FORZA ELETTRICA E CAMPO ELETTRICO

Il progresso dell'umanità avvenuto negli ultimi 150 anni è essenzialmente dovuto allo sfruttamento delle leggi dell'elettricità e del magnetismo scoperte a partire dalla fine del XVII secolo.

Brevi cenni storici:

- probabilmente il magnetismo era noto in Cina attorno al 2000 a.C.;
- i greci del periodo classico osservarono fenomeni elettrici e magnetici: un campione di ambra sfregato riusciva ad attrarre pagliuzze e piume; inoltre un certo minerale detto "magnetite" (Fe_3O_4) attirava il ferro; l'aggettivo ELETTRICO deriva dalla parola greca "elektron" (che è l'ambra), e l'aggettivo MAGNETICO deriva dalla città di Magnesia, oggi sulla costa Turca del Mar Egeo, dove esistevano giacimenti di magnetite;
- William Gilbert scoprì (1600) che si potevano elettrizzare molti altri materiali oltre l'ambra;
- All'inizio dell'800 si scoprì che elettricità e magnetismo sono fenomeni collegati: Hans Oersted (1820) si accorse che l'ago magnetico di una bussola viene deviato quando si trova nelle vicinanze di una corrente elettrica; Michael Faraday (1831) e Joseph Henry videro che se una spira è in movimento vicino a un magnete (o se un magnete è in moto vicino a una spira) si genera una corrente nella spira. James Clerk Maxwell (1873) sintetizzò tutti i fatti sperimentali raccolti per scrivere le leggi generali dell'elettromagnetismo, e nel 1888 Heinrich Hertz produsse per la prima volta onde elettromagnetiche in laboratorio.

Proprietà delle cariche elettriche

Evidenza sperimentale: molto spesso, dopo avere strofinato tra loro due diversi materiali, si osserva che questi materiali si attraggono, oppure che sono in grado di attrarre dei piccoli oggetti (ad esempio, pezzetti di carta). Quando accade questo, i materiali si dicono "elettricamente carichi".

Benjamin Franklin osservò che esistono due specie di cariche elettriche, che chiamò POSITIVA e NEGATIVA. Ad esempio, si osserva che se strofiniamo una bacchetta di bachelite con una pelliccia e una bacchetta di vetro con della seta, se dopo avviciniamo le due bacchette queste si attraggono; ma se avviciniamo tra loro due bacchette di bachelite elettrizzate o due bacchette di vetro elettrizzate si osserva che si respingono. Dunque, la bachelite e il vetro si elettrizzano in modo diverso: per convenzione la carica elettrica nella bacchetta di vetro è POSITIVA, mentre quella nella bacchetta di bachelite è negativa.

Vale quindi la seguente regola sperimentale: cariche elettriche con lo stesso segno si respingono, mentre cariche elettriche di segno opposto si attraggono. Non esistono in natura altri tipi di carica elettrica.

<u>Principio di conservazione della carica elettrica</u>: in un sistema isolato la carica elettrica totale si conserva.

Quando si strofinano tra loro due corpi si provoca un trasferimento di carica elettrica da un corpo all'altro, senza però modificare la carica elettrica totale.

Oggi sappiamo che la carica elettrica che passa da un corpo all'altro è trasportata dagli elettroni che vengono "strappati" da uno dei due corpi nello sfregamento. Ad esempio, nello sfregamento di una bacchetta di vetro con un panno di seta, degli elettroni passano dal vetro alla seta. Un oggetto neutro (cioè non elettrizzato) in ogni caso contiene un numero spaventosamente grande di elettroni, tuttavia "compensati" esattamente da altrettante cariche elettriche "positive" portate dai protoni contenuti nei nuclei atomici del materiale che costituisce l'oggetto.

Proprietà fondamentale della carica elettrica: la carica complessiva di un oggetto carico è un multiplo intero della carica di un elettrone, il cui valore conosceremo più avanti. Si dice quindi che la carica elettrica è QUANTIZZATA. Pertanto, quando un corpo viene elettrizzato esso acquista o perde un numero intero di elettroni.

Isolanti e conduttori

Vedremo meglio più avanti che una carica elettrica può muoversi all'interno di un corpo: questo fenomeno è detto CONDUZIONE ELETTRICA. Possiamo classificare i corpi nel modo seguente:

- CONDUTTORI ELETTRICI (o semplicemente CONDUTTORI): alcuni degli elettroni in questi materiali sono liberi di muoversi all'interno del volume del corpo, in modo simile a quello delle molecole di un gas in un recipiente.

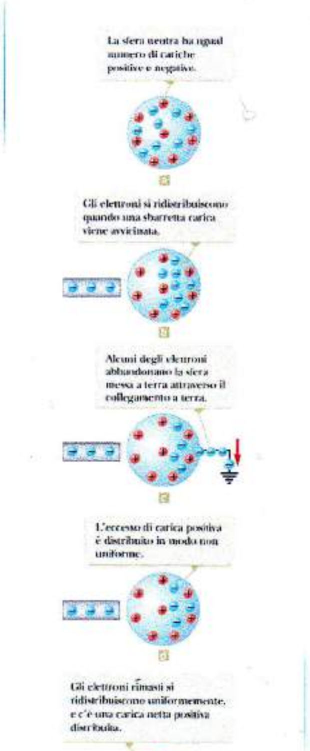
• ISOLANTI ELETTRICI (o semplicemente ISOLANTI): in questi materiali tutti gli elettroni sono legati agli atomi e non possono muoversi nel volume del corpo liberamente.

Esempi: vetro, bachelite e legno asciutto sono isolanti (solo la parte superficiale strofinata si carica elettricamente); rame, alluminio, argento sono conduttori (quando vengono strofinati, la carica in eccesso si distribuisce velocemente su tutta la superficie dell'oggetto).

Sperimentalmente si osserva che, se strofiniamo una bacchetta di materiale conduttore mentre la teniamo con la mano nuda, la bacchetta non pare elettrizzarsi, mentre al contrario si elettrizza se la strofiniamo mentre viene tenuta ferma con un manico isolante: con questa "protezione" le cariche elettriche che si formano nel rame per strofinio non passano al corpo dello sperimentatore (il corpo umano infatti è conduttore)

Esiste un'altra tipologia di materiali, dal punto di vista elettrico: i materiali SEMICONDUTTORI, che hanno proprietà elettriche "intermedie" tra quelle dei conduttori e quelle degli isolanti: in un semiconduttore ci sono cariche elettriche libere di muoversi all'interno del corpo, ma in quantità assai minore rispetto al caso di un conduttore. Esempi di materiali semiconduttori: silicio, germanio, arseniuro di gallio; le proprietà conduttive di un materiale semiconduttore possono essere modificate aggiungendo piccole concentrazioni di atomi di altra specie ("doping").

Oltre che per sfregamento, con conseguente trasferimento di carica elettrica da un corpo a un altro, è possibile caricare un materiale sbilanciando la distribuzione della carica elettrica al suo interno.
Consideriamo anzitutto il caso di un corpo conduttore. Un conduttore può essere MESSO A TERRA collegandolo al suolo mediante un altro conduttore o per contatto diretto. A causa delle sue dimensioni, la Terra è di fatto una riserva illimitata di elettroni, che può cedere o ricevere senza limiti: di fatto la Terra è un serbatoio di carica elettrica. Descriviamo una procedura di caricamento per INDUZIONE ELETTROSTATICA.



a) Consideriamo una sfera conduttrice neutra isolata (uguale numero di cariche positive e negative, uniformemente distribuite)

b) Avviciniamo una bacchetta di bachelite elettrizzata alla sfera conduttrice: gli elettroni del lato vicino alla bacchetta vengono respinti verso la parte della sfera più lontana dalla bacchetta, per cui nel lato della sfera vicino alla bacchetta resta della carica positiva in eccesso.

c) A questo punto colleghiamo il lato della sfera lontano dalla bacchetta con la Terra per mezzo di un filo conduttore: la forza repulsiva della bacchetta spingerà lungo questo filo conduttore alcune cariche negative; il simbolo $\frac{\;\;|\;\;}{\overline{\;\;\;}}$ sta a indicare la "messa a terra".

