Potenziale elettrostatico

$$\Delta U = -\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{s} = -q\underbrace{\int_a^b \vec{E}\, d\vec{s}}_{\Delta V}$$

La quantità $V = \frac{U}{q}$ è detta potenziale elettrico

$\Delta V = -\int_a^b \vec{E}\, d\vec{s}$ è detta differenza di potenziale

$\Delta U = -q\,\Delta V$ energia potenziale

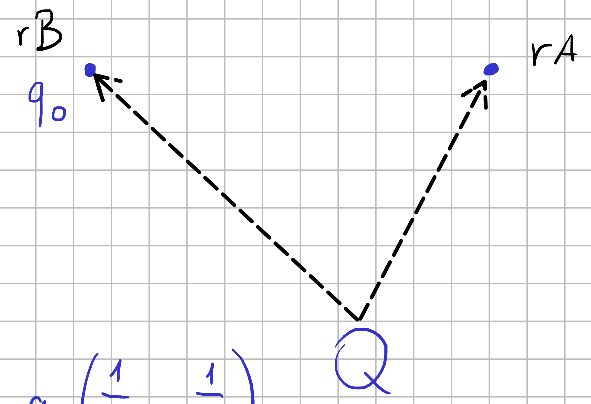
$$[\Delta V] = \frac{1\,J}{C} = 1\,V \text{ (volt)}$$

$$[\Delta U] = C\cdot V = 1\,eV \text{ (elettronvolt)}$$

$$1\,eV = (1.602\times 10^{-19}\,C)\cdot(1\,V) = 1.602\times 10^{-19}\,J$$

è l'energia che un elettrone guadagna quando viene accelerato tra due punti tra i quali esiste una ΔV di $1\,V$.

Esempio: Calcolare il potenziale elettrico di una carica



$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{u}_r$$

$$\Delta V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left.\frac{q}{r}\right|_{r_A}^{r_B} = V_B - V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

Se r_A è distante $\infty \Rightarrow V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r_B}$

$V_A = 0$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad , \quad U = q_0 \sum_i V_i$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad , \quad U = q_0 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$: distribuzione continua

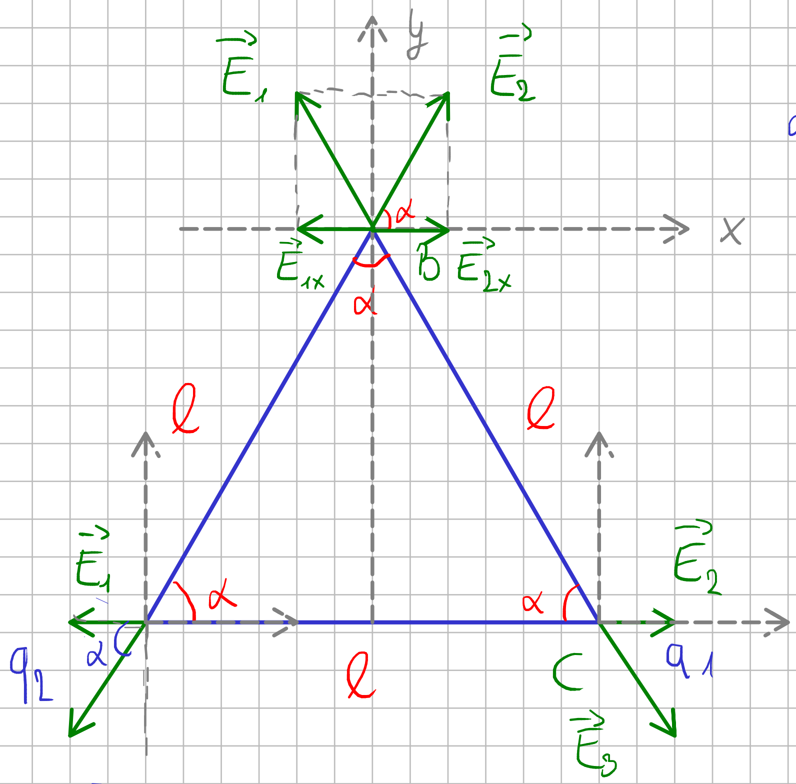
$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{s} \qquad \int_A^B dV = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{s}$$

$$dV = \vec{E}\, d\vec{s} \rightarrow \vec{E} = \left(-\underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}}_{E_x}, \underbrace{\frac{\partial V}{\partial y}}_{E_y}, \underbrace{\frac{\partial V}{\partial z}}_{E_y}\right) = -\vec{\nabla} V = -\overrightarrow{\text{grad}\, V}$$

