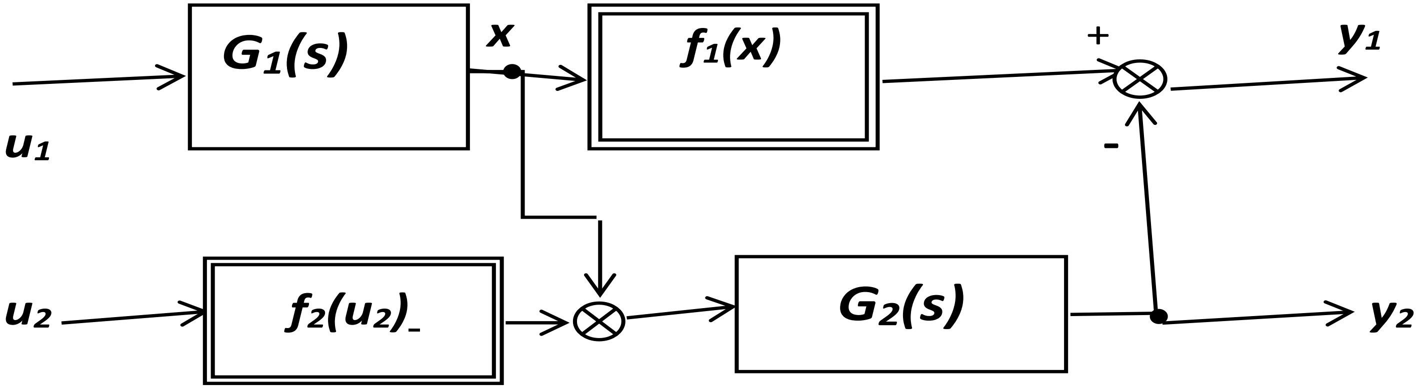
Analiza właściwości obiektu sterowania oparta o model w przestrzeni stanu

Linearyzacja i dyskretyzacja modelu ogólnego.

Przykład analizy:

poziom pojedynczego urządzenia typu MIMO (2 x 2), a więc stosunkowo złożonego



Przedstawiony schemat wskazuje na urządzenie o dwóch sygnałach sterujących (o 2 stopniach swobody) i o dwóch sygnałach kontrolowanych (obserwowanych). Należy zatem przeanalizować właściwości statyczne i dynamiczne czterech kanałów przepływu sygnałów.

f_i (.) oznaczają charakterystyki statycznych elementów nieliniowych (zakładamy wstępnie, że w rozważanych przedziałach wartości ich sygnałów wejściowych są to funkcje różnowartościowe, a więc odwracalne; założenie powinno być empirycznie zweryfikowane).

Bloki dynamiczne są liniowe, a ich dynamika jest reprezentowana przez odpowiednie transmitancje operatorowe. Nie ma zatem w ich przypadku problemu z przejściem do dziedziny czasu i określenia charakteryzujących te człony równań różniczkowych we/wy.

Załóżmy, że w ich przypadku jest spełniony warunek dekompozycji do poziomu prostych elementów dynamicznych. Tak więc będą to równania rzędu co najwyżej drugiego rzędu (w dodatku liniowe).

A wiec do pełnego scharakteryzowania procesów dynamicznych realizowanych przez to urządzenie wystarczy znajomość przebiegów sygnałów sterujących (wymuszeń) oraz warunków początkowych dla każdego z dwóch równań wwe/wy. Ze spełnienia warunku dekompozycji do poziomu elementarnego wynika, że takich warunków jest co najwyżej cztery.

