МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Филиал в г. Славянске-на-Кубани

Кафедра математики, информатики и МП

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГАК
Заведующий кафедрой
канд. физ.-мат. наук, доцент
__________ /А. Н. Чернышев/
(подпись)

_____________________ 2015 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Изучение метода координат в курсе математики основной школы.

Работу выполнил ____________________________________ /В. В. Гладких/
(подпись, дата)

Специальность «Математика и информатика»

Научный руководитель
канд. физ.-мат. наук, доцент ________________________ /А. Н. Чернышев/
(подпись, дата)

Нормоконтролер
доцент ____ /Н. П. Пушечкин/
(подпись, дата)

Славянск-на-Кубани 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В геометрии применяются различные методы решения задач – это синтетический метод, метод преобразований, векторный, метод координат и другие. Они занимают различное положение в школе. Основным методом считается синтетический, а из других наиболее высокое положение занимает метод координат потому, что он тесно связан с алгеброй. Изящество синтетического метода достигается с помощью интуиции, догадок, дополнительных построений. Координатный метод этого не требует: решение задач во многом алгоритмизировано, что в большинстве случаев упрощает поиск и само решение задачи.

Можно с уверенностью говорить о том, что изучение данного метода является неотъемлемой частью школьного курса геометрии. Но нельзя забывать, что при решении задач координатным методом необходим навык алгебраических вычислений и не нужна высокая степень сообразительности, а это в свою очередь негативно сказывается на творческих способностях учащихся. Поэтому необходима методика изучения метода координат, позволяющая учащимся научиться решать разнообразные задачи координатным методом, однако не показывающая этот метод как основной для решения геометрических задач. Этим и определяется актуальность выбранной темы «Изучение метода координат в курсе математики основной школы».

`Объект` данной работы – это процесс изучения учащимися геометрии. `Предметом` –является изучение метода координат в курсе геометрии основной школы. `Цель` работы – разработать методику изучения и использования метода координат в школьном курсе геометрии. Предполагается, что добиться эффективного изучения темы «Метод координат» можно в случае, если:

– в 5-6 классе была проведена пропедевтическая работа по формированию основных умений и навыков;
– в системном курсе планиметрии учащиеся знакомятся со структурой этого метода;
– используется продуманная система задач для формирования отдельных компонентов метода.

Предмет и цель работы определяют следующие задачи:

а) Анализ вариантов изучения метода координат в некоторых из действующих учебников, а также содержание программы по математике по данной теме.
б) Описание метода координат и способов его применения на примере конкретных математических задач.
в) Выделение умений, необходимых для успешного овладения методом координат и подбор задач, формирующих данные умения.

Для достижения целей работы и решения поставленных выше задач были использованы следующие методы:

а) анализ программы по математики, учебных пособий, методических материалов, касающихся метода координат;
б) разработка методических рекомендаций, примерных план-конспектов уроков и применение педагогической технологии П.Я. Гальперина.

Теория, сформулированная и исследованная Петром Яковлевичем Гальпериным в середине XX века. Основана на том, что организация внешней деятельности школьников, способствующая переходу внешних действий в умственные, является основой рационального управления процессом усвоения знаний, навыков, умений.

Согласно этой теории, формирование умственных действий проходит по следующим этапам:

а) создание мотивации обучаемого;
б) составление схемы ориентировочной основы действия;
в) выполнение реальных действий;
г) проговаривание вслух описаний того реального действия, которое совершается, в результате чего отпадает необходимость использования ориентировочной основы действий;
д) действие сопровождается проговариванием «про себя»;
е) полный отказ от речевого сопровождения действия, формирование умственного действия в свернутом виде – интериоризация. На каждом этапе действие выполняется сначала развернуто, а затем постепенно сокращается, «свертывается».

Сегодня для применения теории поэтапного формирования умственных действий в системе образования сложился наиболее благоприятный период. Введение и активное использование различных методических комплексов при помощи современных технических, информационных средств позволяет наиболее эффективно достигать поставленных целей обучения, используя при этом технологию П. Я. Гальперина.

1 Технология поэтапного формирования умственных действий

Учение в психологии рассматривается как один из основных видов человеческой деятельности. Анализ учения начинается с выделения деятельности, затем движется к выделению слагающих ее действий, затем к структурному и функциональному анализу содержания каждого из них.

Согласно П.Я. Гальперину, каждое новое умственное действие человек изучает поэтапно. На первом этапе он ориентируется в новом для него действии, узнает, из каких операций оно состоит. На втором этапе он пробует совершить эти операции, проверяя правильность каждого шага, как говорит Гальперин, совершает новое действие в материальном виде. На последнем этапе человек приучается выполнять новое действие быстро, автоматизировано, проверяя только конечный результат. В соответствии с этим П.Я. Гальперин предложил осуществлять обучение умственным действиям по следующим этапам:

а) ориентировка учащихся в новом действии;
б) материальное (материализованное) выполнение действия;
в) действие во внутреннем плане.

Очень важно следующее требование П. Я. Гальперина: если какой-либо из указанных этапов оказывается для ученика неосуществимым, необходимо вернуть его на предыдущий этап. Переход от второго этапа к третьему – весьма непрост, и П. Я. Гальперин указал дополнительные этапы его осуществления: внешняя речь и внутренняя речь.

Теория Гальперина в наши дни общеизвестна. Очень удобно и даже очень привычно используется теория П.Я. Гальперина при изучении алгоритмов.

а) Начинается с сообщения, действий из которых состоит данный алгоритм.
б) Организовывается выполнение учащимся указанных действий, проверяя вместе с учащимися правильность по шагам (этап материализации).
в) Быстрое, автоматизированное выполнения шагов и проверка правиль-

ности выполнения алгоритма по конечному результату (этап интериоризованных действий).

Между вторым и третьим этапом проводится большая работа: исправляются допущенные ошибки, предлагается ученику вслух объяснять, какими были его действия и как их исправить. Получается этап громкой речи. Предлагается ученикам подумать и самим найти ошибку, если таковая имеет место (этап внутренней речи, речи про себя).

Научное достижение П.Я. Гальперина состоит в открытии, что именно эта процедура соответствует особенностям формирования у человека любых умственных действий, а не только действий по усвоению алгоритма. Использование теории П.Я. Гальперина помогает построить технологическую процедуру преподавания не только алгоритмов, но и определений, и теорем. Но не любое действие мы стремимся довести до автоматизма. Если наша цель состоит лишь в сообщении учащимся знания о некотором действии, то работа доводится до ориентировки; если цель – добиться умения выполнять это действие, то работа доводится до материализации, и только если цель – сформировать навык, то проводится полная отработка, включающая интериоризацию.

Использование теории П.Я. Гальперина в школьном преподавании встречает некоторые затруднения. Прежде всего, это связано с тем, что на изучение материала этим методом уходит много времени, поэтому не удается использовать его в полном объеме для каждого изучаемого алгоритма. К тому же среди учащихся имеются дети, способные самостоятельно «перескакивать» через этапы формирования умственных действий, поэтому использование теории П.Я. Гальперина в полном ее объеме было бы педагогически неоправданным.

2 Отражение содержания и результатов в обучении теме: «Метод координат»

Сегодня для объективной оценки соответствия установленным требованиям образовательной деятельности и подготовки обучающихся по каждому уровню общего образования и направлению подготовки (специальности, профессии) профессионального образования принимаются федеральные государственные образовательные стандарты.

Согласно Фундаментальному ядру содержания общего образования определены следующие воспитательные задачи:

– воспитать личностную культуру;
– воспитать семейную культуру;
– воспитать социальную культуру;

Математическое образование – это испытанное столетиями средство интеллектуального развития в условиях массового обучения. Принципиально важно согласование математики и других учебных предметов. Курс математики, в соответствии с устоявшимся традициями в системе Российского образования, разбит на следующие разделы:

– Арифметика.
– Алгебра.
– Геометрия.
– Математический анализ.
– Вероятность и статистика.

Необходимо, что бы учащиеся овладели следующими общематематическими понятиями и методами:

– определения и начальные понятия;
– доказательства, аксиомы и теоремы;
– гипотезы и опровержения;
– прямая и обратная теоремы.
– существование и единственность объекта;
– необходимое и достаточное условие верности утверждения;
– доказательство от противного;
– метод математической индукции;

– математическая модель;
– математика и задачи физики, химии, биологии, экономики, географии, лингвистики, социологии.

Некоторые темы которыми должны овладеть ученики из содержательной части «Геометрия»:

– геометрические фигуры на плоскости и в пространстве;
– отрезок, прямая;
– взаимное расположение фигур;
– параллельное проектирование;
– движения. Симметрия фигур. Подобие фигур;
– геометрические величины и измерения;
– координаты и векторы.

Так же ученики должны уметь решать задачи на построение, вычисление и доказательство, применять координатные и векторные методы.

Государственные образовательные стандарты включают в себя требования к структуре основных образовательных программ (в том числе соотношению обязательной части основной образовательной программы и части, формируемой участниками образовательных отношений) и их объему, условиям реализации основных образовательных программ, в том числе кадровым, финансовым, материально-техническим и иным условиям, результатам освоения основных образовательных программ.

Образовательными стандартами устанавливаются сроки получения общего образования и профессионального образования с учетом различных форм обучения, образовательных технологий и особенностей отдельных категорий обучающихся.

