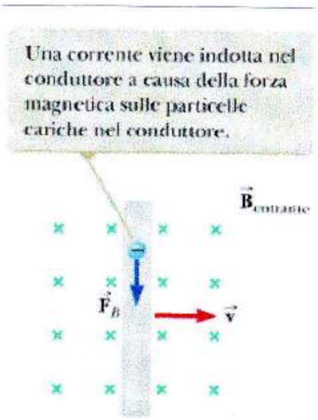
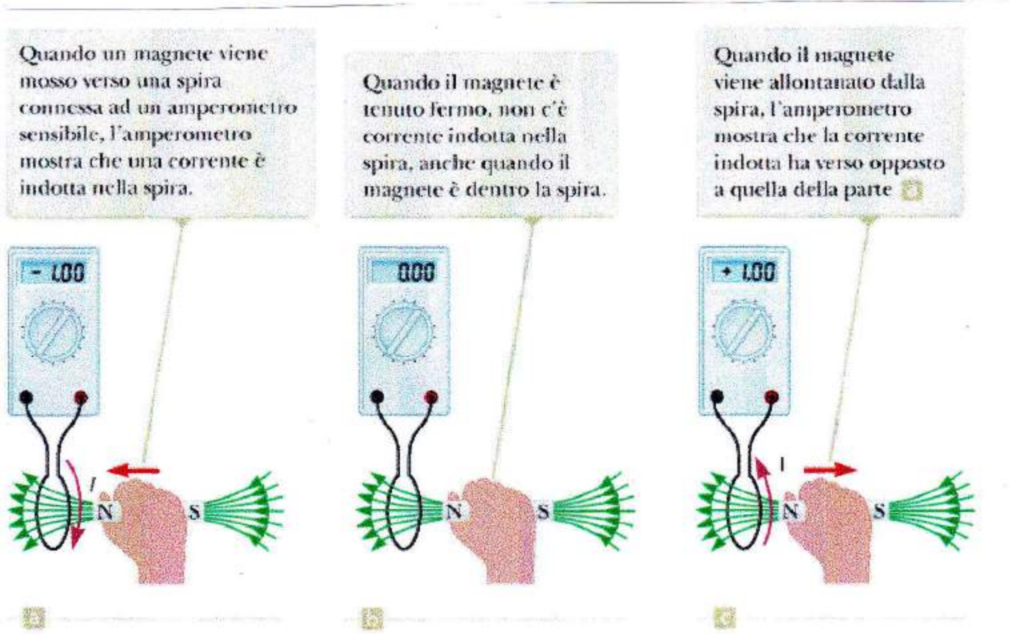
LEGGE DI FARADAY-NEUMANN E INDUTTANZA

Consideriamo un segmento di materiale conduttore posto in un campo magnetico uniforme. Mettiamo il segmento conduttore in moto in direzione perpendicolare al suo lato lungo (vedi la figura a fianco): sugli elettroni liberi nel conduttore inizia ad agire una forza magnetica (per i versi di $\vec{B}$, $\vec{v}$ e $\vec{F}_B$ vedere la figura). Dato che gli elettroni sono liberi all'interno del conduttore ma non possono uscire dal conduttore, si produce una corrente nel filo mentre questo si muove nella regione con campo magnetico.



Consideriamo poi una spira collegata a un AMPEROMETRO (strumento che misura la corrente che circola in un circuito). Mentre un magnete viene avvicinato alla spira, lo strumento misura della corrente presente nella spira

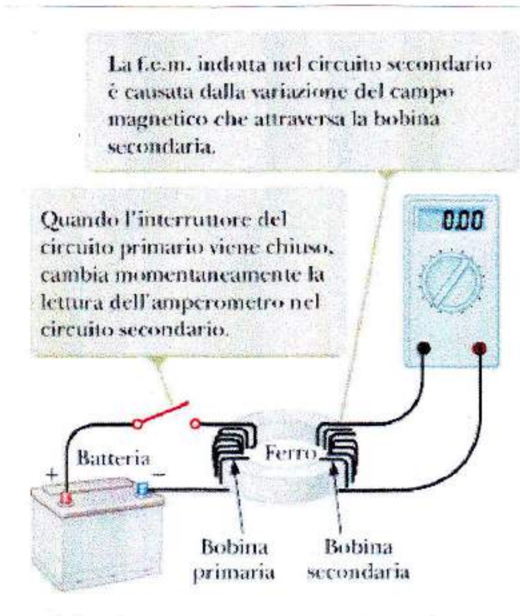


conduttrice; se il magnete è fermo (anche se è inserito nella spira), lo strumento non vede corrente nella spira; se si allontana il magnete dalla spira, durante il moto di allontanamento lo strumento vede ancora una corrente nella spira, di segno opposto rispetto alla corrente vista mentre il magnete si avvicinava.

Altra osservazione cruciale: se il magnete è mantenuto fermo e la spira viene avvicinata al magnete o allontanata dal magnete, mentre la spira si muove l'amperometro vede una corrente nella spira.

[Dunque, si osserva circolare corrente nella spira quando il magnete e la spira si stanno muovendo l'uno rispetto all'altra.]

Non c'è stato bisogno di una batteria per far circolare corrente nella spira: si tratta quindi di CORRENTE INDOTTA, dovuta a una F.E.M. INDOTTA.

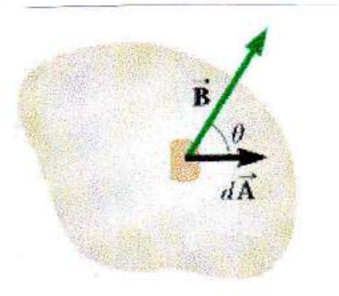


Qui a fianco è rappresentato un esperimento svolto da Michael Faraday. Una bobina è avvolta attorno a un anello di ferro (da un lato di questo) e i suoi estremi sono collegati ai due poli di una batteria: è denominata "bobina primaria" o "avvolgimento primario". Una seconda bobina è avvolta sul lato opposto dello stesso anello di ferro, non è in contatto elettrico con la prima bobina ed è collegata a un amperometro: questa è la "bobina secondaria" o "avvolgimento secondario"; in questo ultimo avvolgimento non c'è nessuna batteria.

Quello che Faraday osservò è che per un breve intervallo di tempo, durante l'accensione o lo spegnimento della batteria nell'avvolgimento primario, l'amperometro nell'avvolgimento secondario osserva una corrente non nulla; le correnti "di accensione" e "di spegnimento" hanno segno opposto. Se nell'avvolgimento primario circola una corrente continua, nel circuito secondario non circola corrente (cioè, l'amperometro indica un valore nullo).

[Dunque, Faraday intuì che un campo magnetico variabile nel tempo può generare una corrente elettrica in un circuito, e che un campo magnetico stazionario non genera corrente.]

Nell'esperimento appena descritto accade che, durante le fasi di accensione e spegnimento della batteria, si genera un campo magnetico variabile nel tempo all'interno dell'avvolgimento primario; questo campo magnetico variabile, confinato spazialmente dall'anello di ferro, si ritrova anche all'interno dell'avvolgimento secondario; la presenza di un campo magnetico variabile all'interno dell'avvolgimento secondario genera una f.e.m. indotta nell'avvolgimento secondario.

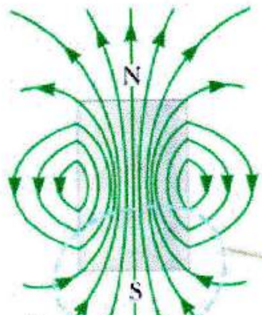


Il FLUSSO MAGNETICO attraverso una superficie nello spazio è definito dalla relazione

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

, con le stesse notazioni utilizzate per la definizione del flusso del campo elettrico, ma con $\vec{B}$ al posto di $\vec{E}$. L'unità di misura del flusso magnetico è

$$\boxed{1\ T \cdot m^2 = 1\ Wb\ (\text{weber})}$$



Il flusso attraverso una superficie chiusa che racchiude uno dei poli è zero.

Nel caso del campo magnetico, le linee di campo sono continue e chiuse: attraverso qualsiasi superficie chiusa nello spazio il numero di linee di campo magnetico entranti nella superficie è uguale al numero di linee di campo magnetico uscenti dalla superficie, cioè risulta che <u>il flusso magnetico attraverso una superficie chiusa è nullo</u>:

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0}$$

LEGGE DI GAUSS PER IL CAMPO MAGNETICO.

Negli esperimenti descritti in precedenza si osserva la generazione di una f.e.m. indotta in un circuito quando il flusso magnetico attraverso una superficie che ha il circuito come contorno varia nel tempo. In generale, vale la seguente legge:

la f.e.m. indotta in un circuito è legata alla rapidità con cui varia il flusso magnetico concatenato con il circuito.

$$\boxed{\mathcal{E} = -[\Phi_B(t)]'}$$

LEGGE DI FARADAY-NEUMANN per un circuito semplice

Il segno negativo nell'equazione appena scritta verrà esaminato più avanti.

