Ghid pentru pregătirea testului I la MS (PS)
Grupele 1-4, 6

1. Ecuaţii diferenţiale de ordinul I

O ecuaţie de forma:

$$\dot{x} = F(t, x),\ t \in I \subset \mathbb{R}, \tag{1}$$

unde $x = x(t)$, $t \in I$, este necunoscuta, se numeşte ecuaţie diferenţială de ordinul I.

A rezolva o astfel de ecuaţie presupune a determina toate funcţiile x care verifică relaţia (1).

- **Ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile:**

$$\dot{x} = f(t)g(x),\ t \in I.$$

Dacă $g(x) \neq 0$, atunci

$$\frac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t) \ \Rightarrow \ \int \frac{x'(t)}{g(x(t))}\, dt = \int f(t)\, dt.$$

Pentru a determina prima integrală facem schimbarea de variabilă $x(t) = x$, deci $x'(t)\, dt = dx$. Rămâne să calculăm

$$\int \frac{1}{g(x)}\, dx = G(x) + \mathcal{C}.$$

Revenind la notaţia iniţială, deducem

$$G(x(t)) = F(t) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

unde F este o primitivă a funcţiei f, de unde obţinem necunoscuta $x = x(t)$.

- **Ecuaţii diferenţiale de tip Euler:**

$$\dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right),\ t \neq 0.$$

Făcând schimbarea de variabilă

$$\frac{x}{t} = u,\ \text{unde } u = u(t),$$

adică $x(t) = t \cdot u(t)$, şi ţinând cont de relaţia

$$\dot{x} = u + t\dot{u},$$

obţinem o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile.

• **Ecuaţii diferenţiale liniare, neautonome şi omogene:**

$$\dot{x} = a(t)x,\ t \in I.$$

Orice soluţie a unei ecuaţii de acest tip este de forma

$$x(t) = Ce^{\int a(t)\,dt},\ C \in \mathbb{R},$$

unde prin notaţia $\int a(t)\,dt$ întelegem **o primitivă** a funcţiei a, ci nu mulţimea tuturor primitivelor lui a.

2. Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare, autonome şi omogene de ordinul I

Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se consideră sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\dot{x} = Ax \iff \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt necunoscutele. Acestea sunt funcţii de variabilă $t \in \mathbb{R}$ ce urmează a fi determinate.

O soluţie (reală) a acestui sistem este o funcţie derivabilă $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de forma

$$\varphi(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T,$$

care verifică relaţia

$$\varphi'(t) = A\varphi(t),\ \text{pentru orice } t \in \mathbb{R}.$$

Mulţimea soluţiilor sistemului $\dot{x} = Ax$ este un spaţiu vectorial real de dimensiune n, deci o bază în spaţiul soluţiilor acestui sistem conţine n soluţii.

Dacă $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ formează o bază în spaţiul soluţiilor sistemului $\dot{x} = Ax$, atunci **soluţia generală** a sistemului este

$$\varphi(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \cdots + C_n\varphi_n(t),\ C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Plecând de la soluţia generală se poate determina o **soluţie particulară** ce satisface condiţia iniţială $\varphi(t_0) = x_0$.

Dacă $\lambda \in \mathbb{C}$ este o rădăcină a polinomului caracteristic

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$$

al matricei A şi $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{C}^n$ este un vector propriu corespunzător, adică

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda I_n)v = 0,$$

atunci funcţia

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} v, \; t \in \mathbb{R},$$

verifică relaţia (2), deci $\varphi(t) = e^{\lambda t} v$ este o soluţie a sistemului $\dot{x} = Ax$ în cazul particular $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci curba ce are parametrizarea

$$t \mapsto \varphi(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

este o dreaptă ce trece prin $O(0, 0, \ldots, 0)$ şi are direcţia determinată de vectorul v.

