Ważnym pojęciem w analizie właściwości obiektów sterowania opisanych nieliniowymi równaniami stanu i wyjścia jest punkt stacjonarny. Rozważmy następujący model:

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t))$$

Pierwsze równanie, to wektorowe równanie stanu określające, wymuszoną przez sygnały sterujące { $u_i(t)$, i=1,…,m}, trajektorię stanu układu dynamicznego w przestrzeni n-wymiarowej (ściśle biorąc, na rozmaitości różniczkowej pełnego rzędu) jako symultaniczne rozwiązanie układu równań różniczkowych pierwszego rzędu postaci:

$$\dot{x}_1 = f_1(\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \dots, \boldsymbol{x}_n(t); u_1(t), \dots, u_m(t))$$

$$\dot{x}_2 = f_2(\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \dots, \boldsymbol{x}_n(t); u_1(t), \dots, u_m(t))$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dot{x}_n = f_n(\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \dots, \boldsymbol{x}_n(t); u_1(t), \dots, u_m(t))$$

Wystarczy, że jedna z funkcji f_i jest nieliniowa, to mamy zadanie dynamiki nieliniowej, w którym to przypadku stosunkowo rzadko można uzyskać rozwiązanie jawne. Można wówczas spróbować je rozwiązać metodą całkowania numerycznego, pod warunkiem że rozwiązanie istnieje a iteracje są do niego zbieżne. Trudno jednak udowodnić istnienie rozwiązania w większości przypadków wielowymiarowych problemów nieliniowych, zwłaszcza dla przypadków z wymuszeniem.

Dlatego dostępnym sposobem analizy zachowania układu w niewielkim otoczeniu wybranego punktu przestrzeni stanu jest lokalna linearyzacja modelu. Autonomiczny, nieliniowy obiekt dynamiczny opisany jest równaniami:

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t))$$

W szczególności istotne jest zachowanie układu autonomicznego (inaczej swobodnego, czyli pozbawionego sterowania) w otoczeniu tzw. punktów stacjonarnych, a więc takich, w których układ pozostaje w stanie ustalonym. Punkty te można wyznaczyć rozwiązując układ algebraicznych równań nieliniowych postaci:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) = 0.$$

Zakładamy, że układ jest regularny (niezdegenerowany). Wówczas rozwiązanie stanowi zbiór (izolowanych punktów w przestrzeni stanu { $\boldsymbol{x}_s^i$, $i=1,2,\ldots,r$ }. Liczba miejsc zerowych funkcji wektorowej $\boldsymbol{f}$ wynika nie tylko z liczby współrzędnych wektora (liczby równań algebraicznych), ale zależy od typów nieliniowości .

<u>Przykłady:</u>

Układ dynamiczny pierwszego rzędu, o jednym stopniu swobody, opisany następującym równaniem stanu:

$$\dot{x} = -\,x^2 + 2$$

Ma dwa punkty stacjonarne: $x = -\sqrt{2}$ i $x = \sqrt{2}$.

Układ dynamiczny drugiego rzędu, o jednym stopniu swobody, opisany następującymi równaniami stanu:

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2\,,$$

$$\dot{x}_2 = x_1\,(\cos x_2 + \tfrac{1}{2})\,,$$

ma przeliczalnie wiele punktów stacjonarnych o współrzędnych:

$$[-\tfrac{\pi}{3} - 2k\pi\,,\ \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi], \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots$$

W przypadku układów zdegenerowanych charakteryzujących się tzw. lokalnym defektem rzędu rozmaitości stanu lub istnieniem tzw. podrozmaitości osobliwej, miejscami zerowymi funkcji $\boldsymbol{f}$ mogą być zbiory zwarte, o kowymiarze większym niż zero, np. orbity.

Nieliniowe układy afiniczne.

Ważną podklasę ogólnych modeli nieliniowych w przestrzeni stanu stanowią tzw. modele afiniczne:

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}(t))u_1(t) + \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}(t))u_2(t) + \ldots \boldsymbol{g}_m(\boldsymbol{x}(t))\,u_m(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t))$$

Modele tej klasy dobrze reprezentują (nie tylko lokalnie) dynamikę układów nieliniowych, w których, w równaniach stanu, można rozdzielić argumenty w postaci zmiennych stanu od sygnałów sterujących. Nie nakładają dodatkowych ograniczeń na dynamikę układu autonomicznego. Akcję sterowań można interpretować jako możliwość wpływania na ewolucję wektora stanu w każdym aktualnym punkcie ***x****(t)* trajektorii, w hiperpłaszczyźnie $\boldsymbol{T_x(x(t))}$ stycznej do niej w tym punkcie. Pola wektorowe $\{\boldsymbol{g_i}\,(\boldsymbol{x}(t))\}$, $i = 1, \ldots, m$ można interpretować jako kierunkowe współczynniki wzmocnienia odpowiednich sygnałów sterujących. Podkreślają one lokalny charakter sterowania (zmianę kierunku i „siły działania" skalarnego sygnału sterującego wzdłuż trajektorii stanu). Wektor sterowań jest elementem liniowej przestrzeni sterowań, co ułatwia operowanie nim. Z punktu widzenia sterowalności układu istotne, aby pola wektorowe tworzyły układ wektorów lokalnie liniowo niezależnych, a po uzupełnieniu o pole wektorowe $\boldsymbol{f(x(t))}$ umożliwiały osiąganie dowolnego punktu w przestrzeni stanu z dowolnego stanu początkowego poprzez odpowiednie sterowanie.

