Progetto Maple punto a

Antonio Marino - Matricola 179054

Si consideri un sistema lineare e stazionario a tempo continuo descritto dalla seguente risposta al gradino

$$y := t \to \left(-\frac{2}{17} \cdot \sin(2\, t) \cdot \exp\left(-\frac{t}{2} \right) + \frac{4}{17} - \frac{4 \cdot \exp(-t)}{17} \right) \cdot \mathrm{Heaviside}(t) :$$

1. la funzione di trasferimento del sistema ed i suoi poli e zeri

Carico il tool che mi mette a disposizione gli strumenti per lavorare nel dominio della trasformata di Laplace

$with(inttrans) :$

La funzione di trasferimento è una funzione a variabile complessa che rappresenta il comportamento del sistema mettendo in relazione il suo ingresso con la sua uscita.
La funzione 'u' rappresenta l'ingresso del sistema,mentre la funzione 'y' rappresenta l'uscita.
Abbiamo come ingresso un gradino quindi ribattezzo 'u' la funzione

$u := t \to \ \mathrm{Heaviside}(t)$

$$u := t \mapsto \mathrm{Heaviside}(t) \tag{1}$$

siano U e Y le trasformate di Laplace di u ed y

$U := s \to laplace(u(t), t, s) :$
$U(s)$

$$\frac{1}{s} \tag{2}$$

$Y := s \to laplace(y(t), t, s) :$
$Y(s)$

$$\frac{4}{s\left((2\, s+1)^2+16\right)\,(s+1)} \tag{3}$$

Per ricavare la funzione di trasferimento utilizziamo la relazione ingresso-uscita nella trasformata di Laplace Y(s)=G(s)*U(s) .

$G(s) := \dfrac{Y(s)}{U(s)}$

$$G := s \mapsto \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{4}$$

La G(s) è caratterizzata da due polinomi :
Polinomio degli zeri (polinomio al numeratore)
Polinomio dei poli (polinomio al denominatore, chiamato anche polinomio caratteristico)

$G(s)$

$$\frac{4}{\left((2s+1)^2+16\right)(s+1)} \quad (5)$$

in questo caso non abbiamo zeri quindi vado a calcolare i poli.
I poli della funzione di trasferimento si ottengono ponendo uguale a zero il denominatore della funzione di trasferimento:

$poli := solve(denom(G(s)), s)$

$$poli := -1, -\frac{1}{2}+2\,I, -\frac{1}{2}-2\,I \quad (6)$$

Il sistema quindi presenta un polo reale coincidente in -1 , ed una coppia di poli complessi coniugati dovuti al termine trinomio, dunque il sistema considerato è BIBO stabile.

2. i modi di evoluzione libera del sistema

I modi di evoluzione libera di un sistema sono il contributo che il sistema fornisce alla risposta. Il numero dei modi corrisponde al grado del denominatore di G(s) (in questo caso sono 3), per ottenerli bisogna calcolare l'antitrasformata della funzione di trasferimento.

$g := t \rightarrow invlaplace(G(s), s, t)$:
$expand(g(t), op(indets(g(t), specfunc(anything, \{\exp, \sin, \cos\}))))$

$$\frac{4\,e^{-t}}{17} - \frac{4\,e^{-\frac{t}{2}}\cos(2t)}{17} + \frac{\sin(2t)\,e^{-\frac{t}{2}}}{17} \quad (7)$$

I modi sono :

-Per il polo reale con molteplicità 1: $\frac{4\,e^{-t}}{17}$ detto modo esponenziale

-Per i poli complessi e coniugati : $-\frac{4\,e^{-\frac{t}{2}}\cos(2t)}{17} + \frac{\sin(2t)\,e^{-\frac{t}{2}}}{17}$ detti modi pseudo-oscillatori

3. la risposta all'impulso del sistema

La risposta d'impulso al sistema viene calcolata attraverso l'antitrasformata della funzione di trasferimento, perchè il segnale di ingresso è l'impulso di Dirac la cui trasformata di Laplace è pari ad 1,
di conseguenza avremo che G(s)=Y(s).

