Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«01.03.02 Прикладная математика и информатика»
Специальность «Системное программирование»

Лабораторная работа №2
**тема "Решение задач транспортного типа"**
дисциплина "Методы оптимизации"

Выполнили студенты гр. 5030102/00201 Гвоздев С.Ю.,
Золин И.М.
Хламкин Е.М.

Преподаватель: Родионова Е.А.

Санкт-Петербург

**2023**

# Содержание

# 1 Постановка задачи

Решить задачу транспортного типа. Дано: n пунктов хранения, в которых сосредоточен однотипный груз; m пунктов назначения, в которые необходимо груз доставить.
Также известны:

- $a_i$ - количество груза в i-ом пункте хранения
- $b_j$ - количество груза, в котором нуждается j-й пункт назначения
- $c_{ij}$ - стоимость перевозки единицы груза из i-ого в j-ый пункт
- $x_{ij}$ - план перевозок
- $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ - ограничение на поставщиков
- $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ - ограничения на потребителей
- $x_{ij} \geq 0$

Необходимо составить план перевозок (определить $x_{ij}$) так, чтобы минимизировать суммарную стоимость перевозок, то есть $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to min$, где $x_{ij}$ - количество груза, перевезенного из i-ого в j-ый пункт.

Условие транспортной задачи удобно задать в виде таблицы:

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 14 | 7 | 4 | 8 | 3 | 23 |
| $a_2$ | 9 | 2 | 2 | 12 | 10 | 25 |
| $a_3$ | 17 | 7 | 9 | 11 | 10 | 5 |
| $a_4$ | 13 | 7 | 12 | 14 | 5 | 8 |
| | 20 | 10 | 12 | 7 | 12 | |

Необходимо:

1. Решить транспортную задачу методом потенциалов с выбором начального приближения методом северо-западного угла.
2. Решить эту же задачу симплекс методом и сравнить результаты.
3. Решить эту же задачу методом перебора крайних точек.
4. Автоматизировать привидение исходной задачи к закрытому виду.
5. Описать алгоритм построения цикла пересчета.

# 2 Исследование применимости метода

## 2.1 Применимость метода потенциалов

Для того чтобы транспортная задача была поставлена корректно, необходимо выполнение следующих условий:

- $x_{ij} \geq 0$, где $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$
- $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{j=1}^{m} b_j$

Для того чтобы применять заданные методы к решению транспортной задачи, она должна быть приведена к закрытому виду: $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Проверим эти условия:

1. $x_{ij} \geq 0$, где $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$, задается в коде программы при определении данных переменных
2. $\sum_{i=1}^{n} a_i = 23 + 25 + 5 + 8 = 61$ и $\sum_{j=1}^{m} b_i = 20 + 10 + 12 + 7 + 12 = 61$. Следовательно, задача задана в закрытом виде

Таким образом, заданные методы применимы к данной задаче.

### 2.2 Применимость для метода перебора крайних точек и симплекс метода

Для того чтобы применить данный метод к задаче, заданной в табличном виде, нужно преобразовать условие к СЛАУ и привести задачу к каноничному виду.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 23 \\ x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 25 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 5 \\ x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} = 8 \\ x_1 + x_6 + x_{11} + x_{16} = 20 \\ x_2 + x_7 + x_{12} + x_{17} = 10 \\ x_3 + x_8 + x_{13} + x_{18} = 12 \\ x_4 + x_9 + x_{14} + x_{19} = 7 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,n}, n = 20 \end{cases} \quad (1)$$

Функция цели примет вид $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to min$, где $c_i$ - соответсвующие коэффициенты транспортной таблицы.

