Prof. dr hab. inż. Andrzej Kasiński

WYKŁADY Z TEORII STEROWANIA PROCESÓW CIĄGŁYCH I DYSKRETNYCH

Semestr zimowy r. ak. 2021/2022

Wykład 1. Planowany na 4.10.2021.

ANALIZA WIELOWYMIAROWEGO OBIEKTU STEROWANIA NA PODSTAWIE JEGO MODELU MATEMATYCZNEGO W PRZESTRZENI STANU

1.1. Wielowymiarowy obiekt sterowania.

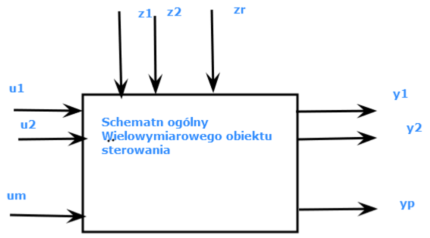
Z wielowymiarowym obiektem sterowania (MIMO) mamy do czynienia, gdy można wskazać kilka tzw. sygnałów wejściowych (co najmniej dwa), za pomocą których podmiot sterujący (sterownik) lub otoczenie obiektu oddziałuje na dynamikę procesów realizowanych przez ten obiekt, a skutki tych oddziaływań obserwuje się na jego wyjściach w postaci sygnałów wyjściowych.

Przez proces rozumiemy ewolucję w czasie stanu obiektu sterowania (na razie nie precyzujemy co to jest stan, potraktujmy to pojęcie intuicyjnie).

Sygnały wejściowe dzielimy na sterujące i zakłócające. Sterujące, to te sygnały, które można w celowy sposób modulować dla osiągnięcia celu sterowania (pożądanego przebiegu procesu realizowanego w obiekcie sterowania).Przy czym w przypadku procesów ciągłych, modyfikacja chwilowej wartości dowolnego sygnału może następować w dowolnej chwili czasu.

Pozostałe sygnały wejściowe określamy jako zakłócające przebieg procesu. Reprezentują one oddziaływanie czynników środowiskowych na obiekt sterowania. Zazwyczaj można zmierzyć ich wartość, ale nie można na ich przebieg wpływać. Dobrymi przykładami sygnałów zakłócających są siła i kierunek wiatru oddziałujące na obiekt sterowania (np. samolot), współrzędne wektora siły grawitacji w środku masy obiektu (np. statku kosmicznego), czy gradient temperatury w otoczeniu obiektu (np. w przypadku gazociągu, reaktora chemicznego) lub ciśnienie baryczne (np. zbiornik gazu).

Wystarczy, że któraś z naturalnych liczb **m, p, r** jest większa niż 1, by analizę zadania sterowania należało prowadzić metodami właściwymi dla obiektów wielowymiarowych (MIMO), które istotnie się różnią od metod analizy właściwości obiektów o jednym wejściu i jednym wyjściu (SISO) poznanych na podstawach automatyki. Wynika to z samej natury wielowymiarowego obiektu sterowania, w którym należy uwzględnić tzw. efekty interakcji lub inaczej efekty występowania sprzężeń skrośnych w strukturze obiektu.



Rys. 1.1. Graficzna reprezentacja wielowymiarowego obiektu sterowania ($\underline{\mathbf{u}}= [u_1\, u_2\, .\,.\,.\, u_m]^T$ *– wektor sygnałów sterujących,* $\underline{\mathbf{y}}= [y_1\, y_2\, .\,.\,.\, y_p]^T$ *- wektor sygnałów wyjściowych,* $\underline{\mathbf{z}}= [z_1\, z_2\, .\,.\,.\, z_r]^T$ *– wektor sygnałów zakłócających}.*

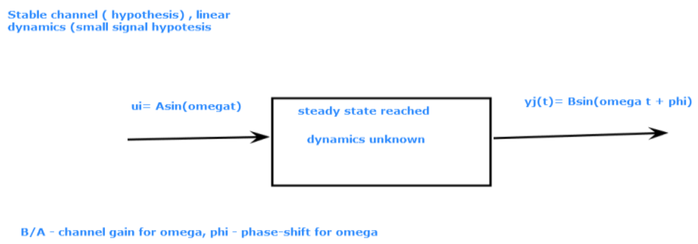
Każdy sygnał sterujący potencjalnie ma wpływ na przebieg więcej niż jednego (wybranego) sygnału wyjściowego wskutek naturalnych wewnętrznych powiązań elementów wewnętrznych struktury obiektu sterowania typu MIMO. Przez co procedury/prawa/algorytmy sterowania określone dla danego wejścia sterującego stają się współzależne, a problem np. syntezy regulatora dla obiektu MIMO staje się trudny w porównaniu z doborem regulatora dla obiektu SISO (złożoność procedury projektowej w przypadku obiektu MIMO nie jest prostą konsekwencją wzrostu liczby podproblemów sterowania poszczególnymi parami we-wy).

