15. Bayesov klasifikator

Strojno učenje 1, UNIZG FER, ak. god. 2023./2024.

Jan Šnajder, vježbe, v3.2

1 Zadatci za učenje

1. [***Svrha: Razumjeti model Bayesovog klasifikatora i njegove komponente. Razumjeti što su to generativni modeli, kako se razlikuju od diskriminativnih te koje su njihove prednosti i njihovi nedostatci.***]

   (a) Definirajte model Bayesovog klasifkatora i navedite sve veličine koje se pojavljuju u definiciji modela. Objasnite zašto faktoriziramo brojnik. Objasnite ulogu nazivnika i objasnite kada ga možemo zanemariti.

   (b) Je li taj model parametarski ili neparametarski? Obrazložite odgovor.

   (c) Objasnite zašto Bayesov klasifikator nazivamo generativnim i opišite generativnu priču Bayesovog klasifikatora.

   (d) Objasnite razliku između generativnih i diskriminativnih modela te navedite prednosti jednih i drugih.

2. [***Svrha: Isprobati izračun maksimalne aposteriorne hipoteze i najvjerojatnije hipoteze uz minimizaciju rizika.***] Razmotrimo problem klasifikaciji neželjene el. pošte u klase *spam* ($y = 1$), *important* ($y = 2$) i *normal* ($y = 3$). Neka su apriorne vjerojatnosti tih klasa $P(y = 1) = 0.2$, $P(y = 2) = 0.05$ i $P(y = 3) = 0.75$. Za neku poruku el. pošte $\mathbf{x}$ izglednosti iznose $p(\mathbf{x}|y = 1) = 0.8$ i $p(\mathbf{x}|y = 2) = p(\mathbf{x}|y = 3) = 0.5$. Izračunajte aposteriorne vjerojatnost za svaku od klasa te maksimalnu aposteriornu hipotezu za primjer $\mathbf{x}$.

3. [***Svrha: Razviti intuiciju za model kontinuiranog Bayesovog klasifikatora.***]

   Izrađujemo Bayesov model za klasifikaciju primjera iz $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ u tri klase. Učenjem na skupu primjera dobili smo sljedeće parametre modela: $P(y = 1) = 0.3$, $P(y = 2) = 0.2$, $\mu_1 = -5$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 5$, $\sigma_1^2 = 5$, $\sigma_2^2 = 1$, $\sigma_3^2 = 10$. Skicirajte funkcije gustoće vjerojatnosti $p(x|y)$, $p(x, y)$, $p(x)$ i $p(y|x)$.

4. [***Svrha: Razumjeti izvod modela kontinuiranog Bayesovog klasifikatora i osvježiti potrebno znanje matematike.***]

   (a) Krenuvši od izraza (4.29) iz skripte, izvedite model višedimenzijskog Bayesovog klasifikatora s kontinuiranim ulazima s dijeljenom i dijagonalnom kovarijacijskom matricom.

   (b) Napišite broj parametara ovog modela.

   (c) Objasnite zašto je izglednost faktorizirana u produkt univarijatnih razdioba, što odgovara pretpostavci o uvjetnoj nezavisnosti, premda značajke mogu biti nelinearno uvjetno zavisne.

5. [***Svrha: Razviti intuiciju za složenost modela kontinuiranog Bayesovog klasifikatora i shvatiti kako se problem u konačnici svodi na odabir optimalnog modela.***] Želimo izgraditi klasifikator za klasifikaciju brucoša u jednu od dvije klase: $y = 1 \Rightarrow$ *"Završava FER u roku"* i $y = 2 \Rightarrow$ *"Produljuje studij"*. Svaki je primjer opisan sa šest ulaznih varijabli: prosjek ocjena 1.–4. razreda (četiri varijable), bodovi državne mature iz matematike te bodovi državne mature iz fizike. Raspolažemo trima modelima: modelom $\mathcal{H}_1$ s dijeljenom kovarijacijskom matricom, modelom $\mathcal{H}_2$ s dijagonalnom (i dijeljenom) kovarijacijskom matricom i modelom $\mathcal{H}_3$ s izotropnom kovarijacijskom matricom.

(a) Koliko svaki od ova tri modela ima parametara?

