CALCOLI CON DENSITÀ DISCRETE

[In questa parte considero v.a. discrete multidimensionali, e quindi con le notazioni di vettore $\underline{X} = (X_1, \_, X_n)$. Poi se la dimensione è 1 (quindi $n=1$ nel caso citato qui) si recupera il caso "non multidimensionale" come caso particolare.]

PROPOSIZIONE

Sia $\underline{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una v.a. discreta n-dimensionale. Poi sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione. Allora, se $S_{\underline{X}} \subset A$, la funzione $\underline{Y} = f \circ \underline{X} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è una $\overbrace{\text{v.a.}}^{\text{discreta}}$ m-dimensionale.

Inoltre per le densità discrete di $\underline{X}$ e $\underline{Y}$ vale la seguente uguaglianza:

$$p_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \sum_{\underline{x} \in S_{\underline{X}} : f(\underline{x}) = \underline{y}} p_{\underline{X}}(\underline{x}) \quad \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^m$$

lettere minuscole

$\underline{Y}$ è detta trasformazione della v.a. $\underline{X}$

DIMOSTRAZIONE

Per ogni $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$p_{\underline{Y}}(\underline{y}) = P(\underline{Y} = \underline{y}) = P\Big(\bigcup_{\substack{\underline{x} \in S_{\underline{X}}:\\ f(\underline{x}) = \underline{y}}} \{\underline{X} = \underline{x}\}\Big) =$$

unione al più numerabile di eventi disgiunti a due a due

$$= \sum_{\substack{\underline{x} \in S_{\underline{X}}:\\ f(\underline{x}) = \underline{y}}} P(\underline{X} = \underline{x}) = \sum_{\substack{\underline{x} \in S_{\underline{X}}:\\ f(\underline{x}) = \underline{y}}} p_{\underline{X}}(\underline{x})$$

lettere minuscole

che è l'uguaglianza che volevamo ottenere.

ESEMPIO (con $m=3$ e $n=2$)

Sia $p_{\underline{X}}$ definita come segue:

$p_{\underline{X}}(0,0,0)=\frac{2}{8}$; $p_{\underline{X}}(0,0,1)=p_{\underline{X}}(0,1,0)=p_{\underline{X}}(1,0,0)=p_{\underline{X}}(1,0,1)=p_{\underline{X}}(1,1,0)=p_{\underline{X}}(0,1,1)=\frac{1}{8}$

Inoltre sia $\underline{Y}=f(\underline{X})$, dove $f(\underline{x})=f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,\ x_2\cdot x_3)$ $\forall\, \underline{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$.

Vogliamo usare l'uguaglianza $p_{\underline{Y}}(\underline{y})=\sum_{\underline{x}:\ f(\underline{x})=\underline{y}} p_{\underline{X}}(\underline{x})$.

lettere minuscole

Osserviamo che $S_{\underline{Y}}\subset\{0,1,2\}\times\{0,1\}$.

Quindi calcoleremo $p_{\underline{Y}}(\underline{y})$ per $\underline{y}\in\{0,1,2\}\times\{0,1\}$ (sappiamo che $p_{\underline{Y}}(\underline{y})=0$ se $\underline{y}\notin S_{\underline{Y}}$).

Quindi:

$$p_{\underline{Y}}(0,0) = p_{\underline{X}}(0,0,0) + p_{\underline{X}}(0,0,1) = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$p_{\underline{Y}}(0,1) = 0$$

SOMMA = 1
ok

$$p_{\underline{Y}}(1,0) = p_{\underline{X}}(0,1,0) + p_{\underline{X}}(1,0,0) + p_{\underline{X}}(1,0,1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$p_{\underline{Y}}(1,1) = p_{\underline{X}}(0,1,1) = \frac{1}{8}$$

$$p_{\underline{Y}}(2,0) = p_{\underline{X}}(1,1,0) = \frac{1}{8}$$

$$p_{\underline{Y}}(2,1) = 0$$

ESEMPIO (con $m=2$ e $n=1$) essendo $n=1$ si può scrivere Y anziché $\underline{Y}$

Supponiamo di avere $p_{\underline{X}}(0,0)=\frac{2}{20}$ $p_{\underline{X}}(0,1)=p_{\underline{X}}(1,0)=p_{\underline{X}}(1,1)=\frac{3}{20}$

$p_{\underline{X}}(0,2)=p_{\underline{X}}(2,0)=\frac{1}{20}$, $p_{\underline{X}}(2,2)=\frac{7}{20}$

Sia $Y=(X_1+X_2)^2$; allora $S_Y=\{0,1,4,16\}$, ed inoltre

$p_Y(0)=p_{\underline{X}}(0,0)=\frac{2}{20}$

$p_Y(1)=p_{\underline{X}}(0,1)+p_{\underline{X}}(1,0)=\frac{3}{20}+\frac{3}{20}=\frac{6}{20}$

$p_Y(4)=p_{\underline{X}}(1,1)+p_{\underline{X}}(0,2)+p_{\underline{X}}(2,0)=\frac{3}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{5}{20}$

$p_Y(16)=p_{\underline{X}}(2,2)=\frac{7}{20}$

SOMMA = 1

ok

UNA CLASSE GENERALE DI ESEMPI (SOMME DI V.A.)

Vogliamo trattare il caso in cui $m=1$ e $f(x_1,\dots,x_n)=x_1+\dots+x_n$ $\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

Quindi si ha

$$p_Y(y)=\sum_{\substack{\underline{x}\in S_{\underline{X}}:\\ x_1+\dots+x_n=y}} p_{\underline{X}}(\underline{x}).$$

lettere minuscole

Vedremo ora alcuni casi specifici con $n=2$; in particolare, per alcuni casi tra questi, il passaggio da $n=2$ a n generico sarà semplice procedendo per induzione.

