Part I

1 4. APLICAŢII LINIARE

1.1 A. Teorie

Morfismele -de grupuri, de inele, etc.- sunt funcţii compatibile cu structura -de grup, inel, etc. Similar morfismelor de grupuri ori de inele, definim noţiunea de aplicaţie liniară ca funcţie între două spaţii vectoriale peste acelaşi corp, compatibilă cu cele două operaţii: cea internă (adunarea vectorilor) şi cea externă (înmulţirea vectorilor cu scalari).

1.1.1 4.1. Definiţia aplicaţiei liniare

Peste tot în cele ce urmează V şi W sunt două spaţii vectoriale peste acelaşi corp $\mathbf{K}$.

Definiţia 4.1.1. Definiţia aplicaţiei liniare. *O funcţie $L : V \to W$ care verifică condiţiile*

i. $L(u+v) = L(u) + L(v)$ *pentru orice* $u, v \in V$ (adică L este **aditivă**)

ii. $L(\alpha u) = \alpha L(u)$ *pentru orice* $u \in V$ *sş orice* $\alpha \in \mathbf{K}$ (adică L este **omogenă**) *se numeşte* ***aplicaţie liniară (sau transformare liniară).*** *Notăm mulţimea aplicaţiilor liniare definite pe V cu valori în W cu* $\mathcal{L}(V, W)$.

Axioma *i.* din această definiţie implică faptul că dacă $L \in \mathcal{L}(V, W)$ atunci L este morfism între grupurile $(V, +)$ şi $(W, +)$. În consecinţă L transformă vectorul nul în vectorul nul şi simetricul unui vector în simetricul imaginii acestuia, adică

Propozitia 4.1.1. *Dacă* $L \in \mathcal{L}(V, W)$ atunci

- $L(\theta_V) = \theta_W$
- $L(-v) = -L(v), \forall v \in V.$

Exemplul 4.1.1. Aplicaţia nulă $\theta : V \to W$, $\theta(v) := \theta_W$ este o aplicaţie liniară.

Exemplul 4.1.2. Aplicaţia identică id_V este o aplicaţie liniară. (Reamintim că $id_V = 1_V : V \to V$, $id_V(v) = v$).

Exemplul 4.1.3. Dacă $L \in \mathcal{L}(V, W)$ atunci $L'(v) := -L(v)$ defineşte o aplicaţie liniară, adică $L' \in \mathcal{L}(V, W)$.

Exemplul 4.1.4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a. Dacă $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, notând $a := f(1)$ avem $f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = ax$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b. Dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) = ax$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ atunci $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Prin urmare $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *dacă şi numai dacă există* $a \in \mathbb{R}$ *astfel ca* $f(x) = ax$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.

Exemplul 4.1.5. Funcţia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definită prin $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3)$ este o aplicaţie liniară (aici $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2$ si $\mathbf{K} = \mathbb{R}$). Întradevăr, dacă $x = (x_1, x_2, x_3), y = (x_1', x_2', x_3') \in \mathbb{R}^3$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ avem, ţinând cont de expresia analitică a funcţiei L şi de definiţia operatiilor din $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ şi $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$:

$L(x + y) = L(x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3') = (x_1 + x_1' - x_2 - x_2', x_2 + x_2' - x_3 - x_3') = (x_1 - x_2, x_2 - x_3) + (x_1' - x_2', x_2' - x_3') = L(x) + L(y)$ şi $L(\alpha x) = L(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) = (\alpha x_1 - \alpha x_2, \alpha x_2 - \alpha x_3,) = \alpha(x_1 - x_2, x_2 - x_3) = \alpha L(x)$; prin urmare $L \in \mathcal{L}(V, W)$.

O funcţie $L : V \to W$ este o aplicaţie liniară dacă şi numai dacă ea conservă combinaţiile liniare. Următoarea propoziţie dă condiţii necesare şi suficiente de liniaritate folosind această echivalenţă şi, în consecinţă, oferă definiţii alternative pentru aplicaţiile liniare.

Propozitia 4.1.2. *Fie* $L : V \to W$ o funcţie. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.

(a) $L \in \mathcal{L}(V, W)$

(b) $L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) \, \forall v_1, v_2 \in V, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{K}$

(c) $L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \cdots + \alpha_n L(v_n) \, \forall v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$, $\forall \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbf{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Exemplul 4.1.6. Fie $L \in \mathcal{L}(V, W)$ şi $S \subset V$. Să arătăm că $L(\mathit{span}(S)) = \mathit{span}(L(S))$

a. Arătăm întâi că $L(\mathit{span}(S)) \subset L(\mathit{span}(S))$. Fie $w \in L(\mathit{span}(S))$. Atunci există $v \in \mathit{span}(S)$ astfel încât $L(v) = w$. Dar $v \in \mathit{span}(S)$, deci există $v_1, v_2, \cdots, v_n \in S$ şi $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbf{K}$ astfel încât $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$. Prin urmare $w = L(v) = L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \cdots + \alpha_n L(v_n) \in \mathit{span}(L(S))$ şi incluziunea este demonstrată.

b. Rămâne să arătăm incluziunea inversă. Fie, pentru aceasta, $w \in \mathit{span}(L(S))$. Atunci există $w_1, w_2, \cdots, w_n \in L(S)$ şi $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbf{K}$ astfel încât $w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n$. Cum $w_1, w_2, \cdots, w_n \in L(S)$ înseamnă că există $v_1, v_2, \cdots, v_n \in S$ asfel încât $w_1 = L(v_1), ..., w_n = L(v_n)$, deci $w = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \cdots + \alpha_n L(v_n) = L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) \in L(\mathit{span}(S))$. Prin urmare am dovedit că $\mathit{span}(L(S)) \subset L(\mathit{span}(S))$ şi egalitatea este demonstrată.

