QUANTILI DI UNA V.A. CONTINUA

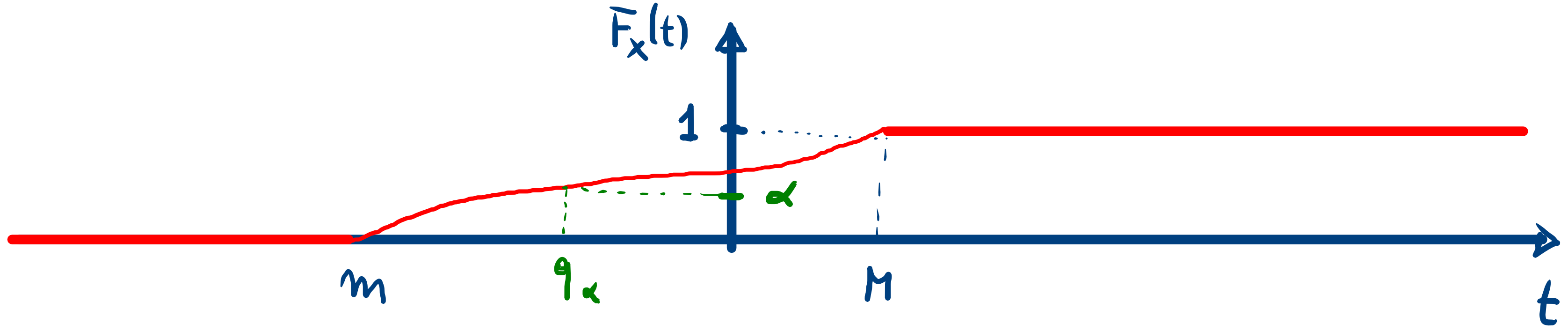
Sia X una v.a. continua con funzione di distribuzione F_X.
Supponiamo che esista un intervallo (m, M) dove F_X è strettamente crescente; inoltre supponiamo che, se $t \notin (m, M)$, allora $F_X(t) = 0$ oppure $F_X(t) = 1$.

[Si osservi che ammettiamo di poter avere $m = -\infty$ (allora non si avrà mai $F_X(t) = 0$) e/o $M = +\infty$ (allora non si avrà mai $F_X(t) = 1$).]

Nelle ipotesi fatte sopra, preso $\alpha \in (0,1)$, si definisce "quantile di ordine α di X" l'unico valore $q_\alpha \in (m, M)$ tale che $F_X(q_\alpha) = \alpha$.

TERMINOLOGIA: Il valore $q_{1/2}$ (cioè q_α per $\alpha = 1/2$) è detto "mediana".

Graficamente abbiamo quanto segue:

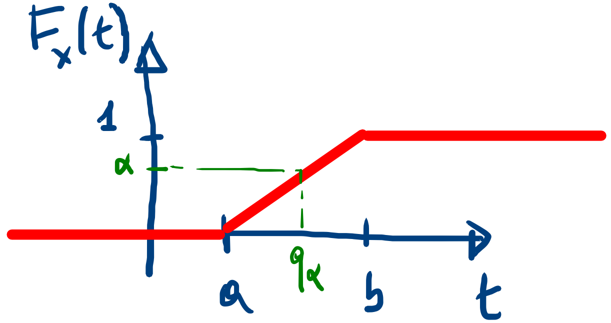


ESEMPIO

$X \sim U(a,b)$ In questo caso $(m,M) = (a,b)$

$$F_X(q_\alpha) = \alpha \Rightarrow \frac{q_\alpha - a}{b-a} = \alpha \Rightarrow q_\alpha - a = \alpha(b-a) \Rightarrow q_\alpha = a + \alpha(b-a)$$

Inoltre $q_{1/2} = a + \frac{1}{2}(b-a) = a - \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}$ punto medio dell'intervallo



