Laurea Triennale in Scienze e Tecnologie per i Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2023-2024`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Esame del 2 Febbraio 2024
L'Esercizio 6 è solo per coloro che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1. Un'urna ha 4 palline numerate con i numeri $1, 2, 4, 5$.
`D1)` Si estraggono a caso 4 palline, una alla volta e con reiserimento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline con numero pari estratte. Trovare la densità discreta di X.
`D2)` Si estraggono a caso 2 palline in blocco. Sia Y la variabile aleatoria che indica la differenza tra il massimo e il minimo tra i due numeri estratti. Trovare la densità discreta di Y.
`D3)` Si estraggono a caso palline, una alla volta e con reinserimento. Sia Z la variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte fino a quando esce per la prima volta il numero 4. Calcolare la probabilità che Z assuma un valore multiplo di 3, cioè un valore nell'insieme $\{3h : h \geq 1 \text{ intero}\}$.

Esercizio 2. Sia $q \in (0, \frac{1}{2})$ arbitrariamente fissato. Si lancia un dado equo: se esce un numero pari si lancia una moneta, e la probabilità che esca testa lanciandola è uguale a q; se esce un numero dispari si lancia un'altra moneta, e la probabilità che esca testa lanciandola è uguale a $2q$.
`D4)` Calcolare la probabilità che esca testa nel lancio di moneta che si effettua, e trovare il valore di q (se esiste) per cui questa probabilità è uguale a $\frac{5}{8}$.

Esercizio 3. Sia $q \in (0, 1)$ arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(0,0) = q, \quad p_{X_1,X_2}(0,1) = \frac{1-q}{2} \text{ e } p_{X_1,X_2}(1,0) = \frac{1-q}{2}.$$

`D5)` Verificare che $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = -\left(\frac{1-q}{2}\right)^2$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 = 0|X_1 + X_2 = 1)$, e verificare che non dipende da q.

Esercizio 4. Siano $b > 0$ arbitrariamente fissato. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{2x}{b^2} 1_{(0,b)}(x)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = \sqrt{X + 1}$.
`D8)` Calcolare $P(X < \frac{3}{4}b)$, e verificare che non dipende da b.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una variabile aleatoria Normale con media 0 e varianza 16. Verificare che $P(|X| < 4) = 2\Phi(1) - 1$.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media $\mu \in \mathbb{R}$ e varianza 25. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n} < X_1 + \cdots + X_n - n\mu < 2\sqrt{n}\right),$$

esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1-q & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 13/40 & 7/40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove $q \in [0, 1]$.
`D11)` Sia $q = 0$. Calcolare $\lim_{n\to\infty} p_{12}^{(n)}$, dopo aver motivato l'esistenza di tale limite.
`D12)` Sia $q \neq 0$. Calcolare la probabilità di passaggio (assorbimento) nello stato 4 partendo da ciascuno degli stati $1, 2, 3$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` Si ha $p_X(k) = \binom{4}{k}(\frac{1}{2})^4$ per $k \in \{0,1,2,3,4\}$, e quindi

$$p_X(0) = \frac{1}{16},\ p_X(1) = \frac{4}{16},\ p_X(2) = \frac{6}{16},\ p_X(3) = \frac{4}{16},\ p_X(4) = \frac{1}{16}.$$

`D2)` Ciascuno dei sottoinsiemi di due elementi di $\{1,2,4,5\}$ ha la stessa probabilità di essere estratto: $\{1,2\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{4,5\}$. Quindi si ha

$$p_Y(1) = P(\{\{1,2\},\{4,5\}\}) = \frac{2}{6};\ p_Y(2) = P(\{\{2,4\}\}) = \frac{1}{6};$$

$$p_Y(3) = P(\{\{1,4\},\{2,5\}\}) = \frac{2}{6};\ p_Y(4) = P(\{\{1,5\}\}) = \frac{1}{6}.$$

