

Fundamente de inginerie mecanică și robotică

26. 09. 2014

Curs

Introducere în mecanică.

Noțiuni generale

La baza ingineriei mecanice sta că fundamentele
științifică derivate din mecanica clasică (mecanica
newtoniană) care în principiu studiază obli-
gul și mișcarea corpurilor reale.

Principalele noțiuni fundamentale:

1. Materie 2. Mișcare 3. Spatiu 4. Timp

1. Materia reprezentată substanță diu care sunt compuse
corpurile

2. Este o formă de existență a materiei care reflectă
închiderea de poziție a acestuia în spațiu.

3. Spatiul reprezentă totalitatea locurilor ce pot fi
ocupate de corpurile lumii reale, iar modelul mate-
matic al spațiului este cel euclidian-tridimensional
fiind considerat continu și absolut independent de
materie

4. Timpul este o națiune care reflectă succesiunea
sau simultaneitatea desfășurării unor evenimente.

Este continu și ireversibil

Materia, mișcarea, spațiu și timpul sunt insepara-
bili și formează un tot unitar

- E1 - 1.

Noțiuni auxiliare

Punctul material

- este o matrice fictivă
- reprezentă un punct care rugolește o anumită cantitate de materie ("masă")

Mai multe puncte materiale formează un sistem de puncte materiale (interacțiunea, restele etc.)

Dacă distanțele dintre punctele sistemului rămân invariabile în timp și nu apropierea unei puncte se găsește o infinitate de alte puncte \Rightarrow sistem rigid.

- mai multe rigide formează o structură de rigide

Forță

- este o matrice vectorială care reflectă interacțiunea dintre corpurile

- este caract. prin punct de aplicatie, direcție, sens și matrice (modul)

sistem de forțe

- ansamblul de mai multe forțe

- patr. fi:

- forță internă - în interiorul unui sist. de corpuri
- forță extensibila - din afară sist.

- patr. fi:

- -I - dinții aplicate (G , F_e , F_{elug})
- -II - de legătură (reacții)

Sist. de forțe

- mai multe forțe care interacț. asupra aceluiași corp formând un sist. de forțe
- 2 sist. de F sunt echivalente dacă produc același efect asupra aceluiași corp
- dacă ΣF este = cu 0 \Rightarrow nu echilibră

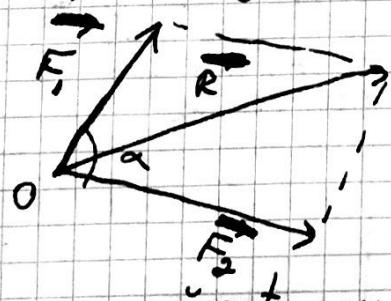
La leaza construcției mecanice stau principiul:

- Princ. acțiunii și reacțiunii
- Princ. inertiș
- Princ. acțiunii forței (princ. fund. al dinam.)
- Princ. paralelogramus lui
- Princ. legăturilor

Reducerea sistemelor de forțe concurențiale

Prima operație de reducere a unui sist. de forțe concurențiale aplicate pe unui material \Rightarrow găsirea rezultantei care are același efect ca și sist. inițial

Pentru 2 forțe concurențiale rezultanta se găsește nu regula paralelogramului. orientare (direcție și sens)



$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \alpha}$$

Orientarea se găsește nu T. sim.

$$\frac{F_1}{\sin(\bar{R}, \bar{F}_2)} = \frac{F_2}{\sin(\bar{R}, \bar{F}_1)} = \frac{R}{\sin(\bar{F}_1, \bar{F}_2)}$$

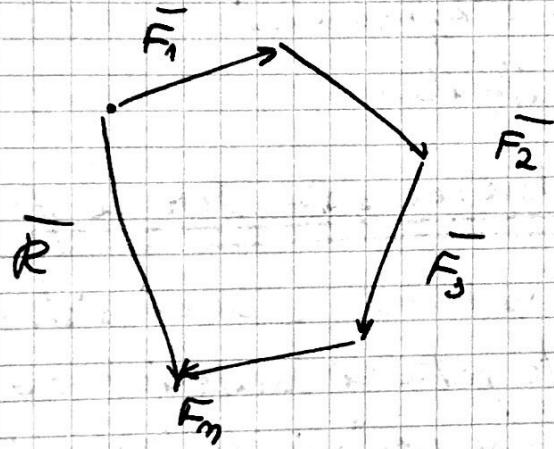
În cazul mai multor forțe se pot aplica:

1. Se aplică succesiv reg. paralelogramului; compunându-se căte o

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \dots + \overline{F_m}$$

2. Utilizarea regulii poligonului: prin care se amplasează forțele pe patru de optări și se extind cu proceduri, să se cunoască rezultanta polig. este rezultanta

$$\Rightarrow R = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m F_i \cdot F_j \cdot \cos(F_i, F_j)}$$



KAROLY. MENYHARDT@UPT.RO

$$\overline{a} \times \overline{b} \approx a \cdot b \cdot \sin \varphi(\overline{a}, \overline{b})$$

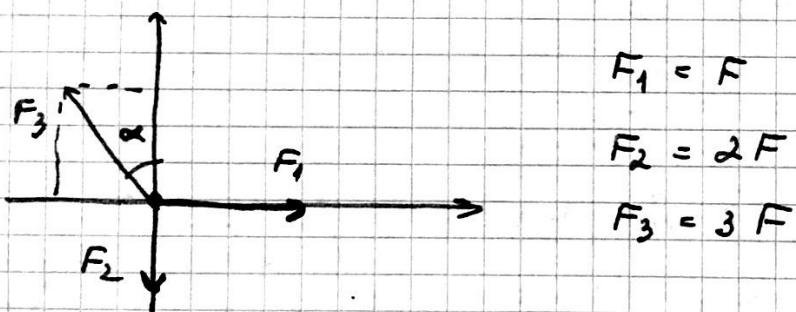
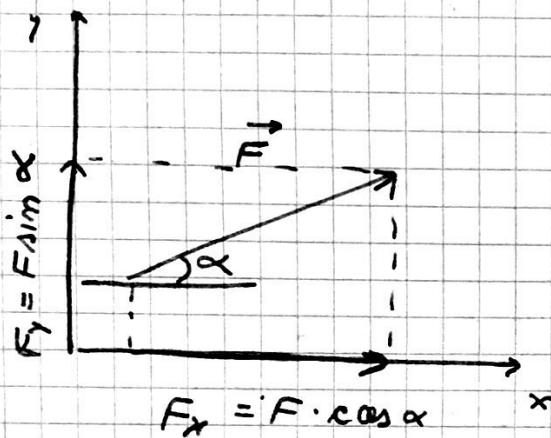
$$\begin{aligned} \overline{a} \cdot \overline{b} &= a \cdot b \cdot \cos \varphi(\overline{a}, \overline{b}) \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\bar{a} = (1, 2, 3)$$

$$\bar{b} = (2, 3, 1)$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + 3\bar{k} + 6\bar{j} - 5\bar{k} - 9\bar{i} - \bar{j} = -7\bar{i} + 5\bar{j} - \bar{k}$$



$$F_1 = F$$

$$F_2 = 2F$$

$$F_3 = 3F$$

$$\bar{R}, |R| = ?$$

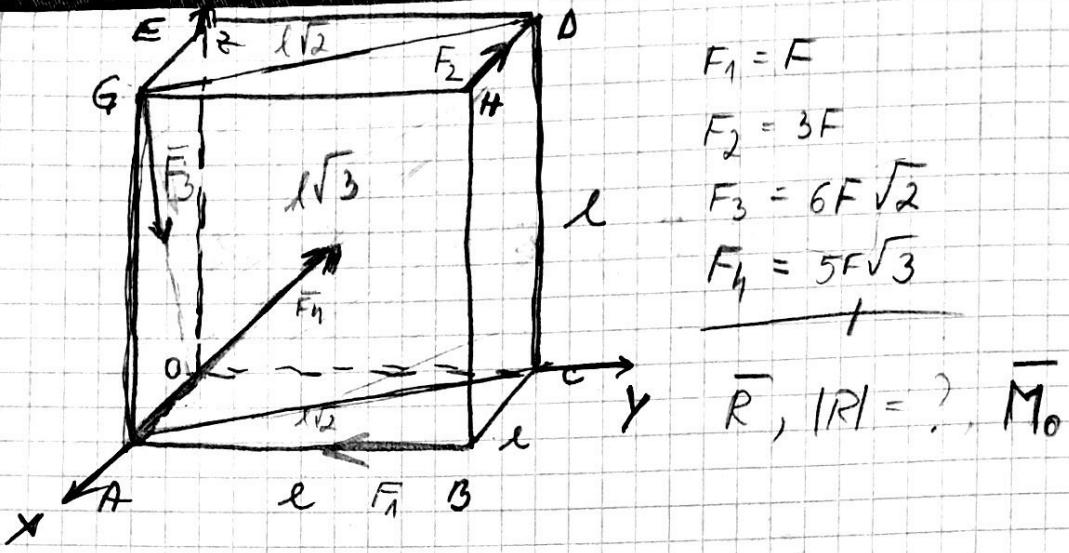
$$\bar{F}_1 = F \cdot \bar{i}$$

$$\bar{F}_2 = 2F \cdot (\bar{j})$$

$$\bar{F}_3 = -3F \cdot \sin \alpha \bar{i} + 3F \cos \alpha \bar{j}$$

$$\bar{R} = \bar{i} (F - 3F \sin \alpha) + \bar{j} (-2F + 3F \cos \alpha)$$

$$|R| = \sqrt{(F - 3F \sin \alpha)^2 + (-2F + 3F \cos \alpha)^2}$$



$$F_1 = F$$

$$F_2 = 3F$$

$$F_3 = 6F\sqrt{2}$$

$$F_4 = 5F\sqrt{3}$$

$$\bar{R}, |R| = ?, \bar{M}_0$$

$$\bar{F}_1 = -F\bar{j}$$

$$\bar{F}_2 = -3F\bar{x}$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_3 &= -6F\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \bar{i} \\ &\quad - 6F\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \bar{k} \\ &= -6F\bar{i} - 6F\bar{k}\end{aligned}$$

$$\left(\tan \frac{\pi}{4} = 1 = \frac{l\sqrt{2}}{l} \right)$$

$$\bar{F}_4 = 5F\sqrt{3} \frac{\bar{AD}}{|\bar{AD}|} = 5F\sqrt{3} \cdot \frac{(\bar{1j} - \bar{lx} + \bar{lk})}{\sqrt{l^2 + (\gamma - 1)^2 + k^2}}$$

$$\begin{aligned}\bar{AD} &= \bar{AB} + \bar{BC} + \bar{CD} \\ &= \frac{5F\sqrt{3} \cdot l(-\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})}{\sqrt{3}} \\ &= -5F\bar{i} + 5F\bar{j} + 5F\bar{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \bar{i}(-3F - 6F - 5F) + \bar{j}(-F + 5F) + \\ &\quad + \bar{k}(-6F + 5F)\end{aligned}$$

$$= -14F\bar{i} + 4F\bar{j} - F\bar{k}$$

$$\Rightarrow |R| = \sqrt{(-14F)^2 + (4F)^2 + (-F)^2} =$$

$$= \sqrt{196F^2 + 16F^2 + F^2} = F\sqrt{213}$$

$$\underline{\bar{M}_0 + \bar{r} \times \bar{R}}$$

$$\overline{M}_O = \overline{M}_{OF_1} + \overline{M}_{OF_2} + \overline{M}_{OF_3} + \overline{M}_{OF_4}$$

$$\overline{M}_{OF_1} = \overline{OB} \times \overline{F_1} \text{ sau } \overline{OA} \times \overline{F_1} = \begin{vmatrix} 1 & j & k \\ l & 0 & 0 \\ 0 & -F & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -Flk$$

$$\overline{M}_{OF_2} = \overline{OH} \times \overline{F_2} \text{ sau } \overline{OB} \times \overline{F_2} = \begin{vmatrix} 1 & j & k \\ 0 & l & l \\ -3F & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overline{M}_{OF_3} = \overline{OG} \times \overline{F_3} \text{ sau } \overline{OO} \times \overline{F_3} = 0$$

$$\overline{M}_{OF_4} = \overline{OA} \times \overline{F_4} \text{ sau } \overline{OB} \times \overline{F_4} =$$

Curs.

3. 10. 2012

Metoda analitică
de reducere a forțelor concurențe

Dacă sist. de forțe se tratează redus este exprimat analitic (poate fi de forma: $\overline{F_i} = F_{xi} \cdot \overline{i} + F_{yj} \cdot \overline{j} + F_{zk} \cdot \overline{k}$) atunci rezultanta sist. va fi: $\overline{R} = \sum_{i=1}^m \overline{F_i} = \sum_{i=1}^m (F_{xi} \cdot \overline{i} + F_{yj} \cdot \overline{j} + F_{zk} \cdot \overline{k})$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m F_{xi} \right)}_X \cdot \overline{i} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m F_{yj} \right)}_Y \cdot \overline{j} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m F_{zk} \right)}_Z \cdot \overline{k}$$

$$\overline{R} = X \cdot \overline{i} + Y \cdot \overline{j} + Z \cdot \overline{k}$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Orientarea rezultantei va fi data de cosinuzi directari:

$$\cos(\bar{R}, \bar{i}) = \frac{x}{R}$$

$$\cos(\bar{R}, \bar{j}) = \frac{y}{R}$$

$$\cos(\bar{R}, \bar{k}) = \frac{z}{R}$$

Acest sist. de forțe este în echilibru $\bar{R} = 0$ care se reduce la un sist. de 3 ecuații scalare

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Echilibrul pătralui material liber și supus la legături

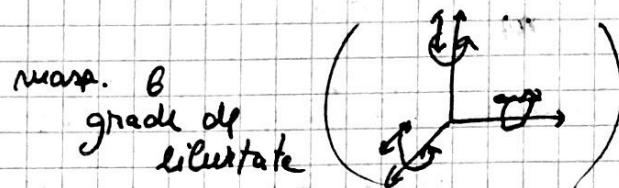
PM liber are 3 grade de libertate coresp. celor 3 translații în spațiu \Rightarrow pătral nu fi în echilibru dacă sist. care acționează asupra lui nu fi în echilibru.

$$\begin{cases} \bar{R} = 0 \\ \sum_{i=1}^m \bar{F}_{xi} = 0 \\ \sum_{i=1}^m \bar{F}_{yi} = 0 \\ \sum_{i=1}^m \bar{F}_{zi} = 0 \end{cases}$$

Obs! pt. PM liber probl. se pot pune 2 feluri:

- fiz se cunosc forțele și se cere pos. de echilibrare
- fiz se cunosc pos. de echil. și nu se cere forțele care să asigure posibilitate

PM supus la legături este supus unor constrângeri geometrice care înlătură nr. de grade de libertate;



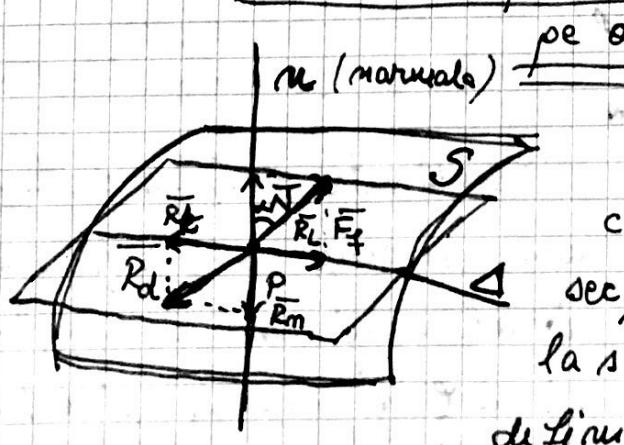
Tu acest raz se aplică axialei legăturilor prin care legăturile fizice sunt înlocuite prin forțe de legătură amintite și reacțiuni. Condiția de echilibru în acest cas nu fi $\bar{R}_d + \bar{R}_L = 0$

\bar{R}_d = result. forțelor direct aplicate

\bar{R}_L = - de legătură

Obs! Legăturile se pot clasifica după caract lor din suprafață și curbe și după natura lor în legături ideale (fără fricare) sau reale (aspre cu fricare).

Echilibrul punctului material



pe o suprafață

considerăm dreptă Δ care este dreptă de intersecție dintre planul tangent la suprafață și planul definit de \bar{R} cu direcția marșulei (perpendicular pe S)

Rezultanta se poate descompune după direcția normală și după direcția Δ

$$\bar{R}_d = \bar{R}_n + \bar{R}_t$$

Componenta normală \bar{R}_n apără PM pe suprafață și conține principiul acțiunii și reacțiunii produse de reacț. normală N egală și de sens contrar

$$\bar{R}_n + \bar{N} = 0$$

Componenta tangențială \bar{R}_t încearcă să deplasce PM pe suprafață și dă naștere forței de fricare

$$\bar{R}_t + \bar{F}_f = 0$$

~~rezultat echilibrat~~

unde F_f este cuprinsă

între 0 și o val. max.

$$0 < F_f \leq \underline{F_{f\max} = \mu \cdot N}$$

OBS! Situația $F_f = \mu \cdot N$ corespunde unei situații de echilibru la limită

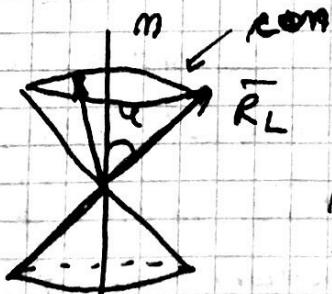
Condiția de echilibru se va putea scrie

$$\bar{R}_d + \bar{R}_L = 0$$

$$\bar{R}_d + \bar{N} + \bar{F}_f = 0$$

OBS! \bar{R}_L face unghiul α cu direcția normală, iar α este maximul cănd F_f este maximă

$$\boxed{\alpha_{\max} = \varphi}$$



Rezultanta forțelor de legătură (\bar{R}_c) poate să ocupe o poziție în interiorul conului sau cu unghiul la vîrf φ și astăzi de simetrie axă normală (con de fricare), sau

pentru echilibru \bar{P}_L este în intervalul concret:

• poziția de pe generatoare

dim trig. abrupt. care se formează se poate deduce

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\mu N}{N} \Rightarrow \mu = \operatorname{tg} \varphi \quad \begin{array}{l} \text{coef. de fricare} \\ \text{care este tangență} \\ \text{înghiului de fricare} \end{array}$$

În cazul ideal F_f dispare și ecuația de echilibru rămasă sub forma: $\bar{P}_d + \bar{N} = 0$

În acest caz, considerând ecuația de suprafață $f(x, y, z) = 0$ atunci normala la această suprafață rea \vec{n} fi orientată de-alun
gul nucărului gradient

$$(\text{grad}) \nabla = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

$$\begin{aligned} N &= \lambda \cdot \text{grad } f \\ \Rightarrow \bar{P}_d + \lambda \cdot \text{grad } f &= 0 \end{aligned}$$

$$0x: \left\{ \begin{array}{l} R_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ f(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$

$$0y: \left\{ \begin{array}{l} R_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ f(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$

$$0z: \left\{ \begin{array}{l} R_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ f(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$

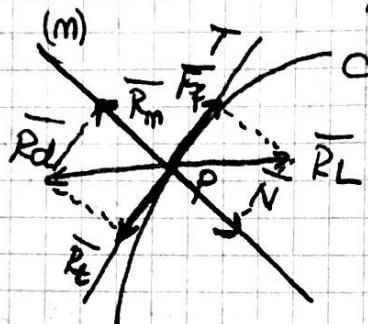
Deacă eliminăm pe λ din sist.:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{R_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{R_z}{\frac{\partial f}{\partial z}} \\ f(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$

\Rightarrow parametrii pozitiei de echilibru

Echilibrul punctului pe o curbă

Considerăm în PM P pe curba C și tangenta la curba T. Asupra P acționează $\overline{R_d}$ (rezultatul



fără încercare aplicată)

care se poate descompune după direcția tangentei și a normalei la curba

$$\overline{R_d} = \overline{R_m} + \overline{R_t}$$

Componenta normală $\overline{R_m}$ trebuie să desprindă PM de pe curba generând reacțiunea normală

\overline{N}

$$\overline{R_m} + \overline{N} = 0 \quad (\text{pt. echilibru})$$

Cimp. tg. $\overline{R_t}$ trebuie să producă alunecarea PM pe curba și generația apariției $\overline{F_f}$

$$\overline{R_t} + \overline{F_f} = 0 \quad (\text{pt. echilibru})$$

Ole! Dacă PM poate părași legături - o anumită direcție atunci legăt. este unilaterală

Dacă PM nu este unilaterală în nicio direcție \Rightarrow
⇒ legăt. bilaterală

$$\overline{R_L} = \overline{N} + \overline{F_f}$$

Ecuația de echilibru:

$$\overline{R_d} + \overline{N} + \overline{F_f} = 0 \quad 0 < F_f \leq F_{\max} = \mu \cdot N$$

Ole! În acest caz se poate soluționa un
con de fricare similar cu cel precedent

În cazul ideal în care $F_f = 0$, ec. de echilibru:

$$\bar{R}_d + \bar{N} = 0$$

curba C este generată prin intersecție a două suprafețe.

$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$, iar normala la curba se poate descompune după direcțiile normale la cele 2 suprafețe.

$$\bar{N} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2 = \lambda_1 \text{ grad } f + \lambda_2 \text{ grad } g$$

Ec. de echilibru devine:

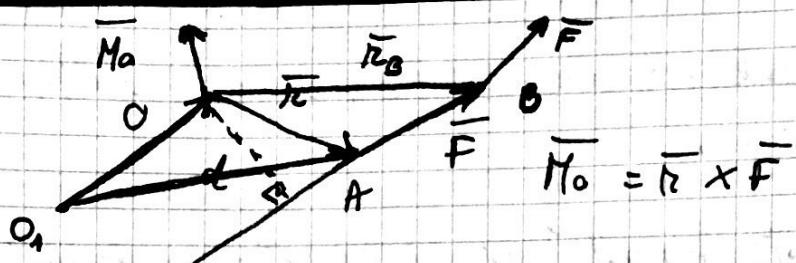
$$\begin{cases} \bar{R}_d + \lambda_1 \text{ grad } f + \lambda_2 \text{ grad } g = 0 \\ f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Prin efectuarea proiecției pe un sist. de axe se obține:

$$\begin{cases} R_x + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ R_y + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ R_z + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \\ f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Momentul forței sau raport cu un punct

Mom. forței făcută de un pct. este rezultatul produsului lui vectorial dintre vectorul de poziție al punctului de aplicare al forței și vectorul forță.



Rezultatul acestui produs este un vector cu
punct de aplicatie in O situat in pe planul
format de fara si pct., iar directia se afla
in regula lungimii lui drept

$$M_O = r \cdot F \cdot \sin(\bar{n}, \bar{F})$$

$$M_O = F \cdot d$$

→ brațul forței / lungimea perpendiculară
dusa din O pe direcția
forței)

OBS! A nu se confunda brațul forței al re-
zultantului de poz. al punctului de aplicare \bar{n}

10. 10. 2014

Curs

Analitic considerand un sistem de coord. fara
de care O (x, y, z) respectiv fara \bar{F} au comp.
(F_x, F_y, F_z) at. se poate scrie

$$\bar{M}_O = \bar{n} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\bar{M}_O = \underbrace{(y F_z - z F_y)}_{M_x} \bar{i} + \underbrace{(z F_x - x F_z)}_{M_y} \bar{j} + \underbrace{(x F_y - y F_x)}_{M_z} \bar{k}$$

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

→ direcția și sensul nu fi date de cosinusii directori

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\overline{M_0}, \overline{i}) = \frac{y F_z - z F_y}{M_0} \\ \cos(\overline{M_0}, \overline{j}) = \frac{z F_x - x F_z}{M_0} \\ \cos(\overline{M_0}, \overline{k}) = \frac{x F_y - y F_x}{M_0} \end{array} \right.$$

Proprietăți:

① Momen. forței față de un punct este nul dacă direcția forței trce prin punctul în care se calculează momentul.

② Momen. forței nu se schimbă dacă ea acționează pe suprafata ei.

$$\overline{M_0}' = \overline{r_B} \times \overline{F} = (\overline{r} + \overline{AB}) \times \overline{F} = \overline{r} \times \overline{F} + \underbrace{\overline{AB} \times \overline{F}}_{=0} = \overline{r} \times \overline{F} = \overline{M_0}$$

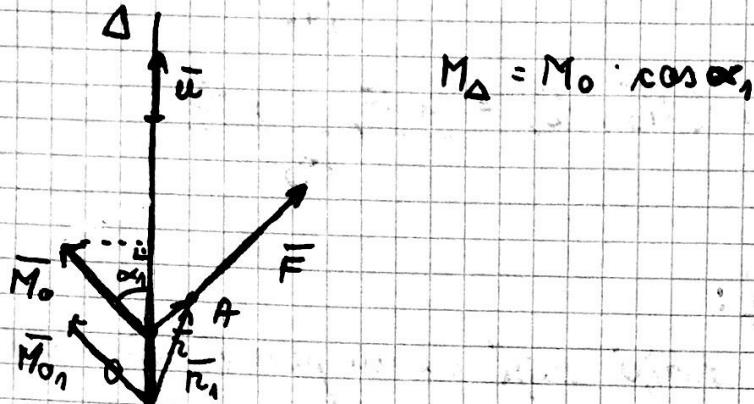
③ Momen. forței este un vector legat de punctul în care se calculează.

$$\overline{M_{O_1}} = \overline{O_1 A} \times \overline{F} = (\overline{O_1 O} + \overline{r}) \times \overline{F} = \overline{r} \times \overline{F} + \overline{O_1 O} \times \overline{F}$$
$$\boxed{\overline{M_{O_1}} = \overline{M_0} + \overline{O_1 O} \times \overline{F}}$$

④ Momen. forței față de orice punct situat pe o paralelă la direcția ei este același.

Momentul forței față de o dreaptă

Def. Reprezentarea proiecția pe axa obiectivă a momentului forței calculat față de un punct al dreptei



$$\text{Analitic: } M_\Delta = \bar{M}_0 \cdot \bar{u}$$

Dacă vectorul \bar{u} se poate exprima analitic sub forma: $\bar{u} = \cos \alpha \cdot \bar{i} + \cos \beta \cdot \bar{j} + \cos \gamma \cdot \bar{k}$

$$M_\Delta = (\bar{r} \times \bar{F}) \cdot \bar{u} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \cdot \bar{u}$$

$$= (y F_z - z F_y) \cos \alpha + (z F_x - x F_z) \cos \beta + (x F_y - y F_x) \cos \gamma$$

Proprietăți

- ① Mom. forței față de o dreaptă este nul dacă forța și dreapta sunt coplanare.
- ② Mom. forței față de o dreaptă nu se modifică dacă forța alcunca pe suporțul ei.
- ③ Mom. forței față de o dreaptă nu depinde de alegera punctului de pe dreapta

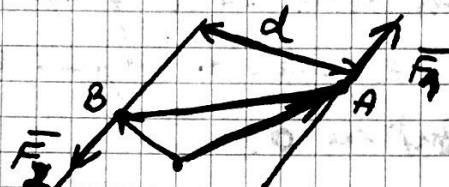
$$\begin{aligned} \bar{M}_{\Delta_1} &= \bar{M}_{0_1} \cdot \bar{u} = (\bar{r}_1 \times \bar{F}) \cdot \bar{u} \\ &= [(\bar{o}_1 \bar{o} + \bar{r}) \times \bar{F}] \cdot \bar{u} = (\bar{o}_1 \bar{o} \times \bar{F} + \bar{r} \times \bar{F}) \cdot \bar{u} \\ &= \underbrace{(\bar{o}_1 \bar{o} \times \bar{F}) \cdot \bar{u}}_{=0} + \underbrace{(\bar{r} \times \bar{F}) \cdot \bar{u}}_{= \bar{M}_\Delta} = \bar{M}_\Delta \end{aligned}$$

④ În mod alternativ momentul forță de o abruptă se poate obține ca moment al componentei forței din planul + pe abruptă forță de patul de intersecție al obr. cu planul.

