Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Дисциплина «Вычислительная математика»

Отчёт

Лабораторная работа №2

Вариант 8

Выполнил:

Попов Дмитрий Юрьевич

P3213

Преподаватель:

Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург, 2024 г

.

Цель работы

Научиться решать нелинейные уравнения и системы нелинейных уравнений различными способами. Написать программу, которая делает это относительно функций, начальных приближений, количества итераций и точности вычисления. Вывести соответствующие графики.

Описание используемых методов

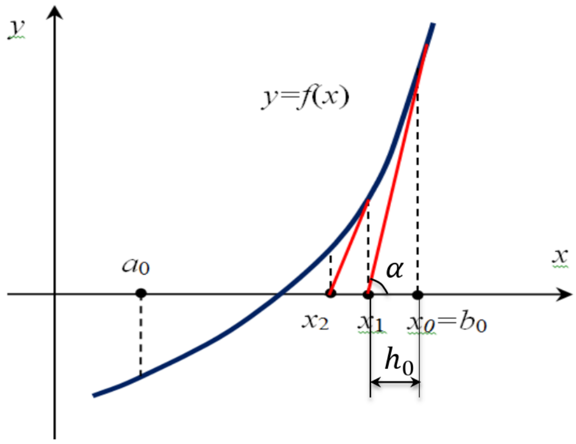
Метод Ньютона (касательных)

Идея метода: функция $y = f(x)$ на отрезке [a, b] заменяется касательной и в качестве приближенного значения корня $x^* = x_n$ принимается точка пересечения касательной с осью абсцисс.

$$x_1 = x_0 - h_0$$

$$h_0 = \frac{f(x_0)}{\tan\alpha} = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



Рабочая формула метода:

$$\boldsymbol{x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}}$$

Критерий окончания итерационного процесса:

$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$ или $\left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| \le \varepsilon$ или $\boldsymbol{|f(x_n)| \le \varepsilon}$

Приближенное значение корня: $x^* = x_n$

Метод хорд

Идея метода: функция $y = f(x)$ на отрезке [a, b] заменяется хордой и в качестве приближенного значения корня принимается точка пересечения хорды с осью абсцисс.

Уравнение хорды, проходящей через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Точка пересечения хорды с осью абсцисс ($y = 0$): $x = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$

Алгоритм метода:

0 шаг: Находим интервал изоляции корня $[a_0, b_0]$

1 шаг: Вычисляем x_0: $x_0 = a_0 - \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} f(a_0)$

2 шаг: Вычисляем $f(x_0)$.

3 шаг: В качестве нового интервала выбираем ту половину отрезка, на концах которого функция имеет разные знаки: $[a_0, x_0]$ либо $[b_0, x_0]$.

4 шаг: Вычисляем x_1 и т.д (повторяем 1-3 шаги).

Рабочая формула метода: $$\boldsymbol{x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}}$$

Критерии окончания итерационного процесса: $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$ или $|a_n - b_n| \le \varepsilon$ или $|f(x_n)| \le \varepsilon$

Приближенное значение корня: $x^* = x_n$

Метод простой итерации

Уравнение $f(x) = 0$ приведем к эквивалентному виду: $x = \varphi(x)$, выразив x из исходного уравнения.

Зная начальное приближение: $x_0 \in [a, b]$, найдем очередные приближения:

$x_1 = \varphi(x_0) \to x_2 = \varphi(x_1) \dots$

Рабочая формула метода: $\boldsymbol{x_{i+1} = \varphi(x_i)}$

Условия сходимости метода простой итерации определяются следующей теоремой.

Теорема. Если на отрезке локализации $[a, b]$ функция $\varphi(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема и удовлетворяет неравенству:

$|\varphi'(x)| < q$, где $0 \leq q < 1$, то независимо от выбора начального приближения $x_0 \in [a, b]$ итерационная последовательность $\{x_n\}$ метода будет сходится к корню уравнения.

Достаточное условие сходимости метода:

$|\varphi'(x)| \leq q < 1$, где q – некоторая константа (коэффициент Липшица или коэффициент сжатия)

Чем меньше q, тем выше скорость сходимости.