CASO SPECIFICO 1 (lancio di due dadi equi)

$$p_{\underline{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{36} \qquad \forall\, \underline{x} = (x_1, x_2) \in \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\}$$

$$Y = X_1 + X_2 \qquad S_Y = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$p_Y(y) = \sum_{\substack{\underline{x} \in \{1,\dots,6\} \times \{1,\dots,6\} \\ x_1 + x_2 = y}} p_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{\#\{(x_1, x_2) :\ x_1 + x_2 = y\}}{36}$$

e recuperiamo i risultati già visti in passato:

$$p_Y(2) = p_Y(12) = \frac{1}{36}, \quad p_Y(3) = p_Y(11) = \frac{2}{36}, \quad p_Y(4) = p_Y(10) = \frac{3}{36}, \quad p_Y(5) = p_Y(9) = \frac{4}{36},$$

$$p_Y(6) = p_Y(8) = \frac{5}{36}, \quad p_Y(7) = \frac{6}{36}.$$

$$\boxed{\text{SOMMA} = 2 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{2}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 2 \cdot \frac{4}{36} + 2 \cdot \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{2+4+6+8+10+6}{36} = \frac{36}{36} = 1 \ \text{ok}}$$

CASO SPECIFICO 2 (SOMMA DI 2 BINOMIALI INDIPENDENTI CON LO STESSO PARAMETRO p)

$X_1 \sim Bin(n_1, p)$, $X_2 \sim Bin(n_2, p)$ indip. $\Rightarrow$ $p_{\underline{X}}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)\, p_{X_2}(x_2) = \binom{n_1}{x_1} p^{x_1} (1-p)^{n_1 - x_1} \binom{n_2}{x_2} p^{x_2} (1-p)^{n_2 - x_2} =$

$$= \binom{n_1}{x_1}\binom{n_2}{x_2} p^{x_1+x_2} (1-p)^{n_1+n_2-(x_1+x_2)}$$

$\forall (x_1, x_2) \in \{0,1,\dots,n_1\} \times \{0,1,\dots,n_2\}$.

$S_Y = \{0, 1, \dots, n_1+n_2\}$

$$\boxed{p_Y(y)} = \sum_{\substack{(x_1,x_2):\\ x_1+x_2=y}} \binom{n_1}{x_1}\binom{n_2}{x_2} p^{\overbrace{x_1+x_2}^{=y}} (1-p)^{n_1+n_2-(x_1+x_2)} = p^y (1-p)^{n_1+n_2-y} \underbrace{\sum_{\substack{(x_1,x_2):\\ x_1+x_2=y}} \binom{n_1}{x_1}\binom{n_2}{x_2}}_{=\binom{n_1+n_2}{y} \text{ per formule viste per l'ipergeometrica}} = \boxed{\binom{n_1+n_2}{y} p^y (1-p)^{n_1+n_2-y}}$$

$(\forall y \in S_Y)$

COMMENTO

$Y = X_1 + X_2 \sim BIN(n_1+n_2, p)$

ALTRI COMMENTI (1ª parte)

Il risultato si estende al caso di m addendi indipendenti:

$$\left.\begin{cases} X_1 \sim BIN(n_1, p) \\ \vdots \\ X_m \sim BIN(n_m, p) \end{cases}\right\} \text{indip.} \implies X_1 + \dots + X_m \sim BIN(n_1 + \dots + n_m, p)$$

Il risultato non sorprende: ognuna delle v.a. X_i (per $i \in \{1, \dots, m\}$) conta il numero di successi su n_i prove indipendenti, tutte con probabilità di successo p; quindi, se consideriamo la somma (e gli addendi sono indipendenti), è come se contassimo il numero di successi su $n_1 + \dots + n_m$ prove tutte con probabilità di successo p. Quindi è importante che il parametro p sia sempre lo stesso.

Senza questa ipotesi il risultato non è vero (vedere la prossima slide).

ALTRI COMMENTI (2ª parte) un po' difficile

Un controesempio senza l'ipotesi di indipendenza è il seguente:

Sia $p \in (0,1)$, cioè $p \neq 0$ e $p \neq 1$, $n = 2$, $X_1 \sim BIN(n,p)$, $X_2 = X_1$.

Quindi in particolare $X_2 \sim BIN(n,p)$. Allora si ha:

$$\begin{cases} P(\{X_1=0\} \cap \{X_2=0\}) = P(\{X_1=0\}) = (1-p)^n \\ P(X_1=0)\,P(X_2=0) = (1-p)^n (1-p)^n = (1-p)^{2n} \end{cases}$$
diversi tra loro $\Longrightarrow$ X_1 e X_2 non sono indipendenti.

$X_1+X_2 = 2X_1$ e quindi $P(X_1+X_2 \in \{\text{numeri dispari}\}) = 0$; quindi $X_1+X_2 \sim BIN(\underbrace{n+n}_{=2n}, p)$ è falsa perché tutti i valori in $\{0,1,2,\ldots,2n-1,2n\}$ dovrebbero avere probabilità positiva.

CASO SPECIFICO 3 (SOMMA DI 2 POISSONIANE INDIPENDENTI)

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \sim \text{POISSON}(\lambda_1) \\ X_2 \sim \text{POISSON}(\lambda_2) \end{array}\right\} \text{INDIP.} \Longrightarrow p_{\underline{X}}(x_1,x_2) = p_{X_1}(x_1)\, p_{X_2}(x_2) = \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{x_2}}{x_2!} e^{-\lambda_2}$$

$$= \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!} \frac{\lambda_2^{x_2}}{x_2!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \quad \forall (x_1,x_2) \in \{0,1,2,\dots\} \times \{0,1,2,\dots\}.$$

$$S_Y = \{0,1,2,\dots\}$$

$$\boxed{p_Y(y)} = \sum_{\substack{(x_1,x_2):\\ x_1+x_2=y}} \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!} \frac{\lambda_2^{x_2}}{x_2!} \boxed{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{x_1=0}^{y} \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!} \frac{\lambda_2^{y-x_1}}{(y-x_1)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y!} \sum_{x_1=0}^{y} \underbrace{\frac{y!}{x_1!\,(y-x_1)!}}_{=\binom{y}{x_1}} \lambda_1^{x_1} \lambda_2^{y-x_1}$$

$$\underset{\text{BINOMIO DI NEWTON}}{=} \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y!} (\lambda_1+\lambda_2)^y = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^y}{y!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

