1 8. Transformari ortogonale si aplicatii

1.1 A. Teorie

Unul dintre cele mai puternice instrumente de care dispunem in cadrul spatiilor euclidiene este dat de clasa transformarilor ortogonale in conexiune cu transformarile liniare simetrice. Aceste transformari sunt utilizate intens in grafica pe computer; folosirea transformarilor ortogonale in proiectarea sistemelor permite asigurarea fezabilitatii acestora; calculul matricei A^m -de importanta capitala in foarte multe aplicatii- devine facil in cazul matricelor simetrice folosind transformarile ortogonale; stabilirea naturii punctelor critice ale unei functii f de clasa C^2 utilizand transformari ortogonale pentru diferentiala a doua este necesara in probleme de optimizare; si, nu in ultimul rand, algoritmii de descompunere $Q \cdot R$, respectiv $V^T \cdot \Sigma \cdot U$ pentru matrice nesingulare, respectiv matrice arbitrare (algoritmi aflati in "top 10" al descoperirilor matematice care au revolutionat ingineria secolului XX)- ca aplicatii a tehnicilor de ortogonalizare - permit rezolvarea sistemelor mari si furnizeaza baza matematica pentru cea mai performanta tehnica de comprimare a datelor.

Peste tot in aceasta sectiune $(V, \langle , \rangle)$ este un spatiu vectorial euclidian si B este o baza a sa.

1.1.1 6.1. Izometrii

Transformarile ortogonale, numite si izometrii, sunt operatori care invariaza produsele scalare.

Definitia 8.1.1. *Operatorul $f \in$L(V) se numeste **transformare ortogonala** sau **izometrie** (a spatiului V) daca*

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

pentru orice $u, v \in V$.

Exemplul 8.1.1. Functia id_V este transformare ortogonala a spatiului euclidian V.

Exemplul 8.1.2. Sa determinam transformarea ortogonala $f \in$L$\left(\mathbb{R}^2\right)$ stiind ca matricea sa in baza canonica este

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & b \\ a & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Stim ca vectorii $f(1,0) = \left(\frac{1}{2}, a\right)$, $f(0,1) = \left(b, -\frac{1}{2}\right)$ trebuie sa formeze o baza ortonormata. Prin urmare $a^2 + \frac{1}{4} = b^2 + \frac{1}{4} = 1$ si $\frac{b}{2} - \frac{a}{2} = 0$, deci $a = b \in \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Am obtinut doua transformari ortogonale care satisfac cerintele date si care au expresiile analitice

$$f_1(x, y) = (\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y)$$

pentru $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$, respectiv

$$f_2(x,y)=(\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y,-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y)$$

pentru $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sa remarcam ca daca $f\in\mathrm{L}(V)$ este o transformare ortogonala si $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ este o baza ortonormata in V atunci $\langle f(e_i),f(e_j)\rangle=\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$ pentru orice $i,j\in\{1,...,n\}$; prin urmare $f(B)=\{f(e_1),f(e_2),...,f(e_n)\}$ baza ortonormata in V si f este automorfism (i.e. izomorfism al spatiului V). Invers, daca $f\in\mathrm{L}(V)$ are proprietatea ca transforma o baza ortonormata intr-o baza ortonormata, atunci f este izometrie. Intr-adevar, daca $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ si $f(B)=\{f(e_1),f(e_2),...,f(e_n)\}$ sunt baze ortonormate in V, iar $u=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i, v=\sum_{j=1}^{n}y_je_j\in V$ atunci

$$\langle f(u),f(v)\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}x_if(e_i),\sum_{j=1}^{n}y_jf(e_j)\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j\langle f(e_i),f(e_j)\rangle=$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j\delta_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j\langle e_i,e_j\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j\right\rangle=\langle u,v\rangle.$$

Am obtinut urmatoarea caracterizare a transformarilor ortogonale.

