Esercizio

Tramite l'algoritmo descritto valutare in $t=1/2$ e $t=4$ il pol. d'interp. di $f(x)=x\sqrt{x}$ sui nodi $x_0=0, x_1=1, x_2=4, x_3=9$

Soluzione

calcolo il pol. d'interpolazione in forma di Newton con la tab. delle diff. divise

$$\begin{array}{llll} \underline{f[x_0]} & & & \\ f[x_1] & \underline{f[x_0,x_1]} & & \\ f[x_2] & f[x_0,x_2] & \underline{f[x_0,x_1,x_2]} & \\ f[x_3] & f[x_0,x_3] & f[x_0,x_1,x_3] & \underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3]} \end{array}$$

$f[x_0]=0$

$f[x_1]=1$

$f[x_2]=8$

$f[x_3]=27$

$$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=1$$

$$f[x_0,x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_0]}{x_2-x_0}=2$$

$$f[x_0,x_3]=\frac{f[x_3]-f[x_0]}{x_3-x_0}=3$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}=\frac{1}{3}$$

$$f[x_0,x_1,x_3]=\frac{f[x_0,x_3]-f[x_0,x_1]}{x_3-x_1}=\frac{1}{4}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_0,x_1,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_2}=-\frac{1}{60}$$

Verifichiamo che il pol. d'interpol sia corretto

$$p(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$p(x)=0+x+\frac{1}{3}x(x-1)-\frac{1}{60}x(x-1)(x-2)=x-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{60}x^3+\frac{1}{20}x^2-\frac{1}{30}x=$$

$$=0{,}6333333\,x+0{,}3833333\,x^2-0{,}0166666\,x^3$$

$h_3=f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

$h_2=f[x_0,x_1,x_2]+(t-x_2)h_3$

$h_1=f[x_0,x_1]+(t-x_1)h_2$

$h_0=f[x_0]+(t-x_0)h_1$

per $t = \frac{1}{2} \Rightarrow h_3 = -\frac{1}{60}$

$h_2 = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2} - 4\right)\left(-\frac{1}{60}\right) = 0,3916666$

$h_1 = 1 + \left(\frac{1}{2} - 1\right) 0,3916666 = 0,8041666$

$h_0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0,8041666 = 0,4020833$

per $t = 4$ $h_3 = -\frac{1}{60}$

$h_2 = \frac{1}{3} + (4 - 4)\left(-\frac{1}{60}\right) = \frac{1}{3}$

$h_1 = 1 + (4 - 1)\frac{1}{3} = 2$

$h_0 = 0 + 4 \cdot 2 = 8$