Badanie obserwowalności obiektu

Dysponując adekwatnym modelem analitycznym obiektu sterowania można w oparciu o ten model zbadać jego obserwowalność.
Zakładając liniowość i stacjonarność modelu obiektu sterowania mamy:

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t}) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(\mathrm{t}) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(\mathrm{t}) \qquad (1a),$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(\mathrm{t}) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(\mathrm{t}), \qquad (1b).$$

W przypadku sterowalności istotne było wykazanie zależności kompletnej trajektorii wektora stanu (krzywej właściwej, czyli pełnowymiarowej, przebiegającej w n wymiarowej przestrzeni stanu) od sygnałów sterujących działających w pewnym przedziale czasu.
W przypadku modelu z czasem dyskretnym chodziło o stwierdzenie, że kierunki działania wektora sterowań w kolejnych n chwilach próbkowania (gdzie n to rząd układu, czyli wymiar wektora stanu) rozpinają pełną, n-wymiarową przestrzeń wektorową (liniową przestrzeń stanu). Spełnienie takiego warunku gwarantuje osiągnięcie dowolnego stanu docelowego z dowolnego stanu początkowego w wyniku właściwego doboru sekwencji decyzji sterujących.
Model obiektu reprezentuje powiązania „przyczyna-skutek" pomiędzy funkcjami czasu:

$$\mathbf{u}(\mathrm{t})|_{t_0}^{t_k} \to \mathbf{x}(\mathrm{t})|_{t_0}^{t_k} \to \mathbf{y}(\mathrm{t})|_{t_0}^{t_k}$$

(w układzie z czasem ciągłym), albo szeregami czasowymi:

$$\{\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \ldots\ \mathbf{u}_{N-1}\} \to \{\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \ldots\ \mathbf{x}_N\} \to \{\mathbf{y}_1\ \mathbf{y}_2\ \ldots\ \mathbf{y}_N\}$$

w modelu dyskretnym. W przypadku sterowalności istotne jest powiązanie $\mathbf{u}(\mathrm{t})|_{t_0}^{t_k} \to \mathbf{x}(\mathrm{t})|_{t_0}^{t_k}$.
Jednak jeżeli cel sterowania sformułowano w odniesieniu do trajektorii wyjściowej (pełnowymiarowej krzywej w przestrzeni wyjść $\mathbf{Y}^p$), to mówimy raczej o problemie osiągalności zadanego punktu docelowego pracy ustalonej $\mathbf{y}_K = \mathbf{y}(t_k)$ z początkowego punktu pracy ustalonej $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0)$. W takim przypadku warunek rzędu przyjmuje postać:

$$\mathrm{rank}(\mathbf{C} \times \mathbf{S}) = \mathrm{p}, \qquad (2)$$

gdzie: $\mathbf{C}$ jest macierzą wyjść obiektu, $\mathbf{S}$ jest jego macierzą sterowalności, p -liczbą wyjść. Ponadto, $\mathbf{x}_0$ takie, że spełnia warunek $\mathbf{y}_0 = \mathbf{C}\,\mathbf{x}_0 + \mathbf{D}\,\mathbf{u}_0$ oraz $\mathbf{x}_K$ takie, że spełnia warunek $\mathbf{y}_K = \mathbf{C}\,\mathbf{x}_K + \mathbf{D}\,\mathbf{u}_K$ powinny być stanami stacjonarnymi (punktami równowagi w przestrzeni stanu).

Ustalony punkt pracy winien się charakteryzować stacjonarnością wartości sygnałów wyjściowych (brakiem zjawisk przejściowych, co najwyżej występowaniem fluktuacji wokół stałych wartości na wyjściu, powodowanych zakłóceniami losowymi - szumami). Stałość sygnałów na wyjściu obiektu nie jest jednak równoznaczna ze stałością stanu obiektu.

