Lezione 2 MOTO UNIDIMENSIONALE

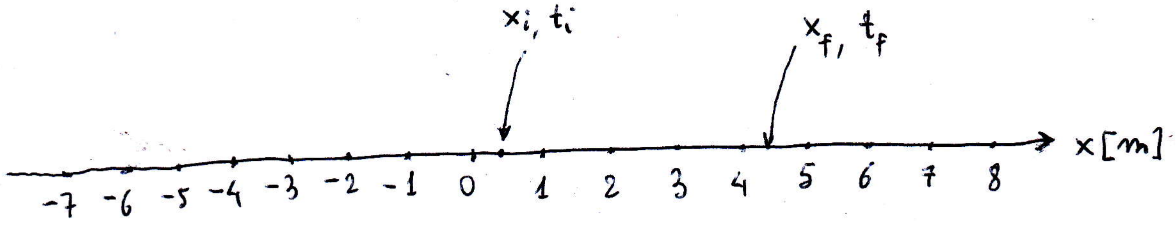
La CINEMATICA è quella branca della fisica che studia il moto dei corpi, senza considerare le cause del moto stesso.

MOTO: variazione nel tempo della posizione di un corpo rispetto a un osservatore.

In questo primo approccio trascureremo la struttura interna dei corpi considerati, e considereremo le loro dimensioni trascurabili rispetto all'estensione dell'ambiente entro cui si svolge il moto, lavoreremo cioè nell'approssimazione di "PUNTO MATERIALE".

Questo è il primo esempio di MODELLO di un sistema fisico.

Il MOTO UNIDIMENSIONALE, o MOTO RETTILINEO, si svolge lungo una direzione fissata (linea retta). E' quindi possibile associare alla retta lungo la quale si svolge il moto un sistema di COORDINATE SPAZIALI rappresentato da un ASSE ORIENTATO:



Un corpo in moto lungo la retta considerata, a ogni istante si trova in una certa posizione individuata dalla coordinata $x(t)$ (che si legge "x di t", cioè "x funzione del tempo t").

Consideriamo il moto del corpo tra l'istante t_i e l'istante $t_f > t_i$; indichiamo con il simbolo Δt (che si legge "delta t", essendo Δ la lettera greca delta maiuscola) la quantità $t_f - t_i$; cioè, $\Delta t = t_f - t_i$ è l'INTERVALLO DI TEMPO tra l'istante t_i e l'istante t_f; indichiamo poi con Δx la variazione della posizione del corpo in questo intervallo di tempo, cioè poniamo:

$\Delta x = x_f - x_i$, essendo $x_i = x(t_i)$ e $x_f = x(t_f)$.

Si definisce VELOCITÀ MEDIA del corpo considerato nell'intervallo di tempo Δt la quantità

$$v_{x,med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

, che evidentemente si misura in m/s, che si può anche scrivere $m\,s^{-1}$.

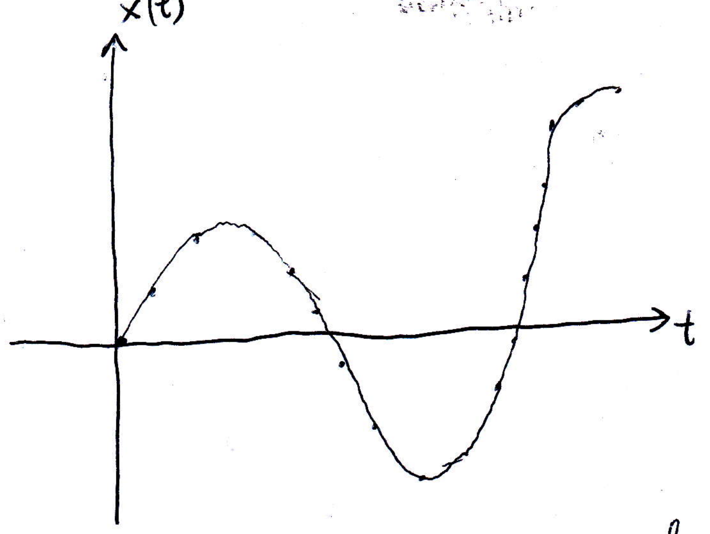
Attenzione! La velocità media così definita non dipende dal percorso seguito tra gli istanti t_i e t_f.

Esempio: se con un'auto ci spostiamo lungo una linea retta e risulta $x_f = x_i$, la velocità media nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$ è uguale a zero, anche se il tachimetro durante il viaggio ha indicato una velocità non nulla per la maggior parte del tempo; questo è possibile, ad esempio, se l'auto parte verso destra lungo la retta e poi inverte il moto e torna verso sinistra e si ferma nel punto con coordinata $x_f = x_i$ (cioè se torna al punto di partenza).

Si può definire una VELOCITÀ SCALARE MEDIA dividendo la DISTANZA PERCORSA per l'intervallo di tempo impiegato a percorrerla, e in generale può non coincidere con la velocità media definita in precedenza.

La velocità media è una quantità che può avere segno positivo o negativo a seconda che risulti $\Delta x > 0$ oppure $\Delta x < 0$ ($\Delta t > 0$ sempre... il tempo scorre sempre "in avanti"!).

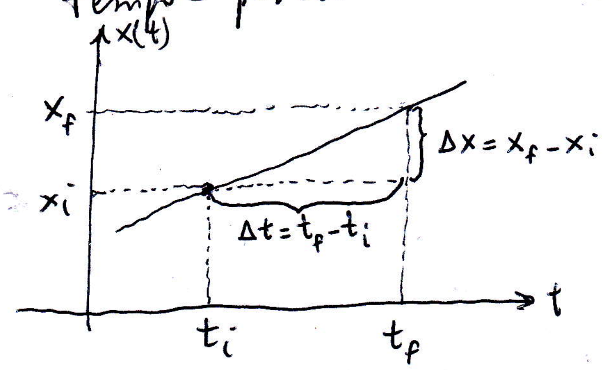
Rappresentazione del moto nel piano cartesiano posizione-tempo:



(esempio)

Il grafico della posizione x al variare del tempo t (o, detto in altro modo, il grafico della funzione $x(t)$) si dice LEGGE ORARIA del moto del corpo considerato.

