Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №2

по «Вычислительной математике»

Вариант 3

Выполнил:

Студент группы P3208

Дашкевич Егор Вячеславович

Преподаватели:

Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург

2024

Оглавление

Цель работы

Изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов.

Текст задания

1 часть. Решение нелинейного уравнения

Задание:

1. Отделить корни заданного нелинейного уравнения графически

2. Определить интервалы изоляции корней.

3. Уточнить корни нелинейного уравнения с точностью $\varepsilon=10^{-2}$.

4. Используемые методы для уточнения каждого из 3-х корней многочлена представлены в таблице 7.

5. Вычисления оформить в виде таблиц, в зависимости от заданного метода. Для всех значений в таблице удержать 3 знака после запятой.

2 часть. Решение системы нелинейных уравнений

Задание:

1. Отделить корни заданной системы нелинейных уравнений графически

2. Используя указанный метод, решить систему нелинейных уравнений с точностью до 0,01.

3. Для метода простой итерации проверить условие сходимости метода.

4. Подробные вычисления привести в отчете.

2 Программная реализация задачи:

Для нелинейных уравнений:

1. Все численные методы должны быть реализованы в виде отдельных подпрограмм/методов/классов.

2. Пользователь выбирает уравнение, корень/корни которого требуется вычислить (3-5 функций, в том числе и трансцендентные), из тех, которые предлагает программа.

3. Предусмотреть ввод исходных данных (границы интервала/начальное приближение к корню и погрешность вычисления) из файла или с клавиатуры по выбору конечного пользователя.

4. Выполнить верификацию исходных данных. Необходимо анализировать наличие корня на введенном интервале. Если на интервале несколько корней или они отсутствуют – выдавать соответствующее сообщение. Программа должна реагировать на некорректные введенные данные.

5. Для методов, требующих начальное приближение к корню (методы Ньютона, секущих, хорд с фиксированным концом, простой итерации), выбор начального приближения x_0 (a или b) вычислять в программе.

6. Для метода простой итерации проверять достаточное условие сходимости метода на введенном интервале.

7. Предусмотреть вывод результатов (найденный корень уравнения, значение функции в корне, число итераций) в файл или на экран по выбору конечного пользователя.

8. Организовать вывод графика функции, график должен полностью отображать весь исследуемый интервал (с запасом). Пользователь должен видеть интервалы изоляции корней.

Для систем нелинейных уравнений:

1. Пользователь выбирает предлагаемые программой системы двух нелинейных уравнений (2-3 системы).

2. Организовать вывод графика функций.

3. Начальные приближения ввести с клавиатуры.

4. Для метода простой итерации проверить достаточное условие сходимости.

5. Организовать вывод вектора неизвестных: $x1$, $x2$.

6. Организовать вывод количества итераций, за которое было найдено решение.

