Part I

1 5. Valori proprii si vectori proprii

1.1 A. Teorie

Problematica pe care o abordam in acest capitol are aplicatii in cele mai diverse ramuri ingineresti. Folosim valori si vectori proprii in probleme de optimizare a sistemelor mari, in probleme ierarhizare a paginilor Web si in orice analiza de retele (electrice, de calculatoare, sociale, neuronale, etc.). Un instrument important folosit in asemenea aplicatii - oferit de teoria pe care o expunem aici- este o tehnica simpla de calcul al matricei A^m unde A este o matrice patratica.

1.1.1 5.1. Operatori. Problema diagonalizarii

Un raspuns partial la problema calculului matricei A^m este dat de metoda diagonalizarii.

Peste tot in cele ce urmeaza V este un spatiu vectorial peste corpul $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, iar $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ si $B' = \{v_1', v_2', \cdots, v_n'\}$ sunt doua baze in acest spatiu.

Definitia 5.1.1. Operator liniar. *O functie liniara $L : V \to V$ se numeste **operator liniar** (al spatiului$V$). Notam multimea operatorilor liniari ai spatiului V cu $\mathcal{L}(V)$ (in loc de $\mathcal{L}(V, V)$). Numim **matrice a operatorului** L in baza B si o notam L_B matricea patratica a aplicatiei L in perechea de baze B, B, i.e. $L_B := L_{BB}$.*

Deoarece operatorii liniari sunt aplicatii liniare particulare avem urmatoarele proprietati.

Propozitia 5.1.1. *Fie $f \in \mathcal{L}(V)$, $g \in \mathcal{L}(V)$ si $T_{BB'}$ matricea de trecere de la baza B la baza B'.*

1. $f_B \in K^{n\times n}$.

2. $f \circ g, g \circ f \in \mathcal{L}(V)$ *si* $(f \circ g)_B = f_B \cdot g_B$.

3. $f_{B'} = T_{BB'}^{-1} \cdot f_B \cdot T_{BB'}$

4. *Orice matrice $A \in K^{n\times n}$ defineste in mod unic un operator $h \in \mathcal{L}(V)$ pentru care $A = h_B$; expresia sa analitica $h(v)$, unde $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n \in V$, este data de matricea coloana*

$$Av_B := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_2 \end{pmatrix}$$

prin $h(v) = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \cdots + y_n v_n$.

5. f *este izomorfism daca si numai daca* f_B *este nesingulara; in acest caz matricea operatorului* f^{-1} *este inversa matricei operatorului* f, *adica* $\left(f^{-1}\right)_B = (f_B)^{-1}$.

Definitia 5.1.2. Matrice diagonala. *O matrice de forma*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$$

in care cel putin unul dintre scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ *este nenul se numeste **matrice diagonala**.*

Problema diagonalizarii. Ne punem problema depistarii unui procedeu de de gasire a matricei A^m, unde A este o matrice patratica, iar m este un numar intreg pozitiv. Daca D este matricea diagonala din definitia de mai sus, atunci, prin inductie matematica obtinem ca D^m este de asemenea matrice diagonala:

$$D^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{pmatrix}.$$

Fie $L \in \mathcal{L}(V)$ si $L_B := A$ matricea sa in baza B. Presupunem ca exista o baza B' in care matricea operatorului L este matricea diagonala $L_{B'} := D$. Atunci $D = T_{BB'}^{-1} \cdot A \cdot T_{BB'}$ si de aici

$$A = T_{BB'} \cdot D \cdot T_{BB'}^{-1}.$$

Ridicand la patrat obtinem

$$A^2 = T_{BB'} \cdot D \cdot T_{BB'}^{-1} \cdot T_{BB'} \cdot D \cdot T_{BB'}^{-1} = T_{BB'} \cdot D^2 \cdot T_{BB'}^{-1}.$$

Prin inductie matematica deducem ca

$$A^m = T_{BB'} \cdot D^m \cdot T_{BB'}^{-1}.$$

Prin urmare calculul matricei A^m este facil atunci cand matricea A se poate **aduce la forma diagonala.**

*Ne punem problema existentei unei baze in care un operator (matrice patratica) are forma diagonala, si, in cazul existentei gasirea formei diagonale precum si a unei baze in care are aceasta forma. Aceasta este **problema diagonalizarii**.*

Vom folosi adesea expresiile de operator diagonalizabil sau matrica diagonalizabila.

