SOLUZIONE ESERCIZIO 2 MD27

$g(1) = 4 = g(8)$ quindi $f \circ g(1) = f(4) = f \circ g(8)$ perciò $f \circ g$ non è iniettiva.

$f(1) = 1 = f(-1)$ quindi $g \circ f(1) = g(1) = g \circ f(-1)$ perciò $g \circ f$ non è iniettiva.

Se $i \geq 0$ allora $f(i) = i^3 \geq 0$, se $i < 0$ allora $f(i) = -i > 0$ quindi $f(i) \geq 0$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$.

$g \circ f(i) = g(f(i))$ ed $f(i) \geq 0$ quindi: se $f(i)$ è pari allora $g \circ f(i) = f(i)/2 \geq 0$; se invece $f(i)$ è dispari allora $g \circ f(i) = 3f(i) + 1 \geq 0$.

Quindi $g \circ f(i) \geq 0$ per ogni i, perciò $g \circ f$ non è suriettiva dato che non assume mai valori negativi. Pertanto la soluzione è **(d)**.

Qui sotto enuncio i risultati di cui vi avevo parlato durante il tutorato.

Teorema 1. *Siano X, Y, Z insiemi, $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funzioni allora:*

- *se f e g sono iniettive allora $g \circ f$ è iniettiva;*
- *se f e g sono suriettive allora $g \circ f$ è suriettiva.*

Viceversa:

1. *se $g \circ f$ è iniettiva allora f è iniettiva;*
2. *se $g \circ f$ è suriettiva allora g è suriettiva.*

Passando alla contronominale queste ultime due proposizioni (o anche per dimostrazione diretta) si ottiene:

i) se f non è iniettiva allora $g \circ f$ non è iniettiva;

ii) se g non è suriettiva allora $g \circ f$ non è suriettiva.

Proof. Le dimostrazioni sono tutte molto semplici, ne faccio una come esempio, le altre sono un utile esercizio per voi.

1. Per far vedere che f è iniettiva bisogna mostrare che per ogni $x_1, x_2 \in X$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$, si ha che $x_1 = x_2$. Allora, supponendo $f(x_1) = f(x_2)$ si ottiene

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2)$$

ma $g \circ f$ è iniettiva quindi $x_1 = x_2$ quindi f è iniettiva. $\square$