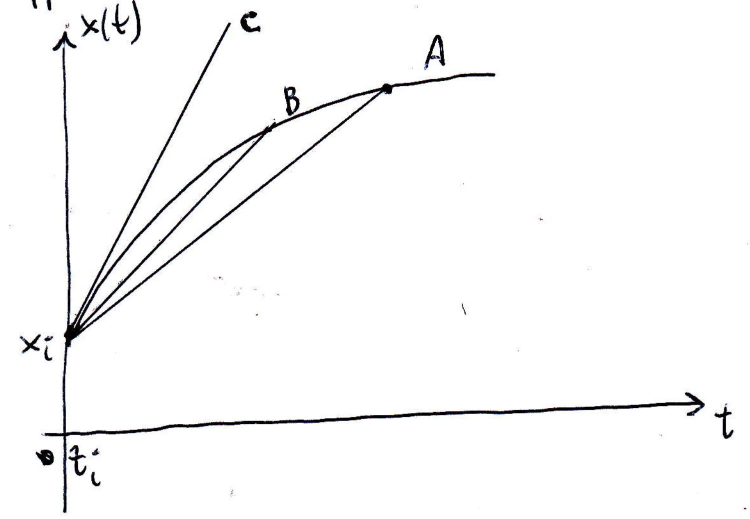
Per come è definita, la velocità media di un corpo è uguale al coefficiente angolare (anche detto "pendenza") della retta che passa per i punti (t_i, x_i) e (t_f, x_f) nel piano cartesiano tempo-posizione:



N.B.: in molti libri di testo si definisce la velocità media come la tangente trigonometrica dell'angolo formato dalla retta passante per (t_i, x_i) e (t_f, x_f) con il semiasse x positivo; ma è una definizione poco chiara: infatti, le grandezze x e t hanno dimensioni diverse (cioè non sono grandezze tra loro omogenee), e a seconda delle scale scelte sui due assi l'angolo in questione può assumere valori diversi. Meglio mantenere solo il concetto di coefficiente angolare come rapporto tra Δx e Δt.

Che cosa accade alla velocità media di un corpo quando si considerano intervalli di tempo sempre più piccoli?

Consideriamo il grafico della funzione $x(t)$. Supponiamo che la posizione del corpo venga misurata a istanti molto vicini tra loro, in modo che il grafico sia rappresentato di fatto da una funzione continua.



A questo punto manteniamo fisso il punto (t_i, x_i) e consideriamo (t_f, x_f) in punti man mano sempre più vicini a (t_i, x_i). Man mano che (t_f, x_f) si avvicina a (t_i, x_i), la direzione della retta che congiunge i due punti tende a coincidere con la direzione della retta TANGENTE al grafico di $x(t)$ nel punto (t_i, x_i).

Attenzione! Al tendere di (t_f, x_f) a (t_i, x_i) i due intervalli Δt e Δx diventano entrambi sempre più piccoli, ma il loro rapporto $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ tende ad assumere un valore ben definito.

Si definisce quindi la VELOCITÀ ISTANTANEA all'istante t_i:

$$v_x(t_i) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t)\Big|_{t=t_i}$$

(derivata prima rispetto al tempo della funzione $x(t)$, calcolata per $t=t_i$).

Per completezza, è essenziale dire che in fisica si usano diverse notazioni per indicare la derivata rispetto al tempo, tutte equivalenti e utilizzabili indifferentemente:

$$x'(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = \dot{x}(t) = D\,x(t)$$

La prima e l'ultima notazione sono usate prevalentemente dai matematici, la seconda e la terza prevalentemente dai fisici ($\frac{dx(t)}{dt}$ è la notazione introdotta da Gottfried Wilhelm von Leibniz, $\dot{x}(t)$ è la notazione introdotta da Isaac Newton)

La velocità indicata dal tachimetro di un'auto è la velocità istantanea.

L'indice "x" nel simbolo v_x sta ovviamente a indicare la "velocità lungo l'asse x".

Esempio 1 Consideriamo un punto materiale che si muove di moto rettilineo con legge oraria

$$x(t) = 3t^2 \ (m)$$

Attenzione anzitutto alle dimensioni fisiche di queste quantità! Se t è misurato in secondi, il coefficiente 3 non può essere un numero puro adimensionale, in quanto la quantità $3t^2$ deve avere le dimensioni di una lunghezza! Dunque, in questo caso, la quantità "3" dovrà essere una grandezza fisica avente come dimensioni $L^1 \cdot T^{-2}$, cioè $3 \ m/s^2$. Negli esercizi seguenti non preciseremo ulteriormente questo fatto, che comunque dovrà sempre essere tenuto presente.

La velocità istantanea in funzione del tempo sarà quindi

$$v_x(t) = x'(t) = 3 \cdot 2t = 6t \quad (m/s)$$

Esempio 2

$$x(t) = -4t + 2t^2 \quad (m)$$

a) Determinare lo spostamento del corpo tra gli istanti $t_i = 0$ e $t_f = 1s$:

$$\Delta x_1 = x(t_f = 1s) - x(t_i = 0) = (-4 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2)\, m - 0\, m = -2\, m$$

E tra gli istanti $t_i = 1s$ e $t_f = 3s$:

$$\Delta x_2 = x(t_f = 3s) - x(t_i = 1s) = \left((-4 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2) - (-4 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2)\right) m =$$
$$= (6 - (-2))\, m = 8\, m$$

b) Calcolare le velocità medie nei due intervalli di tempo considerati sopra:

$$V_{m,1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{-2\, m}{1\, s} = -2\, \frac{m}{s} \quad ; \quad V_{m,2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{8\, m}{(3-1)s} = 4\, m/s$$

c) Trovare la velocita' istantanea del corpo all'istante

$t = 2,5\ s$:

$$v_x(t) = x'(t) = (-4 + 2 \cdot 2t)\ m/s = (-4 + 4t)\ (m/s)$$

Dunque:

$$v_x(t = 2,5\ s) = (-4 + 4 \cdot 2,5)\ m/s = (-4 + 10)\ m = 6\ m/s.$$

Per come e' definita, la velocita' istantanea di un corpo e' nulla negli istanti in cui la funzione $x(t)$ presenta un massimo relativo o un minimo relativo o un flesso orizzontale, cioe' negli istanti in cui risulta $x'(t) = 0$.

Moto rettilineo uniforme

Nel caso particolare in cui un corpo si muove con velocita' istantanea costante lungo una linea retta, si parla di MOTO RETTILINEO UNIFORME.

Teorema: nel moto rettilineo uniforme la velocita' media su un qualunque intervallo di tempo coincide con la velocita' istantanea costante v_x.

Dimostrazione: suddividiamo l'intervallo di tempo $t_f - t_i$ in n "intervallini" Δt uguali, in modo che risulti $t_f - t_i = n\,\Delta t$. Siano $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ i corrispondenti spostamenti in ciascuno di questi "intervallini"; risulta pertanto $x_f - x_i = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n$.

