

SIGNIFICATO DI $P=NP$

PER IL TEOREMA DI COOK-LEVIN:

DATI $x \in \{0,1\}^n$:

$$I_1(x) = H \wedge S^0(y^0 \wedge M_1^0) \wedge S^1(y^1 \wedge M_1^1) \wedge \dots \wedge S^{P(|x|)} \wedge M_1^{P(|x|)}$$

→ CALCOLABILE MEDIANTE UN ALGORITMO DETERMINISTICO

SE $P=NP$ VUOL DIRE CHE TROVO T_{SAT} CHE OPERA IN TEMPO POLINOMIALE

$\Rightarrow \forall M \in NP \exists T_M$ CHE DECIDE M IN TEMPO POLINOMIALE

POTREI RISOLVERE $E(x)$ IN TEMPO POLINOMIALE

DEFINIRE UN PROBLEMA NP-COMPLETO

TEOREMA

SE $M_1 \in NP \wedge \exists M_2 \in NP\text{-COMPLETO} \wedge M_2 \leq M_1$

$\Rightarrow M_1 \in NP\text{-COMPLETO}$

DIM

DIAMO PER SCOPRIRE CHE $\exists \chi$

χ ISTAZZA SI

① SE $M_2 \leq M_1 \Rightarrow \exists f: \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathcal{D}_1 : x \in \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{D}_1 \wedge \exists T_{2,1}, k \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathcal{D}_2 [d_{TIME}(T_{2,1}, x) \in O(|x|^k)]$

② $\forall M_3 \in NP [\exists T_{3,2}, h \in \mathbb{N} : \forall z \in \mathcal{D}_3 [z \in \mathcal{D}_3 \Leftrightarrow T_{3,2}(z) \in \mathcal{D}_2 \wedge d_{TIME}(T_{3,2}, z) \in O(|z|^h)]]$

3 COSTRUISCO T_{31} CON INPUT $z \in \Gamma_1$

FASE 1: SIMULA $T_{32}(z) = X$

FASE 2: SIMULA $T_{21}(X) = Y$

RETURN Y

4 $z \in \Gamma_3 \iff x \in \Gamma_2 \iff y \in \Gamma_1$

5 CALCOLIAMO LA COMPLESSITÀ

$$\text{TIME}(T_{31}, z) = \text{TIME}(T_{32}, z) + \text{TIME}(T_{21}, X) = O(|z|^h) + O(|X|^k)$$

SAPPIAMO CHE X OCCUPA SPAZIO $O(|z|^h)$

$$\text{QUINDI } \text{TIME}(T_{31}, z) \in O(|z|^{h+k})$$

6 $\forall \Gamma_3 \in NP \Rightarrow$

$\Gamma_3 \leq \Gamma_2 \in \Gamma_2 \leq \Gamma_1$ ALLORA $\Gamma_3 \leq \Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_1 \in NP$ -COMPLETO

NP-COMPLETENZA DI 3-SAT

$$\Gamma_{3\text{-SAT}} = \{ \langle f, x \rangle : f = c_1 \wedge \dots \wedge c_m, \forall i = 1 \dots m \ |c_i| = 3, x = x_1, \dots, x_n \text{ LETTERALI} \}$$

$$\Gamma_{\text{SAT}} = \{ \langle g, y \rangle : g = d_1 \wedge \dots \wedge d_r, y = y_1, \dots, y_q \text{ LETTERALI} \}$$

$$\text{SAT} \leq 3\text{-SAT}$$

$\exists: \mathcal{I}_{SAT} \rightarrow \mathcal{I}_{3-SAT} \rightarrow$ TRASFORMIAMO OGNI d_i IN C_i

$\forall d_i \in \mathcal{I}$ ABBIAMO DIVERSE CASISTICHE:

1) $|d_i| = 1 \Rightarrow d_i = l_j$

$d_i \text{ VERA} \Leftrightarrow l_j \text{ E' VERA}$

$$d_i = (l_j \vee \bar{z}_{i_1} \vee z_{i_2}) \wedge (l_j \vee \bar{z}_{i_1} \vee \bar{z}_{i_2}) \wedge (l_j \vee z_{i_1} \vee \bar{z}_{i_2})$$

CLAUSSOLE AGGIUNTIVE

2) $|d_i| = 2 \Rightarrow d_i = l_{j_1} \vee l_{j_2}$

$$d_i = (l_{j_1} \vee l_{j_2} \vee z_{i_1}) \wedge (l_{j_1} \vee l_{j_2} \vee \bar{z}_{i_1})$$

3) $|d_i| = 3 \Rightarrow d_i = l_{j_1} \vee l_{j_2} \vee l_{j_3} \rightarrow \text{OK}$

4) $|d_i| = 4 \Rightarrow d_i = l_{j_1} \vee l_{j_2} \vee l_{j_3} \vee l_{j_4}$

DIVIDIAMO d_i IN 2 PARTI:

$$l_{j_1} \vee l_{j_2}$$

$$l_{j_3} \vee l_{j_4}$$

E LI COLLEGHIAMO CON UNA VARIABILE AGGIUNTIVA

$$d_i = (l_{j_1} \vee l_{j_2} \vee z_{i_1}) \wedge (\bar{z}_{i_1} \vee l_{j_3} \vee l_{j_4})$$