Cupluri de forțe

Def. Cuplul de forțe este un sist. de 2 forțe egale de sensuri contrare situate pe suporturi paralele

d = brațul ~~și~~ cuplului



$$F_1 = F_2$$

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$$

Se observă că rezultanta sist. este nulă $\bar{R} = 0$ și sist. nu își caracterizează prinț. un moment al cuplului care nu își supează nouă producă de cele două forțe într-un punct.

$$\begin{aligned} \bar{M} - M_0(\bar{F}_1) + M_0(\bar{F}_2) &= \bar{OA} \times \bar{F}_1 + \bar{OB} \times \bar{F}_2 = \\ &= \bar{OA} \times \bar{F}_1 - \bar{OB} \times \bar{F}_1 = (\bar{OA} - \bar{OB}) \times \bar{F}_1 = \\ \boxed{\bar{M} = \bar{BA} \times \bar{F}_1} \end{aligned}$$

Prin urmare cuplul de forțe nu își caract. prinț. un moment ce produce un efect de rotație asupra rigidului:

Dacă sunt mai multe cupluri sunt echivalente dacă produc același efect de rotație asupra aceluiași corp.

Proprietăți

- ① Mom. cuplului este nul \Leftrightarrow brațul cuplului este nul (forțele sunt coliniare)

② Momențul cuplului poate fi calc. practic ca și momentul al uneia dintre forțe față de punctul de aplicare al celeilalte.

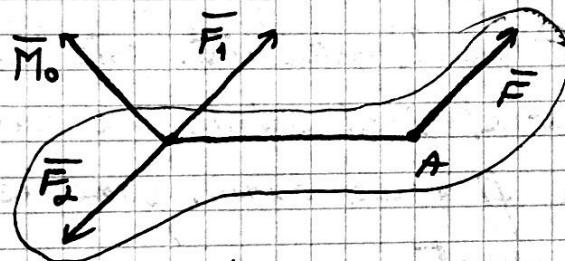
③ Momențul cuplului este același nu orice punct este calculat (adică este un tensor lichid)

Reducerea unei forțe

zi a unui sistem de forțe ntru un punct

Primă reducere unei forțe se supune găsirea elementelor mecanice echivalente (forță și moment) care produc același efect ca și forța inițială.

Pentru reducere se constr. respect. O un sistem de forțe echivalent cu O.



\bar{F} Reprezintă cu \bar{F}_2 formarea unui cuplu de forțe

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$$

$$\tau(\bar{R}, \bar{M}_0)$$

$$F_1 = -F$$

TORSOR

Așadar forța inițială este echivalentă cu o forță identică dar cu pct. de aplicare sau pct. de reducere și un moment M_0 care este num. forței față de pct. de reducere.

Cele două ele. identificate formă torsorul de reducere față de pct. O.

În cazul sist. de forțe fiindu-i dintre forțe se reduce după procedura descrisă și se găsește torsorul sist.

Variatia elementelor torsorului

de reducere la schimbarea punctului

Considerăm un sist. de forțe \bar{F}_i care se reduce la un torsor Σ_0 .

$$\bar{F}_i \quad \Sigma_0 (\bar{R}, \bar{M}_0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{R} = \sum_{i=1}^m \bar{F}_i \\ \bar{M}_0 = \sum_{i=1}^m \bar{r}_i \times \bar{F}_i \end{array} \right.$$

$$O_1 \neq O \Rightarrow \Sigma_{O_1} (\bar{R}, \bar{M}_{O_1}) \therefore \bar{M}_{O_1}$$

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^m \bar{F}_i \quad / \quad \bar{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^m \bar{r}_i \times \bar{F}_i$$

Se constată că primul elem. al Σ nu se schimbă
 \Rightarrow rezultanta este primul invariant al reducerei.

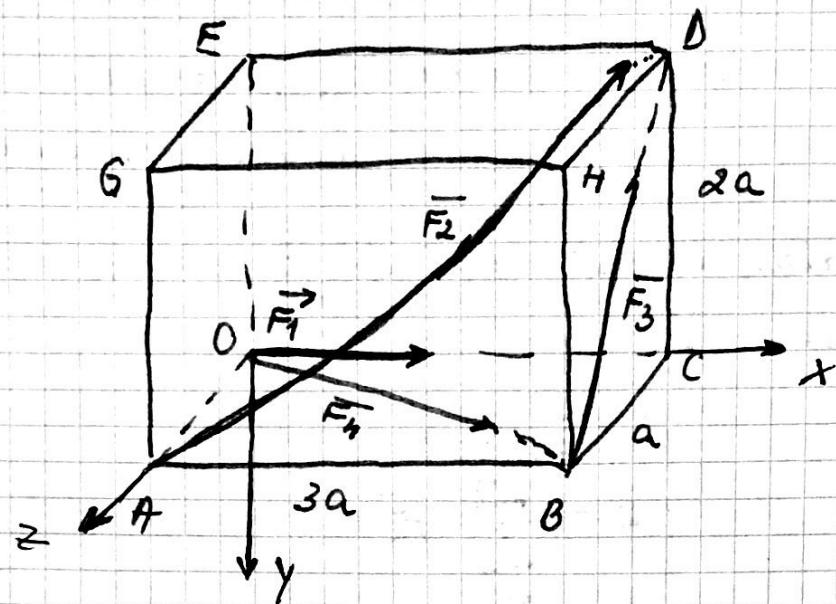
Elem. Σ din O_1 se poate găsi și reducând elem. Σ din O în nouă punct O_1 .

$$\bar{M}'_{O_1} = \overline{O_1 O} \times \bar{R}$$

Momentul \bar{M}_0 fiind un vector liber se poate translata cu pct. de aplicare în O_1 .

$$\boxed{\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_0 + \overline{O_1 O} \times \bar{R}} \quad / \cdot \bar{R}$$

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_{O_1} = \bar{R} \cdot \bar{M}_0 + \underbrace{\bar{R} \times (\overline{O_1 O} \times \bar{R})}$$



$$F_1 = 2F$$

$$F_2 = F\sqrt{14}$$

$$F_3 = 5F\sqrt{5}$$

$$F_4 = 3F\sqrt{10}$$

\bar{R} , $|R|$, \bar{M}_0 , \bar{M}_D , \bar{M}_R , ec. axei centrale

$$\bar{R} = \sum \bar{F}$$

$$\bar{F}_1 = 2F\bar{i}$$

$$\bar{F}_2 = F\sqrt{14} \cdot \frac{\bar{AD}}{|\bar{AD}|}$$

$$= F\sqrt{14} \frac{(-a\bar{j} + 3a\bar{i} - 2a\bar{k})}{\sqrt{(-a)^2 + (3a)^2 + (-2a)^2}}$$

$$= F\sqrt{14} \cancel{a} (3\bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}) = \cancel{F\sqrt{14}} = 3F\bar{i} - F\bar{j} - 2F\bar{k}$$

$$\bar{F}_3 = 5F\sqrt{5} \cdot \frac{(-a\bar{j} - 2a\bar{k})}{\sqrt{(-a)^2 + (-2a)^2}} =$$

$$= 5F\sqrt{5} \cancel{a} (-\bar{j} - 2\bar{k}) = -5F\bar{j} - 10F\bar{k}$$

$$\bar{F}_4 = 3F\sqrt{10} \frac{(3a\bar{i} + a\bar{j})}{\sqrt{(3a)^2 + a^2}} = \frac{3F\sqrt{10} \cancel{a} (3\bar{i} + \bar{j})}{\cancel{a}\sqrt{10}} = 9F\bar{i} + 3F\bar{j}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{R} &= R_x \bar{i} + R_y \bar{j} + R_z \bar{k} = \\
 &= \bar{i} (2F + 3F + 9F) + \bar{j} (-F - 5F + 3F) + \bar{k} (-2F - 10F) \\
 &= 14F \bar{i} - 3F \bar{j} - 12F \bar{k}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(14F)^2 + (-3F)^2 + (-12F)^2} = \\
 = \cancel{-34.9} F \sqrt{34.9}$$

$$\bar{M}_o = \bar{M}_{o_{F_1}} + \bar{M}_{o_{F_2}} + \bar{M}_{o_{F_3}} + \bar{M}_{o_{F_4}}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_{o_{F_1}} &= \bar{OC} \times \bar{F}_1 = \bar{OO} \times \bar{F}_1 = 0 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3a & 0 & 0 \\ 2F & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_{o_{F_2}} &= \bar{OA} \times \bar{F}_2 \\
 \bar{OA} \times \bar{F}_2 &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3a & 0 & -2a \\ 3F & -F & -2F \end{vmatrix} = -2aF \bar{i} - 3aF \bar{k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_{o_{F_3}} &= \bar{OB} \times \bar{F}_3 \\
 \bar{OB} \times \bar{F}_3 &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3a & a & 0 \\ 0 & -5F & -10F \end{vmatrix} = -10Fa \bar{i} \\
 &\quad + 30Fa \bar{j} \\
 &\quad - 15aF \bar{k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_{o_{F_4}} &= \bar{OG} \times \bar{F}_4 = 0 \\
 \bar{OG} \times \bar{F}_4 &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_o &= -2aF \bar{i} - 3aF \bar{k} - 10Fa \bar{i} + 30Fa \bar{j} - 15aF \bar{k} \\
 &= -12aF \bar{i} + 30Fa \bar{j} - 15aF \bar{k}
 \end{aligned}$$

$$\overline{M}_D = \overline{M}_{DF_1} + \overline{M}_{DF_2} + \overline{M}_{DF_3} + \overline{M}_{DF_4}$$

$$\overline{M}_{DF_1} = \frac{\overline{O}\overline{O} \times \overline{F_1}}{\overline{O}\overline{C} \times \overline{F_1}} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -3a & 0 & 2a \\ 2F & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4aF\overline{j}$$

$$\overline{M}_{DF_2} = \overline{O}\overline{O} \times \overline{F_2} = 0$$

$$\overline{M}_{DF_3} = \overline{O}\overline{O} \times \overline{F_3} = 0$$

$$\overline{M}_{DF_4} = \overline{O}\overline{O} \times \overline{F_4}$$

$$\overline{O}\overline{B} \times \overline{F_4} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & a & 2a \\ 9F & 3F & 0 \end{vmatrix} = -6aF\overline{i} + 18aF\overline{j} - 9aF\overline{k}$$

$$\overline{M}_D = \overline{M}_0 + \overline{O}\overline{O} \times \overline{R}$$

$$\overline{M}_R = \frac{\overline{M} \cdot \overline{R}}{|R|} \cdot \frac{\overline{R}}{|R|} \text{ s.u. } M_R = \frac{\overline{M} \cdot \overline{R}}{|R|}$$

$$M_R = \frac{M_x \cdot R_x + M_y \cdot R_y + M_z \cdot R_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} =$$

$$= \frac{(-12aF \cdot 14F) + (30aF \cdot (-3F)) + (-18aF \cdot (-12F))}{F\sqrt{349}}$$

= ...

$$\overline{k} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} \Rightarrow M_x \overline{i} + M_y \overline{j} + M_z \overline{k}$$

$$\begin{cases} M_x = y R_z - z \cdot R_y \\ M_y = z R_x - x \cdot R_z \\ M_z = x R_y - y R_x \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 30 \\ \hline 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 19 \\ \hline 38 \\ 12 \end{array}$$

$$\frac{M_x - (\textcircled{1} R_z - \textcircled{2} R_y)}{R_x} = \frac{M_y - (\textcircled{2} R_x - \textcircled{3} R_z)}{R_y} = \frac{M_z - (\textcircled{3} R_y - \textcircled{1} R_x)}{R_z}$$

$$\begin{cases} R_y (M_x - (y R_z - z R_y)) = R_x (R_y - (z R_x - x R_z)) \\ R_y (M_z - (x R_y - y R_x)) = R_z (M_y - (z R_x - x R_z)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3F (-12aF - (y \cdot (-12F) - z \cdot (-3F))) = 14F(30aF - \\ \quad -(z \cdot 14F - x \cdot (-12F))) \\ -3F (-18aF - (x \cdot (-3F) - y \cdot 14F)) = \\ \quad -12F(30aF - (z \cdot 14F - x \cdot (-12F))) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 36a - 36y + 9z = 420a - 196z - 168x \\ 54a - 9x - 42y = -360a + 168z + 144x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 168x - 36y + 205z = 384a \\ -153x - 42y - 168z = -414a \end{cases}$$

$x, y = f(z)$
 $x, z = f(y)$
 $y, z = f(x)$

www.mec.vpt.no / meca / pas 20 students

Prin definiție axa centrală este lăcul geometric al punctelor din spațiu fără de care dacă se face reducerea se obține tensorul minim axial.

$$\overline{F_i} \rightarrow i = 1, \dots, n$$

$$O: \mathcal{T}_o (\bar{R}, \underline{\bar{M}_o})$$

P. presupus apartinând acei centrale

$$\mathcal{T}_p (\bar{R}, \bar{M}_p)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{R} = \sum_{i=1}^n \overline{F_i} \\ \bar{M}_p = \bar{M}_o + \bar{P}\bar{O} \times \bar{R} / R \times \end{array} \right.$$

$$\bar{R} \times \bar{M}_p = \bar{R} \times \bar{M}_o + \bar{R} \times (\bar{P}\bar{O} \times \bar{R})$$

$$\underbrace{\bar{R} \times \bar{M}_p}_{\text{"}} = \bar{R} \times \bar{M}_o + \bar{R} \times (\bar{P}\bar{O} \times \bar{R})$$

$$\bar{P}\bar{O} = -\bar{O}\bar{P}$$

$$\bar{O}\bar{P} = \bar{r}_\Delta$$

$$\bar{R} \times \bar{M}_o - \bar{R} \times (\bar{r}_\Delta \times \bar{R}) = 0$$

$$\bar{R} \times \bar{M}_o - \bar{r}_\Delta \cdot \bar{R}^2 + (\bar{R} \cdot \bar{r}_\Delta) \cdot \bar{R} = 0$$

$$\bar{r}_\Delta = \frac{\bar{R} \times \bar{M}_o}{\bar{R}^2} + \frac{\bar{R} \cdot \bar{r}_\Delta}{\bar{R}^2} \cdot \bar{R}$$

$$\boxed{\bar{r}_\Delta = \frac{\bar{R} \times \bar{M}_o}{\bar{R}^2} + f \cdot \bar{R}} \quad \begin{matrix} f \\ \text{expresie vectorială} \end{matrix}$$

a acei centrale

Analitic, plecând de la expresia inițială:

$$\overline{M}_P = \overline{M}_0 - \overline{r}_A \times \overline{R}$$

arend, nu avdure că \overline{R} și \overline{M}_P sunt coliniare:

$$\overline{M}_P = \lambda \cdot \overline{R}$$

$\lambda \cdot \overline{R} = \overline{M}_0 - \overline{r}_A \times \overline{R}$ ecuația vectorială se proiectează pe sist. carteziun

$$0 \cdot x. \begin{cases} \lambda \cdot R_x = M_{0x} - (y R_z - z R_y) \end{cases}$$

$$0 \cdot y. \begin{cases} \lambda \cdot R_y = M_{0y} - (z R_x - x R_z) \end{cases}$$

$$0 \cdot z. \begin{cases} \lambda \cdot R_z = M_{0z} - (x R_y - y R_x) \end{cases}$$

$$\frac{M_{0x} - (y R_z - z R_y)}{R_x} = \frac{M_{0y} - (z R_x - x R_z)}{R_y} = \frac{M_{0z} - (x R_y - y R_x)}{R_z}$$

\Rightarrow formula scalară a ec. axei neutrale din care grupând cele 3 rapoarte 2 cu 2 se obțin 2 ecuații care reprezintă intersecția a 2 plane din spațiu

Obs! Axa neutrală există dacă $\overline{R} \neq 0$

Obs! În funcție de valoriile rezultantei momentului resultant a prod. scalar $\overline{R} \cdot \overline{M}$ și a uighinii α obținute ele se pot identifica 4 cazuri de reducere:

$$1. \overline{R} \neq 0, \overline{M}_0 \neq 0, \overline{R} \cdot \overline{M} \neq 0, \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

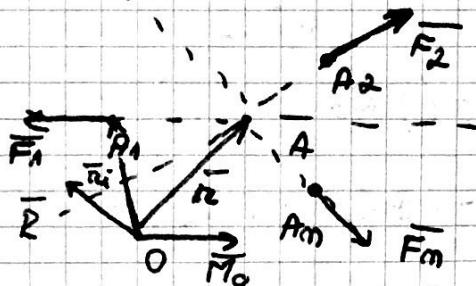
Sist. se reduce la un torsor complet care adunăte astă "neutrală" și admite formula minimă și este cel mai răspunsabil

$$\text{II. } \bar{R} \cdot \bar{M} = 0$$

$$\text{II. a. } \bar{R} \neq 0, \bar{M} \neq 0, \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Cazuri particulare de forțe.

1. Sisteme de forțe concurențe



Prin reducerea sist. nu O se găsesc cele 2 elemente ale tensorului:

$$\begin{cases} \bar{R} = \sum_{i=1}^m \bar{F}_i \\ \bar{M}_0 = \sum_{i=1}^m \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \sum_{i=1}^m (\bar{r} + \bar{A}\bar{A}_i) \times \bar{F}_i = \\ \underline{\bar{r}_i} = \bar{r} + \bar{A}\bar{A}_i \quad = \sum_{i=1}^m [(\bar{r} \times \bar{F}_i) + (\bar{A}\bar{A}_i \times \bar{F}_i)] \\ = 0 \end{cases}$$

$$= \sum_{i=1}^m \bar{r} \times \bar{F}_i = \bar{r} \times \sum_{i=1}^m \bar{F}_i = \bar{r} \times \bar{R}$$

$$\boxed{\bar{M}_0 = \bar{r} \times \bar{R}} \Rightarrow \text{nu acest car., momentul rezultant} = \text{num. rezultant}$$



Oles! Această expresie se numește Torsorul lui Varignon

2. Sisteme de forțe paralele

Presupunem un sist. de forțe \bar{F}_i paralele cu un răsor \bar{u} al unei direcții oarecare.

$$\bar{F}_i, \bar{u}, \bar{F}_i \parallel \bar{u}$$

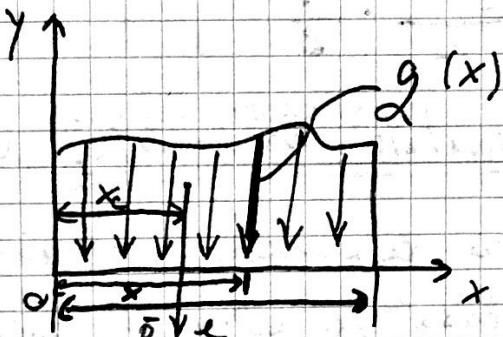
$$\begin{aligned} T_0 &= (\bar{R}, \bar{M}_0) \\ \bar{R} &= \sum_{i=1}^m \bar{F}_i = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m F_i \right)}_R \cdot \bar{u} = \underline{\bar{R} \cdot \bar{u}}, \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\bar{F}_i = F_i \cdot \bar{u}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_0 &= \sum_{i=1}^m \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \sum_{i=1}^m \bar{r}_i \times F_i \cdot \bar{u} = \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^m F_i \cdot r_i \cdot \bar{u}}_{\textcircled{2}} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow \bar{R} \perp \bar{M}_0$$

3. Sisteme de forțe parallele distribuite
(pe o dreaptă, pe o suprafață sau în spatiu)



Rezultanta acestor forțe distribuite paralele este egală cu aria de sub curba

$$\bar{R} = \int_0^x -\bar{g}(x) \cdot dx$$

$$\bar{M}_0 = \int_0^x (x \bar{r}) \times (-\bar{g} \cdot \bar{j}) dx = -\bar{k} \cdot \int_0^x x \cdot \bar{g}(x) \cdot dx$$

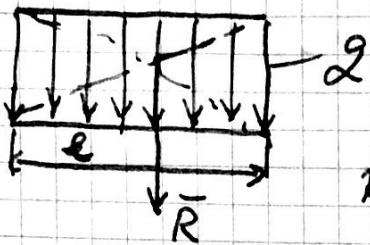
\Rightarrow În concluzie sist. se reduce la două elem. 1 altă
ele și se poate reface cu o rezultantă unică și trage
prin centrul forțelor parallele notat cu C.

$$x_C = \frac{\int_0^x x \cdot \bar{g}(x) dx}{\int_0^x \bar{g}(x) \cdot dx}$$

Situatii particulare:

- a) fara de un foru distribuie dreptunghiular
- b) 1) - triangular

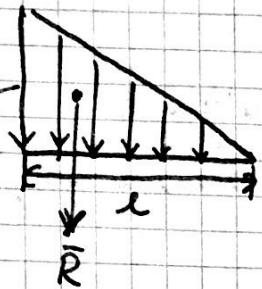
a)



$$R = g \cdot l$$

$$M = \frac{g \cdot l^2}{2}$$

ii)

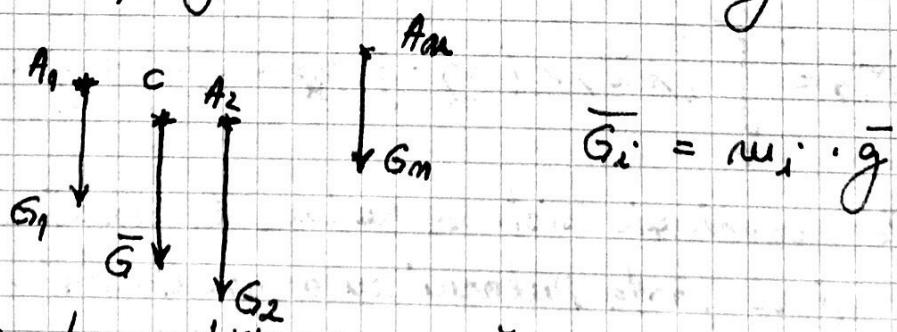


$$R = \frac{g \cdot l}{2}$$

$$M = \frac{g \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{3}$$

Centru de greutate. Generalizari

Presupunem un sistem de puncte materiale A_i de masă m_i plasat în cadrul gravitațional terestru \Rightarrow asupra lor acionează forță de atracție gravitațională numită greutate



$$\overline{G}_i = m_i \cdot \bar{g}$$

Acste greutăți formează un sist. de forțe parallele cu un rezultantă $G = \sum_{i=1}^m \overline{G}_i = \left(\sum_{i=1}^m m_i \right) \cdot \bar{g} = M \cdot \bar{g}$

Punctul de aplicatie al greutății nu fi' în centru
pentru paralele:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{G}_i \cdot \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^m \bar{r}_i}$$

Într-un corp gravitațional omogen, $\bar{G}_i = m_i \cdot \bar{g}$

$$\Rightarrow \bar{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^m m_i \cdot \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^m \bar{r}_i} \quad \begin{array}{l} \text{(reprezintă punctul de paritate} \\ \text{al centrului maselor care} \\ \text{într-un corp gravit. omogen} \\ \text{coincide cu centru de greutate)} \end{array}$$

Pentru corpuri nereguli, acestea nu fi' discopuse
nu volume ΔV , de masse Δm a.r. expresia centru
de greutate devine:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^m \Delta m \cdot \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^m \bar{r}_i}$$

În continuare, prim trecere la limită:

$\Delta m \rightarrow 0$ și $\Delta V \rightarrow \infty$ se transformă
nu integrale pe domeniul acoperit de corp.

$$\Rightarrow \bar{r}_c = \frac{\int_{(A)} \bar{r}_i \cdot d m}{\int_{(A)} d m}$$

Unde A poate fi L , A , V
englezice care valoare

Proprietăți.