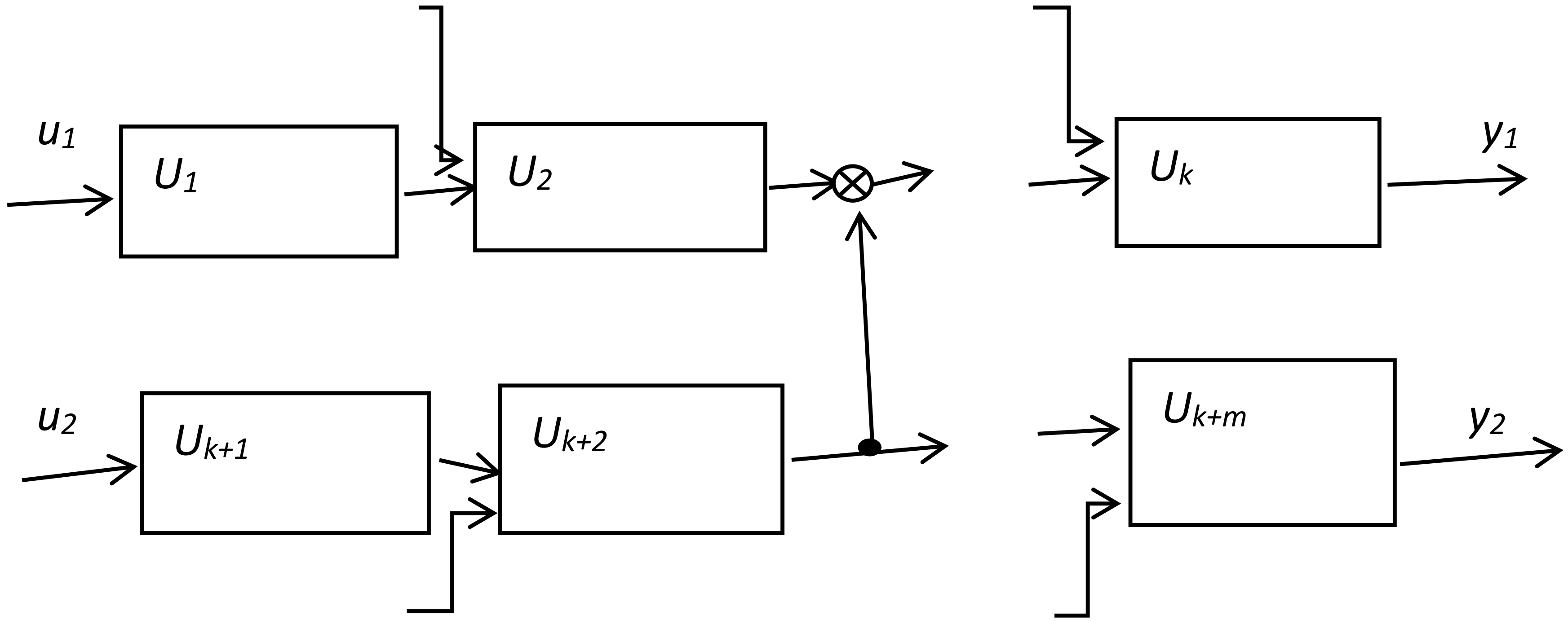
Zmienne fazowe określone oddzielnie dla każdego z członów dynamicznych są więc dobrymi kandydatami na zmienne stanu całego systemu. Stanowić będą podwektor ogólnego wektora stanu, określonego dla całego obiektu. Model stanowy analizowanego obiektu będzie miał charakter bloku wektorowo-macierzowego (ze względu na obecność elementów nieliniowych):

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}[\, u_1 \quad f_2(u_2)\,]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{y} = [\, f_1(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{x}\,]^{\mathrm{T}}$$

Warto odnotować w pierwszym równaniu wyjścia obecność tych zmiennych wektora stanu, które opisują dynamikę kanału *„2→2”*. Świadczy to o występowaniu interakcji między kanałami głównymi (czyli o istnieniu sprzężeń skrośnych) w części wyjściowej urządzenia, co ujawnia się na schemacie blokowym. Co ciekawe, samo równanie stanu części autonomicznej (dynamika własna urządzenia) jest liniowe (macierz ***A***). Nieliniowości są obecne w wektorze części sterującej i w pierwszym równaniu wyjścia, co odzwierciedla schemat blokowy.

poziom systemowy:



W instalacjach przemysłowych mamy do czynienia z przepływami strumieni materii (surowców, półproduktów) lub energii, doprowadzanej celem wywołania reakcji chemicznej lub przemiany fazowej, albo wyprowadzanej (odprowadzanej) np. w przypadku produkcji różnej postaci energii użytkowej lub dla ustabilizowania reakcji egzotermicznych, schłodzenia produktów, medium, itp.

Przepływy mogą mieć charakter szeregowy (kaskadowy, sekwencyjny) np. na linii produkcyjnej lub współbieżny (równoległy) w przypadku występowania tzw. węzłów (np. w reaktorach wieloskładnikowych, gniazdach obróbczych). Proces może się również charakteryzować oddziaływaniami skrośnymi pomiędzy poszczególnymi potokami (np. dostarczanie zmodyfikowanego surowca lub półproduktu na linię wyrobu, a w szczególności oddziaływaniami zwrotnymi (cofnięcie prefabrykatu/produktu/wyrobu do wcześniejszej fazy przetwarzania, celem usunięcia wad wykrytych w późniejszej fazie procesu produkcyjnego. Wymienione topologie połączeń odzwierciedlone są na schematach blokowych instalacji produkcyjnej, na których bloki reprezentują poszczególne urządzenia produkcyjne (*patrz powyższy rysunek*).

