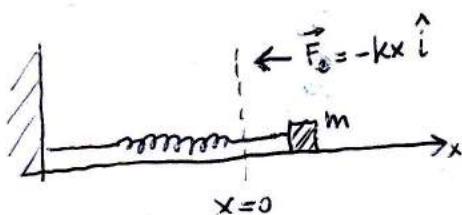


MOTO OSCILLATORIO E ONDE

Moto di un punto materiale sotto l'azione di una forza elastica

Abbiamo già visto l'effetto di una molla ellungante o compresa su un punto materiale in contatto con un suo estremo;



le molle esercite sul punto materiale una forza di richiamo, espressa dalla legge di Hooke.

Se introduciamo un asse cartesiano x parallelo all'asse delle molle e consideriamo allungamenti o compressioni delle molle lungo tale asse (pensando $x=0$ nella posizione in cui la molla è a riposo), la forza elastica delle molle sul punto materiale è asse collegato e $\vec{F}_e = -kx \hat{i}$ (vedi, ad esempio, lo schema qui sopra).

Se la risultante delle forze agenti sul punto materiale è la forza esercitata dalle molle, come ad esempio avviene nel caso rappresentato nello schema qui sopra se la superficie orizzontale è liscia (le altre due forze agenti sul punto materiale, che sono la forza peso $m\vec{g}$ e la reazione vincolare della superficie orizzontale, si bilanciano esattamente, per cui risulta $\vec{F}_{ris} = \vec{F}_e$), possiamo applicare la seconda legge delle dinamiche al punto materiale di massa m , e ottieniamo (tenuto conto che il moto si svolge lungo l'asse x):

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t)$$

①

Dunque ottieniamo $a_x(t) = -\frac{k}{m}x(t)$:

$|a_x(t)|$ e' proporzionale a $|x(t)|$, e il segno dell'accelerazione intendersa' opposto al segno dello spostamento del punto materiale rispetto alla posizione di equilibrio $x=0$.

Dato che $a_x(t) = [x(t)]''$, l'equazione che descrive il moto di un punto materiale sotto l'azione delle sole forze elastiche, lungo l'asse delle molle, e':

$$[x(t)]'' + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

Equazione differenziale lineare
del 2^o ordine, omogenea, e coefficienti
costanti

Un'equazione di questo tipo, dove il coefficiente del termine contenente $x(t)$ e' positivo (come in questo caso, in cui il coefficiente e' $\frac{k}{m} > 0$), descrive un **MOTO ARMONICO SEMPLICE**.

Se poniamo $\frac{k}{m} = \omega^2$ (busto, essendo $\frac{k}{m} > 0$), l'equazione

diventa

$$[x(t)]'' + \omega^2 x(t) = 0$$

generale dell'equazione del moto armonico semplice.

La soluzione piu' generale di queste equazioni si puo'
scrivere nelle forme seguenti:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

come si puo'

verificare sostituendo $x(t)$ nell'equazione.

La costante ω ($= \sqrt{\frac{k}{m}}$ nel caso specifico in cui le forze agenti sono quelle elastiche) è detta PULSAZIONE o FREQUENZA ANGOLARE, e si misura in rad/s; è un parametro dipendente dalle caratteristiche intrinseche del sistema (corpo e molle nel caso specifico esaminato).

La costante A è detta AMPIZZA (ma talvolta anche semiampiezza) del moto, ed è il valore massimo di $|x(t)|$ durante il moto.

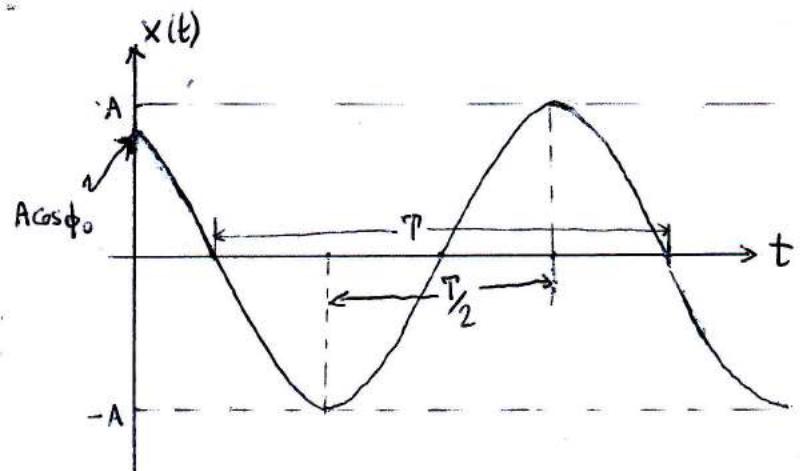
La costante ϕ_0 è detta COSTANTE DI FASE o FASE INIZIALE, mentre la quantità $\phi(t) = \omega t + \phi_0$ è detta FASE DEL MOTO, ed è l'argomento della funzione coseno nella soluzione $x(t)$ dell'equazione del moto armonico semplice.

La funzione $x(t)$ è periodica; calcoliamo l'espressione del suo periodo T . Dovendo risultare: $\phi(t+T) - \phi(t) = 2\pi$, per definizione del periodo T , in modo che risulti $\cos(\phi(t+T)) = \cos(\phi(t))$.

$$\text{Allora: } [\omega(t+T) + \phi_0] - (\omega t + \phi_0) = \omega t + \omega T + \phi_0 - \omega t - \phi_0 = \omega T = 2\pi, \text{ da cui ottieniamo}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Rappresentiamo qualitativamente l'andamento della funzione $x(t)$ in funzione del tempo.



[Il periodo quindi rappresenta l'intervalle di tempo necessario affinché il punto materiale compie un'oscillazione completa, detta anche ciclo.]

Si definisce FREQUENZA del moto armonico semplice le quantità:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} ; \text{ in misure in } s^{-1} = Hz$$

[f indice il NUMERO DI CICLI AL SECONDO del moto armonico semplice.]

Nel caso specifico del moto armonico semplice sotto l'azione di una forza elastica risulta:

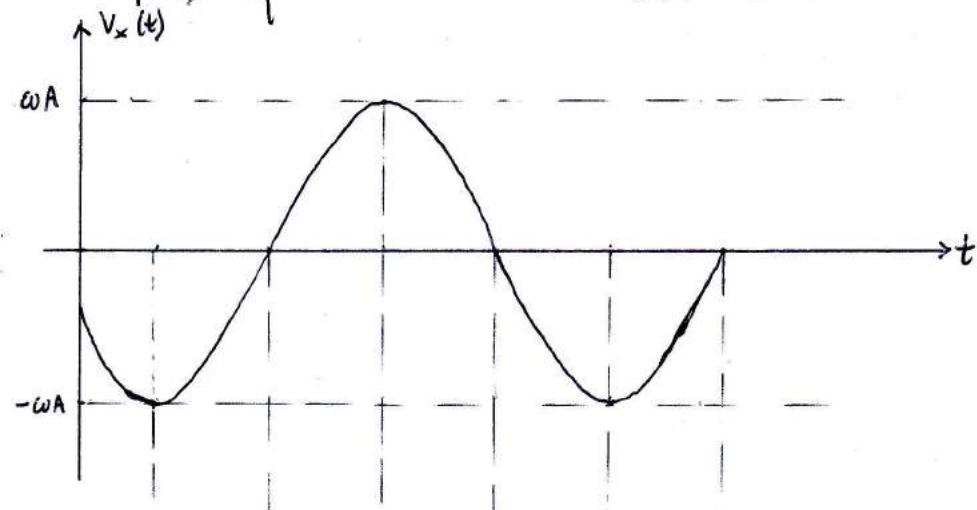
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} ; \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Le velocità istantanee e l'accelerazione istantanea nel moto armonico semplice si ricavano immediatamente a partire dalla legge oraria per $x(t)$:

$$v_x(t) = [x(t)]' = [A \cos(\omega t + \phi_0)]' = -\omega A \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$a_x(t) = [v_x(t)]' = [x(t)]'' = -\omega^2 x(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi_0)$$

Grafiici qualitativi di $v_x(t)$ e di $a_x(t)$



$$\text{Perché } \sin(\omega t + \phi_0) =$$

$$= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\omega t + \phi_0)\right] =$$

$$= \cos\left[\omega t + \phi_0 - \frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= -\cos\left[\omega t + \phi_0 + \frac{\pi}{2}\right],$$

per cui risulta

$$v_x(t) = \omega A \cos\left[\omega t + \phi_0 + \frac{\pi}{2}\right]$$

Dunque, le fasi delle velocità istantanee nel moto armonico semplice

differiscono di $\frac{\pi}{2}$ radienti delle fasi delle posizioni.

A seguire, poiché $a_x(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi_0) = \omega^2 A \cos(\omega t + \phi_0 + \pi)$, le fasi dell'accelerazione istantanea differiscono di π radienti delle fasi delle posizioni. Casi notevoli:

$$x = \pm A \Rightarrow v_x = 0, \quad a_x = \mp \omega^2 A$$

$$v_x = \pm \omega A \Rightarrow x = 0, \quad a_x = 0$$

In generale, i valori delle costanti A e ϕ_0 nelle formule di $x(t)$ si determinano se noto noti i valori $x_0 = x(t=0)$ e $v_{x_0} = v_x(t=0)$, detti condizioni iniziali del moto.

$$\text{Infatti: } x(t=0) = A \cos \phi_0 = x_0$$

$$v_x(t=0) = -\omega A \sin \phi_0 = v_{x_0}, \quad \text{parte del sistema}$$

$$\begin{cases} A \cos \phi_0 = x_0 \\ -\omega A \sin \phi_0 = v_{x_0} \end{cases}, \quad \text{da cui ottieniamo inizialmente (dividendo)} \\ \text{le due equazioni: membro a membro:}$$

$$\tan \phi_0 = -\frac{v_{x_0}}{\omega x_0}$$

Essendo poi

$$\begin{cases} A \cos \phi_0 = x_0 \\ A \sin \phi_0 = -\frac{v_{x_0}}{\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^2 \cos^2 \phi_0 = x_0^2 \\ A^2 \sin^2 \phi_0 = \left(\frac{v_{x_0}}{\omega}\right)^2 \end{cases}$$

Riunendo le ultime due equazioni: membro a membro ottieniamo:

$$A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_{x_0}}{\omega}\right)^2 \Rightarrow |A| = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{x_0}}{\omega}\right)^2}$$

Finito il segno di A , risultate determinate univocamente anche le costante di fase ϕ_0 .

Esempio 1

Un blocco avente massa $m = 0,2 \text{ kg}$ e' collegato a una molla di molla trascurabile, avente costante elastica $K = 5 \text{ N/m}$, ed e' libero di oscillare su un piano orizzontale senza attrito.

Il blocco parte da fermo dalla posizione $x_0 = 0,05 \text{ m}$.

- Trovare il periodo del moto.
- Si determini il modulo della massima velocita' del blocco.
- Qual e' il modulo delle massime accelerazione del blocco?
- Si esprimano le funzioni $x(t)$, $v_x(t)$, $a_x(t)$.

a) Risulta:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,2 \text{ kg}}{5 \text{ N/m}}} = 1,2566 \text{ s}$$

b) Risulta $A = 0,05 \text{ m}$ in quanto l'ampiezza del moto è uguale allo spostamento iniziale delle molle dalla posizione di riposo: l'energia meccanica del corpo è $\frac{1}{2} k x_0^2$ (poiché la velocità iniziale è nulla), per cui (dato che l'energia meccanica in questo caso si conserva) x_0 è la massima distanza e in cui il punto materiale può trovarsi dalla posizione di equilibrio, e quindi $A = x_0$.

Allora:

$$|V_{x_0}|_{\max} = \omega A = x_0 \sqrt{\frac{k}{m}} = (0,05 \text{ m}) \sqrt{\frac{5 \text{ N/m}}{0,2 \text{ kg}}} = 0,25 \text{ m/s}$$

c) Risulta

$$|a_{x(t)}|_{\max} = \omega^2 A = x_0 \frac{k}{m} = (0,05 \text{ m}) \left(\frac{5 \text{ N/m}}{0,2 \text{ kg}} \right) = 1,25 \text{ m/s}^2$$

d) Risulta

$$x_0 = A \cos \phi_0$$

$$v_{x_0} = -\omega A \sin \phi_0$$

Dalla condizione $v_{x_0} = 0$ otteniamo $\sin \phi_0 = 0 \Rightarrow \phi_0 = 0$

Allora

$A = x_0$ (come dedotto già in precedenze per altre vie).

