Ora consideriamo l'indipendenza tra più eventi.

DEFINIZIONE
Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di eventi.
Allora si ha una famiglia di eventi indipendenti se:
→ se la famiglia è finita (es. $\{A_1, \dots, A_n\}$)
ogni sottoinsieme di almeno due insiemi $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_k}\}$ con $k \geq 2$
si ha $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$

→ se la famiglia è infinita, ogni sottofamiglia finita lo è in accordo con quanto detto sopra.

ESEMPIO (FAMIGLIA DI 3 EVENTI NON INDIPENDENTI, MA INDIPENDENTI A DUE A DUE)

PREMESSA:
Consideriamo tre eventi $\{A_1, A_2, A_3\}$. Allora c'è indipendenza se

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$
$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$
$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$
e $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

Consideriamo la seguente situazione ~~esempio~~.
Un'urna ha 4 carte numerate come segue e si estrae una carte a caso.

1	2
3	123

Consideriamo gli eventi

$A_i = \{$ la carta estratta ha il numero $i \}$ $i = 1,2,3$

Allora
$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) \overset{!}{=} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ [i] [123]

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) \overset{!}{=} \frac{1}{4}$ [123]

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \overset{!}{=} \frac{1}{4}$ [123]

in tutti i casi $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

Quindi $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$, $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3)$
e $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ (si ha $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$).

CONCLUSIONE:
Eventi non indipendenti
ma indipendenti a due a due

PROPOSIZIONE (senza dim.)

Se $\{A_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di eventi indipendenti, allora lo è anche qualsiasi altra famiglia ottenuta considerando il complementare di alcuni (o tutti) gli eventi.

COMMENTO (con esempio)

L'ipotesi di indipendenza spesso segue dal modello in esame. Ad esempio si hanno eventi indipendenti nel caso di eventi legati a diversi lanci di monete, diversi lanci di dado, diverse estrazioni da un insieme di oggetti (urne con palline, mazzo di carte, ecc.) con reinserimento.

In altri casi gli eventi indipendenti escono fuori in maniera sorprendente perché i valori si ~~[illegible]~~ combinano in maniera opportuna.

Consideriamo il seguente esempio.

Si lanciano 3 monete eque e consideriamo i seguenti eventi:

$A = \{\text{esce testa al } 1^\circ \text{ lancio}\}$

$B = \{\text{escono } \cancel{\text{solo}} \text{ esattamente } 2 \text{ teste consecutive}\}$

L'insieme di riferimento è

$$\Omega = \{(T,T,T), (T,T,C), (T,C,T), (T,C,C), (C,T,T), (C,T,C), (C,C,T), (C,C,C)\}$$

Ognuno di questi 8 elementi ha prob. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ perché i lanci di moneta sono indipendenti. (Quindi spazio di prob. ~~[illegible]~~ UNIFORME discreto)

Si ha $P(A) = P(\{(T,T,T), (T,T,C), (T,C,T), (T,C,C)\}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (come ci si aspetterebbe)

e $P(B) = P(\{(T,T,C), (C,T,T)\}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Inoltre

$P(A\cap B) = P(\{(T,T,C)\}) = \frac{1}{8}$ e $P(A)P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

Quindi A e B sono indipendenti e la cosa non era prevedibile a priori.

CENNI DI CALCOLO COMBINATORIO

Consideriamo un insieme di $n \geq 1$ elementi; senza perdere di generalità supponiamo che sia l'insieme $\{1, \dots, n\}$.

Siamo interessati al seguente insieme:

$D_{n,k} = \{(i_1, \dots, i_k)\}$ — sequenze ordinate di elementi in $\{1, \dots, n\}$, senza ripetizioni, di lunghezza k con $k \in \{1, \dots, n\}$. } DISPOSIZIONI SEMPLICI

Ci si chiede quanto vale $\#D_{n,k}$

RISPOSTA: Si hanno n scelte per i_1, $n-1$ scelte per i_2, ... fino ad avere $n-(k-1)$ scelte per i_k. Quindi

$$\boxed{\#D_{n,k} = n(n-1)\dots(n-(k-1)) = n(n-1)\dots(n-k+1)}$$

Se si vuole fare riferimento al fattoriale si ha

$n! = \begin{cases} n(n-1)\dots 2\cdot 1 & \text{per } n \geq 1 \\ 1 & \text{per } n = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\#D_{n,k} = n(n-1)\dots(n-k+1)\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Nel caso $k = n$ si ha

$$\boxed{\#D_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!}$$

In questo caso gli elementi di $D_{n,n}$ vengono detti PERMUTAZIONI DI $\{1, \dots, n\}$.