Изучая в основной школе метод координат, ученики в соответствии с образовательной программой знакомятся с таким разделом как «координаты».

Планируемые результаты обучения:

а) вычислять длину отрезка по координатам его концов;
б) вычислять координаты середины отрезка;
в) использовать координатный метод для изучения свойств прямых и окружностей.

В разделе «координаты» учащиеся должны уметь работать с уравнением прямой, координатами середины отрезка, формулой расстояния между двумя точками плоскости, уравнением окружности.

3 Сравнительный анализ методических особенностей изложения темы «Метод координат» в различных учебниках

Министерством Образования и науки Российской федерации представлен перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации, имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования.

Сравним три линии учебно-методических комплексов(УМК) из перечня. УМК Геометрия 7 – 9 классы. Авторы Л. С, Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев. [1]

В состав УМК входят: учебник Л.С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. Геометрия. 7–9 классы, рабочая программа, рабочие тетради, дидактические материалы, самостоятельные и контрольные работы, тематические тесты, приложение к учебнику на электронном носителе, пособие для учителя, задачи по геометрии.

Учебник соответствует государственному образовательному стандарту основного общего образования. В учебнике много оригинальных приёмов изложения, которые используются из-за стремления сделать учебник доступным и одновременно строгим. Большое внимание уделяется тщательной формулировке задач, нередко приводится несколько решений одной и той же задачи. Задания, имеющие электронную версию, отмечены специальным знаком. Добавлены темы рефератов, исследовательские задачи, список рекомендуемой литературы.

Особенности линии: доступное изложение теоретического материала, обширный задачный материал, возможность организации индивидуальной работы.

В главе X «Метод координат» изучается в трех основных параграфах:

а) Координаты вектора
   - Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам.
   - Координаты вектора.
   - Задачи.

б) Простейшие задачи в координатах.

- Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца.
- Простейшие задачи в координатах.
- Задачи.

в) Уравнения окружности и прямой.

- Уравнения линии на плоскости.
- Уравнение окружности.
- Уравнение прямой.
- Задачи.
- Вопросы для повторения к главе X.
- Дополнительные задачи.

Линия учебно-методических комплексов по геометрии Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, В. В. Прасолова под редакцией В. А. Садовничего. 7–9 классы.

Новая современная линия УМК предназначена для изучения геометрии в 7–9 классах. Учебники, входящие в линию сочетают доступность, четкость и наглядность в изложении материала со строгой логикой.

В состав УМК входят: учебники 7, 8, 9 классов; дидактические материалы; поурочные разработки; электронное приложение; рабочие тетради; тематические тесты; сборник рабочих программ.

Учебники соответствуют Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования. Порядок изложения материала в учебниках для 7 и 8 классов отличается от порядка изложения в учебниках Л.С. Атанасяна и др., а также А.В. Погорелова. Изменения имеют своей целью облегчение усвоения материала учащимися. Учебники максимально используют наглядно-иллюстративные возможности обучения. Доказательства теорем хорошо иллюстрированы. К каждой главе даны вопросы для повторения. Представлены объяснения происхождения многих геометрических терминов, исторические справки, списки дополнительной литературы и ссылки на интернет-ресурсы для продолжения самостоятельного изучения тем, подготовки рефератов и творческих проектных работ. Линия УМК нацелена на достижение высоких результатов освоения основной образовательной программы, а также способствует развитию логического мышления, творческих способностей, пространственных представлений, формированию умения использовать геометрический язык и грамотно выполнять чертежи.

Особенности линии УМК: отличное от других линий построение аксиоматики, дифференцированный задачный материал, наличие практических задач.

В учебнике представлена глава «Векторы и координаты», в нее входит следующий параграф:

а) Координаты точки и координаты вектора.
   - Ось координат.
   - Прямоугольная система координат.
   - Вектор.
   - Координаты вектора
   - Длина вектора и расстояние между двумя точками.
   - Угол между векторами.
   - Уравнение окружности.
   - Уравнение прямой.
   - Вопросы и задачи.

б) Операции с векторами.
   - Сумма векторов.
   - Свойства сложения векторов.
   - Произведение вектора на число.
   - Скалярное произведение векторов.
   - Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам.
   - Вопросы и задачи.

в) Геометрические преобразования.
   - Осевая симметрия.
   - Движения.
   - Центральное подобие.
   - О подобии произвольных фигур.
   - Вопросы и задачи.

г) Вопросы для повторения.

д) Дополнительные задачи.

Изучается глава в начале 9 класса. Отведено на ее изучение

Учебник входит в учебно-методический комплекс по геометрии для 7–11 классов и реализует авторскую наглядно-эмпирическую концепцию построения школьного курса геометрии. Большое внимание уделено методам решения геометрических задач. В теоретической части разделы, отмеченные звёздочкой, предназначены для углублённой подготовки, система задач дифференцирована по уровням сложности. Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования, одобрен РАН и РАО, имеет гриф «Рекомендовано» и включен в Федеральный перечень учебников как завершённая предметная линия.

Особенности линии УМК: учебники удовлетворяют требованиям общеобразовательных и предпрофильных классов, подробные поурочные методические рекомендации.

В учебном пособии представлен раздел «Координаты и векторы», включает следующие подразделы:

а) Декартовы координаты на плоскости.
б) Уравнение линии.
в) Векторы на плоскости.
г) Скалярные произведение векторов.
д) Координатный и векторный методы.
   – Выбор системы координат.
   – *Окружность Аполлония.
   – Задачи на коллинеарность векторов.
   – Задачи использующие свойства скалярного произведения.
   – *Еще одно доказательство теоремы о высотах треугольника.

Таблица 1 – Сравнительный методический анализ учебников из федерального комплекта.

Методические критерии	Геометрия 7-9 классы, Л.С, Атанасян.[1]	Геометрия. 9 класс, В. Ф. Бутузов.[2]	Геометрия. 7-9 класс, И. Ф. Шарыгин.[4]
Тема	Метод координат.		
Структура материала	Глава X – «Метод координат» разделена на 3 параграфа. Каждый параграф включает в себя несколько тем. В конце каждого параграфа приведен задачный материал. Имеются примеры решения задач, при помощи нового теоретического материала.	В учебнике представлена глава «Векторы и координаты». Разделена на три параграфа. В каждом параграфе несколько тем. В конце параграфов предлагаются вопросы и задачи. В конце главы предлагаются вопросы и задачи для повторения всего материала.	Глава двенадцатая «Координаты и векторы» включает в себя несколько параграфов, один из которых «Координатный и векторный метод». Указанный параграф разбит на несколько тем. Есть так же темы для дополнительного изучения: «Окружность Аполлония» и «Еще одно доказательство теоремы о высотах треугольника». Отдельных тем для решения задач и ответов на контрольные вопросы нет.

Продолжение таблицы 1

Новые понятия, теоремы и формулы	Разложение вектора по векторам, коэффициенты разложения, координаты вектора, сумма двух векторов, разность двух векторов, произведение вектора на число, радиус-вектор точки, метод координат, координаты середины отрезка, формула длины вектора по его координатам, окружность в прямоугольной системе координат, уравнение прямой в прямоугольной системе координат.	Оси координат, координата середины отрезка, прямоугольная система координат, ось ординат, вектор, противоположный вектор, нулевой вектор,длина и модуль ненулевого вектора, равные векторы, координаты вектора, угол между векторами, уравнения окружности, уравнение прямой, угловой коэффициент прямой, сумма векторов, координата сумм двух векторов, коллинеарные векторы, произведение вектора на число, скалярное произведение векторов, коэффициенты разложения, отображения плоскости на себя, осевая симметрия, движение плоскости, параллельный перенос, поворот, центральная симметрия, центр симметрии, центральное подобие (гомотетия), преобразование подобия.	Координатный и векторный метод. Свойства скалярного произведения, Из дополнительного материала: окружность Аполлония, уравнения прямой, уравнение прямой проходящей через две точки.

Продолжение таблицы 1

Научность изложения	Публицистический стиль изложения теоретического материала. Доступен для самостоятельного чтения ученику.	Для учебника характерен публицистический стиль изложения материала.	Характерен публицистический стиль. Авторы опираются на рассуждения в тексте о той или иной задаче. Текст мало насыщен доказательствами и теоремами.

Продолжение таблицы 1

Обоснование новых понятий, теорем и формул	Приведены доказательства леммы о коллинеарных векторах, теоремы о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам, свойств суммы, разности двух векторов, произведения вектора на число. Обоснованны понятия координатов вектора, коэффициентов разложения вектора. Обоснование понятия радиус-вектор. Вывод формулы уравнения окружности. Описание сути метода координат. Алгебраическое обоснование середины отрезка. Доказательство формулы длины вектора по его координатам. Вывод формулы для нахождения расстояния между двумя точками. Рассмотрена формула уравнения окружности. Вывод уравнения прямой в прямоугольной системе координат.	Даны понятия полуосей, координаты точек. Доказанно утверждение о координатах середины отрезка, начала координат, определение равных векторов, доказательство теоремы о координатах равных векторов, утверждение о возможности отложения вектора от любой точки приведенно с доказательством. Теорема о длине вектора – доказана. Уравнение прямой и окружности приведены и рассмотренны, но не доказанны. Рассмотрено правило треугольника, формула скалярного произведения. Теорема о разложении вектора на неколлинеарные вектора приведена с доказательством, метод координат в открытой форме не рассматривается.	Рассматривается метод координат и векторный метод на примерах задач. Выводится уравнение прямой, уравнение прямой проходящей через две точки, окружность Аполлония приведена на примере задачи. Применение коллинеарности векторов в решении задач так же рассмотренно на примере. Доказано через решение задачи свойство скалярного произведения. Рассмотрено доказательство теоремы о высотах треугольника при помощи векторного метода.

