GHID PENTRU PREGĂTIREA EXAMENULUI DE ALGEBRĂ ŞI GEOMETRIE
PARTEA A II-A
UPT-AC (CTI)

LECTOR UNIV. DR. NICOLAE LUPA

1. Aplicaţii liniare

1.1. **Breviar teoretic.** Fie V şi W două spaţii vectoriale peste un corp comutativ $\mathbb{K}$ (de cele mai multe ori se consideră $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$; pe lângă aceste corpuri, în algebra liniară specifică pentru Computer Science se mai ia în considerare şi corpul claselor de resturi modulo 2, $\mathbb{Z}_2$).

Definiţia 1.1. O aplicaţie $f : V \to W$ se numeşte *aplicaţie liniară* sau *morfism de spaţii vectoriale* dacă:

(1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, pentru orice $v_1, v_2 \in V$;
(2) $f(\alpha\, v) = \alpha\, f(v)$, pentru orice $v \in V$ şi $\alpha \in \mathbb{K}$.

În cazul particular în care f este o aplicaţie liniară bijectivă, aceasta se numeşte *izomorfism liniar* de la V la W, iar spaţiile V şi W se numesc izomorfe (şi notăm $V \simeq W$).

O aplicaţie liniară pentru care domeniul şi codomeniul coincid (i.e. $V = W$) se numeşte *operator liniar* (sau *endomorfism liniar*).

Se poate demonstra uşor că $f : V \to W$ este o aplicaţie liniară dacă şi numai dacă are loc relaţia:

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2), \text{ pentru orice } v_1, v_2 \in V \text{ şi } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}. \quad (1)$$

Remarca 1.2. Dacă $f : V \to W$ este o aplicaţie liniară, atunci

$$f(0_V) = 0_W,$$

unde 0_V este vectorul nul din V, respectiv 0_W este vectorul nul din W. Reciproca nu este adevărată, adică dacă $f(0_V) = 0_W$, nu rezultă, în general, că f este o aplicaţie liniară. Cu alte cuvinte, dacă $f(0_V) \neq 0_W$, atunci f nu este o aplicaţie liniară, iar dacă $f(0_V) = 0_W$, nu putem trage nici o concluzie în legătură cu liniaritatea aplicaţiei f.

Exemplul 1.3. Aplicaţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[X]$, $f(a, b) = (a + b - 1)X^2 - 2aX + b$ nu este o aplicaţie liniară, căci $f(0, 0) = -X^2 \neq 0 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.

Definiţia 1.4. Fie $f : V \to W$ o aplicaţie liniară. Mulţimea

$$Ker(f) = \{v \in V : \ f(v) = 0_W\}$$

se numeşte *nucleul* aplicaţiei liniare f, iar mulţimea

$$Im(f) = \{w \in W : \ \text{există } v \in V \text{ astfel încât } f(v) = w\}$$

se numeşte *imaginea* lui f.

Propoziţia 1.5. Dacă $f : V \to W$ este o aplicaţie liniară, atunci

(1) $Ker(f)$ este un subspaţiu vectorial în V;
(2) $Im(f)$ este un subspaţiu vectorial în W;
(3) f este injectivă dacă şi numai dacă $Ker(f) = \{0_V\}$;
(4) f este surjectivă dacă şi numai dacă $Im(f) = W$.

Teorema 1.6 (Teorema dimensiunii)**.** Dacă V şi W sunt spaţii vectoriale finit dimensionale şi $f : V \to W$ este o aplicaţie liniară, atunci are loc relaţia

$$dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(V). \tag{2}$$

Numărul $dim(Ker(f))$ se numeşte defectul aplicaţiei liniare f şi se notează cu def(f), iar $dim(Im(f))$ se numeşte rangul lui f şi se notează cu rang(f).

Ca o consecinţă imediată a teoremei dimensiunii se obţine următorul rezultat:

Corolarul 1.7. *Două spaţii vectoriale finit dimensionale V şi W sunt izomorfe dacă şi numai dacă V şi W au aceeaşi dimensiune, adică $dim(V) = dim(W)$.*

Acest rezultat ne arată, în particular, că orice spaţiu vectorial real de dimensiune n ($n \in \mathbb{N}^*$), V_n, este izomorf cu $\mathbb{R}^n$, deci orice spaţiu vectorial real n-dimensional poate fi identificat din punct de vedere algebric cu $\mathbb{R}^n$.

