Partea I. ALGEBRĂ LINIARĂ

Teorie şi aplicaţii

0.1 1. MATRICE. SISTEME LINIARE

0.1.1 TEORIE

1. Notăm cu $\mathcal{M}_{m,n}(R)$ mulţimea matricelor cu m linii şi n coloane având elementele din inelul $(R, +, \cdot)$ (de regulă $R = \mathbb{R}$ - corpul numerelor reale, $R = \mathbb{C}$ - corpul numerelor complexe, ori $R = \mathbb{Z}_p$ - corpul claselor de resturi modulo p, unde p este un număr prim); despre o asemenea matrice spunem că este o **matrice de tip** $m \times n$. Matricele cu acelaşi număr de linii şi de coloane ($m = n$) se numesc **matrice pătratice**. În exemplele (exerciţiile) pe care le vom da, în lipsa altor precizări, inelul R este corpul numerelor reale.

2. Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$ (mai scriem $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, ori, dacă nu este pericol de confuzie, $A = (a_{ij})$ atunci matricea notată

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

sau

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

se poate exprima prin **concatenarea** (alăturarea) coloanelor sale: notând cu

$$A_{:j} := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

matricea coloană formată cu elementele coloanei j a matricei A, atunci concatenarea matricelor $A_{:1}$, $A_{:2}, ...,$ $A_{:n}$ reface matricea A :

$A = (A_{:1} \mid A_{:2} \mid ... \mid A_{:n})$;

analog se poate scrie matricea A prin alăturarea, pe coloană, a matricelor linie $A_{i:} := (a_{i1}\ a_{i2}\ ...\ a_{in})$, unde $i = \overline{1, m}$.

3. **Suma matricelor** A şi B de tip $m \times n$ este o matrice de tip $m \times n$ notată $A+B$ al cărei element generic este $a_{ij} + b_{ij}$, (adică elementul de pe poziţia (i, j) al matricei sumă). De exemplu:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{bmatrix} \text{ şi}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Înmultirea matricei A de tip $m \times n$ cu **scalarul** c (adică c este un element al corpului R) are ca ieşire matricea de tip $m \times n$ notată cA al cărei element generic este ca_{ij}. De exemplu:

$$\lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} \text{ şi}$$

$$3 \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 6.1 & 2.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1.5 \\ 18.3 & 8.7 \end{bmatrix}.$$

Proprietăţi. Fie A, B şi C matrice de tip $m \times n$, iar c şi d scalari. Atunci:

- *comutativitatea adunării matricelor*: $A + B = B + A$;
- *asociativitatea adunării matricelor:* $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- *legile distributivităţii înmulţirii matricelor cu scalari* $c(A + B) = cA + cB$ *şi* $(c + d)A = cA + dA$;
- $(cd)A = c(dA)$;

- *elementul* $1 \in R$ *este element neutru pentru înmulţirea matricelor cu scalari:* $1A = A$.

4. **Transpusa matricei** $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$ este o matrice, notată A^T, de tip $n \times m$ obţinută din A prin schimbarea liniilor cu coloanele (de la stânga la dreapta, de sus în jos). Deci transpusa (matricea transpusă) este $A^T := (a'_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(R)$, unde $a'_{ij} = a_{ji}$. Folosind concatenarea liniilor matricei A, putem scrie transpusa astfel:

   $A^T = (A_{1:} \mid A_{2:} \mid ... \mid A_{n:})$.

   De exemplu:

   $$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Proprietăţi.

   - $\left(A^T\right)^T = A$;

   - $(A+B)^T = A^T + B^T$;

   - $(AB)^T = B^T A^T$;

   - Pentru orice scalar r, $(rA)^T = rA^T$;

   - Dacă A este o **matrice diagonală** (elementele care nu sunt pe diagonala principală sunt toate 0) atunci $A = A^T$.

   O matrice pătratică este **simetrică** dacă $A^T = A$.

5. Notăm cu $O_{m,n}$ (sau doar O dacă nu este pericol de confuzie) **matricea nulă**, adică o matrice de tip $m \times n$ având toate elementele nule (i.e. elementul neutru al grupului $(\mathcal{M}_{m,n}(R), +)$). Cu I_n (ori doar I) notăm **matricea unitate** de tip $n \times n$:

   $$I_n = (\delta_{ij}), \text{ unde } \delta_{ij} := \begin{cases} 0, & \text{dacă } i \neq j \\ 1, & \text{dacă } i = j \end{cases}$$

   este **simbolul lui Kronecker**, adică I_n este matricea care are pe diagonala principală doar 1, iar în rest 0 (*i.e.* I_n *este elementul neutru faţă de înmulţirea matricelor pătrate de tip* $n \times n$). Coloana j din matricea unitate va fi notată e_j, deci

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \, ..., \, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

iar prin concatenare:

$I_n = (e_1 \mid e_2 \mid ... \mid e_n)$.

Proprietăţi.

- O este element neutru faţă de adunarea matricelor:
$O + A = A + O = A$;

- matricea $(-1)A := -A$ este elementul simetric al elementului A (pentru adunarea matricelor): $A + (-A) = (-A) + A = O$;

- $(\mathcal{M}_{n,m}(R), +)$ este un grup abelian.

6. **Matricea permutării** $\pi \in S_n$ (*i.e.* π *este o bijecţie având domeniul şi codomeniul* $\{1, 2, ..., n\}$; *se mai notează tabelar astfel:* $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \pi(1) & \pi(2) & ... & \pi(n) \end{pmatrix}$) este de tip $n \times n$ şi este definită prin:

$P_\pi = (p_{ij})$, unde $p_{ij} = \left(\delta_{\pi(i)j}\right)$,

adică matricea P_π are pe linia i doar elementul de pe coloana $\pi(i)$ egal cu 1, în rest 0. Deoarece $\pi(i) = j$ dacă şi numai dacă $i = \pi^{-1}(j)$ urmează că putem scrie şi :

$P_\pi = \left(\delta_{i\pi^{-1}(j)}\right)$

astfel că putem afirma că matricea permutării π se obţine din matricea unitate I_n schimbând liniile în raport cu π^{-1} : linia $\pi(i)$ din I_n devine linia i din P_π. De exemplu, dacă $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, atunci matricea permutarii π este

$$P_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Din definiţia determinanţilor (*dacă* $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(R)$ *atunci* $\det(A) := \sum_{s \in S_n} \varepsilon(s) a_{1s(1)} a_{2s(2)} \cdot ... \cdot a_{ns(n)}$, *unde* $\varepsilon(s)$ *înseamnă signatura permutării* s) urmează că $\varepsilon(\pi) = \det(P_\pi)$;

în exemplul de mai sus signatura permutării π (*i.e.* $\varepsilon(\pi) = (-1)^{m(\pi)}$, *unde* $m(\pi)$ *este numărul tuturor inversiunilor permutării* π) este: $\varepsilon(\pi) = (-1)^2 = 1 = \det(P_\pi)$.