Продолжение таблицы 1

Иллюстрации к новому материалу, практические примеры, задачами с решением	Имеются иллюстрации к теоретическому материалу, как алгебраические так и геометрические. Иллюстрации – цветные.	Имеются разнообразны иллюстрации к новому материалу, как математического назначения, так и направленные на вызов ассоциаций у учащихся.	В учебнике представлены геометрические и алгебраические иллюстрации к темам. Не представлено иллюстраций направленных на определение связи теоретического материала с жизненным опытом.
Вопросы для повторения	Двадцать один теоретических вопроса, для повторения всей главы.	Богатое разнообразие вопросов к новому материалу, множество различных задач.	В ходе изложения теоретического материала предлагаются наводящие вопросы. Вопросов направленных на закрепление темы нет.

Продолжение таблицы 1

Способы выделения в тексте главного	Материал на который надо обратить внимание выделен жирным текстом. Название главы, название параграфа и темы в параграфе выделены цветом, так же цветом выделены номера рисунков и их названия. Теоремы,свойства, следствия, аксиомы и гипотезы выделены в рамочку. Основные формулы находятся в центре, при необходимости нумеруются. В тексте активно используются ссылки на иллюстрации, формулы, теоремы, следствия, аксиомы и гипотезы.	Название тем, параграфов, глав выделены цветов. Утверждения выделенны жирным, теоремы предваряются цветной надписью «теорема», доказательства обрамлены характерной рамкой, важные формулы расположены по центру. В тексте активно используются ссылки на изображения. Некоторые понятия подчеркнуты.	Жирным крупным текстом выделяются название главы, параграфа, темы. В теоретической части необходимые понятия выделены жирным курсивом. Выведенные формулы помещены в центр. Имеется графическое обозначение различных видов материала: с помощью значка «снежинка» обозначен материал не обязательный к изучению, знак оптического диска выделяет материал представленный в электронном приложении. Буквами «н» выделяют начальные задачи, «в» сопровождает важные задачи, буква «п» значит, что задача может быть полезной, буква «т» - трудная задача. Имеются ссылки на представленные графические изображения. Цветных иллюстраций, выделений, обрамлений – нет.

Продолжение таблицы 1

Типы задач	Задачи с примерами их решения. На нахождение коэффициентов, на доказательства, на построения, на нахождения чисел удовлетворяющих условию, нахождение координат точек, на нахождение координат вектора, нахождения длины отрезка, нахождение площадей геометрических фигур, нахождение различных элементов геометрических фигур, задачи на принадлежность точек окружности или прямой, на нахождения уравнения окружности или прямой.	Представлены задачи на нахождение координаты точки, доказательства, нахождение сторон различных геометрических фигур на плоскости, определение вида геометрической фигуры на плоскости, на нахождение длины вектора, нахождение уравнения окружности, определение уравнения линии, определение уравнения прямой, на взаимное расположение прямой и окружности, нахождения суммы, разности и произведения вектора на число, нахождение векторов по правилам параллелограмма и треугольника, выражение векторов через другие векторы, нахождение координатов вектора, на построения, на упрощение выражений, задачи на движения, дополнительные задачи повышенной сложности.	Представлены задачи на нахождение геометрических мест точек, задачи на доказательство, задачи на нахождение сторон треугольников, задачи на нахождения углов в геометрических фигурах, задачи на нахождения расстояния, задачи на нахождение середины отрезка, задачи на нахождения коэффициентов.

Продолжение таблицы 1

Объем задачного материала	В учебнике достаточно задач для закрепления учебного материала. Так же учитель может воспользоваться дидактическими материалами представляемыми этим же коллективом авторов, где приведены задачи как для самостоятельных так и для контрольных работ.	Суммарно в главе «Векторы и координаты» около 100 задач. Материал разбит на несколько уровней сложности. Есть простые задачи на прямое применение теоретического материала, есть задачи, где необходимо применять материал не только текущей темы, но и предыдущих, есть так же задачи повышенной сложности. Обилие вопросов к каждой теме. Авторы так же предлагают различные методические пособия учителю и ученикам.	В главе «Координаты и векторы» по каждому параграфу представленно около 15 задач. Задачи различимы по уровню сложности. Авторы предлагают ученикам и педагогам методические пособия, с дополнительным материалом.

Из приведенного методического анализа учебников видно, что учебник «Геометрия. 7–9 класс», И. Ф. Шарыгина[4] предполагает повсеместное использование дополнительных методических материалов. В учебнике слабо представлен теоретический материал, совсем не много материала указывающего на межпредметные связи. Задач и контрольных вопросов тоже не много, что приводит к необходимости дополнительного поиска материала. Учебник поставляется в комплекте с электронным приложением, что обозначает зависимость качества преподавания геометрии от технических средств и возможностей.

Учебник «Геометрия. 9 класс», В. Ф. Бутузова [2] отличается насыщенностью задачным материалом и различными иллюстрациями. В учебнике достаточно широко представлен теоретический материал, показаны не только межпредметные связи, но и связь с внешним миром. Отличительной особенностью учебника является, то что метод координат не представлен отдельно, как это сделано в учебниках [4] и [1]. В комплекте с учебником поставляются так же различные методические материалы.

Учебное издание «Геометрия 7–9 классы», Л.С, Атанасяна [1] оказалось наиболее оптимальным. В учебнике достаточно теоретического материала, с межпредметными связями. Учебник качественно проиллюстрирован. Собранный задачный материал в позволяет закреплять теорию во всех аспектах. Представленные контрольные вопросы позволяют обобщить знания учеников. Пособие составляет конкуренцию комплекту «Геометрия. 9 класс», В. Ф. Бутузова [2]. Авторский коллектив предоставляет учителю различные пособия для проведения уроков.

4 Логико-математический анализ темы «Метод координат»

Новые понятия введенные в данной теме:

а) коэффициенты разложения вектора – введено описательно, на основе представления вектора в виде $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}; x, y$ – коэффициенты разложения;

б) координаты вектора – введено конструктивно на основе изученных ранее сведений о прямоугольной системе координат;

в) радиус – вектор и его координаты;

г) метод координат – введено конструктивно, на основе сложения векторов по правилу параллелограмма;

д) расстояние между двумя точками – выведенно аналитически из ранее изученной формулы длины вектора, которая была дона в готовом виде и доказана.

Теоремы изученные в данной теме:

а) лемма о коллиенеарности векторов – опирается на ранее изученное понятие коллинеарности векторов.

Пусть $A(x)$: векторы $\vec{a}, \vec{b}$ – коллинеарны; $B(x)$: $\vec{a} \neq \vec{0}$; $C(x)$: существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$, тогда теорема имеет вид $A(x) \wedge B(x) \Rightarrow C(x)$.

Обратная теорема 1 $C(x) \Rightarrow A(x) \wedge B(x)$

Если существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}$ – коллинеарны, при условии, что $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Противоположная теорема 1 $\overline{A(x) \wedge B(x) \Rightarrow C(x)} =$
$= \overline{A(x) \wedge B(x)} \Rightarrow \overline{C(x)} = \overline{A(x)} \vee \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{C(x)}$.

Если векторы $\vec{a}, \vec{b}$ – неколлинеарны, то $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} \neq k\vec{a}$.

Обратная к противоположной теорема 1 $\overline{C(x)} \Rightarrow \overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}$

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} \neq k\vec{a}$, то $\vec{a}, \vec{b}$ – неколлинеарны.

Таблица 2 – Таблица истинности для леммы о коллинеарности векторов.

$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$	$\overline{A(x)}$	$\overline{B(x)}$	$\overline{C(x)}$	$A(x) \wedge B(x) \Rightarrow C(x)$	$C(x) \Rightarrow A(x) \wedge B(x)$	$\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{C(x)}$	$\overline{C(x)} \Rightarrow \overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}$
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1

Из таблицы 2 видим, что совпали прямая и обратная к противоположной теоремы, следовательно лемма верна. Доказательство леммы проведено при помощи синтеза.

б) теорема о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам. Пусть $A(x)$: любой вектор на плоскости ($\vec{p}$); $B(x)$: $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$; $C(x)$: x, y – единственные, тогда теорема имеет вид: $A(x) \Rightarrow B(x) \wedge C(x)$

Обратная теорема 2 $B(x) \wedge C(x) \Rightarrow C(x)$
Если вектор $\vec{p}$ представим в виде $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, при чем x, y- единственные, то $\vec{p}$ – любой вектор плоскости.

Противоположная теорема 2 $\overline{A(x) \Rightarrow B(x) \wedge C(x)} =$
$= \overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)} \vee \overline{C(x)}$.
На плоскости существует такой вектор $\vec{p}$, что $\vec{p} \neq x\vec{a} + y\vec{b}$ или x, y – любые.