Exemplul 1.8. Spaţiile vectoriale $\mathbb{R}_5[X]$, $\mathbb{R}^{3\times2}$ şi $\mathbb{R}^6$ sunt izomorfe, căci

$$dim(\mathbb{R}_5[X]) = dim(\mathbb{R}^{3\times2}) = dim(\mathbb{R}^6) = 6.$$

Definiţia 1.9 (Matricea asociată unei aplicaţii liniare relativ la o pereche de baze)**.** Fie V_n şi W_m două spaţii vectoriale finit dimensionale peste corpul numerelor reale $\mathbb{R}$ (în mod analog se poate considera orice alt corp comutativ $\mathbb{K}$) şi

$$B_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

o bază în V_n (V_n are dimensiunea n), respectiv

$$B_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$$

o bază în W_m (W_m are dimensiunea m). Dacă $f : V_n \to W_m$ este o aplicaţie liniară, atunci vectorii $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ se pot scrie în mod unic în funcţie de vectorii $w_1, w_2, \dots, w_m$, adică putem scrie

$$\begin{cases} f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \cdots + a_{1m}w_m \\ f(v_2) = a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{2m}w_m \\ \dots \\ f(v_n) = a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \cdots + a_{nm}w_m \end{cases}.$$

Matricea

$$A_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & & \vdots & \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

ale cărei coloane coincid cu coordonatele vectorilor $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ în baza B_2, se numeşte *matricea asociată aplicaţiei liniare f relativ la perechea de baze* (B_1, B_2).

Se observă că $A_{B_1B_2} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, adică **numărul de linii ale matricei $A_{B_1B_2}$ este egal cu dimensiunea codomeniului aplicaţiei liniare f, iar numărul de coloane este egal cu dimensiunea domeniului**.

În cazul particular al unui operator liniar $f : V_n \to V_n$ pentru care $B_1 = B_2 = B$, vom nota $A_{BB} = A_B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, caz în care A_B este o matrice pătratică. Vom spune că A_B este matricea asociată operatorului liniar f relativ la baza B.

Exemplul 1.10. Dacă $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}_p[X]$ este o aplicaţie liniară şi B_1 este o bază oarecare în $\mathbb{R}^{m\times n}$, respectiv B_2 este o bază în $\mathbb{R}_p[X]$, atunci $A_{B_1B_2}$ este o matrice cu $p+1$ linii şi mn coloane, $A_{B_1B_2} \in \mathbb{R}^{(p+1)\times mn}$, căci $dim(\mathbb{R}^{m\times n}) = mn$ şi $dim(\mathbb{R}_p[X]) = p+1$.

În cele ce urmează vom presupune că V şi W sunt spaţii vectoriale reale finit dimensionale.

Dacă B_1, B_1' sunt două baze în V, respectiv B_2, B_2' sunt baze în W, atunci are loc:

$$\boxed{A_{B_1'B_2'} = T_{B_2'B_2} A_{B_1B_2} T_{B_1B_1'} = T^{-1}_{B_2B_2'} A_{B_1B_2} T_{B_1B_1'}. \qquad (3)}$$

În cazul particular al unui operator liniar $f : V \to V$ şi $B_1 = B_2 = B$, respectiv $B_1' = B_2' = B'$, relaţia (3) devine:

$$\boxed{A_{B'} = T^{-1}_{BB'} A_B T_{BB'}, \qquad (4)}$$

ceea ce este echivalent cu

$$\boxed{A_B = T_{BB'} A_{B'} T^{-1}_{BB'}. \qquad (5)}$$

O altă **formulă importantă** este dată de relaţia:

$$\boxed{[f(v)]_{B_2} = A_{B_1B_2}[v]_{B_1}, \text{ pentru orice } v \in V. \qquad (6)}$$

Plecând de la această formulă, se deduce imediat că

$$Ker(f) = \{v \in V : A_{B_1B_2}[v]_{B_1} = [0_W]_{B_2}\} \simeq Null(A_{B_1B_2}),$$

respectiv

$$Im(f) = \{w \in W : \text{ există } v \in V \text{ astfel încât } A_{B_1B_2}[v]_{B_1} = [w]_{B_2}\} \simeq col(A_{B_1B_2}).$$

