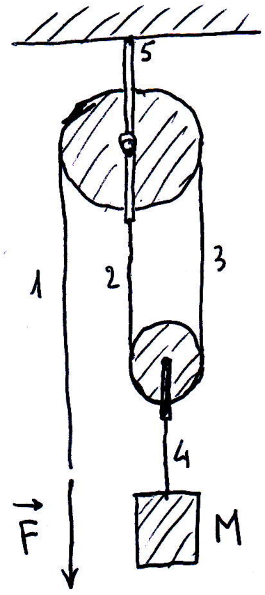
Serway n. 85



Come mostrato nello schema a fianco, un corpo di massa M viene mantenuto nella sua posizione da una forza $\vec{F}$ e da un sistema di pulegge.

Le pulegge sono prive di massa e senza attrito.

a) Si disegnino i diagrammi che mostrano le forze agenti su ogni puleggia.

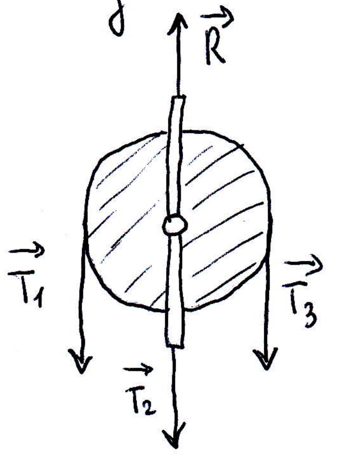
Si determinino

b) le tensioni in ciascun tratto di corda (1, 2, 3, 4) e la forza di reazione nel punto di sostegno 5,

e

c) il modulo della forza $\vec{F}$

a) Forze agenti sulla puleggia in alto:

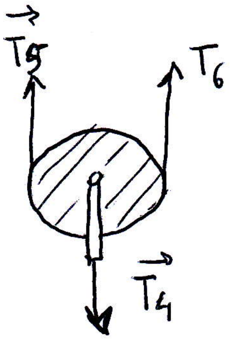


Risulta $|\vec{T_1}| = |\vec{T_3}|$

Deve poi risultare anche

$$\vec{R} + \vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{T_3} = 0$$

Forze agenti sulla puleggia in basso



Risulta $|\vec{T_5}| = |\vec{T_6}|$

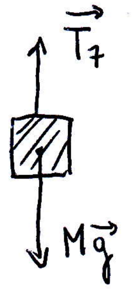
Deve poi risultare anche

$$\vec{T_4} + \vec{T_5} + \vec{T_6} = 0$$

Poiché inoltre in ogni cavo le tensioni ai due estremi devono avere modulo uguale, risulta anche

$$|\vec{T_5}| = |\vec{T_2}| \quad e \quad |\vec{T_6}| = |\vec{T_3}|$$

Forze agenti sul corpo di massa M:



Risulta $M\vec{g} + \vec{T_7} = 0$, e deve anche risultare $|\vec{T_7}| = |\vec{T_4}|$

b) Da $M\vec{g} + \vec{T}_7 = 0$ ricaviamo $|\vec{T}_7| = Mg$

Ma e' anche $|\vec{T}_4| = |\vec{T}_7| = Mg$

Risulta poi $|\vec{T}_4| = |\vec{T}_5 + \vec{T}_6| = 2|\vec{T}_5|$, da cui

$$|\vec{T}_5| = |\vec{T}_6| = \frac{1}{2} Mg \Rightarrow |\vec{T}_2| = |\vec{T}_3| = \frac{1}{2} Mg$$

e quindi $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_3| = \frac{1}{2} Mg$