## 3 Описание решения транспортной задачи

### 3.1 Приведение задачи к закрытому виду

Для того, чтобы приступить к решению транспортной задачи, необходимо в первую очередь привести ее к закрытому виду

**Input**: транспортная задача открытого вида
**Output**: транспортная задача закрытого вида
**Алгоритм**

1. Вычислить общий объем товара поставщиков и товара потребителей
2. Добавить столбец или строку с нулевой стоимостью перевозки:

- Если превышают запасы, то добавить фиктивного потребителя (нулевой столбец). Количество товара, необходимое для доставки фиктивному потребителю - модуль разности объемов поставщиков и объемов потребителей
- Если превышают потребности, то добавить фиктивного поставщика (нулевую строку). Количество товара, которое необходимо отправить от фиктивного поставщика - модуль разности объемов поставщиков и объемов потребителей

## 3.2 Нахождение первого базисного решения методом северо-западного угла

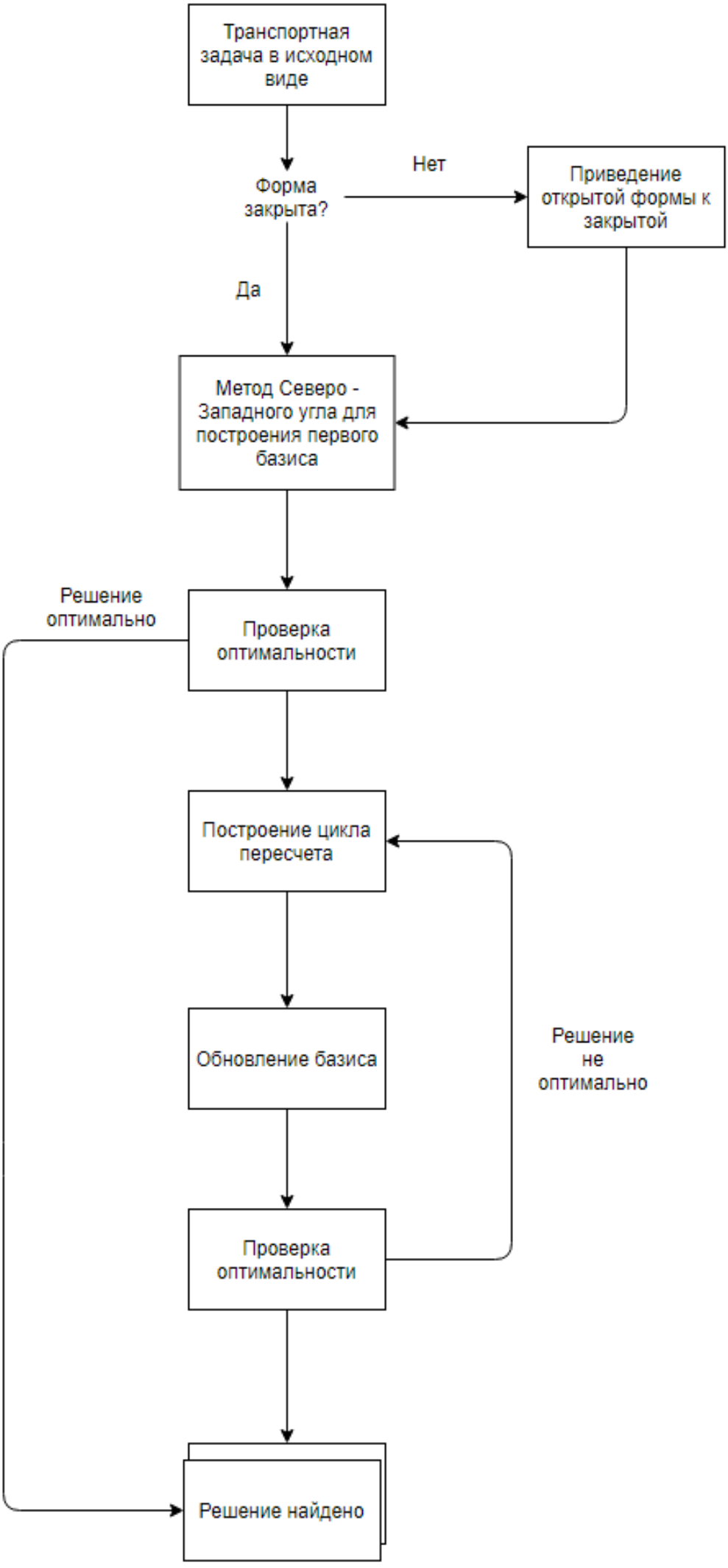
**Input**: массивы $a_i, b_j$ - запасов и потребностей грузов соотвественно, $i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$
**Output**: $x_{ij}$ - начальный план перевозок (не является оптимальным, т.к. не учитывается матрица стоимости перевозки $c_{ij}$)
**Алгоритм**:

1. Двигаемся по таблице $n * m$ - размера с верхнего левого угла, заполняя ее ячейки значениями соответсвующих объемов перевозок, в северо-западном направлении
2. Находим максимально возможный объем груза для соответсвующей ячейки $(i, j)$ посредством подсчета $\min\{a_i, b_j\}$ и заполняем этим значением данную ячейку
3. Вычитаем найденный объем груза из значений соответсвующих полей запаса и потребности
4. Если $a_i \neq 0$, то двигаемся вправо по матрице. Если $b_j \neq 0$, то двигаемся вниз по матрице. Иначе двигаемся по диагонали, добавляя 0 в угловую клетку

## 3.3 Метод потенциалов

### 3.3.1 Блок-схема

На блок схеме изобразим основные модули программы, реализующей метод потенциалов. Далее, в отдельных разделах, раскроем их смысл


Транспортная задача в исходном виде
Форма закрыта?
Нет
Приведение открытой формы к закрытой
Да
Метод Северо - Западного угла для построения первого базиса
Решение оптимально
Проверка оптимальности
Построение цикла пересчета
Обновление базиса
Решение не оптимально
Проверка оптимальности
Решение найдено

#### 3.3.2 Алгоритм проверки решения на оптимальность

Алгоритм состоит из следующих этапов:

1. Нахождение значений потенциалов. Сначала находится первая непустая ячейка таблицы базисных переменных. Значению потенциала $u$ присваивается 0, значению соответствующего потенциала $v$ - значение ячейки весовой матрицы. Далее алгоритм принципиально повторяет алгоритм поиска цикла пересчета. (см. далее) Точно так же создаются две функции. Одна - бежит по строкам, другая - по столбцам. В каждой ячейке происходит проверка: если соответствующая базисная ячейка не пуста и какой-то и потенциалов еще не заполнен, то происходит его заполнение и последующий запуск процедуры, изменяющей направление прохода ($line- > column$ or $column- > line$). Аналогично алгоритму поиска цикла пересчета, этот этап отрабатывает за $O((m+n)^2)$
2. Пересчет разности потенциалов для всех небазисных элементов.
3. Проверка разностей потенциалов. Если оказывается, что она больше веса, в соответсвующей клетке матрицы, то план признаётся не оптимальным. Выполняется переход к построению цикла пересчёта.

#### 3.3.3 Алгоритм поиска цикла пересчета

После того, как проверка на оптимальность дала отрицательный результат, необходимо найти переменную, которая будет выведена из базиса (переменная, вводимая в базис определяется во время проверки на оптимальность). Для этого построим цикл пересчета по следующим правилам:

1. Циклом является последовательность ячеек таблицы (переменных), при которой любые две соседние ячейки стоят либо в одной строке, либо в одном столбце
2. Первая ячейка совпадает с последней в данной последовательности
3. Первая ячейка берется как вводимая пеерменная
4. Поворот цикл может совершать только в базисных переменных
5. Небазисные переменные (кроме первого элемента последовательности) за ненадобностью в цикл не включаются

Для нахождения такого цикла будем применять следующий незамысловатый алгоритм, основанный на рекурсионных вызовах:

1. Создаем пустой массив $LoopArray$, который на выходе будет представлять из себя искомый цикл
2. Добавляем первым элементом в $LoopArray$ вводимую переменную
3. Запускаем процедуру $FindNewTurnInColumn$, которая принимает на вход объект транспортной задачи и номер колонки. Возвращает истинностное значение: $True$, если цикл нашелся, иначе - $False$. Сейчас номер колонки - это колонка, в которй стоит вводимая переменная. Данная процедура ищет в данной колонке базисные переменные. Пробегая по элементам колонки, мы проверяем следующие условия:

(a) Если переменная нашлась, и ее еще нет в массиве, то добавляем ее в $LoopArray$ и запускаем процедуру $FindNewTurnInLine$ (принцип ее работы повторяет принцип работы $FindNewTurnInColumn$), передавая ей на вход номер строки последнего элемента в $LoopArray$. Если $FindNewTurnInLine$ вернула $True$, то решение найдено - вернуть $True$ (это не тавтология!).

(b) Если же при проходе по колонке мы встретили самый первый элемент нашего массива $LoopArray$, то возвращаем $True$

(c) Если оказалось, что после первых двух проверок решение все еще не нашлось, мы переходим к рассмотрению следующего элемента колонки

(d) Если же все элементы колонки уже просмотрены, то из $LoopArray$ удаляется последний элемент и возвращается $False$

4. Если $FindNewTurnInColumn$ вернула $Flase$, то запускаем $FindNewTurnInLine$

Несколько слов о скорости работы вышеуказанного алгоритма:

1. В худшем случае в цикле будет содержаться $m + n$ элементов (базисные + вводимая)
2. На каждом элементе цикла (при поиске следующего элемента цикла) алгоритм рассматривает не более чем $m + n$ ячеек.
3. Получается, что в самом худшем случае поиск цикла пересчета займет $(m + n)^2$ шагов. В общем-то, есть оснавания полагать, что это хорошмй результат.

#### 3.3.4 Алгоритм обновления базиса

Для кождого элемента в найденном цикле пересчета проделываем следующую процедуру:

1. Если элемент стоит на нечетной позиции в цикле пересчета (1, 3...) запоминаем его как "отрицательного"
2. Если элемент стоит на четной позиции в цикле пересчета (2, 4...) запоминаем его как "положительного"

Среди всех 'положительных' элементов выбираем тот, который имеет наименьшее значение базисной переменной: $\theta = min$ ("положительные переменные цикла")

Для кождого элемента в найденном цикле пересчета проделываем следующую процедуру:

1. Если элемент 'отрицательный', то вычинаем из него $\theta$
2. Если элемент 'положительный', то прибавляем к нему $\theta$

## 4 Практическое решение поставленной задачи

На следующих двух страницах соотвественно:

### 4.1 Метод потенциалов для поставленной задачи

### 4.2 Симплекс- Метод для поставленной задачи

До проверки на закрытость:
Объем груза, хранящийся у поставщиков:
[23. 25.  5.  8.]
Объем груза, который необходимо доставить каждому из производителей:
[20. 10. 12.  7. 12.]
Весовая матрица:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 14.0 | 7.0 | 4.0 | 8.0 | 3.0 |
| 9.0 | 2.0 | 2.0 | 12.0 | 10.0 |
| 17.0 | 7.0 | 9.0 | 11.0 | 10.0 |
| 13.0 | 7.0 | 12.0 | 14.0 | 5.0 |

После проверки на закрытость:
Объем груза, хранящийся у поставщиков:
[23. 25.  5.  8.]
Объем груза, который необходимо доставить каждому из производителей:
[20. 10. 12.  7. 12.]
Весовая матрица:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 14.0 | 7.0 | 4.0 | 8.0 | 3.0 |
| 9.0 | 2.0 | 2.0 | 12.0 | 10.0 |
| 17.0 | 7.0 | 9.0 | 11.0 | 10.0 |
| 13.0 | 7.0 | 12.0 | 14.0 | 5.0 |

