Analiză Matematică - SETUL 7 - Calcul diferenţial

1. Folosind definiţia derivatelor parţiale ale unei funcţii, să se calculeze:

(i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,2)$ pentru $f(x,y) = 2x^2 + xy$;

(ii) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$ pentru $f(x,y) = \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{y}\right)\right)$;

(iii) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,2,0)$ pentru $f(x,y,z) = \ln(xy + z)$.

2. Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$
are derivate parţiale în $(0,0)$, dar nu e continuă în origine.

3. Arătaţi că următoarele funcţii verifică ecuaţiile scrise in dreptul lor:

(i) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$; $\quad xy^2 \dfrac{\partial f}{\partial x} + x^2 y \dfrac{\partial f}{\partial y} = (x^2 + y^2) \cdot f$;

(ii) $g(x,y,z) = 2yz + 3x(y + \sqrt{1-y^2}) - 2xe^{\arcsin y}$;

$$xy\frac{\partial g}{\partial x} - \sqrt{1-y^2}\left(y\frac{\partial g}{\partial y} - z\frac{\partial g}{\partial z}\right) = 3xy\frac{\partial g}{\partial z};$$

4. Să se calculeze derivatele parţiale ale funcţiei vectoriale

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \left(\ln\sqrt{\frac{2+\sin x}{2-\sin y}}, \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\right)\right).$$

5. Să se determine matricile jacobiene ale aplicaţiilor:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x,y) = (x + y^2, xe^y)$;

(ii) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\quad g(x,y,z) = (xy^2, y\ln z)$, $\ z > 0$;

(iii) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad h(x,y) = \left(\dfrac{x-y}{xy^2}, \ln\dfrac{x - \sqrt{x^2-y^2}}{x + \sqrt{x^2-y^2}}\right)$.

6. Să se calculeze jacobianul $\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}$ al funcţiilor u, v, w definite prin:

(i) $u = x + y + z, v = x - y + z, w = 4(xy + yz)$;

(ii) $u = xyz, v = xy - xyz, w = y - xy$;

(iii) $u = \cos x, v = \sin x \cos y, w = \sin x \sin y \cos z$;

(iv) $u = \dfrac{x}{\sqrt{1-r^2}}, v = \dfrac{y}{\sqrt{1-r^2}}, w = \dfrac{z}{\sqrt{1-r^2}}$, unde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

7. Să se determine gradul de omogenitate şi să se scrie relaţiile lui Euler pentru funcţiile:

(i) $f(x,y,z) = \dfrac{yz}{x} + \dfrac{xz}{y} + \dfrac{xy}{z}$;

(ii) $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$;

(iii) $f(x,y) = xyF\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x}\right) - y^2 G\left(\arcsin \dfrac{x}{y}\right), F \in C^1(D), D \subset \mathbb{R}^2$, $G \in C^1(I), I \subset \mathbb{R}$.

8. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi funcţia $f_n : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{(x^4+y^4)^n}$. Să se arate că are loc relaţia:

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(1,1) + 2\frac{\partial^2 f_n}{\partial xy}(1,1) + \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}(1,1) = \frac{4n^2 - 9n + 5}{2^{n-2}}.$$

9. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întai ale funcţiei compuse $F(x,y,z) = g(e^{xyz}, \sin(x+y)), g \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

10. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întai şi doi pentru funcţia compusă $F(x,y) = f(x^2+y^2, xy), f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

11. Folosind definiţia, să se arate că funcţia $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ este diferenţiabilă în punctul $A(1,1)$.

12. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^a y}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2 \neq 1 \\ 0, x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ $, a \geq 1$

Arătaţi că:

(i) f e continuă în origine;

(ii) f are derivate parţiale în origine;

(iii) pentru $a = 1$, f nu e diferenţiabilă în origine, iar pentru $a > 1$, f este diferenţiabilă în origine.

13. Fie funcţia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$.

(i) Studiaţi continuitatea derivatelor parţiale în (0,0);

(ii) Studiaţi diferenţiabilitatea funcţiei f în punctul (0,0);

Indicaţie: (i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ este continuă în (0,0); $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ nu este continuă în (0,0) deoarece nu are limită în origine; (ii) se foloseşte definiţia şi se obţine că f este diferenţiabilă în $(0,0)$.

14. Fie funcţia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(i) Să se arate că f este continuă în origine;

(ii) Să se arate că f nu este diferenţiabilă în origine;

(iii) Să se calculeze derivata lui f după versorul $\overline{s} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\overline{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}$ în punctul $(0,0)$.

15. Fie funcţia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Să se arate că:

(i) f nu are derivate parţiale continue în origine.