O aplicaţie liniară transformă subspaţii în subspaţii, după cum rezultă din următoarea propoziţie.

Propoziţia 4.1.3. *Fie* $L \in \mathcal{L}(V, W)$ si $U \leq V$. Atunci $L(U) \leq W$.

Aplicaţiile liniare din $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ au o expresie analitică simplă. Următoarea afirmaţie extinde modelul dat de exemplul 4.1.4.

Propoziţia 4.1.4. *Funcţia* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *este o aplicaţie liniară (a spaţiului* $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ *in spatiul* $\mathbb{R}/\mathbb{R}$*) dacă şi numai dacă există* $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ *astfel incat* $f(x_1, x_2, \cdots, x_n,) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ *pentru orice* $(x_1, x_2, \cdots, x_n,) \in \mathbb{R}^n$.

Între aplicaţiile liniare şi matrice există o strânsă legătură. Fie L din exemplul 1.1.1. Putem da expresia analitică a funcţiei L matriceal astfel: notând $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ avem $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$, sau, echivalent $Ax^T = (L(x))^T$. În general:

Propoziţia 4.1.5. *Daca* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *şi* $x \in \mathbb{R}^n$*, atunci* $L(x) := \left(Ax^T\right)^T$ *defineşte* $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Exemplul 4.1.6. Să răspundem la întrebarea *care dintre următoarele aplicaţii este liniară?*

a. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) := (x + y, x - a - 1), a \in \mathbb{R}$.

b. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) := \left(x + y, x - ay^2\right), a \in \mathbb{R}$.

Soluţie.

a. Să presupunem că $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right)$. Cum $f(0, 0) = (0, 0)$ rezultă că $(0, -a - 1) = (0, 0)$, deci o condiţie necesară de liniaritate este $a = -1$.

Să verificăm dacă această condiţie este şi suficientă, adică să vedem dacă $f(x, y) := (x + y, x)$ defineşte o aplicaţie liniară. Luând $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ avem $A(x, y)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x \end{pmatrix} = (x + y, x)^T$; confom propoziţiei precedente rezultă ca $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right)$. *În consecinţă* $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right)$ *dacă şi numai dacă* $a = -1$.

Arătaţi suficienţa condiţiei găsite şi prin definiţie.

b. Să presupunem iar că $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right)$. Atunci $f(-x, -y) = -f(x, y)$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, de unde obţinem că -$x - ay^2 = -x + ay^2$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Prin urmare o condiţie necesară de liniaritate este $a = 0$. Suficienţa condiţiei rezultă din punctul a. *În consecinţă* $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right)$ *dacă şi numai dacă* $a = 0$.

Exemplul 4.1.6. Dacă $n > 1$, aplicaţia de derivare $d : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$ definită prin $d(f) := f'$ este liniară.

Exemplul 4.1.7. Fie $C^0[a,b]$ spaţiul (real) al funcţiilor continue pe intervalul $[a,b]$ şi $I(f) := \int_a^b f(x)\,dx$, pentru orice $f \in C^0[a,b]$. Atunci $I \in \mathcal{L}\left(C^0[a,b], \mathbb{R}\right)$.

Exemplul 4.1.8. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ si $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Aplicaţia $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - numită **proiecţia de indice** i (sau **proiecţia a** i**-a)** definită prin

$$p_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) := x_i$$

este liniară.

Exemplul 4.1.9. *O aplicaţie liniară este complet determinată de acţiunea sa asupra vectorilor dintr-o bază.* Să verificăm această afirmaţie. Presupunem că $f \in \mathcal{L}(V, W)$, că $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ este o bază în V şi că $f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2, ..., f(v_n) = w_n$. Fie acum $v \in V$. Atunci există scalarii (unici) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ astfel ca $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$. Dar f este liniară, deci $f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_n f(v_n) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n$.

Compusa a două transformări liniare este o transformare liniară:

Propozitia 4.1.6. *Fie* $f \in \mathcal{L}(U, V)$ *şi* $g \in \mathcal{L}(V, W)$. *Atunci* $g \circ f \in \mathcal{L}(U, W)$.

Mulţimea transformărilor liniare dintre două spaţii vectoriale (peste acelaşi corp) poate fi dotată cu o structură naturală de spaţiu liniar.

Propozitia 4.1.7. a. *Dacă* $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ *atunci* $L_1 + L_2 \in \mathcal{L}(V, W)$, *unde* $(L_1 + L_2)(w) := L_1(w) + L_2(w)$;

b. *Dacă* $L \in \mathcal{L}(V, W)$ *şi* $\alpha \in K$ *atunci* $\alpha L \in \mathcal{L}(V, W)$, *unde* $(\alpha L)(w) := \alpha L(w)$;

c. $\mathcal{L}(V, W)$ *este un spaţiu vectorial peste corpul* K *în raport cu operaţiile definite mai sus.*

d. *Dacă* $\dim V = n$ *şi* $\dim W = m$ *atunci* $\dim \mathcal{L}(V, W) = m^n$.

O aplicaţie liniară bijectivă stabileşte, în esenţă, că spaţiile vectoriale între care operează această transformare "coincid"

Definitia 4.1.2. Definiţia izomorfismului. *O funcţie* $f : V \to W$ *se numeşte* ***izomorfism*** *dacă ea este liniară şi bijectivă. Dacă o asemenea funcţie există spunem că spaţiile* V *şi* W *sunt izomorfe şi scriem* $V \cong W$.

