Richiami di Calcolo delle probabilità

Modello probabilistico

Def

Un modello probabilistico e' una terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dove:

Ω = Spazio degli eventi

$\mathcal{F}$ = sigma algebra → famiglia di sottoinsiemi di Ω

P = funzione di probabilità $P: \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$

P presenta le seguenti proprietà:

- $P(\Omega) = 1$
- $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$
- $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \forall$ sequenza $A_i : A_i \in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

Modalità di convergenza

Convergenza in distribuzione ①

Def

Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie

$X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

funzione di ripartizione $F_{X_n}(x) = P_r\{X_n \leq x\}$

Allora

$$X_n \xrightarrow[d]{} X \iff \lim_{n \to \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

$\forall x$ punto di continuità di $F_X(\cdot)$

Oss

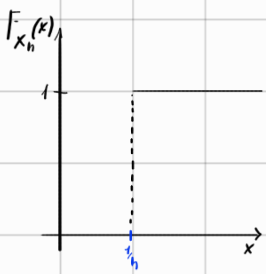
Non e' stato definito lo spazio di prob. in cui e' definito $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne' quello su cui e' definito X

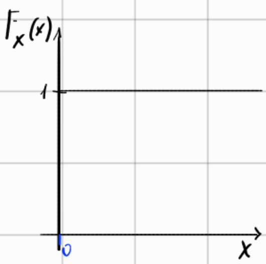
Non e' necessario che X ed X_n siano distribuite sullo stesso $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Oss

Sia X_n una sequenza deterministica $X_n = \frac{1}{n}$, considerate come una sequenza di v.a. con funzione di ripartizione $F_{X_n}(x) = \mathbb{1}_{[\frac{1}{n};\infty)}(x)$

Sia X la v.a. identicamente uguale a $X=0$ con funzione di ripartizione $F_X(x) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$





Si puo' notare come prendendo in considerazione il punto $x=0$ abbiamo che:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(0) = 0 \neq F_X(0) = 1$$

Il che e' un'assurdo in quanto sta dicendo che la sequenz $X_n = \frac{1}{n}$ non converge alla V.A. $X=0$

Per questo serve specificare $\forall x$ punto di continuita' di $F_X(\cdot)$

Convergenza in probabilità ②

Def

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. definita su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Sia $X: \Omega \to \mathbb{R}$ definita sullo stesso spazio $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Allora

$$X_n \xrightarrow[p]{} X \iff \lim_{n\to\infty} P_r\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

per n grandi le v.a. tendono allo stesso valore

Lemma ② $\Longrightarrow$ ①

La convergenza in probabilità implica la convergenza in legge cioè

$$\{X_n \xrightarrow[p]{} X\} \Rightarrow \{X_n \xrightarrow[d]{} X\}$$

Dim

Abbiamo che:

abbiamo spezzato la probabilità in base alla differenza fra X_n e X

$$F_{X_n}(x) = P_r\{X_n \le x\} = P_r\{X_n \le x, |X_n - X| > \varepsilon\} + P_r\{X_n \le x, |X_n - X| \le \varepsilon\} \le$$

$$-\varepsilon \le X_n - X \Rightarrow X \le X_n + \varepsilon, \quad X_n \le x \Rightarrow X \le x + \varepsilon$$

$$\le P_r\{|X_n - X| > \varepsilon\} + F_X\{X \le x + \varepsilon\}$$

$$F_X(x-\varepsilon) = P_r\{X \le x - \varepsilon\} = P_r\{X \le x-\varepsilon, |X_n - X| > \varepsilon\} + P_r\{X \le x - \varepsilon, |X_n - X| \le \varepsilon\} \le$$

$$\le P_r\{X \le x - \varepsilon, |X_n - X| > \varepsilon\} + F_{X_n}\{X \le x\}$$

Allora

$$F_X(x-\varepsilon) \le P_r\{X \le x-\varepsilon, |X_n - X| > \varepsilon\} + F_{X_n}\{X \le x\} \Rightarrow F(x-\varepsilon) - P_r\{X \le x - \varepsilon, |X_n - X| > \varepsilon\} \le F_{X_n}\{X \le x\}$$

Di conseguenza

$$F_X(x-\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \inf \Big[F_X(x-\varepsilon) - \underbrace{P_r\{|X_n - X| > \varepsilon\}}_{\text{tende a 0 per hp}}\Big] \le \lim_{n\to\infty} \inf F_{X_n}\{X_n \le x\} \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \sup F_{X_n}\{X_n \le x\} \le \lim_{n\to\infty} \sup\Big[P_r\{|X_n - X| > \varepsilon\} + F_X\{X \le x + \varepsilon\}\Big] = F_X(x+\varepsilon)$$