Esercizi campo elettrico e potenziale elettrico

1) Tre cariche positive uguali q_1, q_2, q_3 sono poste ai vertici di un triangolo equilatero.

a) Calcolare il campo elettrico sui vertici



$$\alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$$

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = |\vec{E}_3| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{l^2} = E_0$$

$$\vec{E}_x^{TOT} = \vec{E}_x^{(1)} + \vec{E}_x^{(2)} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} E_y^{(1)} = E_1 \operatorname{sen}(\alpha) \\ E_y^{(2)} = E_2 \operatorname{sen}(\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow E_y^{TOT} = 2E_0 \operatorname{sen}(\alpha) = \sqrt{3}\,E_0 = \frac{\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{l^2}$$

$$\vec{E}_B = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{l^2}\right)$$

Vertice A:

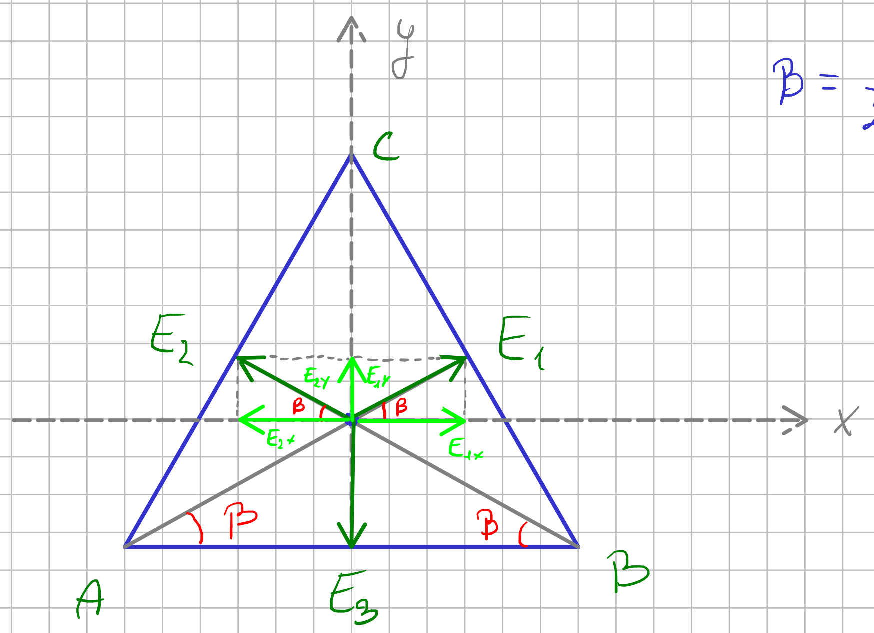
$$\vec{E}_x^{TOT} = +\vec{E}_x^1 + \vec{E}_x^3 \Rightarrow |\vec{E}_x^{TOT}| = -E_0 - E_0\cos(\alpha) = -E_0(1+\cos(\alpha))$$

$$\vec{E}_y^{TOT} = \vec{E}_y^{3} \Rightarrow |\vec{E}_y^{TOT}| = E_0 \sin(\alpha)$$

$$\vec{E}_A = \left(-E_0(1+\cos(\alpha)), -E_0\sin(\alpha)\right)$$

$$\vec{E}_C = \left(E_0(1+\cos(\alpha)), -E_0\sin(\alpha)\right)$$

b) Calcolare il campo elettrico nel centro del triangolo



$\beta = \frac{\alpha}{2} = 30° = \frac{\pi}{6}$

$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = |\vec{E}_3| = E_0$

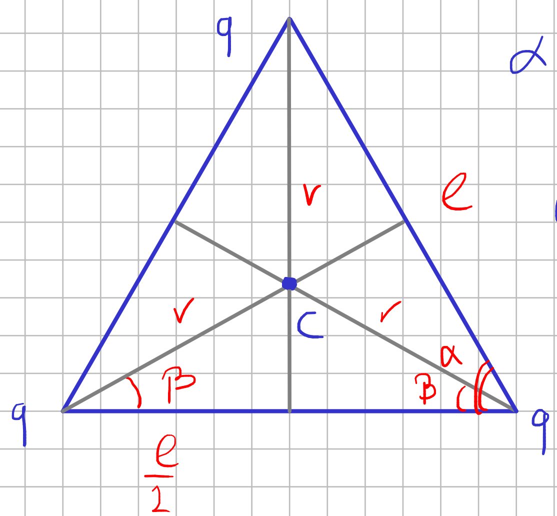
$E_x^{TOT} = E_{1x} + E_{2x} = 0$

$E_y^{TOT} = E_1 \sin\beta + E_2 \sin\beta - E_3 = 2E_0 \sin(\beta) - E_0 = E_0 - E_0 = 0$