COSTRUITA IN QUESTO MODO

\exists UN'ASSEGNAZIONE DI x_i CHE RENDE VERA $d_i \Leftrightarrow$ E' VERA $l_{j_1} \vee l_{j_2} \vee l_{j_3} \vee l_{j_4}$

$$5) |d_i| = 5 \Rightarrow d_i = l_{\bar{j}_4} \vee l_{\bar{j}_2} \vee l_{\bar{j}_3} \vee l_{\bar{j}_4} \vee l_{\bar{j}_5}$$

PRENDIAMO LA COPPIA INIZIALE, LA COPPIA FINALE E SINGOLARMENTE LE VARIABILI CENTRALI

$$d_i = (l_{\bar{j}_4} \vee l_{\bar{j}_2} \vee \bar{z}_{i_1}) \wedge (\bar{z}_{i_1} \vee l_{\bar{j}_3} \vee \bar{z}_{i_2}) \wedge (\bar{z}_{i_2} \vee l_{\bar{j}_4} \vee l_{\bar{j}_5})$$

$$8) |d_i| = 5 \Rightarrow d_i = l_{\bar{j}_4} \vee l_{\bar{j}_2} \vee l_{\bar{j}_3} \vee l_{\bar{j}_4} \vee l_{\bar{j}_5} \vee l_{\bar{j}_6} \vee l_{\bar{j}_7} \vee l_{\bar{j}_8}$$

$$d_i = (l_{\bar{j}_4} \vee l_{\bar{j}_2} \vee \bar{z}_{i_1}) \wedge (\bar{z}_{i_1} \vee l_{\bar{j}_3} \vee \bar{z}_{i_2}) \wedge (\bar{z}_{i_2} \vee l_{\bar{j}_4} \vee \bar{z}_{i_3}) \wedge (\bar{z}_{i_3} \vee l_{\bar{j}_5} \vee \bar{z}_{i_4}) \wedge \\ \wedge (\bar{z}_{i_4} \vee l_{\bar{j}_6} \vee \bar{z}_{i_5}) \wedge (\bar{z}_{i_5} \vee l_{\bar{j}_7} \vee l_{\bar{j}_8})$$

