Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №3

по «Вычислительной математике»

Вариант 4

Выполнил:

Студент группы P3208

Дашкевич Егор Вячеславович

Преподаватели:

Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург

2024

Оглавление

Элементы оглавления не найдены.

Цель работы

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Текст задания

<u>Обязательное задание (до 80 баллов)</u>

Исходные данные:

1. Пользователь выбирает функцию, интеграл которой требуется вычислить (3-5 функций), из тех, которые предлагает программа.

2. Пределы интегрирования задаются пользователем.

3. Точность вычисления задается пользователем.

4. Начальное значение числа разбиения интервала интегрирования: n=4.

5. Ввод исходных данных осуществляется с клавиатуры.

Программная реализация задачи:

1. Реализовать в программе методы по выбору пользователя:
   a. Метод прямоугольников (3 модификации: левые, правые, средние)
   b. Метод трапеций
   c. Метод Симпсона

2. Методы должны быть оформлены в виде отдельной(ого) функции/класса.

3. Вычисление значений функции оформить в виде отдельной(ого) функции/класса.

4. Для оценки погрешности и завершения вычислительного процесса использовать правило Рунге.

5. Предусмотреть вывод результатов: значение интеграла, число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой точности.

Вычислительная реализация задачи:

1. Вычислить интеграл, приведенный в таблице 1, точно.

2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при n = 6.

3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n = 10$.

4. Сравнить результаты с точным значением интеграла.

5. Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода.

6. В отчете отразить последовательные вычисления.

Необязательное задание (до 20 баллов)

1. Установить сходимость рассматриваемых несобственных интегралов 2 рода (2-3 функции). Если интеграл - расходящийся, выводить сообщение: «Интеграл не существует».
2. Если интеграл сходящийся, реализовать в программе вычисление несобственных интегралов 2 рода (заданными численными методами).
3. Рассмотреть случаи, когда подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв:
   a. в точке a,
   b. в точке b,
   c. на отрезке интегрирования

Вычислительная часть

Вычисляемый интеграл:

4	$\int_{-3}^{-1}(-2x^3-4x^2+8x-4)dx$

Точное значение:

$$\int_{-3}^{-1}(-2x^3-4x^2+8x-4)dx = -2\int_{-3}^{-1}x^3dx - 4\int_{-3}^{-1}x^2dx + 8\int_{-3}^{-1}xdx - 4\int_{-3}^{-1}1dx$$

$$= -2\left(\frac{x^4}{4}\Big|_{-3}^{-1}\right) - 4\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{-1}\right) + 8\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^{-1}\right) - 4\left(x\Big|_{-3}^{-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{81}{2} + \frac{4}{3} - 36 + 4 - 36 + 4 - 12 = -\frac{104}{3} = 34,(6) \approx 34,667$$

Формула Ньютона-Кортеса, n=6:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-3	-8/3	-7/3	-2	-5/3	-4/3	-1

Формула Ньютона-Котеса порядка n:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)c_n^i$$

$$\int_{-3}^{-1} (-2x^3 - 4x^2 + 8x - 4)dx$$

$$= c_6^0 f(x_0) + \ c_6^1 f(x_1) + \ c_6^2 f(x_2) + c_6^3 f(x_3) + c_6^4 f(x_4) + c_6^5 f(x_5) + c_6^6 f(x_6) =$$

$$= -2\left(\frac{41}{840} * (-10) \ + \frac{216}{840} * (-15,852) + \frac{27}{840} * (-19,037) + \frac{272}{840} * (-20) + \frac{27}{840}(-19,185) + \frac{216}{840}(-17,037) + \frac{41}{840} * (-14)\right) \approx 34,667$$

N=10:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
-3	-2,8	-2,6	-2,4	-2,2	-2	-1,8	-1,6	-1,4	-1,2	-1