ESEMPIO

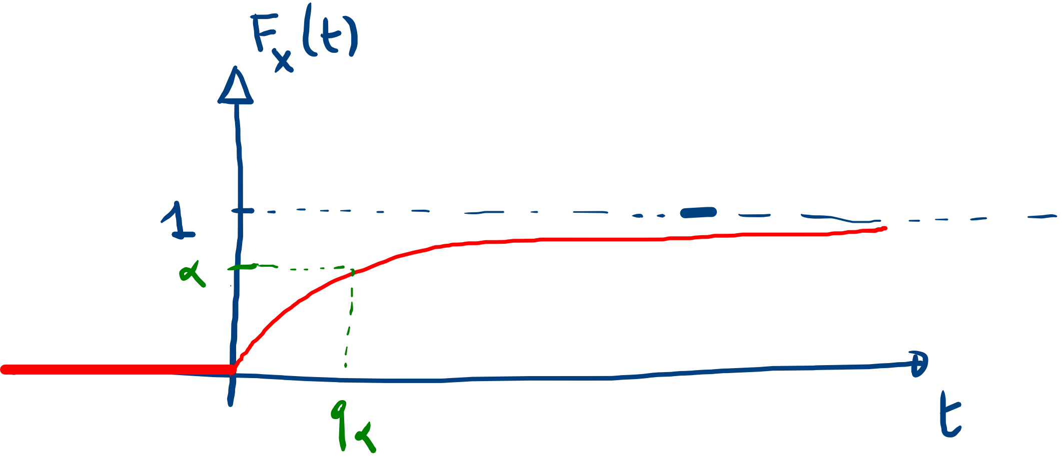
$X \sim Exp(\lambda)$

In questo caso $(m, M) = (0, \infty)$

$$F_X(q_\alpha) = \alpha \Rightarrow 1 - e^{-\lambda q_\alpha} = \alpha \Rightarrow e^{-\lambda q_\alpha} = 1 - \alpha \Rightarrow -\lambda q_\alpha = \log(1-\alpha)$$

$$\Rightarrow q_\alpha = -\frac{1}{\lambda} \log(1-\alpha)$$

Inoltre $q_{1/2} = -\frac{1}{\lambda} \log\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\lambda} \log 2$



TRASFORMAZIONI DI V.A. CONTINUE

Si fa riferimento al caso in cui si hanno v.a. Y del tipo $Y = f(X)$, dove

- X è una v.a. continua;
- $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per qualche insieme D (dominio della funzione).

In generale, a differenza di quel che accade quando X è discreta, la Y è una v.a.

(cioè $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A} \quad \forall t \in \mathbb{R}$)

solo se f soddisfa certe proprietà. Questo aspetto va oltre gli obiettivi del corso; nei casi che tratteremo la funzione f avrà sempre le proprietà richieste affinché Y sia una v.a.

Osserviamo che in generale $Y = f(X)$ può anche non essere continua.

ESEMPI

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (funzione costante)

Allora $Y = c$ e quindi v.a. discreta $\left(S_Y = \{c\}, \quad p_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = c \\ 0 & \text{se } y \neq c \end{cases} \right)$.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = [x] \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (funzione "parte intera")

Allora $Y = [X]$ e quindi discreta $\left(S_Y \subset \mathbb{Z}, \quad p_Y(y) = \begin{cases} P(y \leq X < y+1) & \text{se } y \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \right)$

Una casistica degli esercizi proposti farà riferimento al caso in cui Y è continua e dovrete trovare la f_Y (che dipenderà da f e da f_X).

In quel che segue **non** presenteremo una formula generale per ottenere f_Y da f e f_X.
L'unico caso che tratteremo in generale è quello di f "funzione affine", cioè

$$f(x) = ax + b \quad \text{per } a, b \in \mathbb{R};$$

anzi escluderemo il caso con $a = 0$ (altrimenti f sarebbe una costante e non va bene per quanto detto nelle slide precedente).

Per evitare esercizi troppo complicati in genere la funzione f sarà monotona, o monotona su un sottoinsieme S di D tale che $P(X \in S) = 1$.

Oppure, se questo non accade, la funzione f avrà alcune proprietà di simmetria.

IL CASO DI FUNZIONE f AFFINE NON COSTANTE.

Sia $f(x) = ax+b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ tale che $a \neq 0$.

Studiamo la funzione di distribuzione di $Y = f(X)$:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(aX+b \le y) = P(aX \le y-b) = \begin{cases} \text{se } a>0 & P\left(X \le \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \\ \text{se } a<0 & P\left(X \ge \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \end{cases}$$

qui si tiene conto che X è continua e quindi $P\left(X \ge \frac{y-b}{a}\right) = P\left(X > \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

Allora possiamo concludere derivando membro a membro rispetto a y:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \text{se } a>0 & f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} \\ \text{se } a<0 & -f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} \end{cases} = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

ESERCIZIO / ESEMPIO

Sia $X \sim U(0,1)$ e sia $Y = aX + b$ con $a \neq 0$.

Verificare che: $Y \sim U(b, a+b)$ se $a > 0$; $Y \sim U(a+b, b)$ se $a < 0$.