Allora otteniamo:

$$v_{x,med} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n}{n\,\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \frac{\Delta x_2}{\Delta t} + \dots + \frac{\Delta x_n}{\Delta t}\right)$$

Per n molto grande gli "intervallini" Δt diventano molto piccoli, per cui tutti i rapporti $\frac{\Delta x_1}{\Delta t}, \frac{\Delta x_2}{\Delta t}, \dots, \frac{\Delta x_n}{\Delta t}$ tendono alla velocita' istantanea v_x, che per ipotesi e' costante. Allora otteniamo infine:

$$v_{x,med} = \frac{1}{n} \cdot n\,v_x = v_x \qquad (n \text{ grande})$$

e questo dimostra il teorema.

Dunque, poiché $v_{x,med} = v_x$ (costante), possiamo scrivere:

$$\frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = v_x \Rightarrow x_f - x_i = v_x (t_f - t_i) \Rightarrow x_f = x_i + v_x (t_f - t_i)$$

Preso $t_i = 0$ e $t_f = t$ (istante generico), possiamo quindi scrivere

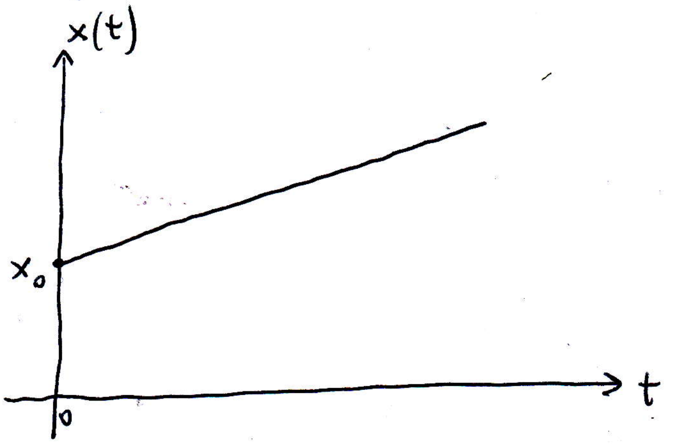
$$\boxed{x_f(t) = x_i + v_x t}$$

LEGGE ORARIA DEL MOTO RETTILINEO UNIFORME

In definitiva, il moto rettilineo uniforme è descritto delle seguenti leggi (eliminando l'indice f):

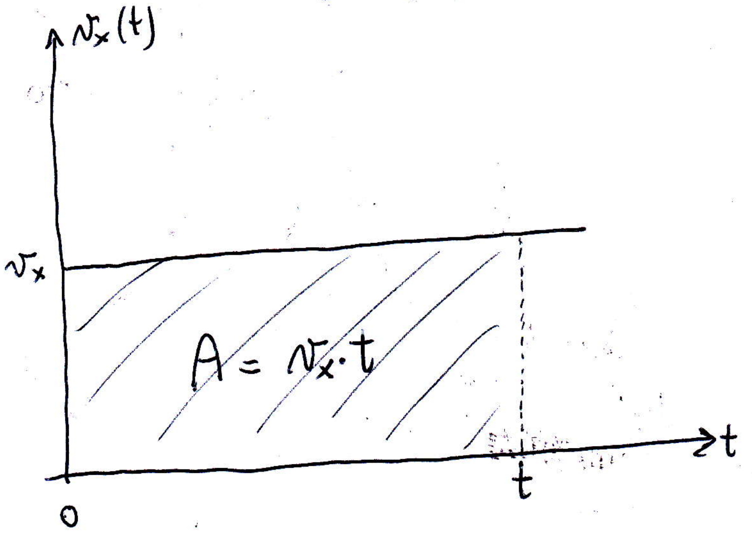
$$\begin{cases} v_x(t) = v_x \text{ costante} \\ x(t) = x_0 + v_x t \end{cases}, \quad \text{avendo posto } x_i = x(t=0) \equiv x_0$$

Ad esempio, nel caso $v_x > 0$, il grafico di $x(t)$ può assomigliare a questo:



retta con pendenza positiva nel piano cartesiano (t, x). $(v_x > 0)$

E' essenziale considerare l'"interpretazione geometrica" del moto rettilineo uniforme. Consideriamo il grafico della funzione $v_x(t) = v_x$ costante nel piano cartesiano (t, v_x):



L'area del rettangolo avente per lati i due intervalli $[0, t]$ e $[0, v_x]$ e' chiaramente uguale a $v_x \cdot t$.

Ma abbiamo visto che risulta $v_x t = x(t) - x_0$; dunque, nel piano cartesiano (t, v_x) l'area delimitata tra l'asse dei tempi e il grafico di $v_x(t)$ tra gli istanti 0 e t e' uguale allo spostamento $x(t) - x_0$ del corpo tra questi due istanti. Questo e' ovviamente vero anche se $v_x < 0$.

Esempio

Corpo che si muove di moto rettilineo uniforme

$x_i = 0 \qquad x_f = 20\ m \qquad \Delta t = t_f - t_i = 4{,}4\ s$

Poiché $v_{x,med} = v_x$, risulta $v_x = \dfrac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \dfrac{(20-0)\ m}{4{,}4\ s} = 4{,}5\ m/s$

Posto $t_i = 0$ e $x_i = 0$, quale e' la posizione del corpo all'istante $t = 10\ s$?

$$x(t = 10\ s) = x_i + v_x \cdot (10\ s) = (4{,}5 \cdot 10)\ m = 45\ m$$

Osservazione: le leggi del moto rettilineo uniforme si possono applicare, con le dovute attenzioni, anche al caso di moto non rettilineo purché con velocità scalare costante; in tal caso occorre immaginare di "rettificare" la traiettoria, e considerare come Δx la distanza percorsa lungo la traiettoria.

<u>Esempio</u>. Traiettoria circolare con raggio $r = 10\ m$, percorsa con velocità scalare costante $v = 5\ m/s$.

Quanto tempo è necessario per percorrere un giro completo?

Dalla legge $\Delta x = v \Delta t$ otteniamo

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 10\ m}{5\ m/s} = 12{,}57\ s$$

Moto accelerato

Si parla di "moto accelerato" quando la velocità istantanea di un corpo varia nel tempo.

Sia $V_{x,i}$ la velocità istantanea di un corpo all'istante t_i, cioè poniamo $V_x(t_i) = V_{x,i}$.