Allora, in definitiva:

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)}$$

$$v_x(t) = -x_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

$$a_x(t) = -\frac{k x_0}{m} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

Esempio 2

Un'auto avente massa $M = 1300 \text{ kg}$ ha il sistema delle sospensioni schematizzabile come quattro molle poste verticalmente. Ciascuna molla ha una costante elastica $k = 2 \times 10^4 \text{ N/m}$. Due persone e i bordi dell'auto hanno una massa complessiva $m = 160 \text{ kg}$. Calcolare le frequenze di oscillazione dell'auto lungo la direzione verticale dopo che ha incontrato una buca nelle strade.



Le quattro molle, nelle ipotesi del problema, agiscono sul sistema auto-persone in parallelo, cioè agiscono sommando i loro effetti, comprimendosi o allungandosi tutte dello stesso treno. La forza complessiva agente sul sistema auto-persone è allora, lungo l'asse verticale (che indichiamo con y):

$$F_{\text{TOT},y} = -4ky - (M+m)g \quad (\text{agisce ovviamente anche la forza peso})$$

L'equazione del moto del sistema lungo l'asse verticale è:

$$(M+m)[y(t)]'' = -4ky(t) - (M+m)g, \text{ cioè:}$$

$$[y(t)]'' + \left(\frac{4k}{M+m}\right)y(t) = -g; \text{ posto } \omega = \sqrt{\frac{4k}{M+m}},$$

la soluzione generale dell'equazione è:

$$y(t) = -\frac{(M+m)g}{4k} + A \cos(\omega t + \phi_0) \quad (\text{verificare sostituendo } y(t) \text{ nell'equazione})$$

Le frequenze di oscillazione richieste e' quindi:

$$F = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4K}{M+m}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{K}{M+m}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2 \times 10^4 \text{ N/m}}{1300 \text{ kg} + 160 \text{ kg}}} = 1,1781 \text{ Hz}$$

Energie di un oscillatore armonico semplice

Cioe seppiamo che l'energia meccanica di un punto materiale soggetto unicamente alle forze elastiche esercitate da una molla si conserva durante il moto.

Calcoliamo esplicitamente E_m :

$$\begin{aligned} E_m &= K + U_{el} = \frac{1}{2} m [v_x(t)]^2 + \frac{1}{2} k [x(t)]^2 = \\ &= \frac{1}{2} m [-\omega A \sin(\omega t + \phi_0)]^2 + \frac{1}{2} k [A \cos(\omega t + \phi_0)]^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 [\sin(\omega t + \phi_0)]^2 + \frac{1}{2} k A^2 [\cos(\omega t + \phi_0)]^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \frac{k}{m} A^2 [\sin(\omega t + \phi_0)]^2 + \frac{1}{2} k A^2 [\cos(\omega t + \phi_0)]^2 = \\ &= \frac{1}{2} k A^2 \left\{ [\sin(\omega t + \phi_0)]^2 + [\cos(\omega t + \phi_0)]^2 \right\}; \quad \text{e dunque:} \end{aligned}$$

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2$$

L'energia cinetica e l'energia potenziale elastica variano nel tempo (separatamente) secondo le leggi seguenti:

$$K(t) = \frac{1}{2} m [v_x(t)]^2 = \frac{1}{2} k A^2 [\sin(\omega t + \phi_0)]^2 = \frac{1}{2} k A^2 \left[\frac{1 - \cos(2\omega t + 2\phi_0)}{2} \right]$$

$$U_{el}(t) = \frac{1}{2} k A^2 [\cos(\omega t + \phi_0)]^2 = \frac{1}{2} k A^2 \left[\frac{1 + \cos(2\omega t + 2\phi_0)}{2} \right]$$

Ora viene poi che, dalla legge di conservazione dell'energia meccanica, poniamo ricevere le dipendenze del veloce assoluto di $v_x(t)$ del veloce assoluto di $x(t)$:

$$E_m = \frac{1}{2} m |v_x(t)|^2 + \frac{1}{2} k |x(t)|^2 = \frac{1}{2} k A^2, \text{ e quindi}$$

$$\frac{1}{2} m |v_x(t)|^2 = \frac{1}{2} k (A^2 - |x(t)|^2), \text{ da cui riceviamo (dovendo} \\ \text{risultare } \frac{1}{2} m |v_x(t)|^2 \geq 0): A^2 - |x(t)|^2 \geq 0 \Rightarrow |x(t)| \leq A,$$

condizione che avevamo già ottenuto nel capitolo sull'energia potenziale. Risulta quindi:

$$|v_x(t)| = \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - |x(t)|^2)}$$

Pertanto, $|v_x(t)|$ è minima quando $x(t) = 0$, e risulta $v_x(t) = 0$

quando $|x(t)| = A$, cioè nei punti di inversione del moto.

Riceviamo inoltre che molte funzioni $U(x)$, in un intorno di un punto di equilibrio stabile, sono approssimabili (sviluppo in serie di Taylor) con un andamento parabolico convesso come quello di $U_{el}(x)$ ottiene il suo punto di minimo.

Pertanto, in molti casi un punto materiale spostato di poco da una posizione di equilibrio stabile si metterà a oscillare, con ottima approssimazione, seguendo una legge di moto armonico semplice. Questo fatto conferisce un'importanza cruciale al moto armonico.

Esempio 3

Un carrello avente massa $m = 0,5 \text{ kg}$ è attaccato a una molla leggera avente costante elastica $K = 20 \text{ N/m}$, e oscilla su un piano orizzontale liscio.

- Calcolare la massima velocità del carrello se l'ampiezza del moto è $A = 0,03 \text{ m}$.
- Qual è il modulo delle velocità del carrello quando la sua posizione è $x_1 = 0,02 \text{ m}$?
- Calcolare l'energia cinetica e potenziale del sistema quando la posizione del carrello è $x_1 = 0,02 \text{ m}$.

- Poiché $E_m = \frac{1}{2} k A^2$, e quando $x=0$ risulta $E_m = \frac{1}{2} m V_m^2$, dove V_m è il modulo massimo delle velocità che il carrello può avere durante il moto, vale l'uguaglianza

$$\frac{1}{2} m V_m^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow V_m^2 = \frac{k}{m} A^2 \Rightarrow |V_m| = A \sqrt{\frac{k}{m}}, \text{ e quindi}$$

$$|V_m| = (0,03 \text{ m}) \sqrt{\frac{20 \text{ N/m}}{0,5 \text{ kg}}} = 0,1897 \text{ m/s}$$

b) Risulta:

$$|V_x(x=x_1)| = \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x_1^2)} = \sqrt{\frac{20 \text{ N/m}}{0,5 \text{ kg}}} \left((0,03 \text{ m})^2 - (0,02 \text{ m})^2 \right) = 0,1614 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c)

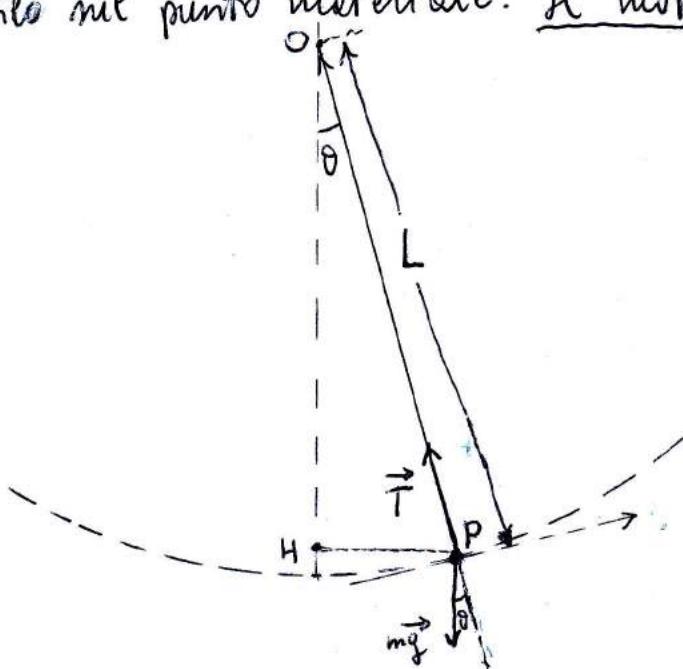
Risulta:

$$K(x=x_1) = \frac{1}{2} m |V_x(x=x_1)|^2 = \frac{1}{2} m \cdot \frac{k}{m} (A^2 - x_1^2) = \frac{1}{2} k (A^2 - x_1^2) = 5 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$U_{el}(x=x_1) = \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} \cdot (20 \frac{\text{N}}{\text{m}}) \cdot (0,02 \text{ m})^2 = 4 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Pendolo semplice

Si dice PENDOLO SEMPLICE un sistema meccanico costituito da un punto materiale avente massa m attaccato all'estremità di un filo di massa trascurabile e lunghezza L , la cui altra estremità è fissa. Questo sistema si muove sotto l'azione delle forze peso del punto materiale e delle forze esercitate dal filo sul punto materiale. Il moto è quindi circolare (L è fissa)



m : massa del punto materiale

\vec{T} : forza esercitata dal filo sul punto materiale

θ : angolo formato del filo con la direzione verticale nell'intento considerato.

Introduciamo, nell'istante considerato durante il moto del punto materiale, un sistema di assi cartesiani ortogonali: un asse tangenziale alla traiettoria circolare nella posizione istantanea del punto materiale, e un asse diretto radialmente (cioè lungo la direzione del filo in quell'istante). Il verso positivo dell'asse tangenziale lo scegliemo in senso antiorario, il verso positivo dell'asse radiale è verso il centro delle traiettoria circolare (estremo finito del filo).

Dunque, le componenti delle forze agenti sul punto materiale sui due assi fissati sono:

$$(m\vec{g})_t = -mg \sin \theta \quad (m\vec{g})_r = -mg \cos \theta$$

$$T_t = 0 \quad T_r = |\vec{T}| = T$$

Concentriamoci sulle componenti tangenziali dei vettori.

Per le seconde leggi della dinamica risulta:

$$ma_t = F_{ris,t}, \text{ cioè in questo caso:}$$

$$m/a_t = -mg \sin \theta, \text{ cioè } a_t = -g \sin \theta$$

Dallo studio delle caratteristiche generali del moto rettetorio abbiamo visto che risulta $a_t = r\dot{\alpha}(t)$; nel nostro caso risulta $r=L$,

per cui: $a_t = L[\dot{\theta}(t)]''$, e quindi:

$$L[\dot{\theta}(t)]'' + g \sin \theta = 0, \text{ e infine}$$

$$\boxed{[\dot{\theta}(t)]'' + \frac{g}{L} \sin [\theta(t)] = 0}$$

(13)

Prima di studiare meglio l'equazione appena ottenuta, osserviamo che, se introduciamo un asse y verticale e fissiamo $y=0$ alla quota del punto fisso O del filo (vedi schema a pag. 12), l'energia potenziale del punto materiale durante il suo moto è:

$$U(\theta) = -mgL \cos\theta \quad (\text{per un dato angolo } \theta \text{ risulta infatti} \\ y = -L \cos\theta)$$

Ma $V(\theta)$ risulta minima per $\theta=0$ ($V_{\min} = V(\theta=0) = -mgL$), per cui il sistema ha una posizione di equilibrio stabile per cui il punto materiale si trova sulle verticale del punto O, al di sotto di questo).

Sviluppando in serie di Taylor la funzione $V(\theta)$ intorno del punto $\theta = 0$, otteniamo, fermendoci al 2^o ordine:

$V(\theta) \approx -mgL \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) = -mgL + \frac{1}{2}mgL\theta^2$, che
in funzione della variabile θ ha un andamento parabolico convesso con minimo in $\theta = 0$.

