Analiză Matematică - SETUL 6 - Limite de funcţii. Continuitate

1. Utilizând limitele iterate, să se arate că funcţia $f(x,y)=\dfrac{y^2-2x}{y^2+2x}$ nu are limită în punctul $(0,0)$. Similar, arătaţi că funcţia $g(x,y)=\dfrac{y^2-2x}{x^2-2y}$ nu are limită în punctul $(2,2)$.

2. Folosind teorema lui Heine, să se arate că următoarele funcţii nu au limită în origine

(i) $f(x,y)=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}, y^2\neq 2x;$ $\quad$ (ii) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^6}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, (x,y)=(0,0)\end{cases};$

$$(iii)\ f(x,y)=\frac{e^{x^2y}-1}{x^2y^2}.$$

3. Să se calculeze limitele:

$i)$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1};$

$ii)$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{x};$

$iii)$ $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2+y^2};$

$iv)$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-x^2-y^2}{2-\sqrt{x^2+y^2+4}}.$

4. Notând cu L_{12}, L_{21} limitele iterate, respectiv cu l limita funcţiei f în punctul (0,0), să se arate că:

a) pentru $f(x,y)=\dfrac{x-y}{xy}$, nu există L_{12}, L_{21}, respectiv l;

b) pentru $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$, nu există L_{12}, L_{21}, dar $l=0$;

c) pentru $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^3}{x^4+y^4}$, $L_{12}=1$, iar L_{21} şi l nu există;

d) pentru $f(x,y)=y^2\cos\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{y}$, $L_{12}=0, L_{21}$ nu există, dar $l=0$;

e) pentru $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^4}$, $L_{12}=L_{21}=0$, dar l nu există;

f) pentru $f(x,y)=\dfrac{x\sin^3 y}{x^2+y^2}$, $L_{12}=L_{21}=l=0$.

5. Fiind dată funcţia $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

(i) Să se determine domeniul maxim de definiţie D.

(ii) Să se studieze existenţa limitelor iterate în origine.

(*iii*) Să se studieze existenţa limitei în origine relativă la drepte ce trec prin origine.

(*iv*) Să se studieze existenţa limitei în origine relativă la cercuri ce trec prin origine de ecuaţii $(C_m) x^2 + y^2 = mx$.

6. Se consideră funcţia

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Să se arate că:

(*i*) f este continuă parţial în punctul $(0,0)$;

(*ii*) f este discontinuă în punctul (0,0);

(*iii*) f este mărginită pe $\mathbb{R}^2$.

7. Să se studieze continuitatea parţială şi continuitatea funcţiei f,

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y \cdot \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

8. Să se studieze continuitatea funcţiilor:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos x^3 y^3}{x^2+2y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2} - \cos(xy)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$