GHID PENTRU PREGĂTIREA EXAMENULUI DE ALGEBRĂ ŞI GEOMETRIE
PARTEA I
UPT-AC (CTI)

LECTOR UNIV. DR. NICOLAE LUPA

1. Matricea permutare

1.1. Breviar teoretic.

Definiţia 1.1. Fie

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix} \in S_n$$

o permutare de ordinul n. *Matricea permutare* asociată permutării π este o matrice pătratică de ordinul n, notată cu P_π, ce se obţine din matricea unitate I_n prin permutarea liniilor acesteia conform permutării π, adică prima linie a matricei P_π este linia $\pi(1)$ a matricei unitate, a doua linie a matricei P_π este linia $\pi(2)$ a matricei unitate etc.

Exemplul 1.1. Matricea permutare asociată permutării $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ este

$$P_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarca 1.1. Dacă $P_\pi = (p_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, atunci elementele matricei P_π se pot scrie astfel:

$$p_{ij} = \delta_{\pi(i)j} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \pi(i) = j, \\ 0, & \text{dacă } \pi(i) \neq j. \end{cases}$$

Propoziţia 1.1. Matricea permutare asociată unei permutări $\pi \in S_n$ verifică următoarele proprietăţi importante:

(1) P_π este inversabilă şi $P_\pi^{-1} = P_\pi^t$, de unde rezultă că P_π este o matrice ortogonală (o matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este ortogonală dacă $A^tA = I_n$);

(2) Dacă $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, atunci
- matricea $P_\pi A$ se obţine din A permutând liniile acesteia (notate cu $A[i,:]$, $i = \overline{1,n}$) după regula dată de π,

$$\text{dacă } A = \begin{bmatrix} A[1,:] \\ A[2,:] \\ \vdots \\ A[n,:] \end{bmatrix}, \text{ atunci } P_\pi A = \begin{bmatrix} A[\pi(1),:] \\ A[\pi(2),:] \\ \vdots \\ A[\pi(n),:] \end{bmatrix},$$

adică prima linie a matricei $P_\pi A$ va fi linia $\pi(1)$ a matricei A etc.

- matricea AP_π^t se obţine din A permutând coloanele acesteia (notate cu $A[:,j]$, $j=\overline{1,n}$) după regula dată de π, adică dacă

$$A = [A[:,1]|A[:,2]|\cdots|A[:,n]]\,,$$

atunci $AP_\pi^t = [A[:,\pi(1)]|A[:,\pi(2)]|\cdots|A[:,\pi(n)]]$, coloana 1 a matricei AP_π^t va fi coloana $\pi(1)$ a matricei A, coloana 2 a matricei AP_π^t va fi coloana $\pi(2)$ a matricei A etc.

1.2. **Probleme propuse.**

Exerciţiul 1.1. Se dă matricea permutare

$$P_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Să se determine permutarea π ce defineşte matricea P_π. Explicaţi!
b) Determinaţi P_π^{-1} (aplicând o proprietate a matricelor permutare).

Exerciţiul 1.2. Fie $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Dorim să permutăm coloanele lui A astfel încât fiecare coloană trece în următoarea, iar coloana 4 în coloana 1. Să se scrie matriceal operaţia de care este nevoie pentru a obţine această modificare.

Exerciţiul 1.3. Se dă matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

şi permutarea $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Fără a efectua înmulţirile, să se scrie $P_\pi A$ şi AP_π^T enunţând proprietăţile utilizate.

Exerciţiul 1.4. Să se arate că inversa unei matrice permutare $P_\pi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este o matrice permutare. Care este permutarea corespunzătoare matricei P_π^{-1}?
Indicaţie: Se arată că $P_\pi^{-1} = P_{\pi^{-1}}$.

Exerciţiul 1.5. Dacă $P_\pi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este o matrice permutare şi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ce efect are înmulţirea AP_π? Justificaţi!
Indicaţie: $AP_\pi = A\left(P_\pi^t\right)^t = A\left(P_\pi^{-1}\right)^t = A\left(P_{\pi^{-1}}\right)^t$.

Exerciţiul 1.6. Să se arate că produsul a două matrice permutare $P_\pi, P_\sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este o matrice permutare. Care este permutarea corespunzătoare matricei $P_\pi P_\sigma$?
Indicaţie: Se arată că $P_\pi P_\sigma = P_{\sigma\pi}$.

Exerciţiul 1.7. Să se arate că singurele valori posibile ale determinantului unei matrice permutare sunt -1 şi 1.

Exerciţiul 1.8. Fie $P_\pi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice permutare şi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. În ce relaţie este rangul lui A cu rangul lui $P_\pi A$? Justificaţi!

2. Forma scară/forma scară redusă (pe linie) a unei matrice

Exercițiul 2.1. Precizați, justificând răspunsul, care dintre matricele următoare sunt scrise sub formă scară/formă scară redusă:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Răspuns: a) Nu este formă scară; b) Nu este formă scară; c) Este formă scară, dar nu este formă scară redusă; d) Este formă scară redusă.

Exercițiul 2.2. Să se determine rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 7 & 10 & 13 \\ 5 & 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}$, aducând matricea A la formă scară, S_A (metoda lui Gauss).
Răspuns: $\text{rang}(A) = \text{rang}(S_A) =$ numărul de pivoți ai lui $S_A = 2$.

Exercițiul 2.3. Forma scară redusă a matricei extinse $\overline{A} = [A|b]$ a unui sistem liniar neomogen $Ax = b$ este:

$$\text{a) } S^0_{\overline{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{b) } S^0_{\overline{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{c) } S^0_{\overline{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{d) } S^0_{\overline{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Să se verifice dacă sistemul $Ax = b$ este compatibil determinat/nedeterminat sau incompatibil şi dacă este compatibil, să se determine mulțimea soluțiilor sale.
Răspuns: a) Cum $\text{rang}(A) = \text{rang}(S^0_A) =$ numărul de pivoți ai lui $S^0_A = 2$ şi $\text{rang}(\overline{A}) = \text{rang}(S^0_{\overline{A}}) = 2$, rezultă că $\text{rang}(A) = \text{rang}(\overline{A})$, deci sistemul $Ax = b$ este compatibil nedeterminat (este nedeterminat, căci $\text{rang}(A) = 2 < 3 =$numărul de necunoscute). Necunoscutele principale sunt x_1, x_3 (pivoții se află pe coloanele 1 şi 3), iar $x_2 = a$, $a \in \mathbb{R}$, este necunoscută secundară. Mulțimea soluțiilor sistemului este $S = \{(4, a, 2) : a \in \mathbb{R}\}$. b) Sistem incompatibil ($\text{rang}(A) = 2 \neq 3 = \text{rang}(\overline{A})$), deci $S = \emptyset$. c) Sistem compatibil (determinat), $S = \{(1, 3, 2)\}$. d) Sistem compatibil (nedeterminat), $S = \{(a, 1 - 2a, 2, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

Exercițiul 2.4. Să se transforme matricea extinsă $\overline{A} = [A|b]$ a sistemului $Ax = b$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

în forma scară redusă, să se precizeze rangul matricei A şi al matricei extinse $\overline{A}$. Să se studieze dacă sistemul $Ax = b$ este compatibil, iar în caz afirmativ, să se

determine mulţimea soluţiilor sale.
Răspuns: $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\overline{A}) = 3$, sistemul este compatibil, iar mulţimea soluţiilor sale este $S = \{(-a, a, 0, 1) : a \in \mathbb{R}\}$.