Dacă $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(R)$, atunci $P_\pi x = \begin{pmatrix} x_{\pi(1)} \\ x_{\pi(2)} \\ \vdots \\ x_{\pi(n)} \end{pmatrix}$.

7. **Înmulţirea matricelor.** Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$ iar $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{n,p}(R)$ **produsul matricelor** A şi B este o matrice de tip $m \times p$ obţinută prin tehnica înmulţirii "linie cu coloană", adică

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{np} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j2} & ... & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jp} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & ... & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jp} \\ .... & .... & ... & .... \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j2} & ... & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{jp} \end{pmatrix} =$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \Big)_{ik} = (AB_{:1} \mid AB_{:2} \mid ... \mid AB_{:p})\,.$$

De exemplu

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$, iar

$\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$.

În particular, dacă

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(R), \text{ atunci}$$

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1 A_{:1} + x_2 A_{:2} + \ldots + x_n A_{:n}.$$

De exemplu

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix}$$

şi $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 12 \\ 14 & -6 \end{bmatrix}$.

Proprietăţi ale înmulţirii matricelor. Fie A şi A' matrice de tip $m \times n$, B şi B' de tip $n \times k$ şi C de tip $k \times \ell$. Atunci:

- $(AB)\,C = A\,(BC)$ (*asociativitatea înmulţirii matricelor*);
- $A\,(B + B') = AB + AB'$ (*distributivitatea la stânga a înmulţirii matricelor faţă de adunare*);
- $(A + A')\,B = AB + A'B$ (*distributivitatea la dreapta a înmulţirii matricelor faţă de adunare*);
- pentru orice scalar r, $r\,(AB) = (rA)\,B = A\,(rB)$

- dacă $B = (B_{:1} \,|\, B_{:2} \,|\, \ldots \,|\, B_{:k})$, atunci $AB = (AB_{:1} \,|\, AB_{:2} \,|\, \ldots \,|\, AB_{:k})$;
- dacă $\pi, \sigma \in S_n$, atunci $P_\pi^T P_\pi = I_n$, iar $P_\pi P_\sigma = P_{\sigma\pi}$;
- dacă $\pi \in S_m$, atunci $P_\pi A = (P_\pi A_{:1} \mid P_\pi A_{:2} \mid \ldots \mid P_\pi A_{:n}) =$

$$= \left(a_{\pi(i)j}\right)_{ij} = \begin{pmatrix} a_{\pi(1)1} & a_{\pi(1)2} & \ldots & a_{\pi(1)n} \\ a_{\pi(2)1} & a_{\pi(2)2} & \ldots & a_{\pi(2)n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\pi(m)1} & a_{\pi(m)2} & \ldots & a_{\pi(m)n} \end{pmatrix}.$$

Inversa matricei pătratice A este o matrice B de acelaşi tip astfel încât: $AB = I = BA$. Inversa matricei A se notează cu A^{-1}. O matrice care admite inversă se numeşte **matrice inversabilă,** sau **nesingulară.** O matrice care nu are inversă se numeşte **matrice singulară.**

* Dacă $\pi \in S_n$, atunci $P_\pi^T = P_{\pi^{-1}} = P_\pi^{-1}$.

Matricea A este nesingulară dacă şi numai dacă $\det(A) \neq 0$ ($\det(A)$ *inversabil, dacă inelul R nu este corp*).

De exemplu

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

deci:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

* Dacă A şi B sunt matrice pătratice pentru care $AB = I$, atunci $B = A^{-1}$ (şi $A = B^{-1}$).

Dacă A este matrice pătratică, notăm $A^k := \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{\text{de } k \text{ ori}}$ şi $A^{-k} = (A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$.

De exemplu

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 941 & 942 \\ 1256 & 1255 \end{pmatrix}$$

şi

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^{-3} = \begin{pmatrix} -\frac{1255}{2197} & \frac{942}{2197} \\ \frac{1256}{2197} & -\frac{941}{2197} \end{pmatrix}.$$

Se verifică imediat că $(M_{n,n}(R), +, \cdot\,)$ *este un inel, necomutativ,* *în general, în care I_n este elementul neutru faţă de înmulţirea matricelor "$\cdot$".*

8. Un **sistem liniar** de m ecuaţii cu n necunoscute având coeficienţii a_{ij} din corpul R (la noi $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ori $\mathbb{Z}_p$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

se poate scrie matriceal astfel:

$Ax = b$,

adică

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

unde $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$ este matricea coeficienţilor sistemului (1),

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(R)$$

este matricea coloană a necunoscutelor, iar

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(R)$$

este matricea coloană a termenilor liberi. Un asemenea sistem poate fi *incompatibil*, i.e. mulţimea soluţiilor $\mathcal{S}$ este vidă ($\mathcal{S} = \varnothing$), *compatibil determinat, i.e.* sistemul are soluţie unică, sau *compatibil nedeterminat* i.e. sistemul are mai multe soluţii (o infinitate în cazul $R = \mathbb{R}$, sau $R = \mathbb{C}$, o putere a lui p dacă $R = \mathbb{Z}_p,\ p$ prim).