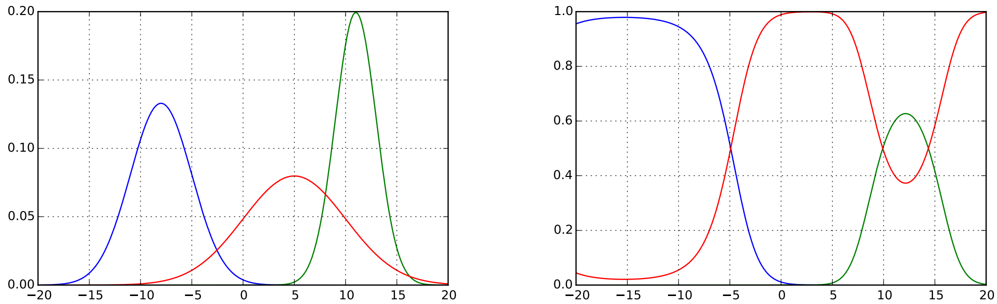
(b) Za koji od ova tri modela očekujete da će najbolje generalizirati u ovom konkretnom slučaju (uzmite u obzir prirodu problema i očekivane odnose između značajki)? Zašto?

(c) Nacrtajte skicu funkcije empirijske pogreške i pogreške generalizacije i naznačite na njoj točke koje označavaju navedenim trima modelima.

(d) Kako biste u praksi odredili koji ćete model upotrijebiti?

2 Zadatci s ispita

1. (P) Koristimo Gaussov Bayesov klasifikator kako bismo riješili troklasni klasifikacijski problem. Procijenjene gustoće vjerojatnosti za izglednosti klasa su $p(x|y = 1) = \mathcal{N}(-8, 3)$, $p(x|y = 2) = \mathcal{N}(5, 5)$ i $p(x|y = 3) = \mathcal{N}(11, 2)$. Na slikama ispod prikazane su izglednosti klasa (lijeva slika) i aposteriorne vjerojatnosti dobivene Bayesovim pravilom (desna slika):



S obzirom na ova dva grafikona, što su najizglednije vrijednosti za apriorne vjerojatnosti klasa?

A $P(y = 1) = 0.1, P(y = 2) = 0.7, P(y = 3) = 0.2$

B $P(y = 1) = P(y = 2) = P(y = 3) = \frac{1}{3}$

C $P(y = 1) = P(y = 2) = 0.4, P(y = 3) = 0.2$

D $P(y = 1) = P(y = 2) = 0.1, P(y = 3) = 0.8$

2. (P) Gaussovim Bayesovim klasifikatorom rješavamo problem klasifikacije u $K = 10$ klasa sa $n = 5$ značajki. Prisjetite se da kod Gaussovog Bayesovog klasifikatora uvođenjem odgovarajućih pretpostavki na kovarijacijsku matricu Σ možemo utjecati na broj parametara modela a time onda i na složenost modela. Razmatramo tri modela s kovarijacijskim matricama u koje smo ugradili sljedeće pretpostavke:

$\mathcal{H}_1$: Značajke nisu korelirane, no imaju različite varijance unutar klase i između klasa

$\mathcal{H}_2$: Značajke nisu korelirane, imaju jednaku varijancu unutar svake klase, no različitu za svaku klasu

$\mathcal{H}_3$: Između značajki postoje korelacije, ali se one ne razlikuju između klasa

Neka '$\supset$' označava relaciju "složeniji od", a neka '$>$' označava relaciju "ima više parametara od". **Što možemo zaključiti o složenosti i broju parametara za gornja četiri modela?**

A $\mathcal{H}_1 > \mathcal{H}_3 > \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_2$

B $\mathcal{H}_1 > \mathcal{H}_2 > \mathcal{H}_3$, $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_2 \supset \mathcal{H}_3$

C $\mathcal{H}_3 > \mathcal{H}_1 > \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_2$

D $\mathcal{H}_3 > \mathcal{H}_1 > \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3 \supset \mathcal{H}_2 \supset \mathcal{H}_1$

3. (N) Na skupu označenih primjera u ulaznome prostoru dimenzije $n = 3$ treniramo Gaussov Bayesov klasifikator za klasifikaciju primjera u $K = 2$ klase, uz pretpostavku dijeljene kovarijacijske matrice. Model je definiran kao

$$h_j(\mathbf{x}) = \ln p(\mathbf{x}, y)$$

Prisjetimo se da je izglednost klase s oznakom $y = j$ kod Gaussovog Bayesovog klasifikatora definirana multivarijantnom Gaussovom gustoćom vjerojatnosti:

$$p(\mathbf{x}|y = j) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\boldsymbol{\Sigma}_j|^{1/2}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_j)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}_j^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_j)\Big\}$$

gdje je Σ_j matrica kovarijacije za klasu j. Treniranjem modela dobili smo sljedeće procjene za parametre:

$$\hat{\mu}_1 = 0.2 \qquad \hat{\boldsymbol{\mu}}_1 = (1, 0, -2) \qquad \hat{\Sigma}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mu}_2 = 0.8 \qquad \hat{\boldsymbol{\mu}}_2 = (2, -1, 5) \qquad \hat{\Sigma}_2 = \begin{pmatrix} 6.25 & -0.5 & -1 \\ -0.5 & 1.25 & -0.75 \\ -1 & -0.75 & 3.5 \end{pmatrix}$$

