Tutorato Geometria e Algebra Informatica

Andrea Pizzi

19 Maggio 2023

Esercizio 1. * Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare, e U_1, U_2 due sottospazi di V. Dimostra che $T(U_1 + U_2) = T(U_1) + T(U_2)$.

Esercizio 2. Considera i vettori $v_1 = (0, 2, 0)$, $v_2 = (1, -1, 0)$ e $v_3 = (3, 1, 5)$. Dimostra che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, e trova la matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica.

Esercizio 3. Considera i polinomi $p_1(t) = t^2 - 2t$, $p_2(t) = 1 + 2t$, $p_3(t) = 2 - t^2$, $q_1(t) = -1 + t$, $q_2(t) = -1 + t - t^2$, $q_3(t) = 2t + t^2$. Dimostra che $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ e $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3\}$ sono basi di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, e trova la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

Considera i sottospazi $U = Span\{p_1, p_2\}$ e $W = Span\{q_2, q_3\}$ di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. Calcola la dimensione e base di $U + W$ e $U \cap W$.

Esercizio 4. Siano $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare rappresentata rispetto alle basi canoniche dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Trova la matrice A' che rappresenta S rispetto alle basi

$$\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\{(1,0), (1,1)\} \in \mathbb{R}^2$$

Esercizio 5. Risolvi usando il teorema di Cramer i seguenti sistemi lineari

$$\begin{cases} x + 7y + 3z = 2 \\ -x + 2z = -1 \\ 3x + y + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ y + 2z = -2 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 6. Calcola il rango delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

e al variare di $t \in \mathbb{R}$ quello della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} t+1 & 1 & 1 \\ t+2 & t^2+1 & 2 \\ 2t & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7. Trova una base ortonormale, rispetto al prodotto scalare canonico, del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dato da

$$V = Span\{(1,-1,1,-1), (5,1,1,1), (-3,-3,1,-3)\}$$

e completala ad una base ortonormale di tutto $\mathbb{R}^4$

Esercizio 8. Siano dati i vettori $\{(1,-1,0),(2,0,1),(0,-1,1)\}$. Far vedere che formano una base di $\mathbb{R}^3$, ortonormalizzarla e calcolare le coordinate del vettore $X=(2,-5,1)$ nella base ortonormalizzata.

Trovare la matrice di passaggio dalla base ortonormale trovata alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 9. Siano dati i vettori $\{(1,2,0),(8,1,-6),(0,0,1)\}$. Far vedere che formano una base di $\mathbb{R}^3$ e ortonormalizzarla

Trovare la matrice di passaggio dalla base canonica di $\mathbb{R}^3$ alla base ortonormale trovata.

Esercizio 10. Dato il piano $\pi : x+y-z=0$ in $\mathbb{R}^3$. Siano $P=(2,0,1)$ e $Q=(0,0,1)$. Determinare una base ortonormale del piano π. Determinare la proiezione ortogonale di P su π.

Esercizio 11. Sia $P=(1,-1)\in\mathbb{R}^2$. Descrivere l'insieme $\{X\in\mathbb{R}^2 : X\cdot P=0\}$.

Sia $P=(2,1,1)\in\mathbb{R}^3$. Descrivere l'insieme $\{X\in\mathbb{R}^3 : X\cdot P=0\}$.

Esercizio 12. * Siano u e v due vettori ortogonali. Dimostrare che se $u+v$ e $u-v$ sono ortogonali allora la lunghezza di u e quella di v sono uguali, dove la lunghezza di un vettore w è definita come $|w|=\sqrt{w\cdot w}$.

PS: Nel prossimo foglio di esercizi verranno proposti esercizi su distanze, angoli, prodotti scalari, prodotti vettoriali, calcolo di aree. Sarà necessario fare un ripasso della parte di geometria euclidea (rette, piani, intersezioni).