7. Организовать вывод вектора погрешностей: $|x_i^k - x_i^{(k-1)}|$

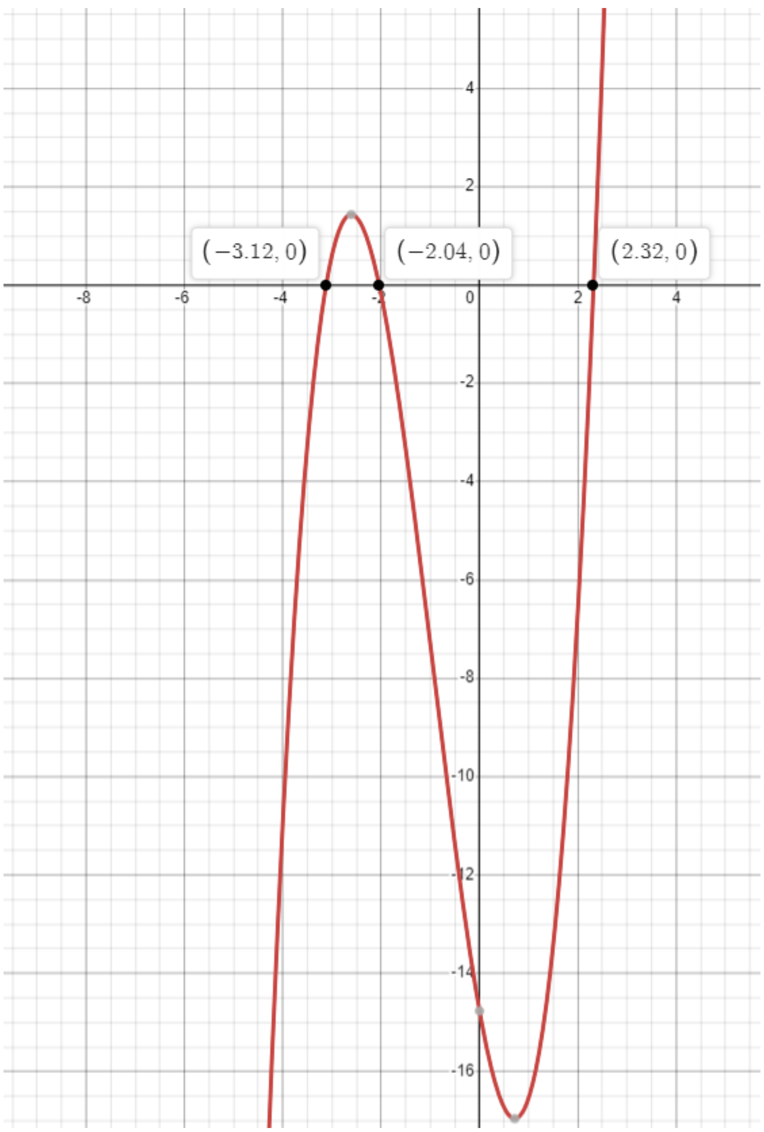
8. Проверить правильность решения системы нелинейных уравнений.

Вычислительная часть

Нелинейное уравнение

Формула: $x^3 + 2{,}84x^2 - 5{,}606x - 14{,}766$

Графическое решение:



Аналитическое решение:

Корень	Крайний левый	Средний	Крайний правый
Метод	Метод простой итерации	Метод Ньютона	Метод половинного деления
Интервал изоляции	[-3,7; -2,7]	[-2,5; -1,5]	[2; 3]

Поиск первого корня:

Рабочая формула метода: $x_{i+1} = \varphi(x_i)$

$$\varphi(x) = x + \lambda f(x),\ \varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x)$$

$$f(x) = x^3 + 2{,}84x^2 - 5{,}606x - 14{,}766$$

$$f'(x) = 3x^2 + 5{,}68x - 5{,}606$$

$$\varphi(x) = x + \lambda(x^3 + 2{,}84x^2 - 5{,}606x - 14{,}766)$$

$$f'(-3{,}7) = \ 14{,}448 \quad f'(-2{,}7) = 0{,}928 \quad \lambda = -\frac{1}{14{,}448} \approx -0{,}069$$

Проверяем условие сходимости:

$$\varphi'(-3{,}7) = 0.003 \ll 1 \ \ \varphi'(-2{,}7) = 0{,}936 < 1$$

Условие сходимости выполняется!

Шаг	x_k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$\lvert x_k - x_{k+1}\rvert$
1	-3.7	-3.3	-1.276	0,4
2	-3.3	-3.212	-0.597	0,088
3	-3.212	-3.17	-0.316	0,042
4	-3.17	-3.149	-0.174	0,021

5	-3.149	-3.137	-0,102	0,012
6	-3.137	-3.13	-0.598	0,007

Уточненное значение x_1 = -3.13

Поиск второго корня:

Рабочая формула метода:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

$$f(x) = x^3 + 2{,}84x^2 - 5{,}606x - 14{,}766$$

$$f'(x) = 3x^2 + 5{,}68x - 5{,}606$$

Шаг	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_k - x_{k+1}\rvert$
1	-2.5	1.374	-1.056	-1.199	1.301
2	-1.199	-5.685	-8.104	-1.901	0.702
3	-1.901	-0.716	-5.562	-2.03	0.129
4	-2.03	-0.048	-4.774	-2.04	0.01

