İstatistik: Normal Dağılım

1 Normal (Gaussian) Dağılım

Normal dağılım, birçok doğal fenomenin istatistiksel dağılımını tanımlayan en yaygın sürekli olasılık dağılımıdır.

- Çan eğrisi (bell curve) şeklindedir.
- Ortalamaya yakın değerler daha olasıdır, uç değerlerin olasılığı düşüktür.
- Simetriktir, yani ortalamadan eşit uzaklıktaki değerler eşit olasılığa sahiptir.

Matematiksel olarak, **bir normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu (PDF) şu şekildedir**:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Burada:

- μ (mu) $\rightarrow$ Dağılımın ortalaması
- σ (sigma) $\rightarrow$ Standart sapma
- σ^2 $\rightarrow$ Varyans

1.1 Örnek: İnsan Boy Uzunluğu

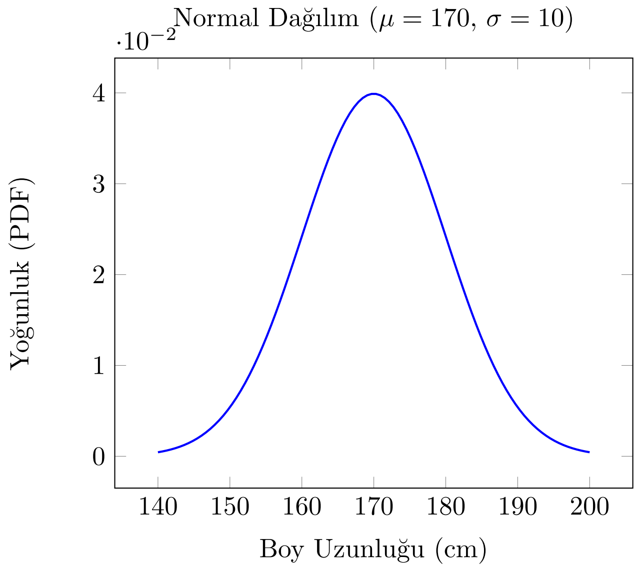
Bir toplumdaki bireylerin boy uzunlukları genellikle normal dağılıma uyar.

Örneğin:

- Ortalama $\mu = 170$ cm
- Standart sapma $\sigma = 10$ cm

Bu durumda, rastgele seçilen bir bireyin boyunun dağılımını Normal dağılım ile gösterebiliriz.

1.2 Normal Dağılımın PDF Grafiği



Grafikten ne anlıyoruz?

- Ortalama 170 cm civarında en yüksek yoğunluk vardır.
- Daha uzun veya daha kısa boyların olasılığı azalır.
- Eğri simetrik olduğu için 160 cm ve 180 cm eşit olasılığa sahiptir.

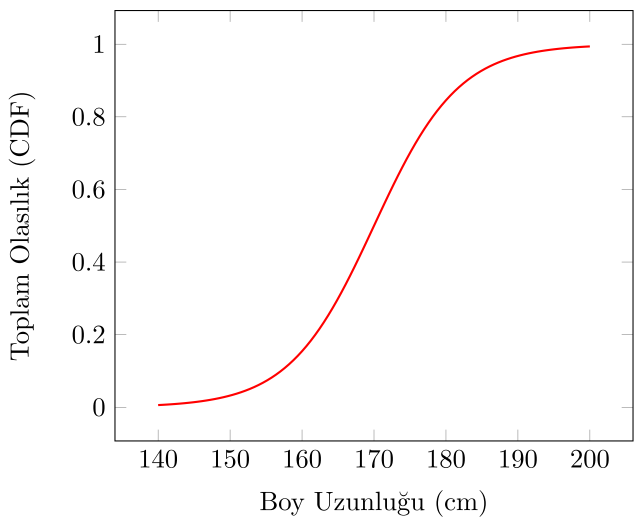
2 Normal Dağılım İçin Kümülatif Dağılım Fonksiyonu (CDF)

Normal CDF, rastgele seçilen bir bireyin belirli bir değerden küçük olma olasılığını gösterir:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Bu integral analitik olarak çözülemez, bu yüzden genellikle tablolar veya hesaplamalarla bulunur.

Normal Dağılımın Kümülatif Dağılım Fonksiyonu ($\mu = 170$, $\sigma = 10$)



Grafikten ne anlıyoruz?

- $X = 170$ için toplam olasılık yaklaşık 0.5'tir (ortalamanın altındaki olasılık yüzde 50).
- $X = 180$ için toplam olasılık yaklaşık 0.84'tür (180 cm ve altındaki bireylerin oranı yüzde 84).
- $X = 160$ için toplam olasılık yaklaşık 0.16'dır (160 cm ve altındaki bireylerin oranı yüzde 16).

3 Standart Normal Dağılım

Standart normal dağılım, özel bir normal dağılımdır ve şu özelliklere sahiptir:
- Ortalama (μ) = 0
- Standart sapma (σ) = 1
Matematiksel olarak fonksiyon şu şekildedir:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Bu dağılım, herhangi bir normal dağılımı ölçekleyerek analiz etmeyi kolaylaştırır.

4 Z-Skoru

Z-skoru, bir veri noktasının ortalamadan kaç standart sapma uzaklıkta olduğunu gösterir:

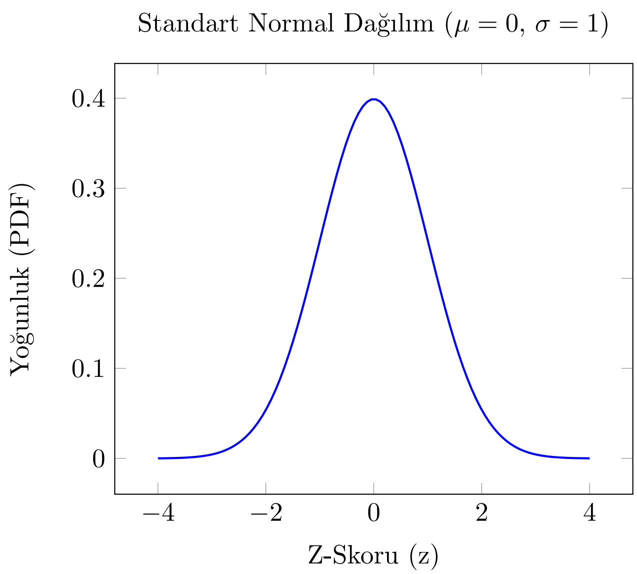
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Burada:
- X: Veri noktası
- μ: Dağılımın ortalaması
- σ: Standart sapma

Örneğin, bir sınavda **ortalama puan 75, standart sapma 10** olsun. Ali'nin puanı 90 ve Zeynep'in puanı 60 ise:

$$Z_{Ali} = \frac{90 - 75}{10} = 1.5, \quad Z_{Zeynep} = \frac{60 - 75}{10} = -1.5$$

4.1 Standart Normal Dağılım PDF Grafiği



5 Standart Normal Dağılım CDF Grafiği