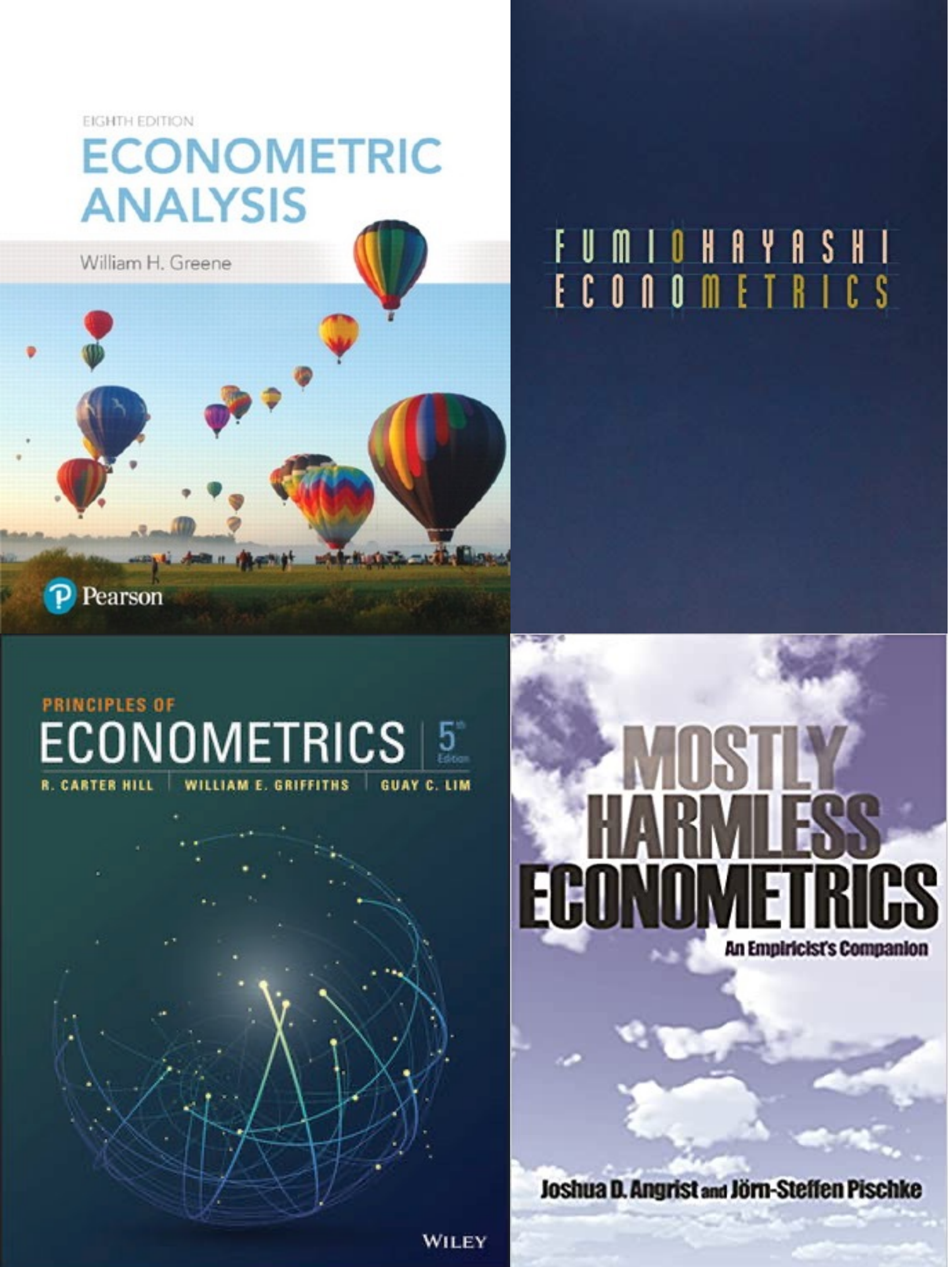
PUCP



DEPARTAMENTO ECONOMÍA
FUNDAMENTOS DE ECONOMETRÍA
1ECO11 – HORARIO 0723

Sesión 3
El Modelo en Desviaciones y Propiedades Estadísticas MCO

Docente: Juan Palomino

PUCP

Índice

1. Modelo en Desviaciones Respecto a las Medias

Modelos en Desviaciones Respecto a las Medias

Para las variables X e Y, definimos las desviaciones respecto a sus promedios como:

$$y_i = Y_i - \bar{Y}$$

$$x_i = X_i - \bar{X}$$

Estas desviaciones cumplen las siguientes propiedades:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0\,, \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i X_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\,, \sum_{i=1}^{n} y_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} X_i y_i$$

