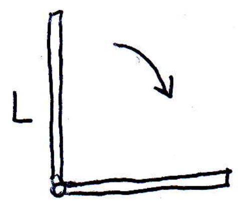
Serway, pr. 10.73

Una sbarretta omogenea di lunghezza L e massa M e' incernierata in un estremo a un asse orizzontale senza attrito.
La sbarretta viene lasciata andare, in quiete, in posizione verticale, come mostrato nello schema:



Quando la sbarretta si trova in posizione orizzontale, si calcolino:

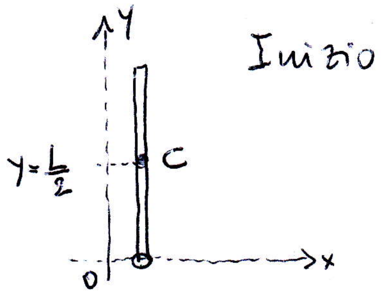
a) la velocita' angolare della sbarretta,

b) il modulo della sua accelerazione angolare,

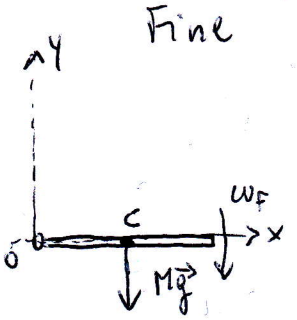
c) le componenti x e y dell'accelerazione del suo centro di massa,

d) le componenti della reazione vincolare della cerniera.

a) Durante il moto rotazionale della sbarretta agiscono le seguenti forze: ~~forza~~ peso e reazione vincolare della cerniera. Ma la reazione vincolare della cerniera è applicata in un punto che resta fisso durante tutto il moto della sbarretta, per cui questa forza non compie lavoro. L'unica forza che compie lavoro, quindi, è la forza peso della sbarretta. Dato che la forza peso è conservativa, l'energia meccanica della sbarretta si conserva. Introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali (x, y), con asse y orientato positivamente verso l'alto. Fissiamo $y=0$ alla quota della cerniera; allora, all'istante iniziale la quota del centro di massa della sbarretta è $y_{CM,i} = \frac{L}{2}$, e



all'istante finale la quota del centro di massa della sbarretta è $y_{CM,f} = 0$.



All'istante iniziale l'energia cinetica di rotazione della sbarretta è $\omega_i = 0$ per le ipotesi del problema, per cui $K_i = 0$. All'istante finale l'energia cinetica di rotazione della sbarretta è

$$K_f = \frac{1}{2} I_z \omega_f^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} ML^2\right) \omega_f^2 = \frac{1}{6} ML^2 \omega_f^2$$

Dunque, deve risultare:

$$E_{m,f} = E_{m,i} \Rightarrow K_f + U_f = K_i + U_i \quad , \text{ cioè}$$

$$\frac{1}{6} ML^2 \omega_f^2 + Mg\, y_{CM,f} = Mg\, y_{CM,i}$$

$$\frac{1}{\cancel{8}_3} M L^{\cancel{2}} \omega_f^2 = Mg \frac{\cancel{L}^1}{\cancel{8}_1} \quad , \text{ e infine } \quad \omega_f^2 = \frac{3g}{L} \quad , \text{ da cui:}$$

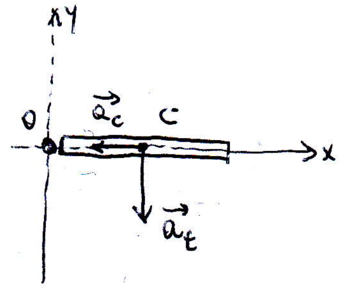
$$\boxed{|\omega_f| = \sqrt{\frac{3g}{L}}}$$

b) Quando la sbarretta si trova nella posizione orizzontale, la seconda equazione cardinale, con i momenti delle forze calcolati rispetto alla cerniera, diventa:

$$I_z \alpha = -\frac{L}{2} Mg \quad , \text{ cioè: } \quad \frac{1}{3} M L^{\cancel{2}} \alpha = -\frac{\cancel{L}^1}{2} \cancel{M} g \quad , \text{ e quindi:}$$

$$\alpha = -\frac{3g}{2L} \quad , \text{ e quindi } \quad \boxed{|\alpha| = \frac{3g}{2L}}$$

c)



Dunque, l'accelerazione tangenziale del centro di massa della sbarretta è:

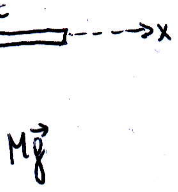
$$\vec{a}_{CM,t} = -|\alpha| \frac{L}{2} \hat{j} = -\frac{3}{4} g \hat{j}$$

L'accelerazione lungo l'asse x è l'accelerazione centripeta del centro di massa, per cui risulta:

$$\vec{a}_{CM,c} = -\omega_f^2 \frac{L}{2} \hat{i} = -\frac{3}{2} g \hat{i} \quad ; \text{ dunque:}$$

$$\boxed{a_{CM,x} = -\frac{3}{2} g \quad ; \quad a_{CM,y} = -\frac{3}{4} g}$$

Applichiamo la prima equazione cardinale.



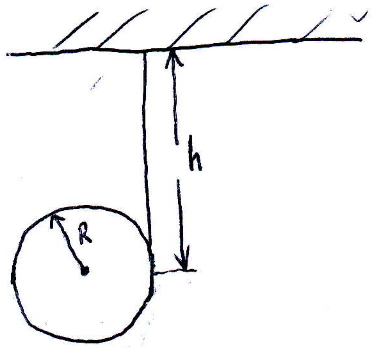
Asse x: $\quad M a_{CM,x} = R_x$

Asse y: $\quad M a_{CM,y} = R_y - Mg$

$$\boxed{\begin{aligned} R_x &= M a_{CM,x} = -\frac{3}{2} Mg \\ R_y &= M\left(a_{CM,y} + g\right) = M\left(-\frac{3}{4}g + g\right) = \frac{1}{4} Mg \end{aligned}}$$

Serway, pr. 10.78

Un filo di massa trascurabile è avvolto intorno a un disco omogeneo avente raggio R e massa M; l'altro estremo del filo è agganciato a un supporto fisso.



Il disco è lasciato cadere da fermo e il filo si mantiene verticale durante la caduta del disco.

Mentre il disco scende:

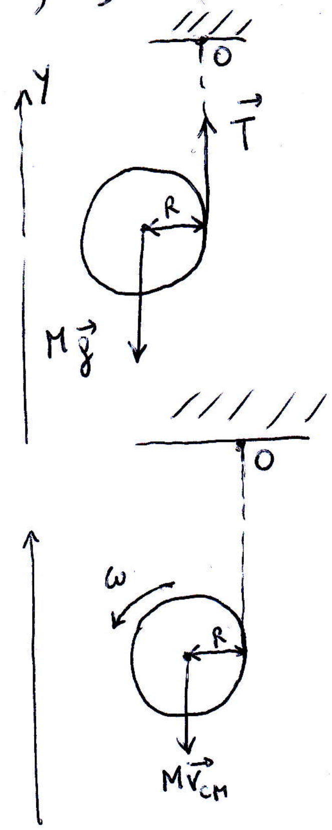
a) si calcoli il modulo della tensione del filo;

b) si calcoli il modulo dell'accelerazione del centro di massa del disco;

c) si calcoli il modulo della velocità del centro di massa del disco nell'istante in cui questo è sceso di un tratto di lunghezza h partendo da fermo.

d) Si verifichi il risultato del punto c) usando l'approccio energetico.

a) Durante la caduta del disco valgono le due equazioni cardinali:



$$Ma_{CM,y} = -Mg + T \qquad (1)$$

Il momento delle forze agenti sul disco rispetto a un punto fisso posto lungo la direzione della forza $\vec{T}$ è: $\tau_z = RMg$

Il momento angolare totale del disco rispetto allo stesso polo è $L_{TOT,z} = RM|v_{CM,y}| + I_{z'}\omega$, (*)

dove $I_{z'}$ è il momento d'inerzia del disco rispetto a un asse perpendicolare al piano del disco e passante per il suo centro di massa, cioè $I_{z'} = \frac{1}{2}MR^2$, e ω è la velocità angolare di rotazione del disco attorno a questo asse.

Risulta quindi:

$$[L_{TOT,z}]' = RM|a_{CM,y}| + I_{z'}\alpha,$$ con la

condizione di puro rotolamento per il disco:

$$\alpha = \frac{|a_{CM,y}|}{R}, \text{ per cui } [L_{TOT,z}]' = RM|a_{CM,y}| + \frac{1}{2}MR^2\frac{|a_{CM,y}|}{R} =$$

$$= \frac{3}{2}MR|a_{CM,y}|$$

(*) l'uso del valore assoluto si è reso necessario affinché il segno del primo contributo fosse positivo, come deve essere per le convenzioni del segno di L_z.

Per la seconda equazione cardinale deve risultare

$$\left[L_{TOT,z}\right]' = \tau_z ,$$ per cui le due equazioni risolventi

sono:
$$\begin{cases} M a_{CM,y} = -Mg + T \\ \frac{3}{2} \cancel{M}\cancel{R} |a_{CM,y}| = \cancel{M}\cancel{R} g \end{cases} \Rightarrow \quad a_{CM,y} = -g + \frac{T}{M}$$

Poiché $a_{CM,y} < 0$ nel sistema di coordinate scelto, risulta

$|a_{CM,y}| = g - \frac{T}{M}$, e quindi la seconda equazione diventa:

$$\frac{3}{2}\left(g - \frac{T}{M}\right) = g \Rightarrow g - \frac{T}{M} = \frac{2}{3} g \Rightarrow \frac{T}{M} = \frac{1}{3} g ,$$

e infine $\boxed{T = \frac{1}{3} Mg}$

b) La seconda equazione dà direttamente

$$\boxed{|a_{CM,y}| = \frac{2}{3} g}$$

c) Il centro di massa del disco si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, per cui possiamo usare la legge che lega direttamente la posizione e la velocità istantanea nel moto considerato: $V_{y,f}^2 - V_{y,i}^2 = 2 a_{CM,y} (Y_f - Y_i)$

$V_{y,i} = 0$; $a_{CM,y} = -\frac{2}{3} g$; $\quad Y_f - Y_i = -h$, per cui otteniamo:

$V_{y,f}^2 = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}g\right) \cdot (-h) = \frac{4}{3}gh$, e quindi

$$\boxed{|V_{CM,y,f}| = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}gh}}$$

d) Applichiamo il teorema dell'energia cinetica al disco mentre sta scendendo, tra l'istante iniziale in cui parte da fermo e l'istante finale in cui il suo centro di massa e' sceso di un tratto h.