COMMENTO

$$Y = X_1 + X_2 \sim \text{POISSON}(\lambda_1+\lambda_2)$$

ALTRI COMMENTI

Il risultato si estende al caso di n addendi indipendenti:

$$\left.\begin{cases} X_1 \sim \text{POISSON}(\lambda_1) \\ \vdots \\ X_n \sim \text{POISSON}(\lambda_n) \end{cases}\right\} \text{indip.} \implies X_1 + \dots + X_n \sim \text{POISSON}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$$

simile a quello per le Binomiali visto prima

Senza l'ipotesi di indipendenza il risultato non è vero in generale.

Un controesempio è il seguente: $n=2$, $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e $X_2 = X_1$. Allora $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

$$\begin{cases} P(\{X_1=0\} \cap \{X_2=0\}) = P(X_1=0) = e^{-\lambda} \\ P(X_1=0)\,P(X_2=0) = e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda} = e^{-2\lambda} \end{cases} \implies X_1 \text{ e } X_2 \text{ non sono indipendenti.}$$

$X_1 + X_2 = 2X_1$ e quindi $P(X_1+X_2 \in \{\text{numeri dispari}\}) = 0$; quindi $X_1 + X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda+\lambda) = \text{Poisson}(2\lambda)$ è falsa perché tutti gli interi non negativi dovrebbero avere probabilità positive.

ESERCIZIO

Siano $p_1, p_2 \in (0,1)$. Consideriamo la seguente densità congiunta:

$$p_{\underline{X}}(x_1, x_2) = (1-p_2)^{x_2 - 1} (1-p_1)^{x_1 - x_2} p_1 p_2 \qquad \text{per } x_1 \geq x_2 \geq 1 \text{ interi}$$

lettere minuscole

1) Verificare che la definizione di $p_{\underline{X}}$ è ben posta.

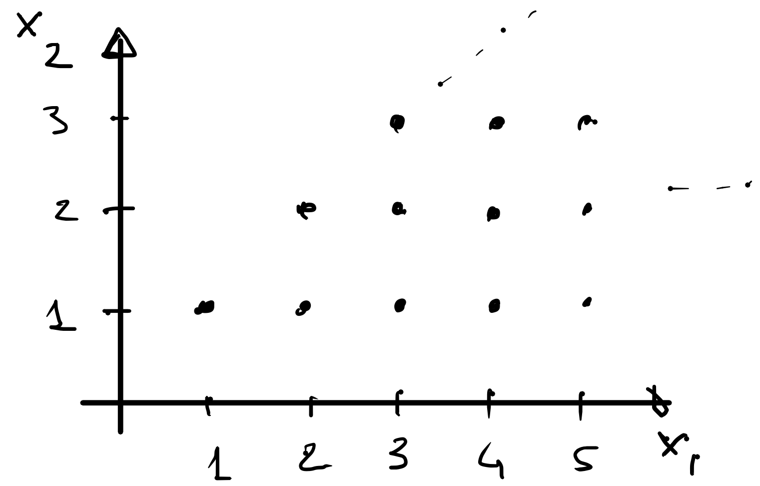
2) Calcolare la densità marginale di X_2

3) Dire se X_1 e X_2 sono indipendenti.

4) Calcolare $P(X_1 + X_2 \leq 4)$

5) Sia $p_1 = p_2 = p$. Calcolare la densità marginale di X_1.

SVOLGIMENTO



1) Si deve verificare che $\sum_{x_1 \geq x_2 \geq 1} p_{\underline{X}}(x_1, x_2) = 1$.

Due possibilità:

→ fissare x_1 e sommare sulle verticali (variando x_2): $\sum_{x_1=1}^{\infty}\left(\sum_{x_2=1}^{x_1} p_{\underline{X}}(x_1,x_2)\right) = 1$

→ fissare x_2 e sommare sulle orizzontali (variando x_1): $\sum_{x_2=1}^{\infty}\left(\sum_{x_1=x_2}^{\infty} p_{\underline{X}}(x_1,x_2)\right) = 1$

Per usare le formule sulle serie geometriche meglio la seconda possibilità.

Quindi verificheremo che

$$\sum_{x_2=1}^{\infty} \sum_{x_1=x_2}^{\infty} (1-p_2)^{x_2-1}(1-p_1)^{x_1-x_2}\, p_1 p_2 = 1.$$

Si ha

$$p_1 p_2 \sum_{x_2=1}^{\infty} (1-p_2)^{x_2-1} \underbrace{\sum_{x_1=x_2}^{\infty} (1-p_1)^{x_1-x_2}}_{\text{Σ qui } h=x_1-x_2 \text{ per } x_2 \text{ fissato}} = p_1 p_2 \sum_{x_2=1}^{\infty} (1-p_2)^{x_2-1} \underbrace{\sum_{h=0}^{\infty} (1-p_1)^h}_{= \frac{(1-p_1)^0}{1-(1-p_1)} = \frac{1}{p_1}} =$$

$$= p_1 p_2 \sum_{x_2=1}^{\infty} (1-p_2)^{x_2-1} \cdot \frac{1}{p_1} = \cancel{p_1} p_2 \cdot \frac{1}{\cancel{p_1}} \sum_{x_2=1}^{\infty} (1-p_2)^{x_2-1} = p_2 \cdot \frac{(1-p_2)^0}{1-(1-p_2)} = p_2 \cdot \frac{1}{\cancel{1}-\cancel{1}+p_2} = p_2 \cdot \frac{1}{p_2} = 1$$

