3장. 알고리즘의 성능

Contents

주요 내용

- 01 알고리즘 수행 시간이란
- 02 알고리즘 복잡도

학습목표

- 알고리즘 수행 시간의 의미를 단순한 예로 시작해서 이해하도록 한다.
- 알고리즘 복잡도를 표현하는 방법을 이해한다.
- 몇 가지 다른 관점으로 알고리즘 복잡도에 대해 직관적으로 이해한다.

01 알고리즘 수행 시간이란

알고리즘의 수행 시간

- 입력의 크기 n에 대해 시간이 얼마나 걸리는지로 표현한다
- 입력의 크기는 대부분 자명함
  - 정렬: 정렬할 원소의 수
  - 색인: 색인에 포함된 원소의 수

  …

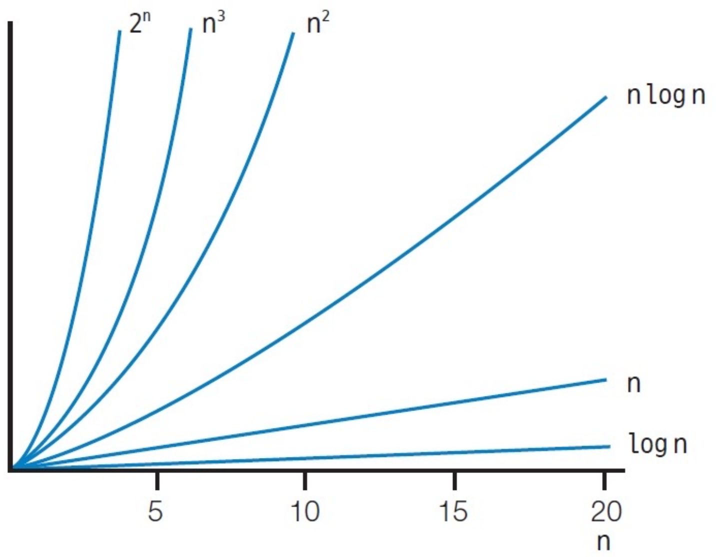


그림 3-1 여러 함수의 증가율과 점근적 개념

n	$0.1n^2$	$0.1n^2+n+100$
10	10	120
20	40	160
50	250	400
100	1,000	1,200
1,000	100,000	101,100

최고차항이 2차인 경우 n이 커지면
궁극적으로 2차 항이 지배한다.

알고리즘 수행 시간의 예

```
sample1(A[], n):
    k ← n/2
    return A[k]
```

상수 시간

```
sample2(A[], n):
    sum ← 0
    for i ← 0 to n-1
        sum ← sum + A[i]
    return sum
```

n에 비례하는 시간

```
sample3(A[], n):
    sum ← 0
    for i ← 0 to n-1
        for j ← 0 to n-1
            sum ← sum + A[i] * A[j]
    return sum
```

n^2에 비례하는 시간

```
sample4(A[], n):
    sum ← 0
    for i ← 0 to n-1
        for j ← 0 to n-1
            k ← A[0...n-1]에서 임의로 n/2개를 뽑은 것들 중 최댓값
            sum ← sum + k
    return sum
```

n^3에 비례하는 시간

```
sample5(A[], n):
    sum ← 0
    for i ← 0 to n-2
        for j ← i+1 to n-1
            sum ← sum + A[i] * A[j]
    return sum
```

n^2에 비례하는 시간

```
factorial(n):
    if (n = 1) return 1
    return n* factorial(n- 1)
```

n에 비례하는 시간

02 알고리즘 복잡도

알고리즘 점근적 복잡도 표현

점근적 복잡도Asymptotic Complexity

입력의 크기가 충분히 클 때의 복잡도

직관적 맛보기

입력의 크기: n

알고리즘이 기껏해야 n^2에 비례하는 시간이 든다 $\longrightarrow O(n^2)$

알고리즘이 적어도 n^2에 비례하는 시간이 든다 $\longrightarrow \Omega(n^2)$

알고리즘이 항상 n^2에 비례하는 시간이 든다 $\longrightarrow \Theta(n^2)$

점근적 복잡도

O-표기

$O(n^2)$: 최고차항의 차수가 n^2을 넘지 않는 모든 함수의 집합

Ω-표기

$\Omega(n^2)$: 최고차항의 차수가 n^2보다 작지 않은 모든 함수의 집합

Θ-표기

$\Theta(n^2)$: 최고차항의 차수가 n^2인 모든 함수의 집합

O-표기

$O(f(n))$: 빅 오[Big Oh]

