Herding: seguire il gregge

Reti e informazione

- Il materiale descritto in queste lezioni costituisce il Capitolo 16 del testo.
- Iniziamo, con questa serie di lezioni, la parte finale del corso nella quale studiamo un diverso aspetto delle reti:
  - la rete come fonte di informazione
- Ovvero, studiamo il contenuto informativo di una rete
  - che può indurre gli individui che la compongono a modificare il proprio comportamento
    - in questa serie di lucidi
  - che deve essere sintetizzato per derivare una informazione cumulativa che tenga conto, in qualche modo, dei pezzi di informazione derivanti dai singoli individui
    - nella prossima serie di lucidi, nella quale ci occuperemo di sistemi di voto
  - dal quale deve essere individuato ed estratto quello rilevante ad una data richiesta
    - nell'ultima serie di lucidi, nella quale ci occuperemo di web search

Reti e informazione

- L'informazione presente in una rete può indurre gli individui che la compongono a modificare il proprio comportamento
  - e questa questione l'abbiamo già affrontata parlando di diffusione
- Ma il punto di vista è ora sensibilmente diverso
- Nei processi di diffusione, un individuo cambia il proprio comportamento
  - a) come conseguenza di **comunicazioni esplicite** di una serie di informazioni da parte degli individui con i quali è in relazione
    - i semi ibridi di mais
  - b) per ottenere una serie di benefici dalla presenza della rete
    - potersi scambiare file con gli amici che cambiano sistema operativo
- In questa serie di lezioni studiamo il fenomeno in virtù del quale un individuo modifica il proprio comportamento semplicemente ***osservando*** il comportamento che *globalmente* hanno gli altri individui nella rete
  - *in assenza di comunicazione diretta* con gli individui con i quali è in relazione
- osservando Il comportamento che *globalmente* hanno gli altri individui nella rete
  - questo significa che considereremo una visione globale e non puntuale della rete
  - ossia, non ci interesserà l'analisi diretta delle singole relazioni personali

Cenare in una città sconosciuta

- L'informazione presente in una rete può indurre gli individui che la compongono a modificare il proprio comportamento
- Facciamo un esempio:
- stiamo visitando, da turisti, una città sconosciuta
  - sempre seguendo le indicazioni della nostra guida – il prezioso libricino che ci indica monumenti e luoghi interessanti da visitare
  - e i suggerimenti di locali in cui cenare
- Giunge l'ora di cena, e seguiamo il suggerimento della guida: un locale che pare perfetto nel rapporto qualità/prezzo!
- Ci rechiamo sul posto e, di fronte al locale segnalato sulla nostra guida
  - con un ragguardevole numero di stelle
- proprio dall'altro lato della strada si trova un altro locale
  - una bettolaccia alla quale non daremmo alcun credito
- Poiché è un po' presto, attendiamo prima di entrare nel locale
- e, mentre attendiamo, ci accorgiamo che, mentre il locale suggerito dalla guida rimane vuoto, la bettolaccia si riempie di avventori...

Cenare in una città sconosciuta

- L'informazione presente in una rete può indurre gli individui che la compongono a modificare il proprio comportamento
- Di fronte al locale segnalato sulla nostra guida (con un ragguardevole numero di stelle) si trova un altro locale
  - una bettolaccia alla quale non daremmo alcun credito
- e, mentre attendiamo, ci accorgiamo che, mentre il locale suggerito dalla guida rimane vuoto, la bettolaccia si riempie di avventori...
- Quasi certamente, a quel punto, decideremmo di... seguire la folla nella bettolaccia
- Perché assumeremo che se fra i due locali è quello preferito dalla stragrande maggioranza delle persone, una ragione deve pur esserci
  - una ragione a noi sconosciuta
  - ma che è certamente nota agli altri avventori
- Ossia: presumiamo che loro possiedono un'informazione che noi non abbiamo
  - e questa presunzione la desumiamo dal loro comportamento
- ossia, è **un'informazione che ricaviamo dalla rete**

A naso in su

- Un esempio ancora più estremo
  - da un esperimento di Milgram et al. eseguito negli anni ‘60
- Diversi gruppi di persone
  - il cui numero variava, da gruppo a gruppo, fra 1 e 15
- vennero dislocate ad altrettanti incroci cittadini
- Ciascun gruppo di persone aveva un unico compito: rimanere fermi e guardare il cielo
- Scopo dell’esperimento era studiare il comportamento dei passanti: ciò che venne rilevato è che
  - agli incroci nei quali si trovava una sola persona a guardare il cielo, quasi nessun passante imitava il comportamento
  - agli incroci nei quali si trovava un gruppo di 5 persone a guardare il cielo, solo qualche passante imitava il comportamento
  - agli incroci nei quali si trovava un gruppo di 15 persone a guardare il cielo, il 45% dei passanti imitava il comportamento
- Con 15 persone ferme a fissare il cielo, il 45% (quasi la metà) dei passanti si fermava a fissare il cielo!

