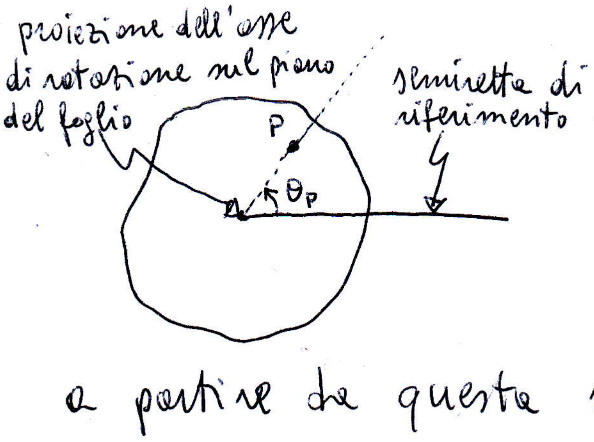
MOTO ROTAZIONALE (PRIMA PARTE)

Un corpo che ruota attorno a un asse, in generale, non può essere considerato assimilabile a un punto materiale, in quanto punti diversi dello stesso corpo hanno, a ogni istante, velocità vettoriali diverse.

Un corpo esteso in rotazione è quindi, a tutti gli effetti, un sistema di punti materiali in moto.

Se il corpo considerato non è deformabile, cioè se le distanze relative tra tutti i punti restano fisse, il sistema è chiamato CORPO RIGIDO.

Posizione, velocità e accelerazione angolare



Studiamo un corpo in rotazione attorno a un asse fissato. Sul piano perpendicolare a questo asse, tracciamo una semiretta che parte dall'asse stesso;

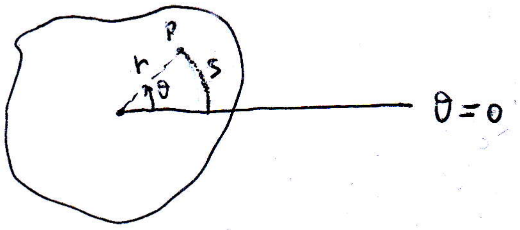
a partire da questa semiretta si misura la POSIZIONE ANGOLARE di ogni punto del corpo in esame.

Fissato un verso positivo per l'asse di rotazione (uscente dal piano del foglio se stiamo guardando il sistema lungo l'asse di rotazione (che quindi è orientato positivamente verso l'osservatore), usiamo la convenzione di misurare posizioni angolari positive procedendo in senso ANTIORARIO a partire dalla semiretta di riferimento.

Ciascuna posizione angolare è individuata da una seconda semiretta che parte anch'essa dall'asse di rotazione, perpendicolarmente a questo, e passa per il punto P considerato (vedi schema alla pagina precedente).

Con queste convenzioni, la posizione angolare del punto P è individuata dall'angolo θ_P (vedi ancora schema).

In un corpo rigido, un suo punto P ruota attorno a un asse fissato restando a distanza fissa dall'asse, e quindi percorrendo una traiettoria circolare sul piano perpendicolare all'asse.



Indichiamo con r la distanza del punto P dall'asse di rotazione, con θ la sua posizione angolare (misurata in RADIANTI) rispetto alla semiretta di riferimento, e con s la lunghezza dell'arco di circonferenza che sottende l'angolo θ.

Vale la relazione $\boxed{s = r\theta \quad (\theta \text{ in radianti})}$

Ricordare la corrispondenza tra misura angolare in radianti e misura angolare in gradi sessagesimali:

$$\boxed{\theta\,(\text{radianti}) = \frac{\pi}{180}\,\theta\,(\text{gradi})}$$

Attenzione: in un corpo rigido, quando avviene una rotazione di un certo angolo attorno a un asse fissato, tutti i punti del corpo rigido compiono la stessa rotazione, cioè ruotano tutti dello stesso angolo.

La variazione della posizione angolare di un punto tra un istante $t = t_i$ e un istante $t = t_f$ è detta SPOSTAMENTO ANGOLARE del corpo rigido (in quanto tutti i punti del corpo rigido subiscono lo stesso spostamento angolare), e si indica con

$$\boxed{\Delta\theta = \theta_f - \theta_i}$$

Il rapporto tra lo spostamento angolare $\Delta\theta$ e l'intervallo di tempo Δt in cui tale spostamento angolare avviene è detto VELOCITÀ ANGOLARE MEDIA nell'intervallo di tempo Δt:

$$\boxed{\omega_m = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}}$$

(si misura in rad/s)

Il limite per $\Delta t \to 0$ di questa quantità definisce la VELOCITÀ ANGOLARE ISTANTANEA. Se la posizione angolare varia nel tempo secondo la legge $\theta(t)$, risulta allora:

$$\boxed{\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = (\theta(t))'}$$

VELOCITÀ ANGOLARE ISTANTANEA

Per fissare le idee, facciamo coincidere l'asse di rotazione fisso di un corpo rigido con l'asse z di un sistema di assi cartesiani ortogonali tridimensionale (cioè, nello spazio).

Se $\theta(t)$ cresce al passare del tempo, risulta $\omega(t) > 0$; se $\theta(t)$ decresce al passare del tempo, risulta $\omega(t) < 0$: dunque, se la rotazione è in senso antiorario risulta $\omega(t) > 0$, mentre risulta $\omega(t) < 0$ in caso di rotazione in senso orario.

Indicata con $\Delta\omega = \omega_f - \omega_i$ la variazione della velocità angolare istantanea in un dato intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$, si definisce ACCELERAZIONE ANGOLARE MEDIA del corpo rigido nell'intervallo di tempo Δt la quantità

$$\boxed{\alpha_m = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$$

(si misura in rad/s^2)

Il limite per $\Delta t \to 0$ di questa quantità definisce l'ACCELERAZIONE ANGOLARE ISTANTANEA:

$$\boxed{\alpha(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = (\omega(t))' = (\theta(t))''}$$

Quando un corpo rigido ruota attorno a un asse fisso, ogni punto del corpo ruota attorno allo stesso asse, a ogni istante, con la stessa velocita' angolare e la stessa accelerazione angolare.

Moto circolare e rotatorio con accelerazione angolare costante

Consideriamo il caso di moto circolare o rotatorio con

$$\alpha(t) = \alpha \quad \text{(costante)}.$$

Dalla relazione $(\omega(t))' = \alpha$ otteniamo pertanto (ricordando una situazione simile, quella del moto rettilineo uniformemente accelerato):

(1) $\boxed{\omega(t) = \omega_0 + \alpha t}$, dove ω_0 e' la velocita' angolare istantanea all' istante $t=0$.