Modelos en Desviaciones Respecto a las Medias

Partimos del modelo estimado:

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \mathrm{X_i} + \hat{\varepsilon}_i$$

Restamos $\bar{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{X}$ y obtenemos:

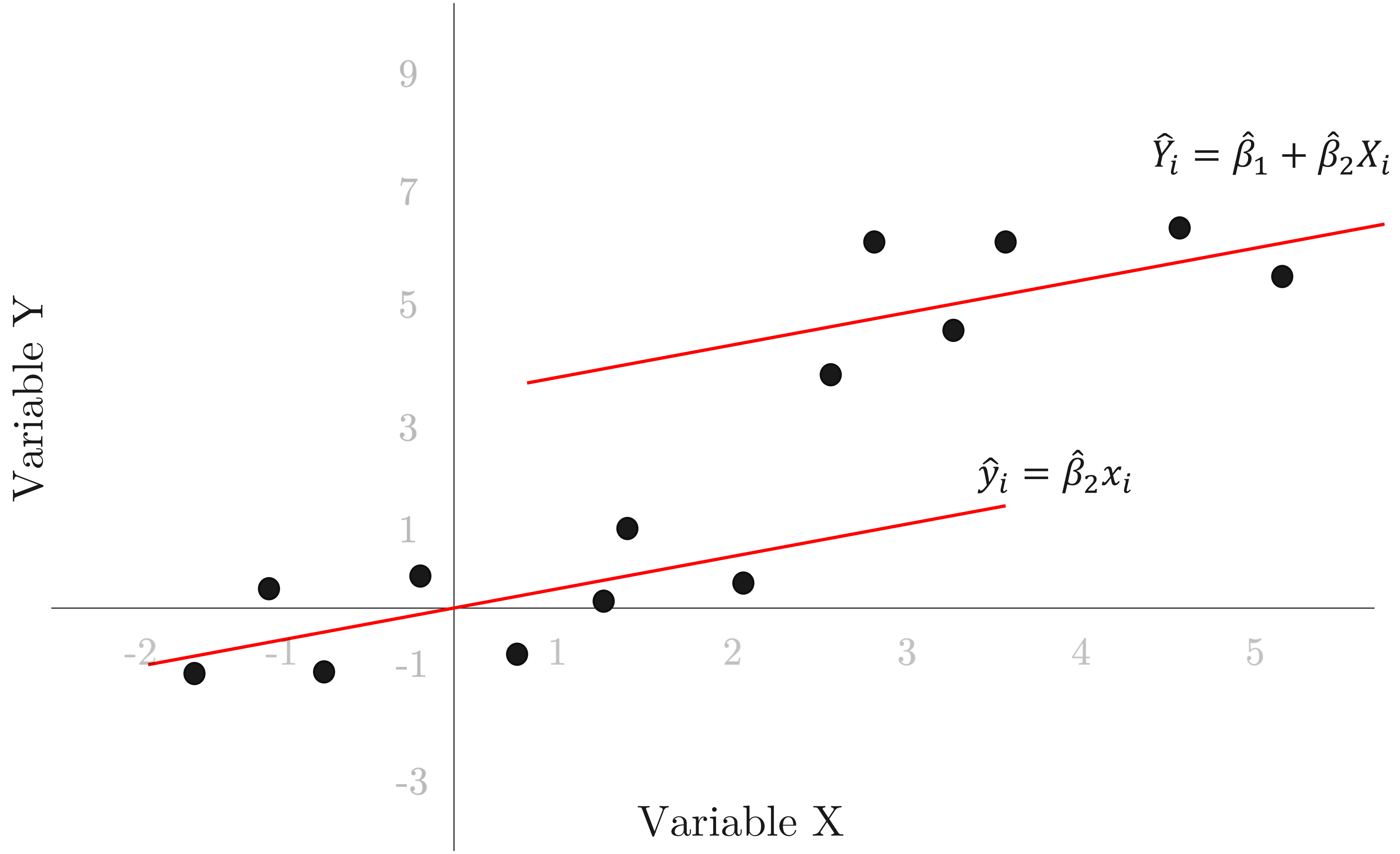
$$Y_i - \bar{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \mathrm{X_i} - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X} + \hat{\varepsilon}_i$$