Уточненное значение x_2= -2.04

Поиск третьего корня:

Рабочая формула метода: $x_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$

Шаг	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	|a - b|
1	2	3	2.5	-6.618	20.976	4.594	1

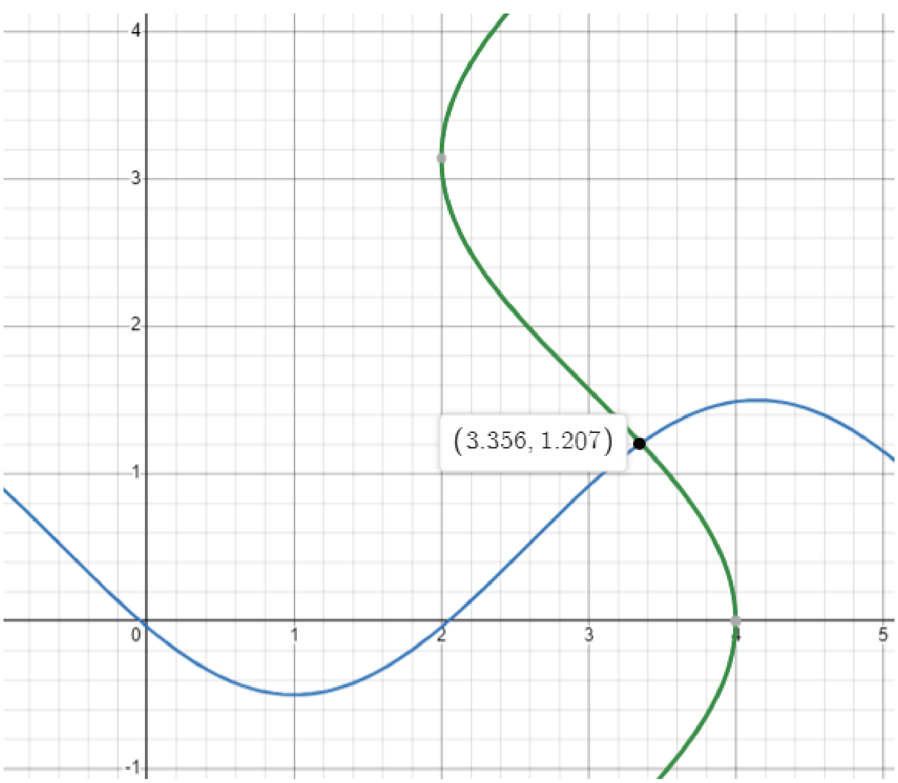
2	2	2.5	2.25	-6.618	4.594	-1.611	0.5
3	2.25	2.5	2.375	-1.611	4.594	1.335	0.25
4	2.25	2.375	2.313	-1.611	1.336	-0.164	0.125
5	2.313	2.375	2.344	-0.164	1.336	0.576	0.062
6	2.313	2.344	2.329	-0.164	0.576	0.216	0.031
7	2.313	2.329	2.321	-0.164	0.216	0.025	0.016
8	2.313	2.321	2.317	-0.164	0.025	-0.07	0.008

Уточненный корень $x_3 = 2.317$

Система нелинейных уравнений

3	$\begin{cases} cos(x-1)+y=0{,}5 \\ x-cosy=3 \end{cases}$	Метод простой итерации

Графическое решение:



Вычислительное решение:

Последующие приближения находятся по формулам:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} y = 0{,}5 - \cos(x-1) \\ x = 3 + \cos y \end{cases}$$

Интервал изоляции: $x \in [3; 4] \quad y \in [0{,}5; 1{,}5]$

Условие сходимости:

$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \sin(x-1) \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = -\sin y$

$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| < 1 \qquad \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| < 1$

Начальное приближение: $x_0 = 3 \; y_0 = 0{,}5$

Вычисление:

- ***1 Шаг:***
  $y_1 = 0.5 - \cos(x_0 - 1) = 0.5 - \cos(3-1) = 0{,}916$
  $x_1 = 3 + \cos y_0 = 3 + \cos 0{,}5 = 3{,}878$
  $|x_1 - x_0| = 0{,}122$
  $|y_1 - y_0| = 0{,}416$
- ***2 Шаг:***
  $y_2 = 0.5 - \cos(x_1 - 1) = 1{,}465$
  $x_2 = 3 + \cos y_1 = 3.609$
  $|x_2 - x_1| = 0.269$
  $|y_2 - y_1| = 0.549$
- ***3 Шаг:***
  $y_3 = 0.5 - \cos(x_2 - 1) = 1.361$
  $x_3 = 3 + \cos y_2 = 3{,}106$
  $|x_3 - x_2| = 0.503$
  $|y_3 - y_2| = 0.104$

- ***4 Шаг:***
  $y_4 = 0.5 - \cos(x_3 - 1) = 1.01$
  $x_4 = 3 + \cos y_3 = 3.208$
  $|x_4 - x_3| = 0{,}102$
  $|y_4 - y_3| = 0{,}351$
- ***5 Шаг:***
  $y_5 = 0.5 - \cos(x_4 - 1) = 1.095$
  $x_5 = 3 + \cos y_4 = 3.532$
  $|x_5 - x_4| = 0{,}324$
  $|y_5 - y_4| = 0{,}085$
- ***6 Шаг:***
  $y_6 = 0.5 - \cos(x_5 - 1) = 1.32$
  $x_6 = 3 + \cos y_5 = 3.458$
  $|x_6 - x_5| = 0{,}074$
  $|y_6 - y_5| = 0{,}225$
- ***7 Шаг:***
  $y_7 = 0.5 - \cos(x_6 - 1) = 1.275$
  $x_7 = 3 + \cos y_6 = 3.248$
  $|x_7 - x_6| = 0{,}21$
  $|y_7 - y_6| = 0{,}045$
- ***8 Шаг:***
  $y_8 = 0.5 - \cos(x_7 - 1) = 1.127$
  $x_8 = 3 + \cos y_7 = 3.292$
  $|x_8 - x_7| = 0{,}044$
  $|y_8 - y_7| = 0{,}148$
- ***9 Шаг:***
  $y_9 = 0.5 - \cos(x_8 - 1) = 1.16$
  $x_9 = 3 + \cos y_8 = 3.429$
  $|x_9 - x_8| = 0{,}137$
  $|y_9 - y_8| = 0{,}033$
- ***10 Шаг:***
  $y_{10} = 0.5 - \cos(x_9 - 1) = 1.257$
  $x_{10} = 3 + \cos y_9 = 3.399$
  $|x_{10} - x_9| = 0{,}03$
  $|y_{10} - y_9| = 0{,}097$

- ***11 Шаг:***
  $y_{11} = 0.5 - \cos(x_{10} - 1) = 1.237$
  $x_{11} = 3 + \cos y_{10} = 3.309$
  $|x_{11} - x_{10}| = 0{,}09$
  $|y_{11} - y_{10}| = 0{,}02$
- ***12 Шаг:***
  $y_{12} = 0.5 - \cos(x_{11} - 1) = 1.173$
  $x_{12} = 3 + \cos y_{11} = 3.328$
  $|x_{12} - x_{11}| = 0{,}019$
  $|y_{12} - y_{11}| = 0{,}064$
- ***13 Шаг:***
  $y_{13} = 0.5 - \cos(x_{12} - 1) = 1.187$
  $x_{13} = 3 + \cos y_{12} = 3.387$
  $|x_{13} - x_{12}| = 0{,}059$
  $|y_{13} - y_{12}| = 0{,}014$
- ***14 Шаг:***
  $y_{14} = 0.5 - \cos(x_{13} - 1) = 1.229$
  $x_{14} = 3 + \cos y_{13} = 3.374$
  $|x_{14} - x_{13}| = 0{,}013$
  $|y_{14} - y_{13}| = 0{,}042$
- ***15 Шаг:***
  $y_{15} = 0.5 - \cos(x_{14} - 1) = 1.22$
  $x_{15} = 3 + \cos y_{14} = 3.335$
  $|x_{15} - x_{14}| = 0{,}039$
  $|y_{15} - y_{14}| = 0{,}009$
- ***16 Шаг:***
  $y_{16} = 0.5 - \cos(x_{15} - 1) = 1.192$
  $x_{16} = 3 + \cos y_{15} = 3.344$
  $|x_{16} - x_{15}| = 0{,}009$
  $|y_{16} - y_{15}| = 0{,}028$
- ***17 Шаг:***
  $y_{17} = 0.5 - \cos(x_{16} - 1) = 1.198$
  $x_{17} = 3 + \cos y_{16} = 3.37$
  $|x_{17} - x_{16}| = 0{,}026$
  $|y_{17} - y_{16}| = 0{,}006$