Ok

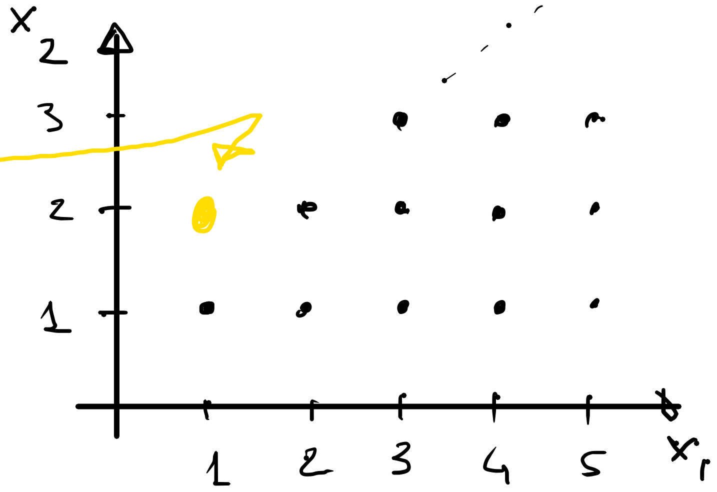
2) Per $x_2 \geq 1$ intero $p_{X_2}(x_2) = \sum_{x_1=x_2}^{\infty} (1-p_2)^{x_2-1} (1-p_1)^{x_1-x_2} p_1 p_2 = p_1 p_2 (1-p_2)^{x_2-1} \underbrace{\sum_{x_1=x_2}^{\infty} (1-p_1)^{x_1-x_2}}_{= \sum_{h=0}^{\infty} (1-p_1)^h = \frac{1}{p_1}} =$

ancora $h = x_1 - x_2$ e stessi calcoli visti prima

$$= \cancel{p_1} p_2 (1-p_2)^{x_2-1} \cdot \frac{1}{\cancel{p_1}} = (1-p_2)^{x_2-1} p_2 .$$

<u>OSS</u>. $X_2 \sim \text{GeoTraslata}(p_2)$

3) I punti del grafico non costituiscono un prodotto cartesiano.



Ci sono infiniti "punti mancanti"; uno tra questi è (1,2)

e, a partire da questo, si vede che X_1 e X_2 non sono indipendenti.

Infatti

$$\underbrace{p_{\underline{X}}(1,2)}_{\substack{=0 \\ \text{(ovvio)}}} \neq \underbrace{p_{X_1}(1)\, p_{X_2}(2)}_{\substack{\neq 0 \\ \text{perché}}}$$

$$p_{X_1}(1) = p_{\underline{X}}(1,1) = (1-p_2)^{1-1}(1-p_1)^{1-1} p_1 p_2 = p_1 p_2 \neq 0$$

(perché $p_1 > 0$ e $p_2 > 0$)

$$p_{X_2}(2) = (1-p_2)^{2-1} p_2 = (1-p_2)p_2 \neq 0$$

Vedere risposta alla 2)

perché $0 < p_2 < 1$

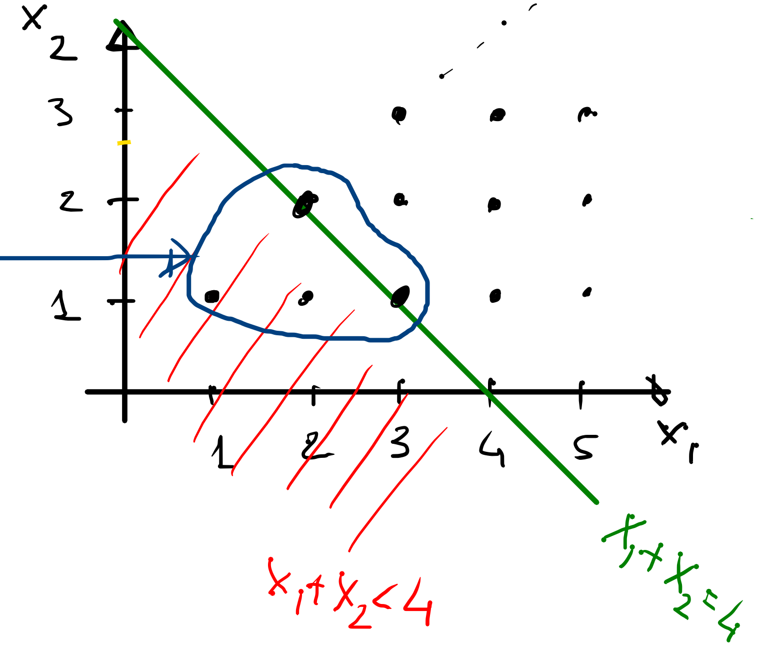
4) $P(X_1+X_2\le 4) = p_{\underline{X}}(1,1)+p_{\underline{X}}(2,1)+p_{\underline{X}}(3,1)+p_{\underline{X}}(2,2)=$

$=(1-p_2)^{1-1}(1-p_1)^{1-1}p_1p_2+(1-p_2)^{1-1}(1-p_1)^{2-1}p_1p_2+$

$+(1-p_2)^{1-1}(1-p_1)^{3-1}p_1p_2+(1-p_2)^{2-1}(1-p_1)^{2-2}p_1p_2=$

$=p_1p_2\left[1+1-p_1+(1-p_1)^2+1-p_2\right]$

$X_1+X_2\le 4$ in questi punti



5) In generale la marginale di X_1 è la seguente:

- per ogni $x_1\ge 1$ intero $p_{X_1}(x_1)=\sum_{x_2=1}^{x_1}(1-p_2)^{x_2-1}(1-p_1)^{x_1-x_2}p_1p_2=\underline{p_1p_2\sum_{x_2=1}^{x_1}(1-p_2)^{x_2-1}(1-p_1)^{x_1-x_2}}$.

Forse si può esplicitare ulteriormente ...