Propozitia 8.1.1. *Fie $f\in\mathrm{L}(V)$. Atunci f este transformare ortogonata daca si numai daca f transforma o baza ortonormata intr-o baza ortonormata.*

Observatia 8.1.2. *Daca $f,g\in\mathrm{L}(V)$ sunt doua transformari ortogonale atunci atunci $f\circ g$ este transformare ortogonala.* Intr-adevar, daca $u,v\in V$, folosind faptul ca f este transformare ortogonala, apoi ca g este transformare ortogonala avem

$$\langle f\circ g(u),f\circ g(v)\rangle=\langle f(g(u)),f(g(v))\rangle=\langle g(u),g(v)\rangle=\langle u,v\rangle.$$

Prin urmare *multimea transformarilor ortogonale din* $\mathrm{L}(V)$ *formeaza un grup (neabelian) fata de operatia de compunere numit **grupul ortogonal** al spatiului $(V,\langle,\rangle)$. Notam cu $\mathcal{GO}(V)$ grupul transformarilor ortogonale ale spatiului V.*

Observatia 8.1.3. Fie $f\in\mathcal{GO}(V)$. Sa aratam ca aceasta aplicatie invariaza unghiurile. Fie pentru aceasta doi vectori nenuli $u,v\in V$. Atunci

$$\cos\widehat{f(u),f(v)}=\frac{\langle f(u),f(v)\rangle}{\sqrt{\langle f(u),f(u)\rangle}\sqrt{\langle f(v),f(v)\rangle}}=\frac{\langle u,v\rangle}{\sqrt{\langle u,u\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle}}=\cos\widehat{u,v}$$

si proprietatea este dovedita.

Nu orice aplicatie liniara care invariaza unghiurile este transformare ortogonala.

Exemplul 8.1.3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel incat $a^2 + b^2 \neq 0$. Atunci $f(x, y) := (ax + by, -bx + ay)$ defineste un automorfism al spatiului euclidian canonic $\mathbb{R}^2$. Daca $B = \{e_1, e_2\}$ este baza canonica, atunci

$$f(B) = \{f(e_1) = (a, -b), f(e_2) = (b, a)\}$$

este baza ortogonala (deoarece $\langle f(e_1), f(e_2)\rangle = ab - ba = 0$), dar nu este intotdeauna ortonormata. Mai precis, daca $a^2 + b^2 \neq 1$ baza nu este ortonormata, deci f nu este transformare ortogonala. De fapt $f \in \mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^2\right)$ daca si numai daca $a^2 + b^2 = 1$; in acest caz exista $\varphi \in [0, 2\pi)$ astfel incat $a = \cos\varphi$ si $b = \sin\varphi$ iar automorfismul f se numeste **rotatie de unghi** φ.

1.1.2 8.2. Matrice simetrice si valorile lor proprii

Definitia 8.2.1. *Operatorul* $f \in \mathrm{L}(V)$ *se numeste* ***transfomare liniara simetrica*** *(a spatiului* V*) daca*

$$\langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle$$

pentru orice $u, v \in V$. *Notam cu* $\mathrm{L}_s(V)$ *multimea transformarilor liniare simetrice ale spatiului* $\dot{V}$.

Reamintim ca o matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este simetrica daca si numai daca ea coincide cu transpusa sa, i.e. $A = A^T$.

Daca B este o baza in V, $f \in \mathrm{L}(V)$ si $u, v \in V$ atunci, in conventia matriceala, avem

$$\langle f(u), v\rangle = (f_B \cdot u_B)^T \cdot v_B = u_B^T \cdot f_B^T \cdot v_B \text{ si } \langle u, f(v)\rangle = u_B^T \cdot f_B \cdot v_B.$$

Cu ajutorul acestei proprietati deducem urmatoarea caracterizare a transformarilor liniare simetrice.

Propozitia 8.2.1. *Operatorul* $f \in \mathrm{L}(V)$ *este transfomare liniara simetrica daca si numai daca matricea sa intr-o baza ortonormata este simetrica.*

Cu alte cuvinte, daca $f \in \mathrm{L}(V)$ si B este o baza ortonormata in V atunci $f \in \mathrm{L}_s(V)$ daca si numai daca f_B este simetrica.

Spatiul vectorial $\mathbb{R}^{n\times 1}$ este spatiu euclidian fata de produsul scalar canonic definit prin

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j,$$

unde $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \end{pmatrix}^T$, $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_1 & \cdots & y_1 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Cu acest produs propozitia 8.2.1 are urmatoarea exprimare matriceala.