Exerciţiul 2.5. Determinaţi mulţimea soluţiilor sistemului liniar omogen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

aducând matricea A a sistemului la forma scară redusă, S_A^0 (metoda Gauss-Jordan).
Răspuns: Forma scară redusă a matricei A este

$$S_A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deci mulţimea soluţiilor sistemului este $S = \{(-2a, a, 0, 0) : a \in \mathbb{R}\}$.

Exerciţiul 2.6. Folosind metoda Gauss-Jordan, să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}.$$

Răspuns: $S = \{(6 - 5a, 4 - 2a, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

O matrice pătratică $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este inversabilă dacă şi numai dacă forma sa scară redusă coincide cu matricea unitate, adică $S_A^0 = I_n$. În cazul în care matricea A este inversabilă, inversa sa se poate determina astfel:

$$[A|I_n] \longrightarrow [S_A^0 = I_n|A^{-1}].$$

Exerciţiul 2.7. Se dă matricea

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Utilizând forma scară redusă a matricei A, deduceţi dacă A este inversabilă, iar în caz afirmativ, să se determine inversa sa.

Exerciţiul 2.8. Să se dea un exemplu de $S_{\overline{A}}^0$ pentru un sistem de ecuaţii liniare incompatibil de tip 4×4.

Exerciţiul 2.9. O formă scară a matricei extinse $\overline{A}$ a sistemului $Ax = b$ are ultima linie de forma $[0\ 0\ \ldots\ 0|c]$, $c \in \mathbb{R}^*$. Cum este sistemul $Ax = b$, compatibil sau incompatibil? Explicaţi!

Exerciţiul 2.10. Fie $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Ştiind că pivoţii formei scară redusă S_A^0 se află pe coloanele 1 şi 2 şi că

$$A \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

să se determine forma scară redusă a matricei A.

Exerciţiul 2.11. O matrice $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ are determinantul $det(A) = 3$. Câţi pivoţi are S_A? Explicaţi!

Exerciţiul 2.12. Să se arate că dacă o matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este inversabilă, atunci forma sa scară/forma sa scară redusă este inversabilă.

3. Sisteme de vectori liniar independenţi, sisteme de generatori, baze într-un spaţiu vectorial. Coordonatele unui vector într-o bază. Matricea de trecere de la o bază la alta

Definiţia 3.1. Fie V un spaţiu vectorial peste un corp (comutativ) K. O mulţime

$$S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset V,$$

formată din m vectori din V, se numeşte **sistem liniar independent** (caz în care spunem că vectorii $v_1, v_2, \dots, v_m$ sunt liniar independenţi), dacă pentru orice scalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ are loc:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0.$$

În caz contrar, vectorii $v_1, v_2, \dots, v_m$ se numesc liniar dependenţi, adică cel puţin unul dintre aceşti vectori se poate scrie în funcţie de ceilalţi vectori.

Criteriul practic în $\mathbb{R}^n$

Un sistem de vectori $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ este liniar independent dacă şi numai dacă rangul matricei $A = [v_1|v_2|\cdots|v_m]$, **obţinută punând vectorii** $v_1, v_2, \dots, v_m$ **pe coloană**, este egal cu numărul de vectori ai lui S, adică

$$\text{rang}(A) = \text{numărul de vectori ai lui } S = \text{numărul de coloane ale lui } A = m.$$

Dacă între coloanele formei scară redusă S_A^0 se stabilesc anumite relaţii de dependenţă, atunci aceste relaţii sunt păstrate şi de coloanele matricei A, adică de vectorii sistemului S.

Exerciţiul 3.1. Se dau următoarele sisteme de vectori:

a) $S = \{v_1 = (2, -1), v_2 = (1, 1), v_3 = (3, -3), v_4 = (-1, -4)\} \subset \mathbb{R}^2$;

b) $S = \{v_1 = (-1, 1, -2), v_2 = (2, 0, 1), v_3 = (0, 2, -3)\} \subset \mathbb{R}^3$;

c) $S = \{p_1 = 2X^2 - 1, p_2 = X + 2, p_3 = X^2 + X - 1\} \subset \mathbb{R}_2[X]$.

Să se studieze dacă aceste sisteme sunt liniar independente. În cazul în care S este un sistem liniar dependent, să se determine relaţia (relaţiile) de dependenţă dintre vectorii săi.

Exerciţiul 3.2. Să se arate că orice sistem S format din p vectori din $\mathbb{R}^n$ cu $p > n$ este liniar dependent. Care este numărul maxim de vectori liniar independenţi ai lui S? Justificaţi!

Exerciţiul 3.3. Vectorii $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^5$ sunt liniar independenţi. Cum sunt vectorii v_1, v_2, v_3, liniar dependenţi sau independenţi? Justificaţi! Dar vectorii $0, v_1, v_2, v_3, v_4$?

Exerciţiul 3.4. Fie $u_1, u_2, u_3 \in V$ trei vectori liniar independenţi într-un spaţiu vectorial V peste corpul numerelor reale, $\mathbb{R}$. Să se verifice dacă vectorii:

a) $w_1 = u_1 + u_2,\ w_2 = u_1 - u_2,\ w_3 = u_1 + u_2 + u_3$
b) $w_1 = u_2,\ w_2 = u_1 - u_3,\ w_3 = u_1 + u_2 - u_3$

sunt liniar independenţi.
Răspuns: a) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 = 0,$$

adică

$$\alpha_1(u_1 + u_2) + \alpha_2(u_1 - u_2) + \alpha_3(u_1 + u_2 + u_3) = 0,$$

ceea ce este echivalent cu

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)u_1 + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)u_2 + \alpha_3 u_3 = 0.$$

Cum u_1, u_2, u_3 sunt vectori liniar independenţi, rezultă

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}.$$

Rezolvând sistemul liniar omogen de mai sus, se obţine

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

deci w_1, w_2, w_3 sunt vectori liniar independenţi.
b) w_1, w_2, w_3 sunt vectori liniar dependenţi.

Definiţia 3.2. Fie V un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$. O mulţime

$$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset V$$

se numeşte **sistem de generatori** pentru V dacă pentru orice vector $v \in V$ există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ astfel încât

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m.$$

Definiţia 3.3. Un sistem ordonat de vectori $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ se numeşte **bază** în V dacă B este atât sistem liniar independent, cât şi sistem de generatori pentru V.

Se poate arăta că numărul de vectori ai unei baze într-un spaţiu vectorial V este unic determinat, se numeşte **dimensiunea** spaţiului vectorial V şi se notează cu $\dim(V)$.

Orice sistem liniar independent maximal într-un spaţiu vectorial V formează o bază în V.