Это не оптимальный план
Текущие затраты: 502.0
Матрица базисных элементов:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20.0 | 3.0 | None | None | None |
| None | 7.0 | 12.0 | 6.0 | None |
| None | None | None | 1.0 | 4.0 |
| None | None | None | None | 8.0 |

Пересчет цикла:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20.0 | 3.0 | * | * | NEW |
| None | 7.0 | * | 6.0 | * |
| None | None | None | 1.0 | 4.0 |
| None | None | None | None | 8.0 |

Это не оптимальный план
Текущие затраты: 463.0
Матрица базисных элементов:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20.0 | None | None | None | 3.0 |
| None | 10.0 | 12.0 | 3.0 | None |
| None | None | None | 4.0 | 1.0 |
| None | None | None | None | 8.0 |

Пересчет цикла:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20.0 | * | * | * | 3.0 |
| NEW | * | * | 3.0 | * |
| None | None | None | 4.0 | 1.0 |
| None | None | None | None | 8.0 |

Это не оптимальный план
Текущие затраты: 450.0
Матрица базисных элементов:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 19.0 | None | None | None | 4.0 |
| 1.0 | 10.0 | 12.0 | 2.0 | None |
| None | None | None | 5.0 | None |
| None | None | None | None | 8.0 |

Пересчет цикла:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 19.0 | * | * | NEW | 4.0 |
| 1.0 | * | * | 2.0 | None |
| None | None | None | 5.0 | None |
| None | None | None | None | 8.0 |

Это не оптимальный план
Текущие затраты: 432.0
Матрица базисных элементов:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17.0 | None | None | 2.0 | 4.0 |
| 3.0 | 10.0 | 12.0 | None | None |
| None | None | None | 5.0 | None |
| None | None | None | None | 8.0 |

Пересчет цикла:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17.0 | * | NEW | 2.0 | 4.0 |
| 3.0 | * | 12.0 | None | None |
| None | None | None | 5.0 | None |
| None | None | None | None | 8.0 |

Это не оптимальный план
Текущие затраты: 396.0
Матрица базисных элементов:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5.0 | None | 12.0 | 2.0 | 4.0 |
| 15.0 | 10.0 | None | None | None |
| None | None | None | 5.0 | None |
| None | None | None | None | 8.0 |

Пересчет цикла:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5.0 | * | * | 2.0 | 4.0 |
| 15.0 | 10.0 | None | * | None |
| None | NEW | * | 5.0 | None |
| None | None | None | None | 8.0 |

Опорный план найден
Текущие затраты: 381.0
Итоговая матрица базисных элементов:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| None | None | 12.0 | 7.0 | 4.0 |
| 20.0 | 5.0 | None | None | None |
| None | 5.0 | None | 0.0 | None |
| None | None | None | None | 8.0 |

Матрица ограничений преообазована в связи с выделением первого базисного решения

---ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДА. ПРОВЕРКА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ---

---СИМПЛЕКС - МЕТОД---

Матрица ограничений:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | = | 1.0 |
| 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | -1.0 | -1.0 | -1.0 | 0.0 | -1.0 | -1.0 | -1.0 | -1.0 | = | 7.0 |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | = | 5.0 |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | = | 8.0 |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | -0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | -0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | -0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | = | 12.0 |
| 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | = | 10.0 |
| 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | = | 12.0 |
| -1.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | = | 6.0 |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | = | 0.0 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9.0 | 0.0 | 6.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -9.0 | 0.0 | 0.0 | 3.0 | 0.0 | -12.0 | -1.0 | -9.0 | -5.0 | 0.0 | -8.0 | 6.0 | -2.0 | -6.0 | -> | 462.0 |

Базисные индексы:

[3, 5, 10, 15, 4, 1, 7, 8, 6]