- 최고차항의 차수가 $f(n)$보다 작거나 같은 모든 함수
- 점근적 상한
- 예, $O(n)$, $O(n \log n)$, $O(n^2)$, $O(2^n)$, …
- $O(n^2) = \{n^2, 5n^2 + 7n + 12, 100n^2 - 2n + 9, n \log n + 5n, 3n + 9, 150, \ldots\}$

  \- 최고차항의 차수가 2차 이하인 모든 함수
- $5n^2 + 7n + 12 \in O(n^2)$ 으로 표기해야 하나 편의상 $5n^2 + 7n + 12 = O(n^2)$ 으로 표기함

Ω-표기

$\Omega(f(\mathrm{n}))$: 빅 오메가 Big Omega

- 최고차항의 차수가 $f(n)$보다 크거나 같은 모든 함수
- 점근적 하한
- 예, $\Omega(n)$, $\Omega(n \log n)$, $\Omega(n^2)$, $\Omega(2^n)$, …
- $\Omega(n^2) = \{n^2, 5n^2 + 7\mathrm{n} + 12, 100n^2 - 2\mathrm{n} + 9, n^3 + 5n, 7n^5 + n^3 + 9, 2^n, n!, \ldots\}$

  - 최고차항의 차수가 2차 이상인 모든 함수
- $5n^3 + 12 \in \Omega(n^2)$ 으로 표기해야 하나 편의상 $5n^3 + 12 = \Omega(n^2)$으로 표기함

Θ-표기

$\Theta(f(\mathrm{n}))$: 빅 세타 Big Theta

- 최고차항의 차수가 $f(n)$과 동일한 모든 함수
- 예, $\Theta(n)$, $\Theta(n \log n)$, $\Theta(n^2)$, $\Theta(2^n)$, …
- $\Theta(n^2) = \{n^2, 5n^2 + 7\mathrm{n} + 12, 100n^2 - 2\mathrm{n} + 9, \ldots\}$
- 최고차항의 차수가 2차인 모든 함수
- $5n^2 + 12 \in \Theta(n^2)$ 으로 표기해야 하나 편의상 $5n^2 + 12 = \Theta(n^2)$ 으로 표기함

표기법 사용 예

```
sample4(A[], n):
        sum ← 0
        for i ← 0 to n-1
                for j ← 0 to n-1
                        k ← A[0...n-1]에서 임의로 n/2개를 뽑은 것들 중 최댓값
                        sum ← sum + k
        return sum
```

알고리즘 sample4()의 수행 시간은 $\Theta(n^3)$이다

수학적 정의

$O(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists c > 0,\ n_0 > 1 \text{ s.t. } \forall n \geq n_0,\ f(n) \leq cg(n) \}$