Se il circuito è una bobina costituita da N spire concentriche di uguale raggio, e se le linee di campo attraversano tutte le spire, la f.e.m. indotta è:

$$\boxed{\mathcal{E} = -N\,[\Phi_B(t)]'}$$

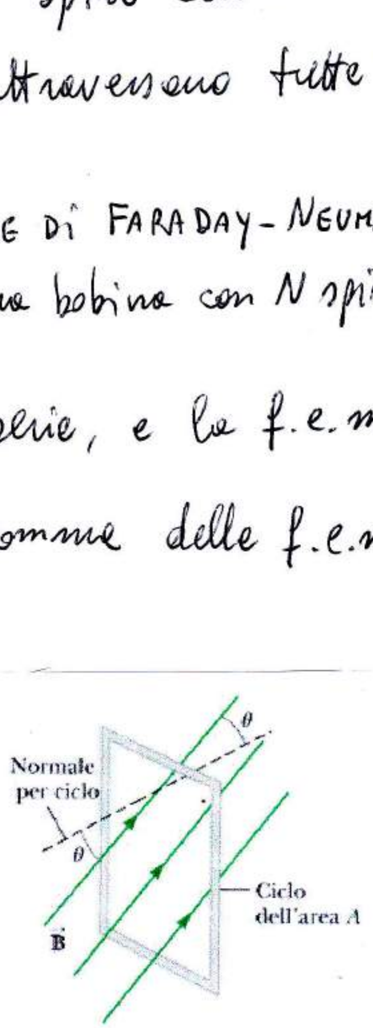
LEGGE DI FARADAY-NEUMANN per una bobina con N spire.

Infatti, in questo caso le N spire sono in serie, e la f.e.m. totale ai capi della bobina è data dalla somma delle f.e.m. indotte in ciascuna bobina.

Il flusso magnetico attraverso una spira piana di area A è, nel caso di $\vec{B}$ uniforme e costante:

$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = B\cos\vartheta \int dA = BA\cos\vartheta,$$

dove $B = |\vec{B}|$.



Dunque, la f.e.m. indotta in questo caso è:

$$\mathcal{E} = -\left[BA\cos\theta\right]'$$

Pertanto, in un circuito si può avere una f.e.m. indotta:

a) se $|\vec{B}|$ varia nel tempo;

b) se la superficie A del circuito varia nel tempo;

c) se l'angolo θ tra $\vec{B}$ e la normale alla superficie delimitata dal circuito varia nel tempo.

La chitarra elettrica sfrutta la legge di Faraday-Neumann per il suo funzionamento: un magnete permanente magnetizza una porzione di corda, e quando questa vibra produce un flusso magnetico variabile nel tempo attraverso una bobina avvolta attorno al magnete permanente; per questa ragione si genera una f.e.m. indotta nella bobina, e quindi un segnale che viene poi amplificato e trasformato in suono.

<u>Esempio 1</u>. Una bobina è formata da $N = 200$ spire di filo conduttore. Ogni spira ha la forma di un quadrato di lato $d = 18$ cm. Viene applicato un campo magnetico uniforme diretto perpendicolarmente al piano della bobina. Se il modulo del campo magnetico varia linearmente da 0 a 0,5 T in 0,8 s, quanto vale la f.e.m. nella bobina mentre il campo sta cambiando?

Risulta: $|\mathcal{E}| = N \left|\dfrac{\Delta \Phi_B}{\Delta t}\right| = N \left|\dfrac{\Delta (BA)}{\Delta t}\right| = NA \left|\dfrac{\Delta B}{\Delta t}\right|$

Nel caso specifico risulta: $N = 200$; $A = d^2 = (0{,}18 \text{ m})^2$;

$\Delta B = 0{,}50 \text{ T} - 0 \text{ T} = 0{,}50 \text{ T}$; $\Delta t = 0{,}8 \text{ s}$

Dunque: $|\mathcal{E}| = 200 \cdot (0{,}18 \text{ m})^2 \left|\dfrac{0{,}50 \text{ T}}{0{,}8 \text{ s}}\right| = 4{,}05 \text{ V}$

<u>Esempio 2</u>. Una spira piana di area A è posta in una regione in cui il campo magnetico è perpendicolare al piano della spira. Il modulo di $\vec{B}$ varia nel tempo secondo l'espressione $B = B_{max} e^{-at}$, dove a è una costante. Calcolare la f.e.m. indotta nella spira in funzione del tempo.

Il flusso magnetico attraverso la spira è:

$$\Phi_B = BA = AB_{max} e^{-at}$$

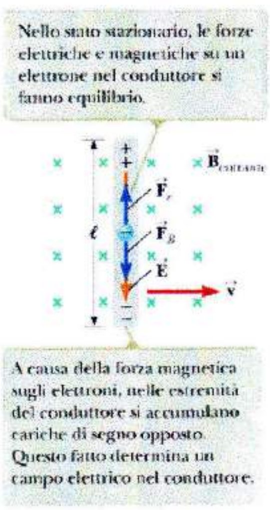
Applicando la legge di Faraday-Neumann otteniamo:

$$\boxed{\mathcal{E} = -[\Phi_B(t)]' = -AB_{max} [e^{-at}]' = aAB_{max} e^{-at}}$$

<u>Forza elettromotrice dinamica</u>

La FORZA ELETTROMOTRICE (F.E.M.) DINAMICA è la f.e.m. indotta in un conduttore che si sta muovendo in un campo magnetico.

Consideriamo un conduttore rettilineo di lunghezza l, in moto con velocità costante in un campo magnetico uniforme entrante nel piano del foglio (vedi figura). Supponiamo che risulti $\vec{v} \perp \vec{B}$. Il modulo della forza agente sugli elettroni del conduttore è:



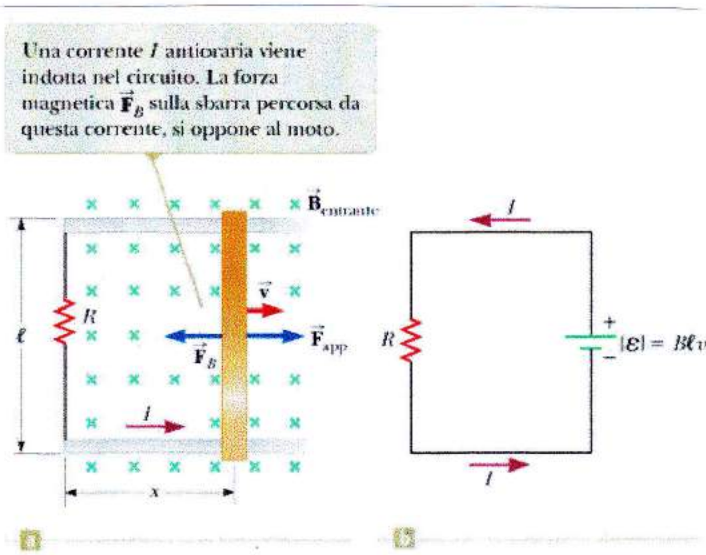
$|\vec{F}_B| = |q\vec{v} \times \vec{B}| = |q| v B$. Nello schema della figura $\vec{F}_B$ è diretta verso il basso, per cui gli elettroni si muovono verso la parte inferiore del conduttore, accumulandosi lì e lasciando un eccesso di carica positiva nella parte superiore: in questo modo si instaura un campo elettrico $\vec{E}$ nel conduttore. Le cariche continuano ad accumularsi alle due estremità del conduttore fino a quando la forza elettrica e la forza magnetica agenti su un elettrone si bilanciano (vedi figura); all'equilibrio risulta:

$$|\vec{F}_e| = |\vec{F}_B| \Rightarrow \cancel{q}E = \cancel{q}vB \Rightarrow E = vB$$

Poiché risulta $\Delta V = E l$, otteniamo $\boxed{\Delta V = B l v}$

Finché il conduttore si muove nel campo magnetico, è presente una differenza di potenziale tra i suoi estremi; invertendo il verso di $\vec{v}$, si inverte la polarità della differenza di potenziale.

Una situazione particolare ma di estremo interesse si verifica quando il tratto di conduttore in movimento è una parte di un circuito elettrico.



Nella figura qui a fianco e' rappresentato un circuito in cui e' presente una sbarretta conduttrice di lunghezza ℓ, che puo' scorrere su due guide conduttrici fisse e parallele. Supponiamo che la resistenza del resto del circuito sia R, mentre la resistenza della sbarretta e' trascurabile. Applichiamo un campo magnetico uniforme e costante $\vec{B}$ perpendicolarmente al piano del circuito (vedi figura). Se la sbarretta viene tirata verso destra da una forza $\vec{F}_{app}$, e se $\vec{v}$ e' la sua velocita' istantanea, le cariche libere nella sbarretta sono sottoposte a una forza magnetica diretta lungo la sbarretta; dato che la sbarretta e' un tratto di un circuito chiuso, quindi, nel circuito inizia a circolare una corrente continua: la rapidita' di cambiamento di Φ_B attraverso il circuito e la f.e.m. indotta che ne deriva ai capi della sbarretta sono proporzionali alla variazione dell'area delimitata dal circuito durante il moto della sbarretta nel campo magnetico.

Dalla geometria del circuito ricaviamo l'espressione del flusso magnetico concatenato con il circuito:

$\Phi_B = B\ell x$; l'unico parametro che varia nel tempo e' la lunghezza x del lato orizzontale del circuito. Allora, per la legge di Faraday-Neumann, risulta:

$$\boxed{\mathcal{E} = -[\Phi_B(t)]' = -[B\ell x(t)]' = -B\ell[x(t)]' = -B\ell v}$$

E se R e' la resistenza del circuito, l'intensita' della corrente indotta e' $I = |\mathcal{E}|/R = \frac{B\ell v}{R}$

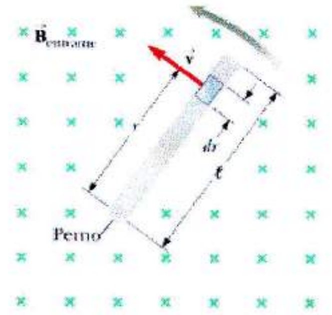
Finché la sbarretta si muove, si comporta quindi come una batteria.

