Capitolul 3[1]

LIMITĂ ŞI CONTINUITATE LA FUNCŢII DE MAI MULTE VARIABILE REALE

Breviar teoretic

Fie (X, d) un spaţiu metric.

1. O mulţime $D \subset X$ se numeşte *mulţime deschisă* dacă pentru orice punct $x \in D$ există o sferă deschisă $S(x; r)$ astfel încât $S(x; r) \subset D$.

2. a) O mulţime $F \subset X$ se numeşte *mulţime închisă* dacă complementara ei $C_X F$ este o mulţime deschisă.

b) Mulţimea F este *închisă* dacă şi numai dacă pentru orice şir convergent $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ din F rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in F$.

3. O mulţime $D \subset X$ este *mărginită* dacă există o sferă închisă din spaţiu care o conţine.

4. a) O mulţime $K \subset (\mathbf{R}^p, d_e)$ este *compactă* dacă este mărginită şi închisă.

b) Mulţimea K este *compactă* dacă orice şir (x_n) din K posedă un subşir convergent $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ către un punct din K.

5. O mulţime V este *vecinătate* a punctului $a \in X$ şi notăm $V \in \mathcal{V}(a)$,

[1]Continutul acestui fişier este preluat din Cartea "Probleme de matematică - calcul diferenţial", autori P. Găvruţa, D. Dăianu, L. Cădariu, C. Lăzureanu, L. Ciurdariu, Editura Mirton 2004

dacă există o mulţime deschisă $D \subset X$ astfel încât $a \in D \subset V$.

6. a) Punctul $x \in X$ se numeşte *punct de acumulare* al mulţimii $A \subset X$ şi notăm $x \in A'$, dacă în orice vecinătate a punctului x există cel puţin un punct al lui A diferit de x.

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset.$$

b) $x \in A'$ dacă şi numai dacă există un şir $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ din $A \setminus \{x\}$ astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

7. Punctul $x \in X$ se numeşte *punct aderent* mulţimii A şi notăm $x \in \overline{A}$, dacă în orice vecinătate a punctului x există cel puţin un punct al lui A.

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \emptyset.$$

8. Mulţimea A este închisă dacă şi numai dacă $\overline{A} = A$.

9. Punctul $x \in X$ se numeşte *punct izolat* al mulţimii A şi notăm $x \in \mathrm{Iz}\ A$, dacă $x \in A$ şi $x \notin A'$.

$$x \in \mathrm{Iz}\ A \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x):\ V \cap A = \{x\}.$$

10. Punctul $x \in A$ se numeşte *punct interior* mulţimii A şi notăm $x \in \overset{\circ}{A}$, dacă există o vecinătate V a punctului x inclusă în mulţimea A.

$$x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x):\ V \subset A.$$

11. Mulţimea A este deschisă dacă şi numai dacă $\overset{\circ}{A} = A$.

12. Punctul $x \in X$ se numeşte *punct exterior* mulţimii A şi notăm $x \in \mathrm{Ext}\ A$, dacă x este punct interior complementarei mulţimii A.

$$x \in \mathrm{Ext}\ A \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x):\ V \subset C_X A.$$

13. Punctul $x \in X$ se numeşte *punct frontieră* pentru mulţimea A şi notăm $x \in \mathrm{Fr}\ A$ sau $x \in \partial A$, dacă x nu este nici punct interior şi nici punct exterior mulţimii A.

$$x \in \mathrm{Fr}\ A \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \emptyset,\ V \cap C_X A \neq \emptyset.$$

14. Au loc relaţiile:

$$\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}\ , \quad \overset{\circ}{A} \subset A' \subset \overline{A}\ , \quad \overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup \mathrm{Fr}\ A\ ,$$

$$\overset{\circ}{A} \cap \mathrm{Fr}\ A = \emptyset\ , \quad \overline{A} = A \cup A'\ , \quad \overline{A} = A' \cup \mathrm{Fr}\ A.$$

În cele ce urmează considerăm mulţimea $A \subset \mathbf{R}^p$, $p > 1$ şi punctul $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in A$.

15. O funcţie $f : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $p > 1$, ce pune în corespondenţă fiecare punct $x \in A$ cu $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbf{R}$ se numeşte *funcţie reală de mai multe variabile reale* (*funcţie scalară*).