Orice mulţime $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ ce conţine n vectori liniar independenţi din $\mathbb{R}^n$ formează o bază în $\mathbb{R}^n$.

Baza canonică din $\mathbb{R}^n$ este

$$B_c = \left\{e_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0)^T, \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)^T\right\}.$$

Criteriul practic în $\mathbb{R}^n$

Un sistem de vectori $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ este o bază în $\mathbb{R}^n$ dacă şi numai dacă determinantul matricei $A = [v_1|v_2|\cdots|v_m]$, obţinută punând vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pe coloană, este nenul, adică $\det(A) \neq 0$.

Dacă $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ este o bază în spaţiul vectorial V peste corpul $\mathbb{K}$, atunci pentru orice vector $v \in V$ există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, **unic determinaţi**, astfel încât

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ se numesc **coordonatele vectorului** v **în baza** B. Notăm

$$v_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

De exemplu, dacă $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ este o bază în $\mathbb{R}^3$, atunci coordonatele vectorului $v = 2v_1 - v_2 + 5v_3$ în baza B sunt date de vectorul coloană

$$v_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Coordonatele vectorului $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ în baza canonică sunt date de vectorul coloană

$$v_{B_c} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

căci

$$\begin{aligned} v &= (x_1, 0, 0, \ldots, 0, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0, 0) + \cdots + (0, 0, 0, \ldots, 0, x_n) \\ &= x_1(1, 0, 0, \ldots, 0, 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0, 0) + \cdots + x_n(0, 0, 0, \ldots, 0, 1) \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n. \end{aligned}$$

Exerciţiul 3.5. Se dă sistemul de vectori $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_7\} \subset \mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R}^{4\times 1}$ (putem privi vectorii din $\mathbb{R}^4$ ca fiind vectori coloană). Dacă matricea ale cărei coloane sunt vectorii sistemului S, adică $A = [v_1|v_2|v_3|v_4|v_5|v_6|v_7]$, are forma scară redusă

$$S_A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

să se arate că vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_7$ sunt liniar dependenţi şi să se determine relaţiile de dependenţă dintre ei. Determinaţi un subsistem maximal de vectori liniar independenţi al lui S. Este acesta o bază în $\mathbb{R}^4$? Justificaţi!

Exerciţiul 3.6. Se dau vectorii $v_1 = (-2, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (-3, 0, 1)$.

a) Să se arate că $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ este un sistem liniar dependent şi să se determine relaţia de dependenţă dintre vectorii săi.
b) Să se extragă un subsistem liniar independent maximal al lui S şi apoi să se completeze acest sistem liniar independent la o bază în $\mathbb{R}^3$. Să se determine coordonatele vectorilor $v = (1, 1, 1)$ şi $w = 2v_1 - v_2$ în baza găsită.

Răspuns: a) Se aduce matricea $A = [v_1|v_2|v_3]$ la forma scară redusă, de unde se obţine $v_3 = v_1 - v_2$. b) $S_{max} = \{v_1, v_2\}$. Se observă că $B = \{v_1, v_2, v\}$ este o bază în $\mathbb{R}^3$, deci $v_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pe de altă parte, $w_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exerciţiul 3.7. Să se extragă o bază în $\mathbb{R}^3$ din următorul sistem de vectori:

$$S = \{v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (0, 1, 0),\ v_3 = (-1, 0, -1),\ v_4 = (1, 2, 1),\ v_5 = (1, 4, 2)\}.$$

Răspuns: Se aduce matricea $A = [v_1|v_2|v_3|v_4]$ la forma scară redusă, de unde se obţine că o bază în $\mathbb{R}^3$ este $B = \{v_1, v_2, v_4\}$ (pivoţii formei scară redusă se află pe coloanele 1, 2 şi 4).

Exerciţiul 3.8. Care sunt coordonatele vectorului $v = (23, 17, 49)$ în baza canonică

$$B_c = \{e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)\}\,?$$

Dar în bazele

$$B_1 = \{e_2, e_1, e_3\},$$

respectiv

$$B_2 = \{v_1 = (17, 23, 49),\ v_2 = (49, 10, 13),\ v_3 = (-23, -17, -49)\}\,?$$

Exerciţiul 3.9. Să se arate că

$$B = \{v_1 = (1, 2, 1),\ v_2 = (0, 1, 1),\ v_3 = (1, 1, -1)\}$$

este o bază în $\mathbb{R}^3$ şi să se determine coordonatele vectorului $v = (5, 7, 0)$ în baza B, respectiv coordonatele vectorului $w = 2v_1 - v_2 + v_3$ în baza canonică din $\mathbb{R}^3$.

Răspuns: Se obţine $v_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, respectiv $w_{B_c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Matricea de trecere dintre două baze

Considerăm $B_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ şi $B_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ două baze în V_n (V_n este un spaţiu vectorial peste un corp $\mathbb{K}$ de dimensiune n). Exprimăm vectorii bazei B_2 în funcţie de cei ai bazei B_1:

$$\begin{cases} w_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n, \\ w_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{2n}v_n, \\ \quad \vdots \\ w_n = a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \dots + a_{nn}v_n. \end{cases}$$

Matricea pătratică

$$T_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n},$$

obţinută punând pe coloane coordonatele vectorilor bazei B_2 în baza B_1, se numeşte **matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2**.

De exemplu, matricea de trecere de la baza canonică B_c din $\mathbb{R}^3$ la baza

$$B = \{v_1 = (1,2,1),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (1,1,-1)\}$$

este

$$T_{B_cB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proprietăţi

(1) Matricea de trecere dintre două baze este inversabilă şi

$$(T_{B_1B_2})^{-1} = T_{B_2B_1}.$$

În caz particular, se obţine

$$T_{BB_c} = (T_{B_cB})^{-1},$$

matricea de trecere de la baza canonică B_c la orice altă bază B putând fi scrisă direct (vectorii bazei B sunt coloanele matricei de trecere T_{B_cB}).

(2) Are loc formula

$$T_{B_1B_2}\, T_{B_2B_3} = T_{B_1B_3}.$$

În caz particular, avem

$$T_{B_1B_2} = T_{B_1B_c}\, T_{B_cB_2} = (T_{B_cB_1})^{-1}\, T_{B_cB_2}.$$

(3) Coordonatele unui vector v într-o bază B_1 pot fi exprimate în funcţie de coordonatele vectorului v într-o altă bază B_2 (bine aleasă) astfel:

$$v_{B_1} = T_{B_1B_2}\, v_{B_2}.$$

Exerciţiul 3.10. Fie $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ o bază în $\mathbb{R}^3$ şi $B_2 = \{v_3, v_1, v_2\}$. Să se determine matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2, $T_{B_1B_2}$, respectiv matricea de trecere de la baza B_2 la baza B_1, $T_{B_2B_1}$.

Răspuns: Din exprimarea vectorilor bazei B_2 în funcţie de cei ai bazei B_1, se obţine

$$T_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte, avem

$$T_{B_2B_1} = (T_{B_1B_2})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matricea $T_{B_2B_1}$ se poate scrie şi direct, exprimând vectorii bazei B_1 în funcţie de cei ai bazei B_2.