1.2. **Probleme propuse.**

Exerciţiul 1.1. Să se verifice dacă următoarele aplicaţii sunt liniare:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[X]$, $f(a,b) = (2a+b)X^2 - aX + b$
b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 - 2x_2 + 4x_3, -x_1 + x_2 - 2x_3)$
c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 0)$
d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x+y-1,\ 2x-y,\ 0)$
e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (xy,\ x+2y)$

Dacă f este o aplicaţie liniară, să se determine matricea asociată lui f în perechea de baze canonice corespunzătoare domeniului şi codomeniului, $Ker(f)$, $Im(f)$ şi să se precizeze dacă f este injectivă, respectiv surjectivă.

Exerciţiul 1.2. Fie $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^2$ o aplicaţie liniară care are relativ la bazele

$$B_1 = B_c(\mathbb{R}_2[X]) = \left\{X^2,\ X,\ 1\right\} \text{ şi } B_2 = \{v_1 = (1, -1),\ v_2 = (2, 1)\},$$

matricea

$$A_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine (în ordinea dată):

a) $f(2X^2 - X)$;
b) Expresia analitică a lui f.

Exerciţiul 1.3. Se consideră aplicaţia liniară

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\quad f(x, y, z) = (x + 2y,\ x + y - z).$$

Să se determine matricea $A_{B_1B_2}$, asociată lui f relativ la perechea de baze (B_1, B_2), unde:

a) $B_1 = B_c(\mathbb{R}^3)$, $B_2 = \{v_1 = (1, -1),\ v_2 = (-2, 3)\}$;
b) $B_1 = \{v_1 = (1, 0, -1),\ v_2 = (1, 1, 2),\ v_3 = (0, 0, 1)\}$, $B_2 = B_c(\mathbb{R}^2)$.

Exerciţiul 1.4. Fie $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ o bază arbitrară în $\mathbb{R}^3$ relativ la care un operator liniar $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ are matricea

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Să se exprime $L(v_2)$ în funcţie de v_1, v_2, v_3;
b) Să se determine matricea asociată lui L relativ la baza

$$B' = \{w_1 = v_1 + v_2,\ w_2 = v_1 - v_2,\ w_3 = v_1 + v_2 + v_3\}.$$

Indicaţie: b) Se foloseşte relaţia (4).

Exerciţiul 1.5. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[X]$ o aplicaţie liniară care verifică relaţiile:

$$f(1, -1) = 2X^2 - 2X,\ f(1, 2) = -X^2 + X.$$

a) Să se determine forma analitică a lui f;
b) Să se determine matricea asociată lui f relativ la perechea de baze (B_1, B_2), unde

$$B_1 = \{v_1 = (1, -1), v_2 = (1, 2)\} \subset \mathbb{R}^2,$$

respectiv

$$B_2 = \{p_1 = X^2 - 9X + 5, p_2 = X^2 - X, p_3 = 5X^2 + 7X\} \subset \mathbb{R}_2[X].$$

Exerciţiul 1.6. Arătaţi că $L : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $L(M) = M^T$ este un operator liniar. Este L un izomorfism? Dacă A este matricea asociată lui L relativ la baza canonică din $\mathbb{R}^{n\times n}$, arătaţi că $A^2 = I_{n^2}$.
Indicaţie: Ultima cerinţă rezultă din relaţia $L(L(M)) = M$, pentru $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

utilizând formula (6). Într-adevăr, pentru orice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ au loc următoarele echivalenţe:

$$L(L(M)) = M \iff [L(L(M))]_{B_c} = [M]_{B_c} \iff A[L(M)]_{B_c} = [M]_{B_c}$$
$$\iff A(A[M]_{B_c}) = [M]_{B_c} \iff A^2[M]_{B_c} = [M]_{B_c},$$

ceea ce conduce la relaţia cerută.

Exerciţiul 1.7. Arătaţi că funcţia $D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $D(f) = f'$ este o aplicaţie liniară şi apoi să se studieze dacă D este injectivă, respectiv surjectivă.

Exerciţiul 1.8. Stabiliţi dacă funcţia $r : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$, $r(A) = rang(A)$ este o aplicaţie liniară.