Le forze agenti sul disco durante la discesa sono la forza peso del disco e la tensione del filo; ma quest'ultima forza non compie lavoro in quanto, istante per istante, agisce su un punto che e' istantaneamente fermo (il disco rotola senza strisciare sul filo. Dunque l'unica forza che compie lavoro durante la discesa del disco e' la forza peso. Pertanto il lavoro complessivo svolto tra i due istanti considerati e'

$$W_{TOT} = W_P = Mgh$$

Per il teorema dell'energia cinetica deve risultare

$$W_{TOT} = K_{TOT,f} - K_{TOT,i}$$, con $K_{TOT,i} = 0$ dato che il disco e' fermo all'istante iniziale.

Risulta poi $K_{TOT,f} = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I_{z'}}{R^2}\right)|V_{CM,f}|^2$ per il disco

che sta rotolando senza strisciare, cioè

$$K_{TOT,f} = \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{R^2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\right)|V_{CM,f}|^2 = \frac{3}{4}M|V_{CM,f}|^2$$

Allora l'equazione risolvente diventa:

$$\frac{3}{4}\cancel{M}|V_{CM,f}|^2 = \cancel{M}gh \Rightarrow |V_{CM,f}|^2 = \frac{4}{3}gh, \text{ e infine}$$

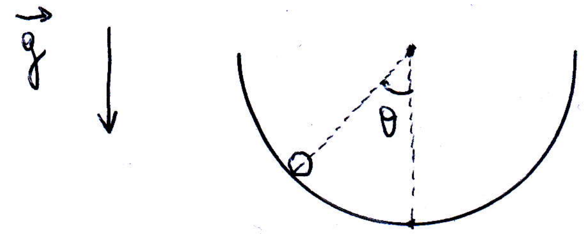
$$\boxed{|V_{CM,f}| = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 2\sqrt{\frac{1}{3}gh}}\,,$$

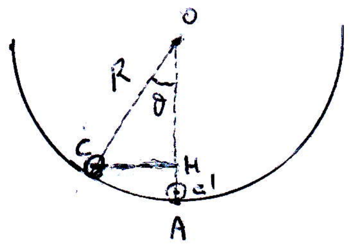
risultato coincidente con quello ottenuto nel punto c).

Serway, pr. 10.81

Una sfera piena omogenea avente raggio r si trova sulla superficie interna scabra di una ciotola semisferica avente raggio R, molto maggiore di r. La sfera parte da ferma in un punto definito dall'angolo θ con la verticale e rotola senza strisciare.

Si determini la velocita' angolare della sfera nell'istante in cui tocca il fondo della ciotola.





Durante il moto di puro rotolamento della sferetta lungo la superficie interna della ciotola semisferica,

l'unica forza che compie lavoro è la forza peso della sferetta; la forza di attrito statico non compie lavoro in quanto, a ogni istante, agisce su un punto istantaneamente fermo.

Calcoliamo il dislivello verticale tra il punto di partenza P e il fondo della ciotola (punto A):

$\overline{OC'} = \overline{OC} = R - r$

$\overline{OH} = \overline{OC} \cos\theta$

$$\overline{C'H} = \overline{OC'} - \overline{OH} = (R-r)\cdot(1-\cos\theta)$$

Energia cinetica iniziale della sferetta: $K_i = 0$

Energia cinetica finale della sferetta:

$$K_f = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I_{z'}}{r^2}\right)|\vec{v}_f|^2 = \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{\cancel{r^2}}\cdot\frac{2}{5}M\cancel{r^2}\right)|\vec{v}_f|^2 = \frac{7}{10}M|\vec{v}_f|^2$$

Lavoro compiuto complessivamente tra l'istante iniziale e l'istante finale:

$$W_{TOT} = W_P = Mg(R-r)(1-\cos\theta)$$

Per la condizione di puro rotolamento, risulta $|\vec{v}_f| = \omega_f r$, e

quindi $K_f = \frac{7}{10}Mr^2\omega_f^2$

Per il teorema dell' energia cinetica, quindi risulta:

$$K_f - K_i = W_{TOT}, \text{ cioe':}$$

$$\frac{7}{10} \cancel{M} r^2 \omega_f^2 = \cancel{M} g(R-r)(1-\cos\theta), \text{ e quindi:}$$

$$\omega_f^2 = \frac{10\, g(R-r)(1-\cos\theta)}{7r^2}, \quad \text{e infine:}$$

$$\boxed{|\omega_f| = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{10}{7} g(R-r)(1-\cos\theta)}}$$

Serway, pr. 10.84

Una sbarra sottile avente massa $M = 0,63$ kg e lunghezza $L = 1,24$ m è inizialmente ferma in posizione verticale appesa con il suo estremo superiore a un gancio. Improvvisamente una forza orizzontale impulsiva

$\vec{F}_i = (14,7\ \hat{i})$ N viene esercitata sulla sbarra.

a) Se la forza è applicata nell'estremità inferiore della sbarra, si calcoli l'accelerazione del centro di massa della sbarra, e

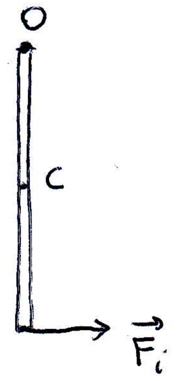
b) la forza di reazione orizzontale esercitata dal gancio.

c) Se la forza è applicata nel centro della sbarra, si calcoli l'accelerazione del centro di massa, e

d) la forza di reazione orizzontale esercitata dal gancio.

e) Dove deve essere applicata la forza affinché la reazione orizzontale del gancio sia nulla? Tale punto è chiamato CENTRO DI PERCUSSIONE.

a)



Calcoliamo il momento della forza $\vec{F}_i$ rispetto al polo O.

$$\tau_z = L|\vec{F}_i|$$

Deve risultare $I_z \alpha = \tau_z$, per cui otteniamo:

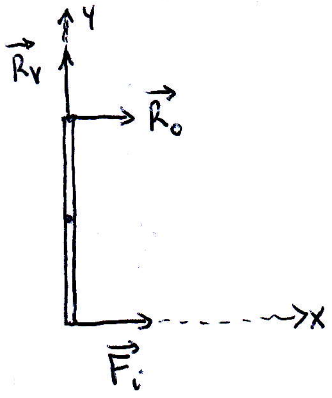
$$\alpha = \frac{\tau_z}{I_z} = \frac{L|\vec{F}_i|}{I_z} = \frac{\cancel{L}|\vec{F}_i|}{\frac{1}{3}ML^{\cancel{2}}} = \frac{3|\vec{F}_i|}{ML}$$

L'accelerazione istantanea del centro di massa della sbarra è quindi:

$$a_{CM,x} = \alpha \cdot \overline{OC} = \alpha \frac{L}{2} = \frac{3|\vec{F}_i|}{M\cancel{L}} \cdot \frac{\cancel{L}}{2} = \frac{3|\vec{F}_i|}{2M}$$

$$\boxed{\vec{a}_{CM} = \frac{3|\vec{F}_i|}{2M}\hat{i} = (35\,\hat{i})\frac{m}{s^2}}$$

b) Per la prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi risulta: $\vec{F}_i + \vec{R}_o = M\vec{a}_{CM}$, dove $\vec{R}_o$ è il componente orizzontale della forza di reazione esercitata dal gancio mentre sta agendo la forza impulsiva $\vec{F}_i$.



Considerando solo le componenti lungo l'asse x otteniamo:

$$F_{i,x} + R_{0,x} = M a_{CM,x} \,,$$ da cui ricaviamo

$$R_{0,x} = M a_{CM,x} - F_{i,x} = \frac{3}{2} F_{i,x} - F_{i,x} = \frac{1}{2} F_{i,x} \,,$$ cioè

$$\boxed{\vec{R}_0 = \frac{1}{2} \vec{F}_i = (7{,}35\,\hat{i})\,N}$$

c) Se la forza è esercitata nel centro della sbarra, risulta (sempre rispetto al polo O):

$$\tau_z = \frac{L}{2} |\vec{F}_i| \,,$$ per cui adesso risulta:

$$I_z \alpha = \tau_z \Rightarrow \frac{1}{3} M L^{\cancel{2}} \alpha = \frac{\cancel{L}}{2} |\vec{F}_i| \Rightarrow \alpha = \frac{3 |\vec{F}_i|}{2 M L} \,,$$

e l'accelerazione del centro di massa della sbarra è:

$$a_{CM,x} = \frac{L}{2} \alpha = \frac{\cancel{L}}{2} \cdot \frac{3 |\vec{F}_i|}{2 M \cancel{L}} \,,$$ cioè:

$$a_{CM,x} = \frac{3 |\vec{F}_i|}{4 M} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{CM} = \frac{3 |\vec{F}_i| \hat{i}}{4\, M} = (17{,}5\,\hat{i})\,\frac{m}{s^2}}$$

d) Procedendo come nel punto b), otteniamo:

$$F_{i,x} + R_{0,x} = M a_{CM,x} \,,$$ da cui

$$R_{0,x} = M a_{CM,x} - F_{i,x} = \frac{3}{4} F_{i,x} - F_{i,x} = -\frac{1}{4} F_{i,x} \,,$$ cioè

$$\boxed{\vec{R}_0 = -\frac{1}{4} \vec{F}_i = (-3{,}675\,\hat{i})\,N}$$

e) Indichiamo con d la distanza del punto di applicazione della forza $\vec{F}_i$ dal gancio.

Risulta: $\tau_z = d\,|\vec{F}_i|$, per cui:

$$I_z\,\alpha = d\,|\vec{F}_i| \Rightarrow \quad \alpha = \frac{d\,|\vec{F}_i|}{I_z} = \frac{d\,|\vec{F}_i|}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3d\,|\vec{F}_i|}{ML^2}$$

Accelerazione del centro di massa:

$$a_{CM,x} = \alpha\,\frac{L}{2} = \frac{\cancel{L}}{2}\cdot\frac{3d\,|\vec{F}_i|}{ML^{\cancel{2}}} = \frac{3d\,|\vec{F}_i|}{2ML}$$

Per la componente x della reazione del gancio otteniamo:

$$F_{i,x} + R_{0,x} = M\,a_{CM,x}\,,\quad \text{da cui}$$

$$R_{0,x} = M a_{CM,x} - F_{i,x} = \frac{3d}{2L}F_{i,x} - F_{i,x} = \left(\frac{3d}{2L} - 1\right)F_{i,x}$$

Dunque, risulta $R_{0,x} = 0$ quando

$$\frac{3d}{2L} - 1 = 0 \Rightarrow \quad \frac{3d}{2L} = 1 \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{2}{3}L}$$

[La reazione orizzontale del gancio risulta nulla se la forza è applicata a una distanza $d = \frac{2}{3}L$ dal gancio]

Serway, pr. 11.46

Due ragazzi scivolano per gioco sulla superficie ghiacciata di un parcheggio. A un certo istante il ragazzo avente massa $m_1 = 45$ kg sta scivolando con velocità di modulo $|\vec{V}_{1i}| = 8$ m/s, mentre il ragazzo avente massa $m_2 = 31$ kg sta scivolando con velocità di modulo $|\vec{V}_{2i}| = 11$ m/s. I due ragazzi si muovono lungo la stessa direzione ma in versi opposti. Quando giungono vicini si aggrappano l'uno all'altro e procedono insieme.

a) Si calcoli il modulo della velocità dei due ragazzi quando si muovono insieme.

b) Qual è il rapporto tra la loro energia cinetica totale finale e la loro energia cinetica totale iniziale?