Propozitia 8.2.2. *Matricea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *este simetrica daca si numai daca*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Reamintim ca o matrice patratica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este d*iagonalizabila (sau un operator* f $\in$L(V) *este diagonalizabil) daca si numai daca toate valorile sale proprii sunt reale si ordinul de multiplicitate* m_λ *al fiecarei valori proprii* λ *coincide cu dimensiunea subspatiului invariant* S_λ*, adica* $m_\lambda = \dim S_\lambda$*, pentru orice valoare proprie* λ *a matricei* A *(a operatorului* f*).*

In cazul matricelor simetrice (transformarilor liniare simetrice) diagonalizarea este intodeuna posibila.

Teorema 8.2.1. Diagonalizarea matricelor simetrice. *Daca* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *este o matrice simetrica atunci ea este diagonalizabila. Mai mult, daca* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ *sunt valorile proprii distincte ale matricei simetrice* A *si* $m_{\lambda_1}, m_{\lambda_2}, ..., m_{\lambda_k}$ *sunt ordinele de multiplicitate corespunzatoare, atunci exista o baza ortonormata* B *astfel ca*

$$T^T_{B_cB} \cdot A \cdot T_{B_cB} = D,$$

unde D *este o matrice diagonala care are pe diagonala principala valorile proprii ale matricei* A *dispuse in urmatoarea ordine (de la nord-vest la sud-est):*

$$\underbrace{\lambda_1, \lambda_1, ..., \lambda_1}_{m_{\lambda_1} \text{ ori}}, \underbrace{\lambda_2, \lambda_2, ...\lambda_2}_{m_{\lambda_2} \text{ ori}}, ..., \underbrace{\lambda_k, \lambda_k, ..., \lambda_k}_{m_{\lambda_k} \text{ ori}}$$

In plus baza ortonormata a spatiului V *in care* A *are forma diagonala* D *este*

$$B = B_{\lambda_1} \cup B_{\lambda_2} \cup \cdots \cup B_{\lambda_k},$$

unde B_{λ_i} *este o baza ortonormata a subspatiului invariant* S_{λ_i}*,* $i \in \{1, 2, ..., k\}$.

Observatia 8.2.1. *Deoarece* T_{B_cB} *este o matrice ortogonala -deci este matricea unei transformari ortogonale- metoda de diagonalizare descrisa poarta numele de* ***reducere la forma diagonala printr-o transformare (liniara) ortogonala****.*

Observatia 8.2.2. Daca dorim sa determinam **forma diagonala a unei matrice simetrice** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si **o baza ortonormata in care are forma diagonala** trebuie sa parcurgem urmatorii pasi:

1. Determinam valorile proprii rezolvand ecuatia caracteristica $\det(A - \lambda I_n) = 0$; obtinem valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ (stim ca suma ordinelor de multiplicitate este n, adica $m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} + \cdots + m_{\lambda_k} = n$); forma diagonala D a matricei A are pe diagonala principala valorile proprii ca in teorema de mai sus. Baza in care are aceasta forma se obtine parcugand cele ce urmeaza.

2. Pentru fiecare valoare proprie λ_i determinam subspatiul invariant S_{λ_i} si o baza a sa B_i.

3. Ortonormam baza B_i prin procedeul de ortonormare Gramm-Schmidt si obtinem baza B_{λ_i}.

4. Construim $B = B_{\lambda_1} \cup B_{\lambda_2} \cup \cdots \cup B_{\lambda_k}$. Aceasta este o baza ortonormata in care A are forma diagonala D.

Daca in plus dorim sa calculam A^m, unde $m \in \mathbb{N}^*$, cum matricea T_{B_cB} este ortogonala, avem

$$A^m = T_{B_cB} \cdot D^m \cdot T_{B_cB}^T.$$

Deoarece spatiul vectorial al transformarilor liniare simetrice ale spatiului V este izomorf cu spatiul vectorial al matricelor de ordinul n reale si simetrice afirmatiile teoremei precedente sunt valabile si pentru transformari liniare simetrice.

Exemplul 8.2.1. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = \left(2x + \sqrt{2}y, \sqrt{2}x + y, 3z\right)$. Ne propunem sa determinam compusa f^n, $n \in \mathbb{N}^*$ cu ajutorul unei transformari ortogonale si sa determinam expresia analitica a acestei transformari.

