Tutorato Geometria e Algebra Informatica

Andrea Pizzi

24 Maggio 2023

Esercizio 1. Trovare le soluzioni dei seguenti sistemi lineari in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+3z=5 \\ 3x+2y-z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=-3 \\ 2x-y+3z=-2 \\ 3x+2y-z=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-3y+z=4 \\ x+4y+2z=-6 \\ 3x-y+2z=11 \end{cases}$$

I tre sistemi sono compatibili e con soluzione unica, verificarlo prima ancora di risolverli. Sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$? Denotiamo le soluzioni trovate rispettivamente come $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$.

Determinare l'area del triangolo di vertici P_1, P_2, P_3.

Esercizio 2. Trovare le soluzioni dei seguenti sistemi lineari in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x-y+z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y-z=0 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

I due sistemi hanno come soluzione due rette in $\mathbb{R}^3$, denotiamole con ℓ_1, ℓ_2 rispettivamente. Determinare il loro punto di intersezione $\ell_1 \cap \ell_2 = P$. Le due rette trovate sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$?

Siano fissati i punti $A = (3,3,1), B = (1,2,2) \in \mathbb{R}^3$ appartenenti rispettivamente a ℓ_1 e ℓ_2, trovare l'area del parallelogramma di lati PA e PB.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^n$ definiamo per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle_D = Dx \cdot y = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j y_j$$

dove $\cdot$ rappresenta il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$ e $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$ è una qualsiasi matrice diagonale fissata con $d_j > 0$ per ogni j. Dimostrare che $\mathbb{R}^n$ con questo prodotto scalare è uno spazio vettoriale metrico.

Esercizio 4. *** Considera lo spazio vettoriale dei polinomi $\mathbb{R}[t]$ definiti nell'intervallo $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Per ogni coppia di polinomi p_1, p_2 definiamo

$$\langle p_1, p_2 \rangle = \int_0^1 p_1(x) p_2(x) dx$$

Verificare che è un prodotto scalare sullo spazio vettoriale dei polinomi che lo rende uno spazio vettoriale metrico.

Esercizio 5. Sia $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ e sia $v = (1,4)$. Dire se v è un autovettore di A. Se si, dire per quale autovalore.

Esercizio 6. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ e sia $v = (1,2,-1)$. Dire se v è un autovettore di A. Se si, dire per quale autovalore.

Esercizio 7. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Determinare gli autovalori di A e gli autovettori associati. Descrivere geometricamente il significato degli autovettori in questo caso particolare.

Esercizio 8. Sia $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Determinare gli autovalori di A e gli autovettori associati. Descrivere geometricamente il significato degli autovettori in questo caso particolare.

Esercizio 9. Calcolare i polinomi caratteristici delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10. Consideriamo $\mathbb{R}^3$ munito della base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ e del prodotto scalare standard. Dato il vettore $v = (1, 2, 1)$, definiamo la seguente mappa in $\mathbb{R}^3$:

$$T(x) = x \wedge v$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^3$.

Stabilire se la mappa T è autoaggiunta e scrivere la matrice di T rispetto alla base canonica. Confrontare il risultato con la proprietà di essere o meno una mappa autoaggiunta.

Esercizio 11. Sia T la mappa autoaggiunta di $\mathbb{R}^4$, munito del prodotto scalare standard, definita nella base canonica dalla matrice simmetrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizzando il teorema spettrale, diagonalizzare A determinando la base ortonormale in cui A risulta essere diagonale.

Esercizio 12. Diagonalizzare la seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 13. Calcolare gli autovalori $\lambda \in \mathbb{R}$ delle seguenti matrici. Determinare gli autovettori corrispondenti e dire quali sono diagonalizzabili, e in caso affermativo diagonalizzarle.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$