# Simulación del experimento de fotones emitidos por una fuente láser

Cirino Adrian Medina Rodriguez, Gustavo Jafet Flores Lozornio,
Oscar Alejandro Ibañez Martínez, Samuel González Palao
*Facultad de Ciencias*
*Universidad Nacional Autónoma de México*
(Dated: 16 de enero de 2021)

En el siguiente trabajo simulamos computacionalmente una fuente de luz láser, a través de números aleatorios, la cual lanza un promedio de $1 \times 10^5$ fotones por segundo. Además utilizamos una ventana mínima de conteo de fotones de $1 \times 10^{-7}s$, la cual fuimos aumentando. Al final obtuvimos que el comportamiento estadístico de la simulación, sin importar el tiempo de conteo, es aleatorio y por tanto sigue una distribución de Poisson.

Keywords: Simulación, fotones, números aleatorios, Poisson

## I. INTRODUCCIÓN

Para entender mejor lo que se esta tratando de mostrar definamos que es un experimento aleatorio; supongamos que tenemos un experimento del cual no sabemos, con certeza, su resultado final, pero si conocemos todos los posibles resultados de dicho experimento, a este experimento lo llamaremos aleatorio pues no podemos modelarlo de manera determinista; al conjunto de resultados lo denotaremos **espacio muestral** $S$; luego decimos que $P[x]$ se refiere a la medida de probabilidad de observar un evento $x$.

Sí tenemos un experimento aleatorio con un espacio muestral asociado $S = \{1, 2, 3, ..., N\}$ tal que cada $i \in S$ es un posible resultado del experimento y suponemos que cada uno de estos eventos (pensemos en ellos como estados de un sistema) son igual de probables ($P[1] = P[2] = ... = P[N]$): se puede definir una medida de probabilidad clásica como:

$$P[x] = \frac{Posibles\ resultados\ con\ x}{Posibles\ resultados\ en\ S}. \tag{1}$$

Entonces como supusimos que todos los eventos son igual de probables: hemos definido la probabilidad de un evento $x$ igual a la proporción de los puntos en $S$ que contienen a $x$.

Ahora que hemos definido una probabilidad clásica, pasemos a hablar de las variables aleatorias y de las densidades de probabilidad; se dice una variable aleatoria a una función que asigna un valor (normalmente numérico) al resultado de un experimento aleatorio; luego una variable aleatoria discreta $X$ es una función que asigna valores discretos a los resultados de un experimento aleatorio tal que:

$$p(a) = P[X = a], \tag{2}$$

donde $P[X]$ se refiere a la función de densidad de probabilidad asociada a la distribución de la variable aleatoria $X$: esta función de densidad nos da la probabilidad de que la variable discreta aleatoria $X$ sea exactamente igual al valor $a$. Para ilustrarlo mejor tomemos el siguiente ejemplo: lanzamos una moneda al aire, donde evidentemente este "experimento aleatorio"solo puede resultar de dos formas: la moneda cae par (le damos la variable aleatoria $X = 0$) o impar (le damos la variable aleatoria $X = 1$), cada resultado con probabilidad $p$. Se dice que esta variable aleatoria $X$ se distribuye con una función de densidad de probabilidad

$$f(x;p) = p^x(1-p)^x$$

. ¿Que pasa si queremos lanzar la moneda n veces? Bueno, ahora tendremos n lanzamientos con hasta n posibles " éxitos" a este tipo de variables aleatorias las llamamos Binomiales y simplemente nos dicen la probabilidad de $m$ éxitos en $n$ experimentos: en este caso, la variable aleatoria $X$ tiene función de densidad de probabilidad

$$f(x;p,n) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^x. \tag{3}$$

Sí la probabilidad de observar $x$ se vuelve muy pequeña tal que $np < 1$ cuando $n >> 1$ se puede llevar a la ecuación 3[1] a:

$$f(x;\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \tag{4}$$

Donde $\lambda$ es igual al promedio. A las variables aleatorias con dicha distribución se les dice de Poisson y se entiende que describen eventos con baja probabilidad de ocurrir. Esta distribución fue descrita por primera vez por el matemático francés S. D. Poisson en 1837[1].

Ahora, tenemos que desde el punto de vista de la física clásica, consideramos a la luz como una onda electromagnética. Teóricamente, el tipo de luz más estable es aquella que tiene una coherencia perfecta. Un láser unimodal es un buen ejemplo de dichas fuentes. Por otro lado, la mecánica cuántica trata a la luz como flujo de fotones. Definimos el flujo de fotones $\Phi$ como el número promedio de fotones pasando a través de la sección transversal **A** del rayo por unidad de tiempo. Podemos calcular $\Phi$ dividiendo el flujo de energía entre la energía de cada fotón:

$$\Phi = \frac{IA}{\hbar\omega} = \frac{P}{\hbar\omega} fotones \cdot s^{-1}, \quad (5)$$

donde P es la potencia del haz de luz.