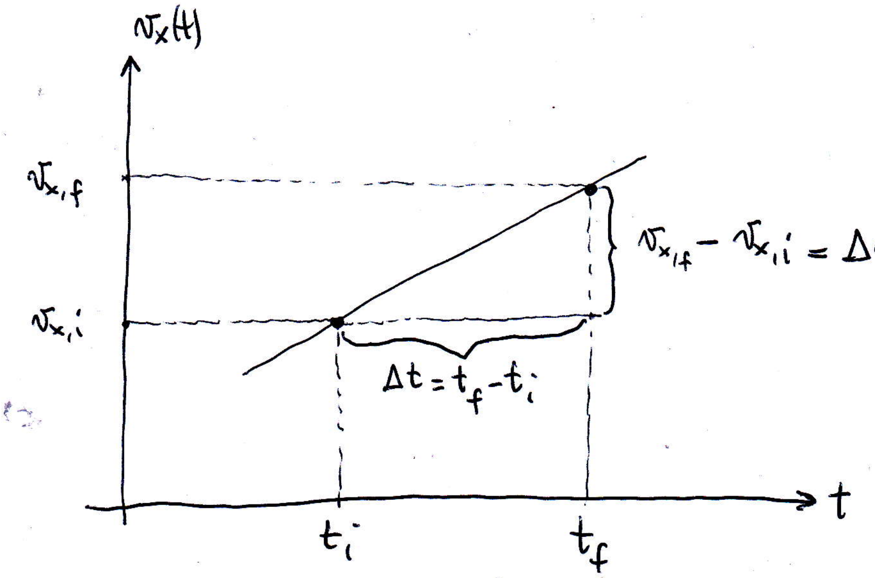
Analogamente poniamo $V_x(t_f) = V_{x,f}$.

Definiamo l'ACCELERAZIONE MEDIA del corpo tra gli istanti t_i e t_f la quantità seguente:

$$a_{x,med} = \frac{v_{x,f} - v_{x,i}}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t},$$

che evidentemente si misura in $\frac{m/s}{s} = \frac{m}{s^2}$, anche indicato $m \cdot s^{-2}$.

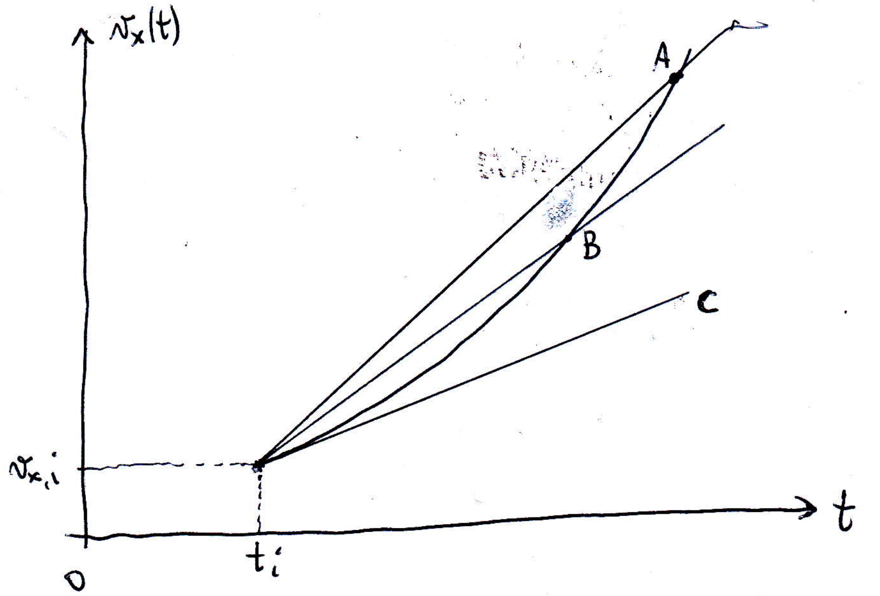
Per come è definita, l'accelerazione media di un corpo nell'intervallo $[t_i, t_f]$ è uguale al coefficiente angolare della retta che passa per i punti $(t_i, v_{x,i})$ e $(t_f, v_{x,f})$ nel piano cartesiano (t, v_x):



Che cosa accade all'accelerazione media di un corpo quando si considerano intervalli di tempo sempre più piccoli?

Consideriamo il grafico della funzione $v_x(t)$.

Supponiamo che la velocità istantanea del corpo venga misurata a istanti molto vicini tra loro, in modo che il grafico sia rappresentato di fatto da una funzione continua.



A questo punto manteniamo fisso il punto $(t_i; v_{x,i})$ e consideriamo $(t_f, v_{x,f})$ in punti sempre più vicini a $(t_i, v_{x,i})$.

Man mano che $(t_f, v_{x,f})$ si avvicina a $(t_i, v_{x,i})$, la direzione della retta che congiunge i due punti tende a coincidere con la direzione della retta tangente al grafico di $v_x(t)$ nel punto $(t_i, v_{x,i})$.

Come già visto nel caso di $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, anche nel caso del rapporto $\frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ i due intervalli Δv_x e Δt diventano sempre più piccoli al tendere di $(t_f, v_{x,f})$ a $(t_i, v_{x,i})$, ma il rapporto $\frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ tende ad assumere un valore ben definito.

Si definisce quindi l' ACCELERAZIONE ISTANTANEA all'istante t_i:

$$a_x(t_i) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = v_x'(t)$$

Quando si usa il solo termine "accelerazione" in genere si intende l'accelerazione istantanea.

Per come è definita, l'accelerazione istantanea di un corpo è nulla negli istanti in cui la funzione $v_x(t)$ presenta un massimo relativo o un minimo relativo o un flesso orizzontale, cioè negli istanti in cui risulta $v_x'(t) = 0$.

Risulta anche, come conseguenza delle leggi determinate finora:

$$a_x(t) = x''(t) \qquad (\text{essendo } V_x(t) = x'(t))$$

Quando $v_x(t)$ e $a_x(t)$ hanno lo stesso segno, $|v_x(t)|$ aumenta nel tempo.

Quando $v_x(t)$ e $a_x(t)$ hanno segni opposti, $|v_x(t)|$ decresce nel tempo.

Attenzione: un corpo che si muove di moto rettilineo uniforme ha accelerazione nulla. Infatti risulta

$a_x(t) = v_x'(t) = 0$ se $v_x(t) = v_x$ costante.