Infine risulta $|\vec{R}| = |\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3| = \frac{3}{2} Mg$

c) Risulta chiaramente $|\vec{F}| = |\vec{T}_1| = \frac{1}{2} Mg$

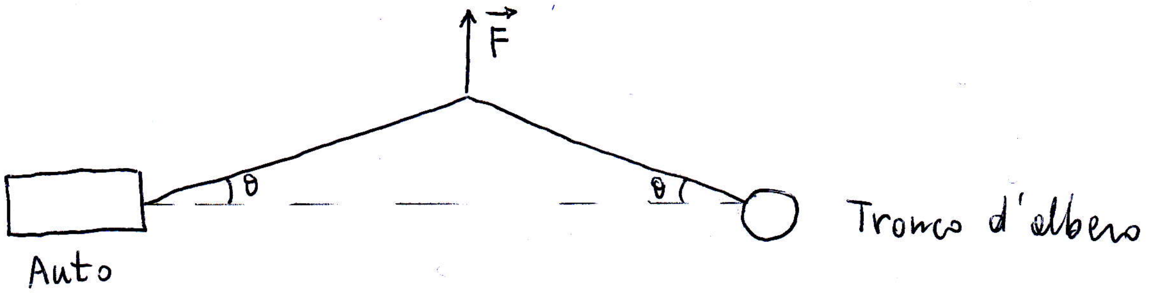
Serway n. 86

Ogni sistema meccanico che permette di aumentare il modulo della forza applicata è una "macchina". Alcune macchine come la leva o il piano inclinato sono molto semplici. Altre non sembrano proprio delle macchine.

Per esempio, supponiamo che la tua auto sia impantanata e tu non riesca a tirarla fuori. Puoi prendere un cavo abbastanza lungo, connettere il paraurti a un tronco d'albero e spingere da un lato al centro del cavo esercitando una forza $\vec{F}$. Ciascuna metà del cavo si inclina di un piccolo angolo θ rispetto alla linea retta che congiunge gli estremi del cavo.

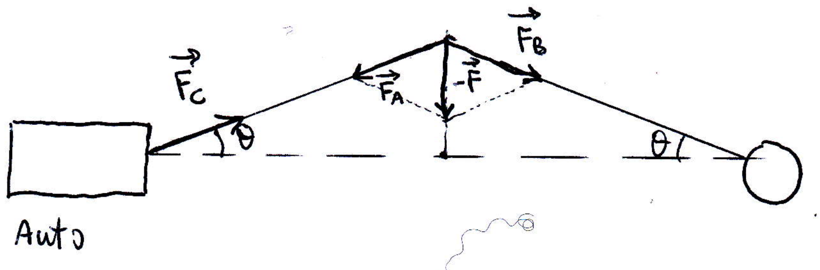
a) Si ricavi un'espressione della forza che agisce sull'auto.

b) Si calcoli il modulo della tensione della fune se $\theta = 7°$ e $|\vec{F}| = 100$ N.



a) Spingendo la fune con una forza $\vec{F}$ come nella figura, per la terza legge della dinamica la fune eserciterà su chi spinge una forza $\vec{F_2} = -\vec{F}$; questa forza dovrà essere la risultante delle forze esercitate dai due segmenti di fune, che a causa della simmetria della figura avranno uguale modulo, e ciascuna sarà diretta lungo la fune:

$$\vec{F_A} + \vec{F_B} = -\vec{F}, \quad |\vec{F_A}| = |\vec{F_B}|$$



Sull' auto agirà quindi una forza $\vec{F_C} = -\vec{F_A}$ (vedi figura).

Posto $|\vec{F_A}| = |\vec{F_B}| = F^*$, risulta quindi

$$|\vec{F}| = F = 2F^* \operatorname{sen}\theta$$ (si ricava subito applicando una formula trigonometrica ai triangoli in figura)

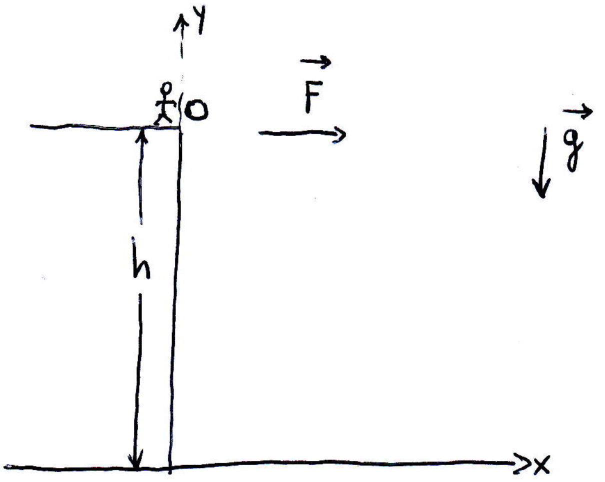
Il modulo della forza che agisce sull' auto è quindi:

$$|\vec{F_C}| = F^* = \frac{|\vec{F}|}{2 \operatorname{sen}\theta}$$

b) Se $\theta = 7°$ e $|\vec{F}| = 100\ N$, risulta

$$|\vec{F_A}| = |\vec{F_C}| = |\vec{F_B}| = F^* = 410{,}28\ N,$$ oltre quattro volte maggiore del modulo della forza applicata.

Serway: n. 91



Un cuscino di massa m viene lasciato cadere, da fermo, dalla sommità di un palazzo la cui altezza vale h.
Come mostrato nella figura, il vento esercita una forza orizzontale $\vec{F}$ di modulo costante sul cuscino che sta cadendo. L' aria non esercita alcuna forza verticale.

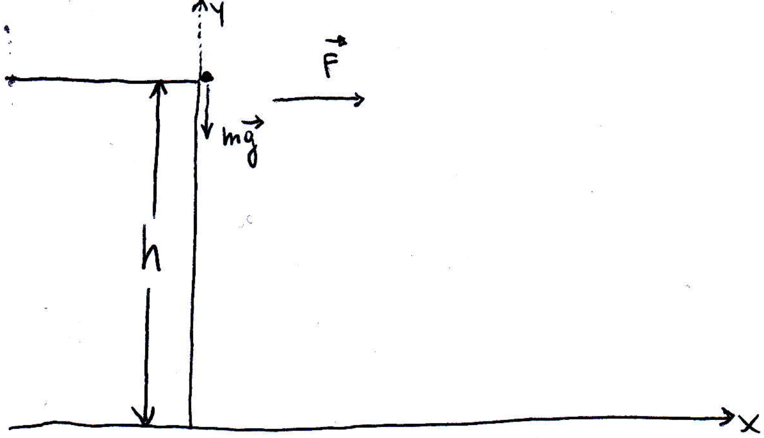
a) Si mostri che la traiettoria del cuscino è una linea retta.

b) Il cuscino cadrà con velocità costante? Si dia una spiegazione.

c) Se $m = 1,2$ kg, $h = 8$ m e $F = |\vec{F}| = 2,4$ N, a che distanza dalla base del palazzo toccherà terra il cuscino?

d) Se il cuscino viene lasciato all'inizio con una velocità iniziale non nulla, che tipo di traiettoria seguirà? Si spieghi.

a)



Rispetto al sistema di assi cartesiani ortogonali scelto (vedi figura), possiamo scrivere:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} \qquad (m\vec{g})_x = 0,\ (m\vec{g})_y = -mg,\ F_x = F,\ F_y = 0,$$

con $F = |\vec{F}|$

Per le componenti x e y dei vettori possiamo quindi scrivere:

$$\begin{cases} m a_x = F \\ m a_y = -mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = \dfrac{F}{m} \\ a_y = -g \end{cases}$$

Con le condizioni $V_{0x} = V_{0y} = 0$, risulta quindi:

$$\begin{cases} V_x(t) = \dfrac{F}{m} t \\ V_y(t) = -gt \end{cases}$$

Con le condizioni $x_0 = 0$, $y_0 = h$, otteniamo poi:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{F}{2m} t^2 \\ y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$t^2 = \dfrac{2m}{F} x(t)$, che sostituito a t^2 nella seconda equazione dà $y(t) = h - \frac{1}{2} g \cdot \dfrac{2m}{F} x(t)$

$$y = h - \frac{mg}{F} x$$

Dunque, la traiettoria del cuscino è una linea retta nello spazio, che parte dalla sommità del palazzo e arriva a terra.

b) Poiché $v_x(t) = \frac{F}{m} t$, $v_y(t) = -gt$, risulta

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(v_x(t))^2 + (v_y(t))^2} = \sqrt{\left(\frac{F}{m}t\right)^2 + (-gt)^2} = \sqrt{\left(\frac{F}{m}\right)^2 + g^2} \cdot t,$$

che non è costante al passare del tempo.