Nell'esercizio ci viene detto di considerare $p_1=p_2=p$; quindi si ha

l'addendo non dipende da x_2

- per ogni $x_1\ge 1$ intero $\boxed{p_{X_1}(x_1)}=p\cdot p\sum_{x_2=1}^{x_1}(1-p)^{\cancel{x_2}-1+x_1-\cancel{x_2}}=p^2\sum_{x_2=1}^{x_1}(1-p)^{x_1-1}=\boxed{p^2x_1(1-p)^{x_1-1}}$.

OSSERVAZIONE

La densità $p_{X_1}(x_1) = p^2 x_1 (1-p)^{x_1-1}$ per $x_1 \geq 1$ intero non fa riferimento alle distribuzioni discrete notevoli che abbiamo visto. Ci si può chiedere: "Come verificare che $\sum_{x_1=1}^{\infty} p_{X_1}(x_1) = 1$?".

Procediamo così. Si sa che

$$\sum_{x_1=1}^{\infty} (1-p)^{x_1} = \frac{(1-p)^1}{1-(1-p)} = \frac{1-p}{\cancel{1}-\cancel{1}+p} = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1.$$

Possiamo derivare membro a membro rispetto a p: $\frac{d}{dp}\left(\sum_{x_1=1}^{\infty} (1-p)^{x_1}\right) = \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p} - 1\right)$

$$\Rightarrow \quad \sum_{x_1=1}^{\infty} x_1 (1-p)^{x_1-1} (-1) = -p^{-1-1}$$

per serie di potenze (nel raggio di convergenza) derivata della serie = serie delle derivate

$$\Rightarrow -\sum_{x_1=1}^{\infty} x_1 (1-p)^{x_1-1} = -\frac{1}{p^2} \Rightarrow p^2 \sum_{x_1=1}^{\infty} x_1 (1-p)^{x_1-1} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{x_1=1}^{\infty} p^2 x_1 (1-p)^{x_1-1} = 1$$

Ok

ESERCIZIO

Consideriamo la seguente densità congiunta:

$$p_{\underline{X}}(x_1, x_2) = c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \left(\frac{3}{4}\right)^{x_2} \qquad \text{per } x_1, x_2 \geq 1 \text{ interi}$$

dove $c > 0$ è una costante determinare.

1) Trovare il valore di c.

2) Calcolare $P(X_2 = 2X_1)$.

3) Calcolare $P(X_2 \geq 3X_1)$.

SVOLGIMENTO

OSS. Si ha il prodotto tra due serie geometriche

1) Si deve avere $\sum_{x_1,x_2\geq 1} c\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\left(\frac{3}{4}\right)^{x_2}=1.$

Quindi si ha

$$1=c\sum_{x_1,x_2\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\left(\frac{3}{4}\right)^{x_2}=c\sum_{x_1=1}^{\infty}\sum_{x_2=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\left(\frac{3}{4}\right)^{x_2}=c\sum_{x_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\sum_{x_2=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{x_2}=$$

$$=c\,\frac{(1/2)^1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{(3/4)^1}{1-\frac{3}{4}}=c\cdot\frac{\cancel{1/2}}{\cancel{1/2}}\,\frac{3/4}{1/4}=c\cdot 3$$

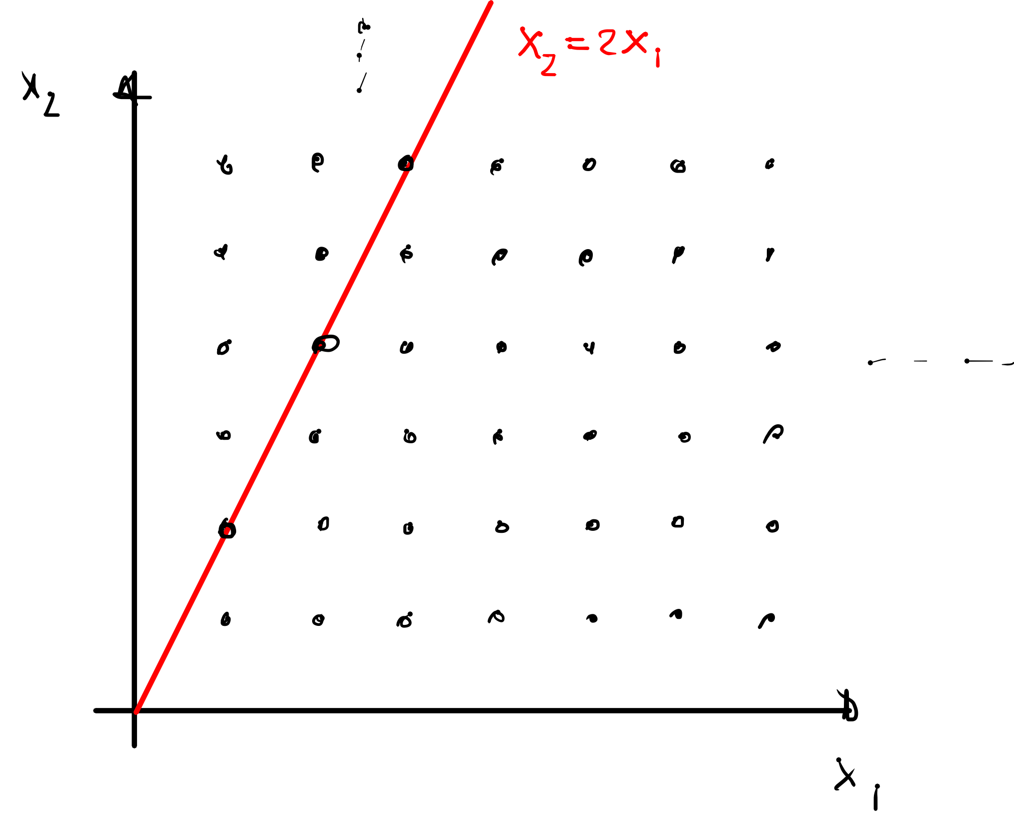
$$\Rightarrow\quad 3c=1\quad\Rightarrow\quad c=\frac{1}{3}$$

si sostituisce a c il valore trovato sopra

OSS. Nelle prossime domande scriveremo $p_{\underline{X}}(x_1,x_2)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\left(\frac{3}{4}\right)^{x_2}$ per $x_1,x_2\geq 1$ interi.