A. Deoarece f este o transformare liniara simetrica, planul de lucru pentru determinarea aplicatiei f este urmatorul:

- determinam f_{B_c}- matricea aplicatiei in baza canonica B_c;

- determinam valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (care sunt obligatoriu reale) si bazele ortonormate din spatiile invariante corespondente;

- construim baza ortonormata $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ ca reuniune a bazelor determinate la punctul precedent;

- construim matricea ortogonala T_{B_cB}; stim ca matricea aplicatiei noastre in baza B este matricea diagonala $f_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ si ca $f_B = T_{B_cB}^T \cdot f_{B_c} \cdot T_{B_cB}$;

- calculam matricea aplicatiei f^n stiind ca aceasta este matricea aplicatiei ridicata la puterea n, adica

$$f_{B_c}^n = (f_{B_c})^n = \left(T_{B_cB} \cdot f_B \cdot T_{B_cB}^T\right)^n = T_{B_cB} \cdot f_B^n \cdot T_{B_cB}^T;$$

- scriem expresia analitica a aplicatiei f^n (cunoscand matricea sa in baza canonica).

Matricea aplicatiei liniare f in baza canonica B_c este

$$f_{B_c} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ecuatia caracteristica $|f_{B_c} - \lambda I_3| = 0$ are radacinile $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 0$. Subspatiul invariant corespunzator valorii proprii $\lambda = 3$ este

$$S_{\lambda=3} = \left\{ \left(\sqrt{2}y, y, z \right) \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \left(\sqrt{2}, 1, 0 \right), (0,0,1) \right\}$$

si o baza ortonormata a acestuia este

$$B_{\lambda_1} = \left\{ v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right), v_2 = (0,0,1) \right\}.$$

Subspatiul invariant corespunzator valorii proprii $\lambda = 0$ este

$$S_{\lambda=0} = \left\{ \left(x, -\sqrt{2}x, 0 \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \left(1, -\sqrt{2}, 0 \right) \right\}$$

si o baza ortonormata a acestuia este

$$B_{\lambda_3} = \left\{ v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0 \right) \right\}.$$

Prin urmare $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ este o baza ortonormata in care f are forma diagonala si matricea sa este

$$f_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$f_{B_c}^n = T_{B_cB} \cdot f_B^n \cdot T_{B_cB}^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T_{B_cB}^T =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}3^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^{n-1} & \sqrt{2} \cdot 3^{n-1} & 0 \\ \sqrt{2} \cdot 3^{n-1} & 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Tinand seama ca

$$f_{B_c}^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^{n-1}x + \sqrt{2} \cdot 3^{n-1}y \\ \sqrt{2} \cdot 3^{n-1}x + 3^{n-1}y \\ 3^n z \end{pmatrix}$$

rezulta ca expresia analitica a operatorului f^n este

$$f^n(x,y,z) = \left(2 \cdot 3^{n-1}x + \sqrt{2} \cdot 3^{n-1}y, \sqrt{2} \cdot 3^{n-1}x + 3^{n-1}y, 3^n z \right).$$

B. Fie $\tau \in \mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^3\right)$ transformarea ortogonala folosita la pasul precedent, deci aplicatia liniara $\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care are drept matrice in perechea de baze B_c, B chiar matricea T_{B_cB}. Daca $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ este baza canonica, avem

$$\tau(e_1) = v_1, \tau(e_2) = v_2, \tau(e_3) = v_3$$

si atunci expresia analitica este
$\tau(x, y, z) = \tau(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x\tau(e_1) + y\tau(e_2) + z\tau(e_3) = x\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) + y(0, 0, 1) + z\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0\right) = \left(\frac{\sqrt{2}x+z}{\sqrt{3}}, \frac{x-\sqrt{2}z}{\sqrt{3}}, y\right).$

1.1.3 8.3. Reducerea formelor patratice la forma canonica prin transformari ortogonale

Pentru a simplifica notatiile vom considera doar forme patratice definite pe spatiul euclidian canonic $\mathbb{R}^n$ (de fapt spatiul vectorial al matricelor simetrice din $\mathbb{R}^{n\times n}$ este izomorf cu spatiul liniar $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ si, in plus, daca V este un spatiu vectorial n-dimensional atunci $\mathcal{Q}(V) \simeq \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathrm{L}_s(V)$ - vezi exercitiile 23 si 24) si vom nota cu B_c baza canonica din $\mathbb{R}^n$.

