Progetto maple punto b
Antonio Marino - Matricola 179054
Costruire il Diagramma di Bode per la seguente funzione di trasferimento

$$G := s \rightarrow \frac{(3 \cdot s + 1)}{s \cdot \left(s^2 - \frac{1}{4} \cdot s + 1\right)} :$$

Il diagramma di Bode è una rappresentazione grafica della risposta in frequenza di una funzione di trasferimento G(s).

Tale rappresentazione grafica viene separata dal modulo di |G(jω)| e della sua fase ∠G (jω).

carico il tool che mette a disposizione gli strumenti per lavorare nel dominio della trasformata di Laplace:

$with(inttrans) :$

determiniamo zeri e poli della f.d.t

$zeriG := solve(numer(G(s)) = 0, s)$

$$zeriG := -\frac{1}{3} \tag{1}$$

La funzione presenta uno zero a fase minima (semipiano sinistro)

$poliG := solve(denom(G(s)) = 0, s)$

$$poliG := 0, \frac{1}{8} + \frac{3\,\mathrm{I}\sqrt{7}}{8}, \frac{1}{8} - \frac{3\,\mathrm{I}\sqrt{7}}{8} \tag{2}$$

Il sistema non è BIBO stabile, abbiamo un polo nell'origine e due poli complessi e coniugati (dovuti alla presenza del termine trinomio), che si trovano nel semipiano destro, e sono detti poli instabili.

il trinomio non scomponibile $s^2 - \frac{1}{4}s + 1$ può essere riscritto come $s^2 - 2 \cdot \delta \cdot \omega_n + \omega_n^2$ (perchè abbiamo la parte reale dei poli complessi e coniugati nel semipiano destro) di cui determiniamo la pulsazione naturale e smorzamento.

$trinomio := solve\left(\left\{\omega_n^2 = 1, \omega_n > 0, -2 \cdot \delta \cdot \omega_n = -\frac{1}{4}\right\}, \{\omega_n, \delta\}\right)$

$$trinomio := \left\{\delta = \frac{1}{8}, \omega_n = 1\right\} \tag{3}$$

Assegniamo ora le variabili pulsazione naturale e smorzamento del termine trinomio

$\omega_n := rhs(trinomio[2])$

$$\omega_n := 1 \quad (4)$$

$\delta := rhs(trinomio[1])$

$$\delta := \frac{1}{8} \quad (5)$$

Notiamo che il valore dello smorzamento è inferiore al valore critico rispetto al quale si verifica il fenomeno di risonanza

$$evalb\left(evalf\left(\delta < \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = true$$

Per cui determiniamo anche la pulsazione di risonanza

$\omega_r := \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \delta^2}$

Calcoliamo anche il valore del picco di risonanza del termine trinomio

$M_r := \dfrac{1}{2 \cdot \delta \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \delta^2}}$

Valutiamolo ora il picco di risonanza in decibel:

$$evalf(20 \cdot \log 10(|M_r|)) = 12.17908267$$

Abbiamo bisogno di altre informazioni per ricavarci i due diagrammi:

Il numero di poli nell'origine :

$\mu := numboccur([poliG], 0)$

$$\mu := 1 \quad (6)$$

La pulsazione di rottura dello zero:

$\Omega := |(zeriG)|$

$$\Omega := \frac{1}{3} \quad (7)$$

Il Guadagno di Bode:

$K_b := \lim_{s \to 0} s^{\mu} \cdot G(s)$

$$K_b := 1 \quad (8)$$

Carico il tool che mi permette di rappresentare graficamente il modulo e la fase:

$with(plots) :$

Ora definisco le due funzioni modulo per tracciare il diagramma approssimato, è quello che consente di considerare il contributo del termine trinomio:

$$F_{modulo} := (\omega, \omega_t) \rightarrow \begin{cases} 0 & \omega < \omega_t \\ 20 \cdot \log10\left(\dfrac{\omega}{\omega_t}\right) & otherwise \end{cases} :$$

