CAPITOLO 3 (MODELLI DISCRETI)

In questo capitolo tratteremo essenzialmente VARIABILI ALEATORIE DISCRETE (spesso definite su spazi di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con Ω discreto, cioè finito o numerabile).

In ogni caso nella parte iniziale di questa lezione diremo alcune cose sulle variabili aleatorie in generale. Spesso userò l'abbreviazione "v.a.".

In generale una v.a. (definita su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$) è una funzione del tipo

$$X : \Omega \to \mathcal{X}$$

dove $\mathcal{X}$ è un qualche insieme, e con certe proprietà.

In questo corso tratteremo il caso in cui $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ (o un suo sottoinsieme); in qualche caso considereremo il caso $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ per qualche $n \geq 2$ (però solo per v.a. discrete).

Il concetto di v.a. è utile perché spesso gli eventi di interesse negli esercizi sono esprimibili tramite v.a. . Consideriamo un esempio.

ESEMPIO

Si lanciano due dadi equi e consideriamo l'evento "la somma dei due numeri ottenuti è uguale a 5".
Allora è utile fare riferimento alla seguente scelta dell'insieme Ω:

$$\Omega = \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\} = \{ \omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_1, \omega_2 \in \{1, \dots, 6\} \}.$$

Essendo Ω un insieme finito, non ci sono problemi nello scegliere $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Inoltre è opportuno considerare la seguente funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$ (che è una v.a.) definita come segue:

$$X(\omega) = X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2 \qquad (\forall\, \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega).$$

Allora l'evento di interesse è

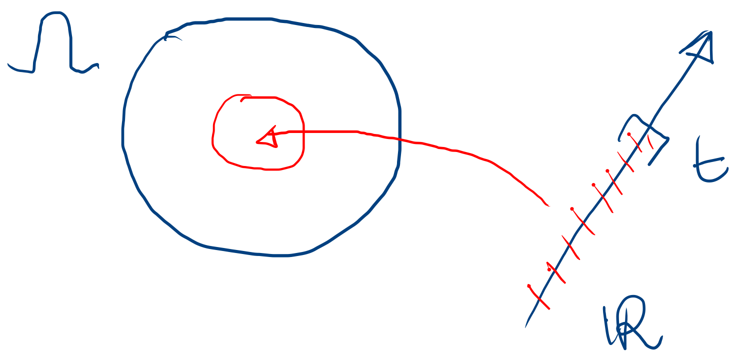
$$\{ \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega ;\ X(\omega) = 5 \}.$$

DEFINIZIONE

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità. Inoltre sia $X: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione.
Allora la funzione X è una v.a. (reale) se vale la seguente condizione

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}$$

In altri termini si richiede che le controimmagini delle semirette del tipo $(-\infty, t]$ (al variare di $t \in \mathbb{R}$), che sono sottoinsiemi di Ω, siano elementi della σ-algebra $\mathcal{A}$.



Questo consente di dire che, per queste controimmagini, è possibile definire la probabilità.
Quindi possiamo dire che, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\})$ è un numero ben definito.

Quindi si richiede che, se $B=(-\infty;t]$ per una qualsiasi scelta di $t\in\mathbb{R}$,

$$\{\omega\in\Omega ; X(\omega)\in B\}\in\mathcal{A}. \qquad (*)$$

A partire da questa richiesta, la condizione $(*)$ vale anche per altre scelte di B "naturali" da considerare:

$$\left.\begin{array}{l} B=[t,+\infty) \\ B=(t,+\infty) \\ B=(-\infty;t) \end{array}\right\} \text{ per ogni } t\in\mathbb{R}$$

$B=[s;t]$, $B=(s;t)$, $B=[s;t)$, $B=(s;t]$ per ogni $s;t\in\mathbb{R}$ con $s<t$

$B=\{t\}$ per ogni $t\in\mathbb{R}$

B unione finita o numerabile di insiemi dei tipi indicati sopra.

(es. $B=(0,1)\cup\{2\}\cup[4,5)\cup[6,+\infty)$)

NOTAZIONI CHE USEREMO

$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ ⟶ useremo la notazione $\{X \in B\}$

$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$ ⟶ useremo la notazione $P(\{X \in B\})$, o anche $P(X \in B)$.