Essendo il gioco troppo divertente, lo ripetono. Stavolta però le loro direzioni iniziali di moto distano di un tratto $d = 1{,}2$ m. Una volta vicini, si aggrappano nuovamente l'uno all'altro e iniziano così a ruotare attorno al centro di massa del sistema costituito da ambedue. Si schematizzino i due ragazzi come punti materiali e si supponga che le loro braccia restino allungate durante tutto il processo.

c) Si calcoli la velocità del loro centro di massa.

d) Si calcoli la velocità angolare di rotazione dei due ragazzi attorno al loro centro di massa.

e) Qual è il rapporto tra la loro energia cinetica totale finale e la loro energia cinetica totale iniziale?

f) Perché le risposte alle domande b) ed e) sono così diverse?

a) Nelle condizioni descritte nel punto a), il processo equivale a un urto unidimensionale totalmente anelastico.

$V_{1i,x} = 8\ m/s$, $m_1 = 45\ kg$

$V_{2i,x} = -11\ m/s$, $m_2 = 31\ kg$

Poiché la risultante delle forze esterne agenti sul sistema costituito dai due ragazzi è nulla, la quantità di moto totale del sistema si conserva. Poiché dopo il contatto i due ragazzi procedono insieme, le loro velocità in questa fase sarà la stessa. Dunque, risulta:

$$P_{TOT,f,x} = P_{TOT,i,x}$$

$$(m_1 + m_2)\, V_{f,x} = m_1 V_{1i,x} + m_2 V_{2i,x} \quad , \quad \text{e quindi:}$$

$$V_{f,x} = \frac{m_1 V_{1i,x} + m_2 V_{2i,x}}{m_1 + m_2} = 0{,}25\ m/s$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{V}_f| = \frac{m_1 V_{1i,x} + m_2 V_{2i,x}}{m_1 + m_2} = 0{,}25\ m/s}$$

b) Energia cinetica totale iniziale:

$$K_{TOT,i} = \frac{1}{2} m_1 (V_{1i,x})^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_{2i,x})^2$$

Energia cinetica totale finale:

$$K_{TOT,f} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,|\vec{V}_f|^2 = \frac{1}{2}\,\frac{(m_1 V_{1i,x} + m_2 V_{2i,x})^2}{m_1+m_2}$$

Rapporto:

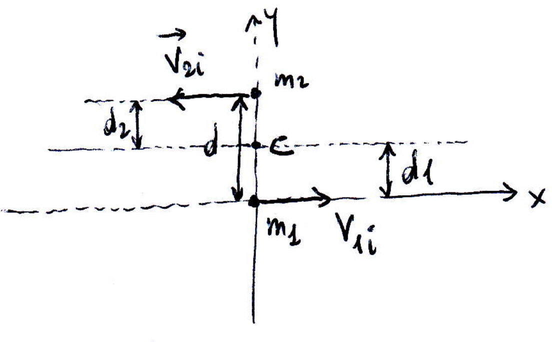
$$\boxed{\frac{K_{TOT,f}}{K_{TOT,i}} = \frac{(m_1 V_{1i,x} + m_2 V_{2i,x})^2}{(m_1+m_2)\left[m_1 (V_{1i,x})^2 + m_2 (V_{2i,x})^2\right]} = 0{,}7163 \times 10^{-3}}$$

c) La velocità del centro di massa dei due ragazzi è

$$\boxed{V_{CM,x} = \frac{m_1 V_{1i,x} + m_2 V_{2i,x}}{m_1+m_2} = 0{,}25\ m/s \qquad V_{CM,y} = 0}$$

Questa velocità si conserva durante tutto il processo, in quanto il sistema dei due ragazzi è isolato.

d) Anzitutto, occorre determinare la posizione del centro di massa dei due ragazzi lungo la direzione ortogonale a quella delle loro velocità iniziali. Conviene effettuare il calcolo nell'istante in cui i due ragazzi arrivano alla distanza d minima tra loro, subito prima di aggrapparsi mantenendosi a distanza d tra loro.



Nello schema qua sopra risulta: $y_1 = 0$, $y_2 = d$

Dunque, l'ordinata del centro di massa è: $y_{CM} = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$

Dunque: $$y_{CM} = \frac{m_2 d}{m_1+m_2}$$

Distanza di m_1 dal centro di massa:

$$d_1 = y_{CM} = \frac{m_2 d}{m_1+m_2}$$

Distanza di m_2 dal centro di massa:

$$d_2 = d - y_{CM} = d\left(1-\frac{m_2}{m_1+m_2}\right) = \frac{m_1 d}{m_1+m_2}$$

Pertanto, rispetto a un asse passante per il centro di massa e perpendicolare al piano del moto dei due ragazzi prima dell'urto, il momento d'inerzia del sistema costituito dai due ragazzi dopo l'urto (sistema rigido) è:

$$I_{z'} = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 =$$

$$= m_1\left(\frac{m_2 d}{m_1+m_2}\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1 d}{m_1+m_2}\right)^2 = \frac{m_1 m_2^2 d^2 + m_1^2 m_2 d^2}{(m_1+m_2)^2} \cdot$$

$$= \frac{m_1 m_2 d^2 \cancel{(m_1+m_2)}}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}} = \frac{m_1 m_2 d^2}{m_1+m_2}$$

Essendo il sistema isolato, il momento angolare totale del sistema dei due ragazzi si conserva durante l'urto.

Per il calcolo del momento angolare totale conviene scegliere il polo lungo la retta parallela all'asse x coincidente con la direzione del moto del centro di massa (che si muove di moto rettilineo uniforme, essendo il sistema isolato).

Rispetto a questo polo, vediamo che risulta:

$$L_{TOT,z,i} = d_1 m_1 |\vec{V}_{1i}| + d_2 m_2 |\vec{V}_{2i}| =$$

$$= \frac{m_1 m_2 d |\vec{V}_{1i}|}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 m_2 d |\vec{V}_{2i}|}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{m_1 m_2 d (|\vec{V}_{1i}| + |\vec{V}_{2i}|)}{m_1 + m_2}$$

Il segno di $L_{TOT,z,i}$ è positivo per come si sono scelti i versi di $\vec{V}_{1i}$ e $\vec{V}_{2i}$

Dopo l'urto, risulta per il primo teorema di König:

$$L_{TOT,z,f} = \vec{R}_{CM} \times \vec{P}_{TOT} + I_{z'} \omega_f , \qquad \text{dove } \vec{P}_{TOT} = (m_1 + m_2) \vec{V}_{CM}$$

$I_{z'}$ è il momento d'inerzia calcolato in precedenza, e ω_f è la velocità angolare di rotazione, dopo l'urto, del sistema rigido dei due ragazzi. Risulta, per come è stato scelto il polo per il calcolo dei momenti, $\vec{R}_{CM} \times \vec{P}_{TOT} = 0$, per cui possiamo scrivere:

$L_{TOT,z,f} = L_{TOT,z,i}$, cioè

$$\left(\frac{\cancel{m_1}\cancel{m_2}\, d^{\cancel{2}}}{\cancel{m_1+m_2}}\right)\omega_f = \frac{\cancel{m_1}\cancel{m_2}\,\cancel{d}\,(|\vec{V}_{1i}|+|\vec{V}_{2i}|)}{\cancel{m_1+m_2}}$$

Allora:
$$\boxed{\omega_f = \frac{|\vec{V}_{1i}| + |\vec{V}_{2i}|}{d} = 15,8333 \ rad/s}$$

e) Adesso, risulta (per il 2° teorema di König):

$$K_{TOT,f} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)|\vec{V}_{CM}|^2 + \frac{1}{2} I_{z'}\,\omega_f^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cancel{(m_1+m_2)}\frac{(m_1 V_{1i,x} + m_2 V_{2i,x})^2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{m_1 m_2 \cancel{d^2}}{m_1+m_2}\frac{(|\vec{V}_{1i}|+|\vec{V}_{2i}|)^2}{\cancel{d^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{m_1+m_2}\Big[m_1^2|\vec{V}_{1i}|^2 + m_2^2|\vec{V}_{2i}|^2 + \cancel{2 m_1 m_2 V_{1i,x} V_{2i,x}} + m_1 m_2 |\vec{V}_{1i}|^2 +$$

$$\cancel{+2|\vec{V}_{1i}||\vec{V}_{2i}| m_1 m_2} + m_1 m_2 |\vec{V}_{2i}|^2\Big] =$$

(infatti risulta $V_{1i,x} V_{2i,x} = -|\vec{V}_{1i}||\vec{V}_{2i}|$)

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\cancel{m_1+m_2}}\Big[m_1\cancel{(m_1+m_2)}|\vec{V}_{1i}|^2 + m_2\cancel{(m_1+m_2)}|\vec{V}_{2i}|^2\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}m_1|\vec{V}_{1i}|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{V}_{2i}|^2 = K_{TOT,i}$$

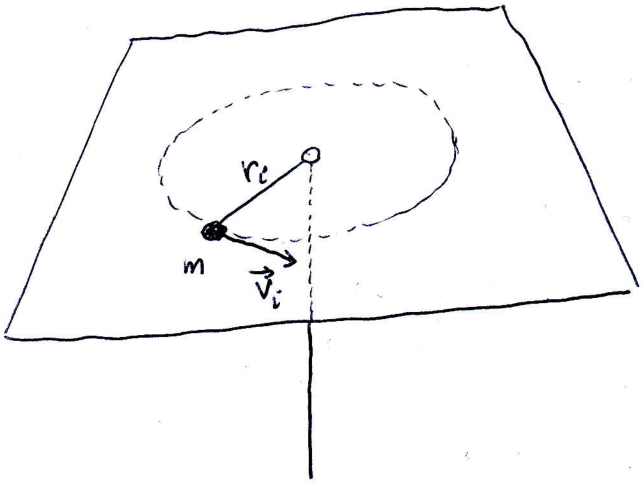
Pertanto, in questo caso risulta
$$\boxed{\frac{K_{TOT,f}}{K_{TOT,i}} = 1}$$

F) Dunque, nella prima situazione l'urto tra i due ragazzi è frontale, e c'è una enorme dissipazione di energia nell'urto: l'energia cinetica totale dopo l'urto è meno di $1/1000$ dell'energia cinetica totale prima dell'urto. Ciò accade perché in un urto unidimensionale totalmente anelastico si ha la massima dissipazione di energia, e l'energia rimanente è esclusivamente quella associata al moto del centro di massa del sistema, che continua a muoversi di moto rettilineo uniforme in quanto il sistema è isolato. Viene quindi dissipata tutta l'energia interna del sistema, quella relativa a un osservatore solidale con il centro di massa.

