PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
CIENCIAS SOCIALES
CICLO 2022-2

Fundamentos de Econometría
Práctica Dirigida 3

Profesor: Juan Palomino juan.palominoh@pucp.pe
Jefes de Práctica: Tania Paredes tania.paredes@pucp.edu.pe

Fecha: 10 – 09 – 2022

Modelo Multivariado

1. Mínimos Cuadrados Ordinarios con 3 variables

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$$

Se tiene una muestra de 33 observaciones. Además, se sabe que:

$$\sum_{i=1}^{33} Y_i = 35, \sum_{i=1}^{33} X_{1i}^2 = 2, \sum_{i=1}^{33} X_{2i}^2 = 10, \sum_{i=1}^{33} X_{3i}^2 = 1$$

$$\sum_{i=1}^{33} X_{1i} X_{2i} = 1, \sum_{i=1}^{33} X_{2i} X_{3i} = 0, \sum_{i=1}^{33} X_{1i} X_{3i} = 1$$

cambiamos dato

$$\sum_{i=1}^{33} X_{1i} Y_i = 5, \boxed{\sum_{i=1}^{33} X_{2i} Y_i = 10}, \sum_{i=1}^{33} X_{3i} Y_i = 4$$

a. Calcular por MCO los coeficientes estimados $\widehat{\beta_1}$, $\widehat{\beta_2}$ y $\widehat{\beta_3}$.

Dado el modelo con 3 variables:

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$$

Sabemos que, partiendo de un modelo multivariado expresado como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}\beta + \varepsilon_i$$

Podemos hallar la solución:

$$\boxed{\hat{\beta} = (\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}'\mathbf{y}}$$

Parte 1: Hallamos $(X'X)^{-1}$

Donde $X = \begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{31} \\ X_{1n} & & X_{3n} \end{bmatrix}_{n\times 3}$; $n = 33$

$$X'X = \begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{31} \\ X_{1n} & & X_{3n} \end{bmatrix}'_{n\times 3} \begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{31} \\ X_{1n} & \dots & X_{3n} \end{bmatrix}_{n\times 3} = \begin{bmatrix} \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{1i}X_{3i} \\ \sum X_{2i}X_{1i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i}X_{3i} \\ X_{3i}X_{1i} & \sum X_{3i}X_{2i} & \sum X_{3i}^2 \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora para hallar la inversa de $X'X$, debemos hallar el determinante para saber si este es $\neq 0$.

$$\det(X'X) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}\cancel{a_{23}}^{0}a_{32} + a_{12}\cancel{a_{23}}^{0}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}\cancel{a_{21}}^{0}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad \Big/ \quad a_{23}=0, \; a_{32}=0$$

$$\det(X'X) = \underset{20}{2(10)(1)} - \underset{1}{1(1)(1)} - \underset{10}{(1)(10)(1)} = 9 \neq 0$$

Y hallamos la matriz adjunta de cofactores:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 \; ; \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \; ; \quad C_{13} \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -10$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \; ; \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \; ; \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

observación de la clase

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = -10 \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \; ; \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 19$$

Por lo que; $\operatorname{Adj}(X'X) = \begin{bmatrix} 10 & -1 & -10 \\ -1 & 1 & 1 \\ -10 & 1 & 19 \end{bmatrix}$

Y ahora ya podemos hallar la inversa:

$$(X'X)^{-1} = \frac{\operatorname{Ad}(X'X)}{\det(X'X)} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 10 & -1 & -10 \\ -1 & 1 & 1 \\ -10 & 1 & 19 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.11 & -0.11 & -1.11 \\ -0.11 & 0.11 & 0.11 \\ -1.11 & 0.11 & 2.11 \end{bmatrix}$$

Parte 2: hallamos $(X'Y)$

$$X'Y = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} \dots & X_{2n} \\ X_{31} & X_{32} \dots & X_{3n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum X_{1i} Y_i \\ \sum X_{2i} Y_i \\ \sum X_{3i} Y_i \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

cambiamos dato

$\sum X_{2i} Y_i = 10$

Ⓜ Finalmente se halla $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 1.11 & -0.11 & -1.11 \\ -0.11 & 0.11 & 0.11 \\ -1.11 & 0.11 & 2.11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.99 \\ 3.99 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.99 \\ 3.99 \end{bmatrix}$$

b. Halle el estimador $\hat{\sigma}^2$.

