Metodi iterativi per la risoluzione di sistemi lineari

È dato un sistema lineare

$$(S) \quad A\underline{x} = \underline{b} \quad \text{con } b \in \mathbb{C}^n \text{ e } A \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ invertibile}$$

Tale sistema, essendo A invertibile, ha un'unica soluzione: $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

Ci proponiamo di risolvere (S) con un metodo iterativo, cioe' con un metodo che a partire da un vettore iniziale $\underline{x}^{(0)}$ scelto dall'utente costruisce una successione di vettori $\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)}, \dots$

componente per componente

Vogliamo che questa successione sia facile da costruire e che converga a $\underline{x}$ qualunque sia il vettore iniziale scelto $\underline{x}^{(0)}$

Per risolvere (S) consideriamo solo i metodi iterativi stazionari, cioe' metodi della forma:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{x}^{(0)} \in \mathbb{C}^n \text{ dato} \\ \underline{x}^{(k+1)} = P\underline{x}^{(k)} + \underline{q} \quad k = 0, 1, \dots \end{array}\right] (m)$$

dove $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e' una matrice fissata detta matrice d'iterazione e $q \in \mathbb{C}^n$ e' un vettore fissato

Oss

Se $\{\underline{x}^{(k)}\}_{k=0,1,\dots}$ e' una successione prodotta dal metodo (m) che converge ad un vettore $\underline{x}^{(\infty)}$ allora:

$$\underline{x}^{(\infty)} = \lim_{k \to \infty} \underline{x}^{(k+1)} = \lim_{k \to \infty} \left(P\underline{x}^{(k)} + \underline{q}\right) = P\underline{x}^{(\infty)} + \underline{q}$$

quindi $\underline{x}^{(\infty)}$ deve soddisfare l'equazione $\underline{x}^{(\infty)} = P\underline{x}^{(\infty)} + \underline{q}$

Promemoria

$$\boxed{\begin{array}{l} \left(P\underline{x}^{(k)} + q\right)_1 = P_{11}\underline{x}_1^{(k)} + P_{12}\underline{x}_2^{(k)} + \dots + P_{1n}\underline{x}_n^{(k)} + q_1 \longrightarrow \\ \longrightarrow P_{11}\underline{x}_1^{(\infty)} + P_{12}\underline{x}_2^{(\infty)} + \dots + P_{1n}\underline{x}_n^{(\infty)} + q_1 = \left(P\underline{x}^{(\infty)} + \underline{q}\right)_1 \end{array}}$$

Conclusione

Se la sol. $\underline{x}$ del sistema (S) non soddisfa l'eq $\underline{x} = P\underline{x} + \underline{q}$ allora non c'e' speranza che una una successione $\{\underline{x}^{(k)}\}_{k=0,1,\dots}$ prodotta dal metodo (m) converga ad $\underline{x}$

Def ⇝ consistenza di un metodo iterativo

Il metodo iterativo (m) si dice consistente con il sistema (S) se la soluzione $\underline{x}$ di (S) soddisfa l'equazione $\underline{x} = P\underline{x} + \underline{q}$

prodotto dal metodo (m) converga ad $\underline{x}$

Def ⇝ convergenza di un metodo iterativo

Il metodo iterativo (m) per risolvere il sistema (S) si dice convergente se per ogni scelta del vettore iniziale $\underline{x}^{(0)}$ la successione $\{\underline{x}^{(k)}\}_{k=0,1,\dots}$ generato dal metodo a partire da $\underline{x}^{(0)}$ converge alla soluzione $\underline{x}$ di (S)

Teorema ⇝ CNS di convergenza ⇝ necessaria e sufficiente

Supponiamo che il metodo (m) sia consistente con il sistema (S)
Allora esso è convergente se e solo se $\rho(P) < 1$