Nella seconda situazione, invece, l'energia interna del sistema non viene dissipata in quanto l'interazione tra i due ragazzi avviene tramite forze che sono a ogni istante dirette ortogonalmente alla direzione delle velocità istantanee dei due ragazzi, e quindi non compiono lavoro; non essendoci altre forze in gioco, ne consegue che l'energia cinetica totale del sistema non varia nell'urto. Ciò che accade, dopo l'urto, è che l'energia interna collegata al moto traslatorio, data da $\frac{1}{2}\mu|\vec{v}_{1i}-\vec{v}_{2i}|^2$, si converte interamente in energia cinetica interna collegata al moto rotatorio, $\frac{1}{2} I_z \omega_f^2$.

Serway, pr. 11.52

Un piccolo disco avente massa $m = 0{,}05$ Kg, attaccato a un filo passante per un piccolo foro, giace su un piano orizzontale privo di attrito:



Inizialmente il piccolo disco si muove di moto circolare di raggio $r_i = 0{,}3$ m con velocità di modulo $|\vec{v}_i| = v_i = 1{,}5$ m/s.

Il filo viene poi tirato molto lentamente verso il basso, e il raggio della circonferenza diminuisce fino al valore $r_f = 0{,}1$ m.

a) Qual è il modulo della velocità del disco quando si trova a percorrere la traiettoria di raggio r_f?

b) Si trovi il modulo della tensione del filo in tale situazione.

c) Quanto lavoro è stato fatto per portare il disco dalla traiettoria di raggio r_i alla traiettoria di raggio r_f?

a) La forza che mantiene il dischetto sulla traiettoria circolare è costantemente diretta verso il piccolo foro attraverso cui passa il filo. Pertanto, il momento di questa forza rispetto al foro, scelto come polo per il calcolo del momento, è nullo. Quindi il momento angolare del dischetto rispetto allo stesso polo si conserva durante il moto del dischetto. La forza esercitata dal filo sul dischetto non è, a rigore, l'unica forza agente; ci sono anche la forza peso del dischetto e la reazione vincolare del piano orizzontale, che però si bilanciano esattamente e complessivamente non contribuiscono al momento risultante delle forze.

Risulta: $\quad L_z = r(t)\, m\, v_t(t) = m\,(r(t))^2\,\omega(t) = \text{costante}.$

Dunque, nel caso in questione si parte da una situazione iniziale con $r_i = 0{,}3\ m$ e $v_{t,i} = 1{,}5\ m/s$ (supponiamo che la rotazione avvenga in senso antiorario), e poi il dischetto si trova (dopo che il filo è stato tirato lentamente) su una traiettoria con raggio $r_f = 0{,}1\ m$.

$$L_z = \text{costante} \Rightarrow \quad r_f\, v_{t,f} = r_i\, v_{t,i} \quad ; \text{ quindi}$$

$$\boxed{v_{t,f} = \frac{r_i\, v_{t,i}}{r_f} = \frac{(0{,}3\ m)\,(1{,}5\ m/s)}{(0{,}1\ m)} = 4{,}5\ m/s}$$

b) Nella situazione di partenza il dischetto si muove su una traiettoria circolare di raggio r_i, con velocità tangenziale $V_{t,i}$, per cui la forza con cui il filo mantiene il dischetto su questa traiettoria deve avere il seguente modulo:

$$\boxed{T_i = m\frac{(V_{t,i})^2}{r_i} = (0{,}05\ kg)\frac{(1{,}5\ m/s)^2}{(0{,}3\ m)} = 0{,}375\ N}$$

Nella situazione di arrivo risulta quindi:

$$\boxed{T_f = m\frac{(V_{t,f})^2}{r_f} = \frac{m}{r_f}\frac{r_i^2(V_{t,i})^2}{r_f^2} = \frac{m\,r_i^2\,(V_{t,i})^2}{r_f^3} = 10{,}125\ N}$$

c) Il lavoro compiuto sul dischetto è uguale alla variazione della sua energia cinetica tra l'istante iniziale e l'istante finale. Risulta quindi:

$$W(t_i \to t_f) = K_f - K_i = \frac{1}{2}m(V_{t,f})^2 - \frac{1}{2}m(V_{t,i})^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\frac{r_i^2}{r_f^2}(V_{t,i})^2 - (V_{t,i})^2\right] = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{r_i}{r_f}\right)^2 - 1\right](V_{t,i})^2$$

Dunque:

$$\boxed{W(t_i \to t_f) = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{r_i}{r_f}\right)^2 - 1\right](V_{t,i})^2 = 0{,}45\ J}$$

Serway, 11. 61

Un disco omogeneo e' posto in rotazione intorno al suo asse di simmetria con velocita' angolare ω_i e, successivamente, e' appoggiato e abbandonato su un piano orizzontale scabro.

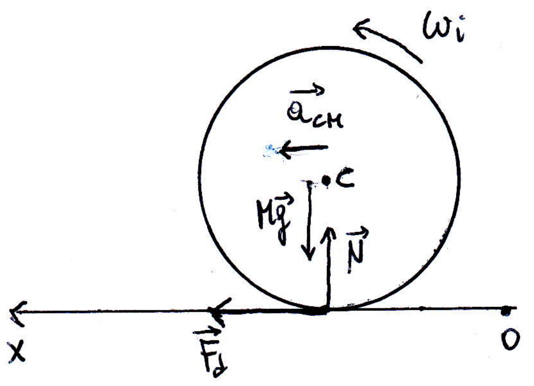
a) Qual e' la velocita' angolare del disco una volta che si e' instaurato il moto di puro rotolamento?

b) Si determini la frazione dell'energia cinetica persa dall'istante in cui il disco e' stato rilasciato all'istante in cui inizia il moto di puro rotolamento.

c) Indicando con μ_d il coefficiente di attrito dinamico tra il disco e la superficie scabra, si calcoli quanto tempo occorre da quando il disco e' stato appoggiato all'istante in cui si instaura il moto di puro rotolamento.

d) In tale intervallo di tempo, qual e' stato lo spostamento orizzontale del disco?

a) Nella fase iniziale del moto, sul disco agisce una forza di attrito dinamico che ne ostacola il moto rotatorio



Introduciamo un asse cartesiano x orizzontale, con verso positivo come nello schema a fianco.

In presenza di attrito dinamico, se il disco ruota in senso antiorario il punto di contatto tra il disco e il piano orizzontale "strofina" il piano scabro da sinistra verso destra, per cui il piano esercita sul disco, nel punto di contatto, una forza di attrito dinamico diretta verso sinistra, tale che $F_{d,x} = \mu_d N = \mu_d Mg$, dove M è la massa del disco, N è il modulo della reazione vincolare del piano orizzontale, e μ_d è il coefficiente di attrito dinamico tra il disco e il piano orizzontale.

Per la prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi applicata al moto del centro di massa del disco, possiamo scrivere:

$$M a_{CM,x} = F_{d,x} \Rightarrow \cancel{M} a_{CM,x} = \mu_d \cancel{M} g \Rightarrow a_{CM,x} = \mu_d g$$

Dunque, in questa fase il centro di massa del disco inizia a muoversi con moto rettilineo uniformemente accelerato.

Scriviamo ora la seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi per il moto rototraslatorio del disco, scegliendo come polo O per il calcolo dei momenti un punto nell'asse x.

Per fissare le idee, prendiamo questo punto nella posizione del punto di contatto del disco con il piano orizzontale all'istante iniziale.

Rispetto a questo polo, il momento della forza di attrito dinamico e' nullo in quanto $\vec{F}_d$ giace nell'asse x; inoltre, i momenti delle forze $M\vec{g}$ e $\vec{N}$ sono tra loro opposti (il braccio delle due forze rispetto al polo O e' lo stesso, i versi di $M\vec{g}$ e di $\vec{N}$ sono tra loro opposti e risulta $N = Mg$).

Dunque, risulta in definitiva: $\tau_{TOT,e,z} = 0$.

Scriviamo il momento angolare totale del disco rispetto al polo O a un istante t generico, usando il primo teorema di König:

$L_{TOT,z} = \vec{R}_{CM}(t) \times M\vec{V}_{CM}(t) + I_{z'}\,\omega(t)$, dove $I_{z'}$ e' il momento d'inerzia del disco rispetto a un asse perpendicolare al disco e passante per il suo centro di massa.

Il "braccio" del vettore $\vec{P}(t) = M\vec{V}_{CM}(t)$ e' uguale a R, mentre risulta $V_{CM,x}(t) = a_{CM,x}\,t$ sulla base del risultato ottenuto in precedenza. $\Rightarrow$ $V_{CM,x}(t) = \mu_d g t$ (1)

Essendo $I_{z'} = \frac{1}{2} M R^2$, risulta quindi:

$$L_{TOT,z}(t) = R M \mu_d g t + \frac{1}{2} M R^2 \omega(t)$$

Pertanto, deve risultare

$$[L_{TOT,z}(t)]' = 0 \quad , \quad \text{e quindi:}$$

$$\cancel{R}\cancel{M} \mu_d g + \frac{1}{2} \cancel{M} R^{\cancel{2}} \alpha(t) = 0 \Rightarrow \alpha(t) = -\frac{2\mu_d g}{R}$$

Correttamente, l'accelerazione angolare di rotazione del disco attorno all'asse passante per il suo centro di massa e perpendicolare al disco e' negativa: l'attrito dinamico rallenta la rotazione iniziata in senso antiorario.

Dunque il moto rotatorio del disco, in questa fase del moto del sistema, e' uniformemente accelerato con accelerazione angolare negativa.