Метод прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2})$$

$$\int_{-3}^{-1} (-2x^3 - 4x^2 + 8x - 4)dx = \sum_{i=0}^{9} 0,2f\left(\frac{(x_{i+1} + x_i)}{2}\right)$$

$$= 0,2(f(-2,9) + f(-2,7) + \cdots + \ f(-1,3) + f(-1,1))$$

$$= 0,2(-12,062 - 15,394 - 17,75 - 19,226 - 19,918 - 19,922 - 19,334 - 18,25 - 16,766 - 14,978) = 34,72$$

Метод трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\cdot\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

$$\int_{-3}^{-1}(-2x^3 - 4x^2 + 8x - 4)dx = \frac{0,2}{2}\left(f(x_0) + f(x_{10}) + 2\sum_{i=1}^{9} f(x_i)\right)$$
$$= 0,1(f(-3) + f(-1) + 2(f(-2,8) + f(-2,6) + \cdots + f(-1,2)))$$
$$= 0,1(-10 - 14 - 2(13,856 - 16,688 - 18,592 - 19,664 - 20$$
$$- 19,696 - 18,848 - 17,552 - 15,904)) = 34,556$$

Метод Симпсона:

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3}\,[(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + y_n)]$$

$$\int_{-3}^{-1}(-2x^3 - 4x^2 + 8x - 4)dx$$
$$= \frac{0,2}{3}\Big[\big(f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9))$$
$$+ 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)) + f(x_{10})\big)\Big]$$
$$= \frac{0,2}{3}[(-10 + 4(-13,856 - 18,592 - 20 - 18,848 - 15,904)$$
$$+ 2(-16,688 - 19,664 - 19,696 - 17,552) - 14)\,] \approx 34,667$$

Погрешности и сравнение результатов:

- **Ньютона-Кортеса:** $R = \left|I_{\text{точн}} - I_{\text{расч}}\right| = 34{,}667 - 34{,}667 = 0$ – **погрешность минимальна**
- **Средних прямоугольников:** $R = \left|I_{\text{точн}} - I_{\text{расч}}\right| = |34{,}667 - 34{,}72| = 0{,}053$
- **Трапеций:** $R = \left|I_{\text{точн}} - I_{\text{расч}}\right| = |34{,}667 - 34{,}556| = 0{,}111$
- **Симпсона:** $R = \left|I_{\text{точн}} - I_{\text{расч}}\right| = 34{,}667 - 34{,}667 = 0$ – **погрешность минимальна**

Листинг программы:

Метод прямоугольников:

```
2 usages
def get_res(n: int, f, a, b, mode):
    h = abs(a - b) / n
    points = []
    i = b
    while i < a:
        j = i
        i += h
        if i > a:
            i = a
        points.append(modes[mode](j, i))
    return abs(sum([h * f(x) for x in points]))
```

Метод Трапеций:

```
def get_res(n, f, a, b):
    h = abs(a - b) / n
    points = []
    i = b
    while i < a:
        points.append(i)
        i += h
        if i > a:
            i = a
    points.append(i)
    return abs(h/2 * (f(points[0]) + f(points[-1]) + 2*sum(f(points[x]) for x in range(1, len(points) - 1))))
```

Метод Симпсона:

```
def get_res(n, f, a, b):
    h = abs(a - b) / n
    points = []
    i = b
    while i < a:
        points.append(i)
        i += h
        if i > a:
            i = a
    points.append(i)
    return abs(h / 3 * (f(points[0]) + f(points[-1]) +
                        4 * sum([f(points[x]) for x in range(1, len(points) - 1, 2)]) +
                        2 * sum([f(points[x]) for x in range(2, len(points) - 2, 2)])))
```

Вывод программы:

```
Select function:
1. -2x^3 -4x^2 + 8x - 4
2. -x^3 - x^2 + x + 3
3. x^2
Function: 1
Select solve method:
1. Left rectangles
2. Middle rectangles
3. Right rectangles
4. Trapezoids
5. Simpson
Function: 5
Enter desired precision: 0,001
Please enter range in format: from to
-3 -1
Calculated integral value: 34.666666666666664
Total number of parts to achieve precision: 8

Process finished with exit code 0
```

Вывод

В ходе выполнения работы изучил численные методы вычисления определенных интегралов и разобрал их реализацию на ЭВМ.