Dim ⇝ solo per $\rho(P)<1$ allora il metodo è convergente

Dobbiamo dimostrare che per ogni scelta di $\underline{x}^{(0)}$ la successione $\{\underline{x}^{(k)}\}_{k=0,1,\dots}$ generata da (m) converge ad $\underline{x}$ soluzione di (S)

Siccome il metodo è consistente per Hp vale l'equazione

Dobbiamo dimostrare che per ogni scelta di $\underline{x}^{(0)}$ la successione $\{\underline{x}^{(k)}\}_{k=0,1,\dots}$ generata da (m) converge a $\underline{x}$ soluzione di (S)

Siccome il metodo è consistente per Hp vale l'equazione

(*) $\underline{x} = P\underline{x} + \underline{q}$

Inoltre per definizione del metodo, vale che

(**) $\underline{x}^{(k+1)} = P\underline{x}^{(k)} + \underline{q} \quad \forall k = 0,1,\dots$

Sottraendo membro a membro la (**) e la (*) otteniamo

$$\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x} = P\underline{x}^{(k)} + \cancel{q} - (P\underline{x} - \cancel{q}) \quad \forall\, k = 0, 1, \dots$$

$$\underbrace{\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}}_{\substack{\text{errore al passo } k+1 \\ e^{(k+1)}}} = P\underbrace{(\underline{x}^{(k)} - \underline{x})}_{\substack{\text{errore al passo } k \\ e^{(k)}}} \quad \forall\, k = 0, 1, \dots$$

$$\underline{e}^{(k+1)} = P\underline{e}^{(k)}$$

quindi

$$\underline{e}^{(k+1)} = P\underline{e}^{(k)} = P^2\underline{e}^{(k-1)} = P^3\underline{e}^{(k-2)} = \dots = P^{k+1}\underline{e}^{(0)} \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

$$\underline{e}^{(k)} = P^k \underline{e}^{(0)} \quad \forall k = 0, 1, \dots \quad (\$)$$

Siccome $\rho(P) < 1$, $P^k \to 0 \Rightarrow$ dalla $(\$)$ si deduce che $\underline{e}^{(k)} \to 0\underline{e}^{(0)} = \underline{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{x}^{(k)} - \underline{x} \to 0 \Rightarrow \underline{x}^{(k)} \to \underline{x}$$

condizione sufficiente

Corollario (CS di convergenza)

Supponiamo che il metodo (m) sia consistente con il sistema (S)

Se esiste una norma matriciale indotta $\|\cdot\|$ t.c. $\|P\| < 1$ allora il metodo (m) e' convergente

Dim

Poiche $\rho(P) \le \|P\|$, la condizione $\|P\| < 1$ implica che $\rho(P) < 1$, dunque il metodo e' convergente per il teo precedente

necessaria

Corollario (CN di convergenza)

Supponiamo che il metodo (m) sia consistente con il sistema (S)

- Se $|\text{traccia}(P)| \ge n$ allora il metodo non e' convergente
- Se $|\det(P)| \ge 1$ allora il metodo non e' convergente

Quindi le condizioni $|\text{traccia}(P)| < n$ e $|\det(P)| < 1$ sono condizioni necessaria per la convergenza del metodo (m).

Dim $\quad |\det(P)| \ge 1$

Supponiamo che $|\text{traccia}(P)| \ge n$ allora esiste almeno un autovalore di P di modulo ≥ 1

Infatti se tutti gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di P fossero di modulo < 1 allora avremmo $|\det(P)| = |\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n| = |\lambda_1| \cdot \ldots \cdot |\lambda_n| < 1$

$$|\text{traccia}(P)| = |\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n| \le |\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| < n$$

il che e' impossibile per Hp

Dunque siccome esiste un autovalore di P di modulo ≥ 1, anche $\rho(P) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|) \geq 1$

