

Группа Р3266

К работе допущен \_\_\_\_\_

Студент Хоанг Ван Куан

Работа выполнена \_\_\_\_\_

Преподаватель Сорокина Елена Константиновна

Отчет принят \_\_\_\_\_

**Рабочий протокол и отчет по**  
**лабораторной работе № 1.04**  
*Маятник Обербека. Исследование равноускоренного*  
*вращательного движения*

**1. Цель работы.**

- Проверка основного закона динамики вращения.
- Проверка зависимости момента инерции от положения масс относительно оси вращения.

**2. Задачи, решаемые при выполнении работы.**

- Измерение времени падения груза при разной массе груза и разном положении утяжелителей на крестовине.
- Расчёт ускорения груза, углового ускорения крестовины и момента силы натяжения нити.
- Расчёт момента инерции крестовины с утяжелителями и момента силы трения.
- Исследование зависимости момента силы натяжения нити от углового ускорения. Проверка основного закона динамики вращения.
- Исследование зависимости момента инерции от положения масс относительно оси вращения. Проверка теоремы Штейнера.

**3. Объект исследования.**

- Изучение статических закономерностей.

**4. Метод экспериментального исследования.**

- Анализ
- Лабораторный эксперимент

**5. Рабочие формулы и исходные данные.**

- 1) Закон Ньютона для равноускоренного движения груза под воздействием векторной суммой силы тяжести  $mg$  и силой натяжения нити  $T$ .

$$ma = mg - T$$

- 2) Линейное ускорение груза

$$a = \frac{2h}{t^2}$$

- 3) Угловое ускорение крестовины

$$\varepsilon = \frac{2a}{d}$$

- 4) Сила натяжения нити

$$T = m(g - a)$$

- 5) Момент силы натяжения нити

$$M = \frac{md}{2}(g - a)$$

- 6) Основной закон динамики вращения для крестовины

$$I\varepsilon = M - M_{tp}$$

7) Момент инерции крестовины

$$I = I_0 + 4m_{yt}R^2$$

8) Связь между моментом силы натяжения нити и угловым ускорением крестовины

$$M = M_{tp} + I\varepsilon$$

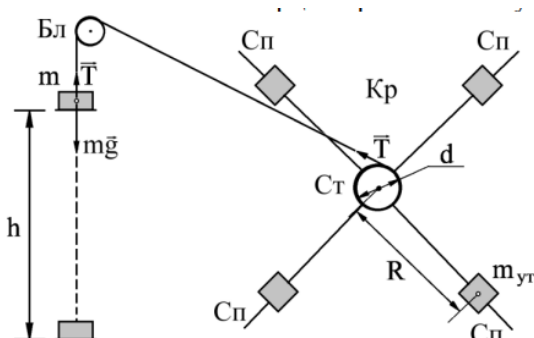
9) Расстояние между осью вращения и центром утяжелителя

$$R = l_1 + (n - 1)l_0 + \frac{1}{2}b$$

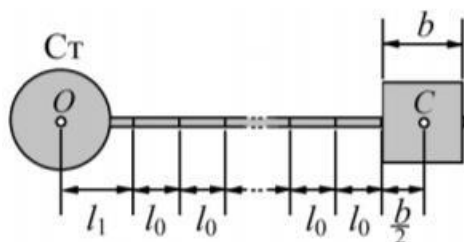
## 6. Измерительные приборы.

№ n/n	Наименование	Тип прибора	Используемый диапазон	Погрешность прибора
1	Металлическая линейка		0 – 250 мм	0.5 мм
2	Механический секундомер		0 – 1800 с	0,1 с
3				

## 7. Схема установки ( перечень схем, которые составляют Приложение 1)



1. Основание
2. Рукоятка сцепления крестовины
3. Устройство принудительного трения
4. Поперечина
5. Груз крестовины
6. Трабчатая направляющая
7. Передняя крестовина
8. Задняя крестовина
9. Шайбы каретки
10. Каретка
11. Система передних стоек



