

# İstatistik: Güven Aralığı ve Hata Payı

Atıl Samancıoğlu

## 1 Güven Aralığı Nedir?

Güven aralığı, bir popülasyon parametresinin belirli bir güven düzeyinde hangi aralıkta olabileceğini gösterir. Örneğin, yüzde 95 güven aralığı, örneklem verilerine dayanarak, popülasyon ortalamasının yüzde 95 olasılıkla belirlenen aralık içinde olacağını gösterir.

Matematiksel olarak güven aralığı şu formülle hesaplanır:

$$\text{Güven Aralığı} = \bar{X} \pm Z^* \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Burada:

- $\bar{X} \rightarrow$  Örneklem ortalaması
  - $Z^* \rightarrow$  Seçilen güven düzeyine karşılık gelen kritik Z değeri
  - $\sigma \rightarrow$  Popülasyon standart sapması
  - $n \rightarrow$  Örneklem büyüklüğü
- 

## 2 Hata Payı Nedir?

Hata payı ( $ME$ ), güven aralığının yarı genişliğidir ve şu şekilde hesaplanır:

$$ME = Z^* \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Hata payı:

- Örneklem büyüklüğü arttıkça azalır
  - Daha yüksek güven düzeyleri için genişler
  - Standart sapma büyükse, hata payı da büyük olur
- 

## 3 Örnek 1: Seçim Anketi (Adım Adım Hesaplama)

Bir seçim anketinde, bir adayın yüzde 52 oy alacağı tahmin ediliyor. Ancak bu tahminin yüzde 95 güvenle hangi aralıkta olduğu hesaplanmalıdır.

**Verileri Belirleyelim**

- Örneklem oranı:  $\hat{p} = 0.52$

- Örneklem büyüklüğü:  $n = 1000$
- Güven seviyesi: yüzde 95, yani  $Z^* = 1.96$

---

### Örneklem Standart Hatasını Hesaplayalım

Bir popülasyondan **rastgele bir örnek aldığımızda**, örneklem oranı ( $\hat{p}$ ) rastgele değişen bir değerdir.

Bu nedenle, **örneklem oranının varyansı** (standart sapmanın karesi) şu şekilde hesaplanır:

$$\text{Varyans}(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$$

Burada:

- $p \rightarrow$  Popülasyon oranı (gerçek başarı oranı)
- $n \rightarrow$  Örneklem büyüklüğü

Standart hata (SE), bu varyansın karekökü alınarak hesaplanır:

$$SE = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

---

### Neden $p(1-p)$ Kullanılır?

Bir rastgele değişken binom dağılımına sahipse, varyansı şu şekilde hesaplanır:

$$\sigma^2 = p(1-p)$$

Burada:

- $p \rightarrow$  Olayın gerçekleşme olasılığı,
- $1-p \rightarrow$  Olayın gerçekleşmeme olasılığıdır.

Bu formül, binom dağılımının doğası gereği hem başarılı hem de başarısız olma ihtimallerini içerir. Bu nedenle, örneklem oranının varyansı hesaplanırken  $p(1-p)$  kullanılır.

Bu sebeple örneklem standart hatası (SE) şu formülle hesaplanır:

$$SE = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Yerine koyarak:

$$SE = \sqrt{\frac{0.52 \times 0.48}{1000}} = \sqrt{\frac{0.2496}{1000}} = \sqrt{0.0002496} = 0.0158$$

---

### Hata Payı (Margin of Error) Hesaplayalım

Hata payı şu formülle hesaplanır:

$$ME = Z^* \times SE$$

Yerine koyarak:

$$ME = 1.96 \times 0.0158 = 0.031$$

#### Güven Aralığını Hesaplayalım

$$\text{Güven Aralığı} = \hat{p} \pm ME$$

Yerine koyarak:

$$(0.52 - 0.031, 0.52 + 0.031) = (0.489, 0.551)$$

**Sonuç:** Adayın gerçek oy oranı, yüzde 95 güvenle yüzde 48.9 ile yüzde 55.1 arasında olacaktır.

## 4 Örnek 2: Ürün Memnuniyet Testi (Adım Adım)

Bir şirket, müşteri memnuniyetini ölçmek için bir anket yapıyor. Örneklemde 100 müşteri var, ortalama memnuniyet puanı 80 ve standart sapma 10 olarak bulunuyor. Bu değerlere göre, yüzde 99 güven seviyesinde güven aralığını hesaplayalım.

#### Verileri Belirleyelim

- Örneklem ortalaması:  $\bar{X} = 80$
- Standart sapma:  $\sigma = 10$
- Örneklem büyüklüğü:  $n = 100$
- Güven seviyesi: yüzde 99, yani  $Z^* = 2.576$

#### Hata Payını (Margin of Error) Hesaplayalım

$$ME = Z^* \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Yerine koyarak:

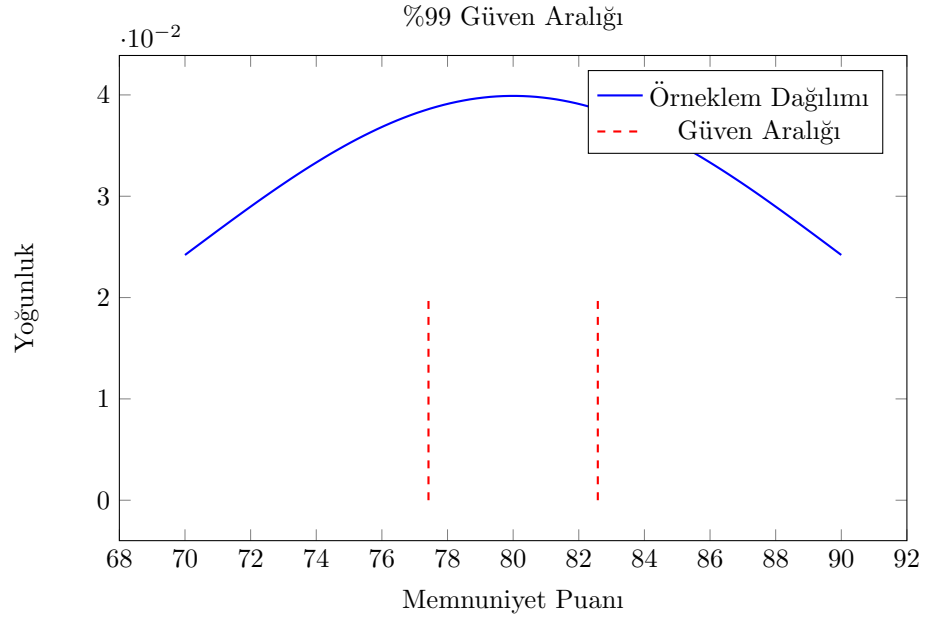
$$ME = 2.576 \times \frac{10}{\sqrt{100}} = 2.576 \times 1 = 2.576$$

#### Güven Aralığını Hesaplayalım

$$(80 - 2.576, 80 + 2.576) = (77.42, 82.58)$$

**Sonuç:** Gerçek memnuniyet puanı, yüzde 99 güvenle 77.42 ile 82.58 arasında olacaktır.

## 5 Güven Aralığının Görselleştirilmesi



## 6 Sonuç

- Güven aralığı, popülasyon parametresinin hangi aralıkta olduğuna dair tahmindir.
- Hata payı, güven aralığının genişliğini belirler.
- Örneklem büyüklüğü arttıkça, güven aralığı daralır ve hata payı azalır.