Teorema del limite centrale (CLT)

Siano $\{X_i\}_{i=1,\dots,n} \sim$ iid. con

$E[X_i] = \mu$,

$Var(X_i) = \sigma^2$

$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Allora

Gaussiana

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} \xrightarrow[d]{} N(0,1)$$

Puo' anche essere riscritto come

Abbiamo portato la radice sotto

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \xrightarrow[d]{} N(0,1)$$

In generale vale la relazione

$$\frac{\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} \xrightarrow[d]{} N(0,1)$$

CLT di Lindberg e Lévy

non identicamente distribuite

Sia $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ una sequenza di v.a. indipendenti su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ con:

$E[X_i^2] < \infty$, $E[X_i] = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$

Se $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ soddisfa la condizione necessaria e sufficiente di Lindberg

la somma delle v.a. che si discostano molto dal valore atteso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i^2\, \mathbb{1}_{\{X_i^2 > \varepsilon\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}\}}\right] = 0 \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Allora

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n}\mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2}} \xrightarrow[d]{} N(0,1)$$

Condizione di Lyapunov

Sia $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ una successione di v.a. indipendenti con $E[X_i^2] < \infty$

Definiamo

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

Se vale la condizione sufficiente di Lyapunov

si sta richiedendo che i momenti di ordine 2+δ siano piccoli rispetto alla varianza

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{S^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{n} E[|X_i|^{2+\delta}] = 0 \qquad \forall \delta > 0$$

Allora vale il CLT

Oss

Le condizioni di Lyapunov e di Linberg presentano sostanziali differenze dalle condizioni del teo. classiche

	CLT classico	Lindberg	Lyapunov
Tipo di v.a	i.i.d.	indipendenti ma non identicamente distribuite	indipendenti ma non identicamente distribuite
Momenti richiesti	$E[X_i^2] < \infty$	$E[X_i^2] < \infty$	$E[X_i^{2+\delta}] < \infty$ per $\delta > 0$
Interpretazione intuitiva	Le v.a. sono iid. con var. finita	Gli estremi contribuiscono in modo trascurabile alla varianza totale	Controlla la coda della distribuzione
Restrittività	Molto restrittivo a causa di i.i.d.	La più generale	Più forte di Lindberg ma più semplice da verificare

Oss relazione fra legge dei grandi numeri e CLT

Consideriamo il seguente caso per studiare la relazione fra legge dei grandi numeri e CLT

Siano

$\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ sequenza di v.a. su $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

con $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n$ quindi $\boxed{\sum_{i=1}^{n} X_i = O_p(\sqrt{n})}$

Per la legge dei grandi numeri sappiamo che dividendo la sequenza per n abbiamo

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[p]{} 0$$

Moltiplicando poi la sequenza di un fattore $\sqrt{n}$ abbiamo il CLT

$$\sqrt{n}\,\overline{X}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[d]{} N(0,1)$$