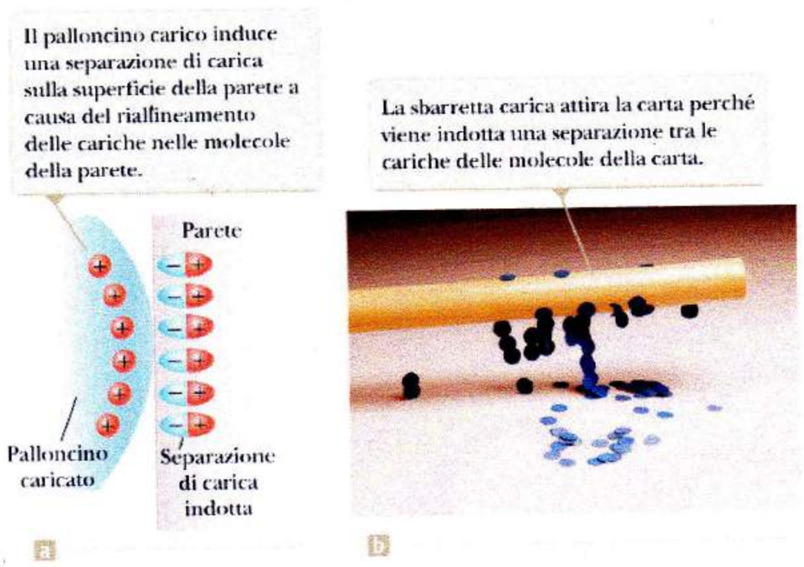
d) La sfera conduttrice, dopo che il collegamento a terra viene rimosso, resta quindi carica, con la carica negativa distribuita in modo non uniforme.

e) Infine, allontanando la bacchetta, la carica negativa si distribuisce in modo uniforme, ma la carica totale netta della sfera è positiva.

Nel procedimento appena descritto non c'è alcun contatto tra le bacchette e la sfera conduttrice, a differenza di quanto accade nel caricamento per strofinio.

Consideriamo adesso il caso di un corpo isolante. In un atomo neutro o molecola neutra, in genere (con alcune eccezioni notevoli, come le molecole dell'acqua, H_2O) i "centri" delle distribuzioni di cariche positive e negative coincidono. Se avviciniamo un altro corpo carico, tuttavia, i centri delle due distribuzioni tendono a separarsi leggermente a causa delle forze esercitate dal corpo carico sulle singole cariche elettriche dell'isolante. Pertanto sulla superficie dell'isolante più vicina all'oggetto carico si creerà uno strato di carica di un segno, mentre sulla superficie dell'isolante più lontana dall'oggetto carico si creerà uno strato di carica di segno opposto: pertanto si produrrà una forza attrattiva indotta tra l'isolante e il corpo carico, come si può intuire dalla figura a fianco. L'induzione elettrostatica in un isolante è detta POLARIZZAZIONE.

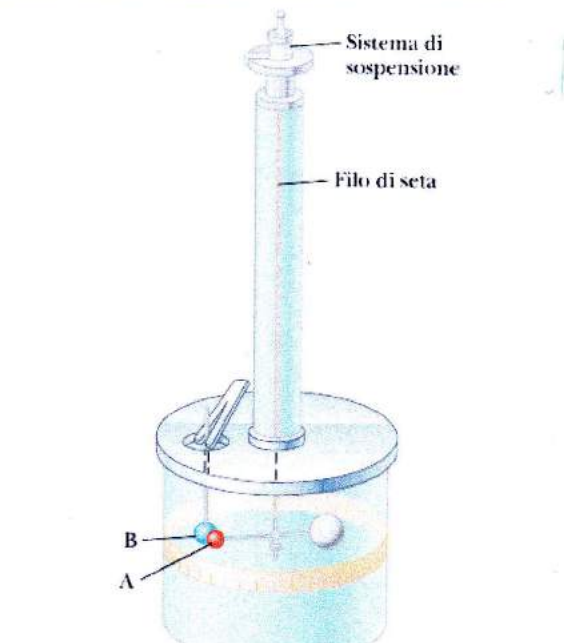
Per lo stesso motivo, una bacchetta caricata elettricamente attrae pezzetti di carta neutri (vedi figura a fianco).



Il palloncino carico induce una separazione di carica sulla superficie della parete a causa del riallineamento delle cariche nelle molecole della parete.

La sbarretta carica attira la carta perché viene indotta una separazione tra le cariche delle molecole della carta.

La legge di Coulomb



Negli anni '80 del XVIII secolo, Charles Augustin de Coulomb svolse esperimenti che gli permisero di misurare l'intensità della forza di interazione tra oggetti carichi, usando una bilancia di torsione come quella schematizzata qui a fianco (una simile fu usata anni dopo da Henry Cavendish per le sue misure sulle forze gravitazionale).

Il risultato di Coulomb fu che il modulo della forza elettrica tra due sferette cariche è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra esse: $|\vec{F}_{el}| \propto 1/r^2$. Misurando l'angolo di torsione del filo in presenza di forza elettrica tra le due sferette si ottiene il modulo della forza elettrica (la sferetta A e sul supporto che può ruotare; la sferetta B è in una posizione fissata).

Inoltre, Coulomb trovò che $|\vec{F}_e|$ è proporzionale al prodotto dei valori assoluti delle cariche elettriche nette possedute dai due corpi:

$$\boxed{|\vec{F}_e| = F_e = K_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \qquad \text{LEGGE DI COULOMB}}$$

Risulta $K_e = 8,9876 \times 10^9 \dfrac{N \cdot m^2}{C^2}$, dove 1 C (1 Coulomb) è l'unità di misura della carica elettrica nel S.I.; per definizione, due cariche elettriche di 1 C si respingono con una forza pari a $8,9876 \times 10^9$ N quando si trovano a 1 m di distanza.

Spesso nelle formule elettromagnetiche si pone

$$\boxed{k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}$$

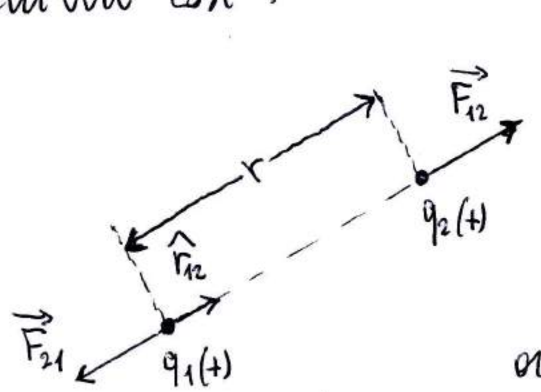
, dove ε_0 e' la cosiddetta COSTANTE DIELETTRICA DEL VUOTO, e risulta $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$

La direzione della forza elettrostatica tra due cariche elettriche e' lungo la retta che congiunge le due cariche.

La carica elettrica dell'elettrone (la "carica elementare") fu misurata per la prima volta nell'ESPERIMENTO DI MILLIKAN (1909), e il risultato fu $q_e = -e = -1,60218 \times 10^{-19}\, C$

[Dunque, 1 C di carica corrisponde, in valore assoluto, alla carica complessiva di circa $6,24 \times 10^{18}$ elettroni. Pertanto, una carica] elettrica di 1 C e' una carica molto elevata. I valori di carica elettrica con cui si ha a che fare nelle esperienze tipiche di elettrostatica sono di 1 μC o inferiori.

La legge di Coulomb per cariche puntiformi si può quindi scrivere così:



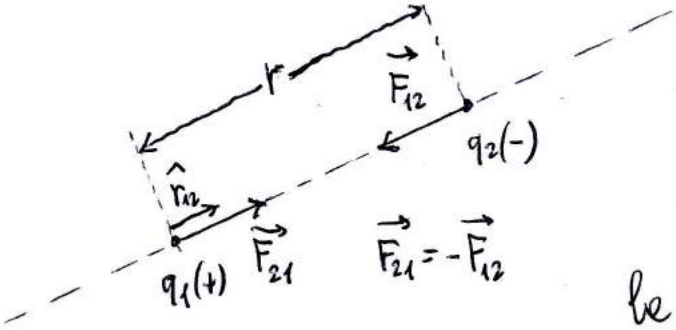
$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

$\hat{r}_{12}$ e' il versore lungo la direzione della retta che congiunge i due corpi, orientato positivamente dal corpo 1 al corpo 2;

$\vec{F}_{12}$ e' la forza esercitata dal corpo 1 sul corpo 2,

$\vec{F}_{21}$ e' la forza esercitata dal corpo 2 sul corpo 1, e risulta chiaramente $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ per la 3ª legge della dinamica.

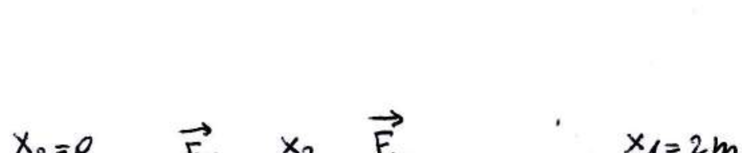
Nello schema delle pagine precedente i versi di $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$ sono corrispondenti a una forza repulsiva tra le cariche elettriche q_1 e q_2 (cariche con lo stesso segno). Se q_1 e q_2 hanno segno opposto il diagramma delle forze e' il seguente:



La forza elettrostatica tra due cariche e' un vettore, per cui in presenza di piu' cariche elettriche le forza risultante su una particella carica e' data dalla somma vettoriale delle forze esercitate su quella particella da ciascuna delle altre cariche elettriche (principio di sovrapposizione, valido per tutte le grandezze vettoriali).

