Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа по дисциплине Вычислительная Математика №3 «Численное интегрирование»

Вариант 12

Преподаватель: Машина Екатерина Алексеевна

Выполнил: Печкуров Данила Алексеевич

Группа: P3208

Санкт-Петербург, 2024г

Цель работы: найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Листинг программы:

Результаты выполнения программы

```
Выберите функцию для интегрирования:
1. sin(x)
2. x^2
3. e^x
4. x^3 + 2x^2 - 3x - 12
4
Выберите метод (прямоугольники, трапеции, симпсон): трапеции
Введите нижний предел интегрирования: 1
Введите верхний предел интегрирования: 2
Введите требуемую точность: 0.01
Метод: трапеции
Значение интеграла: -8.0791015625
Число разбиений интервала: 16
Точность: 0.01

Process finished with exit code 0
```

Рабочие формулы методов

Методы прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} - \text{ Левые}$$

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} y_{i} - \text{ Правые}$$

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}) - \text{ Средние}$$

Метод трапеций

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

Метод Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + y_n\right)$$

Вычисление заданного интеграла.

12	$\int_1^2 (x^3+2x^2-3x-12)dx$

$$\int_1^2 (x^3+2x^2-3x-12)dx$$

1) По формуле Ньютона-Лейбница:

$$I_{точн.} = \int_1^2 (x^3+2x^2-3x-12)dx = \left(\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}-12x\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{2^4}{4}+\frac{2\cdot 2^3}{3}-\frac{3\cdot 2^2}{2}-12\cdot 2-\left(\frac{1^4}{4}+\frac{2\cdot 1^3}{3}-\frac{3\cdot 1^2}{2}-12\cdot 1\right)=$$

$$= 4+\frac{16}{3}-6-24+\frac{151}{12} = -26+\frac{215}{12} = -\frac{97}{12} \approx -8\frac{1}{12} \approx -8.0833...$$

2) По формуле Ньютона-Котеса ($n=6$):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, C_n^i$$

$$h = \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$I_{кот.} = \int_1^2 f(x)dx \approx C_6^0 f(x_0) + C_6^1 f(x_1) + C_6^2 f(x_2) \dots C_6^6 f(x_6) =$$

$$\cancel{\frac{41}{840}+\frac{41}{840}+\frac{216}{840}+\frac{216}{840}+\frac{27}{840}+\frac{27}{840}+\frac{272}{840}} = \frac{1}{840}\Big[$$

$$41\left(f(1)+f(2)\right)+216\left(f\left(1\tfrac{1}{6}\right)+f\left(\tfrac{5}{6}\right)\right)+27\left(f\left(\tfrac{8}{6}\right)+f\left(\tfrac{4}{6}\right)\right)+$$

$$272 f(1.5) = \frac{1}{840}\Big[\cancel{\dots}\Big]$$

$$\approx -8.08333333.$$

③ По форм. средних треугольников

$$I_{ср} = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-\frac{1}{2}} \qquad h = \frac{b-a}{n} = 0.1$$

i	~~0~~	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_{i-\frac{1}{2}}$	~~1.05~~	1.05	1.15	1.25	1.35	1.45	1.55	1.65	1.75	1.85	1.95
$y_{i-\frac{1}{2}}$		-11.79	-11.28	-10.67	-9.94	-9.1	-8.12	-7.01	-5.76	-4.37	-2.83

$$I_{пр.} = h\left(f(1.05) + f(1.15) + \ldots f(1.95)\right) = -8.087$$

По форм. Трапеции

$$I_{тр} = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) \qquad h = 0.1$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
y_i	-12	-11.549	-10.992	-10.323	-9.536	-8.625	-7.584	-6.407	-5.088	-3.621	-2

$$I_{тр} = 0.1\left(\frac{-12-2}{2} + (-11.549 - 10.992 \ldots - 3.621)\right) =$$

$$= -8.0725$$

По формуле Симпсона: $h = 0.1$

$$I_{\text{симп}} = \frac{h}{3}\left[\left(y_0 + 4(y_1 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_{n-2}) + y_n\right)\right]$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
y_i	[illegible]										

то же таблицы что и в м. тр.

$$I_{\text{симп}} = \frac{0.1}{3}\left[\left(-12 + 4(-11.549 + -10.323 + -8.625 + + -6.407 + -3.621) + 2(-10.992 + -9.536 + -7.584 + -5.088) + + (-2)\right)\right] = -8.0833\dots$$

④ Погрешности методов

$\Delta I = I - I_{\text{кот.}} = 0\%$

$\Delta I = I - I_{\text{прям}} = 0.054 \ (\varepsilon = 0.07)\%$

$\Delta I = I - I_{\text{тр.}} = 0.01083 \ (\varepsilon \approx 0.134\%)$

$\Delta I = I - I_{\text{симп}} = 0\%$

Вывод:

В ходе выполнения работы удалось найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью методами Ньютона-Котеса, Симпсона, трапеций и прямоугольников, а также реализовать их при помощи программы