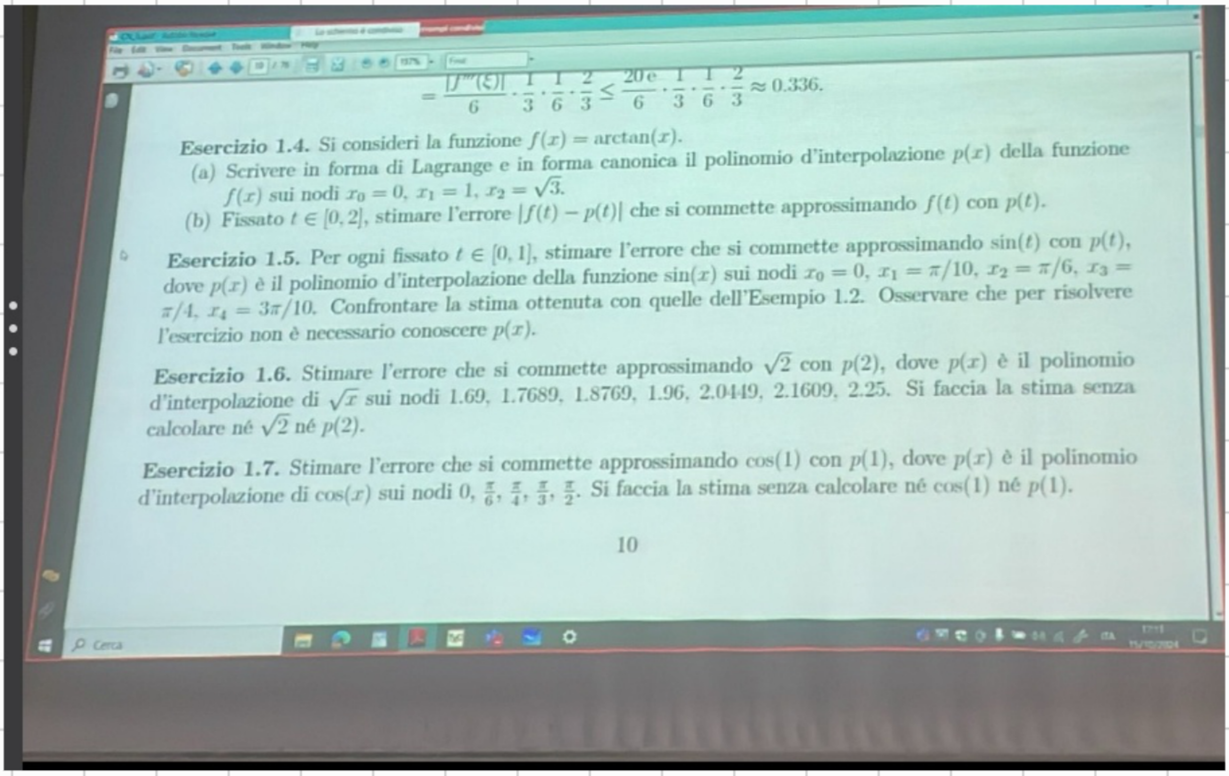
esercizi



$$= \frac{|f'''(\xi)|}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \leq \frac{20\,e}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \approx 0.336.$$

Esercizio 1.4. Si consideri la funzione $f(x) = \arctan(x)$.
(a) Scrivere in forma di Lagrange e in forma canonica il polinomio d'interpolazione $p(x)$ della funzione $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{3}$.
(b) Fissato $t \in [0, 2]$, stimare l'errore $|f(t) - p(t)|$ che si commette approssimando $f(t)$ con $p(t)$.

Esercizio 1.5. Per ogni fissato $t \in [0, 1]$, stimare l'errore che si commette approssimando $\sin(t)$ con $p(t)$, dove $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione della funzione $\sin(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/10$, $x_2 = \pi/6$, $x_3 = \pi/4$, $x_4 = 3\pi/10$. Confrontare la stima ottenuta con quelle dell'Esempio 1.2. Osservare che per risolvere l'esercizio non è necessario conoscere $p(x)$.

Esercizio 1.6. Stimare l'errore che si commette approssimando $\sqrt{2}$ con $p(2)$, dove $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione di $\sqrt{x}$ sui nodi 1.69, 1.7689, 1.8769, 1.96, 2.0449, 2.1609, 2.25. Si faccia la stima senza calcolare né $\sqrt{2}$ né $p(2)$.