Usando il teo dei carabinieri e scegliendo $\varepsilon \to 0$ si può vedere come $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$

Lemma

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $X_n \xrightarrow[d]{} c$, $\forall c \in \mathbb{R}$

$\exists \{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ ed una successione $\{X'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $X'_n \xrightarrow[d]{} X_n$

Allora

$$X'_n \xrightarrow[P]{} c$$

Dim

Sapendo che $X_n \xrightarrow[d]{} c$

Sapendo che $F_c(x) = \mathbb{1}_{[c,\infty)}(x)$

$$P_r\{|X'_n - c| > \varepsilon\} = P_r\{X'_n > c+\varepsilon\} + P_r\{X'_n < c-\varepsilon\} = [1 - F_{X_n}(c+\varepsilon)] + F_{X_n}(c-\varepsilon) \longrightarrow$$

Vogliamo mostrare che sia uguale a 0

$$\longrightarrow 1 - \underbrace{\mathbb{1}_{[c,\infty)}(c-\varepsilon)}_{=1} + \underbrace{\mathbb{1}_{[c,\infty)}(c+\varepsilon)}_{=0} = 0$$

Abbiamo dimostrato che il $\lim_{n\to\infty} P_r\{|X'_n - c| < \varepsilon\} = 0$ ovvero che $X'_n \xrightarrow[P]{} c$

Convergenza in Media r-esima (3)

Def

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$
Sia inoltre $X: \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a sullo stesso $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

$E[X] = \sum_i x_i p_i$ nel discreto

Allora

$$X_n \xrightarrow[r]{} X \iff \lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^r = 0 \qquad r > 0$$

Oss

Affinché la definizione abbia senso viene richiesto che esistano i momenti r-esimi delle v.a. coinvolte

Lemma ③ $\Longrightarrow$ ②

Sia $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di v.a. su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

X un v.a definita su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Allora

$$X_n \xrightarrow[r]{} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow[P]{} X$$

disuguaglianza di Markov $\rightsquigarrow$ $P_r\{x>a\} \le \frac{E[X]}{a}$

Dim

$$\lim_{n\to\infty} P_r\{|X_n - X| > \varepsilon\} = \lim_{n\to\infty} P_r\{|X_n - X|^r > \varepsilon^r\} \le \lim_{n\to\infty} \frac{E[|X_n - X|^r]}{\varepsilon^r}$$

Oss

L'implicazione inversa e' falsa in generale in quanto la convergenza in prob. non implica l'esistenza dei momenti di un qualsiasi ordine $r>0$

Lemma

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di v.a. limitate $|X_n| \le M \in \mathbb{R}$ definite su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Sia X una v.a definita sullo stesso $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ con $P_r\{|X| \le M\} = 1$

Allora

$$X_n \xrightarrow[P]{} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow[r]{} X \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

Dim

Per hp $|X_n| \le M$ e $|X| \le M$

Abbiamo che

$$E|X_n - X|^r = E|X_n - X|^r \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} + E|X_n - X|^r \mathbb{1}_{\{|X_n - X| < \varepsilon\}} \le (2M)^r E\left[\mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}\right] + \varepsilon^r =$$

$$= (2M)^r P_r\{|X_n - X| > \varepsilon\} + \varepsilon^r$$

ponendo $\varepsilon = 0$ abbiamo esattamente la conv. in prob.

Esempio Legge debole dei grandi numeri

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di v.a. indip. ed identicamente distribuite su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

con $E[X]=\mu$ e $E[(X-\mu)^2]=\sigma^2<\infty$

Allora:

$r=2$

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[2]{} \mu .$$

Infatti

$$E[(\overline{X}_n-\mu)^2] = Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = \frac{\cancel{n}\sigma^2}{n^{\cancel{2}}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Lemma

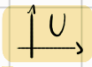
Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. definita su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Sia $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ una v.a. definita su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Allora

$$X_n \xrightarrow[r_2]{} X \implies X_n \xrightarrow[r_1]{} X \qquad \forall\, r_2>r_1>0$$

Dim



$f(E[Y]) \le E[f(Y)] \ \forall f$ convessa

Sia $f(x) := |x|^{\frac{r_2}{r_1}}$ convessa

Per la disuguaglianza di Jensen si ha:

$$f\left(E|X_n-X|^{r_1}\right) = \left(E|X_n-X|^{r_1}\right)^{r_2/r_1} \le E\left[f\left(|X_n-X|^{r_1}\right)\right] = E\left[|X_n-X|^{\frac{r_1 r_2}{r_1}}\right]$$

