Norme matriciali

Si vuole introdurre un concetto di distanza sullo spazio delle matrici per misurare la vicinanza tra due matrici $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$

1ª idea

Interpreto una matrice A in $\mathbb{C}^{n\times n}$ come un vettore di n^2 elementi e utilizzo come distanza una delle norme vettoriali già viste

Problema

Questo procedimento spesso conduce a norme matriciali che "non si comportano bene" rispetto al prodotto di matrici

Def

Una funzione $\|\cdot\|: \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice norma matriciale se soddisfa le proprietà:

a) positività:

$$\|A\| \geq 0 \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ e } \|A\| = 0 \iff A = 0$$

b) omogeneità:

$$\|\alpha A\| = \|\alpha\| \cdot \|A\| \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C} \text{ e } \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

c) disuguaglianza triangolare:

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \qquad \forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

se la norma si comporta bene con il prodotto

d) submoltiplicatività:

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \qquad \forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

Data una norma matriciale $\|\cdot\|: \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$, la distanza tra due matrici $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è $\|A-B\|$

Esempio

Prendiamo la norma matriciale data dall'analogia della norma ∞ dei vettori

data $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, si immagina A come se fosse un vettore di n^2 elementi e si definisce la sua $|A|_\infty$

come la norma ∞ di un vettore di n^2 componenti:

$$|A|_\infty = \max_{i,j=1} |a_{ij}|$$

La $|\cdot|_\infty$ non si comporta bene rispetto al prodotto di matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$|A|_\infty = 1, \ |B|_\infty = 1, \ |AB|_\infty = 2 \Rightarrow |\cdot|_\infty$ non e' submoltiplicativa

Norme matriciali indotte

Def

Data una norma vettoriale $\|\cdot\| \in \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, definiamo il numero

$$\|A\| = \max_{\underline{x} \neq \underline{0}} \left(\frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \right) = \max_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{1}{\|\underline{x}\|} \cdot \|A\underline{x}\| = \max_{\underline{x} \neq \underline{0}} \left\| \frac{1}{\|\underline{x}\|} \cdot A\underline{x} \right\| =$$

$$= \max_{\underline{x} \neq \underline{0}} \left\| A \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \right\| = \max_{\underline{y} = 1} \|A\underline{y}\|$$

$$\|\underline{y}\| = \left\| \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \right\| = \frac{1}{\|\underline{x}\|} \cdot \|\underline{x}\| = 1$$

Si puo' dimostrare che $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ associa ad ogni $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ il numero $\|A\|$ sopra definito

e' una norma matriciale che si chiama norma matriciale indotta dalla norma vettoriale $\|\cdot\|$

Oss

La norma matriciale indotta dalla norma vettoriale $\|\cdot\|$ si chiama con lo stesso simbolo

Teorema

Sia $\|\cdot\| \in \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ una norma matriciale indotta dalla norma vettoriale $\|\cdot\|$ e siano $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$

1) $\|I\| = 1$
2) $\|A\underline{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\underline{x}\| \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$
3) A e' la piu' piccola costante C che soddisfa $\|A\underline{x}\| \leq C\|\underline{x}\| \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$
4) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$
5) $\rho(A) \leq \|A\|$

Dim

1) $\|I\| = \max\limits_{\|\underline{x}\|=1} \|I\underline{x}\| = \max\limits_{\|\underline{x}\|=1} \|\underline{x}\| = 1$

2) $\dfrac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \max\limits_{\underline{y}\neq 0} \dfrac{\|A\underline{y}\|}{\|\underline{y}\|} \overset{\text{def}}{=} \|A\| \Rightarrow \|A\underline{x}\| \leq \|A\|\|\underline{x}\| \qquad \forall \underline{x} \neq 0$

Per verifica diretta, la disuguaglianza $\|A\underline{x}\| \leq \|A\|\|\underline{x}\|$ vale anche per $\underline{x} = 0$

3) Prendiamo una qualsiasi costante C che soddisfa $\|A\underline{x}\| \leq C\|\underline{x}\|$.
Mostriamo che $C \geq \|A\| \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$
Siccome $\|A\underline{x}\| \leq C\|\underline{x}\| \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$ allora

$$\frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq C \quad \forall \underline{x} \neq 0 \Rightarrow \max_{\underline{x}\neq 0} \frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq C \Rightarrow \|A\| \leq C$$

4) $\forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$ fissato

$$\|(AB)\underline{x}\| = \|A(B\underline{x})\| \overset{②}{\leq} \|A\|\|B\underline{x}\| \overset{②}{\leq} \|A\|\|B\|\|\underline{x}\|$$

Poiche' $\|AB\|$ e' la piu' piccola costante C t.c. $\|AB\underline{x}\| \leq C\|\underline{x}\| \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$ ③
e siccome la costante $\|A\|\|B\|$ e' una delle tante C che soddisfano $\|AB\underline{x}\| \leq C\|\underline{x}\| \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$
si conclude che $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

$|\lambda| = \rho(A)$

5) Sia λ un autovalore di A di modulo massimo e sia $\underline{x} \neq 0$ un suo autovettore t.c. $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$

$$\|A\underline{x}\| = \|\lambda\underline{x}\| = \|\lambda\|\|\underline{x}\| = \rho(A)\|\underline{x}\| \Rightarrow \frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} = \rho(A) \Rightarrow \|A\| \geq \rho(A)$$

$\leq \max\limits_{\underline{y}\neq 0} \dfrac{\|A\underline{y}\|}{\|\underline{y}\|}$

