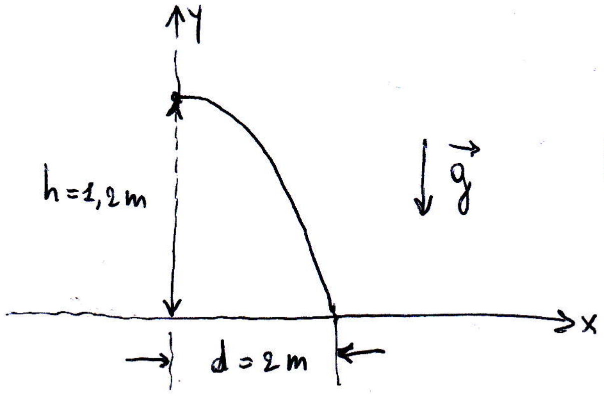
ESERCIZI SUL MOTO BIDIMENSIONALE

Serway n. 55

Una pallina attaccata a una cordicella ruota su una circonferenza orizzontale di raggio 0,3 m. Il piano della circonferenza è a 1,2 m da terra. La cordicella si rompe e la pallina atterra a 2 m di distanza (orizzontalmente) dalla verticale del punto di rottura della cordicella.
Si trovi l'accelerazione radiale della pallina durante il suo moto circolare.

Sul piano verticale, la traiettoria seguita dalla pallina successivamente alla rottura della cordicella è evidentemente un arco di parabola con vertice nel punto di distacco:



(disegno non in scala)

Dai dati del problema cerchiamo di ricavare il modulo della velocità della pallina al momento della rottura della cordicella.
Lungo l'asse y risulta:

$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$, da cui otteniamo che la pallina, a partire dall'istante in cui la cordicella si rompe, toccherà terra dopo un tempo $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Detta $v_{x,0}$ la velocità orizzontale della pallina, questa si mantiene invariata durante il moto di caduta, per cui, sapendo che all'istante $t = t_1$ la pallina tocca terra a una distanza orizzontale $d = 2\ m$ dalla verticale del punto di rottura della cordicella, risulta: $d = v_{x,0} \cdot t_1$, da cui ricaviamo

$$v_{x,0} = \frac{d}{t_1} = d\sqrt{\frac{g}{2h}} = (2m)\cdot\sqrt{\frac{9{,}81\ m/s^2}{2\cdot(1{,}2m)}} = 4{,}04\ \frac{m}{s} = 14{,}56\ \frac{km}{h}$$

Questa è la velocità con cui la pallina ha iniziato il moto di caduta libera dopo la rottura della cordicella, ed è quindi anche il modulo della velocità della pallina durante il moto di rotazione prima della rottura della cordicella.

Allora, indicato con $r = 0{,}3\ m$ il raggio della traiettoria circolare, il modulo dell'accelerazione radiale della pallina prima della rottura della cordicella è:

$$|\vec{a}| = \frac{|v_{x,0}|^2}{r} = \frac{d^2 g}{2rh} = \frac{(2\ m)^2\cdot(9{,}81\ m/s^2)}{2\cdot(0{,}3\ m)\cdot(1{,}2\ m)} = 54{,}5\ \frac{m}{s^2}$$

