Uniforme integrabilità

Def

La sequenza di v.a. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e' detta Uniformemente integrabile se:

$$\lim_{M\to\infty} \sup_n E\left[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}\right]=0$$

da un certo punto in poi il valore atteso converge

Oss

Non basta avere dei momenti uniformemente limitati per garantire l'uniforme integrabilità

Ad esempio:

$$X_n=\begin{cases} 0 & \text{con pr } 1-\frac{1}{n^2} \\ n^2 & \text{con pr } \frac{1}{n^2}\end{cases}$$

Qui $E[X_n]=1 \quad \forall n$ quindi uniformemente limitato

Pero'

$$\lim_{M\to\infty} \sup_n E\left[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}\right]=1$$

Quindi non e' uniformemente integrabile

Lemma condizione necessaria

Se $\{X_n\}$ e' uniformemente integrabile, $E[X_n]$ e' uniformemente limitato

Dim

Sia $M=M_\varepsilon$ tale che:

$$\sup_n E\left[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}\right]<\varepsilon$$

Allora

$$E[|X_n|]=E\left[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|\le M_\varepsilon\}}\right]+E\left[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>M_\varepsilon\}}\right]=M_\varepsilon+\varepsilon$$

abbiamo dimostrato che $E[|X_n|]$ e' uniformemente limitato su tutto n

Lemma condizioni sufficienti:

1) se la sequenza $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e' costituita da v.a. identicamente distribuite con valor medio finito, e' unif. integrabile

con stessa distribuzione

la Pr non deve dipendere da n

2) se $\exists\, \eta > 0$ t.c. $E[|X_n|^{1+\eta}] < M_\eta < \infty$ per ogni n, allora X_n e' unif. integrabile

Dim

1) Possiamo notare che

essendo ident. distri. posso prendere una sola variabile

$$\lim_{M\to\infty} \sup_n E\left[|X_n|\, \mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}\right] = \lim_{M\to\infty} E\left[|X_1|\, \mathbb{1}_{\{|X_1|>M\}}\right] = 0$$

2) Possiamo dire che

moltiplicato per una quantita' positiva

$$\lim_{M\to\infty} \sup_n E\left[|X_n|\, \mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}\right] \le \lim_{M\to\infty} \sup_n E\left[\frac{|X_n|^\eta}{M_\eta} |X_n|\, \mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}\right] =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M_\eta} \sup_n E\left[|X_n|^{\eta+1}\, \mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}\right] \le \lim_{M\to\infty} \frac{M_\eta}{M_\eta} = 0$$

Lemma

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza unifor. integrabile

Allora

$$X_n \xrightarrow{p} X \implies X_n \xrightarrow{L^1} X$$

Dim

Possiamo riscrivere il tutto come

$$E[|X_n - X|] \le$$

Piccolo a piacere grazie al valor medio finito

$$\le E\left[|X_n|\, \mathbb{1}_{\{|X_n|\le M\}} - X_n\right] + E\left[|X|\, \mathbb{1}_{\{|X|\le M\}} - X\right] + E\left[|X_n|\, \mathbb{1}_{\{|X_n|\le M\}} - X\, \mathbb{1}_{\{|X|\le M\}}\right]$$

e' piccolo a piacere

convergono in prob.

Legge dei grandi numeri per sequenze unif. integrabili

Teo

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di v.a. con

$E[X_i]=0$

indipendenti unif. integrabili

Allora:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[L^1]{} 0$$

Nello specifico

$$\bar{X}_n \xrightarrow[P]{} 0$$

$\boxed{③ \Longrightarrow ②}$

Dim

Poniamo

$$X_i = X_i' + X_i''$$

Dove

$$X_i' = X_i \mathbb{1}_{\{|X_i|\le M\}} \quad , \quad X_i'' = X_i \mathbb{1}_{\{|X_i|>M\}}$$

Possiamo quindi riscrivere

$\boxed{E[X_i'] + E[X_i''] = 0}$

$$X_i = X_i \mathbb{1}_{\{|X_i|\le M\}} + X_i \mathbb{1}_{\{|X_i|>M\}} = X_i' + X_i'' = X_i' - E[X_i'] + X_i'' - E[X_i'']$$

Quindi abbiamo che

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i' - E[X_i'] + X_i'' - E[X_i'']\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i' - E[X_i']\right)}_{Ⓐ} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i'' - E[X_i'']\right)}_{Ⓑ}$$

Concludendo

Ⓐ per la legge dei grandi numeri di Chebishev $\bar{X}_n \xrightarrow[P]{} 0$

$\boxed{E[X'^2] < M^2 \text{ essendo } X_i' = X_i \mathbb{1}_{\{|X_i|\le M\}}}$

Ⓑ puo' essere riscritto come

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i'' - \underbrace{E[X_i'']}_{0}\right) \le 2 \sup_{i=1,2,\dots} E\left[|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}\right] \underbrace{\le}_{\text{per l'uniforme integrabilità}} \varepsilon$$

Quindi ricapitolando

$\text{A} \xrightarrow[p]{} 0$

$\text{B} \leq \varepsilon$

Possiamo dire allora che $\bar{X}_n \xrightarrow[p]{} 0$ e quindi

$\bar{X}_n \xrightarrow[r=1]{} 0$

Essendo $\bar{X}_n$ u.i.