- ***18 Шаг:***
  $y_{18} = 0.5 - \cos(x_{17} - 1) = 1.193$
  $x_{18} = 3 + \cos y_{17} = 3.364$
  $|x_{18} - x_{17}| = 0{,}027$
  $|y_{18} - y_{17}| = 0{,}005$
- ***19 Шаг:***
  $y_{19} = 0.5 - \cos(x_{18} - 1) = 1.213$
  $x_{19} = 3 + \cos y_{18} = 3.369$
  $|x_{19} - x_{18}| = 0{,}005$
  $|y_{19} - y_{18}| = 0{,}02$
- ***20 Шаг:***
  $y_{20} = 0.5 - \cos(x_{19} - 1) = 1.216$
  $x_{20} = 3 + \cos y_{19} = 3.35$
  $|x_{20} - x_{19}| = 0{,}019$
  $|y_{20} - y_{19}| = 0{,}003$
- ***21 Шаг:***
  $y_{21} = 0.5 - \cos(x_{20} - 1) = 1.203$
  $x_{21} = 3 + \cos y_{20} = 3.347$
  $|x_{21} - x_{20}| = 0{,}003$
  $|y_{21} - y_{20}| = 0{,}013$
- ***22 Шаг:***
  $y_{22} = 0.5 - \cos(x_{21} - 1) = 1.201$
  $x_{22} = 3 + \cos y_{21} = 3.36$
  $|x_{22} - x_{21}| = 0{,}013$
  $|y_{22} - y_{21}| = 0{,}002$
- ***23 Шаг:***
  $y_{23} = 0.5 - \cos(x_{22} - 1) = 1.21$
  $x_{23} = 3 + \cos y_{22} = 3.361$
  $|x_{23} - x_{22}| = 0{,}001$
  $|y_{23} - y_{22}| = 0{,}009$

$max|x_i - x_{i-1}| = 0{,}009 < 0{,}01 =>$ расчет завершён

Приближенный корень: $x = 3{,}361; y = 1{,}21$

Программная часть

Листинг программы:

Метод простых итераций:

```
def get_lambda(f, a, b, accuracy):
    x = a
    x_max = x
    l = 0
    sign = 1
    while (x <= b):
        if l < abs(f(x)):
            l = max(l, abs(f(x)))
            sign = abs(f(x)) / f(x)
            x_max = x
        x += accuracy
    return -1 / l * sign, x_max
```

```
def solve(f, deriv, a, b, accuracy):
    x = a
    iter = 1
    lambd, x0 = get_lambda(deriv, a, b, accuracy)
    q = abs(1 + lambd * deriv(x0))
    if q > 1:
        print('Достаточное условие сходимости не выполняется!')
    elif q > 0.5:
        accuracy = (1 - q) / q * accuracy

    print_table_header(["#", "x_i", "x_{i+1}", "f(x_i)", "delta_x"])
    while abs(f(x)) > accuracy and iter < 10000:
        if (q >= 1 and iter > 3):
            break
        prev_x = x
        x = x + f(x) * lambd
        print_table_row([iter, x, prev_x, f(x), abs(x - prev_x)])
        iter += 1
    return x
```

