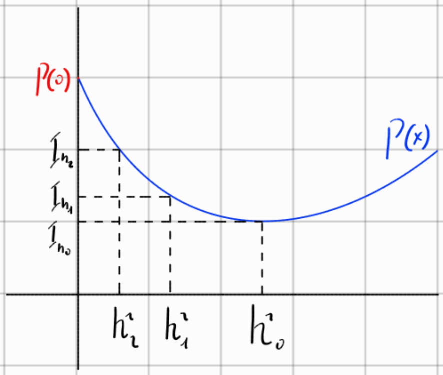
Estrapolazione

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile e siano $I_{h_0},\dots,I_{h_m}$ le formule dei trapezi di ordini distinti $h_0,\dots,h_m$ e passi distinti $h_0=\frac{b-a}{h_0},\dots,h_m=\frac{b-a}{h_m}$ per approssimare $\int_a^b f(x)\,dx$

Sia $p(x)$ il pol. d'inter. dei dati $(h_0^2, I_{h_0}),\dots,(h_m^2, I_{h_m})$

$\hookrightarrow$ $p(x)$ e' l'unico pol. $\in \mathbb{R}_m[x]: p(h_i^2)=I_{h_i} \quad \forall i=0,\dots,m$



esempio per $h=2$

Risultato:

$p(0)$ e' un'approssimazione di $\int_0^1 f(x)\,dx$ molto piu' accurata delle singole forme dei trapezi $I_{h_0},\dots,I_{h_m}$

Il procedimento di valutazione in 0 del pol. d'interp. $p(x)$ si chiama estrapolazione perche' $p(x)$ viene valutato in un punto $(x=0)$ che sta fuori dal piu' piccolo intervallo che contiene i nodi $h_0^2,\dots,h_m^2$

$p(0)$ si chiama valore estrapolato

Esempio

Sia $f(x) = xe^x$

$\forall n \geq 1$ sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per calcolare $\int_0^2 f(x)\,dx = I$.

a) calcolare I

b) calcolare I_{12}, I_{24}, I_{30} e confrontarli con il valore aspettato I

c) calcolare $p(0)$ dove $p(x)$ e' il pol. d'int. dei dati $(h_0^2, I_{12}), (h_1^2, I_{24}), (h_2^2, I_{30})$ dove h_0, h_1, h_2 sono i passi di discretizzazione delle formule I_{12}, I_{24}, I_{30}. confrontare $p(0)$ con I

d) Posto $\varepsilon = |p(0) - I|$, determinare un h in modo che I_n fornisca un'approssimazione di I con errore $|I_n - I| \leq \varepsilon$

Soluzione

a) Integrale per parti

$$\int x e^x\,dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x\,dx = xe^x - e^x$$

$$I = \int_0^2 x e^x\,dx = \left[xe^x - e^x\right]_0^2 = e^2 + 1 = 8{,}3890560989\ldots$$

b) I passi I_{12}, I_{24}, I_{30} sono

$$h_0 = \frac{2-0}{12} = \frac{1}{6},\quad h_1 = \frac{2-0}{24} = \frac{1}{12},\quad h_2 = \frac{2-0}{30} = \frac{1}{15}$$

usando (T) otteniamo

$$I_{12} = \frac{1}{6}\left[\frac{0 + 2e^2}{2} + \sum_{j=1}^{11} \frac{j}{6} e^{j/6}\right] = \frac{1}{6}\left[e^2 + \frac{1}{6}e^{\frac{1}{6}} + \ldots + \frac{11}{6}e^{\frac{11}{6}}\right] = 8{.}4380178285$$

$$I_{24} = \frac{1}{12}\left[\frac{0 + 2e^2}{2} + \sum_{j=1}^{23} \frac{j}{12} e^{j/12}\right] = \frac{1}{12}\left[e^2 + \frac{1}{12}e^{\frac{1}{12}} + \ldots + \frac{23}{12}e^{\frac{23}{12}}\right] = 8{.}401303344\ldots$$

$$I_{30} = \frac{1}{15}\left[\frac{0 + 2e^2}{2} + \sum_{j=1}^{29} \frac{j}{15} e^{j/15}\right] = \frac{1}{15}\left[e^2 + \frac{1}{15}e^{\frac{1}{15}} + \ldots + \frac{29}{15}e^{\frac{29}{15}}\right] = 8{.}396894 85\ldots$$