Esempio. Un corpo si muove di moto rettilineo con legge oraria

$$x(t) = 2 + 3t - t^2 \quad (m)$$

Risulta pertanto:

$$v_x(t) = x'(t) = 3 - 2t \quad (m/s)$$

$$a_x(t) = -2 \ m/s^2 \quad (= v_x'(t))$$

All'istante $t = 3$ s risulta:

$$x(t = 3\,s) = (2 + 3 \cdot 3 - 3^2)\ m = 2\ m$$

$$v_x(t = 3\,s) = (3 - 2 \cdot 3)\ m/s = -3\ m/s$$

$$a_x(t = 3s) = -2\ m/s^2$$ (a_x è costante in questo caso, non dipende dal tempo)

Il grafico di $x(t)$ è rappresentato da una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate, concavità rivolta verso il basso, e vertice nel punto di ascisse

$$t_v = \frac{-3}{-2}\ s = 1{,}5\ s$$

Ordinata del vertice della parabola:

$$x_v = x\left(t = \frac{3}{2}\ s\right) = \left(2 + 3 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) m = \left(2 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4}\right) m =$$

$$= \left(2 + \frac{9}{4}\right) m = \frac{17}{4}\ m = 4{,}25\ m$$

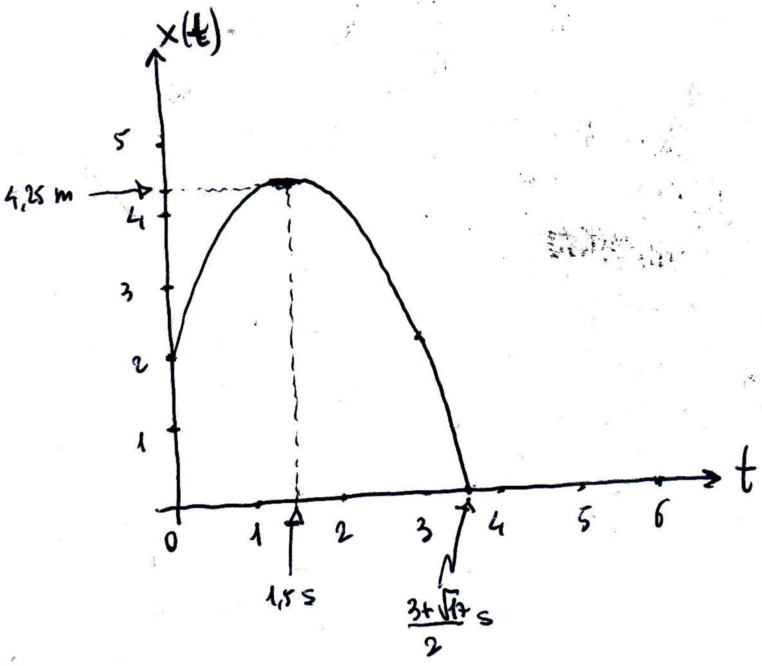
A quale istante risulta $x = 0$? Considerare solo valori $t > 0$.

Occorre risolvere l'equazione nell'incognita t:

$$2+3t-t^2=0 \Rightarrow t^2-3t-2=0$$

$$t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$

La soluzione accettabile è $t_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2}\,s \simeq 3{,}56\ s$.



Moto rettilineo uniformemente accelerato

Nel caso particolare in cui un corpo si muove con accelerazione istantanea costante lungo una linea retta, si parla di MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO.

Teorema: nel moto rettilineo uniformemente accelerato l'accelerazione media su un qualunque intervallo di tempo coincide con l'accelerazione istantanea costante a_x.

Dimostrazione: suddividiamo l'intervallo di tempo $t_f - t_i$ in n "intervallini" Δt uguali, in modo che risulti

$t_f - t_i = n \Delta t$. Siano $\Delta v_{x,1}, \Delta v_{x,2}, \dots, \Delta v_{x,n}$ le corrispondenti variazioni della velocita' istantanea in ciascuno di questi "intervallini"; risulta pertanto:

$$v_{x,f} - v_{x,i} = \Delta v_{x,1} + \Delta v_{x,2} + \dots + \Delta v_{x,n} .$$

Allora otteniamo:

$$a_{x,med} = \frac{v_{x,f} - v_{x,i}}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v_{x,1} + \Delta v_{x,2} + \dots + \Delta v_{x,n}}{n \Delta t} =$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{\Delta v_{x,1}}{\Delta t} + \frac{\Delta v_{x,2}}{\Delta t} + \dots + \frac{\Delta v_{x,n}}{\Delta t} \right)$$

Per n molto grande gli "intervallini" Δt diventano molto piccoli, per cui tutti i rapporti $\frac{\Delta v_{x,1}}{\Delta t}, \frac{\Delta v_{x,2}}{\Delta t}, \dots, \frac{\Delta v_{x,n}}{\Delta t}$ tendono all'accelerazione istantanea a_x, che per ipotesi e' costante.

Allora otteniamo infine:

$$a_{x,med} = \frac{1}{n} \cdot n \, a_x = a_x \quad (n \text{ grande})$$

e questo dimostra il teorema.

Dunque, poiché $a_{x,med} = a_x$ (costante), possiamo scrivere:

$$\frac{v_{x,f} - v_{x,i}}{t_f - t_i} = a_x \Rightarrow v_{x,f} - v_{x,i} = a_x (t_f - t_i) \Rightarrow v_{x,f} = v_{x,i} + a_x (t_f - t_i)$$

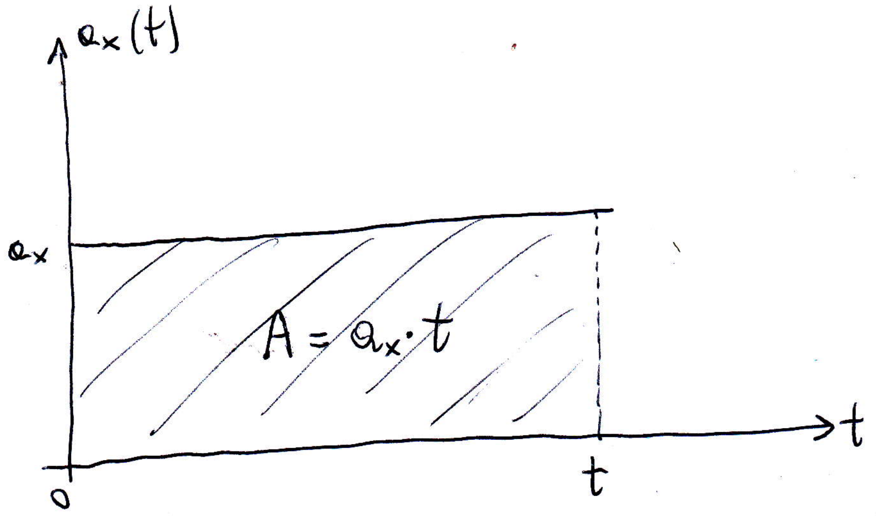
Preso $t_i = 0$ e $t_f = t$ (istante generico), possiamo quindi scrivere:

$$\boxed{v_{x,f}(t) = v_{x,i} + a_x t} \quad (a_x \text{ costante})$$

Poiché $t_i = 0$, eliminando l'indice f possiamo scrivere, in generale, per il moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$v_x(t) = v_{x,0} + a_x t$$

Anche in questo caso è possibile dare un'interpretazione geometrica. Consideriamo il grafico della funzione $a_x(t) = a_x$ costante nel piano cartesiano (t, a_x):



L'area del rettangolo avente per lati i due intervalli $[0, t]$ e $[0, a_x]$ è chiaramente uguale a $a_x \cdot t$.