Teorema Kronecker-Capelli. Sistemul (1) este compatibil dacă şi numai dacă $rang(A) = rang(\overline{A})$,

unde $\overline{A} = (A \mid b)$ este *matricea extinsă a matricei* A (i.e. matricea A bordată (concatenată) cu coloana termenilor liberi b):

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Un sistem de forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

unde $a_{ii} \neq 0$ pentru orice i, se rezolvă prin **metoda substituţiei inverse** (i.e. obţinem x_n din ultima ecuaţie, apoi x_{n-1} din penultima etc.) şi are ca matrice o **matrice superior triunghiulară**, adică $a_{ij} = 0$, ori de câte ori $j < i$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}; \qquad (2)$$

dacă în plus coeficienţii a_{ii} au toţi valoarea 1 spunem că matricea este **diagonal unitară.**

Un sistem în care $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,n}$ de forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = b_1 \\ a_{12}x_2 + a_{22}x_2 & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

se rezolvă prin **metoda substituţiei directe** iar matricea acestuia este **inferior triunghiulară**.

9. *Matricea* $S = (s_{ij}) \in M_{m,n}(R)$ *pentru care:*

- *dacă o linie este nulă, e.g.* $S_{i:} = (0\ 0\ \dots\ 0)$*, atunci toate liniile de sub aceasta sunt nule, deci* $S_{k:} = (0\ 0\ \dots\ 0)$*, pentru orice* $k \geq i$*;*

- *dacă primul element nenul de pe o linie* $S_{i:}$ *este* s_{ij} *atunci elementele de pe coloanele precedente inclusiv* $S_{:j}$ *(i.e.* $S_{:1}, S_{:2}, \dots, S_{:j}$*) aflate sub linia i sunt nule (i.e.* $s_{\ell k} = 0$*, pentru orice* $\ell > i$ *şi* $k \leq j$*) se numeşte* ***matrice scară pe linii****; elementul* s_{ij} *se numeşte* ***pivot*** *.*

Matricea (2) *este o matrice scară pe linii; de asemenea matricele*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sunt matrice scară pe linii, iar matricele

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 13 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nu au forma scară.

Orice matrice diagonală este matrice scară pe linii. În particular, I_n este o matrice scară pe linii.

10. **Transformări elementare**. *Fie sistemul liniar de* m *ecuaţii cu* n *necunoscute* (1) *cu mulţimea soluţiilor* $\mathcal{S}$ *; notăm ecuaţia a i-a cu* L_i *, adică:*

    $L_i\ :\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n\ = b_i.$

    Un ***sistem echivalent*** *cu sistemul* (1) *este un sistem liniar de* m *ecuaţii cu* n *necunoscute pentru care mulţimea soluţiilor este tot* $\mathcal{S}$*.*

    Următoarele ***transformări elementare*** *:*

    - *interschimbarea a două ecuaţii:* $L_i \leftrightarrow L_k$*;*

    - *multiplicarea unei ecuaţii cu un element nenul*[1] $\lambda \in R$*:* $\lambda L_i \to L_i$;

[1]Dacă R este doar inel, ,,nenul" trebuie înlocuit cu ,,inversabil"

- *multiplicarea unei ecuaţii cu un element $\lambda \in R$ şi adunarea rezultatului la altă ecuaţie:* $\lambda L_i + L_k \to L_k$,

conduc la un sistem echivalent.

Lor le corespund **transformările elementare** efectuate asupra matricei $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$ pe linii:

- *interschimbarea a două linii:* $L_{i:} \leftrightarrow L_{k:}$ *o numim* **transformare de tip 1**;

- *multiplicarea unei linii cu un element nenul* $\lambda \in R: \ \lambda L_{i:} \to L_{i:}$ - **transformare de tip 2**;

- *multiplicarea unei linii cu un element* $\lambda \in R$ *şi adunarea rezultatului la altă linie:* $\lambda L_{i:} + L_{k:} \to L_{k:}$ - **transformare de tip 3.**

Metoda lui Gauss: *aplicând succesiv transformări elementare asupra matricei extinse a sistemului* (1) *până ajungem la forma scară, obţinem mulţimea soluţiilor* $\mathcal{S}$.

Metoda Gauss-Jordan presupune în plus faţă de metoda Gauss:

○ *transformarea fiecarui pivot în* 1;

○ *anularea succesivă a tuturor celorlalte elemente de pe coloana pivotului.*

Matricea astfel obtinută se numeşte ***matrice scară redusă****.*

Exemplul. 1. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$$

prin metoda Gauss.

Rezolvare. Ataşăm sistemului matricea sa extinsă

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right)$$

şi efectuăm transformări elementare pe linii pentru a obţine o formă scară. Pentru a forma zerouri pe prima coloană alegem pivotul

$a_{11} = 3$ (căci $a_{11} \neq 0$) şi efectuăm transformările $-2L_1 + L_2 \to L_2$ şi $-3L_1 + L_3 \to L_3$; obţinem:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right);$$

din ultimile două linii rezultă că $x_4 = 1$, iar din prima linie obţinem $x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2$. Deci sistemul nostru este compatibil (dublu) nedeterminat, iar mulţimea soluţiilor sale este:

$\mathcal{S} = \{(\alpha, \beta, 1 - 3\alpha - 4\beta, 1) \mid \alpha, \beta \in R\}$.

Dacă luăm R corpul claselor de resturi modulo 2 atunci avem patru soluţii:

$\mathcal{S} = \{(0,0,1,1), (1,0,0,1), (0,1,1,1), (1,1,0,1)\}$.

Exemplul. 2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18 \end{cases}$$

prin metoda Gauss-Jordan.

Rezolvare. Ataşăm sistemului matricea sa extinsă:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 15 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 18 \end{array} \right)$$

şi efectuăm transformări elementare pe linii pentru a obţine o *formă scară redusă*. Pentru a obţine pivotul 1 pe prima linie putem să înmulţim linia a 5-a cu (-1) şi să adunăm rezultatul la prima linie, adică să efectuăm transformarea elementară: $-L_5 + L_1 \to L_1$:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 15 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 18 \end{array}\right),$$

ceea ce permite crearea de zerouri sub pivotul 1 al primei linii:

$-3L_1+L_2 \to L_2, -4L_1+L_3 \to L_3, -L_2+L_4 \to L_4, -7L_1+L_5 \to L_5,$

adică obţinem matricea echivalentă:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -10 & 5 & 2 & -3 \end{array}\right).$$

Asemănător procedăm cu celelalte coloane: pe coloana a II-a formăm un pivot 1 şi zerouri în rest, etc. De exemplu, cu
$-L_4 + L_1 \to L_1$, $2L_4 + L_2 \to L_2$:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & -6 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -10 & 5 & 2 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2L_2 + L_4 \to L_4 \\ 5L_4 + L_5 \to L_5 \\ 3L_4 + L_3 \to L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 22 \end{array}\right) \begin{array}{c} -L_4 \leftrightarrow L_3 \\ -2L_3 + L_5 \to L_5 \\ L_4 + L_1 \to L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2L_4 + L_1 \to L_1 \\ -L_4+L_2 \to L_2 \\ -2L_4+L_3 \to L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

deci mulţimea soluţiilor este formată dintr-un singur element (sistem compatibil determinat):

$\mathcal{S} = \{(3, 0, -5, 11)\}$.