Обратная к противоположной теорема 2 $\overline{B(x)} \vee \overline{C(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$
Если на плоскости возможно, что $\vec{p} \neq x\vec{a} + y\vec{b}$ или x, y – любые, то $\vec{p}$ – существует.

Таблица 3 – Таблица истинности для теоремы о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.

$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$	$\overline{A(x)}$	$\overline{B(x)}$	$\overline{C(x)}$	$C(x) \Rightarrow A(x) \wedge B(x)$	$A(x) \wedge B(x) \Rightarrow C(x)$	$\overline{C(x)} \Rightarrow \overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}$	$\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{C(x)}$
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1

Из таблицы истинности 3 видно, что обратная и противоположные теоремы совпали, а значит и прямая теорема верна. Доказательство теоремы приведено при помощи синтеза.

Алгоритмы и правила изученные в данной теме:

а) сумма координат вектора – представленна в виде правила.

Алгоритм 1 *Пусть даны векторы* $\vec{a}\left\{x_1; y_1\right\}; \vec{b}\left\{x_2; y_2\right\}$, *тогда* $\vec{a} + \vec{b}\left\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\right\}$.

б) Разность координат двух векторов – представленна в виде правила.

Алгоритм 2 *Пусть даны векторы* $\vec{a}\left\{x_1; y_1\right\}; \vec{b}\left\{x_2; y_2\right\}$, *тогда* $\vec{a} - \vec{b}\left\{x_1 - x_2; y_1 - y_2\right\}$.

в) Произведение вектора на число – представленно в виде правила.

Алгоритм 3 *Пусть даны вектор* $\vec{a}\left\{x; y\right\}, k$ *– произвольное число, тогда* $k\vec{a}\left\{kx; ky\right\}$.

г) Нахождение координат вектора – данно в виде правила;

Алгоритм 4 *Пусть данны точки* $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ *и вектор* $\vec{AB}\left\{x; y\right\}$, *тогда* $x = x_2 - x_1; y = y_2 - y_1; \vec{AB}\left\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\right\}$.

д) Нахождение координат середины отрезка – предлагается в виде правила.

Алгоритм 5 *Пусть данн отрезок* AB, $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$,*тогда координата середины отрезка* $x = \frac{x_1+x_2}{2}; y = \frac{y_1+y_2}{2}$.

е) Вычисление длины вектора по его координатам – в виде формулы.

Алгоритм 6 *Пусть данн вектор* $\vec{a}\left\{x; y\right\}$, *тогда длина вектора* $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ж) Расстояние между двумя точками – данно в виде правила и находиться так же как и длина вектора.

Алгоритм 7 *Пусть данны точки* $M_1(x_1; y_1); M_2(x_2, y_2)$, *тогда расстояние между* M_1 *и* M_2 *вычисляется по формуле*

$$\left|\vec{M_1 M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

5 Методические рекомендации к изучению темы «Метод координат»

С методом координат ученики знакомятся в 9 классе. У детей проявляется готовность к личностному и жизненному самоопределению. Ведущим видом деятельности становиться интимно-личностное общение. В этот период акценты смещаются с самопринятия и самопрезентации на самостановление и самоопределение, ведется работа по развитию личностных качеств, актуальных для основной потребности данного возраста — самоопределения: способность к самопознанию, самоанализу и самоизменению, доверие к себе, готовность к выбору, ответственность, целенаправленность (умение ставить и достигать цели), самокритичность, самостоятельность, эмоционально-поведенческая гибкость и сила воли.

Основные задачи психолого-педагогического развития учащихся в 9 классе:

– обретение личностной тождественности и целостности (идентичности);
– осознание и самоощущение себя как достойного представителя определенного пола;
– профессиональное самоопределение – самостоятельное и независимое определение жизненных целей и выбор будущей профессии;
– развитие годности к жизненному самоопределению, что предполагает достаточный уровень развития ценностных представлений, волевой сферы, самостоятельности и ответственности.

Учителю необходимо учитывать возрастные особенности учащихся, для успешного освоения учебной программы. Готовность детей в этом возрасте к выбору их ответственность и целенаправленность позволяют учителю задавать работы повышенной сложности, отдавать часть материала на самостоятельное изучение.

Мотивация изучения данной темы заключается в том, метод координат служит основой аналитической геометрии, в которой геометрические фигуры изучаются с помощью методов алгебры. К моменту изучения темы, ученики уже имеют некоторые представления из курса алгебры, изучив прямоугольную систему координат и рассмотрев задачи на построение графиков функций по заданному уравнению.

Материал о координатах дает возможность показать единство математики, продолжить развитие всех познавательных процессов, воспитание интереса к математике и ее приложениям.

Понятийный аппарат составляют понятия:

а) координаты (абсцисса, ордината),

б) система координат (начало, координатные прямые и координатные плоскости),

в) уравнение геометрической фигуры (прямой, окружности и т.д.).

В школе изучение координатного метода и обучение его применению для решения различных математических задач происходит в несколько этапов.

Учителю необходимо помнить, что координатный метод нельзя принимать за основной метод решения задач и доказательства теорем.

Суть метода координат: задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах различные геометрические соотношения, можно решать геометрическую задачу средствами алгебры.

Обратно: пользуясь координатами, можно истолковывать алгебраические и аналитические соотношения и факты геометрически и, таким образом, применять геометрию к решению алгебраических задач.

Метод координат связан с некоторой геометрической сложностью. Одна и та же задача получает различное аналитическое представление в зависимости от того или иного выбора системы координат.

Этапы решения задач методом координат:

а) перевод задачи на координатный (аналитический) язык;

б) преобразование аналитического выражения;

в) обратный перевод, т. е. перевод с координатного языка на язык, в терминах которого сформулирована задача.

Необходимые умения для использования координатного метода в конкретных ситуациях:

– переводить геометрический язык на аналитический для одного типа задач и с аналитического на геометрический для другого;

– строить точку по заданным координатам;
– находить координаты заданных точек;
– вычислять расстояние между точками, заданными координатами;
– оптимально выбирать систему координат;
– составлять уравнения заданных фигур;
– видеть за уравнением конкретный геометрический образ;
– выполнять преобразование алгебраических соотношений.

Перечисленные умения целесообразно формировать, используя соответствующие виды задач.

Виды наиболее распространенных планиметрических задач, решаемых координатным методом:

а) обоснование зависимостей между элементами фигур, особенно между длинами этих элементов;

б) нахождение множества точек, удовлетворяющих определенным свойствам.

Таблица 4 – Расширенное тематическое планирование.

№	Тема	Цели	Тип	Наглядные пособия	Актуализация	Изучение нового материала	Закрепление изученного материала.	Итоги урока. Задание на дом
Глава X «Метод координат»								
§1	Координаты вектора							
1	Разложение вектора по двум данным неколлинеарным векторам.	Доказать лемму о коллинеарных векторах и теорему о разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Закрепить их значение в ходе решения задач.	Комбинированный.	Материалы из учебника, презентация.	Понятие параллелограмма, диагоналей параллелограмма, равенство векторов, сумма векторов.	Лемма о коллинеарных векторах. Доказательство леммы. Теорема о разложение вектора по двум данным неколлинеарным векторам. Доказательство теоремы. Роль леммы в доказательстве.	Решить задачи № 911(а,б); 912(б,в); № 915 (по готовому чертежу); № 916 (а, б).	Задание на дом: изучить материал пункта 86. Решить задачи: № 911(в, г); 912(ж,е,з); 916(в,г).

Продолжение таблицы 4

2	Координаты вектора	Ввести понятие координат вектора и рассмотреть правила действий над векторами с заданными координатами.	Комбинированный.	Материалы из учебника, презентация.	Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам, коллинеарные векторы.	Ввести координатные векторы $\vec{i}, \vec{j}$. Рассмотреть нулевой вектор в виде $\vec{0} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$. Его координаты $\vec{0}(0;0)$. Рассмотреть правила, позволяющие по координатам векторов находить координаты их суммы, разности и произведения вектора на число.	Решить № 917(на доске и в тетрадях). Решить № 919 – самостоятельно, № 918, № 920(а,в) – на доске и в тетрадях. Записать утверждение из № 927. Решить № 928. С/р контролирующего характера (2 варианта).	Задание на дом: подготовиться к устному опросу по карточкам, повторить материал пунктов 76–87; ответить на вопросы 1 – 20, с. 213–214 и на вопросы 1–8, с. 249 учебника. Решить задачи № 798; 795; 990(а)(для векторов $(\vec{p}, \vec{q})$.

Продолжение таблицы 4

§2	Простейшие задачи в координатах							
3	Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца. Простейшие задачи в координатах.	Рассмотреть связь между координатами вектора и координатами его начала и конца. Разобрать задачи о нахождении координат середины отрезка, о вычислении длины вектора по его координатам и нахождении расстояния между двумя точками.	Комбинированный.	Материалы из учебника, презентация.	Вектор, координаты точки, начало вектора, конец вектора. Решить задачи, вызвавшие затруднения.	Рассмотреть понятие радиус-вектора. Устно решить задачу № 934. «Метод координат» – вспомогательные задачи: координаты середины отрезка; вычисление длины вектора по его координатам; расстояние между двумя точками.	Решить: № 939, № 941.	Задание на дом: изучить материал пунктов 88, 89; решить № 935, 952.

