ESERCIZI SU

CAMPO MAGNETICO,

INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

E ONDE ELETTROMAGNETICHE

Serway, pr. 22.63

Ioni di carbonio-14 e carbonio-12 (ognuno con carica e) sono accelerati in un ciclotrone. Se il ciclotrone ha un campo magnetico di modulo $B = 2{,}4\ T$, qual è la differenza tra le frequenze di ciclotrone per i due ioni?

L'espressione della frequenza di ciclotrone per una particella con carica elettrica q e massa m è:

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m} \quad \left(\text{essendo } \omega_c = \frac{qB}{m} \text{ come visto nelle lezioni} \right)$$

Nel caso dei due ioni considerati risulta quindi (con $q = e$):

$$(f_c)_{^{14}C} = \frac{eB}{2\pi m_{^{14}C}} \qquad (f_c)_{^{12}C} = \frac{eB}{2\pi m_{^{12}C}}$$

Dunque, la differenza tra queste due frequenze è:

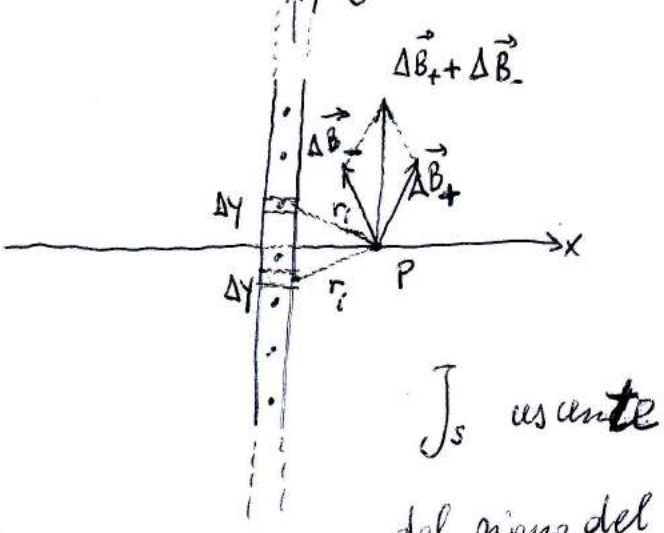
$$|\Delta f| = \left| (f_c)_{^{12}C} - (f_c)_{^{14}C} \right| = \frac{eB}{2\pi}\left(\frac{1}{m_{^{12}C}} - \frac{1}{m_{^{14}C}} \right)$$

Poiché $m_{^{12}C} = 12 \cdot m_u$ e $m_{^{14}C} = 14\, m_u$, dove m_u è l'unità di massa atomica, con $m_u = 1{,}6605388 \times 10^{-27}\ kg$, otteniamo:

$$\boxed{|\Delta f| = \frac{eB}{2\pi m_u}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{14} \right) = \frac{eB}{\cancel{2}\pi m_u} \cdot \frac{\cancel{2}}{14 \cdot 12} = \frac{1}{168} \cdot \frac{eB}{\pi m_u} = 0{,}43875 \times 10^6\ Hz}$$

Serway, pr. 22.64

Un foglio infinito di corrente che giace nel piano yz conduce una corrente superficiale di densità lineare J_s.

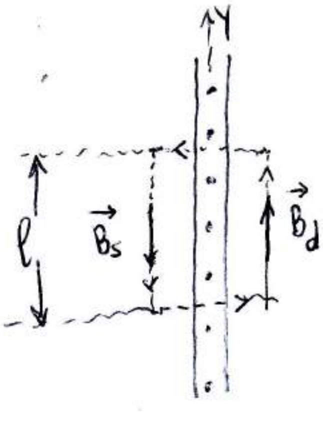


La corrente è diretta lungo z nel verso positivo (uscente dal piano del foglio), e J_s rappresenta la corrente per unità di lunghezza misurata lungo l'asse y.
La figura è una vista di profilo del foglio conduttore, lungo la direzione di scorrimento della corrente.
Si dimostri che il campo magnetico vicino al foglio conduttore è parallelo al foglio conduttore, e se ne determini il modulo.

Immaginando di suddividere il piano conduttore in strisce rettilinee disposte parallelamente all'asse z, di spessore Δy lungo l'asse y, il campo magnetico in un punto P posto lungo l'asse x è dato dalla somma vettoriale dei campi magnetici prodotti in quel punto da tutti i "fili elementari" rettilinei in cui è suddivisibile il piano conduttore. Nella figura in alto sono mostrati i contributi al campo magnetico nel punto P dovuti a due "fili elementari" posti lungo il piano conduttore, in posizioni tra loro opposte rispetto a $y=0$. Per simmetria risulta $|\Delta\vec{B}_+| = |\Delta\vec{B}_-| = \frac{\mu_0 \Delta I}{2\pi r_i} = \frac{\mu_0 J_s \Delta y}{2\pi\sqrt{x^2+y_i^2}}$ (vedi figura).

La somma vettoriale di questi due contributi, per simmetria, è un vettore diretto parallelamente al piano conduttore, lungo l'asse y. Poiché la somma di tutti i contributi "elementari" al campo magnetico nel punto P si può calcolare raggruppando i termini della somma vettoriale due a due, esattamente come mostrato in precedenza, e ottenendo quindi vettori diretti parallelamente all'asse y. La somma di tutti questi vettori così ottenuti, poi, darà come risultato finale un vettore $\vec{B}$ diretto parallelamente all'asse y, nel verso positivo a destra del piano conduttore, e nel verso negativo a sinistra del piano conduttore. Questo risultato, ottenuto per $y=0$, si estende immediatamente a qualsiasi altro punto con $y \neq 0$, in quanto il piano conduttore si estende all'infinito lungo l'asse y e quindi si può ripetere lo stesso ragionamento (ad esempio, traslando lungo l'asse y l'origine degli assi in modo che il nuovo punto considerato abbia $y=0$).
In definitiva, il campo $\vec{B}$ in punti esterni al piano conduttore è diretto parallelamente al foglio conduttore, parallelamente all'asse y.

A questo punto è possibile calcolare il modulo del campo magnetico usando il teorema di Ampère.



Consideriamo un percorso chiuso di forma rettangolare, con due lati paralleli all'asse y e due lati perpendicolari al piano conduttore. Scegliamo i due lati paralleli al piano conduttore alla stessa distanza dal piano, da parti opposte rispetto al piano, e sia l la lunghezza di questi due lati. In queste condizioni risulta $|\vec{B}_d| = |\vec{B}_s|$ (vedi figura), con i versi di $\vec{B}_d$ e di $\vec{B}_s$ stabiliti sulla base del ragionamento fatto in precedenza. Inoltre, sempre per simmetria, possiamo dire che $\vec{B}_d$ e $\vec{B}_s$ hanno modulo costante lungo i due lati del rettangolo paralleli al piano conduttore, e inoltre $|\vec{B}_d| = |\vec{B}_s| = B$ in quanto i due lati in questione si trovano alla stessa distanza dal piano conduttore. Pertanto la circuitazione del campo magnetico $\vec{B}$ lungo il percorso rettangolare in senso antiorario è:

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2Bl$, dato che il contributo alla circuitazione di $\vec{B}$ lungo i due lati del rettangolo perpendicolari al piano conduttore è nullo (risulta $\Delta\vec{s} \perp \vec{B}$ lungo tali lati, e lo spessore del piano conduttore è trascurabile).

Per il teorema di Ampère, allora, tenuto conto che la corrente totale che attraversa l'area del rettangolo è $I_{tot} = J_s \cdot l$, otteniamo: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{tot} \Rightarrow 2B\cancel{l} = \mu_0 J_s \cancel{l} \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{2}\mu_0 J_s}$

Serway, pr. 22.65

Una particella con carica positiva $q = 2e$ si muove con velocità $\vec{v} = (v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k})$, con $v_x = 2\,m/s$, $v_y = 3\,\frac{m}{s}$, $v_z = -1\,\frac{m}{s}$ attraverso una regione in cui esistono sia un campo magnetico uniforme sia un campo elettrico uniforme.

a) Calcolare la forza totale sulla carica in moto (in notazione vettoriale) se $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$, con $B_x = 2\,T$, $B_y = 4\,T$, $B_z = 1\,T$ e $\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$, con $E_x = 4\,\frac{V}{m}$, $E_y = -1\,\frac{V}{m}$, $E_z = -2\,\frac{V}{m}$.

b) Quale angolo forma il vettore forza con l'asse x positivo?

a) La forza totale sulla carica in moto è:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)\ ;\quad \text{risulta:}$$

$$F_x = q\left(E_x + (\vec{v}\times\vec{B})_x\right),\quad F_y = q\left(E_y + (\vec{v}\times\vec{B})_y\right),\quad F_z = q\left(E_z + (\vec{v}\times\vec{B})_z\right)$$

$$(\vec{v}\times\vec{B})_x = v_y B_z - v_z B_y,\quad (\vec{v}\times\vec{B})_y = v_z B_x - v_x B_z,\quad (\vec{v}\times\vec{B})_z = v_x B_y - v_y B_x$$

Allora:

$$F_x = q\left(E_x + v_y B_z - v_z B_y\right);\quad F_y = q\left(E_y + v_z B_x - v_x B_z\right);\quad F_z = q\left(E_z + v_x B_y - v_y B_x\right)$$

$$F_x = 2e\left(E_x + v_y B_z - v_z B_y\right);\quad F_y = 2e\left(E_y + v_z B_x - v_x B_z\right);\quad F_z = 2e\left(E_z + v_x B_y - v_y B_x\right)$$

$$F_x = 3{,}5248\times10^{-18}\,N\ ;\quad F_y = -1{,}6022\times10^{-18}\,N;\quad F_z = 0$$

Risulta quindi:

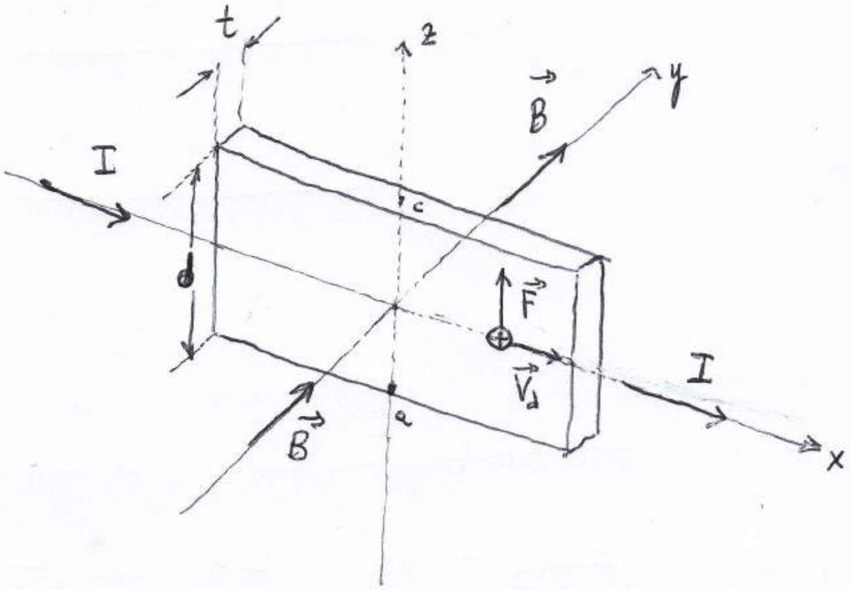
$$\boxed{\vec{F} = \left(3{,}5248 \times 10^{-18}\,\hat{i} - 1{,}6022 \times 10^{-18}\,\hat{j}\right) N}$$

b) $\vec{F}$ e' un vettore nel piano (x, y), quindi:

L'angolo α che $\vec{F}$ forma con l'asse x si può trovare così:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{F_x}{|\vec{F}|} = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2+F_y^2}}\right) = 0{,}4266\,rad = 24{,}44^\circ}$$

Serway, pr. 22.66



L'EFFETTO HALL trova importanti applicazioni nell'industria elettronica. Esso viene impiegato per determinare il segno e la densità dei portatori di carica della corrente elettrica nei circuiti integrati a semiconduttore. La configurazione è mostrata nella figura in alto. Un blocco semiconduttore di spessore t e larghezza d trasporta una corrente I nella direzione x. Un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ è applicato nella direzione y. Se i portatori di carica sono positivi, la forza magnetica li deflette nella direzione z. Una carica positiva si accumula sulla superficie superiore del blocco e una carica negativa si accumula sulla superficie inferiore, creando un campo elettrico diretto verso il basso. All'equilibrio, la forza elettrica verso il basso sui portatori di carica equilibra la forza magnetica verso l'alto e i portatori si muovono attraverso il campione senza subire alcuna deflessione. Il VOLTAGGIO HALL $\Delta V_H = V_c - V_a$ fra la superficie superiore e quella inferiore viene misurato, e da esso si può calcolare la densità dei portatori.

(continua a pag. 8)

a) Dimostrare che se i portatori di carica sono negativi lo è anche il voltaggio Hall. Dunque, l'effetto Hall permette di determinare il segno dei portatori di carica, e così il campione può essere classificato come "di tipo p" (maggioranza di portatori positivi) o "di tipo n" (maggioranza di portatori negativi).

b) Determinare il numero di portatori di carica per unità di volume n in termini di I, t, B, ΔV_H e il valore q della carica del portatore.

---

a) Se $q>0$, il vettore $\vec{F}$ è diretto come nella figura a pag. 7, cioè risulta $F_z > 0$; se $q<0$, risulta invece $F_z < 0$.

All'equilibrio, risulta quindi:

$$q(\vec{v}_d \times \vec{B})_z + q E_z = 0, \quad \text{da cui risulta} \quad E_z = -(\vec{v}_d \times \vec{B})_z.$$

Dallo schema a pag. 7 vediamo che, se I scorre nel verso $x>0$, se poniamo $|\vec{v}_d| = v_d$ deve essere $\vec{v}_d = \mathrm{sgn}(q)\cdot v_d\,\hat{i}$; dove $\mathrm{sgn}(q) = 1$ se $q>0$ e $\mathrm{sgn}(q) = -1$ se $q<0$.

Dunque risulta $E_z = -\mathrm{sgn}(q)\, v_d B$; se indichiamo con $z = a$ e $z = c$ le coordinate lungo l'asse z rispettivamente della superficie inferiore e della superficie superiore del blocco semiconduttore, con il vincolo $c - a = d$ sulla base della geometria del blocco, deve risultare:

$$E_z \cdot d = V_a - V_c \quad \text{, cioè:}$$

$$-\mathrm{sgn}(q)\, v_d B d = V_a - V_c,$$ cioe':

$$\boxed{\Delta V_H = V_c - V_a = \mathrm{sgn}(q)\, v_d B d}$$

Dunque, se i portatori di carica sono negativi, cioe' se $\mathrm{sgn}(q) = -1$, risulta $\Delta V_H < 0$.

b) Nelle lezioni abbiamo visto che risulta

$$I = n q v_d A,$$

dove n e' il numero di portatori di carica per unita' di volume e A e' la sezione trasversale del blocco semiconduttore, e risulta in questo caso $A = d \cdot t$. Allora:

$$I = n q v_d d \cdot t;$$ considerando la relazione trovata nel punto (a), cioe' $\Delta V_H = \mathrm{sgn}(q)\, v_d B d$, e dividendo le due equazioni membro a membro, otteniamo:

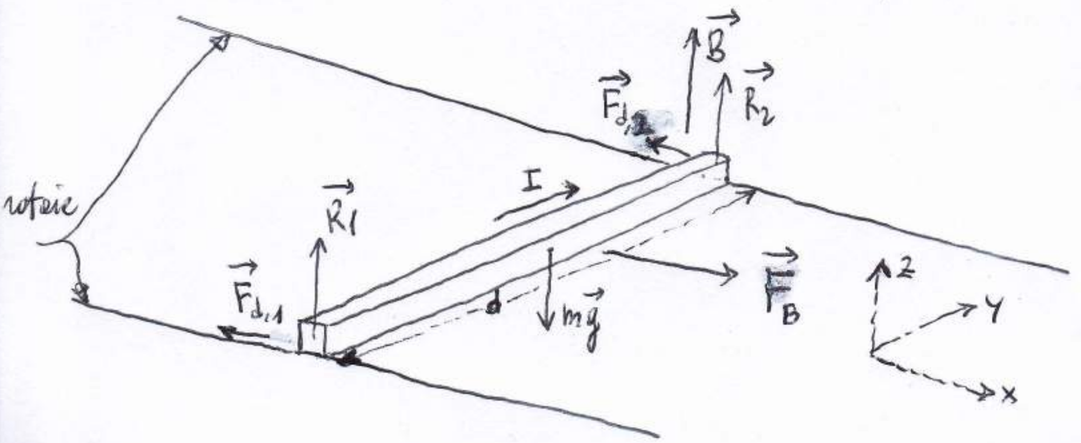
$$\frac{I}{\Delta V_H} = \frac{n q t}{\mathrm{sgn}(q)\, B},$$ da cui ricaviamo

$$\boxed{n = \frac{\mathrm{sgn}(q)\, I B}{q t\, \Delta V_H} = \frac{I B}{q t\, |\Delta V_H|}}$$

Serway, pr. 22.68

Una sbarra metallica di massa m, percorsa da una corrente I, scorre su due rotaie orizzontali separate da una distanza d. Se il coefficiente di attrito dinamico fra la sbarra e le rotaie è μ_d, qual è il modulo del campo magnetico verticale necessario per mantenere costante la velocità della sbarra?

Schematizziamo il sistema in prospettiva:



Scegliamo un sistema di assi cartesiani ortogonali (x, y, z) come nello schema qua sopra. Le rotaie sono dirette parallelamente all'asse x, la sbarra metallica è parallela all'asse y e il campo magnetico $\vec{B}$ è diretto lungo l'asse z. Se la corrente I scorre nel verso y positivo, la forza magnetica è diretta lungo l'asse x nel verso positivo se $B_z > 0$. La sbarra si muove di moto rettilineo lungo l'asse x, per cui le forze agenti sulla sbarra lungo l'asse z devono avere somma vettoriale nulla.

Dunque, deve risultare
$$m\vec{g} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 0$$

Poiché la sbarra e' disposta orizzontalmente e in modo simmetrico rispetto alle due rotaie, deve risultare $|\vec{R}_1| = |\vec{R}_2| = R$, per cui otteniamo (per le componenti lungo l'asse z):

$$R_{1,z} + R_{2,z} - mg = 0 \Rightarrow R_{1z} = R_{2,z} = \frac{1}{2} mg.$$

Per simmetria, risulta anche $\vec{F}_{d,1} = \vec{F}_{d,2}$, con

$$|\vec{F}_{d,1}| = |\vec{F}_{d,2}| = \mu_d R = \frac{1}{2}\mu_d mg \Rightarrow \vec{F}_{d,1} = \vec{F}_{d,2} = -\frac{1}{2}\mu_d mg\ \hat{i}$$

Per quanto riguarda la forza magnetica risulta:

$\vec{F}_B = I\vec{L}\times\vec{B}$, dove $\vec{L}$ e' un vettore avente come modulo la lunghezza della sbarra (quindi $|\vec{L}| = d$) e diretto lungo l'asse y, con verso concorde a quello della corrente. Poiché $\vec{L} \perp \vec{B}$, risulta

$|\vec{F}_B| = IdB$, e poiché $\vec{F}_B$ e' diretto nel verso positivo dell'asse x per la regola della mano destra (se I e' diretta come nella figura), possiamo scrivere

$$\vec{F}_B = IdB\ \hat{i}$$

Affinché la sbarra proceda con velocita' costante nel verso positivo dell'asse x deve quindi risultare:

$$\vec{F}_B + \vec{F}_{d,1} + \vec{F}_{d,2} = 0,$$ cioè

$$F_{B,x} + 2\,F_{d,x} = 0 \Rightarrow IdB - \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\mu_d mg = 0,$$ e infine

$$\boxed{B = \frac{\mu_d mg}{Id}}$$

Serway, pr. 22.69

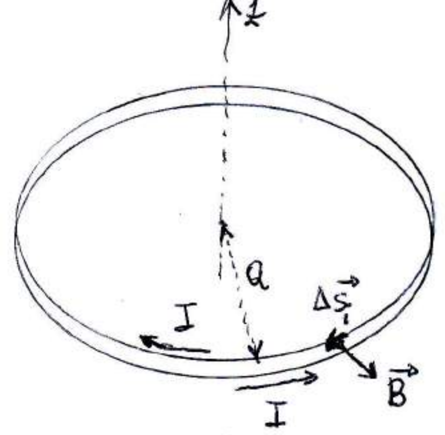
Due spire identiche circolari sono parallele, coassiali e quasi a contatto, con i loro centri a distanza $d = 1$ mm tra loro.
Ogni spira ha raggio $a = 10$ cm. La spira superiore è percorsa da una corrente $I = 140$ A in senso orario, quella inferiore è percorsa dalla stessa corrente in senso antiorario.

a) Calcolare la forza magnetica che la spira inferiore esercita sulla spira superiore.

b) Supponiamo che uno studente pensi che il primo passo per risolvere la parte a) sia quello di usare l'equazione che esprime il campo magnetico lungo l'asse di una spira per trovare il campo magnetico generato da una delle spire.
Quali argomenti si possono usare pro o contro questa idea?

c) La spira superiore ha una massa di 0,021 kg. Calcolare la sua accelerazione, assumendo che le forze che agiscono su di essa siano le forze calcolate al punto a) e la forza peso.

a) Poiché la distanza tra le due spire è molto minore del raggio delle spire, possiamo approssimare ragionevolmente il campo magnetico generato



dalla spira inferiore nella posizione di un elemento di lunghezza Δs della spira superiore come il campo magnetico generato da un filo rettilineo infinito percorso da una corrente I, alla distanza $d = 1\,mm$ dal filo:

$$|\vec{B}| \simeq \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$; $\vec{B}$ è diretto orizzontalmente nel

verso radiale uscente (vedi figura) in ogni punto della spira superiore. Tenuto conto del verso di circolazione della corrente nella spira superiore, la forza magnetica esercitata sull'elemento di spira è

$$\Delta\vec{F}_{B,i} = I\,\Delta\vec{s}_i \times \vec{B}$$, ed è diretta perpendicolarmente al

piano della spira, verso l'alto. Risulta:

$$|\Delta\vec{F}_{B,i}| = I B \Delta s_i$$, dove $B = |\vec{B}|$ e $\Delta s_i = |\Delta\vec{s}_i|$.