La velocita' angolare istantanea di rotazione, quindi, varia nel tempo secondo la legge seguente:

$$\omega(t) = \omega_i + \alpha t = \omega_i - \frac{2\mu_d g}{R} t \qquad (2)$$

Da (1) e (2), adesso, troviamo l'istante $\bar{t}$ in cui vale la condizione di puro rotolamento:

$$R\omega(\bar{t}) = V_{CM,x}(\bar{t}) \Rightarrow R\left[\omega_i - \frac{2\mu_d g}{R}\bar{t}\right] = \mu_d g \bar{t}$$

$$\omega_i R - 2\mu_d g \bar{t} = \mu_d g \bar{t} \Rightarrow 3\mu_d g \bar{t} = \omega_i R$$

Dunque, il moto di puro rotolamento inizia all'istante

$$\boxed{\bar{t} = \frac{\omega_i R}{3\mu_d g}}$$

Pertanto, la velocità angolare del disco dal momento in cui si instaura il moto di puro rotolamento è:

$$\boxed{\omega(t=\bar{t}) = \omega_i - \frac{2\mu_d g}{R}\bar{t} = \omega_i - \frac{2\cancel{\mu_d}\cancel{g}}{\cancel{R}}\frac{\omega_i \cancel{R}}{3\cancel{\mu_d}\cancel{g}} = \frac{1}{3}\omega_i}$$

b) L'energia cinetica iniziale è

$$K_i = \frac{1}{2} I_z \omega_i^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} MR^2 \omega_i^2 = \frac{1}{4} M R^2 \omega_i^2$$

L'energia cinetica nell'istante $t=\bar{t}$ è:

$$K_f = \frac{1}{2} M\left(V_{CM,x}(t=\bar{t})\right)^2 + \frac{1}{2} I_z [\omega(t=\bar{t})]^2 =$$

$$= \frac{1}{2} MR^2[\omega(t=\bar{t})]^2 + \frac{1}{4} MR^2[\omega(t=\bar{t})]^2 =$$

$$= \frac{3}{4} MR^2[\omega(t=\bar{t})]^2 = \frac{\cancel{3}^{1}}{4} MR^2 \cdot \frac{1}{\cancel{9}_3}\omega_i^2 = \frac{1}{12} MR^2\omega_i^2$$

Pertanto, risulta

$$\boxed{\frac{K_i - K_f}{K_i} = 1 - \frac{K_f}{K_i} = 1 - \frac{\frac{1}{12}\cancel{MR^2\omega_i^2}}{\frac{1}{4}\cancel{MR^2\omega_i^2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}}$$

Dunque, nell'istante in cui inizia il moto di puro rotolamento il disco ha perso $\frac{2}{3}$ della sua energia iniziale.

c) Risposte ottenute nella risoluzione del punto a):

$$\boxed{\bar{t} = \frac{\omega_i R}{3 \mu_d g}}$$

d) La legge del moto del centro di massa è:

$X_{CM}(t) = \frac{1}{2} a_{CM,x} t^2 = \frac{1}{2} \mu_d g t^2$, per cui risulta

$$X_{CM}(t=\bar{t}) = \frac{1}{2} \mu_d g \left(\frac{\omega_i R}{3 \mu_d g} \right)^2 = \frac{1}{2} \cancel{\mu_d g} \cdot \frac{\omega_i^2 R^2}{9 \mu_d^2 g^2}$$

$$\boxed{X_{CM}(t=\bar{t}) = \frac{\omega_i^2 R^2}{18 \mu_d g}}$$

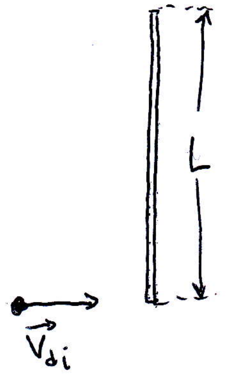
Serway, pr. 11.62

Nell' esempio a pag. 13 della parte "Moto rotazionale (terza parte)" abbiamo analizzato un urto elastico tra un piccolo disco e un'asta appoggiata su una superficie con attrito trascurabile. Si supponga, a partire dagli stessi dati di partenza, che ora il piccolo disco rimanga attaccato all'estremo dell'asta.

Si calcolino, dopo l'urto:

a) il modulo della velocita' del centro di massa del sistema, e

b) la velocita' angolare di rotazione del sistema.



massa dischetto : $m = 2\,kg$

velocità iniziale del dischetto : $|\vec{V}_{di}| = V_{di} = 3\ m/s$

massa asta : $M = 1\,kg$

lunghezza asta : $L = 4\ m$

Il sistema asta-dischetto è isolato durante tutto il processo di urto (le forze peso di asta e dischetto sono esattamente bilanciate dalle forze di reazione vincolare corrispondenti esercitate dalla superficie liscia). L'urto è totalmente anelastico.
Dunque, nell'urto si conserva la quantità di moto totale e si conserva anche il momento angolare totale

a) Conservazione della quantità di moto totale: implica che il centro di massa del sistema si muove di moto rettilineo uniforme durante tutto il processo.

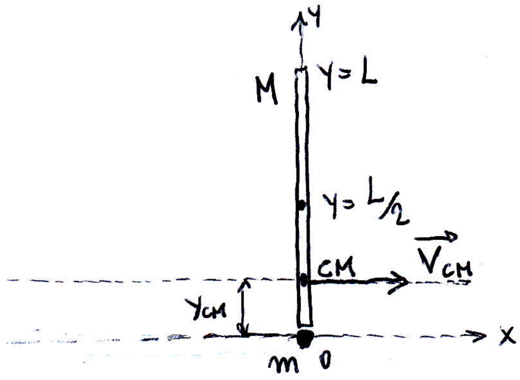
Velocità del centro di massa: basta calcolarla prima dell'urto, in quanto è una costante del moto del sistema.

$$V_{CM,x} = \frac{m V_{di}}{M+m} \qquad V_{CM,y} = 0$$

Allora, a ogni istante, risulta:

$$\boxed{|\vec{V}_{CM}| = \frac{m V_{di}}{M+m} = \frac{(2\,kg)\cdot(3\ m/s)}{(1\,kg + 2\,kg)} = 2\ m/s}$$

b) Calcoliamo la posizione del centro di massa del sistema asta-dischetto nell'istante in cui il dischetto colpisce l'asta:



$$\begin{cases} X_{CM} = 0 \\ Y_{CM} = \dfrac{M \cdot L/2}{M+m} = \dfrac{L}{6} \end{cases}$$

Dunque, il centro di massa del sistema asta-dischetto si trova alla distanza $L/6$ dall'estremo inferiore dell'asta nell'istante in cui avviene l'urto, tra l'estremo inferiore e il centro dell'asta.

Poiché $\vec{V}_{CM}$ e' costante e risulta $\vec{V}_{CM} = (2\,\hat{i})\ m/s$ (come calcolato in precedenza), questo significa che dopo l'urto, mentre il centro di massa continua a muoversi di moto rettilineo uniforme lungo la retta $Y = L/6$ (dato che $\vec{V}_{CM}$ e' parallela all'asse x), il sistema asta-dischetto potra' ruotare attorno a un asse perpendicolare al piano del foglio e passante per il centro di massa del sistema.

Calcoliamo il momento d'inerzia del sistema asta-dischetto dopo l'urto, rispetto all'asse menzionato sopra; svolgiamo il calcolo mantenendo indicati i parametri letterali:

Distanza tra centro dell'asta e centro di massa del sistema:

$$d = \frac{L}{2} - Y_{CM} = \frac{L}{2} - \frac{M\,L/2}{M+m} = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{M}{M+m}\right) = \frac{L}{2}\,\frac{m}{M+m}$$

Momento d'inerzia dell'asta rispetto al nuovo asse di rotazione:

$$I_{z,a} = \frac{1}{12} ML^2 + Md^2 = M\left(\frac{1}{12}L^2 + \frac{L^2}{4}\frac{m^2}{(M+m)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{12} ML^2 \left(1 + \frac{3m^2}{(M+m)^2}\right)$$ (abbiamo utilizzato il teorema di Huygens-Steiner)

Momento d'inerzia del sistema asta-dischetto rispetto al nuovo asse di rotazione:

$$I_{z,tot} = I_{z,a} + m\, y_{CM}^2 = \frac{1}{12} ML^2\left[1 + \frac{3m^2}{(M+m)^2}\right] + \frac{1}{4}\frac{mM^2L^2}{(M+m)^2} =$$

$$= \frac{1}{12} ML^2 \left[1 + \frac{3m^2}{(M+m)^2} + \frac{3mM}{(M+m)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{12} ML^2 \left[1 + \frac{3m\cancel{(M+m)}}{(M+m)^{\cancel{2}}}\right] = \frac{1}{12} ML^2 \left(\frac{M+4m}{M+m}\right)$$

Momento angolare totale del sistema rispetto a un polo O posto lungo la retta $y=0$ (direzione del moto del dischetto prima dell'urto);

- prima dell'urto: $L_{TOT,z,i} = 0$, poiché l'asta è ferma e il dischetto si sta muovendo lungo l'asse orizzontale $y=0$
- dopo l'urto: usiamo il primo teorema di König;

$$L_{TOT,z,f} = \vec{R}_{CM} \times (M+m)\vec{V}_{CM} + I_{z,tot}\,\omega_f$$

dove ω_f è la velocità angolare di rotazione del sistema dopo l'urto, attorno all'asse indicato.

Tenendo conto delle convenzioni sui segni, otteniamo:

$$L_{TOT,z,f} = -y_{CM}\,(M+m)\,V_{CM,x} + I_{z,tot}\,\omega_f = L_{TOT,z,i} = 0$$

Infatti y_{CM} e' il "braccio" del vettore $\vec{P}_{tot} = (M+m)\,\vec{V}_{CM}$ rispetto a un polo posto lungo l'asse x $(y=0)$.

Allora deve risultare

$$-\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{M}\cancel{L}}{\cancel{M+m}}\cdot(\cancel{M+m})\cdot\frac{m\,V_{di}}{(\cancel{M+m})} + \frac{1}{\cancel{12}\,6}\,\cancel{M}L^{\cancel{2}}\left(\frac{M+4m}{\cancel{M+m}}\right)\omega_f = 0$$

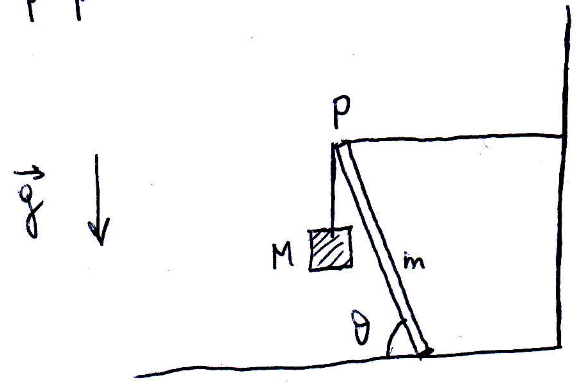
$$-m\,V_{di} + \frac{L}{6}(M+4m)\,\omega_f = 0 \quad , \text{ da cui:}$$

$$\frac{L}{6}(M+4m)\,\omega_f = m\,V_{di} \quad , \text{ e infine:}$$

$$\boxed{\omega_f = \frac{6\,m\,V_{di}}{L\,(M+4m)} = \frac{6\cdot(2\,kg)\,(3\,m/s)}{(4\,m)\,(1\,kg+2\,kg)} = 3\ rad/s}$$

Serway, 12.51

Una trave avente massa m e' inclinata rispetto al suolo di un angolo θ. Sul suo estremo superiore passa un cavo che sostiene un blocco avente massa M e che e' attaccato, con l'altro capo, perpendicolarmente a una parete.