$\vec{E}_{CENTRO} = (0,0)$

Il campo elettrico nel centro è nullo.

c) Calcolare il potenziale elettrico nel centro del triangolo se in ogni angolo c'è una carica uguale all'altra

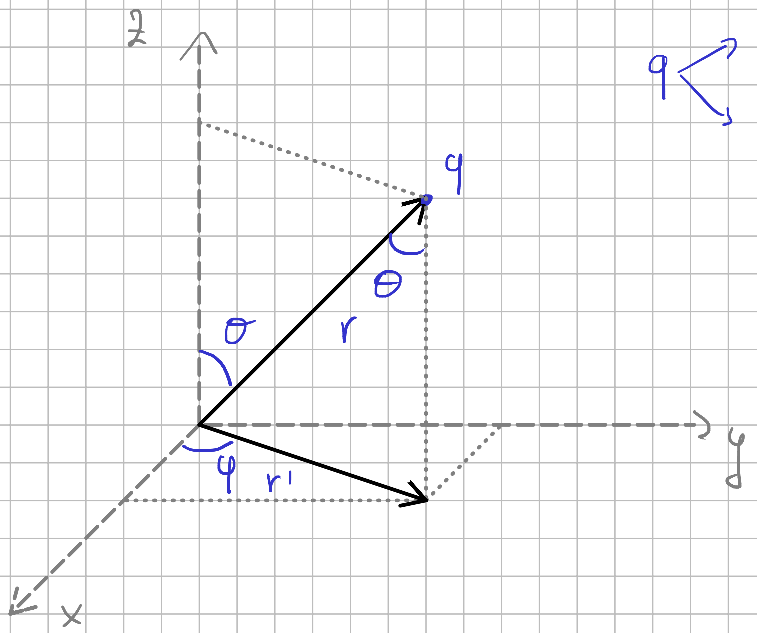


$\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{6}$

$\cos(\beta) = \frac{l}{2r} \Rightarrow r = \frac{l}{2} \frac{1}{\cos\beta} = \frac{l}{\sqrt{3}}$

$$V_{TOT}(c) = \sum_{i=1}^{3} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{3} \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1+q_2+q_3}{r} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\ell}$$

2) Sia q una carica posta in coordinate (x_0, y_0, z_0).
Calcolare il campo elettrico.



$$q \begin{cases} P_0 = (x_0, y_0, z_0) \\ P_0 = (r, \varphi, \theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi \\ y = r' \sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$r' = r\sin\theta$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \qquad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

$$\vec{E} = \vec{\nabla} V = -\left(\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dz}\right) = -\frac{dV}{dx}\hat{u}_x - \frac{dV}{dy}\hat{u}_y - \frac{dV}{dz}\hat{u}_z$$

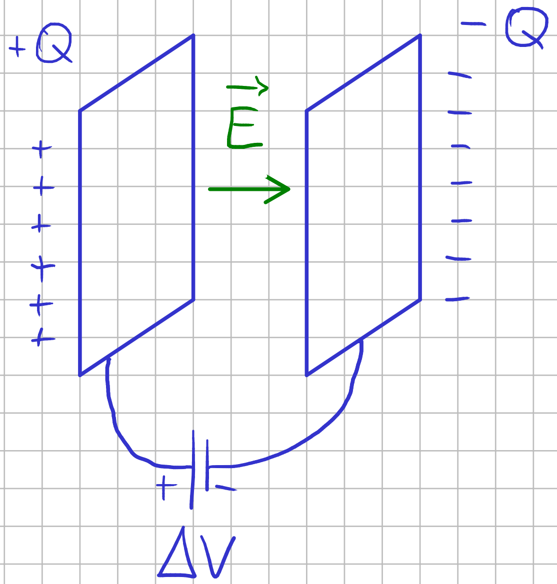
$$\frac{dV}{dx} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x-x_0), \quad \frac{dV}{dy} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(y-y_0), \quad \frac{dV}{dz} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(z-z_0)$$

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \underbrace{\frac{\left((x-x_0)\hat{u}_x + (y-y_0)\hat{u}_y + (z-z_0)\hat{u}_z\right)}{r}}_{= \frac{\vec{r}}{r} = \hat{u}_r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r$$

$$\vec{\nabla} V_{polari} = -\left(\frac{dV}{dr}, \frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta}, \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{dV}{d\varphi}\right) \rightarrow \bar{\nabla} V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = E$$

Capacità

Un condensatore è un sistema di due conduttori in cui una carica elettrica positiva Q è stata trasferita da uno dei due conduttori all'altro, per cui uno dei due conduttori porta una carica $Q>0$ e l'altro una $Q<0$.