Aktywna stabilizacja poziomów sygnałów wyjściowych, związana z wymogiem pozostawania obiektu w danym punkcie pracy, określanym zazwyczaj na podstawie charakterystyk statycznych obiektu, wymaga wewnętrznych oddziaływań dynamicznych, np. kompensujących zakłócenia procesu (zmienne stanu są wówczas aktywne dynamicznie).

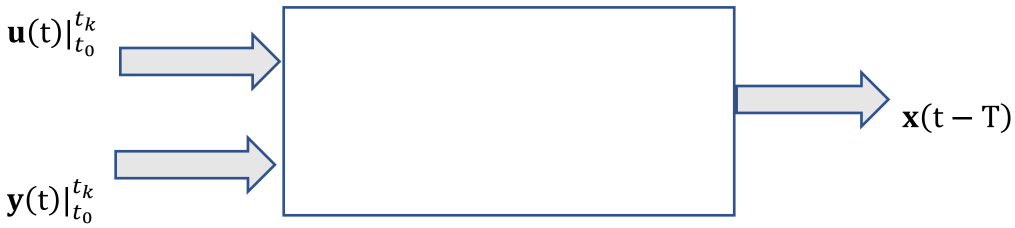
Potocznie obserwację jakiejś wielkości np. pewnej zmiennej stanu utożsamia się z pomiarem tej wielkości. Tak więc obserwowalność (czyli możliwość dokonania obserwacji) niesłusznie utożsamia się z mierzalnością (możliwością przeprowadzenia pomiaru). Jest to skojarzenie nieuprawnione, ponieważ obserwowalność jest cechą obiektu, głębszą niż mierzalność. Obserwowalność oznacza bowiem możliwość dokonania obserwacji wartości również tych zmiennych stanu, które nie mogą być bezpośrednio zmierzone (z powodu braku sensora lub jego uszkodzenia). Mówimy w takim przypadku o odtwarzaniu lub oszacowaniu takich wartości.

Oszacowanie jest dokonywane na podstawie dostępnej informacji o obiekcie. Tymi danymi są model matematyczny obiektu oraz zarejestrowane przebiegi sygnałów na wejściach obiektu wraz z wywołanych przez nie sygnałami odpowiedzi na jego wyjściach (stymulacja → reakcja).

Warunkami uzyskania oszacowania niemierzalnych zmiennych stanu (zmiennych wewnętrznych niemierzalnych) są:

- obserwowalność obiektu,
- dostatecznie długi okres obserwacji (tzw. horyzont obserwacji),
- wystarczające pobudzanie obiektu przez sygnały wejściowe (sygnały sterujące oraz zakłócenia mierzalne).

Problem obserwacji polega na wykorzystaniu danych wejściowych i wyjściowych obiektu (zapisów sygnałów w przypadku z czasem ciągłym, albo sekwencji próbek w przypadku dyskretnym) do oszacowania wektora stanu układu w chwili początkowej przedziału czasu, w którym obserwacja/rejestracja była prowadzona (na początku horyzontu obserwacji). Symbolicznie można obserwator przedstawić jako blok:



Aby można było zrealizować takie zadanie, obiekt musi być obserwowalny.

Definicja obserwowalności (ogólna).

Układ o równaniach stanu i wyjścia postaci:

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathrm{t})\,, \mathbf{u}(\mathrm{t}), \mathrm{t}), \tag{3a}$$

$$\mathrm{y}(\mathrm{t}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}\,, \mathbf{u}, \mathrm{t}). \tag{3b}$$

jest obserwowalny, jeżeli przy dowolnym sterowaniu $\mathbf{u}(\mathrm{t})$ w przedziale $<t_0,\ t_0+\mathrm{T})$, w chwili $t_0+\mathrm{T}$ można wyznaczyć stan układu w chwili początkowej $\mathbf{x}(t_0)$, na podstawie zarejestrowanych sygnałów wyjściowych $\mathbf{y}(\mathrm{t})|_{t_0}^{t_0+T}$ oraz sygnałów wejściowych $\mathbf{u}(\mathrm{t})|_{t_0}^{t_k}$, gdzie t_0 oznacza czas rzeczywisty rozpoczęcia rejestracji/obserwacji, a T długość horyzontu obserwacji.