Esercizio 1.7. Stimare l'errore che si commette approssimando $\cos(1)$ con $p(1)$, dove $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione di $\cos(x)$ sui nodi $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. Si faccia la stima senza calcolare né $\cos(1)$ né $p(1)$.

10

1.4

$f(x) = \arctan(x)$

① forma can. e di Lagrange dei nodi $x_0=0,\ x_1=1,\ x_2=\sqrt{3}$

② fissato $t \in [0,2]$, stimare l'errore $|f(t)-p(t)|$ che si commette approssimando $f(t)$ con $p(t)$

①

$$p(x) = \arctan(x_0) L_0 x + \arctan(x_1) L_1(x) + \arctan(x_2) L_2(x)$$

$$= \arctan(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \arctan(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \arctan(x_2) \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= \arctan(0) \frac{(x-1)(x-\sqrt{3})}{(0-1)(0-\sqrt{3})} + \arctan(1) \frac{(x-0)(x-\sqrt{3})}{(1-0)(1-\sqrt{3})} + \arctan(\sqrt{3}) \frac{(x-0)(x-1)}{(\sqrt{3}-0)(\sqrt{3}-1)}$$

$$= 0 + \frac{\pi}{4} \frac{x(x-\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}} + \frac{\pi}{3} \frac{x(x-1)}{3-\sqrt{3}} = \left(\frac{\pi}{4-4\sqrt{3}} + \frac{\pi}{9-3\sqrt{3}}\right) x^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}\pi}{4-4\sqrt{3}} - \frac{\pi}{9-3\sqrt{3}}\right) x = \underline{-0{,}246975\, x^2 + 1{,}03237\, x}$$

2) applichiamo il Teo. con $f(x) = \arctan(x)$, $[a,b] = [0,2]$, $n=3$

$$|f(x) - p x| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} \, x(x-1)(x-\sqrt{3}) \right| \quad \text{con } \xi \in (0,2)$$

$$|f'''(\xi)| = \left| \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \right| \leq 2$$

$$|t||t-1||t-\sqrt{3}| \leq 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}$$

$$|f(x) - p(x)| = \frac{2}{6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \simeq 1{,}154700538$$

Calcolo più preciso

$$y(y-1)(y-\sqrt{3}) \Rightarrow y^3 - (\sqrt{3}+1)y^2 + \sqrt{3}y \Rightarrow \omega'(y) = 3y^2 - 2(\sqrt{3}+1)y + \sqrt{3} \Rightarrow 3y^2 - (2\sqrt{3}+2)y + \sqrt{3} = 0$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \qquad y_2 = \frac{\sqrt{3}+3}{2}$$

$$|f(x) - p(x)| = \frac{2}{6} + \max_{y \in [0,2]} \left| \omega(0), \omega(2), \omega\left(\frac{\sqrt{3}-1}{3}\right), \omega\left(\frac{\sqrt{3}+1}{3}\right) \right|$$

1.5

Esercizio 1.5. Per ogni fissato $t \in [0,1]$, stimare l'errore che si commette approssimando $\sin(t)$ con $p(t)$, dove $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione della funzione $\sin(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/10$, $x_2 = \pi/6$, $x_3 = \pi/4$, $x_4 = 3\pi/10$. Confrontare la stima ottenuta con quelle dell'Esempio 1.2. Osservare che per risolvere l'esercizio non è necessario conoscere $p(x)$.

$$|f(t) - p(t)| = \left| \frac{f^{V}(\xi)}{(n+1)!} \, x\left(x-\frac{\pi}{10}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{3}{10}\pi\right) \right|$$

$$f^{V}(\xi) = \cos(x) \leq 1$$

$$|x|\left|x-\frac{\pi}{10}\right|\left|x-\frac{\pi}{6}\right|\left|x-\frac{\pi}{4}\right|\left|x-\frac{3}{10}\pi\right| = 1 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \frac{\pi}{\cancel{6}\,2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\cancel{3}}{10}\pi = \frac{\pi^4}{800}$$

$$|f(t) - p(t)| = \frac{1}{5!} \cdot \frac{\pi^4}{800} = 0{,}001014678$$

1.6)

Esercizio 1.6. Stimare l'errore che si commette approssimando $\sqrt{2}$ con $p(2)$, dove $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione di $\sqrt{x}$ sui nodi 1.69, 1.7689, 1.8769, 1.96, 2.0449, 2.1609, 2.25. Si faccia la stima senza calcolare né $\sqrt{2}$ né $p(2)$.