Ora consideriamo il seguente insieme:

$C_{n,k} = \{\{i_1, \dots, i_k\}\}$ — sottoinsiemi ~~di~~ di $\{1, \dots, n\}$, di k elementi (ovviamente elementi tutti distinti) } COMBINAZIONI SEMPLICI

Ci si chiede quanto vale $\#C_{n,k}$

In questo caso $k = 0, 1, \dots, n$.

Si ha $C_{n,0} = \{\emptyset\} \Rightarrow \# C_{n,0} = 1$

e $C_{n,n} = \{\{1,\dots,n\}\} \Rightarrow \# C_{n,n} = 1$.

Ora consideriamo k con $k \in \{1,\dots,n-1\}$.

Allora:

preso un sottoinsieme $\{i_1,\dots,i_k\}$, considerando tutte le permutazioni di $\{i_1,\dots,i_k\}$ diamo origine a particolari sequenze ordinate in $D_{n,k}$; poi tutti gli elementi di $D_{n,k}$ possono essere visti come una particolare permutazione di elementi di un certo insieme.

Per fissare le idee consideriamo un esempio.

$\boxed{n=4,\ k=2}$

$C_{n,k} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$

$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(3,4)$
$(2,1)$	$(3,1)$	$(4,1)$	$(3,2)$	$(4,2)$	$(4,3)$

Questi sono gli elementi di $D_{4,2}$

($k! = 2! = 2$ permutazioni per ogni elemento di $C_{4,2}$)

In effetti $\# D_{4,2} = \dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{4\cdot 3\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 12$.

A partire da questo esempio possiamo dire che

$$\# C_{n,k} \cdot k! = \# D_{n,k}$$

da cui segue

$$\boxed{\# C_{n,k} = \frac{\# D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

L'espressione ottenuta è il <u>coefficiente binomiale</u> e si usa la notazione $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$. Questa formula vale anche per $k=0$ e per $k=n$.

~~[illegible]~~ Qui faccio alcuni commenti sul coefficiente binomiale.

In generale si ha

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

ad ogni sottoinsieme di k elementi corrisponde il suo complementare di $n-k$ elementi; quindi $\# C_{n,k} = \# C_{n,n-k}$

perché

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

In particolare per $k=0$ e $k=1$ si ha

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\,0!} = 1$$

con 0 elementi c'è solo $\emptyset$
con n elementi c'è solo $\{1, \dots, n\}$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n\,\cancel{(n-1)!}}{1\cdot\cancel{(n-1)!}} = n$$

con 1 elemento ci sono $\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}$
con $n-1$ elementi ci sono i loro complementari

~~[illegible]~~ SPIEGAZIONE DEL TERMINE "COEFFICIENTE BINOMIALE"

Possiamo dire che ~~[illegible]~~ il nome coefficiente binomiale segue dalla formula del binomio di Newton:

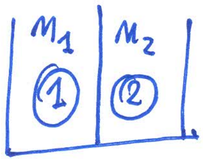
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Infatti

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdots\cdots(a+b)}_{n \text{ volte}}$$

e per ogni $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ abbiamo termini del tipo $a^k b^{n-k}$;
se vogliamo contare quanti ce ne sono si vede che ~~[illegible]~~ appare il coefficiente binomiale.

APPLICAZIONE DI FORMULE DI CALCOLO COMBINATORIO: ESTRAZIONI CASUALI IN BLOCCO



Abbiamo oggetti di due tipi: n_1 di tipo 1, n_2 di tipo 2

Si estraggono a caso in blocco (cioè contemporaneamente) n oggetti, dove $n < n_1 + n_2$.

$\boxed{\text{Quanto vale la probabilità di estrarre } k \text{ oggetti di tipo 1 ?}}$

(quindi contemporaneamente si estraggono $n-k$ oggetti di tipo 2).