Il modulo della forza magnetica complessiva agente sulla spira superiore è quindi:

$$|\Delta\vec{F}_B| = I B \sum_i \Delta s_i = I B \cdot 2\pi a = I \frac{\mu_0 I}{\cancel{2\pi} d} \cdot \cancel{2\pi} a$$

Dunque:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{F}_B &= \frac{\mu_0 I^2 a}{d}\hat{k} = \left(\frac{4\pi\times10^{-7}\ H/m\cdot(140\ A)^2\cdot(0{,}1\ m)}{10^{-3}m}\right)\hat{k} = \\ &= (2{,}4630\ N)\hat{k}\end{aligned}}$$

b) Il campo magnetico lungo l'asse di una spira è molto meno intenso rispetto al campo magnetico vicino alla spira, per cui, quando due spire sono vicine tra loro come in questo caso, il campo magnetico lungo l'asse della spira non è utile per valutare la forza magnetica agente sull'altra spira.

c) Applichiamo la seconda legge di Newton alla spira superiore:

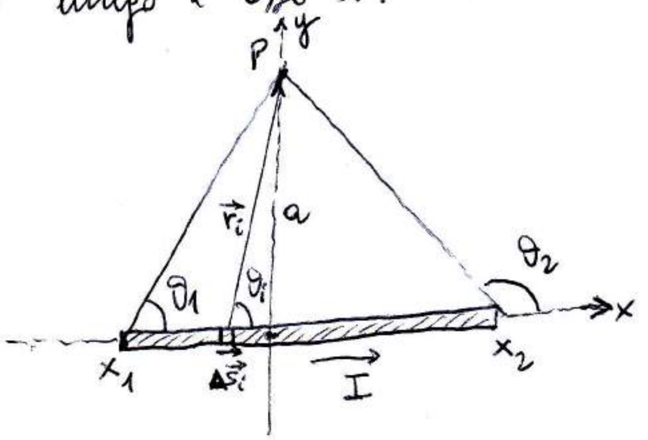
$$m a_z = F_{B,z} - mg, \quad \text{da cui otteniamo}$$

$$\boxed{a_z = \frac{F_{B,z}}{m} - g = \frac{\mu_0 I^2 a}{md} - g = 107{,}4761\ m/s^2}$$

$a_z > 0$, per cui $\vec{a}$ è diretta lungo l'asse z, verso l'alto.

Serway, pr. 22.70

Consideriamo un segmento di filo sottile e rettilineo che conduce una corrente costante, I, posto lungo l'asse x.



a) Usare la legge di Biot e Savart per determinare il campo magnetico totale nel punto P, posto a distanza a dal filo.

b) Calcolare, a partire dal risultato ottenuto nel punto a), il campo magnetico nel punto P generato da un filo rettilineo infinitamente lungo percorso da una corrente I.

a) Consideriamo un elemento piccolo del filo conduttore, caratterizzato dal vettore $\Delta\vec{s}_i$, con lunghezza $|\Delta\vec{s}_i|$, diretto lungo il filo nel verso della corrente. Sia $\vec{r}_i$ il vettore posizione del punto P rispetto alla posizione dell'elemento di corrente $\Delta\vec{s}_i$.

Per la legge di Biot-Savart, il contributo di questo elemento di corrente al campo magnetico nel punto P e':

$$\Delta\vec{B}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, \Delta\vec{s}_i \times \hat{r}_i}{r_i^2}, \quad \text{dove si e' posto } \frac{\vec{r}_i}{r_i} = \hat{r}_i .$$

$\Delta\vec{B}_i$ e' quindi diretto perpendicolarmente al piano del foglio, nel verso uscente. Risulta poi:

$$|\Delta\vec{s}_i \times \hat{r}_i| = \Delta s_i \cdot \operatorname{sen}\vartheta_i$$

Dunque otteniamo:

$$|\Delta \vec{B}_i| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \operatorname{sen}\vartheta_i}{r_i^2} \Delta s_i$$

Dalla geometria del sistema, se indichiamo con x_i la coordinata lungo l'asse x dell'elemento di corrente $\Delta \vec{s}_i$, risulta

$\Delta s_i = |\Delta \vec{s}_i| = \Delta x_i$, $\quad r_i^2 = a^2 + x_i^2$, e $a = -x_i \operatorname{tg}\theta_i$,

da cui otteniamo $\operatorname{cotg}\theta_i = -\frac{x_i}{a}$, per cui risulta

$$\operatorname{sen}\vartheta_i = \frac{1}{\sqrt{1+(\operatorname{cotg}\vartheta_i)^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+x_i^2}}$$

Allora:

$$|\Delta \vec{B}_i| = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{a}{\sqrt{a^2+x_i^2}} \cdot \frac{1}{a^2+x_i^2} \cdot \Delta x_i = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \frac{\Delta x_i}{(a^2+x_i^2)^{3/2}}$$

Dunque, poiché i vettori $\Delta \vec{B}_i$ si sommano tutti lungo la stessa direzione e nello stesso verso, il campo magnetico complessivo nel punto P è:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \sum_i \frac{\Delta x_i}{(a^2+x_i^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}} dx ,$$

con $x_1 = -a \operatorname{cotg}\vartheta_1$, $\quad x_2 = -a \operatorname{cotg}\vartheta_2$

Per calcolare l'integrale ottenuto sopra, conviene quindi effettuare un cambiamento della variabile di integrazione:

$x = -a \cot g\,\vartheta$; risulta: $\dfrac{dx}{d\vartheta} = -a\left(-\dfrac{1}{(\operatorname{sen}\vartheta)^2}\right) = \dfrac{a}{(\operatorname{sen}\vartheta)^2}$

Allora:
$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,dx = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{1}{\left[a^2+a^2(\cot g\,\vartheta)^2\right]^{3/2}} \cdot \frac{a}{(\operatorname{sen}\vartheta)^2}\,d\vartheta =$$

$$= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{a}{\left[a^2\left(1+(\cot g\,\vartheta)^2\right)\right]^{3/2}} \frac{1}{(\operatorname{sen}\vartheta)^2}\,d\vartheta =$$

$$= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\cancel{a}}{a^{\cancel{3}2}\left[1+(\cot g\,\vartheta)^2\right]^{3/2}} \frac{1}{(\operatorname{sen}\vartheta)^2}\,d\vartheta =$$

(sfruttiamo ora l'identità $\dfrac{1}{1+(\cot g\,\vartheta)^2} = (\operatorname{sen}\vartheta)^2$)

$$= \frac{1}{a^2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{(\operatorname{sen}\vartheta)^{\cancel{3}}}{\cancel{(\operatorname{sen}\vartheta)^2}}\,d\vartheta =$$

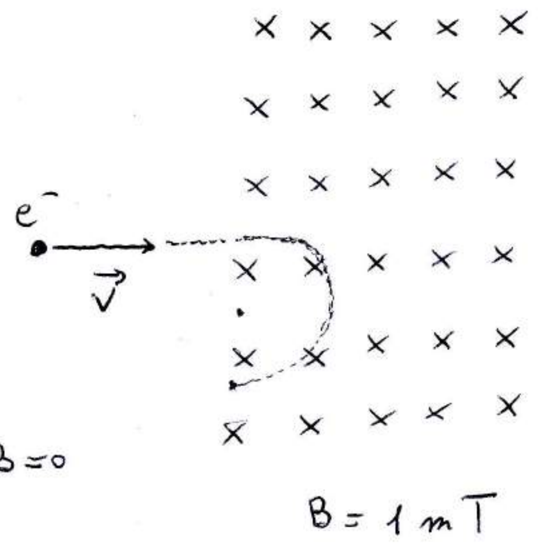
$$= \frac{1}{a^2}\left[-\cos\vartheta\Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\right] = \frac{1}{a^2}\left(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2\right)$$

Quindi otteniamo:

$$\boxed{|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I \cancel{a}}{4\pi} \frac{1}{a^{\cancel{2}}}\left(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2\right)}$$

b) Se il filo è infinitamente lungo, risulta $\vartheta_1 \to 0^+$ e $\vartheta_2 \to \pi^-$, per cui $\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 \to 1-(-1) = 2$, e quindi $|\vec{B}| = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}\cdot 2 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$, che è il modulo del campo magnetico generato da un filo infinito percorso da corrente, a distanza a.

