现代精算风险理论课程作业三

刘辰昂[*]

2013 年 6 月 24 日

[*]农业资源与环境1001,学号3100100050,Email:liuchenang@gmail.com

1

一个决策者的效用函数$u(x)=\sqrt{x}, x\geq 0$.他面临两个选择，用他现有的全部财富w，交换随机额X和Y，X,Y的分布如下：

$$Pr[X=400]=Pr[X=900]=0.5$$
$$Pr[Y=100]=0.6, Pr[Y=1600]=0.4$$

(1)证明该决策者偏好X甚于Y
(2)确定w的取值范围使得他拒绝作任何交换
(3)请给出一个效用函数，使得有该效用函数的决策者偏好Y甚于X
解：(1)由题设知对X的效用函数值为

$$\begin{aligned} u(X) &= 0.5\sqrt{400}+0.5\sqrt{900} \\ &= 0.5\cdot 20+0.5\cdot 30 \\ &= 25 \end{aligned}$$

对Y的效用函数值为

$$\begin{aligned} u(Y) &= 0.6\sqrt{100}+0.4\sqrt{1600} \\ &= 0.6\cdot 10+0.4\cdot 40 \\ &= 22 \end{aligned}$$

显然有$u(X)>u(Y)$,故此时投资者偏好X甚于Y
(2)由题设可知只需$u(w)>25$即可，故需

$$\begin{aligned} u(w)=\sqrt{w}&>25 \\ w&>625 \end{aligned}$$

(3)事实上，题设可转化为

$$0.5[u(400)+u(900)]<0.6u(100)+0.4u(1600)$$

不难发现只需令$u(x)=x$，即有

$$u(X)=650$$
$$u(Y)=700$$

即有$u(X)<u(Y)$，即在此效用函数下投资者偏好Y甚于X。

2

一个风险X的均值为μ,方差为σ^2.风险厌恶系数为α的指数效用函数对应的零效用保费的安全负荷系数的$\frac{\alpha\sigma^2}{2\mu}$.试确定$X$的分布。

解：由题设可知，此时零效用保费为

$$\pi = \frac{1}{\alpha}\ln E[e^{\alpha X}]$$

又$\pi = \mu(1+\theta)$，故有

$$\frac{1}{\alpha}\ln E[e^{\alpha X}] = \mu(1+\frac{2\sigma^2 2}{2\mu})$$

化简后即可得出X的矩母函数

$$E[e^{\alpha X}] = e^{\alpha\mu + \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}}$$

显然该形式为正态分布的矩母函数形式，故X服从正态分布。

3

决策者采用指数效用，其面临的风险为$\chi^2(n)$，证明他愿意付出的最大保费大于n.

解：由题设

$$\begin{aligned} E[u(w-X)] &= u(w-P^+) \\ E[e^{\alpha X}] &= e^{\alpha P^+} \end{aligned}$$

又因为$X \sim \chi^2(n)$，故

$$(\frac{1}{1-2\alpha})^{\frac{n}{2}} = e^{\alpha P^+}$$

化简得

$$\begin{aligned} P^+ &= -\frac{n}{2\alpha}\ln(1-2\alpha) \\ &= n\frac{\ln(1-2\alpha)}{2\alpha} \\ &< n \end{aligned}$$

故得证。

 4

4

设一个车险保单组合的总理赔额服从复合泊松分布，每个事故中的理赔额服从伽马分布。求相对安全系数为10%的期望值保费。
解：不妨设总理赔额S的参数为λ, α, β，由全期望公式可得

$$\begin{aligned} E[S] &= E[N]E[X] \\ &= \lambda\frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

故期望值保费为

$$\begin{aligned} \pi[S] &= (1+\theta)E[S] \\ &= \frac{1.1\lambda\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

5

设X是一有限风险具有最大值b，从而$Pr[X \le b] = 1$，并且对所有的$\epsilon > 0$有$Pr[X \ge b - \epsilon] > 0$成立。记$\pi_\alpha$为$X$的指数保费。试证明

$$\lim_{\alpha\to\infty} \pi_a = b$$

解：
(1)方法一：由于

$$\pi_\alpha = \frac{1}{\alpha}\ln E[e^{\alpha X}]$$

事实上只需证

$$\lim_{\alpha\to\infty} (E[e^{\alpha X}])^{\frac{1}{\alpha}} = e^b$$

容易看出

$$(E[e^{\alpha X}])^{\frac{1}{\alpha}} \le (e^{\alpha b})^{\frac{1}{\alpha}} = e^b$$