$$SCR = \frac{e'e}{n-k} = \frac{(y-X\hat{\beta})'(y-X\hat{\beta})}{n-k} = \frac{y'y - y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}{n-k}$$

$$\boxed{SCR = \frac{y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}{n-k}}$$

; recordar $y'X\hat{\beta} = \hat{\beta}'X'y$ $\boxed{n=33 \;,\; k=3}$

Ⓝ Definimos:

✓ $y'y = \sum y_i^2 = 35$

✓ $-2\hat{\beta}X'y = \underbrace{-2 \underset{1\times3}{\begin{bmatrix} 0.01 & 0.99 & 3.99 \end{bmatrix}} \underset{3\times1}{\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}}}_{1\times1} = 2(25.91) = 51.82$

✓ $\hat{\beta}'(X'X)\hat{\beta} = \underbrace{\underset{1\times3}{\begin{bmatrix} 0.01 & 0.99 & 3.99 \end{bmatrix}} \underset{3\times3}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{3\times1}{\begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.99 \\ 3.99 \end{bmatrix}}}_{1\times1} = 25.82$

$\boxed{\text{Por lo que, } \hat{\sigma}^2 = \frac{35 - 51.82 + 25.82}{33-3} = 0{,}3}$

c. Encontrar la varianza estimada de $\widehat{\beta_2}$ y $\widehat{\beta_3}$y la covarianza estimada entre estos estimadores.

$$Var(\hat{\beta}) = 0.3 \begin{bmatrix} 1.11 & -0.11 & -1.11 \\ -0.11 & 0.11 & 0.11 \\ -1.11 & 0.11 & 2.11 \end{bmatrix}$$

$Var(\hat{\beta}_2) = 0.3(0.11) = 0.03$

$Var(\hat{\beta}_3) = 0.3(2.11) = 0{,}63$

$cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = 0.3(0.11) = 0.03$

d. Hacer una prueba de hipótesis al 95% de confianza donde la hipótesis nula es:

$$H_0: \beta_2 = 0$$

(Nota: $t_{0.975}(30) = t_{0.025}(30) = 2.0423$)

$H_0: \beta_2 = 0$ valor de la tabla $= 2{,}04$

$H_1: \beta_2 \neq 0$

Hallamos el $t_{est} = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2^{H_0}}{\sqrt{Var(\hat{\beta}_2)}} = \frac{0.99 - 0}{\sqrt{0{,}03}} = \frac{0{,}99}{0{,}17} = 5{,}82$

Por lo que, dado que $|t\text{-est}| > t\text{-tabla} \rightarrow$ Se rechaza $H_0: \beta_2 = 0$ al 5% de significancia o 95% de intervalo de confianza

2. **Regresión Particionada**

a. A partir de los errores estimados, obtenga la matriz generadora de residuos **M**

ⓐ A partir de el modelo estimado $y = x\hat{\beta} + \hat{e}$

$$\hat{\varepsilon} = y - X\hat{\beta} = y - x\,[x'x]^{-1}x'y$$ // y en minúscula porque es un vector

$$\hat{\varepsilon} = \underbrace{[I_N - X(x'x)^{-1}x']}\, y$$

$$\hat{\varepsilon} = M y$$

Donde $M = [I_N - X(X'X)^{-1}X']$ es la matriz generadora de residuos

b. Interprete dicha matriz

ⓑ Solo obteniendo Y y X, puedo obtener la matriz generadora de residuos estimados. Por lo tanto, sin realizar alguna regresión, puedo hallar los errores estimados

c. ¿Esta matriz es simétrica? ¿Cuál es el resultado de esta matriz multiplicada por sí misma?

ⓒ La matriz sí es simétrica porque I_N lo es y $X(X'X)^{-1}X'$ también lo es, porque la transpuesta de ello es el mismo resultado

$$[X(X'X)^{-1}X']' = X(X'X)^{-1}X'$$

Para corroborar, $M' = M$

$$M' = [I_N - X(X'X)^{-1}X']' = [I_N' - (X(X'X)^{-1}X')']$$
$$= [I_N - X(X'X)^{-1}X'] = M$$

Por otro lado, $M \cdot M = M^2 = ?$

$$M \cdot M = [I_N - X(X'X)^{-1}X'][I_N - X(X'X)^{-1}X']$$
$$= I_N - 2X(X'X)^{-1}X' + X(X'X)^{-1}\underbrace{X'X(X'X)^{-1}}_{I}X'$$
$$= I_N - X(X'X)^{-1}X' = M \; ; \; \therefore \; M \cdot M = M$$

d. Desarrolle el Teorema de Frisch-Waugh y explique por qué es importante al momento de realizar regresiones particionadas.