Quindi

$$\left(\left(E|X_n-X|^{\cancel{r_1}}\right)^{r_2/\cancel{r_1}}\right)^{\frac{1}{r_2}} \le \left(E\left(|X_n-X|^{r_2}\right)\right)^{1/r_2}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} E|X_n-X|^{r_2}=0 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} E|X_n-X|^{r_1}=0$$

Convergenza quasi certa ④

Def

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. definite su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Sia $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una v.a. definita su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Allora

$$X_n \xrightarrow[q.c.]{} X \iff P_r\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} = P_r\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\right\} = 1$$

Lemma ④ ⟹ ②

Sia $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di v.a. su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

X un v.a. definita su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Allora

$$X_n \xrightarrow[q.c.]{} X \implies X_n \xrightarrow[P]{} X$$

Dim

Sapendo che

$$P_r\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} = 1$$

Possiamo riscrivere l'evento come:

$$\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \left\{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}\right\}$$

ovvero l'insieme di quei ω tali che scelto un $\frac{1}{k}$ arbitrariamente piccolo

$$|X_m(\omega) - X| < \frac{1}{k}$$

complementare

Tramite la definizione di convergenza q.c. possiamo dire che

$$0 = P_r\left\{\left[\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \left\{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}\right\}\right]^c\right\} =$$

$$= P_r\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \left\{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\right\}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P_r\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \left\{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0 \qquad \forall k = 1, 2, \dots$$

Viene racchiuso tutto in un'unico limite

$\frac{1}{k} = \varepsilon$

Oss

La convergenza in prob. non implica la conv. quasi certa

Sia U una v.a. uniforme in $[0,1]$ definita su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Considerata $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita come

$$X_1 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})}(U),\ X_2 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})}(U),$$
$$X_3 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{4})}(U),\ X_4 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2})}(U),\ X_5 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}(U),\ X_6 = \mathbb{1}_{[\frac{3}{4},1]}(U), \dots$$
$$\vdots$$
$$X_{2^q-1} = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2^q}]}(U),\ X_{2^q} = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2^q},\frac{2}{2^q}]}(U), \dots$$

l'unione di tutti X_m prima o poi conterranno un $X_i = 1$ con $i \geq m$

Si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{|X_n| > 0\} = 0,\quad \lim_{n\to\infty} \Pr\left\{\bigcup_{m=n}^{\infty} |X_m| > 0\right\} = 1$$

le singole Pr tendono a 0

Convergenza completa ⑤

Def

Sia $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ uno spazio di prob.

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di v.a. definite su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Sia $X: \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a definita su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Allora

$$X_n \xrightarrow[c.c.]{} X \iff \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\{|X_n - X| > \varepsilon\} < \infty \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Lemma ⑤ $\Longrightarrow$ ④

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di v.a. definite su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Sia $X: \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a definita su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Allora

$$X_n \xrightarrow[c.c.]{} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow[q.c.]{} X$$

Dim

Per la subaddività abbiamo della misura in prob. abbiamo che:

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}\{\omega : |X_m(\omega)-X| \geq \tfrac{1}{k}\}\right) \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{m=n}^{\infty} Pr\left(\{\omega : |X_m(\omega)-X| \geq \tfrac{1}{k}\}\right) = 0$$

Abbiamo preso in considerazione il resto di $X_n \xrightarrow[c.c.]{} X$ e facciamo vedere che questo soddisfa la cond. di $X_n \xrightarrow[q.c.]{} X$

Poiché il resto n-esimo di una serie convergente va a 0

Oss ④ $\not\Rightarrow$ ⑤

Consideriamo $U \sim$ uniforme$[0,1]$ ed introduciamo la sequenza

$$X_n := \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U)$$

Possiamo vedere come

$$\sum_{n=1}^{N} Pr\{X_n > 0\} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \longrightarrow \infty \quad \text{per } N\to\infty$$

Quindi $X_n \not\xrightarrow[c.c.]{} 0$

Però vale che $\forall\omega$ t.c. $U(\omega)\neq 0$ abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}U = 0$$

ovvero vale $X_n \xrightarrow[q.c.]{} 0$

Lemma ② $\Rightarrow$ ⑤

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. definite su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Sia $X:\Omega\to\mathbb{R}$ una v.a definita su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Allora

$$X_n \xrightarrow[P]{} X \implies \exists \text{ una sottosuccessione } X_{n_k} \text{ t.c. } X_{n_k} \xrightarrow[c.c.]{} X$$

Dim

Scegliamo X_{n_k} t.c.

