Stimatori e le loro proprieta'

Campione aleatorio

Def

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di V.A. iid definite su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Allora possiamo definire X_n come un campione aleatorio

Oss

In realta' non sono necessarie ne' le ipotesi di indipendenza ne' le ipotesi di identica distribuzione

per questo verranno abbandonate piu' in la'

Statistica parametrica

P_θ

Sia P la misura di probabilita' nota solo a meno del valore di un certo parametro θ

Def <u>Statistica parametrica</u>

La disciplina che studia le tecniche per risalire al valore di un $\theta \in \mathbb{R}^p$ finito con $p \in \mathbb{N}$

Es

Sappiamo che i dati provengono da una distribuzione nota ma che dipende da un numero finito di parametri

- $N(\mu, \sigma^2)$ $\rightsquigarrow$ dipende da μ e σ

Def <u>Statistica non parametrica</u>

La disciplina che studia il caso in cui θ ha dimensione infinita

Stimatore

Def

Successione di funzioni

Uno stimatore di un certo parametro $\theta \in \mathbb{R}^p$ e' una funzione misurabile

$T_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ di un campione aleatorio

Questo puo' essere scritto come

$$T_n = \tilde{\theta}_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$$

una funzione che preso il campione ritorni il parametro

Oss

La definizione e' molto generica in quanto qualsiasi funzione puo' essere considerata uno stimatore

Ora l'importante e' che determinare quanto questo sia buono

Es

Un possibile esempio e' il calcolo del valor medio $E[X_i] = \mu$

Lo stimatore piu' ovvio e'

$$\tilde{X}_n = \tilde{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Criteri di valutazione per gli stimatori

a) Correttezza/Non distorsione $\rightsquigarrow$ $\lim_{n \to \infty} E[T_n] = \theta$

b) Consistenza:

- Consistenza debole $\rightsquigarrow$ $T_n \xrightarrow[P]{} \theta$ per $n \to \infty$
- Consistenza forte $\rightsquigarrow$ $T_n \xrightarrow[q.c.]{} \theta$ per $n \to \infty$
- Consistenza r-esima $\rightsquigarrow$ $T_n \xrightarrow[r]{} \theta$ per $n \to \infty$
- Consistenza completa $\rightsquigarrow$ $T_n \xrightarrow[c.c.]{} \theta$ per $n \to \infty$

c) Efficienza

Presi due stimatori distinti T_n, T_n' verra' scelto quello con Varianza minore

d) Asintotica Gaussianità

CLT

Per $n \to \infty$ deve valere $\frac{T_n - \theta}{\sqrt{Var(T_n)}} \xrightarrow[d]{} N(0,1)$

Oss

In generale Correttezza $\not\Rightarrow$ Consistenza

Sia $\theta = 0$ e sia

$$T_n = \begin{cases} 0 & 1 - \frac{1}{n^2} \\ n^2 & \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

Allora

$T_n \xrightarrow[p]{} 0$ ma $E[T_n] = 1 \neq \theta$

Consistenza $\Longrightarrow$ Correttezza solo se si parla di media r-esima con $r \geq 1$

Sappiamo che $T_n \xrightarrow[r]{} \theta$ allora $E[T_n] \Longrightarrow \theta$