16. O funcţie $f : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$, $p \geq 1, q > 1$ ce pune în corespondenţă fiecare punct $x \in A$ cu $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_q(x))$ $\in \mathbf{R}^q$, unde $f_k : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $k = \overline{1, q}$, sunt funcţii scalare, se numeşte *funcţie vectorială* şi notăm $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q)$.

17. Prin *domeniu de existenţă* al funcţiei f înţelegem domeniul maxim de definiţie al funcţiei f. Domeniul de existenţă al unei funcţii vectoriale este dat de intersecţia domeniilor de existenţă ale componentelor sale.

18. Spunem că funcţia $f : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $p > 1$, are în punctul $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p) \in A'$ *limita* $l \in \mathbf{R}$ şi notăm $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A \setminus \{a\}$, pentru care $|x_k - a_k| < \eta$, $k = \overline{1, p}$, să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

În cazul funcţiilor reale de două variabile reale, limita funcţiei f în punctul (a, b) se notează prin

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) \quad \text{sau} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y).$$

19. Teorema lui Heine. Funcţia $f : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $p \geq 1$, are în punctul $a \in A'$ limita l dacă şi numai dacă pentru orice şir $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ din $A \setminus \{a\}$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

20. Criteriul cleştelui (majorării). Fie funcţia $f : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $p \geq 1$, şi $a \in A'$. Dacă există funcţia $g : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ pozitivă, cu

$$\lim_{x \to a} g(x) = 0 \ \text{ şi } \ |f(x) - l| \leq g(x), \ \forall x \in A,$$

atunci $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

21. *Limita unei funcţii vectoriale* $f : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$, $p \geq 1, q > 1$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q)$, într-un punct $a \in A'$ este un vector

$$l = \lim_{x \to a} f(x) = \left(\lim_{x \to a} f_1(x), \lim_{x \to a} f_2(x), \ldots, \lim_{x \to a} f_q(x) \right) \in \mathbf{R}^q,$$

deci studiul limitei unei funcţii vectoriale se face pe componentele acesteia.

Dacă una din limitele $\lim\limits_{x \to a} f_k(x)$, $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$, nu există atunci limita l nu există.

22. Fie funcţia $f : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de două variabile reale x şi y şi punctul $(a, b) \in A'$. Dacă există limitele succesive

$$L_{12} = \lim_{x \to a} \left(\lim_{y \to b} f(x, y) \right) \quad \text{şi} \quad L_{21} = \lim_{y \to b} \left(\lim_{x \to a} f(x, y) \right),$$

ele se numesc *limitele iterate* ale funcţiei f în punctul (a, b).

Analog se definesc limitele iterate ale funcţiilor cu mai mult de două variabile reale.

23. Legătura dintre limitele iterate şi limită: dacă pentru o funcţie reală de mai multe variabile reale există una din limitele iterate şi limita într-un punct, atunci aceste limite sunt egale între ele.

24. Fie $f : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $p > 1$, $G \subset A$ şi $a \in G'$. Spunem că funcţia f are în punctul a *limita* l *relativ la mulţimea* G şi notăm $l = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in G}} f(x)$, dacă restricţia funcţiei f la mulţimea G, $\tilde{f} : G \to \mathbf{R}$, $\tilde{f}(x) = f(x)$, $x \in G$, are limita l în punctul a.

25. Legătura dintre limită şi limita relativ la o mulţime: dacă pentru o funcţie de mai multe variabile reale există limita înt-un punct atunci există şi limita relativ la o mulţime, în acel punct, şi cele două limite sunt egale.

26. Fie $f : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $p > 1$, şi $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p) \in A$.

a) Spunem că funcţia f este *continuă în punctul* a dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$ pentru care $|x_k - a_k| < \eta$, $k = \overline{1, p}$, avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

b) Funcţia f este continuă în punctul $a \in A$ dacă şi numai dacă pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ din A cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

c) Funcţia f este continuă în punctul de acumulare $a \in A' \cap A$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

De asemenea, în punctele izolate ale mulţimii A funcţia f este continuă.

27. Spunem că funcţia $f : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, este *continuă pe mulţimea* A şi notăm $f \in C^0(A)$, dacă f este continuă în fiecare punct $a \in A$.