Esempio 1

Tre cariche puntiformi giacciono lungo l'asse x. Una particella con carica elettrica $q_1 = 15\,\mu C$ si trova nella posizione $x_1 = 2\,m$, una particella con carica positiva $q_2 = 6\,\mu C$ si trova nell'origine, e la forza risultante agente su una carica negativa q_3 e' nulla. Quale e' la coordinata x_3 della posizione di q_3?



$$\vec{F}_{23} + \vec{F}_{13} = 0$$

Basandoci nel diagramma delle forze tracciato sopra, vediamo che, posto $|\vec{F}_{23}| = F_{23}$ e $|\vec{F}_{13}| = F_{13}$, deve risultare

$$F_{13} - F_{23} = 0, \quad \text{cioe'}:$$

$$\cancel{K_e}\frac{q_1 \cancel{|q_3|}}{(x_1-x_3)^2} - \cancel{K_e}\frac{q_2 \cancel{|q_3|}}{x_3^2} = 0, \quad \text{cioe'}$$

$$q_1 x_3^2 - q_2 (x_1-x_3)^2 = 0 \Rightarrow q_1 x_3^2 = q_2 (x_1-x_3)^2, \text{ e quindi}$$

$$x_3^2 = \frac{q_2}{q_1}(x_1-x_3)^2 \Rightarrow x_3 = \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}(x_1-x_3), \text{ cioe'}$$

$$\left(1+\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}\right)x_3 = \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}\,x_1, \text{ e infine}$$

$$\boxed{x_3 = \left(\frac{\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}}{1+\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}}\right)x_1 = \left(\frac{\sqrt{\frac{6\mu C}{15\mu C}}}{1+\sqrt{\frac{6\mu C}{15\mu C}}}\right)\cdot(2m) = 0{,}7749\ m}$$

Esempio 2

L'elettrone e il protone di un atomo di idrogeno sono separati (in media) da una distanza all'incirca pari a $r = 5{,}3\times10^{-11}$ m. Calcolare l'intensita' della forza elettrostatica e della forza gravitazionale tra le due particelle.

$$F_e = K_e\frac{e^2}{r^2} = \left(8{,}9876\times10^9\,\frac{N\cdot m^2}{C^2}\right)\cdot\frac{(1{,}60218\times10^{-19}C)^2}{(5{,}3\times10^{-11}m)^2} = 0{,}8213\times10^{-7}N$$

$$F_g = G\frac{m_p m_e}{r^2} = \left(6{,}6743\times10^{-11}\,\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\right)\cdot\frac{(1{,}6726\times10^{-27}kg)(9{,}1094\times10^{-31}kg)}{(5{,}3\times10^{-11}\,m)^2} =$$

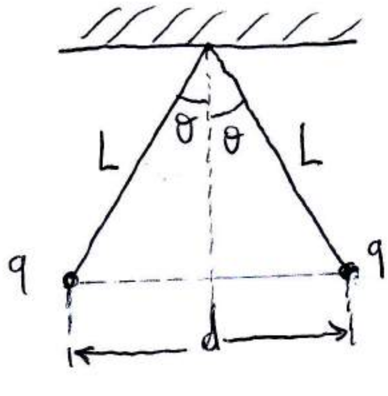
$= 3,6202 \times 10^{-47}$ N

Risulta quindi $F_e/F_g \simeq 2,27 \times 10^{39}$

Dunque, nei fenomeni elettrici tipicamente gli effetti legati alla forza gravitazionale sono praticamente trascurabili.
L'altra differenza tra la forza gravitazionale e la forza elettrostatica è che, mentre la prima è solo attrattiva, la seconda può essere sia attrattiva sia repulsiva.
Osserviamo anche che, mentre la carica elettrica è quantizzata, la massa non lo è (perlomeno per quelle che sono le nostre conoscenze attuali).

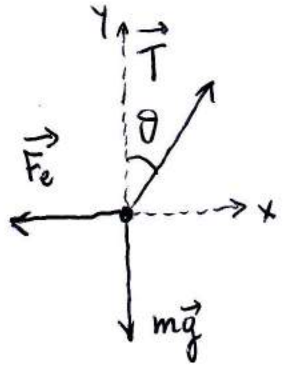
Esempio 3

Due piccole sfere cariche identiche, ciascuna avente massa $m = 0,03$ kg, sono appese in equilibrio come nello schema mostrato qua sotto.



La lunghezza di ciascun filo è $L = 0,15$ m, e l'angolo θ è $5°$.
Trovare il valore assoluto della carica elettrica su ciascuna sfera.

Diagramma delle forze agenti su una sfera all'equilibrio:



$\vec{F_e}$: forza elettrica repulsiva esercitata dall'altra sfera

$\vec{T}$: forza esercitata dal filo sulla sfera.

A causa della simmetria del problema, e per il fatto che le due sferette hanno uguale massa, deduciamo che devono avere anche la stessa carica elettrica. All'equilibrio deve risultare:

$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F_e} = 0$$

Se introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali come nello schema, e tenuto conto che, se poniamo $|\vec{T}| = T$ e $|\vec{F_e}| = F_e$,

risulta $T_x = T \,\text{sen}\,\theta$; $T_y = T\cos\theta$

$F_{e,x} = -k_e \dfrac{q^2}{d^2}$; $F_{e,y} = 0$

$(m\vec{g})_x = 0$; $(m\vec{g})_y = -mg$

$$d = 2L\,\text{sen}\,\theta$$

possiamo scrivere :

$$\begin{cases} T_x + (m\vec{g})_x + F_{e,x} = 0 \\ T_y + (m\vec{g})_y + F_{e,y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T\,\text{sen}\,\theta - k_e \dfrac{q^2}{(2L\,\text{sen}\,\theta)^2} = 0 \\ T\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T\,\text{sen}\,\theta = k_e \dfrac{q^2}{(2L\,\text{sen}\,\theta)^2} \\ T\cos\theta = mg \end{cases}$$

Dividiamo le due equazioni membro a membro:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{k_e q^2}{mg(2L\,\text{sen}\,\theta)^2} \Rightarrow q^2 = \frac{mg\,\text{tg}\,\theta\,(2L\,\text{sen}\,\theta)^2}{k_e}$$, e in fine:

$$|q| = 2L\,\text{sen}\,\theta\sqrt{\frac{mg\,\text{tg}\,\theta}{k_e}} = 2\cdot(0{,}15\,m)(\text{sen}\,5°)\sqrt{\frac{(0{,}03\,kg)(9{,}81\,\frac{m}{s^2})\,\text{tg}\,5°}{8{,}9876\times10^9\,N\cdot m^2/C^2}} = 4{,}4255\times10^{-8}\,C$$

Campi elettrici

Dopo la forza gravitazionale, studiata in precedenza, la forza elettrostatica e' un secondo esempio di "forza a distanza" agente attraverso lo spazio senza necessita' di un contatto fisico tra i corpi che interagiscono. Il concetto di "campo di forza" fu introdotto da Michael Faraday proprio in connessione con la forza elettrica, anche se ne abbiamo studiato un'applicazione nel caso della forza gravitazionale.
Dal punto di vista di Faraday, una CARICA SORGENTE genera un CAMPO ELETTRICO nella regione di spazio attorno a sé (in realta' in TUTTO lo spazio), e una CARICA DI PROVA che entra nella regione di spazio in cui si trova il campo elettrico sente l'azione di una forza elettrica su di sé.

Matematicamente, il campo elettrico generato da una carica sorgente nel punto in cui si trova una carica di prova q_0 e' definito come un vettore, espresso dalla relazione:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0}}\ , \quad \text{nel limite per } q_0 \text{ molto piccola.}$$

Cioe', e' la "forza per unita' di carica elettrica" esercitata dalla carica sorgente in quel punto; q_0 deve essere piccola in questa definizione, al fine di non alterare sensibilmente la distribuzione della carica sorgente. Il vettore $\vec{E}$ si misura in N/C nel S.I.

[Attenzione: il campo $\vec{E}$ NON e' prodotto dalla carica di prova, ma dalle altre cariche o distribuzioni di carica distinte da essa.]

Il campo elettrico $\vec{E}$ dipende solo dalla carica sorgente; la carica di prova risente della forza dovuta alla presenza del campo elettrico in quella posizione.

Pertanto, una volta noto il campo elettrico $\vec{E}$ in un punto dello spazio, la forza agente su una carica elettrica q che si venga a trovare in quel punto è $\boxed{\vec{F}_e = q\vec{E}}$

Se la sorgente di carica elettrica è una carica puntiforme q, la forza esercitata su una carica di prova q_0 è, per la legge di Coulomb: $\vec{F}_e = k_e \dfrac{q q_0}{r^2}\hat{r}$, dove $\hat{r}$ è il versore lungo la retta che congiunge q e q_0, diretto da q verso q_0.

Pertanto il <u>vettore campo elettrico di una carica puntiforme</u> è:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0} = k_e \frac{q}{r^2}\hat{r}}$$

Se $q>0$, $\vec{E}$ è diretto radialmente rispetto alla posizione di q, con verso uscente; se $q<0$, $\vec{E}$ è diretto radialmente rispetto alla posizione di q, con verso entrante. $\vec{E}$ non è definito nella posizione in cui si trova la sorgente puntiforme.