Analizziamo il circuito dal punto di vista energetico. Quale è l'origine della corrente indotta, e quindi dell'energia fornita al resistore, visto che non ci sono batterie nel circuito?
Osserviamo che la forza esterna $\vec{F}_{app}$ compie lavoro nel conduttore, facendo sì che sulle cariche libere agisca una forza magnetica. Sulla base dell'analisi energetica di un circuito contenente resistori, possiamo dire che il lavoro totale compiuto nel sistema dalla forza applicata mentre la sbarretta si muove a velocità costante deve essere uguale all'aumento dell'energia interna del resistore durante questo intervallo. Vediamo meglio questo fatto.
Osserviamo che la sbarretta di lunghezza l, percorsa da una corrente I mentre si muove nel campo magnetico, sente l'azione di una forza magnetica $\vec{F}_B$, opposta a $\vec{v}$, di modulo IlB.
Se $\vec{v}$ è costante, risulta $\vec{F}_{app} = -\vec{F}_B$ (vedi figura a pag. 8).
Dunque, la potenza fornita dalla forza applicata è:

$$P = F_{app} v = (IlB) v = \frac{B^2 l^2 v^2}{R} = \left(\frac{Blv}{R}\right)^2 R = I^2 R ,$$

che è proprio la potenza ceduta al resistore.

Esempio 3. Una sbarretta conduttrice di lunghezza ℓ ruota con velocità angolare costante ω attorno a un perno posto a uno degli estremi. Un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ è diretto perpendicolarmente al piano di rotazione (vedi la figura a fianco). Calcolare la f.e.m. indotta tra le estremità della sbarretta.



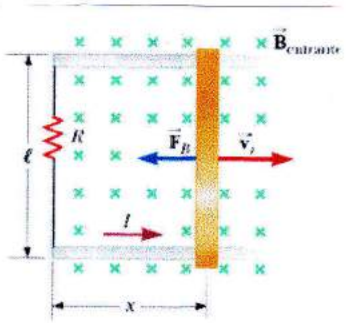
La sbarretta non si muove con velocità lineare costante, tuttavia ogni suo punto ruota con una velocità tangenziale determinata, di modulo ωr (dove r è la distanza del punto della sbarretta dal perno). Pertanto, suddividiamo la sbarretta in piccoli segmenti di lunghezza Δr_i, ciascuno a distanza r_i dal perno, in moto circolare con velocità tangenziale ωr_i. Dall'equazione $\mathcal{E} = -B\ell v$ (valida per una sbarretta di lunghezza finita ℓ in moto con velocità v nel campo magnetico di modulo B costante), nel caso del tratto di sbarretta di questo problema otteniamo, per la f.e.m. indotta agli estremi di questo tratto:

$$\Delta|\mathcal{E}_i| = B v_i \Delta r_i = B\omega r_i \Delta r_i$$

Dunque, il valore assoluto della f.e.m. complessiva tra le estremità della sbarretta è:

$$\boxed{|\mathcal{E}| = \sum_i B\omega r_i \Delta r_i = B\omega \sum_i r_i \Delta r_i = B\omega \int_0^{\ell} r\,dr = \frac{1}{2} B\omega \ell^2}$$

Esempio 4



La sbarretta conduttrice mostrata nella figura a fianco si muove senza attrito su due guide parallele in presenza di un campo magnetico uniforme diretto verso l'interno del foglio. La sbarretta ha massa m e lunghezza ℓ. Alla sbarretta è stata impressa una velocità iniziale $\vec{v}_i$ verso destra all'istante $t=0$.

a) Utilizzando la seconda legge della dinamica, calcolare la velocità della sbarretta in funzione del tempo.

b) Dimostrare lo stesso risultato mediante un opportuno bilancio energetico.

a) Considerando un asse cartesiano x orizzontale, orientato positivamente verso destra, per cui possiamo scrivere

$$F_{B,x} = -I\ell B \quad \text{(vedi la figura sopra)}$$

La forza magnetica $\vec{F}_B$ è l'unica forza agente sulla sbarretta, per cui la seconda legge della dinamica applicata alla sbarretta è:

$$m a_x = F_{B,x} \Rightarrow m a_x = -I\ell B$$

Poiché la corrente indotta nel circuito è $I = \frac{B\ell v_x}{R}$, otteniamo:

$$m\,[v_x(t)]' = -\frac{B^2\ell^2}{R} v_x(t) \Rightarrow [v_x(t)]' = -\frac{B^2\ell^2}{mR} v_x(t)$$

Posta l'equazione nella forma

$$\frac{[v_x(t)]'}{v_x(t)} = -\frac{B^2\ell^2}{mR}$$

, integriamo i due membri rispetto al tempo, tra $t=0$ e un istante t:

$$\int_0^t \frac{[v_x(\tau)]'}{v_x(\tau)}\,d\tau = -\frac{B^2\ell^2}{mR}\int_0^t d\tau$$

$$\ln\left[\frac{v_x(t)}{v_x(0)}\right] = -\frac{B^2\ell^2}{mR}t \,,$$ e infine $$\boxed{v_x(t) = v_x(0)\, e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t}}$$

b) Nel bilancio energetico del sistema, la somma algebrica delle potenze sviluppate dalla forza $\vec{F}_B$ agente sulla sbarretta e della potenza trasferita al resistore deve essere nulla:

$$\vec{F}_B \cdot \vec{v} + I^2 R = 0 \quad \Rightarrow \quad m\,\vec{a}(t)\cdot\vec{v}(t) + [I(t)]^2 R = 0$$

$$m\, a_x(t)\, v_x(t) + [I(t)]^2 R = 0$$

$$m\,[v_x(t)]'\, v_x(t) = -R\,[I(t)]^2$$

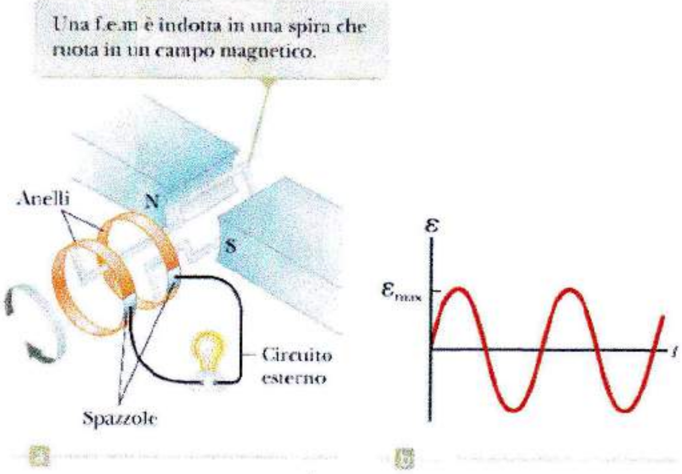
$$m\,[v_x(t)]'\, \cancel{v_x(t)} = -R\left(\frac{B^2\ell^2}{R^2}\right)[v_x(t)]^2 \,,$$ e quindi

$$[v_x(t)]' = -\frac{B^2\ell^2}{mR}\, v_x(t) \,,$$

equazione identica a quella ottenuta al punto a), per cui i procedimenti seguiti nei punti a) e b) sono tra loro equivalenti.

Per esercizio, provare a calcolare la massima distanza percorsa lungo l'asse x dalla sbarretta.

- <u>Generatore di corrente alternata</u>



E' un dispositivo che, grazie a lavoro svolto dall'esterno, produce energia elettrica utilizzabile per alimentare altri dispositivi. E' costituito da una spira o da una bobina messa in rotazione, in un campo magnetico esterno costante e uniforme, da un agente esterno: in una centrale idroelettrica questo lavoro e' svolto dall'acqua che cade sulle pale di una turbina; in una centrale a carbone o a idrocarburi dell'acqua viene scaldata e vaporizzata, e il vapore ad alta pressione viene convogliato per mettere in rotazione una turbina. Mentre la spira ruota, il flusso magnetico concatenato varia nel tempo, per cui per la legge di Faraday-Neumann vengono indotte una f.e.m. e una corrente in un circuito collegato alla spira o alla bobina.

Consideriamo una bobina con N spire di area A, ruotante con velocita' angolare ω costante attorno a un asse perpendicolare a un campo magnetico uniforme e costante $\vec{B}$. Nell'istante in cui l'angolo tra il campo magnetico $\vec{B}$ e la direzione perpendicolare al piano della bobina e' θ, il flusso magnetico complessivamente concatenato dalla bobina e' $\Phi_B = BA\cos\theta = BA\cos(\omega t)$, in quanto risulta $\theta(t) = \omega t$ per le ipotesi fatte (rotazione con velocita' angolare costante). Pertanto, la f.e.m. indotta nella bobina e':

$$\mathcal{E} = -N\left[\Phi_B(t)\right]' = -NBA\left[\cos(\omega t)\right]' = NBA\,\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

L'andamento di $\mathcal{E}$ in funzione del tempo e' mostrato nella figura in alto (TENSIONE AC, sorgente di "corrente alternata").

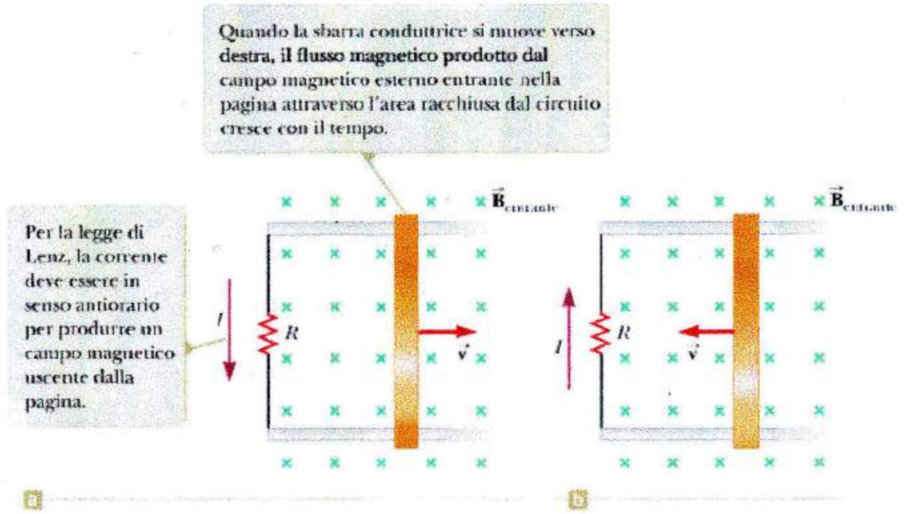
Legge di Lenz

L'enunciato più semplice della LEGGE DI LENZ è il seguente:

[la f.e.m. indotta ha un segno tale da produrre un flusso magnetico indotto tale da opporsi alla variazione di flusso magnetico che l'ha provocata.]