L'equazione del moto in fondo a pag. ⑬ è un'equazione differenziale non lineare nella funzione $\theta(t)$. Se però il moto è confinato in un piccolo intervallo di $\theta(t)$ attorno al punto di equilibrio stabile (APPROXIMAZIONE DI PICCOLE OSCILLAZIONI, tipicamente $|\theta(t)| \lesssim 6^\circ$), allora è possibile utilizzare le formule approssimate $\sin[\theta(t)] \approx \theta(t)$ (con $\theta(t)$ espresso in radienti!) ⑭

In questa approssimazione l'equazione del moto diventa

$$[\theta(t)]'' + \frac{g}{L} \theta(t) = 0, \text{ che ha le forme dell'equazione del moto omogeneo semplice}$$

Posto $\frac{g}{L} = \omega^2$, queste equazioni mostrano che, nell'approssimazione di piccole oscillazioni, il moto angolare di un pendolo semplice è con ottima approssimazione un moto omogeneo semplice, e la soluzione generale dell'equazione è

$$\theta(t) = \theta_{\max} \cos(\omega t + \phi_0), \text{ con}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

e con la condizione $|\theta_{\max}| \lesssim 0,1 \text{ rad}$

Il periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo semplice è quindi

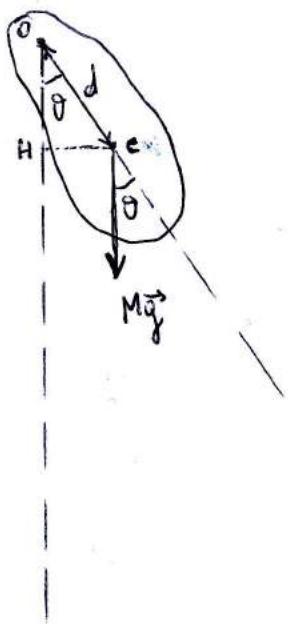
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Allora, la pulsazione e il periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo semplice dipendono solo dalle lunghezza del filo e dall'accelerazione di gravità. Detto che T non dipende dalla massa del punto materiale, tutti i pendoli semplici oscillano (per g costante) con lo stesso periodo delle piccole oscillazioni.

Il pendolo fisico

Si dice PENDOLO FISICO un sistema meccanico costituito da un corpo rigido vincolato a oscillare attorno a un asse orizzontale fermo, non passante per il centro di massa del corpo rigido.

L'ipotesi è che gli effetti siano trascurabili, e che le uniche forze agenti sul sistema siano la forza peso (applicata nel centro di massa) e la reazione vincolare del punto.



Scegliendo come polo per il calcolo dei momenti delle forze il punto O (proiezione dell'asse di rotazione sul piano perpendicolare all'asse stesso e passante per il centro di massa del corpo rigido), sciviamo la seconda equazione cardinale per il sistema considerato, avendo che, rispetto al polo O , l'unico momento non nullo è quello delle forze peso. Indicando con d la distanza tra il polo O e il centro di massa del corpo rigido, risultrà (I_z momento d'inerzia del corpo rigido relativo all'asse considerato):

$$I_z \ddot{\theta}(t) = \tau_{e,tot,z}(t)$$

Utilizzando le convenzioni usuali per i segni nel moto rotazionale, otterremo (braccio di Mg rispetto al polo O : $\overline{CH} = d \sin \theta$):

$$I_z [\theta(t)]'' = -Mg d \sin [\theta(t)], \text{ cioè}$$

$$[\theta(t)]'' + \frac{Mgd}{I_z} \sin [\theta(t)] = 0$$

Ancora, una volta abbiamo ottenuto un'equazione differenziale non lineare per la funzione $\theta(t)$, per cui in generale il moto angolare di un pendolo finito non è armonico semplice.

Ma di nuovo (come nel caso del pendolo semplice), nell'ipotesi di piccole oscillazioni ($|\theta(t)| \lesssim 0,1 \text{ rad}$) possiamo utilizzare l'approssimazione $\sin[\theta(t)] \approx \theta(t)$ (con $\theta(t)$ espresso in radienti), per cui l'equazione diventa

$$[\theta(t)]'' + \frac{Mgd}{I_z} \theta(t) = 0$$

Porto $\frac{Mgd}{I_z} = \omega^2$, vediamo quindi che anche un pendolo finito, nel limite di piccole oscillazioni, ha un moto angolare

che, con ottima approssimazione, è un moto armonico semplice.

Quindi la pulsazione del moto delle piccole oscillazioni di un pendolo finito è

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I_z}}$$

e il suo periodo è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{Mgd}}$$

(piccole oscillazioni!)

La soluzione dell'equazione del moto è, chiaramente:

$$\theta(t) = \theta_{\max} \cos(\omega t + \phi_0), \text{ con } |\theta_{\max}| \lesssim 0,1 \text{ rad}$$

[Importante: se I_z non è noto a priori, da una misura di T
si può ricavare I_z .]

Esempio 4

Un'asta uniforme avente massa M e lunghezza L e' incatenata
a un suo estremo e scilla nel piano verticale.

Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni.



Il momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse perpendicolare all'asta e passante per un suo estremo e' $I_z = \frac{1}{3}ML^2$.

Allora, il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo finico considerato, tenuto conto che la distanza tra il polo O e il centro di massa dell'asta C e' $\overline{OC} = d = \frac{L}{2}$, risulta:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{Mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{\frac{1}{2}MgL}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Si osserva che, a parità di lunghezze di un'asta rigida uniforme e del filo di un pendolo semplice, il periodo di quest'ultimo risulta molto maggiore rispetto a quello del pendolo finico (stiamo parlando, chiaramente, del periodo delle piccole oscillazioni nei due casi). Infatti risulta

$$T_{\text{semplice}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T_{\text{finico}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}} < T_{\text{semplice}}$$

Oscillazioni smorzate

Se, oltre alla forza elastica, sul punto materiale agiscono anche altre forze, come ad esempio forze di attrito e la resistenza dell'aria, si ha dissipazione di energia meccanica e il moto oscillatorio risulta, di conseguenza, smorzato.

Abbiamo già considerato l'effetto di una forza di attrito con modulo proporzionale alla velocità instantanea del corpo.

Vediamo che cosa accade quando queste forze agiscono su un corpo sottoposto anche a una forza elastica lungo una retta.

Per la seconda legge delle dinamiche deve risultare:

$$m \ddot{x}(t) = -kx(t) - bx'(t), \text{ o in forma equivalente:}$$

$$[x(t)]'' + \frac{b}{m} [x(t)]' + \frac{k}{m} x(t) = 0$$

Tra lasciando le procedure risolutive di queste equazioni differenziali, arriviamo direttamente la sua soluzione generale:

a) $0 \leq b < 2\sqrt{mk}$; in questo caso risulta

$$x(t) = A e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \cos(\omega t + \phi_0), \text{ avendo posto}$$

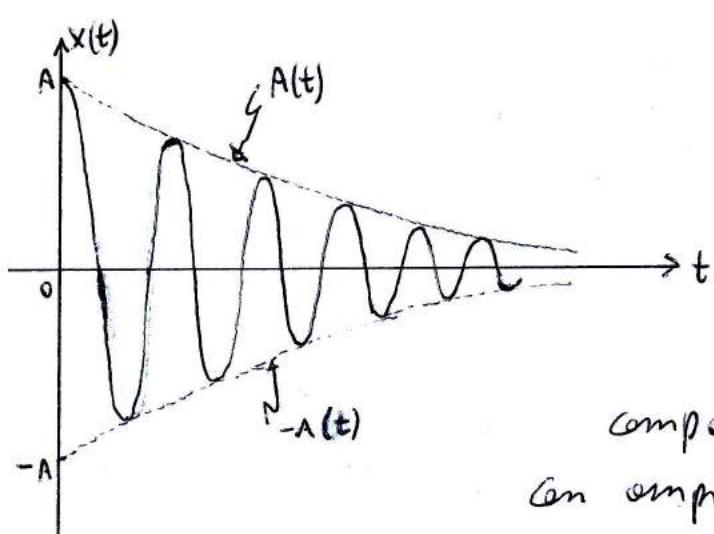
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Sostituendo l'espressione data di $x(t)$ nell'equazione differenziale si può

verificare che è corretta. In assenza di forze dissipative risulta $b=0$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e riotteniamo le leggi $x(t)$ del moto armonico semplice, come ci attendevamo.

Spesso si scrive $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$, dove $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e' la pulsazione propria del sistema, cioe' la pulsazione del sistema in assenza di forze dissipative.

Andamento qualitativo di $x(t)$ in questo caso, con le condizioni iniziali $x(t=0) = A$:



Si puo' scrivere $x(t)$ in queste forme:

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \phi_0),$$

$$\text{essendo } A(t) = A e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t}$$

Scritte così, la funzione si comporta come un coseno che oscilla con ampiezze $A(t)$ variabili nel tempo.

In questo caso $A(t)$ decresce in modo esponenziale con il tempo, come mostrato nello schema qui sopra.

Questo tipo di andamento di $x(t)$ e' detto OSCILLAZIONE SMORZATA. Maggiore e' il valore del coefficiente b , piu' rapido risulta lo smorzamento delle oscillazioni. In particolare quando $0 < b < 2\sqrt{mk}$ il sistema e' detto SOTTO SMORZATO.

b] $b = 2\sqrt{mk}$; sistema con SMORZAMENTO CRITICO.

Il sistema smette di oscillare, e il punto materiale torna rapidamente verso la posizione di equilibrio stabile.

c] $b > 2\sqrt{mk}$; sistema SOVRASMORZATO.

Il sistema non oscilla, e il punto materiale torna lentamente verso la posizione di equilibrio stabile.

Oscillazioni forzate

Per compensare le perdite di energia meccanica dovute all'azione di forze dissipative, si può applicare una forza aggiuntiva al sistema tale da compiere lavoro positivo.

Consideriamo nuovamente l'oscillatore smorzato studiato in precedenze, e applichiamo una forza esterna che varia periodicamente nel tempo. Un sistema del genere è chiamato OSCILLATORE FORZATO.

Applichiamo la forza lungo l'asse x ; lungo questo asse agiscono già le forze elastiche e le forze di smorzamento.

Se la forza aggiuntiva è $F_x(t) = F_0 \sin(\omega t)$, dove ω è la pulsazione con cui varia nel tempo la forza periodica, da non confondere con la pulsazione propria dell'oscillatore $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, l'equazione che risulta dalla seconda legge delle dinamiche per il punto materiale è:

$$m \ddot{x}(t) = -kx(t) - bx'(t) + F_0 \sin(\omega t), \text{ cioè:}$$

$$[x(t)]'' + \frac{b}{m} [x(t)]' + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

Ricavare la soluzione generale di queste equazioni differenziali è un'operazione lunga, per cui ci limitiamo a dire che c'è la somma di un termine che tende a smorzarsi esponenzialmente al passare del tempo, e di un termine che oscilla con la stessa pulsazione della forza $F_x(t)$.

Pertanto, dopo un tempo sufficientemente lungo, e' solo questo ultimo termine che risulta significativo per la soluzione $x(t)$ dell'equazione. Per le precisioni, risulta

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi_0), \text{ e inoltre risulta}$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\frac{b\omega}{m})^2}}, \quad \tan \phi_0 = \frac{b\omega/m}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

con $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (pulsazione propria dell'oscillatore non smorzato).