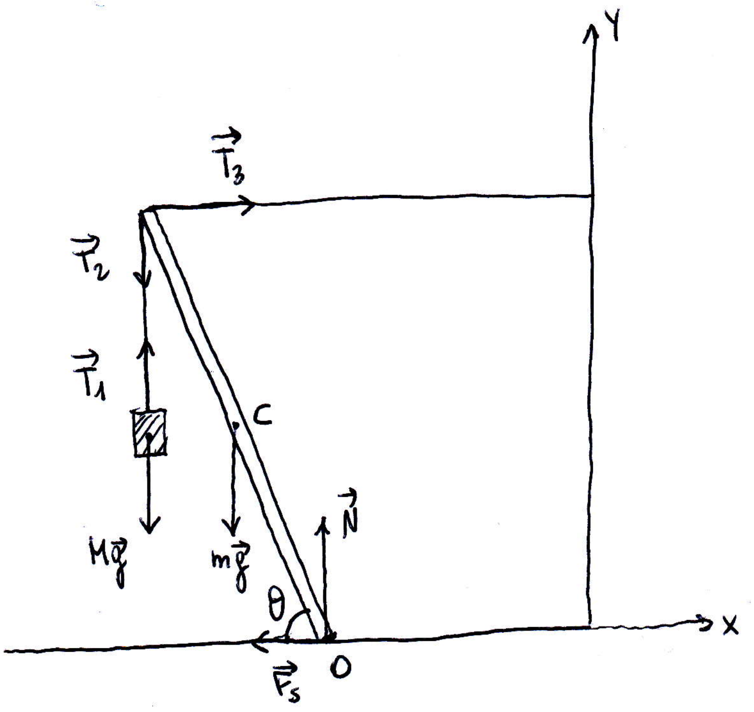
L'altro estremo della trave e' appoggiato lontano dalla parete nel piano orizzontale scabro. Se μ_s e' il coefficiente di attrito statico tra piano orizzontale e trave, e se μ_s e' minore di $\cot\theta$,

a) si determini il massimo valore della massa M che puo' essere appesa al cavo senza che la trave sliti nel piano.

b) Si determini, in funzione di m, M e μ_s, il modulo della forza di reazione del piano, e

c) il modulo della forza che la trave esercita sul cavo nel punto P.

a) Tracciamo il diagramma delle forze agenti nel sistema.



Introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali (x,y) come nello schema a fianco.

Risulta $\vec{T_1} + \vec{T_2} = 0$

Dunque $|\vec{T_1}| = |\vec{T_2}| = T$

Poniamo poi: $|\vec{T_3}| = T_3$, $|\vec{N}| = N$, $|\vec{F_s}| = F_s$,

L : lunghezza della trave

Imponiamo le condizioni necessarie per l'equilibrio statico del sistema:

1) Equilibrio del blocco di massa M:

$$M\vec{g} + \vec{T_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad T - Mg = 0$$

2) Equilibrio del centro di massa della trave:

$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_s} + \vec{T_2} + \vec{T_3} = 0$, da cui otteniamo:

$$\begin{cases} T_3 - F_s = 0 & \text{(componenti } x \text{ delle forze agenti)} \\ -mg + N - T = 0 \end{cases}$$

3) Equilibrio dei momenti delle forze agenti sulla trave rispetto al polo O: $\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right) mg + (L\cos\theta)T - (L\,\text{sen}\,\theta)T_3 = 0$

Dunque, il sistema di equazioni da risolvere e' il seguente:

$$\begin{cases} T - Mg = 0 \\ T_3 - F_s = 0 \\ -mg + N - T = 0 \\ \frac{1}{2} mg \cos\theta + T\cos\theta - T_3 \operatorname{sen}\theta = 0 \end{cases}$$

incognite:
T, T_3, F_s, N

$$\begin{cases} T = Mg \\ T_3 = F_s \\ N = mg + T = (m+M)g \\ \frac{1}{2} mg\cos\theta + Mg\cos\theta - F_s \operatorname{sen}\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_s = \dfrac{\left(\frac{m}{2} + M\right) g \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \\ T_3 = F_s \\ T = Mg \\ N = (m+M) g \end{cases}$$

Deve valere la condizione $F_s \leq \mu_s N$, cioe'

$$\left(\frac{m}{2} + M\right)\cancel{g} \operatorname{cotg}\theta \leq \mu_s (m+M)\cancel{g}$$, cioe'

$$(\operatorname{cotg}\theta - \mu_s) M \leq \left(\mu_s - \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\theta\right) m$$, da cui otteniamo

$$M \leq \frac{m\left(\mu_s - \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\theta\right)}{\operatorname{cotg}\theta - \mu_s} = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\mu_s \operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta}\right)$$; dunque

il massimo valore della massa M che puo' essere appesa al cavo senza che la trave sliti nel piano e'

$$\boxed{M_{max} = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\mu_s \operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta}\right)}$$

b) La forza di reazione complessiva del piano orizzontale è $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_s$, per cui il suo modulo è:

$$|\vec{R}| = \sqrt{N^2 + F_s^2} \leq \sqrt{(1+\mu_s^2)N^2} = N\sqrt{1+\mu_s^2}\,,$$ e quindi

il massimo modulo che la reazione complessiva del piano può avere senza che la trave scivoli è:

$$\boxed{|\vec{R}|_{max} = (m+M)\, g\, \sqrt{1+\mu_s^2}}$$

c) Nel punto P, tenuto conto della terza legge della dinamica, il modulo della forza che la trave esercita sul cavo è

$$|\vec{F}_P| = |\vec{T}_2 + \vec{T}_3| = \sqrt{T^2 + T_3^2} = \sqrt{M^2 g^2 + F_s^2}\,,$$ per cui

$$|\vec{F}_P| \leq \sqrt{M^2 g^2 + \mu_s^2 N^2} = \sqrt{M^2 g^2 + \mu_s^2 (m+M)^2 g^2}$$

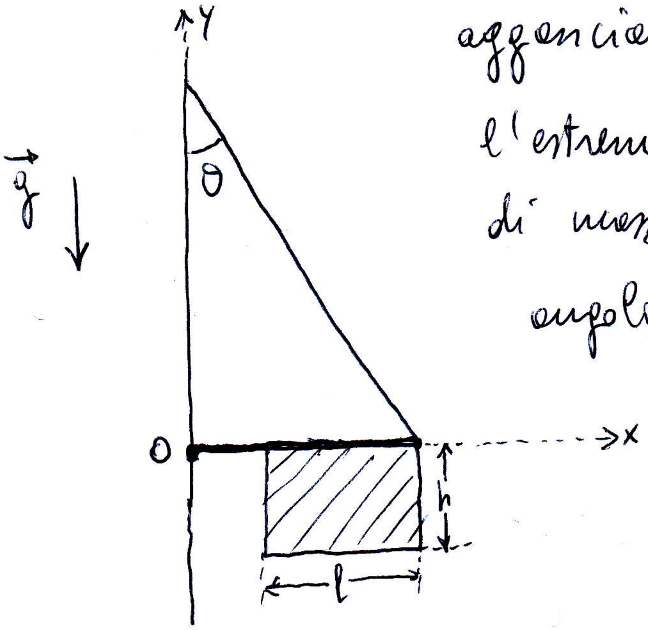
Pertanto, il massimo modulo che la forza esercitata dalla trave sul cavo può avere senza che la trave scivoli è:

$$\boxed{|\vec{F}_P|_{max} = g\sqrt{M^2 + \mu_s^2 (m+M)^2}}$$

[N.B.: nella risposta alla domanda a) si è tenuto conto del fatto che i moduli delle forze esercitate da una stessa fune sui due lati del corpo rigido su cui si appoggia non sono uguali!]

Serway, pr. 12.63

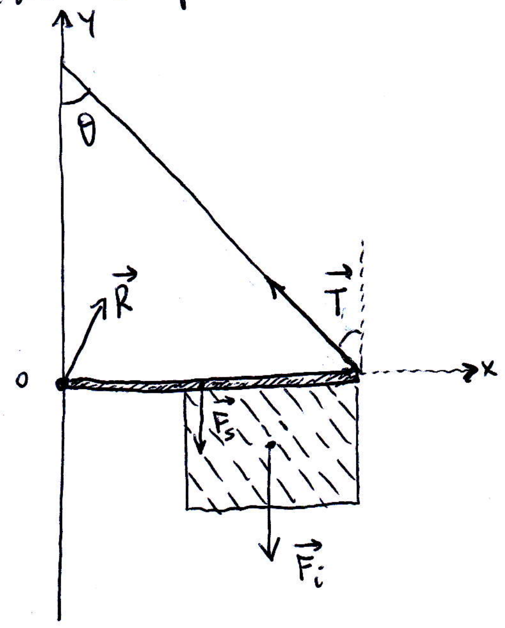
Un' insegna omogenea avente un peso $F_i = 500\ N$ ha lunghezza $l = 4\ m$ e altezza $h = 3\ m$, ed e' attaccata a una sbarra omogenea avente peso $F_s = 100\ N$ e lunghezza $L = 6\ m$, disposta orizzontalmente. L' estremita' sinistra della sbarra e' agganciata a un cardine, mentre l'estremita' destra e' attaccata a un cavo di massa trascurabile che forma un angolo $\vartheta = 30°$ con la direzione verticale.



a) Si calcoli il modulo della tensione del cavo.

b) Si calcolino le componenti orizzontale e verticale della forza esercitata dal cardine sull' estremita' sinistra della sbarra.

a) Tracciamo il diagramma delle forze agenti nel sistema (solo le forze ESTERNE agenti):



$\vec{F_i}$: forza peso dell'insegna

$\vec{F_s}$: forza peso della sbarra

$\vec{T}$: forza esercitata dalla fune nell'estremita' destra della sbarra

$\vec{R}$: forza esercitata dal cardine nell'estremita' sinistra della sbarra.