Serway, pr. 22.71



Si supponga che la regione a destra di un certo piano contenga un campo magnetico uniforme di modulo $B = 1\ mT$, e che il campo sia nullo nella regione a sinistra del piano (vedi figura).
Un elettrone, la cui velocità è inizialmente perpendicolare al piano di confine, entra nella regione del campo.
a) Determinare il tempo necessario all'elettrone per abbandonare la regione in cui esiste il campo, notando che la sua traiettoria è una semicirconferenza.
b) Trovare l'energia cinetica dell'elettrone se la profondità massima di penetrazione nel campo è $D = 2$ cm.

a) L'elettrone, dal momento in cui entra nella regione in cui è presente il campo magnetico, si muove lungo una traiettoria circolare, e dopo avere percorso una semicirconferenza esce dalla regione del campo magnetico. Pertanto, il tempo di permanenza dell'elettrone all'interno di questa regione è uguale a metà del periodo di rotazione in campo magnetico:

$$\boxed{T_p = \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi m}{eB} = \frac{\pi m}{eB} = \frac{\pi \cdot (9,109382 \times 10^{-31}\ kg)}{(1,6021765 \times 10^{-19}\ C)(10^{-3}\ T)} = 1,7862 \times 10^{-8}\ s}$$

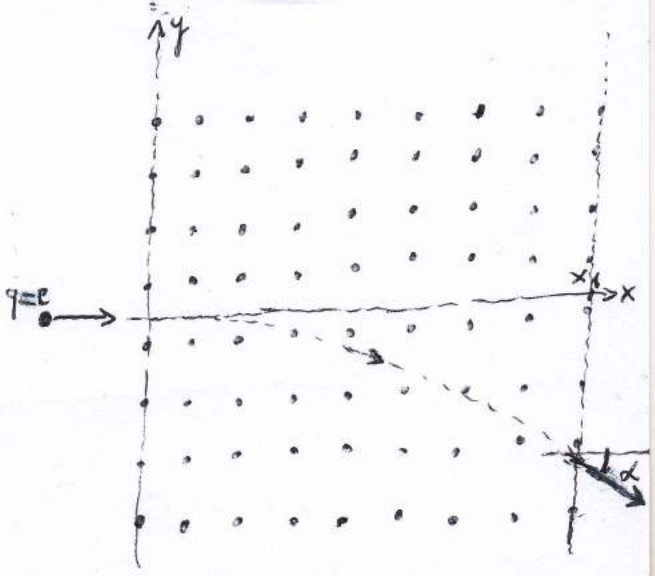
b) La massima distanza di penetrazione dell'elettrone nella regione del campo magnetico e' uguale al raggio della traiettoria semicircolare:

$$D = \frac{mV}{eB}, \quad \text{da cui otteniamo} \quad V = \frac{eBD}{m}$$

Dunque, l'energia cinetica dell'elettrone e':

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} \cancel{m} \frac{(eBD)^2}{m^{\cancel{2}}} = \frac{(eBD)^2}{2m} = \frac{[(1,6021765 \times 10^{-19}\ C)(10^{-3}\ T)\ (0,02\ m)]^2}{2 \cdot (9,109382 \times 10^{-31}\ kg)} = 0,5636 \times 10^{-18}\ J = 35,1764\ eV}$$

Serway, pr. 22.75

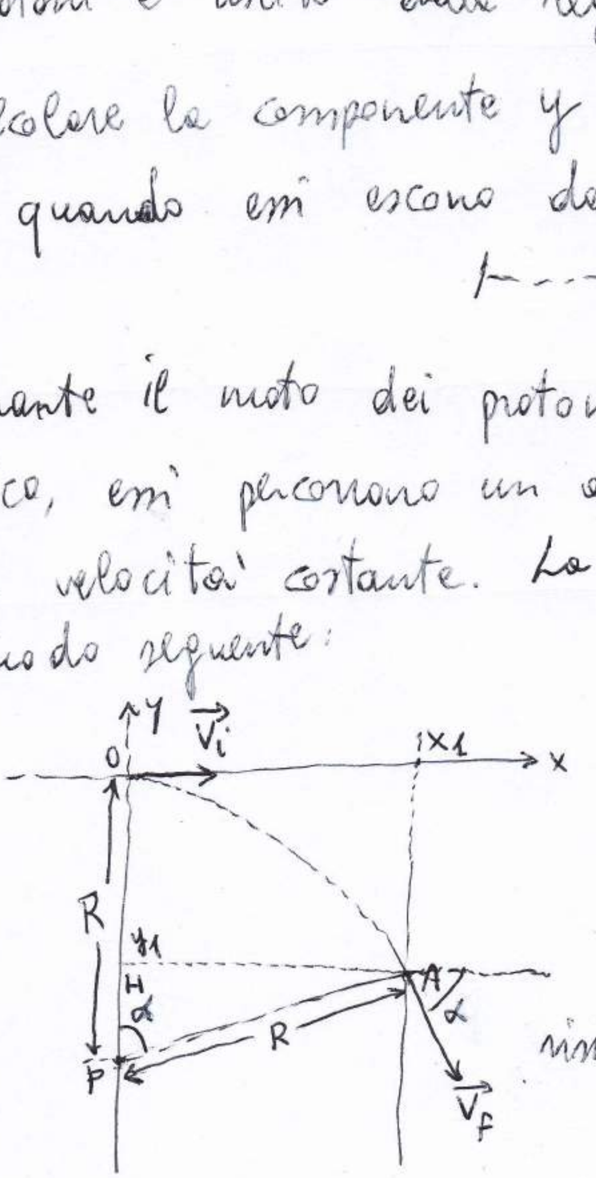


Dei protoni con energia cinetica $K = 5$ MeV $(1\,eV = 1{,}6 \times 10^{-19}\,J)$ si muovono lungo la direzione x ed entrano in una regione in cui è presente un campo magnetico $\vec{B} = (0{,}05\,\hat{k})$ T diretto nel verso uscente dal piano del foglio, e che si estende tra $x = 0$ e $x = x_1 = 1\,m$, come mostrato nella figura.

a) Ignorando effetti relativistici, trovare l'angolo α fra il vettore velocità iniziale e il vettore velocità dopo che il fascio di protoni è uscito dalla regione del campo magnetico.

b) Calcolare la componente y della quantità di moto dei protoni quando essi escono dal campo magnetico.

a) Durante il moto dei protoni nella regione con il campo magnetico, essi percorrono un arco di circonferenza con modulo della velocità costante. La situazione si può schematizzare nel modo seguente:



R è il raggio della traiettoria circolare:

$$R = \frac{mv}{qB}\,;$$ poiché $K = \frac{1}{2} m v^2$, risulta $$v = \sqrt{\frac{2K}{m}},$$ per cui:

$$R = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2K}{m}} = \frac{1}{qB}\sqrt{2mK} = \frac{1}{eB}\sqrt{2mK}$$

Nel piano cartesiano l'equazione della traiettoria circolare e':

$$x^2 + (y+R)^2 = R^2 \; ; \quad \text{per} \quad x = x_1 \quad \text{risulta}$$

$$x_1^2 + (y_1+R)^2 = R^2 \Rightarrow (y_1+R)^2 = R^2 - x_1^2 \text{, e quindi}$$

$$|y_1 + R| = \sqrt{R^2 - x_1^2} \Rightarrow y_1 + R = \pm\sqrt{R^2 - x_1^2} \text{, e la soluzione}$$

accettabile e'

$$y_1 = -R + \sqrt{R^2 - x_1^2} > -R \quad \text{(vedi figura).}$$

Risulta quindi: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AH}}{R} = \frac{x_1}{R}$, e quindi

$$\alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x_1}{R}\right)$$

L'angolo α descritto dal raggio vettore che parte dal centro P della traiettoria circolare tra l'istante in cui il protone entra nel campo magnetico e l'istante in cui esce dal campo magnetico e' uguale all'angolo tra i vettori $\vec{v}_i$ e $\vec{v}_f$ (vedi figura). Dunque risulta:

$$\alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x_1}{R}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{eBx_1}{\sqrt{2mK}}\right) =$$

$$= \operatorname{arcsen}\left(\frac{(1{,}60217649 \times 10^{-19}\,C)\cdot(0{,}05\,T)\cdot(1\,m)}{\sqrt{2\cdot(1{,}67262164 \times 10^{-27}\,kg)\,(5 \times 10^{6} \times 1{,}6 \times 10^{-19}\,J)}}\right) = 0{,}1554\,rad = 8{,}9^{\circ}$$

b) Dalla geometria della figura ricaviamo la componente y della quantità di moto dei protoni all'uscita dalla regione con il campo magnetico:

$$p_y = -|\vec{p}| \operatorname{sen}\alpha = -m|\vec{v}| \frac{eBx_1}{\sqrt{2mK}} = -m\sqrt{\frac{2K}{m}} \frac{eBx_1}{\sqrt{2mK}} =$$

$$= -\frac{m}{m}\sqrt{\frac{2K}{2K}}\, eBx_1$$

$$\boxed{p_y = -eBx_1 = -\left(1{,}602\,17649 \times 10^{-19}\,C\right)\cdot\left(0{,}05\,T\right)\cdot\left(1\,m\right) = -0{,}8011 \times 10^{-20}\ kg\, m\, s^{-1}}$$

Serway, pr. 22.78

Un anello isolante di raggio R è uniformemente caricato con una carica totale positiva q. L'anello ruota a velocità angolare costante ω attorno al proprio asse passante per il centro e perpendicolare al piano dell'anello. Qual è il modulo del campo magnetico lungo l'asse dell'anello alla distanza R/2 dal suo centro?

Poiché il periodo di rotazione dell'anello è $T = \frac{2\pi}{\omega}$, l'anello carico rotante equivale a un conduttore percorso da una corrente dovuta a una carica elettrica $\Delta q = q$ che attraversa una sezione fissata lungo l'anello in un intervallo di tempo $\Delta t = T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Dunque, il sistema equivale a una spira circolare di raggio R percorsa da una corrente $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q}{2\pi/\omega} = \frac{\omega q}{2\pi}$

Per quanto studiato durante le lezioni, il campo magnetico lungo l'asse di una spira circolare percorsa da una corrente I, e avente raggio R, e':

$$B_x = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$ alla distanza $|x|$ dal centro della spira.

Per $x = R/2$ risulta:

$$B_x\left(x=\frac{R}{2}\right) = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2+\frac{R^2}{4}\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(\frac{5R^2}{4}\right)^{3/2}} =$$

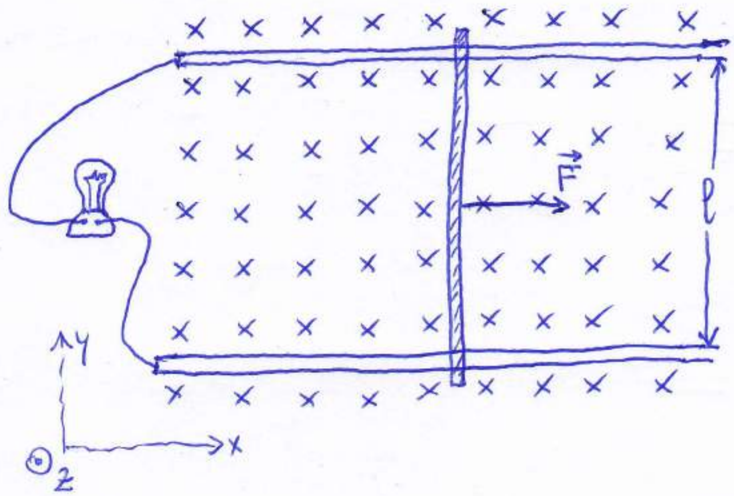
$$= \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(\frac{5R^2}{2^2}\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I \cancel{R^2}}{\cancel{2}\, 5^{3/2} \cdot \frac{R^{\cancel{3}}}{2^{\cancel{3}\,2}}} = \frac{4\mu_0 I}{5^{3/2} R}$$

$$\boxed{B_x\left(x=\frac{R}{2}\right) = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\mu_0}{5^{3/2} R} \cdot \frac{\omega q}{\cancel{2}\pi} = \frac{2\mu_0 \omega q}{\pi\, 5^{3/2} R}}$$

