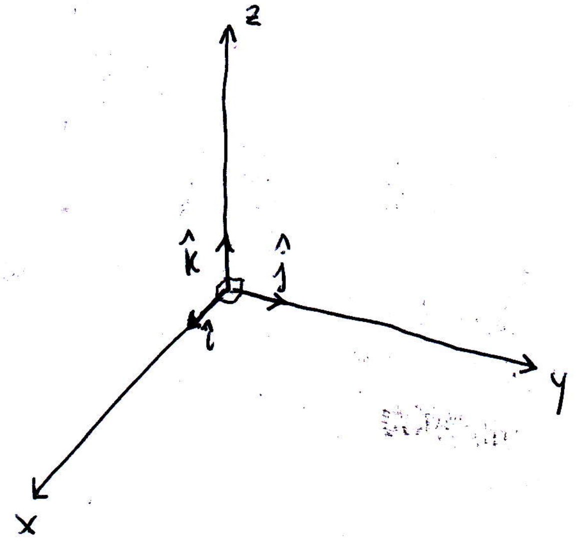
Complementi ed esercizi sui vettori

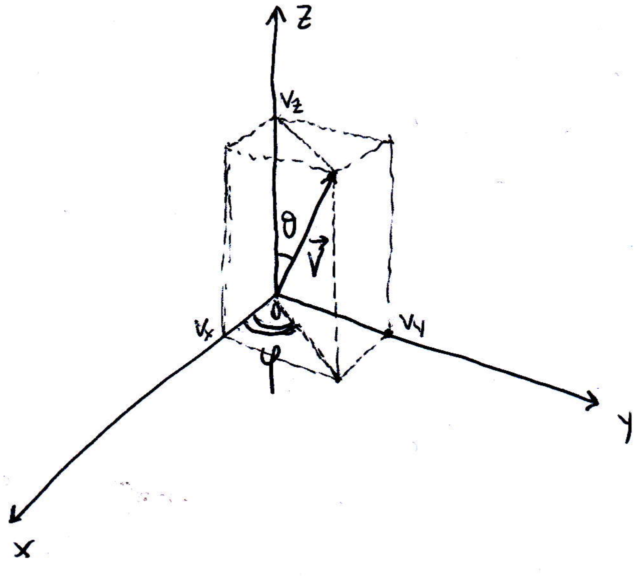
Vettori nello spazio. Indichiamo con $\hat{k}$ il versore dell'asse z:



$$\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}$$

V_x, V_y, V_z: componenti cartesiane del vettore $\vec{V}$ in tre dimensioni

Rappresentazione in "coordinate polari sferiche":



Indichiamo con θ l'"angolo zenitale", misurato a partire dal semiasse z positivo.

Risulta $0 \leq \theta \leq \pi$ rad

Indichiamo con φ l'"angolo azimutale", misurato a partire dal semiasse x positivo ruotando in senso antiorario nel piano xy.

Poniamo $V = |\vec{V}|$

Legame fra componenti cartesiane di $\vec{V}$ e parametri "sferici":

$$V_x = V \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \qquad V_y = V \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \qquad V_z = V\cos\theta \qquad (1)$$

Viceversa, risulta:

$$\begin{cases} V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \\ \theta = \arccos\left(\dfrac{V_z}{\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2}}\right) \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{V_y}{V_x} \Rightarrow \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{V_y}{V_x}\right) & \text{se } V_x > 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\dfrac{V_y}{V_x}\right) + \pi \text{ rad} & \text{se } V_x < 0 \end{cases} \end{cases} \qquad (2)$$