28. Fie $f : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ o funcţie reală de două variabile reale x şi y şi punctul $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ pentru care mulţimile $A_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid (x, b) \in A\}$ şi $A_2 = \{y \in \mathbf{R} \mid (a, y) \in A\}$ sunt nevide. Funcţiile $f_1 : A_1 \to \mathbf{R}$, respectiv $f_2 : A_2 \to \mathbf{R}$, definite prin $f_1(x) = f(x, b)$ şi $f_2(y) = f(a, y)$ se numesc *funcţiile parţiale ale lui f corespunzătoare punctului* (a, b).

Analog se construiesc funcţiile parţiale în cazul funcţiilor cu mai mult de două variabile reale.

29. Funcţia $f : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}, p > 1$, este *continuă parţial* în punctul $a \in A$ dacă funcţiile parţiale ale funcţiei f corespunzătoare punctului a sunt continue.

30. Legătura dintre continuitate şi continuitatea parţială: o funcţie continuă într-un punct este şi continuă parţial în acel punct.

31. O funcţie vectorială $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q) : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$, $p \geq 1, q > 1$, este *continuă* în punctul $a \in A$ dacă şi numai dacă componentele sale f_k, $k = \overline{1, q}$, sunt continue în punctul a.

32. Funcţia $f : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $p \geq 1$, este *uniform continuă* pe mulţimea A dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $x, y \in A$, $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, \ldots, y_p)$ pentru care $|x_k - y_k| < \eta$, $k = \overline{1, p}$, avem $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

33. Legătura dintre continuitatea uniformă şi continuitate:

a) O funcţie uniform continuă pe o mulţime este continuă pe acea mulţime.

b) O funcţie continuă pe o mulţime compactă este uniform continuă pe acea mulţime.

34. O funcţie continuă pe o mulţime compactă este mărginită şi îşi atinge marginile.

Probleme rezolvate

1. Se consideră funcţia $f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = \ln \dfrac{1-x^2-y^2}{y-x}$.

a) Să se figureze în plan domeniul de existenţă D al funcţiei f.

b) Să se stabilească poziţia punctelor $\mathrm{A}\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{O}(0,0)$ faţă de mulţimea D şi să se precizeze în care din aceste puncte se pune problema studiului limitei, respectiv continuităţii funcţiei f.

Rezolvare. a) Condiţiile de existenţă ale funcţiei f sunt date de relaţiile:

$$\frac{1-x^2-y^2}{y-x} > 0 \;\text{ şi }\; y - x \neq 0.$$

Pentru determinarea domeniului de existenţă, reprezentăm în plan curbele ce rezultă din condiţiile de mai sus: $1-x^2-y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1$, adică cercul cu centrul în origine şi rază 1, respectiv dreapta de ecuaţie $y - x = 0$.

Deci domeniul D:

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1, y-x > 0\} \cup$$

$$\cup \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 > 1, y-x < 0\}.$$

b) Pentru a stabili poziţia unui punct faţă de o mulţime, avem nevoie de un sistem de vecinătăţi. În plan, considerat ca spaţiu metric cu metrica euclidiană, adică $(\mathbf{R}^2, d_e)$, acest sistem de vecinătăţi poate fi considerat ca fiind format din sferele deschise centrate în punctul dat şi de rază variabilă, adică din discurile circulare deschise centrate în punct şi de rază variabilă.

Pentru punctul $\mathrm{A}\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, observăm că există sfera deschisă $S\left(\left(0, \dfrac{1}{2}\right); \dfrac{1}{4}\right)$, inclusă în D, deci $\mathrm{A} \in \overset{\circ}{D}$ şi atunci $\mathrm{A} \in D' \subset \overline{D}$.

Pentru punctul $\mathrm{B}\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$, observăm că există sfera deschisă $S\left(\left(0, -\dfrac{1}{2}\right); \dfrac{1}{4}\right)$, inclusă în $C_{\mathbf{R}^2} D$, deci $\mathrm{B} \in \operatorname{Ext} D$.

Pentru punctul $\mathrm{O}(0,0)$ considerăm sferele $S_r = S((0,0); r)$, $r > 0$. Observăm că pentru orice $r > 0$, $S_r \cap D \neq \emptyset$, $S \cap C_{\mathbf{R}^2} D \neq \emptyset$, deci $\mathrm{O}(0,0) \in \operatorname{Fr} D \subset \overline{D}$, iar $S_r \cap D \setminus \{(0,0)\} \neq \emptyset$, deci $\mathrm{O}(0,0) \in D'$.