Într-adevăr, cum

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) & = & e^{\lambda t} a_1, \\ x_2 = x_2(t) & = & e^{\lambda t} a_2, \\ & \vdots & \\ x_n = x_n(t) & = & e^{\lambda t} a_n, \end{cases} \tag{3}$$

se obţine

$$\frac{x_1 - 0}{a_1} = \frac{x_2 - 0}{a_2} = \cdots = \frac{x_n - 0}{a_n},$$

care reprezintă ecuaţiile unei drepte ce trece prin origine şi are direcţia $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Construcţia unei baze în spaţiul soluţiilor unui sistem $\dot{x} = Ax$

• Determinarea unei baze în spaţiul soluţiilor sistemului în cazul în care polinomul caracteristic

$$P(\lambda) = \mathbf{det}(A - \lambda I_n)$$

are n rădăcini reale distincte, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Dacă v_1 este un vector propriu corespunzător valorii proprii λ_1, v_2 este un vector propriu corespunzător valorii proprii λ_2, …, v_n este un vector propriu corespunzător valorii proprii λ_n, atunci funcţiile

$$\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i, \quad i = \overline{1, n},$$

formează o bază în spaţiul soluţiilor sistemului.

Exemplul 1. Se dă sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Să se determine o bază în spaţiul soluţiilor sistemului, soluţia generală şi apoi soluţia particulară φ cu proprietatea că $\varphi(0) = (-3, 2)^T$.
Soluţie. Valorile proprii ale matricei sistemului sunt $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$. Se arată că $v_1 = (1, 1)^T$ este un vector propriu corespunzător lui λ_1, iar $v_2 = (1, -4)^T$ este un vector propriu corespunzător valorii λ_2.

O bază în spaţiul soluţiilor sistemului este formată din

$$\varphi_1(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2(t) = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Soluţia generală a sistemului dat este

$$\varphi(t) = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pentru a determina soluţia particulară ce satisface condiţia iniţială $\varphi(0) = (-3, 2)^T$, înlocuim în soluţia generală pe $t = 0$ şi egalăm cu $(-3, 2)^T$:

$$C_1 e^0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^0 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + \ C_2 \\ C_1 - 4C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

de unde obţinem $C_1 = -2, C_2 = -1$. Prin urmare, soluţia particulară este

$$\varphi(t) = -2e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

• **Soluţiile corespunzătoare rădăcinilor complex conjugate ale polinomului caracteristic.**

Dacă $\lambda = a+ib$ şi $\overline{\lambda} = a-ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ cu $b \neq 0$, sunt **radăcini complex conjugate simple** ale polinomului caracteristic $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$, atunci

$$\varphi_1(t) = Re\,\phi(t), \quad \varphi_2(t) = Im\,\phi(t)$$

sunt soluţii (reale) independente ale sistemului $\dot{x} = Ax$, unde $\phi(t) = e^{\lambda t} v$, v fiind un vector propriu (complex) corespunzător valorii λ.

Exemplul 2. Să se determine o bază în spaţiul soluţiilor sistemului de ecuaţii diferenţiale:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Soluţie. Rădăcinile polinomului caracteristic sunt $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$. O bază în spaţiul soluţiilor sistemului, $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, va fi formată dintr-o soluţie

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1,\ v_1 \in S_{\lambda_1},$$

corespunzătoare rădăcinii reale λ_1, şi două soluţii, $\varphi_2(t), \varphi_3(t)$, corespunzătoare celor două rădăcini complex conjugate, construite ca mai sus.

Determinăm subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 1 + 2i$. Rezolvăm sistemul $(A - (1+2i)I_3)v = 0$:

$$\begin{bmatrix} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Luăm drept minor principal

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2i & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

şi notăm $x_2 = \beta$, $\beta \in \mathbb{C}^*$, necunoscuta secundară. Rezolvând primele 2 ecuaţii în raport cu x_1, x_3, obţinem că

$$S_{1+2i} = \{\beta(2i, 1, 3)^T \in \mathbb{C}^3 |\ \beta \in \mathbb{C}\},$$

deci o bază în acest subspaţiu este formată din vectorul $v = (2i, 1, 3)^T$.

O soluţie complexă corespunzătoare sistemului $\dot{x} = Ax$ este

$$\phi(t) = e^{(1+2i)t} v = e^{(1+2i)t} \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = e^t e^{2it} \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = e^t(\cos(2t) + i\sin(2t)) \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Soluţiile reale corespunzătoare vor fi

$$\varphi_2(t) = Re\,\phi(t),\ \varphi_3(t) = Im\,\phi(t),$$

adică

$$\varphi_2(t) = e^t \begin{bmatrix} -2\sin(2t) \\ \cos(2t) \\ 3\cos(2t) \end{bmatrix},$$

$$\varphi_3(t) = e^t \begin{bmatrix} 2\cos(2t) \\ \sin(2t) \\ 3\sin(2t) \end{bmatrix}.$$

• **Determinarea soluţiilor din baza spaţiului soluţiilor sistemului $\dot{x} = Ax$, corespunzătoare unei valori proprii reale multiple de ordin k.**

Dacă matricea A are o valoare proprie λ_0 multiplă de ordin $m_{\lambda_0} = k$, atunci avem două cazuri:

Cazul I. Dimensiunea subspaţiului propriu S_{λ_0} este egală cu ordinul de multiplicitate k, adică $dim(S_{\lambda_0}) = m_{\lambda_0}$.

