Linguaggi separatori

DEF

Dati C_1 e C_2, $C_1 \subseteq C_2$ — classi di complessità

Un linguaggio separatore fra C_1 e C_2

è un linguaggio L che nell'ipotesi $C_1 \neq C_2$: $L \in C_2 / C_1$

π-riduzione

DEF

Sia π un predicato — va ad indicare una proprietà di f → $\pi(f) = \{ f(n) \leq n \}$ — può essere vero o falso

L_1 è π-riducibile ad L_2 $(L_1 \propto_\pi L_2)$ se: — deriviamo L_2 a partire da L_1

$$\exists f \text{ totale e calcolabile}: \forall x \in \{0,1\}^* [x \in L_1 \iff f(x) \in L_2] \wedge \pi(f) = \text{vero}$$

def di riduzione

Chiusura di una classe rispetto ad un predicato

DEF

C_1 è chiusa rispetto a π se

$$\forall L_0, L : L_0 \in C_1 \wedge L \propto_\pi L_0 [L \in C_1]$$

$\Downarrow$

$\forall L_0 \in C_1$, ogni linguaggio riducibile da L_0 appartiene a C_1

Linguaggi C-completi rispetto a π

DEF

L è C_1-completo rispetto alla π-riducibilità se:

$\forall C_1$:

1) $L \in C_1$
2) $\forall L' \in C_1 [L' \propto_\pi L]$

$\Rightarrow$ $L \in C_1$ e ogni altro $L' \in C_1$ è riducibile da L

Teorema

Sia C_1, C_2, $C_1 \subseteq C_2$, C_1 chiuso rispetto a $\propto_\pi$, sia L C_2-completo

$$[L \in C_1 \Leftrightarrow C_1 = C_2]$$

DIM

$\Rightarrow$) Sia $L \in C_1$

Poiché L è C_2-completo $\Rightarrow \forall L' \in C_2 [L' \propto_\pi L]$

Poiché

$\forall L \in C_1, L' \propto_\pi L \, [L' \in C_1]$

$L \in C_1 \wedge C_1$ è chiusa rispetto a $\propto_\pi \wedge \forall L' \in C_2 [L' \propto_\pi L] \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall L' \in C_2 [L' \in C_1] \Rightarrow C_1 = C_2$

$\Leftarrow$) Sia $C_1 = C_2$

Poiché L è C_2-completo $\Rightarrow L \in C_2 \Rightarrow L \in C_1$

P-CHIUSURA

TEOREMA RIDUZIONE POLINOMIALE

L_1 È POLINOMIALMENTE RIDUCIBILE AD L_2

$\exists f \in FP : \forall x \in \{0,1\}^* [x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2] \Rightarrow$

$\Rightarrow L_1 \propto_p L_2$

$FP \Rightarrow T_U(f)$: VERO SE f È TOTALE, CALCOLABILE E POLINOMIALE

TEOREMA

SIA $C_1 \in C_2 : C_1 \subseteq C_2$, C_1 CHIUSA RISPETTO A $\propto_p$, L C_2-COMPLETO

$$[L \in C_1 \Leftrightarrow C_1 = C_2]$$

COROLLARIO

SE L È NP-COMPLETO:

$$L \in P \Leftrightarrow P = NP$$

SAPPIAMO ANCHE CHE:

i) P È CHIUSO RISPETTO A $\propto_p$

ii) $P \subseteq NP$

DEF

TEOREMA

P CHIUSA RISPETTO A $\propto_p$

DIM

SIA $L \in P \Rightarrow \exists T, k : T$ DECIDE L E $\forall x \in \{0,1\}^* [d\,TIME(T,x) \in O(|x|^k)]$

SIA $L' : L' \propto_p L \Rightarrow \exists T_f, c : \forall x \in \{0,1\}^* [x \in L' \Leftrightarrow T_f(x) \in L \wedge d\,TIME(T_f, x) \in O(|x|^c)]$

$f \in FP$

f È POLINOMIALE

COSTRUISCO T' → BASATA SU T_f E T, T DECIDE L'

T': INPUT x

1. SIMULO $T_f(x)$ E SCRIVO L'OUTPUT y SU N_2
2. SIMULO $T(y)$:

$$\text{SE } T(y) = q_A \Rightarrow T'(x) = q_A$$
$$\text{SE } T(y) = q_R \Rightarrow T'(x) = q_R$$

CALCOLIAMO IL COSTO DI $T'(x)$:

PASSO 1: $O(|x|)$

PASSO 2: $O(|x|^c)$

PASSO 3: $O(|x|^c + |y|^k)$

MA SAPPIAMO PER IL TEO DELLA RELAZIONE FRA dTIME E dSPACE CHE

$$dTIME(T', x) \leq O(|x|^c + |y|^k)$$

MA $|y| \in O(|x|^c)$

$$dTIME(T', x) \in O(|x|^c + |y|^k) = O(|x|^{ck})$$

REMINDER TEO RELAZIONE dTIME E dSPACE

$$\forall T \forall x \left[dSPACE(T,x) \leq dTIME(T,x) \leq dSPACE(T,x) \cdot |Q| \cdot (|\Sigma|+1)^{dSPACE} \right]$$

GERARCHIE

$P \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME$

$P \subseteq NP \subseteq EXPTIME$

$NP \subseteq NPSPACE \subseteq PSPACE$

↳ $NPSPACE = PSPACE$