Aggiunta di un nodo d'interpolazione

La forma di Newton e' molto utile quando ai dati d'interpolazione $(x_0,y_0),\dots,(x_n,y_n)$ ne viene aggiunto un nuovo nodo (x_{n+1},y_{n+1}) con $x_{n+1} \neq x_0,\dots,x_n$

Infatti, detta $f(x)$ una qualsiasi funzione t.c. $f(x_i)=y_i \ \forall i=0,\dots,n$, il pol. d'interp. dei dati "vecchi" $(x_0,y_0),\dots,(x_n,y_n)$ e'

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\cdot\dots\cdot(x-x_{n-1})$$

mentre il pol. d'interp. dei dati "nuovi" $(x_0,y_0),\dots,(x_{n+1},y_{n+1})$ e'

$$q(x) = p(x) + \boxed{f[x_0,\dots,x_n,x_{n+1}](x_0,y_0)\cdot\dots\cdot(x_n,y_n)} \qquad (*)$$

Considerazioni

Avendo a disposizione $p(x)$ in forma di Newton, sono noti i coefficienti rossi e quindi basta calcolare $f[x_0,\dots,x_{n+1}]$ per ottenere la forma di Newton di $q(x)$

caso $n=3$, $n+1=4$

$f[x_0]$				
$f[x_1]$	$f[x_0,x_1]$			
$f[x_2]$	$f[x_0,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		
$f[x_3]$	$f[x_0,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
$f[x_4]$	$f[x_0,x_4]$	$f[x_0,x_1,x_4]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_4]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$

il calcolo di $f[x_0,\dots,x_n,x_{n+1}]$ richiede di aggiungere una riga (la n+1-esima) alla tabella delle diff. divis. usata per costruire $p(x)$ e calcolare i relativi termini il costo di $f[x_0,\dots,x_{n+1}]$ e' dunque $2(n+1)A + (n+1)D$

che sono n+2, ma il primo $f[x_{n+1}]$ e' dato

Avendo a disposizione $p(x)$ in forma di Newton e il suo valore $p(t)$, per calcolare

$$q(t) = p(t) + f[x_0, \dots, x_{n+1}](t - x_0) \dots (t - x_n)$$

accorrono $(n+2)A + (n+1)M + \underbrace{2(n+1)A + (n+1)D}_{\text{dato dal calcolo di } f[x_0, \dots, x_{n+1}]} = (3n+4)A + (n+1)M + (n+1)D \approx 3nA + nM + nD$

Esempio

Sia $f(x) = \cos(\pi x) + x^2$

a) Scrivere il pol. d'interp. $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ e calcolare $p(t)$ con $t = \frac{1}{2}$

b) Scrivere il pol. d'interp. $q(x)$ di $f(x)$ con i punti $p(x)$ a cui si aggiunge il nodo $x_3 = 1$ e calcolare $q(t)$ con $t = \frac{1}{2}$

Soluzione

Conviene scrivere $p(x)$ in forma di Newton in vista dell'aggiunta del nodo al p.t. b) (e anche in vista della valutazione di $p(x)$ in $t = \frac{1}{2}$ mediante l'algoritmo visto prima)

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$f[x_0]$

$f[x_1]$ $\quad f[x_0, x_1]$

$f[x_2]$ $\quad f[x_0, x_2]$ $\quad f[x_0, x_1, x_2]$

$f[x_0] = 0$

$f[x_1] = 1$

$f[x_2] = 5$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = 1$$

$$f[x_0, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{5}{3}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{1}{3}$$

$$p(x) = (x+1) + \frac{1}{3}(x+1)x$$

calcoliamo il valore con $t = \frac{1}{2}$

$$h_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{3}$$

$$h_1 = f[x_0, x_1] + (t - x_1) h_2 = 1 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)\frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

$$h_0 = f[x_0] + (t - x_0) h_1 = 0 + \left(\frac{1}{2} + 1\right)\frac{7}{6} = \frac{7}{4} = p(t)$$

b) La forma di Newton di $q(x)$ e'

$$q(x) = p(x) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$= (x+1) + \frac{1}{3}(x+1)x + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x+1)\,x\,(x-2)$$

$$\begin{array}{llll} \underline{f[x_0]} & & & \\ f[x_1] & \underline{f[x_0,x_1]} & & \\ f[x_2] & f[x_0,x_2] & \underline{f[x_0,x_1,x_2]} & \\ f[x_3] & f[x_0,x_3] & f[x_0,x_1,x_3] & f[x_0,x_1,x_2,x_3] \end{array}$$

Per calcolare $f[x_0,x_1,x_2,x_3]$ dobbiamo calcolare l'ultima riga della tab. delle diff. divise

$$f[x_3] = 0, \quad f[x_0,x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_0]}{x_3-x_0} = 0$$

$$f[x_0,x_1,x_3] = \frac{f[x_0,x_3]-f[x_0,x_1]}{x_3-x_1} = -1$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_0,x_1,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_2} = \frac{4}{3}$$

$$q(x) = (x+1) + \frac{1}{3}(x+1)x + \frac{4}{3}(x+1)x(x-2)$$

$$q\left(\frac{1}{2}\right) = p\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-2\right) = \frac{7}{3} + \frac{-3}{2} = \frac{1}{4}$$

Esercizio

Sia $f(x) = \sin(\pi x)$

a) determinare il pol. d'inter. $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0=0, x_1=\frac{1}{2}, x_2=1$ e calcolare $p(t)$ per $t=\frac{1}{4}$ e $t=\frac{1}{3}$

b) determinare il pol. d'inter. $q(x)$ di $f(x)$ sui nodi precedenti a cui aggiungiamo il nodo $x_3=\frac{3}{4}$ e calcolare $q(t)$ per $t=\frac{1}{4}$ e $t=\frac{1}{3}$