조금 풀어서 표현하면

O(g(n)) = { f(n)| 충분히 큰 모든 n에 대해 f(n) ≤ cg(n)인 양의 상수 c가 존재한다}

✓ 점근적 복잡도를 수학적으로 증명할 때는 이런 방식의 정의가 필요하지만 자료구조 과목 수준에서는 앞의 직관적 정의로 충분하다

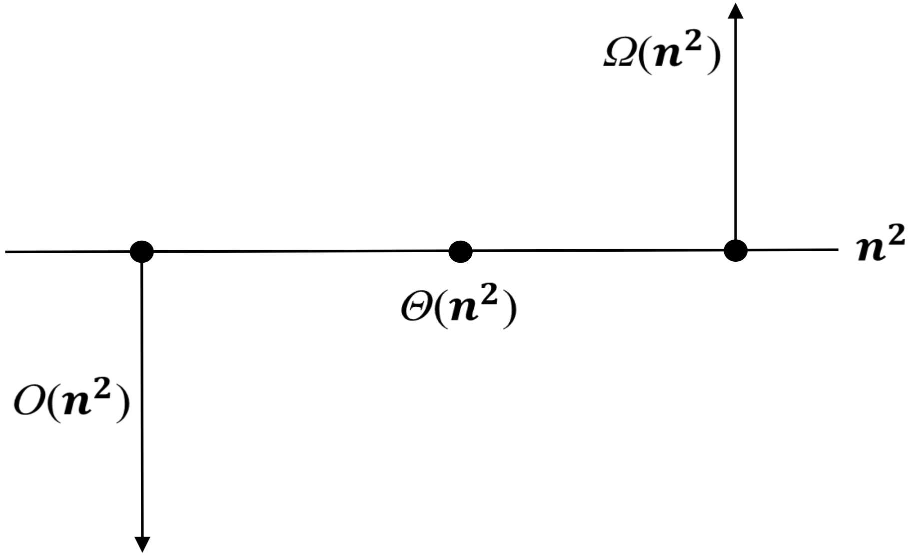
점근적 표기에서 =는 $\in$의 대용

어떤 알고리즘의 수행 시간 T(n) = O(nlogn)이라 하면
T(n) $\in$ O(nlogn)이란 뜻이다.

즉, T(n)은 O(nlogn)에 속하는 함수란 뜻이다.

그러므로, O(nlogn) = T(n)과 같은 표현은 적절하지 않다.

참고: 시각적 의미



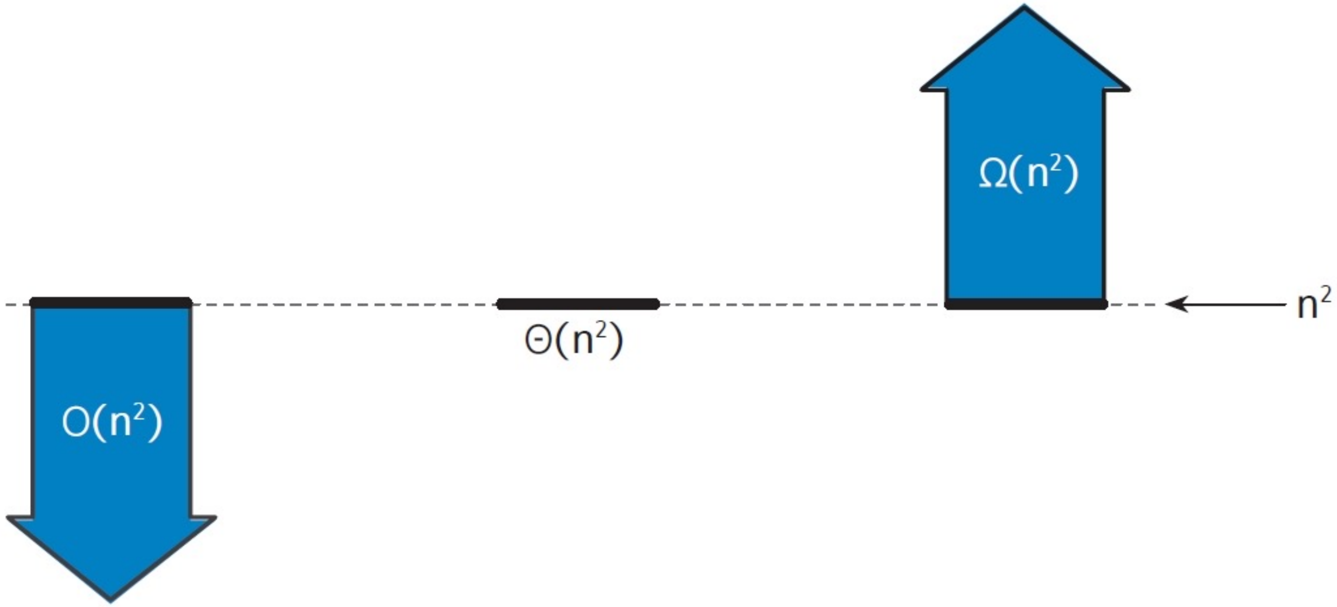


그림 3-3 점근적 표현의 시각적 설명

O, Ω, Θ 표기법 사용해 보기

```
alg1(A[], n):
    k ← n/2
    return A[k]
```

n에 관계없이 상수 시간이 소요된다
Ω(1)이기도 하고 O(1)이기도 하다
Θ(1): 가장 정확한 표현

```
alg2(A[], n):
    sum ← 0
    for i ← 0 to n-1
        sum ← sum + A[i]
    return sum
```

