TWORZENIE MODELU OBIEKTU WIELOWYMIAROWEGO W PRZESTRZENI STANU

kontynuacja

2.2. Ustalanie wymiaru wektora stanu na podstawie układu równań we=wy.

Niechaj to w równaniu we-wy opisującym związek pomiędzy sygnałem na j-tym wyjściu a sygnałem na i-tym wejściu, występuje najwyższego rzędu pochodna sygnału $y_j(t)$. Oznaczmy ten rząd jako n_j, j=1,2,…, p.

$$y_j^{(n_j)}(t) + a_{n-1}y_j^{(n_j-1)}(t) + \ldots + a_1\acute{y}_j(t) + a_0y_j(t) = b_m u_i(t)^{(m)} + b_{m-1}u_i(t)^{(m-1)} + \ldots + b_0u_i(t) \qquad (2.6)$$

Mamy p równań jednorodnych po przyrównaniu prawych stron układu (2.6) do zera. Każde z nich jest odpowiednio rzędu $n_1, n_2,\ldots, n_p$. Potrzeba znajomości $n= n_1 + n_2+\ldots+ n_p$ warunków początkowych, by móc rozwiązać ten układ równań jednorodnych. Liczba ta określa wymiar wektora stanu **x** i przestrzeni stanu **X** (dim**X** = n). Odtąd zmienne wektorowe oznaczać będziemy pogrubionymi symbolami literowymi.

$$\mathbf{x}^T= [\ x_1\ x_2\ \ldots\ x_n\ ] \qquad (2.7)$$

Pierwsza definicja zmiennych stanu – zmienne fazowe.

Przyjmijmy następującą definicje współrzędnych wektora stanu:

Blok y_1: $x_1 = y_1$, $x_2 = \acute{y}_1,\ldots\ x_{n_1} = y_1^{(n_1-1)}$;

Blok y_2: $x_{n_1+1} = y_2$, $x_{n_1+2} = \acute{y}_2,\ldots\ x_{n_1+n_2} = y_2^{(n_2-1)}$;

………………………………………………………………;

Blok y_p: $x_{(n_1+\ldots+n_{p-1})+1}= y_p$, $x_{n_1+\ldots+n_p+2}=\acute{y}_p,\ldots\ x_{n_1+\ldots+n_p} = y_p^{(n_p-1)}$.

Tak zdefiniowane zmienne stanu nazywamy zmiennymi fazowymi. Zmienne są związane z kolejnymi wyjściami. W rezultacie tej definicji macierz modelu w przestrzeni stanu ma strukturę blokową, a każdy blok ma strukturę macierzy Frobeniusa.

Znacznie bardziej przejrzysta jest definicja fazowych zmiennych stanu, gdy mamy do czynienia z układem o jednym wyjściu. Wówczas:

$$x_1 = y,\ x_2 = \acute{y},\ldots\ x_n = y^{(n-1)} \quad \text{czyli} \quad x_{i+1} = \dot{x}_i \quad i = 1,\ldots(n-1),$$

gdzie *n* jest najwyższym rzędem pochodnej sygnału wyjściowego występującej w równaniu różniczkowym wiążącym wejścia! z pojedynczym wyjściem. Macierz układu .ze zmiennymi stanu fazowymi ma strukturę macierzy Frobeniusa. Macierz wyjść jest wierszowa: C = [1 0 0 … 0], macierz sterowań (zakładając, że w transmitancjach układu nie występowały zera) ma postać:

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} b_{01} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{02} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b_{0m} \end{vmatrix}$$

Układ równań stanu i układ równań wyjścia wielowymiarowego obiektu sterowania o liniowych właściwościach statycznych i dynamicznych można zapisać w postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\,\mathbf{x} + B\,\mathbf{u} \tag{2.8a}$$

$$\mathbf{y} = C\,\mathbf{x} + D\,\mathbf{u} \tag{2.8b}$$

gdzie: A jest macierzą układu, A ϵ M(n,n); B – macierzą sterowań, B ϵ M(n,m); C –macierzą wyjść, C ϵ M(p,n); D – macierzą transmisyjną, D ϵ M(pxm) (rzadko występującą w modelach obiektów sterowania).

Czwórkę <A,B,C,D> nazywamy realizacją modelu stanowego danego liniowego obiektu dynamicznego (jest to jedna z wielu możliwych realizacji ekwiwalentnych).

Można wykazać następujący związek pomiędzy modelem w postaci macierzy transmitancji widmowych/operatorowych, a modelem w przestrzeni stanu:

$$\underline{G}(s) = C[s\mathbf{I} - A]^{-1}B + D, \tag{3.3}$$

gdzie **I** jest macierzą jednostkową o wymiarach nxn, a s – zmienną zespoloną postaci s = σ+jω.

Dysponując opisem obiektu w formie równań stanu i wyjścia, można jednoznacznie wyliczyć jego transmitancję operatorową (widmową, gdy s = jω).

