Badanie sterowalności obiektu

Dysponując adekwatnym modelem analitycznym obiektu sterowania można zbadać jego sterowalność w oparciu o ten model. Ogólna postać stanowego modelu (równania stanu i równania wyjścia), przy założeniu, że jest to obiekt o skupionych parametrach , jest następująca:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)\,, \mathbf{u}(t), t), \tag{1a}$$

$$y(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}\,, \mathbf{u}, t). \tag{1b}$$

pole wektorowe $\mathbf{f}$ jest wektorem funkcji (w ogólnym przypadku nieliniowych), których argumentami są wybrane zmienne stanu i sygnały sterujące, mające wpływ na daną składową wektora prędkości zmian stanu.

Niestacjonarność właściwości dynamicznych i statycznych obiektu zaznacza się, poprzez jawną obecność czasu jako argumentu w równaniach modelu.

Jeżeli w czasie pracy obiektu ulega zmianie jego struktura (struktura powiązań we-wy), to mówimy o obiekcie ze zmienną strukturą. Po każdym takim incydencie powinna być przeprowadzona adekwatna zmiana w strukturze modelu.

Analiza zachowania obiektu o zmiennej strukturze wymaga posługiwania się wieloma modelami przełączanymi w chwilach zmiany struktury i traktowania wartości końcowych (części) zmiennych występujących w poprzedniej strukturze jako warunki początkowe w strukturze aktualnej.

Przykładem obiektu sterowania o zmiennej w trakcie misji strukturze równań stanu i wyjścia jest samolot o zmiennej geometrii płatów nośnych, rakieta wielostopniowa, robot-manipulator wykonujący zdanie wymagające interakcji z otoczeniem (np. obróbka pewnej powierzchni).

Niestacjonarność może cechować obiekt o stałej strukturze, którego właściwości ulegają zmianie w czasie, w funkcji przebiegu (kilometrażu) wskutek procesów starzenia, zużycia, lub przekroczenia gwarancji (np. granicznej liczby cykli roboczych). W tym przypadku jest ona modelowana poprzez jawne uzależnienie od czasu wybranych parametrów modelu eksploatacyjnego obiektu. W odróżnieniu od niestacjonarności strukturalnej tego rodzaju niestacjonarność określamy mianem niestacjonarności parametrycznej.

Zazwyczaj dynamika zmian wartości takich parametrów jest duże wolniejsza od dynamiki własnej obiektu, co pozwala analizować go jako obiekt odcinkami stacjonarny, z aktualizacją wartości wybranych parametrów modelu (odnowa modelu).

Jeżeli procesy zużycia mają dużą dynamikę (przypadek silnika rakietowego), zbliżoną do dynamiki procesu, to niestacjonarność parametryczna musi być jawnie ujęta w równaniu stanu.

Nie istnieje w ogólnym przypadku bezpośrednia metoda badania sterowalności obiektu na podstawie jego nieliniowego modelu w przestrzeni stanu!

Natomiast, na podstawie liniowych równań stanu (modelu lokalnie przybliżającego dynamikę nieliniową) można przeprowadzić test sterowalności opierając się o twierdzenie R. Kalmana.

W przypadku liniowym, model niestacjonarny przyjmuje postać:

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t}) = \mathbf{A}(\mathrm{t})\,\mathbf{x}(\mathrm{t}) + \mathbf{B}(\mathrm{t})\mathbf{u}(\mathrm{t}), \tag{2a}$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}(\mathrm{t})\,\mathbf{x}(\mathrm{t}) + \mathbf{D}(\mathrm{t})\mathbf{u}(\mathrm{t}), \tag{2b}$$

gdzie niestacjonarność „wbudowano” w parametry modelu.

Zakładając stacjonarność obiektu mamy:

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t}) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(\mathrm{t}) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(\mathrm{t}) \qquad (3a),$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(\mathrm{t}) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(\mathrm{t}), \qquad (3b).$$

Macierz stanu $\mathbf{A}$ reprezentuje model autonomiczny ($\mathbf{u}(\mathrm{t}) \equiv \mathbf{0}$), a trajektoria stanu modelu autonomicznego jest obrazem ruchu swobodnego.

