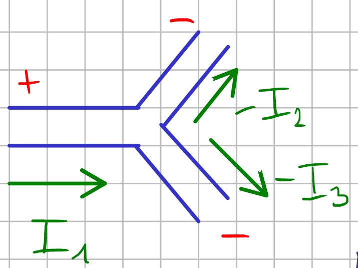
Lezione 29/05/2023

Leggi di Kirchhoff

- Si dice ramo un tratto singolo di un circuito che contiene almeno un elemento (generatore, resistenza, etc...)
- Si dice nodo un punto di un circuito in cui confluiscono più di due rami.
- Si dice maglia di un circuito un percorso chiuso compreso nel circuito.

1) Prima legge (regola dei nodi)

in ogni nodo di un circuito, la somma algebrica delle correnti deve essere nulla



$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Per N rami: $\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$

2) Seconda legge (regola delle maglie)

La somma algebrica delle differenze di potenziale ai capi di ciascun elemento di una maglia deve essere nulla.

$\sum_{i=1}^{N} V_i = 0$ all'interno di una maglia.

Nell'applicare la seconda legge conviene considerare le seguenti regole

1) Se un resistore è percorso nello stesso verso della corrente, si ha una caduta di potenziale $-RI$.

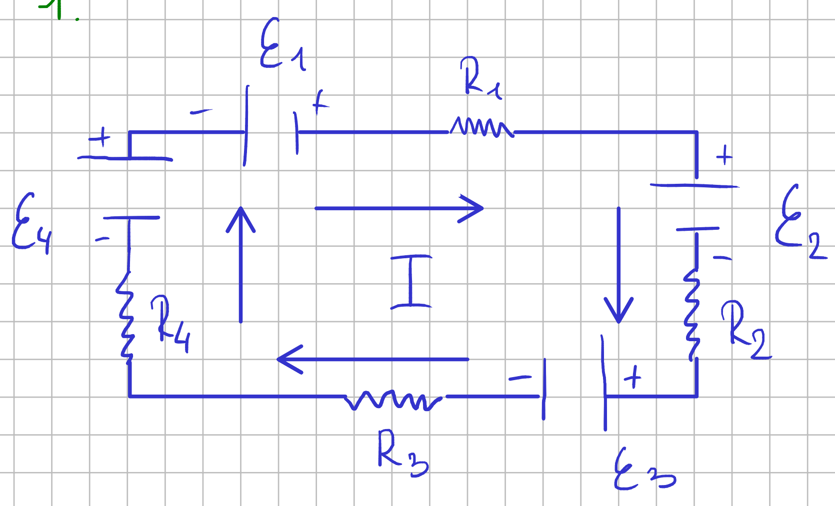
2) Se un resistore è percorso in verso opposto rispetto a quello della corrente, si ha un salto di potenziale $+RI$.

3) Se una sorgente di F.E.M. viene attraversata dal polo negativo a quello positivo, si ha un aumento di potenziale $+\mathcal{E}$.

4) Se una sorgente di F.E.M. viene attraversata dal polo positivo a quello negativo, si ha una caduta di potenziale $-\mathcal{E}$.

Per quanto riguarda le maglie, è necessario che ogni nuova equazione si riferisca a una maglia che contenga almeno un ramo non in comune con tutte le altre maglie.

Esempio 1.



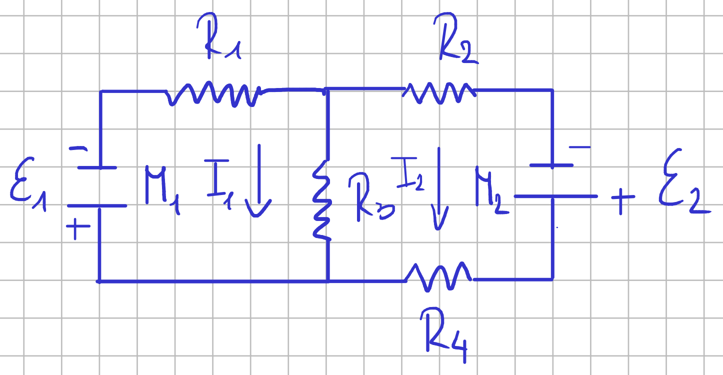
Note $\mathcal{E}_i$ e R_i

$$\mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_1 - IR_1 - \mathcal{E}_2 - IR_2 - \mathcal{E}_3 - IR_3 - IR_4 = 0 \Rightarrow$$

$$\mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 - I(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) = 0 \Rightarrow$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

Esempio 2.