2) $P(X_2=2X_1) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{\underline{X}}(k,2k) =$

BISOGNA SOMMARE I VALORI DI $p_{\underline{X}}$ NEI PUNTI DELLA RETTA (SONO INFINITI)



$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{2k}} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^k =$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^k = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{9}{32}\right)^k}_{1} =$$

$$= \frac{1}{3} \, \frac{(9/32)^1}{1-\frac{9}{32}} = \frac{1}{3} \, \frac{9/32}{\frac{32-9}{32}} = \frac{1}{3} \, \frac{9/\cancel{32}}{23/\cancel{32}} = \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{3} \cdot 23} = \frac{3}{23}$$

Oss. Qui compaiono due potenze. Bisogna fare dei passaggi per far comparire un'unica potenza come accade qui e poi si usa la formula della serie geometrica.

3) $P(X_2 \geq 3X_1) =$

BISOGNA SOMMARE I VALORI DI p_X NEI PUNTI DEL SEMIPIANO "SOPRA" LA RETTA

$$= \sum_{x_1=1}^{\infty} \sum_{x_2=3x_1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \left(\frac{3}{4}\right)^{x_2}$$

SOMMIAMO "PRENDENDOLI IN VERTICALE" PER USARE LA FORMULA DELLA SERIE GEOMETRICA

$$= \frac{1}{3} \sum_{x_1=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \sum_{x_2=3x_1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{x_2} \overset{A}{=}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{x_1=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \frac{(3/4)^{3x_1}}{1-\frac{3}{4}} \overset{A}{=}$$

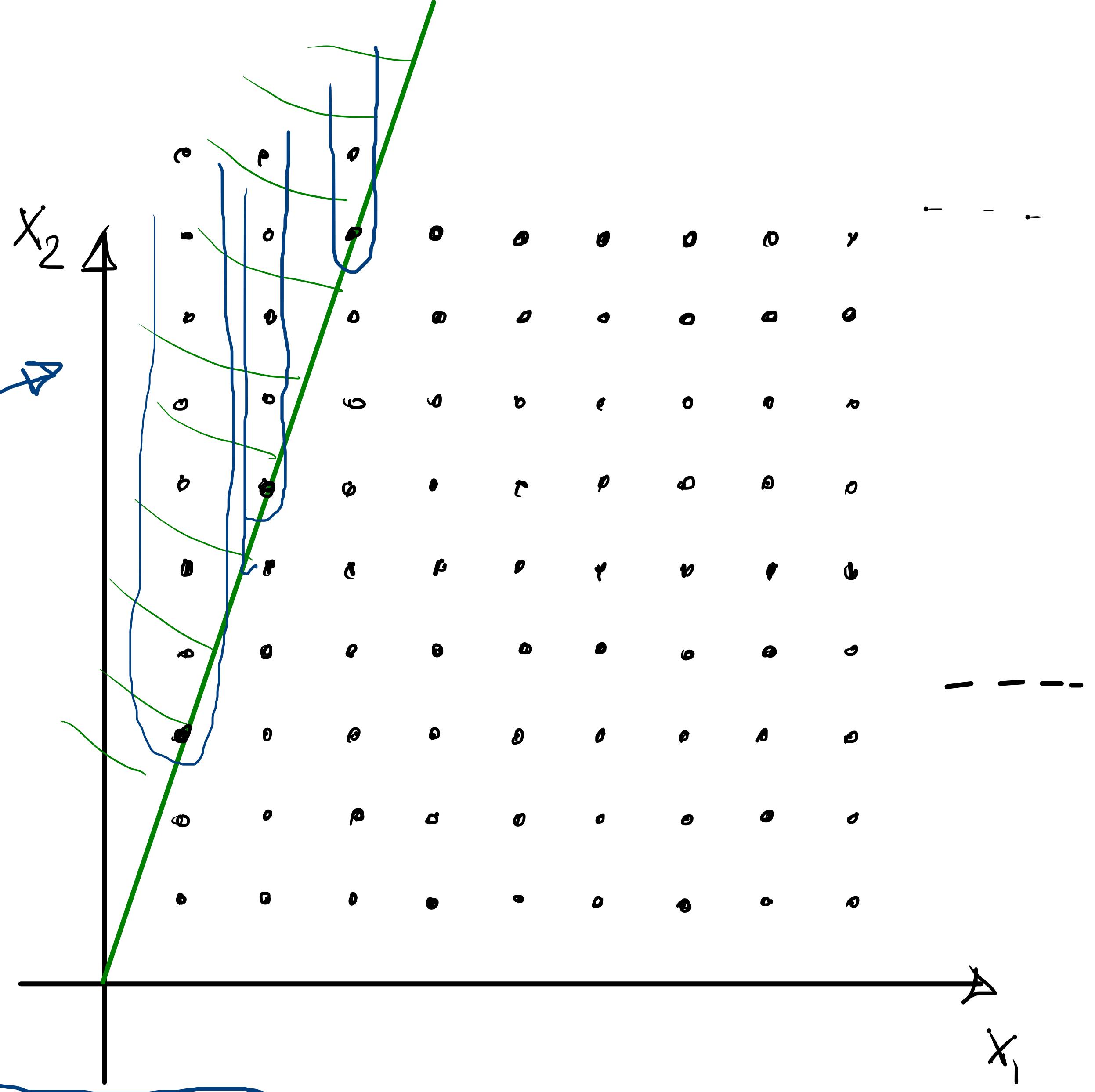
BISOGNA PRIMA RISOLVERE LA SERIE "PIÙ INTERNA" QUELLA RISPETTO A X_2 PER X_1 FISSATO

$$= \frac{1/3}{1-\frac{3}{4}} \sum_{x_1=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\right)^{x_1}$$