Критерий окончания итерационного процесса:

$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$ (при $0 < q \leq 0{,}5$)

$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q}\varepsilon$ (при $0{,}5 < q < 1$)

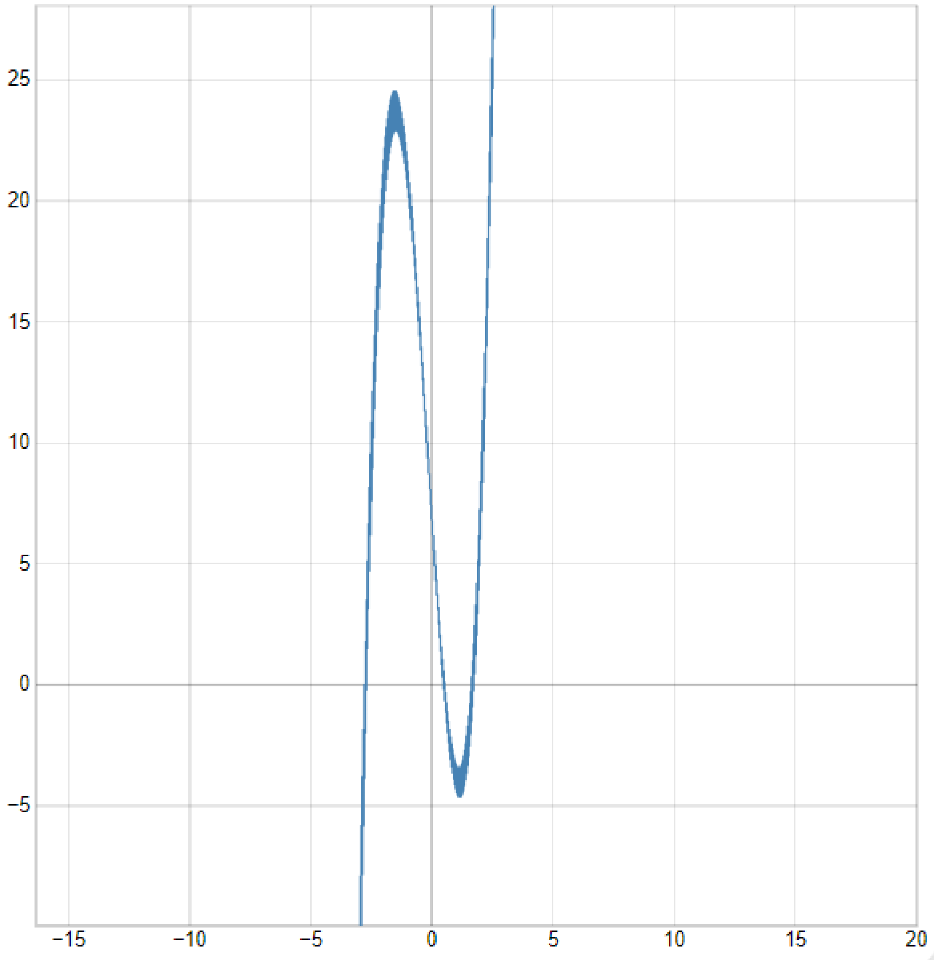
Можно ограничиться: $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$

Первая часть

Функция

$$3x^3 + 1{,}7x^2 - 15{,}42x + 6{,}89$$

График функции



Корни

$x_1 = -2.74445$

$x_2 = 0.498258$

$x_3 = 1.67953$

Поиск крайнего левого корня методом хорд

X:-2.7445

f(X):0.0002

Количество итераций:6

a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	|x_i+1 - x_i|
-3.0000	-2.0000	-2.6206	-12.5500	20.5300	4.9826	0.3794
-3.0000	-2.6206	-2.7284	-12.5500	4.9826	0.6836	0.1078
-3.0000	-2.7284	-2.7425	-12.5500	0.6836	0.0857	0.0140
-3.0000	-2.7425	-2.7442	-12.5500	0.0857	0.0106	0.0017
-3.0000	-2.7442	-2.7444	-12.5500	0.0106	0.0013	0.0002
-3.0000	-2.7444	-2.7445	-12.5500	0.0013	0.0002	0.0000

Поиск центрального корня методом Ньютона

X:0.4983

f(X):-0.0003

Количество итераций:6

a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	|x_i+1 - x_i|
0.0000	1.0000	0.6427	6.8900	-3.8300	-1.5220	0.6427
0.0000	0.6427	0.5264	6.8900	-1.5220	-0.3188	0.1163
0.0000	0.5264	0.5032	6.8900	-0.3188	-0.0561	0.0233
0.0000	0.5032	0.4991	6.8900	-0.0561	-0.0095	0.0041
0.0000	0.4991	0.4984	6.8900	-0.0095	-0.0016	0.0007
0.0000	0.4984	0.4983	6.8900	-0.0016	-0.0003	0.0001

