

17. Probabilistički grafički modeli

Strojno učenje 1, UNIZG FER, ak. god. 2023./2024.

Jan Šnajder, vježbe, v2.3

1 Zadatci za učenje

1. *[Svrha: Razumjeti što je to probabilistički grafički model. Shvatiti specifičnosti modela Bayesove mreže te kako taj model predstavlja zajedničku distribuciju. Shvatiti koje induktivne pristranosti ovakva reprezentacija koristi.]*

- (a) Navedite tri osnovna aspekta svakog probabilističkog grafičkog modela (PGM).
- (b) Je li PGM parametarski ili neparametarski model? Je li generativni ili diskriminativni? Obrazložite odgovore.
- (c) Pretpostavite zajedničku distribuciju četiriju varijabli $p(x, y, w, z)$. Faktorizirajte ovu distribuciju primjenom osnovnih pravila vjerojatnosti te skicirajte Bayesovu mrežu koja odgovara toj faktorizaciji. Topološki uređaj uzmite da je x, y, w, z .
- (d) Ponovite isto, ali ovaj put pretpostavljajući $y \perp w | x$ i $x \perp z | y, w$. Kojoj vrsti induktivne pristranosti odgovaraju ove pretpostavke o nezavisnosti? Obrazložite motivaciju za uvođenjem dodatnih pretpostavki u model.
- (e) Formalno definirajte uređajno Markovljevo svojstvo i topološki uređaj čvorova mreže. Primjenom uređajnog Markovljevog svojstva izvedite uvjetne nezavisnosti kodirane Bayesovom mrežom koja odgovara faktorizaciji

$$P(x, y, w, z) = P(x)P(y|x, z)P(z)P(w|y).$$

- (f) Nacrtajte Bayesovu mrežu Skrivenog Markovljevog modela (HMM) i napišite pripadnu faktorizaciju zajedničke vjerojatnosti $p(\mathbf{x}, \mathbf{z})$. Koje je svrha latentnih varijabli \mathbf{z} i koje su uvjetne nezavisnosti kodirane ovom mrežom?
2. *[Svrha: Izvježbati iščitavanje Bayesove mreže i uvjetnih nezavisnosti iz zadane faktorizacije zajedničke vjerojatnosti. Razumjeti kako uvjetne nezavisnosti, broj varijabli i njihovih vrijednosti određuju ukupan broj parametara Bayesove mreže.]* Gradimo Bayesovu mrežu koja predviđa hoće li student/ica uspješno položiti SU. Mreža sadrži pet varijabli: pohađa li osoba konzultacije (x_1), je li osoba dobra u Pythonu (x_2), rješava li osoba samostalno domaće zadaće i laboratorijske vježbe (x_3), ocjenu iz predmeta UI (x_4) te varijablu koja govori je li osoba položila SU (y). Pritom vrijedi $x_1, x_2, x_3, y \in \{\top, \perp\}$ i $x_4 \in \{2, 3, 4, 5\}$.

- (a) Skicirajte Bayesovu mrežu ako je faktorizacija zajedničke distribucije sljedeća:

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4, y) = P(x_1)P(x_2)P(x_3|x_1, x_2)P(x_4|x_2)P(y|x_3).$$

- (b) Koji je ukupan broj parametara ove mreže?
 - (c) Koje su uvjetne nezavisnosti kodirane u strukturu ove mreže?
3. *[Svrha: Razumjeti ideju d-odvajanja i kako se ona može provesti grafički. Shvatiti motivaciju iza ispitivanja uvjetne nezavisnosti parova varijabli.]*

- (a) Zašto bismo htjeli znati koji parovi varijabli su uvjetno nezavisni? Nije li ta informacija već kodirana unutar strukture mreže? Objasnite.

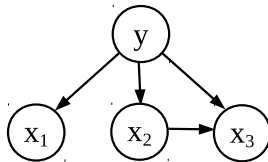
- (b) Formalno definirajte d-odvajanje i objasnite koji uvjeti (i kada) moraju vrijediti da bi neke dvije varijable bile uvjetno nezavisne.
- (c) Na temelju Bayesove mreže iz zadatka 2, odredite pod kojim uvjetima su varijable prolaza SU (y) i ocjene iz predmeta UI (x_4) uvjetno nezavisne.
- (d) Svojim riječima objasnite efekt objašnjavanja (engl. *explaining away*) koristeći za primjer varijable x_1 , x_2 i x_3 .
4. [Svrha: Izvježbati iščitavanje uvjetnih nezavisnosti iz Bayesove mreže te određivanje (ne)zavisnosti proizvoljnog para varijabli primjenom pravila d-odvajanja.] Bayesovom mrežom modeliramo vjerojatnost oboljenja od kardiovaskularnih bolesti. Mreža sadrži četiri varijable: spol osobe (S), koliko često osoba tjedno odlazi u teretanu (T), je li osoba pušač (P) te varijablu koja govori o kakvom se riziku radi (R). Pritom vrijedi $s \in \{\text{muški}, \text{ženski}\}$, $p \in \{\perp, \top\}$, $t \in \{1, 3, 5\}$ i $r \in \{\text{nizak}, \text{umjeren}, \text{visok}\}$. Zajednička razdioba faktorizirana je kao:

$$P(S, T, P, R) = P(S)P(T)P(P|S, T)P(R|P)$$

- (a) Skicirajte Bayesovu mrežu koja predstavlja izvedenu faktorizaciju. Primjenom uređajnoga Markovljevog svojstva izvedite pretpostavke uvjetne nezavisnosti varijabli koje su ugrađene u strukturu Bayesove mreže.
- (b) Koristeći pravila d-odvajanja, odredite pod kojim uvjetima su varijable x_1 i x_2 uvjetno nezavisne. Kako nam ta informacija može biti od koristi?

