高等数学预备知识

史学睿

日期：August 10, 2020

1 函数的概念与特性

1.1 函数

1.2 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R，如果对于每一个 $y \epsilon R$ ，必存在 $x \epsilon D$ ，使得 $y = f(x)$ 成立，则由此定义了一个新的函数 $x = \phi(y)$. 这个函数就成为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**，$x = f^{-1}(y)$ ，它的定义域为 R，值域为 D，相对于反函数来说，原来的函数也称为**直接函数**，以下两点需要说明：

第一，严格单调函数必有反函数，比如函数 $y = x^2(x \epsilon [0, +\infty))$ 是严格单调函数，故它有反函数 $x = \sqrt{y}$.

有反函数的必定严格单调是不对的，要根据单调定义域判断

第二，若把 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 的图形画在同一坐标系中，则它们完全重合. 只有把 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 写成 $y = f^{-1}(x)$ 之后，它们的图形才关于 $y = x$ 对称，事实上这也是字母 x 与 y 互换的结果。

第三，求解反函数的一般步骤为：

- 求解原函数的单调区间及值域
- 求解 x , 然后互换 x 和 y

1.3 复合函数

双曲正弦函数

$$sinhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{1}$$

反双曲正弦函数

$$y = ln[x + \sqrt{x^2 + 1}] \tag{2}$$

两个求导基本公式

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = ln[x + \sqrt{x^2 + 1}]$$

$$(ln[x + \sqrt{x^2 + 1}])' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

复合函数最重要的就是两个函数定义域与值域的区分，尤其注意:

<u>题目给出的函数定义域是否完全是正确的定义域</u>

1.4 四种特性

1.4.1 有界性

设 $f(x)$ 的定义域为 D ，数集 $I \Subset D$，如果存在某个正数 M ，使得对任一 $x \in I$ ，有 $|f(X)| \leq m$ ，则称 $f(x)$ 在 I 上有界；如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 I 上无界。

注
- 有界还是无界的讨论，首先要指明区间，不知区间，无论有界性
- 事实上，只要区间 I 上存在点 x_0 ，使得函数 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 的值为无穷大，这就叫无界

1.4.2 单调性

设 $f(x)$ 是定义在 $[-l, l]$ 上的任意函数，则
$F_1(x) = f(x) - f(-x)$ 必为**奇函数**；$F_2(x) = f(x) + f(-x)$ 必为**偶函数**

- 奇函数 $y = f(x)$ 的图形关于坐标原点对称，当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有定义时，必有 $f(0) = 0$
- 偶函数 $y = f(x)$ 的图形源于 y 轴对称，且当 $f'(0)$ 存在时必有 $f'(0) = 0$
- 函数 $y = f(x)$ 的图形关于直线 $x = T$ 对称的充分必要条件是

$$f(x) = f(2T - x) 或 f(T + x) = f(T - x)$$

1.4.3 奇偶性

1.4.4 周期性