

## TWORZENIE MODELU OBIEKTU WIELOWYMIAROWEGO W PRZESTRZENI STANU

### kontynuacja

#### 3. Podejście strukturalne do wyprowadzania modelu stanowego układu złożonego.

Złożony obiekt sterowania (np. linia produkcyjna, blok energetyczny, reaktor chemiczny, robot, samolot) powstaje w wyniku połączenia wielu urządzeń wykonawczych (np. maszyn obróbczych lub innych obiektów takich jak system zbiorników tworzących kaskadę, reaktorów chemicznych, w których łączone jest kilka strumieni masowych i energetycznych reagentów, pędników napędzających konstrukcję mechaniczną o wielu stopniach swobody = jak w ramieniu robota) w sieć przepływu sygnałów charakteryzujących wzajemne oddziaływania między tymi urządzeniami. Sposób połączeń wynika z funkcji złożonego obiektu sterowania. Same połączone urządzenia, które na schemacie funkcjonalnym są symbolicznie przedstawione jako bloki  $U_i$  mogą być same w sobie złożone ze względu na dynamikę własną i właściwości statyczne. Wówczas należy je poddać dekompozycji na elementarne człony typu SISO połączone wewnętrznie ze sobą.

Za człony elementarne uważać będziemy takie części analizowanego urządzenia, których dynamikę można opisać równaniami we/wy niskiego rzędu (różniczkowymi/całkowymi lub mieszаныmi), wyprowadzonymi z klasycznych praw fizyki (praw Newtona, prawa Ohma, Kirchhoffa, prawa Bernouillego, itp.). Prawa te odnoszą się do obiektów o parametrach skupionych (tj. takich, których wymiary liniowe są znacznie mniejsze niż długości fal przechodzących przez nie sygnałów).

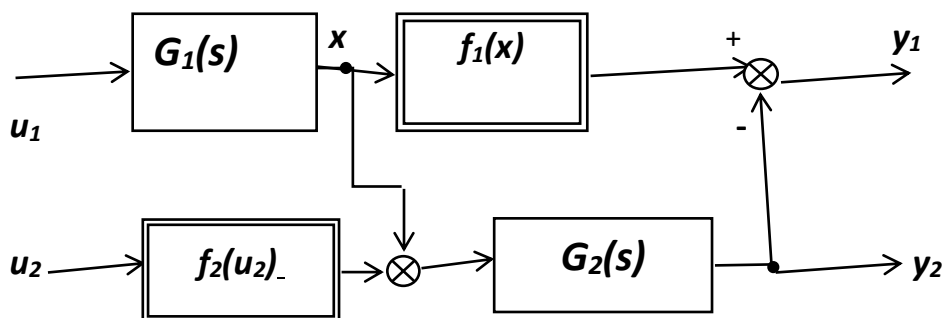
W przypadku elementów o parametrach rozłożonych (urządzenia cieplne, reaktory chemiczne dużych gabarytów, długie rurociągi, długie linie energetyczne, obwody mikrofalowe, elastyczne lub plastyczne struktury mechaniczne) dodatkowym etapem analizy dynamicznej w sytuacji, gdy nie można jawnie rozwiązać opisujących ich dynamikę równań cząstkowych, jest dyskretyzacja przestrzenna równań cząstkowych (dekompozycja obiektu na układ równań zwyczajnych powiązanych poprzez warunki brzegowe).

W opisie członu elementarnego mogą występować nieliniowości wprowadzane przez nieliniową charakterystykę statyczną  $y = f(x)$ , np. charakterystyka tranzystora, gdzie  $y$  to wartość sygnału na wyjściu elementu w stanie ustalonym w odpowiedzi na stałe wymuszenie  $x$  na jego wejściu; albo tzw. nieliniowości dynamiczne objawiające się np. występowaniem którejś pochodnej sygnału  $y(t)$  w innej niż pierwsza potęgze po lewej stronie równania różniczkowego wiążącego sygnał wyjściowy z sygnałem wejściowym. Wówczas mamy do czynienia z nieliniowym równaniem różniczkowym (np. gdy opory ruchu są proporcjonalne do kwadratu prędkości względnej współpracujących części lub gdy sprężyny mają nieliniowe charakterystyki jak w przypadku tzw. sprężyn twardych). Taki człon musimy traktować jako obiekt nieliniowy i oznaczać go jako taki na schemacie blokowym np. podwójną ramką.

Mamy zatem dwa poziomy dekompozycji opisu złożonego obiektu sterowania: poziom wynikający ze schematu funkcjonalnego (podział na urządzenia oraz określenie powiązań pomiędzy nimi) oraz poziom podrzędny, wynikający z dekompozycji złożonego urządzenia (na podzespoły lub modele otrzymane z dyskretyzacji przestrzennej).