Z punktu widzenia teorii sterowania strumienie masowe i energetyczne uczestniczące w procesie są postrzegane poprzez sygnały odzwierciedlające możliwości ich modulowania (dawkowania), czyli sygnały wejściowe poszczególnych procesów (podprocesów, ogniw łańcucha) oraz sygnały wyjściowe charakteryzujące parametry jakościowe produktów (półproduktów) oraz ilościowy wydatek produkcji. Na poziomie procesu (systemu) są to sygnały główne. Oprócz tego występują w modelu dynamiki procesu inne sygnały klasyfikowane jako sygnały sterujące (ale nie główne) i inne sygnały wyjściowe (również nie główne).

Urządzenia połączone w system same w sobie mogą być przedmiotem sterowania na poziomie lokalnym (operatora urządzenia), albo pracować jako urządzenia autonomiczne (sterowane automatycznie, a nawet adaptacyjnie). Mogą także podlegać sterowaniu scentralizowanemu na poziomie całego procesu i wówczas ich pomocnicze sygnały wejściowe (symbolicznie zaznaczone na schemacie blokowym) stają się kolejnymi elementami wektora sterowań procesu, podobnie jak wyjścia poszczególnych urządzeń - elementami wektora wyjść procesu. I występują jawnie w stanowym modelu ogólnym .całego procesu.

Linearyzacja modelu w otoczeniu punktu stacjonarnego

Nie należy utożsamiać metody linearyzacji zaproponowanej w przykładzie na początku wykładu z linearyzacją „w punkcie pracy” nieliniowego układu sterowania opisywanego następującymi (ogólnymi) równaniami stanu i wyjścia:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$$

gdzie pole wektorowe $\boldsymbol{f}$ (tzw. *momentum*) określa zależność wektora prędkości zmian stanu nieliniowego układu dynamicznego od chwilowych wartości zmiennych stanu i sygnałów sterujących, czyli jest modelem dynamiki układu (mówimy, że pole $\boldsymbol{f}$ generuje rozmaitość różniczkową stanu układu o wymiarze n, odpowiadającym wymiarowi wektora stanu (za wyjątkiem punktów i podrozmaitości degeneracji);

$\boldsymbol{h}$ - jest nieliniową (algebraiczną) wektorową funkcją zmiennych stanu (funkcją wyjść), o wymiarze p odpowiadającym liczbie wyjść wielowymiarowego układu nieliniowego.

O składowych funkcji wektorowych $\boldsymbol{f}$ i $\boldsymbol{h}$ zakładamy, że są to funkcje rzeczywiste, analityczne (tzn. rozwijalne w szereg Taylora względem swoich argumentów).

Ważnym pojęciem w analizie właściwości obiektów sterowania opisanych nieliniowymi równaniami stanu i wyjścia jest punkt stacjonarny. Rozważmy następujący model:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t))$$

Pierwsze równanie, to wektorowe równanie stanu określające, wymuszoną przez sygnały sterujące { $u_i(t)$, i=1,…,m}, trajektorię stanu układu dynamicznego w przestrzeni n-wymiarowej (ściśle biorąc, na rozmaitości różniczkowej pełnego rzędu) jako symultaniczne rozwiązanie układu równań różniczkowych pierwszego rzędu postaci:

$$\dot{x}_1 = f_1(\boldsymbol{x_1}(t), \boldsymbol{x_2}(t), \ldots, \boldsymbol{x_n}(t); u_1(t), \ldots, u_m(t))$$

$$\dot{x}_2 = f_2(\boldsymbol{x_1}(t), \boldsymbol{x_2}(t), \ldots, \boldsymbol{x_n}(t); u_1(t), \ldots, u_m(t))$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot{x}_n = f_n(\boldsymbol{x_1}(t), \boldsymbol{x_2}(t), \ldots, \boldsymbol{x_n}(t); u_1(t), \ldots, u_m(t))$$

Wystarczy, że jedna z funkcji f_i jest nieliniowa, to mamy zadanie dynamiki nieliniowej, w którym to przypadku stosunkowo rzadko można uzyskać rozwiązanie jawne. Można wówczas spróbować je rozwiązać metodą całkowania numerycznego, pod warunkiem że rozwiązanie istnieje a iteracje są do niego zbieżne. Trudno jednak udowodnić istnienie rozwiązania w większości przypadków wielowymiarowych problemów nieliniowych, zwłaszcza dla przypadków z wymuszeniem.