Studio di $x(t)$ al variare della pulsazione di $F_x(t)$:

1) $\omega \ll \omega_0$: risulta $A \approx \frac{F_0}{k}, \phi_0 \approx 0$

$x(t) \approx \frac{F_0}{k} \sin(\omega t) \Rightarrow x(t)$ oscilla in fase con $F_x(t)$

2) $\omega = \omega_0$: $A = \frac{F_0}{b\omega_0}, \phi_0 = \frac{\pi}{2}$

$x(t) = \frac{F_0}{b\omega_0} \cos(\omega t) \Rightarrow x(t)$ oscilla con fase che differisce di $\frac{\pi}{2}$ dalla fase di $F_x(t)$ (in "quadratura")

Quando b e' piccolo, l'ampiezza delle oscillazioni di $x(t)$ diventa particolarmente grande: questo fenomeno e' chiamato RISONANZA, e la pulsazione naturale ω_0 e' detta PULSAZIONE DI RISONANZA del sistema.

$$3) \omega \gg \omega_0 : A \approx \frac{F_0}{m\omega^2}, \quad \phi_0 \approx \pi$$

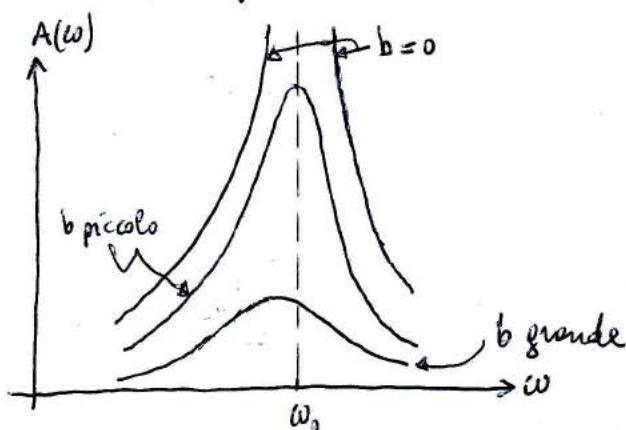
$x(t) \approx -\frac{F_0}{m\omega^2} \sin(\omega t) \Rightarrow x(t)$ oscilla con differenza di fase di π (in opposizione di fase) rispetto a $F_x(t)$

Il calcolo esatto dice che la funzione $A(\omega)$ ha un massimo per $\omega = \omega_M = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{m}\right)^2} < \omega_0$, massimo che quindi esiste solo se $\omega_0 > \frac{b}{\sqrt{2}m}$ (smorzamento debole, quindi), e il valore massimo di $A(\omega)$ e'

$$A(\omega_M) = \frac{F_0/b}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}}, \quad \text{che per } b \ll 2m\omega_0$$

diventa $A(\omega_M) \approx \frac{F_0}{b\omega_0}$, che e' la condizione di risonanza studiata in precedenza.

Andamento qualitativo di $A(\omega)$:



Il fenomeno delle risonanze si trova in molti sistemi finiti, ad esempio circuiti elettrici, corde vibranti, e strutture meccaniche (ponti, edifici).

Introduzione al moto ondulatorio

Se lanciamo un seno in una pozza d'acque osserveremo increspature che si allargano su fronti circolari centrati nel punto in cui il seno è caduto nell'acqua; una foglia galleggiante nella superficie dell'acqua dello stagno nelle zone in cui si stanno propagando le increspature, tuttavia, si muove su e giù (e un po' anche avanti e indietro) attorno alla sua posizione originaria, senza spostarsi rispetto alla serpente delle increspature. Dunque, ciò che si osserva in sintesi è che la perturbazione dell'acqua percorre un lungo tratto, ma ogni piccolo elemento di acqua si limita a oscillare localmente attorno alla posizione originaria. Dunque, anticipiamo che il moto ondulatorio produce una trasmissione di energia, ma non una trasmissione di materia. Più formalmente, il moto ondulatorio consiste nel trasferimento di una perturbazione attraverso lo spazio, senza trasferimento di materia.

Cominciamo a studiare le Onde Meccaniche. I requisiti richiesti da questo tipo di onde sono i seguenti:

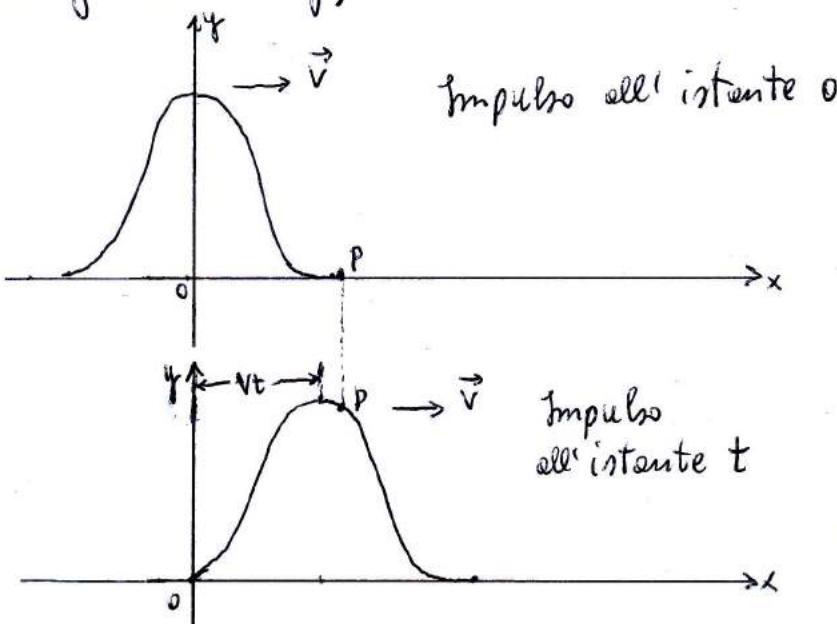
- a] una serpente di una perturbazione;
- b] un mezzo che risente delle perturbazioni;
- c] un meccanismo che permette agli elementi del mezzo di interagire tra loro: ogni elemento, in questo modo potrà "trasferire" la perturbazione a un elemento adiacente.

Se imprimiamo un piccolo movimento rapido trasversale alle estremità libere di una corde fissa all'altro estremo e messa in tensione, si osserva un "impulso" che si propaga lungo la corda con una data velocità. Il "mezzo" è la corda.

Quando l'impulso così generato raggiunge un elemento delle corde, questo si muove perpendicolarmente alla direzione di propagazione dell'impulso. Nessun elemento delle corde si sposta lungo le corde! Per le caratteristiche appena descritte, un'onda di questo tipo è chiamata ONDA TRASVERSALE.

Invece, nelle Onde LONGITUDINALI gli elementi del mezzo si spostano (sempre restando attorno alla loro posizione originaria) parallelamente alla direzione di propagazione delle perturbazioni. Un esempio di questo tipo sono le onde sonore che si propagano in aria. Un altro esempio e' l'impulso che si trasmette lungo una molla essendoché queste viene rapidamente compresa al suo estremo libero. Cerchiamo di formalizzare meglio quanto e' stato minore descritto qualitativamente.

Consideriamo un impulso che si sta muovendo lungo una corda con velocità v costante; la propagazione avviene lungo l'asse x , mentre gli elementi di corda interessati delle perturbazioni si muovono in direzione perpendicolare all'asse x (quindi lungo l'asse y).



All'intente di formare
dell'impulso può essere
descritto così:

$$y(x, \circ) = f(x)$$

posizione *tempo*

Se l'impulso si propaga verso
destra con velocità v , e se
le forme dell'impulso non cambiano,
all'istante t possiamo scrivere:

$$y(x,t) = y(x-vt, 0) = f(x-vt)$$

Dunque, in generale, per un impulso che si sta propagando nel verso positivo dell'asse x possiamo esprimere la posizione y per tutti gli x e i t misurati da un osservatore che vede l'impulso muoversi verso destra con velocità v :

$$y(x,t) = f(x-vt)$$

Con un ragionamento simile, la posizione y di un elemento delle corde per un impulso che si sta propagando nel verso negativo dell'asse x con velocità $v_x = -v$ è espressa con:

$$y(x,t) = f(x+vt)$$

$y(x,t)$ si chiama FUNZIONE D'ONDA, e dipende dalle due variabili x, t : per x fisso, le coordinate y del punto delle corde che si trova in quella posizione lungo l'asse x viene nel tempo durante il percorso della perturbazione, per poi tornare al valore iniziale; per t fisso, le coordinate y dipende da x , e il grafico di y in funzione di x mostra il profilo delle corde in quell'istante.

Onde in propagazione

L'equazione $y(x,t) = f(x-vt)$ può quindi essere considerata da due punti di vista:

- 1) la funzione d'onda a un dato istante t_1 (detta anche FORMA D'ONDA all'istante t_1) ha lo stesso aspetto delle funzioni d'onda all'istante $t=0$ (forma d'onda a $t=0$) se l'origine dell'asse x viene traslata in avanti di un tratto $\Delta x = vt_1$ (cioè, l'onda si muove con velocità v); (26)

2) La funzione d'onda in una data posizione x , descrive il moto dell'elemento del mezzo che si trova in quella posizione nell'asse x , cioè come varia, ad esempio, le sue coordinate sull'asse y in funzione del tempo.

Esempi notevoli di funzioni d'onda sono quelli che rappresentano Onde Periodiche, e tra queste ha una importanza fondamentale l'ONDA SINUOIDALE.

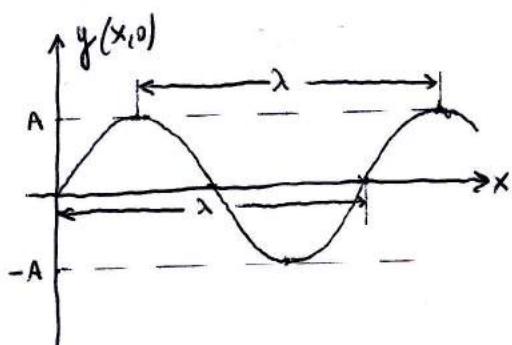
Sulle base di quanto detto sino a questo punto, un'onda sinusoidale dovrà essere rappresentata (nel caso di onde in moto verso destra) dalla funzione

$$y(x, t) = A \sin [k(x - vt)] \quad (\text{k costante che determineremo tra poco})$$

La costante A rappresenta il massimo spostamento di un elemento del mezzo dalla sua posizione di equilibrio allorché l'onda lo "inverte" nel suo peraggio, e richiama AMPIEZZA dell'onda.

Consideriamo un'onda sinusoidale all'intento $t=0$:

$$y(x, 0) = A \sin(kx) ; \text{ il grafico di questa funzione è:}$$

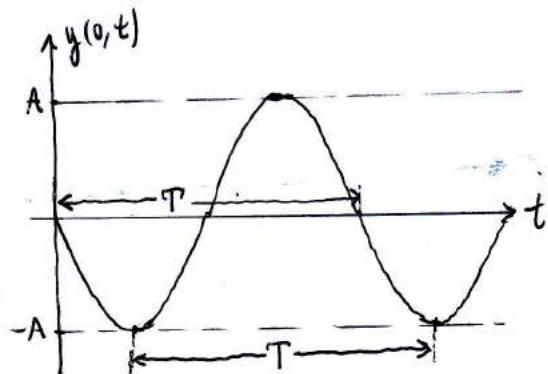


Questa forma d'onda ha creste (punti più alti) e wellamenti (punti più bassi). La distanza fra due creste consecutive o fra due wellamenti consecutivi è detta LUNGHEZZA D'ONDA λ (lambde) dell'onda sinusoidale a tempo fisso. Coincide (come si vede dalla figura qui sopra) con le distanze fra due punti consecutivi dove le stesse pendenze (perché queste non sono 0).

27

Consideriamo ora le stesse onde sinusoidale nella posizione $x=0$:

$$y(0, t) = A \sin(-kvt) = -A \sin(kvt); \text{ il grafico e':}$$



L'intervalle temporali tra due creste consecutive o tra due evelamenti consecutivi e' detto PERIODO T dell'onda sinusoidale; coincide (come si vede dalla figura e finco) con l'intervello temporale tra due punti consecutivi eventi le stesse pendenze (puiché queste non sono 0). In pratica, il periodo di un'onda sinusoidale e' il periodo del moto ormonico dell'elemento del mezzo nelle posizioni considerate ollorché viene "investito" dall'onda sinusoidale.

Come nel moto ormonico, si chiama FREQUENZA dell'onda sinusoidale l'inverso del suo periodo:

$$f = \frac{1}{T}$$

Il modello dell'onda sinusoidale (che e' un'onda puramente ideale) serve per poi costruire modelli per onde reali.

Determiniamo ora la costante k introdotta in precedenze.

Deve risultare, sulla base del grafico e pag. 27:

$A \sin\left(k \frac{\lambda}{2}\right) = 0$, deve $x = \frac{\lambda}{2}$ e' il primo valore successivo a $x=0$ tale che la funzione $\sin(kx)$ si annulla.