A naso in su

- Con 15 persone ferme a fissare il cielo, il 45% (quasi la metà) dei passanti si fermava a fissare il cielo!
- Ma perché?!
- Perché, vedendo 15 persone ferme come salami a guardare il cielo, i passanti inferivano l'esistenza di una motivazione razionale che inducesse a farlo
  - potevano forse concludere che, magari, erano persone con qualche disagio comportamentale – ma 15, tutti insieme, allo stesso incrocio pareva poco probabile
  - oppure che doveva esserci qualcosa di interessante da vedere lassù, e, quindi, che sarebbe convenuto alzare gli occhi al cielo!
- Naturalmente, affinché la bilancia pendesse nella direzione "c'è qualcosa di interessante da vedere" invece che in quella del disagio mentale era necessario osservare un numero abbastanza elevato di persone che fissavano il cielo
  - infatti, i gruppi costituiti da poche persone avevano pochi imitatori
- O, detto più formalmente, perché il fenomeno di imitazione avesse inizio occorreva raggiungere una ***soglia critica*** di iniziatori
  - e questo era vero anche nell'esempio del ristorante
- Ma come si fa a capire qual è la soglia critica?

Il gioco delle due urne

- Per rispondere, consideriamo un terzo esempio che ci permetterà di fare valutazioni più precise
- C'è uno scommettitore, in una stanza chiusa, e un insieme di giocatori, che attendono fuori della stanza
- Lo scommettitore inserisce 2 palline rosse e 1 pallina blu in un'urna (che chiameremo MR, a maggioranza rossa), e 2 palline blu e 1 pallina rossa in una seconda urna identica alla prima (che chiameremo MB, a maggioranza blu)
- Poi, "mischia" le due urne e ne sceglie una a caso
- Le regole del gioco sono le seguenti:
  - un giocatore alla volta entra nella stanza, estrae una pallina dall'urna (che può essere rossa o blu), e poi re-inserisce la pallina nell'urna
  - il giocatore comunica allo scommettitore e a tutti gli altri giocatori se, sulla base delle informazioni in suo possesso, ritiene che si tratti dell'urna MR o dell'urna MB
  - ma il giocatore **non deve comunicare l'esito dell'estrazione** (pena la sconfitta per tutti i giocatori), ossia, se ha estratto una pallina rossa o una pallina blu
- Al termine del gioco, solo i giocatori che hanno indovinato di quale urna si tratti ricevono un premio

Il gioco delle due urne

- Cerchiamo, ora, di capire
  - in che modo risponderanno i giocatori
  - in base a quali motivazioni prenderanno le loro decisioni
- GIOCATORE 1:
  - prima di estrarre la pallina, l'unica informazione in suo possesso è che le urne MR e MB sono equiprobabili
  - dopo aver estratto una pallina, la probabilità che l'urna sia di un certo tipo verrà modificata: se estrae una pallina blu (rossa) il giocatore penserà che è più probabile che l'urna sia MB (MR)
  - perciò, gli conviene rispondere in accordo alla pallina che ha estratto – diciamo, blu
- GIOCATORE 2:
  - ora, prima di estrarre la pallina, il giocatore deduce ciò che ha estratto il GIOCATORE 1: siccome sa che chi lo ha preceduto è il GIOCATORE 1, il GIOCATORE 2 sa che, se il GIOCATORE 1 ha risposto MB è perché ha estratto una pallina blu
  - a questo punto, se il GIOCATORE 2 estrae una pallina rossa, sa che sono state estratte una pallina blu e una pallina rossa: quindi, si trova nella stessa situazione in cui si trovava il GIOCATORE 1 prima dell'estrazione
  - e, a questo punto, risponde MR - in accordo alla pallina che ha estratto

Il gioco delle due urne

- GIOCATORE 2:
  - ora, prima di estrarre la pallina, il giocatore deduce ciò che ha estratto il GIOCATORE 1: siccome sa che chi lo ha preceduto è il GIOCATORE 1, il GIOCATORE 2 sa che, se il GIOCATORE 1 ha risposto MB è perché ha estratto una pallina blu
  - se estrae una pallina rossa, è come se il gioco iniziasse dal GIOCATORE 2... e quindi non consideriamo questo caso
  - assumiamo che estragga una pallina blu; in questo caso, sa che sono state estratte due palline blu e questo rinforza l'ipotesi che l'urna sia MB: e quello che risponde è MB
- GIOCATORE 3:
  - prima di estrarre la pallina, il giocatore deduce ciò che hanno estratto il GIOCATORE 1 e il GIOCATORE 2: lo stesso ragionamento operato dal GIOCATORE 2 permette al GIOCATORE 3 di capire che il GIOCATORE 1 ha estratto una pallina blu, e, siccome sa che chi lo ha preceduto è il GIOCATORE 2, il GIOCATORE 3 sa che se il GIOCATORE 2 ha risposto MB è perché ha estratto una pallina blu
  - se estrae una pallina blu sa che sono state estratte tre palline blu e questo rinforza l'ipotesi che l'urna sia MB: e questo è quello che risponde (e, fin qui, non ci piove)
  - se estrae una pallina rossa sa che sono state estratte due palline blu e una rossa: perciò anche in questo caso sembra più probabile che sia un'urna MB che non MR - e MB è quello che il GIOCATORE 3 risponde

