Solucionario: Práctica Dirigida 8
Curso: Fundamentos de Econometría
Jefe de práctica: Tania Paredes

1. ECUACIONES SIMULTÁNEAS

1.1. Dado el siguiente modelo keynesiano de una economía cerrada, responda las siguientes preguntas:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \qquad \text{(Producción de equilibrio)}$$

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \varepsilon_t^c \qquad \text{(Consumo)}$$

$$I_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t^i \qquad \text{(Inversión)}$$

a. Defina las variables endógenas y las exógenas del modelo planteado.
b. Expresa matricialmente el sistema de ecuaciones.
c. Encuentre los parámetros reducidos en función de los parámetros estructurales.

Sol

a) a.1) Variables endógenas → Y_t, C_t, I_t
a.2) Variables exógenas → G_t, Y_{t-1}, 1 (constante)

b) Variables endógenas | Variables exógenas

$$\begin{aligned}
Y_t - C_t - I_t &= G_t \\
-\beta_1 Y_t + C_t + 0 &= \beta_0 + \varepsilon_t^c \\
-\alpha_1 Y_t + 0 + I_t &= \alpha_0 + \alpha_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t^i
\end{aligned}$$

Sol

$$\underbrace{[Y_t \quad C_t \quad I_t]}_{Y_t} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 & -\alpha_1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}}_{A} = \underbrace{[1 \quad G_t \quad Y_{t-1}]}_{X_t} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \beta_0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}}_{B} + \underbrace{[0 \quad \varepsilon_t^c \quad \varepsilon_t^i]}_{\varepsilon}$$

$\downarrow$ prod $\quad \downarrow$ C $\quad \downarrow$ I

c) $(Y_t A = \underset{3\times3}{X_t B} + \varepsilon) \rightarrow$ Forma reducida

$\times A^{-1}$

$$\underbrace{Y_t A A^{-1}}_{Y_t} = \underset{3\times3 . 3\times3}{X_t B A^{-1}} + \underset{\times 1}{\varepsilon A^{-1}}$$

$$Y_t = X_t B A^{-1} + \varepsilon A^{-1}$$

$$Y_t = X_t \Pi + \mu \quad ; \left[\Pi = BA^{-1}\right]$$

$$\Pi A = BA^{-1}A$$

$$\boxed{\Pi A = B}$$

Reescribiendo $\Pi A = B$ matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_4 & \pi_5 & \pi_6 \\ \pi_7 & \pi_8 & \pi_9 \end{bmatrix}_{3\times3} \begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 & -\alpha_1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &(1) \quad \pi_1 - \cancel{\pi_2} - \cancel{\pi_3} = 0 \\ &(2) \quad -\beta_1\pi_1 + \cancel{\pi_2} = \beta_0 \\ &(3) \quad -\alpha_1\pi_1 + \cancel{\pi_3} = \alpha_0 \end{aligned}$$

$$\pi_1 (1 - \beta_1 - \alpha_1) = \beta_0 + \alpha_0$$

De (1), (2) y (3) $\boxed{\pi_1 = \dfrac{\beta_0 + \alpha_0}{(1 - \beta_1 - \alpha_1)}}$

De (2) $\rightarrow$ $\pi_2 = \beta_0 + \beta_1 \pi_1$

$$\boxed{\pi_2 = \beta_0 + \beta_1 \left[\frac{\beta_0 + \alpha_0}{1 - \beta_1 - \alpha_1}\right]}$$

De (3) $\rightarrow$ $\pi_3 = \alpha_0 + \alpha_1 \pi_1$

$$\boxed{\pi_3 = \alpha_0 + \alpha_1 \left[\frac{\beta_0 + \alpha_0}{1 - \beta_1 - \alpha_1}\right]}$$

$$\begin{aligned} &(4) \quad \pi_4 - \cancel{\pi_5} - \cancel{\pi_6} = 1 \\ &(5) \quad -\beta_1\pi_4 + \cancel{\pi_5} = 0 \\ &(6) \quad -\alpha_1\pi_4 + \cancel{\pi_6} = 0 \end{aligned}$$

$$\pi_4 (1 - \beta_1 - \alpha_1) = 1$$

De (4), (5) y (6) $\boxed{\pi_4 = \dfrac{1}{(1 - \beta_1 - \alpha_1)}}$

De (5) $\pi_5 = \beta_1 \pi_4$

De (6) $\pi_6 = \alpha_1 \pi_4$

$$\boxed{\pi_5 = \frac{\beta_1}{(1 - \beta_1 - \alpha_1)}} \qquad \boxed{\pi_6 = \frac{\alpha_1}{(1 - \beta_1 - \alpha_1)}}$$

