Porównanie metod linearyzacji.

Przykład 1.

Rozważmy system dynamiczny opisany nieliniowymi równaniami stanu. Jego nieliniowość jest istotna. Ma charakter dynamiczny (zależność prędkości zmian stanu od funkcji okresowych oraz wyższych potęg zmiennych stanu). Oba podsystemy są nieliniowo skrośnie posprzęgane. Obecność funkcji okresowych powoduje występowanie przeliczalnej liczby izolowanych punktów stacjonarnych. Model nieliniowy nie jest odwracalny (w sensie istnienia funkcji $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{X})$, odwrotnej do $\mathbf{f}(\mathbf{X})$), a więc nieunikniona jest jego przybliżona linearyzacja . Zbadamy jego właściwości w otoczeniu punktu $\mathbf{x} = [\,0 \quad 0\,]^T$.

$$\dot{x}_1 = x_1 \cos x_2 + (x_2)^2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 \sin x_2 + x_1 + x_2 + (x_1)^2$$

Łatwo sprawdzić, podstawiając do prawych stron równań współrzędne wybranego punktu, że jest to punkt stacjonarny ($\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$), a więc są podstawy do linearyzacji lokalnej.

Podejście bezpośrednie polega na ewaluacji składników prawych stron zakładając, że pozostajemy we wnętrzu hiperkuli o małym promieniu ε. Pomijamy „małe” wyższych rzędów. I tak: $\cos \varepsilon \approx 1$, a więc $x_1 \cos \varepsilon \approx x_1$, $(x_2)^2 = \varepsilon^2$, $\sin \varepsilon \approx 0$, $x_1 \sin \varepsilon \approx 0$, $(x_1)^2 = \varepsilon^2$. Po pominięciu nieistotnych składników otrzymujemy zlinearyzowany model postaci:

$$\dot{x}_1 = x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2$$

macierz stanu modelu zlinearyzowanego $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Natomiast stosując „metodę jacobianową” otrzymujemy:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} cosx_2 & 2x_2 - x_1 sinx_1 \\ 2x_1 + sinx_2 + 1 & 1 + x_1 \cos x_2 \end{bmatrix}$$

W punkcie $\mathbf{x} = [\,0 \quad 0\,]^T$ jacobian ma podobnie jak poprzednio wartość: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Przykład 2.

Równanie we/wy nieliniowego obiektu sterowania ma postać:

$$\ddot{x} + 4(\dot{x})^2 + (x^3)u = 0.$$

Linearyzując je metodą bezpośrednią (przez szacowanie i pomijanie składników) otrzymujemy: $\ddot{x} + u = 0$. Liniowy model w przestrzeni stanu jest następujący:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -u,$$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = [\,0\ \ -1]^T$. Macierz stanu jest osobliwa. Model zlinearyzowany wskazuje na lokalną obecność astatyzmu 2-go rzędu w otoczeniu punktu stacjonarnego $\mathbf{x} = [\,0 \quad 0\,]^T$ Równanie opisuje ruch ciała o masie m=1, w środowisku silnych (w kwadracie) oporów ruchu pod wpływem rozciągania (u jest odkształceniem) nieliniowej(twardej) sprężyny. Sygnałem wyjściowym jest przesunięcie środka masy układu. Linearyzacja metodą jacobianową prowadzi do identycznego modelu lokalnego.

Liniowe modele kanoniczne w przestrzeni stanu.

W przypadku obiektu typu SISO, definiując zmienne stanu jako zmienne fazowe otrzymaliśmy (w przypadku braku zer w transmitancji układu) model, w którym **A** – macierz (stanu) systemu miała formę Frobeniusa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{B} = [\,0 \ \ 0 \dots 0 \ \ k]^T$, gdzie k – współczynnik wzmocnienia, $\mathbf{C} = [1 \ \ 0 \dots \ 0\,]$, $\mathbf{D} = [\,0\,]$. Jest pierwsza (fazowa) postać kanoniczna modelu liniowego obiektu SISI wysokiego rzędu (w przypadku , gdy **A** jest wysokiego rzędu i wektor stanu wysokiego wymiaru n.

W przypadku obiektu typu MIMO model ma postać macierzy blokowych, gdzie poszczególne bloki są modelami odpowiednich par we/wy.