Questa legge permette di determinare il verso della corrente indotta in un circuito da una variazione del flusso magnetico concatenato.

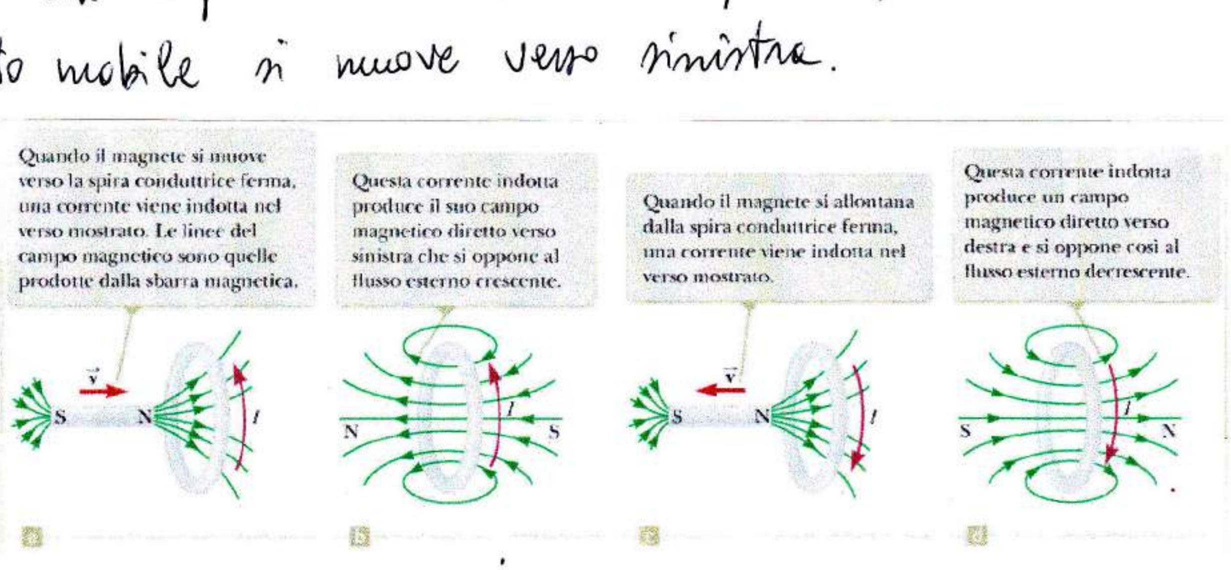
Consideriamo un circuito con un tratto che si può muovere su due guide parallele, con un campo magnetico uniforme entrante nel piano del foglio. Se la sbarretta (tratto mobile del circuito) si muove verso destra,



c'è un aumento del flusso magnetico concatenato con il circuito, per cui si genererà, per la legge di Lenz, una corrente indotta tale che il campo magnetico da essa prodotto si opporrà alla variazione del flusso del campo magnetico esterno attraverso la superficie delimitata dal circuito: affinché ciò avvenga, il campo magnetico dovuto alla corrente circolante nel resistore R deve essere uscente dal piano del foglio, per cui la corrente indotta deve circolare in senso antiorario (figura (a)). Se la sbarretta si muove verso sinistra, c'è una diminuzione del flusso magnetico concatenato con il circuito, per cui la corrente indotta dovrà circolare in senso orario per generare un campo magnetico indotto entrante nel piano del foglio, ne cessario per contrastare, secondo la legge di Lenz, la diminuzione del flusso magnetico concatenato con il circuito in seguito allo spostamento verso sinistra del tratto mobile.

In ogni caso il verso di circolazione della corrente indotta deve essere tale da mantenere il flusso magnetico concatenato con il circuito uguale al valore iniziale.

Da un punto di vista energetico, se il tratto mobile del circuito si muove verso destra la corrente indotta non può che circolare in senso antiorario: infatti, se circolasse in senso orario la forza magnetica spingerebbe il tratto mobile verso destra e accelererebbe ulteriormente il tratto mobile; ma questo aumenterebbe ulteriormente la corrente indotta, con ulteriore aumento del modulo della forza magnetica. In definitiva, il sistema acquisterebbe energia cinetica in assenza di lavoro svolto dall'esterno. Ma questo è assurdo, per cui la corrente deve necessariamente circolare in senso antiorario. Un ragionamento simile si può ripetere nel caso in cui il tratto mobile si muove verso sinistra.

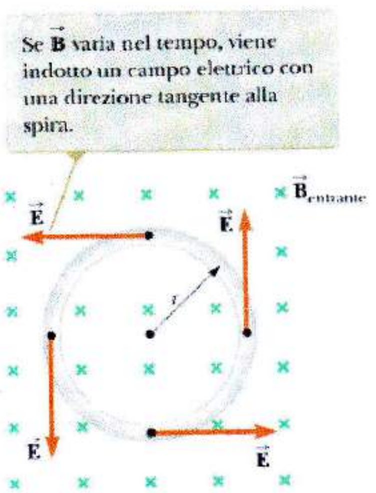


Nella figura qua sopra è mostrato il verso della corrente indotta (oltre alle linee del campo magnetico indotto) in una spira conduttrice quando a essa viene avvicinato un magnete (fig. (a), (b)) e quando da essa viene allontanato un magnete (fig. (c), (d)).

Forze elettromotrici indotte e campi elettrici

La legge di Faraday-Neumann fornisce la f.e.m. indotta in una spira conduttrice da un flusso magnetico variabile nel tempo.
Questo fenomeno si presta alla seguente interpretazione: poiché la corrente in un circuito è dovuta a un campo elettrico nei fili generato da una batteria, possiamo interpretare un campo magnetico variabile come sorgente di un campo elettrico indotto, che origina quindi una corrente indotta nella spira: il campo elettrico è legato a un flusso magnetico variabile.

Più in generale, un flusso magnetico variabile produce in ogni caso un campo elettrico, anche nel vuoto (quindi anche laddove non sono presenti cariche elettriche); le proprietà di questo campo elettrico sono diverse da quelle del campo elettrostatico generato da cariche elettriche ferme.



Consideriamo, ad esempio, una spira circolare conduttrice di raggio r posta in un campo magnetico uniforme e perpendicolare al piano della spira. Se $\vec{B}$ varia nel tempo, per la legge di Faraday-Neumann si genera nella spira una f.e.m. indotta $\mathcal{E} = -[\Phi_B(t)]'$, e una corrente indotta: ciò significa che è presente, nella spira, in ogni suo punto e in direzione tangenziale, un campo elettrico indotto $\vec{E}$. Il lavoro svolto dal campo elettrico per far compiere un intero giro a una carica di prova q è $W = q\mathcal{E}$.

Questo lavoro è espresso da:

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = q|\vec{E}| \cdot (2\pi r) \text{ , essendo } |\vec{E}| \text{ costante.}$$

Dunque risulta: $q\,\mathcal{E} = q|\vec{E}|(2\pi r)$, e quindi:

$$|\vec{E}| = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r}$$

Dunque, per la legge di Faraday-Neumann possiamo scrivere:

$$E_t = -\frac{1}{2\pi r}\left[\Phi_B(t)\right]' = -\frac{1}{2\pi r}\left[B_z \pi r^2\right]' = -\frac{r}{2}\left[B_z\right]',$$

dove E_t è la componente tangenziale di $\vec{E}$ (positiva in senso antiorario) e B_z è la componente di $\vec{B}$ perpendicolare al piano della pagina (vedi figura a pag. 16). Questa relazione tra B_z e E_t vale anche nel vuoto, in assenza di conduttori e cariche.

Poiché la f.e.m. indotta lungo un cammino chiuso è data da

$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ (vedi capitolo sul potenziale), possiamo

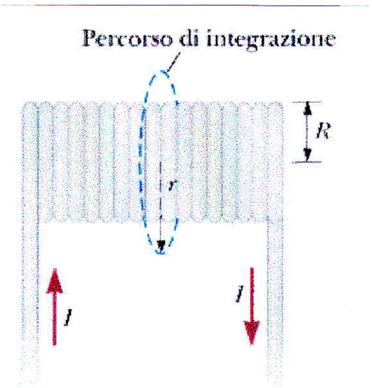
scrivere la relazione seguente:

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\left[\Phi_B(t)\right]'}$$

FORMA INTEGRALE DELLA LEGGE DI FARADAY-NEUMANN

Il campo elettrico indotto non è conservativo! Infatti, dai calcoli appena svolti risulta evidente che il lavoro svolto dalla forza elettrica dovuta al campo elettrico indotto è diverso da zero allorché una carica si sposta lungo una traiettoria chiusa sotto l'azione di questa forza.

Esempio 5. Un lungo solenoide di raggio R ha n spire per unità di lunghezza ed è percorso da una corrente che varia nel tempo in maniera sinusoidale secondo la legge $I(t) = I_{max} \cos(\omega t)$, dove I_{max} è il valore massimo della corrente e ω è la pulsazione del generatore di corrente alternata.



