Cursul 12

Aplicaţii ale produsului scalar şi vectorial în geometria analitică în spaţiu

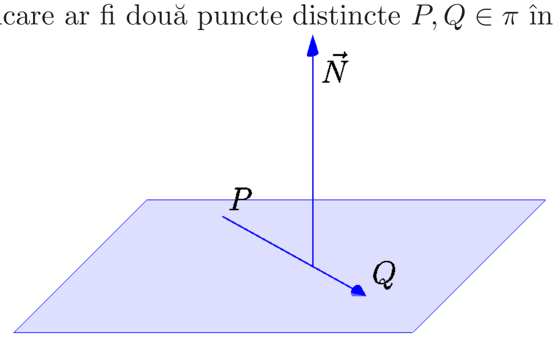
12.1 Planul în spaţiul 3D

În acest material prezentăm elementele de bază ale geometriei analitice în spaţiul 3D, notat $\mathbb{E}^3$ (spaţiul punctual euclidian; punctual pentru că elementele de bază sunt puncte şi euclidian pentru că pe spaţiul vectorilor determinaţi de două puncte se defineşte produsul scalar standard din $\mathbb{R}^3$).

Spaţiul $\mathbb{E}^3$ se consideră raportat la reperul ortonormat $\mathcal{R} = (O; (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ de axe ortogonale Ox, Oy, Oz. Baza $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ce defineşte reperul este baza canonică, care se notează în acest fel în geometrie, fizică şi mecanică. Un punct arbitrar din spaţiu, raportat la acest sistem de axe, are coordonatele (x, y, z).

În continuare presupunem cunoscute toate axiomele relativ la dreaptă şi plan în spaţiu, precum şi proprietăţile acestora, studiate în clasa a VIII-a.

Dacă π este un plan, numim **normala la plan** un vector nenul $\overrightarrow{N} \in \mathbb{R}^3$ cu proprietatea că oricare ar fi două puncte distincte $P, Q \in \pi$ în plan, vectorul $\overrightarrow{N}$ este ortogonal pe $\overrightarrow{PQ}$.



12.1.1 Planul determinat de un punct şi normala la plan

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat şi $\overrightarrow{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ un vector nenul fixat. Planul ce conţine punctul M_0 şi are normala $\overrightarrow{N}$ este format din mulţimea punctelor M din spaţiu cu proprietatea că $<\overrightarrow{N}, \overrightarrow{M_0M}>= 0$, adică vectorul $\overrightarrow{N}$ este perpendicular pe $\overrightarrow{M_0M}$ dacă $M \neq M_0$:

$$\pi = \{M(x,y,z) \ :< \overrightarrow{N}, \overrightarrow{M_0M}>= 0\}. \tag{12.1}$$

Dar vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ are coordonatele $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0)\mathbf{i} + (y-y_0)\mathbf{j} + (z-z_0)\mathbf{k}$. Astfel, relaţia $<\overrightarrow{N}, \overrightarrow{M_0M}>= 0$ este echivalentă cu $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$.

Ecuaţia planului ce conţine punctul $\mathbf{M_0(x_0, y_0, z_0)}$ şi are normala $\overrightarrow{N} = \mathbf{Ai + Bj + Ck}$ este:

$$\mathbf{A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0}. \tag{12.2}$$

De exemplu, ecuaţia planului ce conţine punctul $M_0(-1,4,2)$ şi are normala $\overrightarrow{N} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ este $3(x+1) - 7(y-4) + 2(z-2) = 0 \iff 3x - 7y + 2z + 27 = 0$.

Ecuaţia (12.2) este echivalentă cu

$$Ax + By + Cz + \underbrace{(-Ax_0 - By_0 - Cz_0)}_{D} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Ecuaţia

$$\mathbf{Ax + By + Cz + D = 0} \tag{12.3}$$

se numeşte **ecuaţia generală a planului**.

Coeficienţii lui x, y şi z din ecuaţia generală a planului reprezintă coordonatele normalei la plan. De exemplu, normala planului de ecuaţie $-2x + 5y - 3z + 11 = 0$ este $\overrightarrow{N} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

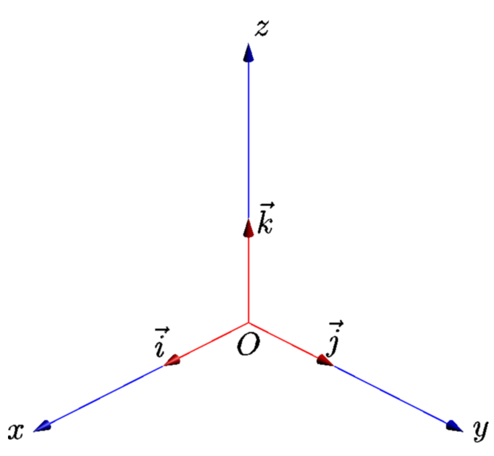
Plane de coordonate în spaţiu

Sistemului de axe ortogonale $xOyz$, ce au direcţiile $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, i se asociază trei plane:

• planul ce trece prin O şi are normala $\mathbf{k} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$ are ecuaţia

$$0(x-0) + 0(y-0) + 1(z-0) = 0,$$

adică $z = 0$.



În acest plan toate punctele au coordonata a treia, z, egală cu 0. Numim acest plan, planul xOy.

În mod analog, se obţine ecuaţia

• planului yOz: $x = 0$;

• planului xOz: $y = 0$.

Planele xOy, xOz, yOz se numesc plane de coordonate.