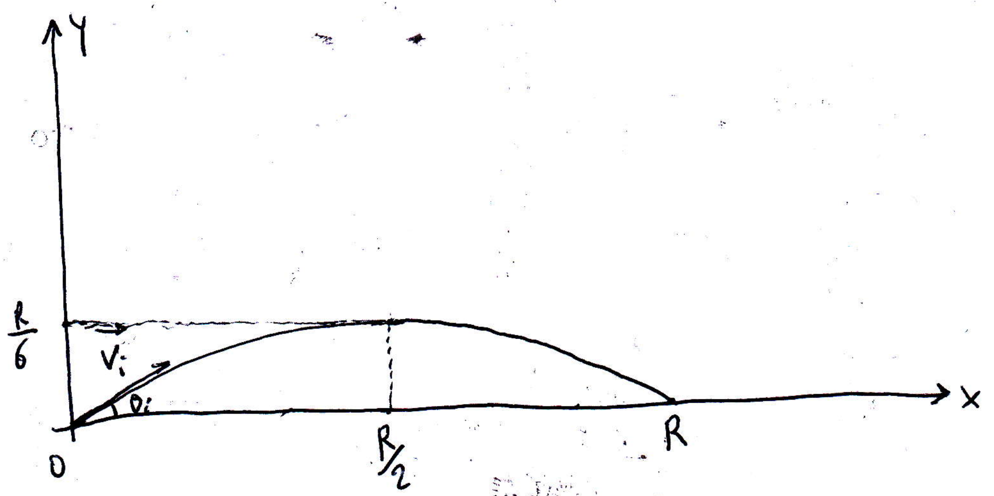
Serway n. 56

Una palla viene lanciata con una velocità v_i a un angolo θ_i rispetto all'orizzontale. Lo spazio orizzontale percorso dalla palla è R, e la palla raggiunge la massima altezza R/6.
In termini di R e g, si trovino:

a) il tempo di volo della palla;
b) la velocità della palla nel suo punto più alto;
c) la componente verticale della velocità iniziale;
d) il modulo della velocità iniziale;
e) l'angolo θ_i;
f) Si faccia l'ipotesi che la palla venga lanciata con la stessa velocità iniziale trovata in d) ma a un angolo tale da farle raggiungere la massima altezza possibile. Si trovi questa altezza.

g) Si faccia l'ipotesi che la palla venga lanciata con la stessa velocità iniziale ma a un angolo tale da rendere massima la gittata. Si trovi questa gittata.

a) Facciamo partire il cronometro all'istante $t=0$, esattamente al momento del lancio della palla.



Valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} y(t) = v_{iy}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y(t) = v_{iy} - gt \end{cases}$$

Se $t=t_1$ è l'istante in cui la palla raggiunge la quota massima $R/6$, risulta:

$$\begin{cases} y(t=t_1) = \frac{R}{6} \\ v_y(t=t_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{iy}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{R}{6} \\ v_{iy} - gt_1 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo:

$$v_{iy} = gt_1$$

che, sostituito nella prima equazione, permette di scrivere:

$$(gt_1)\cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{R}{6} \Rightarrow gt_1^2 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{R}{6} \Rightarrow \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{R}{6}$$

$$g t_1^2 = \frac{R}{3} \Rightarrow t_1^2 = \frac{R}{3g} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{R}{3g}}$$

Dunque, la palla raggiunge il punto di massima altezza all'istante $t = t_1$. A causa della simmetria del moto discendente rispetto al moto ascendente, concludiamo quindi che il tempo di volo della palla è

$$t_v = 2 t_1 = 2\sqrt{\frac{R}{3g}}$$

b) Nel punto più alto della traiettoria il vettore velocità istantanea è diretto orizzontalmente. Poiché V_x resta costante durante il moto di un proiettile, possiamo calcolare la velocità della palla nel suo punto più alto semplicemente osservando che la palla percorre un tratto orizzontale di lunghezza R in un intervallo di tempo t_v; allora risulta:

$V_x t_v = R$, da cui ricaviamo

$$V_x = \frac{R}{t_v} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{3g}{R}} = \frac{1}{2}\sqrt{3gR}$$

c) Dalla risposta alla domanda a) otteniamo:

$$V_{iy} = g t_1 = g\sqrt{\frac{R}{3g}} = \sqrt{\frac{gR}{3}}$$

d) Essendo $V_{ix} = V_x = \frac{1}{2}\sqrt{3gR}$ e $V_{iy} = \sqrt{\frac{gR}{3}}$, otteniamo