Kolumny macierzy sterowań $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1\,\mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_m]$ należy zinterpretować jako kierunkowe współczynniki wzmocnienia skalarnych sterowań odpowiednio: $u_1\,u_2 \ldots u_m$. Decydują one o efekcie kierunkowym sterowania na określonym wejściu. Natomiast o wielkości wpływu danego sterowania na prędkości zmian wektora stanu decyduje amplituda (chwilowa wartość) danego sterowania. Jeżeli amplituda jest ograniczona (dany sygnał sterujący może zmieniać wartość jedynie w pewnym przedziale lub w zbiorze wartości), to wpływ ten jest również ograniczony lub skwantowany.

Sterowalność obiektu oznacza taką jego <u>właściwość</u>, że jeżeli znajduje się on w <u>dowolnym</u> stanie początkowym, to przez synergię ruchu własnego (swobodnego) i odpowiednie sterowanie może osiągnąć <u>dowolny</u> stan końcowy (zadany).

Przy czym nie stawiamy dodatkowych warunków np. ograniczających czas osiągnięcia stanu końcowego, czy ograniczających wartości chwilowe sygnałów sterujących.

Tak rozumiana sterowalność wynika jedynie z geometrycznych konsekwencji zastosowania danego modelu obiektu w przestrzeni stanu. Mnożenie wektora stanu przez macierz **A** można rozpatrywać jako swego rodzaju rzutowanie $\mathbf{X}^n \rightarrow T\mathbf{X}^n$ (elementu wektorowej przestrzeni stanu $\mathbf{X}^n$ w element hiperpłaszczyzny $T\mathbf{X}^n$, stycznej do $\mathbf{X}^n$), czyli złożenie operacji obrotu wektora w przestrzeni n-wymiarowej i zmiany skali (współczynnikiem zmiany skali wektora jest wartość det **A**). Natomiast mnożenie wektora sterowań przez macierz sterowań można rozpatrywać jako swego rodzaju rzutowanie $U^m \rightarrow T\mathbf{X}^n$ (elementu wektorowej przestrzeni sterowań $\mathbf{U}^m$ w element hiperpłaszczyzny $T\mathbf{X}^n$), a jest to w równaniu stanu składnik addytywny. Macierz **AB** reprezentuje operator rzutowania efektu sterowania w hiperpłaszczyznę prędkości $T\mathbf{X}^n$.

Utwórzmy następującą macierz:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B}\ \ \mathbf{AB}\ \ \mathbf{A}^2\mathrm{B} \dots \mathrm{A}^{n-1}\mathrm{B}], \tag{4}$$

gdzie n = dim **x**. Macierz nosi nazwę macierzy sterowalności i znajduje zastosowanie w badaniu sterowalności modelu liniowego.

Twierdzenie o sterowalności obiektu liniowego (R. Kalman 1960).

Na to, by obiekt liniowy o równaniach (3a-b) **był sterowalny potrzeba i wystarcza, że**

$$\mathrm{rank}\ \mathbf{S} = n.$$

Macierz sterowalności ma wymiary nx(nxm) i składa się z n bloków m-kolumnowych. Kolejny blok uzyskujemy rekurencyjnie z poprzedniego poprzez przemnożenie go przez **A**. Opłaca się badać, czy warunek rzędu jest spełniony po uzupełnieniu macierzy o kolejny i-ty blok (dla niekompletnej macierzy $\mathbf{S}_i$). Jeżeli jest spełniony, to znaczy, że obiekt jest sterowalny i dalsze obliczenia kolejnych bloków są niecelowe. Niska wartość wskaźnika „i” świadczy o malej roli ruchu swobodnego w zapewnieniu obiektowi sterowalności i o dominującej roli struktury wielowymiarowego układu sterowania (stopnia powiązań sygnałów wejściowych z sygnałami zmiennych stanu).

