Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Дисциплина «Вычислительная математика»

Отчёт

Лабораторная работа №3

Вариант 9

Выполнил:

Прокофьев Арсений Александрович

P3213

Преподаватель:

Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург, 2024 г.

Цель работы

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Исходные данные:

1. Пользователь выбирает функцию, интеграл которой требуется вычислить (3-5 функций), из тех, которые предлагает программа.
2. Пределы интегрирования задаются пользователем.
3. Точность вычисления задается пользователем.
4. Начальное значение числа разбиения интервала интегрирования: n=4.
5. Ввод исходных данных осуществляется с клавиатуры.

Программная реализация задачи:

1. Реализовать в программе методы по выбору пользователя:
    a. Метод прямоугольников (3 модификации: левые, правые, средние)
    b. Метод трапеций
    c. Метод Симпсона
2. Методы должны быть оформлены в виде отдельной(ого) функции/класса.
3. Вычисление значений функции оформить в виде отдельной(ого) функции/класса.
4. Для оценки погрешности и завершения вычислительного процесса использовать правило Рунге.
5. Предусмотреть вывод результатов: значение интеграла, число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой точности.

Вычислительная реализация задачи:

1. Вычислить интеграл, приведенный в таблице 1, точно.
2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при $n = 6$.
3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n = 10$.
4. Сравнить результаты с точным значением интеграла.
5. Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода.

6. В отчете отразить последовательные вычисления.

Рабочие формулы методов:

Формула Симпсона

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3}\left[\left(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + y_n\right)\right]$$

Формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

Формула средних прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2})$$

Формула правых треугольников:

$$I_{\text{прав}} = h \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Формула левых треугольников:

$$I_{\text{лев}} = h \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}$$

Вычисление заданного интеграла:

Интеграл: $\int_1^2 (2x^3 - 3x^2 + 5x - 9)dx$

Метод Симпсона: n = 10

$$h = \frac{a-b}{n} = \frac{2-1}{10} = 0.1$$

i	x(i)	y(i)
0	1	-5
1	1.1	-4.468
2	1.2	-3.864
3	1.3	-3.176
4	1.4	-2.392
5	1.5	-1.5
6	1.6	-0.488
7	1.7	0.656
8	1.8	1.944
9	1.9	3.388
10	2	5

$$\int_1^2 (2x^3 - 3x^2 + 5x - 9)dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})]$$

$$= \frac{0.1}{3}[-5 + 5 + 4(-4.468 + \cdots + 3.388) + 2(-3.864 + \cdots + 1.944)] = -1$$

Четвертая производная: $f''''(x) = 0$

$$|R| \leq \max_{x\in[a,b]} |f''''(x)| * \frac{(b-a)^5}{180n^4} = 0 * \frac{(2-1)^5}{180 * 10^4} = 0$$

Ответ: $I = -1 \pm 0$

Метод трапеций: n = 10

$$h = \frac{a-b}{n} = \frac{2-1}{10} = 0.1$$

i	x(i)	y(i)
0	1	-5
1	1.1	-4.468
2	1.2	-3.864
3	1.3	-3.176
4	1.4	-2.392
5	1.5	-1.5
6	1.6	-0.488
7	1.7	0.656
8	1.8	1.944
9	1.9	3.388
10	2	5

$$\int_1^2 (2x^3 - 3x^2 + 5x - 9)dx \approx h * \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = 0.1 * \left(\frac{-5+5}{2} + (-4.468 + \cdots + 3.388)\right)$$

$$= 0.1 * (-9.9) = -0.99$$

Вторая производная $f''(x) = 12x - 6$

$$f''(a) = 6$$

$$f''(b) = 18$$

$$|R| \le \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| * \frac{(b-a)^3}{12n^2} = 18 * \frac{(2-1)^3}{12 * 10^2} = 0.015$$

Ответ: $I = -0.99 \pm 0.015$

Метод средних прямоугольников n = 10:

$$h = \frac{a-b}{n} = \frac{2-1}{10} = 0.1$$

i	x(i)	y(i)	X(i-1/2)	F(x(i-1/2))
0	1	-5		
1	1.1	-4.468	1.05	-4.742
2	1.2	-3.864	1.15	-4.176
3	1.3	-3.176	1.25	-3.531
4	1.4	-2.392	1.35	-2.797
5	1.5	-1.5	1.45	-1.96
6	1.6	-0.488	1.55	-1.01
7	1.7	0.656	1.65	0.067
8	1.8	1.944	1.75	1.281
9	1.9	3.388	1.85	2.646
10	2	5	1.95	4.172

$$\int_1^2 (2x^3 - 3x^2 + 5x - 9)dx \approx h * \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}})\right) = 0.1 * (-4.742 + \cdots + 4.172) = 0.1 * -10.05 = $$
$$= -1.005$$

$$|R| \le \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| * \frac{(b-a)^3}{24n^2} = 18 * \frac{(2-1)^3}{24 * 10^2} = 0.0075$$

Ответ: $I = -1.005 \pm 0.0075$

Программная реализация задачи:

https://github.com/MakeCheerfulInstall/Computational-Math-2024/tree/main/P3213/Prokofiev_367502/lab3

Вывод:

Написав реализации всех трех методов решения интегралов, можно сделать вывод, что самым точным и быстрым является метод Симпсона.