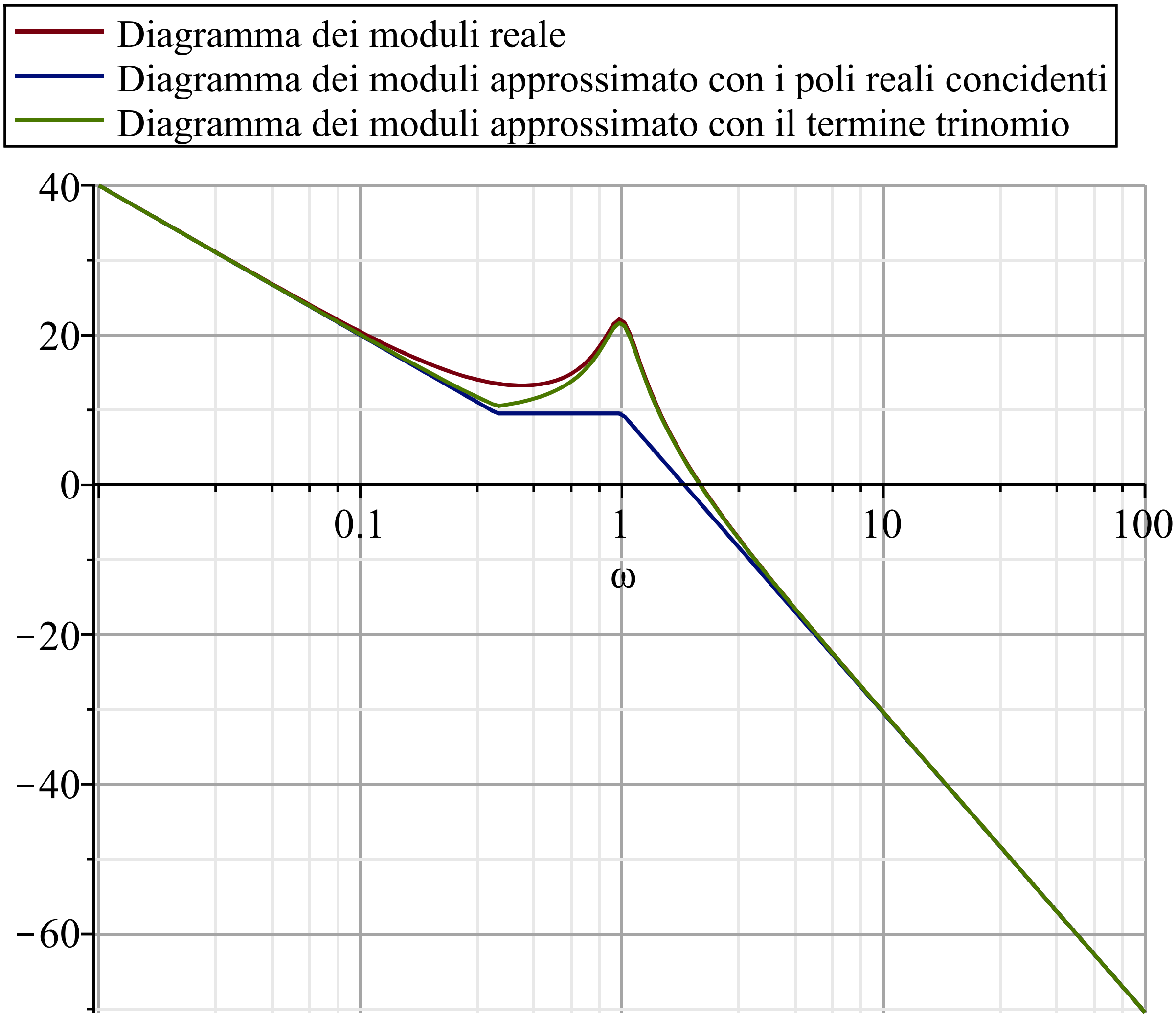
$$F_{modulotri} := (\omega, \omega_n, \delta) \rightarrow 20 \cdot \log10\left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot \delta \cdot \omega}{\omega_n}\right)^2}\right) :$$