Exemplul 4.1.10. Să aratăm că spatiile reale $\mathbb{R}_n[x]$ şi $\mathbb{R}^{n+1}$ sunt izomorfe. Este suficient să definim acţiunea unei aplicaţii liniare bijective între vectorii bazelor canonice: $f(1) := e_1, f(x) := e_2, f\left(x^2\right) := e_3, ..., f(x^n) := e_{n+1}$ (vezi exemplul 4.1.9). Atunci $f(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) := a_0 e_1 + a_1 e_2 + ... + a_n e_{n+1}$ defineşte un izomorfism $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^{n+1}$. Expresia analitică a inversei acestei transformări este definită prin $f^{-1}(e_1) = 1$, $f^{-1}(e_2) = x, ...,$ $f^{-1}(e_{n+1}) = x^n$.

Exemplul 4.1.11.. *Două spaţii vectoriale peste acelaşi corp sunt izomorfe dacă şi numai dacă ele au aceeaşi dimensiune.*

1. Fie $f : V \to W$ este izomorfism şi $B_V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ o bază în V. Pentru a arăta că $\dim V = \dim W$ este suficient să arătăm că $B_W := \{f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_n)\}$ este bază în W.

1.1. Aratam ca B_W este un sistem de vectori liniar independent. Presupunem ca avem o combinatie liniara nula a vectorilor din

$$B_W : \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_n f(v_n) = \theta_W.$$

Folosind liniaritatea aplicatiei f avem de aici:

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = f(\theta_V).$$

Cum f este injectiva, rezulta ca

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \theta_V.$$

Dar B_V este baza in V, deci $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. In consecinta B_W este sistem de vectori liniar independent.

1.2. Aratam ca B_W este un sistem de generatori in B_W. Fie $w \in W$. Cum f este surjectiva, rezulta ca exista $v \in V$ astfel ca $f(v) = w$. Atunci exista scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ astfel ca $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, deci

$$w = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_n f(v_n)$$

adica w este combinatie liniara a vectorilor din B_W.

2. Sa presupunem acum ca $\dim V = \dim W = n$. Fie $B_V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ o baza in V si $B_W = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ o baza in W. Ca in exemplul precedent se arata ca $f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2, \cdots, f(v_n) = w_n$ definesc un izomorfism intre cele doua spatii. De aceea $V \cong W$.

Exemplul 4.1.12. Conform propozitiei precedente, daca V_n este un spatiu real atunci $V \cong \mathbb{R}^n$. Sa construim un izomorfism intre cele doua spatii. Fie $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ o baza in V_n si $B_c = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ baza canonica din $\mathbb{R}^n$. Fie (vezi exemplul 4.1.9) $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ un vector din V_n. Definim $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) := \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$. Se verifica imediat ca $f \in \mathcal{L}(V_n, \mathbb{R}^n)$. Analog, daca $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$ este un vector arbitrar din $\mathbb{R}^n$ definim $g(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$. Deoarece $f \circ g = id_{\mathbb{R}^n}$ iar $g \circ f = id_{V_n}$ rezulta ca f este bijectiva iar inversa sa este aplicatia liniara g.

Propozitia 4.1.8. Daca $U \cong V$ si $V \cong W$ atunci $U \cong W$.

1.1.2 4.2. Subspatii asociate aplicatiilor liniare

Aplicatiei liniare de la exemplul 4.1.5 ii putem asocia multimea tuturor vectorilor din domeniu a caror imagine este vectorul nul:

$\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid L(x_1, x_2, x_3) = (0,0)\right\} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\right\} = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Acesta este un subspatiu important al domeniului de definitie: nucleul aplicatiei L.

Definitia 4.2.1. Definitia nucleului. *Fie $L \in \mathcal{L}(V, W)$. Multimea*

$$\ker L := \{v \in V \mid L(v) = \theta_W\}$$

*se numeste **nucleul aplicatiei liniare** L.*

Nucleul unei aplicatii liniare este subspatiu al domeniului de definitie.

Propozitia 4.2.1. *Daca $L \in \mathcal{L}(V, W)$ atunci $\ker L \leq V$. Dimensiunea nucleului aplicatiei L se numeste defectul acestei aplicatii.*

Exemplul 4.2.1. Daca L este aplicatia definita la exemplul 4.1.5, atunci $\dim\ker L = 1$. Intr-adevar, cum $L(x_1, x_2, x_3) := (x_1 - x_2, x_2 - x_3,)$ avem consecutiv:

$L(x_1, x_2, x_3) = (0,0) \Leftrightarrow (x_1 - x_2, x_2 - x_3) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3$.

Deci $\ker L = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1,1) \mid x \in \mathbb{R}\} = Span\{(1,1,1)\}$, iar $\{(1,1,1)\}$ este o baza pentru $\ker L$. Prin urmare $\dim\ker L = 1$.

Reamintim ca daca $f : A \to B$ este o functie, atunci **imaginea** sa este $\operatorname{Im} f = f(A) = \{b \in B \mid \exists a \in A : f(a) = b\}$. Imaginea unei aplicatii liniare este un subspatiu al codomeniului sau.

Propozitia 4.2.2. *Daca $L \in \mathcal{L}(V, W)$ atunci $\operatorname{Im} L \leq W$. Dimensiunea imaginii aplicatiei L se numeste **rangul** acestei aplicatii.*

Exemplul 4.2.2. Daca L este aplicatia definita la exemplul 4.1.5, atunci $\dim\operatorname{Im} L = 2$. Intr-adevar, cum $L(x_1, x_2, x_3) := (x_1 - x_2, x_2 - x_3,)$, iar imaginea este

$\operatorname{Im} L = \{(x_1 - x_2, x_2 - x_3,) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1,0) + x_2(-1,1) + x_3(0,-1)\} = Span\{(1,0), (-1,1), (0,-1)\}$.