Jeżeli w transmitancji obiektu SISO występują zera, to kanoniczna postać fazowa ma identyczną macierz stanu **A** i macierz wyjścia **C** jak w przypadku bez zer, **B** = [β_1 β_2 . . . β_n]^T , D = [β_o], gdzie β_i (i=0, 1, . . . , n) są współczynnikami ze zmodyfikowanych dla tego przypadku definicji fazowych zmiennych stanu. Zwraca uwagę obecność sprzężenia transmisyjnego (bezpośredniego sprzężenia „do przodu") od wejścia do wyjścia obiektu. Również charakterystyczny jest bezpośredni, proporcjonalny wpływ sygnału sterującego na każdą ze zmiennych stanu.

Inną postacią kanoniczną modelu jest tzw, model odsprzężony, którego macierz A jest macierzą diagonalną:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

λ_i są wartościami własnymi danej macierzy stanu **A** (uzyskanej z opisu obiektu, na ogół niediagonalnej).

B = [1 1 1 . . . 1]^T , **C** = [c_1 c_2 . . . c_n] , **D** = [c_0].

W tym miejscu założyliśmy, że dany układ o liniowym modelu stanowym <**A**,**B**,**C**,**D**> ma transmitancję operatorową w postaci zespolonej funkcji wymiernej, tj. ilorazu wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, zmiennej zespolonej s .

$$G(s) = L(s)/M(s)$$

Dodatkowo zakładamy, że wielomian w mianowniku ma pojedyncze pierwiastki (czyli bieguny transmitancji), jest ich n (tyle ile wynosi stopień mianownika) i można wykazać, że są one tożsame z wartościami własnymi macierzy **A.** Ponadto zakładamy, że zera transmitancji (pierwiastki równania L(s)= 0) mają wartości różne od wartości biegunów (nie dochodzi do uproszczeń wyrażenia na transmitancję operatorową po przeprowadzeniu faktoryzacji wielomianów licznika i mianownika). W przypadku wielomianów zmiennej zespolonej ze współczynnikami rzeczywistymi jego pierwiastkami mogą być liczby rzeczywiste lub zespolone. Wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Jeżeli pierwiastkiem jest liczba zespolona, to jest nim również liczba zespolona sprzężona z nią.

Załóżmy, że wyznaczyliśmy wartości pierwiastków wielomianów L(s) i M(s) i wynoszą one odpowiednio $\{ z_1 \; z_2 \; ... z_m \}$ i $\{ \lambda_1 \; \lambda_2 \; ... \lambda_n \}$, gdzie m jest stopniem wielomianu w liczniku i $m \leq n$. Wówczas możemy przedstawić transmitancję w postaci sfaktoryzowanych wielomianów:

$$G(s) = \frac{k(s-z_1)}{(s-\lambda_1)} \frac{(s-z_2)}{(s-\lambda_2)} \cdot \cdot \cdot \frac{(s-z_m)}{(s-\lambda_m)} \frac{1}{(s-\lambda_{m+1})} \cdot \cdot \cdot \frac{1}{(s-\lambda_n)}$$

Można dokonać rozkładu powyższego wyrażenia na ułamki proste:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{L(s)}{M(s)} = c_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s-\lambda_i}.$$

Każdy element pod znakiem sumy można interpretować jako elementarną transmitancję elementu 1-go rzędu, a całe wyrażenie po prawej stronie jako połączenie równoległe tych członów (sygnałem wejściowym do każdego z nich jest u(t), a sygnałem wyjściowym y(t) jest suma ich sygnałów wyjściowych. Układ równań stanu tak przekształconego obiektu przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + u \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n &= \lambda_n x_n + u \end{aligned}$$

Stałe c_0, c_1, . . . , c_n można wyznaczyć jako funkcje współczynników a_i oraz b_i wielomianów M(s) i L(s), porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach „s" po obu stronach tożsamości.

Ta interpretacja uzasadnia postać macierzy modelu odsprzężonego przytoczone powyżej.

W przypadku, gdy bieguny transmitancji są wielokrotne (ich wartości powtarzają się), nia da się zdiagonalizować modelu. Można jedynie uzyskać postać blokowo diagonalną, gdzie bloki przyjmują postać tzw. klatek Jordana. Przy biegunie dwukrotnym np. λ_i taka klatka ma postać: $\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$, a przy trzykrotnym (przypadek niezwykle rzadki):

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Wówczas równania stanu o indeksach $i, i+1$ (przy biegunie podwójnym)mają postać:

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + x_{i+1}$$

$$\dot{x}_{i+1} = \lambda_i x_{i+1} + x_{i+2} + u$$

a przy potrójnym:

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + x_{i+1}$$

$$\dot{x}_{i+1} = \lambda_i x_{i+1} + x_{i+2}$$

$$\dot{x}_{i+2} = \lambda_i x_{i+2} + u$$

Geometryczna interpretacja liniowego modelu stanowego.