Przykład analizy:

**poziom pojedynczego urządzenia** typu MIMO ( $2 \times 2$ ), a więc stosunkowo złożonego



Przedstawiony schemat wskazuje na urządzenie o dwóch sygnałach sterujących (o 2 stopniach swobody) i o dwóch sygnałach kontrolowanych (obserwowanych). Należy zatem przeanalizować właściwości statyczne i dynamiczne czterech kanałów przepływu sygnałów.

$f_i(\cdot)$  oznaczają charakterystyki statycznych elementów nieliniowych (zakładamy wstępnie, że w rozważanych przedziałach wartości ich sygnałów wejściowych są to funkcje różnowartościowe, a więc odwracalne; założenie powinno być empirycznie zweryfikowane).

Bloki dynamiczne są liniowe, a ich dynamika jest reprezentowana przez odpowiednie transmitancje operatorowe. Nie ma zatem w ich przypadku problemu z przejściem do dziedziny czasu i określenia charakteryzujących te człony równań różniczkowych we/wy.

Założmy, że w ich przypadku jest spełniony warunek dekompozycji do poziomu prostych elementów dynamicznych. Tak więc będą to równania rzędu co najwyżej drugiego rzędu (w dodatku liniowe). Tak więc do pełnego scharakteryzowania procesów dynamicznych realizowanych przez to urządzenie wystarczy znajomość przebiegów sygnałów sterujących (wymuszeń) oraz warunków początkowych dla każdego z równań. Ze spełnienia warunku dekompozycji do poziomu elementarnego wynika, że takich warunków jest co najwyżej cztery.

Zmienne fazowe określone oddzielnie dla każdego z członów dynamicznych są **więc dobrymi kandydatami na zmienne stanu całego systemu**. Stanowiąc będą podwektor ogólnego wektora stanu, określonego dla całego obiektu. Model stanowy analizowanego obiektu będzie miał charakter bloku wektorowo-macierzowego (ze względu na obecność elementów nieliniowych):

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B} \begin{bmatrix} u_1 & f_2(u_2) \end{bmatrix}^T$$

$$y = \begin{bmatrix} f_1(x) & c^T \cdot x \end{bmatrix}^T$$

Warto odnotować w pierwszym równaniu wyjścia obecność tych zmiennych wektora stanu, które opisują dynamikę kanału „2→2”. Świadczy to o występowaniu interakcji między kanałami głównymi (czyli o istnieniu sprzężeń skrośnych) w części wyjściowej urządzenia, co ujawnia się na schemacie blokowym. Co ciekawe, samo równanie stanu części autonomicznej (dynamika własna urządzenia) jest liniowe (macierz  $\mathbf{A}$ ). Nieliniowości są obecne w wektorze części sterującej i w pierwszym równaniu wyjścia, co odzwierciedla schemat blokowy.

Wykorzystując odwracalność charakterystyk nieliniowych można w rozważanym przypadku sprowadzić nieliniowy model stanowy do wirtualnego modelu liniowego. W tym celu należy zdefiniować wirtualny sygnał wejściowy:

$$w(t) = f_2^{-1}(u_2)$$

oraz wirtualny sygnał wyjściowy:

$$z(t) = f_1^{-1}(y_1(t)),$$

Wówczas analizowane urządzenie widziane poprzez sygnały  $[u_1 \quad w]$  oraz  $[z \quad y_2]$  może być **postrzegane** jako obiekt liniowy. Jeżeli taki zabieg jest możliwy do przeprowadzenia w odniesieniu do analizowanego podukładu, to należy z niego skorzystać, gdyż postrzeganie go jako obiektu liniowego daje do dyspozycji wiele metod analitycznych opracowanych dla takich

układów. Jest to lokalna (w sensie: ograniczona do konkretnego urządzenia) linearyzacja modelu w szerszym sensie (dopuszczalna w zakresach zmienności sygnałów w tym układzie, w których charakterystyki nieliniowe są odwracalne). Warto jednak pamiętać, że o spełnieniu tego warunku decyduje przede wszystkim dynamika układu.

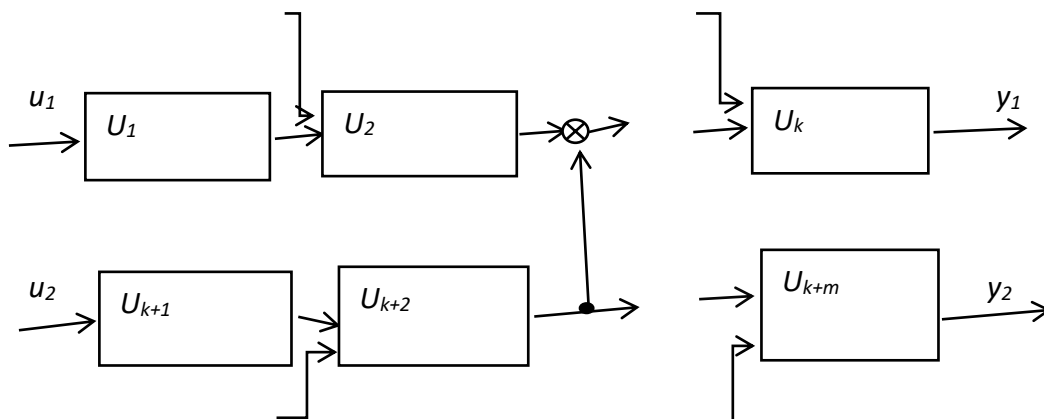
Nie należy utożsamiać tej metody linearyzacji z linearyzacją punktową nieliniowego układu sterowania opisywanego następującymi (ogólnymi) równaniami stanu i wyjścia:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = h(x)$$