W drugą stronę jednoznaczność nie ma miejsca. Wychodząc od transmitancji można zastosować jedną ze znanych z podstaw automatyki metod generowania tzw. modeli analogowych np. bezpośrednią, albo iteracyjną, albo równoległą i na ich podstawie zdefiniować zmienne stanu, a następnie określić na podstawie schematu poszczególne elementy macierzy A,B,C,D.

W każdym przypadku będą to macierze różnej postaci (zakładając brak pomyłek) - będą to macierze równoważne.

Dla układów typu SISO wymienione metody są stosunkowo proste nawet w przypadku obiektów wysokiego rzędu (o złożonej, lecz ciągle liniowej dynamice). W przypadku układów typu MIMO niezbędny jest dodatkowy proces unifikacji zmiennych stanu, które mogą się powtarzając się w grafach przepływu sygnałów poszczególnych kanałów we-wy. Unifikacja jest niezbędna dla usunięcia redundancji (nadmiaru) w opisie obiektu dynamicznego w przestrzeni stanu, gdyż zgodnie z definicją, wektor stanu opisujący obiekt dynamiczny musi mieć rozmiar minimalny (nieredukowalny).

Definicja zmiennych fazowych – przypadek obecności zer w transmitancjach kanałów.

Równanie wiążące sygnał na i-tym wejściu i sygnałem na j-tym wyjściu ma ogólną postać:

$$y_j^{(n)}(t) + a_{n-1}y_j^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1\acute{y}_j(t) + a_0y_j(t) = b_mu_i(t)^{(m)} + b_{m-1}u_i(t)^{(m-1)} + \ldots + b_0u_i(t).$$

zwraca uwagę obecność pochodnych sygnału sterującego po prawej stronie równania.

Skąd się wzięły zera i co to oznacza?

Tego rodzaju relacja we-wy jest wynikiem wystąpienia zer w transmitancjach poszczególnych kanałów. Należy pamiętać, że w układach dynamicznych działających z zachowaniem zasady przyczynowości, opisywanych powyższym modelem liniowym, zachodzi $m \le n$.

Jak należy interpretować takie równanie?

Obecność liniowej kombinacji sygnału sterującego i jego pochodnych do rzędu m można obejść zakładając, że cała kombinacja to ekwiwalentne, „wirtualne” wymuszenie zewnętrzne postaci:

$$u_i'(t) = b_mu_i(t)^{(m)} + b_{m-1}u_i(t)^{(m-1)} + \ldots + b_0u_i(t)$$

i odtąd przy wyborze zmiennych stanu (zmiennych fazowych) postępować jak w przypadku pierwszej definicji zmiennych fazowych.

Jednak takie założenie nakłada istotne ograniczenia na sposób sterowania, gdyż zamiast „fizycznego” sygnału $u_i(t)$ jako wymuszenie (sygnał modulowany w odpowiedni sposób) przy planowaniu sterowania musimy traktować $u_i'(t)$. To utrudnia oszacowanie skutków konkretnego „fizycznego” sterowania i ogranicza klasę funkcji czasu jakie można zastosować do sterowania.

Ten formalny chwyt, nie ma znaczenia dla właściwości dynamicznych rozważanego kanału takiej jak stabilność (bowiem równanie jednorodne po lewej stronie nie uległo zmianie), może jednak wpłynąć na takie jego cechy jak sterowalność i obserwowalność. (o tym może przesądzić możliwość uproszczenie transmitancji przy pokrywaniu się któregoś z jej zer z biegunem).

Jednocześnie jednak poważnie ograniczona jest klasa funkcji czasu, za pomocą których realizowane jest sterowanie, a mianowicie do funkcji ciągłych wraz z pochodnymi względem czasu aż do rzędu $m-1$ (funkcje klasy $C^{(m-1)}$). Przy tym podejściu nie jest możliwe stosowanie jako sygnałów sterujących funkcji schodkowych, z czym mamy do czynienia w cyfrowych układach sterowania. Należy zatem takie podejście odrzucić jako niepraktyczne.

Skąd się wzięły zera w transmitancji kanału?

Model wielokanałowy układu MIMO zakłada, że przepływ sygnałów wejściowych do wyjść odbywa się „ do przodu” (feed-forward, FF). Rozważany sygnał wejściowy przepływa przez kolejne połączone szeregowo bloki (człony dynamiczne) i jego wartość chwilowa jest modyfikowana zarówno pod względem dynamicznym jak i statycznym zgodnie z równaniem dynamiki członu i przebiegiem jego charakterystyki statycznej (zakładamy na tym etapie, że charakterystyka ta jest jednoznaczna (brak histerezy) oraz ciągła i różniczkowalna, co wyklucza np. charakterystyki przekaźnikowe, ze strefą nieczułości, czy z nasyceniem, ale nie musi być to charakterystyka liniowa).