Se $R = 0{,}1\ m$, $q = 10\ \mu C$, $\omega = 20\ rad/s$ risulta

$$B_x(x = 0{,}05\ m) = 1{,}43108 \times 10^{-10}\ T = 143{,}108\ pT$$

Serway, pr. 23.56



Si consideri l'apparato schematizzato qui a fianco, in cui una sbarra conduttrice può essere mossa lungo due rotaie collegate a una lampada. Tutto il sistema è immerso in un campo magnetico di modulo $B = 0{,}4\ T$, perpendicolare al foglio e con verso entrante nel foglio. La distanza fra le due rotaie orizzontali è $\ell = 0{,}8\ m$. La resistenza della lampada è $R = 48\ \Omega$, e si assume che sia costante. La sbarra e le rotaie hanno resistenza trascurabile. La sbarra viene mossa verso destra da una forza costante di modulo $F = 0{,}6\ N$. Si vuole determinare la potenza massima fornita alla lampada.

a) Trovare un'espressione per la corrente che attraversa la lampada in funzione di B, ℓ, R e v (velocità della sbarra).

b) Con quale modello di analisi viene descritta in maniera appropriata la sbarra in movimento quando la massima energia viene fornita alla lampada?

c) Si usi il modello di analisi della parte b) per trovare un valore numerico per la velocità v della sbarra quando viene fornita l'energia massima alla lampada.

d) Trovare la corrente che attraversa la lampada quando a essa viene fornita l'energia massima.

e) Sapendo che $P = I^2 R$, determinare l'energia massima fornita alla lampada.

f) Qual è la massima potenza meccanica fornita alla sbarra dalla forza $\vec{F}$?

g) Si è assunto che la resistenza della lampada sia costante. In effetti, quando la potenza fornita alla lampada aumenta, la temperatura del filamento della lampada aumenta, e anche la resistenza aumenta. La velocità trovata nella parte c) cambia se la resistenza aumenta e tutte le altre quantità rimangono costanti?

h) Se sì, la velocità trovata nella parte c) aumenta o diminuisce? Se no, spiega perché.

i) Con l'ipotesi che la resistenza della lampada cresce quando la corrente aumenta, la potenza trovata nella parte f) cambia?

j) Se sì, la potenza trovata nella parte f) è più grande o più piccola? Se no, dare una spiegazione.

a) In un intervallo di tempo Δt, la superficie delimitata del circuito aumenta di una quantita' $\Delta A = l v \Delta t$. Dunque, nello stesso intervallo Δt il flusso magnetico concatenato con il circuito **varia** di una quantita'

$$|\Delta \Phi_B| = B \, \Delta A = B l v \, \Delta t .$$

Se fissiamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (x, y, z) come nello schema a pag. 24, con asse z orientato positivamente nel verso uscente dal piano del foglio, il flusso magnetico cresce in valore assoluto allorché la sbarra si sposta verso destra, ma con segno negativo se la normale alla superficie del foglio e' orientata come l'asse z.

Dunque risulta $\Delta \Phi_B = - B l v \, \Delta t$, e la f.e.m. indotta nel circuito e'

$$\mathcal{E} = - [\Phi_B(t)]' = B l v > 0 :$$ la corrente circola in senso antiorario, e risulta

$$\boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B l v}{R}}$$

b) La sbarra si muove sotto l'azione della forza costante $\vec{F}$ e della forza magnetica dovuta all'azione del campo magnetico sulla corrente indotta.

La forza magnetica agente sulla sbarra e'

$$F_{m,x} = - I\ell B = - \frac{B^2\ell^2 v_x}{R}$$

L'equazione del moto della sbarra, se m e' la massa della sbarra, e' quindi:

$$m a_x = F + F_{m,x} \quad , \text{ cioe'}$$

$$m a_x = F - \frac{B^2\ell^2 v_x}{R} \Rightarrow m\,[v_x(t)]' + \frac{B^2\ell^2}{R} v_x(t) = F$$

$$[v_x(t)]' + \frac{B^2\ell^2}{mR} v_x(t) = \frac{F}{m}$$

La soluzione generale di questa equazione differenziale e':

$$v_x(t) = \frac{FR}{B^2\ell^2} + A e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t} \quad , \text{ con } A \text{ costante arbitraria.}$$

Se $v_x(t=0) = 0$, risulta $A = - \dfrac{FR}{B^2\ell^2}$, e la soluzione diventa

$$v_x(t) = \frac{FR}{B^2\ell^2}\left(1 - e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t}\right)$$

Dunque, la sbarra si muove di moto rettilineo accelerato, e la sua velocita' istantanea tende al valore limite $\bar{v} = \dfrac{FR}{B^2\ell^2}$; quando la forza magnetica eguaglia in modulo la forza esterna applicata, la sbarra si muove di moto rettilineo uniforme e si ha il massimo trasferimento di potenza alla lampada.

c) Dunque, la sbarra non potrà muoversi con velocità maggiore di $\boxed{\bar{V} = \frac{FR}{B^2\ell^2} = \frac{(0,6\ N)\cdot(48\ \Omega)}{(0,4\ T)^2\cdot(0,8\ m)^2} = 281,25\ m/s}$

d) La corrente che scorre nella lampada quando $v = \bar{v}$ è:

$$\boxed{\bar{I} = \frac{B\ell\bar{v}}{R} = \frac{\cancel{B\ell}}{\cancel{R}}\frac{F\cancel{R}}{B^{\cancel{2}}\ell^{\cancel{2}}} = \frac{F}{B\ell} = \frac{0,6\ N}{(0,4\ T)\cdot(0,8\ m)} = 1,875\ A}$$

e) $\boxed{P = I^2R = \frac{F^2R}{B^2\ell^2} = \frac{(0,6\ N)^2\cdot(48\ \Omega)}{(0,4\ T)^2(0,8\ m)^2} = 168,75\ W}$

f) La massima potenza meccanica fornita alla sbarra dalla forza $\vec{F}$ è, quindi:

$$\boxed{P_{max} = \vec{F}\cdot\vec{v} = F\bar{v} = \frac{F^2R}{B^2\ell^2} = 168,75\ W}$$

g) Se R aumenta e tutte le altre quantità restano costanti, $\bar{V}$ varia.

h) Al crescere di R, $\bar{v}$ aumenta

i) Se la resistenza della lampada cresce quando la corrente aumenta, la potenza P_{max} cambia

j) Al crescere di R, P_{max} diventa più grande.

Serway, pr. 23.59

Una corda di acciaio di una chitarra elettrica vibra.
La componente del campo magnetico perpendicolare all'area della bobina di pickup è data da

$$B(t) = B_0 + B_1 \operatorname{sen}(2\pi f t),$$

con $B_0 = 50 \text{ mT}$, $B_1 = 3{,}2 \text{ mT}$, $f = 523 \text{ Hz}$,

e t è misurato in secondi.

La bobina circolare del rivelatore ha $N = 30$ avvolgimenti e un raggio $R = 2{,}7$ mm. Trovare la f.e.m. indotta $\mathcal{E}$ nella bobina in funzione del tempo.

La f.e.m. indotta in una bobina con N spire è data dalla legge di Faraday-Neumann:

$$\mathcal{E} = -N\,[\Phi_B(t)]',$$

dove $\Phi_B(t)$ è il flusso magnetico concatenato con una singola spira. Nel caso specifico risulta:

$$\Phi_B(t) = \pi R^2 B(t) = \pi R^2 [B_0 + B_1 \operatorname{sen}(2\pi f t)],$$ e quindi

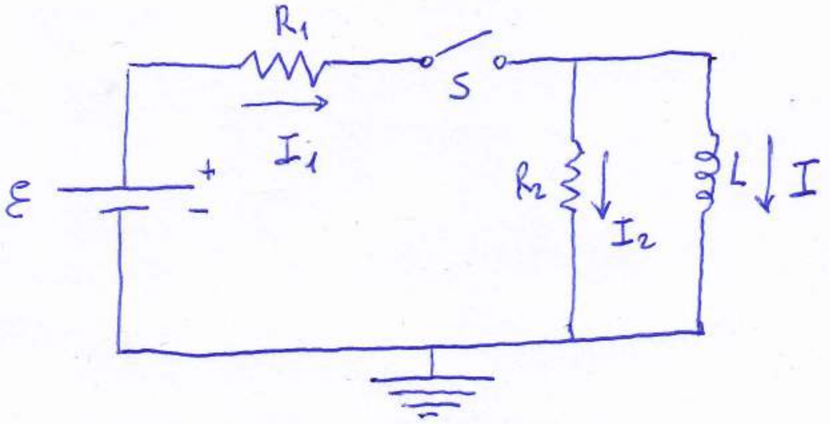
$$[\Phi_B(t)]' = \pi R^2 \cdot B_1 \cdot 2\pi f \cos(2\pi f t) = 2\pi^2 R^2 B_1 f \cos(2\pi f t),$$

e quindi la f.e.m. indotta nella bobina è:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{E} &= -2\pi^2 N R^2 B_1 f \cos(2\pi f t) = \\ &= -2\pi^2 \cdot 30 \cdot (2{,}7\times10^{-3}\,m)^2 \cdot (3{,}2\times10^{-3}\,T)\cdot(523\,Hz)\cdot\cos(1046\pi t) = \\ &= -\mathcal{E}_1 \cos(1046\pi t), \quad \text{con } \mathcal{E}_1 = 7{,}2249\,mV \text{ e } t \text{ in secondi}\end{aligned}}$$

Serway, pr. 23.60

All'istante $t=0$ l'interruttore nello schema mostrato qui a fianco viene chiuso.