Dunque, deve risultare $k \frac{\lambda}{2} = \pi$, cioè $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$

Dunque, la funzione d'onda deve esprimere le forme seguenti:

$$y(x,t) = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] \quad (\text{onda in moto verso destra})$$

D'altronde, sulle basi del grafico a pag. 28, deve risultare anche

$-A \sin \left(kv \frac{T}{2} \right) = 0$, dove $t = \frac{T}{2}$ e' il primo valore
necessario a $t=0$ tale che la funzione $\sin(kvt)$ non annullo.

Dunque, deve risultare $kv \frac{T}{2} = \pi$, cioè $\boxed{k = \frac{2\pi}{vT}}$

Mettendo insieme le due uguaglianze per la costante K ,

otteniamo: $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT}$, cioè

$$\boxed{v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f}$$

Dunque le fasi delle funzioni sono si puo' scrivere con:

$$\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) = \frac{2\pi}{\lambda} \left(x - \frac{\lambda}{T} t \right) = 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right), \text{ da cui}$$

$$\boxed{y(x,t) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right]}$$

Nello studio delle onde si introducono spesso le quantita'
seguenti:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{NUMERO D'ONDA ANGOLARE, o NUMERO D'ONDA})$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (\text{FREQUENZA ANGOLARE o PULSAZIONE})$$

Con potremmo scrivere

$$\boxed{y(x,t) = A \sin(kx - \omega t)} \quad (\text{importante!})$$

Si vede immediatamente che vengono le due relazioni

$$V = \frac{\omega}{K}$$

e $V = \lambda f$ (importante!)

In forme più generale, la funzione d'onda sinusoidale può contenere anche una COSTANTE DI FASE:

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \phi_0)$$

Equazione delle onde lineari

Consideriamo un'onda sinusoidale trasversale, con funzione d'onda

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

Per x fisso, la velocità intitulare dell'elemento del mezzo lungo l'asse y è:

$$v_y = \left. \frac{dy(x,t)}{dt} \right|_{x=\text{costante}} = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t)$$

Risulta quindi:

$$\alpha_y = \left. \frac{dv_y}{dt} \right|_{x=\text{costante}} = \frac{\partial v_y(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t)$$

Gli simboli di derivate parziale (e il suo significato) lo abbiamo già visto quando abbiamo introdotto il gradiente dell'energia potenziale. Ottieniamo che $y(x,t)$, $v_y(x,t)$, $\alpha_y(x,t)$ per x fisso, per l'onda sinusoidale, sono sfasate tra loro esattamente come lo sono le analoghe funzioni nel moto ormonico semplice.

Per t finito, otteniamo le relazioni seguenti:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\text{costante}} = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = k A \cos(kx - \omega t)$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\text{costante}} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 A \sin(kx - \omega t)$$

Dalle due relazioni

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t), \quad \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 A \sin(kx - \omega t)$$

otteniamo dalla prima $A \sin(kx - \omega t) = -\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$,

e sostituendo nella seconda relazione ottieniamo

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 \left[-\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \right] = \frac{1}{(\omega/k)^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

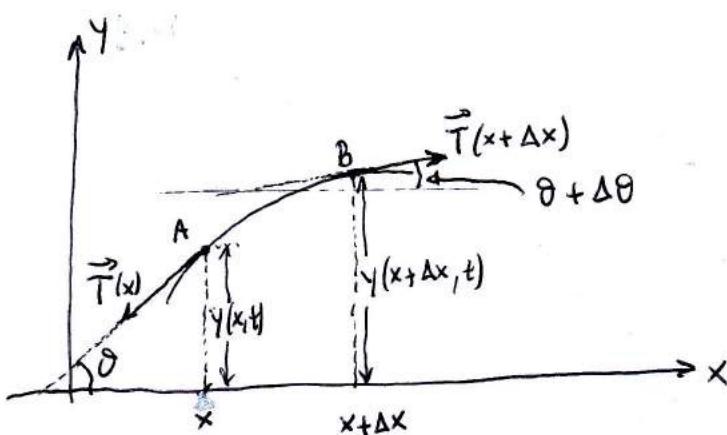
Poiché, come visto in precedenze, risulta $\frac{\omega}{k} = v$, ottieniamo un'equazione nota come EQUAZIONE DELLE Onde LINEARI:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}} \quad (\text{importante!})$$

Questa equazione descrive la propagazione di un'onda lineare in generale, sebbene noi l'abbiamo ricavata nel caso particolare di un'onda sinusoidale. Vale, in particolare, anche per le onde elettromagnetiche. Inoltre, qualunque funzione d'onda del tipo $y(x,t) = f(x \pm vt)$ soddisfa l'equazione delle onde lineari.

Velocità di un'onda trasversale in una corda

Cerchiamo di ottenere l'equazione che descrive la dinamica di una corda tesa lungo la quale si sta propagando un impulso.



Scegliamo un'asse cartesiano x diretto lungo le corde quando queste c'è è riposo in tensione. Indichiamo con μ la densità lineare delle corde, costante.

Il tratto di corda compreso fra le coordinate x e $x + \Delta x$ ha massa $\Delta m = \mu \Delta x$, quindi.

Supponiamo che, all'intante t , questo tratto di corda sia spostato trasversalmente di un tratto $y(x, t)$; l'ipotesi che facciamo è che lo spostamento $y(x, t)$ sia piccolo, e che le differenze $|y(x + \Delta x, t) - y(x, t)|$ siano di conseguenze piccole.

Se indichiamo con $\vec{T}(x)$ la forza (tensione) esercitata sul tratto di fune nel punto A e con $\vec{T}(x + \Delta x)$ la forza esercitata sul tratto di fune nel punto B, e se applichiamo la seconda legge della dinamica al tratto di corda considerato otteniamo, per le componenti y dei vettori (vedi schema), posto $|\vec{T}| = T$:

$$T \sin(\theta + \Delta\theta) - T \sin\theta = \Delta m \cdot a_y$$

$$T[\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin\theta] = \mu \Delta x \cdot \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

Nel caso di piccoli spostamenti trasversali risulta che l'angolo θ e' molto piccolo, per cui possiamo scrivere $\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \theta + \Delta\theta$ e $\sin\theta \approx \theta$ (θ e $\Delta\theta$ misurati in radienti!). Dunque ottieniamo:

$$T[(\theta + \Delta\theta) - \theta] = \mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \Delta x, \text{ cioè}$$

$$T \Delta\theta = \mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \Delta x \quad (1)$$

Ma quando θ e' un angolo piccolo vale l'approssimazione $\theta \approx \operatorname{tg}\theta$ (θ ancora in radienti!). Poiché $\operatorname{tg}\theta$ e' il coefficiente angolare della retta tangente alla curva $y(x,t)$ nel punto di ascissa x ($x+t$ finito!), vale l'approssimazione $\theta \approx \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$, e quindi, poiché si puo' scrivere $\Delta\theta \approx \left(\frac{d\theta}{dx}\right) \cdot \Delta x$ per Δx piccolo, risulta $\Delta\theta \approx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \Delta x$. L'equazione (1) diventa:

$$T \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \Delta x = \mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \Delta x, \text{ cioè} \quad \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{(T/\mu)} \cdot \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

Questa e' l'equazione di un'onda che si sta propagando con velocita' $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, che quindi e' la velocita' cercata.

Riflessione e trasmissione delle onde

La velocità di propagazione di un'onda meccanica lineare è caratteristica del mezzo in cui l'onda si sta propagando. Un'onda lineare è tipicamente caratterizzata da un'ampiezza A piccole rispetto alle lunghezze d'onda λ , nel caso semplice in cui $y(x,t)$ rappresenta uno spostamento dall'equilibrio di un elemento del mezzo.

Nel caso specifico di un'onda che si propaga in una corda in tensione, se T è il modulo della tensione e μ è la densità di massa lineare della corda (mass per unità di lunghezza), si dimostra che la velocità di propagazione di un'onda nelle corde è (vedi pag. 32, 33) :

$$V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

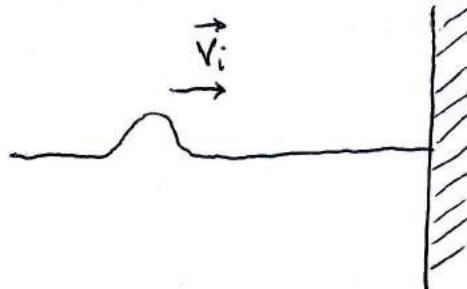
, dipendente quindi da caratteristiche intrinseche del mezzo (le corde in questo caso).

Dunque, se le proprietà del mezzo cambiano in un certo punto durante la propagazione di un'onda, ci aspettiamo che la stessa propagazione dell'onda ne risulti influenzata.

Vediamo tre esempi

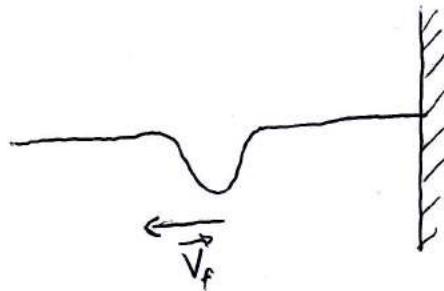
- 1) Corda orizzontale, finita con un suo estremo e una parete, con un impulso che sta propagandosi lungo la corda.

Situazione iniziale:

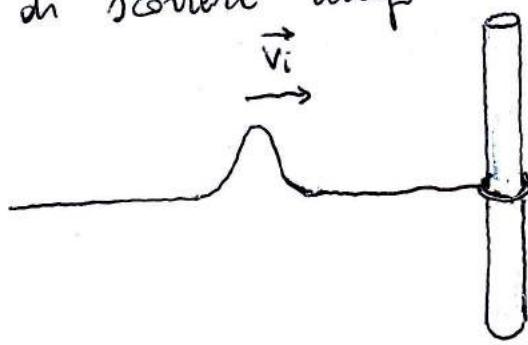


Che cosa accade quando l'impulso raggiunge l'estremità delle corde finite alla parete?

Accade la cosa seguente: le corde, per le forze legge delle dinamica, eserciterà (in questo caso specifico, con l'impulso come quello schematizzato alle pagine 32) una forza diretta verso il basso (uguale in modulo a quelle esercitate dalle corde sulle pareti), per cui, subito dopo, avverremo lungo le corde un impulso riflesso "ribattuto" rispetto all'impulso incidente:

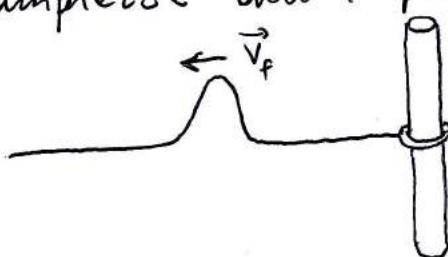


- 2) Corde orizzontali, finite con un suo estremo e un supporto libero di muoversi verticalmente (ad esempio, un snellino libero di scorrere lungo un'asta cilindrica verticale)



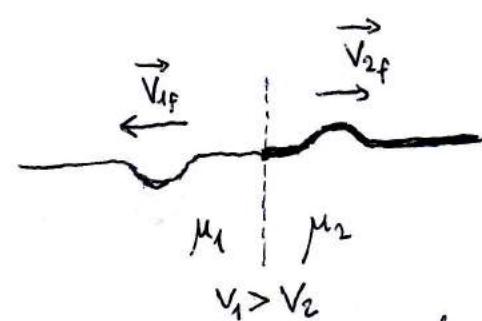
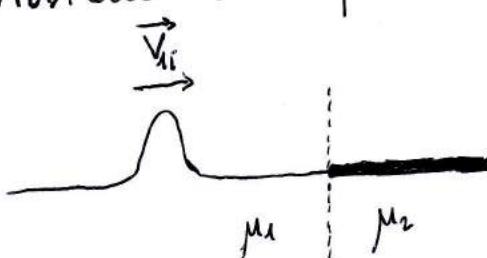
Che cose accade adesso quando l'impulso raggiunge l'estremità delle corde legate all'snellino?

Accade la cosa seguente: quando l'impulso raggiunge l'snellino, esercita su questo una forza diretta verticalmente verso l'alto (nello schema qui sopra), per cui l'snellino, muovendosi in questo modo, genera un impulso riflesso "non ribattuto", con le stesse ampiezze dell'impulso incidente.



