FORMALIZZAZIONE DEI PROBLEMI

DEF

UN PROBLEMA È DEFINITO DA UNA QUINTUPLA $\langle \mathcal{I}, R, S, \eta, \rho \rangle$ DOVE

- $\mathcal{I}$: L'INSIEME DELLE ISTANZE
- R : L'INSIEME DELLE RISPOSTE AMMISSIBILI
- S : L'INSIEME DELLE POSSIBILI SOLUZIONI PER UNA DETERMINATA ISTANZA

ETA

- η : FUNZIONE CHE DEFINISCE L'INSIEME DELLE SOLUZIONI EFFETTIVE

$$\eta : S(\mathcal{I}) \longrightarrow 2^{S(\mathcal{I})}$$

CARDINALITÀ DELL'INSIEME

RHO

- ρ : FUNZIONE CHE ESTRAPOLA LA RISPOSTA DEL PROBLEMA RELATIVA AD UNA DETERMINATA ISTANZA

$$\rho : \mathcal{I} \times \eta(S(\mathcal{I})) \longrightarrow R$$

ESEMPIO

PROBLEMA BASATO SUI DIVISORI DI $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{I} = \mathbb{N}, \quad S(n) = \{x \in \mathbb{N} : x \leq n\}, \quad \eta(n, S(n)) = \{x \in S(n) : x \text{ È DIVISORE DI } n\},$$

$$\rho : \eta(n, S(n)) \longrightarrow R$$

TIPOLOGIE DI PROBLEMI

1) PROBLEMA DI ENUMERAZIONE

ES

ELENCARE TUTTI I DIVISORI DI n:

$$R = \eta(n, S(n)) \quad \text{E} \quad e(\eta(n, S(n))) = \eta(n, S(n))$$

2) PROBLEMA DI DECISIONE

ES

DECIDERE SE n E' PRIMO

$$R = \{\text{VERO}, \text{FALSO}\} \quad \text{E} \quad e(\eta(n, S(n))) = \eta(n, S(n)) = \{1, n\}$$

3) PROBLEMA DI RICERCA

ES

CALCOLARE UN DIVISORE NON BANALE DI n

$$R = \eta(n, S(n)) - \{1, n\} \quad \text{E} \quad e(\eta(n, S(n))) = x \,, \; x \in R$$

4) PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE

ES

CALCOLARE IL PIU' GRANDE DIVISORE NON BANALE DI n

$$R = \max(\eta(n, S(n)) - \{1, n\}) \quad \text{E} \quad e(\eta(n, S(n))) = R$$

OSS

SOLO I PROBLEMI DECISIONALI SI POSSONO RISOLVERE MEDIANTE MACCHINE DI TIPO RICONOSCITORE

$\hookrightarrow$ ANCHE LE ALTRE TIPOLOGIE DI PROBLEMI CONTENGONO UN PROBLEMA DI TIPO RICONOSCITORE

PROBLEMI DECISIONALI

DEF

GAMMA

UN PROBLEMA DECISIONALE Γ È DEFINITO DALLA TRIPLA $\langle \mathcal{I}_\Gamma, S, \Pi_\Gamma \rangle$ DOVE:

- $\mathcal{I}_\Gamma$: ISTANZE DI Γ
- $S(x)$: SOLUZIONI POSSIBILI $\forall x \in \mathcal{I}_\Gamma$
- $\Pi_\Gamma(x, S(x))$: PREDICATO CHE DATO $x \in \mathcal{I}_\Gamma$ E $S(x)$, TESTIMONIA SE DA S SI PUÒ DEDURRE L'ESISTENZA DI SOLUZIONI EFFETTIVE PER X

$\exists$ $\forall$

È L'UNIONE DI $\forall$ E $\exists$

ESERCIZIO SULLO SHORTEST PATH (SP)

DATI UN GRAFO $G=(V,E)$, $k \in \mathbb{N}$, $s,t \in V$:
$\exists$ CAMMINO IN G DA s A t DI LUNGHEZZA $\leq k$

- $\mathcal{I}_{SP} = \{\langle G(V,E), s, t, k \rangle : s,t \in V, k \in \mathbb{N}\}$
- $S_{SP} = \{P : P$ È UN CAMMINO DA s A $t\}$
- $\Pi_{SP}(G,s,t,k,S_P(G,s,t,k)) = \exists P \in S_{SP}(G,s,t,k) : |P| \leq k$