$y_{impulso} := t \rightarrow invlaplace(G(s), s, t)$:
$y_{impulso}(t)$

$$\frac{4\,e^{-t}}{17} + \frac{e^{-\frac{t}{2}}\left(-4\cos(2t)+\sin(2t)\right)}{17} \quad (8)$$

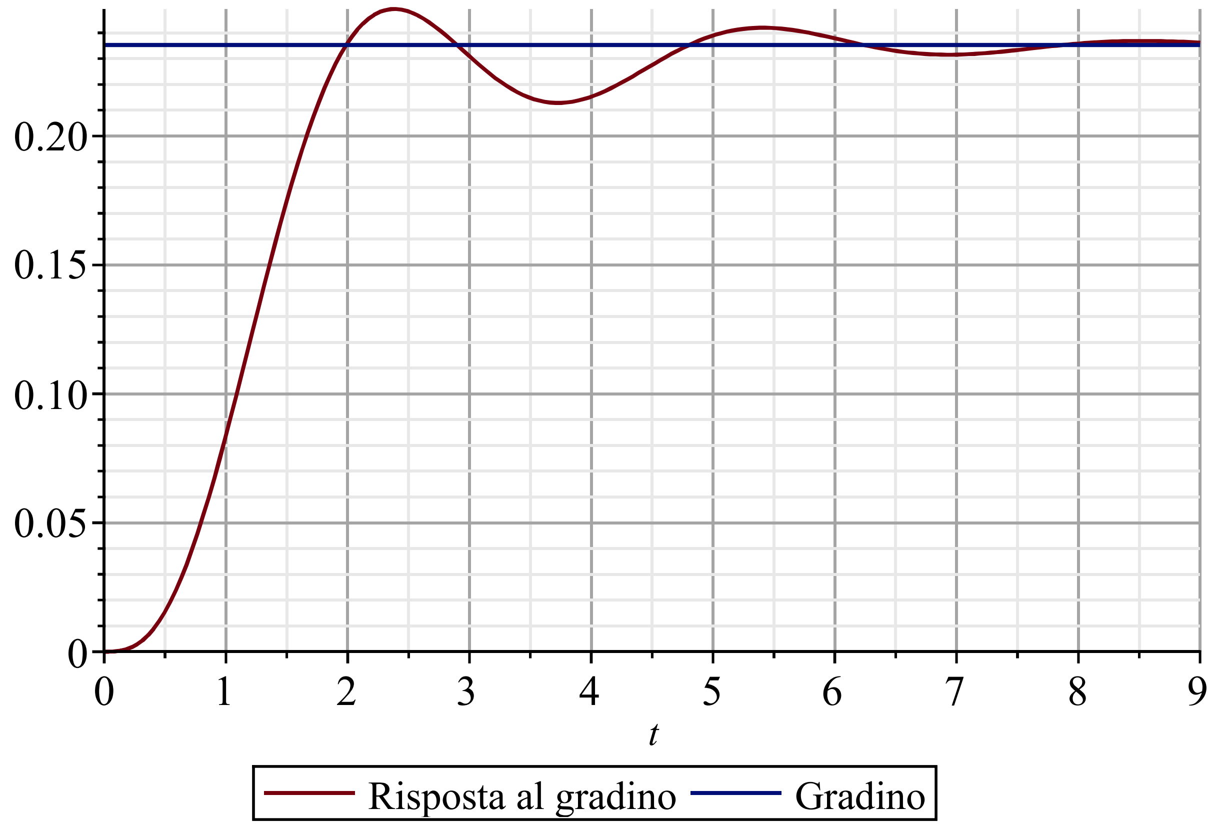
4. il grafico della risposta al gradino

La risposta al gradino è quella particolare risposta forzata che ha come ingresso un segnale gradino,come da traccia senza passare nel dominio della trasformata di Laplace posso andarla a rappresentarla, dato che il sistema è BIBO Stabile posso andare a trovare il suo valore di regime $y_{ss} = 4/17$.

$y_{ss} := \lim_{t \to +\text{infinity}} y(t)$

$$y_{ss} := \frac{4}{17} \quad (9)$$

$plot\left(\left[y(t), y_{ss}(s)\right], t = 0..9, gridlines = true, legend = [\text{"Risposta al gradino"}, \text{"Gradino"}]\right)$



a transitorio esaurito vediamo che la risposta va a concidere con il valore di regime

5. la risposta alla rampa

La funzione di ingresso che andiamo a considerare è la rampa che nel dominio del tempo può essere definita come la quadratura della risposta al gradino

