

Dyskretyzacja modeli z czasem ciągłym

1. Wprowadzenie.

Dyskretne w czasie zmiany wartości sygnałów sterujących oraz dyskretne w czasie odczytywanie wartości sygnałów (próbkowanie sygnałów wyjściowych lub mierzalnych zmiennych stanu) mają miejsce w komputerowych systemach bezpośredniego sterowania cyfrowego (DDC – od ang. Direct Digital Control).

W tym przypadku, o chwili modyfikacji wartości sygnału sterującego (o decyzji sterującej) decyduje zegar czasu rzeczywistego, synchronizujący proces próbkowania sygnałów (przy użyciu przetworników A/C) oraz proces zmian wartości sygnałów sterujących (przy użyciu przetworników C/A).

Dla uproszczenia pomijamy drugi aspekt digitalizacji, czyli kwantowanie wartości sygnałów, zakładając, że rozdzielczość używanych w systemie przetworników A/C i C/A jest na tyle wysoka, że efekty związane z szumem kwantowania „w pionie” są pomijalne (np. liniowy przetwornik 12-bitowy dzieli zakres zmienności sygnału np. $<-10, +10> V$ na 4096 części, co daje amplitudę szumu zaokrąglenia wartości nie przekraczającą 5mV, na ogół znacznie mniejszą niż amplituda szumów generowanych przez inne źródła, np. szумы fluktuacji termicznej).

Zakładamy, że częstotliwość próbkowania w systemie została dobrana zgodnie z kryterium Nyquista, na podstawie wyznaczonej częstotliwości granicznej widma, ustalonej dla całego zbioru sygnałów w systemie.

Próbkowanie w układach rzeczywistych odbywa się z nadmiarem – częstotliwość próbkowania jest zazwyczaj znaczną wielokrotnością (rzędu 20) częstotliwości granicznej, tak więc można założyć, że próbkowanie na osi czasu nie prowadzi do utraty informacji o procesie, a cyfrowy sposób sterowania nie wprowadza do obiektu istotnych efektów szumowych związanych z digitalizacją sygnałów sterujących.

Pewien problem stanowi zróżnicowana dynamika obiektu sterowania, w której możemy wyodrębnić podsystemy wolnozmiennne (o dużych wartościach stałych czasowych i okresów drgań własnych tworzących je elementów) oraz podsystemy szybkozmiennne. Możliwe jest wówczas stosowanie odrębnych częstotliwości próbkowania dla tych

podsystemów, dostosowanych do każdej z dynamik. Mówimy wówczas, że sterowanie przebiega w dwóch skalach czasu, albo w dwóch warstwach.

Należy zadbać o synchronizację algorytmów sterujących w poszczególnych warstwach, zwłaszcza wtedy, gdy charakterystyki widmowe podsystemów obu klas znacząco na siebie nachodzą. Można dokonać dalej idącej stratyfikacji sytemu na warstwy (skale czasowe) o ile ma to uzasadnienie w postaci jeszcze bardziej zróżnicowanej struktury dynamicznej obiektu sterowania.

2. Kwestia niestacjonarności obiektów sterowania.

W dotychczas rozpatrywanych modelach zakładano stałość w czasie parametrów. Są jednak sytuacje, gdy urządzenia ulegają widocznemu w czasie zużyciu lub podlegają szybkiemu starzeniu. W dotychczas analizowanych modelach czynnik ten nie był uwzględniany. Jedynymi zmiennymi w czasie elementami modelu były sygnały.

Aby móc analizować również obiekty, których właściwości są w istotny sposób zmienne w czasie wprowadza się rozszerzenie parametrycznych modeli w przestrzeni stanu poprzez uwzględnienie również zmienności parametrów modelu w czasie. Cechą tej zmienności jest niska dynamika (procesy starzenia, czy zużycia są stosunkowo wolne w porównaniu z dynamiką zmian stanu pod wpływem sygnałów sterujących), co odpowiada warunkom rzeczywistym. Ponadto funkcje zużycia/starzenia są stosunkowo proste, przeważnie monotoniczne. Dlatego w systemach sterowania procesy te można uwzględniać w dodatkowej warstwie super-wolnozmiernej, odpowiadającej za aktualizację modeli wykorzystywanych do sterowania.

Równania stanu i wyjścia **nieliniowego obiektu niestacjonarnego** zapisujemy w postaci ogólnej:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t),$$

gdzie argument t oznacza jawną zależność funkcji \mathbf{f} , \mathbf{h} lub ich parametrów od czasu. Oczywiście, niestacjonarność dodatkowo podnosi stopień trudności rozwiązania nieliniowych równań stanu.

W przypadku liniowym, model niestacjonarny przyjmuje postać:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t),$$

gdzie niestacjonarność „wbudowano” w parametry modelu.

Liniowe równanie stanu układu niestacjonarnego można rozwiązać przez całkowanie.