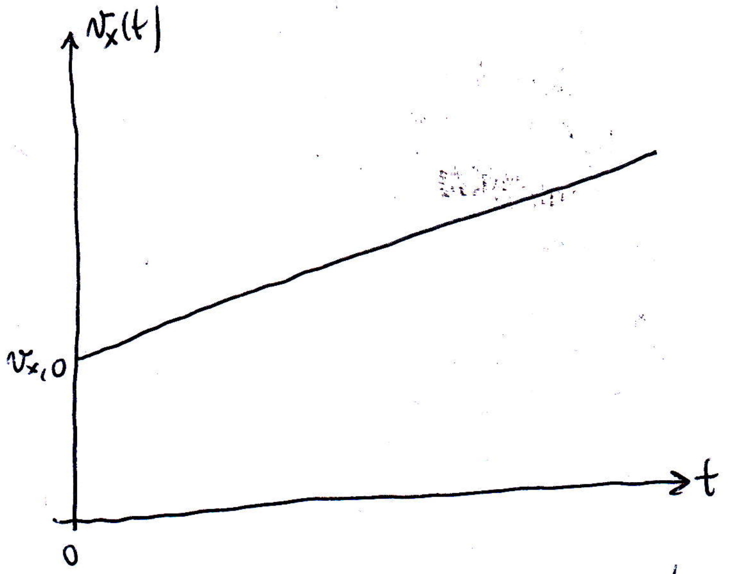
Ma abbiamo visto che risulta $a_x t = v_x(t) - v_{x,0}$; dunque, nel piano cartesiano (t, a_x), l'area delimitata tra l'asse dei tempi e il grafico di $a_x(t)$ tra gli istanti 0 e t è uguale alla variazione $v_x(t) - v_{x,0}$ della velocità istantanea del corpo tra questi due istanti. Questo è ovviamente vero anche se $a_x < 0$.

Ma qual è la legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato?

Consideriamo il grafico della funzione $v_x(t)$.

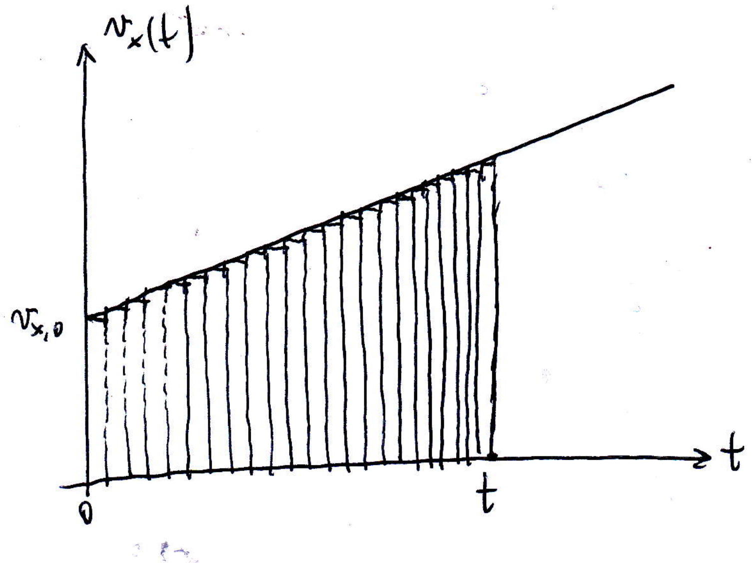
Risulta $v_x(t) = v_{x,0} + a_x t$ (vedi sopra).

Ad es., nel caso $a_x > 0$, l'andamento del grafico di $v_x(t)$ può essere di questo tipo:



retta con pendenza costante (a_x costante)

E' necessario procedere in questo modo: suddividiamo l'intervallo $[0, t]$ nell'asse dei tempi, in n rettangolini aventi tutti base Δt e ciascuno altezza pari al valore di $v_x(t)$ nell'estremo inferiore del corrispondente "intervallino" Δt:



Poniamo $t_0 = 0$; risulterà

$$t_{n-1} = t - \Delta t \quad e \quad t_n = t$$

Per $\Delta t \to 0$, la somma delle aree dei rettangolini tende all'area della regione compresa (nel piano cartesiano (t, v_x)) tra l'asse dei tempi e il grafico di $v_x(t)$ nell'intervallo $[0, t]$.

Questa regione piana è chiaramente un trapezio rettangolo, e la sua area (che coincide con lo spostamento del corpo lungo l'asse x tra gli istanti 0 e t dato che questo è vero per ogni intervallino Δt) è facilmente calcolabile:

$$x(t) - x_0 = \frac{[v_x(t) + v_{x,0}] \cdot t}{2} = \frac{[(v_{x,0} + a_x t) + v_{x,0}] \cdot t}{2} =$$

$$= \frac{(2 v_{x,0} + a_x \cdot t) \cdot t}{2} = v_{x,0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Riordinando i termini, otteniamo infine

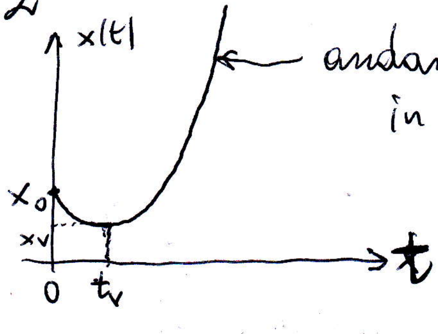
$$\boxed{x(t) = x_0 + v_{x,0} t + \frac{1}{2} a_x t^2}$$

LEGGE ORARIA DEL MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

In definitiva, il moto rettilineo uniformemente accelerato è descritto dalle seguenti leggi:

$$\begin{cases} a_x(t) = a_x \quad \text{costante} \\ v_x(t) = v_{x,0} + a_x t \\ x(t) = x_0 + v_{x,0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \end{cases}$$

Ad es., per $a_x > 0$:



andamento parabolico in funzione del tempo

Dalle equazioni per $v_x(t)$ e $x(t)$ è possibile ricavare un'equazione che lega v_x direttamente a x nel moto rettilineo uniformemente accelerato.