$y_{rampa} := t \rightarrow \int_0^t y(\tau)\, d\tau :$

$subs\left(\{\text{Heaviside}(t) = 1\}, y_{rampa}(t)\right)$

$$\frac{16\, e^{-\frac{t}{2}} \cos(2\, t)}{289} + \frac{4 \sin(2\, t)\, e^{-\frac{t}{2}}}{289} - \frac{84}{289} + \frac{4\, e^{-t}}{17} + \frac{4\, t}{17} \quad (10)$$

Un modo alternativo sarebbe prendere la funzione di trasferimento determinata nel punto

1 e moltiplicarla per (1/s^2)

che sarebbe la trasformata di laplace del segnale rampa u(t) = t * yHeavidide(t)

$$invlaplace\left(\frac{G(s)\cdot 1}{s^2}, s, t\right)$$

$$-\frac{84}{289} + \frac{4\,t}{17} + \frac{4\,e^{-t}}{17} + \frac{4\,e^{-\frac{t}{2}}\,(4\cos(2\,t) + \sin(2\,t))}{289} \tag{11}$$

6. un possibile modello ARMA la cui funzione di trasferimento `e quella ottenuta nel primo punto dell'esercizio

Un modello ARMA è una rappresentazione ingresso-uscita che fornisce istante per istante un valore di uscita che si basa sui valori precedenti in entrata e in ingresso. Consideriamo questa relazione Y(s)=G(s)*U(s) la funzione di trasferimento è nota, posso scriverla come rapporto di due polinomi G(s) = $\frac{n_g(s)}{d_g(s)}$

$$G(s)$$

$$\frac{4}{\left((2\,s+1)^2+16\right)\,(s+1)} \tag{12}$$

$n_g(s) := numer(\mathbf{(12)})$:
$d_g(s) := denom(\mathbf{(12)})$:

A questo punto data la relazione sopra indicata moltiplichiamo ambo i membri per il denomintore della funzione di trasferimento

$$d_g(s)\cdot Y_{ARMA}(s) = n_g(s)\cdot U_{ARMA}(s)$$

$$\left(4\,s^2+4\,s+17\right)\,(s+1)\,Y_{ARMA}(s) = 4\,U_{ARMA}(s) \tag{13}$$

$$expand(\mathbf{(13)})$$

$$4\,Y_{ARMA}(s)\,s^3 + 8\,Y_{ARMA}(s)\,s^2 + 21\,Y_{ARMA}(s)\,s + 17\,Y_{ARMA}(s) = 4\,U_{ARMA}(s) \tag{14}$$

Per ricavare il modello ARMA utilizzo il teorema della derivata e sappiamo che:

$$L\left\{f^n(t)\right\} = s^n\cdot F(s) - s^{(n-1)}\cdot f(0) - s^{(n-2)}\cdot f'(0) - s^0\cdot f^{(n-1)}(0)$$

supponiamo che il sistema sia in quiete quindi le derivare sono nulle: $L\left\{f^n(t)\right\} = s^n\cdot F(s)$ utilizzando la linearità delle operazioni applico la trasformata nel dominio del tempo per otterenere il modello ARMA

$$invlaplace(\mathbf{(13)}, s, t)$$

$$4\,invlaplace\left(Y_{ARMA}(s)\,s^3, s, t\right) + 8\,invlaplace\left(Y_{ARMA}(s)\,s^2, s, t\right) + 21\,invlaplace\left(Y_{ARMA}(s)\,s, s, t\right) + 17\,invlaplace\left(Y_{ARMA}(s), s, t\right) = 4\,invlaplace\left(U_{ARMA}(s), s, t\right) \tag{15}$$

Con alcune sostituzioni otterrò:

$$subs\Big(\Big\{invlaplace\left(Y_{ARMA}(s)\,s^3, s, t\right) = y_{ARMA}'''(t), invlaplace\left(Y_{ARMA}(s)\,s^2, s, t\right) = y_{ARMA}''(t), invlaplace\left(Y_{ARMA}(s)\,s, s, t\right) = y_{ARMA}'(t), invlaplace\left(Y_{ARMA}(s), s, t\right) = y_{ARMA}(t), invlaplace\left(U_{ARMA}(s), s,$$

$t) = u_{ARMA}(t)\}, \mathbf{(15)})$

$$4\,D^{(3)}(y_{ARMA})(t) + 8\,D^{(2)}(y_{ARMA})(t) + 21\,D(y_{ARMA})(t) + 17\,y_{ARMA}(t) = 4\,u_{ARMA}(t) \qquad \mathbf{(16)}$$