## 8. Результаты прямых измерений и их обработки (таблицы, примеры расчетов).

Масса груза,	Положение утяжелителей					
	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
$m_1 = 267$	5.13	6.77	7.80	8.55	9.30	10.10
	4.90	6.59	7.68	8.37	9.69	10.26
	5.01	6.65	7.53	8.65	9.44	10.15
	<b>5.01</b>	<b>6.67</b>	<b>7.67</b>	<b>8.52</b>	<b>9.48</b>	<b>10.17</b>
$m_1 = 487$	4.05	4.62	5.17	5.69	6.80	7.44
	3.83	4.53	5.02	5.62	6.61	7.34
	3.96	4.63	5.12	5.59	6.60	7.38
	<b>3.95</b>	<b>4.59</b>	<b>5.10</b>	<b>5.63</b>	<b>6.67</b>	<b>7.39</b>
$m_1 = 707$	3.15	3.57	4.18	4.93	5.40	5.75
	3.28	3.61	4.34	4.83	5.61	5.80
	3.22	3.61	4.38	4.89	5.34	5.85
	<b>3.22</b>	<b>3.60</b>	<b>4.30</b>	<b>4.88</b>	<b>5.45</b>	<b>5.80</b>
$m_1 = 927$	2.83	3.24	3.63	3.97	4.53	5.03
	2.80	3.13	3.58	3.98	4.56	4.92
	2.79	3.15	3.68	4.04	4.48	4.95
	<b>2.81</b>	<b>3.17</b>	<b>3.63</b>	<b>4.00</b>	<b>4.52</b>	<b>4.97</b>

Таблица 1: Протокол измерений времени падения груза при разной массе груза и разном положении утяжелителей на крестовине

## 9. Расчет результатов косвенных измерений(таблицы, примеры расчетов).

- 1) Найти среднее время падения гири для всех масс и всех положениях утяжелителей на крестовине

$$t_{\text{ср}} = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}$$

Масса груза, г	$t_{\text{ср-1.риска,с}}$	$t_{\text{ср-2.риска,с}}$	$t_{\text{ср-3.риска,с}}$	$t_{\text{ср-4.риска,с}}$	$t_{\text{ср-5.риска,с}}$	$t_{\text{ср-6.риска,с}}$
$m_1 = 267$	5.01	6.67	7.67	8.52	9.48	10.17
$m_2 = 487$	3.95	4.59	5.10	5.63	6.67	7.39
$m_3 = 707$	3.22	3.60	4.30	4.88	5.45	5.80
$m_4 = 927$	2.81	3.17	3.63	4.00	4.52	4.97

Таблица 2. Таблица среднего времени

- 2) Рассчитать ускорение  $a$  груза, угловое ускорение  $\varepsilon$  крестовины и момент  $M$  силы натяжения нити

- Рассчитать ускорение  $a$  груза

$$a = \frac{2h}{(t_{\text{ср}})^2} - \text{где } h = 0.7 \text{ (m)}$$

Масса груза, г	$a_{1.\text{риска, м/с}^2}$	$a_{2.\text{риска, м/с}^2}$	$a_{3.\text{риска, м/с}^2}$	$a_{4.\text{риска, м/с}^2}$	$a_{5.\text{риска, м/с}^2}$	$a_{6.\text{риска, м/с}^2}$
$m_1 = 267$	0.056	0.031	0.024	0.019	0.016	0.014
$m_2 = 487$	0.090	0.066	0.054	0.044	0.031	0.026
$m_3 = 707$	0.135	0.108	0.076	0.059	0.047	0.042
$m_4 = 927$	0.177	0.139	0.106	0.088	0.069	0.057

Таблица 3. Таблица ускорений  $a$  груза

- Рассчитать угловое ускорение  $\varepsilon$  крестовины

$$\varepsilon = \frac{2a}{d} - \text{где } d = 0.046 \text{ (m)} - \text{диаметр ступицы}$$

Масса груза, г	$\varepsilon_{1.\text{риска, рад/с}^2}$	$\varepsilon_{2.\text{риска, рад/с}^2}$	$\varepsilon_{3.\text{риска, рад/с}^2}$	$\varepsilon_{4.\text{риска, рад/с}^2}$	$\varepsilon_{5.\text{риска, рад/с}^2}$	$\varepsilon_{6.\text{риска, рад/с}^2}$
$m_1 = 267$	2.435	1.348	1.043	0.826	0.696	0.609
$m_2 = 487$	3.913	2.870	2.348	1.913	1.348	1.130
$m_3 = 707$	5.870	4.696	3.304	2.565	2.043	1.826
$m_4 = 927$	7.696	6.043	4.609	3.826	3.000	2.478

Таблица 4. Таблица углового ускорения  $\varepsilon$  крестовины

- Рассчитать момент  $M$  силы натяжения нити

$$M = \frac{md}{2}(g - a) - \text{где } d = 0.046 \text{ (m)}, g = 9.82 \text{ (m/с}^2\text{)}$$

Масса груза, г	$M_{1.\text{риска, Н.м}}$	$M_{2.\text{риска, Н.м}}$	$M_{3.\text{риска, Н.м}}$	$M_{4.\text{риска, Н.м}}$	$M_{5.\text{риска, Н.м}}$	$M_{6.\text{риска, Н.м}}$
$m_1 = 267$	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060
$m_2 = 487$	0.109	0.109	0.109	0.110	0.110	0.110
$m_3 = 707$	0.157	0.158	0.158	0.159	0.159	0.159
$m_4 = 927$	0.206	0.206	0.207	0.207	0.208	0.208