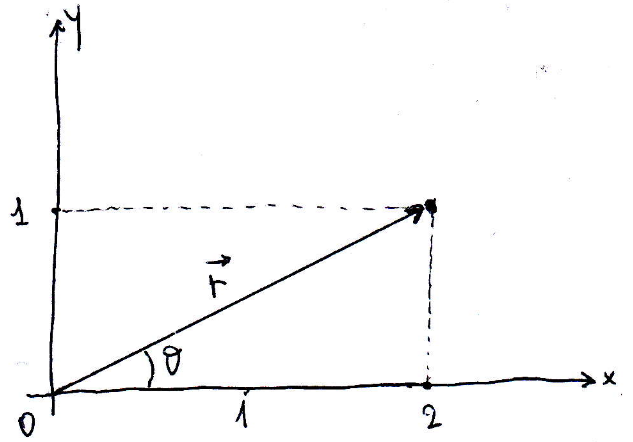
Le relazioni (1) si ottengono senza grossi problemi applicando "in cascata" i teoremi basilari di trigonometria validi per i triangoli rettangoli.

Serway n. 48

Una mosca cammina lungo la parete di una stanza.
L'angolo più in basso della parete è l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali bidimensionale.
Se la mosca si trova nel punto di coordinate (2 m, 1 m):

a) quanto dista dall'origine?

b) Qual è la sua posizione in coordinate polari?



Indichiamo con $\vec{r}$ il vettore posizione della mosca all'istante considerato.

a) La distanza del punto dall'origine è, chiaramente:

$$d = |\vec{r}| = \sqrt{2^2 + 1^2}\ m = \sqrt{5}\ m = 2{,}24\ m$$

b) La posizione in coordinate polari è, sulla base dei dati del problema:

$$\begin{cases} |\vec{r}| = \sqrt{5}\ m = 2{,}24\ m \\ \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}464\ rad = 26{,}6° \end{cases}$$

Serway n. 49

Un autobus effettua quattro successivi spostamenti descritti nell' espressione

$$-630\hat{i} + (-400\cos 40°\hat{i} - 400 \text{sen} 40°\hat{j}) + (300\cos 50°\hat{i} - 300\,\text{sen}\,50°\hat{j}) + (-500\hat{j}),$$

misurate in metri, riferite a un opportuno sistema di assi cartesiani ortogonali.

a) Si disegni una mappa della successione dei quattro spostamenti.

b) Che distanza ha percorso l' autobus?

c) Si dia il modulo e la direzione orientata dello spostamento totale.

a) Cerchiamo le coordinate della posizione dell' autobus dopo ciascuno spostamento:

1° spostamento: $x_1 = -630\text{ m}$ $\quad y_1 = 0$

2° spostamento: $x_2 = (-630\text{ m} - 400\cos 40°\text{ m}) = -936{,}42\text{ m}$