Dalla relazione $(\theta(t))' = \omega(t)$ otteniamo poi:

(2) $\boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2}$, dove θ_0 e' la posizione angolare all' istante $t=0$.

Dalla (1) ricaviamo $t = \dfrac{\omega(t) - \omega_0}{\alpha}$ (purché $\alpha \neq 0$!), che, sostituito nella (2), permette di scrivere:

$$\theta(t) - \theta_0 = \frac{\omega_0}{\alpha}\left[\omega(t) - \omega_0\right] + \frac{1}{2}\cancel{\alpha}\,\frac{[\omega(t)-\omega_0]^2}{\alpha^{\cancel{2}}}$$

$$\theta(t) - \theta_0 = \frac{[\omega(t) - \omega_0]}{2\alpha}\cdot\left(2\omega_0 + \omega(t) - \omega_0\right)$$

$$\theta(t) - \theta_0 = \frac{1}{2\alpha}\left[\omega(t) - \omega_0\right]\left[\omega(t) + \omega_0\right],$$ cioè:

$$2\alpha\left[\theta(t) - \theta_0\right] = (\omega(t))^2 - \omega_0^2$$

Dunque:

$$\boxed{(\omega(t))^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\left[\theta(t) - \theta_0\right]}$$

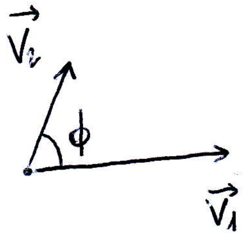
Si noti la somiglianza tra questa relazione e quella valida per il moto rettilineo uniformemente accelerato (con $V_x(t)$ e V_{x_0} al posto rispettivamente di $\omega(t)$ e di ω_0, e $x(t)$, x_0 al posto rispettivamente di $\theta(t)$ e θ_0, e ovviamente con a_x costante al posto di α costante).

Prodotto vettoriale di due vettori

Consideriamo due vettori $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$.

Definiamo una nuova operazione tra due vettori, detta PRODOTTO VETTORIALE, e indicata con $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ (o $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$)

Il prodotto vettoriale di $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ è una quantità vettoriale: $\vec{W} = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2$, così definita:



- il modulo di $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ è $|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot \text{sen}\,\phi$, dove ϕ è l'angolo più piccolo tra $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ nel piano definito dai due vettori (risulta sempre $0° \leq \phi \leq 180°$).

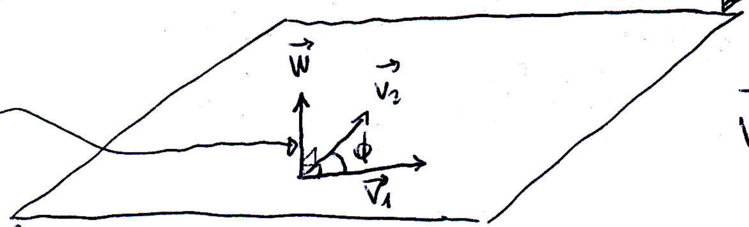
- La direzione di $\vec{w} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ è perpendicolare al piano definito dai vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

- Il verso di $\vec{w} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ si può determinare usando la cosiddetta "regola della mano destra":

  ponendo l'indice della mano destra lungo la direzione di $\vec{v}_1$, concorde a $\vec{v}_1$, e il medio della mano destra lungo la direzione di $\vec{v}_2$, concorde a $\vec{v}_2$ (in modo che l'angolo tra le due dita sia minore di 180°), il pollice alzato della mano destra determina la direzione e il verso del vettore $\vec{w} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$

Esempio grafico:

piano definito dai vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$



$\vec{w} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$

vettore $\vec{w}$ perpendicolare al piano definito da $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, con verso individuato dalla "regola della mano destra

Proprietà del prodotto vettoriale, tutte dimostrabili a partire dalla definizione:

1) il prodotto vettoriale è un'operazione ANTICOMMUTATIVA; risulta cioè $\vec{V_2} \times \vec{V_1} = -(\vec{V_1} \times \vec{V_2})$;

2) se $\phi = 0°$ oppure $\phi = 180°$, risulta $\vec{V_1} \times \vec{V_2} = 0$;

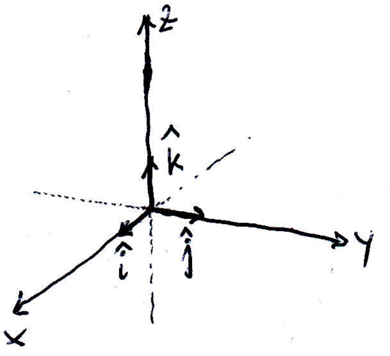
in particolare, il prodotto vettoriale di un vettore con se stesso, $\vec{V_1} \times \vec{V_1}$, è un vettore nullo;

3) se $\phi = 90°$ risulta $|\vec{V_1} \times \vec{V_2}| = |\vec{V_1}| \cdot |\vec{V_2}|$

4) per i versori dei tre assi cartesiani nello spazio valgono le seguenti regole:

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$
$$\hat{i} \times \hat{j} = -(\hat{j} \times \hat{i}) = \hat{k}$$
$$\hat{j} \times \hat{k} = -(\hat{k} \times \hat{j}) = \hat{i}$$
$$\hat{k} \times \hat{i} = -(\hat{i} \times \hat{k}) = \hat{j}$$

N.B.: ricordare come sono orientati nello spazio i tre assi cartesiani l'uno rispetto all'altro!



5) vale la proprietà distributiva; dati i vettori $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$, con $\vec{V_2}$ e $\vec{V_3}$ vettori omogenei, risulta:

$$\vec{V_1} \times (\vec{V_2} + \vec{V_3}) = (\vec{V_1} \times \vec{V_2}) + (\vec{V_1} \times \vec{V_3})$$

6) Se c e' una quantita' reale, risulta:

$$c(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) = (c\vec{V}_1) \times \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \times (c\vec{V}_2)$$

7) Se $\vec{V}_1(t)$ e $\vec{V}_2(t)$ sono due grandezze vettoriali che dipendono dalla variabile t (il tempo, in genere), risulta:

$$[\vec{V}_1(t) \times \vec{V}_2(t)]' = \left([\vec{V}_1(t)]' \times \vec{V}_2(t)\right) + \left(\vec{V}_1(t) \times [\vec{V}_2(t)]'\right)$$

(regola di derivazione del prodotto vettoriale)