Definitia 5.1.3. Matrice diagonalizabila. Operator diagonalizabil. *Fie $L \in \mathcal{L}(V)$ si A matricea sa intr-o baza B. Daca exista o baza B' in care matricea $L_{B'}$ este matrice diagonala spunem ca L este un* ***operator diagonalizabil*** *si ca matricea A este* **matrice diagonalizabila.**

Observatia 5.1.1. Daca $L \in \mathcal{L}(V)$ are forma diagonala $L_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ in baza $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ atunci $L(v_1) = \lambda_1 v_1,\ L(v_2) = \lambda_2 v_2, \ldots,\ L(v_n) = \lambda_n v_n$. Prin urmare problema diagonalizarii este strict legata de problema depistarii unor scalari λ si a unor vectori nenuli v astfel incat $L(v) = \lambda v$.

Exemplu 5.1.1. Matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ este matricea operatorului $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $f(x,y) = (x+y, x+y)$ in baza canonica. Daca ea ar fi diagonalizabila si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ar fi forma diagonala in baza $B = \{v_1, v_2\}$ atunci, conform observatiei precedente trebuie sa gasim $\lambda \in \mathbb{R}$ si doi vectori liniar independenti de forma $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ astfel incat $L(v) = \lambda v$. Matriceal

$$(A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pentru ca acest sistem sa admita solutii netriviale tretuie ca $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, deci $\lambda \in \{0, 2\}$. Daca $\lambda = 0$ sistemul se reduce la ecuatia $x + y = 0$, deci un vector nenul $v_1 = (x,y)$ pentru care $L(v_1) = \lambda v_1$ trebuie sa apartina multimii $\{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,-1) \mid x \in \mathbb{R}\}$; alegem de exemplu $v_1 = (1,-1)$. Analog, daca $\lambda = 2$ sitemul se reduce la ecuatia $x - y = 0$, deci un vector nenul $v_2 = (x,y)$ pentru care $L(v_2) = \lambda v_2$ trebuie sa apartina multimii $\{x(1,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$; alegem de exemplu $v_2 = (1,1)$. Am obtinut baza $B = \{v_1, v_2\}$; matricea de trecere de la baza canonoca la baza B este $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, iar matricea operatorului in aceasta baza este matricea $f_B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ adica o matrice diagonala.

Raspunsul la problema diagonalizarii este dat, printre altele, de teoria valorilor si a vectorilor proprii.

1.1.2 5.2. Valori proprii si vectori proprii

Definitia 5.2.1. *Fie $f \in \mathcal{L}(V)$ si A matricea sa in baza $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. Un vector nenul $v \in V \backslash \{\theta_V\}$ se numeste* ***vector propriu al operatorului***

liniar *f (**sau a matricei** A) daca exista un numar $\lambda \in K$ astfel incat*

$$f(v) = \lambda v.$$

*Numarul λ se numeste **voloare proprie a operatorului liniar** f (**sau a matricei** A) asociata vectorului propriu v. Multimea valorilor proprii ale operatorului f (matricei$A$) ce noteaza cu $\sigma(f)$ ($\sigma(A)$) si se numeste **spectrul operatorului** f (**spectrul matricei** A).*

Prin urmare $\lambda \in \sigma(f)$ daca si numai daca

$$\exists v \in V \setminus \{\theta_V\} : f(v) = \lambda v,$$

sau, echivalent

$$\exists v \in \ker(f - \lambda id_V) \setminus \{\theta_V\}$$

sau, echivalent $\exists v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n \neq \theta_V$ astfel incat

$$v_B \in Null\,(A - \lambda I_n) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

De aici obtinem imediat ca

$$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \lambda \in K \text{ si } \det(A - \lambda I_n) = 0$$

Exemplul 5.2.1. Pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ studiata la exemplul 5.1.1, spectrul este format din multimea solutiilor ecuatiei $det(A - \lambda I_2) = 0$, deci $\sigma(A) = \{0, 2\}$.

