Stocastic order of Magnitude ⓪

1) X_{nono} Gay :)
mi piace il cozzo, soprattutto quello enorme di Dora ♡

Def

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a.
Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione deterministica con $f_n>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$
Diremo che

$$X_n=O_p(f_n) \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists K\in\mathbb{R},\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ \forall n>n_0\ \Pr\left\{\frac{|X_n|}{f_n}\le K\right\}\ge 1-\varepsilon$$

↳ X_n con $\Pr$ molto vicina ad 1 e' dello stesso ordine di grandezza di f_n

Diremo anche che

$$X_n=o_p(f_n) \iff \forall\varepsilon>0,\ \forall\delta>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ \forall n>n_0\ \Pr\left\{\frac{|X_n|}{f_n}\le \delta\right\}\ge 1-\varepsilon$$

↳ X_n con $\Pr$ arbitrariamente vicina ad 1 e' di un'ordine di grandezza inferiore rispetto ad f_n

Oss

Dalla definizione possiamo vedere come

$$X_n=o_p(f_n) \iff \frac{|X_n|}{f_n}\xrightarrow[p]{} 0$$

Oss

E' evidente come

$$X_n=o_p(f_n) \implies X_n=O_p(f_n)$$

Algebra degli stocastic orders (s.o.)

Siano $\{f_n, g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due sequenze deterministiche strettamente positive

1) $X_n=O_p(f_n),\ Y_n=O_p(g_n) \implies X_n+Y_n=O_p(\max\{f_n,g_n\})$

$X_n=O_p(f_n),\ Y_n=O_p(g_n) \implies X_n\cdot Y_n=O_p(f_n\cdot g_n)$

2) $X_n = o_p(\delta_n),\ Y_n = o_p(g_n) \implies X_n + Y_n = o_p(\max\{\delta_n, g_n\})$

$X_n = o_p(\delta_n),\ Y_n = o_p(g_n) \implies X_n \cdot Y_n = o_p(\delta_n \cdot g_n)$

3) $X_n = O_p(\delta_n),\ Y_n = o_p(g_n) \implies X_n \cdot Y_n = o_p(\delta_n \cdot g_n)$

Dim

1) Sia $X_n = O_p(\delta_n)$ e $Y_n = O_p(g_n)$

Per definizione di O_p sappiamo che:

$\forall \varepsilon > 0, \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$P_r\left\{\frac{|X_n|}{\delta_n} > c_1\right\} < \frac{\varepsilon}{2} \quad e \quad P_r\left\{\frac{|Y_n|}{g_n} > c_2\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Prendiamo ora

definizione di $X_n + Y_n = O_p(\max\{\delta_n, g_n\})$

$$P_r\left\{|X_n + Y_n| > (c_1 \vee c_2) \cdot \max\{\delta_n, g_n\}\right\} \le$$

$$\le P_r\{|X_n| > c_1 \delta_n\} + P_r\{|Y_n| > c_2 g_n\} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Per forza di cose almeno 1 dei due eventi si deve verificare

$X_n \cdot Y_n = O_p(\delta_n \cdot g_n)$

Analogalmente

$$P_r\left\{|X_n \cdot Y_n| > c_1 c_2 \cdot \delta_n \cdot g_n\right\} \le$$

$$\le P_r\{|X_n| > c_1 \cdot \delta_n\} + P_r\{|Y_n| > c_2 \cdot g_n\} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2) Siano $X_n = o_p(\delta_n)$ e $Y_n = o_p(g_n)$

Per def. di o_p si ha che

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1, \delta_2 > 0$

$$P_r\left\{\frac{|X_n|}{\delta_n} > \delta_1\right\} < \frac{\varepsilon}{2} \quad e \quad P_r\left\{\frac{|Y_n|}{g_n} > \delta_2\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Prendiamo ora

$X_n + Y_n = o_p(\max\{f_n, g_n\})$

$$\Pr\{|X_n + Y_n| > (\delta_1 \vee \delta_2) \cdot \max\{f_n, g_n\}\} \le$$
$$\le \Pr\{|X_n| > \delta_1 f_n\} + \Pr\{|Y_n| > \delta_2 g_n\} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

almeno uno dei due eventi deve accadere

Analogalmente

$$\Pr\{|X_n \cdot Y_n| > \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot f_n \cdot g_n\} \le$$
$$\le \Pr\{|X_n| > \delta_1 \cdot f_n\} + \Pr\{|Y_n| > \delta_2 \cdot g_n\} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon$$