Exerciţiul 3.11. Fie $B_1 = \{v_1, v_2\}$ şi $B_2 = \{w_1, w_2\}$ două baze în $\mathbb{R}^2$. Dacă matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2 este

$$T_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

şi $v = 5v_1 - 4v_2$, să se determine coordonatele vectorului v în baza B_1, respectiv în baza B_2. Dacă

a) $v_1 = (2, 3),\ v_2 = (0, 1)$, să se determine vectorii bazei B_2 şi coordonatele vectorului v în baza canonică din $\mathbb{R}^2$;

b) $w_1 = (2, 3),\ w_2 = (0, 1)$, să se determine vectorii bazei B_1.

Exerciţiul 3.12. Fie B_1, B_2 două baze în $\mathbb{R}^n$ şi $T_{B_1B_2}$ matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2. Sunt coloanele matricei $T_{B_1B_2}$ vectori liniar independenţi? Justificaţi!

Exerciţiul 3.13. Mulţimea matricelor de tip 2×3, notată cu $\mathbb{R}^{2\times 3}$, este un spaţiu vectorial real. Care este baza canonică în acest spaţiu vectorial? Ce dimensiune are $\mathbb{R}^{2\times 3}$?

Exerciţiul 3.14. Un exemplu de spaţiu vectorial folosit pentru generarea curbelor în *computer graphics* este spaţiul vectorial real al funcţiilor polinomiale de grad cel mult n, definite pe un interval real $I \subset \mathbb{R}$:

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} \,|\, f(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0,\ a_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{0, n}\}.$$

Operaţiile relativ la care această mulţime are structură de spaţiu vectorial real sunt adunarea uzuală a polinoamelor şi înmulţirea unui polinom cu un număr real.

a) Să se arate că $B_c = \{t^n, t^{n-1}, \ldots, t, 1\}$ este o bază în $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, numită baza canonică în acest spaţiu vectorial. Ce dimensiune are $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$? Justificaţi!

b) Arătaţi că sistemul de funcţii polinomiale definite pe intervalul $I = [0, 1]$, numite *polinoamele Bernstein de gradul* 2,

$$B = \{B_k^2(t) = C_2^k t^k (1 - t)^{2-k},\ k = 0, 1, 2\},$$

este o bază în spaţiul vectorial real al funcţiilor polinomiale definite pe $[0, 1]$, de grad cel mult 2. Să se determine coordonatele polinomului

$$p(t) = 2t^2 - t + 1,\ t \in [0, 1]$$

în această bază (polinoamele Bernstein au fost folosite de Bézier, un inginer la Renault, pentru a genera curbe ce descriu alura capotelor de maşini, numite curbe Bézier).

4. Subspaţii vectoriale

4.1. **Breviar teoretic.** Fie V un spaţiu vectorial peste un corp (comutativ) $\mathbb{K}$.

Definiţia 4.1. O submulţime nevidă U a lui V se numeşte *subspaţiu vectorial* în V (al lui V) şi notăm $U \leq V$, dacă sunt verificate următoarele condiţii:
(1) $\forall\, v_1, v_2 \in U \implies v_1 + v_2 \in U$;
(2) $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \forall\, v \in U \implies \alpha\, v \in U$.
Relaţiile (1)-(2) de mai sus sunt echivalente cu relaţia:

$$\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K},\ \forall\, v_1, v_2 \in U \implies \alpha_1\, v_1 + \alpha_2\, v_2 \in U.$$

Propoziţia 4.1. *Orice subspaţiu vectorial al unui spaţiu vectorial peste un corp $\mathbb{K}$ este la rândul său un spaţiu vectorial peste $\mathbb{K}$.*

Remarca 4.1. Orice subspaţiu vectorial conţine vectorul nul.

Fie $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Mulţimea

$$span(S) = \{v \in V\ :\ \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ cu } v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n\}$$

se numeşte *subspaţiul generat de S*.
Se poate arăta că $span(S)$ este un subspaţiu vectorial al lui V.

S este un sistem de generatori pentru $span(S)$. În plus, orice subsistem liniar independent maximal al lui S este o bază în $span(S)$.

Propoziţia 4.2. Fie $A = [v_1|v_2|\cdots|v_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Următoarele mulţimi sunt subspaţii vectoriale în spaţiile vectoriale precizate:
- $Null(A) = \{X \in \mathbb{R}^{n\times 1}\ :\ AX = 0\} \leq \mathbb{R}^{n\times 1} \simeq \mathbb{R}^n$;
- $col(A) = span\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \leq \mathbb{R}^{m\times 1} \simeq \mathbb{R}^m$.

Mai mult, are loc:

$$dim(Null(A)) = n - rang(A),\ dim(col(A)) = rang(A),$$

unde n reprezintă numărul de coloane ale matricei A.

4.2. **Probleme propuse.**

Exerciţiul 4.1. Să se verifice dacă mulţimile de mai jos sunt subspaţii vectoriale în spaţiile vectoriale corespunzătoare:
a) $U = \{(a-b, a+b, 1) \in \mathbb{R}^3 :\ a, b \in \mathbb{R}\}$;
b) $U = \{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^{n\times 1} :\ AX = b\}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$.

Exerciţiul 4.2. Să se arate (prin două metode) că următoarele mulţimi sunt subspaţii vectoriale în spaţiile vectoriale corespunzătoare şi apoi să se determine o bază în aceste subspaţii:
a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2x - 3y + z = 0\}$;
b) $U = \{(2a-b, a+b, 0) \in \mathbb{R}^3 :\ a, b \in \mathbb{R}\}$;
c) $U = \{p = aX^2 + bX - (a+b) \in \mathbb{R}_2[X] :\ a, b \in \mathbb{R}\}$.

Indicaţie: Folosind definiţia unui subspaţiu vectorial, se poate arăta că mulţimile de mai sus sunt subspaţii vectoriale în spaţiile vectoriale corespunzătoare. O altă metodă se obţine ţinând cont de următoarele observaţii:
a) $U \simeq Null(A) \leq \mathbb{R}^{3\times 1} \simeq \mathbb{R}^3$, unde $A = [2\ -3\ 1] \in \mathbb{R}^{1\times 3}$;

b) $U = span\{v_1 = (2,1,0),\ v_2 = (-1,1,0)\} \le \mathbb{R}^3$;
c) $U = span\{p_1 = X^2 - 1,\ p_2 = X - 1\} \le \mathbb{R}_2[X]$.

Exerciţiul 4.3. Să se arate că mulţimea $U = \{(b, a^2 - b) \in \mathbb{R}^2 :\ a, b \in \mathbb{R}\}$ nu este un subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^2$.
Indicaţie: Se arată că vectorul $v = (1,0) \in U$, dar vectorul $-v \notin U$.

Exerciţiul 4.4. Folosind definiţia, să se arate că mulţimea

$$U = \{(a, a^2 - b, 0) \in \mathbb{R}^3 :\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

este un subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^3$ şi să se precizeze dimensiunea sa, determinând o bază în acest subspaţiu vectorial.

