

İstatistik: Z-Testi ile Hipotez Testi

1 Z-Testi Nedir?

Z-Testi, **popülasyon standart sapması** (σ) bilindiğinde ve örneklem büyüklüğü büyük olduğunda ($n > 30$) kullanılan bir hipotez testidir.

Matematiksel formülü:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Burada:

- $\bar{X} \rightarrow$ Örneklem ortalaması
- $\mu \rightarrow$ Popülasyon ortalaması
- $\sigma \rightarrow$ Popülasyon standart sapması
- $n \rightarrow$ Örneklem büyüklüğü

2 Tek Kuyruklu (One-Tailed) ve Çift Kuyruklu (Two-Tailed) Testler

Z-Testi **tek kuyruklu (one-tailed) veya çift kuyruklu (two-tailed)** olarak uygulanabilir.

Tek Kuyruklu Test (One-Tailed Test):

- Hipotez, belirli bir yönde değişiklik olup olmadığını test eder.
- Örnek: "Yeni makine eskiye göre daha hızlıdır" hipotezi.
- H_0 : Yeni makine eskisi kadar hızlıdır ($\mu \leq 60$ saniye).
- H_1 : Yeni makine eskisinden daha hızlıdır ($\mu < 60$ saniye).
- p-değeri sadece **sol kuyruk** için hesaplanır.

Çift Kuyruklu Test (Two-Tailed Test):

- Hipotez, herhangi bir yönde anlamlı bir fark olup olmadığını test eder.
- Örnek: "Yeni makine, eskisine göre farklıdır" hipotezi.

- H_0 : Yeni makine eskisiyle aynı hızdadır ($\mu = 60$ saniye).
- H_1 : Yeni makine eskisinden farklıdır ($\mu \neq 60$ saniye).
- p-değeri hem **sol** hem de **sağ** kuyruktaki kritik bölgelerin toplamı olarak hesaplanır.

3 Güven Aralığı (Confidence Interval) ile p-Değeri Arasındaki İlişki

Hipotez testlerinde kullanılan anlamlılık düzeyi α , güven aralığıyla doğrudan bağlantılıdır.

İlişkinin Temeli

- α : Hatalı bir şekilde H_0 hipotezini reddetme olasılığıdır.
- Güven düzeyi: $1 - \alpha$ olarak tanımlanır.

Güven Düzeyi ve Anlamlılık Düzeyi İlişkisi

- %95 güven düzeyi $\Rightarrow \alpha = 0.05$
- %99 güven düzeyi $\Rightarrow \alpha = 0.01$
- %90 güven düzeyi $\Rightarrow \alpha = 0.10$

Güven Aralığı p-Değeriyle Nasıl İlişkilidir?

- Eğer H_0 hipotezindeki değer, güven aralığı **içindeyse** \rightarrow p-değeri $> \alpha \rightarrow H_0$ reddedilmez.
- Eğer H_0 hipotezindeki değer, güven aralığı **dışındaysa** \rightarrow p-değeri $< \alpha \rightarrow H_0$ reddedilir.

Örnek

Bir test sonucunda:

- $\bar{X} = 74, \mu_0 = 70, \sigma = 8, n = 50$
- %95 güven aralığı: $[71.79, 76.21]$
- p-değeri: $p = 0.0004$

Yorum:

- Güven aralığı 70 değerini içermiyor $\Rightarrow H_0$ reddedilir.
- p-değeri < 0.05 olduğundan $\Rightarrow H_0$ reddedilir.

Sonuç

p-değeri ve güven aralığı farklı yöntemlerle aynı karar noktasına ulaşır. Güven aralığı, ayrıca popülasyon parametresinin ne olabileceği hakkında bilgi de verir.

4 p-Değeri Nedir? Z Tablosu Neden Kullanılır?

p-değeri, sıfır hipotezi doğruysa elimizdeki verinin bu kadar uç olma olasılığıdır.

- p küçükse (örneğin < 0.05): Tesadüfle açıklanması zordur $\Rightarrow H_0$ reddedilir.
- p büyükse: Verinin rastlantı olması mümkündür $\Rightarrow H_0$ reddedilmez.

Z Tablosu Ne İşe Yarar?

Z tablosu, standart normal dağılım altında kalan alanları gösterir: $P(Z \leq z)$

Z Tablosu Neden Hazır Kullanılır?

Standart normal dağılımın altında kalan alanı hesaplamak (integral) her zaman kolay değildir. Bu yüzden tüm z değerleri için olasılıklar önceden hesaplanıp tablolaştırılır.