Per I_{12}

$x_j = 0 + j \cdot \frac{1}{6} = \frac{j}{6}$ per $j = 0, \ldots, 12$

Per I_{24}

$x_j = 0 + j \cdot \frac{1}{12} = \frac{j}{12}$

$j = 0, \ldots, 24$

Per I_{30}

$x_j = 0 + j \cdot \frac{1}{15} = \frac{j}{15}$

$j = 0, \ldots, 30$

$|I_{12} - I| \approx 4{,}9 \times 10^{-2}$

$|I_{24} - I| \approx 1{,}2 \times 10^{-2}$

$|I_{30} - I| \approx 7{,}8 \times 10^{-3}$

$(h_0^2, I_{12}), (h_1^2, I_{24}), (h_2^2, I_{30})$

c) $$p(0) = I_{12} \cdot \frac{(0-h_1^2)(0-h_2^2)}{(h_0-h_1^2)(h-h_2^2)} + I_{24} \frac{(0-h_0^2)(0-h_2^2)}{(h_1^2-h_0^2)(h_1^2-h_2^2)} + I_{30} \frac{(0-h_0^2)(0-h_1^2)}{(h_2^2-h_0^2)(h_2^2-h_1^2)}$$

$$p(0) = I_{12} \frac{4}{63} + I_{24} \frac{64}{27} + I_{30} \frac{625}{189} = 8{,}38905610 02\ldots$$

$$|p(0) - I| \approx 1{,}3 \times 10^{-9}$$

d) $\varepsilon \approx 1{,}3 \times 10^{-9}$ Per il teorema sull'errore della formula dei trapezi,

$$\left| \int_0^2 x e^x \, dx - I_h \right| = \left| -\frac{2 f''(\eta)}{12} \cdot \left(\frac{2-0}{h}\right)^2 \right| = \frac{2|f''(\eta)|}{3h^2} \qquad \forall \eta \in [0,2]$$

si ha $f(x) = x e^x$

$$f'(x) = e^x + x e^x = e^x(1+x)$$
$$f''(x) = e^x + (1+x)e^x = (x+2)e^x$$
$\forall x \in [0,2]$

$$|f''(x)| = |(x+2)e^x| = (x+2)e^x \leq 4e^2$$

$$\left| \int_0^2 x e^x \, dx - I_h \right| \leq \frac{8e^2}{3h^2}$$

Impongo che

$$\frac{8e^2}{3h^2} \leq \varepsilon \iff h \geq \sqrt{\frac{8e^2}{3\varepsilon}} = h(\varepsilon)$$

Conclusione per ottenere un errore $|I - I_h| \leq 1{,}3 \times 10^{-9}$ devo prendere $n \geq h(1{,}3 \times 10^{-9}) = 123113{,}92\ldots$

Esercizio 2.3. Consideriamo i segu

- $f(x) = e^{-x}$ e $[a, b] = [0, 1]$;
- $f(x) = \log x$ e $[a, b] = [1, 2]$.

Per ciascuno di questi casi, indichiamo con I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(a) Calcolare I.

(b) Calcolare I_3, I_6, I_{12} e confrontarli con il valore esatto I.

(c) Calcolare $p(0)$, dove $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione dei dati (h_0^2, I_3), (h_1^2, I_6), (h_2^2, I_{12}) e h_0, h_1, h_2 sono i passi di discretizzazione delle formule dei trapezi I_3, I_6, I_{12}. Confrontare inoltre $p(0)$ con il valore esatto I.

(d) Posto $\varepsilon = |p(0) - I|$, determinare un n in modo tale che la formula dei trapezi I_n fornisca un'approssimazione di I con errore $|I_n - I| \le \varepsilon$.

IMPLEMENTAZIONE MATLAB DELL'ALGORITMO DI VALUTAZIONE DEL POLINOMIO DI INTERPOLAZIONE

Esercizio 2.4. Usando i programmi creati per risolvere gli Esercizi 1.11 e 2.2, scrivere un programma MATLAB che implementa il metodo di estrapolazione. Il programma deve:

- prendere in input gli estremi a, b di un intervallo, una funzione $f(x)$ definita su $[a, b]$ e un vettore $[n_0, n_1, \ldots, n_m]$ di numeri $n_0, n_1, \ldots, n_m \ge 1$ tutti distinti;
- restituire in output il valore estrapolato $p(0)$, dove $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione dei dati (h_0^2, I_{n_0}), (h_1^2, I_{n_1}), …, (h_m^2, I_{n_m}) e h_0, h_1, …, h_m sono i passi di discretizzazione delle formule dei trapezi I_{n_0}, I_{n_1}, …, I_{n_m} per approssimare $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

ESEMPIO PRECEDENTE

Verificare la correttezza del programma usandolo in particolare per riottenere il risultato dell'Esempio 2.4(c).