Folosind definiţia cu şiruri a punctelor de acumulare, să observăm că pentru şirul $x_n = \left(0, \dfrac{1}{n}\right) \in D \setminus \{(0,0)\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = (0,0)$, deci $(0,0) \in D'$.

Cum A$\in\overset{\circ}{D}$, f are limită în punctul A egală cu valoarea funcţiei în punctul A, deci f este continuă în punctul A. În punctul B, exterior mulţimii D, nu se pune problema limitei şi nici a continuităţii funcţiei f. În punctul $\mathrm{O}(0,0) \in D' \setminus D$ nu se pune problema continuităţii, ci doar a limitei funcţiei.

2. Utilizând limitele iterate, să se arate că funcţia f, $f(x,y) = \dfrac{y^2-2x}{x^2-2y}$, nu are limită în punctul (2,2).

Rezolvare. Calculăm limitele iterate ale funcţiei f în punctul (2,2). Avem:

$$\begin{aligned}
L_{12} &= \lim_{x\to 2}\left(\lim_{y\to 2} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 2}\left(\lim_{y\to 2}\frac{y^2-2x}{x^2-2y}\right)\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{4-2x}{x^2-4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2}\frac{-2(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{-2}{x+2} = -\frac{1}{2}\\
L_{21} &= \lim_{y\to 2}\left(\lim_{x\to 2} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 2}\left(\lim_{x\to 2}\frac{y^2-2x}{x^2-2y}\right)\\
&= \lim_{y\to 2}\frac{y^2-4}{4-2y} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y\to 2}\frac{(y-2)(y+2)}{-2(y-2)} = \lim_{y\to 2}\frac{y+2}{-2} = -2
\end{aligned}$$

Deoarece limitele iterate în punctul (2,2) există şi sunt diferite rezultă că limita $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} f(x,y)$ nu există.

3. Utilizând limita relativ la mulţimea $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = mx, m \in \mathbf{R}^*\}$, să se arate că funcţia f, $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$, nu are limită în punctul (0,0).

Rezolvare. Observăm că în (0,0), $L_{12} = L_{21} = 0$. Presupunem că există $l = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Atunci rezultă că $l = 0$ şi, de asemenea, limita lui f în (0,0) relativ la orice mulţime $D \subset \mathbf{R}^2$, ce-l are pe (0,0) ca punct de acumulare, este egală cu 0. În cazul nostru, relativ la mulţimea A dată, funcţia f are limita

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\frac{m^2x^4}{x^4+m^4x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{m^2x^4}{x^4(1+m^4)} = \frac{m^2}{1+m^4} \neq 0,$$

pentru orice $m \in \mathbf{R}^*$. Am obţinut o contradicţie, deci presupunerea făcută este falsă. Rezultă că funcţia f nu are limită în (0,0).

4. Utilizând teorema lui Heine, să se arate că funcţia f, dată prin formula $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^6}$, nu are limită în punctul (0,0).

Rezolvare. Observăm că $L_{12} = L_{21} = 0$ în punctul (0,0). Presupunem că există $l = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Atunci $l = L_{12} = L_{21} = 0$ şi, conform teoremei lui Heine, pentru orice şir $(x_n, y_n) \to (0,0)$, $(x_n, y_n) \neq (0,0)$, avem că $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = l = 0$. Alegem $x_n = \frac{1}{n^3}$, $y_n = \frac{1}{n}$ cu $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right) = (0,0)$, iar $f(x_n, y_n) = \frac{n}{2}$ cu $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \infty \neq 0$. Am obţinut o contradicţie, deci l nu există.

5. Să se studieze limita funcţiei $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}^2$,

$$f(x,y) = \left(\frac{x^3y^2}{x^4+y^4}, \frac{x^2y^5}{x^6+y^6}\right),$$

în punctul (0,0).

Rezolvare. Fiind vorba de o funcţie vectorială, studiul limitei se face separat pe cele două componente. Notăm atunci:

$$g(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^4+y^4} \quad \text{şi} \quad h(x,y) = \frac{x^2y^5}{x^6+y^6}.$$

Pentru funcţia g, observăm că $L_{12} = L_{21} = 0$ în punctul (0,0). Vom arăta că $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ există şi, deci, este egală cu limitele iterate. Pentru aceasta vom folosi criteriul cleştelui. Avem:

$$0 \leq |g(x,y) - l| = \left|\frac{x^3y^2}{x^4+y^4} - 0\right| \leq \left|\frac{x^3y^2}{2x^2y^2}\right|,$$

unde am folosit inegalitatea mediilor: $\frac{x^4+y^4}{2} \geq \sqrt{x^4y^4}$. Rezultă că

$$0 \leq |g(x,y)| \leq \frac{|x|}{2} \to 0, \text{ pentru } (x,y) \to (0,0),$$

şi deci $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$.