Załóżmy, że $\dim \mathbf{x} = \dim \mathbf{f} = \mathrm{n}$. O wektorowej, nieliniowej funkcji wyjścia $\mathbf{h}(\mathbf{x}\,,\ \mathbf{u},\ \mathrm{t})$ załóżmy, że jest różniczkowalna względem wektora stanu n-krotnie, względem wektora sterowań m-krotnie i względem czasu jednokrotnie.

Zdefiniujmy operator różniczkowy Lapunowa w następujący sposób:

$$\mathrm{L}\{\mathbf{h}\} \equiv \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}\dot{\boldsymbol{u}} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathrm{t}}. \tag{4}$$

Zastosujmy (n-1)-krotnie operator Lapunowa do funkcji wyjść $\mathbf{h}$.

Otrzymamy równania definiujące fazowe zmienne stanu dla układu (3a-b):

$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$,

$\dot{\mathbf{y}} = L\{\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\}$,

. . . .

$\mathbf{y}^{(n-1)} = L^{(n-1)}\{\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$.

Jest to układ p równań algebraicznych i p*(n-1) równań różniczkowych 1-go rzędu, definiujących p podwektorów fazowych dla poszczególnych wyjść obiektu. Wymiary tych podwektorów odpowiadają najwyższym rzędom odpowiednich równań we/wy.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia rozwiązania takiego układu równań ze względu na $\mathbf{x}$, a tym samym lokalnej obserwowalności układu (3a-b) jest spełnienie warunku:

$$\mathrm{rank}\left\{\left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right)^{T} \middle| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{L}\{\mathbf{h}\}\right)^{T} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{L}^{(n-1)}\{\mathbf{h}\}\right)^{T}\right\} = n, \tag{5}$$

gdzie n jest sumą wymiarów p podwektorów fazowych poszczególnych wyjść. Macierz występująca w warunku jest macierzą Hankela.

Dla modelu liniowego R. Kalman (1st IFAC Congress, Moskwa, 1960) podał prosty, algebraiczny warunek konieczny i wystarczający obserwowalności obiektu.

W tym celu należy utworzyć tzw. macierz obserwowalności (na podobnej zasadzie jak tworzona była macierz sterowalności):

$$\mathbf{O} = [\, \mathbf{C}^{T} \;\; \mathbf{A}^{T}\mathbf{C}^{T} \;\; (\mathbf{A}^{T})^{2}\, \mathbf{C}^{T} \ldots (\mathbf{A}^{T})^{n-1}\mathbf{C}^{T}], \tag{6}$$

gdzie n jest rzędem układu (wymiarem przestrzeni stanu). Macierz $\mathbf{O}$ składa się z n bloków p-kolumnowych, jej wymiary to n x (n * p).

Warunkiem koniecznym i wystarczającym obserwowalności układu o modelu liniowym w przestrzeni stanu jest:

$$\mathrm{rank}\, \mathbf{O} = n. \tag{4}$$

Analogicznie jak w przypadku analizy sterowalności obiektu typu MIMO, przeprowadzonej na poprzednim wykładzie, można ustalić, czy w obiekcie występują zbędne z punktu widzenia pozyskiwania informacji o procesie, wyjścia. Można także sporządzić ranking wyjść, z punktu widzenia ich znaczenia dla efektywnego pozyskiwania informacji o stanie obiektu (w możliwie prosty sposób, możliwie szybko).

Dany model układu można w ogólnym przypadku podzielić na część sterowalną i obserwowalną (S-O), sterowalną, ale nieobserwowalną (S-nO), obserwowalną, ale niesterowalną (nS-O) oraz niesterowalną i nieobserwowalną (nS-nO). Dla projektanta układu sterowania model układu musi być typu S-O. jeżeli tak nie jest tp należy rozważyć uzupełnienie obiektu o dodatkowe urządzenia sterujące i sensory, by doprowadzić do sytuacji, że jest będzie on typu S-O.

