Stimatori Bayesiani

Formula di Bayes

Siano $H_1, \dots, H_m$ eventi disgiunti ed esaustivi, cioe' tali per cui $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ $\forall i,j : H_i \neq H_j$ e $\bigcup_{i=1}^{m} H_i = \Omega$

Sia inoltre $E \in \mathcal{F}$ un evento di Pr. strettamente positiva, allora

$$Pr(H_i | E) = \frac{Pr(E|H_i) Pr(H_i)}{\sum_{j=1}^{m} Pr(E|H_j) Pr(H_j)}$$

basta ricordare che $Pr(E) = \sum_{j=1}^{m} Pr(E|H_j) Pr(H_j)$

La derivazione della formula di Bayes e' matematicamente banale

L'interpretazione pero' e' molto importante, permette di combinare in modo matematico la probabilita' a priori di m cause disgiunte H_j e l'evidenza empirica sul fatto che E si sia verificato

Approccio Bayesiano

L'approccio Bayesiano all'inferenza statistica e' profondamente diverso da quello che e' stato visto finora

L'idea di fondo e' che non esista un "vero" $\theta = \theta_0$, ma che in realta' il parametro sia esso stesso una v.a. la cui distribuzione che rappresenta il nostro stato di conoscenza, viene aggiornata tramite la formula di Bayes alla luce delle osservazioni

In altre parole, oltre alla legge delle osservazioni $f(X_1, \dots, X_n | \theta)$ dobbiamo supporre di conoscere la legge $\pi(\theta)$ del parametro prima di effettuare delle osservazioni

L'oggetto principale dell'inferenza e' quindi la legge a posteriori, che attraverso la formula di Bayes e' data da

$$\pi(\theta | X_1, \dots, X_n) = \frac{f(X_1, \dots, X_n | \theta) \pi(\theta)}{\int_\Theta f(X_1, \dots, X_n | \theta) \pi(\theta) \, d\theta}$$

Esempio

Consideriamo $X_1, \dots, X_n$ v.a. $\sim Ber(p)$

Assumiamo che p abbia una distribuzione a priori di tipo beta con parametri α, β cioe'

$$\pi(p) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha - 1} (1-p)^{\beta - 1} \qquad \text{con } p \in [0,1]$$

Con

$$E[p] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad e \quad Var(p) = \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}$$

Inoltre scrivendo $y = \sum_{i=1}^{n} x_i$ otteniamo che