$\Rightarrow$ il metodo non e' convergente

Esempio

Consideriamo il sistema lineare

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e il metodo iterativo

$$\begin{cases} \underline{x}^{(0)} \in \mathbb{C}^2 \text{ dato} \\ \underline{x}^{(k+1)} = (I - A)\underline{x}^{(k)} + \underline{b}, \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

a) stabilire se il metodo sia consistente con il sistema dato

b) stabilire se il metodo sia consistente con il sistema dato

c) calcolare le prime 5 iterazioni del metodo partendo da $\underline{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e confrontando la soluzione esatta

Soluzione

a) Il metodo dato e' dato dalla formula $P = I - A$ e $\underline{q} = \underline{b}$

Sostituendo la soluzione $\underline{x}$ del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ nell'equazione del metodo al posto di $\underline{x}^{(k)}$ e $\underline{x}^{(k+1)}$ otteniamo

$$\underline{x} = (I - A)\underline{x} + \underline{b} \iff \cancel{\underline{x}} = \cancel{\underline{x}} - A\underline{x} + \underline{b} \iff A\underline{x} = \underline{b}$$

che e' un'equazione soddisfatta. Dunque il metodo e' consistente con il sistema dato

b) La matrice d'iterazione e'

$$P = I - A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

si nota che $|\text{traccia}(P)| = |-2| = |2| \geq$ dim del sistema $(n = 2)$

$\Rightarrow$ il metodo non converge.

c) La soluzione esatta $\underline{x}$ del sistema possiamo calcolarla con il metodo di Gauss:

$$A\underline{x}=\underline{b} \iff \begin{cases} 2x_1+x_2=1 \\ x_1+2x_2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1+x_2=1 \\ \frac{3}{2}x_2=\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1=\frac{1}{3} \\ x_2=\frac{1}{3} \end{cases} \iff$$

$$\iff \underline{x}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^{(1)}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^{(2)}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^{(3)}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^{(4)}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^{(5)}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Esempio

Consideriamo il sistema lineare

$$A\underline{x}=\underline{b} \quad \text{con} \quad A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \underline{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e il metodo iterativo

$$\begin{cases} \underline{x}^{(0)}\in\mathbb{C}^2 \text{ dato} \\ \underline{x}^{(k+1)}=(I-\frac{1}{2}A)\,\underline{x}^{(k)}+\frac{1}{2}\underline{b}, \quad k=0,1,\dots \end{cases}$$

a) stabilire se il metodo sia consistente con il sistema dato

b) stabilire se il metodo sia consistente con il sistema dato

c) calcolare le prime 5 iterazioni del metodo partendo da $\underline{x}^{(0)}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e confrontando la soluzione esatta

Soluzione

① il metodo e' della forma (h) con matrice d'iterazione $P = I - \frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ e $\underline{q} = \underline{b} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Sostituisco la soluzione $\underline{x}$ del sistema al posto di $x^{(k)}$ e $x^{(k+1)}$ nell'eq. del metodo e ottengo

$$\underline{x} = \left(I - \frac{1}{2}A\right)\underline{x} + \frac{1}{2}\underline{b} \iff \cancel{\underline{x}} = \cancel{\underline{x}} - \frac{1}{2}A\underline{x} + \frac{1}{2}\underline{b} \iff \cancel{\tfrac{1}{2}}A\underline{x} = \cancel{\tfrac{1}{2}}\underline{b}$$

che e' un'eq. soddisfatta => il metodo e' consistente con il sistema dato.

② $\|P\|_\infty = \frac{1}{2} < 1$ => il metodo e' convergente per il corollario

③ La soluzione $\underline{x}$ del sistema e' $\underline{x} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}333\ldots \\ 0{,}333\ldots \end{bmatrix}$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}$$

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/8 \\ 3/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}375 \\ 0{,}375 \end{bmatrix}$$

$$x^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/8 \\ 3/8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/16 \\ 5/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3125 \\ 0{,}3125 \end{bmatrix}$$

$$x^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5/16 \\ 5/16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/32 \\ 11/32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}34375 \\ 0{,}34375 \end{bmatrix}$$

