PROPOSIZIONE

Siano X_1 e X_2 due v.a. definite su uno stesso spazio di probabilità, con medie finite e non necessariamente discrete. Allora

$$X_1 \text{ e } X_2 \text{ indipendenti} \Rightarrow Cov(X_1, X_2) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE

Segue da una cosa detta in passato, cioè

$$X_1 \text{ e } X_2 \text{ indipendenti} \Longrightarrow \mathbb{E}[X_1 X_2] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2]$$

e dalla formula alternativa della covarianza

$$Cov(X_1, X_2) = \mathbb{E}[X_1 X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2].$$

CONSEGUENZA

Se $X_1, \dots, X_n$ sono indipendenti, allora si ha

$$Var[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \underbrace{Cov(X_i, X_j)}_{=0} = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i].$$

Ora presentiamo una classe di controesempi (ce ne sono anche altri) per cui si ha

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0 \not\Rightarrow X_1 \text{ e } X_2 \text{ sono indipendenti}$$

Consideriamo

$$X_1 = X \qquad \text{e} \qquad X_2 = X^2$$

dove X è una v.a. tale che:

→ X è una v.a. simmetrica (cioè tale che X e $-X$ sono equidistribuite [se X è discreta, X e $-X$ hanno la stessa densità discreta]

→ X^2 ha speranza matematica finita

→ X^2 non è una v.a. costante (infatti si può dimostrare che ogni v.a. costante è indipendente da qualunque altra v.a.)

Se X è simmetrica si ha $\mathbb{E}[X^k]=0$ per ogni k intero dispari.

Infatti $\mathbb{E}[X^k]=\sum_{x_h\in S_X} x_h^k\, p_X(x_h)=0$ perchè:

- se si ha $x_h=0$, l'addendo $x_h^k\, p_X(x_h)=0^k\cdot p_X(0)=0$;
- se si ha l'addendo $x_h^k\, p_X(x_h)$ con $x_h>0$, c'è anche l'addendo con il suo opposto $\underbrace{(-x_h)^k}_{=-x_h^k}\underbrace{p_X(-x_h)}_{=p_X(x_h)}=-x_h^k\, p_X(x_h)$ e quindi si semplifica con $x_h^k\, p_X(x_h)$.

perchè k è dispari

per simmetria

poi vedremo un esempio

Allora $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=\mathrm{Cov}(X,X^2)=\underbrace{\mathbb{E}[X\cdot X^2]}_{=\mathbb{E}[X^3]=0}-\underbrace{\mathbb{E}[X]}_{=0}\mathbb{E}[X^2]=0$

Dobbiamo verificare che $X_1=X$ e X_2 non sono indipendenti; quindi basta trovare x_1 e x_2 tali che

$$p_{\underline{X}}(x_1,x_2)\neq p_{X_1}(x_1)\,p_{X_2}(x_2)$$

Nel caso specifico si dovrà avere un $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$(*) \qquad p_{X,X^2}(x,x^2) \neq p_X(x)\, p_{X^2}(x^2)$$

$$\{X^2 = x^2\} = \{X = x\} \cup \{X = -x\}$$
$$\Rightarrow \{X = x\} \subset \{X^2 = x^2\}$$

Prendiamo $x \in S_X$ con $p_X(x) > 0$ e per il 1° membro si ha

$$p_{X,X^2}(x,x^2) = P(\{X = x\} \cap \{X^2 = x\}) \overset{*}{=} P(X = x) = p_X(x).$$

Allora, se $(*)$ fosse falso, si avrebbe $\cancel{p_X(x)} = \cancel{p_X(x)}\, p_{X^2}(x^2)$, e quindi $p_{X^2}(x^2) = 1$.

Ma questo è impossibile perchè significherebbe dire che X^2 è una v.a. costante uguale a x^2.

Quindi $(*)$ è vero, e questo consente di dire che X e X^2 non sono indipendenti.

Questi ragionamenti saranno chiari con l'esempio.

ESEMPIO

Sia X tale che $p_X(2)=p_X(-2)=\frac{1}{10}$, $p_X(1)=p_X(-1)=\frac{3}{10}$, $p_X(0)=\frac{2}{10}$.

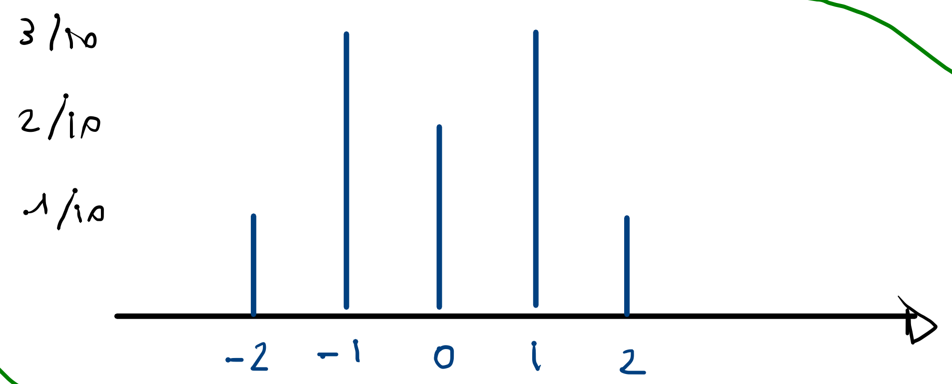
X^2 non è costante:

$$p_{X^2}(4) = p_X(2)+p_X(-2) = \frac{1}{10}+\frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$p_{X^2}(1) = p_X(1)+p_X(-1) = \frac{3}{10}+\frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$p_{X^2}(0) = p_X(0) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

