ACCETTABILITÀ E DECIDIBILITÀ DI UN LINGUAGGIO (RICONOSCITORE)

DATA $T = < \Sigma, Q, P, q_0, Q_F >$

$A_T = \{ x \in \Sigma^* : O_T(x) = q_A \}$

DEF

LINGUAGGIO

SIA $L \subseteq \Sigma^*_1$ T:

L È DECISO DA T SE:

$$\forall x \in \Sigma^* \quad O_T(x) = \begin{cases} q_A & \text{SE } x \in L \\ q_R & \text{SE } x \notin L \end{cases}$$

→ DISTINGUIAMO L'APPARTENENZA DI X A L

L È ACCETTATO DA T SE:

$\forall x \in L \quad O_T(x) = q_A$ E $\forall x \notin L \quad O_T(x) \neq q_A$

L È DECIDIBILE SE:

$\exists$ T CHE DECIDE L

L È ACCETTABILE SE:

$\exists$ T CHE ACCETTA L

L^c È IL COMPLEMENTO DI L SE:

$L^c = \Sigma^* - L$

ES

T_{PD} → MACCHINA DI PARI E DISPARI

$<q_0, 0, 0, q_0, D> <q_0, 1, 1, q_1, D>$

$<q_1, 0, 0, q_1, D> <q_1, 1, 1, q_0, D>$

$<q_0, \square, \square, q_A, F> <q_1, \square, \square, q_R, F>$

$L = \{ x \in \{0,1\}^* : x$ CONTIENE UN NUMERO PARI DI $1 \}$

⇓

L DECISO DA T, L È DECIDIBILE

$<q_0, 0, 0, q_0, D> <q_0, 1, 1, q_1, D>$

$<q_1, 0, 0, q_1, D> <q_1, 1, 1, q_0, D>$ L NON È DECIDIBILE

$<q_0, \square, \square, q_A, F> <q_1, \square, \square, q_1, F>$

LA COMPUTAZIONE POTREBBE NON TERMINARE

TEOREMA L È DECIDIBILE <=> (L È ACCETTABILE) E (L^c È ACCETTABILE)

DIM (=>)

- ACCETTABILITÀ DI L:

DEF DI DECIDIBILITÀ — DEF DI ACCETTABILITÀ

$$L \text{ È DECIDIBILE} \longrightarrow \forall x \in \Sigma^* \; O_T(x) = \begin{cases} q_A & \text{SE } x \in L \\ q_R & \text{SE } x \notin L \end{cases} \longrightarrow T \text{ ACCETTA } L$$

- ACCETTABILITÀ DI L^c:

COSTRUISCO T' CON INPUT X:

1) ESEGUO T(x)

2) SE $O_T(x) = q_A \longrightarrow$ TERMINO IN q_R

SE $O_T(x) = q_A \longrightarrow$ TERMINO IN q_R

DIM (<=)

SE L È ACCETTABILE:

$$\exists T : \forall x \in \Sigma^* [O_T(x) = q_A \iff x \in L] \longrightarrow \text{DEF DI ACCETTABILITÀ}$$

SE L^c È ACCETTABILE:

$$\exists T^c : \forall x \in \Sigma^* [O_{T^c}(x) = q_A \iff x \notin L] \longrightarrow \text{DEF DI ACCETTABILITÀ}$$

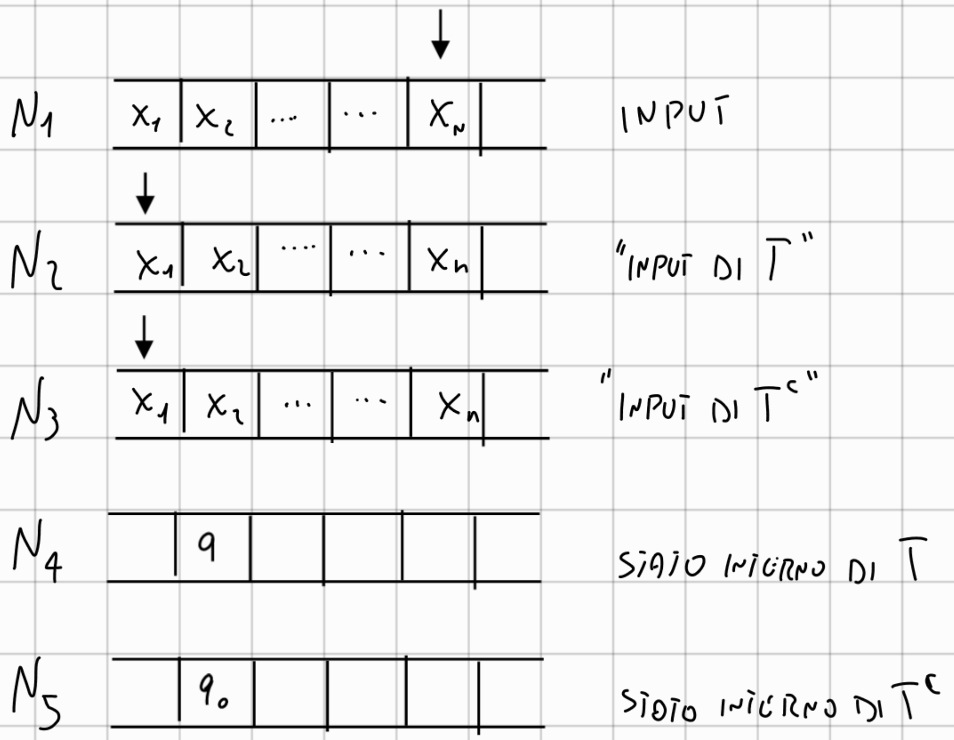
DEFINISCO T':

