Esempio

Scrivere in forma canonica e in forma del polinomio di Lagrange il polinomio d'interpolazione di $\sin(x)$

sui nodi $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{6},\ x_2 = \frac{\pi}{4}$

Soluzione

$p(x) = y_0 L_0(x) + \dots + y_n L_n(x)$

Si incomincia dalla formula di Lagrange ($\mathcal{L}$), dalla quale si ha immediatamente che il polinomio d'interpolazione di $\sin(x)$ su x_0, x_1, x_2 è

$$p(x) = \sin(x_0)L_0(x) + \sin(x_1)L_1(x) + \sin(x_2)L_2(x) =$$

$$= \sin(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \sin(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \sin(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= \cancel{0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}} + \frac{1}{2}\,\frac{x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{6}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{6}\left(-\frac{\pi}{12}\right)} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{1}{2}\,\frac{x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{-\frac{\pi^2}{72}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\pi^2}{48}}$$

Formula di Lagrange

un controllo diretto permette di verificare che $p(x_0) = 0,\ p(x_1) = \frac{1}{2},\ p(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Per scrivere $p(x)$ in forma canonica scriviamo $p(x)$ in forma canonica a partire dai coefficienti della formula di Lagrange

$$p(x) = \frac{24\sqrt{2}-36}{\pi^2}x^2 + \frac{9-4\sqrt{2}}{\pi}x$$

Esercizi

1) Scrivere in forma canonica e in forma di Lagrange il polinomio d'interpolazione della funzione $\sqrt{x}$ sui punti $x_0 = 0, x_1 = 0.16, x_2 = 0.49, x_3 = 1$

$$p(x) = \sqrt{x_0}\, L_0(x) + \sqrt{x_1}\, L_1(x) + \sqrt{x_2}\, L_2(x) + \sqrt{x_3}\, L_3(x)$$

$$p(x) = \sqrt{x_0}\, \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \sqrt{x_1}\, \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \sqrt{x_2}\, \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \sqrt{x_3}\, \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$p(x) = 0.4\, \frac{x(x-0.49)(x-1)}{0.16(0.16-0.49)(0.16-1)} + 0.7\, \frac{x(x-0.16)(x-1)}{0.49(0.49-0,16)(0,49-1)} + \frac{x(x-0,16)(x-0.49)}{(1-0,16)(1-0,49)}$$

$x^2 - 0,16x - 0,49x + 0,0784$

$$p(x) = 0.4\, \frac{x^3 - 1,49x^2 + 0,49x}{0,04435} + 0,7\, \frac{x^3 - 1,16x^2 + 0,16x}{-0,082467} + \frac{x^3 - 0,65x^2 + 0,0784x}{0,4284} =$$

$$\left(\frac{0,4}{0,04435} - \frac{0,7}{0,082467} + \frac{1}{0,4284}\right)x^3 + \left(\frac{-0,596}{0,04435} + \frac{0,812}{0,082467} - \frac{0,65}{0,4284}\right)x^2 + \left(\frac{0,196}{0,04435} - \frac{0,112}{0,082467} + \frac{0,0784}{0,4284}\right)x =$$

$$2.865188985\, x^3 - 5,109467722\, x^2 + 3,24278737\, x$$ fatto la prova con 0,16

2) Scrivere in forma canonica e in forma di Lagrange il polinomio d'interpolazione dei valori $y_0 = 2,\ y_1 = 2.4,\ y_2 = 2.8,\ y_3 = 3.2$ sui nodi

$x_0 = 1,\ x_1 = 1.2,\ x_2 = 1.4,\ x_3 = 1.6$

$y_i = 2x_i$

$p(x) = 2x$ → e' questa la soluzione

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$$

$$= 2\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + 2.4\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + 2.8\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + 3.2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} =$$

$$= 2\frac{(x-1.2)(x-1.4)(x-1.6)}{(1-1.2)(1-1.4)(1-1.6)} + 2.4\frac{(x-1)(x-1.4)(x-1.6)}{(1.2-1)(1.2-1.4)(1.2-1.6)} + 2.8\frac{(x-1)(x-1.2)(x-1.6)}{(1.4-1)(1.4-1.2)(1.4-1.6)} + 3.2\frac{(x-1)(x-1.2)(x-1.4)}{(1.6-1)(1.6-1.2)(1.6-1.4)} =$$

$$= 2\,\frac{x^3-4,2x^2+5,84x-2,688}{-0,048} + 2.4\,\frac{x^3-4x^2+5,24x-2,24}{0.016} + 2,8\,\frac{x^3-3,8x^2+4,72x-1,92}{-0,016} + 3,2\,\frac{x^3-3,6x^2+4,28x-1,68}{0,048}$$

$$= \left(-\frac{2}{0,048}+\frac{2,4}{0,016}-\frac{2,8}{0,016}+\frac{3,2}{0,048}\right)x^3 + \left(+\frac{8,4}{0,048}-\frac{9,6}{0,016}+\frac{10,64}{0,016}-\frac{11,52}{0,048}\right)x^2 + \left(-\frac{11,68}{0,048}+\frac{12,576}{0,016}-\frac{13,216}{0,016}+\frac{13,696}{0,048}\right)x + \left(+\frac{5,376}{0,048}-\frac{5,376}{0,016}+\frac{5,376}{0,016}-\frac{5,376}{0,048}\right)$$

$$p(x) = 0x^3 + 0x^2 + 2x + 0$$

3) Siano $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ i polinomi di Lagrange relativi a $n+1$ nodi distinti $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

dimostrare che

$$\sum_{i=0}^{n} 1 \, L_i(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$