Esercizio

Sia $f(x) = \sin(\pi x)$

a) determinare il pol. d'inter. $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0=0, x_1=\frac{1}{2}, x_2=1$ e calcolare $p(t)$ per $t=\frac{1}{4}$ e $t=\frac{1}{3}$

b) determinare il pol. d'inter. $q(x)$ di $f(x)$ sui nodi precedenti a cui aggiungiamo il nodo $x_3=\frac{3}{4}$ e calcolare $q(t)$ per $t=\frac{1}{4}$ e $t=\frac{1}{3}$

Soluzione

a) usiamo la tab. delle diff. divi. per calcolare la forma di Newton di $p(x)$

$$f[x_0]=0 \qquad f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=2$$

$$f[x_1]=1$$

$$f[x_2]=0 \qquad f[x_0,x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_0]}{x_2-x_0}=0 \qquad f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}=-4$$

$$p(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)=0+2x+2x-4x^2=4x-4x^2$$

calcoliamo $p(t)$ per

$t=\frac{1}{4} \rightsquigarrow h_2=f[x_0,x_1,x_2]=-4$

$h_1=f[x_0,x_1]+(t-x_1)h_2=2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)(-4)=3$

$h_0=f[x_0]+(t-x_0)h_1=0+\frac{1}{4}3=3/4=0{,}75$

$t=\frac{1}{3} \rightsquigarrow h_2=f[x_0,x_1,x_2]=-4$

$h_1=f[x_0,x_1]+(t-x_1)h_2=2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)(-4)=2{,}6666666$

$h_0=f[x_0]+(t-x_0)h_1=0+\frac{1}{3}2{,}666666=1{,}3333333$

b) aggiungiamo $x_3=\frac{3}{4}$ a $p(x)$

$$f[x_3]=0{,}70710678$$

$$f[x_0,x_3]=\frac{f[x_3]-f[x_0]}{3/4-0}=0{,}9428090416$$

$$f[x_0,x_1,x_3]=\frac{f[x_0,x_3]-f[x_0,x_1]}{x_3-x_1}=-4{,}2287638336$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_0,x_1,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_2}=0{,}9150553344$$

$$q(x) = p(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_2)(x - x_1)(x - x_0) =$$

$$4x - 4x^2 + 0{,}9150553344\,(x-1)\left(x - \tfrac{1}{2}\right)x =$$

$$= 0{,}9150553344\,x^3 + -5{,}3725830016\,x^2 + 4{,}4575276672\,x$$