7. tenendo conto del modello determinato al punto precedente valutare la risposta all'ingresso: u(t) = 1(-t) + t 1(t)

Per la proprietà della linearità è possibile calcolare la risposta all'ingresso, facendo la somma della risposta 1(-t) che chiamo u_g e della risposta t*1(t) che chiamo u_r

$u_g(t) := \text{Heaviside}(-t):$

$u_r(t) := t\cdot\text{Heaviside}(t):$

Ricordiamo che in un sistema lineare e stazionario descritto dal modello i-u è possibile calcolare la risposta ad un ingresso sommando l'uscita forzata all'uscita libera

$$Y(s) = Y_f(s) + Y_l(s)$$

Questo risultato è un'applicazione del principio di sovvrapposizione degli effetti, Per calcolare l'uscita facciamo due esperimenti:

1) Porre le condizioni iniziali diverse da zero, e tenere l'ingresso uguale a zero per avere la risposta libera.

2) Per otterenere la risposta forzata teniamo a zero le condizioni iniziali, e considerare l'ingresso diverso da zero.

Supponiamo che il segnale in ingresso 1(-t) sia stato applicato nel passato remoto, questo fa si che all'istante di tempo 0 la risposta forzata non dà più nessun contributo, quindi abbiamo solo il contributo della risposta libera.

$laplace(\mathbf{(16)}, t, s)$

$$4\,s^3\,laplace(y_{ARMA}(t), t, s) - 4\,D^{(2)}(y_{ARMA})(0) - 4\,s\,D(y_{ARMA})(0) - 4\,s^2\,y_{ARMA}(0) + 8\,s^2\,laplace(y_{ARMA}(t), t, s) - 8\,D(y_{ARMA})(0) - 8\,s\,y_{ARMA}(0) + 21\,s\,laplace(y_{ARMA}(t), t, s) - 21\,y_{ARMA}(0) + 17\,laplace(y_{ARMA}(t), t, s) = 4\,laplace(u_{ARMA}(t), t, s) \qquad \mathbf{(17)}$$

$subs(\{laplace(y_{ARMA}(t), t, s) = Y_g(s), laplace(u_{ARMA}(t), t, s) = U_g(s)\}, \mathbf{(17)})$

$$4\,s^3\,Y_g(s) - 4\,D^{(2)}(y_{ARMA})(0) - 4\,s\,D(y_{ARMA})(0) - 4\,s^2\,y_{ARMA}(0) + 8\,s^2\,Y_g(s) - 8\,D(y_{ARMA})(0) - 8\,s\,y_{ARMA}(0) + 21\,s\,Y_g(s) - 21\,y_{ARMA}(0) + 17\,Y_g(s) = 4\,U_g(s) \qquad \mathbf{(18)}$$

Guadagno statico del sistema:

$$y_{Gneg} := eval(G(s), s=0) = \frac{4}{17}$$

Per calcolare la risposta libera è necessario sostituire l'uscita con il guadagno statico y_{Gneg} appena trovato, azzerare l'ingresso e le derivate delle condizioni iniziali:

$eval\left(\mathbf{(18)}, \left[y_{ARMA}(0)=y_{neg}, \mathrm{D}^{(2)}\left(y_{ARMA}\right)(0)=0, \mathrm{D}\left(y_{ARMA}\right)(0)=0, U_g(s)=0\right]\right)$

$$4 s^3 Y_g(s) - \frac{84}{17} - \frac{16 s^2}{17} + 8 s^2 Y_g(s) - \frac{32 s}{17} + 21 s Y_g(s) + 17 Y_g(s) = 0 \qquad \mathbf{(19)}$$

$solve\left(\mathbf{(19)}, Y_g(s)\right)$

$$\frac{4\left(4 s^2+8 s+21\right)}{17\left(4 s^3+8 s^2+21 s+17\right)} \qquad \mathbf{(20)}$$