SOMMA = 1



In effetti c'è simmetria

In generale, per k dispari, il momento k-esimo è uguale a zero:

$$\mathbb{E}[X^k] = (-2)^k\cdot\frac{1}{10} + (-1)^k\cdot\frac{3}{10} + \underbrace{0\cdot\frac{2}{10}}_{=0} + 1^k\cdot\frac{3}{10} + 2^k\cdot\frac{1}{10} =$$

$$= \cancel{-2^k\cdot\frac{1}{10}} - \cancel{\frac{3}{10}} + 0 + \cancel{\frac{3}{10}} + \cancel{2^k\cdot\frac{1}{10}} = 0.$$

Quindi: (calcoli già visti)

$$\mathrm{Cov}(X, X^2) = \underbrace{\mathbb{E}[X \cdot X^2]}_{= \mathbb{E}[X^3]} - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[X^2] = 0 - 0 \cdot \mathbb{E}[X^2] = 0.$$

OSS.

$$\mathbb{E}[X^2] = 0 \cdot p_{X^2}(0) + 1 \cdot p_{X^2}(1) + 4 \cdot p_{X^2}(4) = 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{5}$$

Ora vediamo che non c'è indipendenza; ad esempio

$$p_{X,X^2}(2,4) = P(\{X=2\} \cap \underbrace{\{X^2=4\}}_{= \{X=2\} \cup \{X=-2\}}) = P(X=2) = p_X(2) = \frac{1}{10}$$

$$p_X(2) \cdot p_{X^2}(4) = p_X(2) \cdot (p_X(2) + p_X(-2)) = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} \cdot \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{10}_{\,5}}$$

Sono diversi e questo basta.

Potete provare anche con una coppia diversa da $(2,4)$; provate a verificare che $p_{X,X^2}(0,0) \neq p_X(0)\, p_{X^2}(0)$.

VARIANZE DI V.A. DISCRETE CON DISTRIBUZIONE NOTEVOLE

1) Distribuzione Bernoulliana: $X \sim B(p)$

$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$ dove $\begin{cases} \mathbb{E}[X] = p \quad \text{(già visto)} \\ \mathbb{E}[X^2] = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p \end{cases}$

Quindi: $\text{Var}[X] = p - p^2 = p(1-p)$.

In particolare, se $X = 1_A$, si ha $\text{Var}[1_A] = P(A)(1-P(A))$.

<u>OSS.</u> Si vede che $X^2(\omega) = X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$

perchè l'equazione $y^2 = y$ ha soluzioni $y=0$ e $y=1$.

Quindi si ha $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X] = p$ in accordo con quanto scritto qui

2) Distribuzione Binomiale: $X \sim Bin(n,p)$

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \mathbb{E}[X] = np & \text{(già visto)} \\ \mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{(si potrebbero fare calcoli un po' complicati...)} \end{cases}$$

Metodo alternativo:

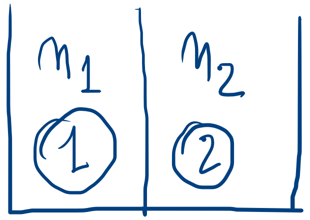
Come abbiamo visto per la media sia $X = X_1 + \dots + X_n$ dove $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite), ed inoltre $X_1, \dots, X_n$ sono Bernoulliane di parametro p.

Allora:

$$Var[X] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = \underbrace{p(1-p) + \dots + p(1-p)}_{n \text{ volte}} = n\,p(1-p).$$

per indipendenza

3) DISTRIBUZIONE IPERGEOMETRICA



n estrazioni senza reinserimento con $2 \le n < n_1 + n_2$
(per $n = 1$ non ha senso parlare di estrazioni senza reinserimento)

$X = \#$ oggetti di tipo ① estratti

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = \mathbb{E}[X^2] - \underbrace{(np)^2}_{\text{già visto}}$$

dove $\boxed{p = \frac{n_1}{n_1 + n_2}}$.

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}}$$

si potrebbero fare calcoli un po' complicati...

Metodo alternativo (e non dimostreremo tutto)

$X = X_1 + \dots + X_n$ dove $X_1, \dots, X_n \sim B(p)$ ma non sono indipendenti.

$$\mathrm{Var}[X] = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathrm{Var}[X_i]}_{= p(1-p)} + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \underbrace{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}_{\text{tutte uguali tra loro e negative}} = np(1-p) + \underbrace{\dots}_{<0} < np(1-p).$$

Facendo i calcoli si dimostra che

$$\left(p = \frac{m_1}{m_1+m_2}\ ,\ \text{e quindi}\ \ 1-p = \frac{m_2}{m_1+m_2}\right)$$

$$\operatorname{Var}[X] = np(1-p)\,\frac{m_1+m_2-n}{m_1+m_2-1} = n\,\frac{m_1}{m_1+m_2}\,\frac{m_2}{m_1+m_2}\,\frac{m_1+m_2-n}{m_1+m_2-1}\,.$$

OSS.

Essendo $1 < n < m_1+m_2$, si ha $\dfrac{m_1+m_2-n}{m_1+m_2-1} \in (0,1)$ e questo è in accordo con $\operatorname{Var}[X] < np(1-p)$. Se m_1+m_2 è molto più grande di n il rapporto è vicino a 1 ("poco differente" con il caso con reinserimento).

