

Metodo dei momenti

Per la stima di $E[X_i] = \mu$ abbiamo usato la media empirica

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Per quanto riguarda la varianza $E[(X - \mu)^2] = \sigma^2$ abbiamo usato

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

Per generalizzare questo concetto e' stato creato il metodo dei momenti

Idea

Sia X_1, \dots, X_n un campione aleatorio estratto con una legge di probabilita' P_θ con $\theta = \{\theta_1, \dots, \theta_k\}$

Supponiamo che questa legge ammetta k momenti finiti

$$\mu_{\bar{j}} = E[X^{\bar{j}}] \quad \text{con } \bar{j} = 1, \dots, k$$

Chiamiamo ora $\tilde{\mu}_{\bar{j},n}$ i momenti empirici definiti come

$$\tilde{\mu}_{\bar{j},n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{\bar{j}} \quad \text{con } \bar{j} = 1, \dots, k$$

L'idea di fondo e' di scegliere il valore dei parametri $\theta_1, \dots, \theta_k$ in modo che valga

$$\tilde{\mu}_{1,n} = \mu_1(\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_k) \quad \rightarrow \text{sono i } k \text{ parametri stimabili}$$

$$\tilde{\mu}_{2,n} = \mu_2(\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_k)$$

\vdots

$$\tilde{\mu}_{k,n} = \mu_k(\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_k)$$

$g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ differenziabile, invertibile e anche g^{-1} e' differenziabile

Teo

Sia $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ un diffeomorfismo tale che

$$g(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \quad \rightarrow g(\mu_i) = \theta_i$$

Allora lo stimatore del metodo dei momenti e' definito da

$$(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_k) = g(\tilde{\mu}_{1,n}, \tilde{\mu}_{2,n}, \dots, \tilde{\mu}_{k,n}) \quad \rightarrow g(\tilde{\mu}_{i,n}) = \tilde{\theta}_i$$

Proprietà dello stimatore

Per determinare le proprietà dello stimatore bisogna rafforzare le ipotesi

Proposizione

Ponendo la sequenza X_1, \dots, X_n iid. e con i primi $2k$ momenti definiti

Allora vale

a) Consistenza dei momenti empirici

$\rightarrow X_1, \dots, X_n$ iid. e $E[X_i^2] < \infty$

Sotto le nuove ipotesi vale la legge forte dei grandi

Allora

$$\tilde{\mu}_{j,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^j \xrightarrow{p} \mu_j$$

Quindi

$$\tilde{\mu}_{1,n} \xrightarrow{p} \mu_1, \tilde{\mu}_{2,n} \xrightarrow{p} \mu_2, \dots, \tilde{\mu}_{k,n} \xrightarrow{p} \mu_k$$

b) Consistenza dello stimatore dei momenti

Sotto le stesse hp del punto a vale la legge dei grandi numeri vettoriale

Allora

$$(\tilde{\mu}_{1,n}, \dots, \tilde{\mu}_{k,n}) \xrightarrow{p} (\mu_1, \dots, \mu_k)$$

\rightarrow Se $Y \xrightarrow{p} y$ e g continua $\Rightarrow g(Y) \xrightarrow{p} g(y)$

Essendo g continua possiamo applicare Slutsky

Quindi

$$g(\tilde{\mu}_{1,n}, \dots, \tilde{\mu}_{k,n}) \xrightarrow{p} g(\mu_1, \dots, \mu_k)$$

c) Asintotica gaussiana dei momenti empirici

Sapendo che i primi $2k$ momenti possiamo applicare il CLT multivariato

Per cui

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_{1,n} - \mu_1, \dots, \tilde{\mu}_{k,n} - \mu_k \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N(0, \Omega)$$

con Ω indicante la matrice di Var. e Covarianza della forma

$$\Omega[i, j] = \text{Cov}(X^i, X^j) = E[X^i X^j] - \mu_i \mu_j$$

\rightarrow Per questo abbiamo definito i primi $2k$ momenti

d) Asintotica gaussiana dello stimatore dei momenti

Averlo posto g differenziabile possiamo applicare il metodo delta multivariato

Definiamo ora DG come la matrice delle derivate parziali

$$DG = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \end{pmatrix} = \bar{J}(g(\nu))$$

Quindi abbiamo

$$\sqrt{n} \left(g(\tilde{\mu}_n) - g(\nu) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left(0, DG^T \Sigma DG \right)$$

Esempi

Supponiamo di avere un campione aleatorio di variabili i.i.d. con legge Gamma di parametri α, β

Ovvero con densità

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x)}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Sapendo che

$$\mu_1 = E[X_1] = \alpha\beta$$

$$\mu_2 = E[X_1^2] = (\alpha\beta)^2 + \alpha\beta^2 = \alpha\beta^2(\alpha+1)$$

$$\text{Var}(X_1) = \alpha\beta^2$$

Possiamo quindi scrivere β e α in funzione di μ_1 e μ_2

$$\alpha = \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha \beta^2} = \frac{\mu_2}{\mu_1^2}$$

$$\beta = \frac{(\alpha\beta)^2 + \alpha\beta^2 - (\alpha\beta)^2}{\alpha\beta} = \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\mu_1}$$

Per tanto possiamo scrivere lo stimatore dei momenti come

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{m_2 - m_1^2} \\ \frac{m_2 - m_1^2}{m_1} \end{pmatrix}$$

dove la matrice Jacobiana e'

$$\bar{J}_g(\mu_1(\alpha, \beta), \mu_2(\alpha, \beta)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial m_1} & \frac{\partial \alpha}{\partial m_2} \\ \frac{\partial \beta}{\partial m_1} & \frac{\partial \beta}{\partial m_2} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial m_1} = \frac{2m_1(m_2 - m_1)(-m_1^2)}{(m_2 - m_1^2)^2} = \frac{2m_1 m_2}{(m_2 - m_1^2)^2}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial m_2} = \frac{m_1^2(m_2)}{(m_2 - m_1^2)^2} = \frac{-m_1^2}{(m_2 - m_1^2)^2}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial m_1} = \frac{-2m_1 - (m_2 - m_1^2)}{(m_1)^2} = -\frac{m_1^2 + m_2}{m_1^3}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial m_2} = \frac{1}{m_1}$$

)))