$$Y_i - \bar{Y} = \hat{\beta}_2 (\mathrm{X_i} - \bar{X}) + \hat{\varepsilon}_i$$

$$y_i = \hat{\beta}_2 x_i + \hat{\varepsilon}_i$$

Este es el modelo estimado en desviaciones respecto a la media.

Modelos en Desviaciones Respecto a las Medias



Estimación del modelo en desviaciones por MCO

Estimar el modelo en desviaciones por MCO:

$$SCR = \sum_{i}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 = \sum_{i}^{n} \left(y_i - \hat{\beta}_2 x_i\right)^2$$

Derivando respecto al único parámetro, se obtiene:

$$\frac{\partial SCR}{\partial \hat{\beta}_2} = -2 \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{\beta}_2 x_i\right) \cdot x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i y_i - \hat{\beta}_2 x_i^2\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$$

Aplicación: Ejemplo en Colab

Calcular los estimadores $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$ a partir de la base ”Ejemplo1.xlsx” en Google Colab:

https://colab.research.google.com/#create=true&language=r

2. Propiedades Estadísticas de los Estimadores MCO

Propiedades Estadísticas de los Estimadores de MCO

Empezaremos con la **media de la pendiente de $\hat{\beta}_2$**. Partiendo de:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Reemplazando la expresión de Y_i del modelo econométrico se tiene:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (\beta_1 + \beta_2 \mathrm{X_i} + \varepsilon_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \frac{\beta_2 \sum_{i=1}^{n} x_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Dado que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ y que $\sum_{i=1}^{n} x_i X_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, esta expresión se reduce a:

$$\hat{\beta}_2 = \beta_2 + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Propiedades Estadísticas de los Estimadores de MCO

Tomando valor esperado:

$$E[\hat{\beta}_2] = E[\beta_2 + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}]$$

$$E[\hat{\beta}_2] = \beta_2 + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i E[\varepsilon_i]}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Por exogeneidad estricta $E[\varepsilon_i] = 0$:

$$\boxed{\boldsymbol{E[\hat{\beta}_2] = \beta_2}}$$

Así, el valor esperado del término de perturbación es cero; con lo cual resulta que $\hat{\beta}_2$ es un estimador insesgado.

Propiedades Estadísticas de los Estimadores de MCO

Calculemos el **valor esperado del estimador de $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$**.

Partiendo del modelo econométrico $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i$, lo podemos promediar: $\bar{Y} = \beta_1 + \beta_2 \bar{X} + \bar{\varepsilon}$

Reemplazando en $\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}$ obtenemos:

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \beta_2 \bar{X} + \bar{\varepsilon} - \hat{\beta}_2 \bar{X}$$

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \bar{X}\left(\beta_2 - \hat{\beta}_2\right) + \bar{\varepsilon}$$

Tomando valor esperado:

$$E[\hat{\beta}_1] = E\left[\beta_1 + \bar{X}\left(\beta_2 - \hat{\beta}_2\right) + \bar{\varepsilon}\right] = \beta_1 + \bar{X}\left(\beta_2 - E[\hat{\beta}_2]\right) + E[\bar{\varepsilon}]$$

$$E[\hat{\beta}_1] = \beta_1 + E[\bar{\varepsilon}]$$

$$E[\hat{\beta}_1] = \beta_1 + E\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{n}\right] = \beta_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{E[\varepsilon_i]}{n} = \beta_1$$

El estimador $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$ es insesgado.