2 Zadaci s ispita

1. (P) Na slici ispod prikazana je Bayesova mreža koja odgovara polunaivnom Bayesovom klasifikatoru. Pretpostavite da su značajke x_1 , x_2 i x_3 binarne varijable te da je oznaka klase y također binarna varijabla. Označimo ovaj model sa \mathcal{H}_2 . Model \mathcal{H}_2 može se pojednostaviti ako se ukloni brid između varijabli x_2 i x_3 . Označimo takav model sa \mathcal{H}_1 . S druge strane, od modela \mathcal{H}_2 može se napraviti još složeniji model koji odgovara potpuno povezanom acikličkom grafu. Označimo takav model sa \mathcal{H}_3 .



Razmotrite koliko parametara imaju modeli \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 i \mathcal{H}_3 . **Koliko model \mathcal{H}_2 ima više parametara od modela \mathcal{H}_1 , a koliko manje parametara od modela \mathcal{H}_3 ?**

- ☐ A 2 više, 3 manje ☐ B 2 više, 6 manje ☐ C 4 više, 4 manje ☐ D 4 više, 8 manje

2. (P) Razmotrite Bayesovu mrežu koja zajedničku vjerojatnost faktorizira na sljedeći način:

$$P(w, x, y, z) = P(w)P(y)P(x|w, y)P(z|w)$$

Odredite topološki uređaj varijabli. Ako postoji više mogućih topoloških uređaja, izaberite onaj koji po leksičkom poretku dolazi prvi (npr. x, y, z dolazi prije x, z, y). Zatim primijenite uređajno Markovljevo svojstvo te izvedite sve uvjetne nezavisnosti koje su kodirane u ovoj Bayesovoj mreži. **Koje sve uvjetne nezavisnosti vrijede u ovoj Bayesovoj mreži?**

- ☐ A $w \perp y, z \perp \{x, y\} | w$ ☐ B $x \perp y | z, z \perp w | y$ ☐ C $w \perp y, z \perp x, x \perp w | \{z, y\}$ ☐ D $y \perp w, y \perp x | \{w, z\}$

3. (P) Bayesova mreža ima pet varijabli, od kojih su v , w i z binarne, a x i y ternarne varijable. Topološki uređaj varijabli neka je v, w, x, y, z . Uz takav uređaj, u mreži vrijede sljedeće marginalne i uvjetne nezavisnosti:

$$v \perp w \quad w \perp x | v \quad v \perp y | \{w, x\} \quad \{v, w\} \perp z | \{x, y\}$$

Izvedite faktorizaciju zajedničke distribucije koja odgovara ovoj Bayesovoj mreži. **Koliko parametara ima dotična Bayesova mreža?**

- ☐ A 10 ☐ B 22 ☐ C 25 ☐ D 27

4. (P) Bayesovom mrežom s pet binarnih varijabli modeliramo prometne prilike u gradu Zagrebu. U našoj mreži, jutarnje doba dana (J) i loše vrijeme (V) utječu na nastanak prometne gužve (G), u smislu da oba događaja povećavaju vjerojatnost nastanka prometne gužve. Loše vrijeme također utječe na nastupanje prometne nesreće (N), u smislu da povećava vjerojatnost prometne nesreće. Nadalje, nastupanje prometne nesreće utječe na nastanak prometne gužve, u smislu da povećava vjerojatnost nastanka prometne gužve. Loše vrijeme također utječe na zastoj tramvaja (T), u smislu da povećava vjerojatnost zastoja tramvaja. Međutim, nestanak struje (S) također uzorkuje zastoj tramvaja. Konačno, zastoj tramvaja uzrokuje masovno pješaćenje putnika (P), što opet povećava vjerojatnost prometne nesreće. U ovom kauzalnom modelu može nastupiti efekt objašnjavanja. **Kako bi se efekt objašnjavanja konkretno manifestirao?**

- ☐ A $P(V = 1|P = 1, T = 1) < P(V = 1|T = 1)$
☐ B $P(G = 1|J = 1, V = 1) > P(G = 1|J = 1)$
☐ C $P(V = 1|P = 1, N = 1) < P(V = 1|N = 1)$
☐ D $P(T = 1|V = 1, P = 1) > P(T = 1|V = 1)$

5. (P) Bayesova mreža ima pet varijabli, s topološkim uređajem v, w, x, y, z . Uz takav uređaj, u mreži vrijede sljedeće uvjetne nezavisnosti:

$$\{v, w\} \perp y | x \quad \{v, x\} \perp z | \{w, y\}$$

Primjenom algoritma d-odvajanja ispitujemo zavisnosti između parova varijabli. **Koje od sljedećih tvrdnji o nezavisnosti vrijede u ovoj Bayesovoj mreži?**

- ☐ A $x \perp z | w$ ☐ B $v \perp y | w$ ☐ C $x \perp z | y$ ☐ D $v \perp y | x$

6. (P) Razmotrite Bayesovu mrežu sa šest čvorova koja odgovara sljedećoj faktorizaciji:

$$P(u, v, w, x, y, z) = P(u|x)P(v|x)P(w|v, x)P(x)P(y|u, x, z)P(z|v, w)$$

Upotrijebite metodu d-odvajanja da biste ispitali uvjetnu nezavisnost varijabli x i z u ovisnosti o preostale četiri varijable. Ispitajte koje varijable od preostalih četiri varijabli trebaju biti opažene a koje neopažene, a da bi varijable x i z bile d-odvojene. **Za koju od preostale četiri varijable je svejedno je li opažena, ako su varijable x i z d-odvojene?**

- ☐ A u ☐ B v ☐ C w ☐ D y