8) doppio prodotto vettoriale; vale l'identita' seguente:

$$\vec{V}_1 \times (\vec{V}_2 \times \vec{V}_3) = [\vec{V}_2(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3)] - [\vec{V}_3(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)]$$

Esprimiamo il prodotto vettoriale $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ in termini delle componenti cartesiane dei vettori $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$.

$$\vec{V}_1 = V_{1x}\hat{i} + V_{1y}\hat{j} + V_{1z}\hat{k} \qquad \vec{V}_2 = V_{2x}\hat{i} + V_{2y}\hat{j} + V_{2z}\hat{k}$$

Allora, usando le propieta' 5) e 4), otteniamo:

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = (V_{1x}\hat{i} + V_{1y}\hat{j} + V_{1z}\hat{k}) \times (V_{2x}\hat{i} + V_{2y}\hat{j} + V_{2z}\hat{k}) =$$

$$= V_{1x}V_{2y}(\hat{i}\times\hat{j}) + V_{1x}V_{2z}(\hat{i}\times\hat{k}) + V_{1y}V_{2x}(\hat{j}\times\hat{i}) + V_{1y}V_{2z}(\hat{j}\times\hat{k}) +$$

$$+ V_{1z}V_{2x}(\hat{k}\times\hat{i}) + V_{1z}V_{2y}(\hat{k}\times\hat{j}) =$$

(abbiamo sfruttato la propieta' $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$)

$$= V_{1x}V_{2y}\hat{k} - V_{1x}V_{2z}\hat{j} - V_{1y}V_{2x}\hat{k} + V_{1y}V_{2z}\hat{i} + V_{1z}V_{2x}\hat{j} - V_{1z}V_{2y}\hat{i} =$$

$$= (V_{1y}V_{2z} - V_{1z}V_{2y})\hat{i} + (V_{1z}V_{2x} - V_{1x}V_{2z})\hat{j} + (V_{1x}V_{2y} - V_{1y}V_{2x})\hat{k}$$

Se i due vettori $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ si trovano entrambi nel piano (x, y), risulta $V_{1z} = 0$, $V_{2z} = 0$, e quindi il loro prodotto vettoriale risulta:

$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = (V_{1x} V_{2y} - V_{1y} V_{2x}) \hat{k}$, per cui in questo caso specifico $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ ha solo una componente cartesiana, e $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ e' diretto lungo l'asse z:

$$(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2)_x = 0, \quad (\vec{V}_1 \times \vec{V}_2)_y = 0, \quad (\vec{V}_1 \times \vec{V}_2)_z = V_{1x} V_{2y} - V_{1y} V_{2x}$$

$$(\vec{V}_2 \times \vec{V}_1)_x = 0, \quad (\vec{V}_2 \times \vec{V}_1)_y = 0 \quad (\vec{V}_2 \times \vec{V}_1)_z = V_{2x} V_{1y} - V_{2y} V_{1z}$$

Esempio 1

$$\vec{V}_1 = 2\hat{i} + 3\hat{j} \qquad \vec{V}_2 = -\hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = (2\hat{i} + 3\hat{j}) \times (-\hat{i} + 2\hat{j}) = 4(\hat{i} \times \hat{j}) - 3(\hat{j} \times \hat{i}) = 4\hat{k} - 3(-\hat{k}) =$$

$$= 4\hat{k} + 3\hat{k} = 7\hat{k}$$

Usando le formule per $(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2)_z$ otteniamo infatti:

$$(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2)_z = (2 \cdot 2) - (3 \cdot (-1)) = 4 - (-3) = 4 + 3 = 7$$

$$\vec{V}_2 \times \vec{V}_1 = (-\hat{i} + 2\hat{j}) \times (2\hat{i} + 3\hat{j}) = -3(\hat{i} \times \hat{j}) + 4(\hat{j} \times \hat{i}) =$$

$$= -3\hat{k} + 4 \cdot (-\hat{k}) = -3\hat{k} - 4\hat{k} = -7\hat{k} = -(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2)$$

Usando le formule per $(\vec{V}_2 \times \vec{V}_1)_z$ otteniamo infatti:

$$(\vec{V}_2 \times \vec{V}_1)_z = ((-1) \cdot 3) - (2 \cdot 2) = -3 - 4 = -7 = -(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2)_z$$

Quantità vettoriali nel moto rotazionale

Osserviamo anzitutto che uno spostamento angolare finito non è una quantità vettoriale. Infatti, in generale, se effettuiamo una rotazione di un angolo ϑ_1 attorno a un asse individuato, nello spazio, da un versore $\hat{u}_1$, seguita da una seconda rotazione di un angolo ϑ_2 attorno a un altro asse nello spazio individuato da un versore $\hat{u}_2$, si osserva che la posizione finale del corpo rigido non coincide con quella che si ottiene eseguendo le due rotazioni nell'ordine scambiato, a partire dalla stessa posizione iniziale. Dunque, le due operazioni non sono tra loro commutative, per cui non posso associare una quantità vettoriale a una rotazione finita attorno a un asse nello spazio, in quanto una somma vettoriale deve godere della proprietà commutativa.

Provate, per verifica, a eseguire una rotazione di un foglio di carta, a partire da una posizione fissata, prima attorno a un asse orizzontale di 90°, e poi attorno a un asse verticale di 90°, e confrontate l'orientamento finale con quello ottenuto, a partire dalla stessa posizione iniziale, effettuando le due rotazioni nell'ordine inverso.

Se tuttavia si considerano spostamenti angolari molto piccoli, si osserva che la differenza rammentata in precedenza tende a scomparire per $\Delta\vartheta \to 0$ (o, che è la stessa cosa, per $\Delta t \to 0$).

Se possiamo di associare a uno spostamento angolare molto piccolo $\Delta\vartheta$ attorno a un asse individuato da un versore $\hat{u}$ una quantità vettoriale $\Delta\vartheta\,\hat{u}$, è possibile introdurre immediatamente un vettore VELOCITÀ ANGOLARE ISTANTANEA:

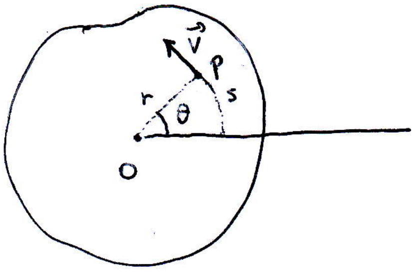
$$\boxed{\vec{\omega}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}\,\hat{u}\right) = \omega(t)\,\hat{u}}$$

Per i segni valgono naturalmente le convenzioni introdotte da pag. 1 e pag. 4; anche per il verso positivo dell'asse.