Quindi nel confronto tra estrazioni "con" e "senza" reinserimento abbiamo medie uguali (valore comune $n\,\frac{m_1}{m_1+m_2}$) e varianze diverse (varianze più piccole nel caso senza reinserimento).

ESEMPIO

Abbiamo un'urna con 3 palline bianche e 4 nere. Si estraggono 2 palline a caso, una alla volta e con/senza reinserimento.

Sia X la v.a. che conta il numero di palline bianche estratte.

Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $Var[X]$

	$\mathbb{E}[X]$	$Var[X]$
CON	$np = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$	$np(1-p) = 2 \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{24}{49}$
SENZA	$np = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$	$np(1-p)\frac{n_1+n_2-n}{n_1+n_2-1} = \frac{24}{49} \cdot \frac{7-2}{7-1} = \frac{20}{49}$

$n_1 = 3$

$n_2 = 4$

$n = 2$

$$p = \frac{n_1}{n_1+n_2} = \frac{3}{7}$$

Verifica diretta dei valori numerici per l'esempio

CASO CON REINSERIMENTO ($X \sim Bin(n=2, p=3/7)$)

$$p_X(k) = \binom{2}{k}\left(\frac{3}{7}\right)^k\left(1-\frac{3}{7}\right)^{2-k} \quad k\in\{0,1,2\} \quad \left[p_X(0)=\frac{16}{49},\ p_X(1)=\frac{24}{49},\ p_X(2)=\frac{9}{49}\right]$$

$$\mathbb{E}[X] = 0\cdot\frac{16}{49}+1\cdot\frac{24}{49}+2\cdot\frac{9}{49} = \frac{0+24+18}{49} = \frac{42}{49} = \frac{6}{7}$$

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}^2[X] = 0^2\cdot\frac{16}{49}+1^2\cdot\frac{24}{49}+2^2\cdot\frac{9}{49}-\left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{0+24+36}{49}-\frac{36}{49} = \frac{24}{49}.$$

CASO SENZA REINSERIMENTO

$$p_X(k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{4}{2-k}}{\binom{7}{2}} \quad k\in\{0,1,2\} \quad \left[p_X(0)=\frac{6}{21}=\frac{2}{7},\ p_X(1)=\frac{12}{21}=\frac{4}{7},\ p_X(2)=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}\right]$$

$$\mathbb{E}[X] = 0\cdot\frac{2}{7}+1\cdot\frac{4}{7}+2\cdot\frac{1}{7} = \frac{0+4+2}{7} = \frac{6}{7}$$

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}^2[X] = 0^2\cdot\frac{2}{7}+1^2\cdot\frac{4}{7}+2^2\cdot\frac{1}{7}-\left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{0+4+4}{7}-\frac{36}{49} = \frac{8}{7}-\frac{36}{49} = \frac{56-36}{49} = \frac{20}{49}.$$

4) DISTRIBUZIONE DI POISSON : $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \mathbb{E}[X] = \lambda \text{ (già visto)} \\ \mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{cases}$$

Questo lo prendiamo per buono : $Var[X] = \lambda$.

5) DISTRIBUZIONE GEOMETRICA ; $X \sim Geo(p)$

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \mathbb{E}[X] = 1/p - 1 \text{ (già visto)} \\ \mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-p)^k p \end{cases}$$

Questo lo prendiamo per buono : $Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$

6) DISTRIBUZIONE GEOMETRICA TRASLATA : $Y \sim GeoTraslata(p)$

Ci riconduciamo al caso precedente : $Y = X+1$ con $X \sim Geo(p)$.

Allora $Var[Y] = Var[X+1] = Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$

7) DISTRIBUZIONI BINOMIALE NEGATIVA E BINOMIALE NEGATIVA TRASLATA.

Il calcolo diretto a partire da $Var[X]=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}^2[X]$ e $Var[Y]=\mathbb{E}[Y^2]-\mathbb{E}[Y^2]$ sarebbe complicato. Allora facciamo riferimento alle decomposizioni in somme di r geometriche indipendenti (o r geometriche traslate indipendenti) viste in passato. Allora si ha:

$$X = \underbrace{X_1 + \dots + X_r}_{\text{iid} \sim Geo(p)} \rightsquigarrow Var[X] = \sum_{i=1}^{r} Var[X_i] = \underbrace{\frac{1-p}{p^2} + \dots + \frac{1-p}{p^2}}_{r \text{ volte}} = r\frac{1-p}{p^2}$$

$$Y = \underbrace{Y_1 + \dots + Y_r}_{\text{iid} \sim Geo\,Traslata(p)} \rightsquigarrow Var[Y] = \sum_{i=1}^{r} Var[Y_i] = \underbrace{\frac{1-p}{p^2} + \dots + \frac{1-p}{p^2}}_{r \text{ volte}} = r\frac{1-p}{p^2}$$

per indipendenza

<u>OSS</u>. Quindi abbiamo ottenuto che $Var[Y]=Var[X]$ e questo è in accordo con il fatto che $Y=X+r$; infatti si ha

$$Var[Y] = Var[X+r] = Var[X]$$

se si somma una costante la varianza non cambia (come visto in passato).

COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE

Siano X_1, X_2 due v.a. definite su uno stesso spazio di probabilità, con medie e varianze finite, non necessariamente discrete. Inoltre supponiamo che non siano costanti, e quindi $Var[X_1] > 0$ e $Var[X_2] > 0$.