Quindi il cuscino non cadrà con velocità costante.

c) Il cuscino tocca terra nel punto di ascissa x_1 tale che $y(x_1) = 0$, cioè per $h - \frac{mg}{F} x_1 = 0$, cioè

$$\frac{mg}{F} x_1 = h \Rightarrow \quad x_1 = \frac{Fh}{mg} = \frac{(2{,}4\ N) \cdot (8\ m)}{(1{,}2\ kg) \cdot (9{,}81\ \frac{m}{s^2})} = 1{,}63\ m$$

d) Poniamo che risulti $v_x(0) = v_{0x}$, $v_y(0) = v_{0y}$.

Risulta quindi, a partire da $\begin{cases} a_x = \frac{F}{m} \\ a_y = -g \end{cases}$:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} + \frac{F}{m} t \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}$$

Con le ulteriori condizioni $x_0 = 0$, $y_0 = h$ otteniamo

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x} t + \frac{F}{2m} t^2 \\ y(t) = h + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Moltiplichiamo per g la prima equazione e per $\frac{F}{m}$ la seconda:

$$\begin{cases} g\, x(t) = g\, v_{0x} t + \frac{Fg}{2m} t^2 \\ \frac{F}{m} y(t) = \frac{F}{m} h + \frac{F v_{0y}}{m} t - \frac{Fg}{2m} t^2 \end{cases}$$

Sommiamo membro a membro le due equazioni così ottenute:

$$g\, x(t) + \frac{F}{m} y(t) = \frac{F}{m} h + \left(\frac{F v_{0y}}{m} + g\, v_{0x} \right) t$$

Ricaviamo t (essenziale che almeno uno tra v_{0x} e v_{0y} sia $\neq 0$):

$$t = \frac{g x + \frac{F}{m} y - \frac{F}{m} h}{g v_{0x} + \frac{F}{m} v_{0y}}$$

, e sostituiamo questa espressione a t nella prima equazione:

$$x = v_{0x} \left(\frac{g x + \frac{F}{m} y - \frac{F}{m} h}{g v_{0x} + \frac{F}{m} v_{0y}} \right) + \frac{F}{2m} \left(\frac{g x + \frac{F}{m} y - \frac{F}{m} h}{g v_{0x} + \frac{F}{m} v_{0y}} \right)^2$$

Questa equazione rappresenta una conica, ed è in forma implicita. Poiché i termini quadratici in x e y compaiono in un quadrato perfetto, dalla teoria delle coniche sappiamo in partenza che la curva è una parabola con asse ruotato.

E' tuttavia essenziale osservare che l'accelerazione vettoriale del cuscino e', rispetto al sistema di assi cartesiani ortogonali scelto, la seguente:

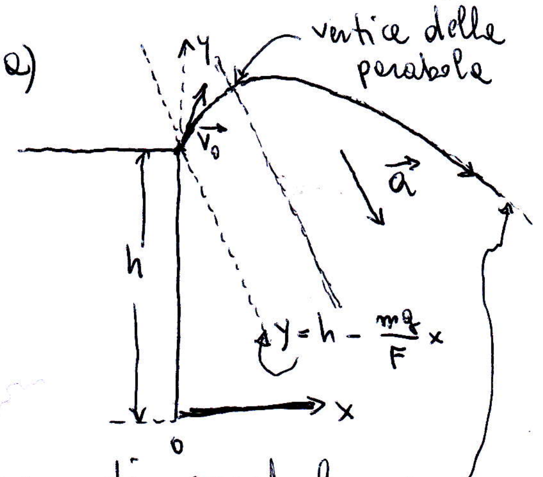
$$\vec{a} = \frac{F}{m}\hat{i} - g\hat{j} \quad , \text{con } |\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{F}{m}\right)^2 + g^2} \quad \text{costante.}$$

Dunque, il moto del cuscino e' un moto piano con accelerazione vettoriale costante (essendo costanti, oltre al modulo di $\vec{a}$, anche le sue componenti cartesiane).