Note $\mathcal{E}_i$ e R_i

$$I: \begin{array}{l} I_1 \\ I_2 \end{array} \begin{cases} -\mathcal{E}_1 - R_1 I_1 - R_3 I_1 + R_3 I_2 = 0 \\ \mathcal{E}_2 - I_2 R_4 - I_2 R_3 + I_1 R_3 - I_2 R_2 = 0 \end{cases}$$

I_1 e I_2 sono le incognite

$$\begin{cases} -I_1 (R_1 + R_3) + I_2 R_3 = \mathcal{E}_1 \\ +I_1 R_3 - I_2 (R_2 + R_3 + R_4) = -\mathcal{E}_2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -(R_1+R_3) & R_3 \\ R_3 & (R_2+R_3+R_4) \end{vmatrix} = -(R_1+R_3)(R_2+R_3+R_4) - R_3^2 =$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathcal{E}_1 & R_3 \\ -\mathcal{E}_2 & (R_1+R_2+R_4) \end{vmatrix} = \mathcal{E}_1 (R_1+R_2+R_4) + \mathcal{E}_2 R_3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -(R_1+R_3) & \mathcal{E}_1 \\ R_3 & \mathcal{E}_2 \end{vmatrix} = -\mathcal{E}_2 (R_1+R_3) - \mathcal{E}_1 R_3$$

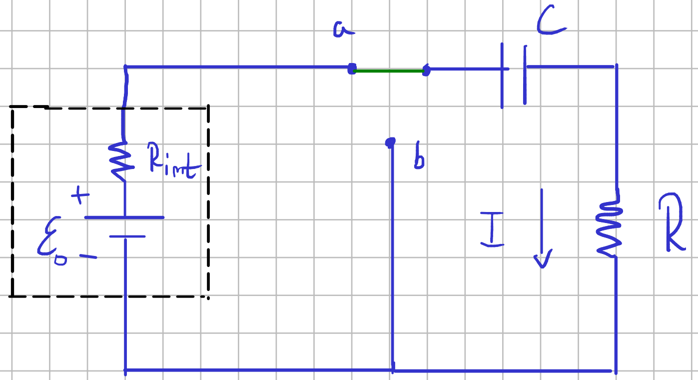
$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$P = \Delta V \cdot I = P_{I_1} + P_{I_2} = \mathcal{E}_1 I_1 + \mathcal{E}_2 I_2$$

Circuiti RC

Un circuito RC contiene almeno un collegamento in serie di una resistenza e di un condensatore.

a) Carica di un condensatore



$$C = \frac{q}{\Delta V} \rightarrow \Delta V = \frac{q}{C}$$

$$\mathcal{E}_0 - I R_{int} - I R - \frac{q}{C} = 0, \quad I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow$$

$$\mathcal{E}_0 - \frac{dq}{dt}\left(R_{int} + R\right) - \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{dq}{dt}\left(R_{int} + R\right) = \mathcal{E}_0 - \frac{q}{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} C \left(R_{int} + R\right) = C\mathcal{E}_0 - q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{-C\mathcal{E}_0 + q} = -\frac{1}{C(R_{int} + R)} dt, \quad \underline{Q = q - C\mathcal{E}_0}, \quad dQ = dq$$

$*$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{Q} = \frac{-dt}{C(R_{int} + R)} \Rightarrow \int_{Q(t_0)}^{Q(t)} \frac{1}{Q} dQ = -\int_{t_0}^{t} \frac{1}{C(R_{int} + R)} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln|Q|\Big|_{Q(t_0)}^{Q(t)} = \frac{-(t-t_0)}{C(R_{int}+R)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{Q(t)}{Q(t_0)}\right) = \frac{-(t-t_0)}{C(R_{int}+R)} \overset{exp}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Q(t)}{Q(t_0)} = e^{\frac{-(t-t_0)}{C(R_{int}+R)}} \Rightarrow Q(t) = Q(t_0)\, e^{\frac{-(t-t_0)}{C(R_{int}+R)}}$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \quad & Q(t_0) = \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{q(t_0)} - C\mathcal{E}_0 = -C\mathcal{E}_0 \\ & Q(t) = q(t) - C\mathcal{E}_0 \end{aligned}\right\} \text{da } *$$

$$\Rightarrow \quad q(t) - C\mathcal{E}_0 = -C\mathcal{E}_0\, e^{\frac{-(t-t_0)}{C(R_{int}+R)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad q(t) = C\mathcal{E}_0\left(1 - e^{-\frac{(t-t_0)}{C(R_{int}+R)}}\right),$$