DISTRIBUZIONE O LEGGE DI UNA V.A. REALE

È la corrispondenza tra "gli insiemi della retta B per cui $\{X \in B\} \in \mathcal{A}$" e i valori $P(\{X \in B\})$ relativi.

Detto così non è preciso ma per quel che vedremo in questo caso può andare bene

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI UNA V.A. REALE

È la funzione $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ così definita: $F_X(t) = P(X \leq t)$.

COMMENTO (IMPORTANTE)

La conoscenza di F_X consente di individuare la distribuzione di una v.a. X.

Quindi, se uno conosce i valori di $P(X \in B)$ per $B = (-\infty, t]$ (al variare di tutti i valori di $t \in \mathbb{R}$), è possibile conoscere tutti i valori di $P(X \in B)$ al variare di $B \subset \mathbb{R}$

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE F_X.

1) F_X è non decrescente, cioè $F_X(t_1) \leq F_X(t_2)$ $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $t_1 \leq t_2$.

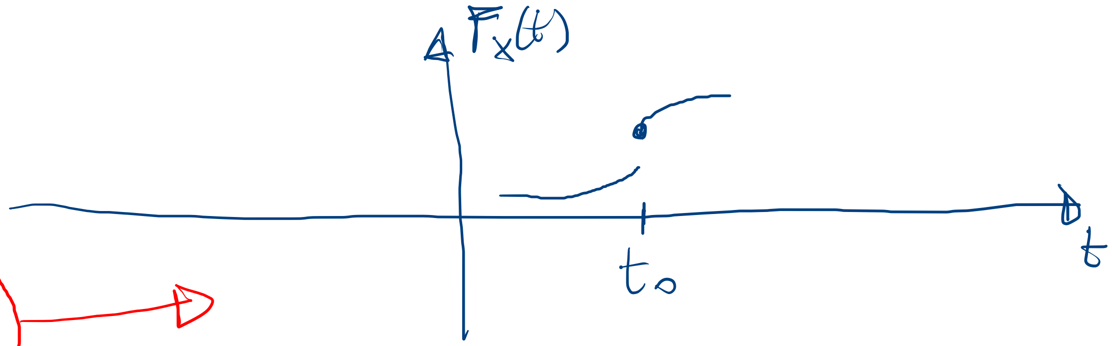
Questo si verifica facilmente osservando che

$$t_1 \leq t_2 \Rightarrow (-\infty, t_1] \subset (-\infty, t_2] \Rightarrow P(X \leq t_1) \leq P(X \leq t_2) \Rightarrow F_X(t_1) \leq F_X(t_2).$$

2) $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ e $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$

3) F_X è continua a destra, cioè $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{t \to t_0^+} F_X(t) = F_X(t_0)$

Nei punti di discontinuità accade quel che è rappresentato qui



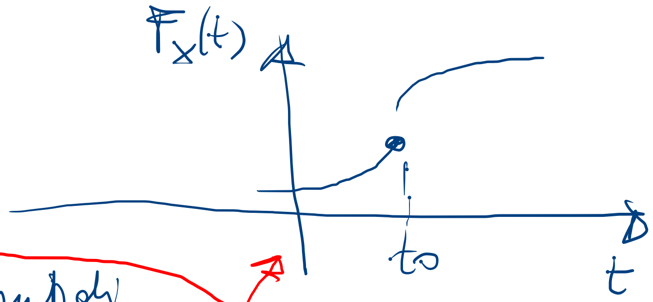
DIGRESSIONE

C'è una parte dei libri (è una minoranza) che definisce la funzione di distribuzione in questo modo:

$$F_X(t) = P(X<t) \qquad (\text{per ogni } t \in \mathbb{R}),$$

In questo caso le proprietà viste prima continuano a valere, tranne che la continuità a destra. In questo caso si ha che F_X è continua a sinistra

$$\lim_{t \to t_0^-} F_X(t) = F_X(t_0)$$



Nei punti di discontinuità si ha ...

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

Sia $X: \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. (reale) definita su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Indichiamo con S_X l'insieme dei valori assunti da X, cioè l'immagine di X vista come funzione.