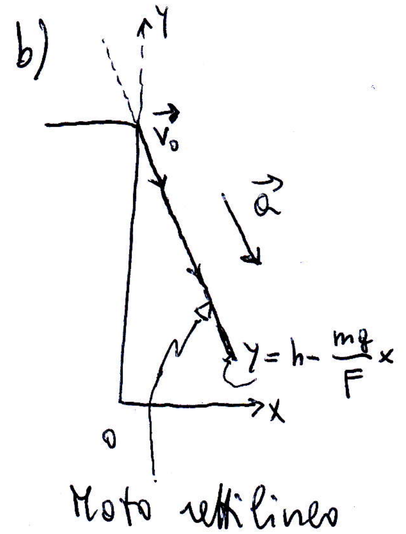
Pertanto il moto del cuscino, secondo quanto studiato per il caso del moto piano con $\vec{a}$ costante, seguira' una traiettoria parabolica con asse parallelo alla direzione di $\vec{a}$ e concavita' rivolta nel verso positivo di $\vec{a}$.

Di fatto, si tratta del moto di un proiettile con asse ruotato, parallelo alla retta trovata risolvendo il punto a) del problema.

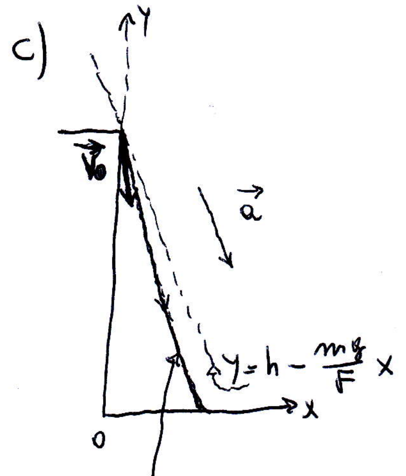
Questi sono dunque i casi possibili:



arco di parabola con concavita' rivolta "verso il basso"

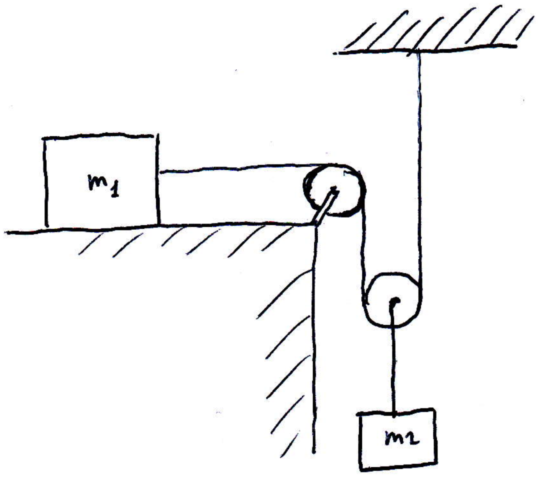


Moto rettilineo uniformemente accelerato (anche con $|\vec{v}_0| = 0$, come visto nel punto a))



arco di parabola con la concavita' rivolta "verso l'alto"

Serway n. 92



Nello schema della figura, le corde e le pulegge sono senza massa e prive di attrito, e le corde sono inestensibili.

a) Come si confronta l'accelerazione del blocco 1 con l'accelerazione del blocco 2? Si dia una spiegazione.

b) La massa del blocco 2 è 1,3 kg. Si trovi la sua accelerazione in funzione della massa m_1 del blocco 1.

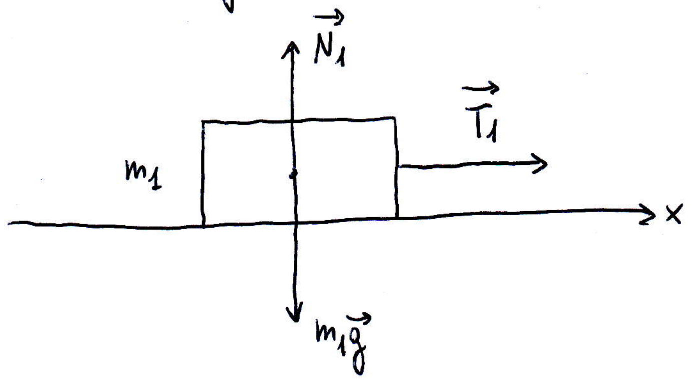
c) Che cosa si può prevedere dal risultato del punto b) se m_1 è molto minore di 1,3 kg?