Il gioco delle due urne

- GIOCATORE 3:
  - qualunque pallina estragga, risponde MB perché sa che su tre estrazioni almeno due sono state blu
- GIOCATORE 4:
  - prima di estrarre la pallina, il giocatore deduce ciò che hanno estratto il GIOCATORE 1 e il GIOCATORE 2: lo stesso ragionamento operato dal GIOCATORE 3 permette al GIOCATORE 4 di capire che il GIOCATORE 1 ha estratto una pallina blu e il GIOCATORE 2 ha estratto una pallina blu
  - invece, nulla può dedurre circa l'estrazione del GIOCATORE 3 perché sa che, qualunque fosse stata la sua estrazione, avrebbe comunque risposto MB!
  - perciò, ha esattamente le stesse informazioni che aveva il GIOCATORE 3 e, di conseguenza, non può che comportarsi esattamente come il GIOCATORE 3: qualunque pallina estragga, risponderà MB!
- GIOCATORE x, con $x \geq 5$:
  - esattamente come il GIOCATORE 4
- Si è innescato un fenomeno a cascata – una ***cascata imitativa***
  - qualunque saranno le estrazioni, ogni giocatore successivo risponderà MB

Il Teorema di Bayes

- Per capire se l'intuizione che ha guidato i giocatori sia fondata razionalmente, dobbiamo calcolare la probabilità di vittoria di ciascun giocatore
- E, per farlo, abbiamo bisogno del Teorema di Bayes: dati due eventi A e B,

$$P(A \mid B) \cdot P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$$

  - dove $P(A \mid B)$ è la probabilità che si verifichi A nel caso in cui si sia verificato B

- Che possiamo scrivere come $P(A \mid B) = \dfrac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$

- e, poiché $P(B) = P(\,(B \cap A) \cup (B \cap A^c)\,) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$

$$= P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid A^c) \cdot P(A^c)$$

  - dove A^c è l'evento complementare di A

- allora: $P(A \mid B) = \dfrac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)}$

- e vediamo come ciò sia utile per analizzare il gioco delle due urne

Il gioco delle due urne e il Teorema di Bayes

- P(A | B) = $\frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)}$

- Vediamo come ciò sia utile per analizzare il gioco delle due urne:
  - siano MR l'evento "l'urna è a maggioranza rossa" , MB l'evento "l'urna è a maggioranza blu", r l'evento "viene estratta una pallina rossa" e b l'evento "viene estratta una pallina blu)
- Per capire se l'intuizione che ha guidato i giocatori sia fondata razionalmente, dobbiamo calcolare P(MB | b), P(MB | r), P(MR | r) e P(MR | b)
- sapendo che
  - P(MR) = P(MB) = $\frac{1}{2}$
  - P(r | MR) = $\frac{2}{3}$ e P(b | MR) = $\frac{1}{3}$
  - P(b | MB) = $\frac{2}{3}$ e P(r | MB) = $\frac{1}{3}$
  - e, naturalmente, MR^c = MB e MB^c = MR

Il gioco delle due urne e il Teorema di Bayes

- Il GIOCATORE 1 estrae una pallina blu:
- per il teorema di Bayes
  - $P(MB\,|\,b) = \dfrac{P(b|MB) \cdot P(MB)}{P(b|MB) \cdot P(MB) + P(b|MR) \cdot P(MR)} = \dfrac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$
  - $P(MR\,|\,b) = \dfrac{P(b|MR) \cdot P(MR)}{P(b|MR) \cdot P(MR) + P(b|MB) \cdot P(MB)} = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ $\quad (= 1 - P(MB\,|\,b))$
- Ossia, seguendo la propria intuizione e rispondendo MB, il GIOCATORE 1 ha risposto con l’alternativa che massimizza la sua probabilità di successo