$$\begin{aligned} &(7) \quad \pi_7 - \cancel{\pi_8} - \cancel{\pi_9} = 0 \\ &(8) \quad -\beta_1\pi_7 + \cancel{\pi_8} = 0 \\ &(9) \quad -\alpha_1\pi_7 + \cancel{\pi_9} = \alpha_2 \end{aligned}$$

$$\pi_7 (1 - \beta_1 - \alpha_1) = \alpha_2$$

De (7), (8) y (9) $\boxed{\pi_7 = \frac{\alpha_2}{1-\beta_1-\alpha_1}}$

De (8) $\pi_8 = \beta_1 \pi_7$

$$\boxed{\pi_8 = \frac{\beta_1 \alpha_2}{1-\beta_1-\alpha_1}}$$

De (9) $\pi_9 = \alpha_2 - \alpha_1 \pi_7$

$$\boxed{\pi_9 = \alpha_2 - \alpha_1 \left[\frac{\beta_1}{1-\beta_1-\alpha_1}\right]}$$

1.2. Estudie la identificación de los siguientes modelos de demanda y oferta por medio de la condición de orden y de rango.

a.

$q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + u_{1t}$ (Demanda)

$q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t}$ (Oferta)

b.

$q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 Y_t + u_{1t}$ (Demanda)

$q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + u_{2t}$ (Oferta)

a)

$q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \mu_{1t}$ D

$q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \mu_{2t}$ S

✓ Variables endógenas → q_t, P_t

✓ Variables exógenas → 1

La condición de orden requiere (4) criterios:

G # de v. endógenas del sistema

g_j # v endógenas x ecuación

K = # de variables exógenas del sistema

k_j = # de v. exógena de la ecuación

Exógenas	Endógenas
K-k_j	g_j-1

→ Condición de identificación "=" exógena excluida = endógenas incluidas

Para la ecuación de demanda:

$$\overset{1-1}{0-0} \geq \overset{2-1}{1}$$

ninguna exógena ←

→ 1 endógena incluida

$$0 < 1$$

la ecuación no está identificada

No es posible obtener una solución, a partir de los datos ninguna exógena excluida $\leftarrow 0 - 0 \geq 1$

$0 < 1$

la ecuación no está identificada → ecuación está subidentificada

No es posible obtener una solución, a partir de los datos

Para la ecuación de la oferta:

$\overset{1-1}{0 - 0} \geq 2-1$ → ninguna exógena excluida

$0 \geq 1$ → 1 endógena incluida

→ ecuación está subidentificada

b)

$$q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 Y_t + \mu_{1t} \quad D$$

$$q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + \mu_{2t} \quad S$$

V. endógenas: q_t, P_t

V. exógenas: D: Y_t, 1; S: P_{t-1}, 1 } 3 exógenas

$\boxed{\text{Condición de orden}}$ → Suficiente para $k_j = 2$

✓ Para la demanda

$K-k_j \quad g_j-1$

→ $3-2 \geq 2-1$

1 exógena excluida ← $1 \geq 1$ → Ecuación identificada

→ 1 endógena incluida

✓ Para la oferta

$K-k_j \quad g_j-1$

→ $3-2 \geq 2-1$

1 exógena excluid ← $1 \geq 1$ → Ecuación identificada

→ 1 endógena incluida

$\boxed{\text{Por rango}}$ → rango de matriz y relación con matriz inversa

→ condición de orden y rango para $g > 2$

$$\begin{bmatrix} q_t & P_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Y_t & P_{t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} & u_{2t} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y_t \Gamma = x_t B + U}$$

→ Formamos

$$\left[\begin{array}{c} \Gamma \\ \hline B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \\ \hline \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{array}\right]$$

✓ Para la demanda

$$\left[\begin{array}{c} \Gamma \\ \hline B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{-\alpha_1} & \cancel{-\beta_1} \\ \hline \cancel{\alpha_0} & \cancel{\beta_0} \\ \cancel{\alpha_2} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \beta_2 \end{array}\right]$$

Paso 1 → Tachamos columna de interes → Demanda

Paso 2 → Tachamos toda la fila cuando en la columna de demanda haya valores diferente a cero.

→ Matriz → $A_D = [\beta_2]_{1\times 1}$

$\text{Rango}[A_D] = 1$ → se cumple que el rango es igual a $g-1$

✓ Para la oferta

$$\begin{bmatrix} r \\ \hline B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{\alpha_1} & \cancel{\beta_1} \\ \hline \cancel{\alpha_0} & \cancel{\beta_0} \\ \boxed{\alpha_2} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{\beta_2} \end{bmatrix}$$

Paso 1 → Tachamos columna de interes → Oferta

Paso 2 → Tachamos toda la fila cuando en la columna de demanda haya valores diferente a cero.

→ Matriz → $A_D = [\alpha_2]_{1\times 1}$

$\text{Rango}[A_D] = 1$ → se cumple que el rango es igual a $g-1$