Metodo di massima verosimiglianza

Funzione di densità $\rightsquigarrow$ continuo

Funzione di prob. $\rightsquigarrow$ discreto

Def

Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione aleatorio con legge f_θ con $\theta \in \mathbb{R}^p$

La funzione di verosimiglianza $L: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ e' definita come

$$L(\theta; X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta) = f(X_1, \dots, X_n; \theta)$$

da considerare differenti in quanto la prima e' univariata e la seconda e' congiunta

Oss

La verosimiglianza L e' funzione del parametro prendendo i valori di $X_1, \dots, X_n$ come dati

Mentre la densità congiunta prende il parametro θ come dato ed e' funzione dei possibili valori di X_i

Inoltre abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n; \theta) \, dx_1, \dots, dx_n = 1$$

e' una densità

Però non possiamo dire nulla su

$$\int_{\mathbb{R}^n} L(\theta; X_1, \dots, X_n) \, d\theta$$

Def Stimatore di massima verosimiglianza

Data L una funzione di massima verosimiglianza

Sia $\tilde{\theta}_{ML}$ lo stimatore di massima verosimiglianza definito come

calcolarne la log non ne modifica il max

$$\tilde{\theta}_{ML} = \arg\max_{\theta} L(\theta; X_1, \dots, X_n)$$

il parametro che massimizza L

Es ①

denotiamo p con θ

Sia $X_1, \dots, X_n \sim Ber(\theta)$ un campione aleatorio di variabili bernoulliane

dove

$$X_i = \begin{cases} 1 & \theta \\ 0 & 1-\theta \end{cases}$$

La funzione di verosimiglianza sarà della forma

$$L(\theta; X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{X_i}(1-\theta)^{n-X_i} = \theta^{\sum_{i=1}^{n} X_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

Calcoliamo la log verosimiglianza

$$\log L = \log\left(\theta^{\sum_{i=1}^{n} X_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = \log\left(\theta^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) + \log\left((1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} X_i \log(\theta) + \left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right)\log(1-\theta)$$

Per calcolarne il valore massimo dobbiamo studiare quando la derivata vale 0

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\theta} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} X_i}{1-\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \cancel{\theta \sum_{i=1}^{n} X_i} - n\theta + \cancel{\theta \sum_{i=1}^{n} X_i}}{\theta(1-\theta)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta}{\theta(1-\theta)} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i = n\tilde{\theta} \Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Es ②

Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione aleatorio di variabili esponenziali $X_1, \dots, X_n$ con densità

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{con } x \geq 0$$
$$= \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \quad \text{con } x \geq 0$$

Calcoliamo ora L:

$$L = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

Calcolando $\log L$ abbiamo

$$\log L = n \log(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Deriviamo e poniamo a 0

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow \tilde{\lambda}_{ML} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

Es ③

Sia il campione aleatorio $X_1, \dots, X_n \sim$ i.i.d. $N(\mu, \sigma^2)$

> la densità di una v.a. Gaussiana varia in base a μ e σ^2
>
> Ad esempio
>
> $N(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}X}$
>
> $N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{X-\mu}{\sigma}}$

Allora vale

$$L(\mu, \sigma^2; X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Calcolando la $\log L$ abbiamo

$$\log L = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$$

Calcoliamone ora il max derivando parzialmente per entrambi i parametri

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} - \frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} = 0 + 0 - \frac{1}{2\sigma^2}\left(-2\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{\mu}_{ML} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} - \frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} = 0 - \frac{n}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}-\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^4}\right) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\tilde{\mu}_{ML})^2 \Rightarrow \boxed{\tilde{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)}$$