Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Дисциплина «Вычислительная математика»

Отчёт

Лабораторная работа №4

Вариант 9

Выполнил:

Прокофьев Арсений Александрович

P3213

Преподаватель:

Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург, 2024 г.

Цель работы

Найти функцию, являющуюся наилучшим приближением заданной табличной функции по методу наименьших квадратов. Лабораторная работа состоит из двух частей: вычислительной и программной. № варианта задания лабораторной работы определяется как номер в списке группы согласно ИСУ.

Вычислительная часть:

9	$y = \dfrac{4x}{x^4 + 9}$	$x \in [0, 2]$ $h = 0{,}2$

Введем обозначения:

$SX = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $SXX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $SY = \sum_{i=1}^{n} y_i$, $SXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Получим систему уравнений для нахождения параметров *a* и *b*:

$$\begin{cases} aSXX + bSX = SXY \\ aSX + bn = SY \end{cases},$$

Таблица табулирования:

n = 11

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y	0	0.088	0.177	0.263	0.340	0.4	0.433	0.436	0.411	0.369	0.320

Линейная аппроксимация:

SX = 0 + 0.2 + 0.4 + 0.6 + 0.8 + 1.0 + 1.2 + 1.4 + 1.6 + 1.8 + 2.0 = 11

SXX = 0^2 + 0.2^2 + 0.4^2 + 0.6^2 + 0.8^2 + 1.0^2 + 1.2^2 + 1.4^2 + 1.6^2 + 1.8^2 + 2.0^2 = 15.4

SY = 0 + 0.088 + 0.177 + 0.263 + 0.340 + 0.4 + 0.433 + 0.436 + 0.411 + 0.369 + 0.320 = 3.237

SXY = 0 * 0 + 0.2 * 0.088 + 0.4 * 0.177 + 0.6 * 0.263 + 0.8 * 0.340 + 1.0 * 0.4 + 1.2 * 0.433 + 1.4 * 0.436 + 1.6 * 0.411 + 1.8 * 0.369 + 2.0 * 0.320 = 4.01

a*15.4 + b*11 = 4.01

a*11 + b*11 = 3.237

a = 773/4400 ~ 0.1757

b = 2609/22000 ~ 0.1186

P1(x) = 0.1757*x + 0.1186

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y	0	0.088	0.177	0.263	0.340	0.4	0.433	0.436	0.411	0.369	0.320
P1 (x)	0.1186	0.1537	0.1889	0.224	0.2592	0.2943	0.3294	0.3646	0.3997	0.4349	0.47
ε	0.1186	0.0657	0.0119	-0.039	-0.0808	-0.1057	-0.1036	-0.0714	-0.0113	0.0659	0.15

Вывод: исследуемая функциональная зависимость может быть приближенно описана линейной моделью $\boldsymbol{P_1(x)}$ = 0.1757x + 0.1186, т. к. $\boldsymbol{P_1(x_i)} \approx \boldsymbol{Y_i}$, $\boldsymbol{\varepsilon_i} \to$min

Определим меру отклонения: S = sum(εi^2) = 0.0805

Квадратичная аппроксимация:

КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Сумма квадратов отклонений запишется следующим образом:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2 \to min$$

SX = 11.0

SXX = 15.4

SXXX = 24.2

SXXXX = 40.5328

SY = 3.237

SXY = 4.01

SXXY = 5.74992

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{cases}$$

$11A_0 + 11A_1 + 15.4A_2 = 3.237$

$11A_0 + 15.4A_1 + 24.2A_2 = 4.01$

$15.4A_0 + 24.2A_1 + 40.5328A_2 = 5.74992$

$A_0 = -0.0247$

$A_1 = 0.6533$

$A_2 = -0.2388$

$P_2(x) = -0.2388*x^2 + 0.6533*x – 0.0247$

X	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
Y	0	0.088	0.177	0.263	0.340	0.4	0.433	0.436	0.411	0.369	0.320
P2 (x)	-0.025	0.096	0.198	0.281	0.345	0.39	0.415	0.422	0.409	0.378	0.327
E	-0.025	0.008	0.021	0.018	0.005	-0.01	-0.018	-0.014	-0.002	0.009	0.007

Вывод: исследуемая функциональная зависимость может быть приближенно описана выбранной моделью, т. к. $\boldsymbol{P_2(x_i)} \approx \boldsymbol{Y_i}$, $\boldsymbol{\varepsilon_i} \to \min$

Определим меру отклонения: S = sum(εi^2) = 0.002233

Среднеквадратичные отклонения:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\varphi(x_i) - y_i)^2}{n}}$$

Для линейной: δ = 0.0855

Для квадратичной: δ = 0.01425

Программная реализация задачи:

https://github.com/MakeCheerfulInstall/Computational-Math-2024/tree/main/P3213/Prokofiev_367502/lab4

Вывод:

В результате выполнения данной лабораторной работы были изучены методы для нахождения аппроксимирующих функций, приближающим функцию, заданную множеством её точек.