Матрица ограничений:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | 1.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | = | 6.0 |
| 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | -1.0 | -1.0 | -1.0 | = | 12.0 |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | = | 5.0 |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | = | 8.0 |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | = | 12.0 |
| 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | -1.0 | -1.0 | -1.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | = | 5.0 |
| 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | = | 12.0 |
| -1.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | -1.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | = | 1.0 |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | = | 0.0 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9.0 | 0.0 | 6.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -9.0 | 0.0 | 0.0 | 3.0 | 12.0 | 0.0 | 11.0 | 3.0 | 7.0 | 0.0 | -8.0 | 6.0 | -2.0 | -6.0 | -> | 402.0 |

Базисные индексы:

[3, 5, 11, 15, 4, 1, 7, 8, 6]

Матрица ограничений:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | = | 7.0 |
| 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | -1.0 | -1.0 | -1.0 | = | 12.0 |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | = | 5.0 |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | = | 8.0 |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | = | 12.0 |
| 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | -1.0 | = | 4.0 |
| 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | = | 12.0 |
| -1.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | -1.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | = | 1.0 |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | = | 0.0 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.0 | 0.0 | -3.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 9.0 | 12.0 | 3.0 | 0.0 | 2.0 | 3.0 | 7.0 | 0.0 | 1.0 | 6.0 | 7.0 | 3.0 | -> | 393.0 |

Базисные индексы:

[3, 5, 11, 15, 4, 1, 7, 6, 6]

Матрица ограничений:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | = | 7.0 |
| 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | -1.0 | -1.0 | -1.0 | = | 12.0 |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | = | 5.0 |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | = | 8.0 |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | = | 12.0 |
| 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | -1.0 | = | 4.0 |
| -1.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | = | 8.0 |
| 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | -1.0 | -1.0 | -1.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | = | 5.0 |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | = | 0.0 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3.0 | 3.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 6.0 | 9.0 | 3.0 | 0.0 | 2.0 | 0.0 | 4.0 | 0.0 | 1.0 | 6.0 | 4.0 | 0.0 | -> | 381.0 |

Базисные индексы:

[3, 5, 11, 15, 4, 2, 7, 6, 6]

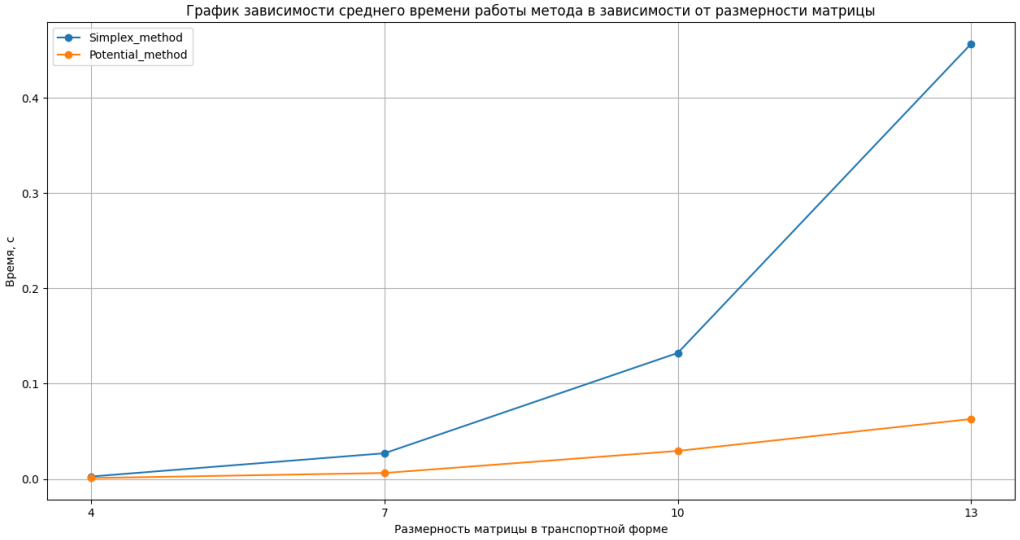
### 4.3 Решение поставленной задачи методом перебора крайних точек