12.1.2 Plane paralele

Două plane

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 : \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &=& 0 \\ \pi_2 : \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &=& 0 \end{array}$$

fie sunt paralele, fie coincid dacă şi numai dacă normalele lor

$$\overrightarrow{N}_{\pi_1} = A_1\mathbf{i} + B_1\mathbf{j} + C_1\mathbf{k}, \ \overrightarrow{N}_{\pi_2} = A_2\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + C_2\mathbf{k}$$

sunt vectori coliniari şi notăm $\overrightarrow{N}_{\pi_1} || \overrightarrow{N}_{\pi_2}$, adică există $\lambda \neq 0$ astfel încât $\overrightarrow{N}_{\pi_2} = \lambda \overrightarrow{N}_{\pi_1}$. Relaţia de coliniaritate scrisă pe coordonate revine la

$$A_2 = \lambda A_1, \ B_2 = \lambda B_1, \ C_2 = \lambda C_1,$$

ceea ce este echivalent cu

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}.$$

Dacă

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1},$$

atunci cele două plane coincid, iar dacă

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} \neq \frac{D_2}{D_1},$$

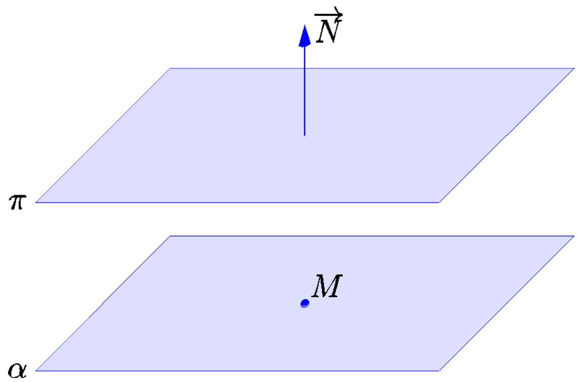
atunci cele două plane sunt paralele.

Exemplul 1. Planele

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 : -2x + \ \ y + 3z - 7 &=& 0 \\ \pi_2 : -4x + 2y + 6z + 10 &=& 0 \end{array}$$

sunt paralele.

Exemplul 2. Să se scrie ecuaţia planului ce conţine punctul $M(0, 2, -7)$ şi este paralel cu planul $\pi : 4x - 3z + 2 = 0$.



Practic, trebuie să scriem ecuaţia planului α ce conţine punctul M şi are aceeaşi normală ca şi planul π, adică $\overrightarrow{N}_\alpha = 4\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Deci, ecuaţia planului va fi

$$\alpha: \quad 4(x-0) + 0(y-2) - 3(z+7) = 0, \quad \text{adică} \quad 4x - 3z - 21 = 0.$$

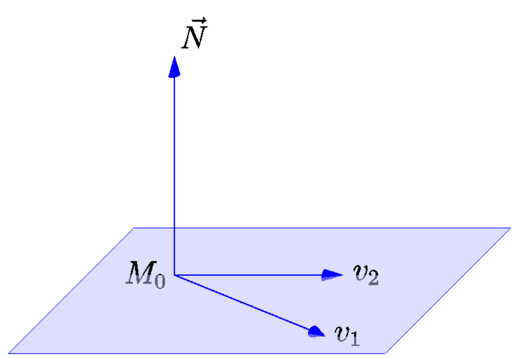
Plane paralele cu planele de coordonate

Două plane ale căror ecuaţii generale diferă doar prin termenul liber (D) sunt plane paralele. Astfel, putem afirma că

• orice plan paralel cu planul xOy are ecuaţia $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (planul xOy are ecuatia $z = 0$, deci ecuaţia unui plan paralel cu el diferă doar prin termenul liber);
• orice plan paralel cu planul yOz are ecuaţia $x = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$;
• orice plan paralel cu planul xOz are ecuaţia $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

12.1.3 Planul determinat de un punct şi două direcţii date

Fie M_0 un punct fixat şi $v_1 = l_1\mathbf{i} + m_1\mathbf{j} + n_1\mathbf{k}$, $v_2 = l_2\mathbf{i} + m_2\mathbf{j} + n_2\mathbf{k}$ doi vectori **nenuli şi necoliniari**. Pentru a determina ecuaţia planului ce conţine punctul M_0 şi direcţiile celor doi vectori, notat $\pi(M_0; v_1, v_2)$, ţinem seama că normala la plan este perpendiculară pe orice vector nenul din plan, deci şi pe v_1, respectiv v_2.



Un vector simultan perpendicular pe doi vectori daţi este produsul vectorial al celor doi vectori, deci normala la planul căutat este

$$\overrightarrow{N} = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}}_{A} \mathbf{i} - \underbrace{\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}}_{B} \mathbf{j} + \underbrace{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}}_{C} \mathbf{k}.$$

Prin urmare, planul ce conţine punctul M_0 şi direcţiile v_1, v_2 are ecuaţia

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} (x - x_0) - \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0,$$

adică

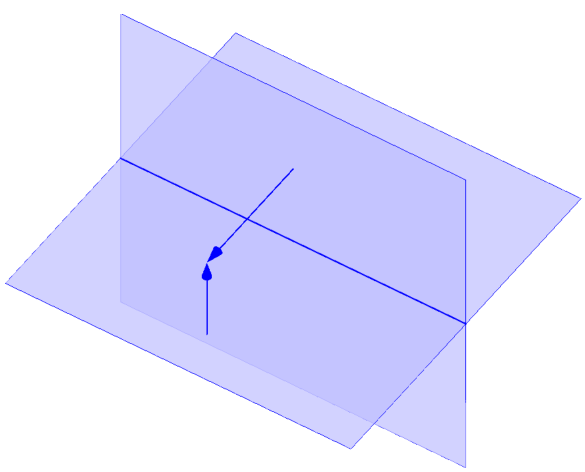
$$\boxed{\pi(\mathbf{M_0}; \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}. \qquad (12.4)}$$

12.1.4 Plane perpendiculare

Două plane

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad & A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &=& \quad 0 \\ \pi_2 : \quad & A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &=& \quad 0 \end{aligned}$$

sunt perpendiculare dacă şi numai dacă normalele lor sunt perpendiculare.