Introduciamo un sistema di assi cartesiani come nello schema.

e) Equilibrio del momento risultante delle forze esterne rispetto al polo O:

$$-\frac{L}{2} F_s - \left(L - \frac{\ell}{2}\right) F_i + L\, T \cos\theta = 0$$

Infatti, il braccio di $\vec{F_s}$ rispetto al polo O e' $\frac{L}{2}$, e il braccio di $\vec{F_i}$ rispetto al polo O e' $L - \frac{\ell}{2}$

Risulta quindi:

$$T = \frac{\frac{L}{2} F_s + \left(L - \frac{\ell}{2}\right) F_i}{L \cos\theta} = \frac{\frac{F_s}{2} + \left(1 - \frac{\ell}{2L}\right) F_i}{\cos\theta}$$

$$\boxed{T = \frac{F_s + \left(2 - \frac{\ell}{L}\right) F_i}{2\cos\theta} = \frac{(100\ N) + \left(2 - \frac{4\ m}{6\ m}\right) \cdot (500\ N)}{2 \cdot \cos(30°)} = 442{,}6352\ N}$$

b) Equilibrio del centro di massa del sistema:

$$\vec{R} + \vec{T} + \vec{F_s} + \vec{F_i} = 0 \qquad \text{(risultante delle forze esterne nulla).}$$

Allora:

$$\begin{cases} R_x - T\,\text{sen}\,\vartheta = 0 & \text{(componenti } x \text{ delle forze)} \\ R_y + T\cos\vartheta - F_s - F_i = 0 & \text{(componenti } y \text{ delle forze)} \end{cases}$$

$$R_x = T\,\text{sen}\,\vartheta = \frac{\left[F_s + \left(2 - \frac{\ell}{L}\right)F_i\right]\text{sen}\,\vartheta}{2\cos\vartheta}$$

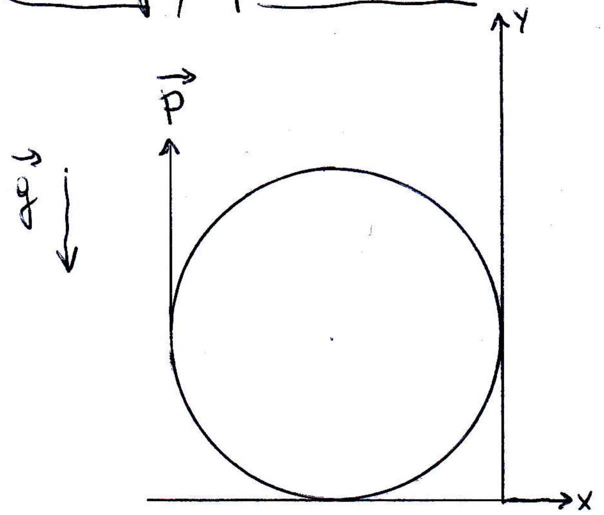
$$R_y = F_s + F_i - T\cos\vartheta = F_s + F_i - \frac{F_s + \left(2 - \frac{\ell}{L}\right)F_i}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2F_s + \cancel{2F_i} - F_s - \cancel{2F_i} + \frac{\ell}{L}F_i\right]$$

Allora, in definitiva:

$$\boxed{\begin{aligned} R_x &= \frac{1}{2}\left[F_s + \left(2 - \frac{\ell}{L}\right)F_i\right]\text{tg}\,\vartheta = 221{,}3176\ \text{N} \\ R_y &= \frac{1}{2}\left(F_s + \frac{\ell}{L}F_i\right) = 216{,}6667\ \text{N} \end{aligned}}$$

Serway, pr. 12.67

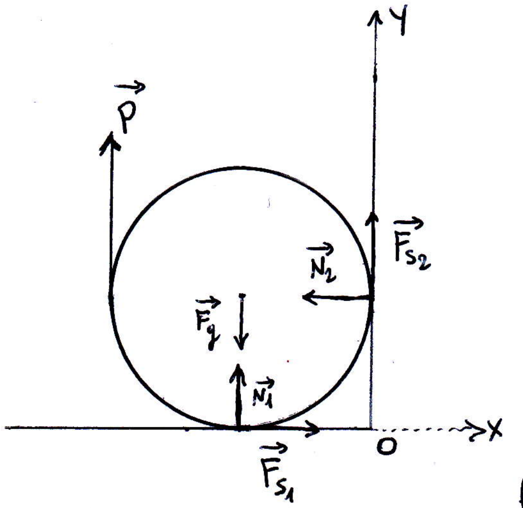


La figura qui a fianco mostra un cilindro omogeneo avente peso F_g su cui agisce, lungo la direzione tangente verticale di sinistra, una forza verticale $\vec{P}$ verso l'alto. Il coefficiente di attrito statico tra il cilindro e le due superfici è $\mu_s = \frac{1}{2}$.

Il modulo della forza $\vec{P}$ viene aumentato finché il cilindro non inizia a ruotare. Si determini, in funzione del peso F_g, il massimo valore di $P = |\vec{P}|$ che può essere applicato senza che il cilindro si metta in rotazione.

N.B.: prestare MOLTA attenzione ai versi delle forze di attrito statico agenti sul cilindro quando questo si trova ancora in quiete sotto l'azione anche della forza $\vec{P}$: guardate bene in che senso ruoterebbero i punti di contatto con le due pareti, e applicate le due forze di attrito statico in modo da contrastare tale rotazione.

Tracciamo il diagramma delle forze agenti sul cilindro mentre viene applicata la forza $\vec{P}$:



La forza $\vec{P}$ tenderebbe a far ruotare il cilindro in senso orario nello schema qui a fianco.
In presenza di attrito statico, finché il cilindro non si muove le forze di attrito statico $\vec{F_{s1}}$, $\vec{F_{s2}}$ rispettivamente esercitate sul cilindro dalla superficie orizzontale e dalla superficie verticale sono quelle indicate dalle frecce nello schema, in quanto ostacolano la rotazione del cilindro in senso orario. In condizioni di equilibrio statico risulta:

a) equilibrio delle forze esterne:

$$\vec{P} + \vec{F_g} + \vec{N_1} + \vec{N_2} + \vec{F_{s_1}} + \vec{F_{s2}} = 0$$

Introdotto un sistema di assi cartesiani ortogonali come nello schema, e indicando con la lettera maiuscola semplice il modulo della forza corrispondente (ad es. $|\vec{P}| = P$) otteniamo:

$$\begin{cases} -N_2 + F_{s_1} = 0 & \text{(componenti } x \text{ delle forze)} \\ P - F_g + N_1 + F_{s2} = 0 & \text{(componenti } y \text{ delle forze)} \end{cases}$$

b) Equilibrio dei momenti delle forze esterne rispetto al polo O

$$-2\cancel{R}P + \cancel{R}F_g - \cancel{R}N_1 + \cancel{R}N_2 = 0$$
, dove abbiamo indicato con R il raggio del cilindro.

Otteniamo quindi il seguente sistema di tre equazioni:

$$\begin{cases} -N_2 + F_{s1} = 0 \\ P - F_g + N_1 + F_{s2} = 0 \\ -2P + F_g - N_1 + N_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_2 = F_{s1} \\ F_{s2} = -P + F_g - N_1 \\ F_{s1} = 2P - F_g + N_1 \end{cases}$$

Imponiamo quindi le condizioni

$$\begin{cases} F_{s2} \leq \mu_s N_2 \\ F_{s1} \leq \mu_s N_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -P + F_g - N_1 \leq \mu_s F_{s1} \\ 2P - F_g + N_1 \leq \mu_s N_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -P + F_g - N_1 \leq \mu_s (2P - F_g + N_1) \\ 2P - F_g + N_1 \leq \mu_s N_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+\mu_s) N_1 \geq (1+\mu_s) F_g - (1+2\mu_s) P \\ (1-\mu_s) N_1 \leq F_g - 2P \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 \geq F_g - \left(\frac{1+2\mu_s}{1+\mu_s}\right) P \\ N_1 \leq \frac{F_g}{1-\mu_s} - \frac{2P}{1-\mu_s} \end{cases}$$

Dunque, in condizioni di equilibrio statico il modulo della forza di reazione N_1 deve rispettare il seguente vincolo:

$$F_g - \left(\frac{1+2\mu_s}{1+\mu_s}\right) P \leq N_1 \leq \frac{F_g}{1-\mu_s} - \frac{2P}{1-\mu_s}$$

Da queste condizione deriva l'ulteriore condizione (dovuta al fatto che se risulta $a \leq b \leq c$ deve risultare ovviamente $a \leq c$):

$$F_g - \left(\frac{1+2\mu_s}{1+\mu_s}\right) P \leq \frac{F_g}{1-\mu_s} - \frac{2P}{1-\mu_s}$$

Svolgiamo i calcoli per trovare una condizione su P:

$$(1-\mu_s^2) F_g - (1-\mu_s)(1+2\mu_s) P \leq (1+\mu_s) F_g - 2(1+\mu_s) P$$

$$(1-\mu_s^2) F_g - (1+2\mu_s-\mu_s-2\mu_s^2) P \leq (1+\mu_s) F_g - (2+2\mu_s) P$$

$$(2+\cancel{2\mu_s}-1-\cancel{2\mu_s}+\mu_s+2\mu_s^2) P \leq (\cancel{1}+\mu_s-\cancel{1}+\mu_s^2) F_g$$

$$(1+\mu_s+2\mu_s^2) P \leq \mu_s(1+\mu_s) F_g,$$ e infine otteniamo

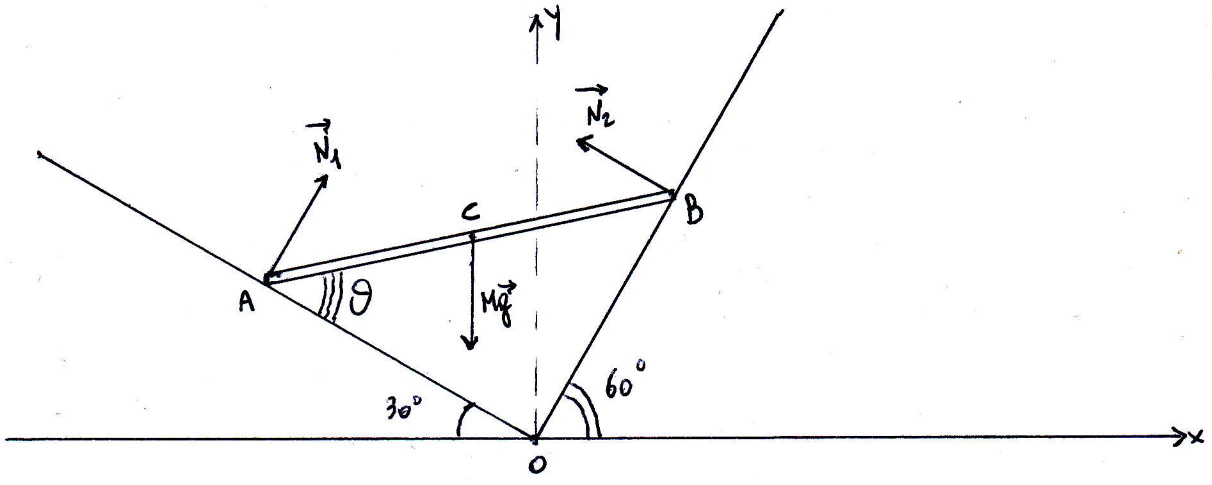
$$P \leq \frac{\mu_s(1+\mu_s) F_g}{1+\mu_s+2\mu_s^2}$$