Esempio

Consideriamo il sistema lineare:

$$A\underline{x}=\underline{b}, \quad A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \underline{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ed il metodo iterativo

$$\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{C}^2 \text{ dato}$$

$$\underline{x}^{(k+1)} = (I-\omega A)\underline{x}^{(k)} + \omega \underline{b}, \quad k=0,1,2,\dots$$

dove $\omega \in \mathbb{R}$ e' fissato

i) stabilire per quali valori di ω il metodo e' consistente con il sistema dato
ii) Stabilire per quali valori di ω il metodo e' convergente

Soluzione

i) Il metodo assegnato e' della forma (m) con $P=I-\omega A$ e $q=\omega\underline{b}$
Sostituisco $\underline{x}$ nell'eq. del metodo al posto di $x^{(k+1)}$ e $\underline{x}^{(k)}$ e ottengo

$$\underline{x}=(I-\omega A)\underline{x}+\omega\underline{b} \iff \cancel{\underline{x}}-\cancel{\underline{x}}+\cancel{\omega} A\underline{x}=\cancel{\omega}\underline{b}$$

che e' un'equazione valida $\forall \omega \in \mathbb{R}$. Quindi il metodo e' consistente con il sistema dato qualunque sia l'ω scelto

ii) La matrice di iterazione e':

$$P=I-\omega A=\begin{bmatrix} 1-2\omega & -\omega \\ -\omega & 1-2\omega \end{bmatrix}$$

Per capire quali sono i valori di ω per i quali il metodo e' convergente dobbiamo capire quando e' soddisfatta la CNS $\rho(P)<1$ (usare solo CN e CS non basta)

$$C_p(\lambda) = \det(\lambda I - P) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 + 2w & w \\ w & \lambda - 1 + 2w \end{vmatrix} = (\lambda - 1 + 2w)^2 - w^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 - 2w \pm |w|$$

$$\rho(P) = \max(|1 - w|, |1 - 3w|)$$

$$\rho(P) < 1 \iff \begin{cases} |1 - w| < 1 \\ |1 - 3w| < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 < 1 - w < 1 \\ -1 < 1 - 3w < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < w < 2 \\ 0 < w < \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\iff 0 < w < \frac{2}{3}$$

Conclusione

metodo converge per $0 < w < \frac{2}{3}$ e non per altri valori

Oss 1

Supponiamo $w = \frac{3}{4}$. Allora $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$|\text{traccia}(P)| = |-1| = 1 < 2 \quad \checkmark$$

$$|\det(P)| = \left|\frac{1}{4} + \frac{9}{16}\right| = \frac{13}{16} \quad \checkmark$$

Conclusione sono soddisfatte le 2 CN ma il metodo non e' convergente perche' $\frac{3}{4} \notin (0, \frac{2}{3})$. Dunque le 2 condizioni necessarie alla convergenza non sono sufficienti

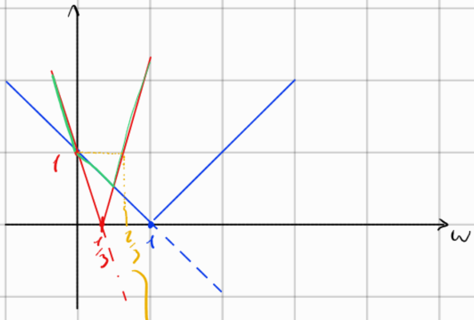
Oss 2

Domanda: Qual'e' il miglior valore di w in $(0, \frac{2}{3})$ che posso scegliere?