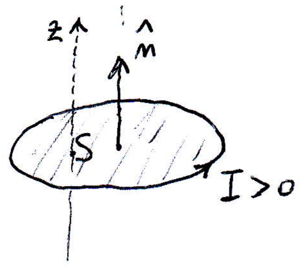
a) Determinare il modulo del campo elettrico indotto fuori del solenoide a una distanza $r > R$ dal suo asse centrale.

b) Qual è il modulo del campo elettrico indotto dentro il solenoide, a una distanza r dal suo asse?

|– – – – – – – –|

a) Consideriamo un percorso di integrazione circolare di raggio $r > R$, su un piano perpendicolare all'asse del solenoide e centrato sull'asse del solenoide.

[Anzitutto fissiamo la convenzione per i segni nella legge di Faraday-Neumann:



$\hat{n}$: versore normale alla superficie S concatenata dal circuito

Se $\hat{n}$ è diretto verso l'alto, risulta $\mathcal{E} > 0$ se la corrente indotta circola in senso antiorario.]

Risulta quindi, per $r > R$:

$$-[\Phi_B(t)]' = -[B_z(t)\pi R^2]' = -\pi R^2 [B_z(t)]'$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_t \cdot (2\pi r)$$

Per simmetria del problema, il campo elettrico indotto può avere componenti sia radiali sia tangenziali, ma componenti radiali implicherebbero una convergenza delle linee di campo verso un punto di origine comune, cosa che non può essere perché non ci sono cariche statiche nel problema. Dunque $\vec{E}$ può solo essere tangenziale, con $E_t > 0$ se la corrente indotta circola in senso antiorario (vedi convenzione dei segni a pag. 18).

Dunque, dalla forma integrale della legge di Faraday-Neumann otteniamo:

$$E_t\,(2\pi r) = -\pi R^2\,[B_z(t)]'$$

All'interno del solenoide risulta

$$B_z(t) = \mu_0 n\, I(t) = \mu_0 n\, I_{max} \cos(\omega t),$$ per cui otteniamo:

$$[B_z(t)]' = -\mu_0 n\, I_{max}\, \omega\, \mathrm{sen}(\omega t),$$ e quindi:

$$-[\Phi_B(t)]' = -\pi R^2 [B_z(t)]' = \pi R^2 \mu_0 n\, I_{max}\, \omega\, \mathrm{sen}(\omega t)$$

Dunque:

$$E_t(2\cancel{\pi} r) = \cancel{\pi} R^2 \mu_0 n\, I_{max}\, \omega\, \mathrm{sen}(\omega t),$$ e quindi:

$$\boxed{E_t = \frac{\mu_0 n\, I_{max}\, \omega R^2}{2r}\, \mathrm{sen}(\omega t)} \qquad (r > R)$$

b) Consideriamo un percorso di integrazione circolare di raggio r con $0 < r < R$, ancora su un piano perpendicolare all'asse del solenoide e centrato nell'asse del solenoide.

Stessa convenzione dei segni.

Risulta quindi:

$$-[\Phi_B(t)]' = -[B_z(t)\pi r^2]' = -\pi r^2 [B_z(t)]'$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_t \cdot (2\pi r)$$

All'interno del solenoide risulta

$$B_z(t) = \mu_0 n\, I(t) = \mu_0 n\, I_{max} \cos(\omega t),$$ per cui otteniamo:

$$[B_z(t)]' = -\mu_0 n I_{max}\, \omega\, sen(\omega t),$$ e quindi:

$$-[\Phi_B(t)]' = -\pi r^2 [B_z(t)]' = \pi r^2 \mu_0 n I_{max}\, \omega\, sen(\omega t)$$

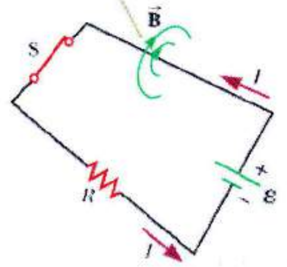
Dunque otteniamo:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -[\Phi_B(t)]' \Rightarrow E_t \cdot (2\cancel{\pi}\cancel{r}) = \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \mu_0 n I_{max}\, \omega\, sen(\omega t),$$

e quindi:

$$\boxed{E_t = \frac{\mu_0 n I_{max}\, \omega}{2}\, r\, sen(\omega t)} \qquad (0 < r < R)$$

Autoinduzione



Dopo che l'interruttore è stato chiuso, la corrente produce un **flusso magnetico attraverso l'area** delimitata dal circuito. Quando la corrente aumenta verso il valore di **equilibrio, questo flusso magnetico** varia nel tempo e induce una f.e.m. nel circuito.

Prendiamo in considerazione un circuito con un interruttore, un generatore di f.e.m. e un resistore. Al momento della chiusura dell'interruttore, la corrente nel circuito non raggiunge all'istante il valore $\mathcal{E}/R$, a causa della legge di Faraday-Neumann. Mentre cresce la corrente I nel circuito, aumenta il flusso magnetico concatenato con il circuito (vedi figura). Per questa ragione, nel circuito stesso viene indotta una f.e.m. aggiuntiva (che si somma a quella della batteria), che tende a ostacolare l'aumento della corrente circolante nel circuito ("f.e.m. inversa"): dunque, in questa fase viene indotto nel filo un campo elettrico aggiuntivo di verso opposto a quello della corrente. Questo porta a un aumento della corrente controllato e graduale. Questo effetto si chiama AUTOINDUZIONE, e la f.e.m. aggiuntiva originata in questo modo è detta F.E.M. AUTOINDOTTA.

Qualitativamente, osserviamo che Φ_B è proporzionale a $|\vec{B}|$, che a sua volta è proporzionale alla corrente I. Dunque, risulta $\Phi_B \propto I$. Pertanto, nel caso di una bobina con N spire molto fitte, applicando la legge di Faraday-Neumann otteniamo, per la f.e.m. autoindotta:

$$\boxed{\mathcal{E}_L = -N\left[\Phi_B(t)\right]' = -L\left[I(t)\right]'}$$

L è una costante detta INDUTTANZA della bobina, dipendente dalle caratteristiche della bobina stessa (materiale, geometria).

Dunque, l'induttanza di una bobina con N spire si ottiene dalla formula seguente: $\boxed{L = \frac{N \Phi_B}{I}}$, se ogni spira concatena lo stesso flusso magnetico.

Talvolta e' utile anche la formula $\boxed{L = -\frac{\mathcal{E}_L}{[I(t)]'}}$

Nel S. I., l'unita' di misura dell'induttanza e'

$$\boxed{1\ \frac{V \cdot s}{A} = 1\ \frac{kg\ m^2}{A^2\ s^2} = 1\ H\ (\text{henry})}$$

Esempio 6. Si consideri un solenoide costituito da N spire uniformemente avvolte e di lunghezza l. Si assume che l sia molto maggiore del raggio delle spire e che, all'interno del solenoide, ci sia aria.

a) Trovare l'induttanza del solenoide.

b) Calcolare l'induttanza del solenoide se esso e' costituito da 300 spire, la sua lunghezza e' 25 cm e l'area di ogni spira e' 4 cm^2.

c) Calcolare la f.e.m. autoindotta nel solenoide se la corrente che lo percorre decresce al ritmo di 50 A/s.

a) Il modulo del campo magnetico all'interno di un solenoide molto lungo e' $B = \mu_0 n I$, dove $n = N/\ell$ e' il numero di spire per unità di lunghezza e I e' la corrente circolante nel solenoide. Se A e' l'area della sezione trasversale del solenoide, il flusso magnetico concatenato con una spira del solenoide e':

$$\Phi_B = BA = \mu_0 n I A = \mu_0 \frac{N}{\ell} I A$$

Quindi l'induttanza del solenoide e':

$$\boxed{L = \frac{N \Phi_B}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A}$$

Poiché $A\ell = V$ e' il volume della parte interna del solenoide, risulta anche

$$\boxed{L = \mu_0 \left(\frac{N}{\ell}\right)^2 A\ell = \mu_0 n^2 V}$$

b) Otteniamo:

$$\boxed{L = \left(4\pi \times 10^{-7}\ \frac{T \cdot m}{A}\right) \cdot \frac{300^2}{0{,}25\ m} \left(4 \times 10^{-4}\ m^2\right) = 1{,}8096 \times 10^{-4}\ H = 180{,}96\ \mu H}$$

c) Risulta $\mathcal{E}_L = -L\,[I(t)]' = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A \left| [I(t)]' \right| =$

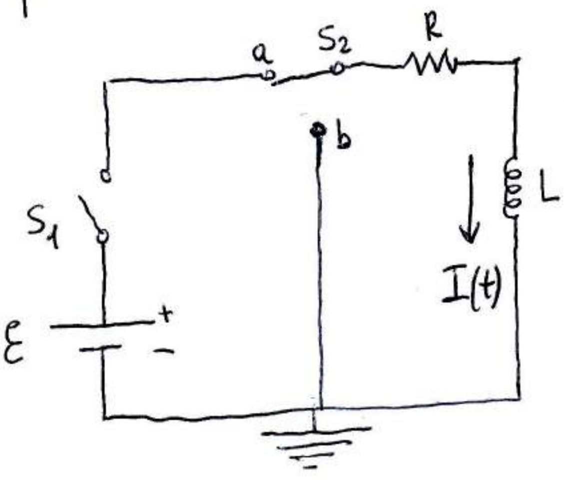
$$= \left(4\pi \times 10^{-7}\ \frac{T \cdot m}{A}\right) \cdot \frac{300^2}{0{,}25\ m} \left(4 \times 10^{-4}\ m^2\right) \left(50\ \frac{A}{s}\right) = 0{,}9048 \times 10^{-2}\ V = 9{,}048\ mV$$

Circuiti RL

In un circuito, un elemento avente una induttanza elevata è chiamato INDUTTORE, ed è indicato con il simbolo .