5 Z Tablosu Nasıl Oluşturulur?

1. Standart normal dağılım fonksiyonu:

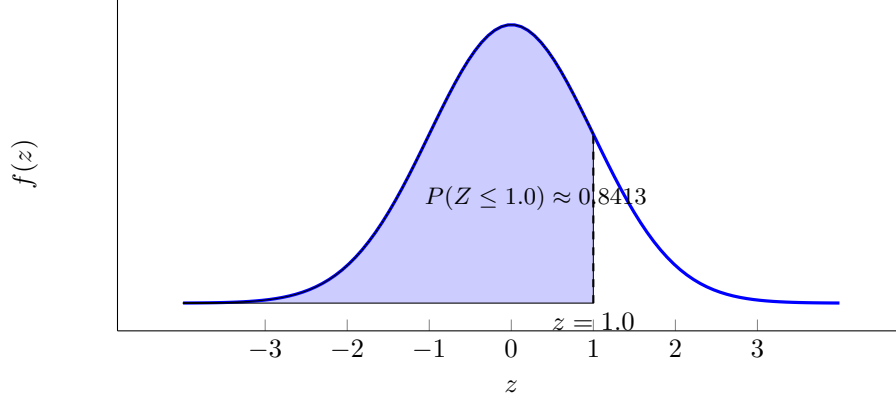
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

2. $P(Z \leq z)$ alanı sayısal olarak hesaplanır:

$$P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z f(t) dt$$

3. Sayısal sonuçlar tabloya dökülür.

6 Z Tablosu Alan Hesabı Görseli



7 Örnek 1: Tek Kuyruklu Z-Testi (Makine Performansı)

Bir üretim tesisinde, eski makinelerin işlem süresi ortalama **60 saniye** olarak bilinmektedir. Yeni makinelerin ortalama işlem süresinin **daha kısa** olup olmadığını test etmek istiyoruz.

Veriler:

- Popülasyon ortalaması: $\mu = 60$
- Yeni makinelerin ortalama işlem süresi: $\bar{X} = 57$
- Standart sapma: $\sigma = 5$
- Örneklem büyüklüğü: $n = 40$

Hesaplama:

$$Z = \frac{57 - 60}{5/\sqrt{40}} = \frac{-3}{0.79} = -3.80$$

Tablodan:

$$p = P(Z \leq -3.80) = 0.00007$$

Sonuç: $p < 0.05$ olduğundan H_0 reddedilir. Yeni makineler anlamlı şekilde daha hızlıdır.

8 Örnek 2: Çift Kuyruklu Z-Testi (Yeni Eğitim Programı)

Bir üniversite, öğrencilerinin sınav puanlarının önceki yıllardaki ortalamadan **farklı olup olmadığını** test etmek istiyor.

Veriler:

- Popülasyon ortalaması: $\mu = 70$
- Yeni öğrencilerin ortalama puanı: $\bar{X} = 74$
- Standart sapma: $\sigma = 8$
- Örneklem büyüklüğü: $n = 50$

Hesaplama:

$$Z = \frac{74 - 70}{8/\sqrt{50}} = \frac{4}{1.13} = 3.54$$

Tablodan:

$$p = 2 \times P(Z \geq 3.54) = 2 \times 0.0002 = 0.0004$$

Sonuç: $p < 0.05$ olduğundan H_0 reddedilir. Yeni eğitim programı, önceki yıllara göre anlamlı bir fark yaratmaktadır.

9 Sonuç

- Z-Testi, büyük örneklem ($n > 30$) için kullanılır.
- Popülasyon standart sapması biliniyorsa tercih edilir.
- Tek kuyruklu test, yönlü hipotezleri test eder.
- Çift kuyruklu test, genel farklılıkları test eder.

10 Z-Testinin Görselleştirilmesi

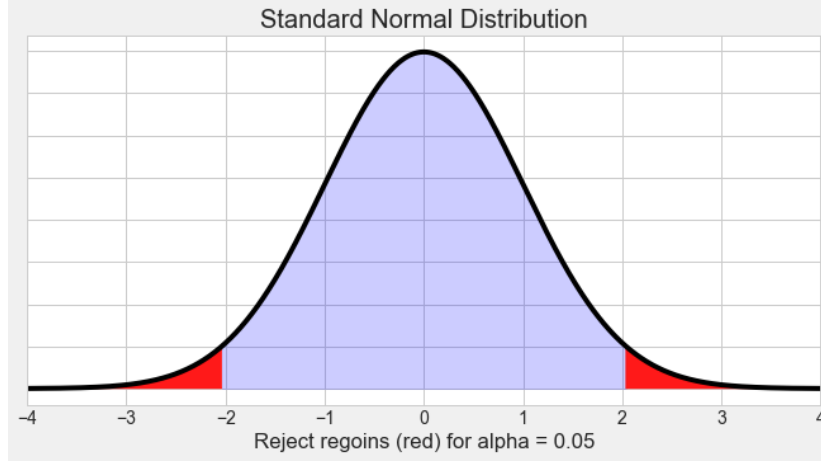


Figure 1: Wikipedia Z Test Visual

Grafikten ne anlıyoruz?

- **Eğri:** Standart normal dağılımı gösterir.
- **Kırmızı alan:** Kritik bölge (örneğin, $\alpha = 0.05$ için $Z > 1.64$).
- Eğer gözlenen Z değeri kırmızı alana düşerse, H_0 reddedilir.