Se l'asse di rotazione resta fisso, derivando i due membri della relazione scritta sopra rispetto al tempo otteniamo un'ulteriore quantità vettoriale, detta ACCELERAZIONE ANGOLARE ISTANTANEA:

$$\boxed{\vec{\alpha}(t) = [\vec{\omega}(t)]' = [\omega(t)]'\,\hat{u}}$$

Sia $\vec{\omega}(t)$ sia $\vec{\alpha}(t)$ sono vettori diretti lungo l'asse di rotazione individuato dal versore $\hat{u}$.



Consideriamo un punto P interno a un corpo rigido in rotazione attorno a un asse fissato.

Sul piano perpendicolare all'asse di rotazione e passante per il punto P, il punto P si muove lungo una traiettoria circolare avente raggio r dato dalla distanza tra il punto P e l'asse di rotazione.

Il vettore velocità istantanea $\vec{v}$ del punto P, dunque, è tangente a ogni istante a questa traiettoria circolare, e per questo motivo viene anche detto, nel moto rotazionale, VELOCITÀ TANGENZIALE, e V_t è la sua componente tangente alla traiettoria.

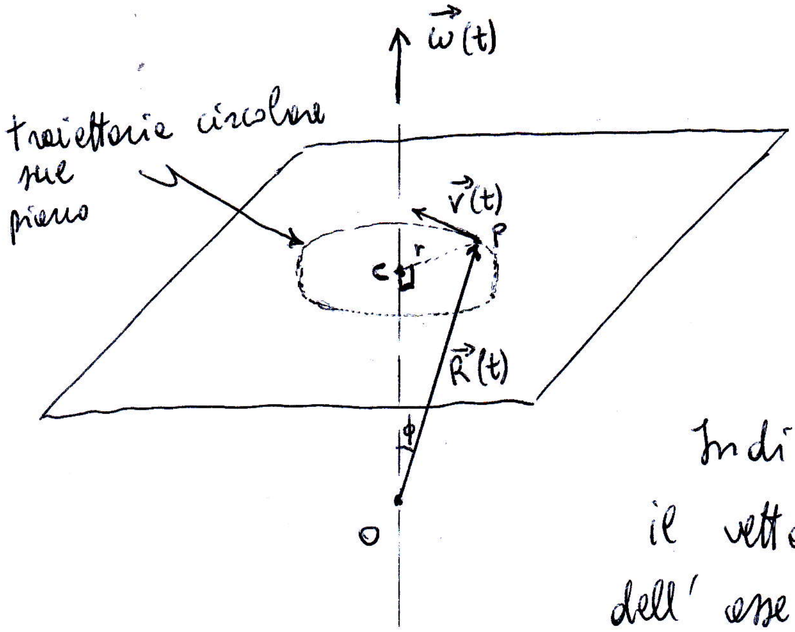
Indichiamo con s la lunghezza dell'arco di circonferenza di raggio r tra la semiretta di riferimento e la posizione del punto P. Se l'angolo θ (posizione angolare del punto P) è misurato in radianti, vale ovviamente la relazione

$s = r\theta$, con r costante, per cui risulta:

$$|\vec{v}(t)| = |[s(t)]'| = r\,|[\theta(t)]'| = r\,|\omega(t)|$$

Dunque, se usiamo la convenzione naturale che la velocità tangenziale V_t sia positiva se la rotazione avviene in senso antiorario (con verso dell'asse di rotazione positivo uscente dal foglio), possiamo quindi scrivere:

$$\boxed{V_t(t) = r\,\omega(t)}$$



Adesso, fissiamo un origine O lungo l' asse di rotazione. Sia $\vec{R}(t)$ il vettore posizione del punto P rispetto all'origine O. Indichiamo con ϕ l'angolo tra il vettore $\vec{R}$ e il verso positivo dell' asse di rotazione (verso l' alto nello schema qua sopra). Il raggio della traiettoria circolare del punto P e' quindi :

$$r = R \operatorname{sen}\phi, \quad \text{dove} \quad R = |\vec{R}|$$

Per quanto abbiamo visto in precedenza, il vettore velocita' angolare istantanea e' diretto lungo l' asse di rotazione, nel verso indicato nello schema qua sopra se il verso di $\vec{v}(t)$ e' quello indicato.

Osserviamo che risulta $|\vec{v}(t)| = |\omega(t)| \cdot r = |\omega(t)| \cdot R \operatorname{sen}\phi$, e che il vettore $\vec{v}(t)$ e' perpendicolare al piano definito dai vettori $\vec{\omega}(t)$ e $\vec{R}(t)$

Dunque, vale la relazione vettoriale seguente :

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{R}(t)}$$

Questa relazione vale se l'origine del sistema di riferimento si trova sull' asse di rotazione.

Derivando rispetto al tempo i due membri di questa relazione otteniamo:

$$\vec{a}(t) = [\vec{v}(t)]' = [\vec{\omega}(t)]' \times \vec{R}(t) + \vec{\omega}(t) \times [\vec{R}(t)]'$$

Si osserva che risulta $[\vec{R}(t)]' = \vec{v}(t)$ (verificare!),

e quindi possiamo scrivere:

$$\boxed{\vec{a}(t) = \vec{\alpha}(t) \times \vec{R}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{v}(t)}$$

Osserviamo che:

- il vettore $\vec{\alpha}(t) \times \vec{R}(t)$ e' diretto nella direzione tangente alla traiettoria circolare nel punto P, e il suo modulo e':

  $$|\vec{\alpha}(t)|\, R \operatorname{sen}\phi = |\alpha(t)|\, R \operatorname{sen}\phi = |\alpha(t)|\, r = r\left|[\omega(t)]'\right| =$$

  $$= |v_t(t)|' ;$$

  dunque, $\vec{\alpha}(t) \times \vec{R}(t)$ si puo' chiamare VETTORE ACCELERAZIONE TANGENZIALE del punto P in rotazione

- il vettore $\vec{\omega}(t) \times \vec{v}(t)$ e' diretto lungo la direzione perpendicolare all' asse di rotazione, orientato dal punto P verso l' asse di rotazione; poiché $\vec{\omega}(t)$ e $\vec{v}(t)$ sono tra loro perpendicolari, risulta:

  $$|\vec{\omega}(t) \times \vec{v}(t)| = |\vec{\omega}(t)| \cdot |\vec{v}(t)| = |\omega(t)| \cdot |v_t(t)| = (\omega(t))^2 r = \frac{(v_t(t))^2}{r} ;$$

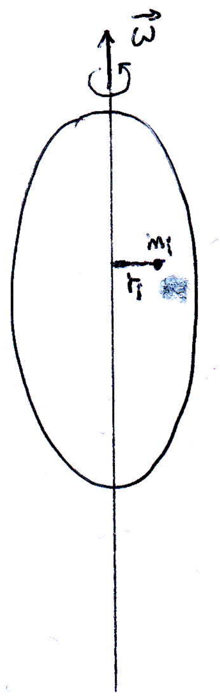
  dunque, il vettore $\vec{\omega}(t) \times \vec{v}(t)$ rappresenta il VETTORE ACCELERAZIONE CENTRIPETA del punto P in rotazione.