Utilizziamo le due funzioni in base alle informazioni poco prima ricavate:

$$moduloApp := \omega \rightarrow 20 \cdot \log10(|K_b|) + F_{modulo}(\omega, \Omega) - 20 \cdot \mu \cdot \log10(\omega) - 2 \cdot F_{modulo}(\omega, \omega_n) :$$
$$moduloApptri := \omega \rightarrow 20 \cdot \log10(|K_b|) + F_{modulo}(\omega, \Omega) - 20 \cdot \mu \cdot \log10(\omega) - F_{modulotri}(\omega, \omega_n, \delta) :$$

Tracciamo il diagramma dei moduli effettivo,quello approssimato considerando una coppia di poli reali coincidenti,e quello con il contributo del termine trinomio:

```
semilogplot( [20·log10(|G(I·ω)|), moduloApp(ω), moduloApptri(ω) ], ω = 0.01 ..100, gridlines,
    legend
    = ["Diagramma dei moduli reale"iagramma dei moduli approssimato con i poli reali concidenti",
    "Diagramma dei moduli approssimato con il termine trinomio" ])
```



Per il diagramma dei modulo dividiamo le pulsazioni in due regioni: una di bassa frequenza ed una di alta frequenza,la prima la determino considerando la pulsazione di rottura più bassa considerando zeri e poli, quella di alta frequenza prendiamo la pulsazione di rottura più alta.

Non sono presenti slittamenti per quel che riguarda il diagramma, perchè il guadagno di bode è pari a 1.

vediamo le pendenze asintotiche:

in bassa frequenza abbiamo -20dB/dec a causa del polo nell'origine

in alta frequenza si ottiene attraverso la somma algebrica dei diversi elementi dinamici (gli zeri che tendono ad amplificare, poli che tendono di attenuare),

20*(1 zero -1 polo nell'origine -2poli) = -40dB/dec.

Ora definisco le due funzioni fase per tracciare il diagramma approssimato, è quello che ci consente ci considerare il contributo del termine trinomio:

$$F_{fase} := (\omega, \omega_t) \rightarrow \begin{cases} 0 & \dfrac{\omega}{\left(\dfrac{\omega_t}{10}\right)} < 1 \\ \dfrac{\pi}{4} \cdot \log10\left(\dfrac{\omega}{\left(\dfrac{\omega_t}{10}\right)}\right) & \dfrac{\omega_t}{10} \le \omega < 10\,\omega_t \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{otherwise} \end{cases} :$$

$$F_{fasetri} := (\omega, \omega_n, \delta) \rightarrow \arg\left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right) + \frac{2 \cdot I \cdot \delta \cdot \omega}{\omega_n}\right) :$$

Come fatto per i moduli costruiamo in base alle informazioni ricavate prima:

$$faseapp := \omega \rightarrow \arg(K_b) + \mathrm{signum}(-zeriG) \cdot F_{fase}(\omega, \Omega) - \frac{\mu \cdot \pi}{2} + 2 \cdot F_{fase}(\omega, \omega_n) :$$