1.2. Sporządzanie modeli wielowymiarowych obiektów sterowania w przestrzeni stanu.

1.2.1. Wykorzystanie eksperymentalnie wyznaczonych charakterystyk częstotliwościowych.

Traktowanie wielowymiarowego obiektu sterowania jako „czarnej skrzynki” tylko w wyjątkowych przypadkach może być produktywne (prowadzić do skutecznej identyfikacji jego modelu we-wy).

Podejście to można przyjąć jedynie w odniesieniu do stabilnych obiektów liniowych niskiego rzędu, które można poddać eksperymentalnej identyfikacji czynnej, opartej o zasadę superpozycji, polegającą na oddzielnym pobudzaniu sygnałem harmonicznym o nastawionej pulsacji kolejnych wejść jedno po drugim, celem wyznaczenia (w stanie ustalonym!)



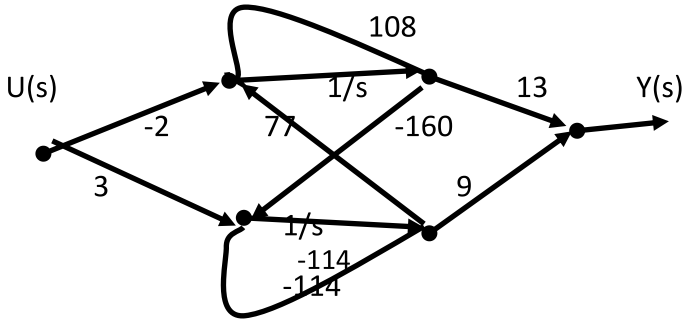
Rys. 1.2. Zasada identyfikacji czynnej kanału łączącego i-te wejście z j-tym wyjściem.

Wzmocnień B/A i przesunięć fazowych φ dla danej pulsacji pobudzenia ω, w odniesieniu do poszczególnych kanałów przepływu sygnału (pomiędzy pobudzanym wejściem a obserwowanym wyjściem). A następnie na wyznaczeniu charakterystyk amplitudowo-fazowych poszczególnych kanałów przepływu sygnałów.

1.3. Przepływ sygnałów w systemach złożonych.

Przez kanał rozumiemy ścieżkę na grafie sygnałowym Masona łączącą dane wejście z wybranym wyjściem obiektu. Reprezentuje ona drogę propagacji sygnału od wybranego wejścia układu do jego wybranego wyjścia. W obiekcie o m wejściach i p wyjściach teoretycznie mamy m×p kanałów. W konkretnym przypadku nie wszystkie kanały występują (w równaniu wiążącym wybrane wyjście z danym wejściem, a mówiąc ściśle wybrany sygnał wyjściowy z danym sygnałem wejściowym, może nie występować dany sygnał wejściowy jako zmienna, wówczas w grafie nie ma ścieżki – kanał nie istnieje).

Przykład 1. Rozpatrzmy kanał wiążący i-ty sygnał sterujący u_i z sygnałem y_j na j-tym wyjściu. Transmitancja operatorowe tego kanału $G_{ji} = Y_j(s)/U_i(s) = (3+ s)/ (s^2 + 6s + 8)$. Odpowiadający jej graf przepływu sygnału ma postać:



Rys.2.1 Graf Masona układu o transmitancji $(3+ s)/(s^2 + 6s + 8)$

W wyniku eksperymentu omówionego na poprzednim wykładzie uzyskujemy jedynie dyskretne punkty charakterystyki amplitudowo-fazowej, określone tylko dla tych pulsacji sygnałów pobudzających, których użyliśmy w eksperymencie do pobudzania obiektu.

