Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования Национальный
исследовательский университет ИТМО

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа №2
Вычислительная математика

Вариант: №1

Группа	P3208
Студент	Абдуллин И.Э.
Преподаватель	Машина Е.А.

Цель работы:

Изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов.

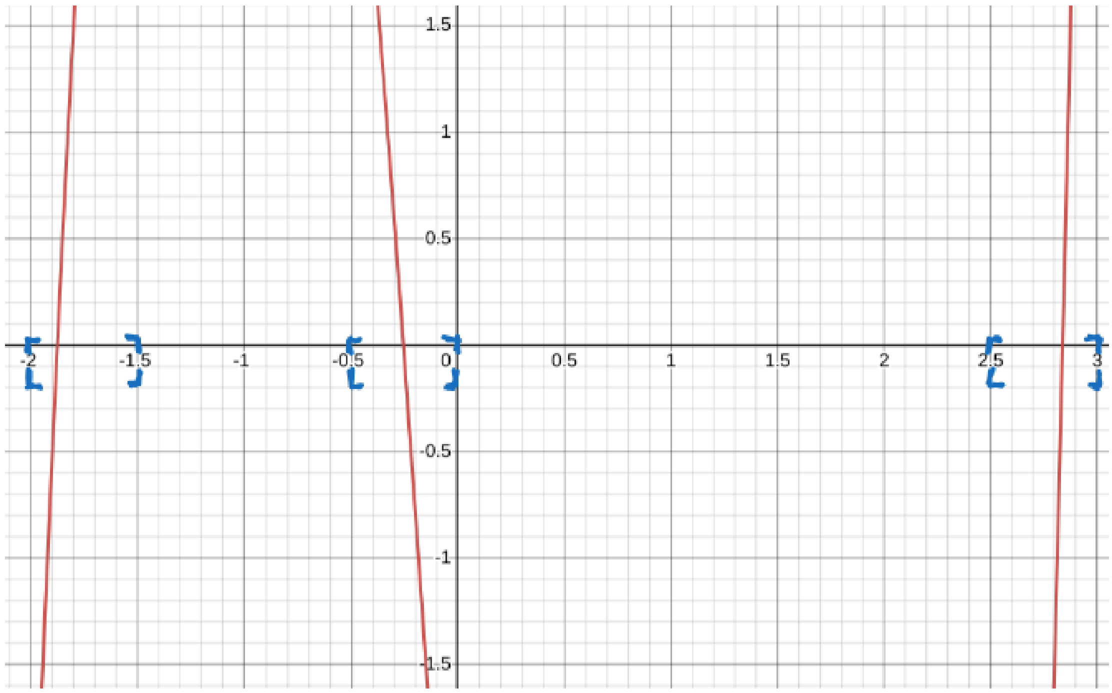
Вычислительная реализация задачи:

1) Решение нелинейного уравнения

Исходное нелинейное уравнение:

$$2.74x^3 - 1.93x^2 - 15.28x - 3.72$$

1. *Отделить корни заданного нелинейного уравнения графически:*



2. *Определить интервалы изоляции корней:*

`$x_1$` принадлежит интервалу (-2; -1.5) – Метод секущих

`$x_2$` принадлежит интервалу (-0.5; 0) – Метод простой итерации

`$x_3$` принадлежит интервалу (2.5; 3) – Метод Ньютона

3. ***Уточнить корни нелинейного уравнения с точностью*** $\varepsilon = 10^{-2}$

4. ***Вычисления:***

4.1. Метод секущих:

Рабочая формула метода:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i) \qquad i = 1,2 \ldots$$

№	x_{k-1}	x_k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	-2	-1.5	-1.834	0.919	0.334
1	-1.5	-1.834	-1.875	0.091	0.041
2	-1.834	-1.875	-1.879	0.008	0.004
3	-1.875	-1.879	-1.8789	0.0007	0.0003

4.2. Метод простой итерации:

Рабочая формула метода: $x_{i+1} = \varphi(x_i)$

№	x_k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	-0.5	-0.226	-0.397	0.274
1	-0.226	-0.261	0.09	0.035
2	-0.261	-0.253	-0.019	0.008

Условие сходимости выполняется:

$$q = max|\varphi'(x)| \; ([-\ 0.5;\ 0]) \simeq 0.0001 < 1$$

4.3. Метод Ньютона:

Рабочая формула метода:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

№	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$\left\|x_{k+1} - x_k\right\|$
0	3	7.05	47.12	2.85	0.15
1	2.85	0.5	40.502	2.838	0.012
2	2.838	0.003	39.973	2.838	0.00008