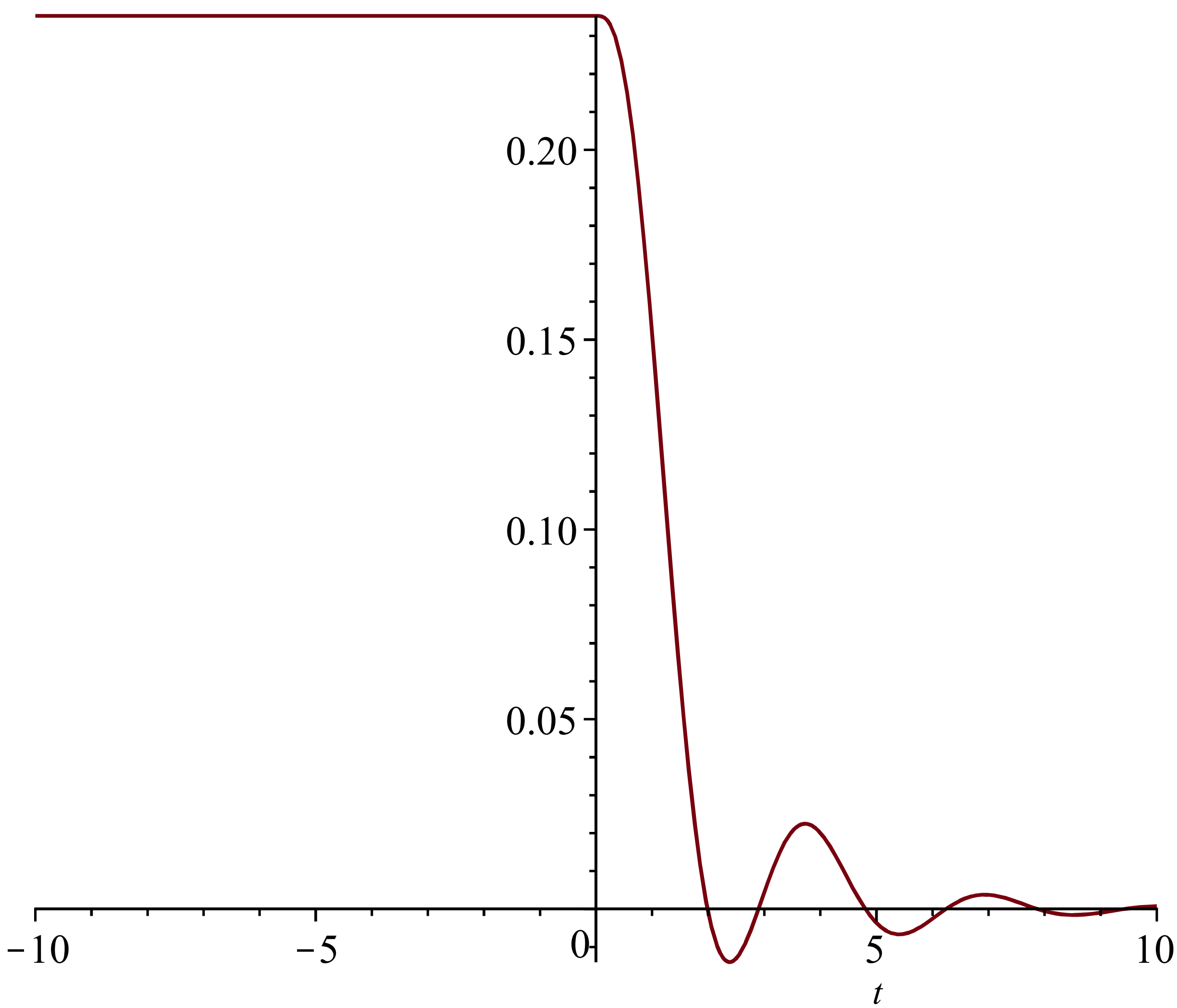
$y_l := invlaplace(\mathbf{(20)}, s, t)$

$$y_l := \frac{2 \sin(2 t)\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{17} + \frac{4\, \mathrm{e}^{-t}}{17} \qquad \mathbf{(21)}$$

Uscita totale per quel che riguarda il segnale 1(-t) :