Propiedades Estadísticas de los Estimadores de MCO

Calcular **varianza de $\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$**

$$Var(\hat{\beta}_2) = E\left[\hat{\beta}_2 - E[\hat{\beta}_2]\right]^2$$

Dado que $\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$ es insesgado y utilizando $\hat{\beta}_2 = \beta_2 + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ se obtiene que:

$$Var(\hat{\beta}_2) = E\left[\beta_2 + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right]^2 = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2} E[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i\right)^2]$$

$$Var(\hat{\beta}_2) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2} E[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \varepsilon_i^2 + 2 \sum \sum_{i<j} x_i x_j \varepsilon_i \varepsilon_j]$$

$$Var(\hat{\beta}_2) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2} [\sum_{i=1}^{n} x_i^2 E[\varepsilon_i^2] + 2 \sum \sum_{i<j} x_i x_j E[\varepsilon_i \varepsilon_j]]$$

Propiedades Estadísticas de los Estimadores de MCO

Bajo el supuesto de perturbaciones esféricas y X fijo, se cumple que:

$$Var(\varepsilon_i) = E\left[\varepsilon_i - \mathrm{E}[\varepsilon_i]\right]^2 = E\left[\varepsilon_i^2\right] = \sigma^2$$

$$cov\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = E[(\varepsilon_i - \mathrm{E}[\varepsilon_i])\left(\varepsilon_j - \mathrm{E}\left[\varepsilon_j\right]\right)] = E\left[\varepsilon_i \varepsilon_j\right] = 0$$

Entonces:

$$Var(\hat{\beta}_2) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2}\left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma^2\right] = \frac{\sigma^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2}\sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$Var(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Para calcular **la varianza de $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{1}}$**:

$$Var(\hat{\beta}_1) = E\left[\hat{\beta}_1 - E[\hat{\beta}_1]\right]^2 = E[\hat{\beta}_1 - \beta_1]^2$$

Reemplazando $\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \bar{X}(\beta_2 - \hat{\beta}_2) + \bar{\varepsilon}$ en lo anterior:

$$Var(\hat{\beta}_1) = E[\bar{X}(\beta_2 - \hat{\beta}_2) + \bar{\varepsilon}]^2 = E[-\bar{X}(\hat{\beta}_2 - \beta_2) + \bar{\varepsilon}]^2$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = E[\bar{X}^2(\hat{\beta}_2 - \beta_2) + \bar{\varepsilon} - 2\bar{X}(\hat{\beta}_2 - \beta_2)\bar{\varepsilon}]^2$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \bar{X}^2 Var[\hat{\beta}_2] + E[\bar{\varepsilon}^2] - 2\bar{X}E[(\hat{\beta}_2 - \beta_2)\bar{\varepsilon}]$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \bar{X}^2 \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + Var(\bar{\varepsilon}) + E[\bar{\varepsilon}]^2 - 2\bar{X}E[(\hat{\beta}_2 - \beta_2)\bar{\varepsilon}]$$

Propiedades Estadísticas de los Estimadores de MCO

Como $E[\bar{\varepsilon}] = 0$ y $\mathrm{Var}[\bar{\varepsilon}] = \frac{\sigma^2}{n}$, y usando $\hat{\beta}_2 = \beta_2 + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ en la anterior expresión:

$$Var(\hat{\beta}_1) = \bar{X}^2 \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \frac{\sigma^2}{n} - 2\bar{X}E[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \frac{\sum \varepsilon_i}{n}]$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 (\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2})$$

3. Estimación de σ^2

Estimación de σ^2

Las varianzas de los parámetros se encuentran expresadas en términos de los datos y del parámetro σ^2:

$$Var(\hat{\beta}_1) = \bar{X}^2 \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \frac{\sigma^2}{n} - 2\bar{X}E[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \frac{\sum \varepsilon_i}{n}]$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 (\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2})$$

Estimación de σ^2

Las varianzas de los parámetros se encuentran expresadas en términos de los datos y del parámetro σ^2. Para calcular estas varianzas es necesario tener una estimación de σ^2.