항상 n에 비례하는 시간이 소요된다
Ω(n)이기도 하고 O(n)이기도 하다
Θ(n): 가장 정확한 표현

O, Ω, Θ 표기법 사용해 보기

```
alg3(A[], n) :
    sum ← 0
    if (n이 홀수)
        for i ← 0 to n-1
            sum ← sum + A[i]
    return sum
```

최악의 경우 n에 비례하는 시간이 소요된다
최선의 경우 상수 시간이 소요된다
Ω(1)이고 O(n)이다
최선의 경우 Θ(1), 최악의 경우 Θ(n)이라고 말한다

```
alg4(A[], n):
    sum ← 0
    for i ← 0 to n-2
        for j ← i+1 to n-1
            sum ← sum + A[i] * A[j]
    return sum
```

항상 n^2에 비례하는 시간이 소요된다
$\Omega(n^2)$이기도 하고 $O(n^2)$이기도 하다
$\Theta(n^2)$: 가장 정확한 표현

연습문제 01

- 입력의 크기가 n일 때 다음 알고리즘의 수행 시간을 Θ- 표기법으로 나타내시오.

```
matrixMult(A[][], B[][], M[][], n):
     for i ← 1 to n
        for j ← 1 to n
           M[i, j] ← 0
           for k ← 1 to n
              M[i, j] ← M[I, j] + A[i, k] * B[k, j]
```

연습문제 02

- 입력의 크기가 n일 때 다음 알고리즘의 점근적 수행 시간을 O, Ω 표기법으로 각각 나타내시오. 단, random(1, 100)은 1부터 100까지의 정수 중 하나를 임의로 리턴한다. 평균 수행시간을 O, Ω 표기법으로 나타내시오.

```
sample(A[], n):
     for i ← 1 to n
       if (random(1, 100) <= 50)
           sum ← 0
           for j ← 1 to n
              sum ← sum + A[j]
```

연습문제 03

- 입력의 크기가 n일 때 다음 알고리즘의 점근적 수행 시간을 O-, Θ- 표기법으로 각각 나타내시오. 단, random(1, 100)은 1부터 100까지의 정수 중 하나를 임의로 리턴한다.

```
sample(A[], n):
     if (n = 1) return 1
     else if (random(1, 100) <= 50)
        sum ← 0
        for i ← 1 to n
           sum ← sum + A[i]
     sample(A, n-1)
```

연습문제 04

- 입력 크기가 n일 때 다음 알고리즘의 점근적 수행 시간은 얼마인가?

```
sample(A[], n):
     if (n = 1) return 1
     sum ← 0
     for i ← 1 to n
        sum ← sum + A[i]
     tmp ← sum + sample(A, n-1)
     return tmp
```

연습문제 05

- 이진 탐색 알고리즘의 시간 복잡도는?

```
binarySearch (A[], x, low, high) :
        // A: array,  x: search key,  low, high: array bounds
        if (low > high) return "Not found"
        mid ← (low + high)/2
        if (A[mid] < x) return binarySearch(A, x, mid+1, high)
        else if (A[mid] > x) return binarySearch(A, x, low, mid-1)
        else return mid
```

배열의 중앙에 있는 원소와 비교하고 나면
자신과 똑같지만 크기가 반이 되는 문제를
만난다. 즉, $T(n) = c + T(n/2)$
이런 식으로 크기를 반씩 줄여나가면
~$\log_2 n$번 만에 크기 1인 문제를 만나게 된다.
문제의 크기를 반으로 줄이는데 필요한 작업은
상수 시간이므로 최대 $\log_2 n$에 비례하는 시간에 끝난다.