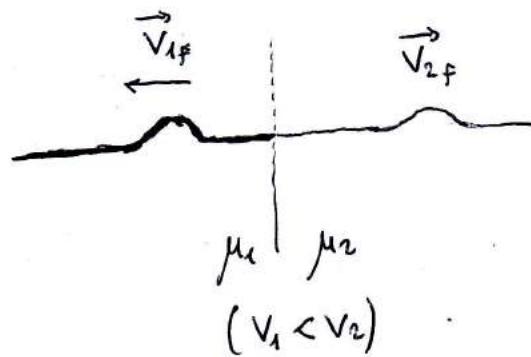
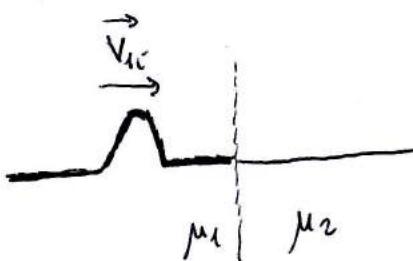
3) Consideriamo due corde aventi densità lineare di massa diverse ($\mu_1 \neq \mu_2$), unite tra loro e formare un'unico tratto di corda. Abbiamo due possibilità:

a) $\mu_1 < \mu_2$



Quando l'impulso raggiunge l'"interfaccia" tra le due regioni delle corde, l'energia dell'impulso incidente in perte viene riflessa e in perte viene TRASMESSA; in particolare, l'impulso riflesso risulta invertito rispetto all'impulso incidente (per lo stesso motivo esposto nell'esempio 1)) e ha un'ampiezza minore di quella dell'impulso incidente. Vedremo che l'energie trasportate da un'onda e' legate all'ampiezza dell'onda, quindi la somma delle energie dell'impulso riflesso e dell'impulso tra sì sono e' uguale all'energia dell'impulso incidente: queste spiege, qualitativamente, perché le ampiezze degli impulsi riflesso e trasmesso sono minori dell'ampiezza dell'impulso incidente.

b) $\mu_1 > \mu_2$



Quando l'impulso raggiunge l'"interfaccia" tra le due regioni delle corde, anche in questo caso l'energia dell'impulso incidente viene in perte riflessa e in perte trasmessa, ma in questo caso (per il motivo esposto nell'esempio 2)) l'impulso riflesso e' non invertito.

Energie e potenze trasmesse da un'onda sinusoidale

Consideriamo un elemento di corde avente lunghezze Δx e masse Δm , e un'onda sinusoidale in propagazione lungo le corde. Se μ è la densità lineare di massa delle corde, e se l'ampiezza dell'onda sinusoidale è piccola rispetto alle sue lunghezze d'onda, risulta $\Delta m \approx \mu \Delta x$, e quindi l'energia cinetica di un elemento di corde che si trova in una posizione generica x è, all'istante t :

$$\Delta K = \frac{1}{2} \Delta m [v_y(x, t)]^2$$

Usando le leggi ottenute a pag. 30, ottieniamo quindi:

$$\Delta K = \frac{1}{2} \cdot (\mu \Delta x) \cdot [-\omega A \cos(kx - \omega t)]^2 = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 [\cos(kx - \omega t)]^2 \Delta x$$

All'istante $t=0$ risulta:

$\Delta K(x, 0) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 [\cos(kx)]^2 \Delta x$, per cui l'energia cinetica totale del tratto di corde compreso nell'intervalle $0 \leq x \leq \lambda$ (cioè, compresso in une lunghezze d'onda) è:

$$K_\lambda = \int_0^\lambda \left\{ \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 [\cos(kx)]^2 \right\} dx$$

$$\text{Calcolo di } \int [\cos(kx)]^2 dx = \int \frac{1 + \cos(2kx)}{2} dx = \frac{1}{2} \int [1 + \cos(2kx)] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ x + \int \cos(2kx) dx \right\} = \frac{1}{2} \left\{ x + \frac{1}{2k} \cdot \int [2k \cos(2kx)] dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ x + \frac{1}{2k} \sin(2kx) \right\} + \text{costante} = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4k} \sin(2kx) + \text{costante} \quad (37)$$

Allora:

$$K_\lambda = \int_0^\lambda \left\{ \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 [\cos(kx)]^2 \right\} dx = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \cdot \int_0^\lambda [\cos(kx)]^2 dx =$$
$$= \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4k} \sin(2kx) \right]_0^\lambda = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \left[\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{4k} \sin(2k\lambda) \right]$$

Poiché $k\lambda = 2\pi$ (vedi pag. 28), risulta $\sin(2k\lambda) = \sin(4\pi) = 0$.

Quindi, in definitiva, risulta:

$$K_\lambda = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 \lambda$$

Ripetendo le stesse procedure per l'energie potenziali, partendo dal moto omogeneo e ricordando che per un punto materiale in moto omogeneo risulta $k = m \omega^2$ ^(*), per cui l'energia potenziale di un tratto di corde avente massa Δm e lunghezza Δx all'intante t è

$$\Delta U = \frac{1}{2} \Delta m \omega^2 [\gamma(x, t)]^2 = \frac{1}{2} \mu \Delta x \omega^2 A^2 [\sin(kx - \omega t)]^2,$$

otteniamo $U_\lambda = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \int_0^\lambda [\sin(kx)]^2 dx = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 \lambda$

Dunque, l'energia totale trasportata da un'onda sinusoidale in un tratto di corde di lunghezza λ è

$$E_\lambda = K_\lambda + U_\lambda = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 \lambda$$

(*) in questa relazione k indica una costante elastica, non il numero d'onde.

Dato che, in un dato punto delle corde, il tempo necessario affinché l'energia contenuta in un treno di corde di lunghezza λ venga trasferita a quell'elemento di corde è uguale al periodo di oscillazione T dell'onda sinusoidale, la POTENZA (cioè, la rapidità di trasferimento dell'energia) di un'onda sinusoidale è:

$$P = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \left(\frac{\lambda}{T} \right) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 V$$

Dunque, la potenza trasmessa da un'onda sinusoidale in una corde è proporzionale al quadrato delle pulsazioni, al quadrato dell'ampiezza e alla velocità di propagazione dell'onda.

Cenni sulle onde acustiche

Le onde acustiche sono uno degli esempi più importanti di onde longitudinali: le particelle del mezzo vibrano (attorno alle loro posizioni di equilibrio) lungo la direzione di propagazione dell'onda. In aria a 20 °C la velocità di propagazione di un'onda sonora è 343 m/s, in acque è circa 1500 m/s, e in blocchi solidi può venire fra 1600 m/s (gomme) e oltre 6400 m/s (alluminio). In un'onda longitudinale in un mezzo vi saranno regioni di COMPRESSIONE e RAREFAZIONE delle densità del mezzo lungo la direzione di propagazione dell'onda.

Nel caso in cui un'onda acustica incida sul timpano di un orecchio, le variazioni periodiche di densità del mezzo in contatto con il timpano (aria, tipicamente) producono variazioni

di premio nel tempo, con conseguenti oscillazioni di questo e generazione di impulsi nei nuovi acustici.

Concludiamo questa rapida descrizione sottolineando che la velocità di propagazione di un'onda acustica in un mezzo dipende esclusivamente delle temperature del mezzo, ad esempio in aria risulta $V(T_c) = (331 \text{ m/s}) \cdot \sqrt{1 + \frac{T_c}{273,15}}$, dove

T_c è la temperatura in $^{\circ}\text{C}$.

Effetto Doppler

E' esperienza comune constatare che le frequenze di un dato suono aumenta, per l'ascoltatore, quando la sorgente del suono si sta avvicinando, mentre diminuisce (sempre per l'ascoltatore) quando la sorgente del suono si sta allontanando.

Questo fenomeno è un caso particolare di EFFETTO DOPPLER (studiatlo da Christian Andreas Doppler nelle prime metà del XIX secolo): quando la SORGENTE di onde e l'OSSERVATORE si muovono l'una rispetto all'altro, l'osservatore rileva una frequenza dell'onda diversa da quella "vero" (cioè, le frequenze rilevate da un secondo osservatore solidale con la sorgente).

Per semplicità consideriamo un'onda sinusoidale.

[La FREQUENZA DI EMISSIONE f è uguale al numero di creste emesse nell'unità di tempo (1 s), mentre la FREQUENZA OSSERVATA f' è uguale al numero di creste che raggiungono l'osservatore nell'unità di tempo (1 s).]

Il numero di creste Δn emesse dalla sorgente nell'intervallo di tempo Δt e' quindi $\Delta n = f \Delta t$.

Due creste successive distano fra loro di un tratto λ , e ciascuna cresta si propaga con velocità $v = \lambda f$.

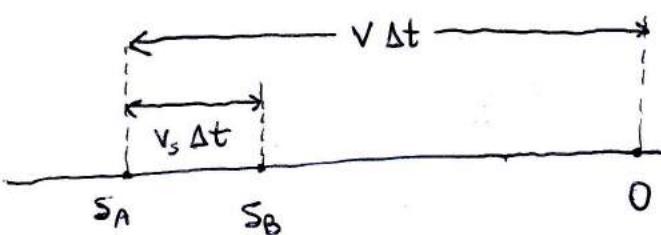
Il numero di creste $\Delta n'$ che raggiungono l'osservatore nell'intervallo di tempo Δt e' pari al numero di creste contenute nel tratto $v \Delta t$ rispetto all'osservatore: $\Delta n' = f' \Delta t$

a) distanze relative tra sorgente e osservatore costante nel tempo. In questo caso risulta chiaramente

$\Delta n' = \Delta n$, cioè $f' \Delta t = f \Delta t$, e quindi $f' = f$: le frequenze dell'onda misurate dall'osservatore coincidono con le frequenze dell'onda viste da un secondo osservatore solidale con la sorgente.

b) Sorgente in moto e osservatore ferme rispetto al mezzo

Supponiamo che la sorgente S si stia avvicinando all'osservatore O con velocità \vec{v}_s diretta lungo la retta che congiunge S con O ; sia v il modulo delle velocità dell'onda rispetto al mezzo.



Poniamo che all'intento $t = t_A$ la sorgente si trovi nella posizione S_A , e sia $t = t_B$ l'intento in cui la cresta emessa dalla

sorgente all'intento $t = t_A$ raggiunge l'osservatore O :

poniamo $\Delta t = t_B - t_A$ e $v_s = |\vec{v}_s|$

Nell'intervallo di tempo Δt la sorgente ha emesso un numero di creste $\Delta n = f \Delta t$

All'istante $t = t_B$ la sorgente si è avvicinata all'osservatore di un tratto di lunghezze $v_s \Delta t$, tuttavia, per cui in questo preciso istante ci sono Δn creste tutte comprese tra la nuova posizione s_B della sorgente e l'osservatore O.

Pertanto, le distanze tra due creste consecutive misurate dall'osservatore, cioè le lunghezze d'onda rispetto all'osservatore, è:

$$\lambda' = \frac{v \Delta t - v_s \Delta t}{\Delta n} = \frac{(v - v_s) \Delta t}{f \Delta t} = \frac{v - v_s}{f}$$

Poiché la velocità con cui l'onda si muove rispetto all'osservatore è v (l'osservatore è fermo rispetto al mezzo!), risulta:

$$\lambda' = \frac{v}{f'}, \text{ cioè:}$$

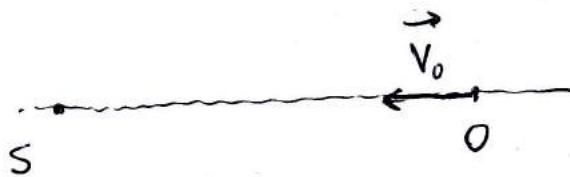
$$\frac{v}{f'} = \frac{v - v_s}{f}, \text{ e in definitiva ottieniamo}$$

$$f' = \left(\frac{v}{v - v_s} \right) f > f \quad \begin{array}{l} \text{per sorgente in} \\ \text{avvicinamento con} \\ \text{velocità } v_s \end{array}$$

Facendo un ragionamento simile, si dimostra che risulta

$$f' = \left(\frac{v}{v + v_s} \right) f < f \quad \begin{array}{l} \text{per sorgente in} \\ \text{allontanamento con} \\ \text{velocità } v_s \end{array}$$

c) Sorgente ferma e osservatore in moto rispetto al mezzo
 La distanza tra due creste consecutive emesse dalla sorgente è λ .
 Se l'osservatore si sta avvicinando alla sorgente con velocità di modulo v_0 rispetto al mezzo, il numero $\Delta n'$ di creste che egli incontra in un certo intervallo di tempo Δt è uguale al numero Δn di creste emesse dalla sorgente nello stesso intervallo di tempo, più il numero di creste contenute nel treno di lunghezze $v_0 \Delta t$ di cui l'osservatore si è spostato in questo intervallo di tempo avvicinandosi alla sorgente.



