

Analiză Matematică - SETUL 6 - Limite de funcții. Continuitate

1. Utilizând limitele iterate, să se arate că funcția $f(x, y) = \frac{y^2 - 2x}{y^2 + 2x}$ nu are limită în punctul $(0, 0)$. Similar, arătați că funcția $g(x, y) = \frac{y^2 - 2x}{x^2 - 2y}$ nu are limită în punctul $(2, 2)$.

2. Folosind teorema lui Heine, să se arate că următoarele funcții nu au limită în origine

$$(i) f(x, y) = \frac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x}, y^2 \neq 2x; \quad (ii) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^6}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases};$$

$$(iii) f(x, y) = \frac{e^{x^2 y} - 1}{x^2 y^2}.$$

3. Să se calculeze limitele:

$$\begin{aligned} i) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{xy + 1} - 1}; & \quad iii) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + y}{x^2 + y^2}; \\ ii) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} \frac{\sin(xy)}{x}; & \quad iv) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{-x^2 - y^2}{2 - \sqrt{x^2 + y^2 + 4}}. \end{aligned}$$

4. Notând cu L_{12}, L_{21} limitele iterate, respectiv cu l limita funcției f în punctul $(0, 0)$, să se arate că:

- a) pentru $f(x, y) = \frac{x - y}{xy}$, nu există L_{12}, L_{21} , respectiv l ;
- b) pentru $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$, nu există L_{12}, L_{21} , dar $l = 0$;
- c) pentru $f(x, y) = \frac{x^4 + y^3}{x^4 + y^4}$, $L_{12} = 1$, iar L_{21} și l nu există;
- d) pentru $f(x, y) = y^2 \cos \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{y}$, $L_{12} = 0$, L_{21} nu există, dar $l = 0$;
- e) pentru $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^4}$, $L_{12} = L_{21} = 0$, dar l nu există;
- f) pentru $f(x, y) = \frac{x \sin^3 y}{x^2 + y^2}$, $L_{12} = L_{21} = l = 0$.

5. Fiind dată funcția $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$.

- (i) Să se determine domeniul maxim de definiție D .
- (ii) Să se studieze existența limitelor iterate în origine.

- (iii) Să se studieze existența limitei în origine relativă la drepte ce trec prin origine.
- (iv) Să se studieze existența limitei în origine relativă la cercuri ce trec prin origine de ecuații $(C_m)x^2 + y^2 = mx$.

6. Se consideră funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Să se arate că:

- (i) f este continuă parțial în punctul $(0, 0)$;
- (ii) f este discontinuă în punctul $(0, 0)$;
- (iii) f este mărginită pe \mathbb{R}^2 .

7. Să se studieze continuitatea parțială și continuitatea funcției f ,

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

8. Să se studieze continuitatea funcțiilor:

- a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$
- b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x^3 y^3}{x^2 + 2y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
- c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2} - \cos(xy)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$