d) E che cosa si può prevedere dal risultato del punto b) se m_1 tende a infinito?

e) Quanto vale la tensione della corda in questo caso?

f) Si possono trovare le risposte c), d), e) senza dover prima rispondere al punto b)? Si spieghi.

a) • Forze agenti sul blocco di massa m_1:



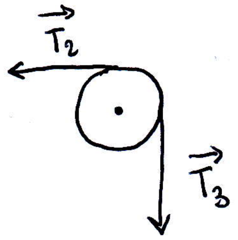
Risulta $\vec{N}_1 + m_1\vec{g} = 0$,

da cui $|\vec{N}_1| = N_1 = m_1 g$

La seconda legge della dinamica applicata al corpo di massa m_1 ci permette di scrivere:

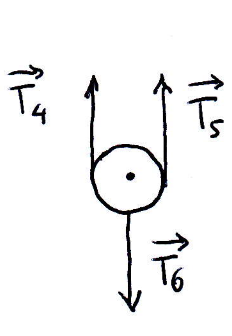
$$m_1 a_{1x} = |\vec{T}_1|$$

• Forze agenti sulla puleggia superiore:



Sappiamo che deve risultare $|\vec{T}_2| = |\vec{T}_1|$ perché il tratto di fune orizzontale ha massa trascurabile, e deve anche risultare $|\vec{T}_3| = |\vec{T}_2|$ perché la puleggia ha massa trascurabile.

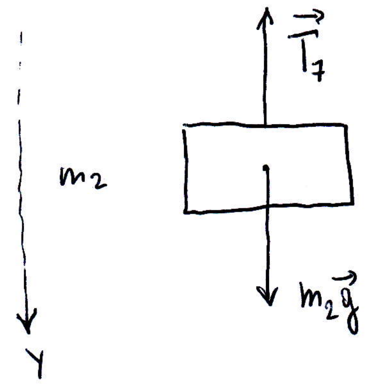
• Forze agenti sulla puleggia inferiore:



Sappiamo che deve risultare $|\vec{T}_4| = |\vec{T}_3|$ perché il tratto verticale di fune di sinistra ha massa trascurabile, e deve anche risultare $|\vec{T}_5| = |\vec{T}_4|$, e $\vec{T}_6 + \vec{T}_4 + \vec{T}_5 = 0$, perché la puleggia ha massa trascurabile.

Dunque: $|\vec{T}_6| = |\vec{T}_4 + \vec{T}_5|$

- Forze agenti sul blocco di massa m_2:



Sappiamo che deve risultare $|\vec{T}_7| = |\vec{T}_6|$ perché il tratto di fune verticale sotto la puleggia inferiore ha massa trascurabile.

La seconda legge della dinamica applicata al corpo di massa m_2 ci permette di scrivere:

$$m_2 a_{2y} = m_2 g - |\vec{T}_7|, \quad \text{da cui otteniamo}$$

$$|\vec{T}_7| = m_2 (g - a_{2y})$$

Dato che $|\vec{T}_7| \geq 0$, deve risultare $a_{2y} \leq g$.

Dunque: $|\vec{T}_6| = |\vec{T}_7| = m_2 (g - a_{2y})$

Poiché $|\vec{T}_4| = |\vec{T}_5|$, risulta $|\vec{T}_6| = |\vec{T}_4 + \vec{T}_5| = 2|\vec{T}_4| = m_2(g - a_{2y})$, dunque risulta, mettendo insieme tutte le relazioni trovate:

$$|\vec{T}_5| = |\vec{T}_4| = |\vec{T}_3| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}_1| = \frac{1}{2} m_2 (g - a_{2y})$$