Metoda Gauss-Jordan poate fi folosită şi pentru calculul inversei unei matrice pătratice. Deoarece determinarea inversei B a unei matrice A revine la rezolvarea ecuaţiei matriceale $AB = I$, iar $AB = (AB_{:1} \,|\, AB_{:2} \,|\, ... \,|\, AB_{:n})$, avem de determinat coloanele $B_{:i}$ ale inversei din condiţia $(AB_{:1} \,|\, AB_{:2} \,|\, ... \,|\, AB_{:n}) = (e_1 \mid e_2 \mid ... \mid e_n)$. Pentru fiecare i avem de rezolvat sistemul $AB_{:i} = e_i$. Aşadar inversarea unei matrice revine la rezolvarea a n sisteme, însă toate cu aceeaşi matrice a sistemului, A. Aceste sisteme se rezolvă simultan. Considerăm aşadar matricea sistemului, extinsă simultan cu toate coloanele de termeni liberi care ne interesează. Am văzut în exemplele de mai sus că alegerea paşilor care trebuie efectuaţi pentru rezolvarea unui sistem nu depind de coloana termenilor liberi, ci numai de matricea sistemului. Atunci rezolvarea sistemelor $AB_{:i} = e_i$ poate fi făcută simultan.

Proprietăţi induse de transformări elementare. Fie A o matrice, S o formă scară a sa, iar S_0 forma scară redusă. Atunci:

○ $rang(A) = rang(S) =$ *numărul de pivoţi din* S;

○ *forma scară S nu este, în general, unică, în schimb forma scară redusă S_0 este unică;*

○ dacă A este matrice pătratică, I este matricea unitate de acelaşi tip şi efectuăm transformări elementare asupra matricei $(A \mid I)$ până la forma $(S_0 \mid I')$ atunci:

· *dacă $S_0 = I$ rezultă că $I' = A^{-1}$, iar*

· *dacă $S_0 \neq I$ rezultă că matricea A este singulară.*

○ dacă A este matrice pătratică nesingulară, *putem calcula produsul $A^{-1}B$* efectuând transformări elementare asupra matricei $(A \mid B)$ până la forma $(I \mid C)$; astfel $C = A^{-1}B$;

○ *transformările elementare asupra matricei A se exprimă matriceal cu ajutorul* ***matricelor elementare de tip 1, 2*** *şi* ***3*** $(P_{(i,k)}, E^i(\lambda)$, respectiv $E_{ik}(\lambda)$, inversabile, definite mai jos) *astfel:*

· pentru transformarea de tip 1: $L_{i:} \leftrightarrow L_{k:}$ noua matrice este produsul $P_{(i,k)}A$, unde $P_{(i,k)}$ este matricea transpoziţiei $(i,k) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots i \ldots k \ldots n \\ 1 & 2 \ldots k \ldots i \ldots n \end{pmatrix}$; desigur $P^{-1}_{(i,k)} = P_{(i,k)}$ deci *inversa unei transformări de tip 1 este o transformare de tip 1*;

· pentru transformarea de tip 2: $\lambda L_{i:} \to L_{i:}$ noua matrice este produsul $E^i(\lambda)A$, unde cu $E^i(\lambda)$ am notat matricea unitate I având intrarea (i,i) modificată în λ (în loc de 1); cum $(E^i(\lambda))^{-1}$ $=E^i(\lambda^{-1})$, urmează că *inversa unei transformări de tip 2 este o transformare de tip 2*;

· pentru transformarea de tip 3: $\lambda L_{i:} + L_{k:} \to L_{k:}$, noua matrice este produsul $E_{ik}(\lambda)A$, unde cu $E_{ik}(\lambda)$ am notat matricea unitate I având intrarea (k,i) modificată în λ (în loc de 0); deoarece $(E_{ik}(\lambda))^{-1} = E_{ik}(-\lambda)$, rezultă că *inversa unei transformari de tip 3 este o transformare de tip 3*.

11. **Descompunerea** LU a **unei matrici pătratice.** Spunem că matricea nesingulară $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}(R)$ **admite factorizare** (**descompunere**) LU dacă există două matrice $L, U \in \mathcal{M}_{n,n}(R)$, astfel ca $A = LU$, *L fiind o matrice inferior triunghiulară diagonal unitară*, iar *U o matrice superior trunghiulară*[2], i.e. L, respectiv U sunt de forma:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Proprietăţi. Fie A o matrice pătratică nesingulară de tip $n \times n$.

∘ *Dacă A poate fi transformată într-o matrice scară U folosind doar matrice elementare de tip 3, de forma $E_{ij}(\lambda)$ cu $i < j$, atunci A admite descompunere LU. De fapt dacă $U = E_k E_{k-1} \ldots E_1 A$* unde E_1, ..., E_k sunt matrice elementare de tip 3, de forma $E_{ij}(\lambda)$ *cu $i < j$, atunci $L = E_1^{-1} \ldots E_k^{-1}$, iar $A = LU$.*

[2]Literele ,,L" şi ,,U" provin de la ,,Lower", respectiv ,,Upper triangular matrix".

$\circ$ *Matricea $A = (a_{ij})$ admite descompunere LU dacă şi numai dacă minorii principali $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ sunt nenuli, unde:* $\Delta_1 = |a_{11}|$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$\circ$ *Dacă există două permutări $\pi, \sigma \in S_n$ astfel încât matricea $P_\pi A P_\sigma$ să admită descompunere LU,* atunci $A = P_\pi^T L U P_\sigma^T$.