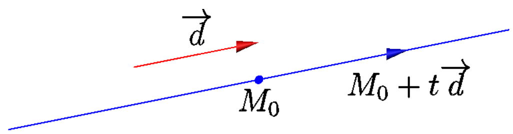
Exemplul 3. Să se arate că planele $\pi_1 : \ -x + 2y + 3z + 1 = 0$, $\pi_2 : 5x + 7y - 3z - 6 = 0$ sunt perpendiculare.

Normalele celor două plane sunt respectiv: $\overrightarrow{N}_{\pi_1} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\overrightarrow{N}_{\pi_2} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Produsul lor scalar este: $< \overrightarrow{N}_{\pi_1}, \overrightarrow{N}_{\pi_2} >= -5 + 14 - 9 = 0$, deci $\overrightarrow{N}_{\pi_1} \perp \overrightarrow{N}_{\pi_2}$.

12.2 Dreapta ce conţine un punct şi are direcţia dată

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct şi $\overrightarrow{d} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ un vector nenul. Dreapta ce trece prin M_0 şi are direcţia $\overrightarrow{d}$ este mulţimea punctelor M cu proprietatea că vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ este coliniar cu vectorul $\overrightarrow{d}$:

$$d = \left\{ M(x, y, z) \,:\, \overrightarrow{M_0M} = t\,\overrightarrow{d}, t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad M = M_0 + t\,\overrightarrow{d} \right\}.^1$$



Să exprimăm analitic relaţia de coliniaritate: Cum $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$, condiţia de coliniaritate $\overrightarrow{M_0M} = t\,\overrightarrow{d}$ scrisă pe coordonate conduce la

$$\begin{aligned} x - x_0 &= l\,t \\ y - y_0 &= m\,t \\ z - z_0 &= n\,t, \end{aligned} \tag{12.5}$$

ceea ce este echivalent cu

$$\boxed{\mathbf{d}: \quad \frac{\mathbf{x - x_0}}{\mathbf{l}} = \frac{\mathbf{y - y_0}}{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{z - z_0}}{\mathbf{n}}.} \tag{12.6}$$

Ecuaţiile (12.6) reprezintă **ecuaţiile canonice ale dreptei** ce trece prin $\mathbf{M_0(x_0, y_0, z_0)}$ şi are direcţia $\overrightarrow{d} = \mathbf{li + mj + nk}$.

> Având date ecuaţiile canonice ale unei drepte, cum găsim coordonatele unui punct ce aparţine dreptei?

Exemplul 4. Să se determine două puncte distincte ale dreptei

$$d: \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-1}{5}.$$

Pentru a determina două puncte distincte ce aparţin dreptei d, deducem ecuaţiile parametrice ale acesteia, egalând şirul de rapoarte egale cu t. Astfel, obţinem:

$$\begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= -3 - 4t \\ z &= 1 + 5t. \end{aligned}$$

[1] Notăm cu d dreapta şi cu $\overrightarrow{d}$ direcţia sa.

Dând lui t două valori distincte, obţinem coordonatele a două puncte:

$$\begin{array}{l} \text{pentru } t = 0, \text{ avem } P(2, -3, 1); \\ \text{pentru } t = 1, \text{ avem } Q(3, -7, 6). \end{array}$$

Remarcăm că punctul cel mai evident ce aparţine unei drepte dată prin ecuaţiile canonice

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

este punctul corespunzător lui $t = 0$, adică punctul $P(x_0, y_0, z_0)$.

Ecuaţiile (12.5) se mai pot scrie astfel:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x & = & x_0 + l\,t, \\ y & = & y_0 + m\,t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z & = & z_0 + n\,t, \end{array}} \tag{12.7}$$

Ecuaţiile de mai sus se numesc **ecuaţiile parametrice ale dreptei**. Dacă t parcurge pe $\mathbb{R}$, punctul de coordonate $(x(t) = x_0 + l\,t, y(t) = y_0 + m\,t, z(t) = z_0 + n\,t)$ parcurge dreapta d. Interpretând t ca timp, $(x(t), y(t), z(t))$ reprezintă coordonatele la momentul t ale unui punct care se mişcă pe dreapta d.

Exemplul 5. Se dă dreapta de ecuaţii $d : \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y+1}{0} = \dfrac{z-5}{1}$. Ce particularitate are această dreaptă?