Si vuole trovare un'espressione simbolica per la corrente nell'induttore per $t>0$. Si chiami la corrente I e si scelga come positivo il verso dall'alto verso il basso nell'induttore.
Sia I_1 la corrente verso destra nella resistenza R_1, e I_2 la corrente verso il basso attraverso R_2.

a) Si usi la legge dei nodi di Kirchhoff per trovare una relazione fra le tre correnti.

b) Si applichi la legge delle maglie di Kirchhoff alla maglia di sinistra per trovare un'altra relazione.

c) Si applichi la legge delle maglie alla maglia esterna per trovare una terza relazione.

d) Eliminare I_1 e I_2 nelle tre equazioni per trovare un'equazione che contenga solo la corrente I.

e) Confrontare l'equazione della parte d) con l'equazione della maglia singola di un circuito RL serie. Usare questo confronto per scrivere l'espressione per $I(t)$.

a) Con l'interruttore chiuso deve risultare

$$\boxed{I_1 = I_2 + I}$$

per la legge dei nodi di Kirchhoff

b) Applicando la legge delle maglie di Kirchhoff alla maglia di sinistra del circuito, otteniamo:

$$\boxed{\mathcal{E} - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0}$$

c) Applicando la legge delle maglie di Kirchhoff alla maglia esterna del circuito, otteniamo:

$$\boxed{\mathcal{E} - R_1 I_1 - L\,[I(t)]' = 0}$$

d) Dalla equazione ottenuta al punto a) otteniamo

$I_2 = I_1 - I$; sostituiamo questa espressione a I_2 nell'equazione ottenuta al punto b):

$$\mathcal{E} - R_1 I_1 - R_2 (I_1 - I) = 0 \Rightarrow \quad \mathcal{E} - (R_1 + R_2) I_1 + R_2 I = 0$$

Da questa ultima equazione ricaviamo

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} + R_2 I}{R_1 + R_2}$$

Sostituiamo questa ultima espressione a I_1 nell'equazione ottenuta al punto c):

$$\mathcal{E} - \frac{R_1(\mathcal{E} + R_2 I)}{R_1+R_2} - L[I(t)]' = 0$$

$$\left(1 - \frac{R_1}{R_1+R_2}\right)\mathcal{E} - \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} I(t) - L[I(t)]' = 0$$

$$\left(\frac{\cancel{R_1}+R_2-\cancel{R_1}}{R_1+R_2}\right)\mathcal{E} - \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} I(t) - L[I(t)]' = 0$$

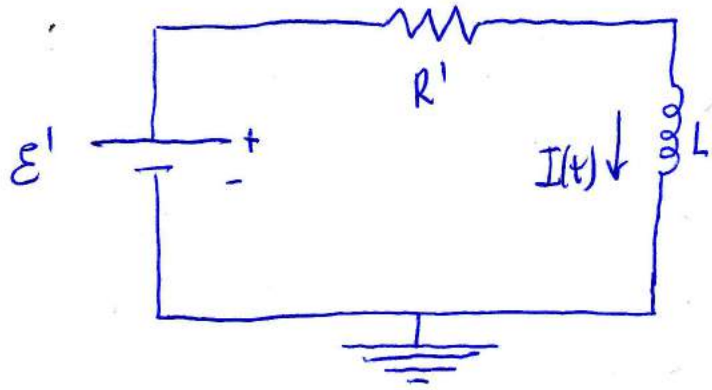
Riordiniamo i termini

$$\boxed{\frac{R_2}{R_1+R_2}\mathcal{E} - \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} I(t) - L[I(t)]' = 0}$$

e) L'equazione di un semplice circuito RL serie con una sola maglia è:

$$\mathcal{E} - R I(t) - L[I(t)]' = 0$$

Dunque, il circuito che stiamo studiando in questo problema equivale a un circuito a una sola maglia, in cui la batteria fornisce una f.e.m. uguale a $\frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \mathcal{E}$, e una "resistenza equivalente" di valore uguale a $\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$ (che è il parallelo di R_1 e R_2) è collegata in serie all'induttanza L:



$$\mathcal{E}' = \frac{R_2}{R_1+R_2}\,\mathcal{E}$$

$$R' = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$$

La soluzione per $I(t)$, usando questa equivalenza e ricordando la soluzione per la corrente in un circuito RL serie a una sola maglia, e' quindi:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}'}{R'}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad \text{con} \quad \tau = \frac{L}{R'}$$

$$\frac{\mathcal{E}'}{R'} = \frac{\cancel{R_2}}{\cancel{R_1+R_2}}\,\mathcal{E} \cdot \frac{\cancel{R_1+R_2}}{R_1 \cancel{R_2}} = \frac{\mathcal{E}}{R_1}$$

$$\tau = \frac{L}{R'} = \frac{(R_1+R_2)L}{R_1 R_2}$$

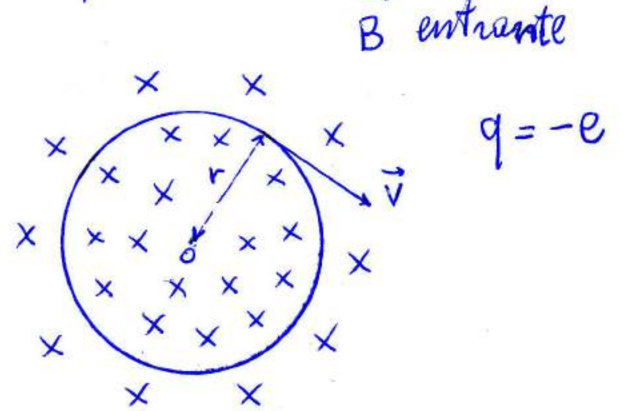
Dunque risulta $$\boxed{I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{R'}{L}t}\right)}$$

Serway, pr. 23.62

Un BETATRONE e' una macchina che accelera gli elettroni a energie dell'ordine di 1 MeV per mezzo dell' induzione elettromagnetica. Gli elettroni in una camera a vuoto vengono mantenuti in un' orbita circolare da un campo magnetico perpendicolare al piano dell' orbita. Il campo magnetico viene gradualmente aumentato per indurre un campo elettrico lungo l' orbita.

a) Dimostrare che il campo elettrico ha il verso corretto per aumentare la velocita' degli elettroni.

b) Assumere che il raggio dell' orbita rimanga costante. Dimostrare che il campo magnetico medio sull'area racchiusa dall' orbita deve essere il doppio del campo magnetico sulla circonferenza.



a) Dal testo del problema deduciamo che $\vec{B}$ e' a simmetria circolare, tuttavia e' variabile nel tempo e non uniforme. Poniamo che $\vec{B}$ sia perpendicolare al piano del foglio, entrante nel foglio. Per fissare le idee, prendiamo il versore normale alla superficie delimitata dalla traiettoria circolare dell' elettrone diretto nel verso uscente dal piano del foglio; con questa scelta, risulta $\Phi_B(t) < 0$, e se $|\vec{B}|$ aumenta risulta di conseguenza $[\Phi_B(t)]' < 0$.

Affinché un elettrone possa rimanere in orbita circolare nel campo magnetico indicato nella figura a pag. (34), l'elettrone deve girare in senso orario, affinché la forza magnetica $\vec{F}_B = -e\,\vec{v} \times \vec{B}$ sia diretta verso il centro della traiettoria circolare.

Dalla forma generale della legge di Faraday-Neumann ricaviamo:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\left[\Phi_B(t)\right]',$$

dove l'integrale al primo membro è calcolato in un giro completo lungo la traiettoria circolare, e il flusso $\Phi_B(t)$ al secondo membro è calcolato attraverso l'area delimitata dalla traiettoria circolare. Risulta, per la simmetria circolare del sistema considerato:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 2\pi r E_t ,$$

dove E_t è la componente del campo elettrico indotto tangenziale alla traiettoria circolare.

Osserviamo (come già osservato durante le lezioni) che E_t è l'unica componente del campo elettrico indotto $\vec{E}$: se esistesse una componente radiale non nulla di $\vec{E}$, le linee di campo di $\vec{E}$ convergerebbero "a spirale" verso il centro del sistema, ma questo può essere vero solo in presenza di cariche elettriche libere, cosa che non avviene nel sistema in esame.

Risulta quindi: $2\pi r E_t = -[\Phi_B(t)]' > 0$, se $|\vec{B}|$ viene gradualmente aumentato come indicato dal testo del problema. Pertanto, il campo elettrico indotto $\vec{E}$ è tangenziale alla traiettoria circolare dell'elettrone, diretto nel senso antiorario. Poiché l'elettrone ha carica elettrica $q = -e < 0$, la forza elettrica $F_t = q E_t = -e E_t$ è tangenziale alla traiettoria circolare dell'elettrone e diretta in senso orario, quindi è concorde alla velocità istantanea $\vec{v}$ dell'elettrone, per cui $\vec{E}$ ha il verso giusto per far aumentare $|\vec{v}|$.

b) La forza centripeta che mantiene l'elettrone sull'orbita circolare è: $\vec{F}_B = -e\,\vec{v} \times \vec{B}_{orb}$, e risulta

$F_B = |\vec{F}_B| = e\,v\,B_{orb}$, dove $\vec{B}_{orb}$ è il campo magnetico lungo l'orbita dell'elettrone, $v = |\vec{v}|$ e $B_{orb} = |\vec{B}_{orb}|$

Dunque deve risultare, lungo l'orbita circolare:

$$m\frac{v^2}{r} = e\cancel{v} B_{orb} \Rightarrow mv = e r B_{orb}$$

Dall'equazione scritta nella risposta al punto a) del problema otteniamo:

$$2\cancel{\pi}\cancel{r}\, E_t = \cancel{\pi} r^2 [B_m(t)]',$$

dove, $B_m(t)$ e' il modulo del campo magnetico medio (all'istante t) nell'area racchiusa dalla circonferenza.

Risulta perciò $$E_t = \frac{r}{2}\,[B_m(t)]',$$

tenuto conto dei segni corretti conseguenti alla scelta fatta nel punto a). Dunque, il modulo della forza elettrica agente su un elettrone lungo l'orbita circolare è:

$$|F_t| = e|E_t| = \frac{er}{2}\left|[B_m(t)]'\right|$$

Ma la componente tangenziale della forza, per la seconda legge della dinamica, e' uguale a $[p(t)]'$ (derivata rispetto al tempo della quantità di moto dell'elettrone).

Poiché $p(t) = mV(t)$, otteniamo:

$$|F_t| = m\,|V(t)'| = \frac{er}{2}\,\left|[B_m(t)]'\right|$$

Dall'equazione $mV(t) = er\,B_{orb}(t)$, ottenuta in precedenza, ricaviamo quindi $$m\,|V(t)'| = er\,|B_{orb}(t)'|$$ (r e' costante!),

e per confronto diretto con l'altra equazione otteniamo:

$$\cancel{er}\,|B_{orb}(t)'| = \frac{\cancel{er}}{2}\,\left|[B_m(t)]'\right|,$$ per cui deve risultare

$B_{orb}(t) = \frac{1}{2}B_m(t)$, oppure $\boxed{B_m(t) = 2\,B_{orb}(t)}$, a meno di un termine additivo non dipendente dal tempo.