$$|\vec{V}_i| = \sqrt{V_{ix}^2 + V_{iy}^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot 3gR + \frac{1}{3}gR} = \sqrt{\frac{13}{12}gR} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{3}gR}$$

e) Dalla relazione $\operatorname{tg}\theta_i = \frac{V_{iy}}{V_{ix}}$ ricaviamo:

$$\operatorname{tg}\theta_i = \frac{\sqrt{\frac{gR}{3}}}{\frac{1}{2}\sqrt{3gR}} = 2\sqrt{\frac{\cancel{gR}}{3}\cdot\frac{1}{3\cancel{gR}}} = \frac{2}{3},$$ cioè

$$\theta_i = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\right) = 33{,}7^\circ = 0{,}59 \text{ rad}$$

f) A parità di $|\vec{V}_i| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{3}gR}$, la massima altezza viene raggiunta quando la palla viene lanciata lungo la verticale. In questo caso si ha un moto rettilineo uniformemente accelerato lungo l'asse y, con accelerazione $a_y = -g$.

Usiamo la relazione che lega direttamente la posizione e la velocità istantanea nel moto rettilineo uniformemente accelerato lungo l'asse y:

$$(V_y(t))^2 = V_{y0}^2 + 2a_x\,(y(t) - y_0)$$

Risulta $y_0 = 0$, $V_{y0} = |\vec{V}_i|$ in questo caso.

Poi, all'istante t in cui la palla raggiunge la massima altezza risulta $V_y(t) = 0$, $y(t) = h$ (incognita).

Tenuto conto che $a_x = -g$, possiamo scrivere:

$$0 = |\vec{v}_i|^2 - 2gh,$$ da cui otteniamo

$$h = \frac{|\vec{v}_i|^2}{2g} = \frac{1}{2\cancel{g}} \cdot \frac{13}{12}\cancel{g}R = \frac{13}{24}R$$

g) A parità di $|\vec{v}_i| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{3}gR}$, la massima gittata viene ottenuta quando $\theta_i = 45°$; in questo caso risulta:

$$D_{MAX} = \frac{|\vec{v}_i|^2}{g} = \frac{1}{\cancel{g}} \cdot \frac{13}{12}\cancel{g}R = \frac{13}{12}R,$$

ricordando la formula per la gittata:

$$D = \frac{|\vec{v}_i|^2}{g}\operatorname{sen}(2\theta_i),$$ che fornisce appunto la gittata massima quando $\theta_1 = 45°$, cioè quando $\operatorname{sen}(2\theta_i) = 1$.

Serway n. 58

Un punto materiale parte dall'origine con velocità $5\hat{i}$ m/s nell'istante $t = 0$ e si muove nel piano xy con un'accelerazione variabile data da $\vec{a} = (6\sqrt{t}\,\hat{j})$, dove $\vec{a}$ è in m/s^2 e t è in s.

a) Si determini la velocità del punto materiale in funzione del tempo.

b) Si determini la posizione del punto materiale in funzione del tempo.

a) Risulta $V_{x,0} = 5\,\frac{m}{s}$, $V_{y,0} = 0$, $a_x = 0$, $a_y(t) = 6\sqrt{t}$

Possiamo quindi scrivere (a_x costante, a_y variabile nel tempo):

$$V_x(t) = V_{x,0} + a_x t = V_{x,0} = 5\,\frac{m}{s}$$

$$V_y(t) = V_{y,0} + \int_0^t a_y(t')\,dt' = 6\int_0^t \sqrt{t'}\,dt' = 6\cdot \left.\frac{t'^{3/2}}{3/2}\right|_0^t =$$

$$= 6\cdot\frac{2}{3}\,t^{3/2} = \left(4\,t^{3/2}\right)\frac{m}{s}$$

Dunque:

$$\vec{V}(t) = V_x(t)\,\hat{i} + V_y(t)\,\hat{j} = \left(5\,\frac{m}{s}\right)\hat{i} + \left(4\,t^{3/2}\,\frac{m}{s}\right)\hat{j}$$

b) Risulta $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, per cui possiamo scrivere:

$$x(t) = x_0 + v_{x,0}\, t = v_{x,0}\, t = (5t)\ \text{m}$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v_y(t')\,dt' = 4\int_0^t (t')^{3/2}\,dt' =$$

$$= 4 \cdot \left.\frac{(t')^{5/2}}{5/2}\right|_0^t = \left(\frac{8}{5}\, t^{5/2}\right) \text{m}$$

