Algoritmo di valutazione del pol. d'interpolazione in un punto

L'algoritmo di valutazione del pol. d'interpolazione in un punto presenta le seguenti caratteristiche

- basato sulla forma di Newton
- efficace dal punto di vista computazionale

pol. d'interpol. sui punti $x_0, \dots, x_n$

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, siano $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ distinti e sia $t \in \mathbb{R}$ si vuole costruire un algoritmo per calcolare $p(t)$

Per semplicità, descriviamo l'algoritmo nel caso $n=3$, cosiché in forma di Newton è

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \quad (+)$$

l'algoritmo è composto da 2 parti:

indip. dal punto t in cui devo valutare $p(x)$

1) consiste nel calcolo delle diff. divise rosse, effettuato con la tab delle diff. divise come nell'esempio della lez. prec.

$f[x_0]$			
$f[x_1]$	$f[x_0,x_1]$		
$f[x_2]$	$f[x_0,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
$f[x_3]$	$f[x_0,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

2) Una volta calcolate le diff. divise rosse, per calcolare $p(t)$ si usa un metodo noto come alg. di Ruffini-Horner

Si scrive $p(t)$ nella forma:

$$p(t) = \underbrace{f[x_0] + (t-x_0)\overbrace{\left(f[x_0,x_1] + (t-x_1)\underbrace{\left(f[x_0,x_1,x_2] + \overbrace{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}^{h_3}(t-x_2)\right)}_{h_2}\right)}^{h_1}}_{h_0}$$

Si pone ora

$$h_3 = f[x_0,x_1,x_2,x_3] \quad \longrightarrow \quad \boxed{h_n = f[x_0,\dots,x_n]}$$

$$h_2 = f[x_0,x_1,x_2] + (t-x_2)h_3 \qquad \boxed{\forall i<n \quad h_i = f[x_0,\dots,x_i] + (t-x_i)h_{i+1}}$$

$$h_1 = f[x_0,x_1] + (t-x_1)h_2$$

$$h_0 = f[x_0] + (t-x_0)h_1$$

Costo computazionale

Valutiamo il costo computazionale dell'algoritmo per le varie parti:

- **Parte 1:**

  Si devono calcolare $\frac{n(n+1)}{2}$ elementi della tabella delle differenze divise

  per $n=3 \Rightarrow 6$

  tutti gli elementi tranne la 1ª colonna

  elementi noti

  elementi presenti nella parte triangolare inf. inclusa la diagonale di una matrice $n\times n$

  ossia $\frac{n^2-n}{2}+n = \frac{n(n+1)}{2} = 1+\dots+n$

  Per calcolare ognuno di questi $\frac{n(n+1)}{2}$ elementi occorrono 2 sottr. e 1 divisione, per cui in totale

  - $n(n+1)$ sottrazioni
  - $\frac{n(n+1)}{2}$ divisioni

- **Parte 2:**

  Si devono calcolare $h_{n-1},\dots,h_0$

  h_n non deve essere calcolato, lo abbiamo in input

  Per il calcolo di ciascun h_i, $i=0,\dots,n$ sono richieste 1 sottrazione, 1 addizione e 1 moltiplicazione in tot.

  - n addizioni
  - n sottrazioni
  - n moltiplicazioni

Costo complessivo

$$C(n) = (n^2+3n)A + nM + \left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\right)D \approx n^2A + \frac{n^2}{2}D$$

A = addizioni/sottrazioni

M = moltiplicazioni

D = divisioni

Oss

Supponiamo di valutare $p(x)$ in m punti $t_1,\dots,t_m \in \mathbb{R}$

Siccome la parte 1 non dipende dal punto in cui si valuta $p(x)$, per la valutazione di $p(x)$ in $t_1,\dots,t_m$ si procede così:

- La parte 1 viene eseguita solo una volta $\Rightarrow$ il costo è $n(n+1)A + \frac{n(n+1)}{2}D$
- La parte 2 viene ripetuta per calcolare $p(t_1),\dots,p(t_m)$ $\Rightarrow$ il costo è $m(2nA+nM)$

Conclusione

$$C_{m(n)} = \left(n^2+2nm+m\right)A + nm\Pi + \left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\right)D \approx \left(n^2+2nm\right)A + nm\Pi + \frac{n^2}{2}D$$

Esempio

consideriamo i dati

$$(x_0,y_0)=(0,0),\quad (x_1,y_1)=(1,3),\quad (x_2,y_2)=(2,1),\quad (x_3,y_3)=(3,1)$$

calcolare mediante l'algoritmo visto il valore in $t=2,3$ del pol. d'int. $p(x)$ dei dati assegnati

Soluzione

Sia $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ una qualsiasi funzione t.c. $f(x_i)=y_i \quad \forall i=0,1,2,3$

Parte 1: calcoliamo le diff. divise usando la tabella

$$\begin{array}{llll}
f[x_0] & & & \\
f[x_1] & f[x_0,x_1] & & \\
f[x_2] & f[x_0,x_2] & f[x_0,x_1,x_2] & \\
f[x_3] & f[x_0,x_3] & f[x_0,x_1,x_3] & f[x_0,x_1,x_2,x_3]
\end{array}$$

$$f[x_0] = f(x_0) = 0$$
$$f[x_1] = f(x_1) = 3$$
$$f[x_2] = f(x_2) = 1$$
$$f[x_3] = f(x_3) = 1$$

$$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = 3$$
$$f[x_0,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_0]}{x_2-x_0} = \frac{1}{2}$$
$$f[x_0,x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_0]}{x_3-x_0} = \frac{1}{3}$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1} = \frac{\frac{1}{2}-3}{2-1} = -\frac{5}{2}$$
$$f[x_0,x_1,x_3] = \frac{f[x_0,x_3]-f[x_0,x_1]}{x_3-x_1} = \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{3-1} = -\frac{4}{3}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_0,x_1,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_2} = \frac{-\frac{4}{3}+\frac{5}{2}}{3-2} = \frac{7}{6}$$

$$h_3 = f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{7}{6}$$
$$h_2 = f[x_0,x_1,x_2] + (t-x_2)h_3 = -\frac{40}{20}$$
$$h_1 = f[x_0,x_1] + (t-x_1)h_2 = \frac{41}{200}$$
$$h_0 = f[x_0] + (t-x_0)h_1 = \frac{943}{2000} = p(2,3)$$

Esercizio

Tramite l'algoritmo descritto valutare in $t = 1/2$ e $t = 4$ il pol. d'interp. di $f(x) = \sqrt{x}$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$