gdzie pole wektorowe  $f$  (tzw. *momentum*) określa zależność wektora prędkości zmian stanu nieliniowego układu dynamicznego od chwilowych wartości zmiennych stanu i sygnałów sterujących, czyli jest modelem dynamiki układu (mówimy, że pole  $f$  generuje różniczkową stanu układu o wymiarze  $n$ , odpowiadającą wymiarowi wektora stanu (za wyjątkiem punktów i podrozmaitości zdegenerowanych),  $h$  jest nieliniową (algebraiczną) funkcją zmiennych stanu (wyjściową), o wymiarze  $p$  odpowiadającym liczbie wyjść wielowymiarowego układu nieliniowego. O składowych funkcjach wektorowych  $f$  i  $h$  zakładamy, że są to funkcje rzeczywiste, analityczne (tzn. rozwijalne w szereg Taylora względem swoich argumentów).

**poziom systemowy:**



Przy produkcji fabrycznej realizowanej w instalacjach przemysłowych, poszczególne urządzenia przetwórcze (obiekty sterowania) połączone są ze sobą w **system przetwórczy** (system wytwarzania), w sposób wynikający z technologii produkcji lub ze zgodnej z logiką procesu produkcyjnego sekwencji przetwarzania **materii/energii** (np. przemian fazowych surowców lub medium nośnego, reakcji chemicznych pomiędzy substratami, operacji obróbki półproduktów, itp.).

W instalacjach przemysłowych mamy do czynienia z przepływami strumieni materii (surowców, półproduktów) lub energii, doprowadzanej celem wywołania reakcji chemicznej lub przemiany fazowej, albo wyprowadzanej (odprowadzanej) np. w przypadku produkcji różnej postaci energii użytkowej lub dla ustabilizowania reakcji egzotermicznych, schłodzenia produktów, medium, itp.

Przepływy mogą mieć charakter szeregowy (kaskadowy, sekwencyjny) np. na linii produkcyjnej lub współbieżny (równoległy) w przypadku występowania tzw. węzłów (np. w reaktorach wieloskładnikowych, gniazdach obróbczych). Proces może się również charakteryzować oddziaływaniami skrośnymi pomiędzy poszczególnymi potokami (np. dostarczanie zmodyfikowanego surowca lub półproduktu na linię wyrobu, a w szczególności oddziaływaniami zwrotnymi (cofnięcie prefabrykatu/produktu/wyrobu do wcześniejszej fazy przetwarzania, celem usunięcia wad wykrytych w późniejszej fazie procesu produkcyjnego. Wymienione topologie połączeń odzwierciedlone są na schematach blokowych produkcyjnej, na których bloki reprezentują poszczególne urządzenia produkcyjne (*patrz powyższy rysunek*).

Z punktu widzenia teorii sterowania strumienie masowe i energetyczne uczestniczące w procesie są postrzegane poprzez sygnały odzwierciedlające możliwości ich modulowania (dawkowania), czyli sygnały wejściowe poszczególnych procesów (podprocesów, ogniw łańcucha) oraz sygnały wyjściowe charakteryzujące parametry jakościowe produktów (półproduktów) oraz ilościowy wydatek produkcji. Na poziomie procesu są to sygnały główne. Oprócz tego występują w modelu dynamiki procesu inne sygnały klasyfikowane jako sygnały sterujące (ale nie główne) i inne sygnały wyjściowe (również nie główne).

Urządzenia połączone w system same w sobie mogą być przedmiotem sterowania na poziomie lokalnym (operatora urządzenia), albo pracować jako urządzenia autonomiczne (sterowane automatycznie, a nawet adaptacyjnie). Mogą także podlegać sterowaniu scentralizowanemu na poziomie całego procesu i wówczas ich pomocnicze sygnały wejściowe (symbolicznie zaznaczone na schemacie blokowym) stają się kolejnymi elementami wektora sterowań procesu, podobnie jak wyjścia poszczególnych urządzeń - elementami wektora wyjść procesu. I występują jawnie w stanowym modelu ogólnym całego procesu.