Pertanto, il massimo valore che puo' essere applicato per il modulo della forza $\vec{P}$ senza che il cilindro si metta in rotazione e'

$$\boxed{P_{max} = \frac{\mu_s(1+\mu_s) F_g}{1+\mu_s+2\mu_s^2} = \left[\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right]\cdot F_g = \frac{3}{8} F_g}$$

Serway, pr. 12.68

Una trave omogenea avente peso F_g e lunghezza L è appoggiata al profilo privo di attrito mostrato nella figura:



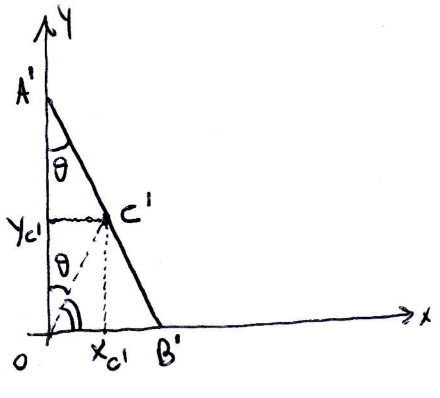
a) Si mostri che, se la trave è in equilibrio, il suo centro di massa si trova sulla verticale condotta da O.

b) Si determini, sempre all'equilibrio, il valore dell'angolo θ.

c) L'equilibrio della trave è stabile o instabile?

Cerchiamo anzitutto le coordinate del centro di massa della trave nel sistema di coordinate introdotto nella figura.

Un modo possibile per effettuare questo calcolo e' di tipo geometrico-trigonometrico. Dato che il triangolo AOB e' rettangolo in O per costruzione, consideriamo il seguente triangolo rettangolo:



A'OB', che e' congruente a AOB, con l'unica differenza che i cateti si trovano lungo gli assi cartesiani; risulta pertanto

$\overline{OB'} = \overline{OB}$, $\overline{OA'} = \overline{OA}$, $O\hat{A'}B' = O\hat{A}B = \vartheta$

e ovviamente $\overline{A'B'} = \overline{AB} = L$

Il triangolo A'B' ha il punto C' come punto medio dell'ipotenusa, e risulta $x_{c'} = \frac{L}{2} \operatorname{sen}\vartheta$, $y_{c'} = \frac{L}{2}\cos\vartheta$

Per ottenere le coordinate del punto C, basta osservare che il triangolo AOB si ottiene ruotando il triangolo A'OB' di 60° in senso antiorario attorno all'origine nel piano (x,y).

La posizione angolare rispetto all'asse x del punto C' e' data dall'angolo $B'\hat{O}C' = 90° - \vartheta$ (vedi figura), e risulta infatti $x_{c'} = \overline{OC'}\cos(90°-\vartheta) = \frac{L}{2}\operatorname{sen}\vartheta$; $y_{c'} = \overline{OC'}\operatorname{sen}(90°-\vartheta) = \frac{L}{2}\cos\vartheta$

Dopo una rotazione di 60° in senso antiorario, le coordinate del punto C sono quindi:

$$x_c = \frac{L}{2}\cos\left[(90°-\vartheta)+60°\right], \quad y_c = \frac{L}{2}\operatorname{sen}\left[(90°-\vartheta)+60°\right]$$

Dunque: $x_c = \frac{L}{2}\cos(150° - \theta)$, $y_c = \frac{L}{2}\,\mathrm{sen}\,(150° - \theta)$, cioè

$$x_c = \frac{L}{2}\left(\cos 150° \cos\theta + \mathrm{sen}\,150°\,\mathrm{sen}\,\theta\right), \quad y_c = \frac{L}{2}\left(\mathrm{sen}\,150° \cos\theta - \cos 150°\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

Risulta $\mathrm{sen}\,150° = \mathrm{sen}\,30° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, e quindi:

$$x_c = \frac{L}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,\theta\right), \quad y_c = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{2}\cos\theta - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

$$x_c = \frac{L}{4}\left(-\sqrt{3}\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta\right), \quad y_c = \frac{L}{4}\left(\cos\theta + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

Ora, poiché $\overline{OA} = L\cos\theta$, risulta

$$x_A = -\overline{OA}\cos 30° = -L\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta; \quad y_A = \overline{OA}\,\mathrm{sen}\,30° = \frac{1}{2}L\cos\theta$$

Poiché $\overline{OB} = L\,\mathrm{sen}\,\theta$, risulta

$$x_B = \overline{OB}\cos 60° = \frac{1}{2}L\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad y_B = \overline{OB}\,\mathrm{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}L\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Poniamo $|\vec{N}_1| = N_1$, $|\vec{N}_2| = N_2$; risulta perciò:

$$N_{1x} = N_1\,\mathrm{sen}\,30° = \frac{1}{2}N_1; \quad N_{1y} = N_1\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}N_1$$

$$N_{2x} = -N_2\,\mathrm{sen}\,60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}N_2; \quad N_{2y} = N_2\cos 60° = \frac{1}{2}N_2$$

$$(M\vec{g})_x = 0; \quad (M\vec{g})_y = -Mg$$

Adesso abbiamo tutte le informazioni necessarie per imporre le condizioni di equilibrio statico.

a) Equilibrio delle forze esterne agenti sull'asta.

$$M\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0$$, da cui otteniamo le due equazioni

$$\begin{cases} (M\vec{g})_x + N_{1x} + N_{2x} = 0 \\ (M\vec{g})_y + N_{1y} + N_{2y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} N_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} N_2 = 0 \\ -Mg + \frac{\sqrt{3}}{2} N_1 + \frac{1}{2} N_2 = 0 \end{cases}$$

b) Equilibrio dei momenti delle forze esterne agenti sull'asta rispetto al polo O:

$$\tau_{TOT,z} = 0$$ Poiché $(\vec{a} \times \vec{b})_z = a_x b_y - a_y b_x$,

otteniamo:

$$\tau_{TOT,z} = (\vec{OA} \times \vec{N}_1)_z + (\vec{OC} \times M\vec{g})_z + (\vec{OB} \times \vec{N}_2)_z =$$

$$= (x_A N_{1y} - y_A N_{1x}) + (x_c (M\vec{g})_y - y_c (M\vec{g})_x) + (x_B N_{2y} - y_B N_{2x}) =$$

$$= \left(-L \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} N_1\right) - \left(\frac{1}{2} L \cos\theta\right)\left(\frac{1}{2} N_1\right) + \left[\frac{L}{4}(-\sqrt{3}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\right](-Mg) +$$

$$- \left[\frac{L}{4}(\cos\theta + \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta)\right] \cdot 0 + \left(\frac{1}{2} L \operatorname{sen}\theta\right)\left(\frac{1}{2} N_2\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} L \operatorname{sen}\theta\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} N_2\right) =$$

$$= -\frac{3}{4} L \cos\theta \, N_1 - \frac{1}{4} L \cos\theta \, N_1 - \frac{1}{4} L (-\sqrt{3}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) Mg +$$

$$+ \frac{1}{4} L \operatorname{sen}\theta \, N_2 + \frac{3}{4} L \operatorname{sen}\theta \, N_2 = - L \cos\theta \, N_1 + L \operatorname{sen}\theta \, N_2 +$$

$$- \frac{1}{4} L (-\sqrt{3}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) Mg = 0$$

Semplificando il fattore L, otteniamo la condizione

$$-\cos\theta\, N_1 + \operatorname{sen}\theta\, N_2 - \frac{1}{4}\left(-\sqrt{3}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\right) Mg = 0$$

mettendo insieme tutte le condizioni ottenute, otteniamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} N_1 - \sqrt{3}\, N_2 = 0 \\ \sqrt{3}\, N_1 + N_2 = 2\, Mg \\ -\cos\theta\, N_1 + \operatorname{sen}\theta\, N_2 - \frac{1}{4}\left(-\sqrt{3}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\right) Mg = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni otteniamo N_1 e N_2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ 2Mg & 1 \end{vmatrix} = 2\sqrt{3}\, Mg$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 2Mg \end{vmatrix} = 2\, Mg \Rightarrow N_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2\sqrt{3}\, Mg}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} Mg$$

$$N_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2\, Mg}{4} = \frac{1}{2} Mg$$

Sostituiamo questi due valori nella terza equazione:

$$-\cos\theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cancel{Mg} + \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{1}{2} \cancel{Mg} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\theta\, \cancel{Mg} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta\, \cancel{Mg} = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\theta \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}$$

Dunque, essendo necessariamente $0 < \theta < 90°$, risulta che deve essere $\theta = 60°$

Pertanto, in condizioni di equilibrio statico, le coordinate del centro di massa della trave sono:

$$\boxed{\begin{cases} x_c = \frac{L}{4}\left(-\sqrt{3}\cos 60^\circ + \operatorname{sen} 60^\circ\right) = \frac{L}{4}\left(-\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \\ y_c = \frac{L}{4}\left(\cos 60^\circ + \sqrt{3}\operatorname{sen} 60^\circ\right) = \frac{L}{4}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ \quad = \frac{L}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right) = \frac{L}{4}\cdot 2 = \frac{L}{2} \end{cases}}$$

Pertanto, è dimostrato che, se la trave è in equilibrio, il suo centro di massa si trova sulla verticale condotta da O (cioè, $x_c = 0$).

b) Dal calcolo effettuato nel punto A si è visto che, all'equilibrio, risulta $\boxed{\theta = 60^\circ}$.

c) Per vedere se la posizione della trave per $\theta = 60^\circ$ è di equilibrio stabile o instabile, scriviamo la funzione energia potenziale della trave per un angolo θ generico:

$$U(y_{CM}) = Mg\,y_{CM} = Mg\,y_c = \frac{1}{4}MgL\left(\cos\theta + \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta\right)$$

Risulta $U(\theta) = \frac{1}{2}MgL\left(\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta\right) =$

$$= \frac{1}{2}MgL\left(\cos\theta\cos 60^\circ + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} 60^\circ\right) = \frac{1}{2}MgL\cos(\theta - 60^\circ)$$

[Dunque, $U(\theta)$ ha un massimo per $\theta = 60^\circ$. Pertanto, la posizione di equilibrio statico della trave per $\theta = 60^\circ$ è di <u>equilibrio instabile</u>.]