La prima vedere suntem tentaţi să spunem că ecuaţiile dreptei sunt incorecte, deoarece conţin o fracţie cu numitorul zero. Şirul de rapoarte egale exprimă însă coliniaritatea vectorilor

$$(x-2)\mathbf{i} + (y+1)\mathbf{j} + (z-5)\mathbf{k}, \;\; -3\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k},$$

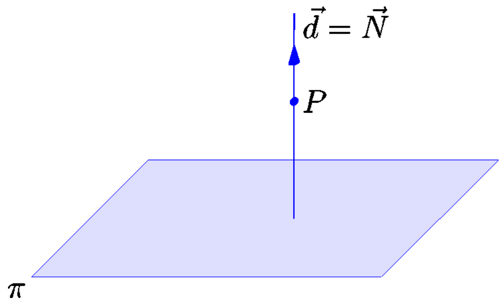
adică pentru fiecare punct $M(x, y, z)$ de pe dreaptă există un $t \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{array}{rcr} x - 2 & = & -3t \\ y + 1 & = & 0t \\ z - 5 & = & 1t. \end{array}$$

Din $y + 1 = 0$, rezultă că orice punct al dreptei are $y = -1$, adică dreapta este inclusă într-un plan paralel cu planul xOz (ce are ecuaţia $y = 0$). Dreapta d are direcţia $\overrightarrow{d} = -3\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Două drepte fie sunt paralele, fie coincid dacă şi numai dacă vectorii lor directori sunt coliniari.

Exemplul 6. Să se scrie ecuaţiile dreptei ce trece prin punctul $P(3, 4, -2)$ şi este perpendiculară pe planul $\pi : \; x - 2y + 5z - 8 = 0$.



Dreapta d fiind perpendiculară pe plan are direcţia normalei la plan: $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{N} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, deci ecuaţiile ei vor fi

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+2}{5}.$$

Accentuăm că **în rezolvarea problemelor de dreaptă şi plan trebuie să ţinem seama că un plan este caracterizat de vectorul normal (normala la plan), iar o dreaptă de vectorul director (direcţia dreptei).**

Pentru a determina ecuaţia unui plan din condiţii geometrice date trebuie

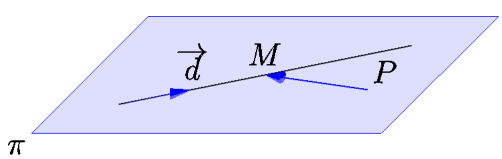
• **să determinăm un punct conţinut în plan şi normala la plan**

sau

• **să determinăm un punct şi două direcţii conţinute în plan**.

Exemplul 7. Să se determine ecuaţia planului ce conţine punctul $P(5,-7,1)$ şi dreapta

$$d: \quad \frac{x+4}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+3}{7}. \tag{12.8}$$



Din enunţ avem un punct conţinut în plan. Dreapta d fiind inclusă în plan, rezultă că planul conţine direcţia lui d, adică $\overrightarrow{d} = -2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$. Din aceste informaţii încercăm să mai deducem o direcţie $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{d}$ conţinută în plan:

Pentru aceasta alegem un punct de pe dreapta d. Cel mai evident punct ce aparţine dreptei este $M(-4,1,-3)$, îl deducem din numărătorii fracţiilor ce definesc ecuaţia (12.8) comparând cu ecuaţia generală a unei drepte (12.6). O altă direcţie conţinută în plan va fi

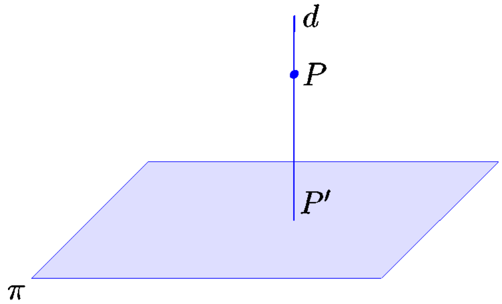
$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PM} = (-4-5)\mathbf{i} + (1+7)\mathbf{j} + (-3-1)\mathbf{k} = -9\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

Planul cerut este planul determinat de punctul P şi direcţiile $\overrightarrow{d}$ şi $\overrightarrow{v}$, a cărui ecuaţie este:

$$\pi(P; \overrightarrow{d}, \overrightarrow{v}): \quad \begin{vmatrix} x-5 & y+7 & z-1 \\ -2 & 0 & 7 \\ -9 & 8 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

12.2.1 Proiecţia ortogonală a unui punct pe un plan

Fie $P(x_0, y_0, z_0)$ un punct şi $\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$ un plan. Presupunem că $P \notin \pi$. Proiecţia ortogonală a lui P pe plan este punctul de intersecţie P' al planului cu dreapta ce trece prin P şi este perpendiculară pe π.



Exemplul 8. Să se determine proiecţia ortogonală a punctului $P(9, -4, 2)$ pe planul

$$\pi: \ -4x + y + 2z - 6 = 0.$$

Scriem ecuaţiile dreptei ce trece prin P şi este perpendiculară pe plan, adică are direcţia normalei la plan, $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{N} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$:

$$d: \ \frac{x-9}{-4} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{2} = t,$$

ceea ce este echivalent cu

$$\begin{array}{l} x = x(t) = -4t + 9 \\ y = y(t) = \quad t - 4 \\ z = z(t) = \quad 2t + 2 \end{array}.$$

$(x(t), y(t), z(t))$ reprezintă poziţia la momentul t al unui punct ce se mişcă pe dreapta d. Vom determina momentul t în care punctul mobil ajunge în plan, adică $(x(t), y(t), z(t))$ verifică ecuaţia planului:

$$-4x(t) + y(t) + 2z(t) - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4(-4t+9) + t - 4 + 2(2t+2) - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 21t - 42 = 0.$$

Prin urmare "punctul mobil ajunge în plan" la momentul $t = 2$, adică punctul de intersecţie al dreptei cu planul este punctul

$$P'(x(2) = 1, y(2) = -2, z(2) = 6).$$

12.3 Dreapta de intersecţie a două plane

Din geometria sintetică se ştie că poziţia relativă a două plane poate fi una din următoarele:
- planele sunt paralele sau coincid (sunt confundate);
- planele se intersectează şi mulţimea de intersecţie este o dreaptă.