Dla obiektu obserwowalnego można zaprojektować obserwator. W przypadku analogowego modelu z czasem ciągłym obserwator może być zrealizowany sprzętowo, jako dedykowany układ przetwarzania sygnałów analogowych, albo po cyfryzacji modelu (po dyskretyzacji w pionie i w poziomie), jako algorytm przetwarzania próbek sygnałów wyjściowych i wejściowych w czasie rzeczywistym.

Liniowy obserwator analogowy (D. Luenberger, 1968) **.**

Obserwator liniowy r-go rzędu liniowego obiektu n-go rzędu określają trzy macierze:

$$\mathbf{F} \in \mathbf{M}(\mathrm{r}, \mathrm{r}), \; \mathbf{H} \in \mathbf{M}(\mathrm{r}, \mathrm{p}) \; \text{ i } \; \mathbf{G} \in \mathbf{M}(\mathrm{r}, \mathrm{m}), \tag{5}$$

gdzie symbol $\mathbf{M}(\mathrm{r}, \mathrm{r})$ oznacza macierz kwadratową o wymiarach r x r, $\mathbf{M}(\mathrm{r}, \mathrm{p})$ macierz prostokątną o wymiarach, r x p, $\mathbf{M}(\mathrm{r}, \mathrm{m})$ macierz prostokątną o wymiarach r x m.

n – to wymiar wektora stanu obserwowanego obiektu, p – liczba wyjść obserwowanego obiektu, m – liczba jego wejść.

Jeżeli r = n, to mamy przypadek obserwatora pełnego rzędu (szacującego wszystkie zmienne stanu obiektu na podstawie zapisów sygnałów wejściowych i wyjściowych).

Gdy r < n, to mamy przypadek obserwatora zredukowanego (szacującego tylko część zmiennych stanu).

Równanie stanu obserwatora:

$$\dot{\mathbf{z}}(\mathrm{t}) = \mathbf{F}\,\mathbf{z}(\mathrm{t}) + \mathbf{H}\,\mathbf{y}(\mathrm{t}) + \mathbf{G}\,\mathbf{u}(\mathrm{t}), \tag{6}$$

gdzie **z** - wektor stanu obserwatora, a rozwiązanie równania to $\mathbf{z}(\mathrm{t})$, ($t> t_0$) , gdzie t_0 to początek obserwacji.

Macierze **F**, **H**, **G** określają obserwator liniowy, jeżeli istnieją takie macierze **V** ϵ **M**(n, p) oraz **W** ϵ **M**(n, r), że dla dowolnego sterowania **u**(t) gdzie t> t_0 ,

$$\mathbf{x}_E(t) = \mathbf{V}\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{W}\,\mathbf{z}(t) \qquad (7)$$

jest estymatorem stanu obiektu i spełniony jest warunek:

$$\lim_{t\to\infty} \| \mathbf{x}(t) - \boldsymbol{x}_E(t) \| \to 0. \qquad (8)$$

Należy zauważyć, że oszacowanie $\mathbf{x}_E(t)$ wektora stanu obiektu, zwane estymatą (lub oszacowaniem, lub oceną) stanu, wynika z wartości chwilowych wektora sygnałów wyjściowych obiektu i z chwilowych wartości wektora stanu obserwatora. Warunek (8) oznacza, że oczekujemy asymptotycznej zbieżności estymaty do wartości rzeczywistej (przy nieskończonym horyzoncie obserwacji). Zbieżność estymaty wektora stanu do wartości rzeczywistej wektora obiektu sterowania z reguły ma charakter asymptotyczny ($T \to \infty$) , pod warunkiem, że obserwator jest stabilny.

W skończonym czasie jest możliwe jedynie zbliżenie się do wartości rzeczywistej:

$$\lim_{t\to t_0+T} \| \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_E(t) \| < \varepsilon \qquad (9)$$

Cecha wykrywalności.