Risultato perciò:

$$\Delta n' = \Delta n + \frac{v_0 \Delta t}{\lambda}, \text{ cioè}$$

$$f' \Delta t = f \Delta t + f \frac{v_0}{\lambda} \Delta t, \text{ essendo } \frac{1}{\lambda} = \frac{f}{v}$$

$$f' \Delta t = f \left(1 + \frac{v_0}{v}\right) \Delta t, \text{ e infine}$$

$f' = f \left(1 + \frac{v_0}{v}\right)$	per osservatore in avvicinamento alla sorgente con velocità v_0 .
---	---

Con un procedimento simile si dimostra che risultate

$$f' = f \left(1 - \frac{v_o}{v} \right) \quad \text{per osservatore in allontanamento}$$

dalla sorgente con velocità v_o

a) Sorgente e osservatore in moto rispetto al mezzo

Mettendo insieme i risultati ottenuti nei punti b) e c), ottieniamo la legge generale

$$f' = \left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_s} \right) f$$

con le seguenti precisazioni:

- al numeratore il segno + va usato se, nello schema del punto c), l'osservatore sta procedendo verso sinistra;
- al denominatore il segno - va usato se, nello schema del punto b), la sorgente sta procedendo verso destra.

L'effetto Doppler è una caratteristica generale delle onde, e trova applicazioni in diversi ambiti scientifici e tecnologici (osservazioni astronomiche, sistemi radar, diagnostica medica).

Interferenze di onde

Quando due onde lineari si propagano in una stessa regione di spazio, vale il principio di sovrapposizione:

[date due onde in propagazione nello stesso mezzo, la funzione d'onda in un punto qualiasi è uguale alla somma algebrica delle funzioni d'onda delle due onde singole in quel punto.]

Dunque, questo principio ci dice che due onde lineari "non si disturbano" e vicende e possono "attraversarsi" tenendo inalterate dopo l'attraversamento, sebbene ancora tenere conto della loro sovrapposizione durante l'attraversamento.

Le sovrapposizioni di due onde in una stessa regione di spazio si dicono INTERFERENZA: se i due spostamenti sovrapposti producono, nella somma algebrica, uno spostamento maggiore rispetto a quello che sarebbe prodotto nello stesso punto da ciascuna singola onda, si parla di INTERFERENZA COSTRUTTIVA; nel caso contrario, si parla di INTERFERENZA DISTRUTTIVA.

Come esempio analitico consideriamo due onde sinusoidali in propagazione lungo la stessa direzione, con uguale ampiezza, stessa lunghezza d'onda e stessa frequenza:

$$y_1(x,t) = A \sin(kx - \omega t) \quad y_2(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \phi_0),$$

dove ϕ_0 esprime l'eventuale differenza di fase tra le due onde.

La funzione d'onda che risulta dalla sovrapposizione delle due onde sinusoidali è:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A \left[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \phi_0) \right] =$$

$$= 2A \cos\left(\frac{\phi_0}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi_0}{2}\right), \text{ dove abbiamo usato una formula di prostaferi: } \sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

Dunque, la sovrapposizione delle due onde sinusoidali di pertenza ha prodotto una funzione d'onda ancora sinusoidale, con stessa lunghezza d'onda e stessa frequenza di $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$. L'ampiezza dell'onda risultante è $2A \cos\left(\frac{\phi_0}{2}\right)$, e la sua fase iniziale è $\phi_0/2$.

Se $\phi_0 = 0$ risulta $2A \cos\left(\frac{\phi_0}{2}\right) = 2A$, per cui in questo caso particolare l'ampiezza dell'onda risultante è doppia di quelle delle singole onde di pertenza: $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ sono IN FASE e le loro interferenze è costruttive. Più in generale, l'interferenza costruttiva tra le due onde sinusoidali si verifica per $\phi_0 = 2n\pi$, con n intero relativo.

Se $\phi_0 = \pi$ (o, più in generale, $\phi_0 = (2n+1)\pi$, con n intero relativo), allora risulta $2A \cos\left(\frac{\phi_0}{2}\right) = 0$: le creste di $y_1(x,t)$ si sovrappongono agli avvallamenti di $y_2(x,t)$, e viceversa, e l'ampiezza dell'onda risultante è nulla: $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ sono in opposizione di FASE e le loro interferenze è distruttiva.

Se le ampiezze di $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ sono diverse, il calcolo presenta alcune piccole complicazioni in più, e il risultato è che l'onda risultante ha ancora un'ampiezza minima se uguali alle somme delle ampiezze delle due onde singole se queste sono in fase, mentre ha un'ampiezza minima opposta se $|A_1 - A_2|$ se le due onde singole sono in opposizione di fase.

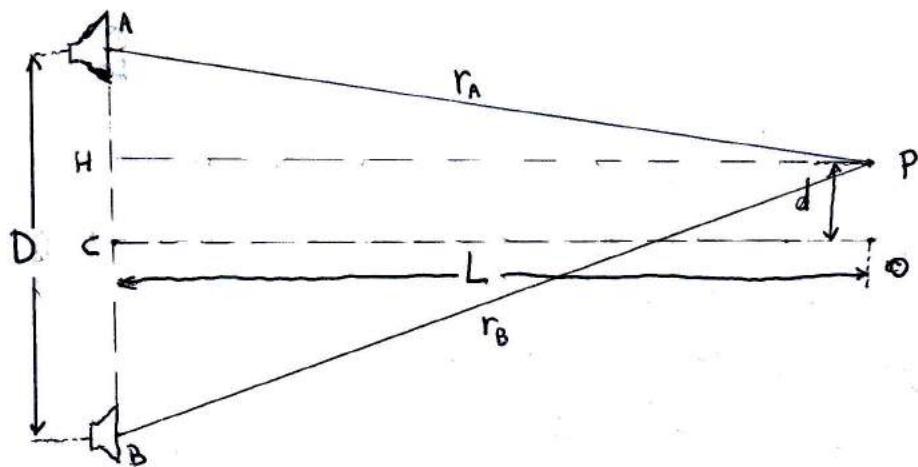
Nel caso di due onde che si sovrappongono in un punto dello spazio che non si trova lungo le rette che passano per le posizioni delle due sorgenti, occorre tenere conto della DIFFERENZA DELLE LUNGHEZZE DI CAMMINO delle due onde, dove con LUNGHEZZA DI CAMMINO si intende la distanza dalla sorgente del punto in cui le due onde si sovrappongono. Indicando con Δr le differenze delle lunghezze di cammino, risulta che:

- se $\Delta r = n\lambda$ (dove n è un intero ≥ 0), si ha interferenza costruttiva tra le due onde, e l'ampiezza dell'onda risultante è minima.
- se $\Delta r = (n + \frac{1}{2})\lambda$ (n intero ≥ 0) si ha interferenza distruttiva tra le due onde, e l'ampiezza dell'onda risultante è massima.

[In questo paragrafo abbiamo considerato le sovrapposizioni di due onde aventi stesse lunghezze d'onda e stessa frequenza.]

Esempio 5

Una coppia di altoparlanti distanti tra loro $D = 3 \text{ m}$ e' alimentata in fase dello stesso oscillatore.



Un'oscuratore e' originariamente nel punto O situato nell'asse del segmento che congiunge i due altoparlanti a una distanza $L = 8 \text{ m}$ dal centro del segmento. L'oscuratore si sposta nel punto P, perpendicolarmente all'asse, di un tratto di lunghezza $d = 0,35 \text{ m}$ prima di raggiungere un punto di minimo dell'intensita' sonora. Qual e' la frequenza dell'oscillatore?

Dalle geometrie del problema ricaviamo le lunghezze di cammino \overline{PA} , \overline{PB} :

$$\overline{PA} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{PH}^2} = \sqrt{\left(\frac{D}{2} - d\right)^2 + L^2}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{\overline{BH}^2 + \overline{PH}^2} = \sqrt{\left(\frac{D}{2} + d\right)^2 + L^2}$$

Le differenze delle lunghezze di cammino e'

$$\Delta r = \overline{PB} - \overline{PA} = \sqrt{\left(\frac{D}{2} + d\right)^2 + L^2} - \sqrt{\left(\frac{D}{2} - d\right)^2 + L^2}$$

Il primo punto per cui non c'è interferenza distruttiva tra le due onde si ha per $\Delta r = \frac{\lambda}{2} = \frac{V}{2f}$,
dove $V = 343 \text{ m/s}$ è la velocità del suono in aria a 20°C .

Dunque vale l'uguaglianza

$$\frac{V}{2f} = \sqrt{\left(\frac{D}{2} + d\right)^2 + L^2} - \sqrt{\left(\frac{D}{2} - d\right)^2 + L^2}, \text{ da cui ottieniamo}$$

$$f = \frac{V}{2 \left[\sqrt{\left(\frac{D}{2} + d\right)^2 + L^2} - \sqrt{\left(\frac{D}{2} - d\right)^2 + L^2} \right]} = 1,3306 \text{ kHz}$$

Onde stazionarie

Consideriamo due onde trasversali sinusoidali aventi stesse ampiezze, stesse lunghezze d'onda e stesse frequenze, che si stanno propagando lungo le direzioni x in versi opposti:

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t), \quad y_2(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$$

Il risultato della sovrapposizione di queste due onde è:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) = A [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)] = (*) \\ &= A \cdot 2 \sin\left(\frac{(kx - \omega t) + (kx + \omega t)}{2}\right) \cos\left(\frac{(kx - \omega t) - (kx + \omega t)}{2}\right) = \\ &= A \cdot 2 \sin(kx) \cos(-\omega t) = 2 A \sin(kx) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Dunque risulta

$$y(x, t) = 2 A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

(*) utilizziamo ancora una formula di prostaferen

Questa funzione non dipende dall'argomento $x-vt$, come dovrebbe invece se si trattasse di un'onda che si sta propagando. La sovrapposizione di due onde di uguali ampiezze, uguali lunghezze d'onda, uguali frequenze, che si propagano in versi opposti ha generato UNA ONDA STAZIONARIA: scrivendo $y(x,t)$ nelle forme $y(x,t) = A(x) \cos(\omega t)$, dove $A(x) = 2A \sin(kx)$,

si vede che l'elemento del mezzo (ad esempio una corda) che si trova nella posizione x oscilla secondo la legge del moto armatico lungo l'asse y con pulsazione ω e ampiezza uguale a $2A \sin(kx)$ (quindi, con ampiezze dipendente dalla posizione lungo l'asse x).

L'ampiezza dell'onda stazionaria è detta del valore massimo di $|A(x)|$, che si ha quando kx è un multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$, e risulta $|A(x)|_{\max} = 2|A|$

Le posizioni di massime ampiezza di un'onda stazionaria sono dette VENTRI, e poiché $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ queste posizioni sono:

$$(x_v)_n = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \quad (\text{multiplo dispari di } \frac{\lambda}{4}, n \in \mathbb{Z})$$

L'ampiezza di un'onda stazionaria è nulla quando risultano $\sin(kx) = 0$, cioè per $kx = m\pi$ (multiplo intero di π , $m \in \mathbb{Z}$)

Le posizioni di ampiezza nulla di un'onda stazionaria sono dette NODI, e risultano

$$(x_n)_n = n\frac{\lambda}{2} \quad (\text{multiplo intero di } \frac{\lambda}{2}, n \in \mathbb{Z})$$

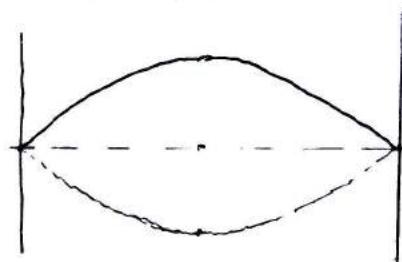
Quando una corda è messa in tensione tra due estremi fermi, è ragionevole pensare (nella base di quanto spiegato in precedenza) che, se un'onda inizia a propagarsi lungo la corda, in breve tempo si producano onde stazionarie e cause delle sovrapposizioni di onde incidenti e riflesse ai due estremi fermi. Le corde degli strumenti musicali generano mono esattamente grazie a questo meccanismo.