Definitia 5.2.2. *Fie A si f ca in definitia 5.2.1. Functia polinomiala de grad n definita prin*

$$p : K \to K, p(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$$

*se numeste **polinomul caracteristic al matricei** A (al operatorului f), iar ecuatia de grad n* cu coeficienti din K

$$p(\lambda) = 0$$

*se numeste **ecuatia caracteristica a matricei** A (a operatorului f).*

Observatia 5.2.1. *Cu aceste notatii spectrul matricei A este*

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} \cap K,$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ sunt cele n radacini ale polinomului caracteristic. Se verifica usor ca spectrul unui operator f nu depinde de baza B, i.e. daca A' este matricea operatorului in baza B' atunci $\sigma(A) = \sigma(A')$.

S-a conturat urmatorul

Algoritm de calcul al vectorilor proprii.

- Determinam spectrul $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ rezolvand ecuatia caracteristica $p(\lambda) = 0$.

- Pentru fiecare $\lambda \in \sigma(A) \cap K$ aflam multimea

$$S_\lambda := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

stiind ca $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n \in S_\lambda$ daca si numai daca solutiile sistemul

$$(A - \lambda I_n) \cdot v_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Multimea vectorilor proprii asociati valorii proprii λ este $S_\lambda \setminus \{\theta_V\}$.

Multimea S_λ definita este un subspatiu vectorial al lui V. Mai mult:
Propozitia 5.2.1. *Fie $f \in \mathcal{L}(V)$ si $\lambda \in \sigma(A) \cap K$. Atunci*

1. $S_\lambda := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} \leq V$.

2. $f(S_\lambda) \subset S_\lambda$.

3. *Daca valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \sigma(A)$ sunt distincte (adica $\lambda_i \neq \lambda_j$ daca $i \neq j$) si $v_1, v_2, ..., v_k$ sunt vectori proprii asociati acestora (adica $f(v_i) = \lambda_i v_i$ pentru $i \in \{1, ..., k\}$) atunci $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ este un sistem de vectori liniar independent.*

4. Daca $\lambda \in \sigma(A)$ este o radacina multipla de ordinul k a polinomului caracteristic atunci
$$\dim S_\lambda \leq k.$$

Subspatiul S_λ se numeste (din cauza proprietatii 2) ***subspatiul invariant asociat valorii proprii*** *λ.*

Din exemplele 5.1.1 si 5.2.1 rezulta ca:
Exemplul 5.2.2. Daca $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $f(x, y) = (x + y, x + y)$ atunci $\sigma(f) = \{0, 2\}$, iar subspatiile invariante sunt $S_0 = \{x(1, -1) \mid x \in \mathbb{R}\} = Span(\{1, -1\})$, respectiv $S_2 = \{x(1, 1) \mid x \in \mathbb{R}\} = Span(\{1, 1\})$. Multimea vectorilor proprii asociati valorii proprii $\lambda = 0$ este $\{x(1, -1) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$, iar multimea vectorilor proprii asociati valorii proprii $\lambda = 2$ este $\{x(1, 1) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$.

Multimea vectorilor proprii ai unui operator poate fi vida.
Exemplul 5.2.3. Fie $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $f(x, y) = (x + y, -x + y)$. Atunci matricea operatorului f (in baza canonica) este $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ecuatia caracteristica este

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 + 1 = 0.$$

Prin urmare operatorul $\sigma(f) = \emptyset$, iar f nu are vectori proprii.

Teorema 5.2.1. Teorema diagonalizarii. *Fie* V un spatiu n-dimensiaonal peste corpul K si $f \in \mathcal{L}(V)$. Operatorul f este diagonalizabil daca si numai daca

1. $\sigma(f) \subset K$;

2. dimensiunea subsptiului S_λ este egala cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii λ, oricare ar fi $\lambda \in \sigma(f)$.