考虑马尔科夫不等式，有

$$(E[e^{\alpha X}])^{\frac{1}{\alpha}} \ge \{Pr[e^{\alpha X} \ge e^{\alpha(b-\varepsilon)}] \cdot e^{\alpha(b-\varepsilon)}\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

不妨令$Pr[X \geq b-\epsilon]=c$，对上式求极限即为e^b，故由夹逼准则即得原命题成立。
(2)方法二：由题设可知

$$\pi_\alpha = \frac{1}{\alpha}\ln E[e^{\alpha X}]$$

即原命题等价于求极限

$$\lim_{\alpha\to\infty}\pi_a = \frac{\ln E[e^{\alpha X}]}{\alpha}$$

令$E[e^{\alpha X}]=f(\alpha)$ 则对上式采用洛比达法则[1]

$$\lim_{\alpha\to\infty}\pi_a = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}$$

事实上，右边即为Essher保费计算原理，由Esscher保费原理的无敲诈性即可知该极限为b。

6

研究Esscher保费计算原理的如下混合类型的可加性：

$$\pi[X] = p\pi[X,h_1]+(1-p)\pi[X,h_2]$$

其中$p\in[0,1],\pi[X,h]$是风险X的带有参数h的Esscher保费。

7

证明Hölder不等式，

$$\mid E[XY]\mid \leq E^{\frac{1}{p}}[\mid X\mid^p]E^{\frac{1}{q}}[\mid Y\mid^q]$$

这里p,q满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，且$p>1$
解：证明在讲义中已给出，故这里给出一种一般形式的Hölder不等式的证明，即

$$(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

[1]不难证明其可导性

先证引理，即Young不等式，对于$x, y > 0$,p, q满足题设条件，则有

$$\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \geq xy$$

证：
由题设可知$(\frac{x}{y^{q-1}})^p = x^p y^{-q}$，令$t = \frac{x}{y^{q-1}}$即可将不等式等价为如下形式

$$\frac{1}{p}t^p + \frac{1}{q} \geq t$$

令$f(t) = \frac{1}{p}t^p + \frac{1}{q} - t$，通过求导即可得

$$f(t) \geq f(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = 0, \forall t > 0$$

故Young不等式成立，当且仅当$x = y^{q-1}$时等号成立。下证Hölder不等式。
这里不妨令$S = (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}$，$T = (\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}$，不难发现

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^p}{S^p} = 1, \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^q}{T^q} = 1$$

又对于任意给定i利用Young不等式可得

$$\frac{a_i b_i}{ST} \leq \frac{1}{p}\frac{a_i^p}{S^p} + \frac{1}{q}\frac{b_i^q}{T^q}$$

求和后即可得到Hölder不等式，故不等式得证。

8

假设某一损失X服从[0,100]上的均匀分布，
(1)考虑停止损失保单和比例损失保单

$$I_1(X) = [X - d]^+$$
$$I_2(X) = kX, 0 \leq k \leq 1$$

两种保单的纯保费$P = 12.5$，试求k和d
(2)试证

$$Var[X - I_2(X)] > Var[X - I_1(X)]$$

解：(1)由题设可知

$$E[I_1(X)] = E[I_2(X)] = 12.5$$

故对于停止损失保单有

$$\begin{aligned} E[I_1(X)] &= E[[X-d]^+] \\ &= \int_d^{100} (x-d)p(x)dx \\ &= 12.5 \end{aligned}$$

即$d = 50$,而对于比例保单则有

$$\begin{aligned} E[I_1(X)] &= E[kX] \\ &= kE[X] \\ &= 50k \\ &= 12.5 \end{aligned}$$

故$k = 0.25$
(2)对于不等式左边

$$\begin{aligned} Var[X - I_2(X)] &= (1-k)^2 Var[X] \\ &= 468.75 \end{aligned}$$

对于右边有

$$Var[X - I_1(X)] = 260.42$$

[2]

9

考虑如下两个问题：
(1)验证Esscher保费计算原理满足变换不变性，但不满足正齐次性
(2)说明标准差保费原理不是一致风险度量

[2]硬算，没想出简便方法

解：(1)这里仅考虑平移不变性[3]，注意到

$$\begin{aligned}\pi[X+c] &= \frac{E[Xe^{h(X+c)}]}{E[e^{h(X+c)}]} \\ &= \frac{E[Xe^{hX}]E[e^{hc}]}{E[e^{hX}]E[e^{hc}]} \\ &= \frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]} \\ &= \pi[X]\end{aligned}$$