Prin urmare $\{(1,0), (-1,1)\}$ este o baza a imaginii, deci $\dim\operatorname{Im} L = 2$.

Din exemplele 4.2.1 si 4.2.2 observam ca dimensiunea domeniului de definitie al aplicatiei L este suma dintre defectul si rangul acestei transformari liniare. Proprietatea este valabila pentru orice aplicatie liniara.

Teorema 4.2.1. *Daca $L \in \mathcal{L}(V, W)$ atunci* $\dim\ker L + \dim\operatorname{Im} L = \dim V$.

Exemplul 4.2.3. Fie $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right), f(x,y,z) := (x+y+z, x-z)$. Sa determinam $\dim\ker f$ si $\dim\operatorname{Im} f$.

Avem $\ker f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y+z, x-z) = (0,0)\right\} = \left\{(x, -2x, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\right\} = span((1,-1,1))$, deci $\dim\ker f = 1$. Din teorema precedenta avem $\dim\operatorname{Im} f = \dim\mathbb{R}^3 - \dim\ker f = 3 - 1 = 2$.

Propozitia 4.2.3. *Fie $L \in \mathcal{L}(V, W)$.* Atunci

a. L este injectiva daca si numai daca $\ker L = \{\theta_V\}$.

b. $V \cong W$ daca si numai daca $\ker L = \{\theta_V\}$ si $\operatorname{Im} L = W$.

1.1.3 4.3. Matricea unei aplicatii liniare

Am vazut ca spatiile intre $\mathbb{R}^{m\times n}$ si $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ exista o legatura (vezi propozitia 4.1.5). Aprofundam aceasta legatura esentiala ditre matrice si aplicatiile liniare.

Definitie 4.3.1. Matricea unei aplicatii liniare. *Fie $V/K, W/K$ doua spatii vectoriale, $f \in \mathcal{L}(V, W)$, $B_V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ o baza in V si $B_W = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ o baza in W. Stim ca expresia analitica a transformarii f este perfect determinata de actiunea acesteia pe B_V. De aceea vom atasa aplicatiei f o matrice care are pe coloane coordonatele vectorilor $f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_n)$ in baza B_W, adica o matrice cu m linii si n coloane din $K^{m\times n}$. Prin urmare exista si sunt unici scalarii $a_{ij} \in K$ astfel incat*

$$\begin{cases} f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m \\ f(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_1 + \cdots + a_{m2}w_m \\ \cdots \\ f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m \end{cases}$$

Matricea

$$f_{B_V B_W} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$$

se numeste ***matricea transformarii liniare** f **in perechea de baze*** B_V, B_W.

Expresia analitica a unei transformari liniare f se poate exprima elegant matriceal folosind matricea aplicatiei f *intr-o pereche de baze.*

Propozitia 4.3.1. *Fie $f \in \mathcal{L}(V, W)$ si $f_{B_V B_W}$ matricea ei in perechea de baze B_V, B_W. Daca $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n \in V$ si $f(v) = y_1w_1 + y_2w_2 + \cdots + y_mw_m$ atunci*

$$f(v)_{B_W} = f_{B_V B_W} \cdot v_{B_V}$$

unde $v_{B_V} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *si* $f(v)_{B_W} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$.

Exemplul 4.3.1. Fie aplicatia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $f(x, y, z) := (x + y + z, x - z)$ de la exemplul 4.2.3. Sa construim matricea sa in perechea de baze canonice $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$, $B' = \{e'_1 = (1, 0), e'_2 = (0, 1)\}$. Deoarece

$$f(e_1) = (1, 1) = (1, 0) + (0, 1) = 1 \cdot e'_1 + 1 \cdot e'_2$$

$$f(e_2) = (1, 0) = 1 \cdot e'_1 + 0 \cdot e'_2$$

$$f(e_3) = (1, -1) = (1, 0) - (0, 1) = 1 \cdot e'_1 - 1 \cdot e'_2$$

inseamna ca

$$f_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sa verificam expresia analitica matriceala data in propozitia precedenta. Daca $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ atunci $v_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Deoarece $f(v) = (x + y + z)\, e_1' + (x - z)\, e_2'$ avem $f(v)_{B'} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - z \end{pmatrix} = f_{BB'}.v_B$.

Sa mai remarcam faptul ca rangul aplicatiei f coincide cu rangul matricei $f_{BB'}$: $\quad rang\,(f_{BB'}) = \dim \operatorname{Im} f$. De asemenea defectul aplicatiei coincide cu dimensiunea $\dim Null\,(f_{BB'}) = \dim \ker f$. Aceasta observatie este valabila intodeauna.

Propozitia 4.3.2. *Fie $f \in \mathcal{L}(V, W)$ si $f_{B_V B_W}$ matricea ei in perechea de baze B_V, B_W. Atunci rangul aplicatiei f coincide cu rangul matricei $f_{B_V B_W}$, iar defectul aplicatiei f coincide cu $\dim Null\,(f_{B_V B_W})$.*

Exemplul 4.3.2. Sa determinam defectul si rangul aplicatiei

$$f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^2\right), f(c + bx + ax^2) := (a + b + c, c - a).$$

Deoarece matricea aplicatiei f in perechea de baze canonice $B = \left\{1, x, x^2\right\}$ $B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$ este $f_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, din exemplul 4.3.1 rezulta ca rangul aplicatiei este egal cu 2, iar defectul este egal cu 1 (vezi si exemplul 4.1.10).

