Matrice definita positiva

Def

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice definita positiva se $Re(\underline{x}^* A \underline{x}) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

Promemoria

$z = a + ib$

$\bar{z} = a - ib$

$\frac{z+\bar{z}}{2} = a = Re(z)$

$\frac{z-z^*}{2i} = b = Im(z)$

Oss

$\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $\forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$

$$Re(\underline{x}^* A \underline{x}) = \frac{\underline{x}^* A \underline{x} + \overline{\underline{x}^* A \underline{x}}}{2} = \frac{\underline{x}^* A \underline{x} + (\underline{x}^* A \underline{x})^*}{2} = \frac{\underline{x}^* A \underline{x} + \underline{x}^* A^* \underline{x}}{2} =$$

$$= \frac{\underline{x}^*(A + A^*)\underline{x}}{2} = \underline{x}^* Re(A)\underline{x}$$

dove

$$Re(A) \stackrel{def}{=} \frac{A + A^*}{2}, \quad Im(A) \stackrel{def}{=} \frac{A - A^*}{2i}$$

$A = Re(A) + i\,Im(A)$

Esercizio

dimostrare che $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $Re(A)$ e $Im(A)$ sono matrici hermitiane

↳ usare la proprietà che $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ e $\forall B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $(\alpha B)^* = \bar{\alpha} B^*$

Conseguenza dell'oss. precedente

$$\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ e } \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n,\ \underline{x}^* Re(A)\underline{x} \in \mathbb{R}$$

essendo $\underline{x}^* Re(A)\underline{x} = Re(\underline{x}^* A \underline{x})$

Proposizione

se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ allora:

A è definita positiva $\iff$ $Re(A)$ è def. positiva

Dim

A è def positiva $\iff Re(\underline{x}^* A \underline{x}) > 0 \iff \underline{x}^* Re(A)\underline{x} > 0 \iff$

$\forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

$\iff Re(\underline{x}^* Re(A)\underline{x}) > 0 \iff Re(A)$ è definita positiva

Proposizione

Ogni matrice def. positiva e' invertibile e i suoi autovalori hanno parte reale positiva

Dim

Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definita positiva.

Mi basta dimostrare che gli autovalori di A hanno parte reale positiva perche' questo mi dice che nessuno di essi e' 0 e dunque A risulta automaticamente invertibile

Sia λ generico autovalore di A, prendiamo $\underline{x} \neq 0$ autovettore corrispondente a λ:

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x} \Rightarrow \underline{x}^* A \underline{x} = \underline{x}^*(\lambda \underline{x}) = \lambda(\underline{x}^* \underline{x}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\underline{x}^* A \underline{x}}{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \Rightarrow Re(\lambda) = \frac{Re(\underline{x}^* A \underline{x})}{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} > 0$$

per def > 0

somma di quadrati → sempre pos

Teorema

Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice hermitiana

Le seguenti condizioni sono equivalenti

1) A e' definita positiva
2) $\underline{x}^* A \underline{x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\}$
3) Gli autovalori di A sono reali e positivi
4) $det(A_k) > 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$ dove $A_1, \dots, A_n$ sono le sottomatrici principali di A:

$$A_1 = [a_{11}], \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \dots, A_n = A$$

Esempio

dire se la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e' definita positiva

Soluzione

A e' hermitiana (reale simmetrica). Quindi per il teo. A e' def pos $\iff \det(A_k) > 0 \quad \forall k = 1,2,3$

$$\det(A_1) = 2, \quad \det(A_2) = 3, \quad \det(A_3) = 1 \quad \Rightarrow A \text{ e' def. pos.}$$

Esempio

Dire se A e' def. pos.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione

La matrice A non e' hermitiana (non e' reale simmetrica), dunque non possiamo applicare direttamente il teo ad A per stabilire se A e' def. pos.

Tuttavia sappiamo che A e' def positiva $\iff$ la sua parte reale e' def positiva

$$Re(A) = \frac{A + A^*}{2} = \frac{A + A^T}{2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Siccome $Re(A)$ e' hermitiana, per stabilire se $Re(A)$ e' definita possiamo applicare il teorema
In base ai calcoli gia' fatti

$$\det(A_1) = 2, \quad \det(A_2) = 3, \quad \det(A_3) = 1$$

$\Rightarrow Re(A)$ e' def. pos. $\Rightarrow A$ e' def pos.

Esercizio

Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice hermitiana pos. Dimostrare che gli elementi diagonali di A sono positivi, cioè $a_{ii} > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

Sugg

$\underline{x}^* A \underline{x} > 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\}$ (teo prec.)

Se $e_1, \dots, e_n$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^n$, cosa sono $\underline{e}_i^* A \underline{e}_i$ ed $\underline{e}_j^* A \underline{e}_i$?

Esercizio

Dire quali fra le seguenti matrici sono definite positive

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2+i & 1 \\ 2-i & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & \ell \end{bmatrix}$$