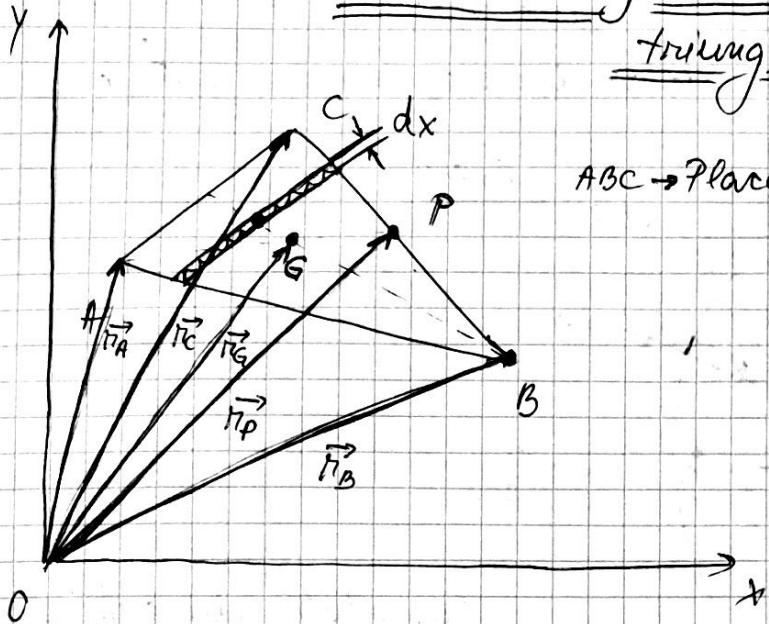
1. Dacă un corp prezintă o axă sau un plan de simetrie \Rightarrow centrul de greutate nu fi pe acea axă sau acel plan
2. Dacă în locul ~~unei~~ musculari unui sistem se introduc ~~noi~~ noi proporționale \Rightarrow c. de greut. nu se modifică
3. C. de greut. nu depinde de alegerea sist. de referință
4. Dacă punctele sistemului se găsesc în interiorul unei suprafețe conexe \Rightarrow c. de greut. se va afla în interiorul suprafeței conexe
5. Dacă un sistem se poate descompune în mai multe subsisteme și se cunosc masile M_1, M_2, \dots, M_p și pozițiile centrelor de greut. $r_{C_1}, r_{C_2}, \dots, r_{C_p}$ \Rightarrow centr. de greut. al tuturor lui sist. se poate găsi astfel:

$$\bar{r}_G = \frac{M_1 \bar{r}_{C_1} + M_2 \bar{r}_{C_2} + \dots + M_p \bar{r}_{C_p}}{M_1 + M_2 + \dots + M_p}$$

6. Dacă dintr-un sist. se extrage un subsist. și se cunosc M_k, M_s și r_{C_k} și r_{C_s} \Rightarrow după redată. unei subsist. c. de g. rămâne la vectorul de pas.

$$\bar{r}_C = \frac{M_k \bar{r}_{C_k} - M_s \bar{r}_{C_s}}{M_k - M_s}$$

Centrul de greutate al plăcii plane
triunghiulară



$ABC \rightarrow$ Plăcă plană triunghiulară
 și omogenă

$$\overline{r}_P = \frac{\overline{r}_B + \overline{r}_C}{2}$$

$$\overline{r}_G = \overline{r}_A + \overline{AG}$$

$$AG = \frac{2}{3} AP, (GP = \frac{1}{3} AP)$$

$$GP = \frac{1}{2} AG$$

$$\overline{r}_P = \overline{r}_A + \overline{AG} + \overline{GP} =$$

$$= \overline{r}_A + \frac{3}{2} \overline{AG}$$

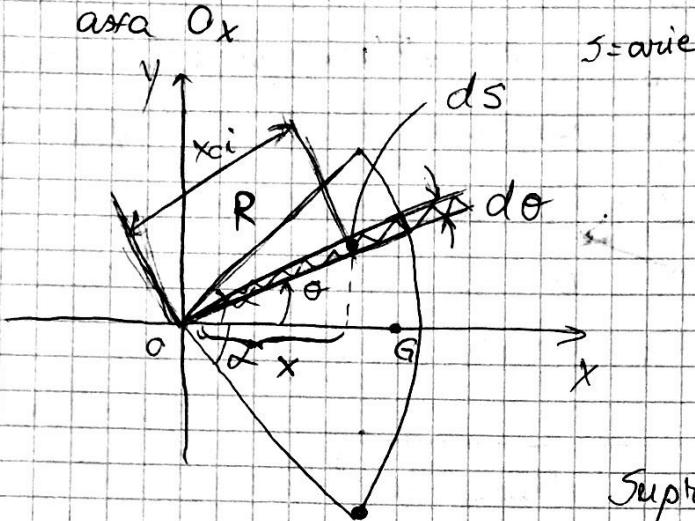
$$AG = \frac{2(\overline{r}_P - \overline{r}_A)}{3}$$

$$\begin{aligned} \overline{r}_G &= \overline{r}_A + \frac{2(\overline{r}_P - \overline{r}_A)}{3} = \\ &= \frac{\overline{r}_A + \overline{r}_B + \overline{r}_C}{3} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{array} \right.$$

Centrul de greutate al sectorului de cerc

Considerăm un sector de cerc dispus simetric față de



$$y_G = 0$$

$$x_G = \frac{\int_{(S)} x \cdot ds}{\int_{(S)} ds}$$

$$ds = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot d\theta = \frac{1}{2} R^2 \cdot d\theta \quad x_{ci} = \frac{2}{3} R \cos \theta$$

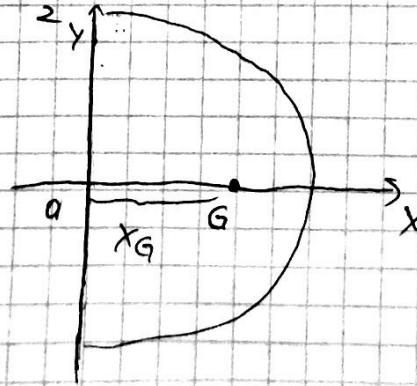
$$x_G = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3} R \cos \theta \cdot \frac{1}{2} R^2 \cdot d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} R^2 \cdot d\theta} = \frac{\frac{2}{3} R}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} R^2 \cdot d\theta} \frac{\sin \theta}{\theta} \Big|_{-\alpha}^{\alpha} =$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

* Anguliul α se introduce în RAD (radian)

Cazuri particulare :

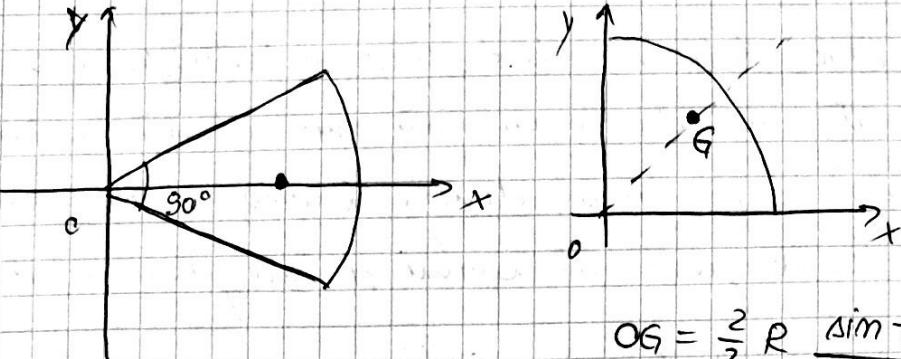
1. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ \Rightarrow sectorul se transformă într-un semicerc



$$x_G = \frac{2}{3} R \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{4R}{3\pi}$$

2. $\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ sect. se transfor. mutr. cu sfert de cerc

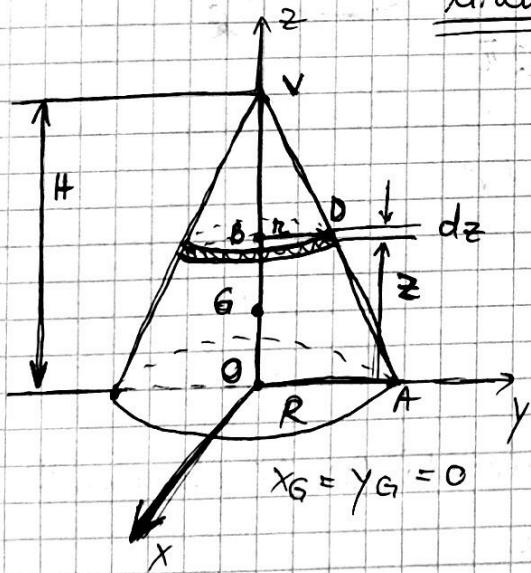


$$OG = \frac{2}{3} R \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G = OG \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{4}{3} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \\ y_G = OG \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{4}{3} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \end{array} \right.$$

Centru de greutate pentru conul circular drept

$V = \text{volum}$



$$z_G = \frac{\int_V z \cdot dV}{\int_V dV}$$

$$dV = \pi r^2 \cdot dz$$

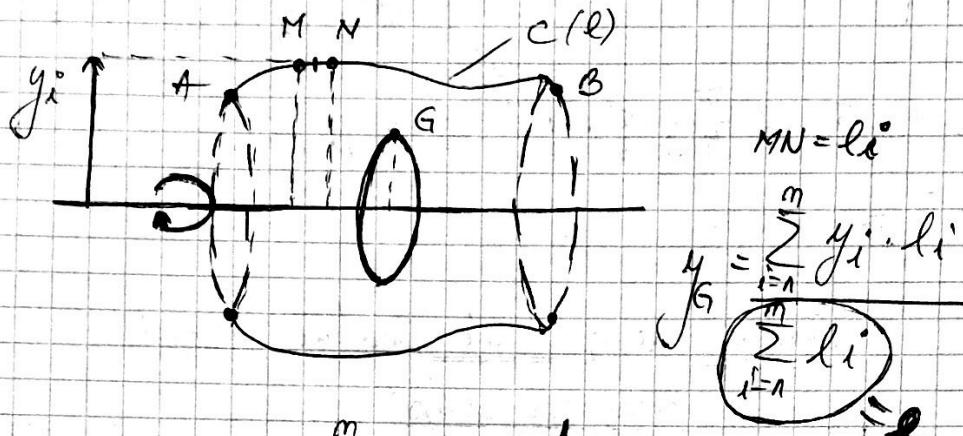
$$\Delta VBD \approx 4 VOA$$

$$\frac{r}{R} = \frac{H-z}{H} \Rightarrow r = \frac{R(H-z)}{H}$$

$$\Rightarrow z_G = \frac{\int_0^H z \cdot \frac{R^2(H-z)^2}{H^2} \cdot dz}{\int_0^H \frac{R^2(H-z)^2}{H^2} \cdot dz} = \frac{\int_0^H z(H^2 - 2Hz + z^2) \cdot dz}{\int_0^H (H^2 - 2Hz + z^2) \cdot dz} = \frac{H}{4}$$

Teoremele lui GUILDIN

- (11) Aria laterală descrisă prin rotația unei curbe, în jurul unei axe de rotatie cu care nu se intersectează este egală cu produsul dintre lungimea cercului descris de c. de gravit. al curbei și lungimea curbei.



$$\Rightarrow y_G \cdot l = \sum_{i=1}^m y_i \cdot l_i / 2\pi$$

$$2\pi \cdot y_G \cdot l = \sum_{i=1}^m 2\pi \cdot y_i \cdot l_i$$

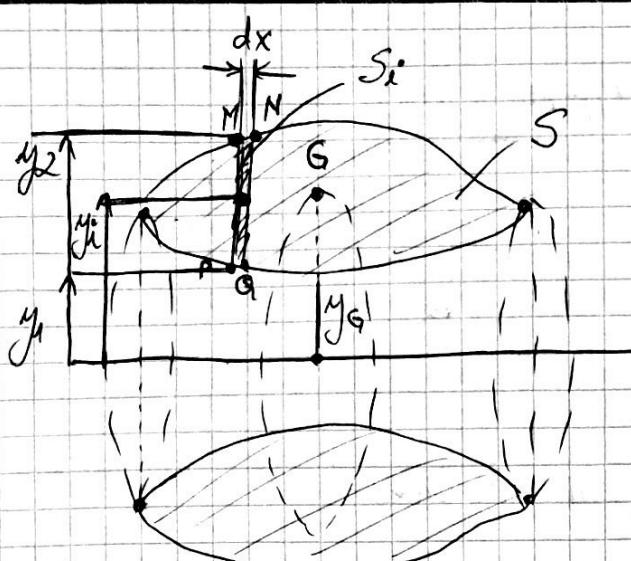
$$2\pi \cdot y_G \cdot l$$

$$2\pi \cdot y_i$$

$\sum 2\pi y_i \cdot l_i \Rightarrow$ aria laterală totală descrisă de curba în rotație

$$A_{lat} = 2\pi y_G \cdot l$$

- (12) Volumul obținut prin rotația unei suprafețe în jurul unei axe de rotatie cu care nu se intersectează este egal cu prod. dintre lung. cercului descris de c. de gravit. al suprafeței și aria suprafeței.



$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^m y_i \cdot S_i}{\sum_{i=1}^m S_i}$$

$$S_i = (y_2 - y_1) \cdot dx$$

$$y_i = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

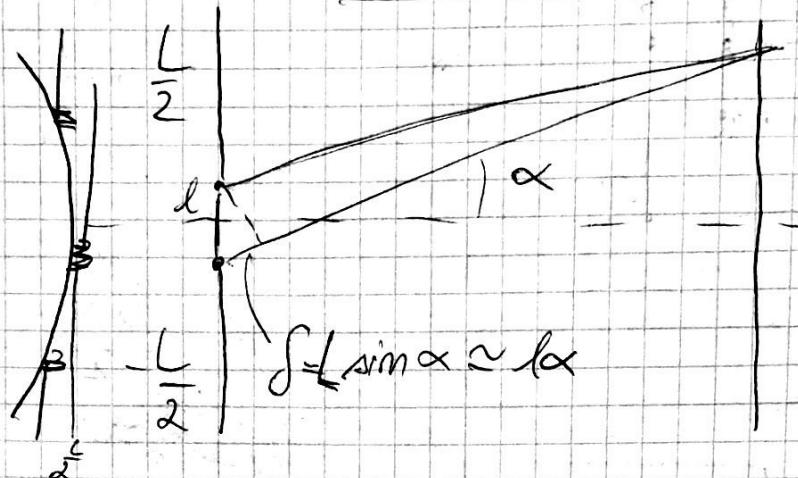
~~y_i~~

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)dx}{\sum_{i=1}^m (y_2 - y_1)dx}$$

$$y_G \cdot S = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2}(y_2^2 - y_1^2)dx \quad | \cdot 2\pi$$

$$2\pi y_G \cdot S = \sum_{i=1}^m \pi y_2^2 dx - \sum_{i=1}^m \pi y_1^2 dx$$

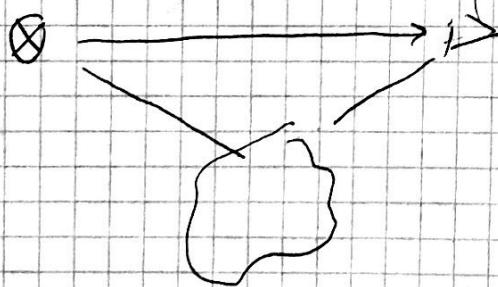
$$\begin{aligned} & - \pi y_2^2 \\ & - \pi y_2^2 dx \\ & - \sum_{i=1}^m \pi y_2^2 dx \end{aligned}$$



$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos \left(\omega t + \alpha - \frac{l \alpha}{\lambda} \right) dl =$$

$$= L \sin \frac{i \alpha L}{\lambda} \cos \omega t$$

$$I(\alpha) = (A)^2 = I_0 \frac{\sin^2 \frac{i \alpha L}{\lambda}}{\left(\frac{i \alpha L}{\lambda} \right)^2}$$



lîcăr și supus la ligătură

Mu rigid este lîcăr dacă poate ocupa orice poziție în spațiu și are un nr. de 6 grade de libertate.

Rigidul este în echilibru dacă sist. de forțe care acționează este zero

$$\begin{cases} \bar{R} = 0 \\ \bar{M} = 0 \end{cases}$$

Rigidul supus la ligătură are un nr. de grade de libertate diminuat de alte corpură care îl împiedică anumite mișcări.

Ligăturile se rălocuiesc cu forțe de ligătură sau tracțiuni echivalente ca efect a. n. condiția de echilibru va fi:

$$\begin{cases} \bar{R}_d + \bar{R}_e = 0 \\ \bar{M}_d + \bar{M}_e = 0 \end{cases}$$
Ligături ideale ale rigidului

Principalele ligături: a) răciorare

b) articulație

c) răcastrare

d) ligătură prin fir

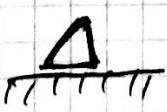
a) Răciorare

- este ligătură prin care rigidul se sprijină unul pe celălalt

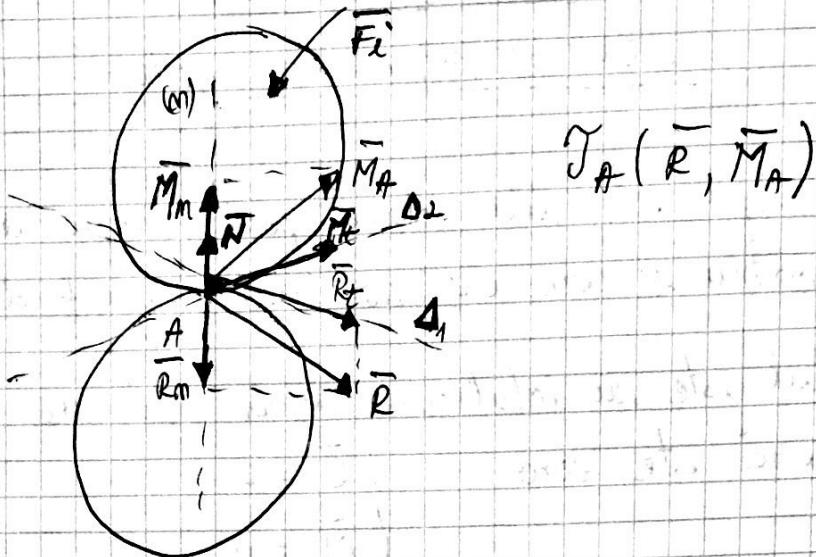
Simboli:



răciorare fixă



răciorare mobilă



$$\begin{cases} \bar{R} = \bar{R}_m + \bar{R}_t \\ \bar{M}_A = \bar{M}_t + \bar{M}_m \end{cases}$$

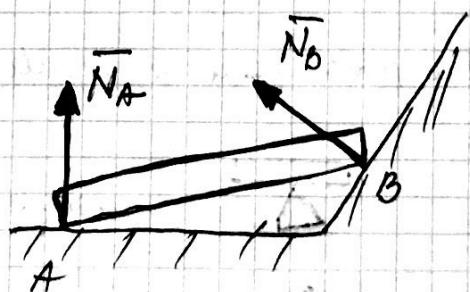
Datărătă faptului că legătura este ideală, să nu se poate opri efectul creat de R_t , M_m , M_t

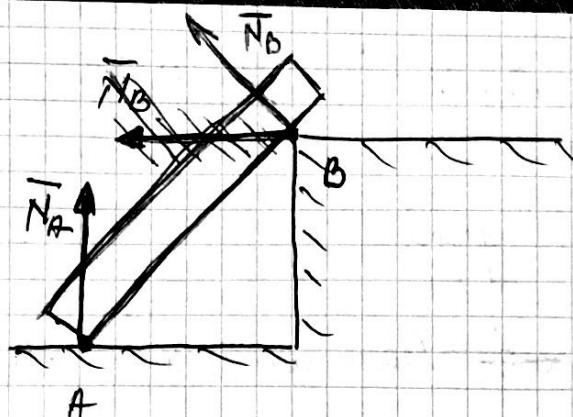
$$\text{pt. echilibru } R_t = M_m = M_t = 0$$

Componenta R_m , conform princ. acțiunii reacției generată machinie normală \Rightarrow ptr. ech: $\bar{R}_m + \bar{N} = 0$

În concluzie, rezumarea într-o că și fără de legătura o machinie normală \perp pe suprafață în contact

Obs! Dacă una dintre suprafețe prezintă un punct singular \Rightarrow direcția normalui respectiv perpendiculară se reduce la cealaltă suprafață.





ii) Articulația

- reprezintă legătura unui corp printr-o care se asigură un punct fix în jurul căruia corpul se poate rota.

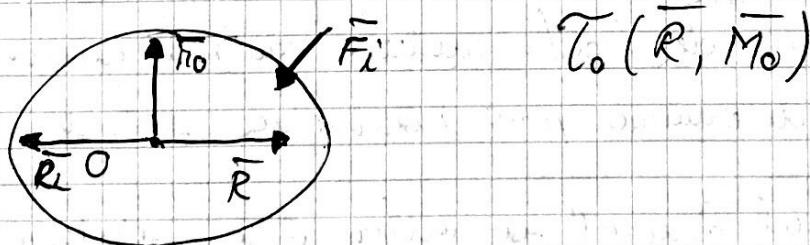
1) Articulații sférici

- rotatia se poate face în orice direcție, în orice plan; reduc nr. de gr. de libertate de la 6 la 1

2) — cilindrice

- —, într-un singur plan

- reduc nr. de gr. de libertate de la 6 la 3



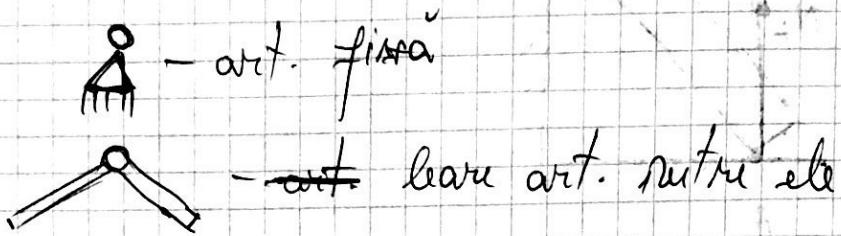
Articul. fiind ideală nu se poate opri cu mână. \vec{M}_0
Pentru echilibru $\vec{M}_0 = 0$

$$\begin{cases} \vec{R} + \vec{R}_L = 0 \\ \vec{M}_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{condițile de echilibru ale corpului articulat}$$

În concluzie, legăt. prin articulație introd. o fază de legăt. numita reacțiunea din articulație \vec{R}_L care, pentru art. sferică are 3 componente (R_x, R_y, R_z)

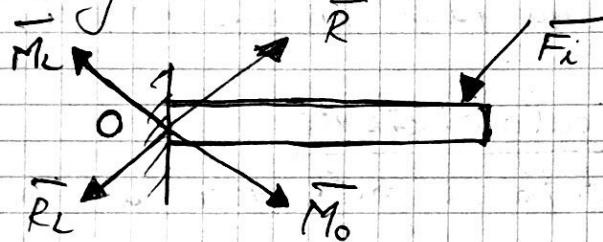
iar pentru art. cilindrica" (R_x, R_y)

Simplificări:



c) Incastrarea

- este legătura prin care rigidului i se suprimă toate gr. de libertate



$$T_0 (\vec{R}, \vec{M}_0)$$

Conform princ. act., -reacții în incastrare (în punctul 0) sunt generate o forță de leg. \vec{R}_L a. l.
 $\vec{R} + \vec{R}_L = 0$ și un mom. de leg. \vec{M}_L a. l.
 $\vec{M}_0 + \vec{M}_L = 0$

În concluzie incastrarea introduce o forță și un mom. de legăt. ambele inițial necunoscute și se vor determina prin rezolvarea sist. de ec. de echil.

În cazul general se obțin 6 ec. scalare, iar în cazul particular al unei "incastrări" plane, sist. se reduce la 3 ec. scalare:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_p = 0 \end{array} \right.$$

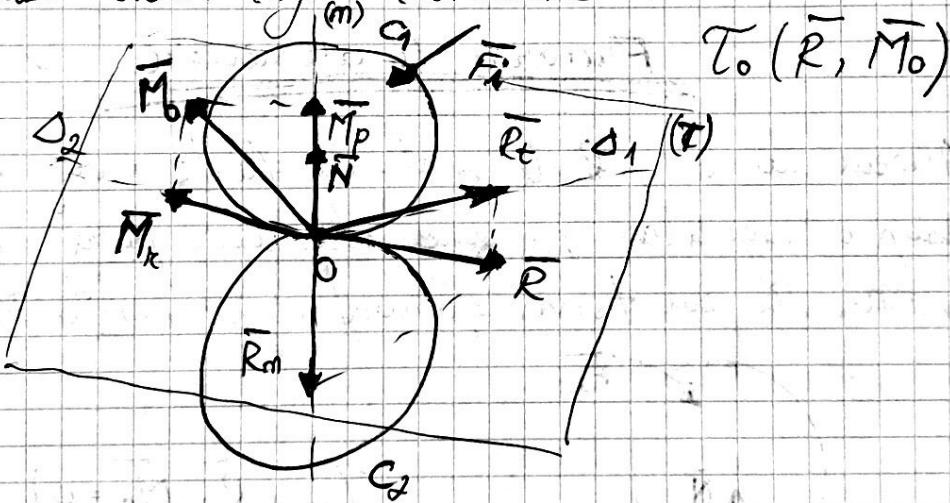
d) Zegătura prim fil

- poartă denumirea de tensiune din fil și urmează tot timpul direcția firului
- fir flexibile și inextensibile
- este o legătură unilaterală



Echilibrul rigidului cu fricare

Prin două rigide rezunante:



Descompunem cele două eluri. după normala comună și direcțile din planul tangent C_1 și C_2 . Componenta \bar{R}_m - produce reacț. normala a.?

$$\bar{R}_m + \bar{N} = 0$$

Componenta \bar{R}_t - trebuie să deplasze rigidul în planul tangent producând alunecare

Componenta M_k - trebuie să rotească, să rastogalească carpusul C_1 peste C_2 împingându-i-o mișcare de rastogalire

Componenta \vec{M}_p - răsușește rigidul în jurul axei
lei generând o mișcare de pinotare

Obs! Rigidul nu se poate mișca la rea mea
mișcă real. Acesta componentă și numai după
ce acestea după țesc amintite valori care reprezintă
să rămână fenomenele de fricare.

\Rightarrow la contact iau măstăre fenomene de fricare
care poartă denumirea scolară 3 mișcări ~~fictive~~.

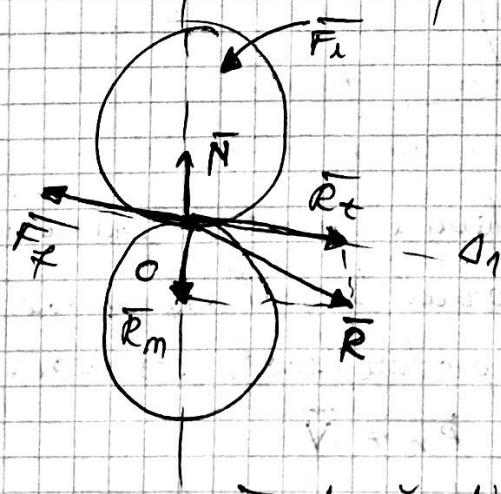
\Rightarrow o fricare de alunecare

- I - restabilire

- II - pinotare

Fricarea de alunecare ✓

Alegem un astfel de sist. de forțe care acționează
asupra rigidelor produce alunecare pură adică se
reduce la un torsor fară rezultantă mișcă-



$$\vec{T}_0 (\vec{R}, \vec{M}_0 = 0)$$

Descompunem \vec{R} după dir. mărialui și tangentei.

\vec{R}_m - generaază o reacție normală \vec{N} și $\vec{R}_m + \vec{N} = 0$

\vec{R}_t - produce alunecarea rigidului și este planul
tangent la măstăre fară de fricare de alu-
mecare care se opune mișcării \Rightarrow
se va opune mișcării după ce R

σ real. R_t , (σ real. de prag) care coincide cu $F_f \max$

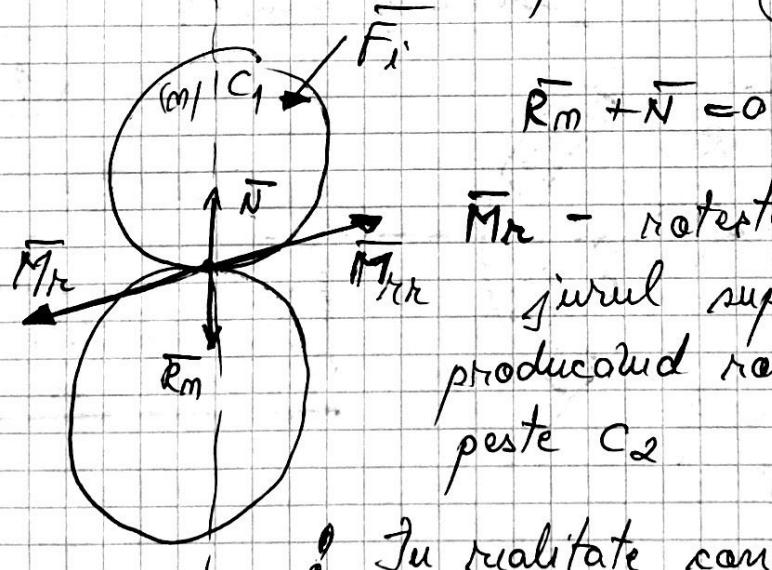
$$F_{f \max} = \mu \cdot N \quad \mu - \text{dipiude de grad. de prelucrare al supraf. și de rugere}$$

$$0 < R_t \leq F_{f \max} \rightarrow \text{cond. de echilibru}$$

După depășirea acestei valori se trage, nu doar mișcările și fricarea scade și nu face funcție de rezistență

Fricarea de restogalire

Considerăm un astfel de sistem care produce un torsor format dintr-o rezultanta paralelă cu normala și un moment, construit pe planul tangent.