Exerciţiul 4.5. Să se arate că dacă U_1 şi U_2 sunt subspaţii vectoriale ale unui spaţiu vectorial V peste corpul $\mathbb{K}$, atunci $U_1 \cap U_2$ este un subspaţiu vectorial în V.

Exerciţiul 4.6. Să se dea un exemplu de două subspaţii vectoriale U_1 şi U_2 ale unui spaţiu vectorial V cu proprietatea că $U_1 \cup U_2$ nu este subspaţiu vectorial în V.

Exerciţiul 4.7. Fie $U_1, U_2 \subset V$ două subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial V peste corpul $\mathbb{K}$. Să se arate că $U_1 \cup U_2$ este subspaţiu vectorial în V dacă şi numai dacă $U_1 \subset U_2$ sau $U_2 \subset U_1$.

Exerciţiul 4.8. Să se arate că dacă U_1 şi U_2 sunt două subspaţii vectoriale ale unui spaţiu vectorial V peste corpul $\mathbb{K}$, atunci $U_1 \setminus U_2$ nu este un subspaţiu vectorial în V.
Indicaţie: Vectorul nul aparţine oricărui subspaţiu vectorial.

Exerciţiul 4.9. Se dau vectorii:
a) $v_1 = (1,-1,1)^T$, $v_2 = (0,1,1)^T$, $v_3 = (1,0,-1)^T$;
b) $v_1 = (1,-1,1)^T$, $v_2 = (0,1,1)^T$, $v_3 = (1,0,2)^T$;
c) $v_1 = (2,-2,2)^T$, $v_2 = (-1,1,-1)^T$, $v_3 = (1,-1,1)^T$.

Să se determine o bază în $U = span\{v_1, v_2, v_3\}$, să se precizeze dimensiunea acestui subspaţiu vectorial. Ce reprezintă din punct de vedere geometric acest subspaţiu vectorial?
Răspuns: a) O bază în U este $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ şi $\dim(U) = 3$; b) $B = \{v_1, v_2\}$, $\dim(U) = 2$; c) $B = \{v_1\}$, $\dim(U) = 1$.

Exerciţiul 4.10. Fie v_1, v_2 doi vectori liniar independenţi în $\mathbb{R}^4$. Determinaţi o bază în $span\{v_1, v_2, v_1 + v_2, 2v_1 - 3v_2\}$, respectiv în $span\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + 2v_2\}$ şi apoi aflaţi în fiecare din cele două cazuri coordonatele vectorilor v_1, $v_1 + v_2$, $v_1 + 2v_2$ în baza găsită.

Exerciţiul 4.11. O matrice $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$, $A = [v_1|v_2|v_3|v_4|v_5]$, are forma scară redusă:

$$S_A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $Null(A)$, o bază în $Null(A)$ şi respectiv una în $col(A)$. Precizaţi dimensiunea celor două subspaţii vectoriale. Baza din $Null(A)$ este constituită dintr-un subsistem de vectori al sistemului $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$? Dar baza din $col(A)$? În ce spaţiu vectorial este $Null(A)$ un subspaţiu vectorial? Dar $col(A)$?

Exerciţiul 4.12. Se dă matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cât este dimensiunea subspaţiului $Null(A)$, respectiv a subspaţiului $col(A)$? Să se determine $Null(A)$, respectiv $col(A)$.

5. Produsul scalar. Baze ortonormate Proiecţia unui vector pe un subspaţiu vectorial Procedeul Gram-Schmidt

5.1. **Breviar teoretic.** Fie V un spaţiu vectorial real ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Definiţia 5.1. O funcţie $F : V \times V \to \mathbb{R}$ se numeşte *produs scalar* (real) în V dacă verifică următoarele proprietăţi:

(PS1) $F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, v) = \alpha_1 F(v_1, v) + \alpha_2 F(v_2, v)$, $\forall\, v_1, v_2, v \in V,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$;
(PS2) $F(v_1, v_2) = F(v_2, v_1)$, pentru orice $v_1, v_2 \in V$;
(PS3) $F(v, v) \geq 0$, pentru orice $v \in V$; $F(v, v) = 0$ dacă şi numai dacă $v = 0$.

Numărul real $F(v_1, v_2)$ se numeşte *produsul scalar* al vectorilor v_1 şi v_2. De obicei, produsul scalar al vectorilor v_1 şi v_2 se notează cu $< v_1, v_2 >$.

Definiţia 5.2. Dacă V este un spaţiu vectorial real finit-dimensional şi $< \cdot, \cdot >$ este un produs scalar în V, atunci perechea $(V, < \cdot, \cdot >)$ se numeşte *spaţiu vectorial euclidian.*

Orice produs scalar în V determină o normă în V, definită prin

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >},\ \text{pentru } v \in V. \tag{1}$$

Numărul real nenegativ $\|v\| \geq 0$ se numeşte *norma* vectorului v. *Distanţa* dintre doi vectori $v, w \in V$ se defineşte prin:

$$d(v, w) = \|v - w\|. \tag{2}$$

Propoziţia 5.1 (Proprietăţile normei)**.** Funcţia $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ definită de relaţia (1) verifică următoarele proprietăţi:

(N1) $\|v\| = 0$ dacă şi numai dacă $v = 0$;
(N2) $\|\alpha\, v\| = |\alpha|\, \|v\|$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $v \in V$;
(N3) $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$, pentru orice $v_1, v_2 \in V$.

Orice funcţie $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ care verifică proprietăţile (N1)-(N3) se numeşte *normă* în V.

Exemplul 5.1 (Produsul scalar standard în $\mathbb{R}^n$)**.** Fie $v_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $v_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ doi vectori din $\mathbb{R}^n$. *Produsul scalar standard* al celor doi vectori se defineşte astfel:

$$< v_1, v_2 >= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

iar norma corespunzătoare este

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}, \text{ pentru } v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

În acest caz, distanţa dintre vectorii v_1 şi v_2 este

$$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Exemplul 5.2. Să se arate că funcţia $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(v_1, v_2) = x_1x_2 + 4y_1y_2, \text{ unde } v_1 = (x_1, y_1),\ v_2 = (x_2, y_2),$$

este un produs scalar în $\mathbb{R}^2$.
Soluţie. Fie $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$, $v = (x, y)$ trei vectori din $\mathbb{R}^2$ şi $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Avem

$$\begin{aligned} F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, v) &= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)x + 4(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)y \\ &= \alpha_1(x_1 x + 4y_1 y) + \alpha_2(x_2 x + 4y_2 y) \\ &= \alpha_1 F(v_1, v) + \alpha_2 F(v_2, v), \end{aligned}$$

ceea ce implică relaţia (PS1) din definiţia produsului scalar. Proprietatea (PS2) rezultă imediat din comutativitatea înmulţirii numerelor reale,

$$F(v_1, v_2) = x_1x_2 + 4y_1y_2 = x_2x_1 + 4y_2y_1 = F(v_2, v_1).$$

De asemenea, are loc

$$F(v, v) = x^2 + 4y^2 \geq 0,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $x = y = 0$, adică $v = (0, 0)$.