RISPOSTA

FORMULA SLIDE PRECEDENTE

$$f_X(x) = \frac{1}{1-0} \mathbb{1}_{(0,1)}(x) \Longrightarrow f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|} \mathbb{1}_{(0,1)}\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Dobbiamo studiare la condizione $\frac{y-b}{a} \in (0,1)$ per capire come è fatta $\mathbb{1}_{(0,1)}\left(\frac{y-b}{a}\right)$

Se $a > 0$: $0 < \frac{y-b}{a} < 1 \iff 0 < y-b < a \iff b < y < a+b \quad \Big\{ \quad f_Y(y) = \frac{1}{a} \mathbb{1}_{(b,a+b)}(y) = \frac{1}{a+b-b} \mathbb{1}_{(b,a+b)}(y)$

Se $a < 0$: $0 < \frac{y-b}{a} < 1 \iff 0 > y-b > a \iff b > y > a+b \quad \Big\{ \quad f_Y(y) = \frac{1}{-a} \mathbb{1}_{(a+b,b)}(y) = \frac{1}{b-(a+b)} \mathbb{1}_{(a+b,b)}(y)$

ESERCIZIO / ESEMPIO

Sia X una v.a. con densità continua $f_X(x) = \operatorname{sen} x \cdot \mathbb{1}_{(0,\frac{\pi}{2})}(x)$.

Trovare la densità continua di $Y = \frac{\pi}{2} - X$.

RISPOSTA

È il caso con $a=-1$ e $b=\frac{\pi}{2}$. Quindi

per un risultato di trigonometria

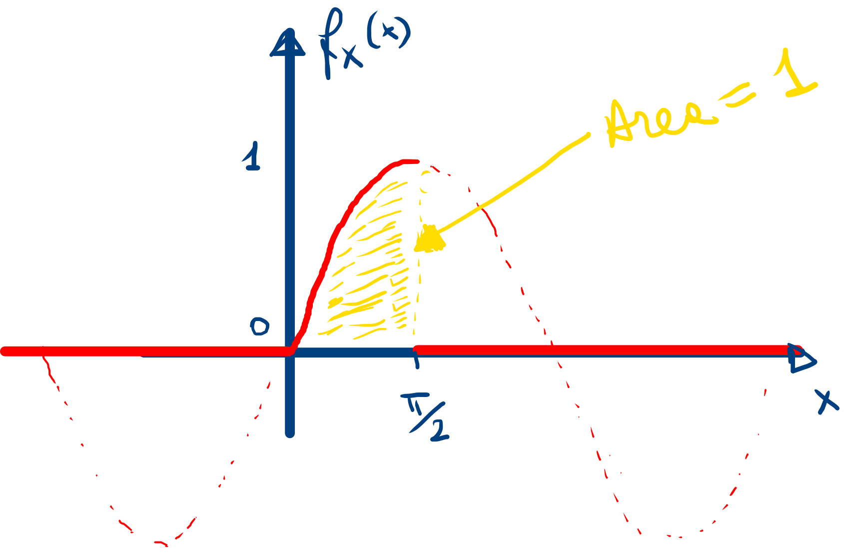
$$f_Y(y) = \frac{1}{|-1|} f_X\left(\frac{y-\frac{\pi}{2}}{-1}\right) = f_X\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-y\right) \mathbb{1}_{(0,\frac{\pi}{2})}\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \cos y \; \mathbb{1}_{(0,\frac{\pi}{2})}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$$

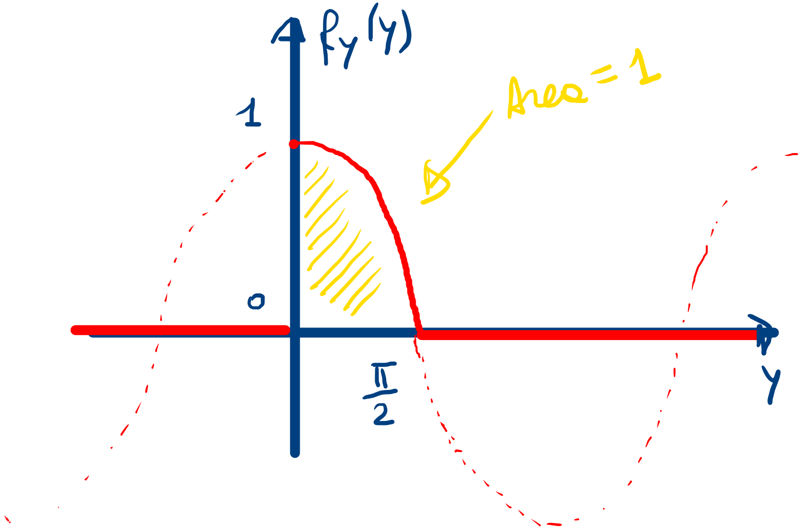
Poi si deve studiare la funzione $\mathbb{1}_{(0,\frac{\pi}{2})}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$ e si ha