Matricea compusei a doua aplicatii liniare coincide cu produsul matricelor celor doua transformari liniare:

Propozitia 4.3.2. *Matricea compusei si matricea inversei.* *Fie $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ si $g \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$, B_1 o baza in V_1, B_2 o baza in V_2 si B_3 o baza in V_3. Atunci*

$$(g \circ f)_{B_1 B_3} = g_{B_2 B_3} \cdot f_{B_1 B_2}.$$

Daca f este izomorfism, atunci matricea $f_{B_1 B_2}$ este inversabila si

$$f^{-1}_{B_2 B_1} = (f_{B_1 B_2})^{-1}.$$

Propozitia 4.3.3. Schimbarea bazelor. *Fie $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, B_1, B_1' doua baze in V_1 si $B_2, B_{2'}$ doua baze in V_2. Atunci*

$$f_{B_1' B_2'} = T^{-1}_{B_2 B_2'} \cdot f_{B_1 B_2} \cdot T_{B_1 B_1'}$$

unde $T_{B_1 B_1'}$ este matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_1', iar $T_{B_2 B_2'}$ este matricea de trecere de la baza B_2 la baza B_2'.

Exemplul 4.3.3. Sa se determine matricea aplicatiei (de la exemplul 4.3.1) $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right), f(x, y, z) := (x + y + z, x - z)$ in perechea de baze

$$B_1 = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 0, 1)\},$$

$$B_2 = \{w_1 = (1,1), v_2 = (1,-1)\}.$$

Vom folosi rezultatul de la exemplul 4.3.1 si propozitia precedenta. Cum matricea de trecere de baza canonica B din $\mathbb{R}^3$ la baza B_1 este

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

iar matricea de trecere de baza canonica B' din $\mathbb{R}^2$ la baza B_2 este

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

rezulta ca

$$f_{B_1B_2} = T_2^{-1} f_{BB'} T_1 = T_2^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = T_2^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pentru ultimul produs aplicam tehnica transformarilor elementare pe linie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare

$$f_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2 B. Probleme rezolvate

1. Stabiliţi care din funcţiile de mai jos sunt aplicaţii liniare:

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x - y,\ 2x + 7y,\ 2x + 1)$

   (b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (2x,\ x^2)$

   (c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - 2y,\ x + 3y + 2z,\ 0)$.

   Soluţie:
   (a) O aplicaţie liniară $f : V \longrightarrow W$ satisface relaţia $f(\theta_V) = \theta_W$. Deoarece $f(0, 0) = (0, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$, f nu este liniară.
   (b) $f(ax) = (2ax, a^2x^2)$, pe când $af(x) = (2ax, ax^2)$; aşadar, pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $f(ax) \neq af(x)$, deci f nu este liniară.
   (c) Avem de verificat că $f(x + x',\ y + y',\ z + z') = f(x, y, z) + f(x', y', z')$ şi $f(ax, ay, az) = af(x, y, z)$, $\forall\, (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$.
   • $f(x + x',\ y + y',\ z + z') = \big((x + x') - 2(y + y'),\ (x + x') + 3(y + y') + 2(z + z'),\ 0\big) = (x - 2y + x' - 2y',\ x + 3y + 2z + x' + 3y' + 2z',\ 0) = (x-2y,\ x+3y+2z,\ 0)+(x'-2y',\ x'+3y'+2z',\ 0) = f(x, y, z)+f(x', y', z')$
   • $f(ax, ay, az) = (ax-2ay,\ ax+3ay+2az,\ 0) = a(x-2y,\ x+3y+2z,\ 0) = af(x, y, z)$.

2. Determinaţi forma generală a unei aplicaţii liniare
(a) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, (b) $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, (c) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$.
Soluţie:
(a) Notând $f(1)=a$, avem $f(x)=f(x\cdot 1)=x\cdot f(1)=ax$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Reciproc, se verifică imediat că toate funcţiile de forma $f(x)=ax,\ a\in\mathbb{R}$, sunt liniare.
(b) Notând $f(1,0)=a$ şi $f(0,1)=b$, avem $f(x,y)=f\big(x\cdot(1,0)+y\cdot(0,1)\big)=x\cdot f(1,0)+y\cdot f(0,1)=ax+by$. Reciproc, se verifică imediat că toate funcţiile de forma $f(x,y)=ax+by,\ a,b\in\mathbb{R}$, sunt liniare.
(c) Notând $f(1)=(a,b)\in\mathbb{R}^2$, avem $f(x)=f(x\cdot 1)=x\cdot f(1)=x\cdot(a,b)=(ax,bx)$. Reciproc, se verifică imediat că toate funcţiile de forma $f(x)=(ax,bx),\ a,b\in\mathbb{R}$, sunt liniare.

3. Arătaţi că dacă $f,g:V_1/K\longrightarrow V_2/K$ sunt aplicaţii liniare, iar $\alpha,\beta\in K$, atunci şi $\alpha f+\beta g$ este aplicaţie liniară.
Soluţie:
Fie $x,y\in V_1$ şi $a,b\in K$, arbitrare. Atunci $(\alpha f+\beta g)(ax+by)=\alpha f(ax+by)+\beta g(ax+by)=\alpha\big(af(x)+bf(y)\big)+\beta\big(ag(x)+bg(y)\big)=a\big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)+b\big(\alpha f(y)+\beta g(y)\big)=a\big(\alpha f+\beta g\big)(x)+b\big(\alpha f+\beta g\big)(y)$, ceea ce arată că $\alpha f+\beta g$ este liniară.