故得证。再考虑正齐次性，根据题设

$$\begin{aligned}\pi[cX] &= \frac{E[cXe^{hcX}]}{E[e^{hcX}]} \\ &= c\frac{E[Xe^{hcX}]}{E[e^{hcX}]} \\ &= c\pi[X;hc] \\ &\neq C\pi[X]\end{aligned}$$

故Esscher保费不满足正齐次性。
(2)显然标准差保费原理满足单调性。下面先证其满足正齐次性与平移不变性

$$\begin{aligned}\pi[cX] &= cE[X] + \alpha\sigma[cX] \\ &= cE[X] + c\alpha\sigma[X] \\ &= c(E[X] + \alpha\sigma) \\ &= c\pi[X]\end{aligned}$$

故其满足正齐次性，再考虑平移不变性[4]

$$\begin{aligned}\pi[X+c] &= E[X] + c + \alpha\sigma[cX] \\ &= \pi[X] + c\end{aligned}$$

再考虑次可加性，事实上只需考虑风险标准差之和即可，显然当两个风险的呈负相关时，将不满足次可加性，故标准差保费原理不是一致风险度量。

[3]事实上，我认为这里能做的线性变换只有平移和伸缩，而伸缩变换已在正齐次性中考虑
[4]事实上根据保费计算原理的性质即可得出结论

10

假设$0 \leq c \leq 1$，$F_X(x)$是风险X的分布函数，

$$F_X(x) = \begin{cases} cx & x \in [0,1) \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

(1)计算$VaR_\alpha(X), 0 < \alpha < 1$
(2)计算$CTE_\alpha(X), 0 < \alpha < 1$
解：(1)由VaR定义，

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(X) &= \inf\{x|F_X(x) > \alpha\} \\ &= \inf\{x|cx > \alpha\} \\ &= \frac{\alpha}{c} \end{aligned}$$

(2)由CTE定义，

$$\begin{aligned} CTE_\alpha(X) &= E\{X|X > VaR_\alpha(X)\} \\ &= \frac{c^2+\alpha}{2c} \end{aligned}$$

11

现有离散型随机变量

$$\begin{aligned} &Pr[X=10]=0.1, Pr[X=20]=0.3, Pr[X=30]=0.3, \\ &Pr[X=40]=0.22, Pr[X=50]=0.04, Pr[X=60]=0.04 \end{aligned}$$

(1)计算$VaR_\alpha(X), \alpha = 0.90, 0.95, 0.99$
(2)计算$CTE_\alpha(X), \alpha = 0.90, 0.95, 0.99$
解：(1)由于X的分布为离散形式，故容易求得

$$VaR_{0.90}(X) = 40$$
$$VaR_{0.95}(X) = 50$$
$$VaR_{0.99}(X) = 60$$

表 1: 分布列

X	0	100	200
P	0.9216	0.0768	0.0016

(2)由CTE的定义知

$$\begin{aligned} CTE_{0.90}(X) &= EX|X > VaR_0.90(X) \\ &= 55 \\ CTE_{0.95}(X) &= EX|X > VaR_0.95(X) \\ &= 60 \\ CTE_{0.99}(X) &= EX|X > VaR_0.99(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

12

现有二组保单，分别记为X_1和X_2，并假设其为独立同分布，有4%的概率索赔100，有96%的概率无索赔

(1)计算$VaR_{0.95}(X_1)$

(2)计算$VaR_{0.95}(X_1+X_2)$

(3)比较$VaR_{0.95}(X_1+X_2)$和$VaR_{0.95}(X_1)+VaR_{0.95}(X_2)$，并作评述

解：(1)由题设知，$VaR_{0.95}(X_1)=0$

(2)令$X=X_1+X_2$，则X的分布列如下: 故由VaR定义可知

$$VaR_{0.95}(X) = 100$$

(3)由前两小题可知$VaR_{0.95}(X_1+X_2)=100$，且$VaR_{0.95}(X_1)+VaR_{0.95}(X_2)=0$，由此可以看出VaR作为一种风险度量不具有次可加性，故不是一个一致风险度量。