Interpolazione polinomiale

Esistenza ed unicità del polinomio d'interpolazione

è data una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$
di cui sono noti i valori $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ dove $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ sono punti distinti

viene scelta una classe $\mathcal{C}$ di funzioni definite su $[a,b]$ a valori in $\mathbb{R}$ e si vuole approssimare la funzione $f(x)$ con una funzione $p(x)$ della stessa $\mathcal{C}$ tale che:

$$\underline{p(x_i)=f(x_i)\quad \forall i=0,1,\dots,n}$$

$f(x_0)=p(x_0), f(x_1)=p(x_1), \dots, f(x_n)=p(x_n)$

la scelta più comune per la sua semplicità è quella di prendere

$$\mathcal{C}=\mathbb{R}_n[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots+a_nx^n : a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}\}$$

Spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq n$

Con questa scelta siamo sicuri che:

$$\exists!\, p\in\mathbb{R}_n[x] \text{ t.c. } p(x_i)=f(x_i)\quad \forall i=0,1,\dots,n$$

Teorema

Siano $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)\in\mathbb{R}^2$ t.c. $x_0,x_1,\dots,x_n$ sono tutti distinti
allora:

$$\exists!\text{ polinomio } p(x)\in\mathbb{R}_n[x] \text{ t.c. } p(x_i)=y_i\quad \forall i=0,1,\dots,n$$

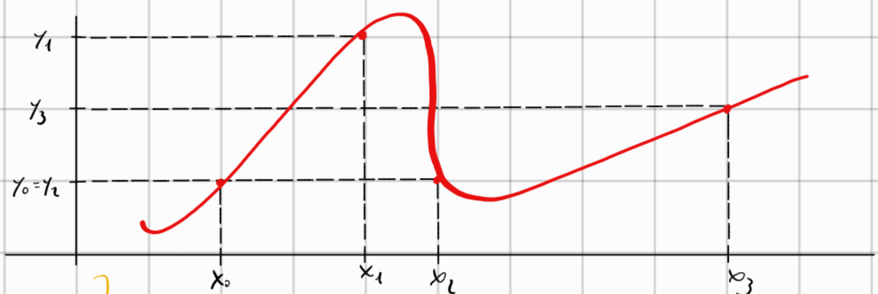

illustrazione per il teorema con $n=3$ → $\exists!\, p(x)\in\mathbb{R}_3[x]$ t.c.

$p(x_0)=y_0 \quad p(x_2)=y_2$

$p(x_1)=y_1 \quad p(x_3)=y_3$

OSS

il teorema implica che, data $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $x_0,x_1,\dots,x_n\in[a,b]$ punti distinti

$$\exists!\, p(x)\in\mathbb{R}_n[x] \text{ t.c. } \underline{p(x_i)=f(x_i)\ \forall i=0,1,\dots,n}$$

infatti applicando il teorema con $y_i=f(x_i)$ $\forall i=0,1,\dots,n$ otteniamo la formula voluta

Dim (1ª)

Sia $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ un polinomio in $\mathbb{R}_n[x]$

$$p(x) \text{ soddisfa } p(x_i)=y_i \quad \forall i=0,1,\dots,n$$

$$\Updownarrow$$

il vettore dei coefficienti $(a_0,a_1,\dots,a_n)^T$ soddisfa il sistema

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\dots+a_nx_0^n=y_0 \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\dots+a_nx_1^n=y_1 \\ a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\dots+a_nx_2^n=y_2 \\ \vdots \\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\dots+a_nx_n^n=y_n \end{cases}$$

$\Downarrow$ in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (\$)$$

$V(x_0,x_1,x_2,\dots,x_n)$ = matrice di Vermonde sui nodi $x_0,x_1,\dots,x_n$

dimostriamo ora che $V(x_0,x_1,x_2,\dots,x_n)$ e' invertibile perche' dimostreremo che:

$$(\text{✡}) \quad \det\left[V(x_0,\dots,x_n)\right] = \begin{cases} 1 \text{ se } n=0 \\ \prod\limits_{\substack{i,j\geq 0 \\ j<i}}^{n} (x_i-x_j) = (x_1-x_0)\cdot(x_2-x_1)(x_2-x_0)\cdot(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_3-x_0)\cdot(x_n-x_{n-1})\cdot\dots\cdot(x_n-x_0) \text{ se } n\geq 1 \end{cases}$$

e quindi $\det\left[V(x_0,\dots,x_n)\right] \neq 0$ perche' per ipotesi i nodi $x_0,x_1,\dots,x_n$ sono tutti distinti fra loro

