Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Дисциплина «Вычислительная математика»

Отчёт

Лабораторная работа №3

Вариант 8

Выполнил:

Попов Дмитрий Юрьевич

P3213

Преподаватель:

Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург, 2024 г

.

Цель работы

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Вычислительная реализация

$$\int_2^3 (3x^3 - 2x^2 - 7x - 8)dx$$

$$\int_2^3 (3x^3 - 2x^2 - 7x - 8)\,dx = \frac{127}{12} \approx 10.583$$

Поиск методом Ньютона-Котеса

n	Коэффициенты Котеса c_n^i			
1	$c_1^0 = c_1^1 = \frac{b-a}{2}$			
2	$c_2^0 = c_2^2 = \frac{b-a}{6}$,	$c_2^1 = \frac{4(b-a)}{6}$		
3	$c_3^0 = c_3^3 = \frac{b-a}{8}$,	$c_3^1 = c_3^2 = \frac{3(b-a)}{8}$		
4	$c_4^0 = c_4^4 = \frac{7(b-a)}{90}$,	$c_4^1 = c_4^3 = \frac{16(b-a)}{45}$,	$c_4^2 = \frac{2(b-a)}{15}$	
5	$c_5^0 = c_5^5 = \frac{19(b-a)}{288}$,	$c_5^1 = c_5^4 = \frac{25(b-a)}{96}$,	$c_5^2 = c_5^3 = \frac{25(b-a)}{144}$	
6	$c_6^0 = c_6^6 = \frac{41(b-a)}{840}$,	$c_6^1 = c_6^5 = \frac{9(b-a)}{35}$,	$c_6^2 = c_6^4 = \frac{9(b-a)}{280}$,	$c_6^3 = \frac{34(b-a)}{105}$

N = 6 => h = 1/6

f(2) * c06+f(13/6) * c16+f(14/6) * c26+f(15/6) * c36+ f(16/6) * c46+ f(17/6) * c56+f(3) * c66 = 10.583333333333314

Относительная погрешность: 0.005%

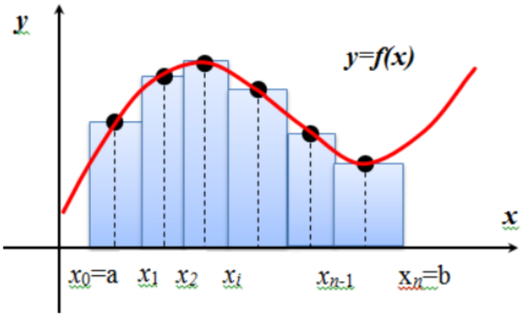
Поиск методом средних прямоугольников

Метод прямоугольников. Метод средних

Для аналитически заданных функций более точным является использование значений в средних точках элементарных отрезков (полуцелых узлах):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n h_i f(x_{i-1/2})$$

$$x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, i = 1, 2, \dots n$$



При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^n f(x_{i-1/2})$$

N = 10
h = 0.1

x	y	Integral
2	-6	-0.49096250000000136
2.1	-3.737	-0.2479874999999993
2.2	-1.1359999999999921	0.029687500000000026
2.3	1.8209999999999944	0.34386249999999907
2.4	5.151999999999994	0.6963375000000016
2.5	8.875	1.0889125000000013
2.6	13.008	1.5233875000000032
2.7	17.569000000000006	2.0015625000000017
2.8	22.575999999999983	2.5252374999999994
2.9	28.046999999999983	3.096212500000004

Ответ: 10.566250

Относительная погрешность: 0.998%

Поиск методом трапеции

Метод трапеций

Подынтегральную функцию на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ заменяют интерполяционным многочленом первой степени:

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x + b$$

Используют линейную интерполяцию, т.е. график функции $y = f(x)$ представляется в виде ломаной, соединяющий точки (x_i, y_i) . Площадь всей фигуры (криволинейной трапеции):

$$S_{\text{общ}} = S_1 + S_2 + \dots + S_n = \frac{y_0 + y_1}{2} h_1 + \frac{y_1 + y_2}{2} h_2 + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h_n$$

$$y_0 = f(a), \qquad y_n = f(b), \qquad y_i = f(x_i), \qquad h_i = x_i - x_{i-1}$$

Складывая все эти равенства, получаем формулу трапеций для численного интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} h_i (y_{i-1} + y_i)$$

Ответ: 10.617500

Относительная погрешность: 1.003%

Поиск методом Симпсона

Формула Симпсона

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3} [(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n)]$$

Ответ: 10.583333

Относительная погрешность: 0.00001%

Код программы

https://github.com/llunistsil/Computational-Math-2024/tree/main/P3213/Popov_368679/lab-3

Вывод

В ходе данной лабораторной работы были изучены несколько методов для численного интегрирования. Все методы просты в программной реализации и быстро вычисляют интегралы с хорошей точностью.