

Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Дисциплина «Вычислительная математика»

Отчёт

Лабораторная работа №5

Вариант 9

Выполнил:

Прокофьев Арсений Александрович

P3213

Преподаватель:

Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург, 2024 г.

Цель работы

Решить задачу интерполяции, найти значения функции при заданных значениях аргумента, отличных от узловых точек. Лабораторная работа состоит из двух частей: вычислительной и программной. № варианта задания лабораторной работы определяется как номер в списке группы согласно ИСУ. Для исследования использовать:

- многочлен Лагранжа;
- многочлен Ньютона;
- многочлен Гаусса.

Вычислительная часть:

	x	y	№ варианта	X ₁	X ₂
Таблица 1.4	1,05	0,1213	4	1,051	1,277
	1,15	1,1316	9	1,562	1,362
	1,25	2,1459	14	1,112	1,319
	1,35	3,1565	19	1,573	1,375
	1,45	4,1571	24	1,146	1,289
	1,55	5,1819	29	1,614	1,414
	1,65	6,1969	34	1,154	1,328

x	1.05	1.15	1.25	1.35	1.45	1.55	1.65
y	0.1213	1.1316	2.1459	3.1565	4.1571	5.1819	6.1969

Таблица конечных разностей:

x _i	1,0500	1,1500	1,2500	1,3500	1,4500	1,5500	1,6500
y _i	0,1213	1,1316	2,1459	3,1565	4,1571	5,1819	6,1969
Δy _i	1,0103	1,0143	1,0106	1,0006	1,0248	1,0150	-
Δ ² y _i	0,0040	-0,0037	-0,0100	0,0242	-0,0098	-	-
Δ ³ y _i	-0,0077	-0,0063	0,0342	-0,0340	-	-	-
Δ ⁴ y _i	0,0014	0,0405	-0,0682	-	-	-	-
Δ ⁵ y _i	0,0391	-0,1087	-	-	-	-	-
Δ ⁶ y _i	-0,1478	-	-	-	-	-	-

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

$$X_1 = 1.051$$

$x_0 \leq X_1 \leq x_1 \Rightarrow$ первая интерполяционная формула Ньютона

$$h = 1.15 - 1.05 = 0.1$$

$$t = (x - x_0) / h = (x - 1.05) / 0.1$$

$$\begin{aligned} N_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0 \\ + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!}\Delta^5 y_0 \\ + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)}{6!}\Delta^6 y_0 \end{aligned}$$

$$x = 1.051 \Rightarrow t = (1.051 - 1.05) / 0.1 = 0.01$$

$$\begin{aligned} N_6(1.051) \\ = 0.1213 + 0.01 * 1.0103 + \frac{0.01 * (0.01 - 1)}{2} * 0.0040 + \frac{0.01 * (0.01 - 1) * (0.01 - 2)}{6} \\ * (-0.0077) + \frac{0.01 * (0.01 - 1) * (0.01 - 2) * (0.01 - 3)}{24} * 0.0014 \\ + \frac{0.01 * (0.01 - 1) * (0.01 - 2) * (0.01 - 3) * (0.01 - 4)}{120} * 0.0391 \\ + \frac{0.01 * (0.01 - 1) * (0.01 - 2) * (0.01 - 3) * (0.01 - 4) * (0.01 - 5)}{720} (-0.1478) \\ = 0.1317 \end{aligned}$$

$$X_2 = 1.277$$

$$a = x_3 = 1.35$$

$x_2 < X_2 < x_3 \Rightarrow X_2 < a \Rightarrow$ вторая интерполяционная формула Гаусса

$$h = 1.15 - 1.05 = 0.1$$

$$t = (x - a) / h = (x - 1.35) / 0.1$$

$$x = 1.277 \Rightarrow t = (1.277 - 1.35) / 0.1 = -0.73$$

Интерполяционные многочлены Гаусса

Вторая интерполяционная формула Гаусса ($x < a$)

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = & y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} \\
 & + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \dots \\
 & + \frac{(t+n-1)\dots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} \\
 & + \frac{(t+n)(t+n-1)\dots(t-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}
 \end{aligned}$$

i	-3	-2	-1	0	1	2	3
x_i	1,0500	1,1500	1,2500	1,3500	1,4500	1,5500	1,6500
y_i	0,1213	1,1316	2,1459	3,1565	4,1571	5,1819	6,1969
Δy_i	1,0103	1,0143	1,0106	1,0006	1,0248	1,0150	-
$\Delta^2 y_i$	0,0040	-0,0037	-0,0100	0,0242	-0,0098	-	-
$\Delta^3 y_i$	-0,0077	-0,0063	0,0342	-0,0340	-	-	-
$\Delta^4 y_i$	0,0014	0,0405	-0,0682	-	-	-	-
$\Delta^5 y_i$	0,0391	-0,1087	-	-	-	-	-
$\Delta^6 y_i$	-0,1478	-	-	-	-	-	-

$$\begin{aligned}
 G_n(x) = & y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t+1)(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} \\
 & + \frac{t(t+2)(t+1)(t-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{t(t+2)(t+1)(t-1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-3} \\
 & + \frac{t(t+3)(t+2)(t+1)(t-1)(t-2)}{6!}\Delta^6 y_{-3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_6(x) &= 3.1565 - 0.73 * 1.0106 + \frac{-0.73 * (-0.73 + 1)}{2} * (-0.0100) \\
&+ \frac{-0.73 * (-0.73 + 1) * (-0.73 - 1)}{6} * (-0.0063) \\
&+ \frac{-0.73 * (-0.73 + 2) * (-0.73 + 1) * (-0.73 - 1)}{24} * 0.0405 \\
&+ \frac{-0.73 * (-0.73 + 2) * (-0.73 + 1) * (-0.73 - 1) * (-0.73 - 2)}{120} * 0.0391 \\
&+ \frac{-0.73 * (-0.73 + 3) * (-0.73 + 2) * (-0.73 + 1) * (-0.73 - 1) * (-0.73 - 2)}{720} * (-0.1478) \\
&= 2.4203
\end{aligned}$$

Программная реализация задачи:

https://github.com/MakeCheerfulInstall/Computational-Math-2024/tree/main/P3213/Prokofiev_367502/lab5

Вывод

В результате выполнения данной лабораторной я познакомился с методами интерполяции функции и реализовал метод с использованием многочлена Лагранжа и метод с использованием многочлена Ньютона с конечными и разделенными разностями.