Il modulo del vettore accelerazione istantanea di un punto in rotazione attorno a un asse è, quindi (in generale):

$$a(t) = |\vec{a}(t)| = \sqrt{|\vec{\alpha}(t) \times \vec{R}(t)|^2 + |\vec{\omega}(t) \times \vec{v}(t)|^2} = \sqrt{r^2(\alpha(t))^2 + r^2(\omega(t))^4} =$$

$$= r\sqrt{(\alpha(t))^2 + (\omega(t))^4}$$

Energia cinetica rotazionale di un sistema rigido



Consideriamo un corpo rigido, oppure un sistema rigido di N punti materiali, in rotazione attorno a un asse fissato con velocità angolare ω.

Indichiamo con m_i la massa del punto materiale i-esimo del sistema rigido, e con $\vec{v}_i$ la sua velocità istantanea.

Sia r_i la distanza di questo punto materiale dall'asse di rotazione. Dunque, l'energia cinetica di questo punto materiale è:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i|^2 = \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

Dunque, l'energia cinetica totale di rotazione del sistema rigido è:

$$K = \sum_{i=1}^{N} K_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \right) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{N} (m_i r_i^2) \right] \omega^2,$$

in quanto la velocità angolare di rotazione è la stessa per tutti i punti di un sistema rigido; abbiamo inoltre sfruttato la relazione $|\vec{v}_i| = r_i |\omega|$, vista in precedenza.

Poniamo, quindi:

$$\boxed{I_z = \sum_{i=1}^{N} (m_i r_i^2)}$$

I_z è il MOMENTO D'INERZIA del sistema rigido relativo all'asse di rotazione considerato (asse z).

Pertanto, l'energia cinetica di un sistema rigido costituito a N punti materiali in rotazione attorno a un asse fissato è:

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I_z \omega^2}$$

Il momento d'inerzia si misura in $Kg\,m^2$ nel S.I. di unità di misura.

Supponiamo ora di conoscere il momento d'inerzia, rispetto a un asse fissato, di un sistema rigido di N punti materiali, quando l'asse di rotazione passa per il centro di massa del sistema. Vogliamo calcolare il momento d'inerzia del sistema rigido relativo a un secondo asse di rotazione, parallelo al primo e a distanza d da questo.

Rispetto all'origine O posta sull'asse di rotazione, indichiamo con $\vec{R}_i$ il vettore posizione del punto materiale i-esimo quando l'asse di rotazione non passa per il centro di massa del sistema, con $\vec{R}_{CM}$ il vettore posizione del centro di massa del sistema, e con $\vec{R}'_i$ il vettore posizione del punto

materiale rispetto al centro di massa del sistema.
Risulta quindi, per costruzione:

$$\vec{R}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{R}'_i \qquad (*)$$

Rispetto ai due assi considerati, che sono paralleli e quindi diretti entrambi parallelamente all'asse z (per fissare le idee), ogni vettore può essere considerato come somma vettoriale di due vettori componenti: uno parallelo all'asse z, e l'altro perpendicolare all'asse z, per cui potremo scrivere:

$$\vec{R}_i = z_i \hat{K} + \vec{r}_i \; ; \; \vec{R}_{CM} = z_{CM} \hat{k} + \vec{r}_{CM} \; ; \; \vec{R}'_i = z'_i \hat{k} + \vec{r}'_i$$

$\vec{r}_i$, $\vec{r}_{CM}$, $\vec{r}'_i$ sono i vettori componenti perpendicolari all'asse z rispettivamente dei vettori $\vec{R}_i$, $\vec{R}_{CM}$, $\vec{R}'_i$.
Risulta chiaramente: $|\vec{r}_i| = r_i$, $|\vec{r}_{CM}| = r_{CM}$, $|\vec{r}'_i| = r'_i$,

cioè $|\vec{r}_i|$ e $|\vec{r}_{CM}|$ sono le distanze rispettivamente del punto i-esimo del sistema e del centro di massa dal secondo asse di rotazione, mentre $|\vec{r}'_i|$ è la distanza del punto i-esimo dal primo asse di rotazione (quello passante per il centro di massa del sistema).
La relazione vettoriale (*) implica che deve risultare

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}'_i$$

Nella formula che definisce il momento d'inerzia compare r_i^2; risulta quindi:

$$r_i^2 = |\vec{r_i}|^2 = |\vec{r}_{CM} + \vec{r}_i^{\,\prime}|^2 = |\vec{r}_{CM}|^2 + |\vec{r}_i^{\,\prime}|^2 + 2\,\vec{r}_{CM} \cdot \vec{r}_i^{\,\prime} =$$

$$= r_{CM}^2 + (r_i^{\prime})^2 + 2\,\vec{r}_{CM} \cdot \vec{r}_i^{\,\prime}$$

Allora, il momento d'inerzia del sistema rigido relativo al secondo asse diventa:

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} (m_i r_i^2) = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \left(r_{CM}^2 + (r_i^{\prime})^2 + 2\,\vec{r}_{CM} \cdot \vec{r}_i^{\,\prime} \right) \right] =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right) r_{CM}^2 + \sum_{i=1}^{N} \left[m_i (r_i^{\prime})^2 \right] + 2\,\vec{r}_{CM} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{r}_i^{\,\prime}) \right) =$$

$$= M_{TOT}\, r_{CM}^2 + \sum_{i=1}^{N} \left[m_i (r_i^{\prime})^2 \right] + 2\, M_{TOT}\, \vec{r}_{CM} \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{r}_i^{\,\prime})}{M_{TOT}} \right]$$

Per le richieste ~~fatte~~ in partenza, risulta chiaramente $r_{CM} = d$; ma che cosa è la quantità

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{r}_i^{\,\prime})}{M_{TOT}}$$

? A vista, è il componente perpendicolare all'asse di rotazione del vettore posizione del centro di massa del sistema ... rispetto al centro di massa del sistema!! Pertanto, per costruzione, è un vettore nullo.