Allora si definisce coefficiente di correlazione tra X_1 e X_2 la seguente quantità:

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var[X_1]\, Var[X_2]}}.$$

<u>OSS</u>. $\rho(X_1, X_2) \gtreqless 0 \iff Cov(X_1, X_2) \gtreqless 0$

PROPRIETÀ

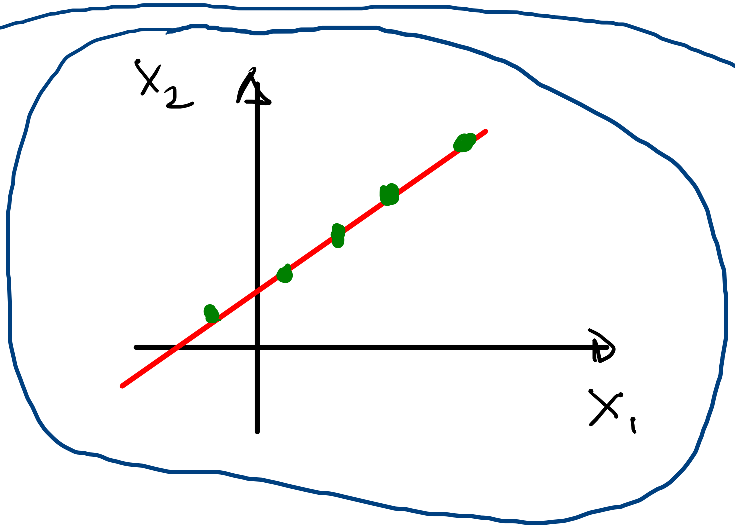
1) $|\rho(X_1, X_2)| \le 1$, cioè $-1 \le \rho(X_1, X_2) \le 1$,

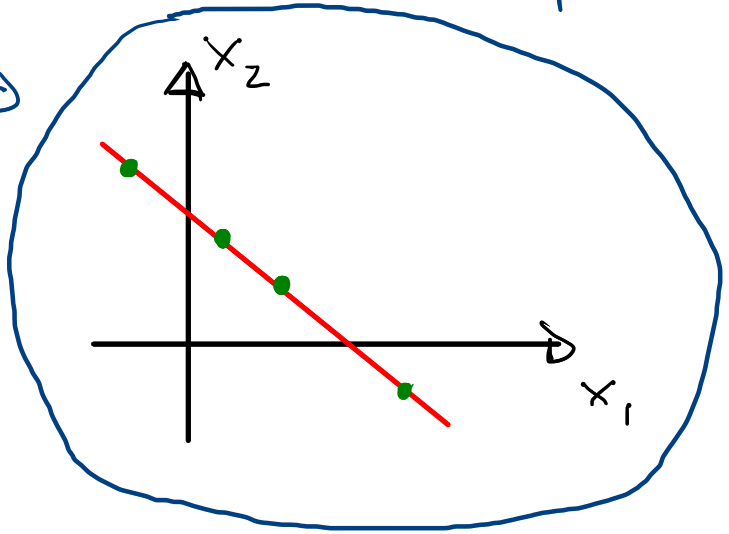
perchè si può dimostrare che $|Cov(X_1, X_2)| \le \sqrt{Var[X_1]\, Var[X_2]}$ $\quad |\langle v_1, v_2 \rangle| \le \|v_1\| \|v_2\|$

(può essere vista come una versione della dis. di CAUCHY-SCHWARZ per spazi vettoriali)

2) $\rho(X_1, X_2) = 1 \iff X_2 = aX_1 + b$ per $a > 0$

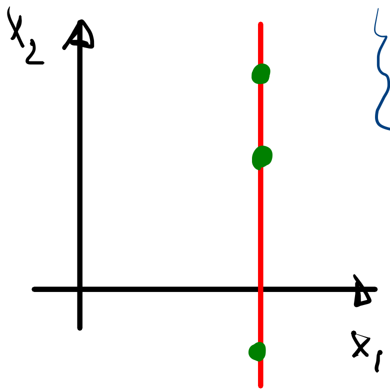
3) $\rho(X_1, X_2) = -1 \iff X_2 = aX_1 + b$ per $a < 0$



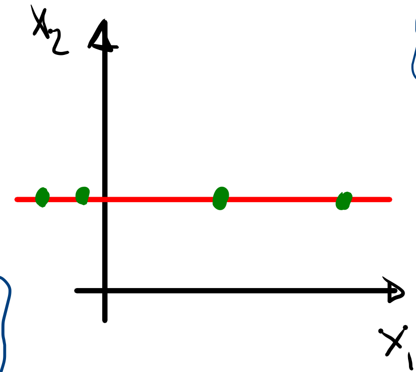


OSS.

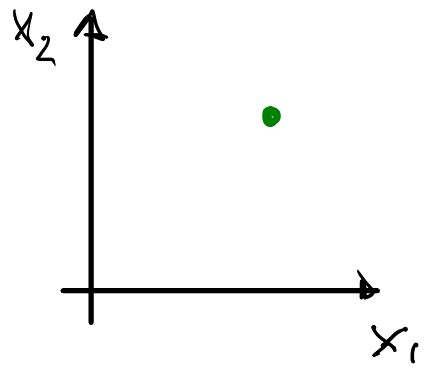
Non possiamo avere situazioni come queste



$\begin{cases} Var[X_1] = 0 \\ Var[X_2] > 0 \end{cases}$



$\begin{cases} Var[X_1] > 0 \\ Var[X_2] = 0 \end{cases}$



$Var[X_1] = Var[X_2] = 0$

RETTA DI REGRESSIONE

Supponiamo di avere una v.a. bidimensionale $\underline{X} = (X_1, X_2)$; per quel che vedremo in questo corso pensiamo al caso discreto ma si possono considerare casi più generali.