Il gioco delle due urne e il Teorema di Bayes

- Il GIOCATORE 2:
- se estrae una pallina rossa:
  - $P(MB\,|\,br) = \dfrac{P(br|MB) \cdot P(MB)}{P(br|MB) \cdot P(MB) + P(br|MR) \cdot P(MR)} = \dfrac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
  - $P(MR\,|\,br) = \dfrac{P(br|MR) \cdot P(MR)}{P(br|MR) \cdot P(MR) + P(br|MB) \cdot P(MB)} = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
  - ossia, la sequenza di 2 estrazioni non fornisce alcuna indicazione: il giocatore risponde MR, coerentemente con la pallina che ha estratto (il GIOCATORE 1 potrebbe anche aver mentito)
- se estrae una pallina blu:
  - $P(MB\,|\,bb) = \dfrac{P(bb|MB) \cdot P(MB)}{P(bb|MB) \cdot P(MB) + P(bb|MR) \cdot P(MR)} = \dfrac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$
  - $P(MR\,|\,bb) = \dfrac{P(bb|MR) \cdot P(MR)}{P(bb|MR) \cdot P(MR) + P(bb|MB) \cdot P(MB)} = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$
  - Ossia, seguendo la propria intuizione e rispondendo MB, il GIOCATORE 2 ha ha risposto con l'alternativa che massimizza la sua probabilità di successo

Il gioco delle due urne e il Teorema di Bayes

- Il GIOCATORE 3, dopo che sono sono state estratte due palline blu:
- se estrae una pallina blu:
  - $P(MB \mid bbb) = \dfrac{P(bbb|MB) \cdot P(MB)}{P(bbb|MB) \cdot P(MB) + P(bbb|MR) \cdot P(MR)} = \dfrac{\frac{8}{27} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{8}{27} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{2}} = \dfrac{8}{9}$
  - $P(MR \mid bbb) = \dfrac{P(bbb|MR) \cdot P(MR)}{P(bbb|MR) \cdot P(MR) + P(bbb|MB) \cdot P(MB)} = \dfrac{1}{9}$
  - ossia, seguendo la propria intuizione e rispondendo MB, il GIOCATORE 3 ha risposto con l'alternativa che massimizza la sua probabilità di successo – e questo è chiaro!
- se estrae una pallina rossa:
  - $P(MB \mid bbr) = \dfrac{P(bbr|MB) \cdot P(MB)}{P(bbr|MB) \cdot P(MB) + P(bbr|MR) \cdot P(MR)} = \dfrac{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$
  - $P(MR \mid bbr) = \dfrac{P(bbr|MR) \cdot P(MR)}{P(bbr|MR) \cdot P(MR) + P(bbr|MB) \cdot P(MB)} = \dfrac{1}{3}$
  - ossia, nonostante l'estrazione di una pallina rossa, la sequenza di estrazioni favorisce ancora l'eventualità che l'urna sia MB: rispondendo MB, il GIOCATORE 3 massimizza la sua probabilità di successo

Il gioco delle due urne e il Teorema di Bayes

- Il GIOCATORE 4, sapendo che le prime due estrazioni sono state palline blu, risponde sempre MB: calcoliamo le probabilità nelle 4 estrazioni possibili
  - P(MB | bbbb) = $\frac{16}{17}$ e P(MR | bbbb) = $\frac{1}{17}$
  - P(MB | bbbr) = $\frac{8}{9}$ e P(MR | bbbr) = $\frac{1}{9}$
  - P(MB | bbrb) = $\frac{8}{9}$ e P(MR | bbrb) = $\frac{1}{9}$
  - P(MB | bbrr) = $\frac{1}{2}$ e P(MR | bbrr) = $\frac{1}{2}$
- Ossia, seguendo la propria intuizione e rispondendo MB, il GIOCATORE 4 non incappa mai nell'alternativa che minimizza la sua probabilità di successo
- tuttavia, se estrae una pallina rossa e il giocatore 3 aveva anch'egli estratto una pallina rossa
  - eventualità che il GIOCATORE 4 non può conoscere
- si trova, nuovamente nella situazione in cui le eventualità MB e MR sono equiprobabili
- così che...

Il gioco delle due urne e il Teorema di Bayes

- Il GIOCATORE 5, sapendo che le prime due estrazioni sono state palline blu, risponde sempre MB: calcoliamo le probabilità nelle 8 estrazioni possibili
  - P(MB | bbbbb) = $\frac{32}{33}$ e P(MR | bbbbb) = $\frac{1}{33}$
  - P(MB | bbbbr) = P(MB | bbbrb) = P(MB | bbrbb) = $\frac{8}{9}$ e P(MR | bbbbr) = P(MR | bbbrb) = P(MR | bbrbb) = $\frac{1}{9}$
  - P(MB | bbbrr) = P(MB | bbrbr) = P(MB | bbrrb) = $\frac{2}{3}$ e P(MR | bbbrr) = P(MR | bbrbr) = P(MR | bbrrb) = $\frac{1}{3}$
  - **P(MB | bbrrr) = $\frac{1}{3}$ e P(MR | bbrrr) = $\frac{2}{3}$**
- Ossia, seguendo la propria intuizione e rispondendo MB, il GIOCATORE 5 può anche incappare nell'alternativa che minimizza la sua probabilità di successo
- E per i giocatori successivi sarebbe anche peggio
- e, tuttavia, se le prime due estrazioni sono blu, tutti i giocatori successivi al secondo rispondono blu
  - perché ***sulla base di ciò che conoscono*** è la scelta migliore