Pentru funcţia h, avem că $L_{12} = L_{21} = 0$ în punctul (0,0) şi arătăm că există $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$. Pentru aceasta notăm $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$, $\rho > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Cum $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, rezultă că $(x,y) \to (0,0) \Leftrightarrow \rho \to 0$, ceea ce înseamnă că dacă una din limitele $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$, respectiv $\lim_{\rho\to 0} h(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$, există, atunci există şi cealaltă şi ele sunt egale. Avem

$$h(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \frac{\rho^7\cos^2\varphi\sin^5\varphi}{\rho^6(\cos^6\varphi + \sin^6\varphi)} = \rho \cdot \frac{\cos^2\varphi\sin^5\varphi}{\cos^6\varphi + \sin^6\varphi}.$$

Cum

$$(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^3=\cos^6\varphi+\sin^6\varphi+3\cos^2\varphi\sin^2\varphi(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi),$$

avem

$$\begin{aligned}\cos^6\varphi+\sin^6\varphi &= 1-3\cos^2\varphi\sin^2\varphi=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\varphi\\ &= 1-\frac{3}{4}(1-\cos^2 2\varphi)=\frac{1+3\cos^2 2\varphi}{4}\end{aligned}$$

Deci $h(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)=\rho\dfrac{4\cos^2\varphi\sin^5\varphi}{1+3\cos^2 2\varphi}$. Cu criteriul cleştelui avem

$$0\le\left|\rho\frac{4\cos^2\varphi\sin^5\varphi}{1+3\cos^2 2\varphi}\right|\le\rho\left|\frac{4\cos^2\varphi\sin^5\varphi}{1}\right|\le 4\rho\to 0\ \ (\rho\to 0),$$

deci $\lim\limits_{\rho\to 0}h(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)=0$ şi atunci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}h(x,y)=0$.

În concluzie,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y),\lim_{(x,y)\to(0,0)}h(x,y)\right)=(0,0).$$

6. Să se studieze continuitatea parţială şi continuitatea funcţiei f,

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y\cdot\sin\dfrac{1}{x} & ,\quad x\neq 0\\ \quad 0 & ,\quad x=0.\end{cases}$$

Rezolvare. Funcţia dată este continuă şi continuă parţial în punctele $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ cu $x\neq 0$, fiind obţinută prin operaţii elementare şi compunere de funcţii elementare continue. Problema rămâne în punctele $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ cu $x=0$.

Fie atunci punctul $(0,b)$, $b\in\mathbf{R}$, pentru care construim funcţiile parţiale $f_1,f_2:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f_1(x)=f(x,b)=\begin{cases}x+b\cdot\sin\dfrac{1}{x} & ,\quad x\neq 0\\ \quad 0 & ,\quad x=0\end{cases}\qquad \text{şi}\ \ f_2(y)=f(0,y)=0.$$

Deoarece pentru şirurile $x_n{}'=\dfrac{1}{2n\pi}$ şi $x_n{}''=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ ce tind la 0, avem că $\sin\dfrac{1}{x_n{}'}=0$ şi $\sin\dfrac{1}{x_n{}''}=1$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ nu există. Atunci, pentru

$b \neq 0$, funcţia parţială f_1 nu este continuă în $x = 0$, deci funcţia f nu este continuă parţial, prin urmare nu este nici continuă, în punctele $(0, b)$, $b \in \mathbf{R}^*$.

Dacă $b = 0$, atunci $f_1(x) = x$, deci f_1 şi f_2 sunt continue, adică funcţia f este continuă parţial în (0,0).

Rămâne de studiat dacă în punctul de acumulare (0,0) funcţia f este continuă, adică există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ şi este egală cu $f(0, 0) = 0$. Vom folosi criteriul cleştelui. Avem:

$$|f(x, y)| = \left|x + y \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x| + \left|y \sin \frac{1}{y}\right| = |x| + |y| \cdot \left|\sin \frac{1}{y}\right|.$$

Deoarece $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbf{R}^*$, rezultă

$$0 \leq |f(x, y)| \leq |x| + |y| \to 0 \ \text{ pentru } \ (x, y) \to (0, 0),$$

deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ şi astfel funcţia f este continuă în (0,0).