Assumiamo per semplicità che l'induttanza del resto del circuito sia trascurabile rispetto a quella dell'induttore. Attenzione: anche in assenza di un induttore, un circuito ha comunque una propria induttanza.

La presenza di un induttore in un circuito produce una "opposizione" alle variazioni di corrente nel circuito: gli aumenti e le diminuzioni di corrente nel circuito vengono rallentati dalla presenza di un induttore.



Un circuito come quello schematizzato qui a fianco è detto CIRCUITO RL, perché contiene un resistore e un induttore, qui connessi in serie, oltre a una batteria che fornisce una f.e.m. $\mathcal{E}$.

S_1 e S_2 sono due interruttori: S_1 serve per aprire o chiudere la connessione tra la batteria e il circuito; S_2 può stare o nella posizione a o nella posizione b. Poniamo che S_2 si trovi nella posizione a, e che l'interruttore S_1, aperto per $t<0$, venga chiuso all'istante $t=0$.

Applicando la legge di Kirchhoff delle maglie, possiamo scrivere la seguente equazione:

$$\mathcal{E} - R\,I(t) - L\,[I(t)]' = 0 \quad ,$$

che possiamo scrivere nel modo seguente:

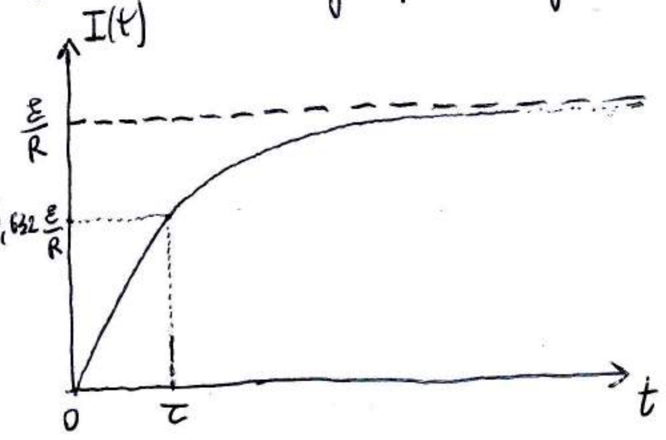
$$\boxed{[I(t)]' = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L} I(t)}$$

Questa equazione differenziale e' molto simile a quella che abbiamo ottenuto nel caso del circuito RC, per cui la procedura di risoluzione e' analoga. La soluzione con la condizione iniziale $I(t=0) = 0$ e' la seguente:

$$\boxed{I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)},$$

se poniamo $\frac{L}{R} = \tau$ (COSTANTE DI TEMPO del circuito RL).

L'andamento temporale della corrente nel circuito e' rappresentato nel grafico seguente:



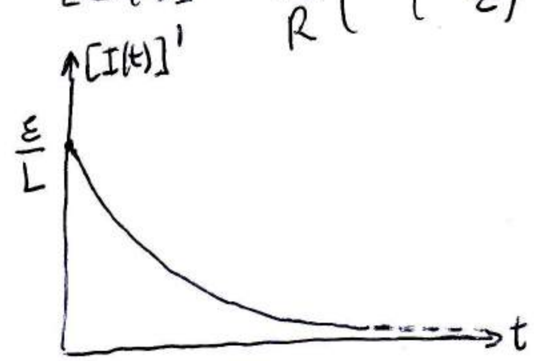
All'istante $t = \tau$ risulta

$$I(t=\tau) = \left(1 - e^{-1}\right)\frac{\mathcal{E}}{R} = 0,6321 \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Risulta poi $\lim_{t \to +\infty} I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}$, che e' il valore asintotico a cui tende la corrente nel circuito RL per tempi lunghi ($t \gg \tau$).

La rapidità con cui la corrente varia nel tempo e':

$$[I(t)]' = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(-\left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-t/\tau}\right) = \frac{\mathcal{E}}{R\tau} e^{-t/\tau} = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-t/\tau}$$



Quindi $[I(t)]'$ e' massima per $t=0$, uguale a $\frac{\mathcal{E}}{L}$, e tende a zero per $t \to +\infty$.

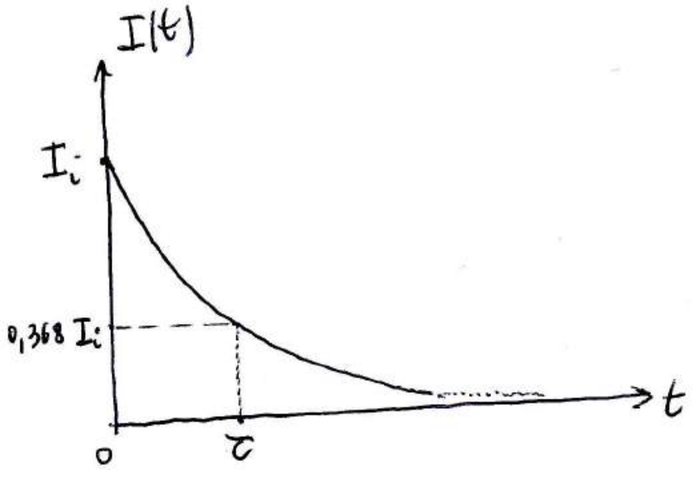
Supponiamo ora che nel circuito RL collegato alla batteria stia circolando una certa corrente I_i; in questo istante, che poniamo $t=0$, spostiamo l'interruttore S_2 nella posizione b. In questo modo eliminiamo la batteria dal circuito.

L'equazione differenziale che descrive l'andamento temporale della corrente nel circuito diventa quindi:

$$[I(t)]' = -\frac{R}{L} I(t) ,$$

la cui soluzione con condizione iniziale $I(t=0) = I_i$ è:

$$\boxed{I(t) = I_i \, e^{-t/\tau} , \quad \text{con } \tau = \frac{L}{R}}$$



Risulta $I(t=\tau) = e^{-1} I_i \simeq 0,3679\, I_i$,

e $\lim_{t \to +\infty} I(t) = 0$

Quindi, se la batteria viene scollegata dal circuito, la presenza dell'induttore rallenta la diminuzione della corrente e impedisce che I vada a zero istantaneamente.

Esempio 7. Si consideri un circuito RL serie come quello dello schema a pag. 24. Supponiamo che gli elementi del circuito abbiano i seguenti valori: $\mathcal{E} = 12\ V$, $R = 6\ \Omega$, $L = 30\ mH$.

a) Trovare la costante di tempo del circuito.

b) L'interruttore S_2 e' nella posizione a e l'interruttore S_1 viene chiuso all'istante $t=0$. Calcolare la corrente nel circuito all'istante $t = 2\ ms$.

c) Confrontare la differenza di potenziale ai capi del resistore con quella nell'induttore

a) $$\boxed{\tau = \frac{L}{R} = \frac{30 \times 10^{-3}\ H}{6\ \Omega} = 5 \times 10^{-3}\ s = 5\ ms}$$

b) L'andamento della corrente nel tempo e':

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$, per cui risulta:

$$\boxed{I(t = 2\ ms) = \frac{12\ V}{6\ \Omega}\left(1 - e^{-\frac{2ms}{5ms}}\right) = 0,6594\ A}$$

c) Differenza di potenziale ai capi del resistore:

$$\Delta V_R(t) = R\,I(t) = \mathcal{E}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

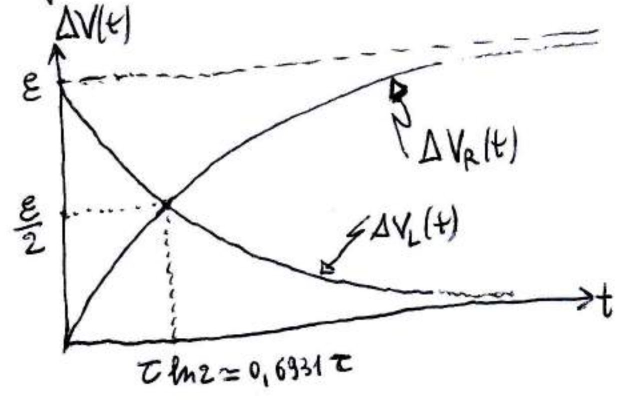
Differenza di potenziale nell'induttore:

$$\Delta V_L(t) = L\,[I(t)]' = L \cdot \frac{\mathcal{E}}{L}\, e^{-t/\tau} = \mathcal{E}\, e^{-t/\tau}$$

Dunque, all'istante $t=0$ risulta $\Delta V_R(t=0) = 0$, $\Delta V_L(t=0) = \mathcal{E}$;

Per $t \to +\infty$ risulta $\lim_{t\to+\infty} \Delta V_R(t) = \mathcal{E}$, $\lim_{t\to+\infty} \Delta V_L(t) = 0$

A ogni istante risulta $\Delta V_R(t) + \Delta V_L(t) = \mathcal{E} = 12\ V$



Energia immagazzinata in un campo magnetico

In un circuito RL, una parte dell'energia fornita dalla batteria diventa energia interna del resistore, e una parte viene accumulata nell'induttore. Consideriamo l'equazione ottenuta in precedenza per il circuito RL collegato a una sorgente di f.e.m.

