Matematica Discreta - Ammissione all'orale: Appello 2
(Prof. F. Brenti)

Domanda 1 Siano A, B, C insiemi. Allora l'identità

$$(B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup C) \cap B$$

(a) è sempre vera
(b) è sempre falsa
(c) è sempre vera se $C \subseteq A$
(d) è sempre vera se $A \subseteq C$
(e) Nessuna di queste

Domanda 2 Siano $f, g : [5] \to [5]$ le funzioni definite ponendo

$$f(1) = 4, f(2) = 2, f(3) = 1, f(4) = 5, f(5) = 2$$

e

$$g(1) = 4, g(2) = 3, g(3) = 5, g(4) = 2, g(5) = 1.$$

Allora:

(a) $f \circ g$ è iniettiva, $g \circ f$ è suriettiva, e $g \circ f$ è iniettiva
(b) $f \circ g$ è iniettiva, $g \circ f$ non è suriettiva, e $g \circ f$ non è iniettiva
(c) $f \circ g$ non è iniettiva, $g \circ f$ è suriettiva, e $g \circ f$ è iniettiva
(d) $f \circ g$ non è iniettiva, $g \circ f$ non è suriettiva, e $g \circ f$ non è iniettiva
(e) Nessuna di queste

Domanda 3 Il famoso "Paradosso del Barbiere" asserisce che, in un villaggio, dove esiste un solo barbiere:

"Il barbiere fa la barba a tutti gli uomini che non se la fanno da soli"

Consideriamo il predicato

$$B(x, y) := \text{ } x \text{ fa la barba ad } y$$

(dove x ed y sono nell'universo costituito da tutti gli uomini del villaggio) e sia b il barbiere del villaggio. Allora un predicato logicamente equivalente al paradosso del barbiere è:

(a) $\forall x.((x \neq b) \to B(b,x))$
(b) $\forall x.((\neg B(x,x)) \to B(b,x))$
(c) $\exists x.(B(b,x) \to (\neg B(x,x)))$
(d) $\exists x.((\neg B(b,x)) \to B(x,x))$
(e) Nessuna di queste

Domanda 4 Siano p, q, r proposizioni. Consideriamo la proposizione composta:

$$p \to ((\neg q) \vee r)$$

Allora una proposizione composta logicamente equivalente è:

(a) $(p \to (\neg q)) \vee (p \to r)$
(b) $(p \to (\neg q)) \wedge (p \to r)$
(c) $(\neg p) \to (q \wedge (\neg r))$
(d) $(q \wedge (\neg r)) \to p$
(e) Nessuna di queste

Domanda 5 Sia $n \in \mathbb{P}$ e sia $n = a_k a_{k-1} \cdots a_0$ la sua espressione in base 8 (quindi, $n = a_k 8^k + a_{k-1} 8^{k-1} + \cdots + a_1 8 + a_0$ con $0 \leq a_k, \ldots, a_0 \leq 7$). Allora è sempre vero che:

(a) $3|n$ se e solo se $3|a_0$
(b) $3|n$ se e solo se $3|(a_k + \cdots + a_0)$
(c) $3|n$ se e solo se $3|(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^k a_k)$
(d) $3|n$ se e solo se $3|a_k$
(e) Nessuna di queste

Domanda 6 Consideriamo l'equazione Diofantea lineare a due incognite:

$$114\,x + 252\,y = 6. \tag{1}$$

Allora:

(a) L'equazione non ha soluzioni
(b) L'equazione ha soluzioni e se $x, y \in \mathbb{Z}$ sono soluzioni di (1) allora $x \equiv 0 \pmod 3$ e $y \equiv 0 \pmod 2$

(c) L'equazione ha soluzioni e se $x, y \in \mathbb{Z}$ sono soluzioni di (1) allora $x \equiv 1 \pmod 3$ e $y \equiv 0 \pmod 2$

(d) L'equazione ha soluzioni e se $x, y \in \mathbb{Z}$ sono soluzioni di (1) allora $x \equiv 2 \pmod 3$ e $y \equiv 1 \pmod 2$

(e) Nessuna di queste

Domanda 7 Quante parole diverse si possono formare permutando (cioè, anagrammando) le lettere della parola

ANTANANARIVO ?