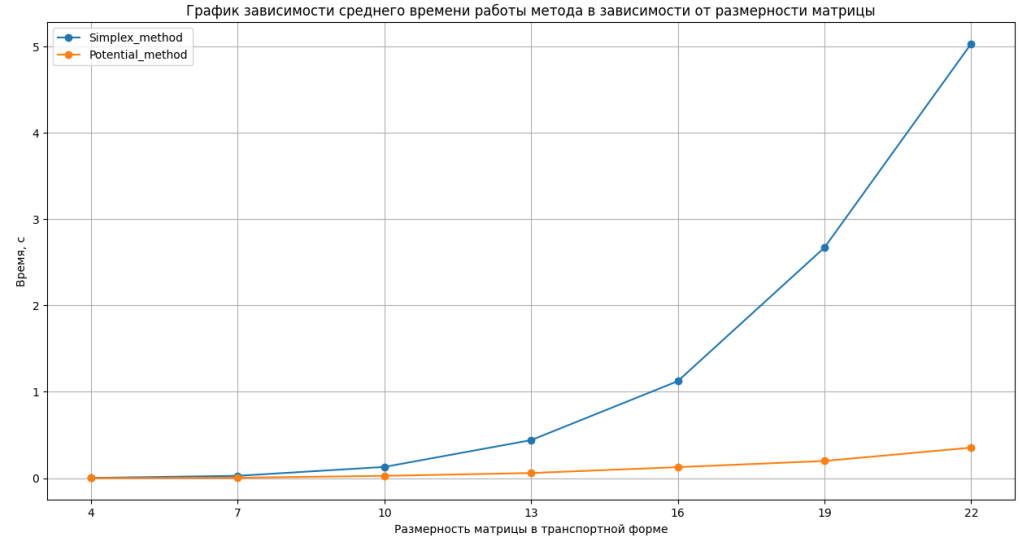
Метод крайних точек дает тот же верных результат, что и оба вышеупомянутых метода: 381.

## 5 Обоснование достоверности полученного решения

### 5.1 Сравнительный анализ

Графики зависимости времени работы методов от размерности матрицы.




Для начала заметим: коль скоро транспортная задача имеет размеры $m * n$, соответствующая задача линейного программирования в канонической форме имеет размеры $(m + n) * (m * n)$. А это весьма внушительные размеры даже для небольших $m$ и $n$.

Данные два графика изображают собой зависимости времени работы Метода Потенциалов и Симплекс - Метода для разных размерностей матриц - для небольших, и для тех, что побольше. Метод потенциалов решает поставленную задачу существенно

быстрее. Действительно, хоть в худшем случае оба метода и работают за $C_{n*m}^{n+m+1}$ шагов (см. оценки далее), и хоть время, необходимое на каждую из итераций одинаково оценивается в $O((n)^2)$, $n$ для Симплекс - Метода и для Метода Потенциалов различны. На каждой итерации Метода Потенциалов мы пересчитываем матрицу $m * n$, на каждой итерации Симплекс - Метода мы пересчитываем матрицу $(m + n) * (m * n)$. Ровно этим и обусловлено такое поведение графиков.

### 5.2 Теоретическая оценка алгоритмов

Рассмотрим временные затраты метода потенциалов на каждом из этапов:

1. Проверка оптимальности.
   (a) Нахождение значений потенциалов. (вычислили выше - $O((m + n)^2)$)
   (b) Пересчет разности потенциалов: проход почти по всей матрице: $O((m + n)^2)$
2. Поиск цикла пересчета (вычислили выше - $O((m + n)^2)$)
3. Обновление базиса: к каждой базисной переменной прибавляем или вычитаем одно число. $O(m + n)$