Ingredienti del gioco

- Il gioco delle due urne, la scelta del ristorante, il guardare il cielo hanno caratteristiche comuni:
- 1) ogni individuo deve prendere una decisione
- 2) ogni individuo ha un'informazione privata
- 3) ogni individuo riceve dalla rete solo un'informazione incompleta
  - sa *cosa* hanno deciso altri individui, ma non *perché* hanno deciso in quel modo
- 4) le decisioni vengono prese <u>sequenzialmente</u>: un individuo prende una decisione *dopo* aver osservato il *comportamento* di altri individui
- 5) ogni individuo prende le sue decisioni su una base puramente razionale
  - ossia, inferisce quale sia la decisione che, sulla base delle osservazioni dell'ambiente e del comportamento degli altri individui, sembra essere quella che gli porterà i benefici maggiori
  - non agisce sulla base di una pressione sociale a uniformarsi, come avviene nell'omofilia
- 6) la cascata imitativa si innesca solo quando una ***massa critica*** di individui ha preso la medesima decisione

Un modello generale

- Definiamo, ora, un modello generale di decision making sequenziale generalizzando le caratteristiche appena evidenziate:
- 1) ogni individuo deve prendere una decisione: accettare (Y) o non accettare (N) una proposta?
  - Una delle due è la scelta "giusta", l'altra quella "sbagliata"
  - la probabilità che sia "corretto" accettare la proposta è P(Y) = p
  - e, quindi, la probabilità che sia "corretto" non accettare la proposta è P(N) = 1-p
- Se un individuo **accetta** la proposta può avere un profitto oppure una perdita:
  - se accettare è la scelta giusta, allora ha un profitto $v_g > 0$
  - se accettare è la scelta sbagliata, allora ha un profitto $v_b \leq 0$
- Se un individuo **non accetta** la proposta non ha alcun profitto né alcuna perdita

Un modello generale

- Definiamo, ora, un modello generale di decision making sequenziale generalizzando le caratteristiche appena evidenziate:
- 1) ogni individuo deve prendere una decisione: accettare (Y) o non accettare (N) una proposta?
  - la probabilità che sia "corretto" accettare la proposta è P(Y) = p
  - e, quindi, la probabilità che sia "corretto" non accettare la proposta è P(N) = 1-p
- Se un individuo **accetta** la proposta può avere un profitto oppure una perdita:
  - se accettare è la scelta giusta, allora ha un profitto $v_g > 0$
  - se accettare è la scelta sbagliata, allora ha un profitto $v_b \leq 0$
- Se un individuo **non accetta** la proposta non ha alcun profitto né alcuna perdita
  - Affinché sia equivalente per un individuo accettare o non accettare la proposta in assenza di informazioni che permettano di guadagnare evidenza in favore di una delle due alternative, il valore atteso $E[B_Y]$del profitto in caso di accettazione deve essere uguale al valore atteso $E[B_N]$del profitto in caso di non accettazione
  - ossia:

$$E[B_Y] = v_g\, p + v_b\, (1\text{-}p) = 0 = E[B_N]$$

    - cioè, in assenza di informazioni che permettano di guadagnare evidenza in favore di una delle due alternative, deve essere equivalente per un individuo accettare o non accettare

Un modello generale

- 2) ogni individuo ha un'informazione privata
  - che riceve nella forma di un segnale privato, che può avere uno di due valori: A (accetta) o R (rifiuta)
  - se la scelta giusta è accettare la proposta, la probabilità di ricevere A è $q > \frac{1}{2}$
  - se la scelta giusta è non accettare la proposta, la probabilità di ricevere A è 1-q
  - simmetricamente, se la scelta giusta è accettare la proposta la probabilità di ricevere R è 1-q, se la scelta giusta è non accettare la proposta la probabilità di ricevere R è q
  - Formalmente: $P(A|Y) = q$ $\quad P(A|N) = 1 - q$

    $P(R|Y) = 1 - q$ $\quad P(R|N) = q$

- 3) ogni individuo riceve dalla rete solo un'informazione incompleta
  - sa *cosa* hanno deciso altri individui, ma non *perché* hanno deciso in quel modo

Un modello generale

- 4) le decisioni vengono prese sequenzialmente: un individuo prende una decisione *dopo* aver osservato il comportamento di altri individui