Iz ovoga smo zatim procijenili dijeljenu kovarijacijsku matricu $\hat{\Sigma}$ definiranu kao težinski prosjek kovarijacijskih matrica $\hat{\Sigma}_j$, $j = 1, 2$. Zanima nas klasifikacija modela za primjer $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$. **Koliko iznosi predikcija modela za klasu $y = 1$ za taj primjer, $h_1(\mathbf{x})$?**

A -6.885 B $+0.002$ C -4.819 D -6.429

4. (P) Gaussov Bayesov klasifikator koristimo za klasfikaciju jednodimenzijskih podataka u tri klase. Procijenjene izglednosti klasa su $p(x|y = 1) = \mathcal{N}(-10, 2)$, $p(x|y = 2) = \mathcal{N}(2, 2)$ i $p(x|y = 3) = \mathcal{N}(8, 2)$, a procijenjene apriorne vjerojatnosti klasa su $P(y = 1) = P(y = 2) = 2/5$ i $P(y = 3) = 1/5$. Međutim, nakon što smo naučili ovaj model, zaključili smo da na ispitnom skupu postoji pomak u distribuciji podataka u odnosu na skup za učenje te da zbog toga model ne generalizira dobro. Zaključili smo da se ovo može ispraviti tako da se naučeni model malo izmijeni, i to tako da se varijanca izglednosti klase $y = 1$ postavi na 5 i da se apriorne vjerojatnosti klasa ujednače, $P(y = 1) = P(y = 2) = P(y = 3) = 1/3$. Skicirajte gustoće zajedničke vjerojatnosti naučenog i izmijenjenog modela. Neka su h_1 i h_2 MAP-hipoteze prvog i drugog modela, te neka su a i b pozitivne konstante. Razmotrite segment ulaznog prostora za koji vrijedi $-10 \leqslant x \leqslant 10$. **Na kojim se dijelovima tog segmenta ulaznog prostora MAP-hipoteze prvog i drugog modela razlikuju?**

A $[-4 - a, 5 + b]$

B $[-4 - a, -4 + b]$

C $[-4 - a, -4] \cup [5 - b, 5]$

D $[-4, -4 + a] \cup [5, 5 + b]$

5. (P) Gaussov Bayesov klasifikator koristimo za klasifikaciju u dvije klase ($y = 1$ i $y = 2$) u dvodimenzijskome ulaznom prostoru ($\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$). Apriorne vjerojatnosti klasa su jednake, dok su izglednosti klasa modelirane bivarijatnim Gaussovim distribucijama sa sljedećim parametrima:

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\Sigma}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\mu}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\Sigma}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Skicirajte gustoću zajedničke vjerojatnosti u ulaznome prostoru i granicu između klasa definiranu jednadžbom $h(x_1, x_2) = 0$. **Koje su od sljedećih točaka (x_1, x_2) najbliže točkama kroz koje prolazi ta granica?**

A $(1, 2), (3, 4), (6, 7)$ B $(1, 3), (5, 4), (7, 9)$ C $(1, 6), (3, 3), (5, 0)$ D $(3, 2), (4, 5), (9, 7)$

6. (N) Na skupu označenih primjera u ulaznome prostoru dimenzije $n = 2$ treniramo Gaussov Bayesov klasifikator za klasifikaciju primjera u $K = 2$ klase, uz pretpostavku dijeljene i dijagonalne kovarijacijske matrice. Izglednost klase s oznakom $y = j$ definirana je multivarijantnom Gaussovom gustoćom vjerojatnosti:

$$p(\mathbf{x}|y=j) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\mathbf{\Sigma}_j|^{1/2}} \exp\Big\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_j)^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_j^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_j)\Big\}$$

Model treniramo na skup podataka od $N = 7$ primjera:

$$\mathcal{D} = \{(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})\}_i = \{((-1,-2),0),((0,0),0),((1,2),0),((3,-1),1),((4,-1),1),((4,1),1),((5,1),1)\}$$

Procijenite parametre modela na ovom skupu primjera. Budući da je skup primjera malen, za procjenu kovarijacijske matrice koristite nepristran procjenitelj. Izlaz modela za klasu $y = j$ neka je zajednička gustoća vjerojatnosti, $h_j(\mathbf{x}) = \ln p(\mathbf{x}, y = j)$. **Koliko iznosi $h_0(\mathbf{x})$ za primjer $\mathbf{x} = (0,0)$?**

A -4.13 B -3.84 C -3.03 D -2.75