Метод половинного деления:

```
def solve(f, a, b, accuracy):
    iter = 0
    x = 0.0
    print_table_header(["#", "a", "b", "x_i", "f(a)", "f(b)", "f(x_i)", "|a-b|"])
    while abs(a-b) > accuracy:
        iter += 1
        x = mid(a, b)
        if f(a)*f(x) > 0: a = x
        else: b = x
        print_table_row([iter, a, b, x, f(a), f(b), f(x), abs(a-b)])
    x = mid(a, b)
    return x
```

Метод секущих:

```
def get_x(f, ff, start, end):
    if f(start) * ff(start) > 0:
        return [start, start + 0.1]
    elif f(end) * ff(end) > 0:
        return [end, end - 0.1]
    else:
        return [start, start + 0.1]

1 usage
def solve(f, ff, start, end, accuracy):
    iter = 0
    print(get_x(f, ff, start, end))
    x, prev_x = get_x(f, ff, start, end)

    def find_x():
        return x - (x - prev_x) / (f(x) - f(prev_x)) * f(x)

    print_table_header(["#", "x_{i-1}", "x_i", "x_{i+1}", "f(x_i+1)", "delta_x"])
    while abs(x - prev_x) > accuracy and abs(f(x)) >= accuracy:
        iter += 1
        _out = [iter, prev_x, x]
        x = find_x()