- 5) ogni individuo prende le sue decisioni su una base puramente razionale
  - ossia, inferisce quale sia la decisione che, sulla base delle osservazioni dell'ambiente e del comportamento degli altri individui, sembra essere quella che gli porterà i benefici maggiori
  - se, dopo aver ricevuto il proprio segnale privato e aver osservato le scelte di altri individui nella rete, la probabilità che la scelta giusta sia accettare la proposta è diventata **p'**, allora un individuo accetta la proposta se e solo se

$$v_g\, p' + v_b\, (1 - p') \geq 0$$

  - e, poiché $v_g\, p + v_b\, (1 - p) = 0$, ossia $v_b = -\frac{p}{1-p} v_g \leq 0$, questo accade se e solo se $p' \geq p$

- 6) la cascata imitativa si innesca solo quando una *massa critica* di individui ha preso la medesima decisione
  - e pian piano andiamo a studiare questa massa critica

Un modello generale

- Cominciamo ad analizzare come varia la probabilità che Y sia la scelta migliore nel caso in cui venga ricevuta una sequenza S di segnali
- se |S| = 1, ossia, viene ricevuto un solo segnale
  - se viene ricevuto il segnale A allora

    $$P(Y \mid A) = \frac{P(A|Y) \cdot P(Y)}{P(A|Y) \cdot P(Y) + P(A|N) \cdot P(N)} = \frac{qp}{qp + (1-q)(1-p)} > \frac{qp}{qp + q(1-p)} = p$$

    e $P(N \mid A) = 1 - P(Y \mid A) < p$
  - simmetricamente, se viene ricevuto il segnale R allora

    $$P(Y \mid R) = \frac{P(R|Y) \cdot P(Y)}{P(R|Y) \cdot P(Y) + P(R|N) \cdot P(N)} = \frac{(1-q)p}{(1-q)p + q(1-p)} < \frac{(1-q)p}{(1-q)p + (1-q)(1-p)} = p$$

    e $P(N \mid R) = 1 - P(Y \mid R) > p$
- conseguentemente, quando un individuo riceve un segnale
- e non ha altre informazioni
  - derivanti dal comportamento di altri individui
- "segue" il segnale: sceglie Y quando riceve A, sceglie N quando riceve R

Un modello generale

- Cominciamo ad analizzare come varia la probabilità che Y sia la scelta migliore nel caso in cui venga ricevuta una sequenza S di segnali
- se |S| > 1, ossia, vengono ricevuti un certo numero di segnali
  - diciamo, che vengono ricevuti a segnali A e r segnali R - allora

$$P(Y|S) = \frac{P(S|Y)\cdot P(Y)}{P(S|Y)\cdot P(Y) + P(S|N)\cdot P(N)} = \frac{q^a\,(1-q)^r p}{q^a\,(1-q)^r p + (1-q)^a\,q^r(1-p)}$$

  - consideriamo il secondo addendo al denominatore: $(1-q)^a\,q^r(1-p)$:
    - se a > r , poiché $q > \frac{1}{2}$, allora

      $$(1-q)^a\,q^r = (1-q)^{a-r}\,(1-q)^r\,q^r < q^{a-r}(1-q)^r q^r = q^a(1-q)^r$$

      e quindi $P(Y|S) = \frac{q^a\,(1-q)^r p}{q^a\,(1-q)^r p + (1-q)^a\,q^r(1-p)} > \frac{q^a\,(1-q)^r p}{q^a\,(1-q)^r p + q^a\,(1-q)^r(1-p)} = p$

    - se a < r , allora $(1-q)^a\,q^r = (1-q)^a\,q^a\,q^{r-a} > (1-q)^a q^a (1-q)^{r-a} = q^a(1-q)^r$

      e quindi $P(Y|S) = \frac{q^a\,(1-q)^r p}{q^a\,(1-q)^r p + (1-q)^a\,q^r(1-p)} < \frac{q^a\,(1-q)^r p}{q^a\,(1-q)^r p + q^a\,(1-q)^r(1-p)} = p$

    - se a = r, allora $(1-q)^a\,q^r = q^a(1-q)^r$ e quindi $P(Y|S) = p$

Un modello generale

- Se viene ricevuta una sequenza S di segnali che contiene a segnali A e r segnali R
  - se $a > r$, allora $P(Y \mid S) > p$
  - se $a < r$, allora $P(Y \mid S) < p$
  - se $a = r$, allora $P(Y \mid S) = p$
- se, dunque, un individuo conoscesse l'intera sequenza di segnali, saprebbe prendere la decisione che massimizza la sua probabilità di successo

- Torniamo, ora, alle regole del gioco
  - gli individui prendono una decisione sequenzialmente – uno dopo l'altro
  - sulla base del loro segnale privato
  - e delle decisioni prese dai loro predecessori nella sequenza
    - ma senza conoscere i segnali privati dei predecessori