Rozwiązanie ma jawną postać:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{K}(t, 0) \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{K}(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau,$$

gdzie $\mathbf{K}(t, \tau)$ jest nieosobliwą macierzą Cauchy’ego, o wymiarach $n \times n$, stanowiącą rozwiązanie liniowego, jednorodnego, macierzowego równania różniczkowego o postaci:

$$\dot{\mathbf{K}}(t, t_0) = \mathbf{A}(t) \mathbf{K}(t, t_0),$$

przy warunku początkowym $\mathbf{K}(t_0, t_0) = \mathbf{I}$.

3. Modele dyskretne obiektów z czasem ciągłym.

Wobec tego, że decyzje sterujące oraz pomiary (próbkowanie sygnałów) są podejmowane w dyskretnych chwilach czasowych, z odstępem w czasie zwanym okresem próbkowania T_p , naturalne jest posługiwanie się do opisu obiektu modelami dyskretnymi w czasie, wykorzystywanymi następnie w algorytmach sterowania. W szczególności dotyczy to modeli w przestrzeni stanu.

Istnieją dwa podejścia do dyskretyzacji: **aproksymacyjne** i **dokładne**. Podejście aproksymacyjne polega na zastąpieniu chwilowej prędkości zmian stanu po lewej stronie równania, ilorazem różnicowym przyrostu wektora stanu i skończonego odcinka czasu, w którym ten przyrost nastąpił (w tym przypadku jest to T_p). Prowadzi to do przybliżonego schematu całkowania Eulera. Skutkuje to **kumulacją błędu całkowania** wraz ze wzrostem liczby kroków procedury rekurencyjnej. Jego zaletą jest możliwość stosowania go, gdy nie potrafimy uzyskać rozwiązania równania stanu w jawnej postaci (co ma miejsce w przeważającej liczbie modeli nieliniowych).

Dyskretyzacja przybliżona równań stanu.

Wprowadzamy dyskretną oś czasu: $[0, T_p, 2T_p, \dots, kT_p, \dots]$.

Dla $t = kT_p, k = 0, 1, 2, \dots$ przyjmujemy, że:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \frac{\Delta \mathbf{x}[kT_p]}{T_p} = \frac{\mathbf{x}[(k+1)T_p] - \mathbf{x}[kT_p]}{T_p}$$

Nawiasy kwadratowe wskazują na dyskretną oś czasu. Wprowadzamy powyższe przybliżenie do lewej strony równania stanu, biorąc pod uwagę jedynie punkty na dyskretnej osi czasu:

$$\frac{\mathbf{x}[(k+1)T_p] - \mathbf{x}[kT_p]}{T_p} \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}[kT_p], \mathbf{u}[kT_p]),$$

po elementarnych przekształceniach uzyskujemy:

$$\mathbf{x}[(k+1)T_p] \approx \mathbf{x}[kT_p] + T_p \mathbf{f}(\mathbf{x}[kT_p], \mathbf{u}[kT_p]),$$

Jest to rekurencyjne równanie różnicowe umożliwiające obliczenie przybliżenia próbki wektora stanu „w przyszłości” (jeden okres próbkowania do przodu), na podstawie znanego modelu nieliniowego dynamiki obiektu oraz znanej aktualnej wartości próbek wektora stanu i wektora sygnałów sterujących.

Wygodniej jest cofnąć się o krok i interpretować to równanie jako schemat rekurencyjny obliczania bieżącej wartości wektora stanu na podstawie „historycznych” (cofniętych wstecz o jeden okres próbkowania) wartości próbek wektora stanu i wektora sygnałów sterujących:

$$\mathbf{x}[kT_p] \approx \mathbf{x}[(k-1)T_p] + T_p \mathbf{f}(\mathbf{x}[(k-1)T_p], \mathbf{u}[(k-1)T_p]),$$

Dla uproszczenia dalszych wzorów unormujmy dyskretną oś czasu wprowadzając współczynnik skalujący $1/T_p$. Odtąd we wzorach operować będziemy numerami próbek (indeksami), pamiętając o ich usytuowaniu na rzeczywistej, dyskretnej osi czasu. Powyższe równanie przyjmie zatem postać:

$$\mathbf{x}_k \approx \mathbf{x}_{k-1} + T_p \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}).$$

Postępując analogicznie w stosunku do liniowego równania stanu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$$

otrzymujemy rekurencyjny, przybliżony model różnicowy:

$$\mathbf{x}_k \approx [\mathbf{I} + \mathbf{A} T_p] \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-1}.$$

Warto zauważyć, że macierz stanu modelu dyskretnego jest identyczna z pierwszymi dwoma wyrazami rozwinięcia w szereg Taylora macierzowej funkcji wykładniczej $e^{\mathbf{A}T_p} \approx \mathbf{I} + \mathbf{A} T_p$.

A więc zastąpienie pochodnej ilorazem różnicowym ma podobne skutki jak ograniczenie rozwinięcia macierzy tranzycji stanu do dwóch pierwszych wyrazów jej rozwinięcia w szereg Taylora.