Dunque:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} = (5t\ \text{m})\,\hat{i} + \left(\frac{8}{5}\, t^{5/2}\ \text{m}\right)\hat{j}$$

Serway n. 59

La NASA, per l'allenamento degli astronauti e la sperimentazione in assenza di gravità, impiega un aereo KC135A in "volo parabolico".

L'aereo sale da una quota di 24000 ft, con la prua a 45°, verso l'alto e con una velocità di 143 m/s, fino a 31000 ft, seguendo poi una traiettoria parabolica a "gravità zero", parabola da cui esce più tardi ancora a 143 m/s ma con un angolo di prua di 45° verso il basso. Durante questa fase l'aeroplano e tutto ciò che si trova all'interno della cabina imbottita sono in caduta libera; astronauti ed equipaggiamento fluttuano liberamente come in assenza di gravità.

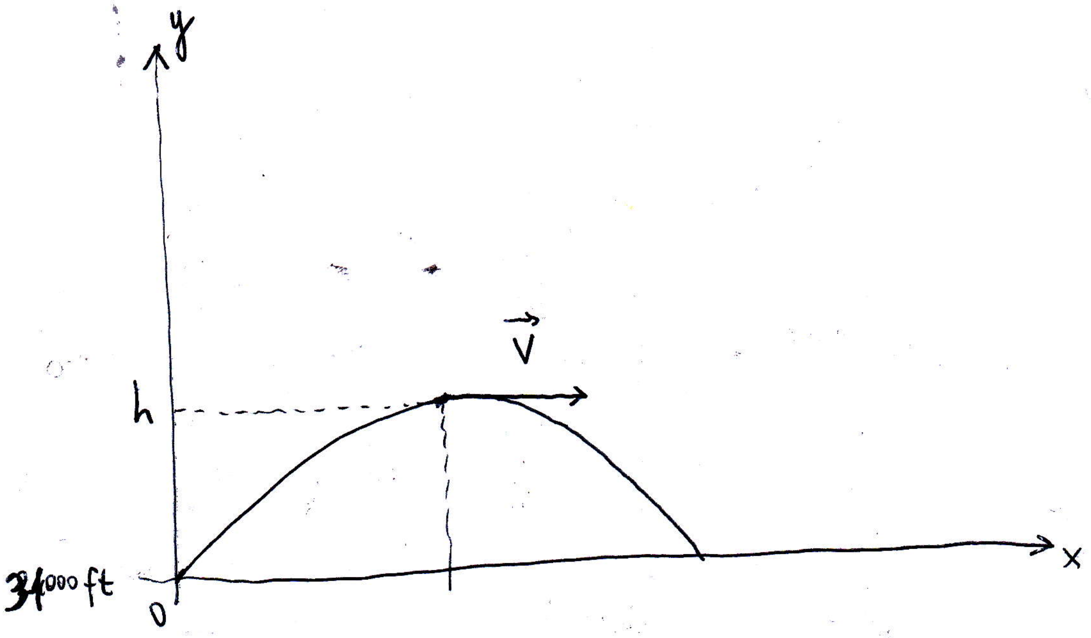
Nel punto più alto raggiunto dall'aereo quali sono i valori

a) della velocità, e

b) della quota?

c) Quanto tempo dura la fase di gravità zero?

|-------|



a) Nel punto più alto raggiunto dall'aereo la velocità vettoriale istantanea è diretta orizzontalmente, e il suo modulo è uguale al valore assoluto della componente x della velocità istantanea nel momento in cui inizia il volo parabolico, in quanto nel moto di caduta libera la componente orizzontale della velocità resta costante.

