İstatistik: Bernoulli Dağılımı

Atil Samancioglu

1 Bernoulli Dağılımı

Bernoulli dağılımı, sadece iki farklı sonucu olan olayları modelleyen basit bir olasılık dağılımıdır.

- Başarı (1) veya başarısızlık (0) içeren deneyler için kullanılır.
- Tek bir deneme için geçerlidir (örneğin, bir madeni para atışı).
- Başarı olasılığı p, başarısızlık olasılığı $1 - p$ olarak ifade edilir.

Matematiksel olarak, **Bernoulli dağılımının olasılık kütle fonksiyonu (PMF) şu şekildedir**:

$$P(X = k) = \begin{cases} p, & k = 1 \\ 1 - p, & k = 0 \end{cases}$$

Burada:
- $k \rightarrow$ Deneyin sonucu (0 veya 1 olabilir)
- $p \rightarrow$ Başarı olasılığı

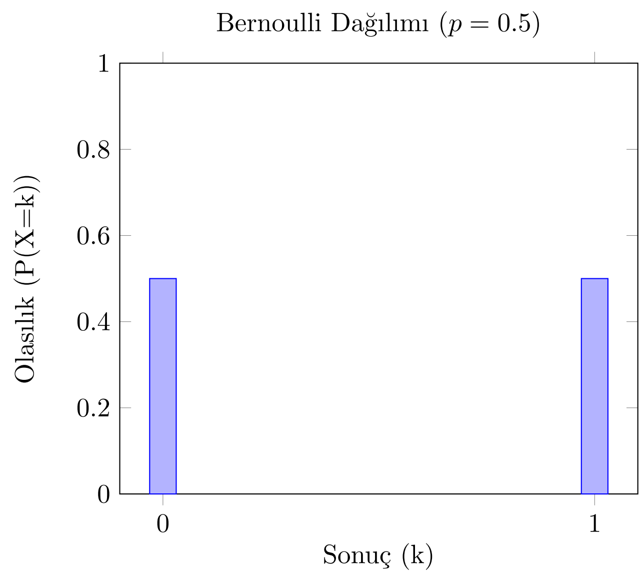
1.1 Örnek: Madeni Para Atışı

Bir madeni para atıldığında "tura" gelme olasılığı $p = 0.5$ kabul edilir. Bu durumda:

$$P(X = 1) = 0.5, \quad P(X = 0) = 1 - 0.5 = 0.5$$

Sonuç: Madeni para atışında tura veya yazı gelme olasılığı eşittir.

1.2 Bernoulli Dağılımının PMF Grafiği



Grafikten ne anlıyoruz?

- Başarı ($k = 1$) ve başarısızlık ($k = 0$) olasılıkları eşittir.
- Başarı olasılığı (p) değiştirildiğinde dağılım farklılaşır.

2 Bernoulli Dağılımının Önemi

- İkili (binary) olayları modellemek için temel bir dağılımdır.
- Binom dağılımının temel yapı taşıdır.
- İstatistik ve makine öğrenimi modellerinde sıkça kullanılır.

3 Binom Dağılımı

Binom dağılımı, bağımsız ve aynı olasılıkla gerçekleşen n adet Bernoulli denemesinin başarı sayısını modelleyen bir dağılımdır.

- Her denemenin iki olası sonucu vardır (başarı veya başarısızlık).
- Her denemenin başarı olasılığı sabittir.
- Denemeler bağımsızdır (bir denemenin sonucu diğerini etkilemez).

Matematiksel olarak, **binom dağılımının olasılık kütle fonksiyonu (PMF) şu şekildedir**:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Burada:
- $k \rightarrow$ Başarı sayısı
- $n \rightarrow$ Deneme sayısı
- $p \rightarrow$ Başarı olasılığı
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \rightarrow$ Kombinasyon ifadesi

3.1 Örnek: Basket Atışları

Bir basketbol oyuncusunun bir serbest atışta başarı olasılığı $p = 0.8$ **olsun.** Oyuncu 10 serbest atış yaparsa, tam olarak 8 tanesini başarılı atma olasılığı şöyledir:

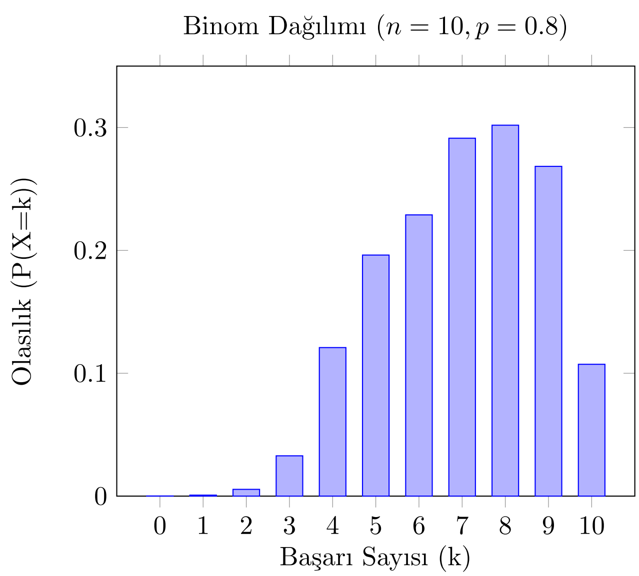
$$P(X = 8) = \binom{10}{8}(0.8)^8(0.2)^2$$

$$= \frac{10!}{8!(10-8)!} \times 0.1678$$

$$= 0.302$$

Bu durumda, oyuncunun 10 atışta tam olarak 8 başarılı atış yapma olasılığı yüzde 30.2'dir.

3.2 Binom Dağılımının PMF Grafiği



Grafikten ne anlıyoruz?

- En yüksek olasılık 7, 8 ve 9 başarıda gözlemlenir.

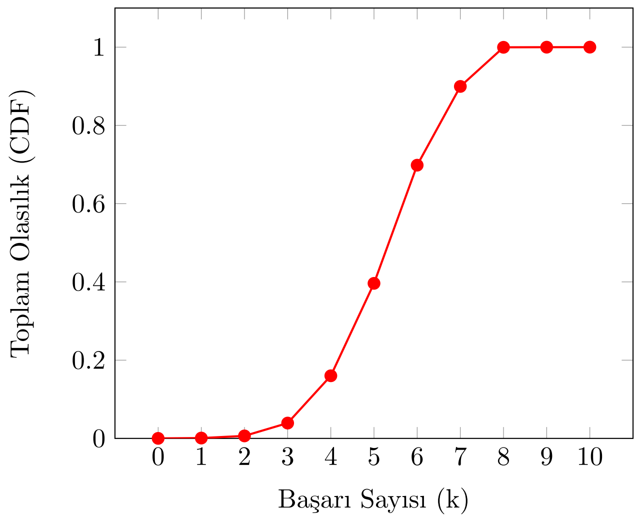
- Daha az veya daha fazla başarı sayıları için olasılıklar düşer.
- Başarı olasılığı (p) arttıkça dağılım sağa kayar.

4 Binom Dağılımı İçin Kümülatif Dağılım Fonksiyonu (CDF)

Binom CDF, belirli bir başarı sayısına kadar toplam olasılığı gösterir:

$$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Binom Dağılımının Kümülatif Dağılım Fonksiyonu ($n = 10, p = 0.8$)



Grafikten ne anlıyoruz?

- $P(X \leq 6) = 0.6983$, yani 6 veya daha az başarı elde etme olasılığı yüzde 69.83'tür.
- $P(X \leq 8) = 0.9996$, yani 8 veya daha az başarı elde etme olasılığı yüzde 99.96'dır.
- Başarı sayısı arttıkça toplam olasılık yüzde 100'e yaklaşır.

5 Binom Dağılımının Önemi

- Bağımsız denemelerde başarı sayısını modellemek için idealdir.
- Bernoulli dağılımının genişletilmiş halidir.

- Olasılık hesaplamalarında ve deney tasarımında yaygın olarak kullanılır.

6 Bernoulli ve Binom Arasındaki Fark

	Bernoulli Dağılımı	**Binom Dağılımı**
Deneme Sayısı	1	n
Sonuçlar	0 veya 1	0'dan n'e kadar başarı sayısı
Örnek	Madeni para atma	Basket atışları, madeni paranın 10 kere atılması