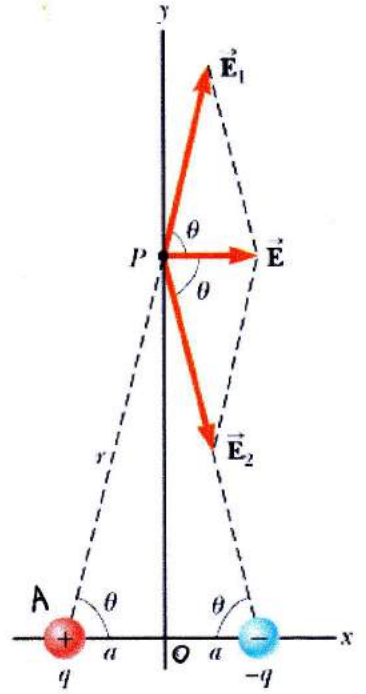
Il campo elettrico prodotto in un punto P dello spazio da un certo numero di cariche puntiformi distinte è dato dalla somma vettoriale dei campi generati da ciascuna carica sorgente:

$$\vec{E}_P = k_e \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

dove r_i è la distanza della sorgente q_i dal punto P, e $\hat{r}_i$ è il versore diretto da q_i al punto P.

Esempio 4

Un DIPOLO ELETTRICO è costituito da una carica puntiforme positiva q e da una carica puntiforme negativa $-q$ separate da una distanza $2a$ (vedi figura qua sotto). Gli atomi neutri e le molecole, se posti in un campo elettrico, si comportano come dipoli elettrici. Inoltre molte molecole, come HCl, sono dipoli permanenti (HCl è uno ione H^+ legato a uno ione Cl^-).



a) Trovare il campo elettrico $\vec{E}$ prodotto dal dipolo lungo l'asse y in un punto P posto in una posizione $(0, y)$.

b) Trovare il campo elettrico nei punti con ordinata $|y| \gg a$, lontani dal dipolo.

a) I vettori $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ generati in P dalle due cariche singolarmente hanno uguale modulo (la distanza di P da ciascuna delle due cariche è la stessa, pari a $\sqrt{a^2+y^2}$), cioè:

$$E_1 = E_2 = k_e \frac{q}{r^2} = k_e \frac{q}{a^2+y^2}$$

Dallo schema qua sopra risulta evidente che la somma delle componenti y dei campi elettrici $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ è nulla, per cui il campo elettrico risultante $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ è diretto lungo l'asse x.

Dato che $E_{1x} = E_{2x} = E_1 \cos\theta$, risulta:

$$E_x = |\vec{E}| = E_{1x} + E_{2x} = 2 E_1 \cos\theta$$

Dalle formule trigonometriche valide per i triangoli rettangoli otteniamo: $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}}$ (triangolo rettangolo AOP), essendo

$\overline{OP} = |y|$; dunque, risulta:

$$\boxed{\vec{E} = E_x \hat{i} = 2 k_e \frac{q a}{(y^2+a^2)^{3/2}} \hat{i}}$$

b) se $|y| \gg a$, possiamo trascurare a^2 rispetto a y^2, e

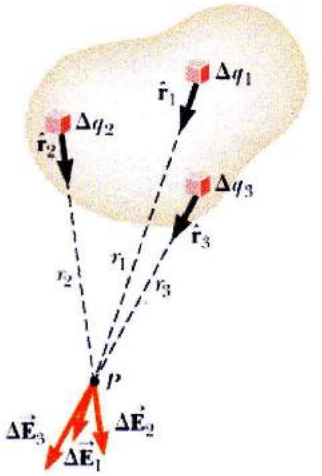
risulta.

$$\boxed{\vec{E} \simeq 2 k_e \frac{q a}{|y|^3} \hat{i} \quad \text{se} \quad |y| \gg a}$$

<u>Campo elettrico generato da una distribuzione continua di carica</u>

Quando le distanze tra le cariche sorgente di una distribuzione di cariche e' molto piccola rispetto alla distanza tra le cariche e il punto in cui si vuole calcolare il campo elettrico, la distribuzione di cariche puo' essere considerata continua, cioe' e' come se le cariche (a seconda del sistema considerato) fossero distribuite con continuita' in un volume, o su una superficie, o lungo una linea.

In questi casi si procede usando un metodo "di spezzettamento" gia' utilizzato in altri casi: si suddivide la distribuzione di carica in tantissimi piccoli elementi, ciascuno con carica elettrica Δq, si calcola il campo elettrico prodotto nel punto P da ciascuno di questi elementi, e infine si sommano vettorialmente tutti i contributi ottenuti.



Qui accanto è schematizzato graficamente quanto descritto nelle pagine precedente. Se il contributo dell'elemento di carica Δq_i al campo elettrico in P è (assumendo che Δq_i sia una carica puntiforme):

$$\Delta \vec{E}_i = k_e \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad \text{(vedi figura)},$$

allora il campo elettrico complessivo in P generato dall'intera distribuzione di carica elettrica è:

$$\vec{E}_P = k_e \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Esprimendo poi Δq_i sulla base della geometria della distribuzione di carica e facendo tendere a zero le dimensioni di ogni elemento di carica, la sommatoria si trasforma in un integrale che in molti casi si può calcolare senza grosse difficoltà. Se la carica elettrica è distribuita uniformemente lungo una linea, su una superficie o in un volume, conviene introdurre il concetto di DENSITÀ DI CARICA:

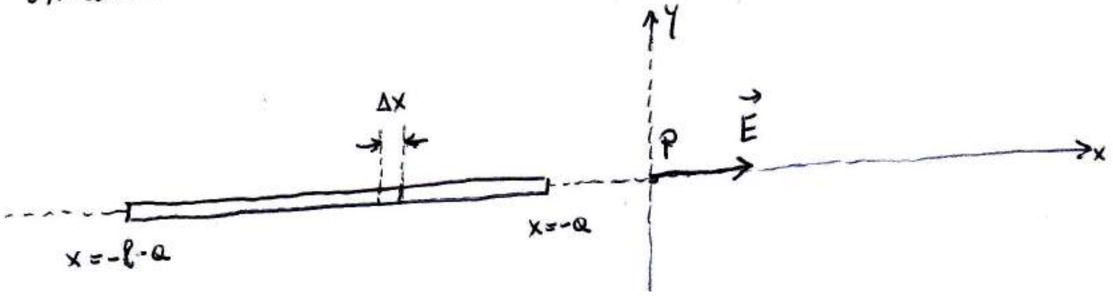
$\lambda = \dfrac{Q}{\ell}$ se la carica Q è distribuita uniformemente lungo un tratto lineare di lunghezza ℓ (DENSITÀ LINEARE);

$\sigma = \dfrac{Q}{A}$ se la carica Q è distribuita uniformemente su una superficie di area A (DENSITÀ SUPERFICIALE)

$\rho = \dfrac{Q}{V}$ se la carica Q è distribuita uniformemente in un volume V (DENSITÀ DI VOLUME).

Esempio 5

Una sbarretta avente lunghezza ℓ e una carica totale positiva Q ha densità lineare di carica uniforme λ. Calcolare il campo elettrico in un punto P lungo l'asse della sbarretta a una distanza a da un estremo.



Riferendo la sbarretta a un sistema di assi cartesiani ortogonali come nello schema qua sopra, la sbarretta viene a trovarsi lungo l'asse x, con $-\ell-a \leq x \leq -a$, e il campo elettrico in O è diretto lungo l'asse x nel verso positivo, poiché ogni elemento di carica elettrica in cui si può suddividere la sbarretta ha carica positiva e si trova a sinistra del punto in cui si vuole calcolare il campo elettrico. La densità lineare di carica della sbarretta, essendo costante, è $\lambda = \frac{Q}{\ell}$.

Dunque, un elemento della sbarretta di lunghezza Δx_i contiene una carica elettrica $\Delta q_i = \lambda \Delta x_i$; pertanto, il contributo al campo elettrico nel punto P dovuto all'elemento di carica Δq_i che si trova in una posizione x_i lungo la sbarretta è $\Delta E_{x,i} = K_e \frac{\Delta q_i}{x_i^2} = K_e \frac{\lambda \Delta x_i}{x_i^2}$, per cui il campo elettrico totale in P dovuto a tutti gli elementi di carica della sbarretta è $E_x = K_e \lambda \sum_i \frac{\Delta x_i}{x_i^2}$

Facendo tendere a zero i Δx_i, la sommatoria diventa un integrale da calcolare tra gli estremi $-l-a$ e $-a$ della variabile x:

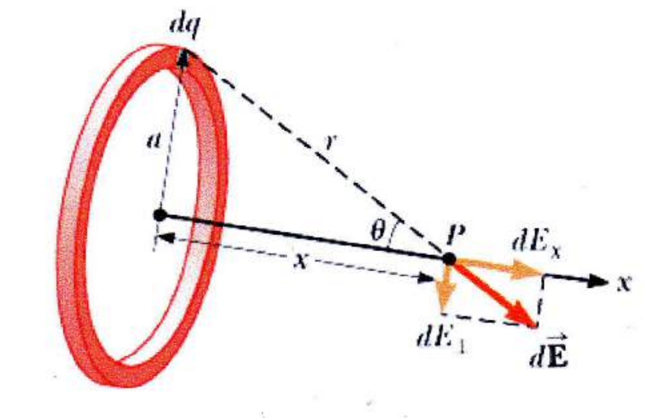
$$E_x = k_e \lambda \int_{-l-a}^{-a} \frac{1}{x^2} dx = k_e \lambda \left[-\frac{1}{x} \Big|_{-l-a}^{-a} \right] =$$

$$= k_e \lambda \left[-\frac{1}{(-a)} + \frac{1}{(-l-a)} \right] = k_e \lambda \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{l+a} \right] =$$

$$= k_e \frac{Q}{l} \frac{l + \cancel{a} - \cancel{a}}{a(l+a)} = \frac{k_e Q}{a(l+a)}$$

Osserviamo che se $a \gg l$, risulta $E_x \approx \frac{k_e Q}{a^2}$, cioè da un punto molto lontano lungo l'asse x la sbarretta carica si comporta come se fosse una carica puntiforme.