La definizione di questo insieme in termini matematici è la seguente:

$$S_X = \{ \underset{\uparrow}{x} \in \mathbb{R} : \exists\, \omega \in \Omega \text{ tale che } X(\omega) = \underset{\uparrow}{x} \}$$

x minuscola   x minuscola

DEFINIZIONE

Una v.a. (reale) X è una v.a. discreta se l'insieme S_X è discreto (cioè S_X è finito o numerabile).

OSSERVAZIONE

Se Ω è discreto (cioè finito o numerabile), allora X è una v.a. discreta.

In generale non vale il viceversa: ad esempio si pensi al caso in cui, per qualche $c \in \mathbb{R}$, si ha

$$X(\omega) = c \qquad \forall \omega \in \Omega$$

(quindi $S_X = \{c\}$) e X non è un insieme discreto.

Quando X è una v.a. discreta, allora possiamo pensare di avere

$$S_X = \{x_i\}_{i \in I}$$ dove I è un insieme discreto (finito o numerabile).

minuscole

In corrispondenza, per ogni $B \in \mathbb{R}$, si ha

somma finita o serie

$$P(X \in B) = P(X \in B \cap S_X) = P\left(X \in B \cap \left(\bigcup_{i \in I} \{x_i\}\right)\right) = \sum_{i \in I} P(X \in B \cap \{x_i\})$$

somma finita o serie

$$= \sum_{x_i \in S_X \cap B} P(X = x_i)$$

Quindi la distribuzione di una v.a. discreta X, cioè la conoscenza dei valori di $P(X \in B)$ al variare di $B \subset \mathbb{R}$, è individuata dalla conoscenza di $S_X = \{x_i\}_{i \in I}$ e delle probabilità $\{P(X = x_i)\}_{i \in I}$.

Si osservi anche che, per $B = \mathbb{R}$, si ha

$$\underbrace{P(X \in \mathbb{R})}_{=1} = \sum_{x_i \in \underbrace{S_X \cap \mathbb{R}}_{= S_X}} P(X = x_i)$$

da cui segue

$$\boxed{\sum_{x_i \in S_X} P(X = x_i) = 1}$$

OSSERVAZIONE:

Possiamo anche dire che

$$\sum_{\substack{x_i \in S_X \\ P(X = x_i) > 0}} P(X = x_i) = 1.$$

Più in generale si può considerare la funzione $p_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ così definita:

$$p_X(x) = P(X = x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

x minuscolo   x minuscolo

Tale funzione è detta DENSITÀ DISCRETA della v.a. X.

PROPOSIZIONE

x minuscolo

$$x \notin S_X \implies p_X(x) = 0$$

DIMOSTRAZIONE

Si ha

x minuscolo

$$p_X(x) = P(\underbrace{\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}}_{=\emptyset \text{ perché } x \notin S_X}) = P(\emptyset) = 0.$$

