现代精算风险理论课程作业四

刘辰昂*

2013 年 6 月 24 日

*农业资源与环境1001,学号3100100050,Email:liuchenang@gmail.com

1

在离散时间模型中, 我们要考虑风险过程

$$U(n) = u + n - \sum_{i=1}^{n} X_i, \ \ n = 1, 2, \cdots,$$

如果u 取整数$0, 1 \cdots$,, X_i 的取值j的概率为$f_X(j)$, 均值为μ_X,方差为σ_X^2. 定义安全负荷为θ, 满足

$$1 = (1+\theta)\mu_X.$$

定义离散时间情形下的破产时间T, 破产概率$\psi(u)$ 为

$$T(u) = \min\{n : U(u, n) < 0\};$$
$$\psi(u) = \Pr[T(u) < \infty];$$

调节系数$R > 0$ 定义为如下方程的解,

$$E[\exp(r(X-1)] = 1.$$

证明：对于离散的盈余过程，有

$$\phi(0) = \mu_X$$

解:结合第2题的结论，累加并令$u \to \infty$，由于$\phi(\infty) = 0$，故等式变为

$$\phi(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \phi(i) = (\sum_{j=1}^{\infty})(\sum_{i=1}^{\infty} \phi(i)) + \sum_{k=1}^{\infty} Pr[X \geq k]$$

整理得

$$\phi(0) = \sum_{k=1}^{\infty} Pr[X \geq k]$$

又由于X为取非负整数值的随机变量，故

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot Pr[X = n] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} P[X = n] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{n=k}^{\infty} P[X = n] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} Pr[X \geq k] \end{aligned}$$

2

接第一题条件, 证明：

$$\phi(0) = f_X(0)\phi(1) + Pr(X \geq 1)$$
$$\phi(1) = f_X(0)\phi(2) + f_X(1)\phi(1) + Pr(X \geq 2)$$
$$\cdots\cdots$$
$$\phi(u) = f_X(0)\phi(u+1) + \sum_{j=1}^{u} f_X(j)\phi(u+1-j) + Pr(X \geq u+1)$$

解:我们先考虑当$u = 0$时，当$X_1 \geq 1$时，则必将导致破产，而当$X_1 < 1$即$X_1 = 0$时，其破产概率与$\phi(1)$相同，不难证明即以下结论：对于任意的$\phi(u)$，当$X = k$时，其概率等价于$\phi(u+1-k)$。故即可得证。

3

假设索赔X服从如下的分布，$f_X(0) = 0.5$, $f_X(1) = f_X(2) = 0.2$, $f_X(3) = 0.1$.计算破产概率$\psi(u)$.

解：由题设知

$$\phi(0) = \frac{1}{2}\phi(1) + \frac{1}{2}$$
$$\phi(1) = \frac{1}{2}\phi(2) + \frac{1}{5}\phi(1) + \frac{3}{10}$$
$$\phi(2) = \frac{1}{2}\phi(3) + \frac{1}{5}\phi(2) + \frac{1}{5}\phi(1) + \frac{1}{10}$$
$$\phi(3) = \frac{1}{2}\phi(4) + \frac{1}{5}\phi(3) + \frac{1}{5}\phi(2) + \frac{1}{10}\phi(1)$$
$$\phi(u) = \frac{1}{2}\phi(u+1) + \frac{1}{5}\phi(u) + \frac{1}{5}\phi(u-1) + \frac{1}{10}\phi(1)$$

故由此整理可得

$$\phi(0) = \mu_X = 0.9$$
$$\phi(1) = 0.8$$
$$\phi(2) = 0.68$$
$$\phi(3) = 0.568$$
$$\phi(u) = 1.6\phi(1) - 0.4\phi(u-2) - 0.2\phi(u-3)$$

4

索赔X如第3题所给出，求调节系数R.

解：由调节系数计算公式可知

$$0.5e^{-R} + 1 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot e^{R} + e^{2R} \cdot 0.1 = 1$$

解得$R = 0.176$

5

对离散盈余过程，证明$\psi(u) \leq e^{-Ru}$.

解：由归纳法即可得证.

6

之后几题均考虑连续过程，当$\theta = 0.4$, 索赔额X 的密度函数为$f_X(x) = \frac{1}{2}\left(3e^{-3x} + 7e^{-7x}\right)$, 试确定破产概率的上界.

解：事实上只需确定调节系数即可, 由调节系数计算公式即

$$1 + (1+\theta)\mu_1 r = m_X(r)$$

又由题设知

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{21}$$
$$m_X(r) = \frac{1}{2}\frac{3}{3-r} + \frac{1}{2}\frac{7}{7-r}$$

代入求解可得

$$r = 0, 1, 6$$

结合调节系数定义即可知$R = 6$, 故

$$\phi(u) \leq e^{-6u}$$

7

什么样的复合泊松过程使破产概率满足$\psi(u) = \frac{1}{2}e^{-u}$?

解：由讲义例5.1知, 当$F(x) = 1 - \exp(-\frac{x}{\mu})$时, 有

$$\phi(u) = \frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{\theta}{\mu(1+\theta)}u}$$

又由题设$\phi(u) = \frac{1}{2}e^{-u}$,故有

$$\begin{cases} \frac{1}{1+\theta} = \frac{1}{2} \\ \frac{\theta}{\mu(1+\theta)} = 1 \end{cases}$$

解得$\theta = 1, \mu = \frac{1}{2}$, 故当$X \sim Exp(2)$时, 有 $phi(u) = \frac{1}{2}e^{-u}$

8

设某个保险保单组合产生的理赔过程是一个复合的泊松过程，其中$\lambda = 1$, $f_X(x) = e^{-x}$, $x > 0$, 相对安全附加系数为θ.

(1)在扣除一个相对安全附加系数等于$\xi > 0$的比例再保险$h(x) = \alpha x$后，求调节系数，计算再保险后的相对安全附加系数.

(2)在扣除一个相对安全附加系数等于$\xi > 0$的超额损失再保险$h(x) = (x-d)_+$后，建立调节系数的方程，计算再保险后的相对安全附加系数.

解：(1)由于此时$h(x) = \alpha x$, 故

$$C_h = (1+\xi)\lambda E[h(X)]$$

因此由调节系数方程

$$\lambda + (1+\theta)\lambda E[X]R - C_h R = \lambda m_{X-h(X)}(R)$$

解得$R = \frac{\theta - \alpha\xi}{(1-\alpha)[1+\theta-(1+\xi)\alpha]}$, 故

$$C - C_h = (1+\theta)\lambda\mu_1$$

解得$\theta' = \theta - (1+\xi)\alpha$

(2)此时$h(x) = (x-d)^+$, 故

$$C_h = (1+\xi)E[X-d]^+$$
$$C = (1+\theta)\lambda EX = 1+\theta$$

结合

$$\lambda + (C - C_h)r = \lambda m_X - h(x)(r)$$

即可建立调节系数方程如下

$$1 + (1+\theta)R - (1+\theta)E[X-d]^+ r = m_{X-[X-d]^+}(R)$$

解得此时$\theta' = \theta - (1+\xi)e^{-d}$