Dlatego dostępnym sposobem analizy zachowania układu w niewielkim otoczeniu wybranego punktu przestrzeni stanu jest lokalna linearyzacja modelu. Autonomiczny, nieliniowy obiekt dynamiczny opisany jest równaniami:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t))$$

W szczególności istotne jest zachowanie układu autonomicznego (inaczej swobodnego, czyli pozbawionego sterowania) w otoczeniu tzw. punktów stacjonarnych, a więc takich, w których układ pozostaje w stanie ustalonym. Punkty te można wyznaczyć rozwiązując układ algebraicznych równań nieliniowych postaci:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) = 0.$$

Przykłady:

Układ dynamiczny pierwszego rzędu, o jednym stopniu swobody, opisany następującym równaniem stanu:

$$\dot{x} = x^2 + 2$$

Ma dwa punkty stacjonarne: $x = -\sqrt{2}$ i $x = \sqrt{2}$.

Układ dynamiczny drugiego rzędu, o jednym stopniu swobody, opisany następującymi równaniami stanu:

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2\,,$$

$$\dot{x}_2 = x_1\,(\cos x_2 + \frac{1}{2})\,,$$

ma przeliczalnie wiele punktów stacjonarnych o współrzędnych:

$$[-\frac{\pi}{3} - 2k\pi\,, \frac{\pi}{3} + 2k\pi], \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots$$

W przypadku układów zdegenerowanych charakteryzujących się tzw. lokalnym defektem rzędu rozmaitości stanu lub istnieniem tzw. podrozmaitości osobliwej, miejscami zerowymi funkcji $\boldsymbol{f}$ mogą być zbiory zwarte, o kowymiarze większym niż zero, np. orbity.

Punkty stacjonarne mogą być punktami równowagi układu, zarówno trwałej jak i chwiejnej lub innego rodzaju punktami osobliwymi.

Nieliniowe układy afiniczne.

Ważną podklasę ogólnych modeli nieliniowych w przestrzeni stanu stanowią tzw. modele afiniczne:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g_1(x(t))u_1(t) + g_2(x(t))u_2(t) + \ldots g_m(x(t))\, u_m(t)$$

$$y(t) = h\,(x(t))$$

Modele tej klasy dobrze reprezentują (nie tylko lokalnie) dynamikę układów nieliniowych, w których, w równaniach stanu, można rozdzielić argumenty w postaci zmiennych stanu od sygnałów sterujących. Nie nakładają dodatkowych ograniczeń na dynamikę układu autonomicznego.

- Akcję sterowań można interpretować jako możliwość wpływania na ewolucję wektora stanu w każdym aktualnym punkcie $\boldsymbol{x}(t)$ trajektorii, w hiperpłaszczyźnie $\boldsymbol{T}_x(\boldsymbol{x}(t))$ stycznej do niej w tym punkcie.
- Pola wektorowe $\{\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}(t))\}$, $i= 1, \ldots, m$ można interpretować jako lokalne, kierunkowe współczynniki wzmocnienia odpowiednich sygnałów sterujących.
- Podkreślają one lokalny charakter sterowania (zmianę kierunku i „siły działania" skalarnego sygnału sterującego wzdłuż generowanej trajektorii stanu).
- Wektor sterowań jest elementem liniowej przestrzeni sterowań (przestrzeni funkcyjnej), co ułatwia operowanie nim.
- Z punktu widzenia sterowalności układu istotne, aby pola wektorowe tworzyły układ wektorów liniowo niezależnych, a po uzupełnieniu o pole wektorowe $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ umożliwiały osiąganie dowolnego punktu w przestrzeni stanu z dowolnego stanu początkowego poprzez odpowiednie sterowanie.

Linearyzację modelu ogólnego przeprowadzimy dla otoczenia wybranego punktu stacjonarnego $\boldsymbol{x}_s^i$. Dla przejrzystości i bez utraty ogólności rozważań, w następujących dalej wzorach, pomińmy indeks górny i , wskazujący na konkretny punkt stacjonarny oraz indeks dolny s informujący, że chodzi o punkt stacjonarny jako punkt referencyjny . Zakładamy, że w tym punkcie $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{0}$. Używany w symbol normy oznacza normę Euklidesa.