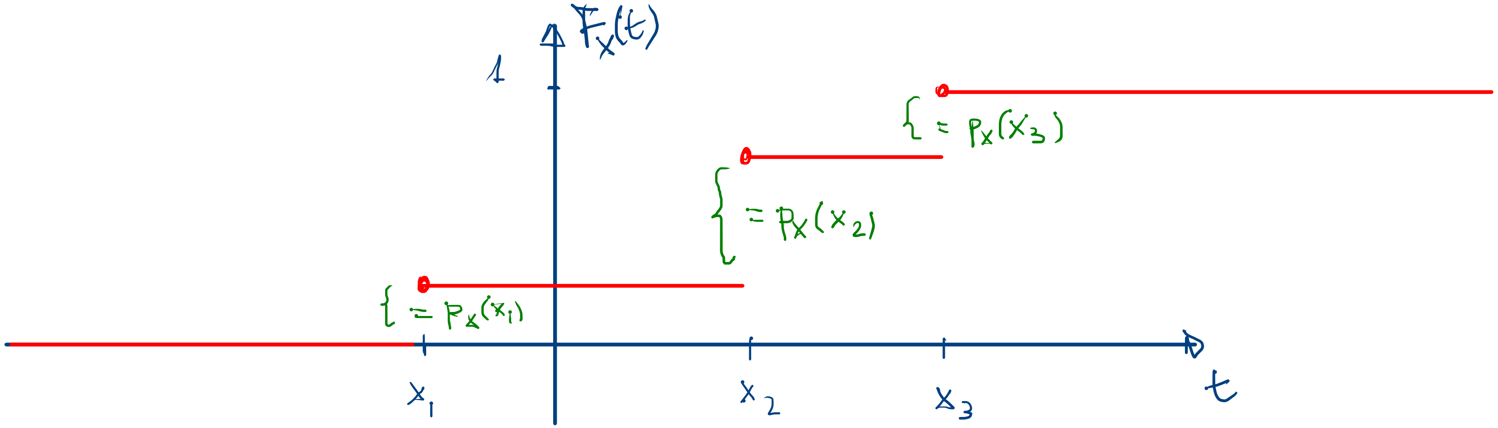
x minuscolo

Come vedremo successivamente la funzione di distribuzione ha maggiore interesse quando la v.a. X è continua.

In ogni caso vediamo come è fatta F_X nel caso di v.a. discrete. Iniziamo con il caso in cui S_X è un insieme finito; ad esempio $S_X = \{x_1, \dots, x_n\}$ con $x_1 < \dots < x_n$.

minuscoli

In questo grafico si ha $n = 3$

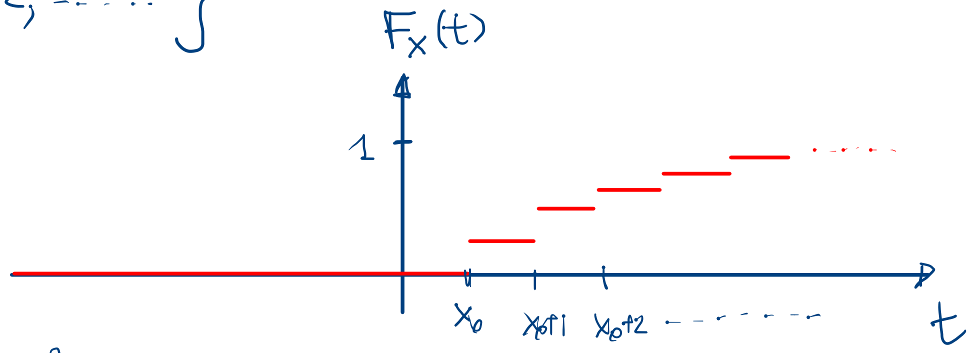


OSS. Dal grafico (relativo al caso $n=3$) si vede che

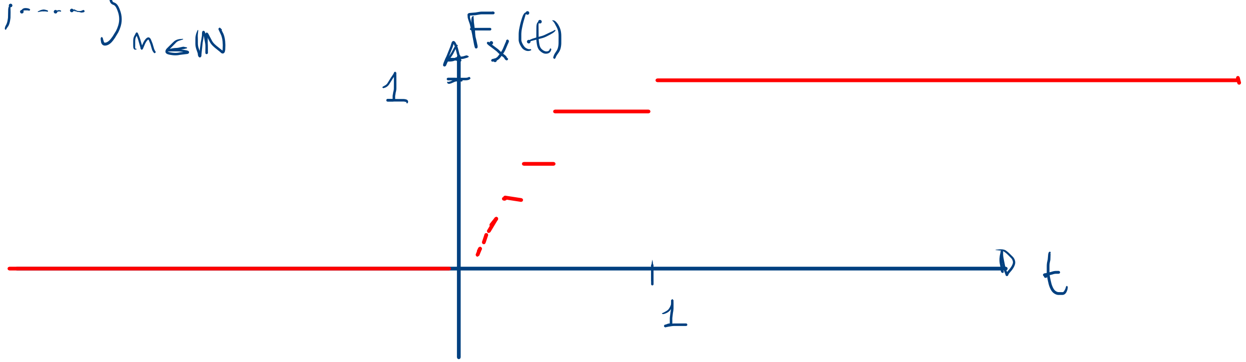
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_X(x_i)}_{= p_X(x_1) + p_X(x_2) + p_X(x_3)} = 1$$

Nel caso in cui S_X è infinito numerabile la casistica è più varia e ci possono essere casi molto complicati. Qui faccio riferimento a due casi (soprattutto il primo ci interessa in vista di quel che vedremo con le distribuzioni di Poisson e geometriche).