Warto zastanowić się nad rolą poszczególnych sygnałów sterujących w zapewnieniu sterowalności obiektu i zapewnieniu efektywnego sterowania. W wielowymiarowym obiekcie sterowania nie wszystkie sygnały sterujące są jednakowo ważne z punktu widzenia sterowalności obiektu oraz efektywności sterowania.

Przykład.

Dany jest wielowymiarowy obiekt liniowy n-tego rzędu o czterech wejściach sterujących. Przeprowadźmy negatywną analizę jego sterowalności z p. widzenia poszczególnych wejść.

1. Pomińmy i-ty sygnał sterujący (i= 1,2,3,4). Mamy 4 trójelementowe kombinacje: (u_1 , u_2 , u_3), (u_1 , u_2 , u_4), (u_1 , u_3 , u_4) , (u_2 , u_3 , u_4). Każda odpowiada usunięciu z macierzy sterowań **B** odpowiednio 4-tej, 3-ciej, 2-giej, 1-wszej kolumny.

2. Przeprowadźmy dla każdej z kombinacji test sterowalności. Jeżeli dla którejś z nich wynik testu jest negatywny, to oznacza to, że usunięte wejście jest niezbędne dla zapewnienia sterowalności układu. Takie wejście nazywamy krytycznym.

3. Jeżeli dla wybranej konfiguracji wejść wynik jest pozytywny, to oznacza to, że dane usunięte wejście nie jest niezbędne dla zapewnienia sterowalności obiektu, a kombinacje dla których test jest pozytywny można uznać za alternatywne (antyawaryjne).

4. W takim przypadku należy sprawdzić jak zmieniła się wartość indeksu „j" macierzy sterowalności obiektu zredukowanego $\mathbf{S}_j'$ (minimalna wartość wykładnika potęgi macierzy **A** w tej macierzy, przy której częściowa macierz sterowalności $\mathbf{S}_j'$ spełnia warunek rzędu). Zawsze spełniony jest warunek $i \leq j$. Jeżeli i=j, to konfiguracja 3-wejsciowa jest ekwiwalentna nadmiarowej konfiguracji 4-wejściowej (może być konfiguracją alternatywą). Jeżeli $j > i$, to konfigurację 3-wejściową można uznać za zapasową (antyawaryjną). Stopień odporności obiektu na awarie (np. siłowników) rośnie wraz z liczbą zredukowanych kombinacji zapasowych.

Powyższe rozważania łatwo uogólnić na przypadek układu z m wejściami. Wówczas operacje usuwania wejść można rozszerzyć na par wejść, trójki wejść, itd.

Innym aspektem analizy właściwości sterowniczych obiektu wielowymiarowego jest uwzględnienie ograniczeń wartości chwilowych sygnałów sterujących oraz zbadanie relacji pomiędzy celem sterowania a dynamiką własną obiektu. Sprawę można prościej przedyskutować w przypadku obiektów sterowanych dyskretnie w czasie.

Celem sterowania jest zazwyczaj przeprowadzenie obiektu z pewnego stanu początkowego do zadanego stanu końcowego. W przestrzeni stanu cel reprezentuje wektor $\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_0$ (mający określony kierunek, zwrot i długość). Sterowanie chwilowo sprzyjające realizacji celu charakteryzuje się dodatnim iloczynem skalarnym

$$< \mathbf{x}_N - \mathbf{x}_0 , \mathbf{B}^*\mathbf{u}_k> \; > 0.$$

Predykcja wartości wektora stanu w chwili następnej na podstawie aktualnej wartości wektora stanu i podjętej, aktualnej decyzji sterującej wynika z równania:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}^* \mathbf{x}_k + \mathbf{B}^* \mathbf{u}_k . \tag{5}$$

gdzie **A***, **B*** są odpowiednio macierzą stanu i macierzą sterowań w modelu dyskretnym.