Si vuole trovare la retta che approssima meglio possibile il legame tra X_1 e X_2:

→ regressione di X_2 rispetto a X_1 $\qquad r_{21}: \; x_2 = a x_1 + b$

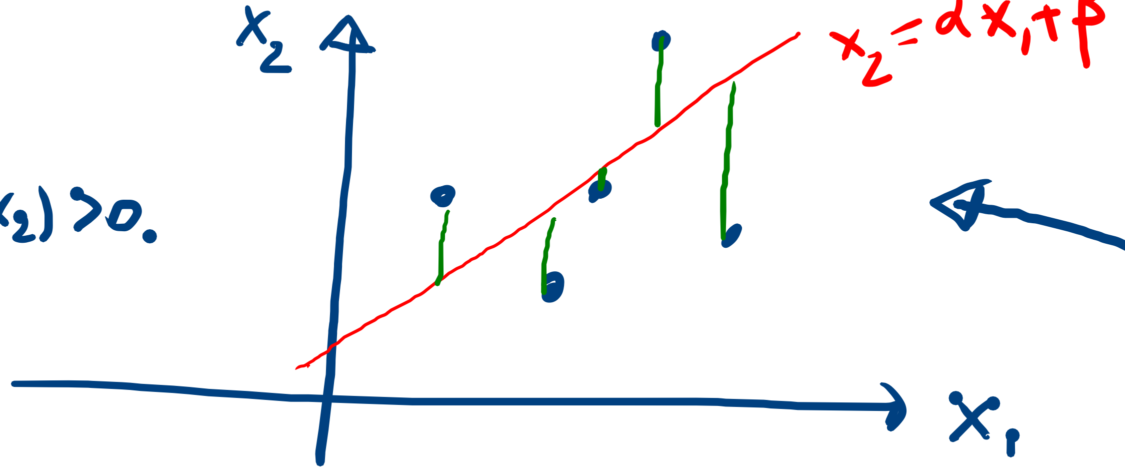
→ regressione di X_1 rispetto a X_2 $\qquad r_{12}: \; x_1 = c x_2 + d$

Ci soffermeremo principalmente su r_{21}. In maniera analoga si ottengono le formule per r_{12}.

Useremo il "metodo dei minimi quadrati". Si cercano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\min_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\left(X_2 - (\alpha X_1 + \beta)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(X_2 - (a X_1 + b)\right)^2\right]$$

Nel caso discreto si ha un grafico come quello accanto e ognuno dei "punti blu" (x_1, x_2) ha densità $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) > 0$.



Vogliamo minimizzare la media dei quadrati delle lunghezze dei "segmenti verdi".

Si ha

$$\mathbb{E}\left[(X_2 - (\alpha X_1 + \beta))^2\right] \overset{\text{linearità}}{=} \mathbb{E}[X_2^2] + \mathbb{E}\left[(\alpha X_1 + \beta)^2\right] - 2\,\mathbb{E}\left[X_2(\alpha X_1 + \beta)\right] \overset{\text{linearità}}{=}$$

$$= \mathbb{E}[X_2^2] + \alpha^2\,\mathbb{E}[X_1^2] + 2\alpha\beta\,\mathbb{E}[X_1] + \beta^2 - 2\alpha\,\mathbb{E}[X_1 X_2] - 2\beta\,\mathbb{E}[X_2]$$

Si tratta di imporre che le derivate parziali rispetto ad α e β siano uguali zero e si ottiene un sistema di equazione nelle due incognite α e β.

Indicheremo le soluzioni con a e b. Si ha

$$\begin{cases} a = \dfrac{Cov(X_1,X_2)}{Var[X_1]} \\ \mathbb{E}[X_2] = a\,\mathbb{E}[X_1]+b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{Cov(X_1,X_2)}{Var[X_1]} \\ b = \mathbb{E}[X_2] - \dfrac{Cov(X_1,X_2)}{Var[X_1]}\cdot\mathbb{E}[X_1]. \end{cases}$$

questa equazione ci dice che la retta passa per $(\mathbb{E}[X_1], \mathbb{E}[X_2])$

Per la retta $X_1 = cX_2 + d$ si scambia il ruolo tra X_1 e X_2 e, ricordando che $Cov(X_1,X_2) = Cov(X_2,X_1)$, si ha

$$\begin{cases} c = \dfrac{Cov(X_1,X_2)}{Var[X_2]} \\ \mathbb{E}[X_1] = c\,\mathbb{E}[X_2]+d \end{cases} \qquad \begin{cases} c = \dfrac{Cov(X_1,X_2)}{Var[X_2]} \\ d = \mathbb{E}[X_1] - \dfrac{Cov(X_1,X_2)}{Var[X_2]}\,\mathbb{E}[X_2] \end{cases}$$

questa equazione ci dice che la retta passa per $(\mathbb{E}[X_1], \mathbb{E}[X_2])$

COMMENTO sulle due rette ottenute

$x_2 = a x_1 + b$ (retta verde qui e dopo)

$x_1 = c x_2 + d$ (retta rossa qui e dopo)

Si vede che $a = \dfrac{Cov(X_1, X_2)}{Var[X_1]}$ e $c = \dfrac{Cov(X_1, X_2)}{Var[X_2]}$ hanno lo stesso segno,

che è lo stesso segno della covarianza.