Serway, pr. 23.64

Una particella di massa $m = 2 \times 10^{-16}$ Kg avente una carica elettrica $q = 30\ nC$, inizialmente ferma e accelerata da una differenza di potenziale ΔV, viene sparata da una piccola sorgente all'interno di una regione di campo magnetico uniforme di modulo $B = 0{,}6\ T$. La velocità $\vec{v}$ della particella è perpendicolare al campo magnetico $\vec{B}$. L'orbita circolare della particella racchiude un flusso magnetico

$\Phi_B = 15\ \mu Wb$.

a) Calcolare il modulo della velocità della particella.

b) Calcolare la differenza di potenziale che accelera la particella all'interno della sorgente.

a) Il flusso di un campo magnetico costante attraverso una superficie circolare di raggio r è:

$\Phi_B = \pi r^2 B$, se la normale alla superficie è concorde con il verso di $\vec{B}$. Risulta quindi:

$$r^2 = \frac{\Phi_B}{\pi B} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{\Phi_B}{\pi B}}$$

Poiché la particella percorre un'orbita circolare sotto l'azione della forza magnetica, deve anche risultare

$$m \frac{v^2}{r} = q v B \Rightarrow v = \frac{qBr}{m}$$

Allora, mettendo insieme le due equazioni, otteniamo:

$$\boxed{V = \frac{qB}{m}\sqrt{\frac{\Phi_B}{\pi B}} = \frac{q}{m}\sqrt{\frac{B\,\Phi_B}{\pi}} = \frac{(30\times10^{-9}\,C)}{(2\times10^{-16}\,Kg)}\sqrt{\frac{(0{,}6\,T)\cdot(15\times10^{-6}\,Wb)}{\pi}} = 2{,}53885\times10^{5}\,m/s}$$

b) La particella parte da ferma ed è accelerata dalla forza elettrica generata dalla differenza di potenziale ΔV.

Il lavoro svolto dalla forza elettrica sulla particella è

$$W = q\,\Delta V$$

Per il teorema dell'energia cinetica risulta quindi:

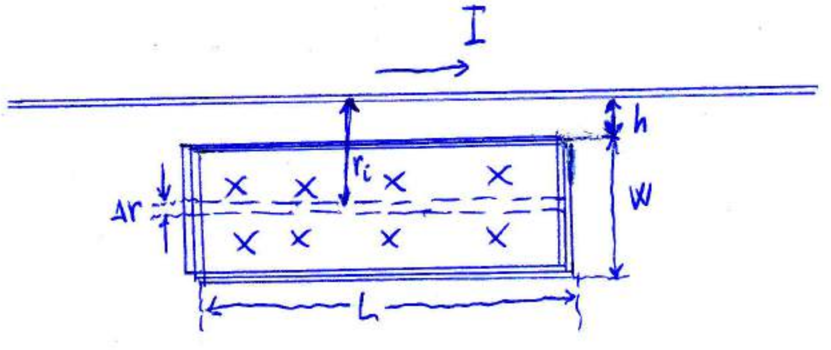
$\frac{1}{2} m v^2 = q\,\Delta V$, da cui otteniamo

$$\boxed{\Delta V = \frac{mv^2}{2q} = \frac{\cancel{m}}{2\cancel{q}}\,\frac{q^{\cancel{2}}B\,\Phi_B}{m^{\cancel{2}}\pi} = \frac{q\,B\,\Phi_B}{2\pi m} = \frac{(30\times10^{-9}\,C)\cdot(0{,}6\,T)\cdot(15\times10^{-6}\,Wb)}{2\pi\cdot(2\times10^{-16}\,Kg)} = 214{,}8592\,V}$$

Serway, pr. 23.65

Un lungo filo rettilineo è percorso da una corrente $I = I_{max} \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$. Il filo giace sul piano di una bobina rettangolare costituita da N spire. Le grandezze I_{max}, ω e ϕ sono costanti. Assumere $I_{max} = 50$ A, $\omega = 200\pi$ rad/s, $N = 100$, $h = w = 5$ cm e $L = 20$ cm.

Determinare la f.e.m. indotta nella bobina dal campo magnetico creato dalla corrente che scorre nel filo rettilineo.



Il modulo del campo magnetico generato da un lungo filo rettilineo percorso da una corrente I a una distanza r dal filo è:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Se il verso positivo di I è quello indicato nella figura, il campo magnetico è diretto perpendicolarmente al piano del foglio, con verso entrante, all'interno dell'area delimitata dalla spira. Suddividiamo questa superficie in strisce parallele al filo, di larghezza Δr. All'interno di ciascuna di queste strisce il modulo del campo magnetico è all'incirca costante, di valore $\frac{\mu_0 I}{2\pi r_i}$.

Dunque, il flusso magnetico attraverso la striscia i-esima e':

$$|\Delta \Phi_{B,i}| = L\,\Delta r \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi r_i} = \frac{\mu_0 L I}{2\pi} \cdot \frac{\Delta r}{r_i}$$

Il flusso magnetico complessivo attraverso la superficie delimitata da una spira e' quindi (in valore assoluto):

$$|\Phi_B| = \sum_i \Delta \Phi_{B,i} = \frac{\mu_0 L I}{2\pi} \sum_i \frac{\Delta r}{r_i} = \frac{\mu_0 L I}{2\pi} \int_h^{h+W} \frac{1}{r}\, dr =$$

$$= \frac{\mu_0 L I}{2\pi} \ln\left(\frac{h+W}{h}\right) = \frac{\mu_0 L I}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{W}{h}\right)$$

Se scegliamo il verso positivo della normale alla superficie uscente dal piano del foglio, risulta:

$$\Phi_B = -\frac{\mu_0 L I}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{W}{h}\right)$$

Pertanto, la f.e.m. indotta nella bobina e', per la legge di Faraday-Neumann:

$$\mathcal{E} = -N\,[\Phi_B(t)]' = \frac{\mu_0 N L}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{W}{h}\right) [I(t)]',$$ in quanto I e' l'unica quantita' che dipende dal tempo nell'espressione del flusso Φ_B. Dunque, poiché $[I(t)]' = \omega I_{max} \cos(\omega t + \phi)$, otteniamo

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\mu_0 N L \omega I_{max}}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{W}{h}\right) \cos(\omega t + \phi_0) =$$

$$= \mathcal{E}_{max} \cos(\omega t + \phi_0), \quad \text{con } \mathcal{E}_{max} = \frac{\mu_0 N L \omega I_{max}}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{W}{h}\right) =$$

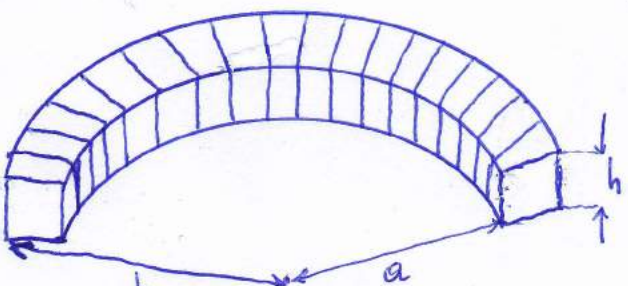
$$= \frac{(4\pi\times10^{-7}\,H/m)\cdot100\cdot(0{,}2\,m)\cdot(\frac{200}{100}\pi\,rad/s)\cdot(50\,A)}{2\pi}\cdot\ln\left(1+\frac{0{,}05\,m}{0{,}05\,m}\right)=$$

$$= 87{,}1034\ mV$$

La corrente nella bobina circola in senso antiorario.

Serway, pr. 23.67

Un toroide e' costituito da N spire e ha una sezione rettangolare. I suoi raggi interno e esterno sono rispettivamente a e b. Lo spessore del toroide e' h. Calcolare l'induttanza di un toroide di 500 spire con $a = 10$ cm, $b = 12$ cm, $h = 1$ cm.



Nelle lezioni e' stato svolto il calcolo del modulo del campo magnetico all'interno di una bobina toroidale, per una distanza r dal centro, con $a<r<b$:

$$B(r) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$, dove I e' la corrente che scorre nella bobina. Il calcolo del flusso di $\vec{B}$ attraverso una spira della bobina e' analogo al calcolo svolto nell'esercizio precedente: $\Phi_B = \frac{\mu_0 h I N}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$, tenuto conto dell'espressione di B(r) in questo caso specifico.

L'induttanza della bobina toroidale si ottiene quindi dalla legge

$$\boxed{L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Con $N = 500$, $a = 0,1\ m$, $b = 0,12\ m$ e $h = 0,01\ m$

risulta
$$L = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7}\ H/m) \cdot (500)^2 \cdot (0,01\ m)}{2\pi} \ln\left(\frac{0,12\ m}{0,1\ m}\right) = 91,16\ \mu H$$

Serway, pr. 24.61

Si assuma che l'intensità della radiazione solare incidente sulle estremità superiori delle nuvole della Terra sia $J = 1370\ W/m^2$.

a) Calcolare la potenza totale irradiata dal Sole, prendendo il valore $D = 1,496 \times 10^{11}\ m$ per la distanza media Terra-Sole.

b) Determinare il valore massimo del modulo del campo elettrico della radiazione solare sulla superficie terrestre.

c) Determinare il valore massimo del campo magnetico della radiazione solare sulla superficie terrestre.

|- - - - - -|

a) Trascurando le dimensioni del Sole rispetto alla distanza Terra - Sole, possiamo stimare che la potenza elettromagnetica totale irradiata dal Sole si distribuisce, a una distanza dal Sole uguale alla distanza Terra - Sole, su una superficie sferica di raggio D. Dunque, detta P_s la potenza elettromagnetica totale irradiata dal Sole, risulta:

$$\frac{P_s}{4\pi D^2} = J$$, da cui otteniamo:

$$P_s = 4\pi D^2 J = 4\pi \cdot (1,496 \times 10^{11} m)^2 \cdot \left(1370 \frac{W}{m^2}\right) = 3,853 \times 10^{26}\ W$$

b) Risulta $J = \frac{E_{max}^2}{2\mu_0 c}$, da cui ricaviamo

$$E_{max}^2 = 2\mu_0 c J \text{, e infine}$$

$$E_{max} = \sqrt{2\mu_0 c J} = \sqrt{2\cdot\left(4\pi\times10^{-7}\frac{H}{m}\right)\cdot\left(2,99792458\times10^{8}\frac{m}{s}\right)\left(1370\frac{W}{m^2}\right)} =$$

$$= 1,01599\times10^{3}\ \frac{V}{m}$$

c) Risulta

$$B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = \sqrt{\frac{2\mu_0 J}{c}} = \sqrt{\frac{2\cdot\left(4\pi\times10^{-7}\frac{H}{m}\right)\cdot\left(1370\ \frac{W}{m^2}\right)}{\left(2,99792458\times10^{8}\frac{m}{s}\right)}} =$$

$$= 3,3890\times10^{-6}\ T = 3,3890\ \mu T$$

<u>Serway, pr. 24. 63</u>

Un'antenna a paraboloide di 20 m di apertura riceve (in incidenza normale) un segnale radio da una sorgente molto lontana. Il segnale radio e' un'onda sinusoidale continua di ampiezza $E_{max} = 0,2\ \mu V/m$. Si assuma che l'antenna assorba tutta la radiazione che la colpisce.

a) Qual e' l'ampiezza del campo magnetico in questa onda?

b) Qual e' l'intensita' della radiazione ricevuta dall'antenna?

c) Qual e' la potenza ricevuta dall'antenna?

d) Quale forza viene esercitata dalle onde radio sull'antenna?