Przestrzeń stanu jest przestrzenią wielowymiarową $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R}^n$, gdzie n jest wymiarem wektora stanu. Równanie stanu (model dynamiki) opisuje operację rzutowania wektora stanu **x**(t) na hiperpłaszczyznę styczną do trajektorii stanu w chwili t, której elementem jest wektor prędkości zmian stanu (w przypadku niezdegenerowanym, trajektoria stanu jest parametryczną krzywą n-wymiarową w przestrzeni $\boldsymbol{X}$ - parametrem jest czas). To równanie również opisuje analogiczne rzutowanie wektora sterowań $\boldsymbol{u}$(t) w tę hiperpłaszczyznę (liczba sygnałów sterujących jest na ogół mniejsza niż wymiar wektora stanu, a więc macierz sterowań jest nieodwracalna). Inaczej rzecz się ma w przypadku modeli z czasem dyskretnym. Tutaj różnicowe równanie stanu opisuje rzutowanie w przestrzeń stanu (w rozmaitość różniczkową stanu , gdy model jest nieliniowy).

Macierze **A** i **B** modelu liniowego można interpretować jako operatory rzutowania odpowiednio elementów przestrzeni stanu (chwilowych wektorów stanu) i przestrzeni sterowań (wektorów chwilowych wartości sygnałów sterujących) w inną przestrzeń, (hiperpłaszczyznę styczną, rozmaitość). Podobnie macierze modelu wyjścia **C** i **D** można interpretować jako operatory rzutowe odpowiednio wektorów stanu i wektorów sterowań w p wymiarową przestrzeń wyjść. Należy pamiętać, że wektor stanu jest wektorem wodzącym, natomiast wektor sterowań, w odniesieniu do układu współrzędnych stanu jest wektorem swobodnym. W przypadku modeli liniowych przestrzeń stanu jest przestrzenią liniową, a hiperpłaszczyzna styczna jest izomorficzna z przestrzenią stanu (jest obrócona względem przestrzeni stanu wskutek działania na każdy jej element przez macierz A).

Macierz stanu **A** działając na chwilowy wektor stanu **x**(t) rzutuje go na hiperpłaszczyznę styczną do trajektorii w punkcie **x**(t). Podobnie macierz sterowań **B** rzutuje chwilowy wektor sterowań $\mathbf{u}(t)$ w tę hiperpłaszczyznę. Efekt mnożenia wektora wodzącego przez macierz pełnego rzędu $\mathbf{A}$ jest następujący:

- wektor zmienia kierunek (ulega złożonemu obrotowi w przestrzeni n-wymiarowej),
- wektor zmienia swoją długość w zależności od wartości det $\mathbf{A}$. Dla det $\mathbf{A}$ =1 nie zmienia długości, dla det $\mathbf{A} > 1$ ulega wydłużeniu, dla det $\mathbf{A} < 1$, skróceniu;
- addytywny składnik zależny od wektora sterowania powoduje translację końca wektora stanu w podprzestrzeni m-wymiarowej (o ile kolumny macierzy **B są** liniowo niezależne.

Jeszcze przejrzyściej jest to widoczne w przypadku modelu liniowego z czasem dyskretnym, gdzie te działania odwaorowują wektor stanu na przestrzeń stanu.

Są takie kierunki w przestrzeni stanu, dla których działanie w postaci mnożenia wektora o takim kierunku przez macierz $\mathbf{A}$ nie powoduje zmiany kierunku wektora, a jedynie zmianę jego długości. Wyznaczające te kierunki wektory noszą nazwę wektorów własnych. Macierz $n\times n$ pełnego rzędu ma n wektorów własnych. Są one określone co do kierunku, ich długość jest nieokreślona. Tworzą układ wektorów liniowo niezależnych (żadnego z nich nie można przedstawić jako kombinację liniową pozostałych). Oznaczmy je jako $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, . . . $\mathbf{e}^n$. Macierz, której kolumny stanowią wektory własne nazywamy macierzą modalną:

$$M = [\ \mathbf{e}^1\ \ \mathbf{e}^2\ \ldots \mathbf{e}^n\ ]$$

Macierz modfalna jest nieosobliwa (można ją odwrócić). Macierz $\mathbf{A}$ ma tyle macierzy modalnych ile jest permutacji kolumn macierzy $\mathbf{M}$ czyli n! Mówimy , że jest ona określona z dokładnością do permutacji.