Tehnica de reducere a formelor patratice la forma canonica. Fie $f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$. Deoarece f_{B_c} este o matrice simetrica din teorema de diagonalizare a matricelor simetrice rezulta ca exista o baza ortonormata B formata din vectori proprii ai matricei f_{B_c} in care matricea f_{B_c} are forma diagonala $D = T^T_{B_cB} \cdot f_{B_c} \cdot T_{B_cB}$. Din formula de schimbare a bazei pentru forme patratice (vezi propozitia 6.2.2) stim ca matricea formei f in baza B este $f_B = T^T_{B_cB} \cdot f_{B_c} \cdot T_{B_cB}$. In consecinta $f_B = D$, adica forma patratica f are forma canonica in baza ortonormata B. Am obtinut astfel o tehnica de reducere a lormei f la forma canonica print transformarea ortogonala de matrice T_{B_cB}.

Exemplul 8.3.1. Sa se reduca la forma canonica printr-o transformare ortogonala forma patratica definita prin

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

Matricea formei in baza canonica este

$$f_{B_c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuatia caracteristica $|f_{B_c} - \lambda I_4| = 0$ are radacinile $\sqrt{5}, -\sqrt{5}, -1, 1$. prin urmare, conform tehnicii de mai sus, exista o baza ortonormata $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de vectori proprii ai matricei f_{B_c} in care forma $f \in \mathcal{Q}\left(\mathbb{R}^4\right)$ are forma canonica

$$f(y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 + y_4v_4) = \sqrt{5}y_1^2 - \sqrt{5}y_2^2 - y_3^2 + y_4^2.$$

Pentru a determina baza B trebuie sa determinam in prealabil subspatiile invariante $S_{\sqrt{5}}, S_{-\sqrt{5}}, S_{-1}, S_1$ corespunzatoare valorilor proprii $\sqrt{5}, -\sqrt{5}, -1, 1$ si apoi sa le determinam cate o baza ortonormata $B_{\sqrt{5}} = \{v_1\}, B_{-\sqrt{5}} = \{v_2\}, B_{-1} = \{v_3\}, B_1 = \{v_4\}$. Dupa calcule obtinem

$$S_{\sqrt{5}} = spam\left\{\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}, -1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, 1\right)\right\}$$

deci putem lua v_1 chiar versorul vectorului $\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}, -1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, 1\right)$, deci

$$v_1 = \frac{1}{2\sqrt[4]{5}}\left(-\sqrt{\sqrt{5}+1}, -\sqrt{\sqrt{5}-1}, \sqrt{\sqrt{5}+1}, \sqrt{\sqrt{5}-1}\right).$$

Apoi, cum $S_{-\sqrt{5}} = spam\left\{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right)\right\}$ putem lua v_2 versorul vectorului $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right)$, deci

$$v_2 = \frac{1}{2\sqrt[4]{5}}\left(\sqrt{\sqrt{5}-1}, -\sqrt{\sqrt{5}+1}, -\sqrt{\sqrt{5}-1}, \sqrt{\sqrt{5}+1}\right).$$

Analog, cum $S_{-1} = spam\{(1,0,1,0)\}$ luam

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0),$$

iar pentru $S_1 = spam\{(0,1,0,1)\}$ luam

$$v_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1).$$

Baza ortonormata in care forma patratica data are forma canonica da mai sus este $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

1.1.4 8.4. Descompunerea singulara a unei matrice

Fie $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Se pune problema descompunerii matricei A intr-un produs de forma

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

unde $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ si $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sunt matrice ortogonale iar $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ este o matrice de forma

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

unde constantele $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ se numesc **valorile singulare ale matricei** A. Aceasta descompunere se numeste **descompunerea valorilor singulare,** pe scurt **SVD**.

Tehnica pe care o descriem in continuare este bazata pe descompunerea QR a matricei $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (vezi exercitiile 28-32).

Algoritm de descompunere SVD a matricei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$**.**

- Construim matricea simetrica de tip $n \times n$

$$B := A^T A.$$

- Determinam valorile proprii ale matricei B (care sunt obligatoriu nenegative) si le ordonam descrescator:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0.$$

- Determinam baza ortonormata a spatiului $\mathbb{R}^n$

$$\{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

  in care matricea B are forma diagonala (folosind tehnica descrisa la observatia 8.2.2).