Da $v_x(t) = v_{x,0} + a_x t$ possiamo ricavare:

$$t = \frac{v_x(t) - v_{x,0}}{a_x} \qquad (\text{se } a_x \neq 0, \text{ ovviamente}).$$

Sostituiamo questa espressione al posto di t nell'espressione della legge oraria:

$$x(t) = x_0 + \frac{v_{x,0}\left[v_x(t) - v_{x,0}\right]}{a_x} + \frac{1}{2} \cancel{a_x} \frac{\left[v_x(t) - v_{x,0}\right]^2}{a_x^{\cancel{2}}} =$$

$$= x_0 + \frac{1}{2a_x}\left[\cancel{2 v_{x,0} v_x(t)} - 2v_{x,0}^2 + (v_x(t))^2 - \cancel{2v_{x,0} v_x(t)} + v_{x,0}^2\right] =$$

$$= x_0 + \frac{1}{2a_x}\left[(v_x(t))^2 - v_{x,0}^2\right]$$

Questa relazione può anche essere scritta nella forma

$$(v_x(t))^2 = v_{x,0}^2 + 2a_x\left[x(t) - x_0\right]$$

Esempio Un corpo ha inizialmente velocità istantanea $V_{x,0} = 632$ miglia/h (1 miglio = 1609,35 m), e viene portato a riposo (cioè viene fermato) in un intervallo di tempo $T = 1,40$ s con accelerazione costante.

a) Si calcoli l'accelerazione del corpo

Dalla legge $V_x(t) = V_{x,0} + a_x t$, sappiamo che risulta $V_x(t=T) = 0$, per cui possiamo scrivere

$$V_{x,0} + a_x T = 0 \Rightarrow a_x = -\frac{V_{x,0}}{T} = -\frac{632 \cdot 1609,35}{3600 \cdot 1,40} \frac{m}{s^2}$$

Abbiamo usato l'identità $1 \frac{\text{miglio}}{h} = \frac{1 \cdot 1609,35 \text{ m}}{3600 \text{ s}}$,

essendo $1 h = 3600$ s

Allora: $a_x = -\frac{V_{x,0}}{T} \simeq -201,81 \text{ m/s}^2$

b) Si calcoli la distanza percorsa dal corpo tra l'istante $t=0$ e l'istante T:

Usiamo la legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato:

$x(t) = x_0 + V_{x,0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$, ponendo $t = T$ e $a_x = -\frac{V_{x,0}}{T}$,

essendo $x_0 = 0$:

$$x(T) = V_{x,0} T - \frac{1}{2} \frac{V_{x,0}}{\cancel{T}} \cdot T^{\cancel{2}} = \frac{1}{2} V_{x,0} T = \frac{1}{2} \cdot 632 \cdot \frac{1609,35}{3600} \cdot 1,40 \text{ m} =$$

$= 197,77$ m

Esempio: Un corpo si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato partendo da fermo all'istante $t=0$, e raggiungendo una velocità istantanea pari a $v_f = 10,37$ Km/s dopo avere percorso un tratto lungo 220 m.

Quanto vale l'accelerazione?

Possiamo utilizzare le leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato; poniamo $d = 220$ m. Poiché $x_0 = 0$ e $v_{x,0} = 0$, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} d = \frac{1}{2} a_x t^2 \\ v_f = a_x t \end{cases} \Rightarrow$$ Ricaviamo t dalla seconda equazione:

$t = \frac{v_f}{a_x}$ e sostituiamo questa espressione alla variabile t nella prima equazione:

$$d = \frac{1}{2} \cancel{a_x} \cdot \frac{v_f^2}{a_x^{\cancel{2}}} \Rightarrow a_x = \frac{v_f^2}{2d} = \frac{(10,37 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 220} \frac{m}{s^2} =$$

$$= 2,735 \times 10^5 \; m/s^2$$

Possiamo anche usare la legge che collega direttamente x e v_x:

$$a_x = \frac{v_f^2 - v_{x,0}^2}{2(d - x_0)} = \frac{v_f^2}{2d},$$ che è identica a quella trovata in precedenza.

Accelerazione di gravità vicino alla superficie terrestre

Galileo Galilei osservò che un corpo in caduta libera in prossimità della superficie terrestre si muove di moto uniformemente accelerato lungo tratti di caduta brevi.

In particolare, se vengono eliminati tutti gli attriti, si osserva che tutti i corpi, senza eccezioni, cadono con la stessa accelerazione.

Al livello del mare questa accelerazione vale $9{,}81\ m/s^2$ (media su tutti i punti della superficie terrestre al livello del mare) e si indica tradizionalmente con la lettera g (g minuscola).

Esempio. Un corpo viene lanciato verso l'alto con velocità iniziale $V_{x,0} = 6\ m/s$

a) Quale è la massima altezza raggiunta dal corpo?

Consideriamo un asse x verticale, orientato positivamente verso l'alto. Con questa scelta risulta $V_{x,0} = 6\ m/s$, $a_x = -g = -9{,}81\ m/s^2$, in quanto l'accelerazione di gravità tende a rallentare i corpi che si muovono verso l'alto.

Dalla legge $V_x(t) = V_{x,0} + a_x t = V_{x,0} - gt$ otteniamo l'istante t_1 in cui risulta $V_x(t_1) = 0$, cioè l'istante in cui il corpo raggiunge la massima altezza lungo la sua traiettoria:

$$t_1 = \frac{V_{x,0}}{g}$$

Sostituendo queste espressione nella legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato otteniamo la quota raggiunta dal corpo all'istante $t = t_1$:

$$x(t_1) = V_{x,0} t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = V_{x,0}\left(\frac{V_{x,0}}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_{x,0}}{g}\right)^2 =$$

$$= \frac{V_{x,0}^2}{g} - \frac{1}{2} \cancel{g} \frac{V_{x,0}^2}{g^{\cancel{2}}} = \frac{V_{x,0}^2}{2g} = \frac{6^2}{2 \cdot 9{,}81} m = 1{,}83 \, m$$

Si poteva ottenere lo stesso risultato utilizzando la legge che lega v_x e x direttamente:

$$x(t_1) - x_0 = \frac{(v_x(t_1))^2 - v_{x,0}^2}{2 a_x}$$

Con $x_0 = 0$, $v_x(t_1) = 0$ e $a_x = -g$ otteniamo:

$$x(t_1) = \frac{-v_{x,0}^2}{-2g} = \frac{v_{x,0}^2}{2g}$$ che coincide con il risultato ottenuto precedentemente.

b) A partire dall'istante $t = 0$, dopo quanto tempo il corpo ritorna alla quota $x = 0$?