$\square$

Exemplul 5.3. Fie $\mathcal{F}$ spaţiul vectorial al funcţiilor $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue pe intervalul $[a, b]$. Aplicaţia $F : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$F(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

este un produs scalar în $\mathcal{F}$.
Soluţie. Fie $f_1, f_2, g \in \mathcal{F}$ şi $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Folosind liniaritatea integralei definite, are loc

$$\begin{aligned} F(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) &= \int_a^b [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)]g(x)dx \\ &= \alpha_1 \int_a^b f_1(x)g(x)dx + \alpha_2 \int_a^b f_2(x)g(x)dx \\ &= \alpha_1 F(f_1, g) + \alpha_2 F(f_2, g), \end{aligned}$$

ceea ce ne conduce la relaţia (PS1). Proprietatea (PS2) rezultă din

$$F(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = \int_a^b f_2(x)f_1(x)dx = F(f_2, f_1).$$

Din monotonia integralei, se obţine

$$F(f, f) = \int_a^b f^2(x)dx \geq 0.$$

Dacă $f = 0$, atunci rezultă imediat că $F(f,f) = \int_a^b f^2(x)dx = 0$. Rămâne să arătăm că dacă $F(f,f) = 0$, atunci $f = 0$. Dacă presupunem că $f \neq 0$, atunci există $x_0 \in (a,b)$ astfel încât $f(x_0) \neq 0$. Din continuitatea funcţiei f rezultă că $f \neq 0$ pe un interval $[a_0, b_0] \subset [a,b]$, ceea ce implică $f^2 > 0$ pe $[a_0, b_0]$. Folosind din nou monotonia integralei, rezultă că $\int_a^b f^2(x)dx > 0$, ceea ce contrazice $F(f,f) = 0$, deci $f = 0$.

□

Definiţia 5.3. Fie $v_1, v_2 \in V$ doi vectori **nenuli** din spaţiul vectorial V înzestrat cu produsul scalar $< \cdot, \cdot >$. Unghiul $\theta \in [0, \pi]$ dintre cei doi vectori se defineşte cu formula:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{< v_1, v_2 >}{\|v_1\|\|v_2\|}.}$$

Vectorii v_1 şi v_2 se numesc *ortogonali* dacă $< v_1, v_2 >= 0$, ceea ce implică $\theta = \pi/2$.

Remarca 5.1. Conceptul de ortogonalitate se defineşte doar pentru vectori nenuli.

Exemplul 5.4. Să se arate că funcţiile $f, g : [0, T] \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = \cos(\omega n x),\ g(x) = \sin(\omega n x),\ \text{unde } T > 0 \text{ şi } \omega = \frac{2\pi}{T},$$

sunt ortogonale în raport cu produsul scalar F considerat în Exemplul 5.3.
Soluţie. Pentru a arăta că funcţiile f şi g sunt ortogonale, trebuie să demonstrăm că $F(f,g) = 0$. Calculăm

$$\begin{aligned} F(f,g) &= \int_0^T \cos(\omega n x)\sin(\omega n x)dx \\ &= \frac{1}{\omega n}\int_0^T \sin(\omega n x)(\sin(\omega n x))' dx \\ &= \frac{1}{\omega n} \cdot \frac{\sin^2(\omega n x)}{2}\Big|_0^T \\ &= \frac{1}{2\omega n}\sin^2(2\pi n) = 0, \end{aligned}$$

ceea ce trebuia să arătăm.

□

Definiţia 5.4. Fie V un spaţiu vectorial real înzestrat cu un produs scalar $< \cdot, \cdot >$. Un sistem de vectori nenuli $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ se numeşte *sistem ortogonal* dacă oricare doi vectori distincţi sunt ortogonali, adică

$$< v_i, v_j >= 0,\ \text{pentru orice } i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j.$$

Propoziţia 5.2. *Orice sistem ortogonal de vectori este un sistem de vectori liniar independent.*

În cele ce urmează vom considera $(V_n, < \cdot, \cdot >)$ un spaţiu vectorial euclidian de dimensiune n.

Definiţia 5.5. O bază $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ din V_n se numeşte *bază ortogonală* dacă B este un sistem de vectori ortogonal. În plus, dacă norma fiecărui vector este 1, atunci B se numeşte *bază ortonormată*.

Exemplul 5.5. Baza canonică din $\mathbb{R}^n$, înzestrat cu produsul scalar standard, este o bază ortonormată.

Propoziţia 5.3. Dacă $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este o bază ortonormată în V_n şi $v \in V_n$, atunci coordonatele vectorului v în baza B sunt

$$\alpha_i =< v, v_i >,\ i = \overline{1,n},$$

adică vectorul v se scrie astfel:

$$v =< v, v_1 > v_1+ < v, v_2 > v_2 + \dots + < v, v_n > v_n.$$

Propoziţia 5.4. Dacă $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este o bază în V_n (care nu este neapărat ortonormată) şi $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n$, $w = y_1v_1 + y_2v_2 + \dots + y_nv_n$ sunt doi vectori din V_n, exprimaţi în funcţie de vectorii bazei B, atunci produsul lor scalar, $< v, w >$, se poate calcula astfel:

$$< v, w >= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

unde G este matricea

$$G = \begin{pmatrix} < v_1, v_1 > & < v_1, v_2 > & \cdots & < v_1, v_n > \\ < v_2, v_1 > & < v_2, v_2 > & \cdots & < v_2, v_n > \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ < v_n, v_1 > & < v_n, v_2 > & \cdots & < v_n, v_n > \end{pmatrix}.$$

Deoarece produsul scalar este simetric, rezultă că matricea G definită mai sus este simetrică.

Exemplul 5.6. În spaţiul vectorial euclidian $(\mathbb{R}^2, < \cdot, \cdot >)$ înzestrat cu produsul scalar standard se dă baza $B = \{v_1 = (-1, 2), v_2 = (3, 1)\}$ şi vectorii $v = 2v_1 - 3v_2$, respectiv $w = 5v_1 - v_2$. Matricea G este

$$G = \begin{pmatrix} < v_1, v_1 > & < v_1, v_2 > \\ < v_2, v_1 > & < v_2, v_2 > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Astfel, produsul scalar al celor doi vectori este

$$< v, w >= \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 97.$$

Corolarul 1. Dacă $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este o bază ortonormată în V_n şi

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n,\ w = y_1v_1 + y_2v_2 + \dots + y_nv_n$$

sunt doi vectori din V_n, atunci

$$< v, w >= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$

adică produsul scalar al celor doi vectori coincide cu produsul scalar standard al coordonatelelor vectorilor respectivi într-o bază ortonormată.

Definiţia 5.6. O matrice pătratică $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se numeşte *matrice ortogonală* dacă

$$A^tA = I_n. \tag{3}$$

Propoziţia 5.5. Dacă $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este o matrice ortogonală, atunci

$$det(A) = \pm 1,$$

deci orice matrice ortogonală este inversabilă. Mai mult, din relaţia (3) rezultă că inversa unei matrice ortogonale este chiar transpusa sa, adică dacă $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este o matrice ortogonală, atunci

$$A^{-1} = A^t. \tag{4}$$

Remarca 5.2. Condiţia (3) din definiţia matricei ortogonale este echivalentă cu relaţia:

$$AA^t = I_n. \tag{5}$$

Exemplul 5.7. Orice matrice de forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R},$$

este o matrice ortogonală. Într-adevăr, avem

$$A^tA = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Propoziţia 5.6. *O matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este ortogonală dacă şi numai dacă oricare două coloane sau oricare două linii distincte sunt ortogonale şi norma fiecărui vector coloană/linie este* 1.