Quindi:

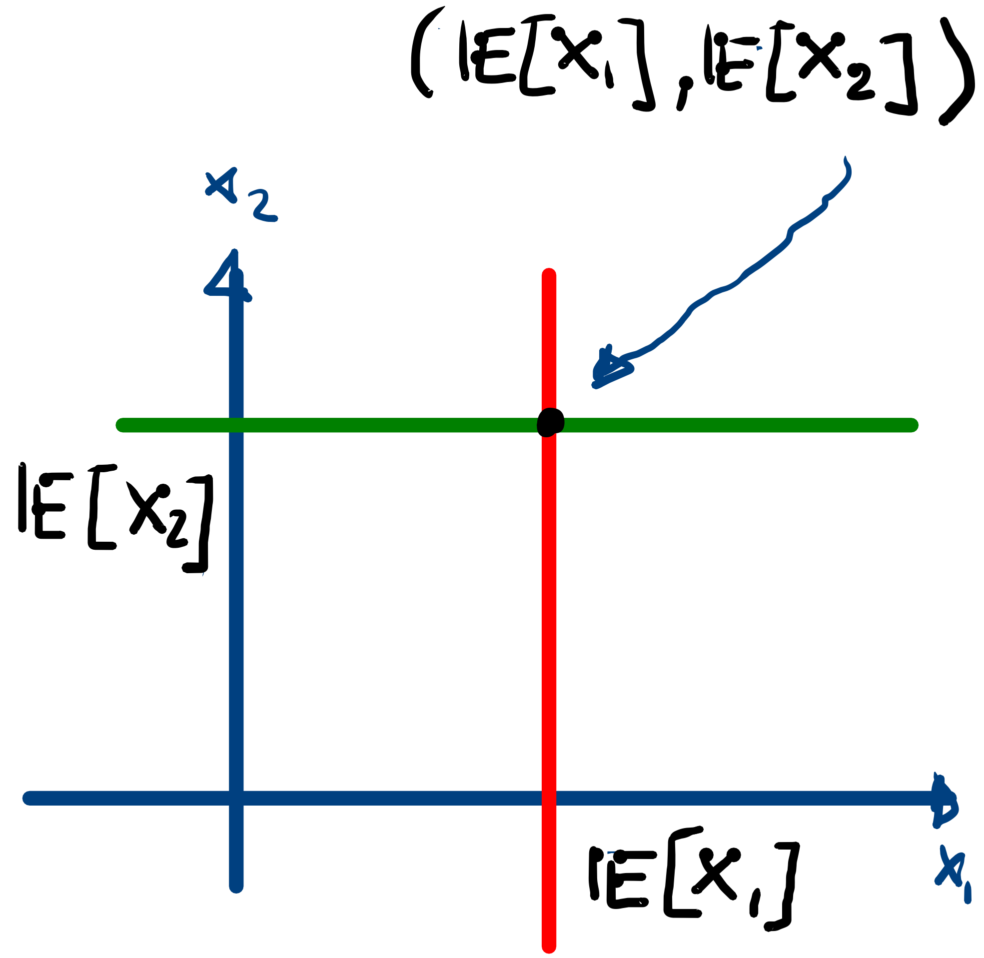
$a, c, Cov(X_1, X_2) > 0$ rette crescenti

$a, c, Cov(X_1, X_2) < 0$ rette decrescenti

$a = c = Cov(X_1, X_2) = 0$ rette parallele agli assi:

$x_2 = \mathbb{E}[X_2]$ retta orizzontale

$x_1 = \mathbb{E}[X_1]$ retta verticale

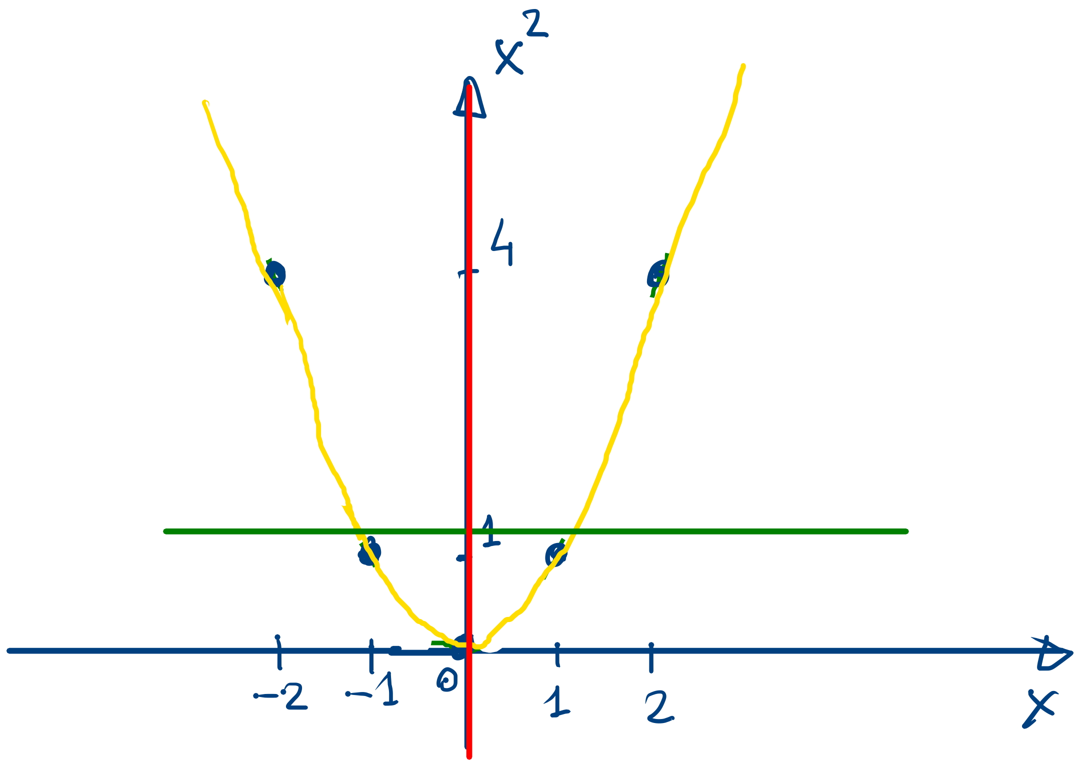


ESEMPIO CON COVARIANZA NULLA

Riprendiamo un caso visto prima dove la covarianza è uguale a zero:

$$Cov(X, X^2) = 0 \quad \text{dove} \quad P_X(-2) = P_X(2) = \frac{1}{10}, \quad P_X(-1) = P_X(1) = \frac{3}{10}, \quad P_X(0) = \frac{2}{10}.$$

Allora



$$\mathbb{E}[X] = -2 \cdot \frac{1}{10} + (-1) \cdot \frac{3}{10} + 0 \cdot \frac{2}{10} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} = 0$$

$$\mathbb{E}[X^2] = (-2)^2 \cdot \frac{1}{10} + (-1)^2 \cdot \frac{3}{10} + 0^2 \cdot \frac{2}{10} + 1^2 \cdot \frac{3}{10} + 2^2 \cdot \frac{1}{10} =$$

$$= \frac{4+3+0+3+4}{10} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

Le rette di regressione sono
$$\begin{cases} x_2 = \mathbb{E}[X^2] \\ x_1 = \mathbb{E}[X] \end{cases}$$

$x_2 = \frac{7}{5}$

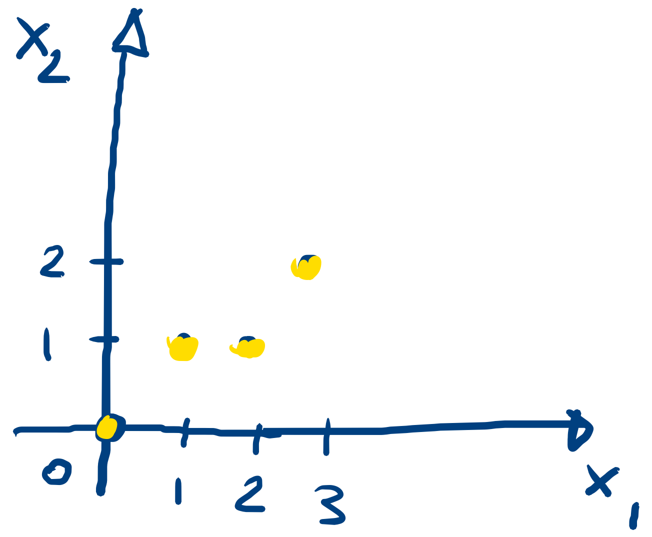
$x_1 = 0$

coincide con l'asse delle ordinate

ESERCIZIO

Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{\underline{X}}(0,0) = p_{\underline{X}}(3,2) = \frac{1}{6}\ ; \qquad p_{\underline{X}}(1,1) = p_{\underline{X}}(2,1) = \frac{1}{3}.$$



Trovare le rette di regressione $X_2 = a X_1 + b$ e $X_1 = c X_2 + d$.

SVOLGIMENTO

$$\begin{cases} p_{X_1}(0) = p_{\underline{X}}(0,0) = \frac{1}{6} \\ p_{X_1}(1) = p_{\underline{X}}(1,1) = \frac{1}{3} \\ p_{X_1}(2) = p_{\underline{X}}(2,1) = \frac{1}{3} \\ p_{X_1}(3) = p_{\underline{X}}(3,2) = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X_1] = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\mathrm{Var}[X_1] = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}^2[X_1] = 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \dots = \frac{11}{12}$$

$$\begin{cases} p_{X_2}(0) = p_{\underline{X}}(0,0) = 1/6 \\ p_{X_2}(1) = p_{\underline{X}}(1,1) + p_{\underline{X}}(2,1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ p_{X_2}(2) = p_{\underline{X}}(3,2) = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X_2] = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 1$$

$$\mathrm{Var}[X_2] = \mathbb{E}[X_2^2] - \mathbb{E}^2[X_2] = 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{2}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} - 1^2 = \dots = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=\mathbb{E}[X_1X_2]-\underbrace{\mathbb{E}[X_1]}_{=3/2}\underbrace{\mathbb{E}[X_2]}_{=1}=2-\frac{3}{2}\cdot 1=2-\frac{3}{2}=\frac{4-3}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{E}[X_1X_2]=0\cdot 0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot 1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot 1\cdot\frac{1}{3}+3\cdot 2\cdot\frac{1}{6}=\ldots=2$$

$$\left[\begin{aligned} a&=\frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\mathrm{Var}[X_1]}=\frac{1/2}{11/12}=\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{11}=\frac{6}{11}\\ b&=\mathbb{E}[X_2]-a\,\mathbb{E}[X_1]=1-\frac{6}{11}\cdot\frac{3}{2}=1-\frac{9}{11}=\frac{2}{11}\end{aligned}\right]$$