La ecuación 5 nos da las características promedio del haz. Sin embargo, un haz de luz con un flujo de fotones promedio bien definido presenta variaciones en el número de fotones en intervalos pequeños de tiempo. Entonces, aunque el promedio del flujo de fotones tenga un valor prácticamente fijo, el número de fotones en escalas de tiempo cortas, tendrá fluctuaciones, haciéndose más evidente entre menor sea la ventana de tiempo que tomemos. Por lo tanto, hay que realizar una estadística de fotones para describir estas fluctuaciones.

Como ya mencionamos, un láser unimodal es un ejemplo de una fuente de luz estable, no obstante, el haz que sale no consta de fotones con intervalos de tiempo regulares entre ellos. Por el contrario, los fotones que provienen de fuentes de luz que con coherencia perfecta e intensidad constante siguen la estadística de Poisson dada por 4, sin importar la ventana de tiempo que se utilice. Esto quiere decir que la naturaleza estadística de estas fuentes de luz es aleatoria. [2]

Una propiedad muy importante de la distribución de Poisson es que el promedio poblacional de la distribución es igual al valor de la varianza.:

$$\lambda = \sigma^2. \quad (6)$$

De aquí, podemos aprovechar el índice de dispersión, que se define como:

$$D = \frac{\sigma^2}{\lambda}, \quad (7)$$

se interpreta como una medida de dispersión para una distribución de probabilidad, en el caso de una variable aleatoria Poisson, como se ve de la ecuación anterior, esté factor debe de ser igual a 1. Luego del índice de dispersión se puede derivar el Factor de Fano, que simplemente es el indice de dispersión para un experimento aleatorio medido en una ventana de tiempo $w$

$$f = \frac{\sigma_w}{\sqrt{\lambda_w}} \quad (8)$$

Entonces usaremos a 8 como un valor de referencia para determinar si la muestra aleatoria obtenida de la simulación se puede considerar como de Poisson.

En este trabajo simularemos de manera computacional este tipo de fuente de luz incidiendo sobre un contador de fotones..

## II. DESARROLLO Y MÉTODOS

Se quiere mostrar, mediante una simulación, que el conteo de fotones individuales se puede aproximar como un evento aleatorio, específicamente como una variable aleatoria de tipo Poisson: para esto, se hizo un código en Python que hiciera de detector de fotones individuales para diferentes intervalos de tiempo. Primero se elaboró un criterio de detección "aleatorio" de fotones, esto mediante un número `P` definido como la probabilidad de observar un fotón dado un intervalo de tiempo predeterminado: pensemos que tenemos un promedio de 100000 fotones por segundo, y que nuestro "detector" puede detectar un fotón cada $\frac{1}{10000000}$ segundos, luego pensando en cómo definimos la medida de probabilidad clásica (ver ecuación 1) donde la probabilidad está asociada al número de eventos de interés sobre el número de eventos posibles; podemos definir al número $\texttt{P} = \frac{100000}{10000000}$ [1] y será la probabilidad de detectar un fotón con nuestro detector si suponemos una cadena uniforme de fotones.

En este caso, nuestra fuente de fotones individuales, es un número aleatorio `n = random.random()`, el cual, lazaba los "fotones" hacia el "detector", y esté, con un `if` que comparaba al número `n = random.random()` contra la probabilidad (`P`) determinaba el éxito en la detección del fotón. Al final de este proceso (que se realizó 10000000 veces, pues se supone que esto pasa en un segundo) obtuvimos un contador `C` con el total de fotones detectados. Como `C` representa a los fotones detectados sobre una línea de tiempo (un vector de ceros y unos), pudimos establecer "ventanas" de conteo que tomaban la serie de tiempo de la detección y contaban en intervalos determinados el número de fotones en estas ventanas, con lo que obtuvimos un nuevo vector, tal que para este nuevo vector, su i-ésima entrada era el número de fotones obtenidos en el i-ésimo intervalo de conteo establecido por la "ventana" dentro de la serie de tiempo; ya con esta información, se pudo elaborar un histograma de incidencia de conteo, la cual nos interesa determinar si se comporta como una variable aleatoria.

## III. DISCUSIÓN Y RESULTADOS

En la figura 1 se muestran los histogramas de las simulaciones para diferentes tamaños de ventana, así mismo se le asocia una distribución tipo Poisson tomando el valor de $\lambda = \bar{n}$ de donde $\bar{n}$ es el promedio poblacional de las

[1] Para ver esto de manera más simple, pensemos en un juego con 10000000 agujeros, en el cual lanzamos 100000 canicas, de modo que todas las canicas caen en un agujero, si queremos la probabilidad de que un agujero esté ocupado (ver un fotón), simplemente necesitamos contar los eventos de interés (acertar todos los lanzamientos) y dividirlos sobre el número de eventos posibles (número de agujeros).

simulaciones realizadas , es notable cómo a medida que en número de ventana es mayor la probabilidad disminuye , otra manera de verlo es a mayor $\bar{n}$ menor es la probabilidad.