Продолжение таблицы 4

4	Простейшие задачи в координатах. Решение задач.	Закрепить знания учащихся в ходе решения задач. Учить решать задачи в координатах.	Урок закрепления знаний.	Материалы из учебника.	Векторы, координаты вектора и координаты его начала и конца, коллинеарные векторы, разложение вектора по двум неколлинеарным векторам.	–	Решить № 947(а), 948(б), 950(б), 951(а).	Задание на дом: Повторить материал пунктов 88 и 89; решить № 947(б), 949(а), 951(б), 953.

Продолжение таблицы 4

§3	Уравнение прямой и окружности							
5	Уравнение линии на плоскости. Уравнение окружности.	Познакомить учащихся с понятием уравнения линии на плоскости. Вывести уравнение окружности и научить записывать уравнение окружности.	Урок изучения нового.	Материалы из учебника, презентация, карточки М/д.	Координаты середины отрезка, длина отрезка, равноудаленные точки, окружность, треугольник, серединный перпендикуляр треугольника, принадлежность точки графику функции.	Разобрать пятое задание диктанта. Вспомнить уравнение параболы, гиперболы и их графики. Познакомить с уравнением произвольной линии. Ввести уравнение окружности. Рассмотреть отличия уравнений эллипса, точки и окружности.	Решить задачи: № 959 (а, б, д); № 960 – устно; 961; 964.	Задание на дом: изучить материал пунктов 90, 91; вопросы 15–17; решить № 962, 965, 966(а, б), 1000.

Продолжение таблицы 4

6	Уравнение окружности. Решение задач.	Закрепить знания учащихся в ходе решения задач. Развивать логическое мышление учащихся.	Урок закрепления и применения знаний.	Материалы из учебника.	Уравнение окружности, линии. Координаты середины отрезка, длина отрезка, равноудаленные точки, окружность, треугольник, серединный перпендикуляр треугольника, принадлежность точки графику функции.	–	Решить № 969(а), 970, 1002(а).	Задание на дом: Повторить материал пунктов 86–91; решить № 969(б), 981, 1002(б).

Продолжение таблицы 4

7	Уравнения прямой	Вывести уравнение прямой и показать, как можно использовать это уравнение при решении геометрических задач. Развивать логическое мышление учащихся.	Комбинированный.	Материалы из учебника, презентация, карточки С/р.	Треугольник, прямая, вектор, координаты вектора, окружность, линия, отрезок.	Уравнение прямой в прямоугольной системе координат. Уравнение прямой, проходящей через точку.	№ 972(а), с. 245; 973; 975.	Задание на дом: повторить материал пунктов 86 – 91; изучить материал пункта 92; вопросы 1–21; решить № 972(б), 979, 984; подготовиться к устному опросу.

Продолжение таблицы 4

§4	Решение задач.						
8	Решение задач в теме «Метод координат»	Закрепление знаний и умений учащихся по материалу главы. Развитие логического мышления учащихся при решении задач.	Урок закрепления и применения знаний.	Материалы из учебника, карточки М/д.	Уравнение прямой, треугольник, прямая, вектор, координаты вектора, окружность, линия, отрезок.	–	Решить № 933, 943, 953, 991, 996, 997, 999.	Задание на дом: повторить материал пунктов 76 – 92; пунктов 66 – 67 (8 класс); решить: 1010(б), 990, 958.

Продолжение таблицы 4

9	Применение «Метода координат». Подготовка к контрольной работе.	Закрепление знаний и умений учащихся по материалу главы. Развитие логического мышления учащихся при решении задач.	Урок систематизации и обобщения знаний и умений.	Материалы из учебника, карточки опроса.	Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам, координаты середины отрезка, уравнение окружности, сумма и разность векторов, уравнение прямой, произведение вектора на число, уравнение прямой, уравнение линии, расстояние между точками.	–	Решить № 1004, 1007, 1010(a).	Задание на дом: повторить материал пунктов 76 – 92; пунктов 66 – 67 (8 класс); решить: 944, 945, 998.

Продолжение таблицы 4

10	Контрольная работа	Проверить знания, умения и навыки учащихся по усвоению и применению изученного материала.	Урок контроля знаний и умений.	Карточки с заданиями для контрольной работы.	–	–	Контрольная работа (4 варианта).	Задание на дом: повторить материал пунктов 76 – 87; ответить на вопросы 1 – 8, с. 249.

6 Примерные расширенные план-конспекты некоторых уроков в теме «Метод координат»

Урок 1: *Разложение вектора по двум данным неколлинеарным векторам.*

Цели:

– *обучающие:* научить выполнять разложение коллинеарных и неколлинеарных векторов ; научить определять по записи разложения векторов их расположение на плоскости (коллинеарность, неколлинеарность);

– *развивающие:* активизация мыслительной деятельности учащихся, развитие познавательного интереса к предмету;

– *воспитательные:* воспитывать аккуратность при работе в тетрадях, формировать навыки самостоятельной деятельности, воспитывать культуру общения, умение работать в коллективе.

Оборудование: Доска, мел, проектор, учебник.

Структура урока:

Таблица 5 – Структура урока

№	Этапы урока	Деятельность учителя	Деятельность ученика	Время (мин)
1	Организационный момент	Приветствие, проверка отсутствующих и готовности учащихся	Отчет дежурных по классу	1
2	Актуализация знаний (Устная работа).	Выводит задачу на доске.	Решают задачу устно.	5
3	Введение нового материала.	Формулирует лемму коллинеарных векторах. Доказательство леммы. Приводит задачу на закрепление.	Знакомятся с леммой. Записывают доказательство в тетрадь. Закрепляют решением задачи.	20

Продолжение таблицы 5

4	Закрепление изученного.	Организует решение задач № 911(а, б); 912(в, г); 915; 916(в,г).	Выполняют задания.	15
5	Итоги урока. Задание на дом.	Выдает задание на дом. Подводит итоги.	Самоанализ результатов. Выводы.	3

Структура и ход урока

Устно решить задачи по заранее заготовленному чертежу на доске:

Задача: Дан параллелограмм $ABCD$ с диагоналями AC и BD, пересекающимися в точке O, а также отрезки MP и NQ, соединяющие соответственно середины сторон AB и CD, BC и AD. Требуется выразить:

а) вектор $\vec{AC}$ через вектор $\vec{AO}$;

б) вектор $\vec{NC}$ через вектор $\vec{BC}$;

в) вектор $\vec{NB}$ через вектор $\vec{AD}$;

г) вектор $\vec{}$ через вектор $\vec{PO}$.

Учитель: Можно ли для любой пары коллинеарных векторов подобрать такое число, что один из векторов будет равен произведению второго вектора на это число?

Новый материал:

Этап по Гальперину: *Ориентировка учащихся в новом действии.*

Формулировка леммы о коллинеарных векторах. Для понимания учащимися формулировки леммы полезно обсудить, во-первых, почему важно условие $\vec{a} \neq \vec{0}$ и, во-вторых, будет ли верно утверждение, если рассматривать произвольные (в том числе и неколлинеарные) ненулевые векторы.

Доказательство леммы.

Решить задачу по рисунку параллелограмма $ABCD$ на доске (тем самым подвести учащихся к мысли о возможности выражения вектора через два данных неколлинеарных вектора)

Задача: Точки M и Q – середины сторон AB и AD параллелограмма $ABCD$. Выразите:

а) вектор $\vec{AC}$ через векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$;

б) вектор $\vec{AC}$ через векторы $\vec{AM}$ и $\vec{MQ}$;

в) вектор $\vec{BD}$ через векторы $\vec{BM}$ и $\vec{CB}$;

г) вектор $\vec{BC}$ через векторы $\vec{BD}$ и $\vec{BM}$.

Рассмотреть теорему о разложении вектора по двум данным неколлинеарным векторам, в ходе ее доказательства полезно обратить внимание на роль леммы в доказательстве.

Закрепление изученного:

Решение задач.

Этап по Гальперину: *Материальное выполнение действий.*

а) Решить задачи № 911 (а, б); 912 (б, в).

б) Решить задачи № 915 (по готовому чертежу) и 916 (а, б).

Итоги урока: Задание на дом: изучить материал пункта 86; решить задачи № 911 (в, г;), 912 (ж, е, з), 916 (в, г).

Урок 2: *Координаты вектора.*

Цели:

- *образовательная:* повторение основных понятий и формул, развитие и закрепление навыков решения задач по теме «Координаты вектора, простейшие задачи в координатах»;
- *развивающие:*развитие логического мышления, грамотной математической речи, развитие внимания;
- *воспитательные:* продолжение воспитания интереса к предмету и самостоятельности выполнения заданий.

Оборудование: Доска, мел, проектор, учебник.