Esercizio proposto



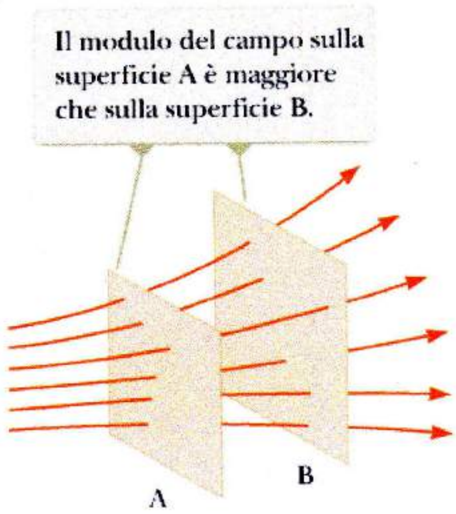
Un anello di raggio a ha una densità lineare di carica positiva uniforme, con carica totale Q. Calcolare il campo elettrico generato dall'anello in un punto P posto a distanza $|x|$ dal centro dell'anello lungo l'asse centrale perpendicolare al piano dell'anello (vedi figura).

Cosa succede se $|x| \gg a$? Se invece una carica negativa viene lasciata libera inizialmente ferma in una posizione x, con $|x| \ll a$, che tipo di moto si osserverà per questa carica? Se oscilla, trovare la pulsazione delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

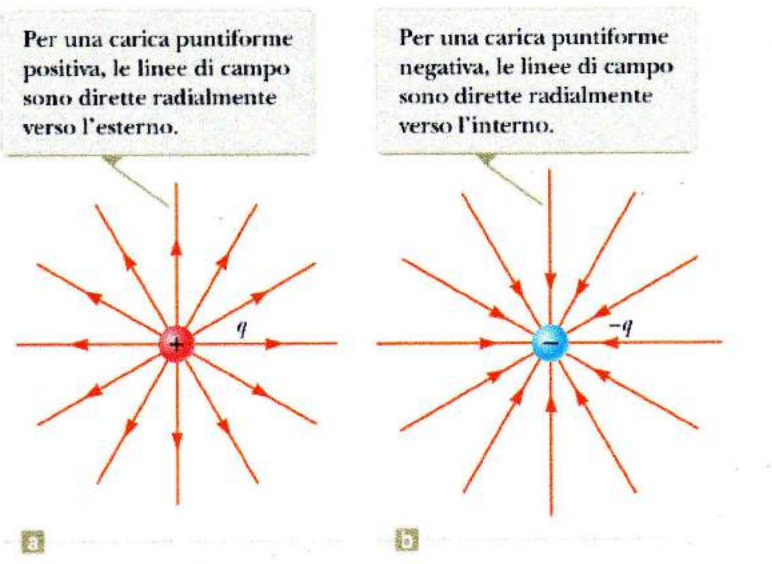
Linee di campo elettrico

La configurazione del campo elettrico nello spazio può essere rappresentata graficamente tramite le cosiddette LINEE DI CAMPO ELETTRICO, tracciate seguendo le seguenti regole:

- il vettore campo elettrico $\vec{E}$ è tangente alle linee di campo in ogni punto;
- il numero di linee di campo per unità di superficie che attraversano una superficie perpendicolare alle linee stesse è proporzionale al modulo del campo elettrico in quella unità di superficie $\Rightarrow$ $|\vec{E}|$ è più elevato dove le linee di campo sono più fitte, come mostrato nella figura a destra.



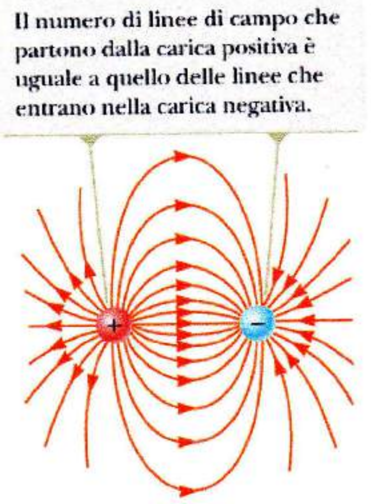
Qua sotto sono rappresentate le linee di campo di una carica puntiforme positiva (a) e di una carica puntiforme negativa (b).



Si osserva, nelle figure qui a fianco, che le linee di campo sono più fitte man mano che ci si avvicina alla carica puntiforme, e infatti $|\vec{E}|$ cresce man mano che r decresce. Inoltre, $|\vec{E}|$ è lo stesso su una superficie sferica centrata nella carica puntiforme, e questa rappresentazione grafica è in accordo con questo fatto.

In presenza di più cariche elettriche, occorre seguire queste regole:

- le linee di campo devono "iniziare" sulle cariche positive e "terminare" sulle cariche negative; se la carica netta totale non è nulla, ci sono linee che provengono dall'infinito o che vanno all'infinito;
- il numero di linee di campo che vengono tracciate in uscita da una carica positiva o che "arrivano" su una carica negativa è proporzionale al valore assoluto della carica;
- due linee di campo non si possono intersecare.



Qui a fianco sono rappresentate le linee di campo di un dipolo elettrico, come esempio.

Moto di particelle cariche in un campo elettrico uniforme

Una particella carica, con carica elettrica q e massa m, quando si trova in un punto dello spazio in cui è presente un campo elettrico $\vec{E}$ sente l'azione di una forza elettrica $\vec{F}_e = q\vec{E}$.
Se questa forza è la risultante di tutte le forze agenti sulla particella, la seconda legge della dinamica applicata alla particella ci permette di scrivere l'equazione

$$m\vec{a} = q\vec{E}.$$

Dunque, se la forza elettrica e' l'unica forza agente (o se e' la risultante di tutte le forze agenti), la particella accelera istantaneamente con accelerazione

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

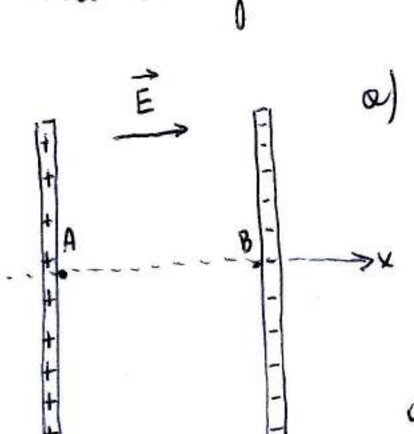
Se $\vec{E}$ e' costante, quindi, anche $\vec{a}$ e' costante, e il moto della particella e' facilmente studiabile.

Esempio 6

Un campo elettrico uniforme $\vec{E}$ e' diretto lungo l'asse x tra due piani paralleli carichi (con cariche di segno opposto) separati da una distanza d. Una carica puntiforme positiva q di massa m e' lasciata libera in quiete in un punto A vicino al piano carico positivamente e accelera verso il punto B vicino al piano negativo.

a) Trovare la velocita' della particella in B trattandola come una particella che si muove con accelerazione costante.

b) Trovare la velocita' della particella in B usando il teorema dell'energia cinetica.



a) La particella parte da ferma in A, con accelerazione $a_x = \frac{qE_x}{m}$, con $E_x = |\vec{E}| = E$

Dalla legge che lega velocita' e posizione nel moto rettilineo uniformemente accelerato otteniamo: $V_{B,x}^2 - V_{A,x}^2 = 2a_x(x_B - x_A)$

Poiché $v_{A,x} = 0$, $x_A = 0$, $x_B = d$, otteniamo:

$$v_{Bx}^2 = \frac{2qE}{m}d, \text{ da cui otteniamo } \boxed{|\vec{v}_B| = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}}$$

b) Il lavoro svolto dalla forza costante $\vec{F} = qE\hat{\imath}$ (con $E = |\vec{E}|$) allorché la particella carica si sposta dal punto A al punto B è:

$$W_{A\to B} = |\vec{F}|d = qEd$$

Per il teorema dell'energia cinetica possiamo quindi scrivere:

$$K_B - K_A = W_{A\to B} \Rightarrow \frac{1}{2}m|\vec{v}_B|^2 = W_{A\to B} \quad (\text{essendo } K_A = 0);$$