Poiché, nella configurazione descritta, gli estremi delle corde sono fermi, questi due punti devono essere nodi per qualunque onda stazionaria che venga prodotta sulla corda, e questa è la condizione AL CONTORNO che ci guida nell'individuazione di tutte le possibili onde stazionarie sulla corda.

L'altra condizione da imporre è che ventri e nodi si alternino a distanze di $\frac{1}{4}$ delle lunghezze d'onda, come visto a pag. 48.

Traçciamo quindi le funzioni $A(x)$ per le prime onde stazionarie sulla corda

a)



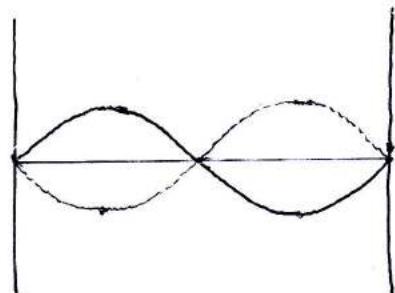
PRIMO MODO NORMALE,

MODO FONDAMENTALE

Due nodi e un ventre

$$\text{Dove risulta} \quad L = \frac{\lambda_1}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 2L$$

b)



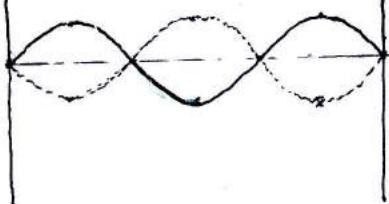
SECONDO MODO NORMALE

Tre nodi e due ventri

Dove risulta

$$L = \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = L$$

c)



TERZO MODO NORMALE

Quattro nodi e tre ventri

$$\text{Dove riuscire } L = \frac{3}{2} \lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{2}{3} L$$

Dunque, iterando il procedimento, troviamo che le lunghezze d'onda dei modi normali (cioè, delle possibili onde stazionarie) di una corda di lunghezza L finite ai due estremi sono gli elementi della successione

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n=1, 2, 3, \dots}$$

A queste lunghezze d'onda corrispondono frequenze ben precise, che si ottengono dalla relazione

$$f_n = \frac{V}{\lambda_n}, \quad \text{dove} \quad V = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (\text{velocità di}$$

propagazione di un'onda in una corda, pag. 32).

Allora, le frequenze dei modi normali di oscillazione di una corda finita ai due estremi sono:

$$\boxed{f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad n = 1, 2, 3, \dots}$$

Dunque, le lunghezze d'onda e le frequenze dei modi normali di oscillazione di una corda finita ai due estremi possono enumerare soltanto valori discreti ben precisi, cioè, dette in altri termini, sono QUANTIZZATE.

In particolare, la frequenza del modo normale n -esimo è multiple intere della FREQUENZA FONDAMENTALE $f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. (52)

I medi normali di oscillazione si chiamano anche ARMONICHE, almeno nel caso delle corde finite ai due estremi.

In generale, quando si pizzica, si sfrega o si percuote una corda di uno strumento musicale le corde si mette a vibrare come sovrapposizione di più armoniche.

Battimenti

L'interferenza tra due onde lungo una corda è un esempio di "interferenze spaziali".

Vediamo adesso che cosa succede nella sovrapposizione di due onde aventi frequenze di poco diverse ("interferenze temporali").

Consideriamo due onde di uguali ampiezze che si sovrappongono in un punto fisso, ad esempio $x = 0$:

$$y_1(0, t) = A \cos(2\pi f_1 t), \quad y_2(0, t) = A \cos(2\pi f_2 t)$$

La loro sovrapposizione è

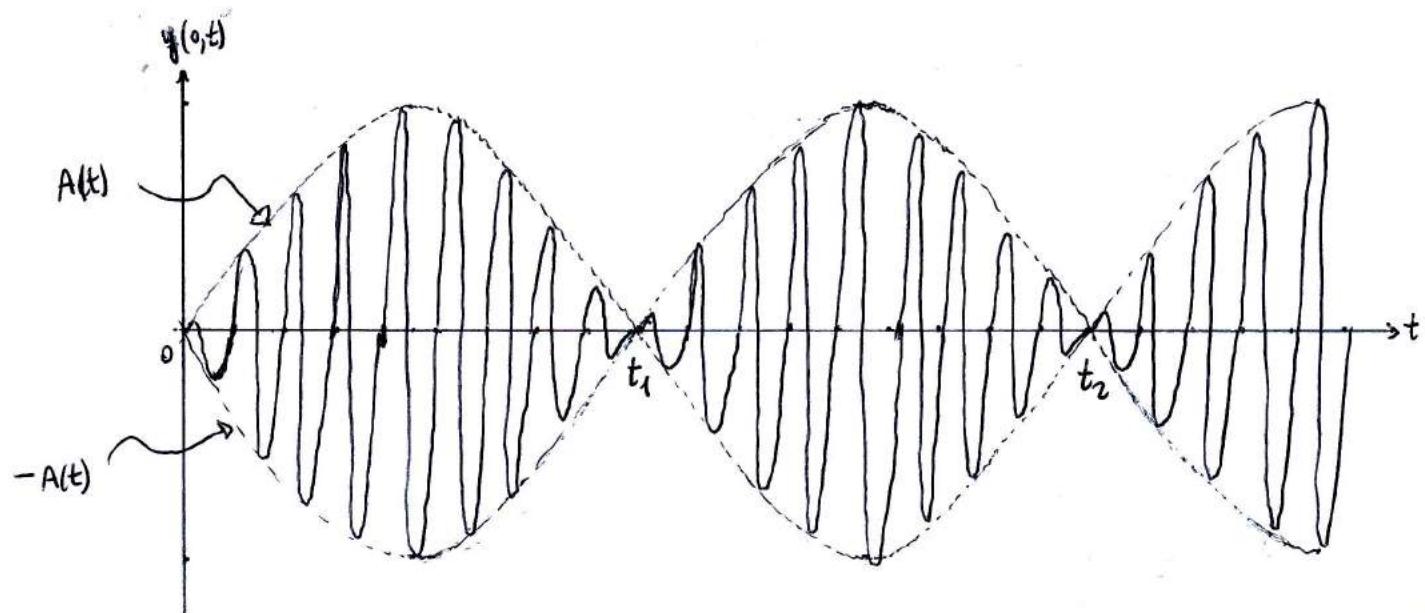
$$y(0, t) = y_1(0, t) + y_2(0, t) = A [\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)] \quad (*)$$

$$= 2A \cos\left[2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right] \cdot \cos\left[2\pi \left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t\right] = A(t) \cos\left[2\pi \left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t\right],$$

$$\text{dove } A(t) = 2A \cos\left[2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right]$$

Disegniamo un andamento qualitativo di $y(0, t)$ quando f_1 e f_2 sono quasi uguali:

(*) vediamo ancora una formula di postferm



L'oscillazione risultante ha una frequenza uguale alla media aritmetica delle frequenze f_1 e f_2 , e (cosa notevolissima) l'ampiezza di oscillazione varia nel tempo in modo sinusoidale, con frequenza pari a $\frac{|f_1-f_2|}{2}$, molto minore di $\frac{f_1+f_2}{2}$.

Come si può vedere, in effetti in ogni periodo di $A(t)$ ci sono due minimi di $|A(t)|$, per cui, detto BATTIMENTO l'intervalle di tempo tra due zeri di $A(t)$ (ad es., tra 0 e t_1 , oppure tra t_1 e t_2 nel grafico di queste pagine), la FREQUENZA DI BATTIMENTO è $f_b = 2 \left(\frac{|f_1-f_2|}{2} \right) = |f_1-f_2|$

Le massime frequenze di battimento percepibile dall'orecchio umano è circa 20 Hz, quando il fenomeno riguarda onde sonore. Il fenomeno dei battimenti è utilizzato, ad esempio, nell'accordatura di uno strumento musicale e corde; quando le corde e' impostate alla giusta tensione, la sovrapposizione del suono delle corde con il suono di riferimento non produce battimenti.

Onde periodiche non sinusoidali nel tempo

Se un'onda non è sinusoidale, ma comunque è periodica, il TEOREMA DI FOURIER afferma che una funzione di questo tipo può sempre essere rappresentata tramite una serie di onde sinusoidali con frequenze multiple intere della FREQUENZA FONDAMENTALE

$$f_1 = \frac{1}{T}, \text{ dove } T \text{ è il periodo dell'onda studiata.}$$

Cioè, in funzione del tempo (per x finito, che poniamo uguale a 0), $y(x, t)$ si può rappresentare tramite una SERIE DI FOURIER:

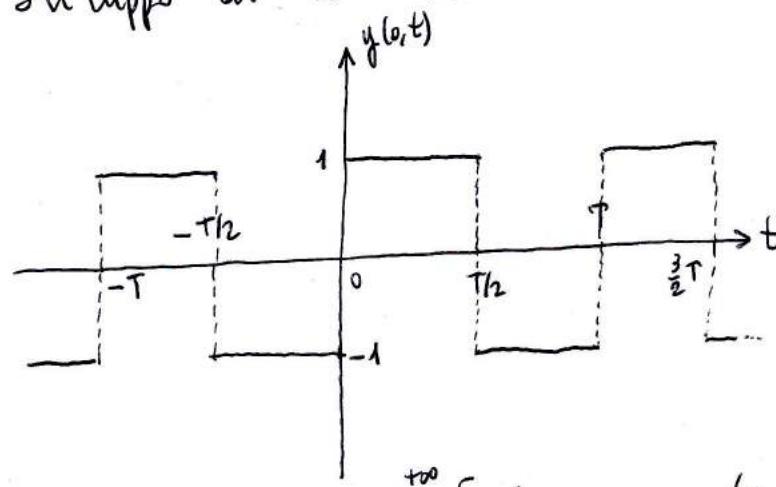
$$y(x, t) = \sum_m [a_m \sin(2\pi f_m t) + b_m \cos(2\pi f_m t)],$$

$$\text{con } f_m = m \cdot \frac{1}{T} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

I coefficienti a_m e b_m rappresentano le ampiezze delle diverse armoniche.

Esempio 6

Sviluppo di un'ONDA QUADRA in serie di Fourier



$$y(x, t) = \begin{cases} -1 & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

e ripetizione periodica

Lo sviluppo in serie di Fourier di queste onde quadre

$$\text{e' } y(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{4}{(2n+1)\pi} \sin \left((2n+1) \frac{2\pi}{T} t \right) \right]$$

Nell'esempio appena visto compaiono solo i termini (e neppure tutti) contenenti la funzione seno, mentre non compaiono i termini contenenti la funzione coseno (cioè, risulta $b_n=0$ per tutti i valori di n , e $a_n=0$ per n pari).

Considerare una somma finita dei primi termini della serie di Fourier di un'onda periodica puo' dare in ogni caso informazioni fondamentali sul contributo delle prime armoniche all'onda considerata: in generale il contenuto energetico di un'onda periodica e' associato alle armoniche di ordine piu' basso, come si puo' intuire, ad esempio, nell'esempio precedente, in cui i coefficienti delle armoniche decrescono al crescere dell'indice n . Sempre nel caso dell'esempio precedente, l'andamento di a_n in funzione di n (o di a_n^2 in funzione di n se a_n e' di segno variabile) mostra il cosiddetto SPECTRO dell'onda periodica, cioè il "peso" relativo delle sue armoniche, e la sua determinazione e' uno strumento fondamentale nell'analisi in frequenze di un segnale periodico.