2

2.1 PROBLEME REZOLVATE

1. Să se determine valorile proprii şi câte o bază în subspaţiile invariante ale operatorului $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

   REZOLVARE:

   Matricea $A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$ are $det(A - \lambda I_3) =$ $= (1-\lambda)^2(2-\lambda)$ deci valorile proprii, adică rădăcinile ecuaţiei caracteristice $det(A - \lambda I_3) = 0$ sunt $\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 = 2$.

   Pentru $\lambda_{1,2} = 1$ avem subspaţiul invariant corespunzător $S_{\lambda_{1,2}} = Null(A - \lambda_{1,2} I_3) = Null(A - I_3)$.
   Prin operaţii pe linie,

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\rightarrow} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{-L_1 + L_2 \to L_2}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_2 + L_3 \to L_3}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_{A - I_3}$$

   Dar $u = [x_1, x_2, x_3]^T \in Null(A - I_3) \iff u \in Null(S_{A-I_3})$, adică dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \quad -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Avem că x_1 şi x_2 sunt necunoscute principale pentru că ele corespund poziţiei pivoţilor iar $x_3 = \alpha$ e necunoscută secundară. Astfel, sistemul devine $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\alpha \\ \quad -2x_2 = -\alpha \end{cases}$ de unde, prin substituţie inversă $x_2 = \frac{\alpha}{2}$ şi $x_1 = \frac{\alpha}{2}$. Deci $u \in S_{\lambda_{1,2}} \iff u = [\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \alpha]^T = \frac{\alpha}{2}[1,1,2]^T$ cu alte cuvinte $S_{\lambda_{1,2}} = Span(u_1)$ unde am notat $u_1 = [1,1,2]^T$. Aşadar $B_1 = \{u_1\}$ e o bază în $S_{\lambda_{1,2}}$.

Pentru $\lambda_3 = 2$ avem subspaţiul invariant corespunzător $S_{\lambda_3} = Null(A - \lambda_3 I_3) = Null(A - 2I_3)$.
Prin operaţii pe linie,

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} \boxed{\text{-1}} & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{2L_1+L_2 \to L_2;\ L_1+L_3\to L_3}{\to} \begin{bmatrix} \boxed{\text{-1}} & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{5}L_2 \to L_2}{\to} \begin{bmatrix} \boxed{\text{-1}} & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{-L_2+L_3\to L_3}{\to} \begin{bmatrix} \boxed{\text{-1}} & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_{A-2I_3}$$

Dar $u = [x_1, x_2, x_3]^T \in Null(A - 2I_3) \iff u \in Null(S_{A-2I_3})$, adică dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Avem că x_1 şi x_2 sunt necunoscute principale pentru că ele corespund poziţiei pivoţilor iar $x_3 = \alpha$ e necunoscută secundară. Astfel, sistemul devine $\begin{cases} -x_1 - x_2 = -\alpha \\ \quad -x_2 = -\alpha \end{cases}$ de unde, prin substituţie inversă $x_2 = \alpha$ şi $x_1 = -\alpha$. Deci $u \in S_{\lambda_3} \iff u = [-\alpha, \alpha, \alpha]^T = \alpha[-1,1,1]^T$ cu alte cuvinte $S_{\lambda_3} = Span(u_2)$ unde am notat $u_2 = [-1,1,1]^T$. Aşadar $B_2 = \{u_2\}$ e o bază în S_{λ_3}.

2. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$. Fără a calcula polinomul caracteristic al lui f, să se găsească valorile proprii şi polinoamele invariante le lui f.
REZOLVARE:
Geometric vorbind, f asociază unui vector $u = (x_1, x_2)$ simetricul său faţă de axa Ox. Un vector u din plan va fi vector propriu dacă şi numai dacă este coliniar cu simetricul său faţă de Ox.

Observăm că dacă u e un vector de pe axa Ox, atunci simetricul lui u este el însuşi, deci vectorii de pe axa Ox sunt vectori proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 1$, pentru că în cazul lor $f(u) = u$. Dar cum subspaţiul acestor vectori e generat de e_1, avem că $B_1 = Span(e_1)$ e bază în S_{λ_1}.