Таблица 5. Таблица момента  $M$  силы натяжения нити

- 3) Рассчитать момент  $I$  инерции крестовины с утяжелителями и момент силы трения  $M_{тр}$  по методу наименьших квадратов (МНК)

Найти расстояние между осью  $O$  вращения и центром  $C$  утяжелителя для каждого положения утяжелителя

- Рассчитать расстояние между осью  $O$  вращения и центром  $C$  утяжелителя

$$R = l_1 + (n - 1)l_0 + \frac{1}{2}b$$

где  $l_1 = 57(mm)$  – расстояние первой риски от ось

$l_0 = 25(mm)$  – расстояние между рисками

$b = 40(mm)$  – размер утяжелителя вдоль спицы

- Рассчитать момент  $I$  инерции крестовины с утяжелителями и момент силы трения  $M_{тр}$  по методу наименьших квадратов (МНК)

$$I = \frac{M_a - M_b}{I_a - I_b}$$

$$M = M_{tp} + I\varepsilon$$

п риски	R, м	R <sup>2</sup> , м <sup>2</sup>	I(метод наименьших квадратов), кг*м <sup>2</sup>	M <sub>тр</sub> (метод наименьших квадратов)Н.м
1	0.077	0.006	0.028	0.001
2	0.102	0.010	0.031	0.018
3	0.127	0.016	0.041	0.017
4	0.153	0.023	0.049	0.020
5	0.177	0.031	0.064	0.015
6	0.202	0.041	0.079	0.012

На основе найденных значений  $I$  и  $R^2$  с помощью МНК определить значения  $I_0$  и  $m_{ут}$

$$I = I_0 + 4m_{ут}R^2$$

- Найти средние значения всех экспериментальных точек:

- $\bar{R}^2 = 0.021 (m^2)$
- $\bar{I} = 0.049 (кг * м^2)$

- Найти коэффициенты прямой по следующим формулам:

- $b = 4m_{ут} = \frac{\sum(R_i^2 - \bar{R}^2)(I_i - \bar{I})}{\sum(R_i^2 - \bar{R}^2)^2} = 1.49 \rightarrow m_{ут} = 0.373$
- $a = I_0 = \bar{I} - b\bar{R}^2 = 0.018$

## 10. Расчет погрешностей измерений (для прямых и косвенных измерений).

- 1) Погрешность времени:

$$S_t = \sqrt{\frac{(t_1 - t_{cp})^2 + (t_2 - t_{cp})^2 + (t_3 - t_{cp})^2}{N(N - 1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(5.13 - 5.01)^2 + (4.90 - 5.01)^2 + (5.13 - 5.01)^2}{3.2}} \approx 0.066 (с)$$

$\rightarrow \Delta_{\bar{t}_1} = t_{\alpha,3} \cdot S_t = 4,30 * 0,066 \approx 0.284 (с)$  где  $t_{\alpha,3}$  – коэффициент Стьюдента ( $\alpha = 0.95$ )

$$\rightarrow \Delta t = \sqrt{(\Delta_{\bar{t}_1})^2 + \left(\frac{2}{3}\Delta t_{их}\right)^2} \approx 0.284 (с)$$

Относительная погрешность

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta t}{t_{\text{ср}}} * 100\% \approx 5,67\%$$

2) Погрешность ускорения:

$$\begin{aligned}\Delta a_1 &= \sqrt{\left(\frac{\delta a_{11}}{\delta h} * \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\delta a_{11}}{\delta t} * \Delta t\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2} * \Delta h\right)^2 + \left(\frac{(-2) * 2 * h * \Delta t}{t^3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{5.01^2} * 0.0005\right)^2 + \left(\frac{(-2) * 2 * 0.7 * 0.09}{5.01^3}\right)^2} \approx 6 * 10^{-3} \text{ (м/с}^2\text{)}\end{aligned}$$

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{a} * 100\% = \frac{6 * 10^{-3}}{0.056} * 100\% \approx 10.7\%$$

3) Погрешность углового ускорения:  $\varepsilon = \frac{2a}{d} = \frac{2*2h}{dt^2}$

