

Limita și continuitatea funcțiilor de mai multe variabile

1. Studiați dacă următoarele funcții au limită în punctele indicate:

- i) $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 7y^2$, în $(1, -1)$; ii) $f(x, y) = e^{-xy}$ în $(0, 1)$;
 iii) $f(x, y) = \frac{x+y}{1+xy}$ în $(0,0)$; iv) $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{2x}$ în $(0,2)$;
 v) $f(x, y) = \frac{\tan \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ în $(0,0)$; vi) $f(x, y) = \frac{x^4 - y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$ în $(0,0)$;
 vii) $f(x, y) = (1 + 3x^2y)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ în $(0,0)$;
 viii) $f(x, y) = \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{2xy}$ în $(0,0)$; ix) $f(x, y) = \frac{xy - y^2}{x^2 + y^2}$ în $(0,0)$;
 x) $f(x, y) = \frac{(x-2)(y-1)}{(x-2)^2 + (y-1)^2}$ în $(2,1)$; xi) $f(x, y) = \frac{2x + y^2}{y^2 - 2x}$ în $(0,0)$;
 xii) $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{|x| + |y|}$ în $(0,0)$.

2. Folosind teorema lui Heine să se arate că următoarele funcții nu au limită în origine:

- i) $f(x, y) = \frac{y^2 + 2x}{y^2 - 3x}$, $y^2 \neq 3x$, ii) $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$, $(x, y) \neq (0, 0)$,
 iii) $f(x, y) = \frac{ye^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2 + e^{-\frac{2}{x^2}}}$.

3. Să se cerceteze existența limitelor iterate și a limitei în origine pentru funcțiile:

- i) $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \cos \frac{1}{x}$, ii) $f(x, y) = \frac{2x - 5y + x^2 + y^2}{x + y}$,
 iii) $f(x, y) = (1 + x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

4. Să se discute după valorile parametrului α continuitatea funcțiilor:

- i) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \frac{1}{xy}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases};$

$$\text{ii) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{\tan(x^3 + y^5)}{x^2 + y^4}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases} ;$$

$$\text{iii) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{\sqrt{x^4 + y^2}}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases} ;$$

$$\text{iv) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy}{x^2 + 3y^2}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases} ;$$

$$\text{v) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^4}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases} ;$$

$$\text{vi) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases} ;$$

$$\text{vii) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases} ;$$

$$\text{viii) } f(x, y) = \begin{cases} (1 + xy)^{\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}}, & \text{dacă } x > 0 \text{ și } y > 0 \\ \alpha, & \text{dacă } x = 0 \text{ sau } y = 0 \end{cases} .$$