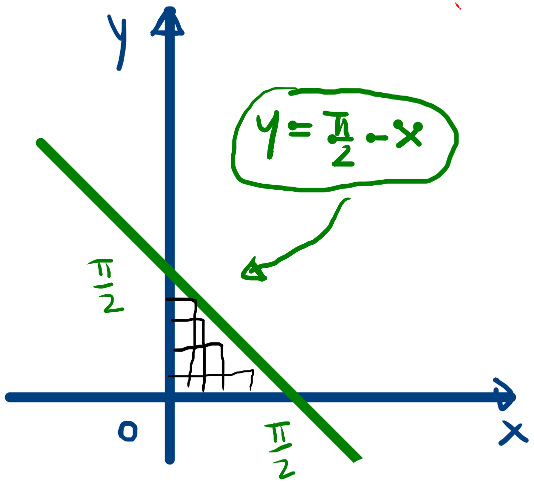
$$0 < \frac{\pi}{2} - y < \frac{\pi}{2} \iff 0 > y - \frac{\pi}{2} > -\frac{\pi}{2} \iff \frac{\pi}{2} > y > 0.$$

Quindi $\boxed{f_Y(y) = \cos y \; \mathbb{1}_{(0,\frac{\pi}{2})}(y)}$.

COMMENTO GRAFICO
AL LEGAME TRA f_X e f_Y
NELLA SLIDE SEGUENTE







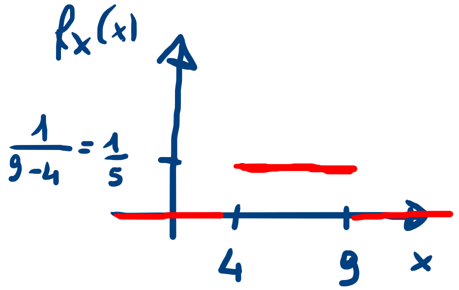
$$\begin{cases} f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[0,\pi/2\right] \\ P\left(0 \le X \le \pi/2\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow P\left(0 \le Y \le \pi/2\right) = 1$$

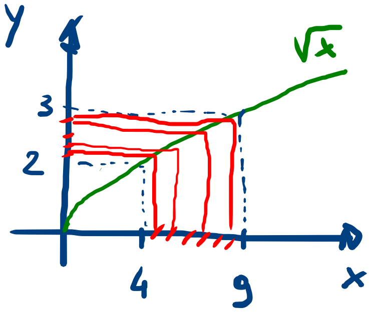
ESERCIZIO (primo esempio con procedimento mirato alle singole f)

Sia $X \sim U(4,9)$ e sia $Y=\sqrt{X}$. Trovare la densità continua di Y.

RISPOSTA

Si ha $P(Y \in (2,3)) = 1$. Quindi





$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \le 2 \\ \circledast & \text{per } y \in (2,3). \\ 1 & \text{per } y \ge 3 \end{cases}$$

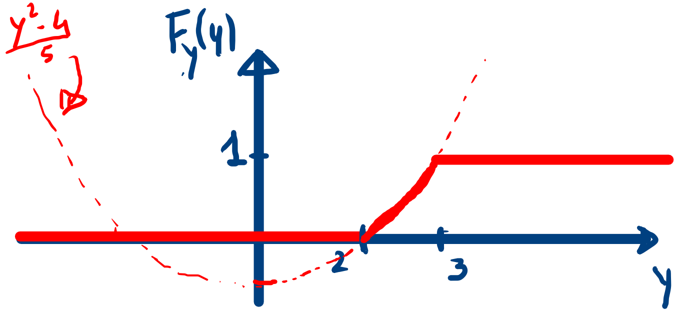
Poi

$$\circledast = P(Y \le y) = P(\sqrt{X} \le y) = P(X \le y^2) = \int_{-\infty}^{y^2} f_X(x)\,dx \overset{y^2 \in (4,9)}{=} \int_4^{y^2} \frac{1}{9-4}\,dx = \int_4^{y^2} \frac{1}{5}\,dx = \frac{1}{5}\int_4^{y^2} dx = \frac{1}{5}\Big[x\Big]_{x=4}^{x=y^2} = \frac{y^2-4}{5}$$

Quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \le 2 \\ \frac{y^2-4}{5} & \text{per } y \in (2,3). \\ 1 & \text{per } y \ge 3 \end{cases}$$

OSS. È effettivamente una funzione continua



In conclusione si ottiene f_Y con la derivata di F_Y nei punti dove è derivabile.