In definitiva, otteniamo:

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i r_i^2) = M_{TOT} d^2 + \sum_{i=1}^{N} [m_i (r_i')^2]$$

Ma $\sum_{i=1}^{N} [m_i (r_i')^2]$ è il momento d'inerzia del sistema rigido relativo all'asse passante per il centro di massa, per cui il momento d'inerzia di un sistema rigido relativo a un asse parallelo a quello passante per il centro di massa, posto a distanza d da questo, è dato da:

$$\boxed{I_z = M_{TOT} d^2 + I_{z,CM}}$$

dove $I_{z,CM}$ è il momento d'inerzia del sistema rigido relativo all'asse passante per il centro di massa.

Questa relazione che abbiamo appena dimostrato è nota come TEOREMA DI HUYGENS - STEINER, o anche come TEOREMA DEGLI ASSI PARALLELI.

Nel caso di un corpo esteso e continuo (solido in rotazione), per il calcolo del momento d'inerzia relativo a un asse dato è necessario procedere, in partenza, immaginando di suddividere il solido in piccolissimi cubetti aventi volume ciascuno ΔV_i e massa Δm_i, con il cubetto i-esimo posto a distanza r_i dall'asse di rotazione.

Allora, se N è il numero di questi cubetti, potremo scrivere in prima approssimazione:

$$I_z \simeq \sum_{i=1}^{N} \left(r_i^2 \, \Delta m_i \right)$$

Se nel punto considerato risulta $\Delta m_i = \rho_i \, \Delta V_i$, dove ρ_i è la densità del corpo in quel punto, otteniamo:

$$I_z \simeq \sum_{i=1}^{N} \left(\rho_i \, r_i^2 \, \Delta V_i \right)$$

Facendo tendere N a infinito (e quindi facendo tendere a zero i volumetti ΔV_i) otteniamo:

$$I_z = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} \left(r_i^2 \rho_i \, \Delta V_i \right) = \int \rho \, r^2 \, dV$$

Questo integrale, in generale, è un "integrale di volume", che in coordinate cartesiane equivale in generale a un opportuno integrale triplo (semplificabile se il corpo presenta simmetrie rispetto all'asse considerato).

Ovviamente, se il corpo è omogeneo risulta $\rho = \frac{M}{V} = \text{costante}$, dove M è la massa del corpo e V è il suo volume.

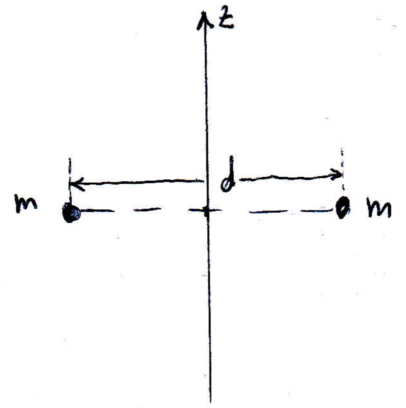
Esempio 2

Si consideri un modellino di una molecola di ossigeno biatomica (O_2): ciascun atomo ha massa $m = 2,66 \times 10^{-26}$ kg, e i due atomi sono a distanza $d = 1,21 \times 10^{-10}$ m l'uno dall'altro.

a) Calcolare il momento d'inerzia del sistema rigido relativo a un asse perpendicolare alla retta congiungente i due atomi, passante per il punto medio del segmento congiungente.

b) Se la velocità angolare di rotazione del sistema attorno all'asse considerato al punto a) è $\omega = 4,6 \times 10^{12}$ rad/s, si calcoli l'energia cinetica rotazionale della molecola.

a)



Per le richieste del problema, ciascuna molecola si trova a distanza $d/2$ dall'asse considerato, e quindi il momento d'inerzia è:

$$I_z = m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \cancel{2}m\cdot\frac{d^2}{\cancel{4}_{2}} = \frac{1}{2}md^2 =$$

$$= 1,9473 \times 10^{-46}\ \text{kg m}^2$$

b) Dalla legge che fornisce l'energia cinetica rotazionale otteniamo:

$$K = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = 2,0602 \times 10^{-21}\ \text{J}$$

Esempio 3

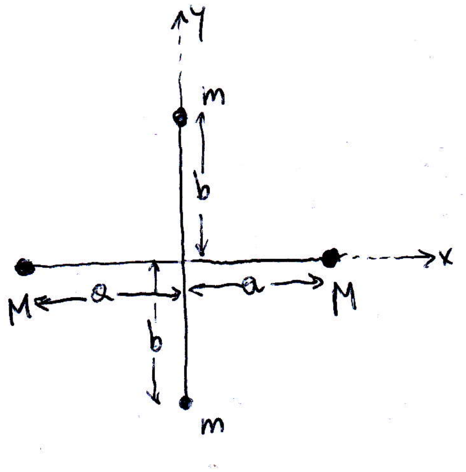
Quattro piccole sfere sono fissate a un telaio formato da due aste di massa trascurabile, che giace nel piano (x, y). Si suppone che il raggio delle sfere sia piccolo rispetto alle dimensioni del telaio (vedi figura).

a) Se il sistema ruota intorno all'asse y con velocita' angolare ω, si calcolino il momento d'inerzia e l'energia cinetica rotazionale rispetto a tale asse.

b) Si suppone ora che il sistema ruoti nel piano (x, y) intorno all'asse z passante per il centro del telaio. Si calcolino il momento d'inerzia rispetto all'asse z e l'energia cinetica di rotazione.

/-------/

a)



Il contributo dei due punti materiali di massa m al momento d'inerzia del sistema rigido rispetto all'asse y e' nullo (si trovano nell'asse y !!)