- Construim matricea ortogonala

$$V := \left(v_1^T \mid v_2^T \mid ... \mid v_n^T\right).$$

- Calculam valorile singulare ale matricei A :

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}.$$

- Determinam vectorii ortonormati

$$u_1 := \frac{1}{\sigma_1} A v_1^T, u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2^T, ..., u_r = \frac{1}{\sigma_r} A v_r^T.$$

  din spatiul $\mathbb{R}^{m \times 1}$.

- Determinam -boar daca $m - r > 0$ - o baza ortonormata

$$\{u_{r+1}, u_{r+2}, ..., u_m\}$$

a spatiului $Null\left(A^T\right)$.

- Construim matricea ortogonala U :

$$U := (u_1 \mid u_2 \mid ... \mid u_m)$$

- Construim matricea $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a valorilor singulare si descompunerea SVD:

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T.$$

Exemplul 8.4.1. Sa calculam descompunerea SVD a matricei $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ urmarind pasii algoritmului prezentat.

1. Determinam matricea simetrica de tip 3×3

$$B := A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}.$$

2. Determinam valorile proprii ale matricei B rezolvand ecuatia caracteristica $\det(B - \lambda I_3) = (40 - \lambda)(\lambda - 20)\lambda = 0$ si ordonam descrescator valorile proprii. Obtinem

$$\lambda_1 = 40, \lambda_2 = 20, \lambda_3 = 0.$$

3. Determinam baza ortonormata $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ in care matricea B are forma diagonala. Avem spatiile invariante corespunzatoare valorilor proprii determinate: $S_{\lambda_1} = spam\{(0,0,1)\}, S_{\lambda_2} = spam\{(1,1,0)\}, S_{\lambda_3} = spam\{(-1,1,0)\}$. Prin urmare

$$v_1 = (0,0,1), v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), v_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

4. Construim matricea ortogonala

$$V := \left(v_1^T \mid v_2^T \mid v_3^T\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Calculam valorile singulare ale matricei A :

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 2\sqrt{10}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 2\sqrt{5}.$$

6. Determinam vectorii ortonormati

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

7. Deoarece $r = 2 = m$ spatiul $Null\left(A^T\right)$ este spatiul trivial.

8. Construim matricea ortogonala U :

$$U = (u_1 \mid u_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

9. Construim matricea valorilor singulare $\Sigma \in \mathbb{R}^{2\times 3}$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Am obtinut astfel descompunerea SVD $A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Observatia 8.4.1. In exemplul precedent rangul r al matricei A coincide cu numarul liniilor m; de aceea pasul 7 nu furnizeaza vectori suplimentari in constructia matricei ortogonale U.

Sa analizam si cazul $m > n$.

Exemplul 8.4.2. Sa calculam descompunerea SVD a matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Determinam matricea simetrica de tip 2×2

$$B := A^T A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Determinam valorile proprii ale matricei B. Obtinem

$$\lambda_1 = 3 > \lambda_2 = 1.$$

3. Determinam baza ortonormata $\{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^2$ in care matricea B are forma diagonala. Avem spatiile invariante $S_{\lambda_1} = spam\,\{(1,-1)\}, S_{\lambda_2} = spam\,\{(1,1)\}$. Prin urmare

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

4. Construim matricea ortogonala

$$V := \left(v_1^T \mid v_2^T\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

5. Calculam valorile singulare ale matricei A :

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{3} > \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1.$$

6. Determinam vectorii ortonormati

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

7. Deoarece $r = 2 < m = 3$ si spatiul $Null\left(A^T\right) = spam\left\{(1,1,-1)\right\}$, luam $u_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

8. Construim matricea ortogonala U :

$$U = (u_1 \mid u_2 \mid u_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

9. Construim matricea valorilor singulare $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Am obtinut astfel descompunerea SVD $A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

1.2 B. Probleme rezolvate

//

1.3 C. Exercitii

1. Aratati ca $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{3}y, y+\sqrt{3}x\right)$ defineste o transformare ortogonala simetrica.

2. Dovediti afirmatiile de la observatia 8.1.1.

3. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(1,1)=(1,-1)$. Sa se determine $f\in\mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^2\right)$ astfel incat $f(1,1)=(1,-1)$.