Przy tej metodzie dyskretyzacji macierz sterowań nie ulega modyfikacji, jest taka sama jak w modelu z czasem ciągłym. Natomiast macierz stanu modelu dyskretnego ma składnik zależny od okresu próbkowania, co wpływa na rozkład jej wartości własnych, tożsamy z biegunami dyskretniej transmitancji macierzowej, o określonym rozkładzie na płaszczyźnie zespolonej "z". **Niewłaściwy dobór okresu próbkowania może zatem doprowadzić do utraty stabilności modelu dyskretnego – transmitancji Laurenta** (czyli wyjścia jej biegunów poza okrąg jednostkowy), pomimo że **model z czasem ciągłym był stabilny** (bieguny transmitancji Laplace'a leżały w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej „s”).

Dyskretyzacja dokładna.

Metoda dokładna polega na dyskretyzacji rozwiązania równań stanu. Można ją zastosować jedynie wówczas, gdy rozwiązanie ma jawną postać. Jej zaletą jest brak kumulacyjnego błędu całkowania przybliżonego, stąd jej nazwa. Można ją zastosować w przypadku gdy model stanowy układu z czasem ciągłym ma liniowe równanie stanu. Tego warunku nie musi spełniać równanie wyjścia. Rozwiązanie liniowego równania stanu ma postać:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Przyjmując jako warunek początkowy \mathbf{x}_k i całkując w granicach $[kT_p, (k+1)T_p]$ otrzymujemy równanie rekurencyjne tranzycji stanu dla pojedynczego okresu próbkowania. Należy też uwzględnić, że w trakcie tego okresu wektor sygnałów

sterujących pozostaje stały, równy \mathbf{u}_k (zgodnie z mechanizmem bezpośredniego sterowania cyfrowego sygnały sterujące mają charakter schodkowy, o szerokości stopnia równej T_p).

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A T_p} \mathbf{x}_k + \int_0^{T_p} e^{A(T_p-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}_k d\tau = e^{A T_p} \mathbf{x}_k + \int_0^{T_p} e^{A(T_p-\tau)} d\tau \mathbf{B} \mathbf{u}_k$$

czyli po scałkowaniu: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}^* \mathbf{x}_k + \mathbf{B}^* \mathbf{u}_k$,

gdzie: $\mathbf{A}^* = e^{A T_p}$, $\mathbf{B}^* = \int_0^{T_p} e^{A(T_p-\tau)} \mathbf{B} d\tau$. Macierze \mathbf{C}^* , \mathbf{D}^* liniowego modelu wyjścia nie ulegają zmianie w stosunku do dyskretyzowanego modelu z czasem ciągłym (modelu oryginalnego).

Odtąd nie będziemy stosować gwiazdek w oznaczeniach macierzy modelu dyskretnego uzyskanego metodą dokładną, ale będziemy każdorazowo zaznaczać jaką metodą został uzyskany konkretny model. Wpływ wartości T_p na stabilność modelu dyskretnego jest nadal istotny, jest jednak bardziej złożony niż w przypadku przybliżonego modelu dyskretnego. Charakterystyczna jest też zależność odwrotnie proporcjonalna elementów macierzy sterowań modelu dyskretnego (macierzy wzmocnień sygnałów sterujących) od okresu próbkowania T_p , której sens jest następujący: przy tych samych przyrostach sygnałów sterujących, efekt sterowania (wpływ na zmiany wektora stanu) jest tym słabszy im dłuższy jest okres próbkowania (w czasie rzeczywistym, sterowanie jest korygowane rzadziej z uwagi na rzadsze zamykanie pętli sprzężenia zwrotnego w obwodach regulacji).

Analogiczne rozumowanie prowadzące do wyprowadzenia dyskretnego modelu dokładnego, można przeprowadzić w odniesieniu do liniowych modeli niestacjonarnych z czasem ciągłym. Macierze modelu dyskretnego uzyskanego metodą dokładną (przez dyskretyzację jawnego rozwiązania równań stanu) będą w oczywisty sposób związane z indeksami próbek, odzwierciedlając w ten sposób niestacjonarność modelu):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k,$$

gdzie: $\mathbf{A}_k = \mathbf{K}[t_{k+1}, t_k]$, $t_{k+1} - t_k = T_p$, $\mathbf{B}_k = \int_{t_k}^{t_k+T_p} \mathbf{K}(t_k + T_p, \tau) \mathbf{B}(\tau) d\tau$,

Równanie różnicowe dla macierzy transmisji stanu \mathbf{K} ma postać:

$$\mathbf{K}[k+1, j] = \mathbf{A}_k \mathbf{K}[k, j], \quad \text{gdzie } \mathbf{K}[j, j] = \mathbf{I}.$$

Tak więc, przy warunku $k > j$ mamy:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{K}[k, j] \mathbf{x}_j + \sum_{i=j}^{k-1} \mathbf{K}[k, i+1] \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i,$$

gdzie: \mathbf{x}_j – to stan początkowy, a macierz tranzycji stanu od chwili początkowej j do aktualnej chwili dyskretnej k jest równa:

$$\mathbf{K}[k, j] = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{A}_{k-2} \dots \mathbf{A}_j$$