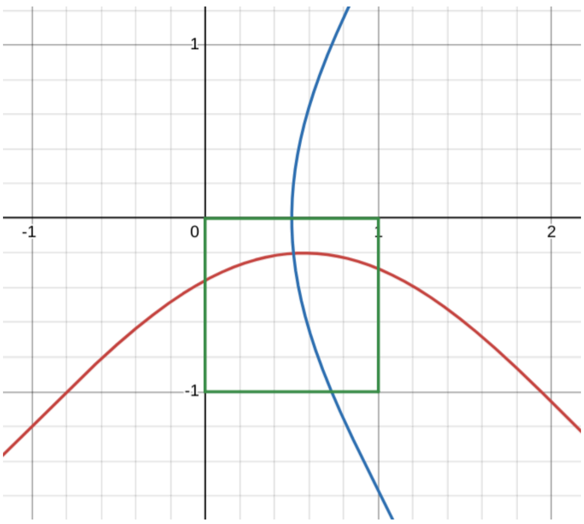
2) Решение системы нелинейных уравнений

Исходная система:

$$\begin{cases} sin(x+1) - y = 1{,}2 \\ 2x + cosy = 2 \end{cases}$$

Метод "Простой итерации"

1. **Отделить корни заданной системы нелинейных уравнений графически:**



2. *Определить интервалы изоляции корней:*

$$D\{0 < x < 1; \; -1 < y < 0\}$$

3. Решение с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$

3.1. Перепишем данную систему в виде:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2 - \cos(y)}{2} \\ y = \sin(x + 1) - 1.2 \end{cases}$$

3.2. Убедимся, что метод простых итераций применим для уточнения решения системы:

$$\max_{[x \in G]} \max_{[i]} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_i(X)}{\partial x_j} \right| \le q < 1$$

В области D имеем:

$$\left| \frac{\partial f_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial f_1}{\partial x} \right| = \left| \frac{1}{2} \cdot \sin(y) \right| < 0.43 < 1$$

$$\left| \frac{\partial f_2}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial f_2}{\partial x} \right| = \left| \cos(x + 1) \right| < 0.54 < 1$$

То есть условие сходимости выполняется. Следовательно в области *D* для уточнения можно использовать схему:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = 1 - \dfrac{1}{2} \cdot \cos^k(y) \\ y^{(k+1)} = \sin(x^k + 1) - 1.2 \end{cases}$$

3.3. Решение:

Начальное приблежение: $x_0 = 0$; $y_0 = 0$

k = 1:

x_1 = 0.5; y_1 = -0.359;

abs x = 0.5; abs y = 0.359

k = 2:

x_2 = 0.532; y_2 = -0.203;

abs x = 0.032; abs y = 0.156

k = 3:

x_3 = 0.51; y_3 = -0.2007;

abs x = 0.022; abs y = 0.0017

k = 4:

x_4 = 0.51; y_4 = -0.2018;

abs x = 0.0001; abs y = 0.001

Ответ: x = 0.51; y = -0.202

Программная реализация задачи:

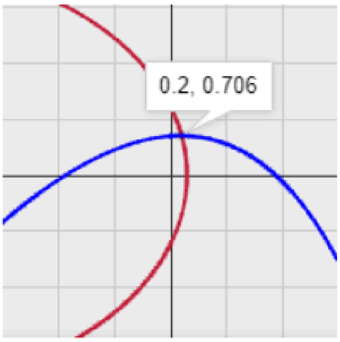
Пример: найти положительное решение системы нелинейных уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0{,}1x_1^2 + x_1 + 0{,}2x_2^2 - 0{,}3 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0{,}2x_1^2 + x_2 + 0{,}1x_1x_2 - 0{,}7 = 0 \end{cases}$$

Определяем, что положительное решение системы уравнений находится в квадрате:

$$0 < x_1 < 1, \qquad 0 < x_2 < 1$$

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}3 - 0{,}1x_1^2 - 0{,}2x_2^2 \\ x_2 = 0{,}7 - 0{,}2x_1^2 - 0{,}1x_1x_2 \end{cases}$$



Проверим условие сходимости. В области G имеем:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} = -0{,}2x_1 \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} = -0{,}4x_2$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} = -0{,}4x_1 - 0{,}1x_2 \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} = -0{,}1x_1$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\right| = |-0{,}2x_1| + |-0{,}4x_2| \le 0{,}6$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right| = |-0{,}4x_1 - 0{,}1x_2| + |-0{,}1x_1| \le 0{,}6$$

$\max\limits_{[x \in G]} |\varphi'(x)| \le 0{,}6 < 1 \;\rightarrow$ Процесс сходящийся

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}3 - 0{,}1x_1^2 - 0{,}2x_2^2 \\ x_2 = 0{,}7 - 0{,}2x_1^2 - 0{,}1x_1x_2 \end{cases}$$

Выберем начальное приближение: $x_1^{(0)} = 1 \quad x_2^{(0)} = 1$

1 шаг.

$x_1^{(1)} = 0{,}3 - 0{,}1 - 0{,}2 = 0$ $\qquad \left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = 1 > \varepsilon$

$x_2^{(1)} = 0{,}7 - 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}4$ $\qquad \left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = 0{,}6 > \varepsilon$

2 шаг.