Przez otoczenie punktu stacjonarnego rozumiemy n-wymiarową hiperkulę o środku w $\boldsymbol{x}_s^i$ i o małym promieniu ε ($\|\varepsilon\| \ll 1$), oznaczoną $\mathrm{B}_\mathbf{n}(\boldsymbol{x}_s^i, \varepsilon)$.

Rozwijając w szereg Taylora prawą stronę równania stanu układu autonomicznego otrzymujemy w zapisie symbolicznym:

$$\dot{\boldsymbol{z}}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{f}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{x})}{\mathbf{n}!}(\mathbf{z}-\mathbf{x})^{\mathbf{n}},$$

gdzie: $\boldsymbol{z}$ oznacza dowolny wektor o końcu wewnątrz hiperkuli $\mathrm{B_n}(\boldsymbol{x}_s{}^i, \varepsilon)$, $(\mathbf{z}-\mathbf{x})$ oznacza odchylenie od punktu stacjonarnego, $\|(\mathbf{z}-\mathbf{x})\| < \varepsilon$;

symbol $\boldsymbol{f}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{x})$ reprezentuje dla n=0 wartość *momentum* ***f(x)*** w punkcie stacjonarnym $\boldsymbol{x}$ (równą zerowemu wektorowi),

- dla n=1 $\boldsymbol{f}^{(1)}(\boldsymbol{x})$ reprezentuje Jacobian $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{X})$ wektorowego momentum, czyli gradient $\partial \boldsymbol{f} / \partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}$ obliczony w punkcie stacjonarnym $\boldsymbol{x}$;
- dla n=2 $\frac{\boldsymbol{f}^{(2)}(\boldsymbol{x})}{2!}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})^{2}$ symbolizuje formę kwadratową $(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})$, a $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ oznacza Hessjan $\partial^2 \boldsymbol{f} \,/\, \partial\, \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\, \partial\, \boldsymbol{z}$ obliczony w punkcie stacjonarnym $\boldsymbol{x}$.
- Dla n>2 są to formy tensorowe wyższych rzędów.

Z założonej analityczności $\boldsymbol{f}$ wynika, że normy tensorów, w tym Jacobianu i Hessjanu (wartości wyznaczników) są skończone. Oznaczmy je odpowiednio przez J i H.

Ograniczmy rozwinięcie w szereg Taylora do trzech pierwszych wyrazów i przejdźmy do obliczenia normy po obu stronach równania:

$$\| \dot{\boldsymbol{z}}(\mathbf{t}) \| = \| \mathbf{f}(\mathbf{z}) \| = \| \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{J}(\mathbf{x})(\mathbf{z}-\mathbf{x}) + (\mathbf{z}-\mathbf{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\,(\mathbf{z}-\mathbf{x}) \|$$

Z własności normy mamy:

$$\| \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{J}(\mathbf{x})(\mathbf{z}-\mathbf{x}) + (\mathbf{z}-\mathbf{x})^{\mathrm{T}} H(\boldsymbol{x})\, (\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}) \| < \| \mathbf{f}(\mathbf{x}) \| + +\mathbf{J} \| (\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}) \| + \| (\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}) \|^{\mathrm{T}} \mathbf{H} \| (\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}) \|$$

czyli:

$$\| \dot{\boldsymbol{z}}(\mathbf{t}) \| \leq \mathbf{J}\varepsilon + \mathbf{H}\varepsilon^2$$

J i **H** są skończone (podobnie jak tensory wyższych rzędów), $\ldots \ll \varepsilon^2 \ll \varepsilon$

$\| \mathbf{f}(\mathbf{x}) \| = 0$ (wektor zerowy).

Na tej podstawie wnioskujemy, że dla oszacowania wartości (modułu) wektora *momentum* (prędkości zmian stanu) można się ograniczyć do zlinearyzowanego modelu:

$$\dot{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{A}\,\boldsymbol{z}(t),$$

gdzie: $\mathbf{A} = \mathbf{J}$ (macierz stanu o stałych elementach, modelu zlinearyzowanego, równa Jacobianowi funkcji momentum, obliczonemu w punkcie stacjonarnym $\boldsymbol{x}$,

$\boldsymbol{z}(t)$ – wektor stanu linearyzowanego układu, pozostający w obrębie jego otoczenia ($\mathbf{B_n}(\boldsymbol{x}_{s}{}^{i}, \varepsilon)$).

Dziękuję za uwagę!