        prev_x = _out[-1]
        print_table_row(_out + [x, f(x), abs(x - prev_x)])

    return x
```

Метод Ньютона для систем:

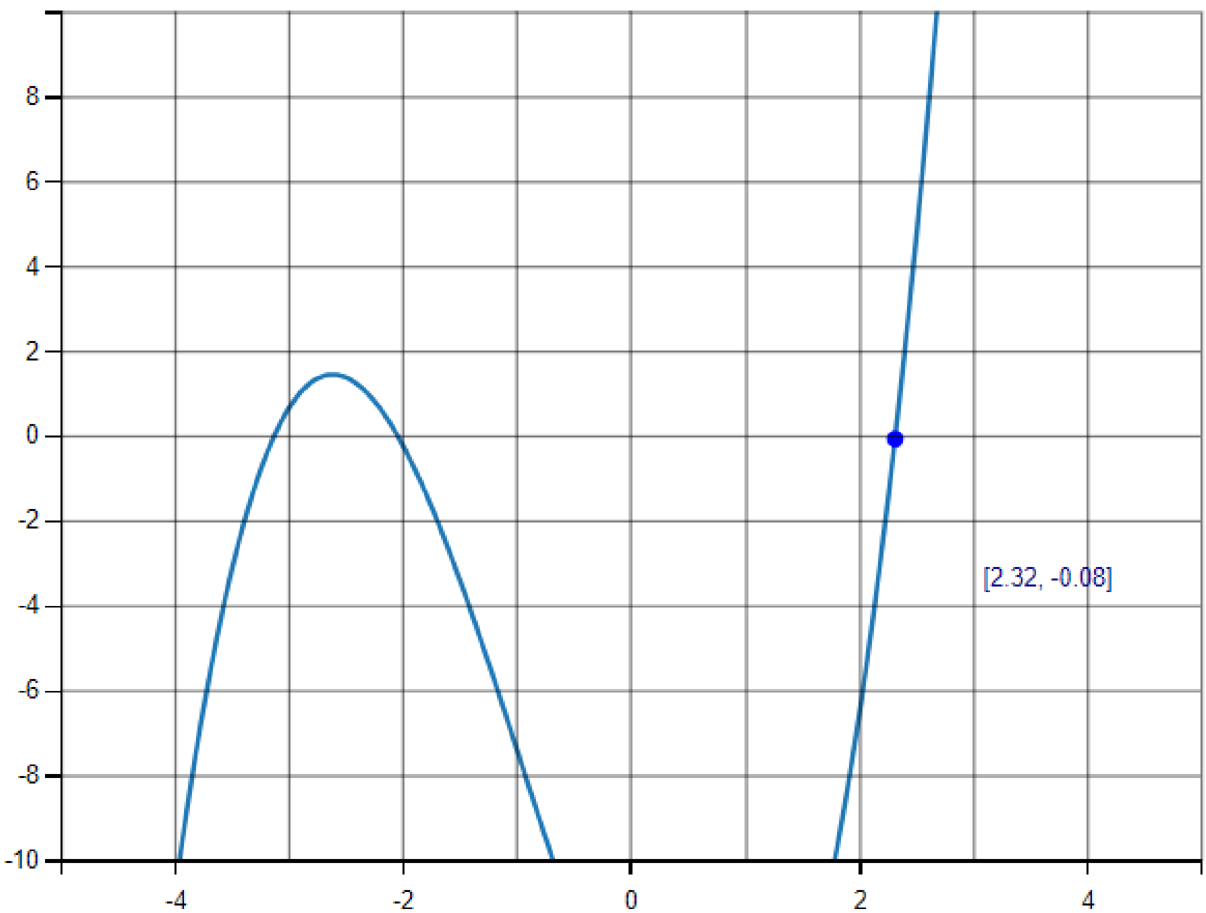
```
def solve(sys, x, y, eps):
    max_iters = 13
    iter = 1
    jac = calc_jacobian(sys, x, y)
    x_iter = x - calc_delta_x(sys, x, y) / jac
    y_iter = y - calc_delta_y(sys, x, y) / jac
    print_table_header(["#", "x", "y", "x_dif", "y_dif"])
    dif_x = abs(x_iter - x)
    dif_y = abs(y_iter - y)
    print_table_row([iter, x_iter, y_iter, dif_x, dif_y])
    while iter < max_iters:
        iter += 1
        x = x_iter
        y = y_iter

        jac = calc_jacobian(sys, x, y)
        x_iter = x - calc_delta_x(sys, x, y) / jac
        y_iter = y - calc_delta_y(sys, x, y) / jac
        dif_x = abs(x_iter - x)
        dif_y = abs(y_iter - y)

        print_table_row([iter, x_iter, y_iter, dif_x, dif_y])
        if max(dif_x, dif_y) <= eps:
            break
    if iter == max_iters:
        print("Reached max iterations, answer is not in desired precision")
    return [x_iter, y_iter]
```