\bar{M}_r - rotește rigidul C_1 în jurul supartului său, producând restogalirea lui C_1 peste C_2 .

! În realitate contactul nu este punctual și este făcut pe o supraf.

pe care iau naștere fenomene de fricare:

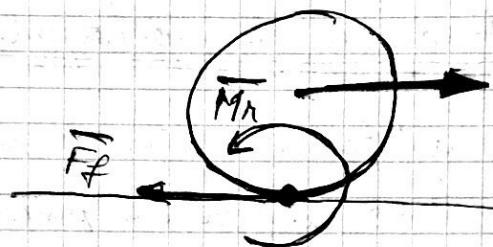
- rigidul nu se restogală la rea mai mică val. a lui \bar{M}_r deciace pe supraf. de contact apare un nou, rezistent la restogalire care se opune restogal.
- rigidul se va restogali doar după ce \bar{M}_r depășește o val. $M_{fr max}$

$$M_r > M_{fr max} = \alpha \cdot N$$

Mom. de rotație max. este prod. dintre momentul de inerție și coeficientul de fricție ale rostogolului.

Olas! Coeficientul de rostogol și se determină experimental și are val. mai mică decât coef. fricției de alunecare.

Olas! În general fricția de alunecare și de rostogol coexistă.

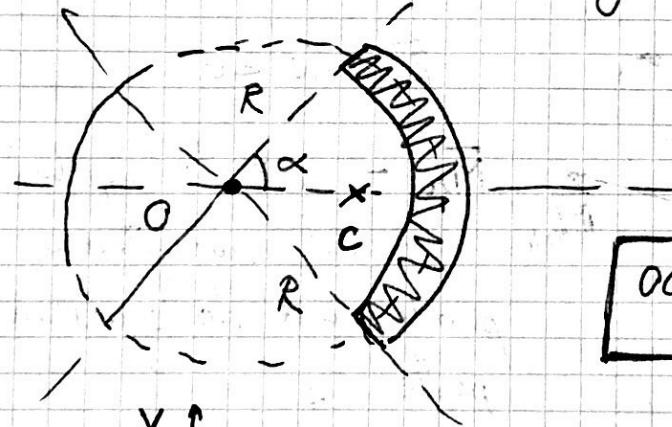


Zaborator

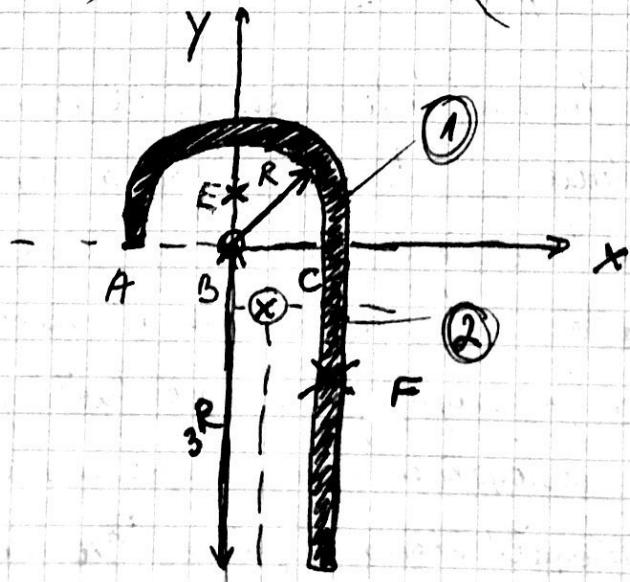
Centru de greutate

30. 10. 2017

1 dimens.



$$OC = R \sin \alpha$$



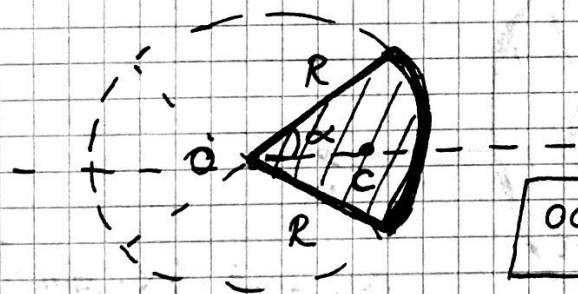
$$BE = \frac{R \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi}$$

carp	l	x	y	$l \cdot x$	$l \cdot y$
1	πR	0	$\frac{2R}{\pi}$	0	$2R^2$
2	$3R$	R	$-\frac{3R}{2}$	$3R^2$	$\frac{-9R^2}{2}$
Σ	$R(3+\pi)$	/	/	$3R^2$	$R^2(2-\frac{9}{2})$

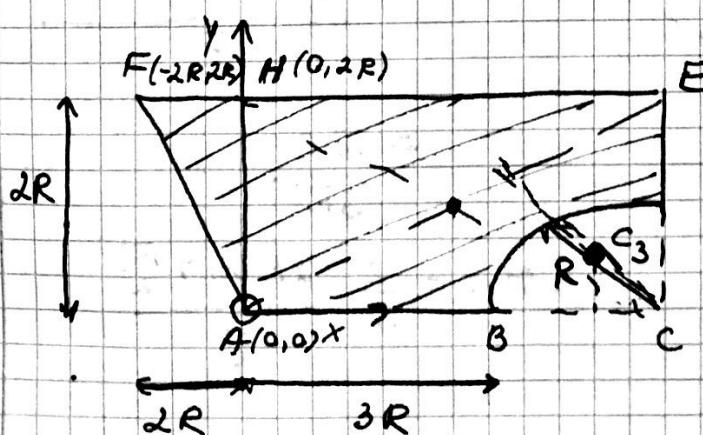
$$\Rightarrow X_G = \frac{\sum l \cdot x}{\sum l} = \frac{3R^2}{R(3+\pi)} \approx 0,5R$$

$$Y_G = \frac{\sum l \cdot y}{\sum l} = \frac{R^2(-\frac{5}{2})}{R(3+\pi)} \approx -0,4R$$

2 dimens.

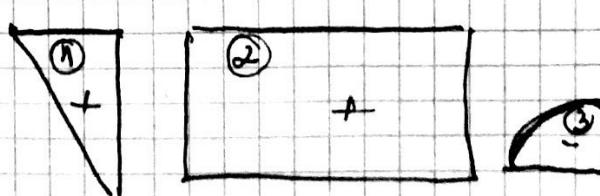


$$OC = \frac{2}{3} R \sin \alpha$$



$$CC_3 = \frac{2}{3} R \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{8R}{3\pi} \cdot \frac{4}{2} \sqrt{2}$$



$$CC_{3x} = CC_3 \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

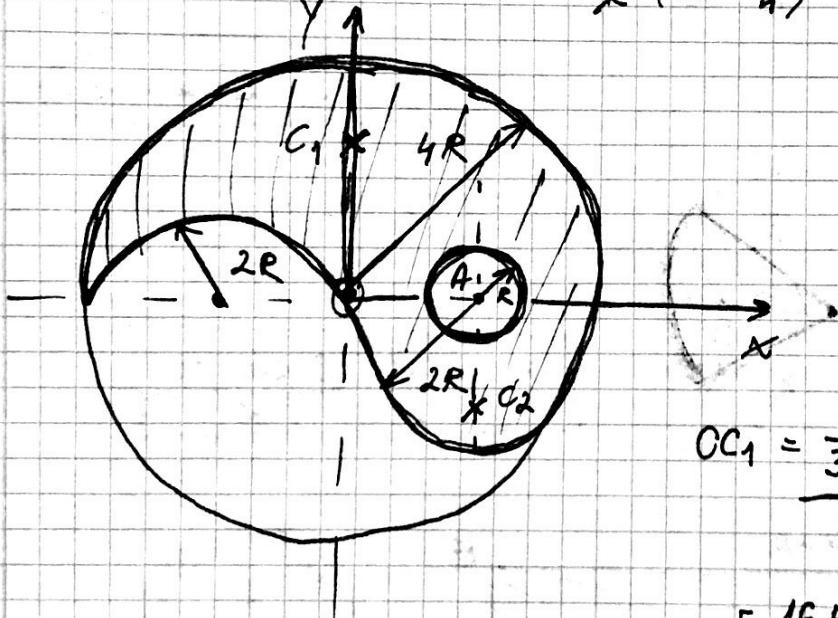
$$= \frac{8}{3} \cdot \frac{R}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}$$

carp	A	x	y	$A \cdot x$	$A \cdot y$
1	$2R^2$	$\frac{-2R}{3}$	$\frac{4R}{3}$	$\frac{-4R^3}{3}$	$\frac{8R^3}{3}$
2	$8R^2$	$2R$	R	$16R^3$	$8R^3$
3	$\frac{-\pi R^2}{4}$	$4R - \frac{4R}{3\pi}$	$\frac{4R}{3\pi}$	$-\pi R^3 + \frac{R^3}{3}$	$-\frac{R^3}{3}$
Σ	$R^2(10 - \frac{\pi}{3})$	/	/	$R^3(15 - \frac{\pi}{3})$	$R^3 \cdot \frac{31}{3}$

$$\Rightarrow x_G = \frac{\sum A \cdot x}{\sum A} = \frac{R^3(15 - \frac{\pi}{3})}{R^2(10 - \frac{\pi}{3})} = R \frac{15 - \frac{\pi}{3}}{10 - \frac{\pi}{3}}$$

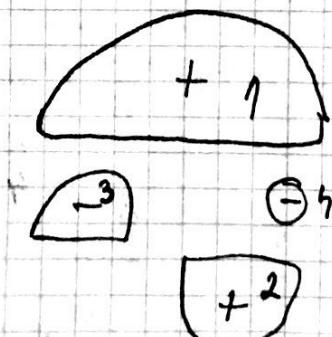
$$y_G = \frac{\sum A \cdot y}{\sum A} = \frac{R^3 \cdot \frac{31}{3}}{R^2(10 - \frac{\pi}{3})} = R \frac{\frac{31}{3}}{10 - \frac{\pi}{3}}$$



$$CC_1 = \frac{2}{3} \cdot 4R \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{16R}{3\pi}$$

$$AC_2 = \frac{2}{3} \cdot 2R \sin \frac{\alpha}{2}$$

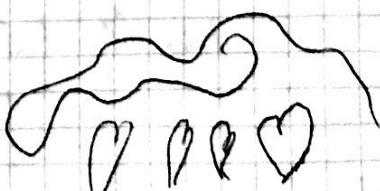


camp	A	X	Y	$A \cdot X$	$A \cdot Y$
1	$8\pi R^2$	0	$\frac{16R}{3\pi}$	0	$\frac{128R^3}{3}$
2	$2\pi R^2$	$2R$	$\frac{-8R}{3\pi}$	$4\pi R^3$	$\frac{-16R^3}{3}$
3	$-2\pi R^2$	$-2R$	$\frac{8R}{3\pi}$	$4\pi R^3$	$-\frac{16R^3}{3}$
4	$-\pi R^2$	$2R$	0	$-2\pi R^3$	0
Σ	$7\pi R^2$	1	1	$6\pi R^3$.

$$\Rightarrow x_G = \frac{\sum A \cdot x}{\sum A}$$

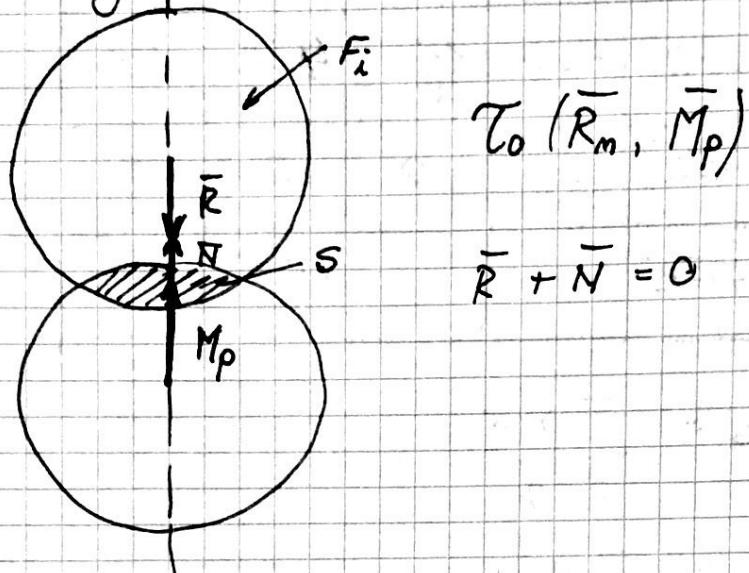
$$y_G = \frac{\sum A \cdot y}{\sum A}$$

3 dimensions



CursFricarea de pivotare ✓

Prin. & rigide rotunjite pe o supraf. S



$$T_0 (\bar{R}_m, \bar{M}_p)$$

$$\bar{R} + \bar{N} = 0$$

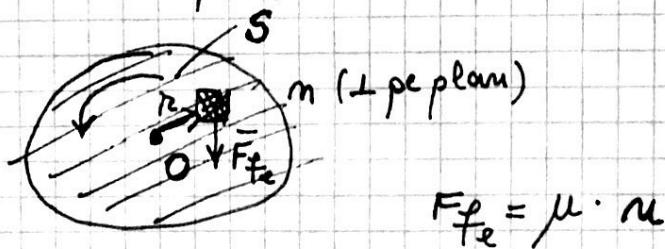
Nom. M_p nu poate primi în mijloc de pivotare rigidul la cea mai mică val. a sa numai după ce depășește o val. limită M_1 .

Pe supraf. de contact nu mai trebuie fără de fricare al căror moment se oprește lui M_p .

$$M_{\text{friuare}} = M_1$$

Pentru echilibru: $M_p \leq M_1 = M_{\text{friuare}}$

Pentru determinarea val. rezistentă la pivotare M_{friuare} considerăm supraf. de contact la o scăriuță.

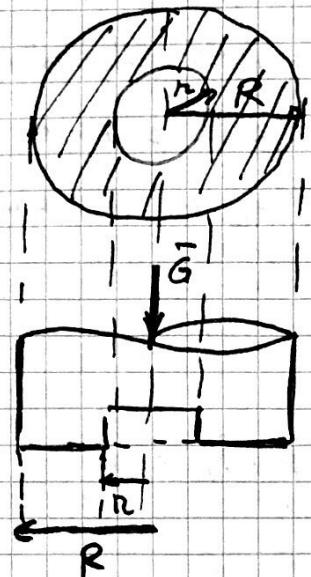


$$F_{f_i} = \mu \cdot n$$

Acstei fără elui. produc momente față de punctul O, iar \sum tuturor momentelor nu fi M_p

$$M_p = \sum r \cdot \mu \cdot n$$

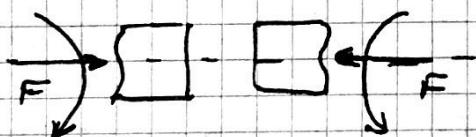
Pentru exemplificare, în cazul unui pivot de formă
circulară "circulară"



$$M_p = \frac{2}{3} \mu G \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$$

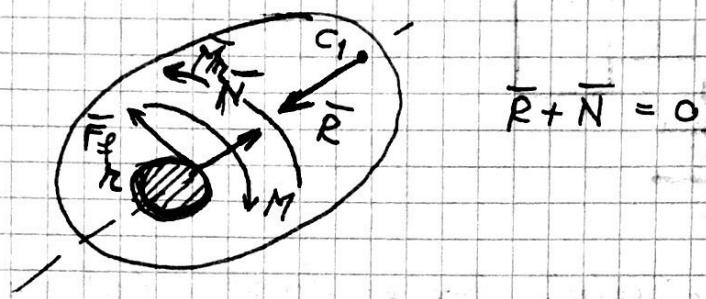
Dacă pivotul face contact pe suprafață circulară $\Rightarrow M_p = \frac{2}{3} \mu \cdot G \cdot R$

\hookrightarrow ex. în care fricția e utilă



Fricarea în articulații

Pres. un rigid articulat, care poate roti în jurul unui ax de rază r , și asupra rigidului acționează un astfel de sist. de forțe care produce o rezultantă ce trage prin centru axului și un moment care produce rotație în jurul axului.



Momentul M are punte în mișcare rigidul deoarece are depășirea mărcare licită M_1 , datorită faptului că la contact apar forțe de fricare al căror moment se opune rotației.

$$\underbrace{\bar{M}(F_f)}_{\mu \cdot N} + \underbrace{\bar{M}(R)}_{0} + \underbrace{\bar{M}(N)}_{0} + \underbrace{\bar{M}_1}_{M_{\text{licit}}} = 0$$

$$F_f = \mu \cdot N$$

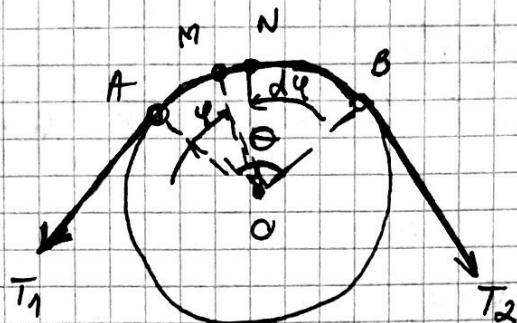
Ju condiții de echil. la licita (F_f este nula)

$$M_{\text{licit}} = \mu \cdot h \cdot N$$

Ju concluzie, fricția în articulație se manifestă printr-un moment de fricare care se opune rotației și a cărei real. măs. depinde de coef. de fricție, rază articulației și apărarea mănușii.

Frucarea firilor

Prin. un fir perfect flexibil și inextensibil rățeazat peste un cilindru de rază R sub unghiul de suprafață θ

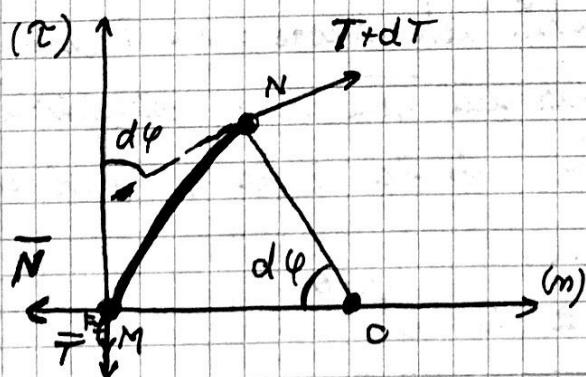


În situația ideală (fără fricare) $T_1 = T_2$

În prezența fricției la o tendință de deplasare de la A spre B, T_2 nu va mai fi egal cu T_1 și echilibrul se va muta în paralel la o val. $T_2 \text{ max} > T_1$.

Împărțim sectorul AB în lungime elementare (de unghi la centru infinit mic).

Considerăm sectorul infinit mic la o scara mare.



Dacă în punctul M tensiunea nu este T , datorită fenomenelor de fricare, în punctul N tensiunea nu este $T + dT$

$$(z) \quad \left\{ \begin{array}{l} (T + dT) \cdot \cos d\varphi - T - F_f = 0 \\ (T + dT) \cdot \sin d\varphi - N = 0 \end{array} \right| \quad T + dT - T - F_f = 0$$

$$(m) \quad \left\{ \begin{array}{l} (T + dT) \cdot \sin d\varphi - N = 0 \\ (T + dT) \cdot \cos d\varphi - T - F_f = 0 \end{array} \right| \quad (T + dT) \sin d\varphi - N = 0$$

$$Td\varphi + \underbrace{dT d\varphi}_{=0} - N = 0$$

Opoz! Arătând că redere că anginul d $\varphi \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos d\varphi \approx 1$$

$$\sin d\varphi \approx d\varphi$$

Cele două cantități sunt înținute să fie măsurăte sau un rezultat care poate fi neglijat.

Ju cond. de echil. la limită $F_F = \mu \cdot N$ și sist. de ec. obținute:

$$\Rightarrow \begin{cases} dT \cdot \mu \cdot N = 0 \\ Td\varphi - N = 0 \end{cases} \Rightarrow dT - \mu \cdot T d\varphi = 0$$

Separând variab. se obține:

$$\frac{dT}{T} = \mu d\varphi \int \Rightarrow \int \frac{dT}{T} = \mu \int d\varphi$$

$$\Rightarrow \ln \frac{T_{\text{max}}}{T_1} = \mu \cdot \Theta$$

$$T_{\text{max}} = T_1 \cdot e^{\mu \cdot \Theta}$$

Ju general pt. echil. este necesar ca $T_{\text{max}} \leq T_1 \cdot e^{\mu \cdot \Theta}$

→ Pentru determinarea lui T_{min} se consideră fudenția inversă de mișcare de la B la A și se repetă același procedură

$$\Rightarrow T_{\text{min}} \geq T_1 \cdot e^{-\mu \cdot \Theta}$$

$$T_1 \cdot e^{-\mu \cdot \Theta} \leq T_2 \leq T_1 \cdot e^{\mu \cdot \Theta}$$

condiția de echil. a girului reprezentă
frecările

Echilibrel sist. de rigide

Nu sist. de rigide este format din mai multe corpuri ligate prin legături nediformabile sau deformabile (articulația, șنجastrare, etc.) (arce elastice) care introduc în sist. forte interioare de legătură.

Prin urmare un sist. de rigide a acționat de forțe interioare direct aplicate, forțe de legătură și forțe interioare.

Stud. ecuț. se poate face prin 2 metode:

I. metoda separării / izolării (are la bază faptul că)

II. metoda rigidizării

I. Metoda separării

→ are la bază faptul că dacă un ansamblu de rigide e în echilibru \Rightarrow fiecare componentă e în echil.

$$\begin{cases} \bar{R}_{ex}^j + \bar{R}_L^j + \bar{R}_{int}^j = 0 \\ \bar{M}_{ex}^j + \bar{M}_L^j + \bar{M}_{int}^j = 0 \end{cases}$$

II. Metoda rigidizării

\hookrightarrow are la bază faptul că dacă sist. se rigidizează, el rămasse în echil.

$$\begin{cases} \bar{R}_{ex} + \bar{R}_L = 0 \\ \bar{M}_{ex} + \bar{M}_L = 0 \end{cases}$$

Olas! Metoda rigid. nu permite dif. F interioare.

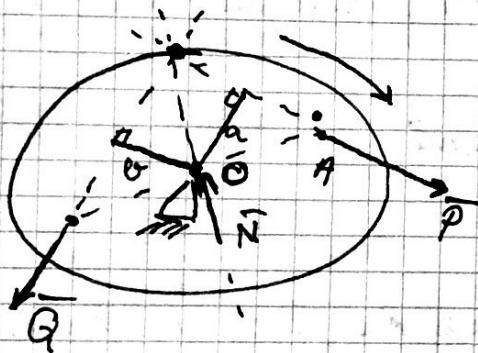
Aplicații tehnice ale staticii:Mărimi simple

✓

Pârghie

↳ sunt rigid articulat și pot roti împreună
acționarea pe unul dintre ele face mișcarea P și altelei B
fără rezistență Q

↳ au ca scop să utilizeze disipaarea / ridicarea
unei greutăți mari cu ajutorul unei forțe mici

Clasificare:

- după felul cum sunt dispuse A, B, O :

- 1) pârghie de ord. I (O între A, B)

ex: balanță, balansoar, cleste,

- 2) —, — de ord. II (B între O, A)

ex: roata

- 3) —, — de ord. III (A între O, B)

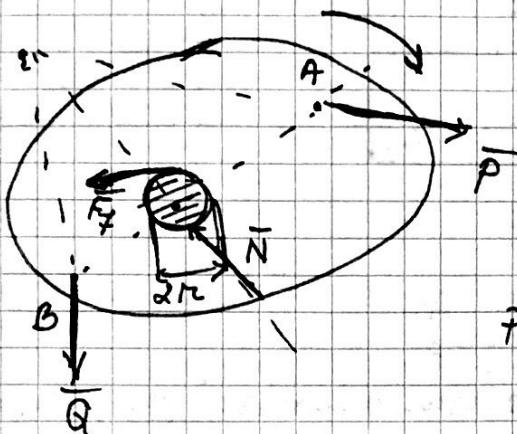
ex:

considerăm o pârghie de ord. I unde se neglijă rezistența fricției din articulație.

$$(\sum M_O): P \cdot a - Q \cdot b = 0$$

$$\Rightarrow P = Q \cdot \frac{b}{a}$$

În concluzie, cu cît lățul forței rotatoare a este mai mare decât le, cu atât forța rotatoare e mai mică
 → Considerând fricția în articulație



$$P \cdot a - Q \cdot b - \mu \cdot N \cdot F_f = 0$$

$$F_f = \mu \cdot N$$

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cdot \cos \alpha}$$

Pt. simplificare $\bar{P} \parallel \bar{Q}$

$$\Rightarrow N = P + Q$$

$$P \cdot a - Q \cdot b - \mu \cdot r \cdot (P + Q) = 0$$

$$\boxed{P = Q \frac{b + \mu \cdot r}{a - \mu \cdot r}}$$

Pt. echilibrul P trebuie să fie \leq decât

$$\boxed{P \leq Q \cdot \frac{b + \mu \cdot r}{a - \mu \cdot r}}$$

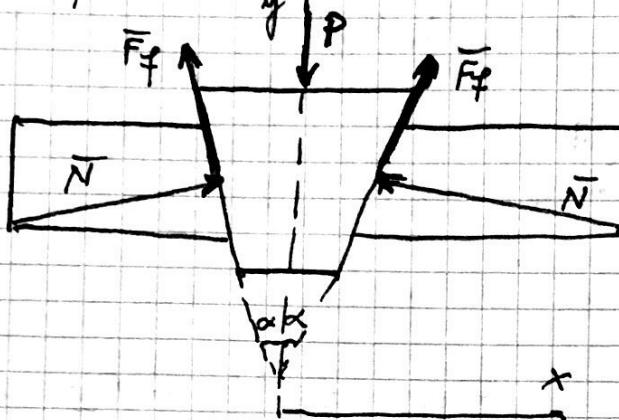
Pt. dec. forței rotatoare minime pt. echil. se consideră tendința inversă de mișcare \Rightarrow sensul F_f se schimbă

\Rightarrow În concluzie, condiția de echil. a poligoniului nu fi:

$$\boxed{Q \frac{b - \mu \cdot r}{a + \mu \cdot r} \leq P \leq Q \frac{b + \mu \cdot r}{a - \mu \cdot r}}$$

PANA

→ este un rigid de formă trapezoidală utilizat la realizarea de mulinișuri și construcția preselor, la spartul lemnelor.



Acțiunea forței autoare generată pe perete "pernă" reacție normale și forțe de fricare.

