Metodo Delta

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di v.a. su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ dove:

$X_n \sim$ i.i.d. , $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $E[X_i] = \mu$ e $Var(X_i) = \sigma^2$

Per il CLT vale che

$$\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right) \xrightarrow[d]{} N(0,1)$$

Se poi si prende il quadrato vale che

$$\left[\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right)\right]^2 \xrightarrow[d]{} \chi^2_1$$

Preso $Z_i \sim N(0,1)$, $\chi^2_1 = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2$

Abbiamo applicato la funzione $g(x) = x^2$ direttamente sul CLT

cosa accade se invece viene applicata solo ad X_n ?

Oss

Invece di prendere $g\left(\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right)$ prendiamo $g(\bar{X}_n) - g(\mu)$

Dalla legge dei grandi numeri sappiamo che $\bar{X}_n \sim \mu + \frac{1}{\sqrt{n}}$

Ipotizzando g differenziabile possiamo scrivere tramite l'espressione di Taylor che

$$g(\bar{X}_n) \simeq g(\mu) + g'(\mu)(\bar{X}_n - \mu) + R(1)$$

Quindi abbiamo che

$$g(X_n) - g(\mu) = \cancel{g(\mu)} + g'(\mu)(X_n - \mu) - \cancel{g(\mu)} = g'(\mu)(X_n - \mu)$$

Teo

Sia g differenziabile e sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di v.a. su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ t.c.

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow[d]{} N(0,1)$$ CLT

Allora vale che

$$\sqrt{n}\left(g(\bar{X}_n) - g(\mu)\right) \xrightarrow[d]{} g'(\mu) Z \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

Possiamo anche dire che

per l'oss. precedente stiamo applicando g solo a μ

$$\sqrt{n}\left(g(X_n) - g(\mu)\right) \xrightarrow[d]{} N\left(0, (g'(\mu))^2\right)$$

Oss Idea generale per la dim.

Sappiamo che

$$g(\bar{X}_n) \simeq g'(\mu)(\bar{X}_n - \mu)$$

Tornando all'enunciato

$$\sqrt{n}\left(g(\bar{X}_n) - g(\mu)\right) = g'(\mu)\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \mu\right)$$

In modo molto informale possiamo dire che

$$\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow[d]{} N(0,1)$$ per CLT

Quindi

$$g(\mu)\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow[d]{} g'(\mu) N(0,1)$$

Non dire così al prof

Solo per un'idea

Lemma

Sia $e: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua con $e(h) = o(\|h\|)$

Allora

$$X_n \xrightarrow[p]{} 0 \implies e(X_n) = o_p(\|X_n\|)$$

$$\frac{e(X_n)}{\|X_n\|} = o_p(1)$$

Dim

Lemma

Sia g la funzione continua

$$g(h) = \begin{cases} \dfrac{e(h)}{\|h\|} & \text{se } \|h\| \neq 0 \\ 0 & \text{se } \|h\| = 0 \end{cases}$$

Se $X_n \xrightarrow[p]{} 0 \implies g(X_n) \xrightarrow[p]{} 0$ per il lemma di Slutzky

$X_n \xrightarrow[d]{} Z$ e $Y \xrightarrow[p]{} c$

$X_n + Y \xrightarrow[d]{} Z + c$

$X_n Y \longrightarrow Zc$

Dim

Riscrivendo le condizioni abbiamo che

resto di Taylor

$$\sqrt{n}\left(g(\bar{X}_n)-g(\mu)\right)=\sqrt{n}\left(g(\bar{X}_n+\mu-\mu)-g(\mu)\right)=$$
$$=\sqrt{n}\left(\cancel{g(\mu)}+g'(\mu)(\bar{X}_n-\mu)+\rho(\bar{X}_n-\mu)-\cancel{g(\mu)}\right)=$$
$$=\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)\left(g'(\mu)+\frac{\rho(\bar{X}_n-\mu)}{\bar{X}_n-\mu}\right)$$

soddisfa il lemma visto in precedenza

$$=\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)\left(g'(\mu)+o_p(1)\right)\xrightarrow[d]{}\text{cost}\cdot Z \quad \text{con } Z\sim N(0,1)$$

Metodo delta generale

Sia a_n una sequenza deterministica tale che

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$$

Sia $g:\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}^m$ differenziabile

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}, X$ v.a in $\{\Omega,\mathcal{F},P\}$ tale che

$$a_n(X_n-\mu)\xrightarrow[d]{}X$$

Allora

$$a_n\left(g(X_n)-g(\mu)\right)\xrightarrow[d]{}\left(\nabla_{k\times m}g(\mu)\right)^T X$$

matrice Jacobiana