(a) 456862

(b) 479001600

(c) 42478982

(d) 3326400

(e) Nessuna di queste

Domanda 8 In una normale tastiera sono presenti 94 caratteri (47 "maiuscoli" e 47 "minuscoli"). Di questi, 32 sono non alfanumerici (21 "maiuscoli" e 11 "minuscoli"). Si ritiene generalmente che una buona password debba contenere almeno un carattere "maiuscolo" ed almeno un carattere non alfanumerico. Allora il numero di password "buone" di lunghezza 4 è:

(a) 78074896

(b) 8242565

(c) 60098495

(d) 45674980

(e) Nessuna di queste

Domanda 9 La somma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k}$$

è asintoticamente equivalente a:

(a) $\ln(n)$

(b) $2\ln(n)$

(c) $n-1$

(d) $\frac{n+2}{n}$

(e) Nessuna di queste

Domanda 10 Sia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ la soluzione della ricorsione lineare a coefficienti costanti:

$$f(n+3)=2f(n+2)+f(n+1)-2f(n)$$

per ogni $n\in\mathbb{N}$, con le condizioni iniziali $f(0)=0$, $f(1)=1$, e $f(2)=1$. Allora f è asintoticamente equivalente a:

(a) $\frac{1}{3}\,n\,2^n$

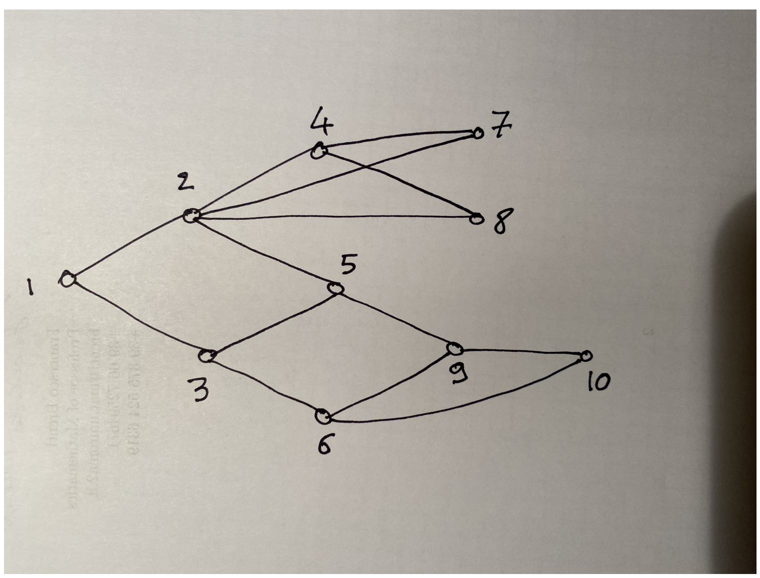
(b) 2^n

(c) $\frac{1}{3}\,2^n$

(d) $n\,2^n$

(e) Nessuna di queste

Domanda 11 Sia $D=([10],E)$ il grafo diretto rappresentato graficamente qui di sotto:



(dove tutti gli spigoli sono diretti da sinistra verso destra). Allora:

(a) 2 e 3 sono incomparabili, $\{1,2\}$ è una catena, e $\{3,4,5\}$ è una anticatena

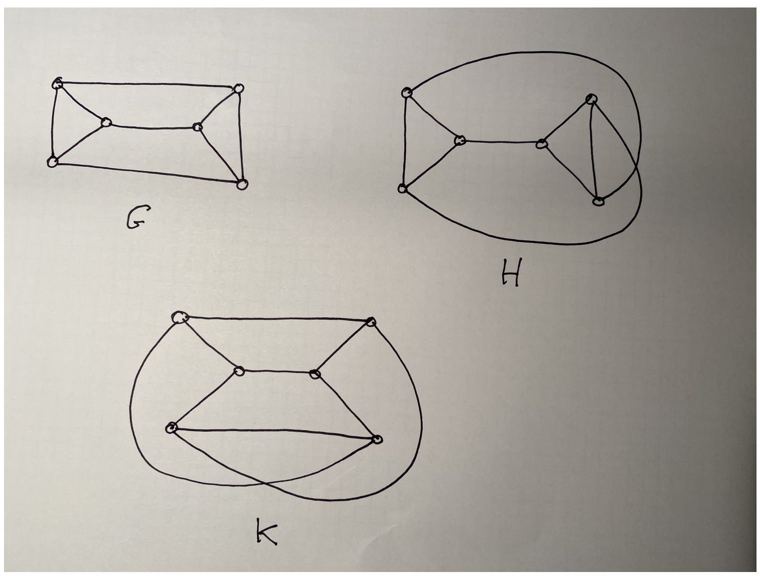
(b) 2 e 3 sono incomparabili, $\{1,2\}$ è una anticatena, e $\{3,4,5\}$ è una catena

(c) 2 e 3 sono comparabili, $\{1,2\}$ è una catena, e $\{3,4,5\}$ è una anticatena

(d) 2 e 3 sono comparabili, $\{1,2\}$ è una anticatena, e $\{3,4,5\}$ è una catena

(e) Nessuno di questi

Domanda 12 Siano G, H, e K i grafi rappresentati graficamente qui di sotto:



Allora:

(a) G e H sono isomorfi, e H e K non sono isomorfi

(b) G e H sono isomorfi, e H e K sono isomorfi

(c) G e H non sono isomorfi, e H e K non sono isomorfi

(d) G e H non sono isomorfi, e G e K sono isomorfi

(e) Nessuna di queste