Propoziţia 5.7. *Matricea de trecere dintre două baze ortonormate este o matrice ortogonală.*

Corolarul 2. Dacă B şi B' sunt două baze ortonormate în V_n, atunci are loc:

$$T_{B'B} = T^{-1}_{BB'} = T^t_{BB'}. \tag{6}$$

Definiţia 5.7 (Complementul ortogonal al unui vector)**.** Fie $v \in V_n$ un vector nenul. Mulţimea

$$v^{\perp} = \{w \in V_n : < v, w >= 0\},$$

se numeşte *complementul ortogonal* al vectorului v.

Remarca 5.3. Se poate arăta că $v^{\perp}$ este un subspaţiu vectorial în V_n.

Exemplul 5.8. Considerăm $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un vector nenul din $\mathbb{R}^n$ (înzestrat cu produsul scalar standard). Complementul ortogonal al vectorului v este

$$v^\perp = \{w = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}.$$

În particular, complementul ortogonal al vectorului $v = (1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$ este

$$v^\perp = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\} = \{(a - 2b, a, b) \in \mathbb{R}^3 : \ a, b \in \mathbb{R}\},$$

care din punct de vedere geometric reprezintă un plan ce trece prin origine.

Definiţia 5.8 (Proiecţia ortogonală a unui vector pe un subspaţiu vectorial)**.** Fie S un subspaţiu vectorial al lui V_n şi v un vector nenul din V_n. *Proiecţia ortogonală* a vectorului v pe subspaţiul S este acel vector $s \in S$ cu proprietatea

$$< v - s, s' >= 0, \text{ pentru orice } s' \in S.$$

Dacă $s \neq v$, atunci proprietatea de mai sus ne arată de fapt că vectorul $v - s$ este ortogonal pe orice vector nenul din subspaţiul S (altfel, dacă $s = v$, atunci $v - s = 0$, caz în care nu se defineşte conceptul de ortogonalitate). În particular, dacă $s' = s$, atunci $< v - s, s >= 0$, adică vectorii $v - s$ şi s sunt ortogonali.

Remarca 5.4. Dacă $v \in S$, atunci $s = v$, adică proiecţia unui vector dintr-un subspaţiu vectorial pe acel subspaţiu coincide cu vectorul respectiv.

Remarca 5.5. Se poate demonstra că proiecţia unui vector v pe un subspaţiu vectorial S este unică şi o vom nota cu $pr_S v$, adică $s = pr_S v$. Deci, orice vector $v \in V_n \setminus S$ se poate scrie în mod unic ca suma a doi vectori ortogonali, unul din S şi celălalt ortogonal pe S:

$$v = s + (v - s), \text{ unde } s = pr_S v \in S \text{ şi } v - s \perp S.$$

Definiţia 5.9. *Proiecţia ortogonală* a vectorului v pe un vector nenul $w \in V_n$ se notează cu $pr_w v$ şi se defineşte ca fiind proiecţia ortogonală a vectorului v pe $span\{w\}$, adică

$$\boxed{pr_w v = pr_{span\{w\}} v.}$$

Propoziţia 5.8. Are loc:

$$\boxed{pr_w v = \frac{< v, w >}{< w, w >} w. \qquad (7)}$$

Remarca 5.6. Dacă $w \in V_n$ este un vector unitar (un vector de normă 1), atunci

$$pr_w v =< v, w > w.$$

Propoziţia 5.9. Dacă $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ este o **bază ortonormată** în S, atunci are loc

$$\boxed{\begin{aligned} pr_S v &= pr_{v_1} v + pr_{v_2} v + \cdots + pr_{v_p} v && (8) \\ &=< v, v_1 > v_1+ < v, v_2 > v_2 + \cdots + < v, v_p > v_p. && (9) \end{aligned}}$$

Propoziţia precedentă ne dă un algoritm de determinare a proiecţiei unui vector v pe un subspaţiu vectorial S:

(1) Se determină o bază în S.
(2) Dacă baza găsită este ortogonală, se împarte fiecare vector al bazei la norma sa. Dacă baza găsită nu este ortogonală, se aplică procedeul Gram-Schmidt pentru a obţine o bază ortonormată.
(3) Se determină $pr_S v$ aplicând formula (9).

Propoziţia 5.10. Are loc următoarea inegalitate:

$$\|v - pr_S v\| \leq \|v - w\|, \text{ pentru orice } w \in S.$$

Altfel spus, distanţa de la vectorul v la proiecţia sa ortogonală pe subspaţiul S este mai mică decât distanţa de la v la oricare alt vector w din S. Ca o consecinţă imediată, se obţine că

$$d(v, S) = d(v, s) = \|v - s\|, \text{ unde } s = pr_S v.$$

Propoziţia de mai sus ne arată că proiecţia ortogonală a unui vector v pe un subspaţiu vectorial S al lui V_n este *cea mai bună aproximare a vectorului v printr-un vector din S*, iar norma $\|v-s\|$ ne dă eroarea aproximării. Cea mai bună aproximare a unui vector printr-un vector dintr-un anumit subspaţiu are numeroase aplicaţii în *machine learning*.

Procedeul Gram-Schmidt transformă o bază dintr-un spaţiu/subspaţiu vectorial într-una ortonormată. În cele ce urmează vom prezenta acest procedeu printr-un exemplu concret.

Exemplul 5.9. Fie $B = \{v_1 = (1, -1, 2), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 2, 1)\}$ o bază în $\mathbb{R}^3$. Folosind procedeul Gram-Schmidt, să se construiască o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$, în raport cu produsul scalar standard.
Soluţie. **Metoda 1**. Considerăm vectorii:

$$\begin{aligned}
q_1 &= v_1 = (1, -1, 2) \\
w_1 &= \frac{q_1}{\|q_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \\
q_2 &= v_2 - pr_{w_1} v_2 = v_2 - < v_2, w_1 > w_1 \\
&= (0, 1, 1) - \left(0 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \\
&= (0, 1, 1) - \frac{1}{6}(1, -1, 2) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{4}{6}\right) \\
w_2 &= \frac{q_2}{\|q_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{66}}, \frac{7}{\sqrt{66}}, \frac{4}{\sqrt{66}}\right) \\
q_3 &= v_3 - pr_{w_1} v_3 - pr_{w_2} v_3 = v_3 - < v_3, w_1 > w_1 - < v_3, w_2 > w_2 = \left(\frac{12}{11}, \frac{4}{11}, -\frac{4}{11}\right) \\
w_3 &= \frac{q_3}{\|q_3\|} = \left(\frac{12}{\sqrt{176}}, \frac{4}{\sqrt{176}}, -\frac{4}{\sqrt{176}}\right)
\end{aligned}$$