Viene direttamente da $X_n \xrightarrow[P]{} X$

$$Pr\{|X_{n_k}-X| \geq \tfrac{1}{k}\} \leq \frac{1}{2^k}$$

in modo da avere $\forall\varepsilon>0$

$$\sum_{n_k=1}^{\infty} Pr\{|X_{n_k}-X|>\varepsilon\} \leq \sum_{n_k=1}^{\lceil\frac{1}{\varepsilon}\rceil} Pr\{|X_{n_k}-X|>\varepsilon\} + \sum_{n_k=\lceil\frac{1}{\varepsilon}\rceil+1}^{\infty} Pr\{|X_{n_k}-X|>\tfrac{1}{k}\} \leq \left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil + \sum_{n_k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} < \infty$$

la prob è nel caso peggiore sempre 1

Oss ⑤ $\not\Rightarrow$ ④ e ④ $\not\Rightarrow$ ⑤

Si consideri la sequenza

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{con } p = 1 - \frac{1}{n^2} \\ n^2 & \text{con } p = \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \Pr\{|X_n - X| > \varepsilon\} < \infty} \rightsquigarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty}$$

Questa converge a $X=0$ in convergenza completa ma non converge a X nemmeno in media $r=1$-esima

$$\rightsquigarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^1 = \lim_{n\to\infty} 1 = 1}$$

Conclusioni

Abbiamo il seguente schema di implicazioni

$$\begin{tikzcd}
5 \arrow[r, Rightarrow] & 4 \arrow[r, Rightarrow] & 2 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[ll, bend right, "\text{Prendendo } X_{n_k} \text{ sottosuccessione di } X_n"'] \arrow[dl, bend left, "\text{se le } X_n \text{ sono limitate}"] & 1 \arrow[l, bend right, "\text{se tende a costante}"'] \\
 & 3 \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

Proposizione di Skorohod

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di v.a. definite su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Sia X una v.a. t.c. $X_n \xrightarrow[d]{} X$

Siano X_n' e X' v.a. definite su un'altro spazio $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}'$

Allora se

$$\underbrace{X_n =_d X_n', \quad X =_d X'}_{\text{hanno la stessa distribuzione}}, \quad \underbrace{\Pr\{\lim_{n\to\infty} X_n' = X'\} = 1}_{X_n \xrightarrow[q.c.]{} X}$$

Dim

Consideriamo $F_{X_n}(\cdot)$ e $F_X(\cdot)$ continue e crescenti

lunghezza intervallo

uniforme in $[0,1]$

Prendiamo $\{\Omega, \mathcal{F}, P\} = \{[0,1], \mathcal{B}[0,1], Leb\}$ con la v.a. identità $U(\omega) = \omega$

Sia

$$X_n' = F_{X_n}^{-1}(U), \quad X' = F_X^{-1}(U)$$

$\rightsquigarrow$ $\exists$ per come le abbiamo definite

Allora

$$F_{X_n'}(x) = \Pr(X_n' \le x) = \Pr(F_{X_n}^{-1}(U) \le x) = \Pr(F_{X_n}(F_{X_n}^{-1}(U)) \le F_{X_n}(x)) = \Pr(U \le F_{X_n}(x)) = F_{X_n}(x)$$

$$F_{X'}(x) = P_r\left(X' \le x\right) = P_r\left(F_X^{-1}(U) \le x\right) = P_r\left(F_X\left(F_X^{-1}(U)\right) \le F_X(x)\right) = P_r\left(U \le F_X(x)\right) = F_X(x)$$

$0 \le F_X(x) \le 1$

perche' $U \sim unif[0,1]$

$P_r(U \le 0{,}5) = 0{,}5$

Dopo aver mostrato che $X_n \overset{}{=}_d X'_n$ e $X =_d X'$ mostriamo ora che $X'_n \xrightarrow[q.c.]{} X'$

Da $X_n \xrightarrow[d]{} X$ abbiamo che $\lim_{n \to \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ ma per la continuita' e monotonia abbiamo che:

$$\lim_{n \to \infty} F_{X_n}^{-1}(u) = F_X^{-1}(u) \quad \forall\, u \in [0,1]$$

Visto che $U \sim unif[0,1]$ possiamo scrivere

$$P_r\left\{\lim_{n \to \infty} F_{X_n}^{-1}(U) = F_X^{-1}(U)\right\} = 1$$

e visto che $F_{X_n}^{-1}(U) = X'_n$ e $F_X^{-1}(U) = X'$ abbiamo che

$$P_r\left\{\lim_{n \to \infty} X'_n = X'\right\} = 1$$