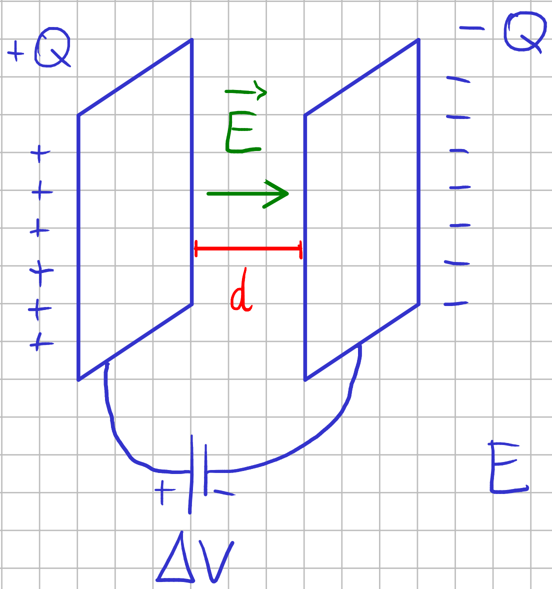


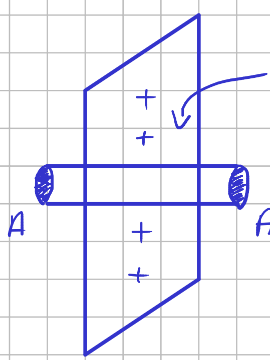
Definiamo capacità la grandezza

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$$[C] = \frac{1C}{V} = 1F \text{ (Farad)}$$

Condensatore piano





$\sigma = \frac{Q}{A}$ densità superficiale di ciascuna armatura

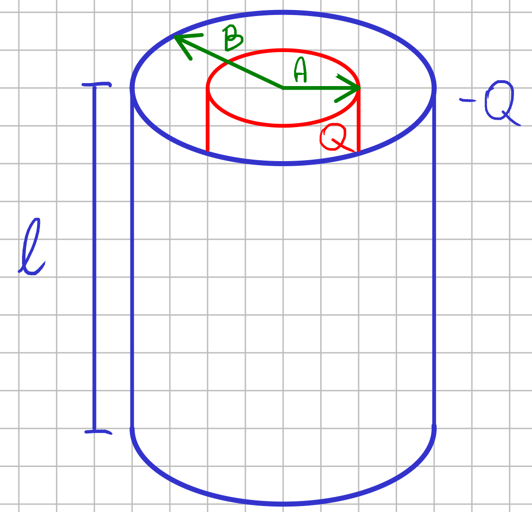
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}, \quad Q = \sigma A$$

$$\Delta V = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A} = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\cancel{\sigma} A \varepsilon_0}{\cancel{\sigma} d} = \frac{A \varepsilon_0}{d}$$

C ē direttamente proporzionale ad A ē inversamente a d.
quindi dipende dalla geometria del sistema

Condensatore cilindrico



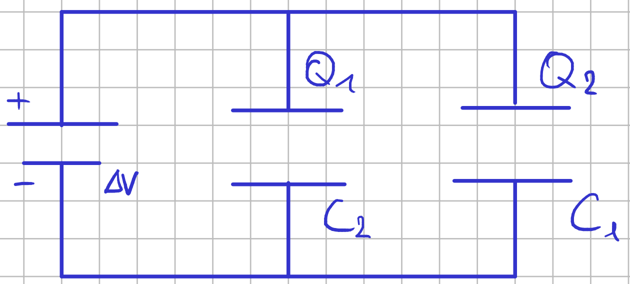
$$E = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}, \quad \lambda = \frac{q}{l}$$ E viene calcolata nel tutorato 23/05

$$\Delta V = -\int_a^b \vec{E}\, d\vec{s} = -\int \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}} = \frac{l\, 2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

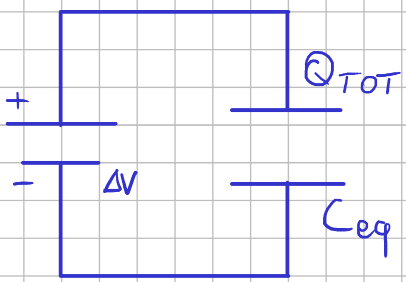
Collegamento di condensatori

a) Condensatori in parallelo



I condensatori sono collegati alla stessa ΔV (tensione)