Questo permette di concludere che ($) ha un'unica soluzione data da

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \left[V(x_0,\dots,x_n)\right]^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (\alpha)$$

dunque $\exists!\ p(x)\in\mathbb{R}_n[x]$ che soddisfa $p(x_i)=f(x_i)\ \forall i=0,1,\dots,n$ dove $p(x)$ e' il polinomio $\mathbb{R}_n[x]$ che ha come vettore dei coefficienti quello dato da (α)

Per concludere dimostriamo ora (✡) e lo facciamo per $n=3$

Per $n=0$ (✡) e' ovvia perche' $V(x_0)=[1]$ mentre per $n\geq 1$ la dim e' la stessa per $n=3$

$\forall i=0,1,2,3$ definisco $d_i = \det\left[V(x_0,x_1,\dots,x_i)\right]$ ⤳ dobbiamo calcolare $d_3 = \det\left[V(x_0,x_1,x_2,x_3)\right]$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix} \underset{C^{[4]} = C^{[4]} - x_3 C^{[3]}}{=} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 - x_0^2x_3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 - x_1^2x_3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 - x_2^2x_3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \underbrace{0}_{x_3^3 - x_3^2x_3} \end{vmatrix} =$$

Promemoria

se in un det si sostituisce riga R [colonna C] con se stesso piu' un multiplo scalare di un'altra riga [colonna] allora il det non cambia

$$
= \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 - x_0x_3 & x_0^2(x_0-x_3) \\ 1 & x_1 & x_1^2 - x_1x_3 & x_1^2(x_1-x_3) \\ 1 & x_2 & x_2^2 - x_2x_3 & x_2^2(x_2-x_3) \\ 1 & x_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0-x_3 & x_0(x_0-x_3) & x_0^2(x_0-x_3) \\ 1 & x_1-x_3 & x_1(x_1-x_3) & x_1^2(x_1-x_3) \\ 1 & x_2-x_3 & x_2(x_2-x_3) & x_2^2(x_2-x_3) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =
$$

$C^{[3]} = C^{[3]} - x_3 C^{[2]}$

$C^{[2]} = C^{[2]} - x_3 C^{[1]}$

$(-1)^n$ $\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$ regola della scacchiera

Laplace applicato sull'ultima riga tenendo conto del segno $(-1)^{n=3}$ ottenuto con la regola della scacchiera

$$
= (-1)^3 \begin{vmatrix} x_0-x_3 & x_0(x_0-x_3) & x_0^2(x_0-x_3) \\ x_1-x_3 & x_1(x_1-x_3) & x_1^2(x_1-x_3) \\ x_2-x_3 & x_2(x_2-x_3) & x_2^2(x_2-x_3) \end{vmatrix} =
$$

linearità del det rispetto al prodotto di una riga o colonna

$$
= (-1)^3 (x_0-x_3) \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ x_1-x_3 & x_1(x_1-x_3) & x_1^2(x_1-x_3) \\ x_2-x_3 & x_2(x_2-x_3) & x_2^2(x_2-x_3) \end{vmatrix} =
$$

$$
= (-1)^3 (x_0-x_3)(x_1-x_3)(x_2-x_3) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}}_{d_2} =
$$

$$
= (x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2) \cdot d_2 = (x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2) \cdot (x_2-x_0)(x_2-x_1) \cdot d_1 =
$$

$$
= (x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2) \cdot (x_2-x_0)(x_2-x_1) \cdot (x_1-x_0) = (✡)
$$

Dim (2^a)

$\forall_{j=0,\dots,n}$ definiamo il polinomio

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i} = \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x_j-x_n)} \qquad (\star)$$

I polinomi $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ sono in numero di $n+1$ e hanno tutti quanti grado n

per cui sono $n+1$ elementi di $\mathbb{R}_n[x]$

Mostriamo che questi polinomi sono una base di $\mathbb{R}_n[x]$

Promemoria

ricordiamo che una base di $\mathbb{R}_n[x]$ e' un'insieme di $V_1(x), \dots, V_r(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ con le seguenti proprieta':

1) Sono linearmente indipendenti

l'unica combinazione lineare $\alpha_1 V_1(x), \dots, \alpha_r V_r(x)$ che coincide con il polinomio nullo e' $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$

2) generano $\mathbb{R}_n[x]$

cioe' ogni $g(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ si puo' scrivere come combinazione lineare $\alpha_1 V_1(x) + \dots + \alpha_r V_r(x)$

Per far questo mi basta dimostrare che essi siano linearmente indipendenti,

visto che sono nel numero esatto di $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$

Promemoria

tutte le basi di $\mathbb{R}_n[x]$ hanno lo stesso numero di elementi comuni si chiama dimensione di $\mathbb{R}_n[x]$ ($\dim \mathbb{R}_n[x]$)

poiche una famosa base di $\mathbb{R}_n[x]$ e' la base canonica $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$ la quale e' composta di $n+1$ elementi,

allora $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$

Teorema:

Se si hanno $n+1$ elementi in uno spazio vettoriale di dimensione $n+1$, allora questi elementi sono dello spazio $\Longleftrightarrow$ sono lin. indip.

