Forma di Newton del pol. d'interpolazione

Def (differenze divise)

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione

- se $y\in[a,b]$ si definisce differenza divisa di $f(x)$ relativa a y il numero:

$$f[y]=f(y)$$

- se $y_1,\dots,y_k\in[a,b]$ sono $k\geq 2$ punti distinti, si definisce differenza divisa di $f(x)$ relativa a $y_1,\dots,y_k$ il numero:

$$f[y_1,\dots,y_k]=\frac{f[y_1,\dots,y_{k-2},y_k]-f[y_1,\dots,y_{k-1}]}{y_k-y_{k-1}}$$

esempio per $k=2$

rapporto incrementale di $f(x)$ relativo ai punti y_1 e y_2

$$f[y_1,y_2]=\frac{f[y_2]-f[y_1]}{y_2-y_1}=\frac{f(y_2)-f(y_1)}{y_2-y_1}$$

Teorema

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione e siano $x_0,\dots,x_n\in[a,b]$ punti distinti

allora il pol. d'interpol. di $f(x)$ sui nodi $x_0,\dots,x_n$ e'

$$p(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\dots+f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n) \qquad (\mathcal{N})$$

Corollario

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione e siano $x_0,\dots,x_n\in[a,b]$ punti distinti

allora $f[x_0,\dots,x_n]$ non cambia se vengono permutati i suoi $n+1$ segmenti, cioe':

$$f[x_0,\dots,x_n]=f[x_{\sigma(0)},\dots,x_{\sigma(n)}] \qquad \forall \text{ permutazione } \sigma \text{ di } \{0,\dots,n\}$$

esempio per $n=2$, $\{0,1,2\}$, x_0,x_1,x_2

$\sigma=[2,0,1]$

$\sigma(0)=2$, $\sigma(1)=0$, $\sigma(2)=1$

$f[x_0,x_1,x_2]=f[x_2,x_0,x_1]$

Dim

Sia σ una fissata (generica) permutazione di $\{0, \dots, n\}$

applicando il precedente teo. con i nodi $x_0, \dots, x_n$ si deduce che il pol. d'inter. $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0, \dots, x_n$ e' dato da:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \quad (\eta)$$

applicandolo invece con i nodi $x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n)}$ si deduce che il pol. d'inter. $p_\sigma(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n)}$ e' dato da:

$$p_\sigma(x) = f[x_{\sigma(0)}] + f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}](x - x_{\sigma(0)}) + f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}](x - x_{\sigma(0)})(x - x_{\sigma(1)}) + \dots + f[x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n)}](x - x_{\sigma(0)}) \cdot \dots \cdot (x - x_{\sigma(n)}) \quad (\eta_\sigma)$$

Oss 1

il pol. d'interpol. $p(x)$ non dipende dall'ordinamento dei nodi e quindi $p(x) = p_\sigma(x)$

Oss 2

del termine di grado massimo

il coefficiente direttore di $p(x)$ e' $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ = il numero che moltiplica x^n in $p(x)$

il coefficiente direttore di $p_\sigma(x)$ e' $f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}]$ = il numero che moltiplica x^n in $p_\sigma(x)$

Conclusioni

Poiche' $p(x) = p_\sigma(x)$ per l'oss 1, deve essere $f[x_0, \dots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n)}]$

Esempio

Scrivere in forma canonica e in forma di Newton il pol. d'interpol. $p(x)$ di $f(x) = \sqrt{x}$ sui nodi $x_0 = 0,\ x_1 = 0.16,\ x_2 = 0.64,\ x_3 = 1$

Soluzione

Iniziamo dalla forma di Newton (da cui poi otteniamo la forma canonica semplicemente sviluppando i calcoli)

In base al teo precedente $p(x)$ e dato in forma di Newton dalla formula

$$p(x) = \underline{f[x_0]} + \underline{f[x_0, x_1]}(x - x_0) + \underline{f[x_0, x_1, x_2]}(x - x_0)(x - x_1) + \underline{f[x_0, x_1, x_2, x_3]}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \quad (N)$$

L'unica cosa da fare e' calcolare la diff. divise rosse. A tal fine si usa la <u>Tabella delle differenze divise</u>

$f[x_0]$

$f[x_1]$ $f[x_0,x_1]$

$f[x_2]$ $f[x_0,x_2]$ $f[x_0,x_1,x_2]$

$f[x_3]$ $f[x_0,x_3]$ $f[x_0,x_1,x_3]$ $f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

$f[x_0]=f(x_0)=0$

$f[x_1]=f(x_1)=0{,}4$

$f[x_2]=f(x_2)=0{,}8$

$f[x_3]=f(x_3)=1$

$$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=\frac{0{,}4}{0{,}16}=\frac{5}{2}$$

$$f[x_0,x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_0]}{x_2-x_0}=\frac{0{,}8}{0{,}64}=\frac{5}{4}$$

$$f[x_0,x_3]=\frac{f[x_3]-f[x_0]}{x_3-x_0}=1$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}=\frac{-5/4}{0{,}64-0{,}16}=-\frac{126}{48}$$

$$f[x_0,x_1,x_3]=\frac{f[x_0,x_3]-f[x_0,x_1]}{x_3-x_1}=\frac{1-5/4}{1-0{,}16}=-\frac{25}{49}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_0,x_1,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_2}=\frac{-\frac{25}{4}+\frac{125}{48}}{1-0{,}64}=\frac{6278}{3024}$$

Sostituiamo in (N) gli elementi rossi trovati e così otteniamo la forma di Newton di $p(x)$

$$p(x)=0+\frac{5}{2}x-\frac{126}{48}x(x-0{,}16)+\frac{6875}{3024}x(x-0{,}16)(x-0{,}64)$$

Sviluppando i calcoli, possiamo riscrivere $p(x)$ in forma canonica:

$$P(x)=\frac{6876}{3024}x^3-\frac{13375}{3024}x^2+\frac{2381}{756}x$$

Oss

Supponiamo di avere dei dati $(x_0,y_0)(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)\in\mathbb{R}^2$ con i nodi $x_0,\dots,x_n$ distinti

I numeri $y_0,\dots,y_n$ possono essere sempre interpretati come i valori in $x_0,\dots,x_n$ di una qualche funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definita su un qualche intervallo $[a,b]$ che contiene i nodi $x_0,\dots,x_n$

Dunque ha perfettamente senso parlare di formula di Newton del pol. d'interp. dei dati $(x_0,y_0)(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ basta infatti immaginarsi una qualche $f(x)$ t.c. $f(x_i)=y_i$ $\forall i=0,\dots,n$ e il gioco e' fatto