$$\mathcal{E} = I(t)R + L\,[I(t)]',$$

e moltiplichiamo i due membri per $I(t)$:

$$I(t)\cdot\mathcal{E} = (I(t))^2 R + L\,I(t)\,[I(t)]'$$

Dunque, la potenza erogata dalla batteria, espressa da $I(t)\cdot\mathcal{E}$, e' data dalla somma della potenza fornita al resistore e della potenza accumulata nell'induttore. Se $U(t)$ e' l'energia accumulata nell'induttore all'istante t, la potenza **istantanea** che viene accumulata nell'induttore e' quindi, all'istante t:

$$P_L(t) = L\,I(t)\,[I(t)]'$$

Quindi, se la corrente circolante nel circuito all'istante $t=0$ è $I(t=0)=0$, e se la batteria viene collegata al circuito a tale istante, allora l'energia accumulata nell'induttore all'istante t è:

$$U(t) = \int_0^t P_L(\tau)\,d\tau = L\int_0^t I(\tau)\,[I(\tau)]'\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} L \left(I(t)\right)^2$$

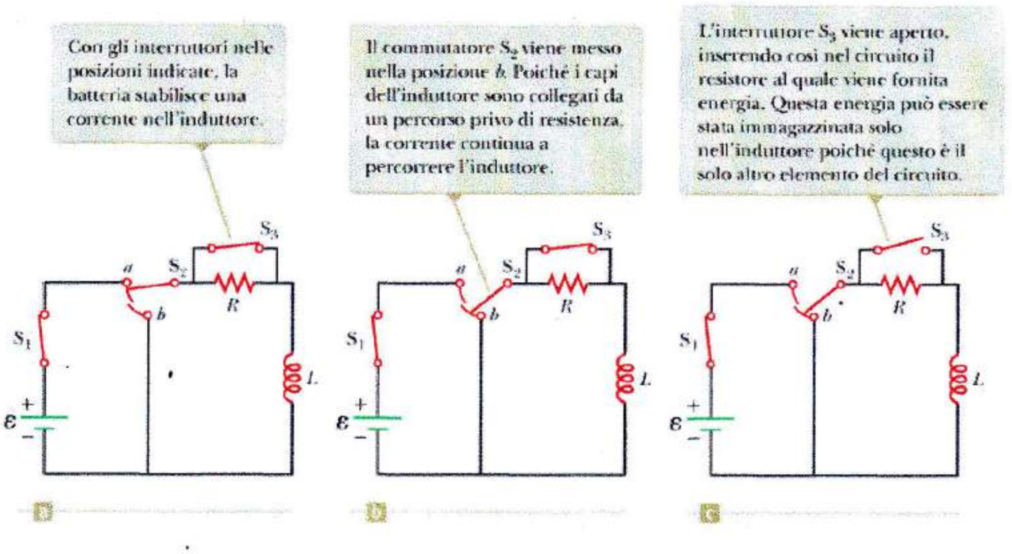
Dunque, l'energia accumulata in un induttore, inizialmente percorso da una corrente nulla, all'istante t è:

$$\boxed{U(t) = \frac{1}{2} L \left(I(t)\right)^2}$$

Questa energia è immagazzinata nel campo magnetico all'interno dell'induttore quando la corrente circolante è $I(t)$.

Nel caso dell'energia accumulata in un condensatore, abbiamo visto che essa può essere interpretata come energia potenziale elettrostatica dovuta alla separazione di carica elettrica tra le due armature del condensatore.

Qui a fianco è esposto lo schema di ragionamento che mostra perché deve essere stata accumulata energia nell'induttore dopo che è stato collegato a una batteria.



Consideriamo ora un solenoide, la cui induttanza è

$L = \mu_0 n^2 A l$, come mostrato a pag. 23.

Il campo magnetico all'interno di un solenoide ideale ha modulo

$B = \mu_0 n I$, nell'istante in cui scorre una corrente I.

Dunque, l'energia accumulata nell'induttore in tale istante è:

$$U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2}\left(\mu_0 n^2 A l\right)\left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{1}{2} \cancel{\mu_0} \cancel{n^2} A l \frac{B^2}{\mu_0^{\cancel{2}} \cancel{n^2}}$$

Dunque, risulta $U = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot (Al)$

Dato che Al è il volume interno al solenoide, otteniamo l'espressione dell'energia per unità di volume accumulata nel campo magnetico, cioè la DENSITÀ DI ENERGIA MAGNETICA:

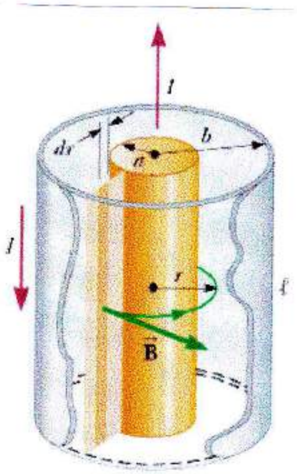
$$\boxed{u_B = \frac{U}{Al} = \frac{B^2}{2\mu_0}} \quad , \text{ con } B = |\vec{B}| .$$

[Questa relazione è valida in ogni punto dello spazio in cui è presente un campo magnetico $\vec{B}$, sebbene sia stata ottenuta considerando un caso particolare. Ha validità generale.]

Come nel caso della densità di energia elettrica $\left(u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right)$, anche la densità di energia magnetica è proporzionale al quadrato del modulo del campo.

Esempio 8

I cavi coassiali sono spesso usati per collegare dispositivi elettrici e per ricevere segnali.
Si schematizzi un lungo cavo coassiale come un sottile cilindro cavo conduttore di raggio b, concentrico a un cilindro conduttore pieno, di raggio $a < b$.
I due conduttori sono percorsi dalla stessa corrente I, in versi opposti (vedi figura).



Calcolare l'induttanza L di un segmento di cavo di lunghezza l.

Osserviamo anzitutto che il campo magnetico nella regione di spazio tra i due conduttori è dovuto alla sola corrente che scorre nel conduttore interno, per il teorema di Ampère.
Inoltre, abbiamo già visto che, con una geometria simile, il campo magnetico in tale regione di spazio è perpendicolare all'asse del conduttore ed è diretto tangenzialmente.
Il modulo di $\vec{B}$, in un punto a distanza r dall'asse verticale del cilindro, è, come noto:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Calcoliamo il flusso del campo magnetico attraverso una superficie rettangolare posta verticalmente, con il lato verticale di lunghezza l e il lato orizzontale di lunghezza $b-a$, disposta lungo la direzione radiale (vedi figura).

Il flusso magnetico attraverso una piccola superficie rettangolare di area $\Delta A_i = l\,\Delta r$, a distanza radiale r_i dall'asse del cilindro, è:

$$\Delta \Phi_{B,i} = B_i\, l\, \Delta r = \frac{\mu_0 I l}{2\pi r_i} \Delta r$$

Il flusso magnetico attraverso l'intera superficie rettangolare è, quindi:

$$\Phi_B = \sum_i \Delta \Phi_{B,i} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \sum_i \frac{1}{r_i} \Delta r$$

per $\Delta r \to 0$ otteniamo, quindi:

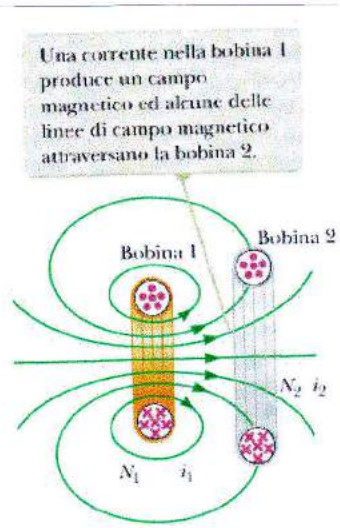
$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_a^b \frac{1}{r}\, dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Se immaginiamo di collegare con tratti conduttori orizzontali il conduttore centrale e il guscio cilindrico esterno, in un punto molto al di sopra e in un punto molto al di sotto del tratto considerato, sui bordi della superficie rettangolare considerata scorrono le correnti indicate nella figura a pag. 31. Usando la relazione ottenuta a pag. 22 risulta quindi, per la singola spira che costituisce il contorno della superficie rettangolare:

$$\boxed{L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Mutua induttanza

Se due circuiti sono posti vicini tra loro, e se la corrente che scorre in uno di essi varia nel tempo, la conseguente variazione temporale del flusso magnetico attraverso una superficie delimitata dell'altro circuito origina una f. e. m. indotta in quest'ultimo. Questo processo è detto MUTUA INDUZIONE, ed è legato all'interazione tra i due circuiti.



Consideriamo una bobina con N_1 spire, in cui circola una corrente i_1, e una seconda bobina con N_2 spire. Le due bobine sono disposte come nella figura a fianco, in modo che una parte delle linee del campo magnetico generato dalla spira 1 attraversano la superficie delimitata dal circuito 2. Se Φ_{12} è il flusso magnetico generato dalla corrente nella bobina 1 concatenato con la bobina 2, la quantità

$$\boxed{M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{i_1}}$$

è detta MUTUA INDUTTANZA o COEFFICIENTE DI MUTUA INDUZIONE della bobina 2 rispetto alla bobina 1.

La mutua induttanza dipende dalla geometria dei due circuiti e dalla loro orientazione relativa.

La f.e.m. indotta nel circuito 2 è quindi

$$\boxed{\mathcal{E}_2 = -N_2 \left[\Phi_{12}(t) \right]' = - M_{12} \left[i_1(t) \right]'}$$

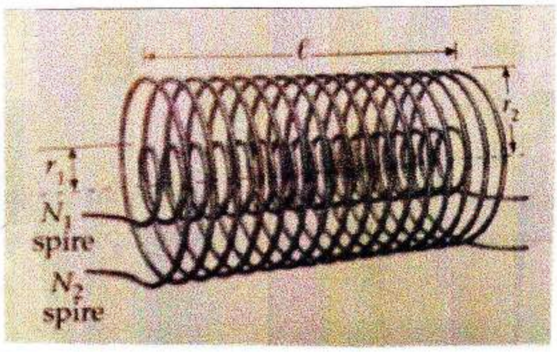
L'unità di misura della mutua induttanza è l'henry, come per l'induttanza.