7. Să se studieze continuitatea uniformă a funcţiei f,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + x^4 + y^4)}{x^2 + y^2} & , \ 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \\ p & , \ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

unde $p \in \mathbf{R}$.

Rezolvare. Observăm, că domeniul de definiţie al funcţiei f este discul circular închis $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ care este o mulţime închisă şi mărginită în $\mathbf{R}^2$, deci compactă. Atunci funcţia f este uniform continuă pe mulţimea D dacă şi numai dacă este continuă pe D.

Problema continuităţii se pune doar în punctul (0,0). Ţinând cont de formula $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1 + u)}{u} = 1$, avem că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1 + x^4 + y^4)}{x^4 + y^4} = 1$. Atunci, pentru (x, y) cu $0 < x^2 + y^2 \leq 1$, scriem

$$f(x, y) = \frac{\ln(1 + x^4 + y^4)}{x^4 + y^4} \cdot \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2},$$

deci vom studia existenţa limitei $l = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$.

Calculăm limitele iterate:

$$L_{12} = \lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

şi analog $L_{21} = 0$. Deci $L_{12} = L_{21} = 0$ şi dacă există l, atunci $l = 0$. Vom demonstra că există l folosind criteriul cleştelui. Avem:

$$\begin{aligned} 0 &\le \left|\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{y^4}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^4}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^4}{x^2+y^2}\right| \le \\ &\le \left|\frac{x^4}{x^2}\right| + \left|\frac{y^4}{y^2}\right| = |x^2| + |y^2| \to 0, \text{ pentru } (x,y) \to (0,0) \end{aligned}$$

deci $l = 0$. Atunci

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^4+y^4)}{x^4+y^4} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} =$$

$= 1 \cdot 0 = 0$.

În concluzie, dacă $p = 0$ atunci funcţia f este continuă pe mulţimea compactă D, deci este şi uniform continuă, iar dacă $p \neq 0$ atunci funcţia f nu este continuă în (0,0), deci nici uniform continuă pe mulţimea D.

8. Să se arate că funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ nu este uniform continuă.

Rezolvare. Presupunând prin reducere la absurd că f este uniform continuă pe $\mathbf{R}$ rezultă, conform definiţiei, că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $x', x'' \in \mathbf{R}$ cu $|x' - x''| < \eta$ avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Fie atunci $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$, $x'_n = \sqrt{n+1}$, $x''_n = \sqrt{n}$ cu

$$|x'_n - x''_n| = |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

adică de la un rang $n_0 \in \mathbf{N}^*$, $|x'_n - x''_n| < \eta$, pentru orice $\eta > 0$. Atunci rezultă că $|f(x'_n) - f(x''_n)| < \varepsilon_0$, adică $|n + 1 - n| < \dfrac{1}{2}$ ceea ce este fals. Deci presupunerea făcută este falsă astfel că funcţia dată nu este uniform continuă pe $\mathbf{R}$.

9. Fie funcţia $f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ cu proprietatea că există constantele $L, M > 0$ astfel încât:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2| \ , \quad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in D$$

$$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| \le M|x_1 - x_2| \ , \quad \forall (x_1,y),(x_2,y) \in D.$$

Să se arate că funcţia f este uniform continuă pe mulţimea D.

Rezolvare. Vom utiliza definiţia continuităţii uniforme.

Fie ε_0 şi $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$. Avem

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = |f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2) + f(x_1, y_2) - f(x_2, y_2)| \leq$$

$$|f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)| + |f(x_1, y_2) - f(x_2, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| + M|x_1 - x_2|,$$

unde am folosit proprietăţile din enunţul problemei cu $x = x_1$, respectiv $y = y_2$.

Alegem $\eta_0 > 0$ astfel încât $|x_1 - x_2| < \eta_0$, $|y_1 - y_2| < \eta_0$ şi atunci

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < (L + M)\eta_0 \leq \varepsilon_0,$$

pentru $\eta_0 \leq \dfrac{\varepsilon_0}{L + M}$.

Cum ε_0 şi $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ au fost arbitrar alese, am demonstrat că:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L + M} \text{ a.î. } \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D \ :$$

$$|x_1 - x_2| < \eta(\varepsilon), \ |y_1 - y_2| < \eta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că funcţia f este uniform continuă pe D.