Exemplu. Să se descompună în produs LU matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. Încercăm să aplicăm doar transformari elementare de tip 3 asupra matricei A pâna la forma scară U. Formăm zerouri pe prima coloană folosind ca pivot elementul $a_{11} = 2$; aceasta înseamnă de fapt că înmulţim, la stânga, matricea A succesiv cu matricele elementare: $E_{12}(-\frac{3}{2})$, $E_{14}(-\frac{5}{2})$, apoi formăm zerouri pe a doua coloană folosind ca pivot elementul $a_{22} = -\frac{1}{2}$, adică înmulţim la stânga cu matricele elemenare $E_{23}(8)$ şi $E_{24}(-1)$ şi, în sfârşit, cu $E_{34}(\frac{2}{3})$; obţinem:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-\dfrac{1}{2}} & -1 & \dfrac{5}{2} \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & 3 & \dfrac{5}{2} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & -1 & \dfrac{5}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{-6} & 23 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & -1 & \dfrac{5}{2} \\ 0 & 0 & -6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{46}{3} \end{pmatrix} = U.$$

Deci am obţinut
$U=E_{34}(\frac{2}{3})E_{24}(-1)E_{23}(8)E_{14}(-\frac{5}{2})E_{12}(-\frac{3}{2})A$,
sau, echivalent (aplicând formula $(E_{ik}(\lambda))^{-1}=E_{ik}(-\lambda)$),
$A=\left(E_{34}(\frac{2}{3})E_{24}(-1)E_{23}(8)E_{14}(-\frac{5}{2})E_{12}(-\frac{3}{2})\right)^{-1}U=$
$=E_{12}(\frac{3}{2})E_{14}(\frac{5}{2})E_{23}(-8)E_{24}(1)E_{34}(-\frac{2}{3})U$.
Luând $L=E_{12}(\frac{3}{2})E_{14}(\frac{5}{2})E_{23}(-8)E_{24}(1)E_{34}(-\frac{2}{3})=$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0\\ 0 & -8 & 1 & 0\\ \frac{5}{2} & 1 & -\frac{2}{3} & 1\end{pmatrix},$$ rezultă descompunerea

$$A=LU=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0\\ 0 & -8 & 1 & 0\\ \frac{5}{2} & 1 & -\frac{2}{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2}\\ 0 & 0 & -6 & 23\\ 0 & 0 & 0 & \frac{46}{3}\end{pmatrix}.$$

0.1.2 PROBLEME REZOLVATE

1. Rezolvaţi sistemele de mai jos folosind metoda lui Gauss:

(a) $\begin{cases} x+2y-z=1\\ 2x+z=2\\ 4x-y+5z=7\end{cases}$ (b) $\begin{cases} y+2z=1\\ x-y+2z=2\\ 3x-z=3\end{cases}$

(c) $\begin{cases} x+y-2z=1\\ 2x-y+z=2\\ 5x-y=3\end{cases}$ (d) $\begin{cases} 2x+y-z=1\\ 4x+2y-z=2\\ 6x+3y+2z=3\end{cases}$

(e) $\begin{cases} x+y+z=3\\ 2x-y-z=0\end{cases}$ (f) $\begin{cases} x+2y=3\\ 3x+4y=-11\\ 5x+6y=2\end{cases}$ (g) $\begin{cases} x+2y=3\\ 4x+5y=6\\ 7x+8y=9\end{cases}$.

Rezolvare. (a) Vom folosi notaţia matriceală şi vom efectua operaţii asupra matricei extinse a sistemului: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 7 \end{array}\right)$.

Deoarece $a_{11} = 1 \neq 0$, putem considera a_{11} drept pivot. Pentru a provoca zerouri dedesubtul pivotului, adunăm mai întâi la linia a doua prima linie înmulţă cu -2 (şi vom face 0 coeficientul lui x din ecuaţia a doua). Apoi vom aduna la linia a treia prima linie înmulţită cu -4, făcând astfel 0 şi coeficientul lui x din ecuaţia a treia. Avem succesiv:

$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 3 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 3 \end{array}\right)$. Pe coloana a doua alegem pivot pe $a'_{22} = -4 \neq 0$. Pentru a face 0 coeficientul lui y din ecuaţia a treia (şi a obţine forma scară a matricei A), adunăm la linia a treia linia a doua înmulţită cu $-\dfrac{9}{4}$. Obţinem

$A \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\dfrac{9}{4}} & 3 \end{array}\right)$. De aici se vede mai întâi că $\operatorname{rang} A = 3$ (numărul pivoţilor), că $z = \dfrac{4}{3}$, apoi, din ecuaţia a doua, $y = 1$ şi, înlocuind în prima ecuaţie, $x = \dfrac{1}{3}$. Aşadar sistemul este compatibil determinat şi are soluţia unică $\mathcal{S} = \left\{ \left(\dfrac{1}{3}, 1, \dfrac{4}{3} \right) \right\}$.

(b) Procedăm la fel ca la exerciţiul precedent. Observăm însă că elementul din colţul din stânga-sus al matricei extinse $\overline{A}$ este $a_{11} = 0$, deci nu poate fi luat pe post de pivot. În acest caz, vom schimba ordinea ecuaţiilor astfel încât în colţul amintit să avem un element nenul. Schimbând între ele primele două linii ale matricei $\overline{A}$,

obţinem
$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$$
Pentru a face 0 şi coeficientul lui x de pe linia a treia (cel de pe linia a doua este deja 0), vom aduna la cea de-a treia linie prima linie înmulţită cu -3. Atunci $\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & -3 \end{array}\right)$. Alegem $a'_{22} = 1 \neq 0$ drept pivot. Pentru a face 0 coeficientul lui y din ecuaţia a treia, adunăm la ultima linie a matricei obţinute linia a doua înmulţită cu -3. Obţinem: $\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-13} & -6 \end{array}\right)$.
De aici se vede mai întâi că $\operatorname{rang} A = 3$, că $z = \dfrac{6}{13}$, apoi, din ecuaţia a doua, $y = \dfrac{1}{13}$ şi, înlocuind în prima ecuaţie, $x = \dfrac{15}{13}$. Aşadar sistemul este compatibil determinat şi are soluţia unică $\mathcal{S} = \left\{\left(\dfrac{15}{13}, \dfrac{1}{13}, \dfrac{6}{13}\right)\right\}$.