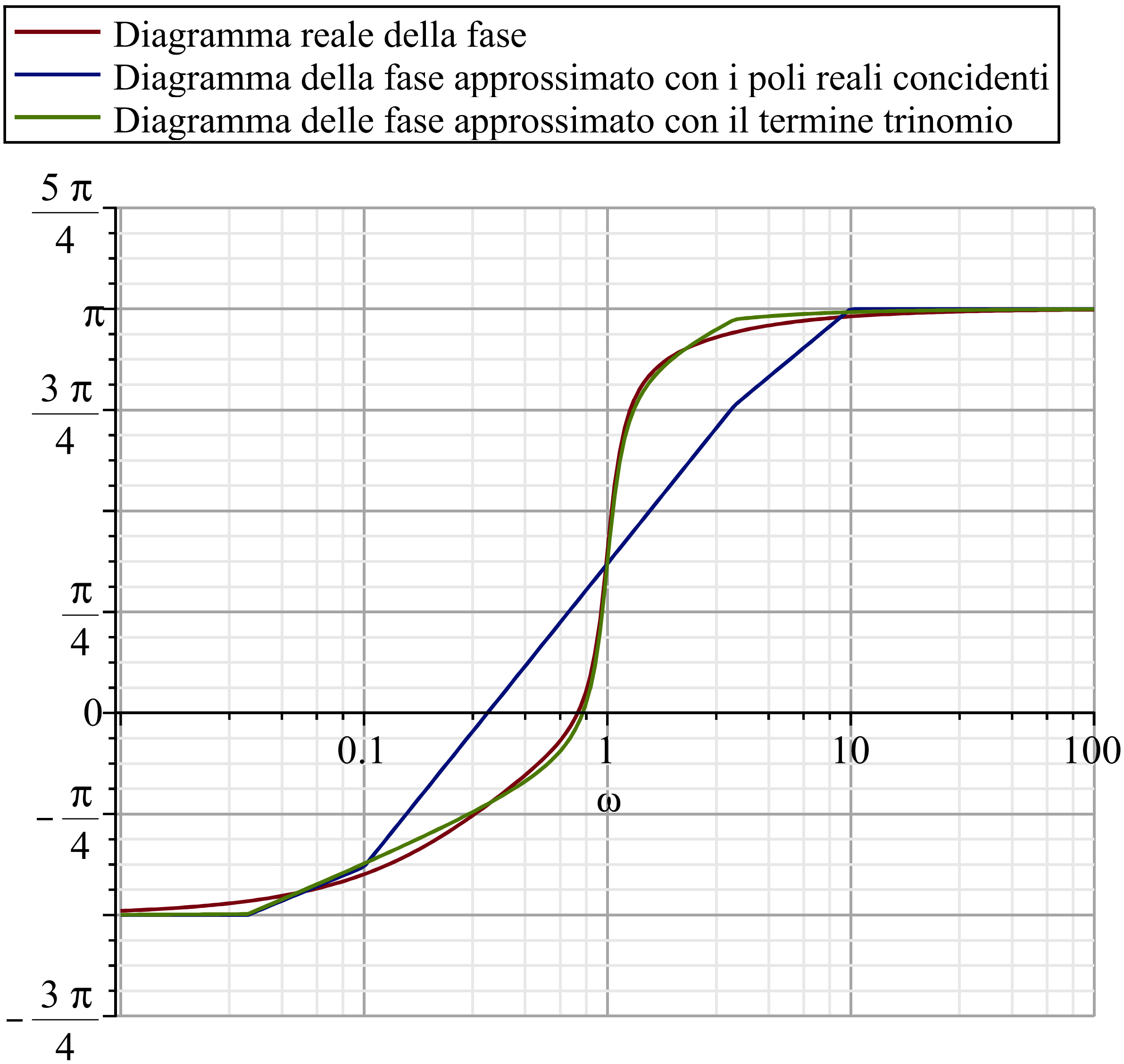
$$faseapptri := \omega \rightarrow \arg(K_b) + \mathrm{signum}(-zeriG) \cdot F_{fase}(\omega, \Omega) - \frac{\mu \cdot \pi}{2} + F_{fasetri}(\omega, \omega_n, \delta) :$$

$$fasereale := \omega \rightarrow \arg(K_b) + \mathrm{signum}(-zeriG) \cdot \arg\left(1 + \frac{I \cdot \omega}{\Omega}\right) - \frac{\mu \cdot \pi}{2} + F_{fasetri}(\omega, \omega_n, \delta) :$$

Tracciamo il diagramma delle fasi effettivo, quello approssimato considerando una coppia di poli reali coincidenti,e quello con il contributo del termine trinomio:

$$semilogplot\left([fasereale(\omega), faseapp(\omega), faseapptri(\omega)], \omega = 0.01\,..100, -\frac{3\pi}{4}\,..\frac{5\pi}{4}, gridlines,\right.$$

legend = ["Diagramma reale della fase",
"Diagramma della fase approssimato con i poli reali concidenti",
"Diagramma delle fase approssimato con il termine trinomio"])



Per il diagramma delle fasi consideriamo tre regioni bassa, media e alta frequanza, per determinare la partenza delle fasi in bassa frequenza consideriamo solo il polo nell'origine che da contributo pari a -90 gradi, (il guadagno di bode dato che è positivo non da nessun contributo).