Per i calcoli che dovremo svolgere, approssimiamo la superficie dell'antenna con un cerchio di diametro $d = 20$ m.

a) Risulta $$B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = \frac{0,2 \times 10^{-6}\ V/m}{2,99792458 \times 10^{8}\ m/s} = 0,6671 \times 10^{-15}\ T$$

b) Risulta $$J = \frac{E_{max}^{2}}{2\mu_0 c} = \frac{\left(0,2 \times 10^{-6}\ \frac{V}{m}\right)^2}{2 \cdot \left(4\pi \times 10^{-7}\ \frac{H}{m}\right) \cdot \left(2,99792458 \times 10^{8}\ \frac{m}{s}\right)} =$$

$$= 0,5309 \times 10^{-16}\ \frac{W}{m^2}$$

c) La potenza ricevuta dall'antenna e', quindi:

$$P = J \cdot \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 1,6678 \times 10^{-14}\ W$$

d) La pressione di radiazione esercitata sull'antenna e'

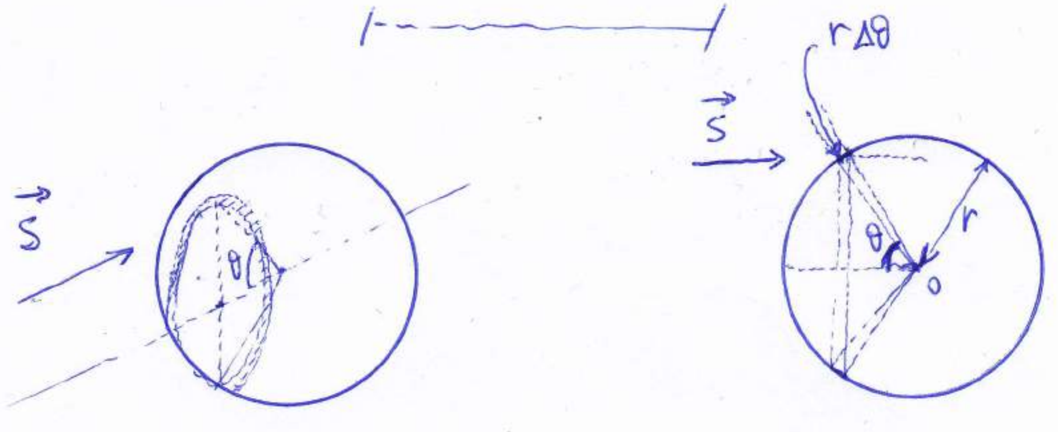
$p = \frac{J}{c}$, per cui la forza esercitata dalle onde radio sull'antenna e':

$$|\vec{F}| = p \cdot \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{J}{c} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{P}{c} = 0,5563 \times 10^{-22}\ N$$

Serway, pr. 24.66

Si consideri una piccola particella sferica di raggio r posta nello spazio a una distanza R dal Sole, la cui massa è M_s.
Si assume che la particella abbia una superficie perfettamente assorbente e una densità di massa pari a ρ.
Si indichi con S l'intensità della radiazione elettromagnetica solare nel punto in cui si trova la particella.
Si calcoli il valore di r per cui la particella è in equilibrio sotto l'azione della forza gravitazionale e della forza esercitata dalla radiazione solare.

Dati: $R = 3{,}75 \times 10^{11}$ m, $\rho = 1{,}5$ g/cm³, $S = 214$ W/m².



Per calcolare la potenza incidente sulla sfera, per eseguire il calcolo esatto occorre suddividere la metà della superficie sferica su cui incide la radiazione solare in elementi a forma di anello con angolo θ fissato rispetto alla retta passante per il centro della sfera e parallela al vettore di Poynting della radiazione incidente; ciascuno di questi anellini sottende un angolo piccolo Δθ rispetto al centro della sfera.

L'area di uno di questi anellini, corrispondente a un angolo ϑ_i, è quindi $\Delta A_i = 2\pi r \,\text{sen}\vartheta_i \cdot r\,\Delta\vartheta = 2\pi r^2 \text{sen}\vartheta_i\,\Delta\vartheta$

Il flusso del vettore di Poynting attraverso questa superficie piccola è (tenuto conto dell'angolo ϑ_i tra il vettore $\vec{S}$ e la normale a questa superficie, presa con verso positivo verso l'interno della sfera):

$$\Delta\Phi_i = S\,\Delta A_i \cos\vartheta_i = 2\pi S r^2 \text{sen}\vartheta_i \cos\vartheta_i\,\Delta\vartheta,$$

con $S = |\vec{S}| = \dfrac{EB}{\mu_0}$, essendo $E = |\vec{E}|$ e $B = |\vec{B}|$.

Poiché $0 \leq \vartheta_i \leq \frac{\pi}{2}$ rad, il flusso complessivo di $\vec{S}$ attraverso la superficie anteriore della sferetta è:

$$\Phi = \sum_i \Delta\Phi_i = 2\pi S r^2 \sum_i \text{sen}\vartheta_i \cos\vartheta_i\,\Delta\vartheta =$$

$$= 2\pi S r^2 \int_0^{\pi/2} \text{sen}\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta = \cancel{2}\pi S r^2 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} (\text{sen}\vartheta)^2 \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \pi r^2 S = P \text{ (potenza elettromagnetica assorbita)}$$

Dunque, il flusso totale assorbito dalla sferetta di raggio r coincide con il flusso totale che verrebbe assorbito da un disco pieno di raggio r posizionato perpendicolarmente alla direzione del vettore $\vec{S}$.

Dall' esercizio precedente, vediamo che il modulo della forza di radiazione agente sulla sferetta e'

$$|\vec{F}_{em}| = \frac{P}{c} = \frac{\pi r^2 S}{c}$$

La particella si trova in equilibrio sotto l'azione della forza di attrazione gravitazionale del Sole e della forza di radiazione solare (forze dirette lungo la stessa retta, con versi opposti tra loro) quando risulta

$|\vec{F}_g| = |\vec{F}_{em}|$, cioe' quando:

$$G \frac{M_s m}{R^2} = \frac{\pi r^2 S}{c}$$

Dato che $m = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho$, l'equazione diventa:

$$\frac{G M_s}{R^2} \cdot \frac{4\cancel{\pi} r^{\cancel{3}}}{3} \rho = \frac{\cancel{\pi} \cancel{r^2} S}{c}$$, da cui otteniamo:

$$r = \frac{3 R^2 S}{4 G c M_s \rho} = \frac{3 \cdot (3{,}75 \times 10^{11}\ m)^2 \cdot (214\ W/m^2)}{4 \cdot \left(6{,}67428 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{Kg^2}\right) \cdot \left(2{,}99792458 \times 10^8 \frac{m}{s}\right) \cdot (1{,}989 \times 10^{30}\ kg)\left(1{,}5 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}\right)} =$$

$$= 3{,}7808 \times 10^{-7}\ m = 378{,}08\ nm$$

Serway, pr. 24.68

Nel 1965, Arno Penzias e Robert Wilson scoprirono la radiazione cosmica di microonde proveniente dalla espansione dell'Universo avvenuta dopo il Big Bang. Supponendo che la densità di energia di questa radiazione di fondo sia

$u = 4 \times 10^{-14}$ J/m^3, determinare la corrispondente ampiezza del campo elettrico.

Risulta $u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{max}^2$, dove $E_{max} = |\vec{E}|_{max}$.

Allora otteniamo

$$E_{max}^2 = \frac{2u}{\varepsilon_0}, \text{ e quindi}$$

$$E_{max} = \sqrt{\frac{2u}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (4 \times 10^{-14} \, J/m^3)}{(8{,}854187817 \times 10^{-12} \, C^2/N.m^2)}} = 95{,}054 \frac{mV}{m}$$

Serway, pr. 24.72

Una sorgente di microonde produce impulsi di radiazione con frequenza $f = 20\ GHz$ e durata $\Delta t = 1\ ns$.

Uno specchio parabolico di raggio $R = 6\ cm$ e' usato per focalizzare le microonde in un fascio parallelo.

La potenza media in ogni impulso e' $P_m = 25\ kW$.

a) Qual e' la lunghezza d'onda di queste microonde?

b) Qual e' l'energia totale contenuta in ogni impulso?

c) Calcolare la densita' di energia media in ogni impulso.

d) Determinare l'ampiezza del campo elettrico e magnetico di queste microonde.

e) Supponendo che il fascio impulsato colpisca una superficie assorbente, calcolare la forza esercitata sulla superficie nell'intervallo temporale Δt di durata dell'impulso.

a) Risulta $$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2{,}99792458 \times 10^8\ m/s}{20 \times 10^9\ Hz} = 1{,}4990\ cm$$

b) Energia totale contenuta in ogni impulso:

$$E_{TOT} = P_m \cdot \Delta t = (25 \times 10^3\ W) \cdot (10^{-9}\ s) = 25\ \mu J$$

c) Densità di energia media di ogni impulso:

$$u_{med} = \frac{S_{med}}{c} = \frac{P_m}{c\,\pi R^2} = \frac{25\times10^3\,W}{\left(2{,}99792458\times10^8\,\frac{m}{s}\right)\cdot\pi\cdot(0{,}06\,m)^2} =$$

$$= 7{,}3734\,\frac{mJ}{m^3}$$

d) Risulta $$E_{max} = \sqrt{\frac{2u_{med}}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2P_m}{\pi\varepsilon_0 c R^2}} = 4{,}0811\times10^4\,\frac{V}{m}$$

$$B_{max} = \sqrt{2\mu_0 u_{med}} = \sqrt{2\cdot\left(4\pi\times10^{-7}\,\frac{H}{m}\right)\cdot\left(7{,}3734\times10^{-3}\,\frac{J}{m^3}\right)} =$$

$$= 1{,}3613\times10^{-4}\,T$$

e) Se la superficie colpita dal fascio di microonde e' assorbente, di raggio pari al raggio del fascio, la pressione media esercitata dalla radiazione sulla superficie e':

$$p_{med} = \frac{S_{med}}{c} = u_{med},$$ per cui la forza media esercitata sulla superficie e':

$$F_{med} = p_{med}\cdot\pi R^2 = \pi\,(0{,}06\,m)^2\cdot\left(7{,}3734\times10^{-3}\,\frac{J}{m^3}\right) =$$

$$= 0{,}8339\times10^{-4}\,N = 83{,}39\,\mu N$$