(c) Avem $\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$. Alegem $a_{11} = 1 \neq 0$ pivot, adunăm la linia a doua prima linie înmulţită cu -2 şi adunăm la linia a treia prima linie înmulţită cu -5. Obţinem astfel zerouri sub primul pivot:
$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 10 & -2 \end{array}\right)$. Pe linia a doua alegem pivot elementul de pe coloana a doua: $a'_{22} = -3 \neq 0$. Adunăm la linia a treia

linia a doua înmulţită cu -2. Găsim că:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$ Am obţinut o formă scară cu doar doi pivoţi deci $\operatorname{rang} A = 2$. Ultima ecuaţie, $0 = -2$, ne arată că sistemul este incompatibil.

(d) Avem $\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$. Alegem $a_{11} = 2 \neq 0$ pivot, şi adunăm la linia a doua prima linie înmulţită cu -2, apoi adunăm la linia a treia prima linie înmulţită cu -3. Obţinem astfel zerouri sub primul pivot:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right).$$ Alegem ca al doilea pivot elementul de pe linia 2, coloana 3, $a'_{23} = 1 \neq 0$. Adunăm la linia a treia linia a doua înmulţită cu -5, şi obţinem că $\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Ultima ecuaţie, $0 = 0$, este satisfăcută întotdeauna. Din linia a doua rezultă $z = 0$. Apoi din prima ecuaţie găsim $x = \dfrac{1-y}{2}$. Sistemul este compatibil (simplu) nedeterminat şi are ca soluţii $\mathcal{S} = \left\{ \left(\dfrac{1-\alpha}{2}, \alpha, 0 \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

(e) Cu notaţii matriceale, adunând la a doua prima linie înmulţită cu -2, obţinem imediat forma scară a matricei $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & -3 & -6 \end{array}\right).$$ De aici se vede că $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 2$ (avem doi pivoţi) deci sistemul este compatibil nedeterminat. Din ecuaţia a doua obţinem $y = 2 - z$. Înlocuind în prima ecuaţie găsim $x = 1$. Aşadar mulţimea soluţiilor sistemului este $\mathcal{S} = \{(1, 2-\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(f) Alegem elementul din colţul din stânga sus al matriei extinse, $a_{11} = 1 \neq 0$, drept pivot. Adunând la linia a doua prima linie înmulţită cu -3 şi la linia a treia prima linie înmulţită cu -5, obţinem

$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -11 \\ 5 & 6 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-2} & -20 \\ 0 & -4 & -13 \end{array}\right)$. Alegem pivot acum elementul de pe linia a doua, coloana a doua a matricei obţinute: $a'_{22} = -2 \neq 0$. Adunăm la linia a treia linia a doua înmulţită cu -2 (pentru a produce 0 sub pivot). Obţinem că $\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & 27 \end{array}\right)$.

Deoarece ultima linie se traduce în ecuaţia $0 = 27$, sistemul este incompatibil.

(g) Alegem elementul din colţul din stânga sus al matriei extinse, $a_{11} = 1 \neq 0$, drept pivot. Adunând la linia a doua prima linie înmulţită cu -4 şi la linia a treia prima linie înmulţită cu -7, obţinem

$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{array}\right)$. Alegem pivot acum elementul de pe linia a doua, coloana a doua a matricei obţinute: $a'_{22} = -3 \neq 0$. Adunăm la linia a treia linia a doua înmulţită cu -2 (pentru a produce 0 sub pivot). Obţinem că $\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Deoarece ultima linie se traduce în ecuaţia $0 = 0$, sistemul este compatibil. Din ecuaţia a doua avem $y = 2$, iar din prima ecuaţie, $x = -1$. Aşadar mulţimea soluţiilor sistemului este $\mathcal{S} = \{(-1, 2)\}$.

2. Folosind metoda lui Gauss, calculaţi rangurile matricelor:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & ... & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & ... & 3n \end{pmatrix}$.

Rezolvare.

(a) $\text{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} \xlongequal{4L_1+L_2\to L_2} \text{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$

$\xlongequal{-7L_1+L_3\to L_3} \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 6 \\ 0 & 6 & -12 \end{pmatrix} \xlongequal{2L_2+L_3\to L_3}$

$\text{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Avem doi pivoţi, deci rangul căutat este 2.

(b) $\text{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xlongequal{-4L_1+L_2\to L_2}$

$= \text{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & -7 & -7 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xlongequal{-6L_1+L_3\to L_3}$

$= \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & -3 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -12 & -12 \end{pmatrix} \xlongequal{-1{,}5\, L_2+L_3\to L_3}$

$= \text{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & -3 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{3}{2}} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Avem trei pivoţi, deci rangul este 3.

(c) $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & ... & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & ... & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & ... & 3n \end{pmatrix} \xlongequal{-(n+1)L_1+L_2\to L_2}$

$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & ... & n \\ 0 & -n & -2n & ... & -(n-1)n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & ... & 3n \end{pmatrix} \xlongequal{-(2n+1)L_1+L_3\to L_2}$

$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 0 & \boxed{-n} & -2n & ... & -(n-1)n \\ 0 & -2n & -4n & ... & -2(n-1)n \end{pmatrix} \xlongequal{-2L_2+L_3\to L_2}$

$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & ... & n \\ 0 & \boxed{-n} & -2n & ... & -(n-1)n \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$

Avem doi pivoţi deci rangul este 2.

3. Determinaţi forma scară redusă pentru matricele de mai jos:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$

Rezolvare. (a) Alegem pivot elementul din colţul din stânga-sus. Următoarea etapă ar fi să împărţim linia 1 cu a_{11} dar cum $a_{11} = 1$ acest lucru nu mai este necesar. Ca la metoda lui Gauss producem zerouri dedesubtul pivotului. $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{-2L_1+L_2\to L_2}{\sim}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alegem acum pivot elementul de pe linia a doua, coloana a doua: $a'_{22} = -1 \neq 0$. Vom înmulţi linia a doua cu -1

pentru a face pivotul să fie egal cu 1. Obţinem:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & \boxed{-1} & -6\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{-L_2\to L_2}} \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & \boxed{1} & 6\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Provocăm acum zerouri pe coloana a doua, nu numai sub pivot, ca la metoda lui Gauss, ci şi deasupra acestuia.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & \boxed{1} & 6\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{-L_2+L_1\to L_1}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & \boxed{1} & 6\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{-L_2+L_3\to L_3}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & \boxed{1} & 6\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}.$$

Alegem acum pivot elementul de pe linia a treia, coloana a treia a matricei obţinute. Împărţim linia pivotului cu pivotul pentru a face pivotul să fie egal cu 1. Obţinem:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & \boxed{-4}\end{pmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{-(1/4)L_3\to L_3}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & \boxed{1}\end{pmatrix}.$$ Acum provocăm zerouri pe coloana pivotului (coloana a treia):

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & \boxed{1}\end{pmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{3L_3+L_1\to L_1}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & \boxed{1}\end{pmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{-6L_3+L_2\to L_2}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I_3.$$

Din cele de mai sus rezultă că matricea este inversabilă. Vom vedea la exerciţiu următor cum, parcurgând exact aceleaşi etape, putem găsi inversa acestei matrice.

