现代精算风险理论课程作业一

刘辰昂*

2013 年 8 月 16 日

*农业资源与环境1001,学号3100100050,Email:liuchenang@gmail.com

1 确定下列符合分布形式

1.1

$N \sim NB(r,\theta), X \sim P(\lambda)$

解：先求该复合分布的矩母函数，即

$$m_S(t) = E[E[e^{tS}|N]] = \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_N)}|N=n] \cdot Pr[N=n]$$

又对于任意的$n>0$，根据负二项分布的性质有

$$Pr[N=n] = C_{r-1}^{n+r-1}\theta^r(1-\theta)^n$$

又X_i的矩母函数为

$$M_X(t) = E[e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}] = e^{\lambda(e^t-1)}$$

N的矩母函数为

$$M_N(t) = (\frac{\theta}{1-(1-\theta)e^t})^r$$

所以S的矩母函数函数为

$$M_S(t) = M_N[\log M_X(t)] = (\frac{\theta}{1-(1-\theta)e^{n\lambda(e^t-1)}})^r$$

1.2

$N \sim NB(r,\theta), X \sim B(n,\theta)$

由上小题结论可知：

$$M_S(t) = M_N[\log M_x(t)]$$

又

$$M_X(t) = (1-\theta+\theta e^t)^n$$
$$M_N(t) = (\frac{\theta}{1-(1-\theta)e^t})^r$$

联立上式即有

$$M_S(t) = M_N[\log M_x(t)] = (\frac{\theta}{1-(1-\theta)(1-\theta+\theta e^t)^n})^r$$

1.3

$N \sim B(n,\theta), X \sim G(\theta)$

解：由上小题结论可知：

$$M_S(t) = M_N[\log M_x(t)]$$

又

$$M_X(t) = \frac{\theta}{1-(1-\theta)e^t}$$
$$M_N(t) = (1-\theta+\theta e^t)^n$$

联立上式即有

$$M_S(t) = M_N[\log M_x(t)] = (1-\theta+\frac{\theta^2}{1-(1-\theta)e^t})^n$$

1.4

$N \sim B(n,\theta), X \sim B(m,\theta)$

解：由上小题结论可知：

$$M_S(t) = M_N[\log M_x(t)]$$

又

$$M_X(t) = (1-\theta+\theta e^t)^m$$
$$M_N(t) = (1-\theta+\theta e^t)^n$$

联立上式即有

$$M_S(t) = M_N[\log M_x(t)] = (1-\theta+\theta(1-\theta+\theta e^t)^m)^n$$

2 零调整分布

假设$X \sim G(0.1)$，
(1)求X的零调整分布Y，其中$f_Y(0) = 0.3$;
(2)求随机变量Y的均值和方差.
解:
(1)由题设可知

$$f_X(x) = \theta(1-\theta)^x, x = 0, 1, 2, \cdots$$

又

$$\sum_{y=0}^{\infty} f_Y(y) = 1$$

$\therefore$

$$\sum_{y=1}^{\infty} f_Y(y) = \sum_{y=1}^{\infty} k\theta(1-\theta)^y = 0.7$$

代入数据得$k = \frac{7}{9}$
(2)

$$\begin{aligned} E[Y] &= k\mu_x = \frac{7}{9} \cdot 9 = 7 \\ E[Y^2] &= k({\mu_x}^2 + \sigma_x) = \frac{7}{9} \cdot (9^2 + 9) = 70 \end{aligned}$$

所以由方差定义

$$var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 70 - 49 = 21$$

3 复合泊松分布

3.1

假设$N_i \sim P(\lambda_i), i = 1, \cdots, n$相互独立，定义

$$S = x_1 N_1 + x_2 N_2 + \cdots + x_n N_n$$

其中x_i是n个不同的正数
(1)求S的概率母函数

(2)计算$Pr[S=0]$

解：

(1)由题设可知，S为复合泊松分布，且参数$\lambda=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$，$p(x)=\frac{\lambda_i}{\lambda}$。故$X$的矩母函数为

$$E[e^{tX}]=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e^{tx_i}$$

故

$$M_S(t)=e^{\lambda(\frac{ke^t}{\lambda}-1)}=\exp(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e^{tx_i}-\lambda)$$

所以

$$P_S(t)=M_S(\log t)=\exp(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t^{x_i}-\lambda)$$

(2)根据题意有

$$\begin{aligned}Pr[S=0] &= Pr[N_1=0,N_2=0,\cdots,N_i=0]\\ &= Pr[N_1=0]Pr[N_2=0]\cdots Pr[N_i=0]\\ &= e^{-\lambda_1}e^{-\lambda_2}\cdots e^{-\lambda_n}\\ &= e^{-\lambda}\end{aligned}$$

这里$\lambda=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$

4 混合分布与复合分布的关系

假设S是复合分布，$N\sim NB(r,\theta),X\sim P(\lambda)$，假设$S^*$是一个混合分布，其概率函数为

$$f_{S^*}(x)=\sum_{i=0}^{n}f_{Y_i}(x)p_i$$

其中，$p_i\geq 0$，$\sum\limits_{i=0}^{n}p_i=1$($n$可以是无穷)，且$Y_i\sim P(\lambda i)(Pr[Y_0=0]=1)$. 令$P[X=i]=p_i$，其矩母函数记为$M_X(\cdot)$.

(1)求S的概率母函数$P_S(t)$

(2)证明：

$$P_{S^*}(t)=\sum_{i=0}^{n}e^{(t-1)\lambda_i}p_i=E[e^{(t-1)\lambda X}]=M_X[\lambda(t-1)]$$

(3)假设p_i使得$X \sim NB(r,\theta)$，证明$P_{S^*}(t)=P_S(t)$

解：(1)由第一题结论知S的矩母函数为

$$M_S(t)=(\frac{\theta}{1-(1-\theta)e^{\lambda(e^t-1)}})^r$$

所以根据矩母函数与概率母函数的关系可知

$$P_S(t)=M_S(\log t)=(\frac{\theta}{1-(1-\theta)e^{\lambda(t-1)}})^r$$

(2)由题设知

$$P_{S^*}(t)=E[t^{S^*}]=\sum_{x=0}^{\infty}t^x\sum_{i=0}^{n}f_{Y_i}(x)p_i$$

交换求和顺序，即有

$$\sum_{x=0}^{\infty}t^x\sum_{i=0}^{n}f_{Y_i}(x)p_i=\sum_{i=0}^{n}p_iP_{Y_i}(t)=\sum_{i=0}^{n}e^{(t-1)\lambda i}p_i$$

又由期望与矩母函数的定义，即有

$$P_{S^*}(t)=\sum_{i=0}^{n}e^{(t-1)\lambda_i}p_i=E[e^{(t-1)\lambda X}]=M_X[\lambda(t-1)]$$

故得证。

(3)此时

$$M_X[t]=(\frac{\theta}{1-(1-\theta)e^t})^r$$

所以由上小题结论可知

$$P_{S^*}(t)=M_X[\lambda(t-1)]=(\frac{\theta}{1-(1-\theta)e^{\lambda(t-1)}})^r$$

故

$$P_{S^*}(t)=P_S(t)$$

5 理赔额分布

5.1

设个别理赔额X在起始年度内服从伽马分布，$X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$，又记下一年度的个别理赔额为$Y$，它是上一年度的$X$加上10%的通货膨胀影响。试

求Y的分布。
解：此时通货膨胀率是一个常数，由题设可知$Y = 1.1X$，所以由伽马分布的性质可知，

$$Y = 1.1X \sim \Gamma(\alpha, \frac{\lambda}{1.1})$$