Determinarea condiției de autolockare a pernei.

$$\sum F_x \left\{ \begin{array}{l} N \cos \alpha - N \cos \alpha + F_f \sin \alpha - F_f \sin \alpha = 0 \end{array} \right.$$

$$\sum F_y \left\{ \begin{array}{l} 2N \sin \alpha + 2F_f \cos \alpha - P = 0 \quad (F_f = \mu N, \mu = \operatorname{tg} \varphi) \end{array} \right.$$

$$P = 2N \sin \alpha + 2 \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} N \cos \alpha = \boxed{2N \sin(\alpha + \varphi)}$$

Ză ierirea pernei, sensul F_f se schimbă \Rightarrow se schimbă sensul

$$\Rightarrow P = 2N \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}$$

Pentru realizarea autolockării pernei nu fi necesar ca ultima expresie dedusă fără se să fie negativă

$$\sin(\alpha - \varphi) < 0$$

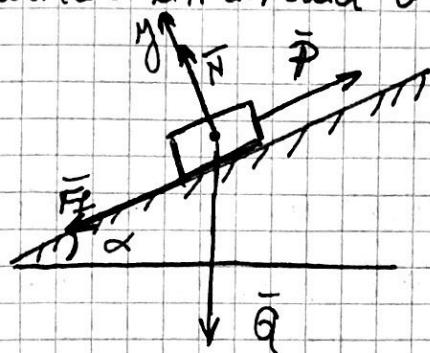
$$\alpha - \varphi < 0$$

$\alpha < \varphi$ → condiția de autolockare a pernei



Planul inclinat

Este un dispozitiv folosit la ridicarea sau coborarea corporilor utilizând o fază de tracțiune nucă.



Ecuațiile de echilibru se pot scrie sub forma:

$$\sum F_x : \left\{ \begin{array}{l} P - Q \sin \alpha - F_f = 0 \end{array} \right.$$

$$\sum F_y : \left\{ \begin{array}{l} -Q \cos \alpha + N = 0 \end{array} \right.$$

$$F_f = \mu N$$

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi$$

$$N = Q \cdot \cos \alpha$$

$$P - Q \sin \alpha - \mu Q \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\boxed{P = Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}} \rightarrow \text{expresie malăușă la echi. la liură}$$

cu tendință de deplasare
în sus

1) Pt. ridicarea corpului pe plan, e necesar ca

$$P > Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}$$

2) Pt. coborare, sensul forței de fricare se schimbă,
 \Rightarrow Pmin pentru echilibrare

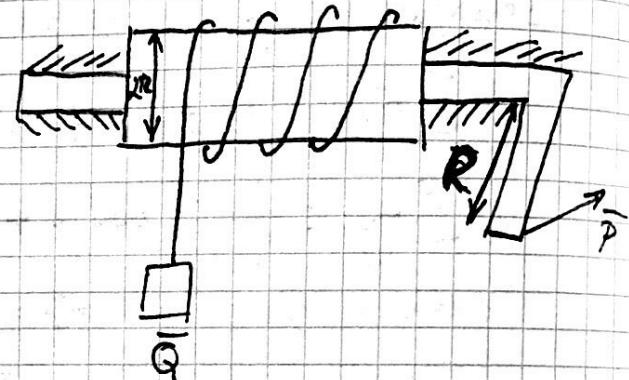
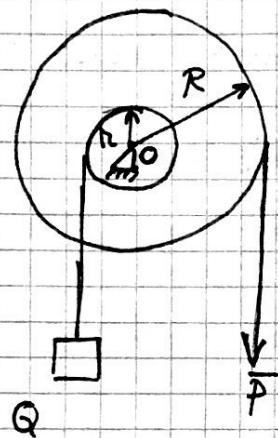
$$\boxed{P_{\min} = Q \frac{\sin \alpha - \mu}{\cos \varphi}}$$

Pt. coborârea corpului pe plan, nu fi necesar ca

$$P < Q \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}$$

TROLIUL

Este un dispozitiv format din două discuri rotative solidare de raze diferite sau cu tamboare solidă și manivelă, de care se înfășoară un fir.



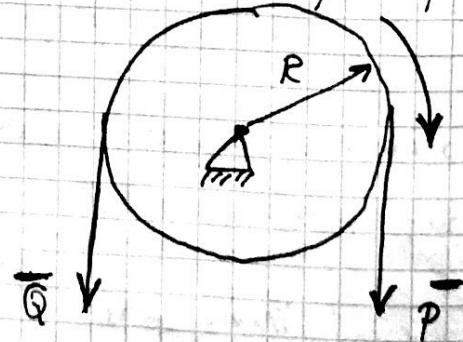
$$(\sum M_O): PR - Qr = 0$$

$$\Rightarrow P = Q \cdot \frac{r}{R}$$

Forța motoare necesară P este cu atât mai mică cu atât R este mai mare decât r.

SCRIPELE

Este un dispozitiv format dintr-un disc articulat în centru peste care se trage un fir flexibil și inextensibil.



În cazul ideal fără F_f nu artic., ex. de în echilibru este:

$$(\sum M_0): P \cdot R - Q \cdot R = 0 \Rightarrow \boxed{P = Q}$$

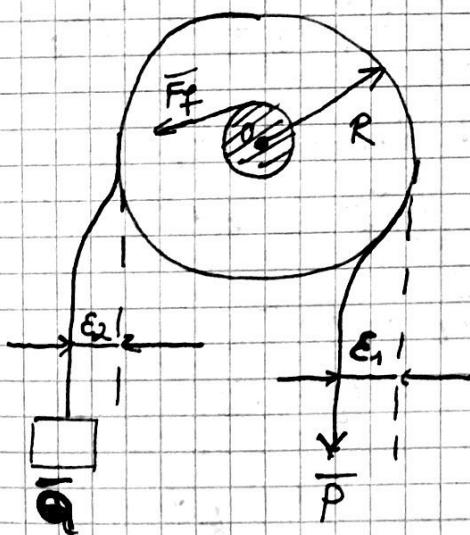
→ Scrisetele este o poziție de ord. I cu ambele forțe egale care nu realizează nicio economie de forță dar permite orientarea forțelor P și Q pe diverse direcții.

Dacă se consideră F_f nu articulație \Rightarrow cond. ob. schv.
este rea dedusă pentru poziție de ord. I

$$G \frac{R - \mu r}{R + \mu r} \leq P \leq Q \frac{R + \mu r}{R - \mu r}$$

În cazul capăturilor groase nu ~~există~~ care efectul rigidității poate fi neglijat, dispunerea cablului fără de scrisete are lăc sub forma (exagerată) din figura.

$$N = P + Q$$



$$(\sum M_0): P(R - E_1) - Q(R + E_2) - \mu N = 0$$

$$\Rightarrow P = Q \frac{R + E_2 + \mu r}{R - E_1 - \mu r} =$$

$$= Q \left[1 + \frac{E_1 + E_2 + 2\mu r}{R - E_1 - \mu r} \right]$$

Se observă că E_1 și μr sunt cantit. foarte mici
nu comparativ cu rază \Rightarrow pot fi neglijate

$$\Rightarrow P = Q \left[1 + \underbrace{\frac{E_1 + E_2}{R}}_{\lambda_1} + \underbrace{\frac{2\mu r}{R}}_{\lambda_2} \right]$$

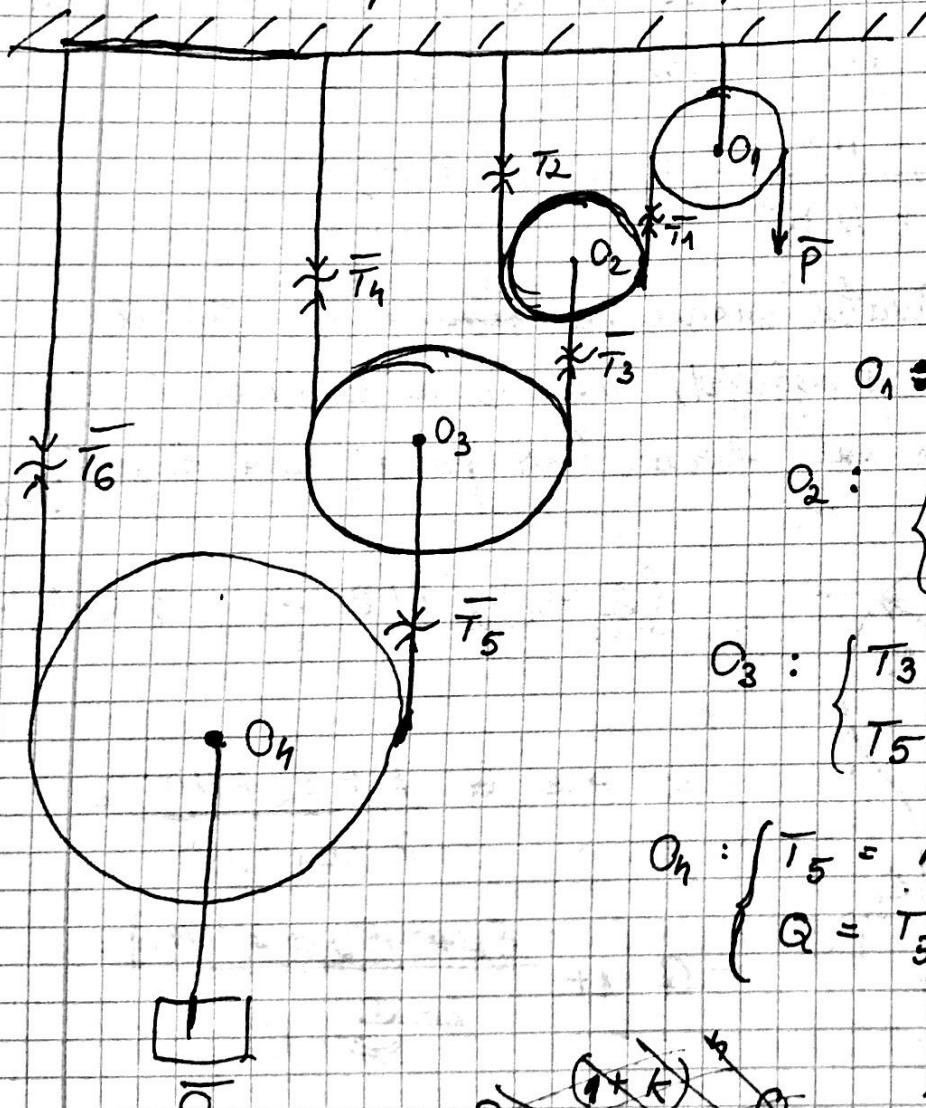
λ_1 = coef. care reflectă rigiditatea
 λ_2 = coef. care reflectă infl. fricției la
articulație

λ_1 = coef. care reflectă infl. rigiditatea

$$\Rightarrow P = k \cdot Q \quad \text{sc. scriptelui cu fricare } \rightarrow \\ \text{care } k = \text{cifra scriptelui}$$

PALANUL EXPONENȚIAL

Este un dispozitiv format dintr-un scripte fix și mai multe scripte rotative dispuse astfel:

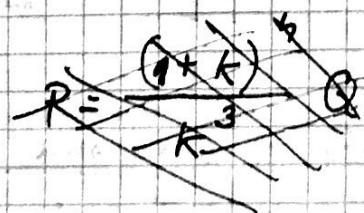


$$O_1 : P = k \cdot T_1$$

$$O_2 : \begin{cases} T_1 = k \cdot T_2 \\ T_3 = T_1 + T_2 \end{cases}$$

$$O_3 : \begin{cases} T_3 = k \cdot T_4 \\ T_5 = T_3 + T_4 \end{cases}$$

$$O_4 : \begin{cases} T_5 = k \cdot T_6 \\ Q = T_5 + T_6 \end{cases}$$



$$P = \frac{k^3}{(1+k)^4} \cdot Q$$

Noțiuni fundamentale de cinematică punctului

Cinematică este ceea ce-l dăba nume capital al FIMR și se ocupă cu studiul mișcării corpuri fară a fi nevoie să dețină acuzație și de faptele neacțiunări asupra lor.

Principalele elemente ale cinematică punctului sunt:

1. Legea de mișcare
2. Traiectoria
3. Viteză
4. Accelerație

1. Legea de mișcare este o expresie care reflectă poziția punctului în orice moment de timp față de un repere. \rightarrow date de natura lui de posibilitate în funcție de timp)

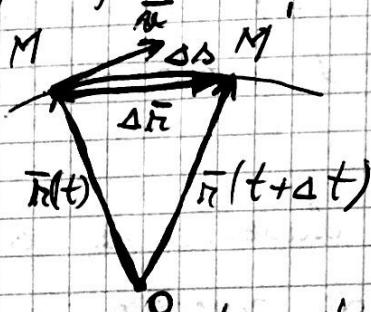
$$\vec{r} = \vec{r}(t) - \text{expresie vectorială a legii de mișcare}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right\} \rightarrow \text{expresie scalară a legii de mișcare}$$

2. Traiectoria reprezintă locul geometric al pas. succinui ocupate de punct în mișcare. Ecuațiile scalare ale legii de mișcare reprezentă și ecuațiile parametrice ale traiectoriei din care prin eliminarea timpului se obține traiectoria sub forma sa implicită

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

3. Viteză este o măsură vectorială care precizează direcția și sensul mișcării, iar punctul poate parcurge același dist. în treiți deferiți sau dist. diferite în același timp.



Pe intervalul MM' se definește viteză medie ca fiind:

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

Viteză instantaneous sau momentană nu îl limitează același raport când $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \quad (\text{derivate în rap. cu timpul})$$

Acceleratia este un vector care indică variația vitezei în acel interval de timp

Acceleratia medie:

$$\bar{a}_{med} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

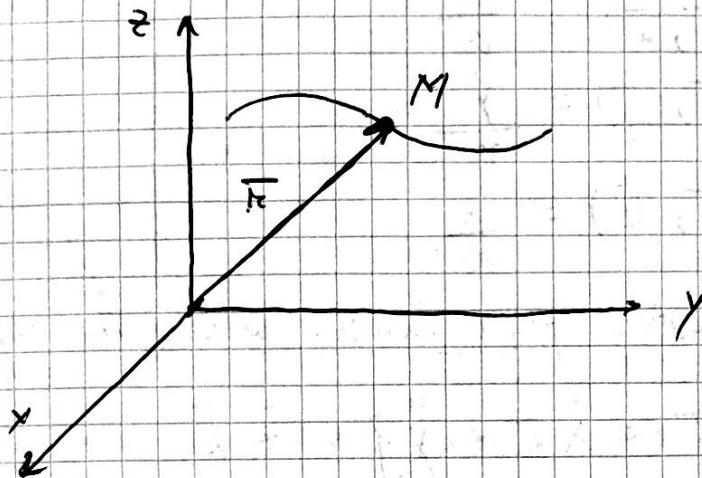
Acceleratia instantaneous

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt}$$

Studiu de mișcări

în coord. carteziene

Tras. un punct care se mișcă pe o traiectorie oricare care se mișcă într-un sistem cartezian x, y, z



poziția punctului este precizată de vectorul de pas.

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}(t)} \quad \text{- legătura de mișcare sub formă vectorială exprimată în sist. carteziun}$$

$$\bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right.$$

- Traiectoria se obține prin eliminarea timpului ~~din~~ ^{din} ecuațiile liniare de mișcare.

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$

- Viteza se obține prin derivatele vectorului de pas, ~~în raport cu~~ ^{din} timpul.

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}} = \dot{x} \bar{i} + \dot{y} \bar{j} + \dot{z} \bar{k}$$

Mărimea nășterii va fi radical din suma patratelor componentelor.

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Orientarea va fi dată din cosinuză direcției

$$\cos(\vec{v}, \vec{i}) = \frac{\dot{x}}{v}$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{j}) = \frac{\dot{y}}{v}$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{k}) = \frac{\dot{z}}{v}$$

Aceleratia se obtine prin divizare cu viteza respectivă

$$\vec{a} = \ddot{\vec{v}} = \frac{\ddot{v}}{v} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{\ddot{x}}{|a|} = \frac{\ddot{x}}{a}$$

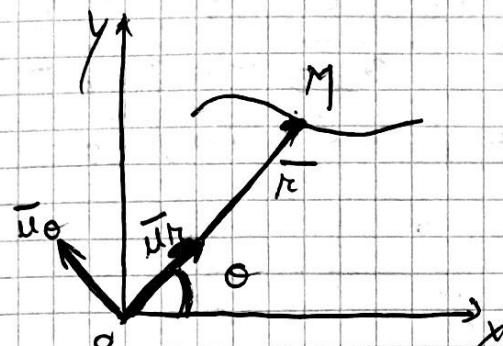
$$\cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{\ddot{y}}{a}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{k}) = \frac{\ddot{z}}{a}$$

În cazul unei nășteri într-un plan sau pe o dreaptă
una respectivă
dispar datele coordinate.

~~St~~
Studiu de mișcare în
coord. polare

Este un sistem adecvat mișcării desfășurate într-un plan.



În coord. polare poziția punctului va fi exprimată de

$$\begin{cases} \bar{r} = \bar{r}(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases} \Rightarrow \text{lege de mișcare în coord. polare}$$

în care \bar{r} = rază polară
 θ = unghiul polar

Trajectoria se găsește prin eliminarea timpului rutre ecuațiile l. de mișcare.

Pentru definirea axelor sist. polar, introducem versori:

L rutre ei

$$\begin{cases} \bar{u}_r = \cos \theta \bar{i} + \sin \theta \bar{j} \\ \bar{u}_\theta = -\sin \theta \bar{i} + \cos \theta \bar{j} \end{cases}$$

Dervativele versorilor:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{u}}_r &= -\dot{\theta} \sin \theta \bar{i} + \dot{\theta} \cos \theta \bar{j} = \dot{\theta} \bar{u}_\theta \\ \dot{\bar{u}}_\theta &= -\dot{\theta} \cos \theta \bar{i} - \dot{\theta} \sin \theta \bar{j} = -\dot{\theta} \bar{u}_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{r} &= r \cdot \bar{u}_r \\ \dot{\bar{r}} &= \dot{r} \bar{u}_r + r \dot{\bar{u}}_r = \dot{r} \bar{u}_r + r \dot{\theta} \bar{u}_\theta \end{aligned}$$

\Rightarrow componentele vitezei în coord. polare:

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r \cdot \dot{\theta} \end{cases} \quad v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\theta}^2}$$

Acelorăia se găsește prin derivarea cu respectiv:

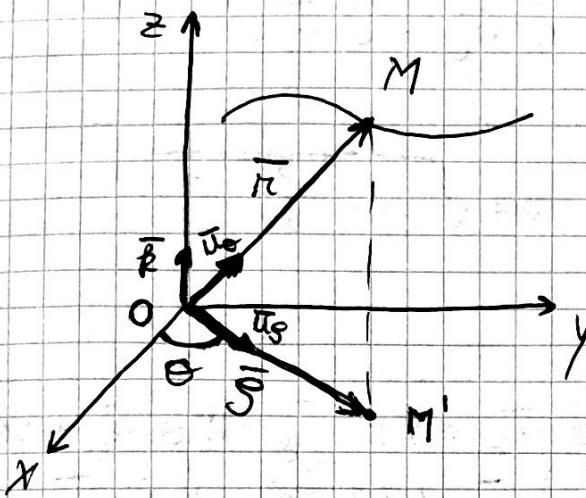
$$\begin{aligned} \bar{a} &= \ddot{r} \bar{u}_r + \dot{r} \frac{\dot{u}_r}{r} + \dot{r} \dot{\theta} \bar{u}_\theta + r \ddot{\theta} \bar{u}_\theta + r \dot{\theta} \frac{\dot{u}_\theta}{r} \\ \bar{a} &= \ddot{r} \bar{u}_r + \dot{r} \dot{\theta} \bar{u}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \bar{u}_\theta + r \ddot{\theta} \bar{u}_\theta - r \dot{\theta}^2 \bar{u}_r = \\ \bar{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \bar{u}_r + (2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \bar{u}_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \\ \bar{a}_\theta = 2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} \end{cases}$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

Studiu de mișcări în
coord. cilindrice

Sist. de coord. cilindrice reprezintă o generalizare a sistemelor polare obținută prin adăugarea unei a treia dimensiuni.



Sist. de coord. cilindrice nu își defină prim raza polară $\bar{r} = \overline{OM}$ năuștiul polar θ și cota z

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \\ z = z(t) \end{cases} \rightarrow \text{lege de mișcare în coord. cilindrice}$$

Traекторia \rightarrow eliminăm timpul între ecuații

$$\begin{cases} f_1 (r, \theta, z) \\ f_2 (r, \theta, z) \end{cases}$$

Viteza:

$$\bar{v} = \overline{\dot{OM}} + \overline{\dot{M'M}}$$

Versorii sist. cilindrici: $\bar{f} = \overline{OM}$

$$\begin{cases} \bar{u}_r = \cos \theta \bar{i} + \sin \theta \bar{j} \\ \bar{u}_\theta = -\sin \theta \bar{i} + \cos \theta \bar{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{u}_p} = \dot{\theta} \bar{u}_\theta \\ \dot{\bar{u}_\theta} = -\dot{\theta} \bar{u}_p \end{cases}$$

$$\bar{r} = \overline{OM} + \overline{MM} = \bar{r} + \bar{z} = \underbrace{\rho \bar{u}_p + z \cdot \bar{k}}$$

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \dot{\bar{r}} = \dot{\rho} \bar{u}_p + \rho \dot{\bar{u}_p} + \dot{z} \cdot \bar{k} = \\ &= \dot{\rho} \bar{u}_p + \rho \cdot \dot{\theta} \bar{u}_\theta + \dot{z} \cdot \bar{k} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} v_p = \dot{\rho} \\ v_\theta = \rho \dot{\theta} \\ v_z = z \cdot \dot{k} \end{cases} \quad v = \sqrt{v_p^2 + v_\theta^2 + v_z^2}$$

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \ddot{\bar{r}} = \ddot{\rho} \bar{u}_p + \dot{\rho} \dot{\bar{u}_p} + \dot{\rho} \bar{u}_\theta + \dot{\theta} \dot{\bar{u}_\theta} + \dot{\theta} \dot{\bar{u}_p} + z \ddot{k} \\ \bar{a} &= \cancel{\dot{\rho} \ddot{\bar{u}_p}} (\ddot{\rho} - \ddot{\rho} \dot{\theta}^2) \bar{u}_p + (2 \dot{\rho} \dot{\theta} + \ddot{\theta}) \bar{u}_\theta + \ddot{z} \bar{k} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_p = \ddot{\rho} - \ddot{\rho} \dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2 \dot{\rho} \dot{\theta} + \ddot{\theta} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases}$$

$$a = \sqrt{a_p^2 + a_\theta^2 + a_z^2}$$

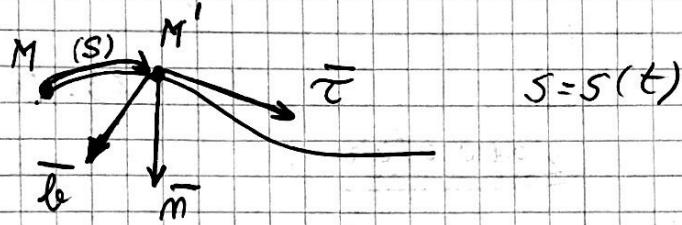
Studiul mișcării în

coord. intrinseci

(triedrul lui Frenet)

Triedrul lui Frenet este un sist. de axe atașat pe traiectoriei care se mișcă, se mișcă împreună cu punctul și este compus din 3 axe.

Tangenta de curvă $\bar{\tau}$, normala de curvă \bar{n} și binormala \bar{b} pe primele două.



Pentru determinarea nutr. și acelerării în coord. intrinseci se folosesc două expresii din geometria diferențială

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau} \quad \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{\bar{n}}{s} \quad s = \text{raza de curvă a traiectoriei}$$

$$\dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \cdot \bar{\tau}$$

$$\dot{\bar{n}} = \dot{s} \cdot \bar{\tau}$$

$$\begin{cases} v_{\bar{\tau}} = \dot{s} \\ v_{\bar{n}} = 0 \\ v_{\bar{b}} = 0 \end{cases}$$

În concluzie nutr. este tangenta la traiectoria punctului

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{s} \bar{\tau} + \dot{s} \dot{\bar{\tau}}$$

$$\dot{\bar{\tau}} = \frac{d \bar{\tau}}{dt} = \frac{d \bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{\bar{m}}{s}$$

$$\bar{a} = \ddot{s} \bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{s} \cdot \bar{m}$$

$$a_{\tau} = \ddot{s} = \dot{v}$$

$$a_m = \frac{\dot{s}^2}{s} = \frac{v^2}{s}$$

$$a_b = 0$$

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_m^2 + a_b^2}$$

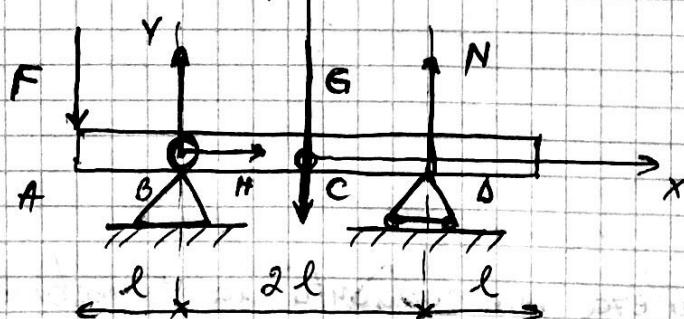
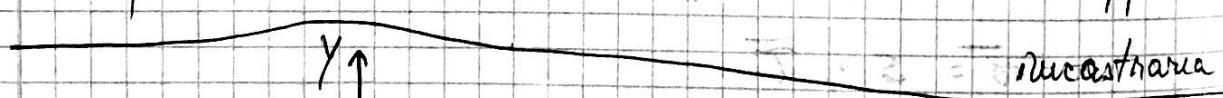
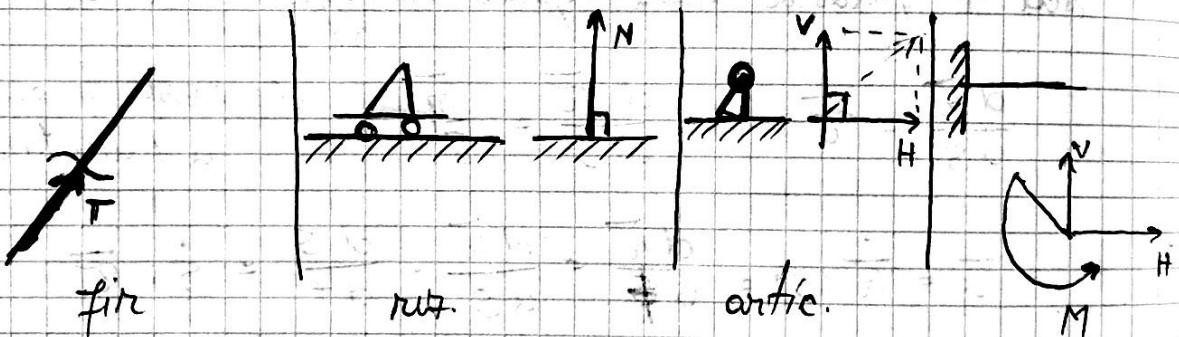
$$a = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{s^2}}$$

