Norme vettoriali

Introduzione

Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{con soluzione } \underline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo di avere 2 approssimazioni della soluzione $\underline{x}$:

$$y = \begin{bmatrix} 2,99972 \\ 1,00023 \\ 1,00030 \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} 3,00027 \\ 0,99971 \\ 0,99955 \end{bmatrix}$$

Come possiamo stabilire quale fra y e z e' più vicino ad x?

Occorre introdurre un concetto di distanza sullo spazio dei vettori e misurare la distanza di $\underline{y}$ e $\underline{z}$ da $\underline{x}$, quello che dista meno sara' il più vicino

???

Def → **norma vettoriale**

Una funzione $\|\cdot\|: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ si dice che soddisfi 3 proprietà

a) positività:

$$\|x\| \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n \text{ e } \|\underline{x}\| = 0 \iff \underline{x} = 0$$

b) omogeneità

$$\|\alpha \underline{x}\| = \|\alpha\| \cdot \|\underline{x}\| \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C} \text{ e } \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$$

c) disuguaglianza triangolare:

$$\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\| \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^n$$

Data una norma vettoriale $\|\cdot\|: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, definiamo la distanza fra due vettori come:

$$\|\underline{x} - \underline{y}\| \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^n$$

Norme importanti in $\mathbb{C}^n$

- Norma 1:

$$\|\underline{x}\|_1 = |x_1|+|x_2|+\dots+|x_n| \rightsquigarrow \|\underline{x}-\underline{y}\|_1 = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\dots+|x_n-y_n|$$

- Norma 2:

$$\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+\dots+|x_n|^2} \rightsquigarrow \|\underline{x}-\underline{y}\|_2 = \sqrt{|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2+\dots+|x_n-y_n|^2}$$

- Norma ∞:

$$\|\underline{x}\|_\infty = \max(|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|) \rightsquigarrow \|\underline{x}-\underline{y}\|_\infty = \max(|x_1-y_1|,\dots,|x_n-y_n|)$$

Tornando all'esempio introduttivo calcoliamo le distanze

$$\underline{x}-\underline{y} = \begin{bmatrix} 0{,}00028 \\ -0{,}00023 \\ -0{,}00030 \end{bmatrix} \qquad \underline{x}-\underline{z} = \begin{bmatrix} -0{,}00027 \\ 0{,}00028 \\ 0{,}00045 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \|\underline{x}-\underline{y}\|_\infty &= 0{,}00030 \\ \|\underline{x}-\underline{z}\|_\infty &= 0{,}00045 \end{aligned}$$

Quindi $\underline{y}$ e' più vicino ad $\underline{x}$ rispetto a $\underline{z}$

Teorema $\rightsquigarrow$ equivalenza delle norme

Tutte le norme vettoriali in $\mathbb{C}^n$ sono equivalenti, nel senso che se prendiamo 2 norme vettoriali $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|'': \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ allora si ha:

$$\alpha \|\underline{x}\|'' \le \|\underline{x}\|' \le \beta \|\underline{x}\|'' \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$$

dove $\alpha, \beta > 0$ sono costanti indipendenti da $\underline{x}$

Verifichiamo che $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono equivalenti: $\quad \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$

con $\alpha = 1$ e $\beta = n$ $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono equivalenti nel caso in cui $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|'' = \|\cdot\|_\infty$

con $\alpha = \frac{1}{n}$ e $\beta = 1$ $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono equivalenti nel caso in cui $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|'' = \|\cdot\|_1$

Successioni di vettori

Una successione di vettori $\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(1)}, \dots$ in $\mathbb{C}^n$ si dice convergente al vettore $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$ rispetto alla norma $\|\cdot\|$ se:

$\|\cdot\|$ se $\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\| \longrightarrow 0$

Poiche' tutte le norme vettoriali sono equivalenti, se una successione di vettori converge a $\underline{x}$ rispetto ad una norma $\|\cdot\|$ allora converge a $\underline{x}$ rispetto a tutte le norme

Dim

Supponiamo che $\underline{x}^{(k)} \longrightarrow \underline{x}$ rispetto alla norma $\|\cdot\|$ e sia $\|\cdot\|'$ un'altra norma

Poiche' $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ sono equivalenti, esistono 2 costanti $\alpha, \beta > 0$ t.c.

$$\alpha \|\underline{y}\| \leq \|\underline{y}\|' \leq \beta \|\underline{y}\| \quad \forall \underline{y} \in \mathbb{C}^n$$

Allora:

$\underline{x}^{(k)} \longrightarrow \underline{x}$ in $\|\cdot\|$

$$\alpha \|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\| \leq \|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\|' \leq \beta \|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\| \quad \forall k \geq 0$$

Siccome $\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\| \longrightarrow 0$ deduciamo dal teo carabinieri che $\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\| \longrightarrow 0$

$\underline{x}^{(k)} \longrightarrow \underline{x}$ rispetto a $\|\cdot\|$

Def

componente per componente

Una successione di vettori $\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(1)}, \dots$ in $\mathbb{C}^n$ si dice convergente al vettore $\underline{x}$ in $\mathbb{C}^n$ se $\underline{x}^{(k)} \longrightarrow \underline{x}$ componente per componente cioe' se:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} \longrightarrow x_1 \\ x_2^{(k)} \longrightarrow x_2 \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \longrightarrow x_n \end{cases} \iff \begin{cases} |x_1^{(k)} - x_1| \longrightarrow 0 \\ |x_2^{(k)} - x_2| \longrightarrow 0 \\ \vdots \\ |x_n^{(k)} - x_n| \longrightarrow 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \max\left(|x_1^{(k)} - x_1|, |x_2^{(k)} - x_2|, \dots, |x_n^{(k)} - x_n|\right) \longrightarrow 0 \iff \|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\|_\infty \longrightarrow 0$$

Conclusione

componente per componente

La convergenza comp. per comp. altro non e' che la convergenza in $\|\cdot\|_\infty$

Dunque, ricordando l'equivalenza delle norme e il risultato dim. sopra, dire che $\underline{x}^{(k)} \longrightarrow \underline{x}$ e' lo stesso che dire $\underline{x}^{(k)} \longrightarrow \underline{x}$ per qualsiasi norma