Dalla legge oraria $x(t) = V_{x,0} t - \frac{1}{2} g t^2$ (essendo $x_0 = 0$),

la condizione $x(t) = 0$ porta all'equazione

$V_{x,0} t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$; mettiamo t in evidenza:

$t\left(V_{x,0} - \frac{1}{2} g t\right) = 0$; si ottengono quindi due soluzioni:

$t_1 = 0$ (ovvia) e $t_2 = \frac{2 V_{x,0}}{g} = \frac{2 \cdot 6}{9{,}81} s = 1{,}22 \, s$ che è la soluzione cercata

<u>Problema</u>. Una pietra è lasciata cadere in un pozzo con acqua sul fondo. Quando la pietra colpisce l'acqua, il rumore si propaga con velocità costante verso l'alto, $V_s = 343{,}4\ m/s$. L'osservatore fa partire il cronometro nell'istante in cui lascia cadere la pietra e lo ferma nell'istante in cui sente il rumore. L'intervallo di tempo misurato è 5 s. Sapendo che la pietra cade con accelerazione costante $g = 9{,}81\ m/s^2$, determinare la profondità del pozzo.

L'intervallo di tempo misurato è dato dalla somma di due intervalli di tempo:

T_1 = intervallo di tempo tra l'istante in cui l'osservatore lascia cadere la pietra da ferma dall'imboccatura del pozzo all'istante in cui la pietra tocca la superficie dell'acqua.

T_2 = intervallo di tempo necessario affinché il suono dell'urto della pietra nell'acqua raggiunga l'orecchio dell'osservatore dopo avere risalito il pozzo.

Indichiamo con h la profondità della grotta, tra l'imboccatura e la superficie dell'acqua.

Risulta quindi:

$h = \frac{1}{2} g T_1^2$, in quanto il moto di caduta della pietra è rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione costante g e velocità iniziale nulla.

$h = V_s T_2$, in quanto ~~...~~ il suono dell'urto della pietra sulla superficie dell'acqua risale lungo il pozzo con velocità costante V_s.

Otteniamo pertanto:

$$T_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad , \quad T_2 = \frac{h}{V_s}$$

Se $T = T_1 + T_2$ è l'intervallo di tempo totale cronometrato dall'osservatore, possiamo impostare la seguente equazione:

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{V_s} = T$$

Lasciamo il radicale al 1° membro, isolato:

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} = T - \frac{h}{V_s}$$

La quantità al 1° membro è positiva, per cui al 2° membro deve valere la condizione

$$T - \frac{h}{V_s} \geq 0 \quad , \quad \text{da cui} \quad h \leq V_s T$$

Dovremo pertanto accettare le sole soluzioni che rispettano questa condizione. A questo punto eleviamo al quadrato i due membri dell'equazione:

$$\frac{2h}{g} = T^2 - \frac{2T}{V_s} h + \frac{h^2}{V_s^2}$$ e riordiniamo i termini dell'equazione:

$$\frac{h^2}{V_s^2} - 2\left(\frac{T}{V_s} + \frac{1}{g}\right)h + T^2 = 0$$

Moltiplichiamo i due membri per V_s^2:

$$h^2 - 2\left(V_s T + \frac{V_s^2}{g}\right)h + V_s^2 T^2 = 0$$

Troviamo le radici dell'equazione usando la formula ridotta (legittima, in quanto il coefficiente del termine di 1° grado ha un fattore 2 in evidenza):

$$h_{1,2} = V_s T + \frac{V_s^2}{g} \pm \sqrt{\left(V_s T + \frac{V_s^2}{g}\right)^2 - V_s^2 T^2} =$$

$$= V_s T + \frac{V_s^2}{g} \pm \sqrt{\cancel{V_s^2 T^2} + 2\frac{V_s^3 T}{g} + \frac{V_s^4}{g^2} - \cancel{V_s^2 T^2}} =$$

$$= V_s T + \frac{V_s^2}{g} \pm \sqrt{\frac{V_s^4}{g^2}\left(1 + \frac{2gT}{V_s}\right)} =$$

$$= V_s T + \frac{V_s^2}{g} \pm \frac{V_s^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gT}{V_s}}$$

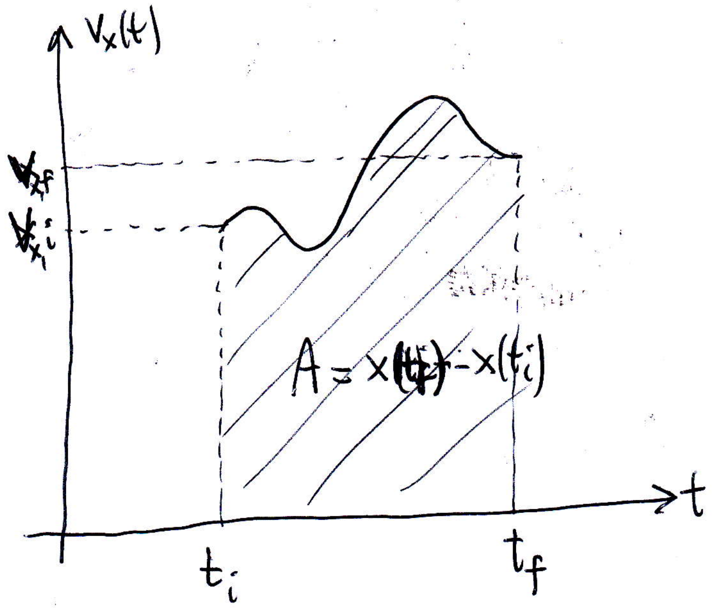
La soluzione con il segno + davanti alla radice è chiaramente maggiore di $V_s T$, per cui non è accettabile. La soluzione accettabile è quindi

$$h = V_s T - \frac{V_s^2}{g}\left(\sqrt{1 + \frac{2gT}{V_s}} - 1\right) = \left[1717 - \frac{343{,}4^2}{9{,}81}\left(\sqrt{1 + \frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 5}{343{,}4}} - 1\right)\right] m \simeq$$

$$\simeq (1717 - 1609{,}273)\, m \simeq 107{,}72\ m$$

Moto rettilineo vario

Nel caso più generale, la funzione $v_x(t)$ nel moto rettilineo potrebbe non essere costante né avere un andamento lineare al variare del tempo. Ad esempio:



Tuttavia, è possibile ripetere esattamente lo stesso ragionamento fatto nel caso del moto rettilineo uniformemente accelerato. La conclusione è la stessa: lo spostamento del corpo tra l'istante t_i e l'istante t_f è dato dall'area della regione compresa (nel piano cartesiano (t, v_x)) tra l'asse dei tempi e il grafico di $v_x(t)$ nell'intervallo $[t_i, t_f]$. Matematicamente possiamo quindi scrivere:

$$x_f - x_i = \int_{t_i}^{t_f} v_x(t)\,dt$$

; nei casi $v_x(t) = v_x$ costante e $v_x(t) = v_{x,0} + a_x t$, con a_x costante, questa formula fornisce i risultati già ottenuti in precedenza per altre vie.