Un modello generale

- Gli individui prendono una decisione sequenzialmente sulla base del loro segnale privato e delle decisioni prese dai loro predecessori nella sequenza
    - ma senza conoscere i segnali privati dei predecessori
- Sulla base di quel che abbiamo visto a proposito di P(Y|S) sappiamo che
  - Il primo individuo nella sequenza segue il proprio segnale privato
  - anche il secondo individuo segue il proprio segnale privato
  - il terzo individuo segue il proprio segnale privato *solo se i primi due individui hanno preso decisioni differenti* mentre, se i primi due individui hanno preso la stessa decisione, anche il terzo individuo prende quella decisione
    - indipendentemente dal proprio segnale privato
  - ... ecc. ecc. ...
- Consideriamo l'individuo n nella sequenza e supponiamo che egli riesca a inferire i segnali privati dei suoi predecessori
  - e, sappiamo, che questo si verifica quando la cascata imitativa non si è ancora innescata
  - ossia, le decisioni fra Y e N, fino all'individuo n, si sono "grosso modo" alternate
  - e ora chiariamo il "grosso modo"

Un modello generale

- Consideriamo l'individuo n nella sequenza:
  - supponiamo che egli riesca a inferire i segnali privati dei suoi predecessori
  - ossia, sa che è stata ricevuta una sequenza S di segnali che contiene a segnali A e r segnali R
  - e sia σ_n il segnale privato ricevuto dall'individuo n
- Se a = r allora P(Y | S) = p: quindi P(Y | S ∪ $\{\sigma_n\}$) > p se σ_n = A
  e P(Y | S ∪ $\{\sigma_n\}$) < p se σ_n= R
  - perciò l'individuo segue il suo segnale privato qualunque esso sia
- Se a = r + 1: allora P(Y | S ∪ $\{\sigma_n\}$) > p se σ_n= A e P(Y | S ∪ $\{\sigma_n\}$) = p se σ_n= R
  - anche in questo caso l'individuo segue il suo segnale privato qualunque esso sia
- Se a ≥ r + 2: allora P(Y | S ∪ $\{\sigma_n\}$) > p qualunque sia σ_n
  - perciò l'individuo n sceglie Y qualunque sia il suo segnale privato
  - si è innescata una cascata imitativa!
- (I casi a = r – 1 e a ≤ r – 2 sono simmetrici)
- Ma cosa significa a ≥ r + 2? In quali casi si verifica?

Un modello generale

- Consideriamo l'individuo n nella sequenza
  - Se a = r allora l'individuo n segue il suo segnale privato qualunque esso sia
  - Se a = r + 1 allora l'individuo n segue il suo segnale privato qualunque esso sia
  - Se a ≥ r + 2 l'individuo n sceglie Y qualunque sia il suo segnale privato
- Ma cosa significa a ≥ r + 2? In quali casi si verifica?
- fino a quando i segnali si alternano – ARARARA… – vale a ≤ r +1 e r ≤ a +1, ossia |a – r| ≤ 1
- allora, per superare la soglia "+1" è necessario che il segnale A venga ricevuto almeno due volte di seguito – ARARARAA
  - e a questo punto l'individuo successivo alla doppia A sceglie Y qualunque sia il suo segnale privato
- Quindi, ***la cascata imitativa non si innesca fino a quando non vengono ricevuti due segnali consecutivi uguali***

Un modello generale

- La cascata imitativa non si innesca fino a quando non vengono ricevuti due segnali consecutivi uguali
- ma ricevere due segnali consecutivi uguali non è sufficiente affinché si inneschi la cascata:
- perché, se è vero che la sequenza ARARARAA fa partire la cascata
  - con due A consecutivi
- nella sequenza RARARARAA vale a – r = 1
  - che sappiamo non essere sufficiente affinché a questo punto l'individuo successivo alla doppia A scelga Y qualunque sia il suo segnale privato
- Invece: **certamente la cascata imitativa si innesca non appena vengono ricevuti <u>tre</u> segnali consecutivi ugua**li: RARARARAAA!
- Ed ora, utilizziamo quanto sopra per calcolare la probabilità di occorrenza di una cascata imitativa

Un modello generale

- La cascata imitativa si innesca sicuramente quando vengono ricevuti tre segnali consecutivi uguali!