Fiind date două plane prin ecuaţiile lor:

$$\begin{array}{rcl} \pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 & = & 0, \\ \pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 & = & 0, \end{array}$$

să caracterizăm algebric poziţia lor relativă. Mulţimea punctelor din spaţiu de coordonate (x, y, z) ce satisfac ambele ecuaţii este mulţimea soluţiilor sistemului

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{cases}.$$

Notăm cu M matricea sistemului,

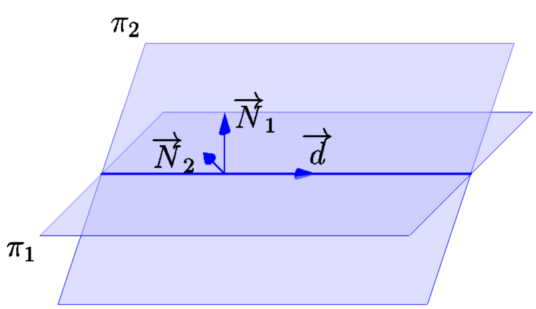
$$M = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix},$$

care are rangul maxim 2.

• Dacă rangul este 2, atunci şi rangul matricei prelungite este 2, deci sistemul are o infinitate de soluţii (x, y, z) şi aceste soluţii reprezintă coordonatele punctelor de pe dreapta de intersecţie a celor două plane.

• Dacă rangul este egal cu 1, atunci înseamnă că liniile matricei sunt proporţionale, adică **normalele planelor sunt coliniare, deci planele fie sunt paralele, fie coincid**.

Vectorul director al dreptei de intersecţie a două plane este produsul vectorial al normalelor celor două plane.



Într-adevăr, dacă cele două plane distincte şi neparalele sunt:

$$\begin{aligned} \pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ \pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned}$$

atunci dreapta $d = \pi_1 \cap \pi_2$ este inclusă atât în π_1, cât şi în π_2.

Din $d \subset \pi_1$ rezultă $\overrightarrow{N}_{\pi_1} \perp \overrightarrow{d}$, iar din $d \subset \pi_2$ rezultă $\overrightarrow{N}_{\pi_2} \perp \overrightarrow{d}$. Vectorul director al dreptei d fiind simultan perpendicular pe $\overrightarrow{N}_{\pi_1}$ şi pe $\overrightarrow{N}_{\pi_2}$, este produsul vectorial al normalelor, adică

$$\boxed{\overrightarrow{d} = \overrightarrow{N}_{\pi_1} \times \overrightarrow{N}_{\pi_2}. \qquad (12.9)}$$

Având o dreaptă dată ca intersecţie a două plane, ne interesează să determinăm atât vectorul director al dreptei, cât şi un punct de pe dreaptă, pentru a putea scrie ecuaţiile dreptei sub forma canonică (ca un şir de 3 rapoarte egale).

Exemplul 9. Să se scrie ecuaţiile dreptei d ce trece prin punctul $P(0, -1, 2)$ şi este paralelă cu dreapta d' de intersecţie a planelor:

$$\begin{aligned} \pi_1: \quad 2x + 4y - 3z + 7 &= 0, \\ \pi_2: \quad x - 5y + 2z + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Pentru a putea scrie ecuaţiile dreptei d trebuie să-i determinăm vectorul director. Cum d este paralelă cu dreapta $d' = \pi_1 \cap \pi_2$, rezultă că are aceeşi direcţie ca şi d'. Vectorul director al lui d' este

$$\overrightarrow{d}' = \overrightarrow{N}_{\pi_1} \times \overrightarrow{N}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -7\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 14\mathbf{k} \,||\, \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Deci, dreapta este determinată de punctul $P(0, -1, 2)$ şi vectorul director $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{d}' = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Ecuaţiile ei sunt

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

În exemplul următor ilustrăm practic cum deducem ecuaţiile parametrice ale dreptei şi apoi extragem din acestea coordonatele unui punct particular de pe dreaptă şi vectorul director al dreptei dată ca intersecţie a două plane.

Exemplul 10. Se dă dreapta d ca intersecţie a planelor:

$$\begin{array}{rrcl} \pi_1 : & -2x + 3y - z + 1 & = & 0, \\ \pi_2 : & -y - 4z + 5 & = & 0. \end{array}$$

Să se scrie ecuaţiile parametrice ale dreptei d şi să se evidenţieze un punct particular pe dreaptă şi vectorul director al dreptei.
Rezolvăm sistemul format din ecuaţiile celor două plane. Matricea sistemului,

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix},$$

are rangul 2, la fel ca matricea prelungită. Luând determinantul principal

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},$$

x, y sunt necunoscute principale, iar $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, necunoscută secundară. Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} -2x + 3y = t - 1, \\ - y = 4t - 5, \end{cases}$$

obţinem soluţia

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & -(13/2)t + 8, \\ y(t) & = & -4t + 5, \\ z(t) & = & t, \end{array}$$

ce reprezintă ecuaţiile parametrice ale dreptei având vectorul director $\overrightarrow{d} = -(13/2)\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ şi care trece prin punctul $P(8, 5, 0)$.