13.11.2014

Zaharatur

$$\bar{R}_d + \bar{R}_e = \bar{0}$$

$$\bar{M}_d + \bar{M}_e = \bar{0}$$

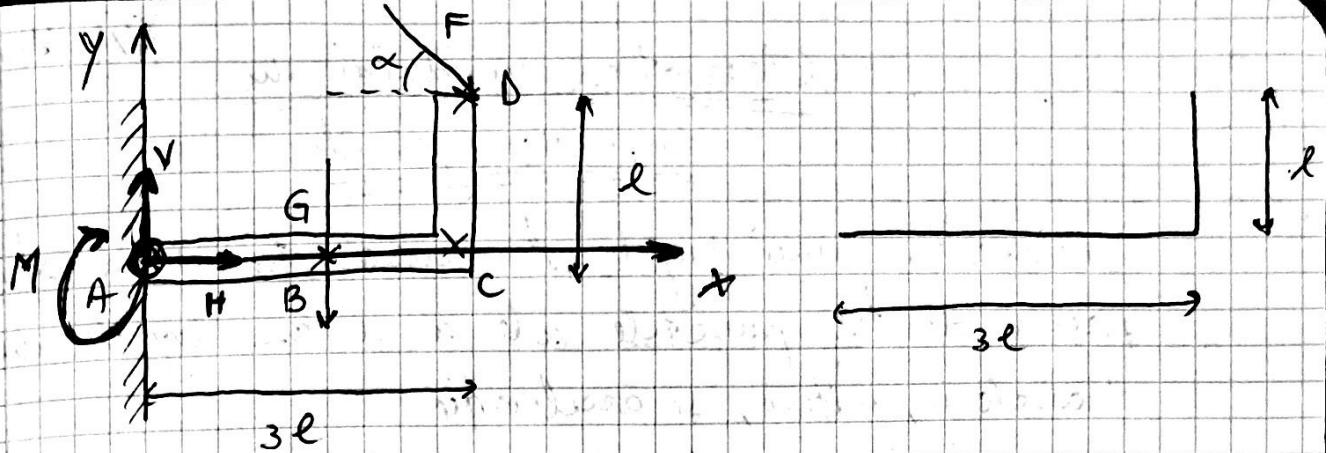


$$C_x : H = 0$$

$$C_y : V + N - F - G = 0 \Rightarrow V = \dots$$

$$(\Sigma M)_B : F\ell - G \cdot \ell + N \cdot 2\ell = 0$$

$$\therefore N = -\frac{F}{2}$$



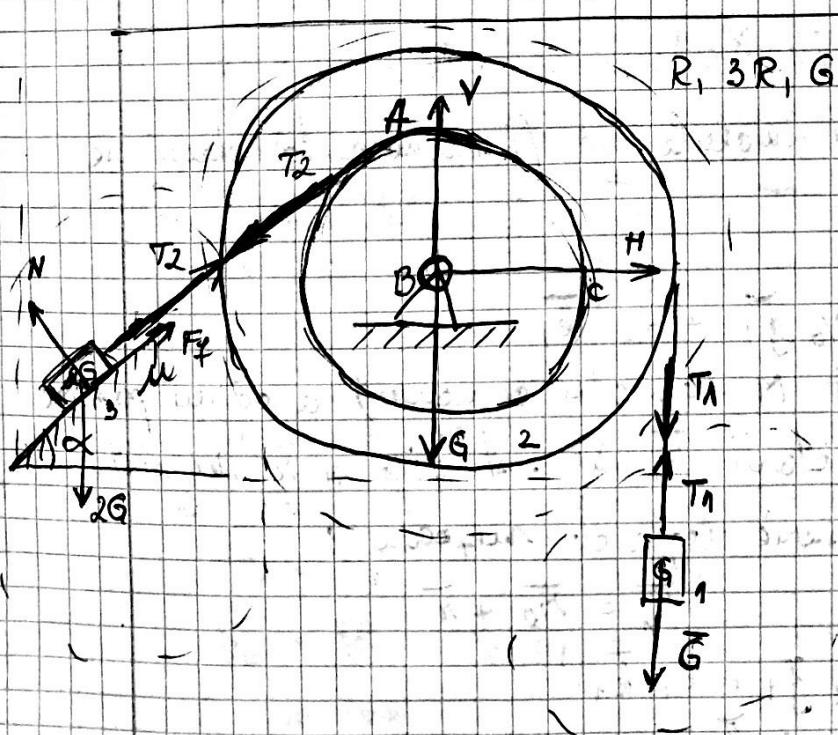
$$Ax: \{ H + F \cos \alpha = 0$$

$$Ay: \{ -G - F \sin \alpha + V = 0$$

$$Az: \{ -M - G \cdot \frac{15l}{8} - F \cos \alpha l - F \sin \alpha 3l = 0$$

	x	y	$l \cdot x$	$l \cdot y$
1	$3l$	$3l/2$	$9l^2/2$	0
2	l	$l/2$	$3l^2$	$l^2/2$
Σ	$4l$	/	$\frac{15l^2}{2}$	

$$\Rightarrow x_G = \frac{\sum l \cdot x}{\sum l} = \frac{15l^2}{8}$$



$$T_2 = 2G \sin \alpha - F_f$$

$$T_2 = 3T_1$$

$$1) T_1 - G = 0 \Rightarrow T_1$$

$$2) \cancel{T_1 - G} \Rightarrow T_2$$

$$\{ -T_1 - G + V - T_2 \sin \alpha = 0$$

$$H - T_2 \cos \alpha = 0 \Rightarrow H$$

$$T_2 \cdot R - T_1 \cdot 3R = 0 \Rightarrow T_2$$

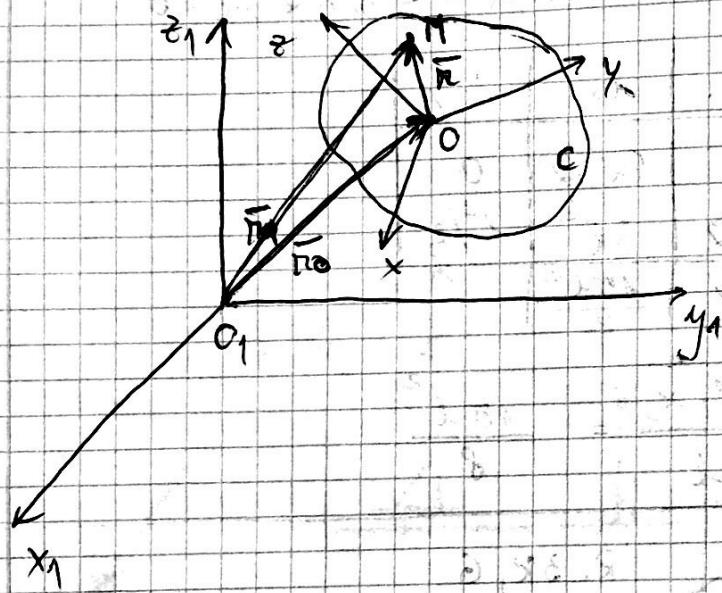
$$3) \left\{ \begin{array}{l} T_2 + F_f - 2G \sin \alpha = 0 \\ N - 2G \cos \alpha = 0 \end{array} \right. \Rightarrow N$$

$$F_f = \mu \cdot N \Rightarrow \checkmark \text{ (verified)}$$

Cinematica rigidului și mijcarea generală

Mijcarea unui rigid este cunoscută dacă pt. fiecare dintre punctele sale se cunosc legii de mișcare, traiectorii, viteze, și acelerații.

Considerând un rigid a cărui pt. de mișcare se raportează la un sistem fix și o fază a rigidului un sistem mobil $x_1y_1z_1$



Mijcarea originii mobilului nu fi cunoscută dacă se cunoaște \overline{r}_0

$$\overline{r}_0 = x_0 \overline{i}_1 + y_0 \overline{j}_1 + z_0 \overline{k}_1$$

Pentru un punct M (alături de carcasă) a cărui poziție este definită de vectorii \overline{r}_1 , nu sînt. fix și \overline{r}_1 , nu sînt. mobil, se poate scrie legea de mișcare :

$$\overline{r}_1 = \overline{r}_0 + \overline{r}$$

$$\overline{r}_1 = x_1 \overline{i}_1 + y_1 \overline{j}_1 + z_1 \overline{k}_1$$

$$\overline{r} = x \overline{i} + y \overline{j} + z \overline{k}$$

OBS! Se observă că versorii sist. fixe $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ sunt constanți în timp.

Versorii sist. mobil sunt variabili în timp și sunt sătăchiți de relații: $\vec{i}^2 = 1$; $\vec{j}^2 = 1$; $\vec{k}^2 = 1$
 $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$; $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$; $\vec{k} \cdot \vec{i} = 0$

Pentru determinarea legii de mișcare se fac prealabilele expresii $\boxed{\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{r}}$ pe sist. fix

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + x \cos(\vec{i}, \vec{i}_1) + y \cos(\vec{j}, \vec{i}_1) + z \cos(\vec{k}, \vec{i}_1) \\ y_1 = y_0 + x \cos(\vec{i}, \vec{j}_1) + y \cos(\vec{j}, \vec{j}_1) + z \cos(\vec{k}, \vec{j}_1) \\ z_1 = z_0 + x \cos(\vec{i}, \vec{k}_1) + y \cos(\vec{j}, \vec{k}_1) + z \cos(\vec{k}, \vec{k}_1) \end{cases}$$

Traекторia se obține prin eliminarea timpului rutine ecuațiile legilor de mișcare.

Viteză

Pentru definirea distribuției de viteză în mișcarea generală se introduce vectorul viteză angulară $\vec{\omega}$ cu componentele sale: $\begin{cases} \omega_x = \dot{j} \cdot \vec{k} \\ \omega_y = \dot{k} \cdot \vec{i} \\ \omega_z = \dot{i} \cdot \vec{j} \end{cases}$

Viteză se va găsi printră urmărirea absolută a vectorului de poziție \vec{r}_1 în rap. cu timpul

$$\vec{V} = \frac{\dot{\vec{r}}_1}{\vec{r}_1}$$

$$\dot{\vec{r}}_1 = \vec{V}_0 = \dot{x}_0 \vec{i}_1 + \dot{y}_0 \vec{j}_1 + \dot{z}_0 \vec{k}_1$$

viteză
originii

$$\dot{\vec{r}}_1 = x \cdot \dot{\vec{i}} + y \cdot \dot{\vec{j}} + z \cdot \dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Obs! Componentele vectorului \bar{v} se observă că sunt constante.

$$\boxed{\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}}$$

distribuția de mișcare

nu mișcarea generală

Acceleratia

Pentru determinarea distribuției acceleratiei se dă următoarea distribuție de mișcare.

$$\boxed{\dot{\bar{a}} = \dot{\bar{v}} = \dot{\bar{v}}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}}$$

distribuție de
accelerare nu
mișcarea generală

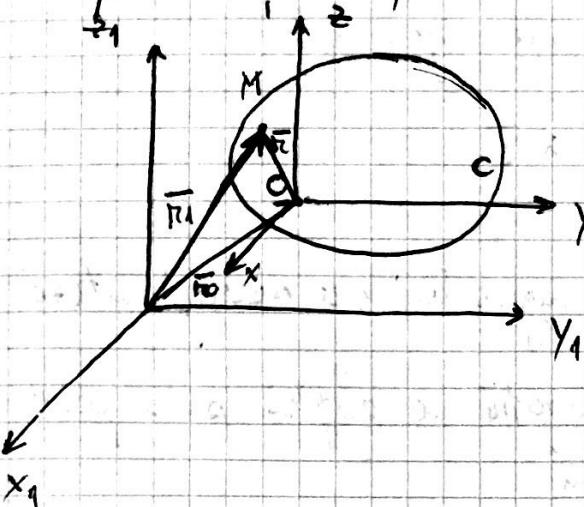
Obs! Se observă că mișcarea mihiulară este aceeași, în orice punct al rigidului.

Obs! Toate punctele situate pe o paralelă la $\bar{\omega}$ au aceeași mișcare.

Obs! Pentru rigidul liber, nu general există un singur punct de accelerare nulă numit punctul accelerării par-

Misarea de translatie a rigidului

Primă definiție, un rigid face o mișcare de translatie dacă una dintr-o dreptele care apără rigidului rămasă tot timpul mișcării paralelă reea rămasă



Se alege un sistem mobilă atașat corpului a. n. axele fixe și mobile sunt paralele.

$$\dot{\bar{x}} = \dot{\bar{y}} = \dot{\bar{z}} = 0$$

În consecință elementele mișcării mișcării sunt fă

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$$

\Rightarrow nu mișcarea de translatie $\bar{w} = 0 \Rightarrow$ nu are elemente de rotație

Considerând un punct oricărui M al rigidului

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + x \\ y_1 = y_0 + y \\ z_1 = z_0 + z \end{cases} \Rightarrow$$

lege de mișcare sub formă scalară
nu mișc. de translatie
 $x, y, z = \text{constante}$

Trajectoarea se obtine prin eliniere. Triuplului rutură există ecuații și trajectoarele punctelor pot fi suprapuse printr-o translatăie geometrică.

Distrub. de rutere se obține prin particularizarea distrub. din ancheta generală.

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{V} = \bar{V}_0}$$

\Rightarrow toate punctele rigidului au aceasi rutera

Distrub. de accelerare se obține prin particularizarea distrub. din ancheta generală

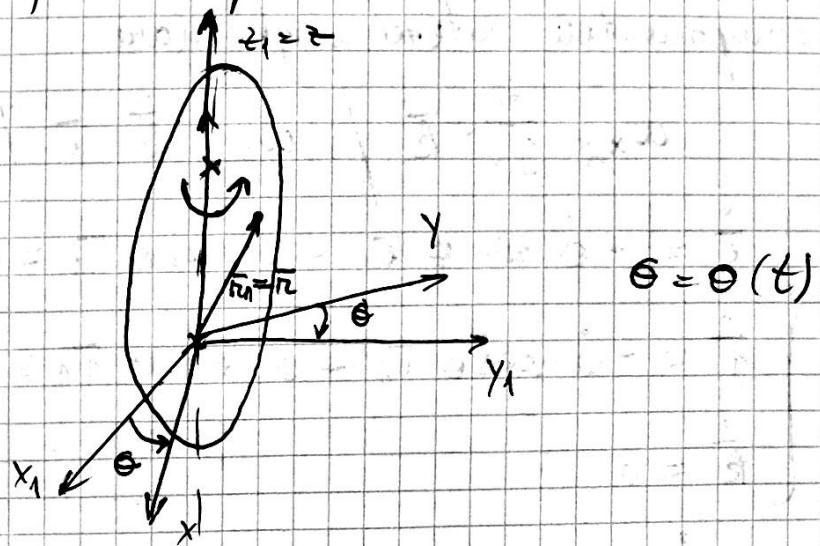
$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \underbrace{\bar{\epsilon} \times \bar{r}}_{\text{!}} + \underbrace{\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})}_{\text{!}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{a} = \bar{a}_0}$$

Concluzie: Prin ancheta de translatăie toate punctele rigidului au aceasi rutera și aceasi accelerare și pentru studiul rigidului este suficient să se analizeze un singur punct cromatic ales.

Mișcarea de rotație cu axă \hat{x}

Un rigid face rotație cu axă fixă dacă și dințre punctele sale rămăne fixe în spațiu și definește axa de rotație.



Olas! Poziția rigidului nu fi date de unghiul θ și altre axe.

Rigidul, în mișcare de rotație are un singur grad de libertate.

Între versori sist. mobil și cel al sist. fix există relații:

$$\begin{cases} \bar{i} = \cos \theta \cdot \bar{i}_1 + \sin \theta \bar{j}_1 \\ \bar{j} = -\sin \theta \bar{i}_1 + \cos \theta \bar{j}_1 \\ \bar{k} = \bar{k}_1 \end{cases} \quad \bar{r}_1 = \bar{r}$$

Zegea de mișcare se va găsi din expresia:

$$\bar{r}_1 = \bar{r} \Leftrightarrow x_1 \bar{i}_1 + y_1 \bar{j}_1 + z_1 \bar{k}_1 = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k}$$

prin identificarea coeficienților versorilor după ce am mulcat expresiile versorului mobil

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y_1 = x \sin \theta + y \cos \theta \\ z_1 = z \end{cases} \Rightarrow \text{lege de mișcare sub formă scalară}$$

Traекторia se găsește printră eliminarea timpului între aceste ecuații.

Pentru determinarea rătesei se determină cuai rătesei compunute rătesei angulară.

$$\omega_x = \dot{j} \cdot \bar{k} / \quad \omega_y = \dot{k} \cdot \bar{i} / \quad \omega_z = \dot{i} \cdot \bar{j}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{i} = -\dot{\theta} \sin \theta \bar{i}_1 + \dot{\theta} \cos \theta \bar{j}_1 = \dot{\theta} \bar{j} \\ \dot{j} = -\dot{\theta} \cos \theta \bar{i}_1 - \dot{\theta} \sin \theta \bar{j}_1 = -\dot{\theta} \bar{i} \\ \dot{k} = 0 \end{array} \right.$$

$$\omega_x = \dot{j} \cdot \bar{k} = 0$$

$$\omega_y = \dot{k} \cdot \bar{i} = 0$$

$$\omega_z = \dot{i} \cdot \bar{j} = \dot{\theta} \bar{j} \cdot \bar{j} = \dot{\theta}$$

$$\bar{\omega} = \omega_z \cdot \bar{k} = \dot{\theta} \cdot \bar{k}$$

$$\bar{\omega} = \dot{\theta}, \quad \varepsilon = \ddot{\theta}$$

Distribuția rătesei se găsește prin particularizarea distribuției răsăritelor generale:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$$

$$\boxed{\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}}$$

distribuție de răsărită nu
răsărită de rotație

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = -\dot{\theta} y \\ v_y = \dot{\theta} x \\ v_z = 0 \end{array} \right.$$

Distribuție de acelerări se găsește prin particulariz. distribuții
din mișcarea generală.

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \underbrace{\dot{\epsilon} \times \bar{r}}_{\parallel \bar{0}} + \underbrace{\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})}_{\perp}$$

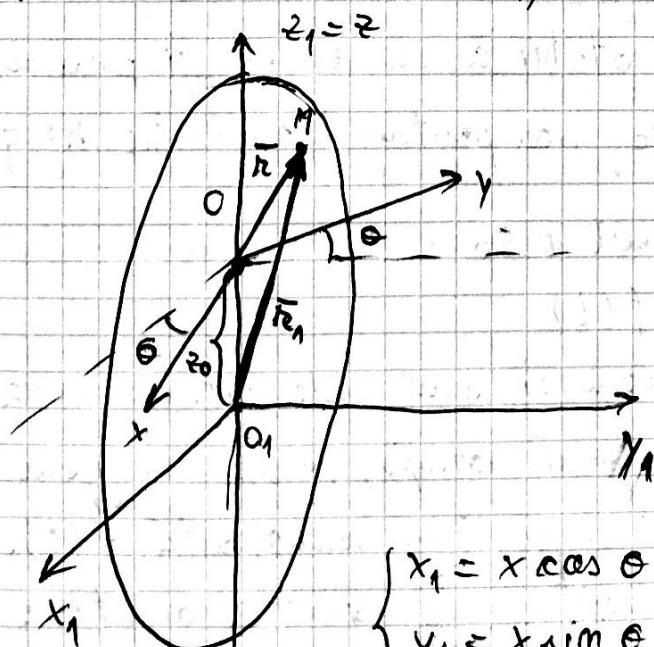
$$\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ 0 & 0 & \ddot{\theta} \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ -\ddot{\theta}y & \dot{\theta}x & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a_x = -\ddot{\theta}y - \dot{\theta}^2 x = -\epsilon y - \omega^2 x \\ a_y = -x\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2 y = -\epsilon x + \omega^2 y \\ a_z = 0 \end{cases}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Mișcarea de roto-translație

Pentru definiție un rigid face roto-translație dacă 2 puncte ale sale rămasă tot timpul mișcării pe o dreaptă numită axă de roto-translație.



$$\begin{cases} x_1 = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y_1 = x \sin \theta + y \cos \theta \Rightarrow \text{legătura} \\ z_1 = z_0 + z \end{cases}$$

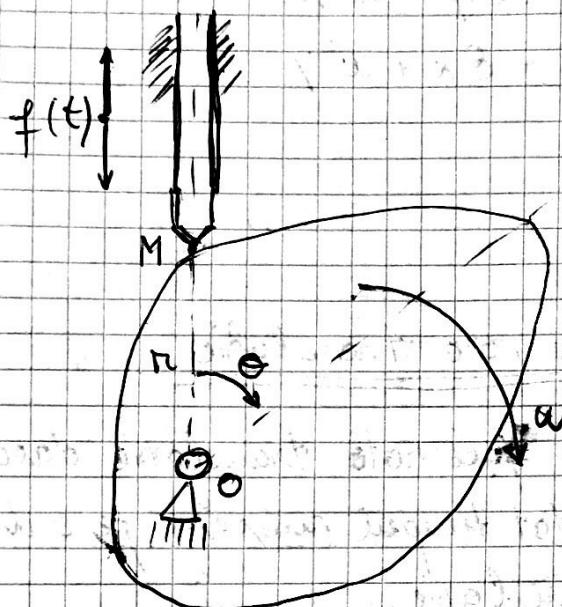
mișcare a pat.
M

Distrub. de rotație și distrub. de accelerare se obțin exact ca în subiectul precedent cu excepția axei care se tratează similar cu abordarea de la translată.

15.11.2013

Aplicații tehnice ale circumferinței

CAMA → este un rigid profilat care se rotește în jurul unei articulații și poate suporta o miscare de translată o fijă cu care se găsește în contact



Miscația de roatare a cannelor nu fi prezentată de legă
 $\theta = \omega t + \theta_0$, iar pentru translată $r = f(t)$

$$\begin{cases} \theta = \omega t + \theta_0 \\ r = f(t) \end{cases}$$

Problema care se pune este determinarea profilului canneli a. i. - profil rotabil, care să genereze o translată după o legă impusă și cunoscută $f(t)$.

Profilul canneli nu făcând traiectoria lui M în coord. polare.

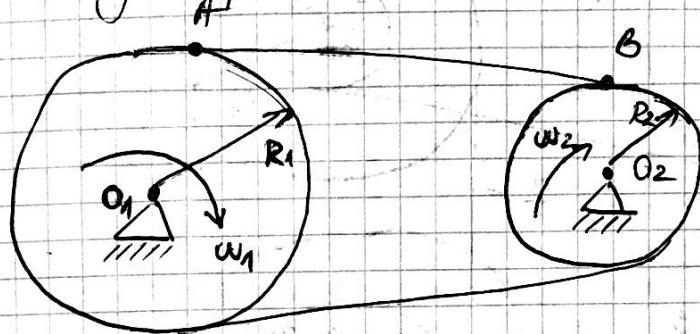
$$\begin{cases} \theta = \omega t + \theta_0 \\ r = f(t) \end{cases}$$

$$r = f\left(\frac{\theta - \theta_0}{\omega}\right)$$

În practică profilul curbei se găseste prin metode graficoanalitice. Cele mai uzuale aplicații se regăsesc în construcția mecanismelor de comandă și în construcția motoarelor cu ardere internă.

Transmisii prin curbe

Este un dispozitiv care realizează transmisia de rotație rutre a orei și este compus din două rabi de curăță, ligate printr-o curăță flexibilă și inextensibilă.



Ca tipuri de curbe există:

1. curbe liniare

2. curbe trapezoide

3. curbe liniare eliptice

Obs! Pentru un randament bun al transmisiei este necesar să nu existe alcunătuiri rutre roată și curăță fapt realizat prin tensiunea curbelor.

Se introduce noțiunea de coef. de transmisie a mecanismului ca raport rutre rutre mitisa angulară a rabiilor conduse și rea a rabiilor conduse.

$$k_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Raportul este pozitiv \Rightarrow rotatia se face în același sens și este respectivă negativă \Rightarrow rotatia se face în sens contrar.

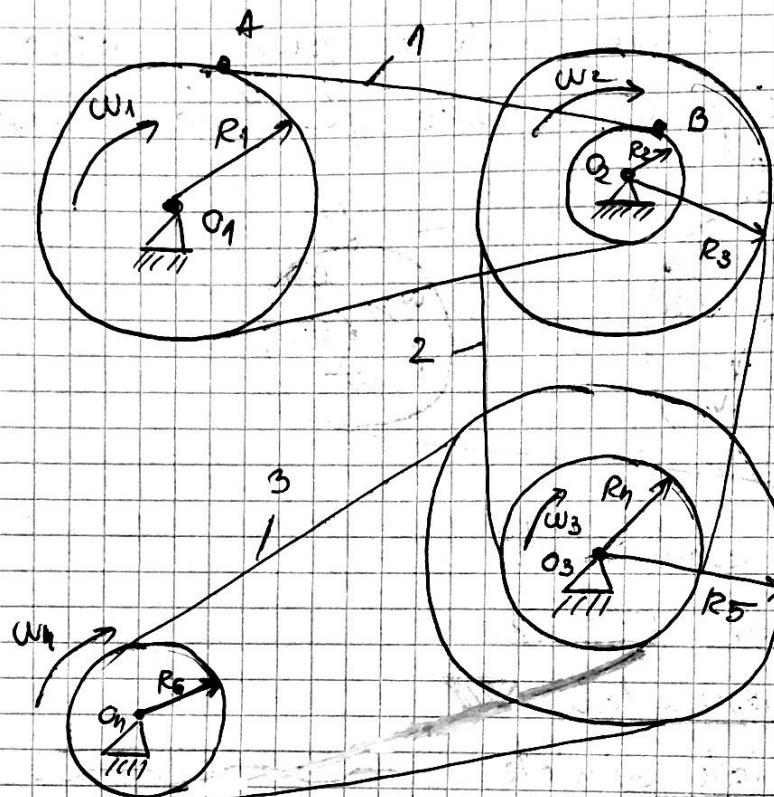
Se consideră că noul punctolar A și B este aceasi.

$$V_A = V_B$$

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

$$\omega_1 = \frac{R_2}{R_1} \cdot \omega_2 \Rightarrow k_{12} = \frac{R_2}{R_1}$$

În cazul transmisiei multiple, mișcarea de rotație se transmite rutine astă successive.



$$V_1 = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

$$\omega_1 = \frac{R_2}{R_1} \cdot \omega_2$$

$$V_2 = \omega_2 R_3 = \omega_3 R_4$$

$$\omega_2 = \frac{R_4}{R_3} \cdot \omega_3$$

$$V_3 = \omega_3 R_5 = \omega_4 R_6$$

$$\omega_3 = \frac{R_6}{R_5} \cdot \omega_4$$

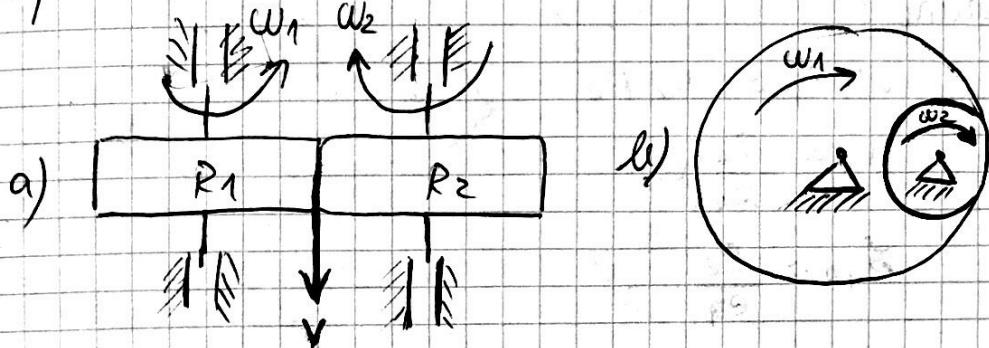
$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{R_6}{R_5} \cdot \omega_4$$

$$k_{14} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{R_6}{R_5}$$

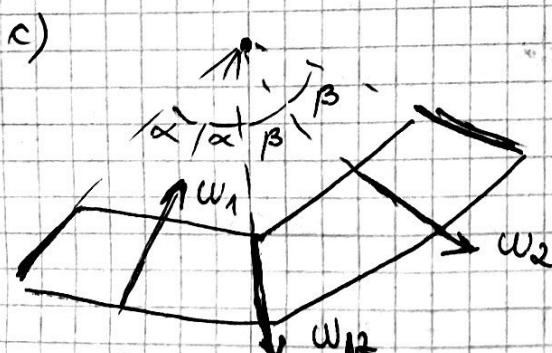
Obs! Transmisibile prin cercle pot fi folosite în diverse lărguri cinematice inclusiv ca elemente de siguranță.