$x_1^{(2)} = 0{,}3 - 0 - 0{,}2 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}268$ $\qquad \left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = 0{,}268 > \varepsilon$

$x_2^{(2)} = 0{,}7 - 0 - 0 = 0{,}7$ $\qquad \left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = 0{,}3 > \varepsilon$

3 шаг.

$x_1^{(3)} = 0{,}3 - 0{,}1 \cdot 0{,}268^2 - 0{,}2 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}195$ $\qquad \left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = 0{,}073 > \varepsilon$

$x_2^{(3)} = 0{,}7 - 0{,}2 \cdot 0{,}268^2 - 0{,}1 \cdot 0{,}268 \cdot 0{,}7 = 0{,}667$ $\qquad \left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = 0{,}033 > \varepsilon$

4 шаг.

$x_1^{(4)} = 0{,}3 - 0{,}1 \cdot 0{,}195^2 - 0{,}2 \cdot 0{,}667^2 = 0{,}207$ $\qquad \left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = 0{,}012 > \varepsilon$

$x_2^{(3)} = 0{,}7 - 0{,}2 \cdot 0{,}195^2 - 0{,}1 \cdot 0{,}195 \cdot 0{,}667 = 0{,}679$ $\qquad \left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = 0{,}002 > \varepsilon$

Решение задачи: $x_1^{(*)} \approx 0{,}207 \quad x_2^{(*)} \approx 0{,}679$

1) Ньютон

```
public BigDecimal solve(
   Function<BigDecimal, BigDecimal> function,
   Function<BigDecimal, BigDecimal> derivative,
   BigDecimal eps,
   BigDecimal x_0) {

 BigDecimal prev;

 do {
   prev = x_0;
   x_0 =
       x_0.subtract(
           function.apply(x_0).divide(derivative.apply(x_0), SCALE,
RoundingMode.HALF_UP));
 } while (function.apply(prev).abs().compareTo(eps) > 0);

 return x_0;
}
```

2) Половинного деления

```
public Value solve(Equation equation, double[] line, BigDecimal eps) {

BigDecimal left = BigDecimal.valueOf(line[0]), right =
BigDecimal.valueOf(line[1]), x;
var f = equation.getFunction();

do {

   x = left.add(right).divide(BigDecimal.valueOf(2), 20,
RoundingMode.HALF_UP);

   if (f.apply(left).multiply(f.apply(x)).signum() == 1) {
     left = x;
   } else {
     right = x;
   }

 } while (f.apply(x).abs().compareTo(eps) > 0 &&
left.subtract(right).abs().compareTo(eps) > 0);

 return prepareAnswer(x, line);
}
```

3) Простой итерации

```
private BigDecimal applyAlgorithm(
   BigDecimal start, Function<BigDecimal, BigDecimal> recurrent,
BigDecimal eps) {

 BigDecimal res;

 do {
   res = start;
   start = recurrent.apply(start);
 } while (res.subtract(start).abs().compareTo(eps) > 0);

 return start;}
```

4) Простой итерации для системы

```java
public double[] solve(List<BinaryOperator<Double>> list, double[] line, double eps) {

 double x1 = line[0], x2 = line[1], next_x1, next_x2;

 int i = 0;

 do {

   next_x1 = x1;
   x1 = list.get(0).apply(x1, x2);

   next_x2 = x2;
   x2 = list.get(1).apply(x1, x2);

 } while (Math.abs(next_x1 - x1) > eps && Math.abs(next_x2 - x2) > eps);

 return new double[] {x1, x2};
}
```

Работа программы:

```
> Здравствуйте, выберите, что хотите решить: НЛАУ(1), Нелинейное уравнение(2)
< 1
> Выберите систему:
> Первая(1) :
{ sin(x+1) - y = 1.2
{ 2x + cos(y) = 2
> Вторая(2) :
{ f_1(x_1, x_2) = 0.1(x_1)^2 + x_1 + 0.2(x_2)^2 - 0.3 = 0
{ f_2(x_1, x_2) = 0.2(x_1)^2 + x_2 + 0.1*x_1*x_2 - 0.7 = 0
< 2
> Выберите точность:
< 0.0001
> Выберите приближение:
< 1
< 1
   Номер итерации, i |                x^(i) |                y^(i) | (x^(i) - x^(i-1)) ^ e | (y^(i) - y^(i-1)) ^ e
                   1 |  -0,0000000000000000 |   0,7000000000000000 |   1,0000000000000000 |   0,3000000000000000
                   2 |   0,2020000000000000 |   0,6776992000000000 |   0,2020000000000000 |   0,0223008000000000
                   3 |   0,2040643588638720 |   0,6778421222132394 |   0,0020643588638720 |   0,0001429222132394
                   4 |   0,2039417852148380 |   0,6778575163988787 |   0,0001225736490340 |   0,0000153941856393
```

Выводы:

Я изучил численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, нашел корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнил программную реализацию методов согласно варианту.