(b) $$\begin{pmatrix}\boxed{1} & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{L_1+L_3\to L_3}} \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & \boxed{1} & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{-2L_2+L_1\to L_1}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & \boxed{1} & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\xrightarrow{-2L_2+L_3\to L_3}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ care este forma scară redusă a matricei din enunţ. Deoarece ea este diferită de I_3 (sau deoarece nu avem decât doi pivoţi), matricea din enunţ are rangul 2, deci nu este inversabilă.

(c) $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{-L_1+L_2\to L_2}{}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{-L_1+L_3\to L_3}{}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

$\underset{\sim}{\overset{-L_2+L_1\to L_1}{}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{-3L_2+L_3\to L_3}{}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{-1/2\, L_3\to L_3}{}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{L_3+L_1\to L_1}{}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{-2L_3+L_2\to L_2}{}} I_3,$

deci matricea din enunţ este inversabilă.

(d) $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{-2L_1+L_2\to L_2}{}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

$\underset{\sim}{\overset{-3L_1+L_3\to L_3}{}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{L_1+L_4\to L_4}{}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$\underset{\sim}{\overset{-1/3\, L_2\to L_2}{}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{-L_2+L_1\to L_1}{}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$\underset{\sim}{\overset{3L_2+L_3\to L_3}{}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{-2L_2+L_4\to L_4}{}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

$\underset{\sim}{\overset{L_3+L_2\to L_2}{}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{-L_3+L_4\to L_4}{}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-6} \end{pmatrix}$

$$\underset{\sim}{-1/6\,L_4\to L_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&1\\0&0&0&\boxed{1}\end{pmatrix}\underset{\sim}{-2L_4+L_2\to L_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&\boxed{1}\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{-L_4+L_3\to L_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=I_4,\ \text{ deci matricea este inversabilă.}$$

4. Folosind metoda Gauss-Jordan, calculaţi inversele matricelor de mai jos:

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix}1&1&3\\2&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}\qquad\text{(b)}\ \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\qquad\text{(c)}\ \begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&-1&1&-1\\3&0&1&1\\-1&1&0&-4\end{pmatrix}.$$

Rezolvare. (a) După cum am văzut în prezentarea teoretică, calcularea inversei matricei $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$ revine la rezolvarea a trei sisteme, anume a celor care au matricele extinse:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&1\\2&1&0&0\\0&1&2&0\end{array}\right),\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&0\\2&1&0&1\\0&1&2&0\end{array}\right)\text{ şi }\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&0\\2&1&0&0\\0&1&2&1\end{array}\right).$$

Observăm că dacă am rezolva aceste sisteme cu Metoda Gauss-Jordan, am efectua pentru fiecare din ele exact aceleaşi operaţii pe care le-am văzut în exerciţiul precedent:
$-2L_1+L_2\to L_2,\ -L_2\to L_2,\ -L_2+L_1\to L_1,\ -L_2+L_3\to L_3,\ -(1/4)L_3\to L_3,\ 3L_3+L_1\to L_1,\ -6L_3+L_2\to L_2$. Această observaţie ne face să descoperim algortimul de inversare a unei matrice cu metoda Gauss-Jordan: în loc să rezolvăm succesiv aceste trei sisteme, considerăm matricea A extinsă <u>simultan</u> cu cele trei coloane de termeni liberi care ne interesează: e_1, e_2 şi e_3, adică considerăm matricea $(A\mid I_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&3&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right)$. Prin succesiunea de transformări (pe care le-am folosit la exerciţiul 3.a))

$-2L_1 + L_2 \to L_2,\ -L_2 \to L_2,\ -L_2 + L_1 \to L_1,\ -L_2 + L_3 \to L_3,\ -(1/4)L_3 \to L_3,\ 3L_3 + L_1 \to L_1,\ -6L_3 + L_2 \to L_2$ se ajunge la $(I_3 \mid A^{-1})$. Să reluăm paşii de mai sus şi să urmărim ce ,,păţeşte" matricea din dreapta.

Alegem pivot elementul din colţul din stânga-sus. Ca la metoda lui Gauss producem zerouri dedesubtul pivotului.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2L_1+L_2\to L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Alegem acum pivot elementul de pe linia a doua, coloana a doua: $a'_{22} \neq 0$. Vom înmulţi linia a doua cu -1 pentru a face pivotul să fie egal cu 1. Obţinem:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-L_2\to L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Provocăm acum zerouri pe coloana a doua, nu numai sub pivot, ca la metoda lui Gauss, ci şi deasupra acestuia.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-L_2+L_1\to L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-L_2+L_3\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Alegem acum pivot elementul de pe linia a treia, coloana a treia a matricei obţinute. Împărţim linia pivotului cu pivotul pentru a face pivotul să fie egal cu 1. Obţinem:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{4}L_3\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right).$$

Acum provocăm zerouri pe coloana pivotului (coloana a treia):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \underbrace{}_{3L_3+L_1\to L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{-6L_3+L_2\to L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right).$$

În momentul în care am ajuns în stânga la matricea scară redusă a lui A algoritmul se încheie: dacă această formă scară redusă este I (ceea ce este cazul în acest exerciţiu), atunci matricea obţinută în dreapta barei este A^{-1}; dacă unul dintre pivoţi este 0 (şi deci nu putem ajunge la I), atunci acest lucru înseamnă că matricea nu este inversabilă. Prin urmare, am obţinut că $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

0.1.3 PROBLEME PROPUSE

1. Concatenaţi urmatoarele matrice:

(a) $\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 12 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & -8 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Răspunsuri. (a) $\begin{pmatrix} 12 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 12 & -1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 13 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 13 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Fie $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ şi $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$.