Człon dynamiczny często charakteryzuje się występowaniem lokalnego (wewnętrznego) sprzężenia zwrotnego. Niech jego transmitancja w stanie otwartym będzie równa:

$G(s) = L(s)/M(s)$, a bieguny są różne od zer.

W układzie zamkniętym pętlą prostego sprzężenia zwrotnego

$$G_z(s) = L(s)/(M(s) + L(s)).$$

Położenie biegunów układu zamkniętego ulega modyfikacji, bo równanie charakterystyczne ma obecnie postać:

$$M(s) + L(s) = 0.$$

Współczynniki wielomianu równania charakterystycznego układu zamkniętego zostały zmodyfikowane od indeksu 0 aż do m :

$$a'_i = a_i + b_i\,,\ i = 0, 1, \ldots, m.$$

Skutkuje to nowym rozkładem biegunów i może się okazać, że wartość „starego zera” pokrywa się z wartością przesuniętego dzięki sprzężeniu zwrotnemu bieguna.
Jeszcze bardziej złożony przypadek mamy wówczas, gdy lokalne sprzężenie zwrotne ma charakter dynamiczny – transmitancja toru sprzężenia zwrotnego ma postać H(s) = P(s)/R(s). Wówczas

$$G_z(s) = \frac{G(s)}{1+H(s)G(s)} = L(s)R(s)/(R(s)M(s)+P(s)L(s)$$

Widać, ze nawet, gdy dany kanał nie ma zer, to obecność np. regulatora PID jako lokalnego stabilizatora urządzenia wprowadzi zera, w dodatku przy nastrajanych nastawach ze względu na lokalny cel (ustabilizowanie danego członu w stopniu satysfakcjonującym) zera te zmieniają położenie na płaszczyźnie zespolonej i mogą koincydować (pokrywać się) z biegunami danego kanału, niekoniecznie związanymi z danym urządzeniem.

Jak zatem definiować zmienne stanu (zmienne fazowe) w przypadku, gdy w transmitancji danego kanału występują zera?

Dla zachowanie przejrzystości procedury przedstawimy schemat tworzenia definicji dla wybranego kanału *„i, j”* . Celem skupienia uwagi na kluczowych dla tej procedury wskaźnikach, pomińmy nieistotne na tym etapie indeksy wskazujące na kanał. Poniższe rozważania są bowiem identyczne dla wszystkich kanałów z zerami w transmitancji.

$x_1 = y - \beta_0 u,$

$x_2 = \dot{y}' - \beta_1 u,$

. . . .

$x_n = y^{(n-1)} - \beta_{n-1} u.$

W wyniku powyższej definicji zmiennych fazowych równanie we-wy zostaje przekształcone do postaci (*i,j* pomijamy):

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1\acute{y}(t) + a_0y(t) = \beta_m u(t) \tag{2.11}$$

czyli : $y^{(n)}(t) = x'_n(t) = - a_0x_1(t) - a_1x_2(t) + \ldots - a_{n-1}x_n + \beta_m u(t).$

Nie tracąc ogólności załóżmy, że $m=n$ (stopień licznika transmitancji kanału jest równy stopniowi mianownika transmitancji). Wówczas współczynniki β_k (wzmocnienia « fizycznego» sygnału sterującego $u(t)$) można wyznaczyć w wyniku prostej procedury rekurencyjnej:

$\beta_0 = b_n$,

$\beta_1 = b_{n-1} - a_{n-1}b_0$,

$\beta_2 = b_{n-2} - a_{n-1}b_1 - a_{n-2}b_0$,

$\beta_3 = b_{n-3} - a_{n-1}b_2 - a_{n-2}b_1 - a_{n-3}b_0$,

. . . .

$\beta_n = b_0 - a_{n-1}b_{n-1} - a_{n-2}b_{n-2} - \ldots - a_0b_0$.

W przypadku, gdy $m<n$ łatwo określić jak zredukują się te wzory ($\beta_0 = 0$, $\beta_1 = - a_{n-1}b_0$, . . .). Model w przestrzeni stanu dla pary (i, j) ma następujące cechy: macierz $\boldsymbol{A}$ jest postaci Frobeniusa, tak jak w przypadku klasycznych zmiennych fazowych, macierz sterowań

$\boldsymbol{B} = [\, \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \,]^T$, macierz wyjścia $\boldsymbol{C} = [1\ 0\ 0\ \ldots\ 0]$, a ponadto występuje w modelu macierz transmisyjna $\boldsymbol{D} = [\, \beta_0 \,]$.

Poszczególne modele dla par we-wy stanowią bloki w odpowiednich macierzach modelu stanowego całego układu MIMO. Podobnie jak w przypadku bez zer, model całego układu wymaga unifikacji zmiennych stanu (redukcji ich liczby, wynikającej z ewentualnych powtórzeń definicji zmiennych stanu w pozostałych kanałach).