Risposta: E' il valore di w che rende minimo il raggio spettrale $\rho(P)$ perche' come vedremo questo valore w assicura la maggiore velocita' di convergenza

Nel nostro caso il miglior valore di w che rende minimo:

$$\rho(P) = \max\left(\underbrace{|1-w|}, \underbrace{|1-3w|}\right)$$



$\to w$ in pos $\frac{2}{3}$ non può andare oltre 1

w_{opt} è l'ascissa del punto d'intersezione tra le rette $y = 1-w$ e $y = 3w-1$

$$\begin{cases} y = 1-w \\ y = 3w-1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1-w \\ w = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ w = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Velocità di convergenza

Consideriamo il metodo (m) per risolvere il sistema (s) e supponiamo che (m) sia convergente ($\underline{x} = P\underline{x} + \underline{q}$ e $\rho(P) < 1$)

$$\underline{e}^{(k)} = \underline{x}^{(k)} - \underline{x}$$

Da ricordare

Fissiamo una qualsiasi norma vettoriale $\|\cdot\|$. Per quasi tutti i vettori $\underline{x}^{(k)} \in \mathbb{C}^n$, l'errore $e^{(k)}$ commesso dal metodo (m) soddisfa

$$\|\underline{e}^{(k)}\| \approx C k^m \rho(P)^k$$

m = 0 se P è diagonalizzabile

per ogni k abbastanza grande (nella pratica anche per k piccolo) dove $0 \le m \le n-1$ è un intero che dipende solo da P e C è una costante indipendente da k.

Concl.

La convergenza delle successioni $\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(1)}, \dots$ generate da un metodo della forma (m) è tanto più veloce quanto più $\rho(P)$ è piccolo.

Def

Dati 2 metodi α, β della forma (m) per risolvere (s), entrambi convergenti, diciamo che α converge più velocemente di β se $\rho(P_\alpha) < \rho(P_\beta)$ dove P_α e P_β sono le matrici d'iterazione rispettivamente di α e β

Criterio di arresto del residuo

Considerando il metodo (m) per risolvere il sistema (s) e sia $\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(1)}, \ldots$ una successione generata dal metodo (m).

Anche quando tale successione risulta convergente, occorre arrestarla prima o poi. Il criterio di arresto più usato è il criterio del residuo:

Si sceglie una norma vettoriale $\|\cdot\|$ e si arresta la successione al primo vettore $\underline{x}^{(k)}$:

errore relativo

$$(r) \quad \frac{\|\underline{r}^{(k)}\|}{\|\underline{b}\|} < \varepsilon \qquad \left(\underline{r}^{(k)} = \underline{b} - A\underline{x}^{(k)},\ \varepsilon > 0 \text{ è una soglia di precisione prefissata} \right)$$

La condizione (r) impone che l'errore relativo $\|A\underline{x}^{(k)} - \underline{b}\| / \|\underline{b}\|$ commesso approssimando $\underline{b}$ con $A\underline{x}^{(k)}$ sia $\leq \varepsilon$.

↳ sarebbe come $\frac{|\tilde{a} - a|}{|a|}$ errore relativo con cui $\tilde{a}$ approssima a

soluzione

PR. 2 del teo sulle norme

$\|-\underline{r}\| = \|\underline{r}\|$ ↳ $\|-\underline{r}\| = |-1| \, \|\underline{r}\| = \|\underline{r}\|$

$$\frac{\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} = \frac{\|\underline{x}^{(k)} - A^{-1}\underline{b}\|}{\|A^{-1}\underline{b}\|} = \frac{\|A^{-1}(A\underline{x}^{(k)} - \underline{b})\|}{\|A^{-1}\underline{b}\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \, \|-\underline{r}^{(k)}\|}{\|A^{-1}\underline{b}\|}$$

$$= \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \, \|\underline{r}^{(k)}\|}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\underline{b}\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \, \|\underline{r}^{(k)}\|}{\|\underline{b}\|} \leq \underbrace{\|A\| \, \|A^{-1}\|}_{\kappa(A)} \cdot \varepsilon$$

↳ $\geq \|AA^{-1}\underline{b}\|$

$\kappa(A)$ numero di condizionamento di A rispetto alla norma $\|\cdot\|$