1) SIMULA UN ISTRUZIONE DI $T(x)$ SU N_2:
- SE T NON È IN q_A ESEGUI 2)
- SE T È IN $q_A \Rightarrow q_A$

COSTRUENDO T' IN QUESTO MODO

→ AVREMO SICURAMENTE UN RISULTATO

2) SIMULA UN ISTRUZIONE DI $T^c(x)$ SU N_3:
- SE T^c NON È IN q_A^c ESEGUI 1)
- SE T^c È IN $q_A^c \Rightarrow q_R$



ESERCIZI

1) DATI L_1 E L_2 DECIDIBILI $\Rightarrow L_1 \cup L_2$ È DECIDIBILE

DIM

POSSIAMO SIMULARE LE MACCHINE T_1 E T_2 IN UNA MACCHINA T':

ESEGUE L'ALGORITMO DI RICONOSCIMENTO PER x DI T_1 E POI DI T_2

TERMINERÀ IN q_A SE $x \in L_1 \cup L_2$, ALTRIMENTI TERMINERÀ IN q_R

2) DATI L_1 E L_2 DECIDIBILI $\Rightarrow$ $L_1 \cap L_2$ È DECIDIBILE

DIM

POSSIAMO SIMULARE LE MACCHINE T_1 E T_2 IN UNA MACCHINA T':

ESEGUE L'ALGORITMO DI RICONOSCIMENTO PER X DI T_1 E POI DI T_2

TERMINERÀ IN q_A SE $x \in L_1 \cap L_2$, ALTRIMENTI TERMINERÀ IN q_R

3) DATI L_1 E L_2 ACCETTABILI $\Rightarrow$ $L_1 \cup L_2$ ACCETTABILE

DIM

POSSIAMO SIMULARE T_1 E T_2 IN T':

ESEGUE IN MANIERA ALTERNATA L'ALGORITMO DI T_1 E T_2 E:

TERMINERÀ IN q_A SE ALMENO 1 FRA T_1 E T_2 TERMINERÀ LA COMPUTAZIONE CON ESITO POSITIVO

4) DATI L_1 E L_2 ACCETTABILI $\Rightarrow$ $L_1 \cap L_2$ ACCETTABILE

DIM

POSSIAMO SIMULARE T_1 E T_2 IN T':

ESEGUE IN MANIERA ALTERNATA L'ALGORITMO DI T_1 E T_2 E:

TERMINERÀ IN q_A SE ENTRAMBI GLI ALGORITMI DI T_1 E T_2 TERMINERANNO LA COMPUTAZIONE CON ESITO POSITIVO

ACCETTABILITÀ E DECIDIBILITÀ DI UN LINGUAGGIO (TRASDUTTORE)

DEF

DATI $\Sigma_1, \Sigma_2, f: \Sigma_1^* \longrightarrow \Sigma_2^*$:

f È CALCOLABILE SE:

$\exists T_f: \forall x \in \Sigma_1^*$

$O_{T_f}(x) = f(x)$ È DEFINITA $\longrightarrow$ AMMETTE SOLUZIONE

FUNZIONE χ

FUNZIONE COMPLETA CHE:

$$\forall x: \chi(x) = \begin{cases} 0 \text{ SE } x \notin L \\ 1 \text{ SE } x \in L \end{cases}$$

TEOREMA

L È DECIDIBILE $\Longleftrightarrow \chi_L$ È CALCOLABILE

DIM ($\Rightarrow$)

SE L È DECIDIBILE $\Rightarrow \exists T_L: \forall x \in \Sigma^* [O_{T_L}(x) = q_A \Leftrightarrow x \in L]$

E

$\exists T_L: \forall x \in \Sigma^* [O_{T_L}(x) = q_R \Leftrightarrow x \notin L]$

DEFINIAMO T_L' CON INPUT x:

SIMULIAMO T_L: SE $T_L'(x) = q_A$ SCRIVO 1

SE $T_L'(x) = q_R$ SCRIVO 0

DIM($\Leftarrow$)

SE χ_L È CALCOLABILE:

$$\exists\, T'_L : \forall x \in \Sigma^* \left[T'_L(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in L \\ 0 & \text{SE } x \notin L \end{cases} \right.$$

ASSOCIARE UN LINGUAGGIO AD UNA FUNZIONE

$$L_f = \{ (x,y) \in \Sigma_1^* \times \Sigma_2^* : y = f(x) \}$$

$\hookrightarrow$ GRAFICO CARTESIANO

TEOREMA SE f È CALCOLABILE $\Rightarrow$ L_f È ACCETTABILE

DIM

$$f \text{ CALCOLABILE} \iff \exists\, T_f\ \forall x \in \Sigma_1^* \left[O_{T_f}(x) = f(x) \text{ È DEFINITA} \right]$$

DEFINIAMO T_L RICONOSCITORE CON INPUT $(X,Y) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$:

i) SCRIVIAMO X SU N_1

ii) SCRIVIAMO Y SU N_2

iii) ESEGUIAMO T_f SU X:

- iii.a) SE $O_{T_f}(X) = Y$ ALLORA $O_{T_L}(X) = q_A$
- iii.b) SE $O_{T_f}(x) \neq Y$ ALLORA $O_{T_L}(x) = q_R$