ESERCIZIO SATISFIABILITY 3 (3 SAT)

DATA UNA FUNZIONE (f) BOOLEANA IN FORMA 3 CONGIUNTIVA NORMALE SULL'INSIEME DI VARIABILI X:

3CNF

DECIDERE SE f È SODDISFACIBILE

DEFINIZIONI

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$f(x) = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$$

$C_j = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$, C_j CLAUSOLA COMPOSTA DA 3 LETTERALI

VARIABILE ASSERITA O NEGATA

- $\mathcal{I}_{3SAT} = \{<x, f> : f = f(x) \text{ è in 3CNF}\}$
- $S_{3SAT}(x, f) = \{a : x_i \longrightarrow \{0,1\}, \forall x_i \in X\}$ ASSEGNAZIONE
- $\Pi_{3SAT}(x, f, S(x, f)) = \exists a \in S_{3SAT}(x, f) : f(a(x)) = 1$

CREIAMO DELLE CODIFICHE PER USARE LE MACCHINE DI TURING

1) χ_1 : CHI

$$\mathcal{I}_{3SAT} \longrightarrow \{0,1,2,3,4\}^*$$

DATO $x_n = x_4$ E $f = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$ SCRIVIAMO:

$$\chi_1(f) = \underbrace{1111}_{n=4}\ \overset{\text{SEPARATORE}}{2}\ 1\ \underbrace{1000}_{x_1}\ \overset{\text{OR}}{3}\ 0\ \underbrace{0100}_{x_2}\ 3\ 1\ \overbrace{0010}^{x_3}\ \overset{\text{AND}}{4}\ 1\ \overbrace{0100}^{x_2}$$

$n=4$: INDICA IL NUMERO DI VARIABILI

1 SE ASSERITA, 0 SE NEGATA

VARIABILE x_i INDICATA CON n 0 TRANNE UN 1 IN POSIZIONE i A PARTIRE DA SINISTRA

2) γ_2:

$$\eta_{3SAT} \longrightarrow \{0,1,2\}^*$$

DATO $x_n = x_4$ E $f = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$

COMPILIAMO LA TAVOLA DI VERITÀ PER f:

X_1	X_2	X_3	X_4	f	
0	0	0	0	1	$\rightarrow \alpha_1$
0	0	0	1	1	$\rightarrow \alpha_2$
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

SCRIVIAMO OGNI RIGA DELLA TAVOLA SEPARATA DA UN CARATTERE DIVISORE

SEPARATORE

$$\gamma_2(f) = \underbrace{00001}_{\alpha_1}1\,2\,\underbrace{00011}_{\alpha_2}1\,2\,\ldots\ldots$$

CAPIAMO ORA QUALE SIA LA CODIFICA PIÙ CONVENIENTE DA USARE

- COMPLESSITÀ PER γ_1:

$$|\gamma_1(f)| = n+1\left[\underbrace{3(n+1)}_{\text{LETTERALI IN UNA CLAUSOLA}} + \overset{\text{OR}}{2}\right]\underbrace{m}_{\text{NUMERO CLAUSOLE}} + \overset{\text{AND}}{m-1} \Rightarrow m \le \binom{2n}{3} \le (2n)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\gamma_1(f)| = n^5 \rightarrow \text{AL RIALZO}$$

$$dTIME(T_1, \gamma_1(f)) > 2^n = 2^{\sqrt[5]{\gamma_1(f)}}$$

- COMPLESSITÀ PER Π_2: $\longrightarrow$ IRRAGIONEVOLE

$$dTIME(T_2, \Pi_2(f)) = |\Pi_2(f)| = \Omega\left(2^{\sqrt[5]{|\Pi_1|}}\right)$$

CODIFICA LUNGA $O(2^n)$ E CONTIENE GIÀ LA SOLUZIONE

PER SCRIVERE LA TAVOLA DI VERITÀ PRIMA DEVO AVERLA RISOLTA

CODIFICHE IRRAGIONEVOLI

Π_2 È IRRAGIONEVOLE SE:

$$\exists x \in \mathcal{I}\left[|\Pi_2(x)| \notin O\left(|\Pi_1(x)|^k\right) \forall k \in \mathbb{N}\right]$$