Wektory własne spełniają następujące równania:

$$\mathbf{A}\mathbf{e}^i = \lambda_i\, \mathbf{e}^i \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Widać, że jest to macierzowe równanie liniowe, nieokreślone:

$$[\mathbf{A}_{n\times n} - \lambda_i\, \mathbf{I}_{n\times n}]\ \mathbf{e}^i_{n\times 1} = \mathbf{0}_{n\times 1}$$

$$\mathbf{e}^i_{n\times 1} \in \mathrm{Ker}\ [\mathbf{A}_{n\times n} - \lambda_i\, \mathbf{I}_{n\times n}].$$

W zapisie macierzowym można je przedstawić w następującej formie:

$$\mathbf{A}[\ \mathbf{e}^1\ \ \mathbf{e}^2\ \ldots \mathbf{e}^n\ ] = [\ \mathbf{e}^1\ \ \mathbf{e}^2\ \ldots \mathbf{e}^n\ ]\boldsymbol{\Lambda}$$

gdzie $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\ [\ \lambda_1\ \ \lambda_2 \ldots \lambda_n\ ]$. Tak więc

$$\mathbf{AM} = \mathbf{M\Lambda}\ |\ \times\mathbf{M}^{-1} \quad \text{lewostronnie,}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\ \mathbf{M}$$

Jest to metoda diagonalizacji danej macierzy stanu $\mathbf{A}$.

Równoważność liniowych modeli w przestrzeni stanu.

Załóżmy, że sporządzono dwa modele systemu w przestrzeni stanu dokonując odmiennego wyboru zmiennych stanu:

Model I – wektor stanu **x**:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t).$$

Model II – wektor stanu **z**:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A^*}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B^*}\mathbf{u}(t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C^*}\mathbf{z}\,(t) + \mathbf{D^*}\mathbf{u}(t).$$

Spełniony jest warunek: dim $\mathbf{x}$ = dim $\mathbf{z}$ = n oraz

$$\mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C^*}[s\mathbf{I} - \mathbf{A^*}]^{-1}\mathbf{B}^* + \mathbf{D^*}.$$

Transmitancje operatorowe obu modeli są identyczne. Czy zatem modele te są równoważnymi opisami obiektu w przestrzeni stanu?

Warunek równoważności modeli liniowych.

Na to by modele I i II były równoważnymi opisami tego samego obiektu sterowania, potrzeba i wystarcza, by istniała nieosobliwa macierz **P** przekształcenia wektora stanu **x** w wektor stanu **z**: $\mathbf{z} = \mathbf{P}\,\mathbf{x}$ zwana macierzą podobieństwa (zatem $\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{z}$, $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}\,\dot{\mathbf{x}}$, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}^{-1}\dot{\mathbf{z}}$). Podstawiając do drugiego modelu za **z** oraz $\dot{\mathbf{z}}$ powyższe związki otrzymujemy:

$$\mathbf{P}\,\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A^*}\,\mathbf{P}\,\mathbf{x}\,(t) + \mathbf{B^*}\mathbf{u}(t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C^*}\,\mathbf{P}\,\mathbf{x}\,(t) + \mathbf{D^*}\mathbf{u}(t).$$

$$\mathbf{P}\,\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A^*}\,\mathbf{P}\,\mathbf{x}\,(t) + \mathbf{B^*}\mathbf{u}(t) \;\Big|\times\mathbf{P}^{-1} \text{ lewostronnie}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A^*}\,\mathbf{P}\,\mathbf{x}\,(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B^*}\mathbf{u}(t).$$

Jeżeli oba modele są równoważne, to prawdziwe są zależności: $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A^*}\,\mathbf{P}$, $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B^*}$, $\mathbf{C} = \mathbf{C^*}\,\mathbf{P}$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}^*$ oraz $\mathbf{A^*} = \mathbf{P}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}^{-1}$, $\mathbf{B^*} = \mathbf{P}\,\mathbf{B}$, $\mathbf{C^*} = \mathbf{C}\,\mathbf{P}^{-1}$, $\mathbf{D^*} = \mathbf{D}$.

Jeżeli za macierz podobieństwa przyjąć macierz modalną **M** danej macierzy stanu **A, to** można dany model zdiagonalizować (przypadek jednokrotnych biegunów transmitancji - wartości własnych macierzy **A**), albo w istotnym stopniu zlikwidować sprzężenia skrośne w modelu obiektu (przypadek wielokrotnych biegunów transmitancji - wartości własnych macierzy **A**), co ułatwia projekt struktury układu sterującego.