Exerciţiul 1.9. Stabiliţi dacă spaţiile vectoriale V_1 şi V_2 sunt izomorfe şi, în caz afirmativ, indicaţi un izomorfism între cele două spaţii vectoriale:

a) $V_1 = \mathbb{R}^{2\times 3}$, $V_2 = \mathbb{R}_5[X]$;
b) $V_1 = \mathbb{R}^2$, $V_2 = span\{v_1 = (1, 1, 2),\ v_2 = (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$;
c) $V_1 = \mathbb{R}^3$, $V_2 = span\{v_1 = (1, 1, -1),\ v_2 = (2, 1, 0), v_3 = (0, 1, -2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

Indicaţie: a) Se defineşte funcţia $f : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}_5[X]$,

$$f\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} = a_1X^5 + a_2X^4 + a_3X^3 + a_4X^2 + a_5X + a_6.$$

b) $f : V_1 \to V_2,\ f(a_1, a_2) = a_1v_1 + a_2v_2$ c) Se arată că $dim(V_2) = 2$.

2. Valori proprii şi vectori proprii

2.1. **Breviar teoretic.** În acest capitol vom presupune pentru început că $V = V_n$ este un spaţiu vectorial de dimensiune n peste corpul $\mathbb{K}$ (din observaţiile făcute în capitolul precedent, acesta poate fi identificat cu $\mathbb{R}^n$ în ipoteza în care $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Definiţia 2.1. Fie $L : V \to V$ un operator liniar. Un scalar $\lambda \in \mathbb{K}$ se numeşte *valoare proprie* a operatorului L dacă există un vector **nenul** $v \in V$ astfel încât

$$L(v) = \lambda\, v. \tag{7}$$

Vectorul $v \in V$ se numeşte *vector propriu* corespunzător valorii proprii λ.

În cele ce urmează vom considera doar cazul $V = \mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Fie B o bază fixată în $\mathbb{R}^n$ şi A matricea asociată operatorului L relativ la baza B, adică $A = A_B$. Din (6) rezultă că relaţia (7) se exprimă matriceal astfel:

$$A[v]_B = \lambda[v]_B \iff (A - \lambda I_n)X = 0,\ X = [v]_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T. \tag{8}$$

Valorile proprii ale operatorului liniar L, respectiv vectorii proprii ai lui L se mai spun şi valori proprii ale matricei pătratice A, respectiv vectori proprii ai lui A.

Ecuaţia (8) reprezintă, de fapt, un sistem linear omogen de tipul $n \times n$. Punând condiţia ca operatorul liniar L să admită un vector propriu v corespunzător valorii proprii λ (reamintim că **un vector propriu este un vector nenul**), se obţine că sistemul dat de ecuaţia matriceală (8) este compatibil nedeterminat, de unde rezultă că determinantul matricei sistemului este zero, adică

$$det(A - \lambda I_n) = 0. \tag{9}$$

Dezvoltând determinantul $det(A - \lambda I_n)$ după λ se obţine un polinom de gradul n în λ, numit *polinomul caracteristic* al operatorului L (sau al matricei A), notat cu

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I_n). \tag{10}$$

Obţinem astfel următorul algoritm de determinare a valorilor proprii, respectiv a vectorilor proprii pentru un operator liniar:

(1) Se determină matricea A, asociată operatorului liniar L relativ la o bază fixată B, convenabil aleasă;

(2) Se determină rădăcinile polinomului caracteristic

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I_n),$$

dintre care se aleg valorile proprii ale lui L (care sunt de fapt rădăcinile reale ale polinomului caracteristic);

(3) Pentru fiecare valoare proprie λ, se determină soluţiile nenule ale sistemului liniar omogen

$$(A - \lambda I_n)X = 0,$$

unde $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$; cum X este vectorul coloană al coordonatelor unui vector propriu v în baza B, se obţin vectorii proprii ai operatorului liniar L corespunzători valorii proprii λ. Mulţimea

$$S_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{n\times 1} : (A - \lambda I_n)X = 0\} = Null(A - \lambda I_n)$$

se numeşte *subspaţiul propriu* corespunzător valorii proprii λ (acesta este un subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{n\times 1}$).

