Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования Национальный
исследовательский университет ИТМО

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа №3
Вычислительная математика

Вариант: №1

Группа	P3208
Студент	Абдуллин И.Э.
Преподаватель	Машина Е.А.

Цель работы:

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Вычислительная реализация задачи:

Исходный интеграл:

$$\int_0^2 (-x^3 - x^2 - 2x + 1)dx$$

1. Точное решение интеграла

$$\int_0^2 (-x^3 - x^2 - 2x + 1)dx = -\int x^3 dx - \int x^2 dx - 2\int x dx + \int 1 dx =$$

$$= (-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 + x)\Big|_0^2 = -\frac{26}{3}$$

2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса ($n = 8$):

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_n^i(x), \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b L_n^i(x)dx$$

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} \approx \int_a^b \boldsymbol{L_n(x)dx} = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{f(x_i)c_n^i}$$

$$\int_0^2 (-x^3 - x^2 - 2x + 1)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,c_n^i = \frac{4}{14175}h(989(f(x_1) + f(x_9)) +$$

$$+ 5888(f(x_2) + f(x_8)) - 928(f(x_3) + f(x_7)) + 10496(f(x_4) + f(x_6)) -$$

$$- 4540f(x_5)) \simeq -8.66915, \quad h = \frac{x_9 - x_1}{8}$$

$$R \simeq 0.0025 = 0.029\,\%$$

3. ***Вычислить интеграл по формуле Средних прямоугольников*** $(n = 10)$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h_i f(x_{i-1/2})$$
$$x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, i = 1, 2, \dots n$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$x_{i-1/2}$	-	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
$y_{i-1/2}$	-	0.789	0.283	-0.375	-1.233	-2.339	-3.741	-5.487	-7.625	-10.203	-13.269

$$\sum_{i=1}^{n} h_i y_{i-1/2} = -8.64$$

$$R = 0.027 = 0.3125\,\%$$

4. ***Вычислить интеграл по формуле Трапеций*** $(n = 10)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \cdot \left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
y_i	1	0.552	-0.024	-0.776	-1.752	-3	-4.568	-6.504	-8.856	-11.672	-15

$$\int_0^2 (-x^3 - x^2 - 2x + 1)dx = 0.1(0 - 15 + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i) = -8.82$$

$$R = 0.15 = 1.7\,\%$$

5. *Вычислить интеграл по формуле Симпсона:* $(n = 10)$:

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3}\left[(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + y_n)\right]$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
y_i	1	0.552	-0.024	-0.776	-1.752	-3	-4.568	-6.504	-8.856	-11.672	-15

$$\int_0^2 (-x^3 - x^2 - 2x + 1)dx = -8.667$$

$$R = 0.0003 = 0.00347\ \%$$

Программная реализация задачи:

1. Метод прямоугольников:

```
private BigDecimal applyAlgorithmLeft(Integral integral) {
 BigDecimal x = integral.getLeft(), h = getH(integral), sum = BigDecimal.ZERO;

 for (int i = 0; i <= integral.getN(); i++) {
   sum = sum.add(integral.getFunction().apply(x));
   x = x.add(h);
 }

 return sum.multiply(h);
}


private BigDecimal applyAlgorithmMiddle(Integral integral) {
 BigDecimal startX = integral.getLeft(),
     nextX,
     middle,
     h = getH(integral),
     sum = BigDecimal.ZERO;

 for (int i = 0; i < integral.getN(); i++) {
   nextX = startX.add(h);
   middle = startX.add(nextX).divide(BigDecimal.valueOf(2), 20, RoundingMode.HALF_UP);
   sum = sum.add(integral.getFunction().apply(middle));
   startX = nextX;
 }

 return sum.multiply(h);
}


private BigDecimal applyAlgorithmRight(Integral integral) {
 BigDecimal x = integral.getLeft(), h = getH(integral), sum = BigDecimal.ZERO;
 x = x.add(h);

 for (int i = 1; i <= integral.getN(); i++) {
   sum = sum.add(integral.getFunction().apply(x));
   x = x.add(h);
 }

 return sum.multiply(h);
}
```

2. Метод трапеций:

```
private BigDecimal applyAlgorithm(Integral integral) {
 BigDecimal x = integral.getLeft(), h = getH(integral), sum = BigDecimal.ZERO;
 var f = integral.getFunction();
 x = x.add(h);
 for (int i = 0; i < integral.getN() - 1; i++) {
   sum = sum.add(f.apply(x));
   x = x.add(h);
 }

 return h.divide(BigDecimal.valueOf(2), 20, RoundingMode.HALF_UP)
     .multiply(
         f.apply(integral.getLeft())
             .add(f.apply(integral.getRight()))
             .add(BigDecimal.valueOf(2).multiply(sum)));
}
```

3. Метод Симпсона:

```
private BigDecimal applyAlgorithm(Integral integral) {
 BigDecimal x = integral.getLeft(), h = getH(integral);

 List<BigDecimal> values = new ArrayList<>();
 var f = integral.getFunction();
 x = x.add(h);

 for (int i = 1; i < integral.getN(); i++) {
   values.add(f.apply(x));
   x = x.add(h);
 }

 BigDecimal odd = BigDecimal.ZERO;
 for (int i = 1; i < values.size(); i += 2) {
   odd = odd.add(values.get(i));
 }

 BigDecimal even = BigDecimal.ZERO;
 for (int i = 0; i < values.size(); i += 2) {
   even = even.add(values.get(i));
 }

 return h.divide(BigDecimal.valueOf(3), 20, RoundingMode.HALF_UP)
     .multiply(
         integral
             .getLeft()
             .add(integral.getRight())
             .add(BigDecimal.valueOf(4).multiply(even))
             .add(BigDecimal.valueOf(2).multiply(odd)));
}
```

Выводы:

Я научился находить приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами с помощью собственных вычислений и с помощью программы.