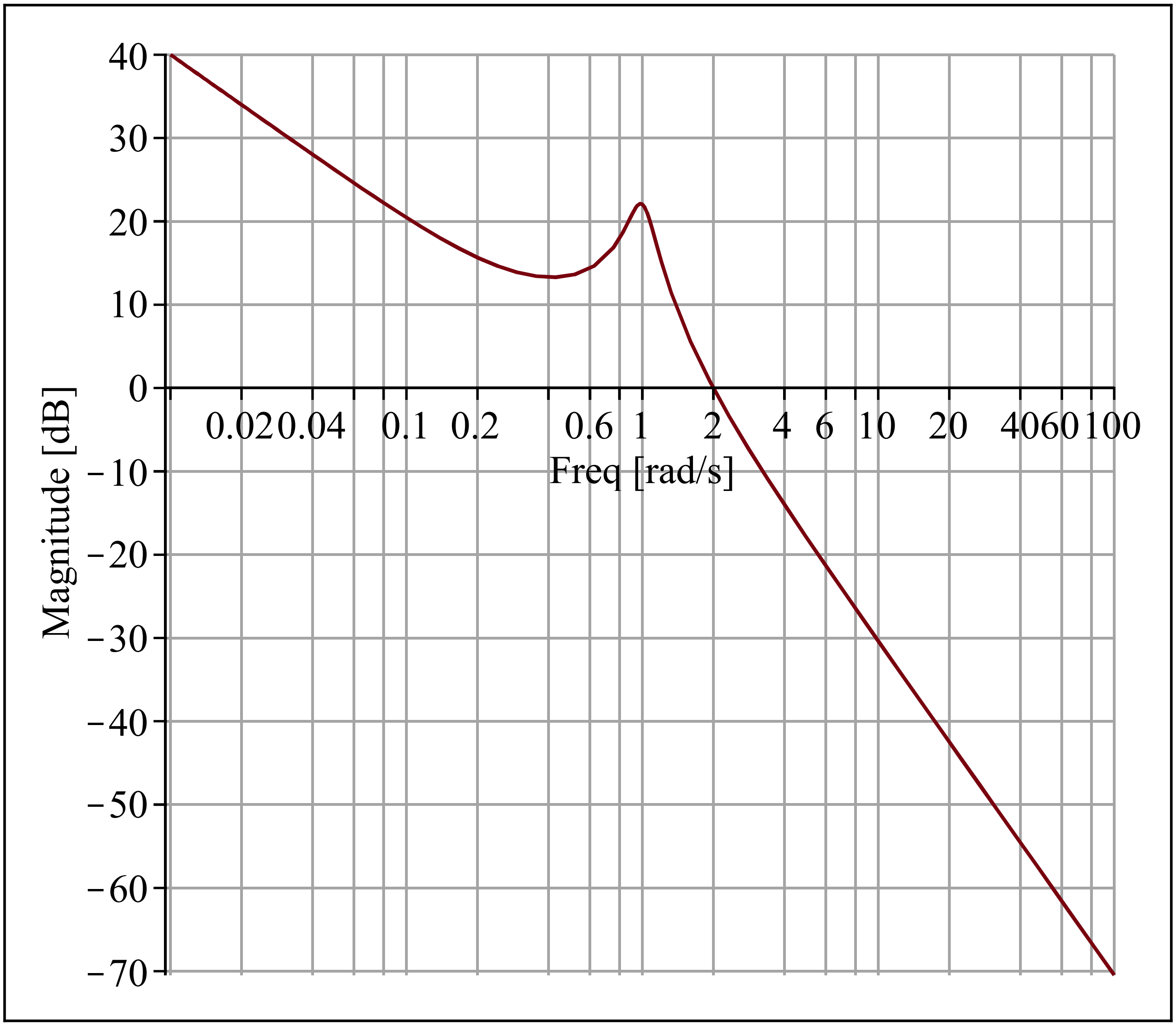
in alta frequanza, abbiamo uno zero a fase minima,un polo nell'origine ed una coppia di poli complessi e coniugati instabili,.

