Wykład 2

17 grudnia 2021

1 Tworzenie modelu obiektu wielowymiarowego w przestrzeni stanu cz. 2

1.1 Ustalanie wymiaru wektora stanu na podstawie równań wejścia-wyjścia

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + ... + a_0 y(t) = b_{(m)}u(t) + ... + b_0 u(t) \tag{1}$$

Ponieważ jest to równanie liniowe n-tego rzędu, to jego rozwiązanie wymaga znajomości n warunków początkowych. Liczba warunków początkowych wyznacza wymiar wektora stanu i przestrzeni stanu X, czyli dim(X) = n

$$x^T = [x_1 x_2 ... x_n] \tag{2}$$

Od tej pory równania macierzowe będą odpowiednio podpisane aby się nie myliły

1.2 Definicja zmiennych stanu jako zmiennych fazowych

Przyjmijmy następującą definicje współrzędnych wektora zmiennych stanu x dla układu o $_{jednymwejciu}$

$x_1 = y$ $x_2 = y'$ ... $x_n = y^{(n-1)}$

Z powyższej definicji wynika że

$x_{i+1} = \dot{x_i}$

Dla i = ¡1;n-1¿

Dla wielu wyjść powyższe równania możemy zapisać analogicznie

Dla wyjścia 1

$y_1 = x_1$ $\dot{y_1} = x_2$ ... $y_1^{(n_1-1)} = x_{n_1}$

$y_2 = x_{n_1+1}$ $\dot{y_2} = x_{n_1+2}$ ... $y_2^{(n_2-1)} = x_{n_1+n_2}$

Aż do n$_p$

$y_p = x_{n_1+...+n_{p-1}+1}$ $\dot{y_p} = x_{n_1+...+n_{p-1}+2}$ ... $y_n^{(n_p-1)} = x_{n_1+...+n_p}$

(przyp. tł. Zrozumienie tych równań nie jest krytyczne dla dalszej części, jednak na wykładzie są one napisane z błędem oraz dziwnym sposobem, gdzie indeks dolny jest zastępowany kolorem zielonym.)

Rezultatem takiej definicji wektora zmiennych stanu jest to że macierz modelu A ma postać macierzy Frobeniusa, czyli1

$$A = (\ 0\ )\,100\cdots000010\cdots000001\cdots000000\cdots00\vdots\vdots\vdots\vdots\ddots\vdots\vdots0000\cdots01{-a_1}{-a_2}{-a_3}{-a_4}\cdots{-a_{m-1}}{-a_m} \tag{3}$$

Macierz wejść ma podobną strukturę jednak nie jest to macierz Frobeniusa

$$B = (\ b\ )_1\,000\cdots000b_2 00\cdots0000b_3 0\cdots00000b_4\cdots00\vdots\vdots\vdots\vdots\ddots\vdots\vdots0000\cdots b_{m-1}00000\cdots0b_m \tag{4}$$

Natomiast macierz wyjść jest wierszowa

$$C = (\ 0\ )\,000\cdots01 \tag{5}$$

Układ równań stanu i układ równań wyjścia wielowymiarowego obiektu sterowania unifikacji zmiennych stanu, które mogą się powtarzając się w grafach przepływu sygnałów poszczególnych kanałów wejścia-wyjścia. Unifikacja jest niezbędna dla usunięcia redundancji (nadmiaru) w opisie obiektu dynamicznego w przestrzeni stanu, gdyż zgodnie z definicją, wektor stanu opisujący obiekt dynamiczny musi mieć rozmiar minimalny.

2 Definicja zmiennych fazowych – przypadek obecności zer w transmitancjach kanałów

Przypomnijmy sobie równanie

$$M_{ij}(s) \cdot Y_j(s) = L_{ij}(s) \cdot U_i(s) \tag{7}$$

Jak widać mamy pochodne po prawej stronie równania, co oznacza że dla pewnych przebiegów sygnał będzie zerować stan. Po automatycznemu nazywamy taką sytuacje że mamy "zera" w transmitancji.