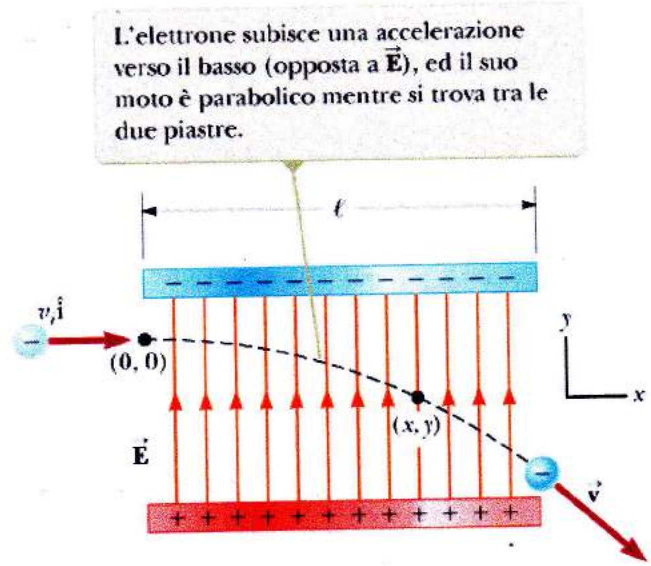
quindi $\frac{1}{2}m|\vec{v}_B|^2 = qEd \Rightarrow |\vec{v}_B|^2 = \frac{2qEd}{m}$, e infine

$$\boxed{|\vec{v}_B| = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}}$$

Esercizio proposto

Un elettrone entra in una regione con campo elettrico uniforme, con $|\vec{v}_i| = 3\times10^6$ m/s e $|\vec{E}| = 200\,\frac{N}{C}$.

La lunghezza orizzontale delle piastre è $l = 0{,}1$ m.



a) Trovare l'accelerazione dell'elettrone nel campo elettrico.

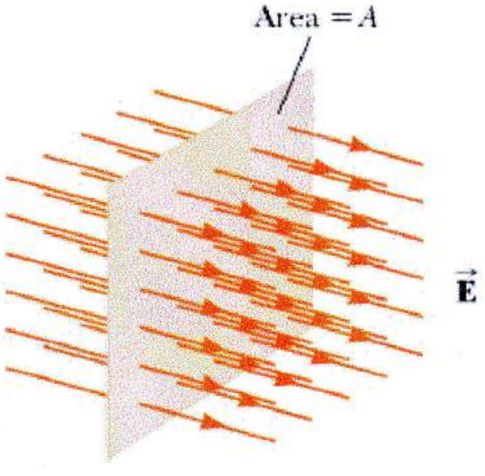
b) Se l'elettrone entra nella regione in cui è presente il campo elettrico all'istante $t = 0$, a quale istante t_1 esce dal lato destro della regione tra le due piastre?

Flusso elettrico

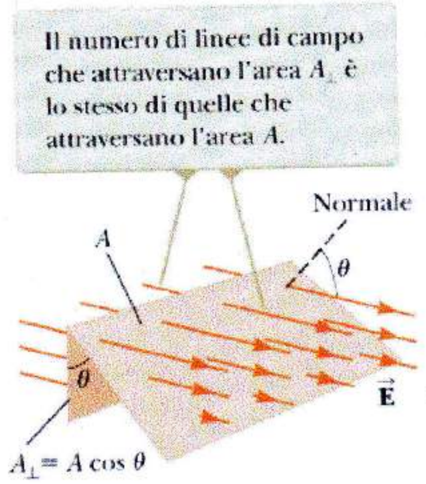
Qualitativamente, il concetto di "flusso elettrico" e' legato al "numero" di linee del campo elettrico che attraversano una data superficie.

Nel caso della figura qui accanto, in cui un campo elettrico $\vec{E}$ costante e uniforme in una certa regione di spazio attraversa perpendicolarmente una superficie quadrata di area A, il valore assoluto del FLUSSO ELETTRICO di $\vec{E}$ attraverso questa superficie e'

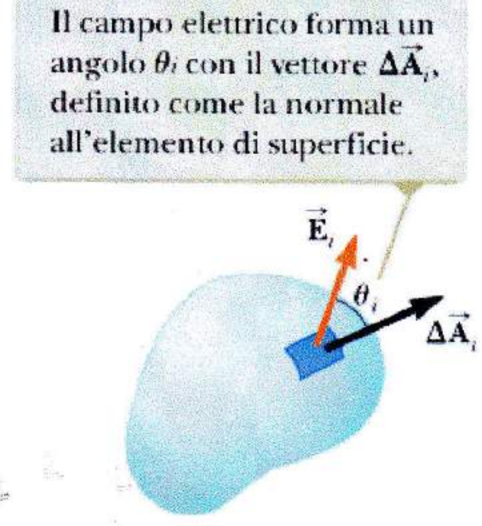
$$\boxed{|\Phi_E| = |\vec{E}|A}$$



Se la superficie attraversata da $\vec{E}$ non e' perpendicolare a $\vec{E}$, il valore assoluto del flusso di $\vec{E}$ attraverso la superficie e' definito così: $\boxed{|\Phi_E| = |\vec{E}|A\cos\theta}$, dove θ e' l'angolo tra $\vec{E}$ e la direzione normale alla superficie (vedi figura); se $\theta = 90°$ il flusso di $\vec{E}$ e' nullo (superficie parallela a $\vec{E}$).



In generale, per una superficie generica che può essere anche curva, si suddivide la superficie in piccoli elementi di area ΔA_i: entro i quali $\vec{E}_i$ e' praticamente costante (in ciascuno), e si definisce un vettore $\Delta\vec{A}_i$ tale che $|\Delta\vec{A}_i| = \Delta A_i$, diretto lungo la direzione perpendicolare all'elemento di superficie, con verso concorde con il verso positivo fissato lungo questa direzione. Il flusso di $\vec{E}_i$ attraverso l'elemento di superficie e' quindi definito così:



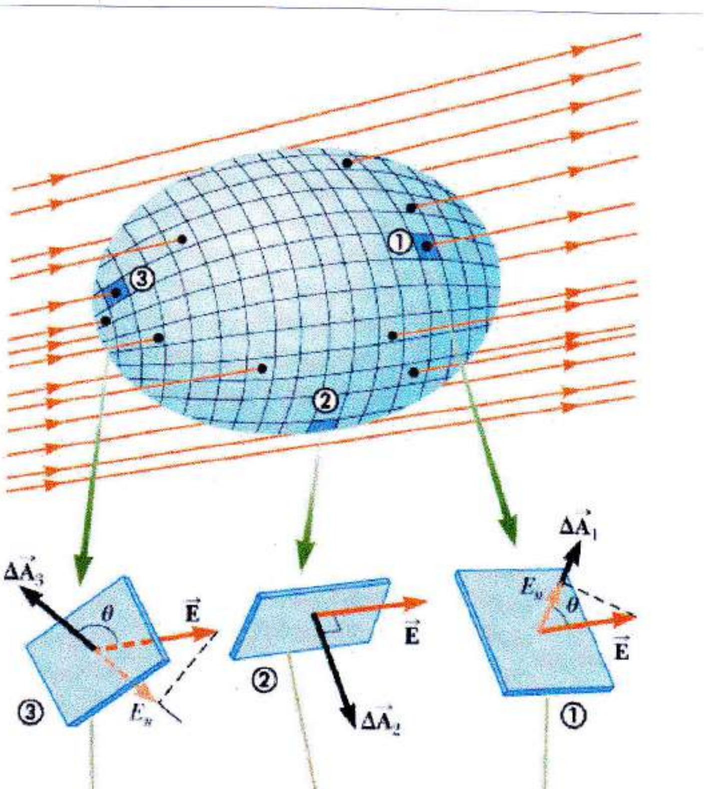
$$(\Delta\Phi_E)_i = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i \quad \text{(prodotto scalare)}$$

Sommando tutti questi contributi ottenuti sull'intera superficie, otteniamo il flusso totale di $\vec{E}$ attraverso la superficie considerata:

$$\boxed{\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_i (\vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i) = \int_{\text{superficie}} \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$ (integrale "di superficie")

Se la superficie attraverso la quale si vuole calcolare il flusso di $\vec{E}$ è chiusa, la convenzione è di considerare i vettori $\Delta\vec{A}_i$ orientati verso l'esterno della superficie (verso positivo uscente).

Nella figura qui a fianco sono mostrati elementi di una superficie chiusa data attraverso i quali il flusso di $\vec{E}$ è positivo (1), nullo (2) e negativo (3).



Il flusso elettrico attraverso questo elemento di area è negativo.

Il flusso elettrico attraverso questo elemento di area è zero.