Transmisie prin răpi de fricție

Sunt dispozitive care transmunt mișcarea de rotație rutre axă paralele sau nucrucișate folosind fenomenul de fricare.



Contactul cu fricare poate să aibă loc la exterior (casul a)) când $k < 0$; sau contact pe interior (casul b) când $k > 0$; sau contactul se face pe generațarea unui con (casul c))



În cazul roților cilindrice cu contact exterior, viteza în punctul de contact este aceeași pentru ambele răpi

$$V = \omega_1 R_1 = -\omega_2 R_2$$

$$\omega_1 = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \omega_2$$

$$k = -\frac{R_2}{R_1}$$

Obl! Pentru ca transmisarea mișcării să aibă loc, trebuie asigurată o forță de tensiune mare rutre nule și roti

Obl! Astfel de dispoz. sunt folosite ca elemente de protecție în lanțurile cinematice în care operează rotații

- La contactul interior după același principiu relațiv din urmă:

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

$$\omega_1 = \frac{R_2}{R_1} \omega_2$$

$$k_{12} = \frac{R_2}{R_1}$$

În cazul aselor rucărificate cumul contactul se face pe generațarea conului, din triunghiurile care se formează se poate scrie relațiile:

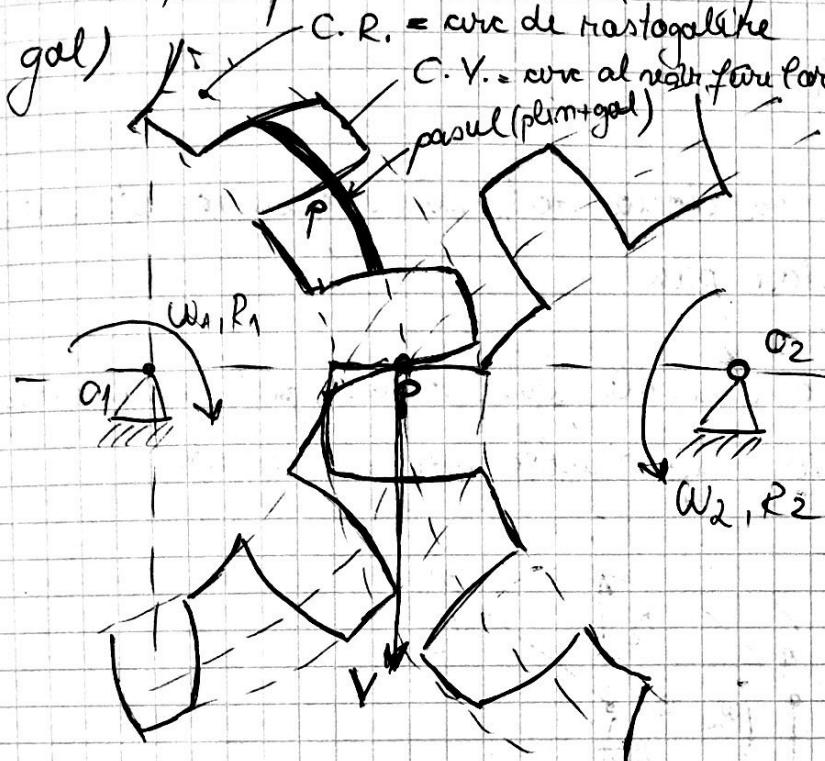
$$\frac{\omega_1}{\sin \beta} = - \frac{\omega_2}{\sin \alpha}$$

$$\omega_1 = - \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \omega_2$$

$$k_{12} = - \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

Transmisie prin roți dințate

Sunt corpuri cilindrice sau triunghiulare pe care se realizează o dentură caracterizată geometric printr'un număr de dinți și pasul denturii (lungimea unui plin și a unui gal)



Pentru realizarea angrenării (permisea nu rușine), flancul dințelui roții motoare se răstogalite și alinișă peste flancul dințelui roții conștientă, iar contactul dintre dinți se face nu permanentă în punctul P numit pal al angrenării care se găsește pe C.R.

Viteză în punctul P poate fi exprimată în funcție de ambele roți.

$$\omega_1 R_1 = -\omega_2 R_2 \quad \omega_1 = -\frac{R_2}{R_1} \omega_2$$

$$k_{12} = -\frac{R_2}{R_1}$$

O exprimare alternativă pentru faza poate face utilizând numărul de dituri:

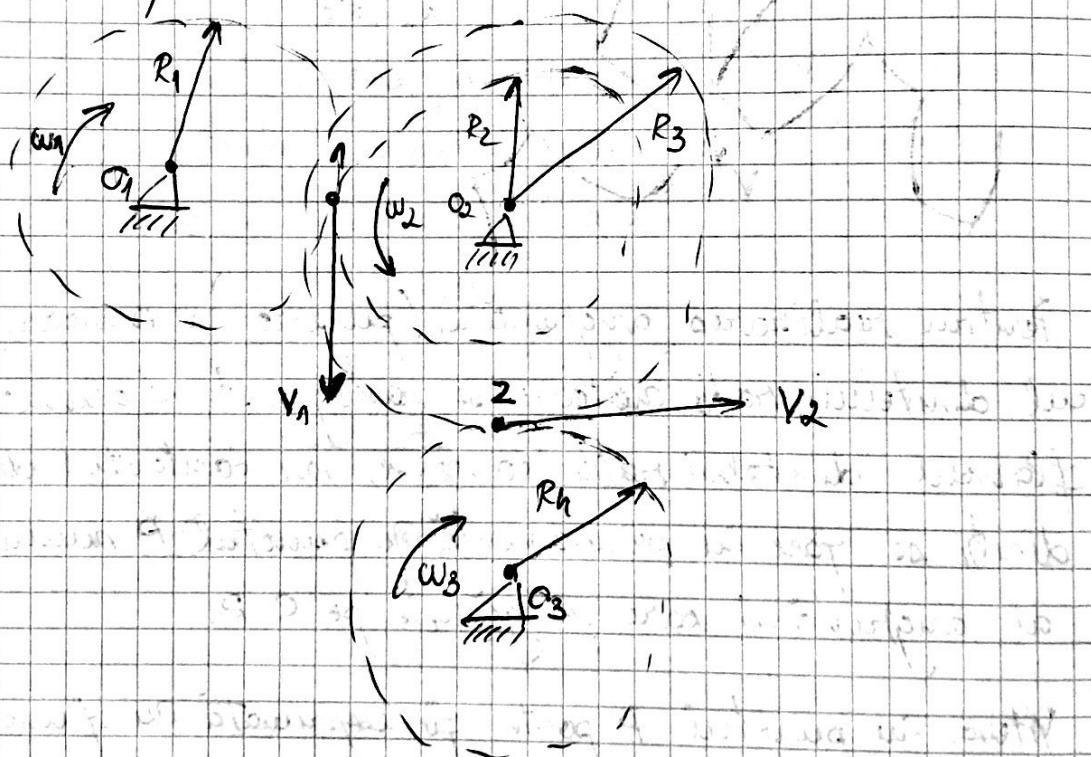
$$2\pi R_1 = p \cdot z_1 \quad / 2\pi R_2 = p \cdot z_2$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

$$R_{12} = -\frac{z_2}{z_1}$$

Oles! Pentru ca două roți să angrenare este necesar să aibă același pas

Că și la transmisiiile prin cerile pot exista angrenări multiple rutice mai multe ase de roatarie



$$(1): \omega_1 R_1 = -\omega_2 R_2$$

$$(2): -\omega_2 R_3 = \omega_3 R_4 \Rightarrow \omega_1 = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \omega_2 \quad \left. \begin{array}{l} \omega_2 = -\frac{R_4}{R_3} \cdot \omega_3 \\ \Rightarrow \omega_1 = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_4}{R_3} \omega_3 \end{array} \right\} R_{13}$$

DinamicaNouiuri fundamentale

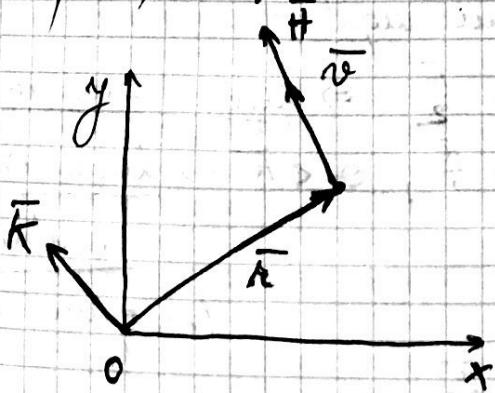
Dinamica este capitolul din mecanică ce studiază mișcarea corporilor lichid și consideră forțele ce produc această mișcare.

Problema fundamentală este determinarea legilor de mișcare atunci când se cunosc forțele care generază mișcarea.

În legea construcției dinamicii sunt principii sau postulate: princ. inerției, princ. acțiunii forței (legea fundamentală a dinamicii) ($\bar{F} = m \cdot \bar{a}$), princ. egalității al acțiunii și reacțiunii.

Jupulsul

Considerăm un punct material de masă m care se află în mișcare cu viteză \bar{v} și se poziționează prin vectorul de poziție \bar{r} .



jupulsul

$$\bar{H} = m \cdot \bar{v}$$

Momentul cinetic

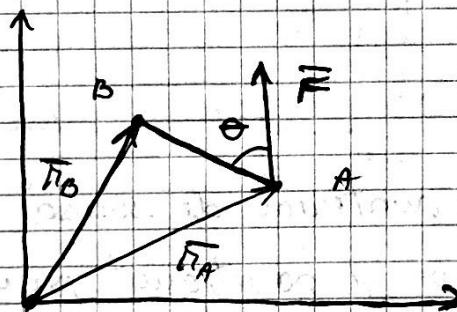
Prin definiție este momentul impulsului:

$$[\bar{K} = \bar{\tau} \times \bar{H} = \bar{\tau} \times m \bar{v}]$$

Obs! Mom. cinetic este un vector \perp pe planul formă de vectorul mișcării și punctul O

Lucrul mecanic

Prin definiție L al unei forțe constante care într-un deplasare orizontală pe o dreaptă AB este rezultatul prod. scalar dintre forță și vectorul \overline{AB}



$$L = \bar{F} \cdot \overline{AB} = F \cdot AB \cdot \cos \theta$$

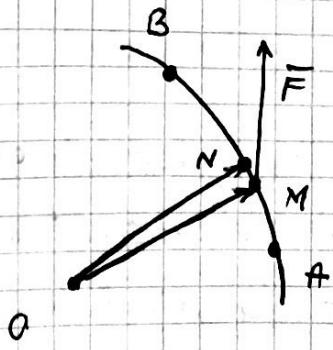
$$L = \bar{F} \cdot \Delta \bar{r}$$

OBS! L poate fi pozitiv sau negativ.

- L este pozitiv $\Leftrightarrow \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ lucru mecanic motor
- L este negativ $\Leftrightarrow \theta > \frac{\pi}{2}, \theta < \pi \Rightarrow$ lucru mecanic rezistent
(se opune mișcării)
- $L = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

Forțele \perp pe deplasare nu crează L !

În cazul cel mai general în care forța este variabilă și se deplasează pe o curbă curată, problema se poate reduce la cazul precedent pe intervale infinit mici.



MN fiind foarte mica arcul se poate assimila cu coarda si forța cu una constantă a. n. produce L elementar (dL)

$$dL = \overline{F} \cdot \overline{MN}$$

$$\boxed{dL = \overline{F} \cdot d\overline{r}}$$

Zecrul mecanic total pe AB se găseste prin integrarea acestei expresii.

$$\boxed{L_{AB} = \int_A^B \overline{F} \cdot d\overline{r}}$$

depinde de variația forței, de formă curbei și de poziția A, B.

Obs! Dacă forța este conservativă L nu depinde de traiectoria parcursă între A și B

Energia cinetică

Priu definiție este o măsură scalară și tot timpul pozitivă care, pentru PM are expresia

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2}$$

Pentru corpul rigid:

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2}$$

↓ energ. cinetică de transl. ↓ energ. cinetică de roatare

cuantumul de ierarhie
 ω = viteza angulară

Momentul de ierție

Priu def. este o mărime scalară care caracterizează distanța de masă din rigid și este definit ca și produsul masei și pătratul distanței paralele la un punct, axă sau un plan.
 \Rightarrow momente de ierție polare, axiale sau planare

Momentul de ierție polar

$$J_0 = \int (x^2 + y^2 + z^2) \cdot dm$$

(pt. un rigid cărcărat)

Momentul de ierție axial

$$J_x = \int (y^2 + z^2) \cdot dm$$

$$J_y = \int (x^2 + z^2) \cdot dm$$

$$J_z = \int (x^2 + y^2) \cdot dm$$

Momentul de ierție planar

$$J_{xoy} = \int z^2 dm$$

$$J_{xoz} = \int y^2 dm$$

$$J_{yoz} = \int x^2 dm$$

Se observă că autre măsr. de ierție există următoare:

$$J_0 = J_{xoy} + J_{xoz} + J_{yoz}$$

$$J_0 = \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z)$$

Se obține că masele de surse sunt tot timpul pozitive

Produse de inimă - diferențe na produs național brut și
distanta dintre două plane

$$J_{xy} = \int xy \, dm$$

$$J_{xz} = \int xz \, dm$$

$$J_{yz} = \int yz \, dm$$

Teoreme generale

în studiul dinamicii punctului material

a) Teorema impulsului - Pentru deducere se utilizează
legea lui Newton ($\bar{F} = mu \cdot \ddot{a}$)

$$\bar{F} = mu \cdot \ddot{a} = mu \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(mu \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{H}}{dt} = \dot{\vec{H}}$$

$$\boxed{\dot{\vec{H}} = \bar{F}} \rightarrow \text{teorema impulsului}$$

Derivata impulsului în raport cu timpul este egală
cu suma forțelor exterioare și de legătură.

~~$$\dot{\vec{H}} = \bar{F}_{ext} + \bar{F}_e$$~~

Ois! Dacă suma forțelor este nulă \Rightarrow impulsul este
constant \Rightarrow se conservă

$$\boxed{\vec{H} = \vec{C}} \rightarrow \text{teorema conservării}\br/> \text{impulsului}$$

b) Teorema momentului cinetic - Pentru introducerea
teoremei se consideră relația de definiție a momentului cinetic

$$\bar{K} = \bar{F} \times \bar{H} = \bar{F} \times mu \vec{v}$$

pe care o derivăm în
raport cu timpul

$$\dot{\vec{r}} = \underbrace{\vec{r} \times m \vec{v}}_0 + \underbrace{\vec{r} \times m \vec{a}}_{\vec{M}} = \vec{r} \times m \vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{ext}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{r}} = \vec{M}} \rightarrow \text{teorema muncii cineticic}$$

Derivata muncii cineticic nu raport cu timpul este egală cu suma muncilor generate de forțele exterioare și de legătura

$$\boxed{\vec{M} = \vec{M}_{\text{ext}} + \vec{M}_e}$$

Obs! În absența forțelor exterioare și de legătura muncă acușată este 0 a. i. din expresia teoremei \Rightarrow

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{r}}_0 = \vec{c}} \text{ care reprezintă forma conservativă a muncii cineticic.}$$

c) Teorema energiei cineticice - Pentru determinarea teoremei se va utiliza lega lui Newton $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d \vec{v}}{dt} = \vec{F} / \cdot d \vec{r}$$

$$m \cdot \cancel{\frac{d \vec{r}}{dt} \cdot \frac{d \vec{v}}{dt}} = \vec{F} \cdot d \vec{r}$$

$$m \cdot \vec{v} \cdot d \vec{r} = \vec{F} \cdot d \vec{r}$$

$$d\left(\frac{1}{2} m \cdot v^2\right) = dL$$

$$\boxed{dE_c = dL} \rightarrow \text{teorema energ. cineticice sub formă elementară}$$

Variatia elementara a energ. cineticice care se deplasă între 2 poziții infinit apropiate este egală cu lucrul mecanic elementar desfășurat de forță autre ca cele 2 poziții.

Pentru obținerea formei fizice se integrează această expresie între punctele A și B:

$$\int_A^B dE_c = \int_A^B dL$$

$$\boxed{E_{cB} - E_{cA} = L_{A-B}} \rightarrow \text{forma energ. cinetică sub formă finită}$$

Energ. cinetică Variatia energ. cinetică la mișc. punctului din pas - A în pas - B este egală cu lucrul mecanic al forțelor extinsoare și de legătură.

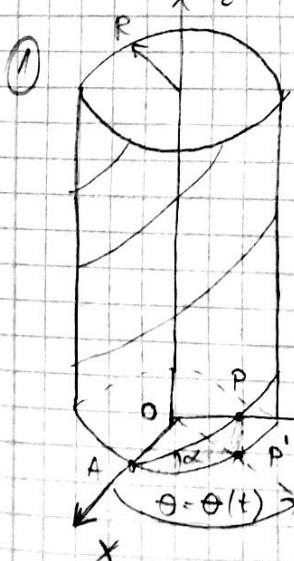
Obs! Oricare dintre cele 3 formeuri are ca rezultat o ecuație diferențială de ordinul 2 care generează mișcarea punctului.

27. 11. 2017

Laborator

Cinematica

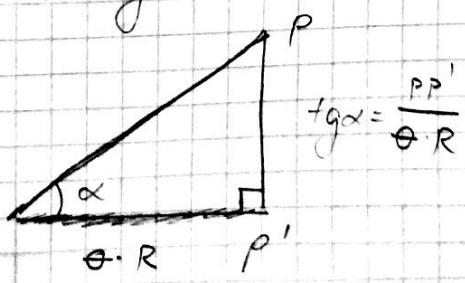
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad | \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

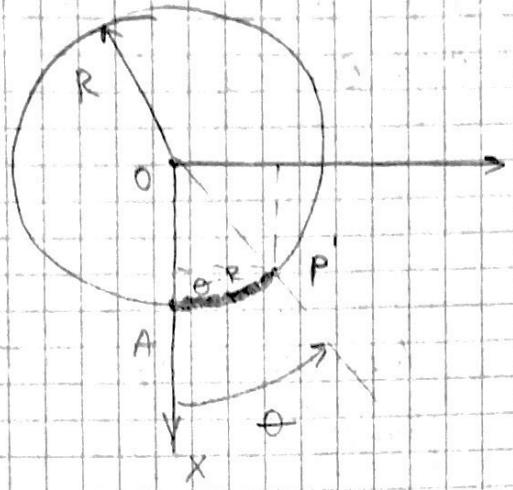


l.m., v , a_p ?
luga de mișcare,

$$\left. \begin{array}{l} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = \theta \cdot R \cdot \tan \alpha \end{array} \right\}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = ?$$





$$\{ \ddot{x} = -R \sin \theta \cdot \ddot{\theta}$$

$$y = R \cos \theta \cdot \ddot{\theta}$$

$$\ddot{z} = \ddot{\theta} R \tan \alpha$$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \theta \cdot \ddot{\theta}^2 + R^2 \cos^2 \theta \cdot \ddot{\theta}^2 + \ddot{\theta}^2 R^2 \tan^2 \alpha} \\ &= \sqrt{R^2 \ddot{\theta}^2 (1 + \tan^2 \alpha)} \end{aligned}$$

$$\{ \ddot{x} = -R \cos \theta \cdot \ddot{\theta}^2 - R \sin \theta \cdot \ddot{\theta}^2$$

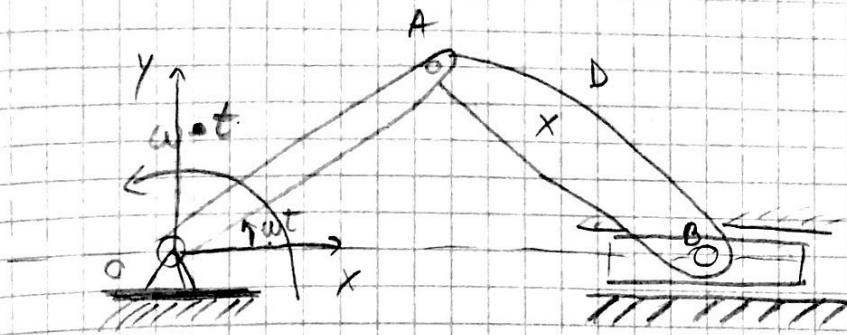
$$\ddot{y} = -R \sin \theta \cdot \ddot{\theta}^2 + R \cos \theta \cdot \ddot{\theta}^2$$

$$\ddot{z} = \ddot{\theta} R \tan \alpha$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} =$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{R^2 \cos^2 \theta \cdot \ddot{\theta}^4 + 2R^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \ddot{\theta}^2 \cdot \ddot{\theta}^2 + R^2 \sin^2 \theta \cdot \ddot{\theta}^4 +} \\ &\quad + R^2 \sin^2 \theta \cdot \ddot{\theta}^4 + 2R^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \ddot{\theta}^2 \cdot \ddot{\theta}^2 + R^2 \cos^2 \theta \cdot \ddot{\theta}^4 \\ &\quad + \ddot{\theta}^2 R^2 \tan^2 \alpha = \sqrt{R^2 \ddot{\theta}^4 + R^2 \ddot{\theta}^2 (1 + \tan^2 \alpha)} \end{aligned}$$

(2)



$$OA = AB = l$$

$$AD = d$$

L. m., trajectoria, v, a \ddot{a} ?

$$\begin{aligned} \text{l. m. } x_D &= l \cos(\omega \cdot t) + d \cos(\omega t) = \underline{\underline{(l+d) \cos \omega t}} \\ y_D &= l \sin(\omega t) - d \sin \omega t = \underline{\underline{(l-d) \sin \omega t}} \end{aligned}$$

$$\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD}$$

$$\int \omega dt = \omega \int dt = \omega t$$

$$\begin{aligned} x_D^2 + y_D^2 &= (l+d)^2 \cos^2 \omega t + (l-d)^2 \sin^2 \omega t \\ &= (l^2 + 2ld + d^2) \cos^2 \omega t + (l^2 - 2ld + d^2) \sin^2 \omega t \\ &= l^2 + d^2 + 2ld (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{x_D}{l+d} \right)^2 = \cos^2 \omega t$$

$$\left(\frac{y_D}{l-d} \right)^2 = \sin^2 \omega t$$

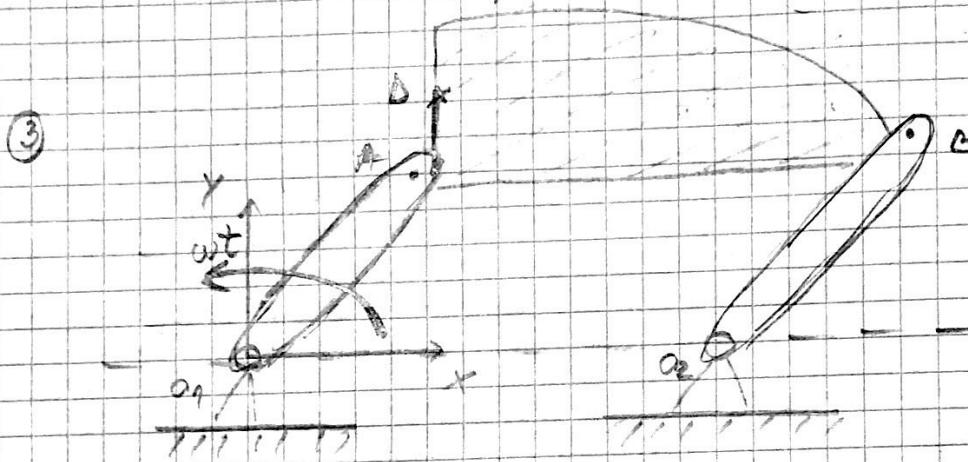
$$\left(\frac{x_D}{l+d} \right)^2 + \left(\frac{y_D}{l-d} \right)^2 = 1$$

$$\begin{cases} \dot{x}_d = -(l+d) \sin \omega t \cdot \omega \\ \dot{y}_d = (l-d) \cos \omega t \cdot \omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} =$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_d = -(l+d) \cos \omega t \cdot \omega^2 \\ \ddot{y}_d = -(l-d) \sin \omega t \cdot \omega^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \dots$$



$$AD = d$$

$$O_1 A \parallel O_2 B$$

$$O_1 A = O_2 B = l$$

$$O_1 O_2 \parallel AB$$

$$O_1 O_2 = AB = l$$

$$\underline{l, m., t_m., v, a_s ?}$$

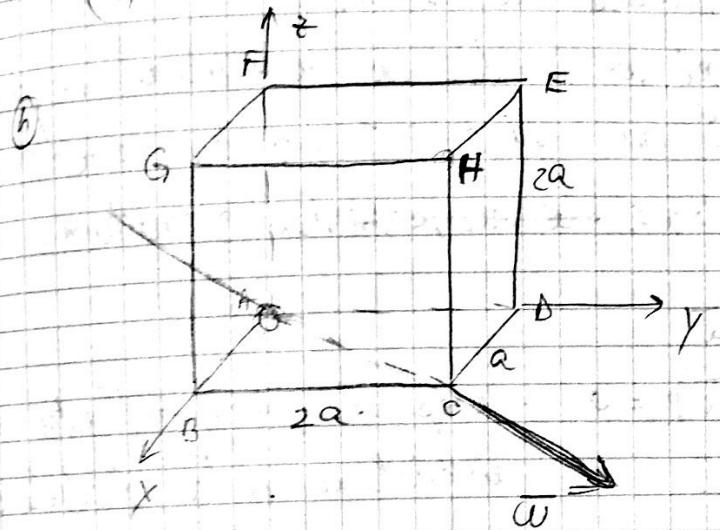
$$\begin{cases} x_d = l \cos \omega t \\ y_d = l \sin \omega t + d \end{cases}$$

$$\text{th.: } \frac{(x_d)^2}{l^2} = \cos^2 \omega t \quad \Rightarrow \left(\frac{x_d}{l}\right)^2 + \left(\frac{y_d - d}{l}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{y_d - d}{l}\right)^2 = \sin^2 \omega t$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -l \sin \omega t \cdot \omega \\ \ddot{y} = l \cos \omega t \cdot \omega \end{cases} \Rightarrow \ddot{r} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = l\omega$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -l \cos \omega t \cdot \omega^2 \\ \ddot{y} = -l \sin \omega t \cdot \omega^2 \end{cases} \Rightarrow \ddot{a} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = l\omega^2$$



$$N, a \begin{cases} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{cases}$$

$$\omega = 4 \text{ rad/s}, a = 2 \text{ m}$$

$$\ddot{r}_A = 0 \quad \ddot{a}_A = 0$$

$$\ddot{r}_C = 0 \quad \ddot{a}_C = 0$$

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}$$

$$\bar{\omega} = \omega \cdot \bar{n} = \frac{4 \bar{AC}}{AC}$$

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$$

$$\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \bar{r}_B = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix} \quad \bar{v} = \frac{4(\bar{a}i + 2\bar{a}j)}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}}$$

$$\bar{v} = \frac{4\bar{a}}{\sqrt{5}} + \frac{8\bar{j}}{\sqrt{5}}$$

$$\bar{v}_G = \bar{\omega} \times \bar{r}_G =$$

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{v} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

$$\Rightarrow \bar{a} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

$$\bar{a}_E = \bar{\omega} \times \bar{r}_E =$$

Principiul lui Galauert

28. 11. 2017

Pentru definirea principiului lui D'Alamert se utilizează noțiunea de forță de iurcie, element specific din punctul de vedere fizic al unui corp cu masă.