<=>



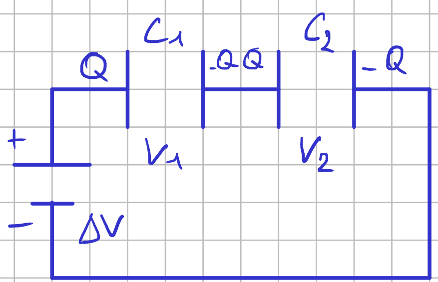
$$Q_{TOT} = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V$$

$$C_{eq}\cancel{V} = \cancel{V}(C_1 + C_2) \Rightarrow$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

Con N condensatori : $C_{eq} = \sum_i^N C_i$

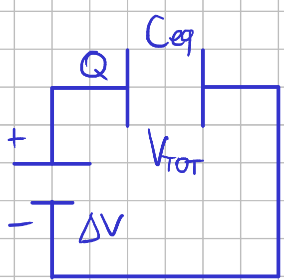
b) Condensatori in serie



Negli condensatori passa la stessa carica Q.

$$V_{TOT} = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Rightarrow$$

<=>

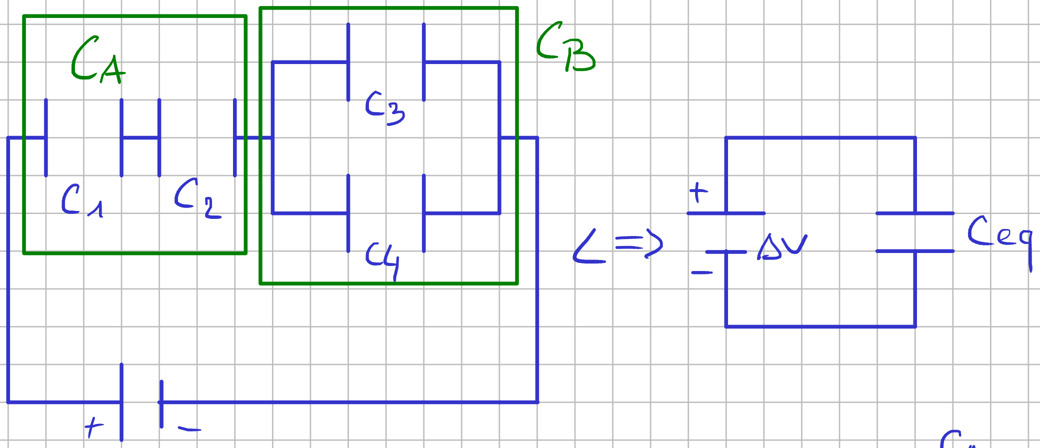


$$\frac{\cancel{Q}}{C_{eq}} = \cancel{Q}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

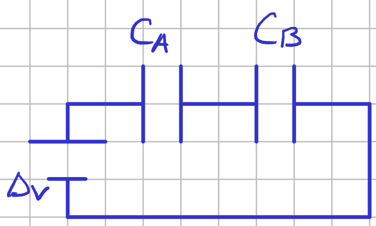
Con N condensatori : $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i^N \frac{1}{C_i}$

Esercizio

Trovare la capacità equivalente



$$\frac{1}{C_A} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_A = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$



$$C_B = C_3 + C_4$$

Sono ancora in serie

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B} = \frac{C_A C_B}{C_A + C_B} = \frac{\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \left(C_3 + C_4\right)}{\frac{C_1 + C_2}{C_1 + C_2} + \left(C_3 + C_4\right)}$$

Energia accumulata in un condensatore carico

$$C = \frac{q}{\Delta V} \rightarrow \Delta V = \frac{q}{C} \rightarrow q = \Delta V C$$

$$dU = \Delta V \, dq \rightarrow \int dU = \int \frac{q}{C} \, dq \Rightarrow U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(\Delta V C)^2}{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} C \Delta V^2$$

Nel caso di un condensatore piano

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \quad , \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad , \quad \Delta V = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (Ad)\, E^2$$

Definiamo densità di energia elettrica

$$U_E = \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2}\frac{C\,\Delta V^2}{Ad} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\cancel{A}}{d}\frac{\Delta V^2}{\cancel{A}d} = \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0}\frac{\sigma^2 \cancel{d^2}}{\varepsilon_0^{\cancel{2}} \cancel{d^2}} = \boxed{\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}}$$

$U_E = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}$ per il cilindro

$$U_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{E^2 \cancel{d^2}}{\cancel{d^2}} = \boxed{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$ formula generale