BISOGNA AVERE UN'UNICA POTENZA

$$= \frac{1/3}{1/4} \sum_{x_1=1}^{\infty} \left(\frac{27}{128}\right)^{x_1} =$$

$$= \frac{4}{3} \frac{\left(27/128\right)^{1}}{1-\frac{27}{128}} = \frac{4}{3} \frac{27/128}{\frac{128-27}{128}} = \frac{4}{\cancel{3}} \frac{\cancel{27}^{\,9}/\cancel{128}}{101/\cancel{128}} = \frac{36}{101}.$$



ESERCIZIO

Consideriamo la seguente densità congiunta

$$p_{\underline{X}}(x_1, x_2) = \left(\frac{3}{4}\right)^{x_1 - 1} \frac{1}{4} \cdot \frac{2^{x_2}}{x_2!} e^{-2} \qquad \text{per } x_1 \geq 1 \text{ e } x_2 \geq 0 \text{ interi.}$$

1) Calcolare $P(X_2 \leq X_1 - 1)$

2) Calcolare $P(X_1 \leq 2 \mid X_2 \leq X_1 - 1)$

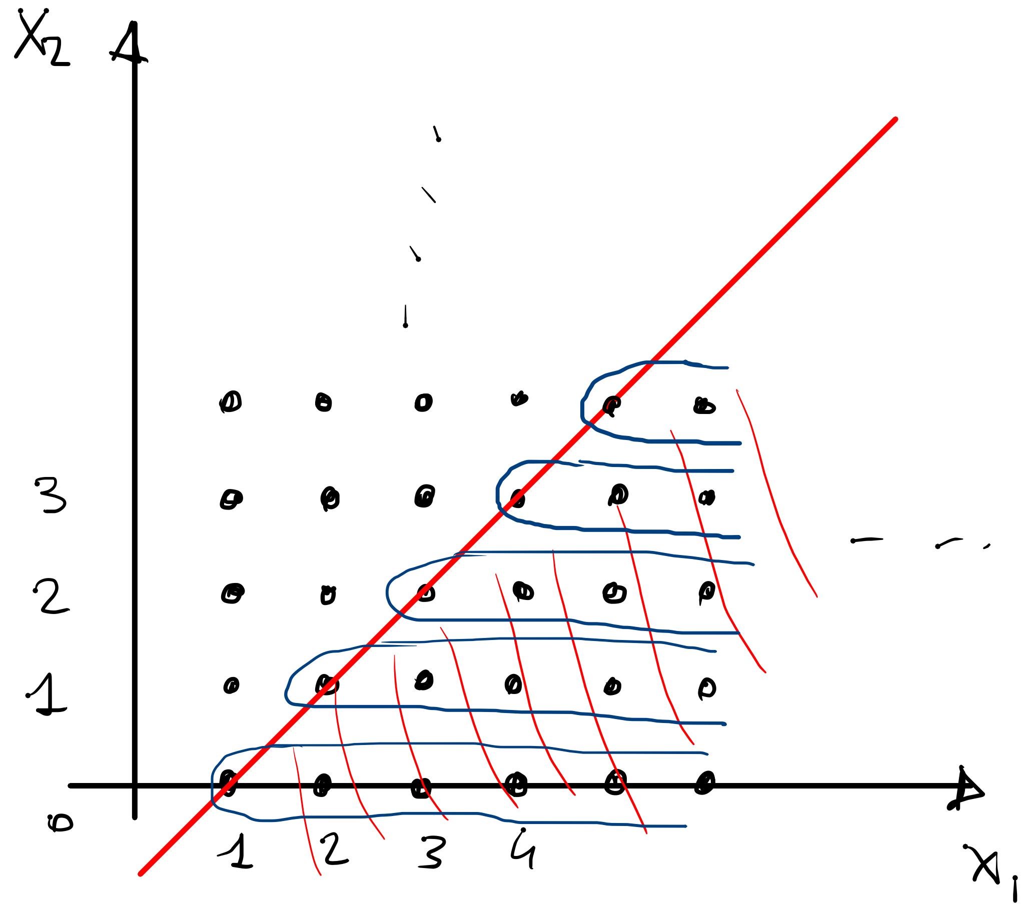
3) Trovare le densità marginali di X_1 e X_2 e dire se X_1 e X_2 sono indipendenti.

1) $P(X_2 \leq X_1 - 1) \stackrel{?}{=}$

BISOGNA SOMMARE I VALORI DI $p_{\underline{X}}$ "SOTTO" LA RETTA

$$= \sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_1=x_2+1}^{\infty} p_{\underline{X}}(x_1, x_2)$$

CONVIENE "PRENDERLI IN ORIZZONTALE"



$$= \sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_1=x_2+1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{x_1-1} \frac{1}{4} \cdot \frac{2^{x_2}}{x_2!} e^{-2} =$$