Pe de altă parte mai observăm că dacă u e un vector de pe axa Oy, atunci simetricul lui u este opusul său, deci vectorii de pe axa Oy sunt vectori proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = -1$, pentru că în cazul lor $f(u) = -u$. Pentru că subspaţiul acestor vectori este generat de e_2, avem că $B_2 = Span(e_2)$ e bază în S_{λ_2}.

3. Să se stabilească dacă operatorul de la problema 1 este diagonalizabil. REZOLVARE:
   Toate valorile proprii $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2 \in \mathbb{R}$ dar pentru $\lambda_{1,2} = 1$, avem că ordinul său algebric de multiplicitate $m_{\lambda_{1,2}} = 2$ însă$dim(S_{\lambda_{1,2}}) = 1$, deci operatorul f nu e diagonalizabil.

4. Să se stabilească dacă operatorul $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ este diagonalizabil. REZOLVARE:
   Matricea $A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$ are $det(A - \lambda I_3) =$ $= -(1-\lambda)^2(1+\lambda)$ deci valorile proprii, adică rădăcinile ecuaţiei caracteristice $det(A - \lambda I_3) = 0$ sunt $\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 = -1$.

   Pentru $\lambda_{1,2} = 1$ avem subspaţiul invariant corespunzător $S_{\lambda_{1,2}} = Null(A - \lambda_{1,2} I_3) = Null(A - I_3)$.
   Prin operaţii pe linie,

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{L_1+L_3 \to L_3}{\to} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_{A-I_3}$$

   Dar $u = [x_1, x_2, x_3]^T \in Null(A - I_3) \iff u \in Null(S_{A-I_3})$, adică dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} -x_1 \quad + x_3 = 0 \end{cases}$$

   Avem că x_1 e necunoscută principală pentru că ea corespunde poziţiei pivotului iar $x_2 = \alpha$ şi $x_3 = \beta$ sunt necunoscute secundare. Astfel, $x_1 = \beta$. Deci $u \in S_{\lambda_{1,2}} \iff u = [\beta, \alpha, \beta]^T = \alpha[0,1,0]^T + \beta[1,0,1]^T$ cu alte cuvinte $S_{\lambda_{1,2}} = Span(u_1, u_2)$ unde am notat $u_1 = [0,1,0]^T$ şi $u_2 = [1,0,1]^T$. În plus, u_1, u_2 sunt liniar independenţi. Aşadar $B_1 = \{u_1, u_2\}$ e o bază în $S_{\lambda_{1,2}}$.

   Pentru $\lambda_3 = -1$ avem subspaţiul invariant corespunzător $S_{\lambda_3} = Null(A - \lambda_3 I_3) = Null(A + I_3)$.
   Prin operaţii pe linie,

$$A + I_3 = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{-L_1+L_3 \to L_3}{\to} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_{A+I_3}$$

Dar $u = [x_1, x_2, x_3]^T \in Null(A + I_3) \iff u \in Null(S_{A+I_3})$, adică dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} x_1 + \quad +x_3 = 0 \\ \quad 2x_2 \quad = 0 \end{cases}$$

Avem că x_1 şi x_2 sunt necunoscute principale pentru că ele corespund poziţiei pivoţilor iar $x_3 = \alpha$ e necunoscută secundară. Astfel, $x_2 = 0$ şi $x_1 = -\alpha$. Deci $u \in S_{\lambda_3} \iff u = [-\alpha, 0, \alpha]^T = \alpha[-1, 0, 1]^T$ cu alte cuvinte $S_{\lambda_3} = Span(u_3)$ unde am notat $u_3 = [-1, 0, 1]^T$. Aşadar $B_2 = \{u_3\}$ e o bază în S_{λ_3}.

Observăm că toate valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, în plus $m_{\lambda_{1,2}} = 2 = dim(S_{\lambda_{1,2}})$ şi $m_{\lambda_3} = 1 = dim(S_{\lambda_3})$, deci conform teoremei de diagonalizare, operatorul f e diagonalizabil.