Tenemos $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i$, le restamos $\bar{Y} = \beta_1 + \beta_2 \bar{X} + \bar{\varepsilon}$, se obtiene:

$$y_i = \beta_2 x_i + (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})$$

De la ecuación en desviaciones $y_i = \hat{\beta}_2 x_i + \hat{\varepsilon}_i$, se puede reescribir los residuos como:

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{\beta}_2 x_i$$

Entonces:

$$\hat{\varepsilon}_i = -(\hat{\beta}_2 - \beta_2) x_i + (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})$$

Estimación de σ^2

Elevando al cuadrado esta expresión y aplicando sumatoria:

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = \left(\hat{\beta}_2 - \beta_2\right)^2 x_i^2 + (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2 - 2\left(\hat{\beta}_2 - \beta_2\right) x_i (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 = \left(\hat{\beta}_2 - \beta_2\right)^2 \sum x_i^2 + \sum (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2 - 2\left(\hat{\beta}_2 - \beta_2\right) \sum x_i (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})$$

Y tomando el valor esperado:

$$E[\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2] = E\left(\hat{\beta}_2 - \beta_2\right)^2 \sum x_i^2 + E[\sum (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2] - 2E[\left(\hat{\beta}_2 - \beta_2\right) \sum x_i (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})]$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2\right] = Var\left(\hat{\beta}_2\right) \sum x_i^2 + (n-1) E[\frac{\sum (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2}{(n-1)}] - 2E[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sum x_i \, \varepsilon_i]$$

Estimación de σ^2

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2\right] = Var(\hat{\beta}_2)\sum x_i^2 + (n-1)\,Var(\varepsilon_i) - 2\sum x_i^2\, E[\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)^2]$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2\right] = Var(\hat{\beta}_2)\sum x_i^2 + (n-1)\,Var(\varepsilon_i) - 2\sum x_i^2\, Var(\hat{\beta}_2)$$

Reemplazando las respectivas varianzas, se obtiene:

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2\right] = \sigma^2 + (n-1)\sigma^2 - 2\sigma^2 = (n-2)\sigma^2$$

Estimación de σ^2

Se propone un estimador de σ^2, llamado $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2}$$

Este es un estimador insesgado, pues:

$$E[\hat{\sigma}^2] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2}\right] = \frac{1}{n-2} E[\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2]$$

$$E[\hat{\sigma}^2] = \frac{n-2}{n-2}\sigma^2 = \sigma^2$$

Comprobar que:

$$\mathrm{Var}[\hat{\sigma}^2] = \frac{2\sigma^4}{n-2}$$

4. El Teorema de Gauss-Markov

El Teorema de Gauss-Markov

Se dice que un estimador, sea el estimador $\hat{\beta}_2$ es el mejor estimador lineal insesgado (MELI) de β_2 si se cumple lo siguiente:

1. Es **lineal**, es decir, función lineal de una variable aleatoria, como la variable dependiente Y en el modelo de regresión.
2. Es **insesgado**, es decir, su valor promedio o esperado, $E(\hat{\beta}_2)$ es igual al valor verdadero, β_2.
3. Tiene varianza mínima dentro de la clase de todos los estimadores lineales insesgados; un estimador insesgado con varianza mínima se conoce como **estimador eficiente**.

El Teorema de Gauss-Markov

Los estimadores de MCO son combinaciones lineales de la variable estocástica Y_i, por ello se dice que son estimadores lineales. Por ejemplo, en el caso de $\hat{\beta}_2$:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{1}{\sum x_i^2} \sum x_i Y_i = \sum \left(\frac{x_i}{\sum x_i^2} \right) Y_i = \sum w_i Y_i$$

El teorema de Gauss-Markov dice que los estimadores de MCO tienen la menor varianza dentro de la clase de los estimadores lineales e insesgados. Por ello se dice que el estimador MCO es el mejor estimador lineal insesgado (MELI).