Przebieg charakterystyki dla wszystkich możliwych pulsacji pobudzeń na wejściu uzyskujemy na drodze aproksymacji zbioru dyskretnych punktów na płaszczyźnie zespolonej gładką krzywą np. stosując metodę najmniejszych kwadratów (wpisujemy krzywą w zbiór punktów). Krzywa ta jest na tym etapie modelem nieparametrycznym dynamiki rozważanego kanału w dziedzinie pulsacji (częstotliwościowej). Aproksymacja jest zadaniem stosunkowo prostym jedynie w przypadku kanałów charakteryzujących się dynamiką niskiego rzędu (niskim stopniem wielomianu w mianowniku transmitancji widmowej i nie wyższym od niego stopniem wielomianu w liczniku transmitancji (najprościej jest, gdy nie występują zera w danej transmitancji). Można się sprawnie posłużyć na przykład krzywikiem. W innym przypadku konieczne jest posłużenie się narzędziem komputerowym (np. Matlab).

Dla dynamik niskiego rzędu $0 \le n \le 3$ dostępne są stabelaryzowane charakterystyki modelowe, które porównujemy z rezultatem aproksymacji na zasadzie graficznego podobieństwa. Stwierdzenie podobieństwa, w pewnym stopniu, upoważnia nas do przyporządkowania uzyskanej charakterystyki do jednej z klas modelowych. Klasy te mają określoną ogólną postać parametryczna transmitancji Laplace'a, a tym samym transmitancji Fouriera ($s = j\omega$, $G(s) \rightarrow G(j\omega)$). Na tej podstawie uzyskujemy model parametryczny dynamiki danego kanału, tożsamy z modelem parametrycznym reprezentującym odpowiednią krzywą modelową. Model w postaci transmitancji ma postać generyczną (ogólną), w której wartości parametrów (takich jak współczynnik wzmocnienia, stałe czasowe, tłumienność, okres drgań własnych) nie są określone, (występują w postaci symbolicznej).

Dysponując konkretnym przebiegiem właściwie sklasyfikowanej charakterystyki amplitudowo-fazowej (uzyskanej w wyżej opisanym eksperymencie) możemy wyznaczyć konkretne wartości parametrów reprezentującej ją transmitancji. Parametry można wyznaczyć konstrukcyjnie (graficznie), przy czym każda modelowa charakterystyka amplitudowo-fazowa (graficzny obraz transmitancji Fouriera) charakteryzuje się specyficzną konstrukcją wyznaczania parametrów. Można również uzyskać wartości parametrów transmitancji rozwiązując układ równań wiążących odczytane z charakterystyki amplitudowo-fazowej wartości modułu i kąta fazowego (wielkości występujące po lewej stronie) dla wybranych wartości pulsacji z symbolicznymi wyrażeniami reprezentującymi transmitację (po prawej stronie), w których za $j\omega$ podstawiamy tę konkretną wartość, dla której dokonaliśmy odczytu wartości z lewej strony równań (czyli modułu i fazy) . Niewiadomymi są w tym przypadku nieznane wartości parametrów występujących w symbolicznym wyrażeniu transmitancji.

Dzięki wyznaczeniu parametrów transmitancji kanału uzyskujemy liniowy model układu (kanału) początkowo rozpatrywanego jako „czarna skrzynka:. Skrzynka staje się odtąd „przejrzysta" (bo zaakceptowaliśmy jakościowy model jej dynamiki i określiliśmy wartości parametrów modelu).

Powodzenie metody zależy od niskiego poziomu szumów wewnętrznych w badanym układzie oraz niskiego poziomu szumów pomiarowych. W rezultacie dość żmudnego eksperymentu można jednak uzyskać nieparametryczną reprezentację obiektu sterowania w postaci dyskretnych tablic próbek charakterystyk amplitudowo-fazowych poszczególnych kanałów we-wy w postaci pary: moduł, przesunięcie fazowe, dla danej pulsacji pobudzania wybranej pary we/wy nieznanego obiektu. Przy obecności szumów losowych są to zmienne losowe.