4. *Fie $(V,\cdot)$ un spatiu euclidian si τ un automorfism al sau (i.e. $\tau\in\mathcal{I}z(V,V)$). Sa se arate ca τ este transformare ortogonala (i.e. $\tau(u)\cdot\tau(v)=u\cdot v,\ \forall u,v\in V$) daca si numai daca τ conserva norma vectorilor, i.e. $\|\tau(u)\|=\|u\|$ pentru orice $u\in V$.

5. Fie $f\in\mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^2\right)$. Sa se determine $G:=\{g\in\mathrm{L}\left(\mathbb{R}^2\right)\mid g\circ f\in\mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^2\right)\}$.

6. *Fie V un spatiu euclidian si τ un automorfism al sau. Sa se arate ca τ este transformare ortogonala daca si numai daca imaginea unei baze ortonomate (prin τ) este o baza ortonormata.

7. Sa se determine $f\in\mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^2\right)$ stiind ca $f^2=id_{\mathbb{R}^2}$ si $f\neq id_{\mathbb{R}^2}$.

8. Este adevarata implicatia $\left[f,g\in\mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^2\right)\Rightarrow f+g\in\mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^2\right)\right]$?

9. *Fie $(V,\cdot)$ un spatiu euclidian si τ o transformare ortogonala a sa. Sa se demonstreze ca matricea transformarii τ intr-o baza ortonormata este o matrice ortogonala.

10. Fie $f(x,y,z)=a(2x+2y-bz,2x-by+2z,-bx+2y+2z)$. Sa se determine $a,b\in(0,\infty)$ astfel ca f sa devina o transformare ortogonala a spatiului euclidian canonic $\mathbb{R}^3$ prin trei metode.

    Raspuns. $a=\frac{1}{3}, b=1$.

11. Aratati ca grupul matricelor ortogonale din $\mathbb{R}^{n\times n}$ este izomorf cu grupul $\mathcal{GO}(V)$, unde V este un spatiu euclidian n-dimensional.

12. Fie $B=\{e_1,e_2\}$ baza canonica din $\mathbb{R}^2$ si $f\in\mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^2\right)$ astfel ca $f(e_1)=-e_2$. Sa se determine $\mathcal{M}=\{f_B^n\mid n\in\mathbb{N}\}$.

13. Demonstrati propozitia 8.2.1.

14. Determinati multimea $\mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^2\right)\cap\mathrm{L}_s\left(\mathbb{R}^2\right)$.

15. Demonstrati propozitia 8.2.2.

16. Sa se determine o baza ortonormata in care transformarea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ de matrice $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}$ are forma diagonala.

Raspuns. E.g. in baza $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ are forma $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

17. Fie $f \in \mathrm{L}_s\left(\mathbb{R}^2\right) \setminus \{\alpha \cdot id_{\mathbb{R}^2} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Sa se arate ca nu exista o transformare liniara ortogonala t astfel incat $t^{-1} \circ f \circ t \in \{\alpha \cdot id_{\mathbb{R}^2} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

18. Aduceti matricea $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$ la o forma diagonala D si determinati matricea ortogonala T astfel ca $A = TDT^T$.

Raspuns. De exemplu $D = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$, si $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\1&1&-1&1\\1&-1&1&1\\-1&1&1&1\end{pmatrix}$.

19. Transcrieti teorema 8.2.1. de diagonalizare a matricelor simetrice pentru transformari liniare simetrice.

20. In spatiul euclidian canonic $\mathbb{R}^3$ determinati o baza ortonormala B formata cu vectorii proprii ai unei transformari liniare de matrice $A = \begin{pmatrix}11&2&-8\\2&2&10\\-8&10&5\end{pmatrix}$ si matricea diagonala D a acestei transformari in baza B.

Raspuns. E.g. $\left\{\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{-2}{3}\right),\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}$, $D = \begin{pmatrix}9&0&0\\0&18&0\\0&0&-9\end{pmatrix}$.

21. Determinati $\dim \mathrm{L}_s(V)$, stiind ca $\dim V = n$.

22. Sa se verifice ortogonalitatea operatorului $f \in \mathrm{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ care are matricea

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

in baza canonica si sa se determine expresia analitica a operatorului f^{-1}.