`D3)` La probabilità richiesta è uguale a

$$\sum_{h\geq 1}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{3h-1}\frac{1}{4} = \frac{1/4}{3/4}\sum_{h\geq 1}\left(\frac{3}{4}\right)^{3h} = \frac{1}{3}\sum_{h\geq 1}\left(\frac{27}{64}\right)^{h} = \frac{1}{3}\frac{27/64}{1-27/64} = \frac{9}{37}.$$

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali si ha

$$P(T) = P(T|M_1)P(M_1) + P(T|M_2)P(M_2) = q\frac{3}{6} + 2q\frac{3}{6} = \frac{3}{2}q.$$

Inoltre il valore richiesto di q deve soddisfare la condizione $\frac{3}{2}q = \frac{5}{8}$, da cui segue $q = \frac{5}{12}$.

Esercizio 3.
`D5)` Le densità marginali sono: $p_{X_1}(0) = p_{X_1,X_2}(0,0)+p_{X_1,X_2}(0,1) = q+\frac{1-q}{2}$ e $p_{X_1}(1) = p_{X_1,X_2}(1,0) = \frac{1-q}{2}$; $p_{X_2}(0) = p_{X_1,X_2}(0,0) + p_{X_1,X_2}(1,0) = q + \frac{1-q}{2}$ e $p_{X_2}(1) = p_{X_1,X_2}(0,1) = \frac{1-q}{2}$. Quindi X_1 e X_2 hanno distribuzione Bernoulliana di parametro $\frac{1-q}{2}$ e si ha $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \frac{1-q}{2}$. Inoltre

$$\mathbb{E}[X_1X_2] = 0\cdot 0\cdot p_{X_1,X_2}(0,0) + 0\cdot 1\cdot p_{X_1,X_2}(0,1) + 1\cdot 0\cdot p_{X_1,X_2}(1,0) = 0,$$

e quindi $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \mathbb{E}[X_1X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = -\left(\frac{1-q}{2}\right)^2$.
`D6)` Si ha

$$\begin{aligned} P(X_1 = 0|X_1+X_2 = 1) &= \frac{P(\{X_1=0\}\cap\{X_1+X_2=1\})}{P(X_1+X_2=1)} \\ &= \frac{P(\{X_1=0\}\cap\{X_2=1\})}{P(X_1+X_2=1)} = \frac{p_{X_1,X_2}(0,1)}{p_{X_1,X_2}(0,1)+p_{X_1,X_2}(1,0)} = \frac{(1-q)/2}{(1-q)/2+(1-q)/2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

che effettivamente non dipende da q.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(1 \leq Y \leq \sqrt{b+1}) = 1$ e quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 1, \\ (*) & \text{se } 1 < y < \sqrt{b+1}, \\ 1 & \text{se } y \geq \sqrt{b+1}. \end{cases}$$

Per $y \in (1, \sqrt{b+1})$ si ha

$$(*) = P(\sqrt{X+1} \leq y) = P(X+1 \leq y^2) = P(X \leq y^2-1) = \int_0^{y^2-1}\frac{2x}{b^2}dx = \left[\frac{x^2}{b^2}\right]_{x=0}^{x=y^2-1} = \frac{(y^2-1)^2}{b^2}.$$

`D8)` Si ha
$$P\left(X<\frac{3}{4}b\right)=\int_0^{\frac{3}{4}b}\frac{2x}{b^2}dx=\left[\frac{x^2}{b^2}\right]_{x=0}^{x=\frac{3}{4}b}=\frac{(\frac{3}{4}b)^2}{b^2}=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16},$$
che effettivamente non dipende da b.