Ovviamente possiamo ribaltare il ragionamento e considerare la variazione temporale del flusso magnetico generato dalla corrente nella bobina 2 concatenato con la bobina 1, allorché i_2 varia nel tempo; se indichiamo con Φ_{21} questo flusso magnetico, allora $M_{21} = \dfrac{N_1 \Phi_{21}}{i_2}$ è la mutua induttanza della bobina 1 rispetto alla bobina 2, e risulta

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \left[\Phi_{21}(t)\right]' = -M_{21}\left[i_2(t)\right]'$$

In generale, risulta $\boxed{M_{12} = M_{21} = M}$

Come esempio, calcoliamo la mutua induttanza di due solenoidi coassiali (vedi figura), entrambi di lunghezza l. Il solenoide interno ha N_1 spire e raggio r_1, quello esterno ha N_2 spire e raggio r_2.



Assumiamo che il solenoide interno sia percorso da una corrente i_1; calcoliamo il flusso magnetico attraverso il solenoide esterno dovuto alla corrente i_1 (Φ_{12}).

Risulta $B_1 = \mu_0 \left(\frac{N_1}{l}\right) i_1 = \mu_0 n_1 i_1$ $(r<r_1)$, e $B_1 = 0$ per $r_1<r<r_2$.

Dunque otteniamo $N_2\Phi_{12} = N_2 B_1 \cdot (\pi r_1^2) = \left(\frac{N_2}{l}\right) \cdot l \cdot \mu_0 n_1 i_1 \cdot \pi r_1^2 =$

$$= \mu_0 n_2 n_1 l (\pi r_1^2) i_1$$

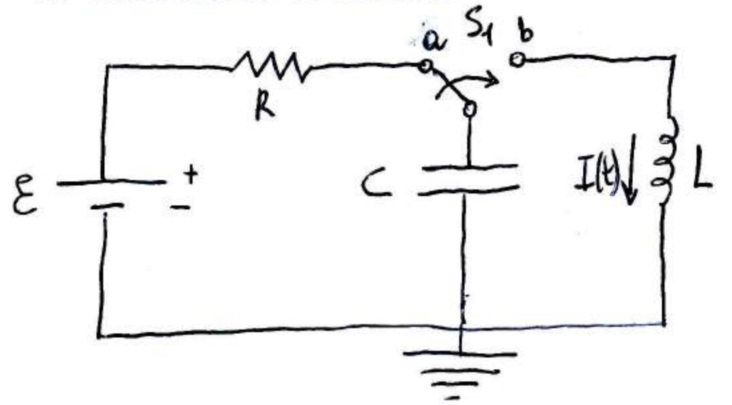
Quindi otteniamo $\boxed{M_{12} = \dfrac{N_2 \Phi_{12}}{i_1} = \pi \mu_0 n_1 n_2 l r_1^2}$

Per esercizio, calcolare M_{21} e verificare che $M_{21} = M_{12}$.

Tenuto conto degli effetti di autoinduzione e di mutua induzione, l'energia magnetica di un sistema di due circuiti accoppiati è espressa nel modo seguente:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2}$$

Oscillazioni in un circuito LC



Supponiamo di caricare un condensatore mediante il circuito schematizzato qui a fianco, con l'interruttore S_1 nella posizione a.

Poi, a un certo istante (che fissiamo $t=0$) l'interruttore viene spostato nella posizione b; inoltre $Q(t=0) = Q_0$ (carica accumulata nelle armature del condensatore all'istante $t=0$.

Applicando la seconda legge di Kirchhoff alla maglia di destra otteniamo l'equazione:

$$-\frac{Q(t)}{C} - L\,[I(t)]' = 0$$

Poiché $I(t) = [Q(t)]'$ per la conservazione della carica elettrica nel circuito, otteniamo infine l'equazione:

$$L\,[Q(t)]'' + \frac{1}{C} Q(t) = 0\,, \quad \text{cioè} \quad [Q(t)]'' + \frac{1}{LC} Q(t) = 0$$

Questa equazione ha una forma analoga all'equazione differenziale che descrive un moto armonico, per cui la soluzione per $Q(t)$ ha un andamento sinusoidale, con pulsazione

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

; con la condizione iniziale $Q(t=0) = Q_0$

otteniamo quindi $\boxed{Q(t) = Q_0 \cos(\omega t)}$, e per la corrente:

$$\boxed{I(t) = [Q(t)]' = -\omega Q_0 \operatorname{sen}(\omega t)}$$

L'energia elettrica accumulata nel condensatore è:

$$U_E = \frac{[Q(t)]^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C}(\cos(\omega t))^2 = \frac{Q_0^2}{4C}\left[1 + \cos(2\omega t)\right]$$

L'energia magnetica accumulata nell'induttore è:

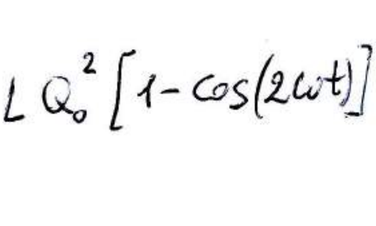
$$U_B = \frac{1}{2} L [I(t)]^2 = \frac{1}{2} L \omega^2 Q_0^2 [\operatorname{sen}(\omega t)]^2 = \frac{1}{4}\omega^2 L Q_0^2 \left[1 - \cos(2\omega t)\right]$$

Poiché $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, otteniamo:

$$\boxed{U_E = \frac{Q_0^2}{4C}\left[1 + \cos\left(\frac{2}{\sqrt{LC}} t\right)\right]} \quad ; \quad \boxed{U_B = \frac{Q_0^2}{4C}\left[1 - \cos\left(\frac{2}{\sqrt{LC}} t\right)\right]}$$

Dunque, in un circuito LC puro l'energia accumulata nel condensatore e quella accumulata nell'induttore oscillano tra 0 e il valore massimo con frequenza doppia rispetto alla frequenza di oscillazione di $Q(t)$ e di $I(t)$.

La somma delle due curve è una costante ed è uguale all'energia totale immagazzinata nel circuito.

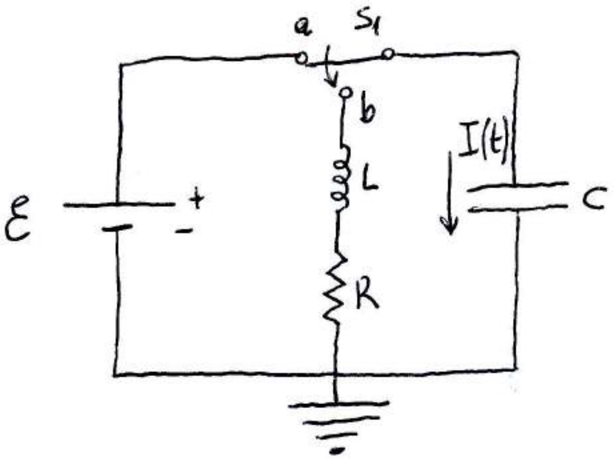


Inoltre risulta $U_E(t) + U_B(t) = \frac{Q_0^2}{2C} = U_E(t=0)$,

il che è una verifica del fatto che l'energia totale si conserva.

Circuito RLC

Una schematizzazione più realistica di un circuito in cui siano presenti un condensatore e un induttore è mostrata qui a fianco.



Inizialmente l'interruttore S_1 è messo nella posizione a, in modo da caricare il condensatore con una carica Q_0.

Quando si sposta l'interruttore nella posizione b, se applichiamo la seconda legge di Kirchhoff alla maglia di destra otteniamo:

$$-RI(t) - L[I(t)]' - \frac{Q(t)}{C} = 0$$

Poiché $I(t) = [Q(t)]'$ per la conservazione della carica elettrica nel circuito, otteniamo infine l'equazione:

$$L[Q(t)]'' + R[Q(t)]' + \frac{1}{C} Q(t) = 0 \quad , \quad \text{cioè:}$$

$$[Q(t)]'' + \frac{R}{L}[Q(t)]' + \frac{1}{LC} Q(t) = 0$$

Questa equazione ha una forma analoga all'equazione differenziale che descrive un moto armonico smorzato.

Se $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, la soluzione dell'equazione con condizione iniziale $Q(t=0) = Q_0$ è:

$$\boxed{Q(t) = Q_0\, e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega_d t) \quad , \quad \text{con } \omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}$$

Se $R << 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, risulta $\omega_d \simeq \frac{1}{\sqrt{LC}}$, per cui in questa situazione la pulsazione del circuito oscillante smorzato è praticamente uguale a quella del circuito oscillante non smorzato.

Posto $\frac{R}{2L\omega_d} = tg\,\varphi_0$, si dimostra con alcuni calcoli che risulta:

$$I(t) = [Q(t)]' = -\frac{\omega_d Q_0}{\cos\varphi_0} e^{-\frac{R}{2L}t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \varphi_0) =$$

$$= -\frac{Q_0}{\sqrt{LC}} e^{-\frac{R}{2L}t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \varphi_0)$$

Dunque, sia $Q(t)$ sia $|I(t)|$ hanno un andamento oscillatorio smorzato. Si verifica immediatamente che la somma delle energie accumulate U_E e U_B non si conserva, in quanto una parte dell'energia del sistema, a ogni oscillazione, si converte in energia interna del resistore.

Se $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ il circuito è "criticamente smorzato".

Se $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ il circuito è "sovrasmorzato".