec{F}| = F$, risulta

$$(m_1 + m_2)\,a_x = F,$$ da cui otteniamo

$$a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

b) Analizziamo le forze agenti su ciascuno dei due blocchi mentre la forza $\vec{F}$ viene applicata sul blocco di sinistra:





Per quanto riguarda il primo blocco, già sappiamo che risulta
$\vec{N}_1 + m_1\vec{g} = 0$, per cui la forza risultante agente sul primo blocco è $\vec{F}_{r_1} = -\vec{F} + \vec{F}_{21}$

Per quanto riguarda il secondo blocco, già sappiamo che risulta
$\vec{N}_2 + m_2\vec{g} = 0$, per cui la forza risultante agente sul secondo blocco è $\vec{F}_{r_2} = \vec{F}_{12}$

La seconda legge della dinamica applicata al corpo 2, tenuto conto che la sua accelerazione l'abbiamo già calcolata nel punto a) del problema, fornisce la relazione:

$$m_2 a_x = F_{12} \quad , \quad \text{da cui ricaviamo:}$$

$$F_{12} = m_2 a_x = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) F < F$$

La seconda legge della dinamica applicata al corpo 1, analogamente fornisce la relazione

$$m_1 a_x = F - F_{21} \quad , \quad \text{da cui ricaviamo}$$

$$F_{21} = F - m_1 a_x = F - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) F = \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) F =$$

$$= \left(\frac{\cancel{m_1} + m_2 - \cancel{m_1}}{m_1 + m_2}\right) F = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) F = F_{12}$$

Questo risultato si poteva prevedere a priori in quanto, per la terza legge della dinamica, deve risultare $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, per cui $|\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}|$.

Esempio 10

Una persona misura il peso di un oggetto mediante un dinamometro a molla appeso al soffitto di un ascensore.

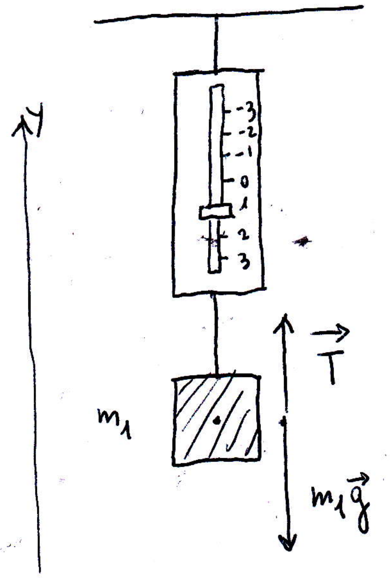
a) Si mostri che se l'ascensore accelera o verso l'alto o verso il basso la lettura del dinamometro dà valori differenti dal valore del peso del blocco.

b) Si calcoli il valore della lettura della scala del dinamometro per un blocco di 40 N di peso se l'ascensore si muove con accelerazione $a_y = \pm 2 \, m/s^2$.

---

a) Supponiamo che l'ascensore acceleri lungo la direzione verticale con accelerazione $\vec{a} = a_y \hat{j}$, con $a_y > 0$ se l'accelerazione è verso l'alto e $a_y < 0$ se l'accelerazione è verso il basso.

Vista da un osservatore a terra, la situazione delle forze applicate al blocco è la seguente:



dove $\vec{T}$ è la forza esercitata dal dinamometro sul blocco, il cui modulo è legato al valore che si legge sulla scala del dinamometro.

Per la seconda legge della dinamica, risulta quindi:

$m_1 a_y = T - m_1 g$, da cui ricaviamo:

$$T = m_1 (a_y + g)$$

Dunque, risulta $T > m_1 g$ se $a_y > 0$, $T < m_1 g$ se $a_y < 0$.

b) Se $a_y = +2\ m/s^2$, risulta $T = m_1 g + m_1 a_y =$

$$= 40\ N + (m_1 g) \cdot \left(\frac{a_y}{g}\right) = 40\ N \cdot \left(1 + \frac{a_y}{g}\right) = 40\ N \cdot \left(1 + \frac{2\ m/s^2}{9{,}81\ m/s^2}\right) =$$

$$= 48{,}15\ N$$

Se $a_y = -2\ m/s^2$, risulta $T = m_1 g \left(1 + \frac{a_y}{g}\right) =$

$$= 40\ N \cdot \left(1 - \frac{2\ m/s^2}{9{,}81\ m/s^2}\right) = 31{,}85\ N$$