4. Fie V_1/K, V_2/K şi V_3/K trei spaţii vectoriale şi $f:V_1\longrightarrow V_2$ şi $g:V_2\longrightarrow V_3$ două aplicaţii liniare. Arătaţi că $g\circ f:V_1\longrightarrow V_3$ este o aplicaţie liniară.
Soluţie:
Fie $x,y\in V_1$ şi $a,b\in K$, arbitrare. Atunci $(g\circ f)(ax+by)=g\big(f(ax+by)\big)=g\big(af(x)+bf(y)\big)=ag\big(f(x)\big)+bg\big(f(y)\big)=a(g\circ f)(x)+b(g\circ f)(y)$, deci $g\circ f$ este liniară.

5. Determinaţi expresia analitică a aplicaţiei liniare $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ dacă
(a) $f(1,0)=(1,2)$ şi $f(0,1)=(-1,2)$;
(b) $f(1,1)=(2,3)$ şi $f(3,1)=(4,5)$.
Soluţie:
(a) Pentru a determina $f(x,y)$ pornind de la valorile lui f pe vectorii bazei canonice, folosim scrierea lui (x,y) în baza canonică: $(x,y)=x\cdot(1,0)+y\cdot(0,1)$. Astfel, $f(x,y)=f\big(x\cdot(1,0)+y\cdot(0,1)\big)=x\cdot f(1,0)+y\cdot f(0,1)=x\cdot(1,2)+y\cdot(-1,2)=(x-y,\ 2x+2y)$.
(b) Pentru a determina $f(x,y)$ pornind de la valorile lui f pe vectorii bazei formate cu vectorii $(1,1)$ şi $(3,1)$, folosim scrierea lui (x,y) în această bază. Fie $(x,y)=a(1,1)+b(3,1)$, adică $(x,y)=(a+3b,\ a+b)$. Rezolvând acest sistem (cu necunoscutele a,b), obţinem $a=\dfrac{3y-x}{2}$ şi $b=\dfrac{x-y}{2}$.
Folosind această scriere, avem $f(x,y)=f\left(\dfrac{3y-x}{2}\cdot(1,1)+\dfrac{x-y}{2}\cdot(3,1)\right)=$
$\dfrac{3y-x}{2}\cdot f(1,1)+\dfrac{x-y}{2}\cdot f(3,1)=\dfrac{3y-x}{2}\cdot(2,3)\dfrac{x-y}{2}\cdot(4,5)=\Bigg(\dfrac{3y-x}{2}\cdot$

$2+\dfrac{x-y}{2}\cdot 4,\ \dfrac{3y-x}{2}\cdot 3+\dfrac{x-y}{2}\cdot 5\Big)=(x+y,\ x+2y).$

6. Scrieţi matricea aplicaţiei liniare $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $f(x,y,z)=(x+2y,\ x+y-z)$ relativ la bazele B_1 şi B_2, dacă:
(a) $B_1=\{(1,2,0),\ (1,0,0),\ (1,2,3)\}$, $B_2=\{(1,0),\ (0,1)\}$;
(b) $B_1=\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$, $B_2=\{(1,2),\ (1,0)\}$.
Soluţie:
(a) Calculăm valorile lui f pe vectorii bazei B_1: $f(1,2,0)=(5,3)$, $f(1,0,0)=(1,1)$, $f(1,2,3)=(5,0)$. Apoi exprimăm aceşti vectori în baza B_2: $(5,3)=5\cdot(1,0)+3\cdot(0,1)$, $(1,1)=1\cdot(1,0)+1\cdot(0,1)$, $(5,0)=5\cdot(1,0)+0\cdot(0,1)$.
Matricea lui f relativ la bazele B_1, B_2 este $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
(b) Calculăm valorile lui f pe vectorii bazei B_1: $f(1,0,0)=(1,1)$, $f(0,1,0)=(2,1)$, $f(0,0,1)=(0,-1)$. Apoi exprimăm aceşti vectori în baza B_2: $(1,1)=a\cdot(1,2)+b\cdot(1,0)$ implică $a=b=\dfrac{1}{2}$; $(2,1)=c\cdot(1,2)+d\cdot(1,0)$ implică $c=\dfrac{1}{2}$, $d=\dfrac{3}{2}$; $(0,-1)=e\cdot(1,2)+g\cdot(1,0)$ implică $e=-\dfrac{1}{2}$, $g=\dfrac{1}{2}$.
Matricea lui f relativ la bazele B_1, B_2 este $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

7. Pentru fiecare din aplicaţiile liniare de mai jos, calculaţi $\ker f$ şi deduceţi dacă f este injectivă, apoi dacă f este surjectivă.
(a) $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}_1[X]$, $f(a,b)=(a-b)X-(a+b)$
(b) $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $f(a,b)=(a+b,a+2b,a+3b)$
(c) $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $f(a,b,c)=(a+b,a+c)$
(d) $f:\mathbb{R}_2[X]\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $f(aX^2+bX+c)=(a-b,\ b-c,\ c-a)$.
Soluţie:
(a) $\ker f=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2\mid (a-b)X-(a+b)=0\}$. Atenţie, este vorba de o egalitate de polinoame, nu de o ecuaţie. Două polinoame sunt egale dacă au aceiaşi coeficienţi, deci $\ker f=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2\mid a-b=0,\ a+b=0\}$. Rezolvând acest (banal) sistem, obţinem $a=b=0$, deci $\ker f=\{(0,0)\}$ ceea ce arată că f este injectivă. Deoarece $\dim\ker f+\dim Im\, f=\dim\mathbb{R}^2$, deducem că $\dim Im\, f=2$. Cum $Im\, f$ este un subspaţiu de dimensiune 2 al lui $\mathbb{R}_1[X]$ care este un spaţiu de dimensiune 2, rezultă că $Im\, f=\mathbb{R}_1[X]$, deci f este şi surjectivă, adică f este un izomorfism.
(b) $\ker f=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2\mid f(a,b)=(0,0,0)\}=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2\mid (a+b,\ a+2b,\ a+3b)=(0,0,0)\}$. Obţinem, ca de obicei, un sistem liniar şi omogen. De astă dată sistemul are 3 ecuaţii şi două necunoscute, a şi b. Găsim imediat că $a=b=0$ este unica soluţie a acestui sistem, deci $\ker f=\{(0,0)\}$ ceea ce arată că f este injectivă. Deoarece $\dim\ker f+\dim Im\, f=\dim\mathbb{R}^2$, deducem că $\dim Im\, f=2<3=\dim\mathbb{R}^3$, deci f nu este surjectivă.
(c) $\ker f=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\mid f(a,b,c)=(0,0)\}=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\mid (a+b,a+$