(d) Dado un modelo $y = X\beta + \varepsilon$, separamos la matriz X en dos partes:

$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon$; siendo X_1 y X_2 matrices y β_1 y β_2 vectores.

Podemos hallar β_1 de la siguiente forma:

1. Estimar $y = X_2\beta_2 + v$ por MCO y calcular $\hat{\varepsilon}_y = M_2 y$; siendo $M_2 = I - X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'$

2. Estimar $X_1 = X_2\beta_2 + w$ por MCO y calcular $\hat{\varepsilon}_{x_1} = M_2 X_1$

3. Regresionar $\hat{\varepsilon}_y = \hat{\varepsilon}_{x_1}\beta_1 + z$. Evidentemente, $\hat{\beta}_1 = (\hat{\varepsilon}_{x_1}'\hat{\varepsilon}_{x_1})^{-1}\hat{\varepsilon}_{x_1}'\hat{\varepsilon}_y$. Si reemplazamos

$$\hat{\beta}_1 = (X_1'\underbrace{M_2'M_2}_{M_2}X_1)^{-1}X_1'\underbrace{M_2'M_2}_{M_2}y$$

$$\hat{\beta}_1 = (X_1'M_2X_1)^{-1}X_1'M_2y$$

$$\hat{\beta}_1 = (X_1'M_2X_1)^{-1}X_1'M_2(X\beta + \varepsilon)$$

Importancia:

De esta forma, regresionando $\hat{\varepsilon}_{x_1}$ sobre $\hat{\varepsilon}_y$ podemos hallar el estimador $\hat{\beta}_1$, el cual no considera los efectos de las demás variables.

Si queremos hallar $\hat{\beta}_2$; sería la regresión de $\hat{\varepsilon}_{x_2}$ sobre $\hat{\varepsilon}_y$. Con ello, hallamos el efecto de x_2 sobre y eliminando los efectos de x_1. $\hat{\beta}_2$ sería:

$$\hat{\beta}_2 = (x_2' M_1 x_2)^{-1} x_2 M_1 y$$

3. Problema de variables omitidas

a. ¿Qué es lo que puede causar que los estimadores MCO sean sesgados?
   i. Heterocedasticidad
   ii. La omisión de una variable importante
   iii. Un coeficiente de correlación muestral de 0.95 entre dos variables independientes incluidas en el modelo

Solo (ii). La omisión de una variable importante, puede causar sesgo, y esto es cierto solo cuando la variable omitida está correlacionada con las variables explicativas incluidas. Por otro lado, respecto al supuesto de homocedasticidad. MLR.5, este no desempeña ningún rol en demostrar que los estimadores MCO son insesgados. Además, el grado de colinealidad entre las variables explicativas en la muestra, incluso si se refleja en una correlación tan alta como 0.95, no afecta el supuesto de Gauss-Markov. Solo si existe una relación lineal perfecta entre dos o más variables explicativas, se viola MLR.4.

b. Suponga que la productividad promedio de los trabajadores de una empresa manufacturera (*avgprod*) depende de dos factores, el promedio de horas de capacitación (*avgtrain*) y la habilidad promedio del trabajador (*avgabil*):

$$avgprod = \beta_0 + \beta_1 avgtrain + \beta_2 avgabil + \varepsilon$$

Asuma que esta ecuación satisface los supuestos de Gauss-Markov. Si se han otorgado subvenciones a las empresas cuyos trabajadores tienen habilidades inferiores al promedio, de manera que avgtrain y avgabil están correlacionadas de forma negativa, ¿cuál es el sesgo probable en $\tilde{\beta}_1$que se obtiene de la regresión simple entre $avgprod$ sobre $avgtrain$?