Поиск крайнего правого корня методом простых итераций

X:1.6796

f(X):0.0005

Количество итераций:10

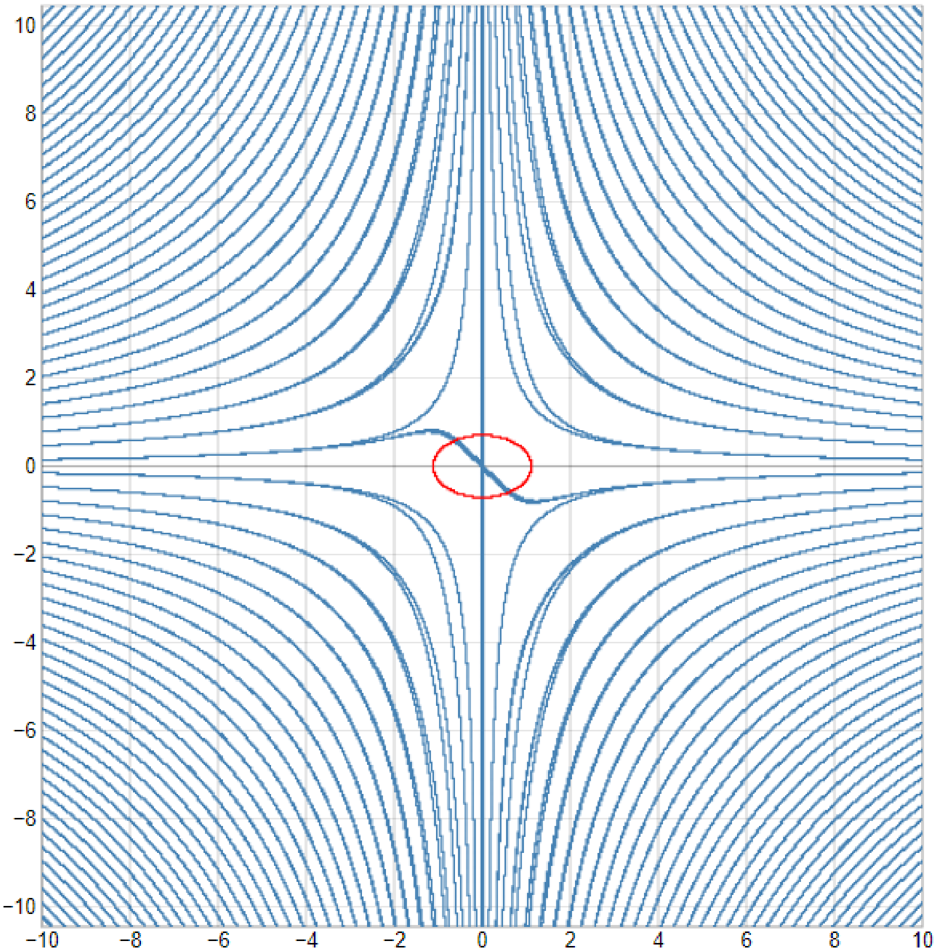
x_i	x_i+1	f(x_i+1)	|x_i+1 - x_i|
2.0000	1.7534	1.2515	0.2466
1.7534	1.7084	0.4662	0.0450
1.7084	1.6916	0.1915	0.0168
1.6916	1.6847	0.0814	0.0069
1.6847	1.6818	0.0351	0.0029
1.6818	1.6805	0.0152	0.0013
1.6805	1.6800	0.0066	0.0005
1.6800	1.6797	0.0029	0.0002
1.6797	1.6796	0.0013	0.0001
1.6796	1.6796	0.0005	0.0000

Вторая часть

Система

$$\begin{cases} tgxy = x^2 \\ 0{,}8x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

График



Решения методом Ньютона

(X, Y):(0.0000, -0.7071)

Количество итераций:5

X	Y
0.7495	-0.6502
0.2292	-0.7767
0.0559	-0.7172
0.0044	-0.7079
0.0000	-0.7071
0.0000	-0.7071

Невязки:(0.0000, 0.0000)

Код программы

https://github.com/llunistsil/Computational-Math-2024/tree/main/P3213/Popov_368679/lab2

Вывод

В результате выполнения данной лабораторной работы были изучены методы для решения нелинейных уравнений и систем их них.

Для решения уравнений были использованы метод Ньютона, хорд и простых итераций. Для решения систем нелинейных уравнений был использован метод Ньютона.

Также была написана программа, реализующая методы решений.