Tipologie di norme matriciali

Le norme matriciali indotte più importanti sono:

$$\|A\|_1 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1$$

$$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

$$\|A\|_\infty = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$$

Notazione

Se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ denotiamo con:

$A^{[1]}, \dots, A^{[n]}$ le colonne di A

$A_{[1]}, \dots, A_{[n]}$ le righe di A

Teorema

$\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ valgono queste formule

i) $\|A\|_1 = \max\left(\|A^{[1]}\|_1, \|A^{[2]}\|_1, \dots, \|A^{[n]}\|_1\right) = \max\limits_{j=1,\dots,n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

ii) $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$

iii) $\|A\|_\infty = \max\left(\|A_{[1]}\|_1, \|A_{[2]}\|_1, \dots, \|A_{[n]}\|_1\right) = \max\limits_{i=1,\dots,n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Esempio

Calcolare le norme $1, 2, \infty$ di

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Soluzioni

$$\|A\|_1 = \max\left(|2|+|-3|, |-2|+|-1|\right) = 5$$

$$\|A\|_\infty = \max\left(|2|+|-2|, |-3|+|-1|\right) = 4$$

$$A^*A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C_{A^*A}(\lambda) = \det\left(\lambda I - A^*A\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-13 & 1 \\ 1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-13)(\lambda-5)-1 = \lambda^2-18\lambda+64 \Rightarrow \lambda_{12} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2-4\cdot 64}}{2} = 9 \pm \sqrt{17}$$

$$\rho(A^*A) = \max(9+\sqrt{17}, 9-\sqrt{17}) = 9+\sqrt{17} \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{9+\sqrt{17}}$$

Esercizio

Calcolare le norme $1, 2, \infty$ di

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcolare poi $\rho(A)$ e $\rho(B)$ e verificare che

$$\rho(A) \leq \|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$$
$$\rho(B) \leq \|B\|_1, \|B\|_2, \|B\|_\infty$$

Teorema → equalianza delle norme matriciali

Tutte le norme matriciali in $\mathbb{C}^{n\times n}$ sono equivalenti, nel senso che se prendiamo 2 norme matriciali $\|\cdot\|', \|\cdot\|'' : \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ allora si ha:

$$\alpha\|A\|'' \leq \|A\|' \leq \beta\|A''\| \qquad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

dove α, β sono 2 costanti indipendenti da A

Successioni di Matrici

Def

rispetto alla norma matriciale $\|\cdot\|$ quando $\|A^{(k)} - A\| \longrightarrow 0$

Perchè tutte le norme matriciali sono equivalenti, se una successione di matrici converge ad A rispetto ad una norma $\|\cdot\|$ allora converge ad A rispetto a tutte le norme

↳ dim. per esercizio

Def

componente per componente

Una successione di matrici $A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \dots$ in $\mathbb{C}^{n\times n}$ si dice convergente alla matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se $A^{(k)} \longrightarrow A$ componente per componente, cioè se:

$$a_{ij}^{(k)} \longrightarrow a_{ij} \quad \forall i,j=1,\dots,n \iff \left|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}\right| \longrightarrow 0 \quad \forall i,j=1,\dots,n$$

$$\iff \max_{i,j=1,\dots,n} \left|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}\right| \longrightarrow 0$$

$$\iff \left\|A^{(k)} - A\right\| \longrightarrow 0$$

Conclusione

La convergenza comp. per comp. è la convergenza in $\|\cdot\|_\infty$

Dunque, ricordando l'equivalenza di tutte le norme, dire che $A^{(k)} \longrightarrow A$ comp. per comp. è lo stesso che dire che $A^{(k)} \longrightarrow A$ in una qualsiasi norma

Teorema

Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Allora

$$\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \iff \rho(A) < 1$$

Dim ⇝ se A è diagonalizzabile

Poichè A è diagonalizzabile $\exists X$ invertibile e $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ con sulla diagonale gli autovalori di A t.c.

$$A = XDX^{-1}$$

$$A^2 = XDX^{-1}XDX^{-1} = XD^2X^{-1}$$

$$\vdots$$

$$A^k = XD^kX^{-1} \quad (\$)$$

Promemoria

$$\|D^k\|_\infty = \max\left(|\lambda_1^k|, \dots, |\lambda_n^k|\right) = \max\left(|\lambda_1|^k, \dots, |\lambda_n|^k\right) = \left[\max\left(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\right)\right]^k = \rho(A)^k$$

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

$(\Leftarrow)$ Supponiamo $\rho(A) < 1$, in base ad $(\$)$:

$$0 \le \|A^k\|_\infty = \|XD^kX^{-1}\|_\infty \overset{(*)}{\le} \|X\|_\infty \|D^kX^{-1}\|_\infty \overset{(*)}{\le} \|X\|_\infty \|D^k\|_\infty \|X^{-1}\|_\infty =$$

$$= \|X\|_\infty \underbrace{\rho(A)^k}_{\rho(A)<1} \|X^{-1}\|_\infty \longrightarrow 0 \Rightarrow \|A^k\| \longrightarrow 0 \Rightarrow A^k \longrightarrow 0$$

($\Rightarrow$) Supponiamo che $A^k \longrightarrow 0$. Dalla ($) e moltiplicando a destra per X e a sinistra per X^{-1} otteniamo $D^k = X^{-1} A X$

Abbiamo che:

Per Hp $A^k \longrightarrow 0$

$$0 \leq \rho(A^k) = \| D^k \|_\infty = \| X^{-1} A^k X \|_\infty \leq \| X \|_\infty \| A^k \|_\infty \| X^{-1} \|_\infty \longrightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(A)^k \longrightarrow 0 \Rightarrow \rho(A) < 1$$