Linearyzacja modelu w otoczeniu punktu stacjonarnego.

Linearyzację modelu ogólnego przeprowadzimy dla otoczenia wybranego punktu stacjonarnego $\boldsymbol{x}_s{}^i$. Dla przejrzystości i bez utraty ogólności rozważań, w następujących dalej wzorach, pomińmy indeks górny i , wskazujący na konkretny punkt stacjonarny oraz indeks dolny s informujący, że chodzi o punkt stacjonarny jako punkt referencyjny . Zakładamy, że w tym punkcie $\boldsymbol{u(0) = 0}$. Używany w symbol normy oznacza normę Euklidesa.

Przez otoczenie punktu stacjonarnego rozumiemy n-wymiarową hiperkulę o środku w $\boldsymbol{x}_s{}^i$ i o małym promieniu ε ($\|\varepsilon\| \ll 1$), oznaczoną $\mathbf{B_n}(\boldsymbol{x}_s{}^i, \varepsilon)$. Rozwijając w szereg Taylora prawą stronę równania stanu układu autonomicznego otrzymujemy w zapisie symbolicznym:

$$\dot{\boldsymbol{z}}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{f}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{x})}{\mathbf{n}!}(\mathbf{z}-\mathbf{x})^{\mathbf{n}},$$

gdzie: $\boldsymbol{z}$ oznacza dowolny wektor o końcu wewnątrz hiperkuli $\mathbf{B_n}(\boldsymbol{x}_s{}^i, \varepsilon)$, $(\mathbf{z}-\mathbf{x})$ oznacza odchylenie od punktu stacjonarnego, $\|(\mathbf{z}-\mathbf{x})\| < \varepsilon$; symbol $\boldsymbol{f}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{x})$ reprezentuje dla n=0 wartość *momentum* $\boldsymbol{f(x)}$ w punkcie stacjonarnym $\boldsymbol{x}$ (równą zerowemu wektorowi),

- dla n=1 $\boldsymbol{f}^{(1)}(\mathbf{x})$ reprezentuje Jacobian $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{X})$ wektorowego momentum,

  czyli gradient $\partial\, \boldsymbol{f} / \partial\, \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}$ obliczony w punkcie stacjonarnym $\boldsymbol{x}$;

- dla n=2 $\frac{f^{(2)}(\mathrm{x})}{2!}(\mathbf{z}-\mathbf{x})^2$ symbolizuje formę kwadratową $(\mathbf{z}-\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\,(\mathbf{z}-\mathbf{x})$,

  a $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ oznacza Hessjan: $\partial^2 \boldsymbol{f} / \partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \partial \boldsymbol{z}$ obliczony w punkcie stacjonarnym $\boldsymbol{x}$.
- Dla n>2 są to formy tensorowe wyższych rzędów.

Z założonej analityczności $\boldsymbol{f}$ wynika, że normy tensorów, w tym Jacobianu i Hessjanu (wartości wyznaczników) są skończone. Oznaczmy je odpowiednio przez J i H.

Ograniczmy rozwinięcie w szereg Taylora do trzech pierwszych wyrazów i przejdźmy do obliczenia normy po obu stronach równania:

$$\| \dot{\boldsymbol{z}}(\mathbf{t}) \| = \| \mathbf{f}(\mathbf{z}) \| = \| \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{J}(\mathbf{x})(\mathbf{z}-\mathbf{x}) + (\mathbf{z}-\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\,(\mathbf{z}-\mathbf{x}) \|$$

Z własności normy mamy:

$$\| \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{J}(\mathbf{x})(\mathbf{z}-\mathbf{x}) + (\mathbf{z}-\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}) \| < \| \mathbf{f}(\mathbf{x}) \| +$$
$$+\mathbf{J} \| (\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}) \| + \| (\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}) \|^{\mathrm{T}} \mathbf{H} \| (\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}) \|$$

czyli

$$\| \dot{z}(\mathbf{t}) \| \leq \mathbf{J}\varepsilon + \mathbf{H}\varepsilon^2$$

J i **H** są skończone (podobnie jak tensory wyższych rzędów), $\ldots \ll \varepsilon^3 \ll \varepsilon^2 \ll \varepsilon$,

$\| \mathbf{f}(\mathbf{x}) \| = 0$ (wektor zerowy). Na tej podstawie wnioskujemy, że dla oszacowania wartości wektora *momentum* (prędkości zmian stanu) można się ograniczyć do zlinearyzowanego modelu:

$$\dot{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{A}\,\boldsymbol{z}(t),$$

gdzie: $\mathbf{A} = \mathbf{J}$ (macierz stanu o stałych elementach, modelu zlinearyzowanego równa Jacobianowi funkcji momentum, obliczonemu w punkcie stacjonarnym $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}(t)$ – wektor stanu linearyzowanego układu pozostający w obrębie jego otoczenia ($\mathbf{B}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{x}_S{}^i, \varepsilon)$).