Структура урока:

Таблица 6 – Структура урока

№	Этапы урока	Деятельность учителя	Деятельность ученика	Время (мин)
1	Организационный момент	Приветствие, проверка отсутствующих и готовности учащихся	Отчет дежурных по классу	1

Продолжение таблицы 6

2	Актуализация знаний (Устная работа).	Выводит задачу на доске и предлагает решить задачу № 913.	Решают задачи устно.	5
3	Введение нового материала.	Напоминает задание прямоугольной системы координат. Вводит координатные векторы. Рассматривает равные векторы и нулевой вектор. Рассматривает правила действий с векторами.	Знакомятся с новым материалом. Записывают правила в тетрадь.	15
4	Закрепление изученного.	Организует решение задач № 917; 918; 919; 920; 922-925(устно), 927(выписать утверждение).	Выполняют задания.	10
5	Коррекция и контроль	Предлагает самостоятельную работу по 2 вариантам.	Решают и сдают на проверку самостоятельную работу.	10
6	Итоги урока. Задание на дом.	Выдает задание на дом. Подводит итоги.	Самоанализ результатов. Выводы.	3

Структура и ход урока

Проверка домашнего задания.

Устно решить задачи:

Этап по Гальперину: *Действие во внутреннем плане.*

Задача: Назвать числа x и y, удовлетворяющие равенству: $4\vec{a} - x\vec{b} = y\vec{a} + 2\vec{b}$; $-8\vec{a} + x\vec{a} - 6\vec{b} - y\vec{b} = \vec{0}$;

Задача: № 913.

На доске двое учащихся решают задачи № 911 (в) и 912 (и, к).

Новый материал:

а) Напомнить задание прямоугольной системы координат и начертить ее.

б) Ввести координатные векторы i и j (рис. 275).

в) Нулевой вектор можно представить в виде $\vec{0} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$; его координаты равны нулю: $\vec{0}(0; 0)$.

г) Координаты равных векторов соответственно равны.

д) Рассмотреть правила, позволяющие по координатам векторов находить координаты их суммы, разности и произведения вектора на число (доказательства указанных правил учащиеся могут рассмотреть самостоятельно). 6. Записать в тетрадях правила: $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2)$-данные векторы,

- $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}; \vec{c}(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$;
- $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}; \vec{d}(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$
- $\vec{e} = k\vec{a}; \vec{e}(kx_1, ky_1)$.

Закрепление изученного:

а) Решить задачу № 917 на доске и в тетрадях.

б) Устно по рисунку 276 решить задачу № 918.

в) Решить задачу № 919 (самостоятельно).

г) Решить задачу № 920 (а, в) на доске и в тетрадях.

д) Устно решить задачи № 922–925, используя правила, записанные в тетрадях.

е) Записать утверждение задачи № 927 без доказательства:

Утверждение 1 *Если два вектора коллинеарны, то координаты одного вектора пропорциональны координатам другого: если $\vec{a}(x_1; y_1)$ коллинеарен вектору $\vec{b}(x_2; y_2)$, то $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.*

Утверждение 2 *Если координаты одного вектора пропорциональны координатам другого вектора, то эти векторы коллинеарны.*

ж) Решить задачу № 928.

Решение 1 *Используем условие коллинеарности векторов:* $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.
$\vec{a}3; 7$ *и* $\vec{c}(6; 14)$, *так как* $\frac{3}{6} = \frac{7}{14}$;
$\vec{b}(-2; 1)$ *и* $\vec{d}(2; -1)$, *так как* $\frac{-2}{2} = \frac{1}{-1}$.

Самостоятельная работа контролирующего характера.

Вариант 1

Решить задачи № 912 (а, г); № 920 (г); № 988 (а, б); № 921 (а, в); № 914 (а).

Вариант 2

Решить задачи № 912 (в, д); 920 (д); 988 (в, г); 921 (б, г); 914 (б).

Итоги урока: Задание на дом: подготовиться к устному опросу по карточкам, повторить материал пунктов 76–87; ответить на вопросы 1–20, с. 213–214 и на вопросы 1–8, с. 249 учебника; решить задачи № 798, 795; 990 (а) (для векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$).

Урок 3: *Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца. Простейшие задачи в координатах.*

Цели:

– *образовательная:* изучение и первичное осознание нового учебного материала, осмысление связей и отношений в объектах изучения.
– *развивающие:* умение анализировать, рассуждать, логически мыслить.
– *воспитательные:* воспитывать умение осмысленно слушать, воспитание честности и ответственности.

Оборудование: Доска, мел, проектор, учебник.

Структура урока:

Таблица 7 – Структура урока

№	Этапы урока	Деятельность учителя	Деятельность ученика	Время (мин)
1	Организационный момент	Приветствие, проверка отсутствующих и готовности учащихся	Отчет дежурных по классу	1

Продолжение таблицы 7

2	Актуализация знаний. Анализ результатов самостоятельной работы.	Выводит задачу на доске и предлагает решить задачу № 913.	Решают задачи устно.	10
3	Введение нового материала.	Рассматривает по учебнику понятие радиус-вектора. Решает с учениками вспомогательные задачи. Делает выводы.	Знакомятся с новым материалом. Записывают понятие, решение вспомогательных задач и выводы в тетрадь.	20
4	Закрепление изученного.	Организует решение задач № 939; 941.	Выполняют задания.	10
6	Итоги урока. Задание на дом.	Выдает задание на дом. Подводит итоги.	Самоанализ результатов. Выводы.	3

Структура и ход урока

Анализ результатов самостоятельной работы.

а) Указать ошибки, сделанные учащимися при выполнении работы.

б) Решить на доске задачи, вызвавшие затруднения у учащихся.

Новый материал:

Этап по Гальперину: *Ориентировка учащихся* Рассмотреть по учебнику рис. 277 и рис. 278 и ввести понятие радиус-вектора $\vec{OM}$. Без доказательства записать в тетрадях утверждения:

Утверждение 3 *Координаты точки M равны соответствующим координатам ее радиус-вектора;*

Утверждение 4 *Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала:* $\vec{OA}(x_1; y_1)$ *и* $\vec{OB}(x_2; y_2)$, $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$; $\vec{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Устно решить задачу № 934.

Введение системы координат дает возможность изучать геометрические фигуры и их свойства с помощью уравнений и неравенств и, таким образом, использовать в геометрии методы алгебры. Такой подход к изучению свойств геометрических фигур называется методом координат.

Рассмотрим три вспомогательные задачи.

Задача: *Координаты середины отрезка.*

Используя формулу из п. 84(1) $\vec{OC} = \left(\vec{OA} + \vec{OB}\right)$ и координаты векторов $\vec{OC}(x; y), \vec{OA}(x_1; y_1), \vec{OB}(x_2; y_2)$, записать равенство в координатах: $(x \vec{;} y) - \frac{1}{2}((x_1 + x_2) \vec{;} (y_1 + y_2))$, отсюда $x = \frac{x_1+x_2}{2}; y = \frac{y_1+y_2}{2}$.

Вывод 1 *Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.*

Устно решить задачу № 936.

Задача: *Вычисление длины вектора по его координатам.*

Используя рис. 280 учебника, вывести формулу $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, если $\vec{a}(x; y)$.

Устно решить задачу № 938.

Задача: *Расстояние между двумя точками.*

Пусть точка $M_1(x_1; y_1)$ и точка $M_2(x_2; y_2)$; тогда вектор $M_1 \vec{M}_2(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$; следовательно, длина этого вектора может быть найдена по формуле $\left|M_1 \vec{M}_2\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$; но $\left|M_1 \vec{M}_2\right| = d$, таким образом, расстояние d между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ выражается формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

.

Решить задачу № 940 (а, б) на доске и в тетрадях.

Закрепление изученного:

Этап по Гальперину: *Материальное выполнение действия.*

Решить задачу № 939.

Решение 2 *Найти расстояние от точки $M(3; -2)$:*

а) *до оси абсцисс; точка* $B(x;y)$ *лежит на оси абсцисс; тогда расстояние равно* 2*;*

б) *расстояние до оси ординат равно* 3*;*

в) *до начала координат равно*

$$d = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

Решить задачу № 941 на доске и в тетрадях.

Решение 3 $P_{\triangle} = MN + NP + MP$;
$MN = \sqrt{(12-4)^2(-2-0)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$;
$NP = \sqrt{(5-12)^2(-9+2)^2} = \sqrt{49+49} = \sqrt{2\cdot 49} = 7\sqrt{2}$;
$MP = \sqrt{(5-4)^2(-9-0)^2} = \sqrt{1+81} = \sqrt{82} = \sqrt{82}$;
$P_{\triangle MNP} = 2\sqrt{17} + 7\sqrt{2} + \sqrt{82}$.

Итоги урока: Задание на дом: изучить материал пунктов 88, 89; решить задачи № 935, 952.

Урок 4: *Простейшие задачи в координатах. Решение задач.*

Цели:

– *образовательная:* рассмотреть простейшие задачи в координатах и показать, как они применяются при решении задач, вторичное осмысливание уже известных знаний, выработка умений и навыков по их применению.
– *развивающие:* развивать вычислительные навыки, логическое мышление;
– *воспитательные:* воспитывать умение осмысленно слушать, воспитание честности и ответственности.

Оборудование: Доска, мел, проектор, учебник.