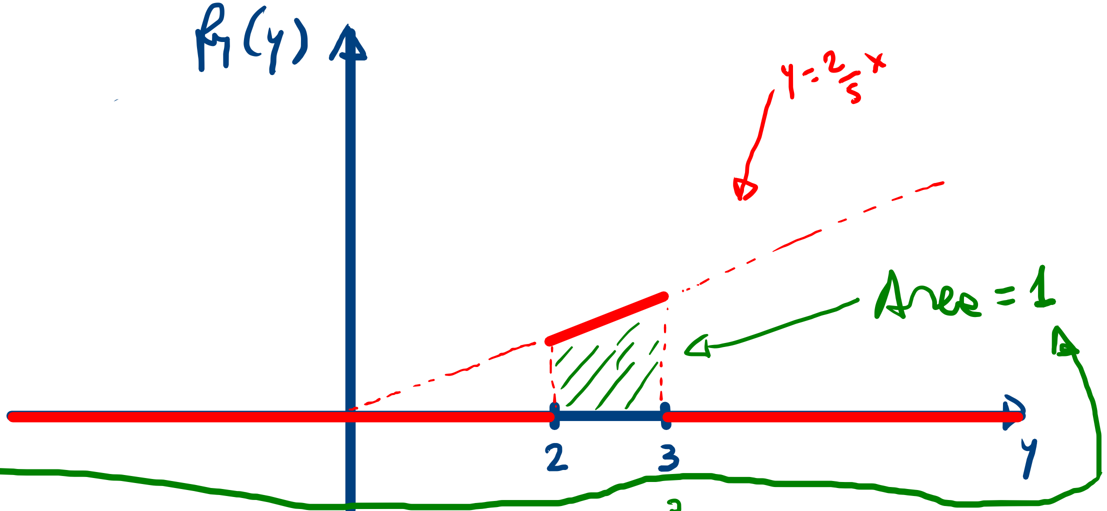
Riscrivo per praticità la F_Y

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \leq 2 \\ \dfrac{y^2-4}{5} & \text{per } 2 < y < 3 \\ 1 & \text{per } y \geq 3 \end{cases}$$

e in effetti (si vede a occhio anche dal grafico in basso della slide precedente) F_Y è derivabile in ogni punto diverso da $y=2$ e $y=3$.

Allora si ha

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y < 2 \\ \dfrac{2y}{5} & \text{per } y \in (2,3) \\ 0 & \text{per } y > 3 \end{cases} = \frac{2}{5} y \, \mathbb{1}_{(2,3)}(y)$$



Oss. La funzione f_Y è discontinua (come si vede dal grafico accanto).

In effetti si verifica che $\int_2^3 \frac{2y}{5} \, dy = 1$.

(Oppure si può calcolare l'area del trapezio...)

ESERCIZIO

Sia $X \sim U(0,1)$.

1) Trovare la densità continua di $Y = -\frac{1}{\lambda}\log(1-X^\alpha)$ per $\alpha, \lambda > 0$.

2) Trovare la densità continua di $Z = e^{-\alpha X}$ per $\alpha > 0$.

SVOLGIMENTO

1) Abbiamo $Y = f(X)$ dove $f(x) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-x^\alpha)$ può essere vista come composizione di alcune funzioni elementari: $x \mapsto y_1 = x^\alpha$; $y_1 \mapsto y_2 = 1 - y_1$; $y_2 \mapsto y_3 = \log y_2$; $y_3 \mapsto y_4 = -\frac{1}{\lambda} y_3$.

($\uparrow$ perché $\alpha > 0$) $\quad$ ($\downarrow$) $\quad$ ($\uparrow$) $\quad$ ($\downarrow$ perché $\lambda > 0$)

Ogni volta che si compone una funzione crescente, la monotonia non cambia; ogni volta che si compone una funzione decrescente, la monotonia si inverte.

Quindi, se analizziamo quel che accade, possiamo concludere che f è crescente (ci sono solo due inversioni perché ci sono due funzioni decrescenti).

Dunque f è crescente e Y assume valori in $(f(0), f(1)) = (-\frac{1}{\lambda}\log(1-0^\alpha), -\frac{1}{\lambda}\log(1-1^\alpha)) = (0, +\infty)$.

Allora

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \leq 0 \\ \circledast & \text{per } y > 0. \end{cases}$$

OSS. L'espressione ottenuta è accettabile se si controlla quel che accade per $y=0$ e $y \to +\infty$ (si deve avere 0, e tendere a 1). Inoltre si deve essere una funzione di y crescente. Tutte queste condizioni si verificano facilmente.

Inoltre

$$\circledast = P(Y \leq y) = P\left(-\frac{1}{\lambda}\log(1-X^\alpha) \leq y\right) = P\left(\log(1-X^\alpha) \geq -\lambda y\right) = P\left(1-X^\alpha \geq e^{-\lambda y}\right) =$$

$$= P\left(1-e^{-\lambda y} \geq X^\alpha\right) = P\left(X \leq (1-e^{-\lambda y})^{1/\alpha}\right) = \int_{-\infty}^{(1-e^{-\lambda y})^{1/\alpha}} f_X(x)\,dx = \int_0^{(1-e^{-\lambda y})^{1/\alpha}} \underbrace{\frac{1}{1-0}}_{=1}\,dx =$$

$$(1-e^{-\lambda y})^{\frac{1}{\alpha}} \in (0,1)$$

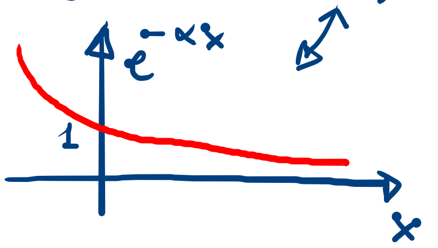
$$= [x]_{x=0}^{x=(1-e^{-\lambda y})^{1/\alpha}} = (1-e^{-\lambda y})^{1/\alpha}.$$