Allora risulta:

$$|\vec{v}| = |\vec{v}_0| \cos 45° = \left(143 \frac{m}{s}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 101,12 \frac{m}{s} = 364,02 \frac{km}{h}$$

b) Utilizziamo la legge, valida nel caso di moto rettilineo uniformemente accelerato, che lega direttamente la componente y della velocità vettoriale istantanea con l'ordinata della posizione:

$$(v_y(t))^2 = v_{y,0}^2 + 2 a_x (y(t) - y_0)$$

Nel caso specifico risulta $v_{y,0} = |\vec{v}_0| \operatorname{sen} 45°$, $v_y(t) = 0$, $y(t)$ = grandezza incognita, $y_0 = 31000$ ft, $a_x = -g$

Usiamo la conversione $1\,ft = 0{,}304801\ m$, per cui risulta

$$Y_0 = 9448{,}83\ m$$

Le sostituzioni indicate sopra si riferiscono ovviamente all'istante t in cui l'aereo raggiunge la quota massima lungo la traiettoria parabolica. Allora risulta:

$$|\vec{V}_0|^2 \operatorname{sen}^2 45° - 2g\,(y(t) - Y_0) = 0,$$ da cui otteniamo

$$y(t) - Y_0 = \frac{|\vec{V}_0|^2 \operatorname{sen}^2 45°}{2g} = \frac{|\vec{V}_0|^2}{4g},$$ e infine

$$y(t) = Y_0 + \frac{|\vec{V}_0|^2}{4g} = 9969{,}96\ m$$

c) La fase di "gravità zero" dura per l'intervallo di tempo necessario affinché l'aereo percorra in caduta libera l'intero tratto parabolico tra i due punti alla quota 31000 ft.

Scegliendo l'asse y verticale con origine nel punto in cui inizia il volo parabolico, risulta quindi:

$$y(t) = V_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2;$$ l'aereo ritorna alla quota di partenza (cioè la quota alla quale era iniziato il volo parabolico) all'istante t_1 tale che

$$y(t_1) = 0 \Rightarrow V_{0y} t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0 \Rightarrow t_1 \left(V_{0y} - \frac{1}{2} g t_1\right) = 0$$

La soluzione $t_1=0$ e' ovvia, ma non e' quella che cerchiamo (corrisponde banalmente al punto d'inizio del volo parabolico); la soluzione cercata e' (dalla condizione $v_{oy}-\frac{1}{2}gt_1=0$):

$$t_1=\frac{2v_{oy}}{g}=\frac{2|\vec{v}_0|\,\text{sen}\,45°}{g}=\frac{\sqrt{2}\,|\vec{v}_0|}{g}=20{,}61\ s$$

che e' quindi la durata del volo parabolico.

Serway n. 70

Un pendolo di lunghezza 1 m oscilla in un piano verticale. Quando il pendolo si trova in una delle due posizioni orizzontali ($\theta = 90°$ e $\theta = 270°$) il modulo della sua velocità è 5 m/s.