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{A}^*\mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{B}^*\mathbf{u}_{N-1} = \mathbf{A}^*[\mathbf{A}^*\mathbf{x}_{N-2} + \mathbf{B}^*\mathbf{u}_{N-2}] + \mathbf{B}^*\mathbf{u}_{n-1} = (\mathbf{A}^*)^N\mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{N-1} (\boldsymbol{A}^*)^{N-1-k}\boldsymbol{B}^* \quad \mathbf{u}_k \tag{6}$$

Przy danych $\mathbf{x}_0$ oraz $\mathbf{x}_N$ należy rozwiązać to równanie ze względu na sekwencję sterowań

$\{\mathbf{u}_0 , \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , . . . , \mathbf{u}_{N-1}\}$.

Jest to układ n równań liniowych z (N-1) x m niewiadomymi.

Aby był określony macierz układu (macierz blokowa złożona z bloków odpowiadających wyrażeniom pod znakiem Σ) musi być rzędu n. Wówczas jedynie gdy (N-1) x m =n uzyskujemy jednoznaczne rozwiązanie, tj. sekwencję sterującą realizującą cel.

Można sprawdzić jak wiele decyzji sterujących potrzebne jest do tego. W tym celu poszukujemy N spełniającego powyższą zależność. Takie działanie ma sens, gdy liczba zmiennych stanu jest całkowitą wielokrotnością liczby wejść.

W takim przypadku wyznaczone jednoznacznie rozwiązanie równania (6) określa najkrótszą sekwencję sterującą (sekwencję m-wymiarowych wektorowych wartości sygnałów sterujących) przeprowadzających układ z danego stanu początkowego do zadanego stanu końcowego.

Gdy m=n jest to sekwencja jednoelementowa (przypadek układu o dynamice kanałów we-wy 1-go rzędu i o odpowiednio dużej liczbie wejść). W przypadku kanałów o dynamice wyższego rzędu, długość sekwencji sterującej nie może być mniejsza niż maksymalny rząd kanału.

Powyższe wnioski są prawdziwe przy założeniu, że wartości sygnałów sterujących nie podlegają ograniczeniom. Ograniczone mogą być chwilowe wartości poszczególnych sygnałów (próbek): $U_{i\,min} \leq u_i[k] \leq U_{i\,max}$, i= 1, 2, … , m (ograniczenia amplitudowe). Innego rodzaju ograniczenia, które mogą wystąpić w związku z ograniczoną dynamiką elementów nastawczych (wykonawczych) dotyczą dopuszczalnych przyrostów w czasie poszczególnych sygnałów sterujących: $\Delta U_{i\,min} \leq \Delta u_i[k] \leq \Delta U_{i\,max}$, i= 1, 2, … , m.

Powyższe ograniczenia (o ile występują) muszą być uwzględnione przy rozwiązywaniu równania (6).

W przestrzeni sterowań, obszary sterowań dopuszczalnych (ograniczonych amplitudowo i odpowiednio przyrostowo) mają postać m-wymiarowych hiper-prostopadłościanów, w obrębie których poszukujemy rozwiązania dopuszczalnego. Dla uproszczenia zakładamy stacjonarność warunków ograniczających, ale dopuszczamy ich niesymetryczność.

Przy występujących w praktyce ograniczeniach urządzeń fizycznych (wytrzymałościowych, wydolnościowych, itp.), rozwiązanie równania (6), ze względu na najkrótszą sekwencję sterowań realizującą cel sterowania, wymaga rozwiązania liniowego zadania programowania matematycznego z ograniczeniami nierównościowymi. Można w tym celu zastosować metodę SIMPLEX.
Wystąpienie czynnych ograniczeń powoduje istotne wydłużenie sekwencji sterującej!

KONKLUZJE:

- Istnieje efektywna metoda badania sterowalności liniowego modelu obiektu sterowania, która może być zastosowana do testowania lokalnej sterowalności również obiektu nieliniowego w niewielkim otoczeniu punktu stacjonarnego.
- Metoda ta pozwala ponadto na zbadanie odporności wielowymiarowego systemu sterowania na awarie urządzeń wykonawczych (nastawczych).
- Metoda ta pozwala na sporządzenie rankingu wejść pod względem ich zdolności sterowniczych na podstawie indeksów sterowalności.