El Teorema de Gauss-Markov

Para probar este teorema, planteamos otro estimador lineal que sea insesgado.

$$b_2 = \sum c_i Y_i$$

Reemplazando la expresión del modelo econométrico en b_2 se obtiene:

$$b_2 = \sum c_i(\beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i) = \beta_1 \sum c_i + \beta_2 \sum c_i X_i + \sum c_i \varepsilon_i$$

Tomando el valor esperado a esta expresión, nos queda:

$$E[b_2] = \beta_1 \sum c_i + \beta_2 \sum c_i X_i + \sum c_i E[\varepsilon_i] = \beta_1 \sum c_i + \beta_2 \sum c_i X_i$$

Para que b_2 sea insesgado, se requiere que $\sum c_i = 0$, $\sum c_i X_i = 1$. Luego:

$$b_2 = \beta_2 + \sum c_i u_i$$

El Teorema de Gauss-Markov

La varianza de este estimador insesgado es:

$$Var[b_2] = E[(b_2 - \beta_2)^2] = E\left[\left(\sum c_i \varepsilon_i\right)^2\right] = E[\sum c_i^2 \varepsilon_i^2 + 2\sum_i \sum_j c_i c_j \varepsilon_i \varepsilon_j]$$

$$= \sum c_i^2\, E[\varepsilon_i^2] + 2\sum_i \sum_j c_i c_j E[\varepsilon_i \varepsilon_j] = \sigma^2 \sum c_i^2$$

Formulemos $c_i = w_i + (c_i - w_i)$. Elevando al cuadrado y aplicando sumatorias:

$$c_i^2 = w_i^2 + (c_i - w_i)^2 + 2w_i(c_i - w_i)$$

$$\sum c_i^2 = \sum w_i^2 + \sum (c_i - w_i)^2 + 2\sum w_i(c_i - w_i)$$

El Teorema de Gauss-Markov

$$\sum w_i(c_i - w_i) = \sum w_i c_i - \sum w_i^2 = \frac{\sum x_i c_i}{\sum x_i^2} - \sum \left(\frac{x_i}{\sum x_i^2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\sum x_i^2} - \sum \frac{\sum x_i^2}{\left(\sum x_i^2\right)^2} = 0$$

Dado que $\sum x_i c_i = 1$. Volviendo a la expresión original, multiplicamos todo por σ^2 y tenemos:

$$Var(b_2) = \sigma^2 \sum c_i^2 = \sigma^2 \sum w_i^2 + \sigma^2 \sum (c_i - w_i)^2$$

Entonces $Var(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} = \sigma^2 \sum w_i^2$. Luego:

$$Var(b_2) = Var(\hat{\beta}_2) + \sigma^2 \sum (c_i - w_i)^2$$

De esta manera, resulta que $Var(b_2) \geq Var(\hat{\beta}_2)$.

5. Descomposición de la Suma de Cuadrados

Descomposición de la Suma de Cuadrados

Recuerden la ecuación de regresión:

$$Y_i = \underbrace{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i}_{\text{Parte sistemática}} + \varepsilon_i$$

El objetivo del análisis de regresión es explicar las variaciones de la variable endógena.

Una forma de estudiar la variabilidad de Y es a través de su varianza.

Descomposición de la Suma de Cuadrados

La varianza muestral de Y se calcula a partir de desviaciones respecto al promedio:

$$\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n-1} = \frac{SCT}{n-1}$$

Con respecto a la sumatoria de cuadrados totales (SCT)

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\hat{\beta}_2 x_i^2 + \hat{\varepsilon}_i\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \hat{\beta}_2^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i{}^2 + 2\hat{\beta}_2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i \, \hat{\varepsilon}_i}_{=0}$$

Descomposición de la Suma de Cuadrados

Tenemos:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}_{SCT} = \underbrace{\hat{\beta}_2^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2}_{SCE} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i{}^2}_{SCR}$$

- SCT: Sumatoria de Cuadrados Totales
- SCE: Sumatoria de Cuadrados Explicadas
- SCE: Sumatoria de Cuadrados Residuos

R-Cuadrado (R^2)

Simplemente mide que proporción de la variación de y es explicada por la parte sistemática de la ecuación:

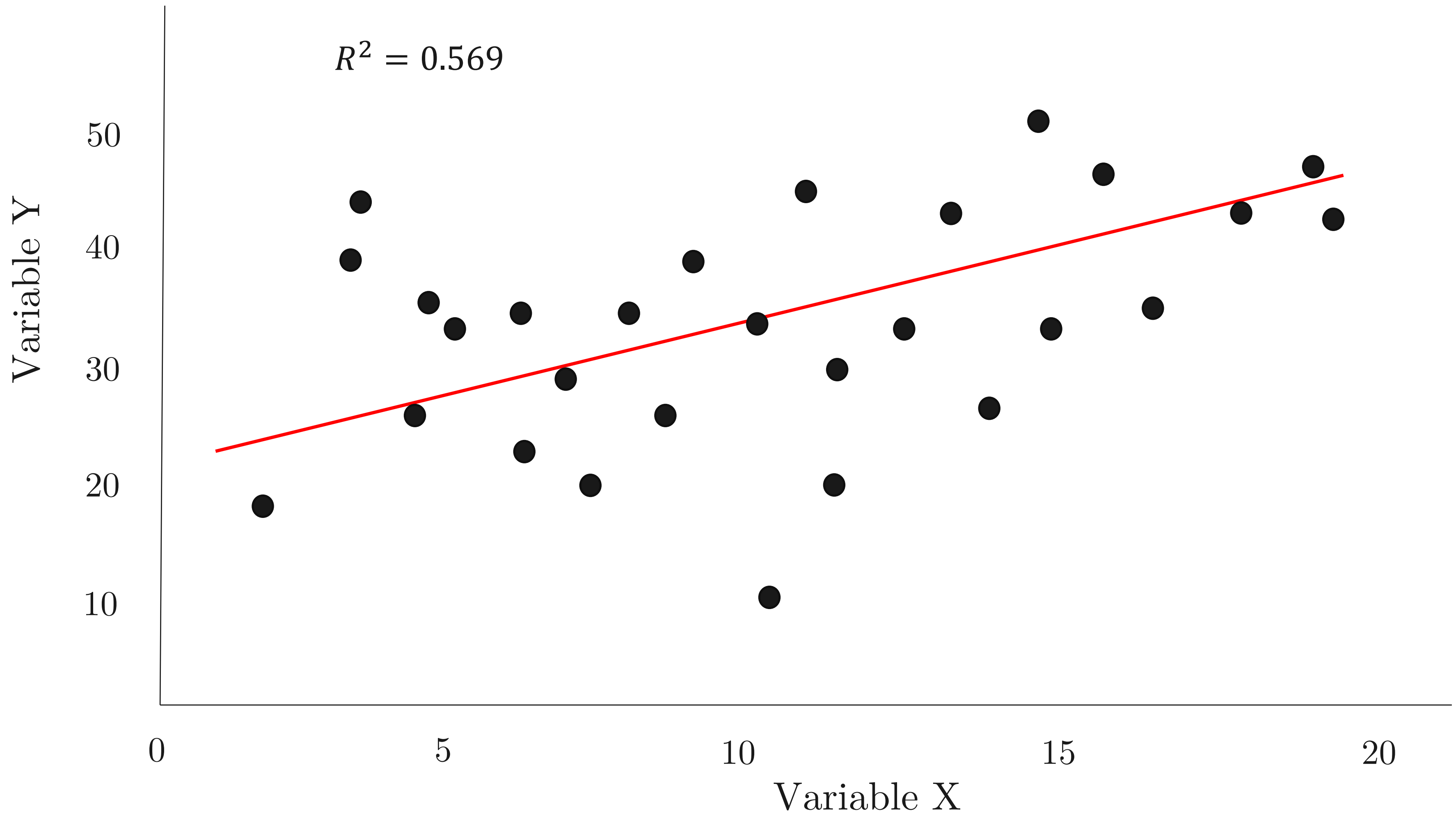
$$R^2 \Rightarrow \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} = \frac{\hat{\beta}_2^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i{}^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} = \frac{SCE}{SCT}$$