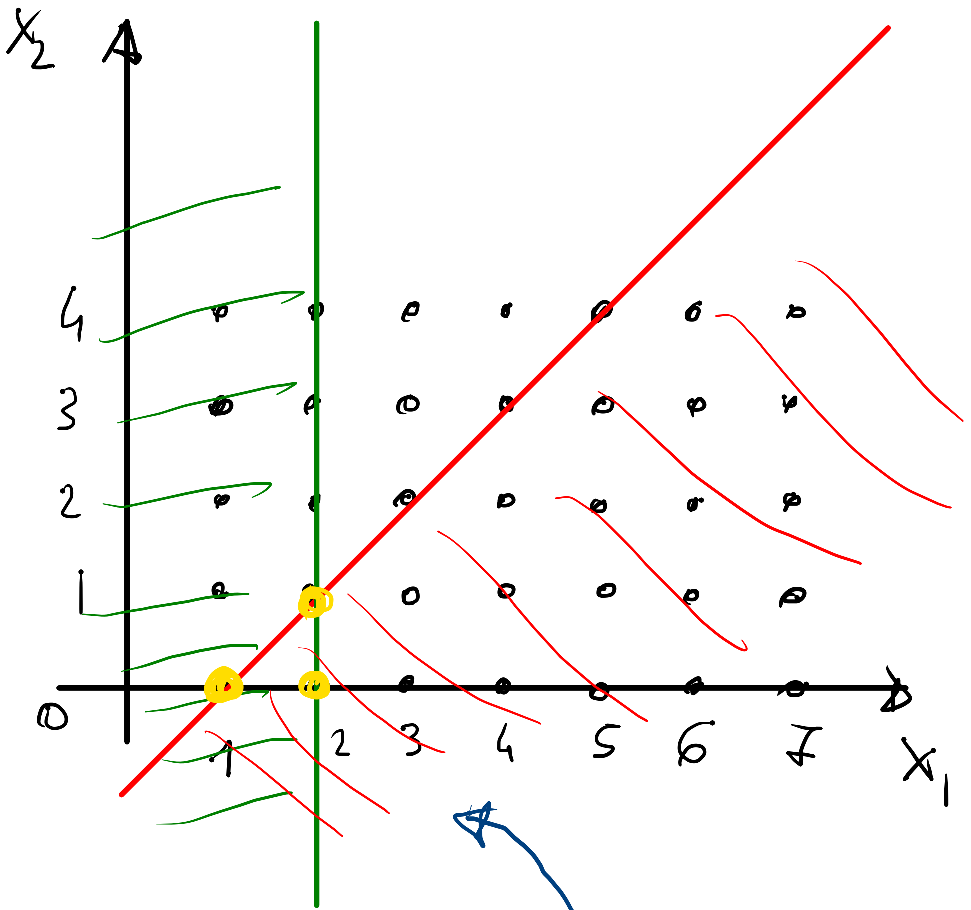
$$= \frac{e^{-2}}{4} \sum_{x_2=0}^{\infty} \frac{2^{x_2}}{x_2!} \underbrace{\sum_{x_1=x_2+1} \left(\frac{3}{4}\right)^{x_1-1}}_{= \frac{(3/4)^{x_2}}{1-\frac{3}{4}}} = \frac{e^{-2}}{4} \sum_{x_2=0}^{\infty} \frac{2^{x_2}}{x_2!} \frac{(3/4)^{x_2}}{1-\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{e^{-2}}{4} \frac{1}{1-\frac{3}{4}} \underbrace{\sum_{x_2=0}^{\infty} \frac{\left(\cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{4}_2}\right)^{x_2}}{x_2!}}_{\to\, = e^{3/2}\ \text{(serie esponenziale)}} = \frac{e^{-2}}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cancel{4}}} e^{3/2} = e^{-2} e^{3/2} = e^{-2+\frac{3}{2}} = e^{\frac{-4+3}{2}} = e^{-1/2}.$$

2) $P(X_1 \leq 2 \mid X_2 \leq X_1 - 1) =$

$$= \frac{P(\{X_1 \leq 2\} \cap \{X_2 \leq X_1 - 1\})}{P(X_2 \leq X_1 - 1)} =$$

calcolata nella risposta precedente



L'intersezione è ristretta ai 3 punti in giallo

$$= \frac{p_{\underline{X}}(1,0) + p_{\underline{X}}(2,0) + p_{\underline{X}}(2,1)}{e^{-1/2}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{1-1} \frac{1}{4} \frac{2^0}{0!} e^{-2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2-1} \frac{1}{4} \frac{2^0}{0!} e^{-2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2-1} \frac{1}{4} \frac{2^1}{1!} e^{-2}}{e^{-1/2}}$$

$$= \left(\frac{1}{4} e^{-2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} e^{-2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 e^{-2}\right) \cdot e^{1/2} = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{6}{16}\right) e^{-2} e^{1/2} = \frac{4+3+6}{16} e^{-2+\frac{1}{2}} = \frac{13}{16} e^{\frac{-4+1}{2}}$$

$$= \frac{13}{16} e^{-3/2}.$$

3) Per ogni $x_1 \geq 1$ intero

$$p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2=0}^{\infty} p_{\underline{X}}(x_1,x_2) = \sum_{x_2=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{x_1-1} \frac{1}{4} \frac{2^{x_2}}{x_2!} e^{-2} = \frac{e^{-2}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{x_1-1} \underbrace{\sum_{x_2=0}^{\infty} \frac{2^{x_2}}{x_2!}}_{= e^{2} \text{ (serie esponenziale)}} = \frac{\cancel{e^{-2}}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{x_1-1} \cancel{e^{2}}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{x_1-1} \frac{1}{4}$$

<u>oss</u> $X_1 \sim \text{GeoTraslata}\left(p=\frac{1}{4}\right)$

Per ogni $x_2 \geq 0$ intero

$$p_{X_2}(x_2) = \sum_{x_1=1}^{\infty} p_{\underline{X}}(x_1,x_2) = \sum_{x_1=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{x_1-1} \frac{1}{4} \frac{2^{x_2}}{x_2!} e^{-2} = \frac{2^{x_2}}{x_2!} \frac{e^{-2}}{4} \underbrace{\sum_{x_1=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{x_1-1}}_{= \frac{(3/4)^0}{1-\frac{3}{4}}} = \frac{2^{x_2}}{x_2!} \frac{e^{-2}}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{2^{x_2}}{x_2!} \frac{e^{-2}}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{1/\cancel{4}} = \frac{2^{x_2}}{x_2!} e^{-2}$$

<u>oss</u> $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda=2)$

Quindi si ha $p_{\underline{X}}(x_1,x_2) = p_{X_1}(x_1)\, p_{X_2}(x_2) \quad \forall (x_1,x_2)$. Allora X_1 e X_2 sono indipendenti.