$$\text{CALCOLO } f = r \cdot \max_{i=1 \dots r} \{|d_i|\}$$

$$|d_i| = h \rightarrow d_i = h-2 \text{ CLAUSOLE PER } h \geq 4$$

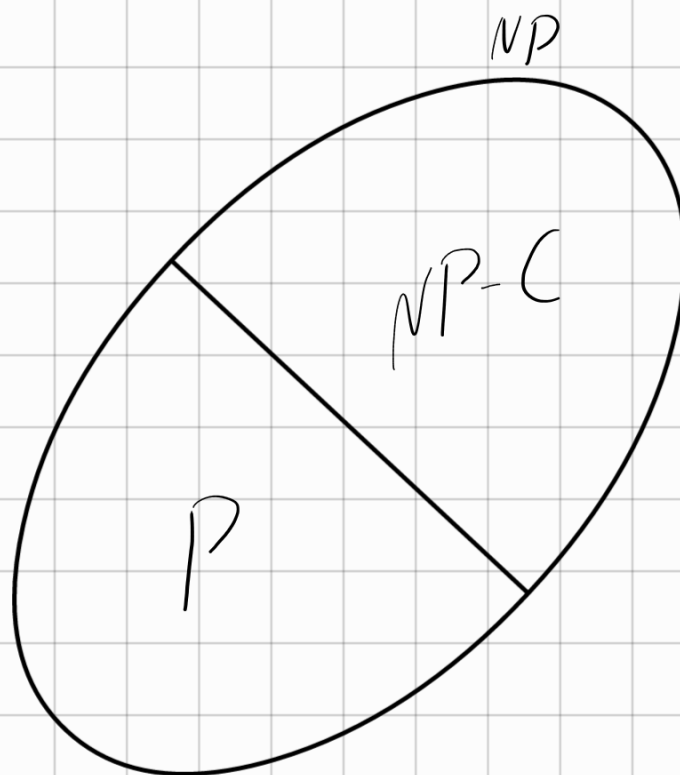
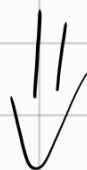
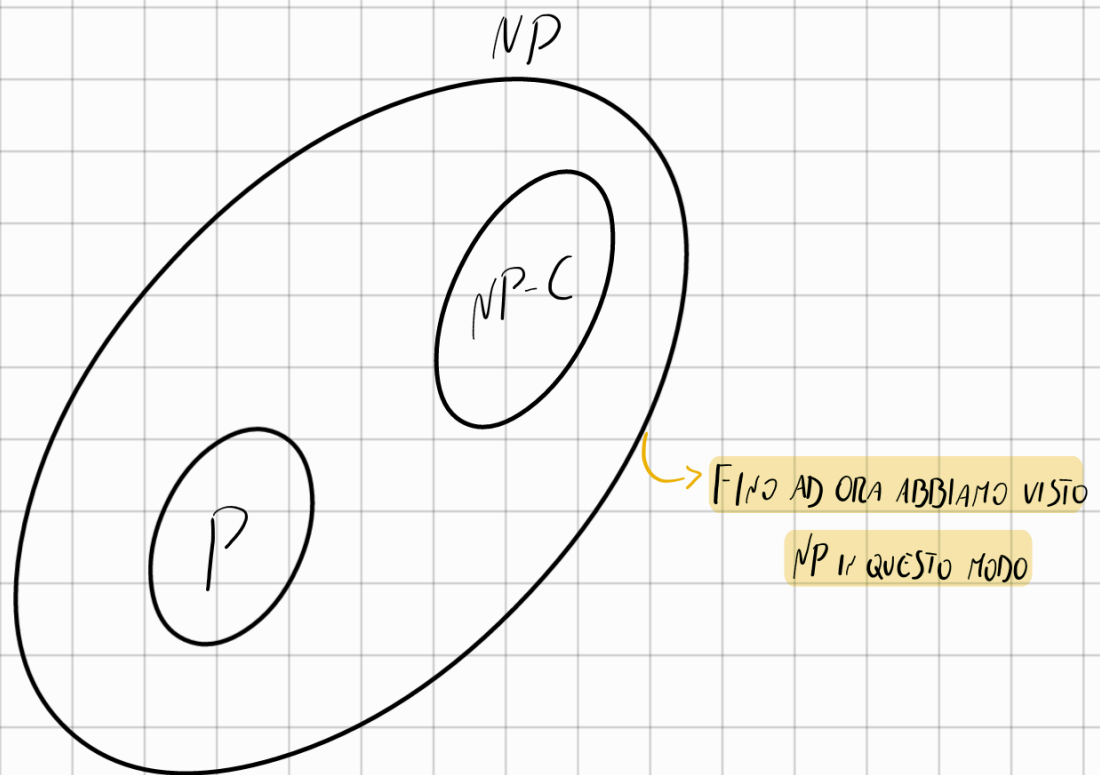
COSTANTI PER $h \leq 3$

$$f(n) \in O(r \cdot |Y|) \rightarrow f(x) \in O(|g| \cdot |x|)$$

NUMERO DI CLAUSOLE DI SAT

AL MASSIMO UNA CLAUSOLA d_i PUO' AVERE $|Y|$ CLAUSOLE

STRUTTURA DI NP

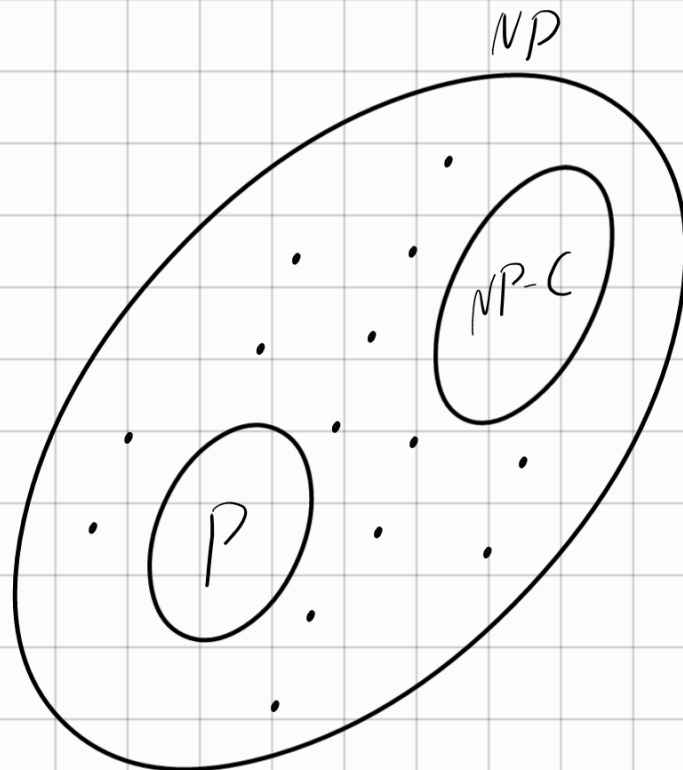


POTREBBE ESSERE COSÌ?

TEOREMA DI LADNER

Se $P \neq NP \Rightarrow \exists \Gamma \in NP: \Gamma \notin P \wedge \Gamma \notin NP\text{-COMPLETO}$

QUINDI



I PROBLEMI $\Gamma \in P \wedge \Gamma \notin NP-C$ SI DICONO NP INTERMEDI

MAI DIRE CHE UN PROBLEMA SIA NP -INTERMEDIO

EQUIVALE A DIRE CHE $P \neq NP$

QUINDI