definisco $\tau_{cor} = C(R_{int}+R)$ costante caratteristica del circuito

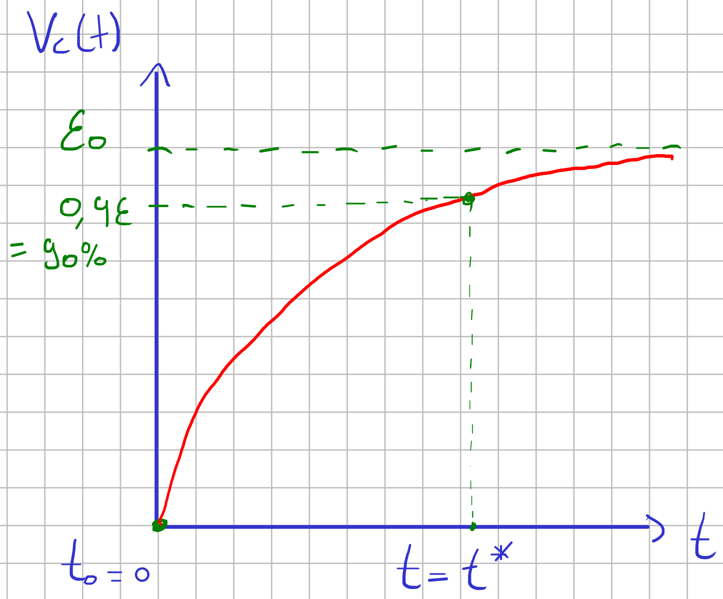
$$\boxed{\begin{aligned} q(t) &= C\mathcal{E}_0\left[1 - e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}\right] \\ V_{cor}(t) &= \mathcal{E}_0\left[1 - e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}\right] \\ I(t) = q'(t) &= \frac{\mathcal{E}_0}{R_{int}+R}\, e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau_{cor}}} \end{aligned}}$$

$t_0 = 0$

Sia t^* il tempo di carica $\Rightarrow V(t^*) = a\,\mathcal{E}_0 \Rightarrow$

$$\cancel{\mathcal{E}_0}\left[1 - e^{-\frac{t^*}{\tau_{cor}}}\right] = a\,\cancel{\mathcal{E}_0} \Rightarrow 1 - a = e^{-\frac{t^*}{\tau_{cor}}} \overset{\ln}{\Rightarrow} \ln(1-a) = -\frac{t^*}{\tau_{cor}} \Rightarrow$$

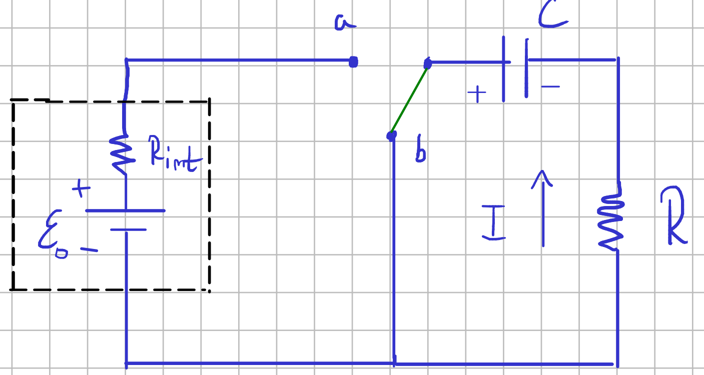
$$t^* = \tau_{cor} \ln\left(\frac{1}{1-a}\right)$$



Tempo di carica per una percentuale del $\geq 90\%$

- $a = 0.9 \rightarrow 90\%$ carico $\rightarrow t^* = 2.3\,\tau$
- $a = 0.95 \rightarrow 95\%$ carico $\rightarrow t^* = 3\,\tau$
- $a = 0{,}99 \rightarrow 99\%$ carico $\rightarrow t^* = 4.6\,\tau$

b) Scarica di un condensatore



$$C = \frac{q}{\Delta V} \rightarrow \Delta V = \frac{q}{C}$$

$$\frac{q}{C} = -IR \Rightarrow \frac{q}{C} = -\frac{dq}{dt}R \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\boxed{\begin{aligned} q(t) &= q\, e^{-\frac{(t-t_0)}{RC}} \\ V_s(t) &= V_0\, e^{-\frac{(t-t_0)}{RC}} \\ I(t) &= \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}\, e^{-\frac{(t-t_0)}{RC}} \end{aligned}}$$

Definisco $\tau_{scarica} = RC$