Probleme propuse

1. Fie mulţimea $A = [-1, 1] \cap \mathbf{Q}$ din spaţiul metric $(\mathbf{R}, |.|)$. Să se determine mulţimile $\overset{\circ}{A}$, A' şi Fr A.

Răspuns: $\overset{\circ}{A} = \emptyset$; $A' = [-1, 1]$; Fr $A = \{-1, 1\}$.

2. Fie mulţimea $A = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right\} \cup (2, 3]$ din spaţiul metric $(\mathbf{R}, |.|)$ şi funcţia $f : A \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$. Să se determine mulţimile $\overset{\circ}{A}$, A', Fr A, să se studieze continuitatea funcţiei f şi să se calculeze $l_1 = \lim\limits_{x \to \frac{99}{100}} f(x)$ şi $l_2 = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Răspuns: $\overset{\circ}{A} = (2, 3)$, $A' = \{1\} \cup [2, 3]$, Fr $A = A \cup \{1, 2, 3\}$; f continuă pe A, $\nexists l_1$, $l_2 = 1$.

3. Se consideră funcţiile $f : D_f \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ şi $g : D_g \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, definite prin $f(x, y) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}}$, $g(x, y) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}\right)$, unde D_f şi D_g reprezintă domeniile de existenţă ale funcţiilor f, respectiv g. Să se arate că:

Fr D_f =Fr D_g, $\overset{\circ}{D}_f = \overset{\circ}{D}_g$, D_g este mulţime deschisă şi D_f este mulţime compactă.

4. Să se figureze în plan domeniul de existenţă D al funcţiei reale definită prin formula $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x^2+y^2}{2x}$. Să se stabilească poziţia punctelor $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,2)$ faţă de mulţimea D şi să se precizeze în care din aceste puncte se pune problema limitei, respectiv a continuităţii funcţiei f.

Răspuns: $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \le 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 \le 1\} \setminus \{(0,0)\}$; $(0,0) \in D' \cap \mathrm{Fr}\ D$; $(1,0) \in \overset{\circ}{D}$; $(-1,2) \in \mathrm{Ext}\ D$.

5. Se consideră funcţia $f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{1-x^2-y^2}$. Să se figureze în plan mulţimea punctelor în care funcţia nu este definită şi să se determine pentru acesta interiorul, frontiera şi mulţimea punctelor de acumulare.

Răspuns: $\overset{\circ}{A} = \emptyset$; $A' = \mathrm{Fr}\ A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$.

6. Să se determine domeniul de existenţă al funcţiei $f : D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}, \dfrac{\sin 3x}{x}, \dfrac{\ln(1+x)}{x} \right)$ şi să se calculeze $l = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
Răspuns: $D = (-1,0) \cup (0,1]$; $l = (2,3,1)$.

7. Fie funcţia $f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$,

$$f(x,y) = \left(\frac{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}{x^2+y^2}, \frac{\ln(1-x^2y)}{x^2+y^2} \right).$$

Să se figureze în plan domeniul de existenţă D al funcţiei f, să se arate că $(0,0) \in D'$ şi să se studieze limita funcţiei în punctul (0,0).
Răspuns: $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4,\ x^2y < 1\} \setminus \{(0,0)\}$; $l = \left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$.

8. Notând cu L_{12}, L_{21} limitele iterate, respectiv cu l limita funcţiei f în punctul (0,0), să se arate că:

a) pentru $f(x,y) = \dfrac{x-y}{xy}$, nu există L_{12}, L_{21}, respectiv l;

b) pentru $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$, nu există L_{12}, L_{21}, dar $l = 0$;

c) pentru $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^3}{x^4+y^4}$, $L_{12} = 1$, iar L_{21} şi l nu există;

d) pentru $f(x,y) = y^2\cos\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{y}$, $L_{12} = 0, L_{21}$ nu există, dar $l = 0$;

e) pentru $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^4}$, $L_{12} = L_{21} = 0$, dar l nu există;

f) pentru $f(x,y) = \dfrac{x\sin^3 y}{x^2+y^2}$, $L_{12} = L_{21} = l = 0$.

9. Să se studieze limita funcţiei f în punctul (0,0), unde:

a) $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{tg}^2 x + y^3}{x^2+y^2}$; **b)** $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^6}$;

c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$; **d)** $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$;

e) $f(x,y) = y\dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$; **f)** $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2-y^2}$.