Структура урока:

Таблица 8 – Структура урока

№	Этапы урока	Деятельность учителя	Деятельность ученика	Время (мин)

Продолжение таблицы 8

1	Организационный момент	Приветствие, проверка отсутствующих и готовности учащихся	Отчет дежурных по классу	1
2	Актуализация знаний.	Выдает учащимся карточки для самостоятельной работы. С остальными решает задачи у доски.	Решают задачи у доски и в тетрадях. Двое работают сами по карточкам.	20
3	Решение задач.	Организует решение задач № 947(а); 946(б); 948(б); 951(а).	Выполняют задания.	20
5	Итоги урока. Задание на дом.	Выдает задание на дом. Подводит итоги.	Самоанализ результатов. Выводы.	3

Структура и ход урока

Этап по Гальперину: *Действие во внутреннем плане.* Двое учащихся по карточкам работают у доски:

Карточка 1

а) Вывести формулы координат середины отрезка.

б) Решить задачу № 942.

Карточка 2

а) Вывести формулу расстояния между двумя точками.

б) Решить задачу № 937.

С остальными учащимися проводится устная работа по решению задач:

Задача: Найдите координаты вектора $\vec{b}$, равного разности векторов $\vec{m}$ и $\vec{t}$, если $\vec{m}(-5; 6), \vec{t}(0; -4)$.

Задача: Найдите координаты вектора $\vec{c}$, равного сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}(-3;7), \vec{b}(4;-5)$.

Задача: Найдите координаты середины отрезка DK, если $D(-6;4), K(2;-8)$.

Задача: Найдите длину отрезка CP, если $C(3;-2), P(-5;4)$.

Задача: Найдите длину вектора $\vec{m}$, равного $\vec{n}+\vec{p}$, если $\vec{n}(5;0)$ и $\vec{p}(0;-12)$.

Задача: Найдите координаты вектора $3\vec{d}$, если $\vec{d}(4;-2)$; вектора $-2\vec{p}$, если $p(-2;5)$.

Решение задач:

Решить задачу № 947 (а).

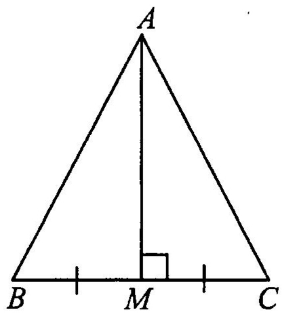

Рисунок 1 – Иллюстрация к задаче.

Решение 4 *Найдем длины сторон треугольника ABC по формуле:*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} :$$

$AB = \sqrt{(1-0)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{26};$

$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13};$

$AC = \sqrt{(5-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$

Так как $AB = AC$, то по определению равнобедренного треугольника $\triangle ABC$ – равнобедренный. Найдем его площадь; проведем высоту $AM \perp BC$:

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AM; AM$ *– высота и медиана в равнобедренном треугольнике.*

Пусть $M(x;y)$, тогда $x = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1+5}{2} = 3; y = \frac{-4+2}{2} = -1.$

Значит, точка $M(3;-1)$. Найдем длину отрезка

$AM = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$

Площадь $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13.$

Ответ: 13.

Решить задачу № 946 (б).

Решение 5 *$M_1(-1;x)$ и $M_2(2x;3)$; $M_1M_2 = d = 7$. Найти x.*

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$; $(2x+1)^2+(3-x)^2 = 7^2$;

$4x^2+4x+1+9-6x+x^2 = 49$; $5x^2-2x-39=0$;

$D = b^2-4ac = 4+780 = 784$;

$x_1 = \frac{2-28}{10} = \frac{-26}{10} = -2,6$;

$x_2 = \frac{2+28}{10} = \frac{30}{10} = 3$.

Ответ: $-2,6; 3$.

Решить задачу № 948 (б) на доске и в тетрадях.

Решение 6 *Пусть точка $M(0;y)$ лежит на оси ординат; по условию $MC = MD$;*

$(4-0)^2+(-3-y)^2 = (8-0)^2+(1-y)^2$

$16+9+6y+y^2 = 64+1-2y+y^2$;

$8y = 40$;

$y = 5$.

Значит, точка $M(0;5)$.

Ответ: $M(0;5)$.

Решить задачу № 950 (б) на доске и в тетрадях.

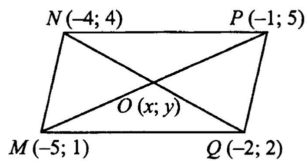

Рисунок 2 – Иллюстрация к задаче.

Решение 7 *Найдем координаты точки пересечения диагоналей четырехугольника $O(x;y)$: для диагонали NQ имеем:*

$x = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-4-2}{2} = -3$; $y = \frac{4+2}{2} = 3$; *Точка $O(-3;3)$.*

Для диагонали MP имеем:

$x = \frac{-5-1}{2} = -3; y = \frac{1+5}{2} = 3;$ *Точка* $O(-3;3)$.

Значит, диагонали MP *и* NQ *точкой пересечения делятся пополам; по признаку параллелограмма* $MNPQ$ *- параллелограмм.*

$MP = \sqrt{(-1+5)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2};$

$NQ = \sqrt{(-2+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2};$

Ответ: $4\sqrt{2}; 2\sqrt{2}$.

Решить задачу № 951 (а).

Решение 8 $AB = \sqrt{(1+3)^2 + (-1+1)^2} = \sqrt{16} = 4;$

$CD = \sqrt{(-3-1)^2 + (-3+3)^2} = \sqrt{16} = 4;$

$BC = \sqrt{(1-1)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{4} = 2;$

$AD = \sqrt{(-3+3)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{4} = 2;$

Так как $AB = CD = 4$ *и* $BC = AD = 2$, *то по* II *признаку параллелограмма* $ABCD$ *– параллелограмм.*

Найдем диагонали AC *и* BD *параллелограмма* $ABCD$*:*

$AC = \sqrt{(1+3)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5};$

$BD = \sqrt{(-3-1)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$

Если диагонали равны $AC = BD$, *то* $ABCD$ *–прямоугольник.*

$S = AD \cdot AB = 2 \cdot 4 = 8.$

Ответ: 8.

Итоги урока: Задание на дом: повторить материал пунктов 88 и 89; решить задачи № 947 (б), 949 (а), 951 (б), 953.

Урок 5: *Уравнение линии на плоскости. Уравнение окружности.*

Цели:

- *образовательная:* систематизация знаний, умений и навыков по теме «Метод координат»; Формирование знаний об уравнениях линий на плоскости, первичное осмысление и закрепление изученного материала.
- *развивающие:* формирование интеллектуальной и эмоциональной активности учащихся; развитие познавательного интереса, умений обобщать и конкретизировать свойства изучаемых объектов и отношений.
- *воспитательные:* воспитывать умение осмысленно слушать, воспитание честности и ответственности.

Оборудование: Доска, мел, проектор, учебник.
Структура урока:

Таблица 9 – Структура урока

№	Этапы урока	Деятельность учителя	Деятельность ученика	Время (мин)
1	Организационный момент	Приветствие, проверка отсутствующих и готовности учащихся	Отчет дежурных по классу	1
2	Актуализация знаний.	Проводит математический диктант в двух вариантах.	Отвечают на вопросы математического диктанта в тетрадях. Тетради сдают на проверку.	15
3	Изучение нового.	Разбирает пятое задание математического диктанта. Обращает внимание на известность некоторых графиков функций. Дает понятие уравнения произвольной линии. Вводит уравнение окружности радиуса r.	Разбираются в пятом задании диктанта. Обращают внимание на известность некоторых графиков функций. Записывают уравнение окружности радиуса r.	15
5	Закрепление изученного.	Предлагает решить задачи № 959(а, б, д), 960, 961, 964.	Выполняют задания.	10

Продолжение таблицы 9

6	Итоги урока. Задание на дом.	Выдает задание на дом. Подводит итоги.	Самоанализ результатов. Выводы.	3

Структура и ход урока

Этап по Гальперину: *Действие во внутреннем плане.*

Математический диктант

Вариант 1

а) Найдите координаты середины отрезка , если $A(-2;3), B(6;-3)$.

б) Найдите длину отрезка EH, если $E(-3;8), H(2;-4)$.

в) Какая фигура состоит из множества всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от двух данных точек?

г) Принадлежит ли точка $A(-6;2)$ графику функции $=0,5x$?

д) Функция задана уравнением $y = 2x - 3$. Какая линия служит графиком этой функции?

е) На окружности радиуса 7 см даны точки A и B, расстояние между которыми равно 13 см. Лежит ли центр окружности на прямой AB?

ж) Вершины треугольника ABC имеют следующие координаты: $A(8;-3)$, $B(5;-1), C(12;0)$. Докажите, $\angle B = \angle C$.

Вариант 2

а) Найдите координаты середины отрезка CD, если $C(3;-4)$, $D(-3;6)$.

б) Найдите длину отрезка KB, если $K(-6;-3)$, $B(2;3)$.

в) Прямая l является серединным перпендикуляром к основанию AB треугольника ABC и проходит через вершину C. Определите вид треугольника ABC.

г) Принадлежит ли точка $B(2;-8)$ графику функции $y = -4x$?

д) Функция задана уравнением $y = 5 - x$. Какая линия служит графиком этой функции?

е) Какой фигурой является множество точек, равноудаленных от данной точки?

ж) Вершины четырехугольника $ABCD$ имеют следующие координаты: $A(-3;-1), B(1;2), C(5;-1), D(1;-4)$. Докажите, что этот четырехугольник – ромб.