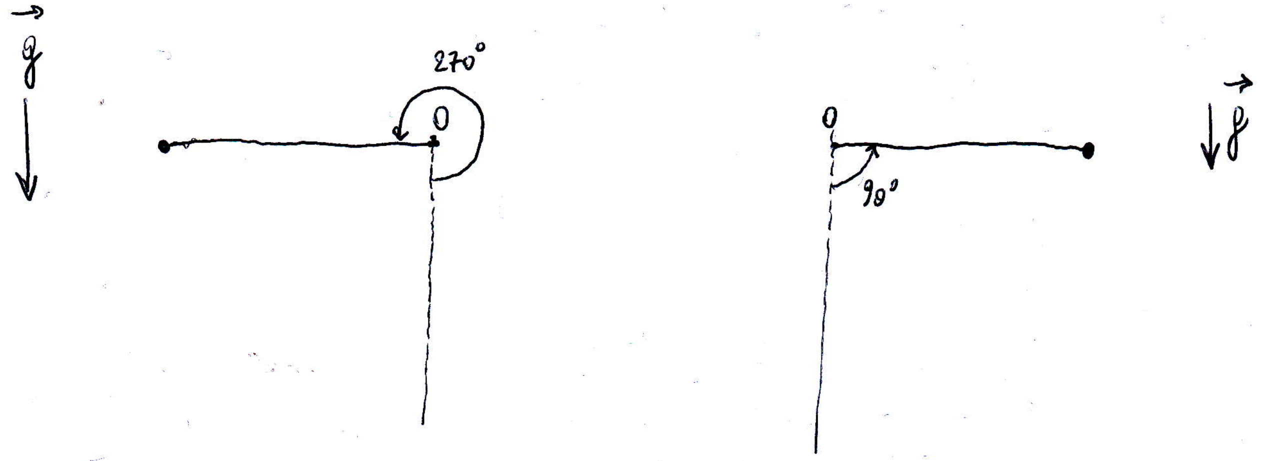
a) Si determinino il valore dell'accelerazione radiale e

b) dell'accelerazione tangenziale

in queste due posizioni.

c) Per ognuna di queste posizioni si disegni un diagramma vettoriale che mostri la direzione dell'accelerazione totale.

d) Si calcolino modulo e direzione dell'accelerazione totale.



a) Nelle due posizioni considerate, il modulo dell'accelerazione radiale è lo stesso, ed è dato da

$$|\vec{a}_r| = \frac{|\vec{v}|^2}{r}, \quad \text{essendo } |\vec{v}| = 5\ \frac{m}{s} \text{ e } r = 1\ m$$

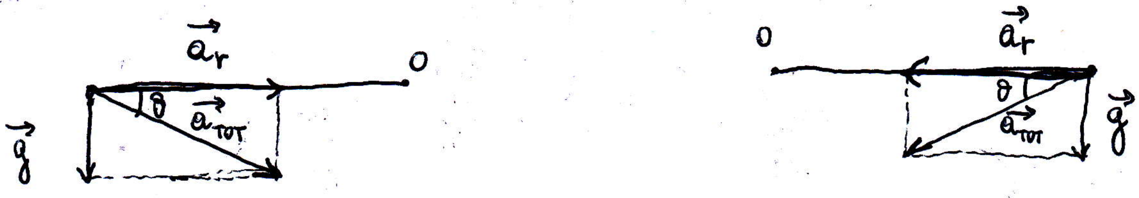
(dati del problema)

$$\Rightarrow |\vec{a}_r| = 25\ \frac{m}{s^2}$$

b) Anche il modulo dell'accelerazione tangenziale e' lo stesso nelle due posizioni considerate, ed e' dato da

$$|\vec{a}_t| = g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$$

c)



d) Risulta $|\vec{a}_{TOT}| = \sqrt{|\vec{a}_r|^2 + |\vec{g}|^2} = 26{,}86 \frac{m}{s^2}$

Scegliendo l'angolo ϑ come nelle figure schematizzate qua sopra possiamo scrivere:

$$tg\vartheta = \frac{g}{|\vec{a}_r|} = \frac{gr}{|\vec{v}|^2}$$

$$\Rightarrow \vartheta = arctg\left(\frac{gr}{|\vec{v}|^2}\right) = arctg(0{,}3924) = 21{,}4° = 0{,}37 \text{ rad}$$

Serway n. 73

Un cannoncino a molla si trova sul bordo di un tavolo, 1,2 m al di sopra del pavimento. Il cannoncino spara una biglia di acciaio con velocità vettoriale istantanea di modulo v_i e alzo di 35°.

a) Si trovi, in funzione di v_i, la posizione orizzontale della pallina nell'istante in cui questa colpisce il pavimento.
Sia $x(v_i)$ questa funzione.