(a) Să se calculeze π^{-1}, σ^{-1}, $\pi\sigma$, $\sigma\pi$, $\pi^{-1}\sigma^{-1}$, $\sigma^{-1}\pi^{-1}$, $(\pi\sigma)^{-1}$ şi $(\sigma\pi)^{-1}$.

(b) Să se calculeze numărul inversiunilor $m(\pi)$, $m(\sigma)$, precum şi signatura permutărilor date.

(c) Să se determine matricele permutărilor de la punctul (a) şi determinanţii acestora.

(d) Să se calculeze inversele matricelor de la punctul precedent.

(e) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

A. Să se calculeze produsele $P_\pi A$, $P_\sigma A$, $P_{\sigma^2} A$ şi $P_{\sigma\pi^{-1}} A$.

B. Să se determine toate produsele posibile dintre matricele determinate la punctul (c) şi matricea A.

3. Arătaţi că

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Fie $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$ şi $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Să se arate că $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Arătaţi că:

(a) $$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \text{ în } \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}).$$

(d) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & ... & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & ... & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & ... & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Să se calculeze produsele $AB_{:1}$, $AB_{:2}$, $AB_{:3}$, $A_{1:}B$, $A_{2:}B$, $A_{1:}B$, $A_{3:}B$ şi $A_{4:}B$.

(b) Să se determine matricele AB şi $(AB_{:1} \mid AB_{:2} \mid AB_{:3})$.

(c) Să se calculeze B^{-1} şi AB^{-1}.

7. Să se arate că, dacă există produsul AB şi $B=(B_{:1} \mid B_{:2} \mid ... \mid B_{:p})$, atunci $AB=(AB_{:1} \mid AB_{:2} \mid ... \mid AB_{:p})$.

8. Arătaţi că dacă $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, n impar, verifică $A^T = -A$, atunci $\det A = 0$.

9. Se numeşte matrice simetrică o matrice cu proprietatea $A^T = A$.
(a) Arătaţi că $B \cdot B^T$ şi $B^T \cdot B$ sunt matrice simetrice, $\forall\, B \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$.
(b) Arătaţi că dacă o matrice simetrică este inversabilă atunci şi inversa ei este tot o matrice simetrică.
(c) Este adevărat că dacă A şi B sunt două matrice simetrice de acelaşi tip, atunci AB este tot o matrice simetrică? Justificaţi răspunsul.

10. Determinaţi inversele matricelor:

(a) $\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 12 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

Răspunsuri. (a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; (b) nu admite inversă;

(c) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{13}{5} \end{pmatrix}$; (d) nu admite inversă.

11. Să se dovedească că dacă π, $\sigma \in S_n$, atunci

i. $P_\pi P_\sigma = P_{\sigma\pi}$.
ii. $P_\pi^T P_\pi = I$.
iii. $P_\pi^T = P_{\pi^{-1}} = P_\pi^{-1}$.

12*. Să se descrie în pseudocod algoritmii de aducere a unei matrice la forma scară, respectiv la forma scară redusă.

13. Să se determine o matrice scară şi matricea scară redusă pentru următoarele matrice şi să se precizeze rangul lor:

(a) $\begin{pmatrix} 11 & -4 & 3 & 0 \\ 10 & 1 & 2 & -9 \\ 9 & 2 & -4 & 13 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -11 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 33 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Răspunsuri. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{53}{287} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{743}{287} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1185}{287} \end{pmatrix}$, 3;

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 2; (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 4;

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -120 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 152 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -151 \end{pmatrix}$, 5.

14. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze:

(a) A^{-1} şi $A^{-1}B^{-1}$, unde $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Să se calculeze produsele $P_{(1,3)}A$, $E_{(1,3)}(-1)A$ şi $E^2(\frac{1}{2})E_{(2,3)}(-\frac{1}{2})A$ (unde E cu diverşi indici desemnează matrice elementare).

(c) Să se rezolve sistemul $Ax = b$, unde $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

15. Să se rezolve prin metoda Gauss în $\mathbb{R}$ sistemele liniare ale căror matrice extinse sunt:

(a) $\begin{pmatrix} 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Răspuns.

(a) $\mathcal{S} = \left\{ \left(\alpha,\, \beta,\, 2 - \dfrac{27}{13}\alpha + \dfrac{9}{13}\beta,\, -1 + \dfrac{3}{13}\alpha - \dfrac{1}{13}\beta \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

(b) $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{-6+8\beta}{7}, \frac{1-13\beta}{7}, \frac{15-6\beta}{7}, \beta \right) \mid \beta \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $\mathcal{S} = \varnothing$.

16*. Să se descrie în pseudocod algoritmii de rezolvare a unui sistem liniar prin metoda Gauss, respectiv prin metoda Gauss-Jordan.

17. Fie $(K, +, \cdot)$ un corp şi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(K)$ astfel încât $abcd \neq 0$. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) există $\alpha \neq 0$ astfel încât $A_{:1} = \alpha A_{:2}$;

(b) există $\beta \neq 0$ astfel încât $A_{1:} = \beta A_{2:}$.

18*. Să se arate că un sistem liniar cu coeficienţi reali nu poate să aibă exact două soluţii.

Indicaţie. Arătaţi că dacă x, $x' \in \mathbb{R}^n$ sunt soluţii ale sistemului atunci şi $\frac{1}{2}(x + x')$ e soluţie a sistemului.

19*. Să se dea un exemplu de sistem liniar care admite exact două soluţii.

Rezolvare. În $\mathbb{Z}_2$ sistemul $x + y = \hat{0}$ are exact două soluţii.

20. Să se descompună în produs LU matricele:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & \frac{83}{12} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Răspunsuri. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & \frac{83}{12} \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$.

21. Să se descompună în produs PLU, unde P este matricea unei permutări, următoarele matrice:

(a) $\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}$;

(e*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

(f*) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

Răspunsuri. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{13} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & \frac{13}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{13} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & \frac{13}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{9}{5} & -1 & 1 & 0 \\ \frac{7}{5} & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & \frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{3} & -\frac{11}{5} & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{11}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(matricea nu este inversabilă!).