

Tutorato Geometria e Algebra Informatica

Andrea Pizzi

14 Marzo 2023

Gli esercizi comprendono anche i PIANI che saranno oggetto delle prossime lezioni!

Esercizi teorici di riepilogo

Esercizio 1. In \mathbb{R}^2 si determini la generica retta r passante per il punto $P = (p_1, p_2)$ e parallela al vettore $v = (v_1, v_2)$. Generalizzare in \mathbb{R}^3 determinando la generica retta r passante per il punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ e parallela al vettore $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Esercizio 2. In \mathbb{R}^2 si determini la generica retta r passante per i punti $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$. Generalizzare in \mathbb{R}^3 determinando la generica retta r passante per i punti $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $Q = (q_1, q_2, q_3)$.

Esercizio 3. In \mathbb{R}^3 si determini il piano π passante per il punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ e parallelo ai vettori $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$.

Esercizio 4. In \mathbb{R}^3 si determini il piano π passante per i tre punti (non allineati) $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$ e $R = (r_1, r_2, r_3)$.

Applicazioni (Gli esercizi non sono disposti in ordine di difficoltà!)

Esercizio 5. (Appartenenza di punti ad una retta) In \mathbb{R}^2 consideriamo i punti $P = (0, 5)$, $Q = (-2, 9)$ ed $R = (2, 0)$. Data la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$$

trovare le equazioni cartesiane corrispondenti e verificare se i punti appartengono oppure no alla retta.

Data la retta di equazioni cartesiane $5x + 2y - 10 = 0$ trovare le equazioni parametriche corrispondenti e verificare se i punti appartengono oppure no alla retta.

Esercizio 6. (Retta per due punti) Trovare le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per i punti $P_0 = (3, -2)$ e $P_1 = (1, -1)$.

Esercizio 7. (Retta per due punti) Trovare le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per i punti $P_0 = (0, 0)$ e $P_1 = (7, 0)$.

Esercizio 8. Trovare le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per il punto $P = (4, -3)$ e parallela al vettore $v = (1, 1)$.

Esercizio 9. Trovare le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per il punto $P = (-1, 1)$ e parallela al vettore $v = (1, 2)$.

Esercizio 10. (Retta per due punti) Dimostra che la retta passante per i punti $P_0 = (\pi, 1, 3)$ e $P_1 = (\pi, 0, 2)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \pi \\ y = 1 - t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

ed equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x = \pi \\ y - z = -2 \end{cases}$$

Esercizio 11. Trova le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per il punto $P = (1, -2, -1)$ e parallela al vettore $v = (1, 1, 1)$.

Esercizio 12. (Punti allineati) In \mathbb{R}^2 verificare se i punti $P = (1, 3)$, $Q = (2, 5)$ e $R = (-2, 1)$ sono allineati. Ripetere lo stesso per i punti $P = (0, 1)$, $Q = (2, 3)$ e $R = (-2, -1)$.

Esercizio 13. Dimostra se le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 - 2s \\ y = -5 + 2s \\ z = 9 - 4s \end{cases}$$

descrivono la stessa retta.

(**) Date le rette di equazioni parametriche generiche

$$\begin{cases} x = a_1 + b_1 t \\ y = a_2 + b_2 t \\ z = a_3 + b_3 t \end{cases} \quad \begin{cases} x = c_1 + d_1 t \\ y = c_2 + d_2 t \\ z = c_3 + d_3 t \end{cases}$$

prova ad elaborare, usando l'esercizio precedente, una possibile relazione tra i coefficienti $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3)$, per determinare quando una tale coppia di rette descrive in realtà la stessa retta.

Esercizio 14. Date le rette di equazioni parametriche

$$r_0 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad r_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

decidi se sono incidenti oppure no. Trovare anche le equazioni cartesiane di tali rette e verificare con esse se sono incidenti oppure no.

Esercizio 15. Date le rette di equazioni parametriche

$$r_0 : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 4t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad r_1 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = -7 + t \end{cases}$$

decidi se sono incidenti oppure no. Trovare anche le equazioni cartesiane di tali rette e verificare con esse se sono incidenti oppure no.

Esercizio 16. Date le rette di equazioni cartesiane

$$r_0 : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \quad r_1 : \begin{cases} x - y = -1 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

stabilisci se sono incidenti oppure no. Trova le equazioni parametriche di tali rette e verificare con esse se sono incidenti oppure no.

Esercizio 17. (Appartenenza di punti ad un piano) Dato il piano di equazioni cartesiane $\pi : -4x + y - 4z + 7 = 0$ determinare se i punti $P = (1, 7, -1)$ e $Q = (0, -1, 3)$ vi appartengono e determinare le equazioni parametriche dello stesso piano.

Dato il piano di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 2 + t - 2s \\ z = 3 - 8t + 4s \end{cases}$$

determinare se i punti assegnati precedentemente vi appartengono e successivamente trovare le equazioni cartesiane dello stesso piano.

Esercizio 18. (Piano per tre punti) Trova equazioni parametriche e cartesiane del piano in \mathbb{R}^3 passante per i punti $P_0 = (0, 1, 0)$, $P_1 = (-1, 0, 0)$ e $P_2 = (0, 0, 1)$.

Esercizio 19. (Piano per un punto e una retta) Trova le equazioni parametriche e cartesiane del piano in \mathbb{R}^3 passante per il punto $P_1 = (1, 0, 1)$ e contenente la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 20. (Punti complanari) Verificare se i quattro punti $A = (1, 2, -1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (1, 3, 0)$ e $D = (3, 3, 1)$ sono complanari.

P.S. Ricordiamo che essere complanari equivale ad appartenere allo stesso piano.

Ha senso richiedere se i punti $A = (1, 2, -1)$, $B = (1, 2, 3)$ e $C = (1, 3, 0)$ sono complanari?

Esercizio 21. Dato il piano π e la retta r di equazioni cartesiane

$$\pi : 2x + 3y - z = 4 \qquad r : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

determina se sono incidenti oppure no.