12.3.1 Ecuaţiile axelor sistemului ortogonal xOyz

Fie $xOyz$ un sistem ortogonal de axe în spaţiu. Axa Ox este intersecţia planelor xOz şi xOy, deci are ecuaţiile:

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Analog, axa Oy are ecuaţiile:

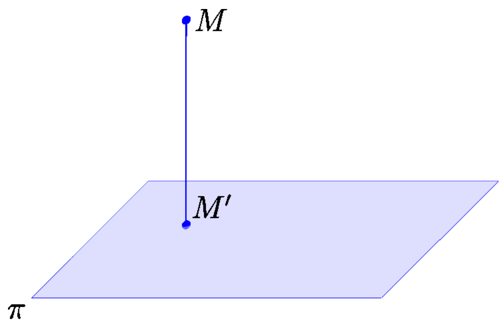
$$\begin{aligned} x &= 0, \\ z &= 0, \end{aligned}$$

iar Oz:

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= 0. \end{aligned}$$

12.3.2 Distanţa de la un punct la un plan

Distanţa de la un punct M la un plan π este egală cu distanţa de la M la M', proiecţia sa ortogonală pe plan.



Dacă planul π are ecuaţia $Ax + By + Cz + D = 0$ şi $M(x_0, y_0, z_0)$, atunci se poate deduce că distanţa de la M la π este

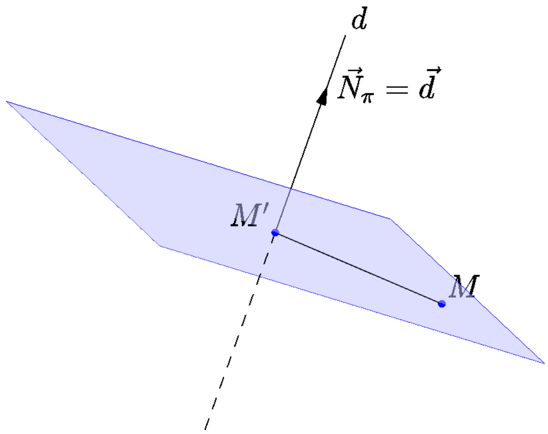
$$\boxed{\operatorname{dist}(M, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (12.10)}$$

12.3.3 Distanţa de la un punct la o dreaptă

Distanţa de la un punct M la o dreaptă d este distanţa de la M la proiecţia sa ortogonală pe d.

Exemplul 11. Să se calculeze distanţa de la punctul $M(3, -1, 6)$ la dreapta

$$d: \ \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-2}{3}.$$



Pentru a calcula proiecţia punctului M pe dreapta d, scriem ecuaţia planului π ce trece prin M şi este perpendicular pe d. Normala planului are direcţia dreptei d, adică $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{d} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Astfel, ecuaţia planului π este

$$2(x-3) - (y+1) + 3(z-6) = 0.$$

Notăm cu M' intersecţia dreptei d cu planul π. Cum dreapta d este perpendiculară pe orice direcţie din plan, va fi, în particular, perpendiculară şi pe $\overrightarrow{MM'}$, ceea ce ilustrează că M' este proiecţia ortogonală a punctului M pe dreaptă.

Să determinăm coordonatele punctului $M'(x, y, z)$. Deoarece M' aparţine atât dreptei, cât şi planului, coordonatele sale verifică ecuaţiile dreptei şi ecuaţia planului:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-2}{3} = t, \\ 2(x-3) - (y+1) + 3(z-6) = 0. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem (se scot x, y şi z în funcţie de t şi apoi se înlocuiesc în ecuaţia planului), obţinem coordonatele lui $M' : x = 3, y = -4, z = 5$.

Astfel, distanţa de la punctul M la dreapta d este distanţa de la M la M', adică

$$d(M, M') = \sqrt{(3-3)^2 + (-1+4)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$

12.4 Probleme propuse

Pentru fiecare din problemele următoare desenaţi elementele geometrice implicate. Ajută la raţionament!

1. Să se scrie ecuaţia planului ce conţine punctul $M(-1, 1, 5)$ şi este perpendicular pe dreapta

$$d: \ \frac{x+3}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{5}.$$

2. Să se scrie ecuaţiile dreptei d ce conţine punctul $P(0, -2, 3)$ şi este paralelă cu dreapta

$$d' : \begin{cases} 3x - \ \ y + 2z + 7 &= 0 \\ -\ x + 2y - 4z &= 0 \end{cases}.$$

3. Să se determine planul π ce conţine punctele $A(2,1,4)$, $B(-1,0,3)$ şi direcţia $\overrightarrow{v}=(3,4,-7)$.

4. Să se determine ecuaţiile dreptei ce trece prin punctele $M_1(0,1,-3)$, $M_2(2,5,-1)$.

5. Deduceţi ecuaţia planului ce conţine dreptele:

$$d:\ \frac{x-4}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2},\quad d':\ \frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+5}{2}$$

şi apoi ecuaţia planului ce conţine dreptele[2]:

$$\ell_1:\ \frac{x+5}{-2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{0},\quad \ell_2:\frac{x+5}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-3}.$$

6. Determinaţi ecuaţia planului π ce trece prin $M(1,-2,3)$ şi este paralel cu dreptele[3]:

$$d_1:\ \begin{cases} 5x+y-2z+12 = 0\\ x-3 = 0\end{cases},\quad d_2:\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+1}{2}.$$

7. Să se determine proiecţia ortogonală a punctului $A(1,-2,5)$ pe planul $\pi:\ x+2y+2z+2=0$ şi apoi simetricul punctului A faţă de plan.
Indicaţie: Dacă A' este proiecţia ortogonală a lui A pe planul π şi A'' simetricul, atunci A' este mijlocul segmentului $[A,A'']$, deci $x_{A'}=\dfrac{x_A+x_{A''}}{2}$, iar $x_{A''}=2x_{A'}-x_A$ etc.