5. Să se calculeze A^{2k} unde A e matricea operatorului din problema precedentă.
REZOLVARE:
Operatorul e diagonalizabil, mai precis matricea sa în baza $B = \{u_1 = [0, 1, 0]^T, u_2 = [1, 0, 1]^T, u_3 = [-1, 0, 1]\}$ din $\mathbb{R}^3$ format'a din vectori proprii, are matricea

$$D = f_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Dacă notăm $T = T_{B_cB} = [u_{1_{B_c}} | u_{3_{B_c}} | u_{3_{B_c}}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Atunci avem că $A = TDT^{-1}$ şi ridicând această relaţie la puterea $2k$ obţinem

$$A^{2k} = (TDT^{-1})(TDT^{-1}) \ldots (TDT^{-1})$$

deci $A^{2k} = TD^{2k}T^{-1}$. Dar cum $D^{2k} = I_3$, obţinem că $A^{2k} = TT^{-1} = I_3$.

6. Fie $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $T(A) = A^T$ operatorul de transpunere a matricilor. Să se scrie matricea operatorului în baza canonică

$$B = \{E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$$

apoi să se determine spectrul său.
REZOLVARE:
Avem $T(E_1) = E_1 = 1E_1 + 0E_2 + 0E_3 + 0E_4$, deci $T(E_1)_B = (1, 0, 0, 0)$. Analog $T(E_2) = E_3 = 0E_1 + 0E_2 + 1E_3 + 0E_4$, astfel $T(E_2)_B = (0, 0, 1, 0)$, apoi $T(E_3) = E_2 = 0E_1 + 1E_2 + 0E_3 + 0E_4$, deci $T(E_3)_B = (0, 1, 0, 0)$ şi

în final $T(E_4) = E_4 = 0E_1 + 0E_2 + 0E_3 + 1E_4$, cu $T(E_1)_B = (0, 0, 0, 1)$. Aşadar

$$A = T_B = [T(E_1)_B | T(E_2)_B | T(E_3)_B | T(E_4)_B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Polinomul caracteristic este

$$det(T - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(\lambda^2 - 1) = -(1-\lambda)^3(1+\lambda)$$

deci spectrul lui T este $\sigma(T) = \{\lambda_{1,2,3} = 1, \lambda_4 = -1\}$

7. Să se găsească valorile proprii şi subspaţiile invariante ale operatorului din problema precedentă fă ră a mai calcula polinomul caracteristic.
REZOLVARE:
Căutăm matrici $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ pentru care $T(A) = A^T = \lambda A$. Observăm că o matrice simetrică, adică o matrice cu proprietatea că $A^T = A$ este vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 1$. Dar o astfel de matrice simetrică are forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cu alte cuvinte dacă notăm $\mathbb{R}_S^{2\times 2}$ subspaţiul matricilor simetrice, atunci $\mathbb{R}_S^{2\times 2} = Span(E_1, M_1, E_4)$, unde $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Cum aceste matrici sunt liniar independente, $B_1 = \{E_1, M_1, E_4\}$ este o bază în $\mathbb{R}_S^{2\times 2} = S_{\lambda_1}$.

Pe de altă parte, o matrice antisimetrică e o matrice A cu proprietatea că $A^T = -A$, deci matricile antisimetrice vor fi vectori proprii pentru $\lambda_2 = -1$. O astfel de matrice are forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} == a \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

deci dacă notăm $\mathbb{R}_A^{2\times 2}$ subspaţiul matricilor antisimetrice, atunci $\mathbb{R}_A^{2\times 2} = Span(M_2)$, unde $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ şi deci $B_2 = \{M_2\}$ e o bază în subspaţiul invariant $S_{\lambda_2} = \mathbb{R}_A^{2\times 2}$.

8. Dacă $Null(A+5I_n)$ conţine vectori nenuli, atunci ce informaţie avem despre spectrul matricii A?
REZOLVARE:
$Null(A+5I_n)$ conţine vectori nenuli dacă şi numai dacă sistemul omogen de matrice $A+5I_n$ admite şi soluţii nebanale, ceea se întâmplă doar dacă $det(A+5I_n) = det(A-(-5)I_n) = 0$, de unde $\lambda = -5$ este valoare proprie pentru matricea A, adică $-5 \in \sigma(A)$.