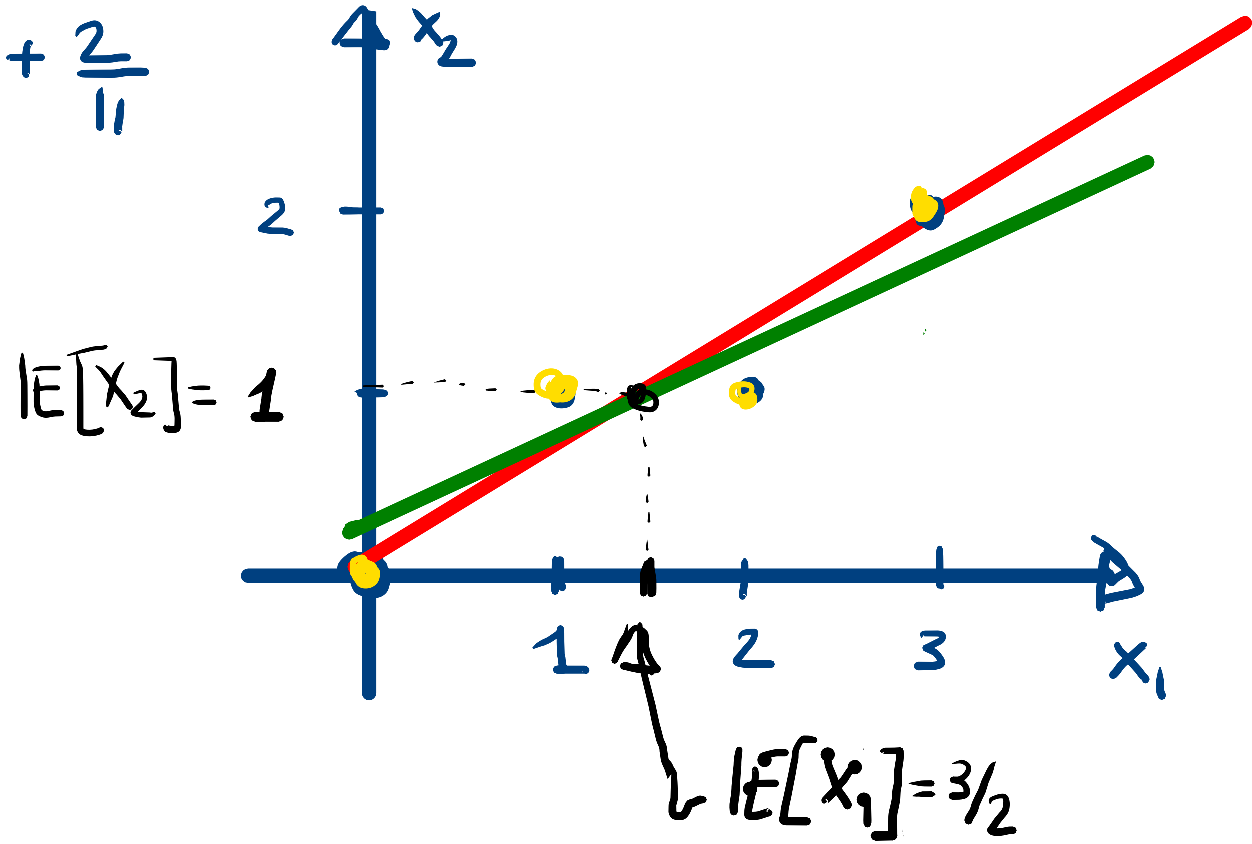
r_{21}:

$$x_2=\frac{6}{11}x_1+\frac{2}{11}$$

$$\left[\begin{aligned} c&=\frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\mathrm{Var}[X_2]}=\frac{1/2}{1/3}=\frac{3}{2}\\ d&=\mathbb{E}[X_1]-c\,\mathbb{E}[X_2]=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot 1=0\end{aligned}\right]$$

r_{12}:

$$x_1=\frac{3}{2}x_2$$



COMMENTI CONCLUSIVI SULL'ESERCIZIO

Le due rette ottenute nell'esercizio (quella rossa e quella verde) non coincidono ma passano entrambe per $(\mathbb{E}[X_1], \mathbb{E}[X_2])$.

Le due rette coincidono se e solo se i punti sono tutti allineati sulla stessa retta. Ad esempio i punti nell'esercizio non sono tutti allineati sulla stessa retta e quindi ci si aspetta di avere due rette diverse.

Però in qualche senso i punti sono "abbastanza vicini" ad una situazione di "allineamento perfetto" su una retta crescente; quindi ci si aspetta di avere "il coefficiente di correlazione ρ vicino a $+1$".

In effetti si ha

$$\rho = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var[X_1]\, Var[X_2]}} = \frac{1/2}{\sqrt{\frac{11}{12}\cdot\frac{1}{3}}} = \frac{1/2}{\sqrt{\frac{11}{36}}} = \frac{1/2}{\sqrt{11}/6} = \frac{3}{\sqrt{11}} = 0.9045\ldots$$