In conclusione, derivando, (si osservi che F_Y non è derivabile per $y=0$)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y < 0 \\ \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\lambda y})^{\frac{1}{\alpha}-1}(-e^{-\lambda y})(-\lambda) = \frac{\lambda}{\alpha}e^{-\lambda y}(1-e^{-\lambda y})^{\frac{1}{\alpha}-1} & \text{per } y > 0 \end{cases} = \frac{\lambda}{\alpha}e^{-\lambda y}(1-e^{-\lambda y})^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

OSS. Per $\alpha = 1$ si ha $X \sim Exp(\lambda)$

2) Abbiamo $Z=g(X)$ dove $g(x)=e^{-\alpha x}$ è una funzione decrescente (perché $\alpha>0$).



Dunque Z assume valori in $(g(1),g(0))=(e^{-\alpha\cdot 1},e^{-\alpha\cdot 0})=(e^{-\alpha},1)$.

Allora

$$F_Z(z)=\begin{cases}0 & \text{per } z\le e^{-\alpha}\\ (*) & \text{per } z\in(e^{-\alpha},1)\\ 1 & \text{per } z\ge 1.\end{cases}$$

Inoltre

$$(*)=P(Z\le z)=P(e^{-\alpha X}\le z)=P(-\alpha X\le \log z)=P\left(X\ge -\frac{1}{\alpha}\log z\right)=\int_{-\frac{1}{\alpha}\log z}^{\infty} f_X(x)\,dx=\int_{-\frac{1}{\alpha}\log z}^{1}\frac{1}{1-0}\,dx=$$

$-\frac{1}{\alpha}\log z\in(0,1)$ $\qquad b=1$

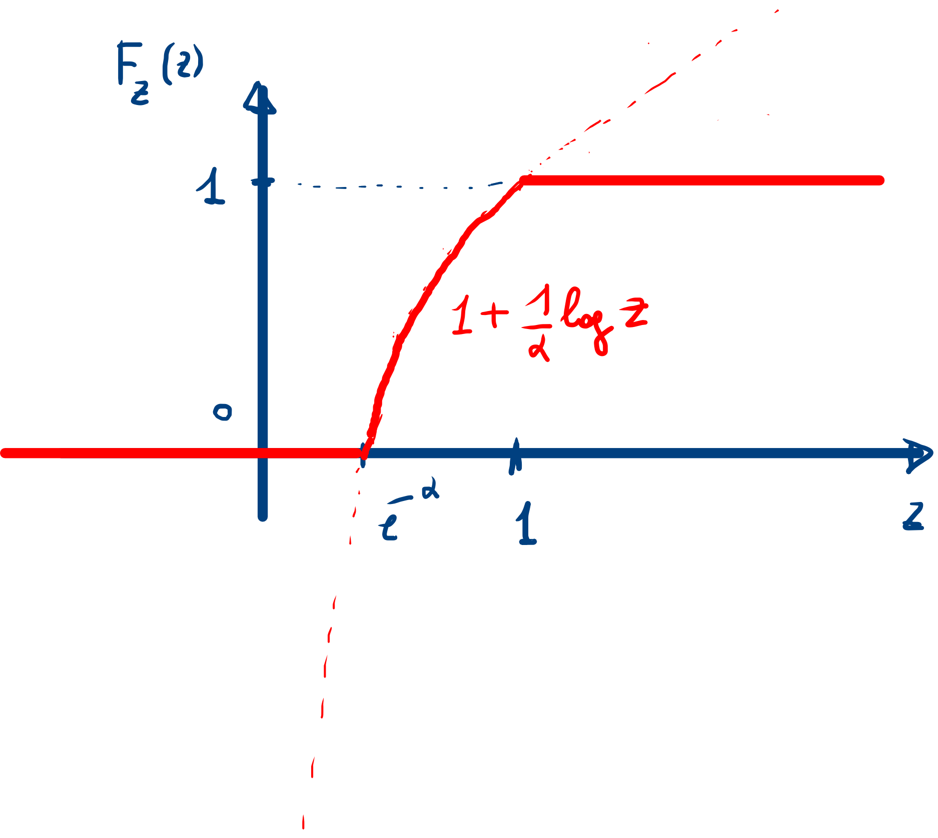
$$=[x]_{x=-\frac{1}{\alpha}\log z}^{x=1}=1+\frac{1}{\alpha}\log z$$