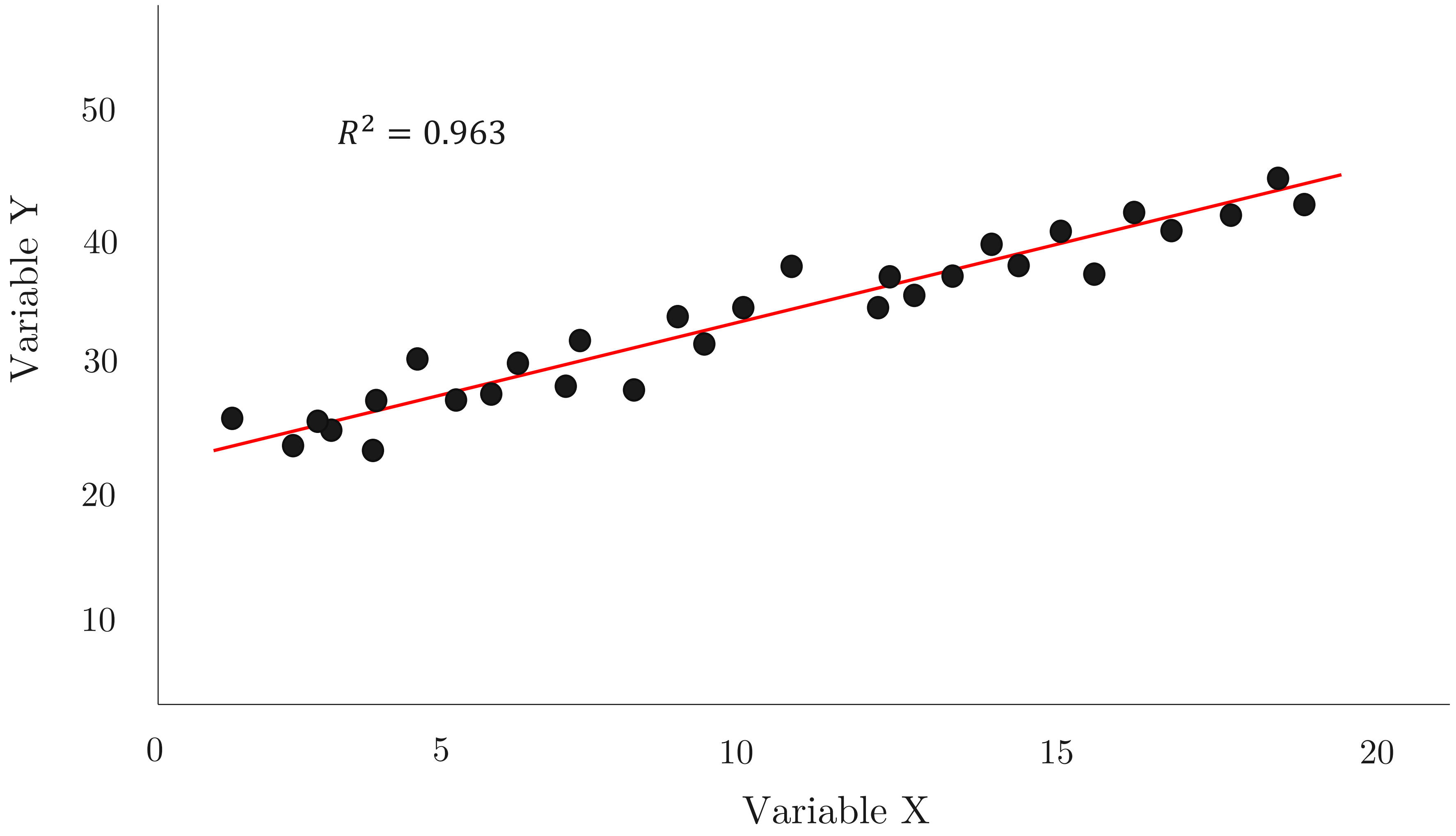
Toma valores entre cero y uno.

Cuando solo hay una variable explicativa, el R^2 es el coeficiente de correlación al cuadrado. Demostrar!

R-Cuadrado (R^2)



R-Cuadrado (R^2)



Referencias

Capítulo 3 - Gujarati, D., & Porter, D. (2010). Econometría (Quinta edición ed.). *& P. Carril Villareal, Trad.) México: Mc Graw Hill educación*.

PUCP