Allora risulta $I_z = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2$, e quindi

$$K = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 2Ma^2\omega^2 = Ma^2\omega^2$$

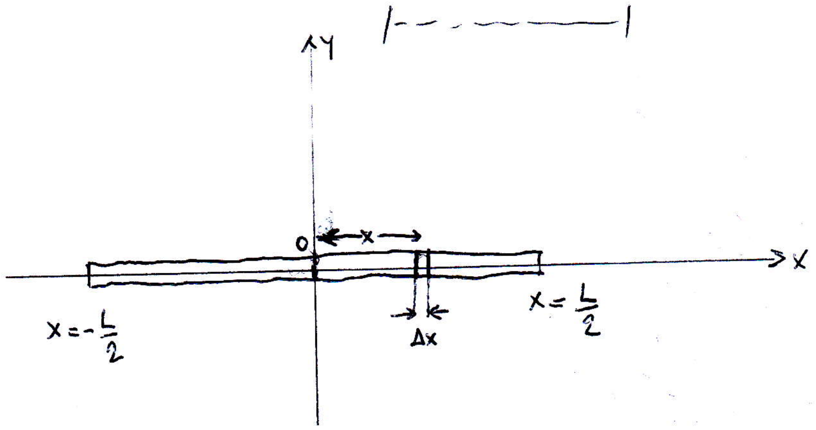
b) Ora risulta: $I_z = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = 2(Ma^2 + mb^2)$,

e quindi:

$$K = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 2(Ma^2 + mb^2)\omega^2 = (Ma^2 + mb^2)\omega^2$$

Esempio 4

Si calcoli il momento d'inerzia di una sbarretta rigida omogenea, avente lunghezza L e massa M, rispetto a un asse perpendicolare alla sbarretta e passante per il suo centro di massa.



Suddividiamo la sbarretta in tanti piccoli segmentini di lunghezza Δx; poiché la sbarretta è omogenea per le ipotesi del problema, essa ha una densità lineare di massa costante uguale a

$\lambda = \dfrac{M}{L}$; dunque la massa contenuta in un segmentino di lunghezza Δx è $\Delta m = \lambda \Delta x = \dfrac{M}{L} \Delta x$

Un elemento di sbarretta che si trova nella posizione x, chiaramente si trova a una distanza $|x|$ dall'asse di rotazione. Allora il momento d'inerzia della sbarretta relativo all'asse indicato è:

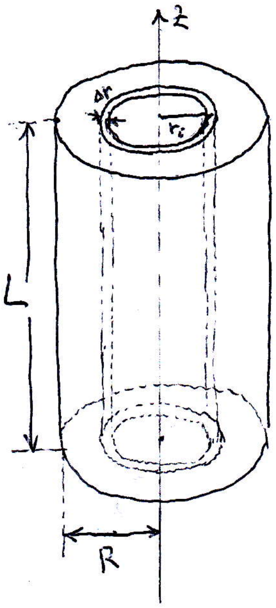
$$I_y \simeq \sum_{i=1}^{N} \left(x_i^2 \Delta m_i \right) = \sum_{i=1}^{N} \left(x_i^2 \frac{M}{L} \Delta x \right) = \frac{M}{L} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \Delta x$$

Per $N \to \infty$ otteniamo quindi:

$$\boxed{I_z = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{M}{3L} \left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3 \right] = \frac{M}{3\cancel{L}} \cdot \frac{2 L^{\cancel{3}\,2}}{8} = \frac{1}{12} M L^2}$$

Esempio 5

Si calcoli il momento d'inerzia di un cilindro omogeneo di raggio R, altezza L e massa M rispetto al suo asse di simmetria passante per i centri delle due basi.



Dalla formula di partenza $I_z \simeq \sum_{i=1}^{N} r_i^2 \Delta m_i$, ricaviamo il suggerimento di suddividere il volume del cilindro in "sottovolumi", ciascuno dei quali è costituito da "punti" che si trovano alla stessa distanza dall'asse di rotazione. Questo si può fare considerando volumetti del cilindro costituiti da gusci cilindrici concentrici con l'asse del cilindro, di spessore Δr_i molto piccolo. Il volume di uno di tali gusci, costituito dai punti che si trovano alla distanza r_i dall'asse del cilindro, è:

$$\Delta V_i(r) = 2\pi r_i \cdot \Delta r_i \cdot L = 2\pi L r_i \Delta r$$

Dato che il cilindro è omogeneo, la sua densità è:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 L}$$, e dunque la massa $\Delta m(r)$ contenuta in un volumetto $\Delta V_i(r)$ è: $\Delta m_i(r) = \rho \, \Delta V_i(r) = \frac{M}{\cancel{\pi} R^2 \cancel{L}} \cdot 2\cancel{\pi}\cancel{L} r_i \Delta r =$

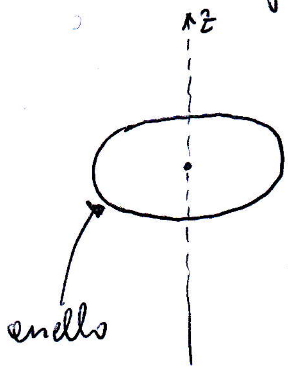
$= \frac{2M}{R^2} r_i \Delta r$; dunque otteniamo: $I_z \simeq \sum_{i=1}^{N} r_i^2 \cdot \frac{2M}{R^2} r_i \cdot \Delta r =$

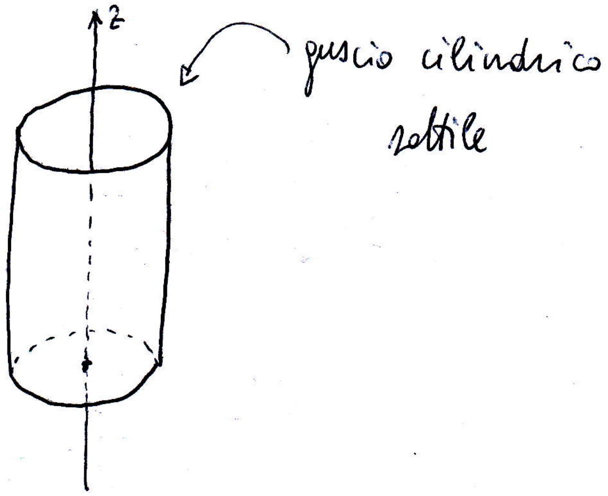
$= \frac{2M}{R^2} \sum_{i=1}^{N} r_i^3 \Delta r$; per $N \to \infty$ otteniamo quindi:

$$\boxed{I_z = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^R \right) = \frac{2M}{\cancel{R^2}} \cdot \frac{R^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{4}\,2} = \frac{1}{2} M R^2}$$

Momenti d'inerzia di alcuni solidi omogenei rispetto a un loro asse di simmetria

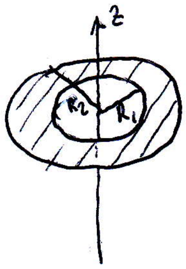
1) Anello o guscio cilindrico molto sottile