Итого: временные затраты на одну итерацию: $O((m + n)^2)$

Всего же возможных итераций не более чем $C_{n*m}^{n+m+1}$ (число возможных базисов). Конечно, в худшем случае при оценке скорости сходимости придется ориентироваться именно на значение $C_{n*m}^{n+m+1}$. Однако практически число итераций подчиняется чему-то вроде линейного закона (это нестрогое утверждение). И в этом случае уже можно ориентироваться на $O((m + n)^2)$

# 6 Дополнительные исследования. Пример приведения задачи в открытой форме к задаче в закрытой форме

```
До проверки на закрытость:
Объем груза, хранящийся у поставщиков:
[23. 25.  5. 15.]
Объем груза, который необходимо доставить каждому из производителей:
[20. 10. 12.  7. 12.]
Весовая матрица:
+------+-----+------+------+------+
| 14.0 | 7.0 | 4.0  | 8.0  | 3.0  |
| 9.0  | 2.0 | 2.0  | 12.0 | 10.0 |
| 17.0 | 7.0 | 9.0  | 11.0 | 10.0 |
| 13.0 | 7.0 | 12.0 | 14.0 | 5.0  |
+------+-----+------+------+------+

После проверки на закрытость:
Объем груза, хранящийся у поставщиков:
[23. 25.  5. 15.]
Объем груза, который необходимо доставить каждому из производителей:
[20. 10. 12.  7. 12.  7.]
Весовая матрица:
+------+-----+------+------+------+-----+
| 14.0 | 7.0 | 4.0  | 8.0  | 3.0  | 0.0 |
| 9.0  | 2.0 | 2.0  | 12.0 | 10.0 | 0.0 |
| 17.0 | 7.0 | 9.0  | 11.0 | 10.0 | 0.0 |
| 13.0 | 7.0 | 12.0 | 14.0 | 5.0  | 0.0 |
+------+-----+------+------+------+-----+
```

# 7 Выводы

В работе были проведены исследования по сравнению трёх методов нахождения оптимального плана задачи транспортного типа. (Метод потенциалов, Симплекс-метод, метод перебора крайних точек). Последний показал себя не с лучшей стороны, вынудив авторов ждать решения поставленной задачи три часа (167960 вариантов решения, для каждого решается СЛАУ = грусть). Первые же два заставляют проявлять к себе интерес. Графическая картина результатов работы методов внушает доверие, и предпочтение (не без удовольствия) приходится отдавать методу Потенциалов. Однако заметим вкратце, что транспортная задача - лишь частный случай задачи линейного программирования. Так что, в плане универсальности Симплекс - Метод смело может дать фору методу Потенциалов.

Итог: для задач транспортного типа использовать метод Потенциалов. Симплекс - Метод в обычой интерпретации использовать не рекомендуется

# 8 Приложения

Реализация программы находится в репозиьтории GitHub по ссылке:
https://github.com/IMZolin/transport-task

# 9 Библиографический список


1. Кормен, Томас Х., Лейзерсон, Чарльз И., Ривест, Рональд Л., Штайн, Клиффорд. "Алгоритмы. Построение и анализ, 2-е издание"Издательский дом “Вильямс”, 2011. – 892–918 с.

   URL: https://vk.com/doc191450968_561608466?hash=HUwStWS0yzrW9SaXn8POZtaz3gTyMTmdl=U9ivclLJBeeYQbs3MMhGtwYZ7Mx4nGJelTv0Hv56E4z / [Электронный ресурс]. Режим доступа: (Дата обращения: 04.03.2023)

2. Родионова Е.А., Петухов Л.В., Серёгин Г.А. "Методы оптимизации. Задачи выпуклого программирования"Издательство Политехнического университета, Санкт-Петербург, 2014

   URL: https://elib.spbstu.ru/dl/2/i17-98.pdf/info / [Электронный ресурс]. Режим доступа: (Дата обращения: 10.03.2023)

3. Моисеев Н.Н. "Методы оптимизации"

   URL: https://avidreaders.ru/book/metody-optimizacii-1.html/ [Электронный ресурс]. Режим доступа: (Дата обращения: 07.03.2023)