(ii) f este diferenţiabilă în origine; calculaţi apoi $df(0,0)$;

Indicaţie: (i) Se arată că nu există $\lim\limits_{(x,y)\longmapsto(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}$ si $\lim\limits_{(x,y)\longmapsto(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}$; (ii) se foloseşte definiţia diferenţiabilităţii într-un punct.

16. Este funcţia $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ diferenţiabilă în origine?

17. Să se calculeze:

(i) df, dacă $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, f(x,y,z)=\left(xy+\dfrac{x}{y}\right)^z$;

(ii) d^2f, dacă $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\cos xy$;

(iii) d^3f, dacă $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, f(x,y,z)=xyz$;

(iv) d^nf, dacă $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=e^{ax+by}$.

18. Să se dezvolte polinomul $P(x,y)=2x^3+4x^2y+y^2-1$ după puterile lui $x+1$ şi $y-1$.

19. Să se dezvolte după puterile lui x, $y-1$ şi $z-2$ polinomul $P(x,y,z)=y^3+xyz-3y^2-xz+3y-1$.

20. Fie funcţia $f(x,y)=x^y, x>0, y>0$. Să se scrie polinomul lui Taylor de gradul al 3-lea în punctul (1,1) şi să se deducă valoarea aproximativă pentru $(\frac{11}{10})^{\frac{12}{10}}$.

21. Să se scrie polinomul lui Taylor de gradul al 2-lea în punctul (1,0) pentru funcţia $f(x,y)=\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

22. Să se aproximeze funcţia $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ cu un polinom de gradul 2 într-o vecinătate a punctului $(1,1)$.

23. Să se găsească punctele de extrem local ale funcţiilor:

(i) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^3+y^3-3xy$;

(ii) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}, x>0, y>0$;

(iii) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^3+y^3-6x^2-6y^2$;

(iv) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=x^2+y^2+4z^2-xy+xz+2yz$;

(v) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=3x^2+y^3+2z^3-6xy+3y^2-3z^2$.

(vi) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=x^3+y^2+z^3+6xy+3z^2$;

(vii) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=xyz(4-x-y-z),\ xyz\neq 0$;

$(viii)$ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=x+y+z+\frac{1}{xyz},\ xyz\neq 0$;

(ix) $f(x,y,z) = xy + yz + zx - \ln(xyz) - 3,\ x,y,z > 0;$

(x) $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z + \sin(x+y+z),\ x,y,z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

24. Determinaţi $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - 3xy + \alpha x + \beta y + \gamma$ admite un minim egal cu 0 în punctul $(2,-1)$.

25. Să se găsească extremele condiţionate ale următoarelor funcţii:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$ cu legătura $x + y - 1 = 0$;

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x + y$ cu legătura $x^2 - y^2 = 3$;

(iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$, cu legătura $x^2 + y^2 = 2$;

(iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^2 - y^2$, cu legătura $x - y = 1$;

(v) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 4x^3 + y^2$, cu legătura $2x^2 + y^2 = 1$;

(vi) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, x \neq 0, y \neq 0$ cu legătura $xy = 1$.

(vii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy + 2yz + 2xz$, cu legătura $xyz = 32$;

$(viii)$ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, cu legătura $xy - z^2 = 1$;

(ix) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xyz$, cu legătura $x^2 + y^2 + z^2 = 3,\ x,y,z > 0$;

26. Calculaţi:

(i) $\dfrac{\partial^{13} f}{\partial x^6 \partial y^7}$ pentru funcţia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ f(x,y) = (x+y) \cdot \sin(x+y)$;

(ii) $\dfrac{\partial^{14} f}{\partial x^6 \partial y \partial x^7}$ pentru funcţia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,
$f(x,y,z) = (x + y^2 + z) \cdot e^{x+y+z}$;

(iii) $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$ pentru funcţia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, f(x,y) = x \cdot e^{5x+8y}$;

(iv) $\dfrac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}$ pentru funcţia $f : \mathbf{R}^2 - \{(1,0)\} \to \mathbf{R}, f(x,y) = \dfrac{1}{(1+x) \cdot y}$;
$f(x,y,z) = xy^2z^3 \cdot e^{x-y+z}$;

(v) $\dfrac{\partial^{10} f}{\partial x^5 \partial y^5}$ pentru functia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, f(x,y) = (x+y) \cdot \ln(x+y)$;

(vi) $\dfrac{\partial^{11} f}{\partial x^6 \partial y^5}\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ pentru funcţia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,
$f(x,y) = (-x + 3y^2) \cdot \sin(x-y)$.