Новый материал:

Этап по Гальперину: *Ориентировка учащихся.*

а) Разобрать пятое задание диктанта, обратив внимание учащихся на то, что им уже известны графики некоторых функций. В частности, графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая линия, а уравнение $y = kx + b$ называется уравнением этой прямой.

б) Вспомнить уравнения параболы и гиперболы и их графики.

в) Понятие уравнения произвольной линии дается в ознакомительном плане. При этом важно добиться понимания учащимися следующего: чтобы установить, что данное уравнение является уравнением данной линии, нужно доказать, что: координаты любой точки линии удовлетворяют данному уравнению и координаты любой точки, не лежащей на данной линии, не удовлетворяют этому уравнению.

г) Введение уравнения окружности радиуса r с центром C в заданной прямоугольной системе координат (рис. 286):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

где $C(x_0; y_0)$. Уравнение окружности радиуса r с центром в начале координат $O(0;0)$ имеет вид: $x^2 + y^2 = r^2$.

д) Не любое уравнение второй степени с двумя переменными задает окружность. Например, уравнение $4x^2 + y^2 = 4$ в прямоугольной системе координат не окружность, а эллипс (с этой фигурой учащиеся знакомились в курсе черчения), уравнение $x^2 + y^2 = 0$ задает единственную точку - начало координат, а уравнению $x^2 + y^2 = -4$ не удовлетворяют координаты ни одной точки, поэтому это уравнение не задает никакой фигуры.

Закрепление изученного:

Этап по Гальперину: *Материальное выполнение действия.*

а) Решить задачу № 959 (а, б, д).

б) Устно решить задачу № 960.

в) Решить задачу № 961 на доске и в тетрадях.

г) Решить задачу № 964 на доске и в тетрадях.

Решение 9 $x = 3$, *тогда* $(3-3)^2 + (y-5)^2 = 25$;
$y^2 - 10y = 0; y \cdot (y-10) = 0;$
$y = 0$ *или* $y = 10$.
Точки $A(3;0)$ *и* $B(3;10)$.
$y = 5$, *тогда* $(x-3)^2 + (5-5)^2 = 25$;
$x^2 - 6x + 9 = 0$; $x_1 = 8$; $x_2 = -2$;
точки $C(-2;5)$ *и* $D(8;5)$.

д) Решить задачу № 966 (в, г).

е) Разобрать решение задачи по учебнику на с. 243.

Итоги урока: Задание на дом: изучить материал пунктов 90, 91; вопросы 15–17; решить задачи № 962, 963, 965, 966 (а, б), 1000.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Достаточно простой в применении, метод координат является необходимой составляющей решения задач различного уровня. Использование данного метода, позволяет учащимся значительно упростить и сократить процесс решения задач, что помогает им при дальнейшем изучении, как школьного курса математики, так и при изучении математики в высших учебных заведениях.

В работе проведен логико - дидактический анализ темы, в рамках которого были сравнены три учебных комплекса. Из сравнения вытекает, что учебник Л. С. Атанасяна Геометрия 7–9 наиболее подходит для работы в средней школе. Более подробно проанализирована глава «Метод координат» учебника. В главе последовательно излагаются необходимые теоретические сведенья, которые необходимы для решения задач методом координат. Приведен логико-математический анализ темы, так же разработанны методические рекомендации к изучению метода координат.

На основе логико-дидактического анализа темы разработано расширенное тематическое планирование. Так же приведены примерные план -конспекты первых пяти уроков главы.

В приведенных уроках, обозначены этапы формирования умственных действий в соответствии с теорией П. Я. Гальперина.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Геометрия. 9 класс [Текст] : поурочные планы по учебнику Л. С. Атанасяна авт. – сост. Т. Л. Афанасьева, Л. А. Тапилина. – Волгоград : Учитель, 2013. – 167 с.
2. Бутузов, В. Ф. Геометрия. 9 класс [Текст] : учеб. для общеобразоват. учреждений В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, В. В. Прасолов. – М. : Просвещение, 2012. – 143 с.
3. Левитас, Г. Г. Методика преподавания математики в основной школе [Текст] : учебное пособие Г. Г. Левитас. — Астрахань : Издательский дом «Астраханский университет», 2009. — 179 с.
4. Шарыгин, И. Ф. Геометрия. 7—9 классы [Текст] : учеб. для общеобразоват. учреждений И. Ф. Шарыгин. — М. : Дрофа, 2012. — 462 с.
5. Изучение геометрии в 7—9 классах [Текст] : пособие для учителей Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков. — М. : Просвещение, 2009. — 255 с.
6. Фестиваль Открытый урок [Электронный ресурс] : сайт. — URL: http:festival.1september.ru (дата обращения: 24.04.2015).
7. Геометрия. 7—9 классы [Текст] : учеб. для общеобразоват. организаций Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев. — М. : Просвещение, 2014. — 383 с.
8. Геометрия. Рабочая тетрадь. 9 класс [Текст] : пособие для учащихся общеобразоват. организаций Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков, И. И. Юдина. — М. : Просвещение, 2014. – 49 с.
9. Гальперин, П. Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий [Текст] П. Я. Гальперин. — М. : Наука, 1976.
10. Гальперин, П. Я. Методы обучения и умственное развитие ребенка [Текст] П. Я. Гальперин. — М. : Наука, 1985. — 45с.
11. Саранцев, Г. И. Методика обучения геометрии [Текст] : учеб. пособие для студентов вузов по направлению «Педагогическое образование» Г. И. Саранцев. – Казань: Центр инновационных технологий, 2011. – 288 с.

12. Скрипка, А. М. Становление математического мышления учащихся основной школы [Текст] А. М. Аронов, А. М. Скрипка Вопросы образования. – М. : Педагогика, 2008. – № 1. – С. 146–160.
13. Скрипка, А. М. О понятии геометрического мышления (на материале элементарной геометрии) [Текст] А. М. Аронов, А. М. Скрипка. — Красноярск: Изд-во КГУ, 2005. — № 6. — С. 131—135.
14. Габай, Т. В. Педагогическая психология [Текст] Т. В. Габай. – М. : Академия, 2008. — 240 с.
15. Андрафанова, Н. В. Назарян, Д. С. Интерактивная геометрическая среда как средство развития познавательного интереса школьников [Текст] Н. В. Андрафанова, Д. С. Назарян Современные информационные технологии в образовательной деятельности. – М. : Педагогика, 2014. – С. 59–65.
16. Дудницын, Ю. П. Геометрия. 9 класс [Текст] : рабочая тетрадь Ю. П. Дудницын. – М. : Просвещение, 2012. – 115 с.
17. Ершова, А. П. Голобородько, В. В. Крижановский, А. Ф. Тетрадь-конспект по геометрии для 9 класса [Текст] А. П. Ершова, В. В. Голобородько, А. Ф. Крижановский. – М. : Академия, 2012. – 96 с.
18. Глейзер, Г. Д. Развитие пространственных представлений школьников при обучении геометрии [Текст] Г. Д. Глейзер. — М. : Педагогика, 1978. — 104 с.
19. Гончаров, Н. К. Еще раз о дифференцированном обучении в старших классах общеобразовательной школы [Текст] Н. К. Гончаров. — М. : Советская педагогика. – 1963. – № 2. – С. 46–50.
20. Дорофеев, Г. В. Математика для каждого [Текст] Г. В. Дорофеев. – М. : Аякс, 1999. – 392 с.
21. Избранные вопросы математики. 7—9 классы [Текст] М. А. Доброхотова, О. А. Котий, В. Г. Потапов, А. Н. Сафонов. – М. : Просвещение, 1980. – 208 с.
22. Информационные и коммуникационные технологии в образовании [Текст] : учебно-методическое пособие И. В. Роберт, С. В. Панюкова,А. А. Кузнецов, А. Ю. Кравцова. – М. : Дрофа, 2008. – 312 с.
23. Колмогоров, А. Н. Семенович, А. Ф. Черкасов, Р. С. Геометрия [Текст]

: учебн. пос. для 6—9 классов средней школы А. Н. Колмогоров, А. Ф. Семенович, Р. С.Черкасов. — М. : Просвещение, 1982. — 384 с.

24. Колягин, Ю. М. Ткачева, М. В. Федорова, Н. Е. Профильная дифференциация обучения математике [Текст] Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова Математика в школе. – М. : Педагогика, 1990. – № 4. – С. 21–27.
25. Стефанова, Н. Л. Методика и технология обучения математике [Текст] : курс лекций Н. Л. Стефанова. — М. : Дрофа, 2005. – 416 с.
26. Потоскуев, Е. В. Векторы и координаты как аппарат решения геометрических задач. 10—11 классы [Текст] : элективные курсы Е. В. Потоскуев. – М. : Дрофа, 2008. – 176с.
27. Смирнова, И. М. Смирнов, В. А. Геометрия на клетчатой бумаге [Текст] И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – М. : МЦНМО, 2009. – 264 с.
28. Смирнова, И. М. Смирнов, В. А. Устные упражнения по геометрии. 7—9 классы [Текст] И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. — М. : Мнемозина, 2010. — 223 с.
29. Фридман, Л. М. Теоретические основы методики обучения математике [Текст] Л. М. Фридман. — М. : Флинта, 2009. – 248 с.
30. Эльконин, Б. Д. Психология развития [Текст] Б. Д. Эльконин. – М. : Академия, 2005. – 184 с.