$c) = (0,0)\}$. Ajungem din nou la un sistem liniar şi omogen, de astă dată cu două ecuaţii şi trei necunoscute: $a+b=0$, $a+c=0$. Mulţimea soluţiilor acestui sistem este $\ker f = \{(m,-m,-m) \mid m \in \mathbb{R}\} = span(1,-1,-1)$, deci $\dim \ker f = 1$. Deducem mai întâi că f nu este injectivă. Apoi, deoarece $\dim \ker f + \dim Im\, f = \dim \mathbb{R}^3$, deducem că $\dim Im\, f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, deci f este surjectivă.
(d) $\ker f = \{aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X] \mid f(aX^2+bX+c) = (0,0,0)\} = \{aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X] \mid (a-b, b-c, c-a) = (0,0,0)\} = \{aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X] \mid a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0\} = \{aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X] \mid a = b = c\} = \{mX^2+mX+m \in \mathbb{R}_2[X] \mid m \in \mathbb{R}\} = span(X^2+X+1)$, deci $\dim \ker f = 1$ (aşadar f nu este injectivă). Din $\dim \ker f + \dim Im\, f = \dim \mathbb{R}_2[X]$ deducem că $\dim Im\, f = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$, deci f nu este nici injectivă şi nici surjectivă.

8. Stabiliţi dacă aplicaţiile liniare definite mai jos sunt sau nu izomorfisme.
(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $f(a,b) = (a+b)X^2 - aX - b$;
(b) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a-b & b-c \\ c-d & d-a \end{pmatrix}$;
(c) $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(aX^2+bX+c) = (a, a+b, a+b+c)$.
Soluţie:
(a) Faptul că f nu este izomorfism se poate demonstra în foarte multe feluri:
- $\dim \mathbb{R}^2 = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$, deci între cele două spaţii nu poate exista niciun izomorfism
- f nu este surjectivă deoarece în imagine sunt numai polinoame care au suma coeficienţilor 0.
(b) Deoarece $\dim \mathbb{R}^4 = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, f este injectivă dacă şi numai dacă ea este surjectivă. Pentru a studia injectivitatea, sau surjectivitatea, putem calcula $Ker\, f\ f$ (respectiv $Im\, f$). În cazul de faţă, ar fi mai simplu să observăm că $f(1,1,1,1) = O_2 = f(0,0,0,0)$, deci f nu este injectivă, prin urmare f nu este izomorfism. În lipsa unei asemenea observaţii putem calcula $ker\, f = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid f(a,b,c,d) = O_2\} = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a-b = b-c = c-d = d-a = 0\} = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = b = c = d\} = \{(t,t,t,t) \mid t \in \mathbb{R}\} \neq \{(0,0,0,0)\}$, deci f nu este injectivă; alternativ, se poate determina $Im\, f = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} \mid u+v+w+x = 0 \right\} \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, deci f nu este nici surjectivă.
(c) Deoarece $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, pentru a demonstra că f este izomorfism este suficient să arătăm că f este injectivă, adică $\ker\ f = \{0\}$. Avem $f(aX^2+bX+c) = (0,0,0) \Leftrightarrow (a, a+b, a+b+c) = (0,0,0) \Leftrightarrow a = b = c = 0 \Leftrightarrow aX^2+bX+c \equiv 0$ adică $\ker\ f = \{0\}$. Aşadar f este injectivă, deci bijectivă, adică izomorfism.

1.3 C. Exercitii

1. Demonstrati propozitia 1.1.1.

2. Care dintre urmatoarele functii sunt aplicatii liniare?

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, unde $a \in \mathbb{R}$;
   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, unde $a \in \mathbb{R}$;
   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a$, unde $a \in \mathbb{R}$;
   (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$;
   (e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - y$;
   (f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - y^2$;
   (g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - y + 1$;
   (h) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$, unde, $a, b, c \in \mathbb{R}$;
   (i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, 2x)$;
   (j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, 2x)$;
   (k) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (ax + b, cx + d)$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$;
   (l) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x, y, a + y)$, unde $a \in \mathbb{R}$.
   (m) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (\sin x, \cos y, y)$

   Raspuns. a. $a \in \mathbb{R}$; b. pentru $a = 0$; c. pentru $a = 0$; d. pentru $b = 0$; h. pentru $c = 0$; i.; k. pentru $b = d = 0$; l.

   pentru $a = 0$.

3. Demonstrati afirmatia facuta la observatia 1.1.1.

4. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x - y, y, 2x + y)$. Sa se arate ca aceasta functie este aplicatie liniara, apoi sa se determine nucleul si imaginea sa.

   Raspuns. $\{(0, 0)\}\,; \{(a + b, b, 2a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}\,.$

5. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$. Sa se determine dimensiunile nucleului si imaginii sale.

   Raspuns. 1, respectiv 2.

6. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & y & z \end{pmatrix}$.