Si dia il valore di x per

b) $v_i = 0{,}1 \ \frac{m}{s}$

c) $v_i = 100 \ \frac{m}{s}$.

d) Si faccia l'ipotesi che v_i sia molto piccola ma non esattamente zero. Si mostri che in questo caso uno dei termini che appaiono nel risultato a) diviene dominante per cui la forma della $x(v_i)$ si semplifica.

e) Nel caso in cui v_i sia molto grande, qual è la forma approssimata di $x(v_i)$?

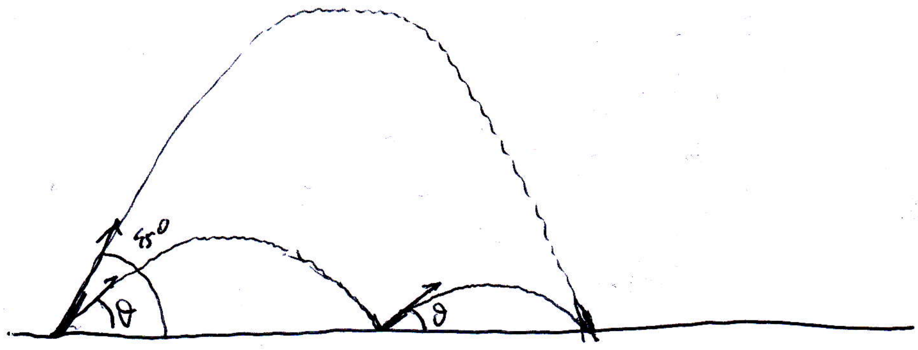
f) Si descriva la forma generale della curva $x(v_i)$.

Serway n. 74

Nel base ball un "esterno" lancia la palla al suo ricevitore nel tentativo di eliminare il giocatore che corre verso la casa base. La palla rimbalza una volta prima di raggiungere il ricevitore. Si supponga che l'angolo con cui la palla rimbalza a terra sia uguale all'angolo di lancio, ma che il modulo della velocità, nel rimbalzo, si dimezzi.

a) Facendo l'ipotesi che la palla venga sempre lanciata con lo stesso valore del modulo della velocità, a quale angolo θ dovrebbe essere lanciata per arrivare, con un solo rimbalzo (tragitto inferiore) alla stessa distanza orizzontale D raggiunta senza rimbalzi (tragitto superiore) da una palla lanciata a 45°?

b) Si determini il rapporto dei tempi di volo fra il percorso con un rimbalzo e quello senza rimbalzi.



Serway n. 78

Il vecchio coyote non può correre abbastanza velocemente per catturare lo struzzo corridore Beep Beep. Il coyote calza un paio di pattini a rotelle a propulsione, che gli forniscono una accelerazione orizzontale costante di $15 \frac{m}{s^2}$.

Il coyote parte da fermo da un punto posto a 70 m dal ciglio di un burrone nell'istante in cui Beep Beep gli passa davanti correndo verso il burrone.

a) Quale deve essere la velocità costante minima che Beep Beep deve mantenere per arrivare all'orlo del burrone prima del coyote?

Arrivato in quel punto lo struzzo effettua una inversione di marcia improvvisa, mentre il coyote continua diritto.
Anche in aria i pattini continuano a spingere in orizzontale per cui l'accelerazione del coyote in volo è $(15\hat{i} - 9{,}81\hat{j}) \frac{m}{s^2}$.

b) Il ciglio del burrone si trova 100 m al di sopra del fondo del canyon. Si determini a che distanza dalla parete verticale atterra il coyote.

c) Si determinino le componenti della velocità del coyote nell'istante del suo impatto con il fondo.