Răspuns: nu există.

10. Să se calculeze limita funcţiei f în punctul (0,0), unde:

a) $f(x,y) = (x+y)\cos\dfrac{x}{y}$; **b)** $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}\sin x$;

c) $f(x,y) = \dfrac{x^3y^4}{x^4+y^6}$; **d)** $f(x,y) = \dfrac{\sin^2 x + \sin^4 y}{x^2+y^4}$;

e) $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^6}{x^2+y^4}$; **f)** $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^4+y^4}$.

Răspuns: **a)** 0; **b)** 0; **c)** 0; **d)** 1; **e)** 0; **f)** ∞.

11. Să se calculeze limita funcţiei f în punctul (0,0), unde:

a) $f(x,y) = \dfrac{x\sqrt{xy^3}}{x^4+y^4}$, $x > 0$; **b)** $f(x,y) = \dfrac{\sin^2 x + y^2}{x^2+y^2}$;

c) $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^6}$; **d)** $f(x,y,z) = \dfrac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+z^2}$.

Indicaţie. Se folosesc coordonatele polare, respectiv sferice. **a)** 0; **b)** 1; **c)** 0; **d)** 0.

12. Să se arate că $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \dfrac{1}{2}$ şi să se calculeze

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Răspuns: 0.

13. Să se studieze limita funcţiei f pentru $x \to \infty$ şi $y \to \infty$, unde:

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{1+(x-2y)^4}$; **b)** $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}$;

c) $f(x,y) = \left(1 + \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\right)^{\frac{y}{x}}$.

Răspuns: **a)** nu există; **b)** 0; **c)** 1.

14. Să se determine domeniul de existenţă şi să se studieze limitele iterate şi limita l în punctul (0,0) pentru funcţia $f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$,

$$f(x,y) = \left(\frac{\sin^2 xy}{y^2}, \frac{\ln(1+x^4)}{x^2+y^4}, \cos\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right) \right).$$

Răspuns: punctele din plan care nu aparţin axei Ox, respectiv bisectoarei a doua; $L_{12} = L_{21} = (0,0,1)$; l nu există.

15. Să se studieze continuitatea parţială şi continuitatea funcţiilor:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & , \ x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & , \ x^2+y^2 = 0 \end{cases}$;

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x^3y^3}{x^2+2y^4} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy^2} - \cos(xy)}{x^2+y^2} & , \ x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & , \ x^2+y^2 = 0 \end{cases}$.

Răspuns: continue parţial şi continue pe $\mathbf{R}^2$.

16. Se consideră funcţia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos 2(x^2+y^2)}{x^2y^2} & , \ xy \neq 0 \\ 0 & , \ xy = 0 \end{cases}$$

Să se arate că f este continuă parţial, dar nu este continuă în (0,0).

17. Să se arate că funcţia $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^p$, $p > 1$, nu este uniform continuă.

18. Să se arate că funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$, $p > 0$, nu este uniform continuă.

19. Să se arate că funcţia $f : [1,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^{\frac{1}{p}}$, $p > 1$, este uniform continuă.

20. Să se arate că funcţiile $f : [-1,1] \times (0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = \cos \dfrac{1}{x^2+y^2}$ şi $g : [0,1] \times \left(0, \dfrac{2}{\pi}\right) \to \mathbf{R}$, $g(x,y) = \sin \dfrac{x}{y}$ nu sunt uniform continue pe domeniile lor de definiţie.

21. Să se studieze dacă următoarele funcţii sunt continue uniform pe domeniul lor de existenţă:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arcsin x^2 + \arcsin y^2}{x^2+y^2} & , \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 1 & , \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$;

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-y^2})\sqrt{1-x^2}}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \dfrac{1}{2} & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{1 - \sqrt{1-x^2-y^2}} & , \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 2 & , \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$.

Răspuns: continue uniform.

22. Să se arate că funcţia $f : (1, \infty)^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{y}$ este uniform continuă.

Indicaţie. Se utilizează problema rezolvată 9 din acest capitol.

23. Să se arate că funcţia f, $f(x,y) = \ln \sqrt{\dfrac{1+\sin^2 x}{1+\cos^2 y}}$, este continuă uniform pe $\mathbf{R}^2$.

Indicaţie. Se utilizează teorema lui Lagrange şi problema rezolvată 9 din acest capitol.