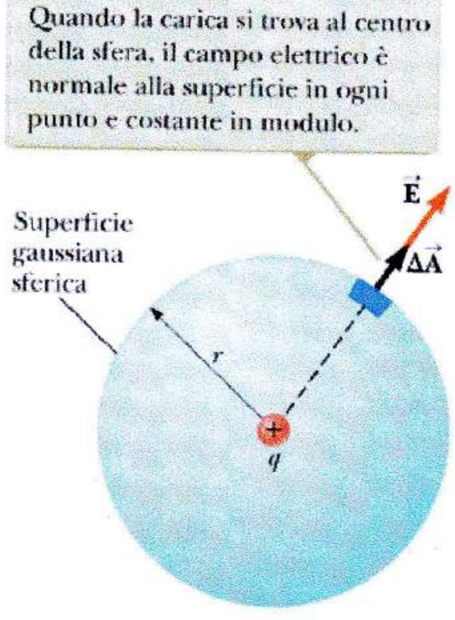
Il flusso elettrico attraverso questo elemento di area è positivo.

Poiché $\vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$ si può anche scrivere $|\vec{E}_i|\,\Delta A_i \cos\theta_i = E_{i,n}\,\Delta A_i$, dove $E_{i,n}$ è la componente di $\vec{E}_i$ lungo la direzione normale a ΔA_i, il flusso di $\vec{E}$ attraverso una superficie chiusa si può scrivere così:

$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_n\, dA$, dove il simbolo $\oint$ indica che l'integrale è esteso a una superficie chiusa.

In casi specifici, il calcolo di questo integrale diventa relativamente semplice, come vedremo.

Teorema di Gauss



Una carica puntiforme positiva q al centro di una sfera di raggio r genera un campo elettrico con linee di campo radiali e verso uscente, cioè sono perpendicolari alla superficie sferica in ogni punto di questa. Dunque ogni vettore $\Delta\vec{A}_i$ è parallelo e concorde al corrispondente campo elettrico $\vec{E}_i$ in quella posizione sulla superficie sferica (vedi figura). Pertanto risulta $\vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i = E_{i,n}\,\Delta A_i = |\vec{E}|\,\Delta A_i$,

in quanto $E_{i,n} = |\vec{E}|$, in questo caso, su tutti i punti della superficie sferica di raggio fissato r. Risulta quindi, per il flusso totale del campo elettrico $\vec{E}$ attraverso la superficie considerata:

$$\Phi_E = \oint E_n\,dA = \oint |\vec{E}|\,dA = |\vec{E}| \oint dA = |\vec{E}|\,A_{superficie}$$

Risulta $|\vec{E}| = k_e \dfrac{q}{r^2}$, e inoltre $A_{superficie} = 4\pi r^2$ (area della superficie sferica di raggio r), per cui otteniamo

$$\Phi_E = |\vec{E}|\,A_{superficie} = \left(k_e \frac{q}{\cancel{r^2}}\right)\cdot\left(4\pi \cancel{r^2}\right) = 4\pi k_e q$$

Poiché $k_e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, possiamo scrivere

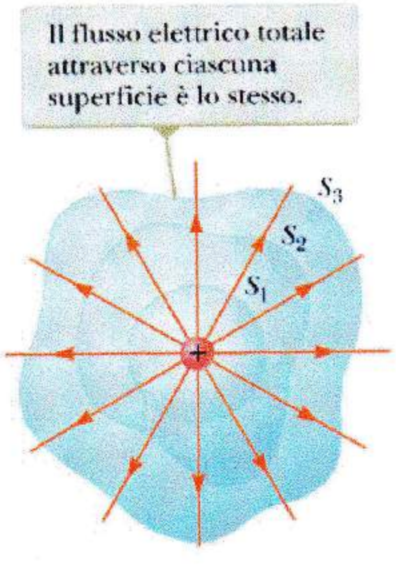
$$\boxed{\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}} \qquad \text{(indipendente da r!)}$$

[Dunque, il flusso del campo elettrico $\vec{E}$ attraverso una superficie sferica è proporzionale alla carica elettrica q che si trova all'interno della superficie.

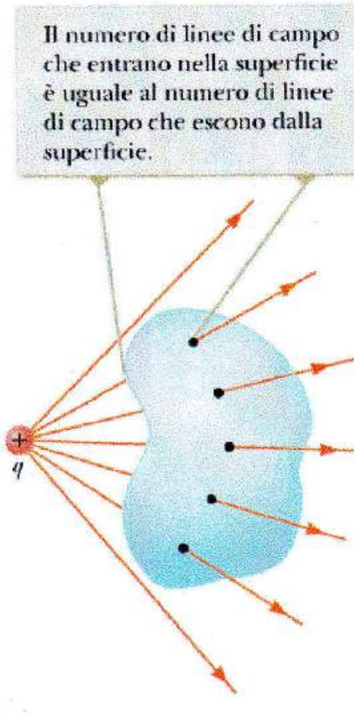
Si può dimostrare più in generale che il flusso totale del campo elettrico attraverso una qualunque superficie chiusa non dipende dalla forma della superficie, o meglio:

il flusso totale elettrico che attraversa una qualunque superficie chiusa che circonda una carica puntiforme q è uguale a q/ε_0, ed è indipendente da dove la carica si trovi all'interno della superficie. Dunque, il flusso elettrico totale attraverso una superficie chiusa che non circonda una carica elettrica netta (cioè tale che all'interno della superficie la carica contenuta sia nulla o che la somma di tutte le cariche presenti sia nulla) è nullo.

carica interna alla superficie



carica esterna alla superficie



In generale, se sono presenti più cariche elettriche, si può estendere il ragionamento fatto, e il risultato è il TEOREMA DI GAUSS: il flusso totale del campo elettrico attraverso una qualunque superficie chiusa è espresso dalla legge

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

, dove q_{in} è la carica elettrica totale interna alla superficie chiusa considerata.

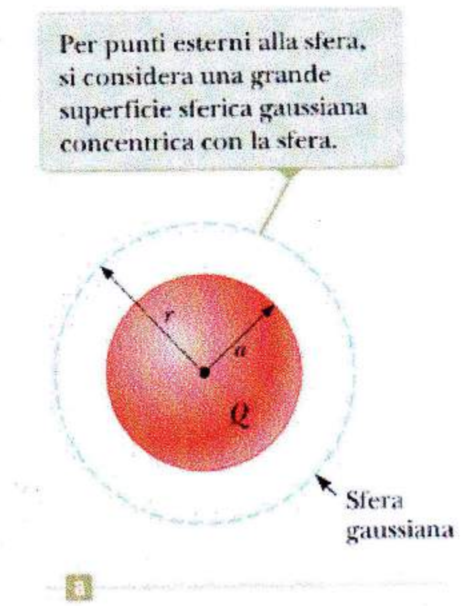
Applicazioni del teorema di Gauss a distribuzioni di carica simmetriche

A] Una sfera isolante solida avente raggio a possiede una densità volumica di carica elettrica uniforme ρ e una carica totale positiva Q.

a) Calcolare il modulo del campo elettrico in un punto esterno alla sfera.

b) Calcolare il modulo del campo elettrico in un punto interno alla sfera.

a) Scegliamo una superficie sferica, concentrica alla sfera isolante, con raggio $r > a$; nei punti di questa superficie, $\vec{E}$ è diretto radialmente ed è costante in modulo, per cui risulta $E_n = |\vec{E}|$. Allora, per il teorema di Gauss, risulta



$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint |\vec{E}|\, dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Poiché $\oint |\vec{E}|\, dA = |\vec{E}| \oint dA = |\vec{E}|(4\pi r^2)$, otteniamo

$$|\vec{E}|(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad \text{e quindi} \quad \boxed{|\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k_e \frac{Q}{r^2}}$$

per $r > a$. Dunque, il campo elettrico prodotto da una sfera carica uniformemente in un punto esterno alla sfera equivale al campo elettrico prodotto da una carica puntiforme posizionata al centro della sfera.

b) Scegliamo una superficie sferica, concentrica alla sfera isolante, con raggio $0<r<a$; nei punti di questa superficie, $\vec{E}$ è diretto radialmente ed è costante in modulo, per ragioni di simmetria del problema. Calcoliamo la carica elettrica contenuta all'interno della superficie considerata.