Osserviamo che $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ hanno la seguente proprieta' cruciale:

$$L_j(x_h) = \begin{cases} 1 & \text{se } h = j \\ 0 & \text{se } h \neq j \end{cases} \qquad \forall h, j = 0, 1, \dots, n \qquad (\$)$$

Se $h = j$ allora avremo dei polinomi del tipo $\frac{\cancel{(x_h - x_1)}\cdot\ldots\cdot\cancel{(x_h - x_{h-1})}\ldots}{\cancel{(x_h - x_1)}\cdot\ldots\cdot\cancel{(x_h - x_{h-1})}\ldots} = 1$

avremo un prodotto del tipo $(x_h - x_h) = 0$ al numeratore

Dimostriamo ora che $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ sono lin. indip.

Sia $\alpha_0 L_0(x) + \dots + \alpha_n L_n(x)$ una comb. lin. che coincide con il polinomio nullo, cioe' t.c. $\alpha_0 L_0(x) + \dots + \alpha_n L_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

allora $\forall i = 0, \dots, n$ deve essere che $\alpha_0 L_0(x_i) + \alpha_1 L_1(x_i) + \dots + \alpha_n L_n(x_i) = 0 \Rightarrow \alpha_i L_i(x_i) = \alpha_i \Rightarrow$

$\Rightarrow L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ sono lin. indip. e quindi una base

Definiamo il polinomio $p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$ t.c.

a) $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$

b) $\forall i = 0, \dots, n \quad p(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \dots + y_n L_n(x_i) = y_i$

solo $L_i(x_i) = 1$, gli altri sono $= 0$, quindi $y_i L_i(x_i) = y_i$

Per dimostrare che $p(x)$ e' l'unico polinomio in $\mathbb{R}_n[x]$ che soddisfa la condizione $p(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, \dots, n$

supponiamo che $q(x)$ sia un'altro polinomio in $\mathbb{R}_n[x]$ che soddisfa $q(x_i) = y_i \ \forall i = 0, \dots, n$ e dimostriamo che $q(x) = p(x)$

Poiche' $q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ e $L_0(x), \dots, L_n(x)$ sono una base di $\mathbb{R}_n[x]$,

$\exists \beta_0, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ t.c. $q(x) = \beta_0 L_0(x) + \dots + \beta_n L_n(x)$

Poiche' $\forall i = 0, \dots, n \ q(x_i) = y_i$ allora

$y_i = q(x_i) = \beta_0 L_0(x_i) + \dots + \beta_i L_i(x_i) + \dots + \beta_n L_n(x_i) = \beta_i \Rightarrow q(x) = y_0 L_0(x) + \dots + y_n L_n(x) = p(x)$

Def

Siano $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ con $x_0, x_1, \dots, x_n$ distinti

l'unico polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ t.c. $p(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$ si chiama

- polinomio d'interpolazione dei dati $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$
- polinomio d'interpolazione dei valori $y_0, \dots, y_n$ nei nodi $x_0, \dots, x_n$

La prima dim del teo. ci dice che $p(x)$ si scrive in forma canonica come

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \left[V(x_0, \dots, x_n) \right]^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La seconda dim del Teo. ci dice che $p(x)$ si scrive in forma di Lagrange come

$$p(x) = y_0 L_0(x) + \dots + y_n L_n(x) \quad (\mathcal{L})$$

dove $\forall_{j=0,\dots,n}$ $L_j(x)$ = j-esimo polinomio di Lagrange relativo ai nodi $x_0, \dots, x_n$

Se gli $y_0, \dots, y_n$ sono i valori nei punti $x_0, \dots, x_n$ di una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, cioe' se $y_i = f(x_i)$ $\forall_{i=0,\dots,n}$ allora l'unico polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ t.c. $p(x_i) = f(x_i)$ $\forall_{i=0,\dots,n}$ e' il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi $x_0, \dots, x_n$