① $S_X = \{x_0, x_0+1, x_0+2, \dots\dots\}$



② $S_X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\dots\}_{n \in \mathbb{N}}$



INTRODUZIONE ALLE DISTRIBUZIONI NOTEVOLI (CHE VEDREMO IN PIÙ LEZIONI)

Si parla di "distribuzioni notevoli" quando queste hanno una certa espressione (eventualmente dipendente da qualche parametro), un po' come accade per i prodotti notevoli nel calcolo letterale.

Per le v.a. discrete tipicamente ci si riferisce alle espressione delle densità discrete. Talvolta si fa riferimento ad alcune situazioni pratiche (modalità di "effettuare prove", ad esempio estrazioni casuali di oggetti).

Per le v.a. continue tipicamente ci si riferisce alle espressione delle funzioni di distribuzioni o, equivalentemente (più o meno) alle densità continue [ancora non abbiamo parlato di densità continue]

DISTRIBUZIONE BERNOULLIANA

Si usa questo termine quando $S_X = \{0, 1\}$.

Talvolta è utile pensare ad un evento $B \in \mathcal{A}$ tale che

$X = 1 \iff$ l'evento B si verifica

$X = 0 \iff$ l'evento B non si verifica.

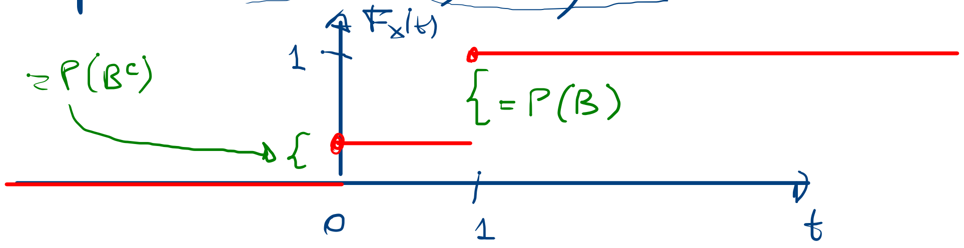
Talvolta si usa anche la notazione $X = 1_B$.

In questo caso si ha

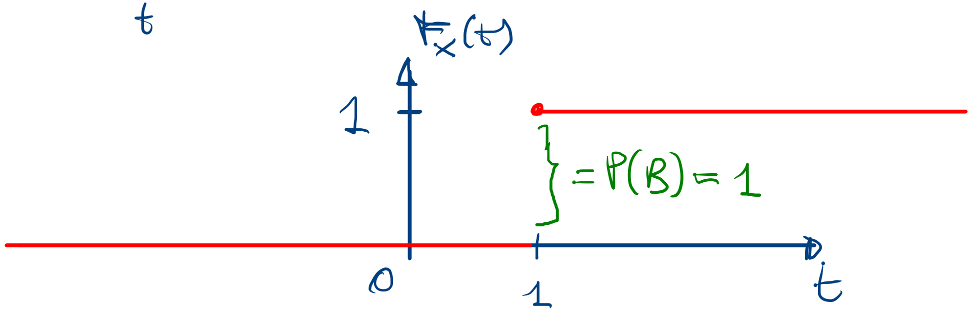
$$\begin{cases} p_X(1) = P(X=1) = P(B) \\ p_X(0) = P(X=0) = P(B^c) \end{cases}$$

Quindi

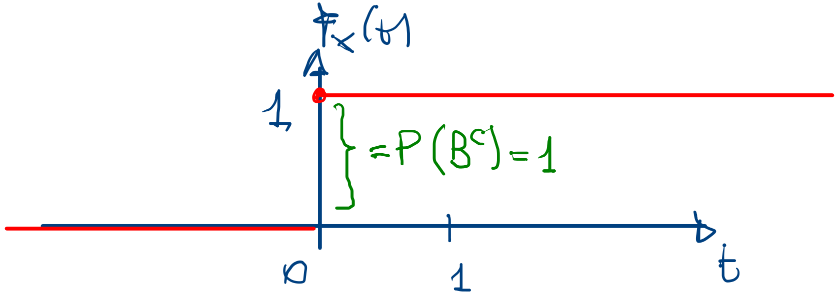
- Se $0 < P(B) < 1$ (e quindi $0 < P(B^c) < 1$)