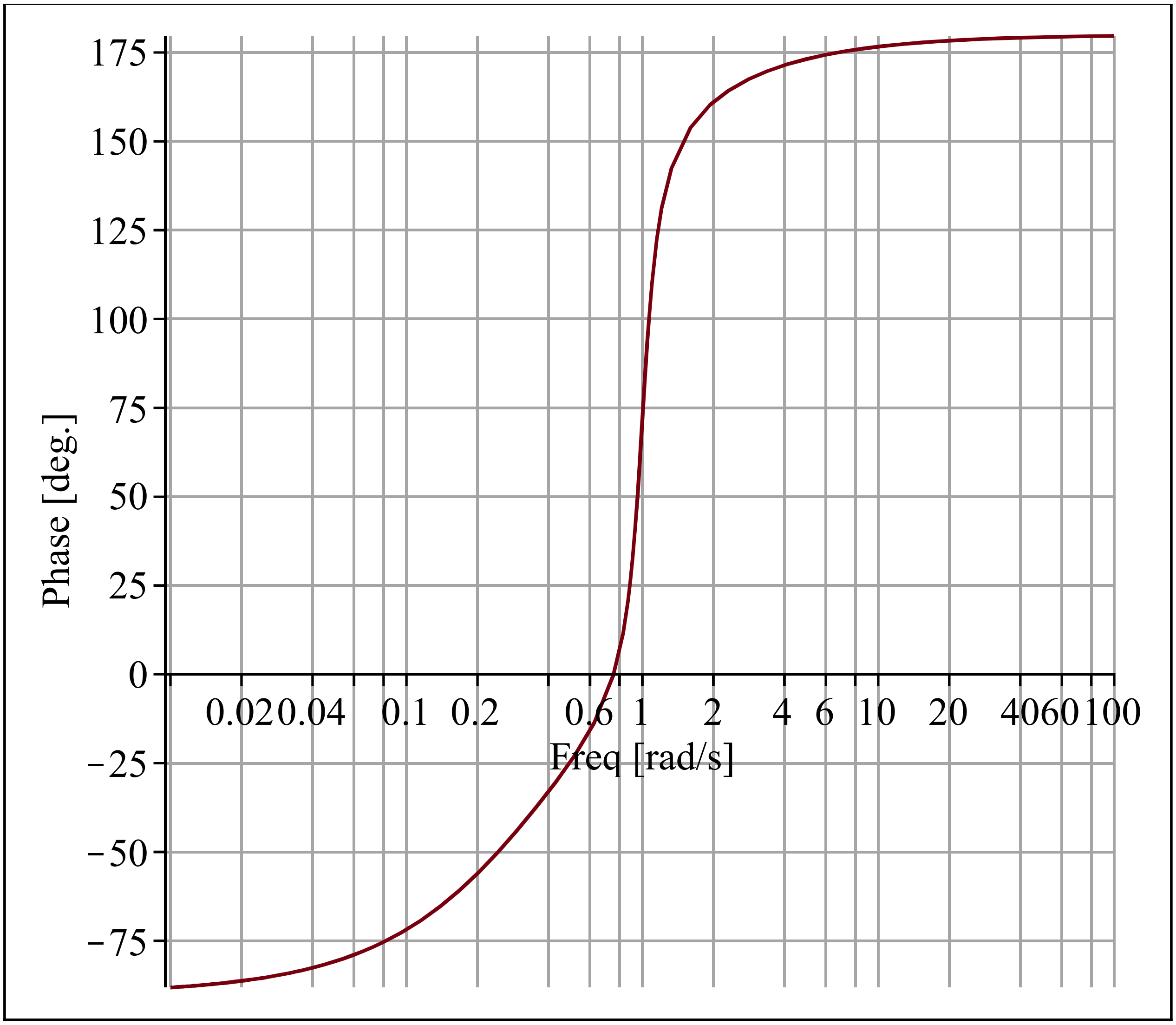
Tutte queste componenti portano in anticipo il diagramma delle fasi fino a farlo arrivare a 180 gradi.

Utilizzo questo tool per verificare la corretta rappresentazione dei diagramma di bode:

$with(DynamicSystems)$:

$$BodePlot\left(TransferFunction\left(\frac{(3\cdot s+1)}{s\cdot\left(s^2-\frac{1}{4}\cdot s+1\right)}\right)\right)$$





Phase [deg.]
175
150
125
100
75
50
25
0
−25
−50
−75
0.02
0.04
0.1
0.2
0.6
1
2
4
6
10
20
40
60
100
Freq [rad/s]