Baza ortonormată căutată este $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$.
Metoda 2. Definim vectorii

$$\begin{aligned} q_1 &= v_1 = (1, -1, 2), \\ q_2 &= v_2 - \alpha q_1 = (0, 1, 1) - \alpha(1, -1, 2) = (-\alpha, 1 + \alpha, 1 - 2\alpha). \end{aligned}$$

Punem condiţia ca vectorii q_1 şi q_2 să fie ortogonali, adică $< q_1, q_2 >= 0$. Avem

$$< q_1, q_2 >= -\alpha - 1 - \alpha + 2 - 4\alpha = -6\alpha + 1 = 0,$$

de unde se obţine $\alpha = \frac{1}{6}$. Se obţine astfel vectorul $q_2 = \left(-\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{4}{6}\right)$. Considerăm acum un vector q_3 de forma

$$q_3 = v_3 - \alpha_1 q_1 - \alpha_2 q_2.$$

Avem

$$\begin{aligned} q_3 &= (1, 2, 1) - \alpha_1(1, -1, 2) - \alpha_2\left(-\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{4}{6}\right) \\ &= \left(1 - \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{6}, 2 + \alpha_1 - \frac{7\alpha_2}{6}, 1 - 2\alpha_1 - \frac{4\alpha_2}{6}\right). \end{aligned}$$

Punem condiţiile $< q_1, q_3 >= 0$, respectiv $< q_2, q_3 >= 0$. Calculăm

$$< q_1, q_3 > = 1 - \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{6} - 2 - \alpha_1 + \frac{7\alpha_2}{6} + 2 - 4\alpha_1 - \frac{8\alpha_2}{6} = 1 - 6\alpha_1 = 0,$$

de unde rezultă $\alpha_1 = \frac{1}{6}$. Pe de altă parte, avem

$$< q_2, q_3 > = -\frac{1}{6}\left(1 - \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{6}\right) + \frac{7}{6}\left(2 + \alpha_1 - \frac{7\alpha_2}{6}\right) + \frac{4}{6}\left(1 - 2\alpha_1 - \frac{4\alpha_2}{6}\right) = 0,$$

ceea ce este echivalent cu $17 - 11\alpha_2 = 0$, adică $\alpha_2 = \frac{17}{11}$. Înlocuind în expresia vectorului q_3, se obţine $q_3 = \left(\frac{12}{11}, \frac{4}{11}, -\frac{4}{11}\right)$. Am obţinut baza ortogonală:

$$B' = \left\{q_1 = (1, -1, 2), q_2 = \left(-\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{4}{6}\right), q_3 = \left(\frac{12}{11}, \frac{4}{11}, -\frac{4}{11}\right)\right\}.$$

Baza ortonormată căutată este

$$B'' = \left\{w_1 = \frac{q_1}{\|q_1\|}, w_2 = \frac{q_2}{\|q_2\|}, w_3 = \frac{q_3}{\|q_3\|}\right\}.$$

□

Remarca 5.7. Pentru a obţine o bază ortonormată plecând de la o bază ortogonală, se împarte fiecare vector al bazei ortogonale la norma sa.

5.2. **Probleme propuse.** În cele ce urmeză dacă nu se precizează produsul scalar, se va considera produsul scalar standard.

Exerciţiul 5.1. Dacă vectorii v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 sunt ortogonali doi câte doi, câţi pivoţi are forma scară redusă a matricei $A = [v_1|v_2|v_3|v_4|v_5]$? Justificaţi!
Indicaţie: Se foloseşte Propoziţia 5.2, legătura dintre independenţa unui sistem de vectori şi rangul matricei A (criteriul practic pentru independenţă) şi apoi legătura dintre rangul matricei A şi numărul de pivoţi ai formei sale scară redusă.

Exerciţiul 5.2. Să se arate că într-un spaţiu vectorial V înzestrat cu un produs scalar $< \cdot, \cdot >$ are loc relaţia lui Pitagora:

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2, \text{ oricare ar fi vectorii ortogonali } v_1, v_2 \in V.$$

Indicaţie: Se calculează $\|v_1 + v_2\|^2 =< v_1 + v_2, v_1 + v_2 >$ folosindu-se proprietăţile produsului scalar şi faptul că v_1, v_2 sunt ortogonali.

Exerciţiul 5.3. În $\mathbb{R}^3$ înzestrat cu produsul scalar standard $< \cdot, \cdot >$ se consideră baza

$$B = \{v_1 = (2, 1, 3), v_2 = (-1, 0, 1), v_3 = (-1, 1, -2)\}$$

şi vectorii $v = -2v_1 + v_3$, respectiv $w = 3v_1 + v_2$.

a) Să se determine produsul scalar $< v, w >$, norma celor doi vectori şi unghiul dintre ei.
Indicaţie: Se foloseşte Propoziţia 5.4.
b) Folosind procedeul Gram-Schmidt să se construiască o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$ plecând de la baza B.

Exerciţiul 5.4. Să se arate că produsul a două matrice ortogonale este o matrice ortogonală.

Exerciţiul 5.5. Să se arate că matricea

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

este ortogonală şi apoi să se calculeze $A^{-1}X$, unde $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Indicaţie: Se foloseşte Propoziţia 5.6 şi apoi Propoziţia 5.5.

Exerciţiul 5.6. Se dă sistemul de vectori:

$$B = \left\{ v_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right), v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}} \right), v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}.$$

a) Să se arate că B este o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$;
b) Să se determine matricea de trecere de la baza ortonormată B la baza canonică din $\mathbb{R}^3$, T_{BB_c};
c) Să se determine, prin două metode, coordonatele vectorului $v = (0, -1, 2)$ în baza B.

Exerciţiul 5.7. Se dă subspaţiul vectorial din $\mathbb{R}^3$:

$$S = span\{v_1 = (1, -1, 2), v_2 = (0, 1, 1)\}.$$

a) Să se determine o bază ortonormată B în S;
b) Să se determine coordonatele vectorului $v = (1, 0, 3) \in S$ în baza B (se aplică Propoziţia 5.3);
c) Să se determine proiecţia vectorului $2v_1 - v_2$ pe S (vezi Remarca 5.4);
d) Să se determine proiecţia vectorului $w = (1, -1, 0)$ pe S;
e) Să se calculeze distanţa de la w la S.

Exercițiul 5.8. Fie
$$U = \{f \in \mathbb{R}_2[X] :\ f(0) = f(1)\}.$$
Să se arate că U este un subspațiu vectorial în $\mathbb{R}_2[X]$, să se determine o bază ortonormată în U şi apoi coordonatele polinomului $f = X^2 - X + 2 \in U$ în baza găsită.

Exercițiul 5.9. Să se determine proiecția vectorului $v = (2, 0, -1)$ pe subspațiul vectorial $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x - y + 3z = 0\}$ din $\mathbb{R}^3$.

Exercițiul 5.10. Fie $v = (1, 2, 1)$. Să se determine complementul ortogonal $v^\perp$ al lui v şi apoi o bază ortonormată în $v^\perp$.