$y_2 = -400\,\text{sen}40°\text{ m} = -257{,}12\text{ m}$

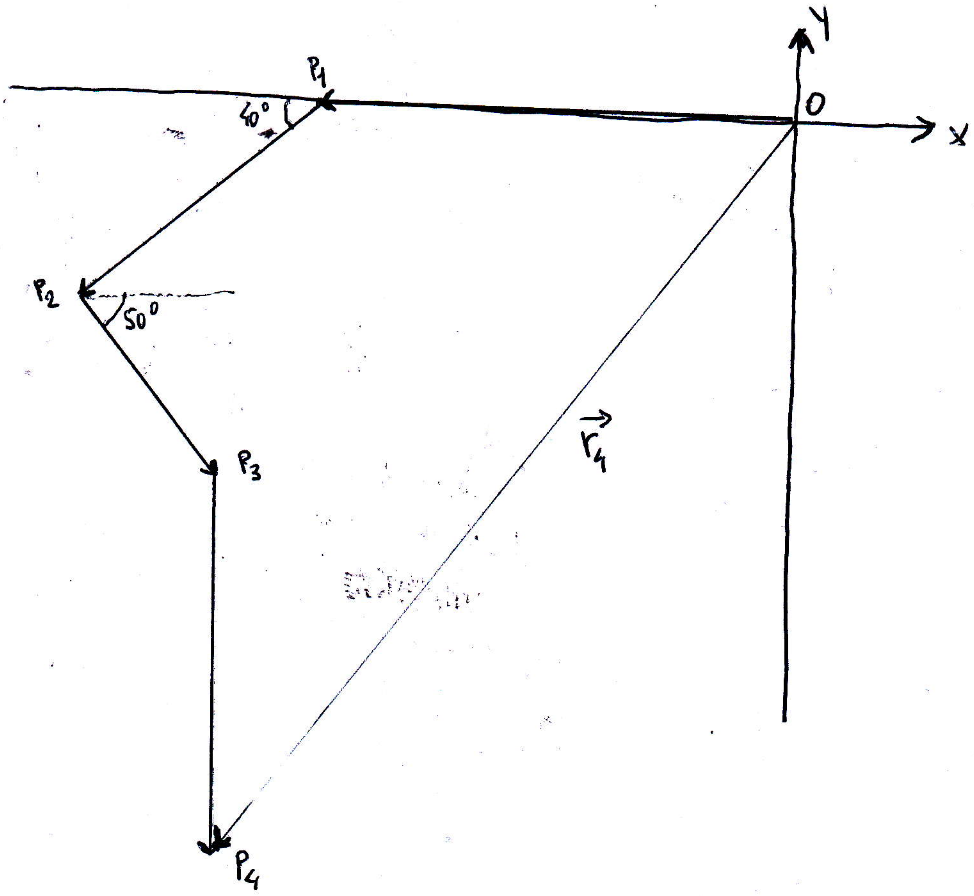
3° spostamento: $x_3 = (-630\text{ m} - 400\cos 40°\text{m} + 300\cos 50°\text{ m}) = -743{,}58\text{ m}$

$y_3 = -400\,\text{sen}40°\text{ m} - 300\,\text{sen}\,50°\text{m} = -486{,}93\text{ m}$

4° spostamento: $x_4 = x_3 = -743{,}58\text{m}$

$y_4 = -400\,\text{sen}\,40°\text{ m} - 300\,\text{sen}\,50°\text{m} - 500\text{ m} = -986{,}93\text{ m}$

Mappa degli spostamenti dell'autobus:



b) Complessivamente, l'autobus ha percorso le distanze

$$D = 630\ m + 400\ m + 300\ m + 500\ m = 1830\ m$$

c) Il vettore spostamento totale dopo che l'autobus ha percorso i quattro successivi spostamenti è il vettore che congiunge l'origine con il punto P_4. Dunque:

$$|\vec{r}_4| = \sqrt{x_4^2 + y_4^2} = \sqrt{(-743{,}58\ m)^2 + (-986{,}93\ m)^2} = 1235{,}69\ m$$

$$\theta_4 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_4}{x_4}\right) + \pi\ rad = 4{,}07\ rad = 233°$$

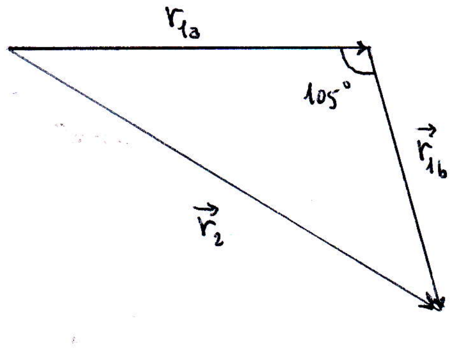
$(x_4 < 0)$

Serway n. 53

L'animale di pelouche più grande che esista è un serpente lungo 420 m costruito in Norvegia. Si supponga di disporlo per terra nel modo seguente: due tratti rettilinei a 105° fra loro, con uno dei tratti lungo 240 m. Due bambini inventano una gara di corsa in cui, partendo nello stesso istante dalla coda del serpente, devono arrivare a raggiungerne la testa.
Mentre il primo bambino segue il serpente, il secondo bambino corre in linea retta dalla coda alla testa.

a) Se i due bambini corrono a 12,5 km/h, quanto tempo prima del primo bambino arriva al traguardo il secondo bambino?

b) Se il secondo bambino corresse alla velocità di 12 km/h, a quale velocità scalare dovrebbe correre il primo bambino per raggiungere la testa del serpente assieme al secondo?