   (a) Sa se arate ca aplicatia definita este liniara.
   (b) Sa se determine o baza a imaginii aplicatiei f.
   (c) Sa se calculeze dimensiunea nucleului acestei aplicatii.
   (d) Sa se scrie matricea aplicatiei in bazele canonice.

(e) In baza canonica din $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ interschimbam primii doi vectori, iar in baza canonica din $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ inlocuim al doilea vector cu suma primilor doi. Care este matricea aplicatiei f in noile baze?

Raspuns. b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c. 0; d. $[f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

e. $[f]_{B_1' B_2'} = E_{(1,2)}(-1)[f]P_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Fie $f : V \to W$ o aplicatie liniara. Sa se arate ca:

   (a) $\ker f \leq V$;

   (b) $Imf \leq W$;

   (c) $f(U) \leq Imf$ pentru orice $U \leq V$.

8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, unde $a \in \mathbb{R}$. Sa se determine constanta a astfel incat functia f sa fie izomorfism.

   Raspuns. $a \in \mathbb{R}^*$.

9. Este aplicatia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x-y, x+y)$ un izomorfism de spatii liniare?

   Raspuns. Da, deoarece dimensiunea nucleului este 0.

10. Sa se determine constantele $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel incat aplicatia liniara $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (ax + b, cx + d)$

    (a) sa fie izomorfism;

    (b) sa aiba, in bazele canonice, matricea$\binom{1}{13}$.

    Raspuns. a. $a, b, c, d \in \varnothing$. b. $a = 1, b = 0, c = 13, d = 0$.

11. Sa se determine constantele $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel incat aplicatia liniara $f : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, $f(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} ax & by \\ cz & dt \end{pmatrix}$

    (a) sa fie izomorfism;

(b) sa aiba, in bazele canonice, matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Raspuns. a. $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$; b. $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$.

12. Sa se determine constantele $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel incat aplicatia liniara $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (ax+by, cx+dy)$ sa fie izomorfism, apoi sa se determine matricea acestei aplicatii in baza canonica.

    Raspuns. $ad \neq bc$; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

13. Aratati ca exista un singur operator liniar al spatiului real tridimensional care asigura urmatoarele transformari (vectorii sunt dati prin coordonatele lor intr-o anumita baza): $(2, 3, 5) \mapsto (1, 1, 1)$, $(0, 1, 2) \mapsto (1, 1, -1)$, $(1, 0, 0) \mapsto (2, 1, 2)$; determinati matricea operatorului in baza in care sunt date coordonatele vectorilor.

    Raspuns. $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

14. Sa se determine dimensiunea spatiului $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})/\mathbb{R}$.

15. Sa se determine dimensiunea spatiului $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})/\mathbb{R}$.

16. Sa se arate ca $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, stiind ca $f(x, y, z) = \left\{ \begin{smallmatrix} (x,y), \text{ daca } z=13x-y \\ 0, \text{ daca } z\neq 13x-y \end{smallmatrix} \right.$.

17. Se stie ca o aplicatie liniara intre spatiile vectoriale $\mathbb{R}_2[x]/\mathbb{R}$ si $\mathbb{R}_3[x]/\mathbb{R}$ realizeaza transformarile: $1 \mapsto 1 + x$, $x \mapsto 1 + 2x$, $x^2 \mapsto 1 + x^3$.

    (a) In ce se transforma vectorul $1 - 13x + 23x^2$?

    (b) Care este matricea acestei aplicatii in bazele canonice?

    (c) Determinati dimensiunea imaginii.

18. Fie $B = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ si $B' = \left\{ e'_1 = \binom{2}{1}, e'_2 = \binom{1}{1} \right\}$ baze in $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$, respectiv $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$, iar $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ astfel incat $f(e_1) = e'_1 - e'_2$, $f(e_2) = e'_2$, $f(e_3) = -e'_1 + e'_2$.

    (a) Sa se scrie matricea aplicatiei f in perechea de bazele B, B'.

    (b) Sa se determine $f(e_1 - e_2 + e_3)$.

    (c) Sa se calculeze dimensiunea nucleului aplicatiei f.

    (d) Sa se scrie matricea aplicatiei in bazele canonice.

19. Fie W/K si V/K doua spatii vectoriale. Sa se arate ca spatiile date sunt izomorfe daca si numai daca ele au aceasi dimensiune.

20. Fie $V_1, V_2, \cdots, V_n$ si W spatii vectoriale peste corpul K, $V = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ spatiul produs si $f : V \to W$ o functie. Aratati ca $f \in \mathcal{L}(V, W)$ daca si numai daca exista $f_1 \in \mathcal{L}(V_1, W), \cdots, f_n \in \mathcal{L}(V_n, W)$ astfel incat $f(v_1, v_2, \cdots, v_n) = f_1(v_1) + f_2(v_2) + \cdots + f_n(v_n)$.

21. Fie $m \in \mathbb{N}^*$. Sa se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care exista $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_n[x])$ a carei matrice in bazele canonice este matricea unitate.

22. Fie f o aplicatie liniara. Sa se arate ca functia f este injectiva daca si numai daca nucleul sau este subspatiul nul.

23. *O aplicatie liniara intre doua spatii reale are matricea $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Sa se determine numerele pozitive a, b, c astfel ca aplicatia sa fie surjectiva.

    Raspuns. $a = b = c \in (0, \infty)$.

24. *Fie $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $f(x, y) = (x - ay, y - ax, y - x)$. Sa se determine numarul natural a si $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ astfel incat $g \circ f = 1_{\mathbb{R}^2}$.

    Raspuns. $a = 0$, $g(x, y, z) = \begin{cases} (x,y), \text{ daca } z=-x+y \\ 0, \text{ daca } z \neq -x+y \end{cases}$.

2