23. Fie V un spatiu liniar real n-dimensional. Aratati ca spatiul liniar al formelor patratice $\mathcal{Q}(V)$ are dimensiunea $\frac{n(n+1)}{2}$. (Daca $f, g \in \mathcal{Q}(V)$ atunci suma celor doua forme este definita prin $(f+g)(v) := f(v) + g(v)$ si produsul extern dintre scalarul α si vectorul f este definit prin $(\alpha f)(v) := \alpha f(v)$.). Demenstrati ca $\mathcal{Q}(V) \simeq \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$.

24. Dovediti ca spatiile vectoriale $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ si $\mathrm{L}_s(\mathbb{R}^n)$ sunt izomorfe.

25. Sa se reduca la forma canonica prin transformari ortogonale formele patratice:

(a) $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

(b) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4$.

Raspuns. **a.** $f = 4y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$; $y_1 = \frac{1}{3}(2x_1 - 2x_2 + x_3)$, $y_2 = \frac{1}{3}(2x_1 + x_2 - 2x_3)$, $y_3 = \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 + 2x_3)$. **b.** $f = y_1^2 - y_2^2 + 3y_3^2 + 5y_4^2$; $y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$, $y_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$, $y_3 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$, $y_4 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$.

26. *Sa se determine matricele $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalizabile pentru care $A^2 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Raspuns. $A \in \left\{ \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -5 & 5 \\ -5 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

27. Determinati A^{13}, unde $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$.

Raspuns. $A^{13} = 3^{11} \begin{pmatrix} 2^{15} + 3^{14} & 2 \cdot 3^{14} - 2^{14} & -2^{15} \\ 2 \cdot 3^{14} - 2^{14} & 2^{13} & 2 \cdot 3^{14} + 2^{14} \\ -2^{15} & 2 \cdot 3^{14} + 2^{14} & 2^{15} - 3^{14} \end{pmatrix}$.

28. ***Algoritmul de descompunere QR a unei matrice nesingulare.** Fie $A = \left(v_1^T \mid v_2^T \mid ... \mid v_n^T\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice nesingulara, $B := \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ si $B' = \{v_1', v_2', ..., v_n'\}$ baza ortonormata obtinuta prin procedeul Gram-Schmidt din baza B, i.e.

$$v_1' = \frac{1}{\|v_1\|} v_1, v_k' = \frac{1}{\left\| v_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} (v_k \cdot v_i') v_i' \right\|} \left(v_k - \sum_{i=1}^{k-1} (v_k \cdot v_i') v_i' \right),$$

pentru $k > 1$, unde "$\cdot$" reprezinta produsul euclidian canonic din $\mathbb{R}^n$. Notam

$$r_1 = \|v_1\|, r_k = \left\| v_k - \sum_{i=1}^{k-1} (v_k \cdot v_i') v_i' \right\|$$

pentru $k > 1$ si $Q := \left(v_1'^T \mid v_2'^T \mid ... \mid v_n'^T\right)$. Sa se arate ca:

(a) $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este baza in $\mathbb{R}^n$

(b) $v_1 = r_1 v_1'$ si $v_k = \sum\limits_{i=1}^{k-1} (v_i \cdot v_i') v_i' + r_k v_k'$, $k = \overline{1,n}$;

(c) $v_1^T = Q\begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, v_2^T = Q\begin{pmatrix} v_1' \cdot v_2 \\ r_2 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., v_n^T = Q\begin{pmatrix} v_1' \cdot v_n \\ v_2' \cdot v_n \\ ... \\ v_{n-1}' \cdot v_n \\ r_n \end{pmatrix}.$

(d) $A = QR$, unde $R = \begin{pmatrix} r_1 & v_1' \cdot v_2 & v_1' \cdot v_3 & \cdots & v_1' \cdot v_n \\ 0 & r_2 & v_2' \cdot v_3 & \cdots & v_2' \cdot v_n \\ 0 & 0 & r_3 & \cdots & v_3' \cdot v_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & v_{n-1}' \cdot v_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_n \end{pmatrix}.$

(e) Folosind descompunerea $A = QR$ indicati o procedura de rezolvare a sistemului $Ax = b$, unde $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

29. *Sa se efectueze descompunerea QR a matricei $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Raspuns. $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$

30. *Sa se determine descompunerea QR a unei matrice ortogonale.

31. *Sa se efectueze descompunerea QR a matricei $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Raspuns. $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$

32. *Sa se arate ca in descompunerea QR a matricei $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ avem $R = 2I_4$.