Schematizziamo il problema utilizzando vettori spostamento.
Il serpente segue il vettore $\vec{r}_{1a}$, nel primo tratto, con $|\vec{r}_{1a}| = 240$ m, e poi segue il vettore $\vec{r}_{1b}$, con $|\vec{r}_{1b}| = 180$ m; in figura è mostrato anche l'angolo tra i due vettori.

$\vec{r}_2$ è il vettore lungo la direzione seguita nella corsa del secondo bambino. Risulta $\vec{r}_2 = \vec{r}_{1a} + \vec{r}_{1b}$ per costruzione.

e) Detta $V = 12,5\ km/h$ la velocità di corsa dei due bambini, risulta anzi tutto:

$$V = 12,5\ \frac{km}{h} = 12,5 \cdot \frac{\cancel{10^3}\ m}{3,6 \times \cancel{10^3}\ s} = 3,47\ \frac{m}{s}$$

La distanza percorsa dal 1° bambino è $d_1 = 420\ m$

La distanza percorsa dal 2° bambino è uguale al modulo del vettore $\vec{r_2}$. Questo si calcola applicando il teorema del coseno al triangolo formato dai vettori $\vec{r_{1a}}$, $\vec{r_{1b}}$, $\vec{r_2}$:

$$|\vec{r_2}| = \sqrt{|\vec{r_{1a}}|^2 + |\vec{r_{1b}}|^2 - 2\,|\vec{r_{1a}}| \cdot |\vec{r_{1b}}| \cdot \cos(105°)} =$$

$$= 335,20\ m = d_2$$

Il tempo impiegato dal primo bambino è, quindi:

$$T_1 = \frac{d_1}{V} = \frac{420\ m}{3,47\ \frac{m}{s}} = 121,04\ s$$

Il tempo impiegato dal secondo bambino è:

$$T_2 = \frac{d_2}{V} = \frac{335,20\ m}{3,47\ \frac{m}{s}} = 96,60\ s$$

Il secondo bambino, quindi, arriva al traguardo con un anticipo $\Delta T = T_1 - T_2 = 24,44\ s$ prima del primo bambino.

b) Supponiamo ora che il secondo bambino percorra lo stesso percorso lungo $\vec{r}_2$ alla velocità $V_2 = 12 \frac{km}{h} = \frac{12}{3,6} \frac{m}{s} = 3,33 \frac{m}{s}$

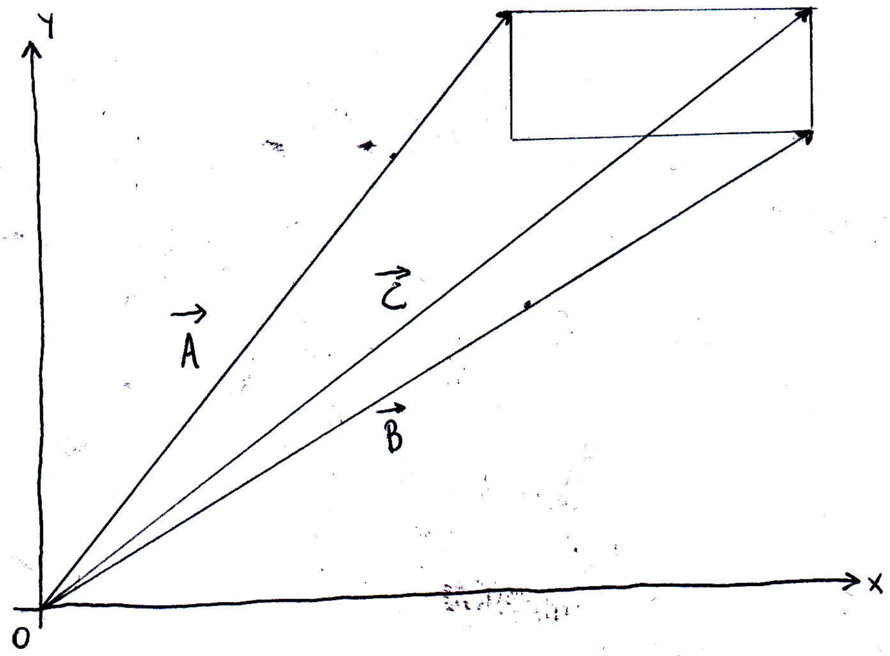
Il tempo impiegato dal secondo bambino è, adesso:

$$T_2 = \frac{d_2}{V_2} = \frac{335,20 \, m}{3,33 \, \frac{m}{s}} = 100,66 \, s$$

La velocità scalare media V_1 con cui dovrebbe correre il primo bambino per percorrere la distanza $d_1 = 420 \, m$ nello stesso tempo T_2 è, quindi:

$$V_1 = \frac{d_1}{T_2} = \frac{420 \, m}{100,66 \, s} = 4,17 \frac{m}{s} = 15,02 \frac{km}{h}$$

Serway n. 56



Il rettangolo mostrato in figura ha i lati paralleli agli assi x e y. I vettori posizione che individuano i due spigoli sono $\vec{A}$, con $|\vec{A}| = 10$ m e $50°$ rispetto all'asse x, e $\vec{B}$ con $|\vec{B}| = 12$ m e $30°$ rispetto all'asse x.

a) Si calcoli il perimetro del rettangolo

b) Si calcoli il modulo e la direzione orientata del vettore che dall'origine punta allo spigolo più in alto a destra del rettangolo.

|------------|

a) Calcoliamo anzitutto le componenti cartesiane dei vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$:

$A_x = |\vec{A}| \cos 50° = 6,43$ m $\qquad A_y = |\vec{A}| \text{sen}\, 50° = 7,66$ m

$B_x = |\vec{B}| \cos 30° = 10,39$ m $\qquad B_y = |\vec{B}| \text{sen}\, 30° = 6$ m

La lunghezza del lato orizzontale del rettangolo e' quindi:

$a = B_x - A_x = 3,96$ m

La lunghezza del lato verticale del rettangolo è:

$b = A_y - B_y = 1,66$ m.

Perimetro del rettangolo:

$D = 2(a+b) = 11,24$ m

b) Componenti cartesiane del vettore $\vec{C}$:

$C_x = B_x = 10,39$ m $\qquad C_y = A_y = 7,66$ m

Modulo di $\vec{C}$:

$|\vec{C}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 12,91$ m

Fase di $\vec{C}$:

$\vartheta_c = \text{arctg}\left(\frac{C_y}{C_x}\right) = 36,4° = 0,64$ rad

Serway n. 57

Sia dato il vettore $\vec{R} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$.

Si trovino:

a) i moduli dei vettori componenti lungo gli assi cartesiani,

b) il modulo di $\vec{R}$,

c) gli angoli fra $\vec{R}$ e ciascuno degli assi cartesiani.

a) Poiché $\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z$, per confronto diretto con l'espressione di $\vec{R}$ assegnata otteniamo:

$$\vec{R}_x = 2\hat{i}, \quad \vec{R}_y = \hat{j}, \quad \vec{R}_z = 3\hat{k},$$ da cui otteniamo

$$|\vec{R}_x| = 2, \quad |\vec{R}_y| = 1, \quad |\vec{R}_z| = 3$$

b) Otteniamo subito:

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{R}_x|^2 + |\vec{R}_y|^2 + |\vec{R}_z|^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14} = 3{,}74$$

c) Poiché $\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$ si ottengono proiettando ortogonalmente la "punta" di $\vec{R}$ su ciascuno degli assi cartesiani, valgono le seguenti relazioni trigonometriche:

$$\cos\theta_x = \frac{|\vec{R}_x|}{|\vec{R}|}, \quad \cos\theta_y = \frac{|\vec{R}_y|}{|\vec{R}|}, \quad \cos\theta_z = \frac{|\vec{R}_z|}{|\vec{R}|},$$ da cui:

$$\theta_x = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) = 57{,}7^\circ = 1 \text{ rad}$$

$$\vartheta_y = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) = 74{,}5^\circ = 1{,}3 \text{ rad}$$

$$\vartheta_z = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) = 36{,}7^\circ = 0{,}64 \text{ rad}$$

I coseni degli angoli che un vettore nello spazio forma con gli assi cartesiani si chiamano COSENI DIRETTORI.

E' una possibile parametrizzazione alternativa per i vettori nello spazio rispetto a quella cartesiana e a quella in coordinate polari sferiche.

Risulta sempre $\cos^2\vartheta_x + \cos^2\vartheta_y + \cos^2\vartheta_z = 1$

Nell'esercizio appena svolto abbiamo scritto

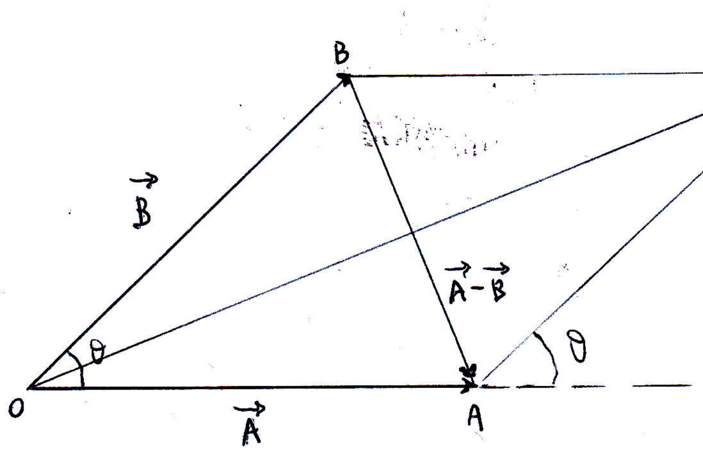
$\cos\vartheta_x = \frac{|\vec{R}_x|}{|\vec{R}|}$, $\cos\vartheta_y = \frac{|\vec{R}_y|}{|\vec{R}|}$, $\cos\vartheta_z = \frac{|\vec{R}_z|}{|\vec{R}|}$ in quanto le componenti cartesiane R_x, R_y, R_z sono tutte positive in questo caso particolare: $R_x = 2$, $R_y = 1$, $R_z = 3$.

In generale le relazioni da utilizzare per i coseni direttori sono le seguenti:

$$\cos\vartheta_x = \frac{R_x}{|\vec{R}|}, \quad \cos\vartheta_y = \frac{R_y}{|\vec{R}|}, \quad \cos\vartheta_z = \frac{R_z}{|\vec{R}|}.$$

Serway n. 59

Due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ hanno esattamente lo stesso modulo. Quale deve essere l'angolo fra i due vettori perché il modulo del vettore $\vec{A}+\vec{B}$ sia 100 volte maggiore del modulo di $\vec{A}-\vec{B}$?



Dalla rappresentazione grafica del problema ricaviamo le espressioni di $|\vec{A}+\vec{B}|$ e di $|\vec{A}-\vec{B}|$.

Per entrambe si applica il teorema del coseno.

