Polinomi di matrici

Se $p(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\ldots+a_n\lambda^n$ e' un polinomio e $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ e' una matrice:

definiamo $p(A)=a_0 I+a_1 A+a_2 A^2+\ldots+a_n A^n$

Esempio

se $p(\lambda)=1-2\lambda^2+\lambda^3 \Rightarrow p(A)=1-2A^2+A^3$

Teorema

Se $p(\lambda)$ e' un pol. e $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ e' una matrice con autovalori $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$

allora gli autovalori di $P(A)$ sono:

$$p(\lambda_1),p(\lambda_2),\ldots,p(\lambda_n)$$

Dim in casi particolari

1^o caso:

Il pol $p(\lambda)=\underbrace{a_0}_{a_0\lambda^0}$ e' costante

Allora $p(A)=a_0 I \Rightarrow p(A)=\begin{bmatrix} a_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ gli autovalori di $p(A)$ sono $\underbrace{a_0,\ldots,a_0}_{n\text{ volte}}=p(\lambda_1),\ldots,p(\lambda_n)$

2^o caso:

Il pol. $p(\lambda)=a_0+a_1\lambda$ ha grado 1.

In tal caso, il pol caratteristico di $p(A)$ e quello di A sono legati dalla relazione:

Promemoria

$\alpha\in\mathbb{C}$ e $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$

$\det(\alpha B)=\alpha^n\det(B)$

$$c_{p(A)}(\lambda)=\det(\lambda I-p(A))=\det(\lambda I-(a_0+a_1A))=\det((\lambda-a_0)I+a_1A)=$$

$$=\det\left(a_1\left(\frac{\lambda-a_0}{a_1}I-A\right)\right)=a_1^n\det\left(\frac{\lambda-a_0}{a_1}I-A\right)=$$

$$=a_1^n C_A\left(\frac{\lambda-a_0}{a_1}\right)$$

Quindi gli autovalori di $p(A)$ sono:

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : C_{p(A)}(\lambda)=0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : C_A\left(\frac{\lambda - a_0}{a_1}\right)=0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \frac{\lambda - a_0}{a_1} = \lambda_1, \dots, \lambda_n\} =$$
$$= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a_0 + a_1\lambda_1 + a_1\lambda_2 + \dots + a_1\lambda_n\} =$$
$$= \{p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)\}$$

3° caso:

La matrice A e' diagonizzabile
In tal caso $\exists X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale t.c.

$$A = XDX^{-1}$$
$$A^2 = XDX^{-1}XDX^{-1} = XD^2X^{-1}$$
$$A^3 = XDX^{-1}XDX^{-1}XDX^{-1} = XD^3X^{-1}$$
$$\vdots$$
$$A^k = XD^kX^{-1} \quad \forall k \geq 0$$

Fissiamo un generico pol. $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_m\lambda^m$

Allora $p(D) = a_0 I + a_1 D + \dots + a_m D^m =$

$$= a_0 \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} + \dots + a_m \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

e $p(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_m A^m =$

$$= a_0 I + a_1 XDX^{-1} + \dots + a_m XD^mX^{-1} = X\underbrace{\left(a_0 I + a_1 D + \dots + a_m D^m\right)}_{p(D)}X^{-1} =$$

$$= X \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(\lambda_n) \end{bmatrix} X^{-1}$$

Conclusione

La precedente scrittura ci dice che $p(A)$ e' diagonalizzabile con autovalori $p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)$ e con corrispondenti autovettori uguali a quelli di A dati dalle colonne di X

Esempio

Sia A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ calcolare gli autovalori di $B = 2I + A - 3A^7$.

Soluzione

$B = p(A)$ con $p(\lambda) = 2 + \lambda - 3\lambda^7$

$\Rightarrow$ per il teo gli autovalori di B sono $p(\lambda_1), p(\lambda_2), p(\lambda_3)$ dove $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono gli autovalori di A

Siccome A e' triangolare, gli autovalori di A sono:

$\lambda_1 = 1$ | | $p(\lambda_1) = p(1) = 0$
$\lambda_2 = -3$ | $\Rightarrow$ gli autovalori di B sono | $p(\lambda_2) = p(-3) = 2 - 3 - 3(-3)^7 = 6560$
$\lambda_3 = 1$ | | $p(\lambda_3) = p(1) = 0$