Вывод программы:

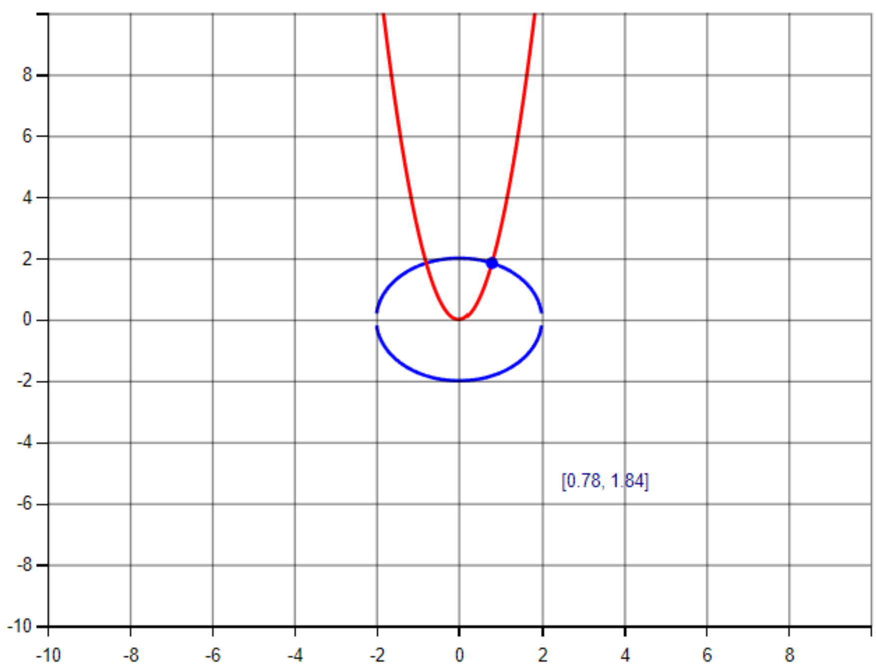
```
What are we doing:
1. single equation
2. equation system
3. both
Your choice: 3
Select function:
1. x^3 + 2,84x^2 - 5,606x - 14,766
2. (x^2)/2 - sin(x)
3. sin(x) + 2cos(x)
Function: 1
Enter interval: 3 4
No solution on this interval

Invalid interval, please try again
Enter interval: 2 4
Enter desired precision: 0.01
Select method:
1. basic iterations
2. halfing division
3. secants method
Solve type: 2
```

```
Select function:
1. x^3 + 2,84x^2 - 5,606x - 14,766
2. sin(x)
3. x^2 -2x + 1
Input type (number or name): 1
Enter intreval-5 -4
Enter intrevalInvalid interval, please try again
-3.5 -2,5
Enter desired precision: 0,01
Select method:
1. basic iterations
2. halfing division
3. secants method
Input type (number or name): 4
Invalid input, please try again
Input type (number or name): 1
Метод простой итерации
0.0 1.0431837425910244
#       | x_i     | x_{i+1} | f(x_i)  | delta_x |
-------------------------------------------------
1       | -3.2265 | -3.5    | -0.7018 | 0.2735  |
2       | -3.1671 | -3.2265 | -0.2921 | 0.0594  |
3       | -3.1423 | -3.1671 | -0.1355 | 0.0247  |
4       | -3.1309 | -3.1423 | -0.0656 | 0.0115  |
5       | -3.1253 | -3.1309 | -0.0324 | 0.0056  |
6       | -3.1226 | -3.1253 | -0.0161 | 0.0027  |
7       | -3.1212 | -3.1226 | -0.0081 | 0.0014  |
Найдено решение с точностью x = -3.121216126203505 f(x) = -0.0080671158
```

```
Метод половинного деления
#        | a      | b      | x_i    | f(a)    | f(b)   | f(x_i)  | |a-b|   |
--------------------------------------------------------------------------------
1        | 2.0    | 3.0    | 3.0    | -6.618  | 20.976 | 20.976  | 1.0     |
2        | 2.0    | 2.5    | 2.5    | -6.618  | 4.594  | 4.594   | 0.5     |
3        | 2.25   | 2.5    | 2.25   | -1.6114 | 4.594  | -1.6114 | 0.25    |
4        | 2.25   | 2.375  | 2.375  | -1.6114 | 1.3356 | 1.3356  | 0.125   |
5        | 2.3125 | 2.375  | 2.3125 | -0.1761 | 1.3356 | -0.1761 | 0.0625  |
6        | 2.3125 | 2.3438 | 2.3438 | -0.1761 | 0.5701 | 0.5701  | 0.0312  |
7        | 2.3125 | 2.3281 | 2.3281 | -0.1761 | 0.1946 | 0.1946  | 0.0156  |
8        | 2.3125 | 2.3203 | 2.3203 | -0.1761 | 0.0087 | 0.0087  | 0.0078  |
Найдено решение x = 2.31640625 f(x) = -0.0838489165
```



```
What are we doing:
1:
x^2 + y^2 = 4
y = 3x^2
2:
cos(x-1) + y = 0.5
x - cos(y) = 3
Your choice: 1
Enter starting x and y: 1 2
Enter desired precision: 0,01
#       | x       | y       | x_dif   | y_dif   |
-------------------------------------------------
1       | 0.8077  | 1.8462  | 0.1923  | 0.1538  |
2       | 0.7836  | 1.8403  | 0.0241  | 0.0059  |
3       | 0.7832  | 1.8403  | 0.0004  | 0.0     |
Найдено решение x = 0.783212653066748 y =  1.8402657631505275
```



Вывод

В ходе выполнения лабораторной разобрался в применении различных методов для решения нелинейных уравнений, реализовал их в виде программ.