Risulta $q_{in} = \rho \cdot \left(\frac{4\pi}{3} r^3\right)$, e quindi, per il teorema di Gauss, risulta:

$$\Phi_E = \oint |\vec{E}|\, dA = |\vec{E}| \oint dA = |\vec{E}|\,(4\pi r^2) = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}\text{; otteniamo:}$$

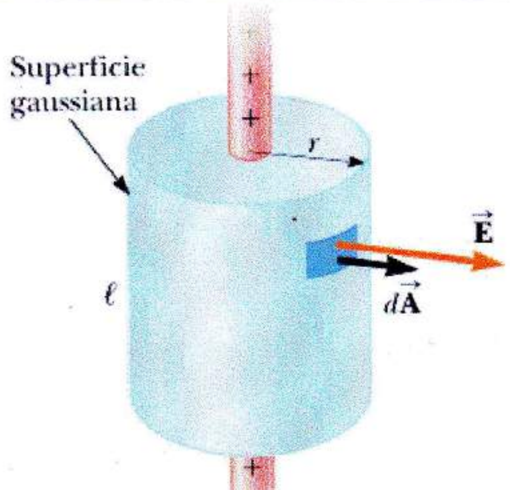
$$|\vec{E}|\,(\cancel{4\pi r^2}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot \frac{\cancel{4\pi} r^{\cancel{3}}}{3}, \text{ da cui } |\vec{E}| = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\, r$$

Poiché $\rho = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{Q}{\frac{4\pi}{3} a^3} = \dfrac{3Q}{4\pi a^3}$, otteniamo infine

$$|\vec{E}| = \frac{1}{\cancel{3}\varepsilon_0} \frac{\cancel{3}Q}{4\pi a^3}\, r = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}\, \frac{Q}{a^3} \cdot r \Rightarrow \boxed{|\vec{E}| = k_e \frac{Q}{a^3} r} \text{ per } 0<r<a$$

B] Calcolare il campo elettrico a una distanza r da un filo uniformemente carico positivo di lunghezza infinita e carica per unità di lunghezza λ costante.

Scegliamo una superficie cilindrica concentrica al filo, di raggio r e lunghezza ℓ. Poiché il filo ha lunghezza infinita, il campo elettrico $\vec{E}$ ha modulo costante sulla superficie cilindrica ed è diretto radialmente verso l'esterno. Per questa ragione, il flusso di $\vec{E}$ attraverso le due basi del cilindro è nullo.



Pertanto, il flusso di $\vec{E}$ attraverso la superficie cilindrica considerata è dato dal flusso attraverso la sola superficie laterale.
Poiché il vettore $\Delta\vec{A}_i$ è parallelo e concorde a $\vec{E}_i$, otteniamo

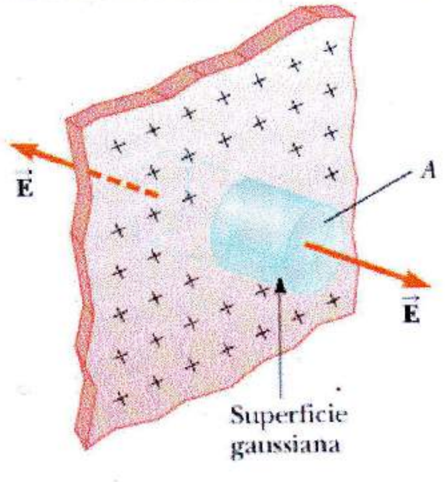
$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint E_n\, dA = |\vec{E}| \oint dA = |\vec{E}|\, A_{laterale} = |\vec{E}|(2\pi r \ell)$$

La carica elettrica totale interna alla superficie cilindrica considerata è, sulla base delle informazioni fornite dal testo del problema: $q_{in} = \lambda \ell$, per cui, applicando il teorema di Gauss, otteniamo:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}|\cdot(2\pi r \ell) = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0},\quad \text{cioè}$$

$$\boxed{|\vec{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = 2k_e\frac{\lambda}{r}}$$

c] Trovare il campo elettrico generato da un piano infinito con densità superficiale di carica σ.



Poiché il piano ha estensione infinita, il vettore $\vec{E}$ deve essere diretto perpendicolarmente al piano per simmetria. Inoltre, $\vec{E}$ deve cambiare verso passando da un lato del piano all'altro (vedi figura).
Scegliamo una superficie cilindrica con le due basi parallele al piano, passante attraverso il piano perpendicolarmente a questo (vedi ancora la figura), con le due basi in posizioni simmetriche rispetto al piano.

In questo caso il flusso di $\vec{E}$ attraverso la superficie laterale del cilindro e' nullo, per cui il flusso di $\vec{E}$ attraverso la superficie scelta e' uguale al solo flusso attraverso le due basi.

Poiché risulta chiaramente che $\vec{E}$ e' parallelo a $\Delta \vec{A}_i$ nelle basi del cilindro, otteniamo

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_n \, dA = \oint E \, dA = 2|\vec{E}|A, \quad \text{dove}$$

$|\vec{E}|$ e' il modulo di $\vec{E}$ nelle due basi del cilindro (e' lo stesso per simmetria) e A e' l'area di base del cilindro, e dove si e' tenuto conto del fatto che il flusso attraverso ciascuna delle due basi e' lo stesso per simmetria; la carica totale contenuta nella superficie scelta e'

$q_{in} = \sigma A$, per cui, applicando il teorema di Gauss, otteniamo:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2|\vec{E}|\cancel{A} = \frac{\sigma \cancel{A}}{\varepsilon_0}, \text{ e infine}$$

$$\boxed{|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

, con $|\vec{E}|$ indipendente dalla distanza dal piano!

[Esercizio. Sfruttando il teorema di Gauss, calcolare il campo elettrico generato, nello spazio, da due piani infiniti paralleli, uno con densita' di carica superficiale $+\sigma$ e uno $-\sigma$, posti a distanza d. Suggerimento: usare il risultato appena ottenuto e il principio di sovrapposizione.]

Conduttori in equilibrio elettrostatico

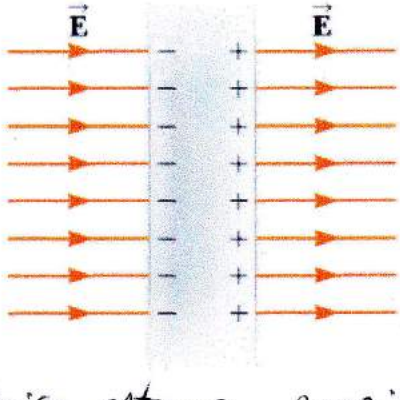
Un conduttore e' in EQUILIBRIO ELETTROSTATICO quando non c'e' moto di cariche nel conduttore (a parte il moto di agitazione termica). Un conduttore isolato in equilibrio elettrostatico e' caratterizzato dalle proprieta' seguenti:

a] il campo elettrico all'interno del conduttore e' nullo (sia per conduttori pieni sia per conduttori cavi);

b] eventuali cariche aggiunte a un conduttore isolato vanno a localizzarsi sulla superficie esterna;

c] il campo elettrico in un punto appena esterno a un conduttore carico e' diretto perpendicolarmente alla superficie del conduttore in quel punto, e il suo modulo e' σ/ε_0, essendo σ la densita' superficiale di carica in quel punto;

d] la densita' superficiale di carica su un conduttore e' maggiore nei punti in cui il raggio di curvatura della superficie e' minore.



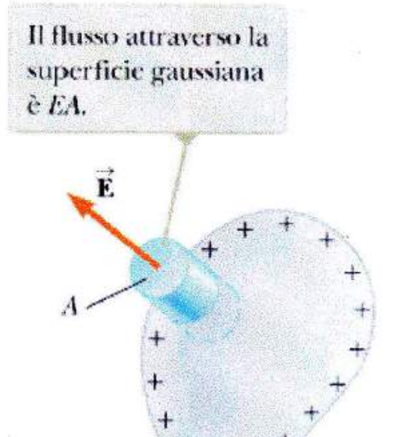
a)

Anzitutto, e' chiaro che, a causa della definizione, il campo elettrico interno a un conduttore in equilibrio elettrostatico deve essere nullo, altrimenti ci sarebbe moto di cariche elettriche libere. Cio' accade, in presenza di un campo elettrico esterno, grazie a una opportuna ridistribuzione di carica elettrica sulla superficie del conduttore, con conseguente generazione di un "contro-campo" elettrico nel conduttore che, sommandosi al campo esterno, rende nullo il campo elettrico complessivo all'interno del conduttore.

b) Consideriamo un conduttore in equilibrio elettrostatico e una superficie interna al conduttore, chiusa e tracciata arbitrariamente vicina alla superficie esterna del conduttore.

Poiché $\vec{E}=0$ all'interno del conduttore in equilibrio elettrostatico, è nullo su tutti i punti di tale superficie, per cui il flusso di $\vec{E}$ attraverso questa superficie è nullo. Per il teorema di Gauss, quindi, la carica netta all'interno di questa superficie (e quindi all'interno del conduttore) è nulla: pertanto, la eventuale carica netta che si trovi sul conduttore deve stare sulla superficie esterna di questo.

c) Consideriamo una superficie cilindrica con basi piccole e parallele alla superficie del conduttore nel punto considerato; una base è interna al conduttore e una è all'esterno. Necessariamente il campo elettrico subito all'esterno del conduttore deve essere perpendicolare alla superficie, poiché se non lo fosse metterebbe in moto cariche libere sulla superficie del conduttore, che così non sarebbe in equilibrio.



Dunque, il flusso attraverso la superficie laterale del cilindretto è nullo ($\vec{E}$ è parallelo a questa superficie); il flusso di $\vec{E}$ è nullo anche attraverso la base del cilindretto interna al conduttore. Dunque, il flusso di $\vec{E}$ attraverso l'intera superficie del cilindretto si riduce al solo flusso attraverso la base esterna al conduttore. Se A è l'area di questa base, per il teorema di Gauss otteniamo:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = E_n A = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$ subito all'esterno del conduttore