Esercizio 5.
`D9)` La variabile aleatoria $X^*=X/\sqrt{16}=X/4$ ha distribuzione Normale standard. Allora si ha
$$P(|X|<4)=P(-4<X<4)=P\left(-\frac{4}{4}<X^*<\frac{4}{4}\right)=P\left(-1<X^*<1\right)$$
$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=\Phi(1)-(1-\Phi(1))=2\Phi(1)-1.$$

`D10)` Si ha
$$P\left(\sqrt{n}<X_1+\cdots+X_n-n\mu<2\sqrt{n}\right)$$
$$=P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{25}\sqrt{n}}<\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{25}\sqrt{n}}<\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{25}\sqrt{n}}\right)=P\left(\frac{1}{5}<\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{25}\sqrt{n}}<\frac{2}{5}\right)$$
e, per il Teorema Limite Centrale, possiamo concludere che
$$\lim_{n\to\infty}P\left(\sqrt{n}<X_1+\cdots+X_n-n\mu<2\sqrt{n}\right)=\Phi\left(\frac{2}{5}\right)-\Phi\left(\frac{1}{5}\right).$$

Esercizio 6.
`D11)` Essendo $q=0$ si ha
$$P=\left(\begin{array}{ccccc}1/2&1/2&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1/2&13/40&7/40\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right).$$
La classe $\{1,2\}$ è chiusa e irriducibile. Inoltre la catena ristretta a $\{1,2\}$ è regolare (per l'Osservazione 5.16; infatti qui abbiamo $p_{11}>0$). Quindi si può applicare il Teorema di Markov alla catena ristretta a $\{1,2\}$, e si ha
$$\lim_{n\to\infty}p_{12}^{(n)}=\pi_2$$
dove (π_1,π_2) è l'unica distribuzione stazionaria per la catena ristretta a $\{1,2\}$. Per la distribuzione stazionaria si ha
$$\begin{cases}\pi_1=\frac{\pi_1}{2}+\pi_2\\ \pi_2=\frac{\pi_1}{2}\end{cases}$$
e, da entrambe le equazioni, si ottiene $\pi_1=2\pi_2$; poi, tenendo conto che $\pi_1+\pi_2=1$, si ha $3\pi_2=1$ e $\pi_2=\frac{1}{3}$ che è il limite richiesto (per completezza possiamo anche dire che la distribuzione stazionaria è $(\pi_1,\pi_2)=(2/3,1/3)$).
`D12)` Sia $C=\{4\}$; allora l'insieme degli stati che non appartengono a C e che comunicano con C è $D_C=\{1,2,3\}$. In corrispondenza le probabilità di passaggio (assorbimento) in 4 partendo da 1, 2 e 3 sono λ_1, λ_2 e λ_3 rispettivamente, e sono le soluzioni del seguente sistema:
$$\begin{cases}\lambda_1=\frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_2}{2}\\ \lambda_2=(1-q)\lambda_1+q\lambda_3\\ \lambda_3=\frac{13}{40}+\frac{\lambda_3}{2}.\end{cases}$$
Con semplici calcoli si ottiene $\lambda_1=\lambda_2$ dalla prima equazione e, sostituendo nella seconda equazione, si ottiene (ancora con semplici calcoli) $\lambda_2=\lambda_3$ (ricordando che $q\neq 0$). Dalla terza equazione (ancora con semplici calcoli) si ottiene $\lambda_3=\frac{13}{20}$. In conclusione si ha
$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\frac{13}{20}.$$

Osservazione. Partendo da 1 o da 2, prima o poi si arriva in 3; quindi non sorprende che λ_1 e λ_2 coincidono con λ_3. Inoltre il valore $\lambda_3 = \frac{13}{20}$ può essere interpretato come la probabilità p_{34} di andare dallo stato 3 allo stato 4, diviso la probabilità $p_{34}+p_{35}$ di lasciare lo stato 3 (in effetti, lasciando lo stato 3, si ha l'assorbimento in uno dei due stati assorbenti 4 e 5); infatti

$$\frac{p_{34}}{p_{34}+p_{35}} = \frac{13/40}{13/40+7/40} = \frac{13}{20} = \lambda_3.$$