Remarca 2.2. Reamintim că dacă $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, atunci

$$dim(Null(A)) = n - rang(A).$$

În cazul nostru, cum $A - \lambda I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se obţine

$$dim(S_\lambda) = dim(Null(A - \lambda I_n)) = n - rang(A - \lambda I_n). \tag{11}$$

Propoziţia 2.3. Dacă λ_1 şi λ_2 sunt valori proprii distincte ale unui operator liniar L (ale unei matrice A) şi v_1 este un vector propriu corespunzător valorii proprii λ_1, respectiv v_2 este un vector propriu corespunzător valorii proprii λ_2, atunci v_1 şi v_2 sunt vectori liniar independenţi.

Propoziţia de mai sus ne arată că **la valori proprii distincte corespund vectori proprii liniar independenţi**.

Propoziţia 2.4. Dacă λ este o valoare proprie a lui L (a lui A) de multiplicitate m_λ (adică λ este o rădăcină reală de ordinul m_λ a polinomului caracteristic), atunci are loc relaţia:

$$1 \leq dim(S_\lambda) \leq m_\lambda.$$

Corolarul 2.5. Dacă $m_\lambda = 1$, adică λ este o rădăcină reală simplă a polinomului caracteristic, atunci $dim(S_\lambda) = 1$.

Definiţia 2.6. Două matrice pătratice $A, A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se numesc *similare* (şi notăm $A \sim A'$) dacă există o matrice **inversabilă** $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ astfel încât are loc următoarea relaţie (numită *relaţia de similaritate*):

$$A = TA'T^{-1}. \tag{12}$$

Exemplul 2.7. Relaţia (5) ne arată că matricele A_B şi $A_{B'}$, asociate unui operator liniar $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ în două baze distincte B, respectiv B', sunt similare.

Importanţa matricelor similare este dată de următorul rezultat:

Propoziţia 2.8. Dacă $A, A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sunt două matrice similare, atunci

(1) A şi A' au aceeaşi urmă, $tr(A) = tr(A')$ (urma unei matrice pătratice A, notată cu $tr(A)$, este suma elementelor de pe diagonala principală a lui A);
(2) A şi A' au acelaşi determinant, $det(A) = det(A')$;
(3) A şi A' au acelaşi rang, $rang(A) = rang(A')$;
(4) A şi A' au acelaşi polinom caracteristic;
(5) A şi A' au aceleaşi valori proprii, dar nu au în general aceiaşi vectori proprii.

Remarca 2.9. Dacă matricea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este similară cu o matrice diagonală

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

iar relaţia de similaritate este $A = TDT^{-1}$, atunci puterile p ale lui A, $p \in \mathbb{N}^*$, se pot calcula folosind formula:

$$A^p = TD^pT^{-1}, \tag{13}$$

iar

$$D^p = \begin{pmatrix} d_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^p & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^p \end{pmatrix}.$$

În cazul în care o matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este similară cu o matrice diagonală D, adică există o matrice inversabilă $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ astfel ca $A = TDT^{-1}$, atunci se spune că A este *diagonalizabilă*.

Teorema 2.10. *O matrice pătratică $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este diagonalizabilă dacă şi numai dacă au loc următoarele condiţii:*

(1) *Toate rădăcinile polinomului caracteristic sunt reale, adică toate rădăcinile polinomului caracteristic sunt valori proprii pentru A;*
(2) *$dim(S_\lambda) = m_\lambda$, pentru orice valoare proprie λ.*

Dacă o matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este diagonalizabilă cu $A \sim D$, atunci matricea diagonală D se obţine punând valorile proprii ale lui A pe diagonala principală (într-o anumită ordine). În aceste condiţii se poate construi în $\mathbb{R}^n$ o bază formată din vectori proprii ai matricei A; o astfel de bază se obţine concatenând bazele fiecărui subspaţiu propriu (păstrând ordinea dată de valorile proprii ale lui A de pe diagonala principală a lui D). Mai mult, au loc relaţiile:

$$tr(A) = tr(D) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \text{ şi } det(A) = det(D) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n, \tag{14}$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui A.

Se poate arăta că **orice matrice simetrică ($A^T = A$) este diagonalizabilă**. Mai mult, **la valori proprii distincte ale unei matrice simetrice corespund vectori proprii ortogonali**.