Allora, riprendendo l'equazione scritta in precedenza per il corpo di massa m_1, possiamo scrivere:

$$m_1 a_{1x} = \frac{1}{2} m_2 (g - a_{2y})$$

Osserviamo che, allorché il corpo di massa m_1 si sposta di un tratto Δx_1 verso destra, il tratto orizzontale di corda si accorcia della stessa quantità; i due tratti verticali di corda, allo stesso tempo, si allungano, ma la lunghezza complessiva della corda resta costante (la corda è inestensibile), per cui la somma degli allungamenti dei due tratti verticali di corda deve compensare esattamente l'accorciamento Δx_1 del tratto orizzontale. Dato che i due tratti verticali di corda si allungano "di conserva" di uno stesso tratto Δy_2, deve risultare

$\Delta x_1 = 2 \Delta y_2$; dunque, dividendo i due membri per un intervallo di tempo piccolo Δt e facendo tendere Δt a zero, otteniamo:

$V_{1x}(t) = 2 V_{2y}(t)$, dove $V_{2y}(t)$ è la velocità istantanea del blocco di massa m_2, in quanto quando i due tratti di corda verticali si allungano di un tratto Δy_2, anche il corpo di massa m_2 si abbassa di un tratto Δy_2.

Derivando rispetto al tempo l'ultima relazione scritta, otteniamo infine $a_{1x}(t) = 2\, a_{2y}(t)$.

Dunque, il modulo dell'accelerazione del blocco 1 e', a ogni istante, pari al doppio del modulo dell'accelerazione del blocco 2.

b) Dalla relazione trovata durante lo svolgimento dei calcoli nel punto a), otteniamo:

$$m_1 a_{1x} = \frac{1}{2} m_2 (g - a_{2y})$$

Poiché, sempre nel punto precedente, abbiamo trovato che risulta $a_{1x} = 2\, a_{2y}$, possiamo scrivere:

$$2 m_1 a_{2y} = \frac{1}{2} m_2 g - \frac{1}{2} m_2 a_{2y}\,,\quad \text{cioe':}$$

$$4 m_1 a_{2y} = m_2 g - m_2 a_{2y} \Rightarrow (4 m_1 + m_2)\, a_{2y} = m_2 g\,,$$

e infine: $$a_{2y} = \frac{m_2 g}{4 m_1 + m_2} = \frac{g}{1 + \frac{4 m_1}{m_2}}$$ (dividendo numeratore e denominatore per m_2)

c) Se $\frac{m_1}{m_2} \ll 1$, possiamo scrivere $a_{2y} \simeq g\left(1 - \frac{4 m_1}{m_2}\right)$, approssimabile a g se $\frac{m_1}{m_2}$ e' trascurabile rispetto al valore 1.

Dunque, nel limite $\frac{m_1}{m_2} \ll 1$, il blocco 2 cade come se fosse in caduta libera.

d) Se $\frac{m_1}{m_2} \gg 1$, possiamo scrivere $a_{2y} \simeq \frac{g}{4\frac{m_1}{m_2}} = \frac{m_2 g}{4 m_1}$,

che può assumere un valore trascurabile se m_1 è molto più grande di m_2. In questo caso il blocco 2 di fatto non acquista accelerazione, e resta praticamente fermo se inizialmente è fermo.

e) Riprendendo una formula trovata nello svolgimento dei calcoli nel punto a), otteniamo, nel caso del punto d):

$$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}_3| = |\vec{T}_4| = |\vec{T}_5| \simeq \frac{1}{2} m_2 g,$$

$$|\vec{T}_6| = |\vec{T}_7| \simeq m_2 g$$

f) Qualitativamente, se $m_1 \ll m_2$ di fatto il corpo di massa m_1 non oppone resistenza alla caduta del corpo di massa m_2, che quindi ci aspettiamo che cada con accelerazione $\simeq g$.

Se $m_1 \gg m_2$, di fatto m_1 non si muove, "congelando" l'intero sistema in una situazione di equilibrio statico. Dunque l'accelerazione del blocco 2 sarà praticamente nulla, e i moduli delle tensioni dei diversi tratti di corda si ricavano semplicemente imponendo la condizione di forza risultante nulla su ciascuno dei due blocchi, oltre alle già citate condizioni sulle tensioni.