En la tabla I se muestran las diferentes medidas estadísticas dadas las distribuciones realizadas por la simulación para diferentes tiempos de conteo, estas medidas son promedio $\bar{n}$, varianza $\sigma^2$ y desviación estándar $\sigma$. Notemos que con los valores de I de nuestro experimento, la propiedad de la ecuación 6 se cumple con al menos con dos cifras significativas.Entonces nos sugiere que el experimento es descrito por una distribución de Poisson.

En la ultima columna de la tabla se tienen los valores para el factor de Fano 8. Para nuestros resultados esta propiedad también se cumple, lo cual nos sugiere aún con más peso que el proceso es aleatorio , en particular un proceso tipo Poisson.

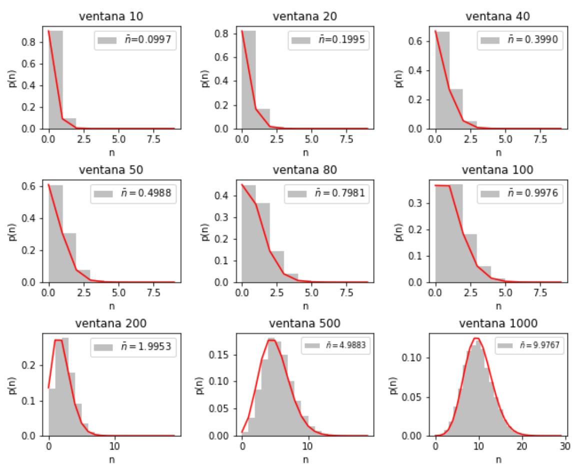


Figura 1. Histogramas de las simulaciones para diferentes ventanas de conteo con su distribución asociada.

| ventana | $\bar{n}$ | $\sigma^2$ | $\sigma$ | Factor de Fano |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 0.099 | 0.098 | 0.314 | 0.994 |
| 20 | 0.199 | 0.197 | 0.444 | 0.994 |
| 40 | 0.399 | 0.394 | 0.627 | 0.993 |
| 50 | 0.498 | 0.493 | 0.702 | 0.994 |
| 80 | 0.798 | 0.788 | 0.887 | 0.993 |
| 100 | 0.997 | 0.981 | 0.990 | 0.991 |
| 200 | 1.995 | 1.964 | 1.407 | 0.992 |
| 500 | 4.988 | 4.934 | 2.221 | 0.994 |
| 1000 | 9.976 | 9.983 | 3.159 | 1.000 |

Cuadro I. valores de promedio, varianza, desviación estándar y factor de fano para distribuciones con diferente ventana de conteo.

## IV. CONCLUSIONES.

Con base en los resultados obtenidos y mostrados en los histogramas de la figura 1, podemos ver un comportamiento tipo Poisson como se esperaba. Podemos decir que el comportamiento de esta simulación fue aleatorio y mientras de mayor tamaño era la ventana, mayor era la aproximación al comportamiento Poissoniano.

Siguiendo los parámetros establecidos para la creación de estas simulaciones no se puede asegurar que en el experimento real las distribuciones teóricas sean tan cercanas a los valores experimentales , recordemos que al menos para el lenguaje de programación Python los números aleatorios no lo son del todo , se le conoce como pseudoaleatorios y siempre se tiene que tener en consideración este hecho pues resulta siendo determinista y pierde su factor de aleatoriedad comparado con la detección de un fotón en un periodo temporal.

Resulta un acercamiento bastante claro acerca del proceso aleatorio en experimentos sobre detección de fotones o similares , dando una idea inferencial sobre qué valores esperar para cuando se lleve a cabo un experimento real.

## Apéndice A: Código en python para la simulación del experimento

```
import random
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def divisor_de_haz(fotones,tiempo):
    cuenta_lista=[]
    valor_lista=[]
    cuenta=0
    proba=fotones/tiempo
    for i in range(tiempo):
        x=random.random()
        if x < proba:
            valor=1

        else:
            valor=0
        cuenta+=valor
        cuenta_lista.append(cuenta)
        valor_lista.append(valor)
    return [valor_lista,cuenta_lista]

def contador(prueba,paso):
    a=[]
    inicio=0
    final =inicio+paso
    while final<=len(prueba):
        a.append(sum(prueba[inicio:final]))
        inicio=inicio+paso
```

```
        final=final+paso
    return a

def frecuencias(a,rango):
    frecuencias=[]
    for i in range(rango):
        frecuencias.append(a.count(i))
    return np.array(frecuencias)

def poiss(promedio,k):
    p = []
    for i in range(k):
        p.append(((promedio**i)
        *np.exp(-promedio))
        /np.math.factorial(i))
    return p

prueba=divisor_de_haz(100000,10000000)
```


[1] S. Ross, Upper Saddle River **6** (2009).
[2] M. Fox, *Quantum optics: an introduction*, Vol. 15 (OUP Oxford, 2006).


.