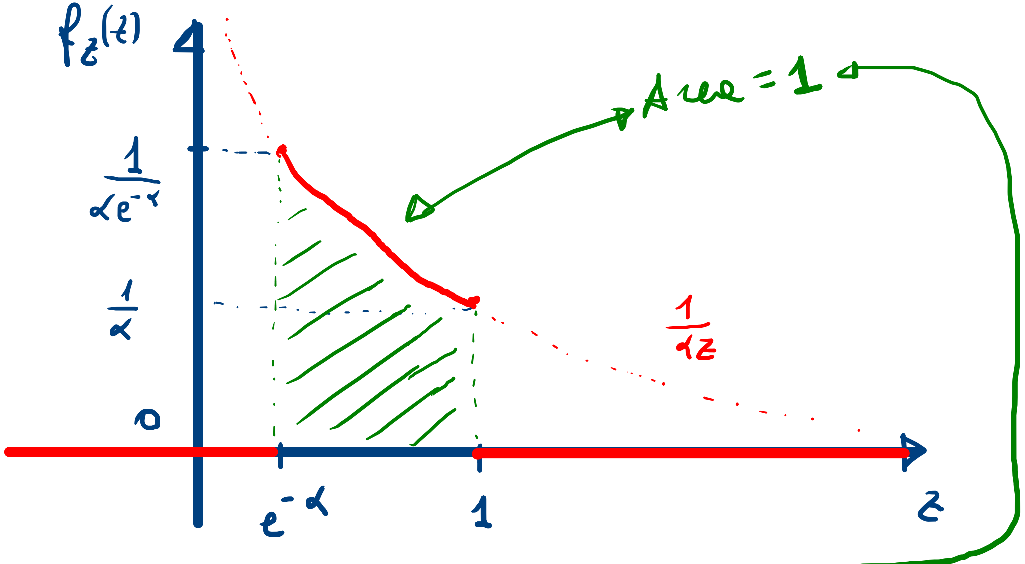
oss. L'espressione ottenuta è accettabile per $z=e^{-\alpha}$ e per $z=1$; inoltre si ha una funzione di z crescente come deve essere.

In conclusione, derivando, (si osservi che F_Z non è derivabile per $z=e^{-\alpha}$ e per $z=1$)

$$f_Z(z)=\begin{cases}0 & \text{per } z<e^{-\alpha}\\ \frac{1}{\alpha z} & \text{per } z\in(e^{-\alpha},1)\\ 0 & \text{per } z>1\end{cases}=\frac{1}{\alpha z}\,1_{(e^{-\alpha},1)}(z)$$

Per completezza, nel caso della v.a. Z, presento i seguenti grafici (non richiesti):





Verifica: $\int_{e^{-\alpha}}^{1} \frac{1}{\alpha z}\, dz = \frac{1}{\alpha}\int_{e^{-\alpha}}^{1} \frac{1}{z}\, dz = \frac{1}{\alpha}\Big[\log z\Big]_{z=e^{-\alpha}}^{z=1} =$

$= \frac{1}{\alpha}\left(\log 1 - \log(e^{-\alpha})\right) = \frac{1}{\alpha}\left(0-(-\alpha)\right) = \frac{1}{\alpha}\cdot\alpha = 1$.

ESERCIZIO

Sia X una v.a. con densità continua $f_X(x) = \alpha x^{\alpha-1} 1_{(0,1)}(x)$, per $\alpha > 0$.

1) Trovare la densità continua di $Y = X^\beta$ per $\beta > 0$.

2) Trovare la densità continua di $Z = X^{-\beta}$ per $\beta > 0$.

OSS. Per ogni $\alpha > 0$ è una densità continua:

$$\int_0^1 \alpha x^{\alpha-1} dx = \alpha \int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \alpha \left[\frac{x^\alpha}{\alpha}\right]_{x=0}^{x=1} = 1^\alpha - 0^\alpha = 1$$

SVOLGIMENTO

1) Abbiamo $Y = f(X)$ con $f(x) = x^\beta$ funzione crescente su $(0,1)$.

Quindi Y assume valori in $(f(0), f(1)) = (0,1)$.

Allora

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y < 0 \\ (*) & \text{per } y \in (0,1) \\ 1 & \text{per } y > 1 \end{cases}.$$

Inoltre

$$(*) = P(X^\beta \le y) = P(X \le y^{1/\beta}) = \int_{-\infty}^{y^{1/\beta}} f_X(x)\,dx \overset{y^{1/\beta} \in (0,1)}{=} \int_0^{y^{1/\beta}} \alpha x^{\alpha-1} dx = \alpha \left[\frac{x^\alpha}{\alpha}\right]_{x=0}^{x=y^{1/\beta}} = (y^{1/\beta})^\alpha = y^{\alpha/\beta}.$$

OSS. L'espressione ottenuta è accettabile per $y=0$ e $y=1$. Inoltre è una funzione di y crescente come deve essere.