- Indichiamo con H_n l'evento "la cascata imitativa si innesca entro il passo n":

$$P(H_n) \geq P(\vee_{1 \leq i \leq n-2} (\sigma_i = \sigma_{i+1} = \sigma_{i+2})) \geq P(\vee_{1 \leq i \leq \frac{n}{3}} (\sigma_{3i-2} = \sigma_{3i-1} = \sigma_{3i}))$$

- da cui $P(\neg H_n) \leq P(\wedge_{1 \leq i \leq \frac{n}{3}} \neg (\sigma_{3i-2} = \sigma_{3i-1} = \sigma_{3i}))$

$$= \prod_{1 \leq i \leq \frac{n}{3}} P(\neg(\sigma_{3i-2} = \sigma_{3i-1} = \sigma_{3i}))$$

perché eventi indipendenti

- $P(\sigma_{3i-2} = \sigma_{3i-1} = \sigma_{3i}) = P(\sigma_{3i-2} = \sigma_{3i-1} = \sigma_{3i} = A \vee \sigma_{3i-2} = \sigma_{3i-1} = \sigma_{3i} = R)$

$$= P(\sigma_{3i-2} = \sigma_{3i-1} = \sigma_{3i} = A) + P(\sigma_{3i-2} = \sigma_{3i-1} = \sigma_{3i} = R) = \mathbf{P(AAA)} + \mathbf{P(RRR)}$$

$$= \mathbf{P(AAA \mid Y) \cdot P(Y) + P(AAA \mid N) \cdot P(N)} + \mathbf{P(RRR \mid Y) \cdot P(Y) + P(RRR \mid N) \cdot P(N)}$$

$$= \mathbf{q^3 p + (1 - q)^3 (1 - p)} + \mathbf{(1 - q)^3 p + q^3 (1 - p)} = q^3 + (1 - q)^3 = 1 - 3q + 3q^2$$

- e quindi $\mathbf{P(\neg(\sigma_{3i-2} = \sigma_{3i-1} = \sigma_{3i})) = 1 - (1 - 3q + 3q^2) = 3q - 3q^2}$

Un modello generale

- La cascata imitativa si innesca sicuramente quando vengono ricevuti tre segnali uguali!
- Ma qual è la probabilità che questo accada?

- Indichiamo con H_n l'evento "la cascata si innesca entro il passo n":
  - $P(\neg H_n) \leq \prod_{1 \leq i \leq \frac{n}{3}} P(\neg(\sigma_{3i-2} = \sigma_{3i-1} = \sigma_{3i}))$
  - $P(\neg(\sigma_{3i-2} = \sigma_{3i-1} = \sigma_{3i})) = 1 - (1 - 3q - 3q^2) = 3q - 3q^2$

osserviamo che $0 < 3q - 3q^2 < 1$ per ogni $q \in [0,1]$

- e, quindi, $P(\neg H_n) \leq (3q - 3q^2)^{\frac{n}{3}}$
- Pertanto, $P(H_n) \geq 1 - (3q - 3q^2)^{\frac{n}{3}}$

e $\lim_{n \to \infty} P(H_n) = 1$

- E questo dimostra che ***la cascata imitativa si innesca quasi sicuramente***

Considerazioni finali

- Le cascate imitative sono fenomeni facili da innescare
  - perché richiedono la condivisione di poche informazioni
  - in effetti, le sole informazioni che precedono la sua insorgenza sono quelle che hanno rilevanza in questo fenomeno
  - le informazioni che vengono ricevute dopo che la cascata si è innescata sono inutili
  - perciò, se una cascata imitativa si innesca “presto”, la maggior parte delle informazioni che una popolazione acquisisce rimangono inutilizzate
- Questo tipo di fenomeno può indurre decisioni sbagliate
  - proprio in virtù del fatto che non viene utilizzata tutta l’informazione disponibile della rete
- Una cascata imitativa è facile da rompere
  - perché la cascata imitativa si interrompa è sufficiente che
  - qualcuno diffonda il proprio segnale privato
  - oppure che un segnale venga diffuso pubblicamente
    - e queste eventualità sono tanto più probabili quanto più grande è la popolazione interessata dal fenomeno

La saggezza della folla

- Una cascata imitativa può indurre decisioni sbagliate
- questo significa che non è sempre una buona idea imitare il comportamento della massa...

- Nel libro *The wisdom of crowd* (2004), James Surowiecki sostiene la tesi secondo la quale "il comportamento aggregato di un numero elevato di persone in possesso di informazione molto limitata può produrre risultati molto accurati"
  - l'assunzione alla base di questa affermazione è che gli individui, ciascuno in possesso di un'informazione privata, operano le loro scelte *indipendentemente* gli uni dagli altri – senza che nessuno conosca le scelte operate dagli altri
- Tutto ciò non contrasta con la nostra discussione che è, invece, incentrata sul singolo individuo che *osserva i comportamenti degli altri individui e li imita*
  - in questo caso non c'è ragione di inferire che le "illazioni di massa" siano in alcun modo affidabili
- In effetti, lo stesso Surowiecki mette in guardia dai rischi derivanti dal seguire la folla