2.2 PROBLEME PROPUSE

1. Sa se stabileasca care dintre functiile $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definite mai jos sunt operatori liniari; in caz de liniaritate sa se determine matricele in baza canonica si rangul acestora.

   (a) $f(x,y,z) = (x, 2y, 3z)$;
   (b) $f(x,y,z) = (y+z, z-x, z)$;
   (c) $f(x,y,z) = (y-z, z-x, z+1)$;
   (d) $f(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$;
   (e) $f(x,y,z) = \left(y^2-z, z-x, z\right)$;

   Raspunsuri. a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 3; b. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 3; d. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 2.

2. Operatorul $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ are, in baza canonica, matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Sa se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel incat f sa fie izomorfism.

   Raspuns. $a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

3. Operatorul $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ are, in baza canonica, matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Sa se determine $f(x, y.z)$ pentru orice $(x, y.z) \in \mathbf{R}^3$.
   (b) Sa se afle matricea operatorului f^{-1} in baza $\{(1,1,0), (1,0,1), (1,0,0)\}$.

4. Fie $f, g \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$ ale caror matrice in baza canonica sunt $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,respectiv $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Sa se scrie matricea operatorilor $f \circ g$ si $g \circ f$ in baza $\{(1,1,), (-1,1)\}$; sunt operatorii $f \circ g$ si $g \circ f$ inversabili?

5. Demonstrati ca operatorul de derivare $\frac{d}{dx} : \mathbf{R}_n[x] \to \mathbf{R}_n[x]$ este liniar. Determinati matricea acestuia in:

(a) baza canonica $\{1, x, ...x^n\}$;

(b) baza $\left\{1, \frac{x-a}{1!}, \frac{(x-a)^2}{2!}, ..., \frac{(x-a)^n}{n!}\right\}$, unde a este un numar real.

Sa se determine cate o baza pentru nucleul, respectiv imaginea sa.

6. Operatorul liniar f are, in baza $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, matricea $[f]_B$. Ce transformari va suferi aceasta matrice daca interschimbam vectorii e_i si e_j?

7. Un operator liniar are matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ in baza $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.
Sa se determine matricea operatorului in baza:

(a) $\{e_1, e_3, e_2, e_4\}$;

(b) $\{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$.

Raspunsuri. a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

8. Matricea operatorului $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ in baza $B = \{e_1 = (1, 2), e_2 = (2, 3)\}$ este $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, iar matricea operatorului $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ in baza $B' = \{e'_1 = (3, 1), e'_2 = (4, 2)\}$ este $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Sa se determine matricea operatorului $f + g$ in baza B'.

Raspuns. $\begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -\frac{59}{2} & -25 \end{pmatrix}$.

9. Matricea operatorului $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ in baza $B = \{e_1 = (-3, 7), e_2 = (1, -2)\}$ este $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, iar matricea operatorului $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ in baza $B' = \{e'_1 = (6, -7), e'_2 = (-5, 6)\}$ este $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Sa se determine matricea operatorului $f \circ g$ in baza canonica.

Raspuns. $\begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$.

10. Determinati valorile proprii si subspatiile invariante corespunzatoare pentru matricele:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Raspunsuri. a. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\{x(1,1,-1) \mid x \in \mathbf{R}\}$; b. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $\{x(1,2,0) + y(0,0,1) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$.

11. Determinati subspatiile care sunt invariante simultan pentru matricele $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ si $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

    Raspuns. $\{x(1,0,-1) + y(0,1,2) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$.

12. Determinati valorile si vectorii proprii ale urmatoarelor matrice:

    (a) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix}$;

    (b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$;

    (c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

    Raspunsuri. a. 1, cu multimea vectorilor proprii $\{x(1,1,1) \mid x \in \mathbf{R}^*\}$, respectiv 0, cu vectorii proprii $x(1,2,3)$, unde $x \neq 0$; b. 1, cu multimea vectorilor proprii $\{x(3,1,1) \mid x \in \mathbf{R}^*\}$; c. 2, cu vectorii proprii de forma $(x+y, x+y, -x, y)$, unde scalarii x si y nu sunt simultan nuli.