In conclusione, derivando, (si osservi che F_Y non è derivabile per $y=0$ e $y=1$)

$$f_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{per } y<0\\ \frac{\alpha}{\beta}y^{\frac{\alpha}{\beta}-1} & \text{per } y\in(0,1)\\ 0 & \text{per } y>1\end{cases} = \frac{\alpha}{\beta}y^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(y).$$

OSS. Se $\frac{\alpha}{\beta}=1$, cioè $\alpha=\beta$, si ha $Y\sim U(0,1)$

2) Abbiamo $Z=g(X)$ con $g(x)=x^{-\beta}$ funzione decrescente su $(0,1)$.

Quindi Z assume valori in $(g(1),g(0))=(1^{-\beta},0^{-\beta})=(1,\infty)$.

Allora

$$F_Z(z)=\begin{cases}0 & \text{per } z\leq 1\\ (*) & \text{per } z>1.\end{cases}$$

OSS. L'espressione ottenuta è accettabile per $y=1$ e per $y\to\infty$. Inoltre è una funzione di z crescente come deve essere.

Inoltre

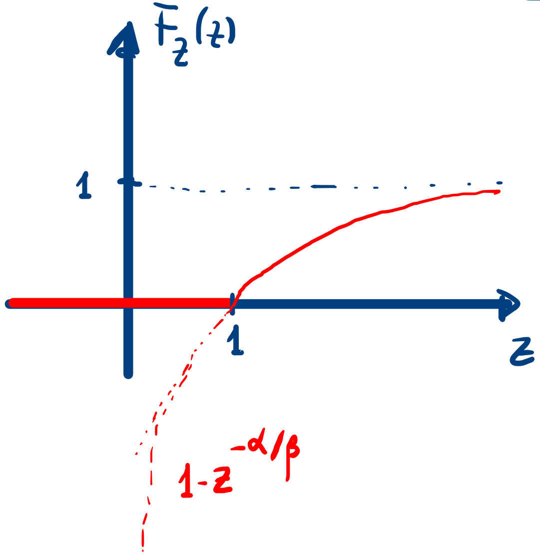
$$(*) = P(X^{-\beta}\leq z)=P\left(\frac{1}{X^{\beta}}\leq z\right)=P\left(X^{\beta}\geq\frac{1}{z}\right)=P\left(X\geq\frac{1}{z^{1/\beta}}\right)=P\left(X\geq z^{-1/\beta}\right)=\int_{z^{-1/\beta}}^{\infty}f_X(x)dx \overset{z^{-1/\beta}\in(0,1)}{=} \int_{z^{-1/\beta}}^{1}\alpha x^{\alpha-1}dx=$$

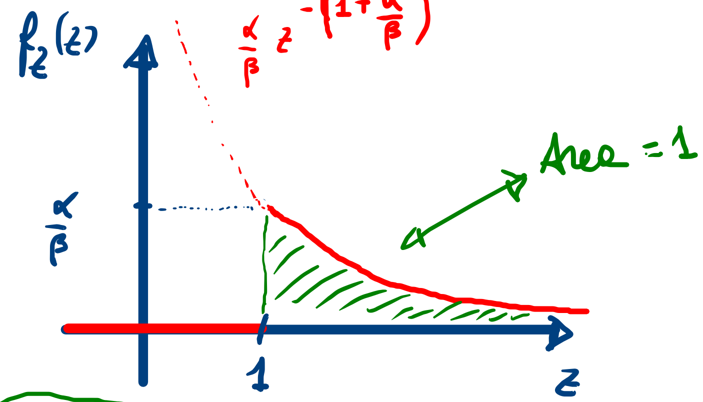
$$=\alpha\left[\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\right]_{x=z^{-1/\beta}}^{x=1}=1^{\alpha}-\left(z^{-1/\beta}\right)^{\alpha}=1-z^{-\alpha/\beta}.$$

In conclusione, derivando, (si osservi che F_Z non è derivabile per $z=1$) si ha

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{per } z<1 \\ -\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) z^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} & \text{per } z>1 \end{cases} = \frac{\alpha}{\beta} z^{-\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)} \mathbb{1}_{(1,\infty)}(z).$$

Anche qui presento dei grafici non richiesti per la v.a. Z





Verifica

$$\int_1^\infty \frac{\alpha}{\beta} z^{-\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)} dz = \frac{\alpha}{\beta} \int_1^\infty z^{-1-\frac{\alpha}{\beta}} dz = \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{z^{-1-\frac{\alpha}{\beta}+1}}{-1-\frac{\alpha}{\beta}+1} \right]_{z=1}^{z=\infty}$$

$$= \cancel{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \frac{1}{\cancel{\frac{\alpha}{\beta}}} \left[-z^{-\alpha/\beta} \right]_{z=1}^{z=\infty} = -0+1=1$$