2.1 Skąd się te zera wzięły skoro nie było ich w fizycznym obiekcie?

Model wielokanałowy układu MIMO zakłada, że przepływ sygnałów wejściowych do wyjść odbywa się "do przodu". Rozważany sygnał wejściowy przepływa przez kolejne połączone szeregowo człony dynamiczne i jego wartość chwilowa jest modyfikowana.

Człon dynamiczny często charakteryzuje się występowaniem lokalnego sprzężenia zwrotnego. Niech jego transmitancja w stanie otwartym będzie równa: $G(s) = L(s)/M(s)$, a bieguny są różne od zer.

W układzie zamkniętym pętlą prostego sprzężenia zwrotnego

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s) + L(s)} \tag{8}$$

Położenie biegunów układu zamkniętego ulega modyfikacji, bo równanie charakterystyczne ma obecnie postać:

$$M(s) + L(s) = 0 \tag{9}$$

Współczynniki wielomianu równania charakterystycznego układu zamkniętego zostały zmodyfikowane od indeksu 0 aż do m :

Dla i = 0, 1, ..., m

$$\dot{a}_i = a_i + b_i \tag{10}$$

Wraz z naszą definicją macierzy A oznacza to że mamy oddziaływania wskrośne pomiędzy kanałami oraz że mamy "wirtualne wymuszenie" zewnętrzne w postaci

$$\dot{u}_i(t) = b_m u_i(t)^{(m)} + b_{m-1} u_i(t)^{(m-1)} + ... + b_0 u_i(t)$$

(11)

Rozumienie takich oddziaływań jako "wymuszeń wirtualnych" nakłada istotne ograniczenia na sposób sterowania bo musimy przy naszym planowaniu uwzględniać pochodne sygnału sterującego.

Warto zauważyć że pomimo tych ograniczeń nie zmieniamy właściwości dynamicznych rozważanego kanału jak stabilność bo równanie po lewej stronie nie zostało zmienione Wpływa to jednak na takie cechy jak sterowalność oraz obserwowalność.

Obecność zer również ogranicza nam możliwość skorzystania ze sterowania cyfrowego/schodkowego. Przez to że pochodne będą nam wzrastać do nieskończoności przy takim schodku.

Widać, ze nawet, gdy dany kanał nie ma zer, to obecność np. regulatora PID jako lokalnego stabilizatora urządzenia wprowadzi zera, w dodatku przy nastrajanych nastawach ze względu na potrzebę stabilizacji obiektu w danym punkcie zera te zmieniają położenie na płaszczyźnie zespolonej i mogą koincydować (pokrywać się) z biegunami danego kanału, niekoniecznie związanymi z danym urządzeniem.

Definicja zmiennych stanu gdy w transmitancji obiektu występują zera

Dla uproszczenia poniższe rozważania będą rozpisane dla jednego kanału wejścia-wyjścia jednak są one prawdziwe dla wszystkich kanałów.

Należy zmienić definicję zmiennych stanu nieznacznie z formy

$x_1 = y$ $x_2 = y'$ ... $x_n = y^{n-1}$

Na

$x_1 = y - \beta_0 u$ $x_2 = y' - \beta_1 u$ ... $x_n = y^{(n-1)} - \beta_{n-1} u$

W wyniku powyższej definicji zmiennych fazowych równanie wejścia-wyjścia zostaje przekształcone do postaci $y^{(n)}(t) = \dot{x_n}(t) = -a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t) + ... + a_n x_n(t) + \beta_m u(t)$

Wówczas współczynniki $\beta_k wynosz$

$\beta_1 = b_n$ $\beta_2 = b_{n-1} - a_{n-1} b_0$ ... $\beta_n = b_1 - a_{n-1} b_{n-1} - ... - a_1 b_1$

Taki układ ma wtedy postać taką że

- Macierz A ma postać Frobeniusa - B = $[\beta_2 ... \beta_n]^T - C = [00001] - D = [\beta_1$