

İstatistik: Poisson Dağılımı

Atıl Samancıoğlu

1 Poisson Dağılımı

Poisson dağılımı, **belirli bir zaman veya mekân aralığında meydana gelen** nadir olayların olasılığını hesaplamak için kullanılır.

- Belli bir zaman diliminde veya belirli bir bölgede gerçekleşen olayları modellemek için uygundur.

- Olayların bağımsız olması ve belirli bir ortalama hızda gerçekleşmesi gerekir.

- Örneğin, dakikada gelen müşteri sayısı, bir web sitesine saniyede gelen istekler, telefon santraline gelen çağrılar gibi durumlar Poisson dağılımı ile modellenilebilir.

Matematiksel olarak, Poisson **dağılımının olasılık kütle fonksiyonu (PMF) şu şekildedir:**

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Burada:

- $k \rightarrow$ Gerçekleşen olay sayısı

- $\lambda \rightarrow$ Belirli bir zaman diliminde veya mekanda beklenen ortalama olay sayısı

- $e \rightarrow$ Euler sayısı ($e \approx 2.718$)

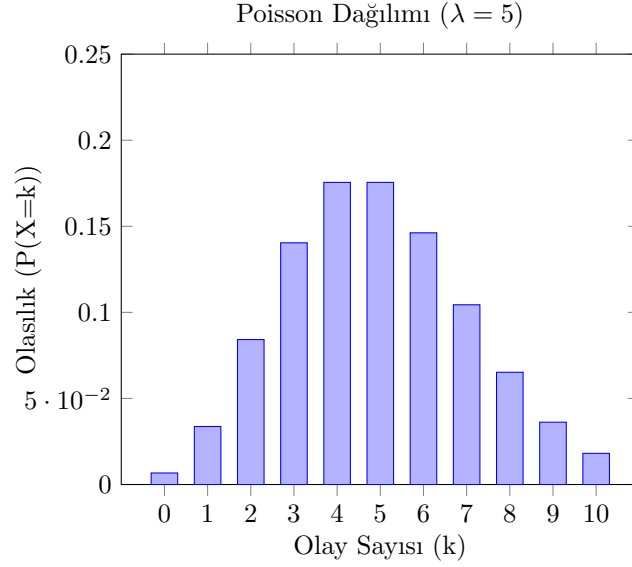
1.1 Örnek: Çağrı Merkezi Örneği

Bir çağrı merkezine saatte ortalama 5 çağrı geldiğini düşünelim ($\lambda = 5$). Şimdi bu çağrı merkezine tam olarak 3 çağrı gelme olasılığını hesaplayalım:

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \frac{5^3 e^{-5}}{3!} \\ &= \frac{125 \times e^{-5}}{6} \approx 0.1404 \end{aligned}$$

Bu durumda, bir saat içinde tam olarak 3 çağrı gelme olasılığı yüzde 14.04'tür.

1.2 Poisson Dağılımının PMF Grafiği



Grafikten ne anlıyoruz?

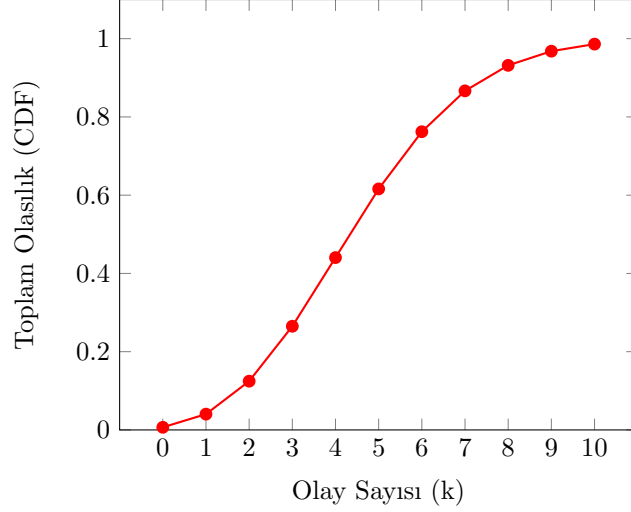
- En yüksek olasılık $\lambda = 5$ 'te gözlemlenir.
- Daha düşük ve daha yüksek olay sayıları için olasılıklar azalır.
- Poisson dağılımı, olayların rastgele ama belirli bir ortalama hızda gerçekleştiği durumları modellemek için idealdir.

2 Poisson Dağılımı İçin Kümülatif Dağılım Fonksiyonu (CDF)

Poisson CDF, bir olay sayısının belirli bir değere kadar olma olasılığını gösterir:

$$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$$

Poisson Dağılımının Kümülatif Dağılım Fonksiyonu ($\lambda = 5$)



Grafikten ne anlıyoruz?

- $P(X \leq 5) = 0.616$, yani 5 veya daha az olay gerçekleşme olasılığı yüzde 61.6'dır.
- $P(X \leq 10) = 0.986$, yani 10 veya daha az olay gerçekleşme olasılığı yüzde 98.6'dır.
- CDF, belirli bir olay sayısına kadar toplam olasılığı gösterir.

3 Poisson Dağılımının Önemi

- Dakikada gelen müşteri sayısı, hastaneye gelen hasta sayısı, web sitesine gelen istek sayısı gibi olayları modellemek için uygundur.
- Ortalama olay sayısı bilindiğinde, belirli sayıda olayın gerçekleşme olasılığını hesaplamak için kullanılır.
- Poisson dağılımı, düşük frekanslı ancak rastgele meydana gelen olayları modellemek için güçlü bir araçtır.