Indichiamo con θ l'angolo fra i due vettori.

$$|\vec{A}+\vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2\,|\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos(\pi-\theta)}$$

$$|\vec{A}-\vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2\,|\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta}$$

Poniamo $|\vec{A}| = |\vec{B}| = V$ (ipotesi del problema).

$$|\vec{A}+\vec{B}| = \sqrt{2V^2 + 2V^2\cos\theta} = V\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos\theta} = 2V\cos\frac{\theta}{2}$$

$$|\vec{A}-\vec{B}| = \sqrt{2V^2 - 2V^2\cos\theta} = V\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta} = 2V\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}$$

Richieste del problema: $|\vec{A}+\vec{B}| = 100\,|\vec{A}-\vec{B}|$, cioè:

$$2\cancel{v}\cos\frac{\vartheta}{2} = 200\,\cancel{v}\,\mathrm{sen}\frac{\vartheta}{2} \Rightarrow \cos\frac{\vartheta}{2} = 100\,\mathrm{sen}\frac{\vartheta}{2},$$ da cui

$$\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{100},$$ da cui otteniamo

$$\vartheta = 1{,}15^\circ = 0{,}02 \text{ rad}$$

Questo è l'angolo che formano i due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ di uguale modulo affinché risulti $|\vec{A}+\vec{B}| = 100\,|\vec{A}-\vec{B}|$.

Serway n. 61

Sia dato il vettore $\vec{A}$, con $A_x = 0$, $A_y = -60$, e sia dato il vettore $\vec{B}$, con $B_x = 80 \cos\theta$; $B_y = 80 \text{ sen } \theta$

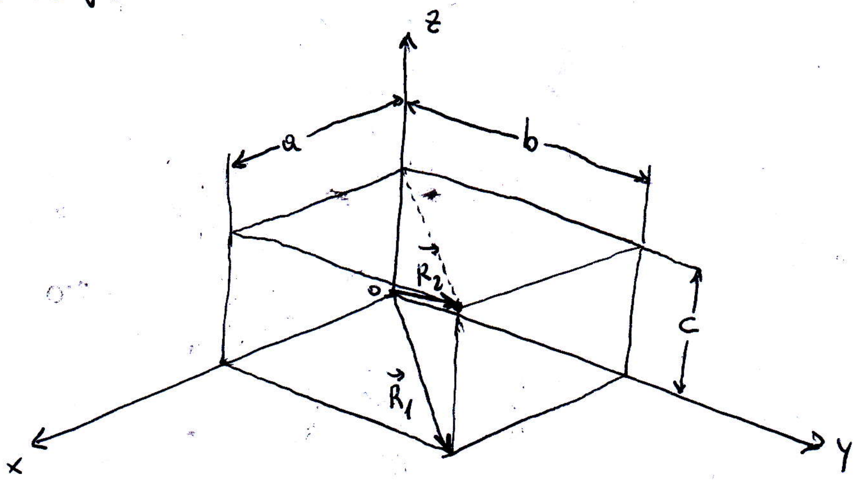
a) Si trovi il modulo della somma $\vec{A}+\vec{B}$ in funzione di θ.

b) Per quale valore di θ il modulo $|\vec{A}+\vec{B}|$ assume il suo valore massimo? Quanto vale questo massimo?

c) Per quale valore di θ il modulo $|\vec{A}+\vec{B}|$ assume il suo valore minimo? Quanto vale questo minimo?

d) Senza fare riferimento al risultato del punto a) si discuta se le risposte ai punti b) e c), appena calcolate, siano sensate.

Serway: n. 65



Un parallelepipedo ha dimensioni a, b e c come in figura.

a) Si scrive un'espressione vettoriale per il vettore $\vec{R}_1$ diagonale di una faccia. Qual è il modulo di questo vettore?

b) Si scrive un'espressione vettoriale per il vettore $\vec{R}_2$ che è la diagonale del parallelepipedo. Qual è il modulo di questo vettore?

Serway n. 66

Due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ hanno modulo uguale a 5.

Si determini l'angolo fra i due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ se la loro somma è il vettore $6\hat{j}$.