Nos podemos guiar de la siguiente tabla:

Resumen de los sesgos de $\tilde{\beta}_1$cuando x_2 es omitida de la ecuación de estimación

	$Corr(x_1, x_2) > 0$	$Corr(x_1, x_2) < 0$
$\beta_2 > 0$	Sesgo positivo	Sesgo negativo
$\beta_2 < 0$	Sesgo negativo	Sesgo positivo

Recordamos que el sesgo $\tilde{\beta}_1$es

Sesgo ($\tilde{\beta}_1$) = E($\tilde{\beta}_1$) $- \beta_1 = \beta_2\delta$

Ejercicio 3.8 (Wooldrige)

Por definición, $\beta_2 > 0$ y por supuesto $Corr(x_1, x_2) < 0$. Por tal motivo, existe un sesgo negativo en $\tilde{\beta}_1$: $E(\tilde{\beta}_1) < \beta_1$. Esto significa en promedio que el estimador de la regresión subestima el efecto del programa en entrenamiento. Incluso es posible que $E(\tilde{\beta}_1)$ $es\ negativo$ aún así el estimador $\beta_1 > 0$

c. La siguiente ecuación describe la media del precio de la vivienda en una comunidad en términos de cantidad de contaminación (nox) y del número promedio de habitaciones en las casas de la comunidad (rooms)

$$log(price) = \beta_0 + \beta_1 log(nox) + \beta_2 rooms + \varepsilon$$

i. ¿Cuáles son los signos probables de β_1 y β_2?

$\beta_1 < 0$ porque se puede esperar que una mayor contaminación reduzca el valor de las viviendas; nótese que β_1 es la elasticidad del precio con respecto a nox. β_2 es probablemente positivo porque las habitaciones miden aproximadamente el tamaño de una casa. (Sin embargo, no nos permite distinguir los hogares donde cada habitación es grande de los hogares donde cada habitación es pequeña).

ii. ¿Por qué podría *log(nox)* y *rooms* estar correlacionad de manera negativa? Si es ese el caso, ¿produce la regresión simple de *log(price)* sobre *log(nox)* un estimador de β_1 con sesgo positivo o negativo?

Asumimos que las habitaciones aumentan con la calidad de la vivienda, luego log(nox) y las habitaciones están correlacionadas negativamente cuando los barrios más pobres tienen más contaminación, algo que suele ser cierto. Podemos usar la tabla de sesgos para determinar la dirección del sesgo. Si $\beta_2 > 0$ y $Corr(x_1, x_2) < 0$, el estimador de regresión simple β_1 % tiene un sesgo a la baja. Pero debido a que $\beta_1 < 0$, esto significa que la regresión simple, en promedio, exagera la importancia de la contaminación. [E(β_1 %) es más negativo que β_1.]

4. Problema de inclusión de variable irrelevante

Supongamos que el modelo verdadero que explica el comportamiento de la variable *y* en función de la variable *x* es

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \varepsilon_i$$

pero, por error, añadimos una variable irrelevante (X_{2i}) al modelo (irrelevante en el sentido que el verdadero coeficiente β_2 de la variable X2 es cero), y estimamos

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$$

Conteste verdadero o falso a las siguientes afirmaciones, justificando detalladamente su respuesta:

i. El R2 del modelo (2) es mayor que el del modelo (1).

(Verdadero) $R^2(2) > R^2(1)$ → **Dado que cuando se incluyen más variables en el modelo, el R^2 se incrementa.**

Recordamos: $R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{Y'AY}$

ii. Las estimaciones de β_0 y de β_1 obtenidas de (2) son insesgadas

(Verdadero) Notas de clase

iii. La inclusión de la variable irrelevante (X2) no afecta a la varianza de $\hat{\beta}_0$ y de $\hat{\beta}_1$.

(Falso)

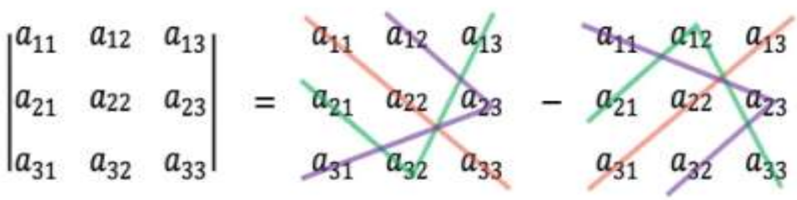
$$Var(\tilde{\beta}) = \sigma^2$$

$$Var(\widehat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

$$Var(\widetilde{\beta}) > Var(\widehat{\beta})$$

Anexo:

REGLA DE SARRUS para hallar determinante de una matriz 3x3



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = + a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$$