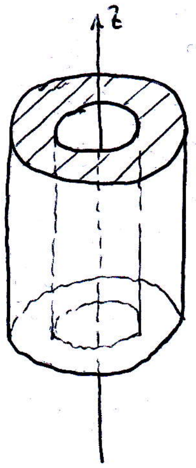




$$\boxed{I_z = MR^2}$$

2) Corona circolare o guscio cilindrico non sottile

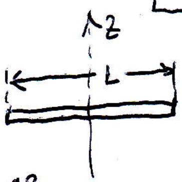




$$I_z = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$$

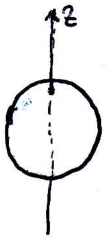
3) Cilindro pieno o disco: $\boxed{I_z = \frac{1}{2} MR^2}$ (dimostrato)

4) Sbarra sottile:



$\boxed{I_z = \frac{1}{12} ML^2}$ (dimostrato)

5) Sfera piena:



$$\boxed{I_z = \frac{2}{5} MR^2}$$

6) Guscio sferico sottile: $I_z = \frac{2}{3} MR^2$

Esempio 6

Una sbarra omogenea di lunghezza L e massa M è libera di ruotare per un suo estremo attorno a un perno privo di attrito. Inizialmente la sbarra è in posizione orizzontale, e all'istante iniziale viene rilasciata da ferma.

a) Calcolare la velocità angolare della sbarra quando è allineata lungo la direzione verticale.

b) Calcolare il modulo della velocità tangenziale del centro di massa e dell'estremo inferiore della sbarretta quando questa è allineata lungo la direzione verticale.

a) Poiché la sbarra omogenea, in questo problema, compie una rotazione attorno a un asse perpendicolare alla sbarra e passante per un suo estremo, occorre calcolare il momento d'inerzia della sbarra relativo a questo asse. Sappiamo già (dimostrato) che il momento d'inerzia di una sbarra sottile omogenea relativo a un asse perpendicolare alla sbarra e passante per il suo centro di massa è $I_{z,CM} = \frac{1}{12} ML^2$; il momento d'inerzia relativo a un asse parallelo a questo, posto a una distanza $d = \frac{L}{2}$, è uguale a:

$$\boxed{I_z = Md^2 + I_{z,CM} = M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} ML^2 = \frac{1}{4} ML^2 + \frac{1}{12} ML^2 = \frac{1}{3} ML^2}$$

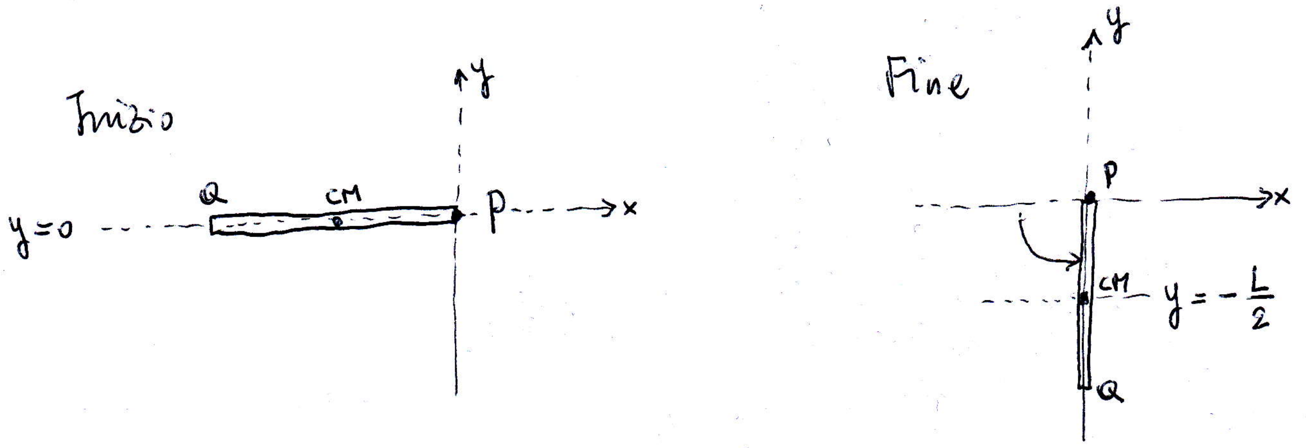
(ricordare, perché serve in molti problemi ed esercizi!)

Abbiamo chiaramente utilizzato il teorema di Huygens-Steiner.

Mentre la sbarra ruota verso il basso, le forze agenti su di essa sono: la forza peso e la reazione del perno.

Tuttavia, la reazione del perno è applicata a un punto fisso della sbarra (il centro della rotazione), per cui il lavoro compiuto dalla reazione del perno è nullo.

L'unica forza che compie lavoro sulla sbarra, quindi, è la forza peso. Poiché, quindi, il lavoro sulla sbarra è compiuto da una forza conservativa, l'energia meccanica della sbarra si conserva durante la rotazione.



Se poniamo che la quota del perno sia $y = 0$, allora la quota iniziale del centro di massa è $y_{CM,i} = 0$, e la quota finale è $y_{CM,f} = -\frac{L}{2}$ (il centro di massa di una sbarra omogenea si trova a metà della sua lunghezza, come abbiamo dimostrato).

Possiamo dunque usare la legge di conservazione dell'energia meccanica tra l'istante t_i e l'istante t_f:

$$E_{m,f} = E_{m,i}$$

$$K_f + U_{p,f} = K_i + U_{p,i}$$

Poiché la sbarra è inizialmente ferma, risulta $K_i = 0$;
inoltre: $U_{p,i} = Mg\,y_{CM,i} = 0$

Inoltre: $K_f = \frac{1}{2} I_z \omega_f^2$, e $U_{p,f} = Mg\,y_{CM,f} = -\frac{1}{2} MgL$

Allora possiamo scrivere:

$$\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} \cancel{M} L^{\cancel{2}} \omega_f^2 - \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{M} g \cancel{L} = 0 ,$$ da cui ricaviamo:

$$\frac{1}{3} L \omega_f^2 = g$$, cioè $\omega_f^2 = \frac{3g}{L}$, e infine

$$\boxed{\omega_f = \sqrt{\frac{3g}{L}}}$$

b) Il centro di massa si trova a distanza $\frac{L}{2}$ dal centro di rotazione, per cui la sua velocità tangenziale all'istante t_f è:

$$\boxed{V_{CM,f} = \frac{L}{2} \omega_f = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{3g}{L}} = \frac{1}{2} \sqrt{3gL}}$$

L'estremo inferiore a della sbarra si trova a distanza L dal centro di rotazione, per cui la sua velocità tangenziale all'istante t_f è:

$$\boxed{V_{a,f} = L\omega_f = L\sqrt{\frac{3g}{L}} = \sqrt{3gL}}$$