13. Sa se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel ca $(1,-1,1)$ sa fie vector propriu pentru operatorul $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, f(x,y,z) = (ax + y + z, x + by + z, x + y + cz)$.

    Raspuns. $(a,b,c) \in \{(\lambda, \lambda, \lambda - 2) \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$.

14. Sa se aduca la forma diagonala si sa se indice o baza in care are aceasta forma matricele:

    (a) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

    (b) $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Raspunsuri. a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\{(1,1,1)\,,(1,1,0)\,,(1,0,-3)\}$; b. matricea nu se poate aduce la forma diagonala; c. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\{(1,1,0,0)\,,(1,,0,1,0)\,,(1,0,0,1)\,,(1,-1,-1,-1)$ d. matricea nu se poate aduce la forma diagonala; e. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\{(1,0,0,1)\,,(0,1,1,0)\,,(0,-1,1,$

15. Un operator liniar are matricea $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ in baza $\{e_1, e_2, e_3\}$.

    Sa se gaseasca matricea operatorului in baza $\{2e_1 + 3e_2 + e_3, 3e_1 + 4e_2 + e_3, e_1 + 2e_2 + 2e_3\}$ si sa se calculeze A^{2010}.

    Raspuns. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

    $$\begin{pmatrix} -6 + 12 \cdot 2^{2010} + 3^{2010} & 10 - 9 \cdot 2^{2010} - 3^{2010} & -4 + 3 \cdot 2^{2010} + 3^{2010} \\ -18 + 16 \cdot 2^{2010} + 2 \cdot 3^{2010} & 15 - 12 \cdot 2^{2010} - 2 \cdot 3^{2010} & -4 + 4 \cdot 2^{2010} + 2 \cdot 3^{2010} \\ -6 + 4 \cdot 2^{2010} + 2 \cdot 3^{2010} & 5 - 3 \cdot 2^{2010} - 2 \cdot 3^{2010} & -2 + 2^{2010} + 2 \cdot 3^{2010} \end{pmatrix}.$$

16. Operatorul $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ are, in baza canonica, matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.Sa se arate ca $(A + I_3)^3 = 0$.

17. Sa se arate ca un operator liniar este izomorfism daca si numai daca nucleul sau este subspatiul nul.

18. Sa se arate ca exista o matrice T astfel ca $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} T^{-1}$.

    Raspuns. De exemplu $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3}+1 & -\sqrt{3}+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

19. Sa se reduca la forma diagonala matricea $\begin{pmatrix} 0 & \sin\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \sin\alpha & 0 \end{pmatrix}$, unde $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

    Raspuns. $\begin{pmatrix} -\sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\sin 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \sin\alpha\ + \sin 2\alpha \end{pmatrix}$, daca $2\cos\alpha \neq 1$ si $\begin{pmatrix} \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \sin\alpha \end{pmatrix}$ daca $2\cos\alpha = 1$.

20. Sa se arate ca exista o matrice nesingulara T astfel incat $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} T = T \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$.

21. *Sa se arate ca un subspatiu S al unui spatiu V/K este invariant pentru automorfismul f daca si numai daca el este invariant pentru operatorul f^{-1}.

22. Operatorul f are, intr-o baza data, matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbf{R}$. Sa se determine numarul a pentru care f nu este automorfism.

    Raspuns. $a = 1$.

23. Determinati toate subspatiile invariante ale spatiului polinoamelor de grad mai mic sau egal cu n, $\mathbf{R}_n[x]$, relativ la operatorul de derivare.

    Raspuns. Subspatiul nul si subspatiile $\mathbf{R}_m[x]$, unde $m \leq n$.

24. *Folosind teorema Cayley-Hamilton sa se arate ca $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

25. *Matricea operatorului $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$, in baza canonica, este $\begin{pmatrix} 1+a^2 & ab & ac \\ ab & 1+b^2 & bc \\ ac & bc & 1+c^2 \end{pmatrix}$.Sa se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel incat sa existe o baza in care matricea operatorului f sa fie matricea unitate.

Indicatie. Se arata ca matricea este diagonalizabila daca si numai daca $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.