Tutorato Geometria e Algebra Informatica

Andrea Pizzi

10 Maggio 2023

Esercizio 1. Consideriamo il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$: $V = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Mostrare che è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e darne un interpretazione geometrica. Dimostrare che

$$\mathbf{v_1} = (1, 0, 0)$$
$$\mathbf{v_2} = (0, 1, 0)$$

formano una base per tale sottospazio. Mostrare che anche i vettori

$$\mathbf{w_1} = (1, 1, 0)$$
$$\mathbf{w_2} = (-1, 2, 0)$$

formano una base per tale sottospazio. Consideriamo le seguenti trasformazioni $T, S_1, S_2 : V \to V$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dimostra che T è lineare mentre S_1, S_2 non sono lineari. Inoltre per la trasformazione lineare T scrivere la matrice associata e trovare una base di $KerT$ e ImT. Determinare se è iniettiva o suriettiva.

Descrivere i vettori di V nelle due basi $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ e $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}\}$ e trovare la matrice di passaggio dalla base $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ alla base $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}\}$.

Mostrare che questa matrice di passaggio definisce un'applicazione lineare e trovare l'inversa se possibile.

Esercizio 2. Consideriamo lo spazio vettoriale dei polinomi di grado non superiore a due con coefficienti reali $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Consideriamo $T : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ definita come

$$T(a + bx + cx^2) = b + 2cx$$

Mostrare che si tratta di un'applicazione lineare e trovare la sua matrice associata. Determinare $KerT$ e ImT.

Consideriamo i polinomi $p_1(x) = 1+x$, $p_2(x) = 1+2x+x^2$ e $p_3(x) = x-x^2$ in $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Dimostra che formano una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Consideriamo i polinomi $q_1(x) = 1$, $q_2(x) = x$ e $q_3(x) = x^2$ in $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Dimostra che formano una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ (Questa è detta base canonica).

Trovare la matrice di passaggio da $\{p_1, p_2, p_3\} \to \{q_1, q_2, q_3\}$.

La matrice associata all'applicazione T cambia cambiando la base considerata?

Esercizio 3. Definiamo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ ed $S : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^2$ ponendo

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + (2y - x)t + xt^2 \qquad S(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

Calcola $S \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e trova $Ker(S \circ T)$ e $Im(S \circ T)$. Verifica se S, T e le composizioni sono iniettive o suriettive.

Studia la somma $ImT + KerS$ trovandene la dimensione e una base. Verifica se è diretta.

Studia l'intersezione $ImT \cap KerS$ trovandone la dimensione e una base.

Esercizio 4. a) Si calcolino le matrici inverse delle seguenti matrici e il loro determinante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Provare ad utilizzare tutti i metodi possibili visti a lezione. Fare lo stesso con le trasposte delle matrici sopra.

Esercizio 5. Si calcolino le matrici inverse delle seguenti matrici e il loro determinante.

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Provare ad utilizzare tutti i metodi possibili visti a lezione. Fare lo stesso con le trasposte delle matrici sopra.

Esercizio 6. Studia i seguenti sistemi lineari con il metodo di Cramer:

$$a) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_3 = -4 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \\ 3x_2 = 6 \\ 2x_3 = -2 \end{cases} \qquad c) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \\ 3x_3 = 6 \\ 2x_2 = -2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 3y - z = 8 \\ x - 4y + 2z = -3 \\ 3x + y + 5z = 12 \end{cases} \qquad d) \begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ 3x + 2y - 4z = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \qquad e) \begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ 4x + 6y - 2z = 8 \\ 6x + 9y - 3z = 12 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 6 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \end{cases} \qquad g) \begin{cases} \pi x + 2y + 3z = 4 \\ x - \pi y + 2z = -1 \\ 3x + y + \pi z = 6 \end{cases}$$