Indichiamo questa probabilità con p_k e si ha

$$p_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k > n_1 \text{ oppure se } n-k > n_2 \\ \text{"da calcolare"} & \text{se } \begin{cases} 0 \le k \le n_1 \\ 0 \le n-k \le n_2 \end{cases} \end{cases}$$

Bisogna osservare che in generale abbiamo $\binom{n_1+n_2}{n}$ casi possibili e tutti equiprobabili dati da tutti i sottoinsiemi di n elementi a partire da n_1+n_2 elementi.

I casi favorevoli all'evento "estrarre k oggetti 1 e $n-k$ oggetti 2" devono essere pensati come sottoinsiemi del tipo

$$\{\underbrace{i_1, \ldots, i_k}_{\text{sottoinsieme di } \{1, \ldots, n_1\}}, \underbrace{j_1, \ldots, j_{n-k}}_{\text{sottoinsieme di } \{n_1+1, \ldots, n_1+n_2\}}\}$$

Abbiamo $\binom{n_1}{k}$ scelte per $\{i_1, \ldots, i_k\}$ e $\binom{n_2}{n-k}$ scelte per $\{j_1, \ldots, j_{n-k}\}$.

In conclusione il numero di casi favorevoli è dato dal prodotto $\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}$ e quindi

$$p_k = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}}$$

OSSERVAZIONE

Questa formula vale anche se $k > n_1$ oppure $n-k > n_2$ usando la convenzione che $\binom{a}{b} = 0$ quando $b > a$.

ESEMPIO

$\boxed{n_1 = 3,\ n_2 = 2,\ n = 3}$

$$\binom{n_1+n_2}{n} = \binom{3+2}{3} = \binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$$

3	2
①	②

convenzione $\begin{cases} ① & 1,2,3 \\ ② & 4,5 \end{cases}$

In quel che segue scrivo i $\binom{5}{3} = 10$ sottoinsiemi e indico accanto il numero di elementi di tipo ①:

$\{1,2,3\} \to 3$
$\{1,2,4\} \to 2$
$\{1,2,5\} \to 2$
$\{1,3,4\} \to 2$
$\{1,3,5\} \to 2$
$\{1,4,5\} \to 1$
$\{2,3,4\} \to 2$
$\{2,3,5\} \to 2$
$\{2,4,5\} \to 1$
$\{3,4,5\} \to 1$

Quindi $p_0 = 0$, $p_1 = \frac{3}{10}$, $p_2 = \frac{6}{10}$, $p_3 = \frac{1}{10}$
(perché i 10 casi hanno tutti probabilità $\frac{1}{10}$).

Questi valori sono in accordo con la formula

$$p_k = \frac{\binom{3}{k}\binom{2}{3-k}}{\binom{5}{3}} = \frac{\binom{3}{k}\binom{2}{3-k}}{10} = \begin{cases} k=0 & 0 \\ k=1 & \frac{3\cdot 1}{10} = \frac{3}{10} \\ k=2 & \frac{3\cdot 2}{10} = \frac{6}{10} \\ k=3 & \frac{1\cdot 1}{10} = \frac{1}{10} \end{cases}$$

perché $\binom{2}{3} = 0$

del resto almeno un elemento di tipo ① deve essere estratto

ESTENSIONE AL CASO CON PIÙ DI 2 TIPI

Supponiamo di avere

n_1	......	n_r
①		ⓡ

e di estrarre a caso n oggetti in blocco con $n < n_1 + n_2 + \dots + n_r$.

Quanto vale la probabilità di estrarre $\begin{cases} k_1 \text{ oggetti } ① \\ \vdots \\ k_r \text{ oggetti } ⓡ \end{cases}$, dove $k_1 + \dots + k_r = n$?

Con ragionamenti simili si vede che

$$p_{k_1,\dots,k_r} = \frac{\binom{n_1}{k_1}\cdots\cdots\binom{n_r}{k_r}}{\binom{n_1+\dots+n_r}{n}}$$

con la solita convenzione $\binom{a}{b} = 0$ per $b > a$.

ESERCIZI DI RIEPILOGO DEL CAPITOLO

ESERCIZIO

Un'urna ha 3 palline bianche e 4 nere. Si estraggono 2 palline a caso, una alla volta e ~~senza~~ con reinserimento.