수행 시간:
최악의 경우 $\Theta(\log n)$,
최선의 경우 $\Theta(1)$,
앞에 수식어 없이 그냥 말하면 $O(\log n)$

연습문제 06

■ 하노이 타워 시간복잡도는?

```
[4]  def move(n, src, tmp, dest):
       if n == 0:
         return
       move(n-1, src, dest, tmp)
       print("move %d from %c to %c" % (n, src, dest))
       move(n-1, tmp, src, dest)
```

연습문제 06

- 하노이 타워 시간복잡도는?

```
T(n) = 2T(n-1) + 1          … (1)
T(n-1) = 2T(n-2) + 1        … (2)

(2)를 (1)에 대입하면
T(n) = 2²T(n-2)+(2+1)

위와 같은 방식으로 계속해서 정리하면,
T(n) = 2ⁿ⁻¹T(1) + (2ⁿ⁻² + 2ⁿ⁻³ + … 2 + 1)

T(1) = 1 이므로
T(n) = 2ⁿ⁻¹ + 2ⁿ⁻² + … 2 + 1   … (3)

(3)은 공비가 2인 등비수열이 됨.
T(n) = 2ⁿ -1 = O(2ⁿ)
```

연습문제 07

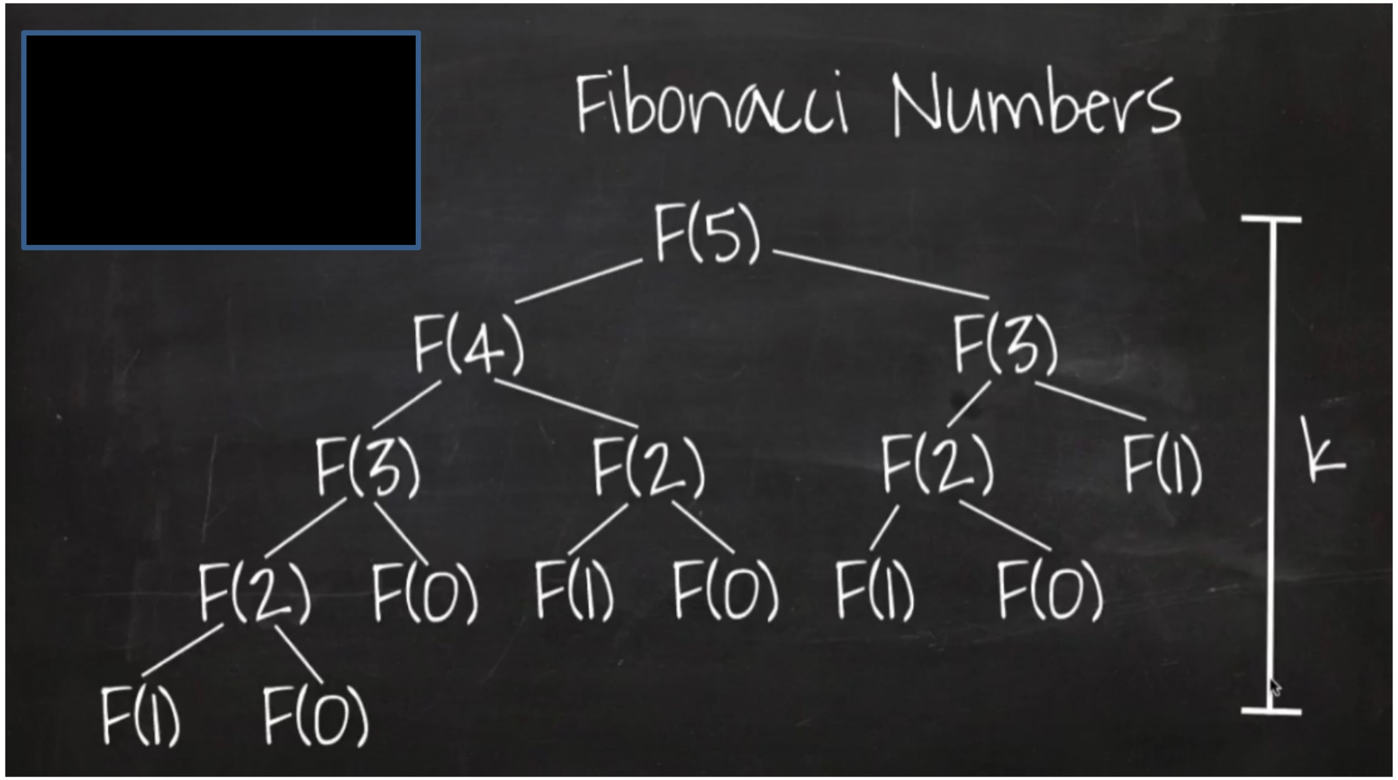
■ 피보나치 수열의 시간 복잡도는 (재귀버전) ?