Pt. iur. forței de iurcie se consideră un punct material de masă care este într-o mișcare curată la care se scrie legea lui Newton.

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a}$$

$\bar{F} + (-m \cdot \bar{a}) = 0$ - expresie care reflectă un echilibru între forțele direct aplicate și de legătură și forța normală introdusă

$$\bar{F}_i = -m \cdot \bar{a}$$

$\Rightarrow \boxed{\bar{F} + \bar{F}_i = 0}$ - suma forțelor direct aplicate de legătură și de iurcie este 0

! Forțele direct aplicate de legătură și de iurcie se găsesc în echilibru (ECHILIBRU DINAMIC)

Pentru un sistem de puncte materiale de masă m_i , $i=1, \dots, n$ care sunt în mișcare, se poate scrie legea lui Newton sub forma:

$$m_i \cdot a_i = \bar{F}_{di} + \bar{F}_{ei} + \sum_j \bar{F}_{ij}$$

Se poate scrie finală tot de f. de iurcie.

$$(*) \bar{F}_{di} + \bar{F}_{ei} + \sum_j \bar{F}_{ij} = 0 \quad | \text{ } \pi x$$

! Pentru oricare i forțele de legătură și aplicate sunt
în permanență în echilibru.

$$(*) \bar{r} \times \bar{F}_{di} + \bar{r} \times \bar{F}_{ei} + \bar{r} \times \bar{F}_{ii} + \bar{r} \times \sum_j \bar{F}_{ij} = 0$$

Prin urmare ultimele două relații pentru toate cele
de puncte ale sistemului și în final cauți de faptul că
suma forțelor interioare este nulă și suma
curende forțele interioare e nulă.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i \bar{F}_{di} + \sum_i \bar{F}_{ei} + \sum_i \bar{F}_{ii} = 0 \quad \text{formă analitică} \\ \sum_i \bar{r} \times \bar{F}_{di} + \sum_i \bar{r} \times \bar{F}_{ei} + \sum_i \bar{r} \times \bar{F}_{ii} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{a princ. lui} \\ \text{d'Alambert} \end{array}$$

În concluzie suma forțelor interioare, exterioare
și de legătură și respectiv suma numărului aferente
sunt nule.

$\bar{R}, \bar{M} \rightarrow$ suma forțelor date și de legătură, și
suma număr. acutare

$\bar{R}_i, \bar{M}_i \rightarrow$ rezultanta forțelor de inurte și a
număr. acutare

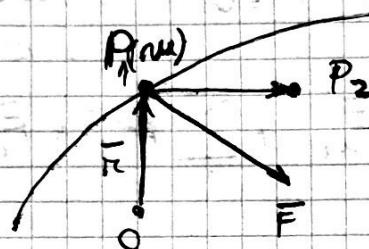
$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{R} + \bar{R}_i = 0 \\ \bar{M} + \bar{M}_i = 0 \end{cases} \quad \text{ecuații diferențiale}$$

În concluzie parțial principiu d'Alambert,
torsorul creat de forțele direct aplicate de legătură
și de inurte este nulă. \Rightarrow punctul se găsește în
echilibru dinamic.

Obs! Studiul dinamicii sist. de rigidă se studiază cu acest principiu similar cu studiul static, folosind metoda separării sau izolării la care se adaugă forțele de inerție.

Principiul deplasărilor virtuale

Prăsupunem un PM. P_1 care se mișcă pe o traiectorie oricare și are masa m .



Prăsupunem că înprîmăre acestui punct o deplasare infinit mică - o poziție foarte apropiată P_2 nu fiindă, nu afară traiectoriei.

$$\overline{P_1 P_2} = \int \bar{r}$$

Obs! Această poziție nesecurată poate fi compatibilă sau incompatibilă.

Deplasarea fictivă din P_1 în P_2 poartă numele de deplasare virtuală.

Dacă în P_1 acționează o forță \bar{F} (poate să fie direct aplicată, de legătură, interioară sau de inerție) \Rightarrow producă lumeni mecanici elementari corespunzător deplasării $P_1 P_2$.

$$\underbrace{\langle \delta L = \bar{F} \cdot \int \bar{r} \rangle}_{\text{lumeni mecanici elementari virtu}} \rightarrow \text{lumeni mecanici elementari virtu}$$

$$\int L = F_x \cdot S_x + F_y \cdot S_y + F_z \cdot S_z$$

Pentru un sist. de puncte materiale aflat în mișcare orizontală se poate scrie legea lui Newton:

$$m_i; \ddot{a}_i = \bar{F}_{di} + \bar{F}_{ei} + \sum_j \bar{F}_{ij}$$

Introducând forțele de inerție \Rightarrow

$$\Rightarrow \bar{F}_{di} + \bar{F}_{ei} + \sum_j \bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ii} = 0 \quad | \cdot \bar{S_r}$$

$$\Rightarrow \bar{F}_{di} \cdot \bar{S_r} + \bar{F}_{ei} \cdot \bar{S_r} + \sum_j \bar{F}_{ij} \cdot \bar{S_r} + \bar{F}_{ii} \cdot \bar{S_r} = 0$$

$$\underline{\int L_d + \int L_e + \int L_{int} + \int L_i = 0}$$

Expresia principiului deplasărilor virtuale pentru un sistem de puncte materiale.

Suma lucrurilor mecanice elementare virtuale create de forțele direct aplicate, de legătura, interioare și de inerție este 0.

Pentru corpul rigid, având în vedere că suma forțelor interioare este nula \Rightarrow

$$\underline{\int L_d + \int L_e + \int L_i = 0}$$

Ecuatiile lui Lagrange de spuma a II-a

Sunt aplicabile in studiul dinamicii sist. de rigide (structurile robotice)

sunt lanțuri cinematice deschise, adică nu au multe rigide mulțumite ligate prin cupluri de rotație sau cupluri de translație.

Parametrii de deplasare, viteza și accelerare ai unui dintr-un rigid depind de parametrii precedenților.

Modelul matematic care ilustrează această dependență este reprezentat de un sist. de ecuații diferențiale, care se regăsesc ca coord. generalizate, viteze generalizate și forțe generalizate.

Pentru definirea ecuațiilor lui Lagrange se introduce noțiunea de lagrangian (\mathcal{L}) definit ca diferența dintre E_c și E_p .

$$\mathcal{L} = E_c - E_p$$

Pentru un rigid:

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

Ecuatiile lui Lagrange de spuma a II-a sunt definite sub forma:

$$\textcircled{*} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial E_c}{\partial q_i} = F_i \quad i = \overline{1, \dots, m}$$

$m \rightarrow \text{nр. de grade de libertate}$

În această expresie $q_i \rightarrow$ coord. generalizate (daca sunt mișcări de translatărie q_i vor fi lungimi, daca sunt mișcări de rotație q_i vor fi măghiuiri)

$\dot{q}_i \rightarrow$ vitezele generalizate (viteze liniare la translatărie, viteze măghiuale la rotație)

$F_i \rightarrow$ forțe generalizate (care pentru mișc. de translatație sunt forțele din articulație, iar pentru mișc. de rotație sunt momentele din articulație)

Pașii de urmat în rezolvarea unui sistem dinamic multicorp:

- ① Se calculează E_c și E_p a corpurilor din sistem
- ② Se formează lagrangianul sistemului L
- ③ Se aplică ecuațiile \star pentru fiecare grad de libertate
- ④ Se rezolvă sistemul de ecuații diferențiale

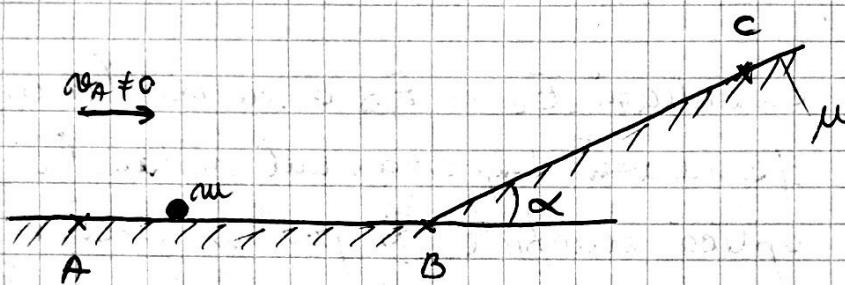
LaboratorDinamica punctului material

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a} \quad (\text{legea lui Newton})$$

$$E_{cf} - E_{ci} = L_{i-f} \quad (\text{variataia energ. cinetice})$$

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$$L = \bar{F} \cdot \bar{d} = F \cdot d \cdot \cos \alpha (F, d)$$



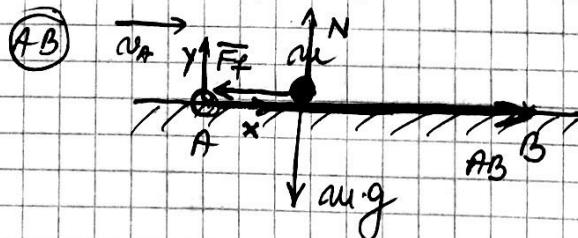
$$\underline{AB = d}$$

$$v_B = ?$$

$$v_C = ? \quad (v_C = 0)$$

$$v_{BC} = ?$$

$$BD = ? \quad (v_D = 0)$$



$$E_{cB} - E_{cA} = L_{A-B}$$

$$\frac{m \cdot v_B^2}{2} - \frac{m \cdot v_A^2}{2} = F_f \cdot AB \cdot \cos(-\alpha)$$

$$F_f = +\mu \cdot N$$

$$N = m \cdot g$$

$$\Leftrightarrow -\mu \cdot m \cdot g \cdot d \quad / : m =$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{2 \mu g d + v_A^2}$$

$$\overline{F} = m \cdot \ddot{\overline{a}} \quad \Rightarrow \quad m \cdot \ddot{x} = \sum F_x = -F_f = -\mu m g / :m$$

$$m \cdot \ddot{y} = \sum F_y = N - m g = 0 \quad \Downarrow$$

$$N = m g$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\mu g \\ \ddot{y} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\mu g t + c_1 \\ \dot{y} = c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\mu g \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_3 \\ y = c_2 t + c_4 \end{cases}$$

(constante de integrare)

$$\stackrel{=}{\rightarrow} \\ t=0$$

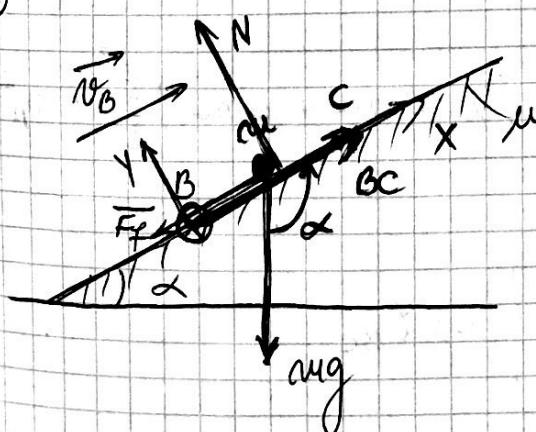
$$\begin{cases} \dot{x}(t=0) = v_A = c_1 \\ \dot{y}(t=0) = 0 = c_2 \\ x(t=0) = 0 = c_3 \\ y(t=0) = 0 = c_4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_B(t_{AB}) \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

\Rightarrow l. de mișcare :

$$\begin{cases} x = -\mu g \frac{t^2}{2} + v_A \cdot t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow t_{AB}(x_B = d)$$

(BC)



$$E_{CC} - E_{CB} = L_{B-C}$$

$$\frac{m \cdot v_C^2}{2} - \frac{m \cdot v_B^2}{2} =$$

$$= F_f \cdot BC \cdot \cos \pi =$$

$$= \mu \cdot g \cdot BC \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) / :m$$

\downarrow

- sim α

! Normala niciodată nu dă lucru mecanic fizică este tot timpul \perp pe suprafață. camuflaj. F_f dă tot timpul

luomu reacanic negativ.

$$F_f = \mu \cdot N$$

$$N = m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$-\frac{v_B^2}{2} = -\mu g \cos \alpha \cdot BC - g \sin \alpha \cdot BC \Rightarrow BC = ?$$

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x} = -F_f - m g \sin \alpha = -\mu m g \cos \alpha - m g \sin \alpha \\ m \cdot \ddot{y} = N - m g \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = m g \cos \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -g (\mu \cos \alpha + \sin \alpha) \\ \ddot{y} = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$$

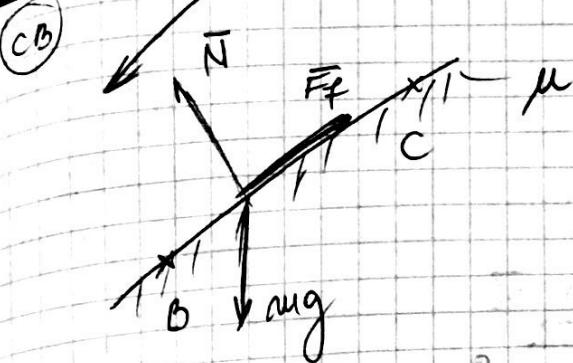
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -g (\mu \cos \alpha + \sin \alpha) \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_3 \\ y = C_2 t + C_4 \end{cases}$$

c.i. \Rightarrow

$$\begin{cases} \dot{x}(t=0) = v_B \Rightarrow C_1 \\ \dot{y}(t=0) = 0 \Rightarrow C_2 \\ x(t=0) = 0 \Rightarrow C_3 \\ y(t=0) = 0 \Rightarrow C_4 \end{cases} \Rightarrow l.m.$$

$$\Rightarrow l.m. : \begin{cases} x = -g (\mu \cos \alpha + \sin \alpha) \frac{t^2}{2} + v_B \cdot t \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -g (\mu \cos \alpha + \sin \alpha) t + v_B \\ \dot{x}_B = 0 \end{cases} \Rightarrow t_{BC}$$

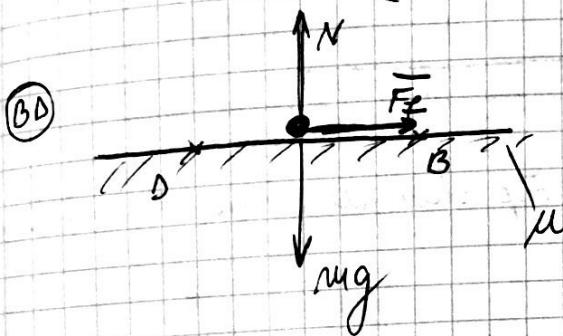


$$E_{CB} - E_{Cc} = L_{C-B}$$

$$\frac{mu \cdot v_B^2}{2} - \frac{mu \cdot v_C^2}{2} = -F_f \cdot BC + mg \cdot BC \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

"sim alpha"

$$\Rightarrow v_B = \overrightarrow{v_B}$$

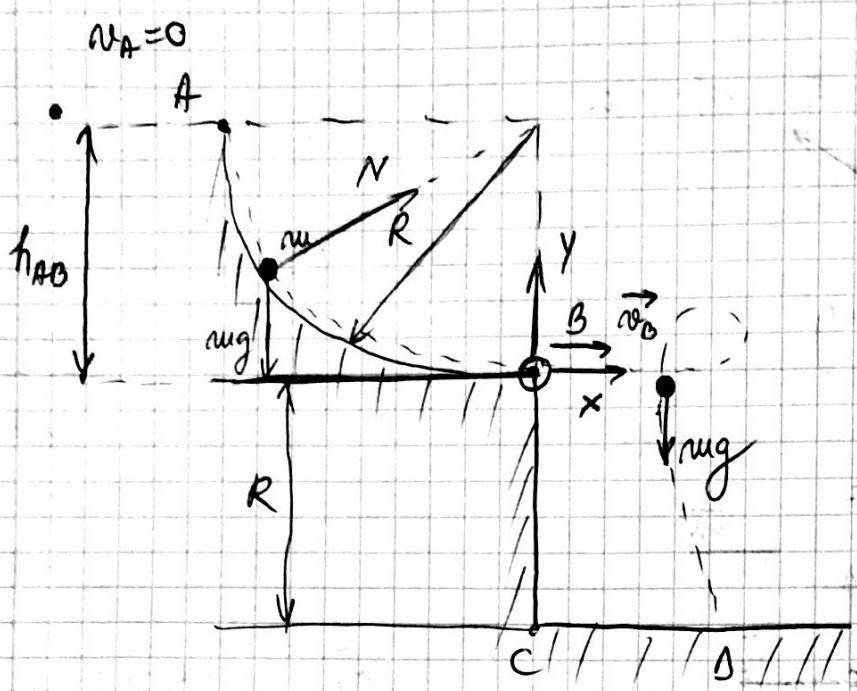


$$\frac{mu \cdot v_D^2}{2} - \frac{mu \cdot v_B^2}{2} =$$

$$= -F_f \cdot BD \quad | : mu$$

$$\Rightarrow BD =$$

! Legea lui Newton poate fi utilizată pentru determinarea aforii deplasării sau timpului pe care trasează. Dar din motive subiective se preferă utilizarea teoremei energ. circuite atât timp cât PM se află nu contact cu o suprafață / se cunoaște traectoria și nu se cere timpul



$$\begin{aligned} \omega_B &=? \\ l.m. (\overrightarrow{BA}) &=? \\ \Delta(x, y) &=? \end{aligned}$$

Pe suprafață curba există F_f dar din matrice subiectivă optăm să o neglijăm.

$$(AB) E_{CB} - E_{CA} = L_{A-B}$$

$$\frac{m v_B^2}{2} - \frac{m v_A^2}{2} = \text{mug. } h_{A0} = \text{mug} R \quad / : m$$

rezultatul mecanic al greutății este egal cu minus energ. potențială.

$$\Rightarrow \omega_B = \sqrt{2gR}$$

(BD)

$$\begin{cases} m \ddot{x} = 0 \\ m \ddot{y} = -\text{mug} \end{cases} \quad / : m \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l.m.: \quad x = c_1 t + c_3$$

$$y = -g \frac{t^2}{2} + c_2 t + c_4$$

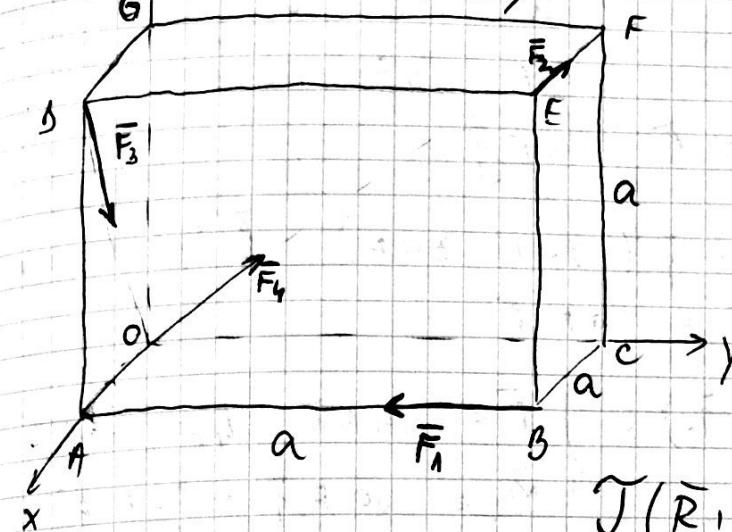
$$\begin{matrix} c.i. \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} t=0 \\ c_1, 2, 3, 4, \dots \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ y(t=0) = 0 \\ \dot{x}(t=0) = v_B \\ \dot{y}(t=0) = 0 \end{cases}$$

$$y_D = -R$$

$$y = -g \frac{t^2}{2} \Rightarrow t_{BD}$$

$$\Rightarrow x(t_{BD})$$



196+

16

$\frac{1}{213}$

$$F_1 = F$$

$$F_2 = 3F$$

$$F_3 = 6F\sqrt{2}$$

$$F_4 = 5F\sqrt{3}$$

$\bar{R}, |R|, \bar{M}_o, \bar{M}_r$

$$J(\bar{R}, \bar{M}_o): \begin{cases} \bar{R} = ? \\ \bar{M}_o = ? \end{cases}$$

$$\bar{F}_1 = -F\bar{j}$$

$$\bar{F}_2 = -3F\bar{i}$$

$$\bar{F}_3 = 6F\sqrt{2} \quad \frac{-a\bar{k} - a\bar{i}}{a\sqrt{2}} = \frac{-6F\bar{k} - 6F\bar{i}}{a\sqrt{2}}$$

$$\bar{F}_4 = 5F\sqrt{3} \quad \frac{a\bar{j} - a\bar{i} + a\bar{k}}{a\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{5F\bar{j} - 5F\bar{i} + 5F\bar{k}}{a\sqrt{3}}$$

$$\bar{R} = \bar{i}(-3F - 6F - 5F) + \bar{j}(-F + 5F) + \bar{k}(-6F + 5F)$$

$$= -14F\bar{i} + 4F\bar{j} - F\bar{k}$$

$$|R| = \sqrt{196F^2 + 16F^2 + F^2} = F\sqrt{213}$$

$$\frac{\bar{M}_o}{M_{oF1}} = \frac{\bar{M}_{oF1} + \bar{M}_{oF2} + \bar{M}_{oF3} + \bar{M}_{oF4}}{\bar{oA} \times \bar{F}_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & -F & 0 \end{vmatrix} = -aF\bar{k}$$

$$\bar{M}_{oF2} = \bar{oF} \times \bar{F}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & a & a \\ -3F & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3aF\bar{j} + 3aF\bar{k}$$

$$\overline{M}_{OF_3} = 0$$

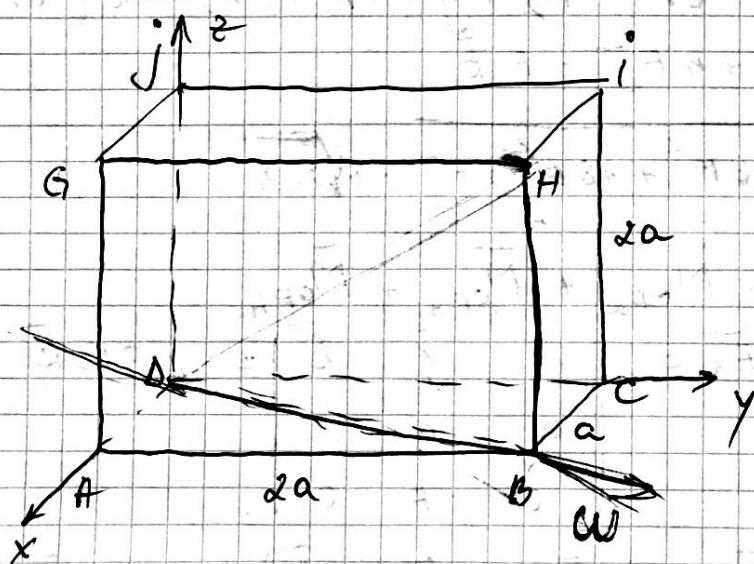
$$\begin{aligned}\overline{M}_{OF_1} &= \overline{OA} \times \overline{F_h} = \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} & \bar{k} \\ a & 0 & 0 \\ -5F & 5F & 5F \end{vmatrix} = \\ &= 5aF\bar{k} - 5aF\bar{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{M}_o &= \bar{x}(0) + \bar{j}(-5aF - 3aF) + \bar{k}(5aF - aF + 3aF) \\ &= -8aF\bar{j} + 7aF\bar{k}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{J}(\bar{R}, \bar{M}_o) : \begin{cases} \bar{R} = -14F\bar{i} + 4F\bar{j} - F\bar{k} \\ \bar{M}_o = -8aF\bar{j} + 7aF\bar{k} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\bar{M}_R &= \frac{\bar{M}_o \cdot \bar{R}}{|\bar{R}|} = \frac{M_x \cdot R_x + M_y \cdot R_y + M_z \cdot R_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \\ &= \frac{-8aF \cdot 4F + (7aF \cdot -F)}{F\sqrt{213}} = \\ &= \frac{-32aF^2 - 7aF^2}{F\sqrt{213}} = \frac{-39aF^2}{\sqrt{213}}\end{aligned}$$

$$\bar{J}_{\min}(\bar{R}, \bar{M}_R)$$

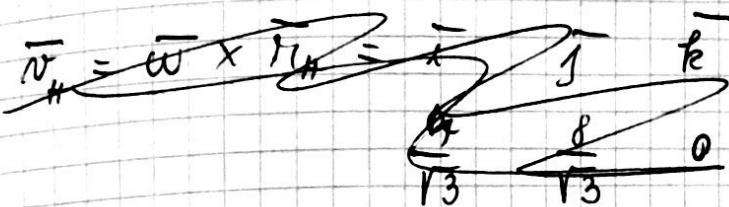


$$\begin{aligned}w &= \omega \text{ rad/s} \\ &\text{at } C \\ &\text{at } H\end{aligned}$$

$$\bar{\omega} = \omega \cdot \frac{\Delta \theta}{|AB|} = h \quad \frac{a\bar{i} + 2a\bar{j}}{a\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}\bar{i} + \frac{8}{\sqrt{3}}\bar{j}$$

$$\bar{v}_A = \bar{\omega} \times \bar{r}_A = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & 0 & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{8}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{8}{\sqrt{3}}a\bar{k}$$

$$\bar{v}_B = 0 \quad \bar{v}_C = \bar{\omega} \times \bar{r}_C = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 2a & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{8}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{8}{\sqrt{3}}a\bar{k}$$



$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{8}{\sqrt{3}} & 0 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{8}{\sqrt{3}}a\bar{k}$$

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{8}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 2a & 0 \end{vmatrix} = \frac{8}{\sqrt{3}}a\bar{k}$$

$$\bar{v}_H = \bar{\omega} \times \bar{r}_H = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{8}{\sqrt{3}} & 0 \\ a & 2a & 2a \end{vmatrix} = \frac{16}{\sqrt{3}}a\bar{i} + \frac{8}{\sqrt{3}}a\bar{k} - \frac{8}{\sqrt{3}}a\bar{k} - \frac{8}{\sqrt{3}}a\bar{j}$$

$$\bar{a}_A = \bar{\omega} \times \bar{v}_A = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{8}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{\sqrt{3}}a \end{vmatrix} = \frac{16}{\sqrt{3}}a\bar{i} - \frac{32}{3}a\bar{j}$$