Dopiero uciąglenie tych charakterystyk na drodze aproksymacji charakterystykami modelowymi (skatalogowanymi) pozwala wyznaczyć wartości parametrów transmitancji widmowych chrakteryzujących dynamikę poszczególnych kanałów przepływu sygnałów wejściowych do poszczególnych wyjść obiektu. W rezultacie, wyniku identyfikacji transmitancji poszczególnych kanałów we-wy, można w uporządkowany sposób (zgodnie z porządkiem indeksów sygnałów wyjściowych i wejściowych) ustawić je w tablicę o wymiarach **p** x **m**, zwaną transmitancją macierzową wielowymiarowego obiektu sterowania:

$$\underline{G}(j\omega) = [G_{ii}(j\omega)], \quad \text{gdzie j– indeks wyjścia, j – index wejścia} \qquad (1.1)$$

Elementy na przekątnej głównej reprezentują transmitancje własne kanałów we/wy.
Elementy
poza diagonalą to odpowiednie transmitancje skrośne. Jeżeli nie ma transmisji sygnału pomiędzy
j-tym sygnałem sterującym u_j a sygnałem y_i na i-tym wyjściu, to w i-tym wierszu i w j-tej kolumnie transmitancji macierzowej występuje element zerowy.

Taki wynik identyfikacji eksperymentalnej może być punktem wyjścia do wyprowadzenia równań w dziedzinie czasu, wiążących poszczególne sygnały wyjściowe z poszczególnymi sygnałami wejściowymi albowiem:

$$M_{ij}(s)Y_j(s) = L_{ji}(s)U_i(s), \qquad (1.2)$$

gdzie $M_{ij}(s)$ i $L_{ij}(s)$ to wielomiany zmiennej zespolonej s, odpowiednio mianownika i licznika transmitancji $G_{\underline{ij}}(s)$ liniowego modelu obiektu wielowymiarowego.
Jest to operatorowa forma równania wiążącego sygnał na j-tym wyjściu z sygnałem na i-tym wejściu. Dokonując odwrotnego przekształcenia Laplace'a równania (1.2) uzyskujemy równanie wiążące te sygnały w dziedzinie czasu.

Pomińmy chwilowo dla wygody podwójne indeksy dolne występujące w (1.2).
Niech:

$$M(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0, \quad \text{a}$$

$$L(s) = b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0,$$

przy czym n,m to odpowiednio stopień wielomianu w mianowniku i stopień wielomianu w liczniku transmitacji wybranego kanału (w układach przyczynowych, a takimi są z reguły fizyczne obiekty dynamiczne $m \le n$). Wówczas równaniu (1.2) odpowiada w dziedzinie czasu następujące równanie we-wy:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u(t)^{(m)} + b_{m-1}\, u(t)^{(m-1)} + \ldots + b_0 u(t) \qquad (1.3)$$

Najczęściej mamy do czynienia z przypadkami, gdy w poszczególnych transmitancjach $G_{ii}(s)$ nie występują zera (taki kanał ma statyczny współczynnik wzmocnienia $k_{ij}= b_{0ij}$. Sygnał $u_j(t)$ jest wówczas klasycznym wymuszeniem determinującym postać szczególną rozwiązania równania (1.3).

Postać ogólną rozwiązania uzyskujemy rozwiązując równanie jednorodne:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1\acute{y}(t) + a_0y(t) = 0 \qquad (1.4)$$

Ponieważ jest to równanie liniowe n-tego rzędu, to jego rozwiązanie wymaga znajomości następujących tzw. warunków początkowych:

$$y^{(n-1)}(0) = C_n \,,\ y^{(n-2)}(0) = C_{n-1} \,,\ \ldots,\ +\acute{y}(0) = C_1 \,,\ y(0) = C_0 \qquad (1.\ 5)$$

Jest to n stałych, które określają **stan** układu dynamicznego opisanego takim równaniem.

W przypadku układu wielowymiarowego, w którym występują sprzężenia skrośne, w każdym z **p**x**m** równań postaci (1.3), po lewej stronie może wystąpić kombinacja liniowa sygnału wyjściowego i jego pochodnych względem czasu aż do rzędu wynikającego ze stopnia odpowiedniego wielomianu $M_{ij}(s)$ (i= 1, 2, …, m).

Dla każdeg**o** z sygnałów wyjściowych! należy ustalić maksymalny rząd jego pochodnej względem czasu występujący w równaniach we-wy, przeglądając wierszami transmitancję macierzową (bowiem niekoniecznie to kanał główny musi się charakteryzować dynamiką najwyższego rzędu, gdyż jego wybór jest arbitralny).