$$y_t := \begin{cases} y_{Gneg} & t \leq 0 \\ y_l & t > 0 \end{cases} :$$

$plot\left(y_t(t), t=-10..10\right)$



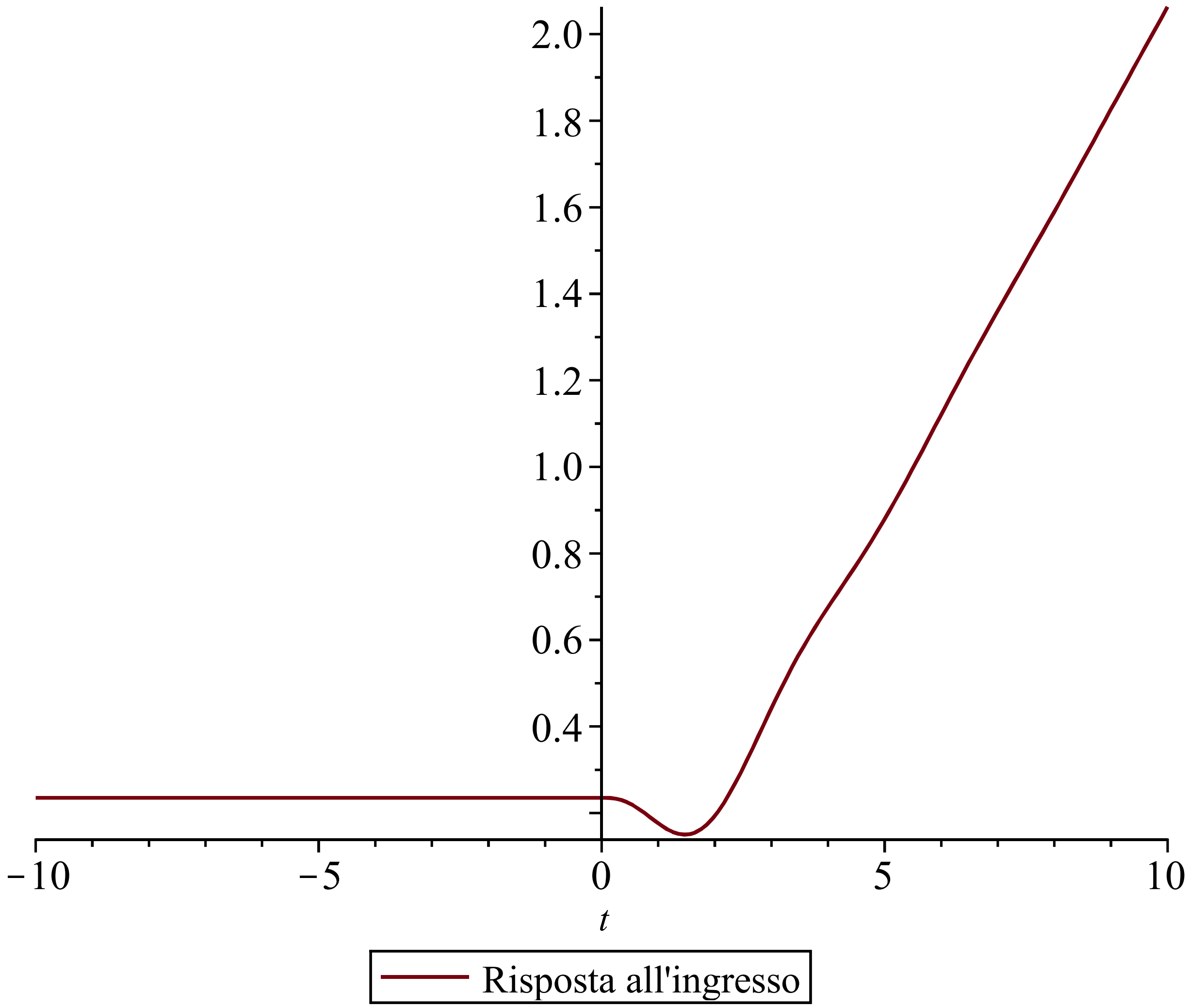
Per quel che riguarda la risposta di $u_r(t)$ visto che si tratta di un ingresso noto come rampa, che abbiamo già calcolato, possiamo andare a rappresentare graficamente la risposta all'ingresso dato :

$subs(\{\mathrm{Heaviside}(t) = 1\}, y_{rampa}(t))$

$$\frac{16\,e^{-\frac{t}{2}}\cos(2\,t)}{289} + \frac{4\sin(2\,t)\,e^{-\frac{t}{2}}}{289} - \frac{84}{289} + \frac{4\,e^{-t}}{17} + \frac{4\,t}{17} \tag{22}$$

$$y_{tot} := t \to \begin{cases} y_{Gneg} + 0 & t \le 0 \\ y_l(t) + y_{rampa}(t) & t > 0 \end{cases} :$$

$plot(y_{tot}(t), t = -10..10, legend = (\text{"Risposta all'ingresso"}))$


2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
−10
−5
0
5
10
t
Risposta all'ingresso