1) Calcolare la probabilità di estrarre due colori uguali.
2) Calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina nera.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le seguenti notazioni:

$B_k = \{k\text{-sima estratta bianca}\}$

$N_k = \{k\text{-sima estratta nera}\}$ $\quad k = 1, 2$

(quindi $B_k = N_k^c$ e $N_k = B_k^c$)

EVENTI con k diversi sono indipendenti perché le estrazioni sono con reinserimento

1) La prob. richiesta è

intersezione vuota tra $B_1 \cap B_2$ e $N_1 \cap N_2$

$$P((B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)) \overset{\text{P}}{=} P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap N_2) =$$

osservazione su indipendenza

$$= P(B_1)P(B_2) + P(N_1)P(N_2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{9+16}{49} = \frac{25}{49}$$

$P(B_1) = P(B_2)$, $P(N_1) = P(N_2)$ perché l'urna è composta sempre nello stesso modo prima di ogni estrazione

2) ~~[illegible]~~ La prob. richiesta è $P(N_1 \cup N_2)$.

1° modo: $P(N_1 \cup N_2) = P(N_1) + P(N_2) - \underbrace{P(N_1 \cap N_2)}_{= P(N_1)P(N_2)} = \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} =$

$$= \frac{8}{7} - \frac{16}{49} = \frac{56-16}{49} = \frac{40}{49}$$

2° modo: $P(N_1 \cup N_2) = 1 - P((N_1 \cup N_2)^c) \overset{\text{P}}{=} 1 - P(N_1^c \cap N_2^c)$ TEOREMA DI DE MORGAN

$$= 1 - P(B_1 \cap B_2) = 1 - P(B_1)P(B_2) = 1 - \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = 1 - \frac{9}{49}$$

indipendenza

$$= \frac{49-9}{49} = \frac{40}{49}$$

OSSERVAZIONE

Rispondiamo alle stesse domande nel caso di estrazioni senza reinserimento.

~~...~~ Qui non si ha indipendenza per eventi di estrazioni diverse. Si ha

$$P(B_2) \overset{\text{FORMULA PROB. TOTALI}}{=} P(B_2|B_1)P(B_1)+P(B_2|B_1^c)P(B_1^c) \Leftrightarrow \boxed{\text{oss. } \{B_1, N_1\} \text{ è una partizione}}$$

$$= \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{7}=\frac{6+12}{42}=\frac{18}{42}=\frac{3}{7}$$

(quindi $P(B_1)=P(B_2)$; questo accade sempre e non perché si ha questo tipo di urna)

e $P(N_2)=1-P(B_2)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$.

Allora

1) $P\big((B_1\cap B_2)\cup(N_1\cap N_2)\big) \overset{\text{intersezione vuota...}}{=} P(B_1\cap B_2)+P(N_1\cap N_2)=P(B_2|B_1)P(B_1)+P(N_2|N_1)P(N_1)$

$$=\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{7}=\frac{6+12}{42}=\frac{18}{42}=\frac{3}{7}$$

2) $P(N_1\cup N_2)=P(N_1)+P(N_2)-\underbrace{P(N_1\cap N_2)}_{=P(N_2|N_1)P(N_1)} = \frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{7}=$

$$=\frac{8}{7}-\frac{12}{42}=\frac{48-12}{42}=\frac{36}{42}=\frac{6}{7} \quad (1^\circ \text{ modo})$$

$$P(N_1\cup N_2)=1-P\big((N_1\cup N_2)^c\big)=1-P(N_1^c\cap N_2^c)=1-P(B_1\cap B_2)$$

$$=1-P(B_2|B_1)P(B_1)=1-\cancel{\frac{2}{6}}\cdot\cancel{\frac{3}{7}}=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7} \quad (2^\circ \text{ modo})$$

Ulteriore commento:

Qui faccio una anticipazione sul fatto che la distribuzione ipergeometrica può essere usata anche per estrazioni casuali senza reinserimento (come quelle di questa ~~esercizio~~ osservazione):

$$P(B_1\cap B_2)=P(B_2|B_1)P(B_1)=\cancel{\frac{2}{6}}\cdot\cancel{\frac{3}{7}}=\frac{1}{7} \quad \text{coincide con} \quad \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{0}}{\binom{7}{2}}=\frac{3\cdot 1}{21}=\frac{1}{7}$$

$$P(N_1\cap N_2)=P(N_2|N_1)P(N_1)=\cancel{\frac{3}{6}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{7}=\frac{2}{7} \quad \text{coincide con} \quad \frac{\binom{3}{0}\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}}=\frac{1\cdot 6}{21}=\frac{2}{7}$$