알고리즘 2-2 피보나치 수열(재귀 버전)

```
fib(n):
    if (n = 1 or n = 2)
        return 1
    else
        return fib(n-1) + fib(n-2)
```

연습문제 07

- 피보나치 수열의 시간 복잡도는 (재귀버전) ?



Source: https://www.youtube.com/watch?v=VcCkPrGaKrs

연습문제 07

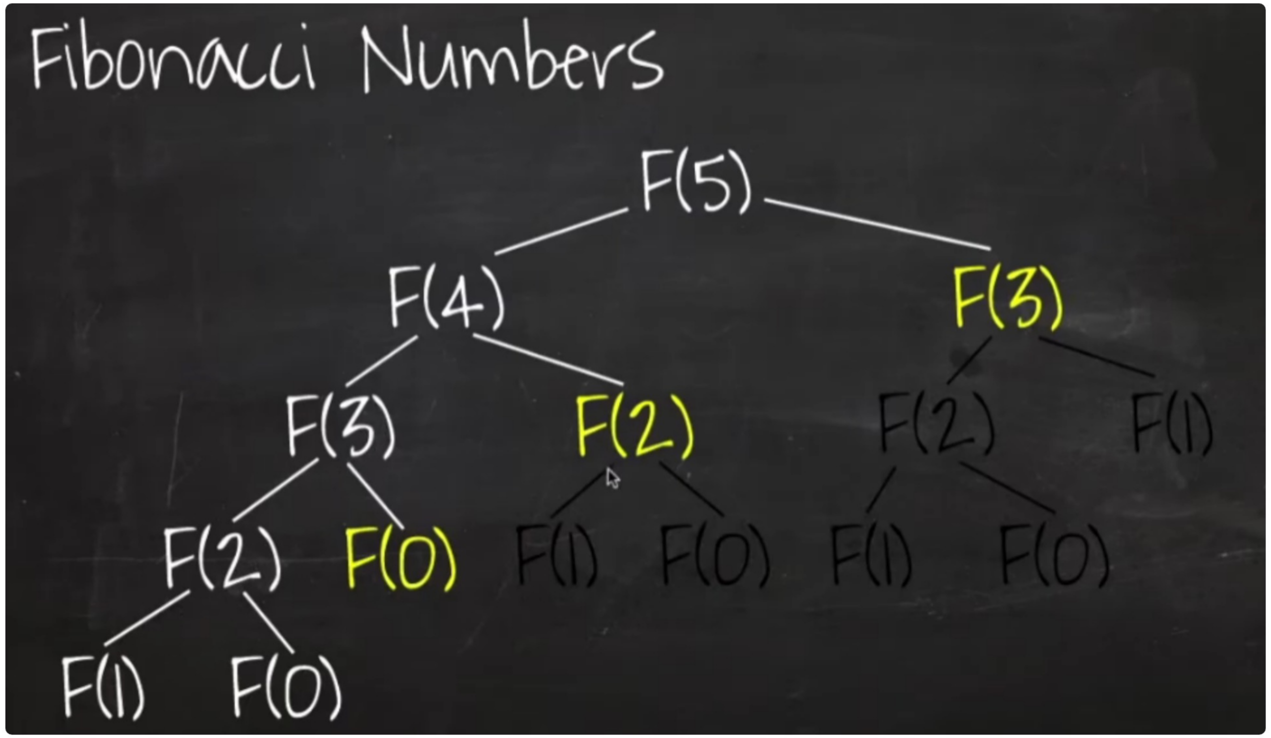
■ 피보나치 수열의 시간 복잡도는 (반복 버전)?

알고리즘 2-3 **피보나치 수열(비재귀 버전)**

```
fib_fast(n):
    f[1] ← f[2] ← 1  ◀ "f[2] ← 1"과 "f[1] ← 1"을 한꺼번에 적어놓은 것
    for i ← 3 to n
        f[i] ← f[i-1] + f[i-2]
        return f[n]
```

연습문제 07

■ 피보나치 수열의 시간 복잡도는 (반복 버전)?



Source: https://www.youtube.com/watch?v=VcCkPrGaKrs

Thank You