Teorema 2.11 (Teorema Cayley-Hamilton)**.** *Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice pătratică şi P_A polinomul său caracteristic. Atunci $P_A(A) = O_n$, adică A este rădăcină a polinomului său caracteristic.*

Exemplul 2.12. Dacă
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$
atunci polinomul său caracteristic este
$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= det(A - \lambda I_2) \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc \\ &= \lambda^2 - tr(A)\,\lambda + det(A). \end{aligned}$$
Din Teorema Cayley-Hamilton se obţine
$$A^2 - tr(A)\cdot A + det(A)\cdot I_2 = O_2.$$

2.2. **Probleme propuse.**

Exerciţiul 2.1. Să se arate că vectorul $v = (1,3)^T$ este un vector propriu al matricei
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Precizaţi valoarea proprie corespunzătoare.

Exerciţiul 2.2. Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ astfel ca $det(A + 5I_n) = 0$. Ce informaţie se poate deduce? Argumentaţi!

Exerciţiul 2.3. Să se arate că o matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este inversabilă dacă şi numai dacă 0 nu este valoare proprie pentru A.

Exerciţiul 2.4. Fie $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un izomorfism liniar şi v un vector propriu al lui L corespunzător valorii proprii λ. Să se arate că λ^{-1} este o valoare proprie pentru L^{-1} şi să se determine un vector propriu corespunzător.
Indicaţie: $L(v) = \lambda\, v \Longrightarrow v = \lambda\, L^{-1}(v)$.

Exerciţiul 2.5. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători pentru matricea
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Studiaţi dacă A este diagonalizabilă şi în caz afirmativ, folosind forma sa diagonală, daterminaţi A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exerciţiul 2.6. Fie $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_2, x_2, -x_1 + x_2 + x_3)$ un operator liniar.

a) Să se determine matricea $A = A_{B_c}$, asociată lui L în baza canonică din $\mathbb{R}^3$;
b) Să se determine valorile proprii ale lui L, subspaţiile proprii corespunzătoare şi să se arate că matricea A este diagonalizabilă;
c) Să se determine forma diagonală a lui A şi o bază B în $\mathbb{R}^3$ relativ la care L admite forma diagonală găsită;
d) Să se determine matricea de trecere de la baza canonică la baza B, T_{B_cB};
e) Să se calculeze A^{2016}.

Exercițiul 2.7. Matricea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

admite perechile de valori şi vectori proprii:

$$(\lambda_1 = 4, v_1 = (1,0,0)^T),\ (\lambda_2 = 2, v_2 = (2,-1,1)^T).$$

Să se determine încă o pereche proprie (λ_3, v_3). Este matricea A similară cu o matrice diagonală? Dacă da, scrieţi relaţia de similaritate.

Exercițiul 2.8. Se dă matricea:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Să se determine valorile proprii ale lui A, subspaţiile proprii corespunzătoare şi să se studieze dacă matricea A este diagonalizabilă;
b) Dacă A este diagonalizabilă, să se determine forma sa diagonală şi o bază în $\mathbb{R}^3$ formată din vectori proprii ai lui A.

Exercițiul 2.9. Fie matricea simetrică

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinaţi valorile proprii ale lui A fără a calcula polinomul caracteristic.
Indicaţie: Calculaţi $A - I_5$, deduceţi de aici că 1 este valoare proprie a lui A; Calculaţi apoi $rang(A - I_5)$ şi utilizând formula (11), deduceţi $dim(S_1)$ şi apoi m_1; Folosind relaţia (14) dintre urma matricei A şi cea a formei sale diagonale, determinaţi toate valorile proprii ale lui A.

Exercițiul 2.10. Matricea simetrică

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

are valoarea proprie $\lambda = 1$.

a) Să se determine toate valorile proprii ale lui A fără a calcula polinomul caracteristic.
   Indicaţie: Se justifică de ce matricea A este diagonalizabilă şi apoi se foloseşte relaţia (14).
b) Să se determine forma diagonală a lui A şi o bază ortonormată B în $\mathbb{R}^3$ formată din vectori proprii ai lui A.
   Indicaţie: Se determină o **bază ortonormată pentru fiecare valoare proprie** şi apoi se concatenează aceste baze, obţinându-se baza cerută.
c) Să se calculeze A^{100}.
   Indicaţie: Pentru a determina matricea T^{-1} din relaţia de similaritate ne folosim de faptul că B este o bază ortonormată, adică

$$T^{-1} = T_{B_cB}^{-1} = T_{B_cB}^{T}.$$