3) Sia $X_n = O_p(f_n)$ e $Y_n = o_p(g_n)$

Si può notare che

$\forall c_1 > 0$

$$\Pr\{|X_n \cdot Y_n| > c_1 (f_n \cdot g_n)\} = \Pr\{|X_n \cdot Y_n| > \left(\frac{c_1}{c_2} \cdot c_2\right)(f_n \cdot g_n)\} \le$$
$$\le \Pr\{|X_n| > c_2 f_n\} + \Pr\{Y_n > \frac{c_1}{c_2} g_n\}.$$

Per hp si può scegliere c_2 tale che

$$\Pr\{|X_n| > c_2 f_n\} \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Per hp si può fissare c_1/c_2 abbastanza piccolo t.c. $\exists n_0$:

$$\Pr\{|Y_n| > c_1/c_2 \, g_n\} \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > n_0$$

Lemma 2 $\Longrightarrow$ 0

Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sequenza di v.a. definite su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Sia $c \in \mathbb{R}$ una varibile limite

Allora

$$X_n \xrightarrow[P]{} c \Longrightarrow X_n = O_p(1)$$

Dim

Per definizione di O_p

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists d \in \mathbb{R}$

$$P_r\{|X_n| > d\} < \varepsilon$$

Prendiamo $c \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ t.c.

$d = c + \delta$

def $X_n \xrightarrow[p]{} c$

Quindi

$$P_r\{|X_n| > c+\delta\} = P_r\{|X_n - c| > \delta\} \leq \varepsilon$$

Lemma ① $\Longrightarrow$ ⓪

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di v.a. definite su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Sia X una v.a. definita su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Allora

$$X_n \xrightarrow[d]{} X \Longrightarrow X_n = O_p(1)$$

Dim

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ un compatto $K = K_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ tale che

$$P_r(X \in K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$$

Scegliamo ora $M_{\frac{\varepsilon}{2}}$ punto di continuita' di F_X per cui

$$P_r\left(X \in \left[-M_{\frac{\varepsilon}{2}}, M_{\frac{\varepsilon}{2}}\right]\right) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

Si scelga un n_0 tale che

$$\left|F_{X_n}(-M_{\frac{\varepsilon}{2}}) - F_X(-M_{\frac{\varepsilon}{2}})\right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad e \quad \left|F_{X_n}(M_{\frac{\varepsilon}{2}}) - F_X(M_{\frac{\varepsilon}{2}})\right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \qquad \forall\, n > n_0$$

$P_r\{X_n \leq M_{\frac{\varepsilon}{2}}\} = 1 - P_r\{X_n > M_{\frac{\varepsilon}{2}}\}$

Allora

$$P_r\left\{X_n \in \left[-M_{\frac{\varepsilon}{2}}, M_{\frac{\varepsilon}{2}}\right]\right\} = F_{X_n}(-M_{\frac{\varepsilon}{2}}) + 1 - F_{X_n}(M_{\frac{\varepsilon}{2}}) \leq$$

$$\leq \left|F_{X_n}(-M_{\frac{\varepsilon}{2}}) - F_X(-M_{\frac{\varepsilon}{2}})\right| + F_{X_n}(-M_{\frac{\varepsilon}{2}}) + 1 - F_{X_n}(M_{\frac{\varepsilon}{2}}) + \left|F_{X_n}(M_{\frac{\varepsilon}{2}}) - F_X(M_{\frac{\varepsilon}{2}})\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

Da cui segue subito che $X_n = O(1)$

↳ Ci siamo calcolati

Lemma

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di v.a. definite su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

Siano $\{f_n, g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due sequenze deterministiche strettamente positive

Allora

1) $X_n = o_p(f_n) \implies X_n = O_p(f_n)$

2) $X_n = O_p(f_n)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{g_n} \to 0 \implies X_n = o_p(g_n)$

Dim 2)

Dobbiamo dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$:

$$\Pr\left\{\frac{X_n}{g_n} > \varepsilon\right\} \longrightarrow 0$$

Abbiamo che

tende ad ∞

$$\Pr\left\{\frac{X_n}{g_n} > \varepsilon\right\} = \Pr\left\{\frac{X_n}{g_n} > \frac{f_n}{f_n}\varepsilon\right\} = \Pr\left\{X_n > \frac{g_n \varepsilon f_n}{f_n}\right\} \longrightarrow 0$$