Disugualianze fondamentali

Disugualianza di Markov

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X \geq 0$,

Allora

$$Pr\{X \geq c\} \leq \frac{E[X]}{c} \qquad \forall c > 0$$

Dim

moltiplicato per una quantità positiva

$$Pr\{X \geq c\} = E\left[\mathbb{1}_{[c,\infty)}(X)\right] \leq E\left[\frac{X}{c}\mathbb{1}_{[c,\infty)}(X)\right] \leq \frac{E[X]}{c}$$

Disugualianza di Chebishev

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X \geq 0$

Allora

Var(X)

$$Pr\{|X - E[X]| \geq c\} \leq \frac{E[|X - E[X]|^2]}{c^2}$$

Dim

Markov

$$Pr\{|X - E[X]| \geq c\} = Pr\{|X - E[X]|^2 \geq c^2\} \leq \frac{E[|X - E[X]|^2]}{c^2}$$

Legge debole dei grandi numeri

Sia $\{X_i\}_{i=1,\dots,n} \sim$ i.i.d. e $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Ipotiziamo che $E[X_n^2] < \infty$

Allora

$$\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu \qquad \text{con } \mu = E[X_i] \text{ e } \sigma = Var(X_i)$$

Dim

chebishev

$$Pr(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{Var(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\cancel{n}\sigma^2}{n^{\cancel{2}}\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{\lim} 0$$

$Var(xY) = x^2 Var(Y)$

Legge forte dei grandi numeri

Richiamo Teo di Kolmogorov

Siano $X_1, \dots, X_n$ iid con $E[X_i] = \mu$

Allora

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[q.c.]{} \mu$$

Siano $X_1, \dots, X_n$ iid con $E[X_i] = \mu$, $E[X_i^4] < \infty$

Allora

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[c.c.]{} \mu$$

Dim

Ponendo $\mu = 0$ dimostriamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} Pr\{|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon\} = \sum_{n=1}^{\infty} Pr\{|\bar{X}_n| > \varepsilon\} < \infty$$

Quindi possiamo riscrivere

Markov

$$Pr\{|X_n| > \varepsilon\} = Pr\{|\bar{X}_n|^4 > \varepsilon^4\} \leq \frac{E[\bar{X}_n^4]}{\varepsilon^4}$$

$\longrightarrow 0$ per $n \longrightarrow \infty$

Dimostriamo ora che $\frac{E[\bar{X}_n^4]}{\varepsilon^4}$ sia un $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Calcoliamo ora

$$E[\bar{X}_n^4] = E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^4\right] = \frac{1}{n^4} E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^4\right] =$$

$$= \frac{1}{n^4} E\left[\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i_3=1}^{n}\sum_{i_4=1}^{n} X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}X_{i_4}\right] = \frac{1}{n^4}\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i_3=1}^{n}\sum_{i_4=1}^{n} E\left[X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}X_{i_4}\right] =$$

tutte le possibili configurazioni

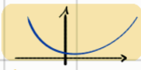
$$= \frac{1}{n^4}\left(n \cdot E[X_1^4] + 3n(n-1)\left(E[X_i^2]\right)^2\right) = O\left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2}\right)$$

essendo $X_i \sim$ iid posso fissare una X_1

Oss

È stato mostrato come con $E[X_i^4]$ la $Pr\{|\bar{X}_n| > \varepsilon\}$ decresca con velocità $O(\frac{1}{n^2})$

Disuguaglianza di Jensen



Sia $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ con $E[X] < \infty$ e f funzione convessa

Abbiamo che

$$E[f(X)] \geq f\,E[X]$$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

Siano $X, Y: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

Allora

$$E[|XY|] \leq \sqrt{E[X^2]\,E[Y^2]}$$

Oppure

$$-1 \leq \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \leq 1$$

Disuguaglianza di Minkowski

Siano X, Y due vettori

disuguaglianza triangolare

Allora

$$\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

Sapendo che

$$\|X\| = \sqrt{E[X^2]}$$

Abbiamo che

$$\sqrt{E[(XY)^2]} \leq \sqrt{E[X^2]} + \sqrt{E[Y^2]}$$

Disuguaglianza di Hoeffding

$a_i \leq Y_i \leq b_i$

Siano $Y_1, \dots, Y_n$ v.a. indipendenti limitate fra $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ con $E[Y_i] = 0$

Allora

$$P_r\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq \varepsilon\right) \leq e^{-t\varepsilon} \prod_{i=1}^{2} e^{t^2 \frac{(b_i - a_i)^2}{8}} \qquad \forall\, t \geq 0$$

Oss **Confronto fra Hoeffding e Chebishev**

Considerando una sequenza di v.a. Bernoulliane di parametro $p = \frac{1}{2}$, $n = 100$ ed $\varepsilon = 0{,}2$

Mettendo a confronto le due disuguaglianze otteniamo che

$$P_r\left\{|\overline{Y}_n - p| > 0{,}2\right\} \leq \begin{cases} \dfrac{Var(\overline{Y}_n)}{\varepsilon^2} = \dfrac{1}{4n\varepsilon^2} \approx 0{,}0625 & \text{Chebishev} \\[2ex] 2e^{-2 \cdot 100 \cdot (0{,}2)^2} \approx 0{,}00067 & \text{Hoeffding} \end{cases}$$

Disuguaglianza di Gordon-Mill

Sia $Z \sim N(0,1)$

Allora

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{t}{1+t^2} e^{-\frac{t^2}{2}} \leq P_r(Z \geq t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t} e^{-\frac{t^2}{2}}$$