- Se $P(B) = 1$ (e quindi $P(B^c) = 0$)



- Se $P(B) = 0$ (e quindi $P(B^c) = 1$)



SCHEMI SUCCESSO-FALLIMENTO SU UN NUMERO FINITO DI PROVE

Si tratta di una premessa comune per due casi che vedremo nella prossima lezione:

1) DISTRIBUZIONE BINOMIALE (caso di n prove indipendenti, tutte con la stessa probabilità di successo p)
2) DISTRIBUZIONE IPERGEOMETRICA (caso di n estrazioni casuali di un oggetto alla volta senza reinserimento (un caso particolare senza ovvero prove indipendenti)).

In entrambi i casi si vuole studiare la v.a. X che conta il numero di successi

Nel caso 2) gli oggetti sono di due tipi, e si ha successo con l'estrazione di oggetti di un certo tipo. Ad esempio:

oggetti colorati con un certo colore,

oggetti numerati con un certo numero,

ecc.

oss. Nel caso 2) otterremo nuovamente le formule delle estrazioni casuali in blocco già viste in passato.

In entrambi i casi conviene fare riferimento all'insieme Ω così definito:

$$\Omega = \underbrace{\{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}_{n \text{ volte}} = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_1, \dots, \omega_n \in \{0,1\}\}$$

Ogni punto $\omega \in \Omega$ descrive i possibili risultati (SUCCESSI e FALLIMENTI) nelle n prove.

Sceglieremo $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Avremo due diverse misure di probabilità P per i casi 1) e 2).

<u>OSS</u>.

- Per $n=1$ abbiamo ovviamente una distribuzione Bernoulliana.
- In generale si dovrà avere $S_X = \{0,1,\dots,n\}$ e questo è quel che accadrà.

Noi siamo interessati a contare quanti successi (cioè quanti "1") ci sono nella stringa di risultati. Allora è opportuno considerare la v.a. così definita:

$$X(\omega) = \omega_1 + \dots + \omega_n \qquad \text{per ogni } \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega.$$

OSS

$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$

OSS.
Da qui si vede bene che $S_X = \{0, 1, \dots, n\}$.

OSS.

Ad esempio la v.a. Y che conta il numero di fallimenti è Y così definita:

$$Y(\omega) = n - X(\omega) \qquad \text{per ogni } \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega.$$

Del resto

$$Y(\omega) = (1 + \dots + 1) - (\omega_1 + \dots + \omega_n) = 1 - \omega_1 + \dots + 1 - \omega_n$$

che in effetti conta il numero di "0" nella stringa di risultati

Nella prossima lezione vedremo come definire la misura di probabilità P su $(\Omega, \mathcal{A}) = (\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ a partire dagli insiemi costituiti dai singoli punti, cioè a partire dalle seguenti quantità:

$$P(\{\omega\}) = P(\{(\omega_1, \dots, \omega_n)\}) \qquad \text{per ogni } \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega.$$

Due diverse situazioni per i casi 1) e 2).

Dopo aver ~~fatto~~ questo troveremo la densità discreta di X:

per $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ $\quad p_X(k) = P(X=k) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}) =$

$$= \sum_{\omega : X(\omega) = k} P(\{\omega\}).$$

Per fissare le idee consideriamo il caso $n=3$. Abbiamo

$$\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{0,1\}\}.$$

Allora "le sequenze ω per cui $X(\omega) = k$" sono:

per $k=0$ $\quad (0,0,0)$

per $k=1$ $\quad (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)$

per $k=2$ $\quad (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)$

per $k=3$ $\quad (1,1,1)$

Quindi:

$$P_X(0) = P(\{(0,0,0)\})$$

$$P_X(1) = P(\{(0,0,1)\}) + P(\{(0,1,0)\}) + P(\{(1,0,0)\})$$

$$P_X(2) = P(\{(0,1,1)\}) + P(\{(1,0,1)\}) + P(\{(1,1,0)\})$$

$$P_X(3) = P(\{(1,1,1)\})$$