8. Să se determine proiecţia dreptei

$$d:\ \begin{cases} x+2y+3z-10 = 0\\ 4x+3y+2z-10 = 0\end{cases}$$

pe planul $\pi:\ x-2y+z-5=0$.

9. Să se determine simetricul punctului $A(1,2,3)$ faţă de dreapta

$$d:\ \begin{cases} x+2y+3z-4 = 0\\ 4x+3y+2z-1 = 0\end{cases}.$$

10. Să se calculeze măsura unghiului dintre dreapta $d:\ \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ şi planul $\pi:\ 2x-y+2z+3=0$.
Indicaţie: Se determină mai întâi unghiul dintre direcţia dreptei d şi normala la planul π şi apoi se observă relaţia dintre acest unghi şi cel căutat.

11. Să se calculeze unghiul dintre planele $\pi_1:\ 4x-y-2z-11=0$ şi $\pi_2:\ x-2y+3z-8=0$.
Indicaţie: Unghiul dintre două plane este unghiul dintre normalele celor două plane.

[2]Observaţi că primele două drepte sunt paralele, iar următoarele două sunt concurente.
[3]Planul fiind paralel cu dreptele, conţine direcţiile celor două drepte.

12. Se dau dreptele

$$d_1 : \begin{cases} x + 2y + 3z + 4 &= 0 \\ 4x + 3y + 2z + 1 &= 0 \end{cases} \text{ şi } d_2 : \begin{cases} x &= t + 1 \\ y &= t + 2 \\ z &= t - 1 \end{cases}.$$

Să se studieze dacă d_1 şi d_2 sunt perpendiculare. Sunt cele două drepte coplanare? Justificaţi!

13. Dintre toate planele ce trec prin dreapta

$$d : \begin{cases} x - 3y + z - 1 &= 0 \\ x + 2y - 2 &= 0 \end{cases},$$

să se determine planul π perpendicular pe planul $\alpha : 3x - y + 5z + 7 = 0$.
Indicaţie: Normala la planul π este un vector ortogonal pe vectorul director al dreptei d şi pe normala planului α. Fiind perpendicular pe doi vectori, N_π este ...

14. Să se scrie ecuaţia planului determinat de punctele $M_1(2, 0, 0)$, $M_2(0, 2, 0)$, $M_3(0, 0, 2)$.

15. Să se determine distanţa de la punctul $P(3, 1, -2)$ la dreapta $d : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$.

16. Se dă dreapta d având ecuaţiile parametrice:

$$d : \begin{cases} x &= -2 + 3t \\ y &= 4 \\ z &= 1 - 5t \end{cases}.$$

Să se arate că direcţia acestei drepte este ortogonală pe direcţia dreptei de ecuaţii $x = 0$, $z = 0$.

17. Să se scrie ecuaţiile canonice ale dreptei

$$d : \begin{cases} x - 3y + z - 1 &= 0 \\ x + 2y \quad - 2 &= 0 \end{cases}.$$

18. Să se determine ecuaţia planului ce conţine axa Ox şi este paralel cu dreapta

$$d : \begin{cases} x &= -1 + 3t \\ y &= 7 - t \\ z &= -2 + 2t \end{cases}.$$

19. Să se aleagă două puncte distincte, P, Q, pe dreapta de ecuaţii

$$d : \frac{x + 2}{0} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z - 7}{-2}$$

şi apoi să se scrie ecuaţia planului ce trece prin mijlocul segmentului PQ şi este perpendicular pe dreapta d.

20. Să se determine punctul de intersecţie al dreptei

$$d: \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z}{-2}$$

cu planul $\pi:\ 2x + 3y - z - 10 = 0$.

21. Să se determine ecuaţiile parametrice ale perpendicularei comune a dreptelor

$$d_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = z \text{ şi } d_2 : \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

22. Se consideră punctele $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$. Determinaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului $\triangle ABC$, apoi locul geometric al punctelor P cu proprietatea $PA = PB = PC$.
Indicaţie: Centrul cercului circumscris triunghiului $\triangle ABC$ este punctul de intersecţie dintre planul ce conţine mijlocul segmentului $[AB]$ şi care este perpendicular pe dreapta AB (direcţia dreptei AB este normala acestui plan), planul ce conţine mijlocul segmentului $[AC]$ şi care este perpendicular pe dreapta AC şi planul ce conţine mijlocul segmentului $[BC]$ şi care este perpendicular pe dreapta BC. Se poate determina $P(x,y,z)$ astfel încât