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon_1 &= \sqrt{\left(\frac{\delta \varepsilon_1}{\delta h} * \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\delta \varepsilon_1}{\delta d} * \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\delta \varepsilon_1}{\delta t} * \Delta t\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{4}{dt^2} * \Delta h\right)^2 + \left(\frac{4h * (-1)}{d^2 t^2} * \Delta d\right)^2 + \left(\frac{4 * (-2) * h}{dt^3} * \Delta t\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{4}{0.046 * 5.01^2} * 0.0005\right)^2 + \left(\frac{-4 * 0.7}{0.046^2 * 5.01^2} * 0.0005\right)^2 + \left(\frac{4 * (-2) * 0.7}{0.046 * 5.01^3} * 0.286\right)^2} \\ &\approx 0,278 \text{ (рад/с}^2\text{)}\end{aligned}$$

4) Относительная погрешность углового ускорения:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \varepsilon_1}{\varepsilon_1} * 100\% = \frac{0.278}{2.435} * 100\% \approx 11.4\%$$

5) Погрешность момента силы

$$M = \frac{md}{2}(g - a) = \frac{md}{2}\left(g - \frac{2h}{t^2}\right); m = m_1 = 267 \text{ (г)}$$

$$\begin{aligned}\Delta M_1 &= \sqrt{\left(\frac{\delta M_1}{\delta m} * \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\delta M_1}{\delta h} * \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\delta M_1}{\delta g} * \Delta g\right)^2 + \left(\frac{\delta M_1}{\delta d} * \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\delta M_1}{\delta t} * \Delta t\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\left(\frac{-md}{t^2}\right) * \Delta h\right)^2 + \left(\left(\frac{md}{2}\right) * \Delta g\right)^2 + \left(\left(\frac{mg}{2} - \frac{mh}{t^2}\right) * \Delta d\right)^2 + \left(\left(\frac{(-2)dh}{t^3}\right) * \Delta t\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\left(g - \frac{2h}{t^2}\right) * \Delta m\right)^2} \\ &\approx 0,0013 \text{ (Н * м)}\end{aligned}$$

$$\varepsilon_M = \frac{\Delta M_1}{M} * 100\% = \frac{0.0013}{0.060} \approx 2,17\%$$

6) Погрешности  $\Delta I_0$  и  $m_{ym}$  по методу наименьших квадратов на основе экспериментальных значений  $I$  и  $R^2$

- Рассчитать параметры  $D, d_i$ :  $d_i = I_i - (a + b * R_i^2)$

- $\sum d_i^2 = 1.6 * 10^{-5}$

- $D = \sum (R_i^2 - \overline{R^2})^2 = 8.75 * 10^{-4}$

- Определить СКО коэффициентов  $a$  и  $b$ :

- $S_b^2 = \frac{1}{D} * \frac{\sum d_i^2}{n-2} = 0.005(\text{кг}^2)$

$\rightarrow S_b = 0.067(\text{кг}) \rightarrow S_{m_{ym}} = \frac{S_b}{4} = 0.017$

- $S_a^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{R^2}}{D}\right) * \frac{\sum d_i^2}{n-2} = 2.68 * 10^{-6}(\text{кг}^2 * \text{м}^4)$

$\rightarrow S_a = 1.6 * 10^{-3}(\text{кг} * \text{м}^2)$

- Для доверительной вероятности  $\alpha = 0,95$  находим границы доверительных интервалов коэффициентов по формуле :

- $\Delta a = 2S_a = 0.003(\text{кг} * \text{м}^2)$

- $\Delta b = 2S_b = 0.134(\text{кг})$

- $\Delta_{m_{ym}} = 2S_{m_{ym}} = 0.034$

## 12. Окончательные результаты.

$$m_{yt} = 373 \pm 34(\text{г}), \quad \varepsilon = 9.1\%$$

$$I_0 = 0.018 \pm 0.003(\text{г}), \quad \varepsilon = 16.7\%$$

$$a_1 = 0.056 \pm 0.006(\text{г}), \quad \varepsilon = 10.7\%$$

$$\varepsilon_1 = 2.435 \pm 0.278(\text{г}), \quad \varepsilon = 11.4\%$$

$$M_1 = 0.6000 \pm 0.0013(\text{г}), \quad \varepsilon = 2.17\%$$

## 13. Выводы и анализ результатов работы

В ходе работы мы исследовали равноускоренное вращательное движение с помощью маятника Обербека и пришли к следующим заключениям:

1) Закон динамики вращательного движения работает при данных экспериментальных показаниях, т.к. погрешности измерений не вышли за рамки 10% и, исходя из графиков, в которых теоретические измерения находятся в рамках экспериментальных замеров с точностью до погрешности, мы приходим к данному выводу.

2) Момент инерции зависит от расположения грузов-утяжелителей на спицах, причем зависимость  $I(R^2)$  близка к линейной (с точностью до погрешности).