O parze macierzy (**A**, **C**) z modelu (3a-b) mówimy, że posiada cechę wykrywalności, jeżeli istnieje taka macierz **L** ϵ **M**(n, p), że macierz **A** + **LC** jest stabilna.

Warunkiem koniecznym wykrywalności jest obserwowalność obiektu, ale nie jest to warunek wystarczający). Bowiem z wykrywalności wynika obserwowalność, ale z obserwowalności nie wynika wykrywalność, gdyż dla konkretnych **A**, **C** może nie istnieć **L** spełniająca warunek z definicji. Oznacza to, że w takim przypadku nie można skonstruować stabilnego obserwatora.

Jeżeli jednak warunek ten jest spełniony, to obserwator pełnego rzędu (r=n) jest określony następującymi równaniami stanu i wyjścia:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = [\mathbf{A}+\mathbf{LC}]\,\mathbf{z}(t) - \mathbf{L}\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t), \qquad (10a)$$

$$\mathbf{x}_e(t) = \mathbf{z}(t). \qquad (10b)$$

W takim przypadku:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{A}+\mathbf{LC}], \quad \mathbf{H} = -\mathbf{L}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{I}.$$

Czyli oszacowaniem wartości wektora stanu obiektu w chwili początkowej t_0 (stanu początkowego) jest chwilowa wartość wektora stanu obserwatora pełnego rzędu z(T) dostępna po upływie czasu T (zakładając zerowe warunki początkowe obserwatora, a więc pod koniec ruchomego, ślizgającego się okienka horyzontu obserwacji. Tymczasem rzeczywisty stan obiektu, istotny z punktu widzenia sterowania jest już wówczas równy:

$$\mathbf{x}(t_0+T) = e^{A(t_0+T)}\,\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+T} e^{A(t_0+T-\tau)}\,\mathbf{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (11)$$

Łatwo jednak zaktualizować (odnieść do bieżącej chwili) czyli obliczyć „in no time" bieżącą estymatę wektora stanu posługując się wzorem:

$$\mathbf{x}_E(t) = e^{A(t)}\,\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{E}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\,\mathbf{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad (12)$$

przy czym $t > t_0 + T$. **A**, **B** są macierzami modelu w przestrzeni stanu **obiektu**. Jest to aktualizacja estymaty oparta o znany model obiektu. Istotne jest jednak, by moc obliczeniowa komputera sterującego pozwalała zrealizować obliczenia/symulację w bardzo krótkim czasie (w porównaniu z dynamiką rzeczywistego obiektu).

Fazę obserwacji (zbierania danych) można skrócić (przy założonej dopuszczalności odchyłki estymaty od wartości rzeczywistego stanu obiektu), realizując w jej trakcie specjalnie zaprojektowany program stymulacji obiektu testowymi sygnałami wejściowymi, czyli przeprowadzając tzw. czynny eksperyment identyfikacji.

Warto zauważyć, że gdy obiekt jest stabilny, to błąd estymacji $\mathbf{e}(t)=\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_E(t)$ maleje asymptotyczne do zera ze wzrostem t:

$$\lim_{t\to\infty}[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{\boldsymbol{E}}(t)] = \lim_{t\to\infty} \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}[\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_{\mathrm{E}}(t_0)] = \mathbf{0}\,.$$

Aktualizacji na bieżąco dokonuje obserwator. Dostarcza on na bieżąco oszacowanie wartości wektora stanu w chwili wcześniejszej od chwili bieżącej o T (długość horyzontu obserwacji, przesuwnego okienka czasowego). Warto porównać ją z wartościami generowanymi na modelu symulacyjnym, po przyjęciu jako stan początkowy $\boldsymbol{x}_{\mathrm{E}}(t_0)$ – wyniku pierwszej (może być, że jednorazowej) pracy obserwatora w oparciu o zapisy sygnałów w przedziale czasowym $[t_0, t_0 + T)$.