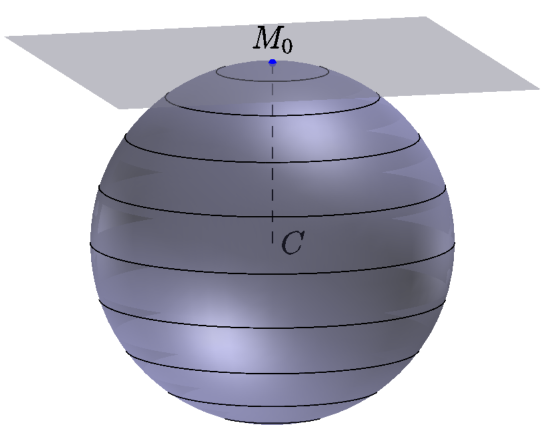
$$\begin{aligned} PA = PB = PC \;&\Leftrightarrow\; (x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2 \\ &\Leftrightarrow\; -2x + 1 = -4y + 4 = -6z + 9. \end{aligned}$$

O altă metodă pentru determinarea locului geometric al punctelor P care verifică relaţia dată constă în aflarea ecuaţiilor dreptei ce trece prin centrul cercului circumscris triunghiului $\triangle ABC$ şi care este perpendiculară pe planul (ABC).

23. Fie $C(a,b,c)$ un punct fixat şi $R > 0$ un număr pozitiv. Sfera cu centrul în C şi de rază R este mulţimea punctelor din spaţiu ce au distanţa faţă de C egală cu R:

$$S = \left\{ M(x,y,z)\ :\ \mathrm{dist}(M,C) = R \Leftrightarrow ||\overrightarrow{CM}|| = R \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \right\}.$$

Dacă $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct aparţinând sferei, atunci planul ce conţine punctul M_0 şi are normala $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{CM_0}$ se numeşte planul tangent în M_0 la sferă.

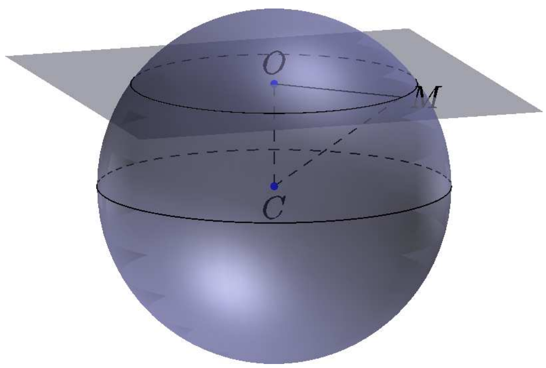


Să se determine ecuaţia sferei cu centrul $C(3,0,0)$ şi rază $R=2$ şi ecuaţia planului tangent sferei în punctul $M_0(4,3/2,\sqrt{3}/2)$.

24. Se consideră sfera $S: x^2+y^2+z^2-4x+2y-20=0$ şi planul $\pi: 3x-4y-35=0$. Arătaţi că π este tangent sferei S şi apoi determinaţi punctul de tangenţă.

25. Intersecţia dintre o sferă de centru $\mathbf{C}$ şi rază R, $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, şi un plan $\pi: Ax+By+Cz+D=0$, a cărui distanţă $h=\text{dist}(\text{C},\pi)$ de centrul sferei este mai mică decât R, este un cerc, numit *cercul în spaţiu*. Ecuaţiile cercului sunt

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 &= R^2 \\ Ax+By+Cz+D &= 0 \end{cases}.$$



Centrul O al cercului este proiecţia ortogonală a centrului sferei pe plan, iar raza cercului este lungimea catetei OM a triunghiului dreptunghic $\triangle\, COM$, adică $r=OM=\sqrt{R^2-h^2}$.

Să se determine centrul şi raza cercului de ecuaţii:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-19 &= 0 \\ z &= 2 \end{cases}.$$

Indicaţie: Se formează pătrate perfecte în x, y şi z pentru a afla centrul şi raza sferei de ecuaţie $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-19=0$:

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-19=\underbrace{x^2-4x+4}_{=(x-2)^2}-4+\underbrace{y^2-2y+1}_{=(y-1)^2}-1+\underbrace{z^2+2z+1}_{=(z+1)^2}-1-19=0,$$

de unde rezultă ecuaţia sferei în forma $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

26. Se consideră sfera $S: x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z+5=0$ şi planul $\pi: x-2y+z+2=0$. Arătaţi că π intersectează sfera S după un cerc şi apoi determinaţi centrul şi raza acestui cerc.

27. Determinaţi ecuaţia sferei de rază $R=1$ care conţine punctul $A(0,-1,0)$ şi al cărui centru se află pe dreapta $d: \frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{2}$.
Rezolvare: Ecuaţiile parametrice ale dreptei d sunt

$$d: \begin{cases} x=1, \\ y=t-1, \quad t\in\mathbb{R}. \\ z=2t, \end{cases}$$

Dacă C este centrul sferei atunci există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât C are coordonatele $C(1, t-1, 2t)$. Calculăm

$$AC = d(A, C) = \sqrt{(1-0)^2 + (t-1-(-1))^2 + (2t-0)^2} = \sqrt{5t^2+1}.$$

Punând condiţia $AC = R = 1$, se obţine $t = 0$, deci $C(1, -1, 0)$. Ecuaţia sferei de centru C şi rază $R = 1$ este

$$S:\ (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1.$$

28. Determinaţi ecuaţiile planelor tangente sferei $S:\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z = 11$ care sunt perpendiculare pe dreapta

$$d: \begin{cases} x = \ \ t - 1, \\ y = 2t - 1, \\ z = 3t - 1. \end{cases}$$

Indicaţie: Se află punctele de intersecţie dintre dreapta d şi sfera S (sunt două astfel de puncte), apoi se determină pentru fiecare punct în parte ecuaţia planului tangent sferei S în punctul respectiv.