Se determină o bază $B_{\lambda_0} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ în subspaţiul propriu S_{λ_0} şi perechilor proprii

$$(\lambda_0, v_1),\ (\lambda_0, v_2),\ \ldots,\ (\lambda_0, v_k)$$

li se asociază soluţiile sistemului $\dot{x} = Ax$ astfel:

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_0 t} v_1,\ \varphi_2(t) = e^{\lambda_0 t} v_2,\ \ldots,\ \varphi_k = e^{\lambda_0 t} v_k.$$

Cazul II. Dimensiunea subspaţiului propriu S_{λ_0} este strict mai mică decât ordinul de multiplicitate k.

În acest caz se asociază valorii proprii λ_0 subspaţiul propriu generalizat, notat $S^k_{\lambda_0}$, care este subspaţiul $Null$ al matricei $(A - \lambda_0 I_n)^k$, adică

$$S^k_{\lambda_0} = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, (A - \lambda_0 I_n)^k v = 0\} = Null(A - \lambda_0 I_n)^k.$$

Se poate arăta că dimensiunea acestui subspaţiu este egală cu k, deci putem determina o bază în acest subspaţiu formată din k vectori proprii generalizaţi, $w_1, w_2, \ldots, w_k$.

Perechilor

$$(\lambda_0, w_1),\ (\lambda_0, w_2),\ \ldots, (\lambda_0, w_k)$$

li se asociază k soluţii independente în baza spaţiului soluţiilor sistemului $\dot{x} = Ax$, definite astfel:

$$\boxed{\varphi_i(t) = e^{\lambda_0 t} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda_0 I_n)^j \right) w_i, \quad i = \overline{1, k}.}$$

Exemplul 3. Fie sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x.$$

Matricea sistemului are o valoare proprie reală dublă, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Subspaţiul propriu corespunzător este $S_1 = \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, (A - 1I_2)v = 0\}$. Rezolvând sistemul

$$(A - 1I_2)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

obţinem $x_1 = x_2$, deci

$$S_1 = \{\alpha(1,1)^T \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Cum

$$dim(S_1) = 1 < 2 = \text{ordinul de multiplicitate al valorii proprii } 1,$$

determinăm subspaţiul propriu generalizat

$$S_1^2 = \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, (A - I_2)^2 v = 0\}.$$

Avem

$$(A - I_2)^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si deci sistemul

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

are ca soluţie orice vector din $\mathbb{R}^2$, adică

$$S_1^2 = \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, (A - I_2)^2 v = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, Ov = 0\} = \mathbb{R}^2.$$

Alegem o bază în $\mathbb{R}^2$. Cea mai convenabilă este baza canonică

$$B_c = \{w_1 = (1,0)^T, w_2 = (0,1)^T\}.$$

Astfel, baza în spaţiul soluţiilor sistemului $\dot{x} = Ax$ este formată din:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^t \left(\sum_{j=0}^{1} \frac{t^j}{j!} (A - I_2)^j \right) w_1, \\ \varphi_2(t) &= e^t \left(\sum_{j=0}^{1} \frac{t^j}{j!} (A - I_2)^j \right) w_2. \end{aligned}$$

Observăm că cele două soluţii au în comun expresia

$$E(t) = e^t \left(\sum_{j=0}^{1} \frac{t^j}{j!} (A - I_2)^j \right),$$

pe care o calculăm:

$$\begin{aligned} E(t) &= e^t \left(\frac{t^0}{0!} \underbrace{(A - I_2)^0}_{=I_2} + \frac{t^1}{1!} (A - I_2) \right) \\ &= e^t \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \right) \\ &= e^t \begin{bmatrix} 1 + 2t & -2t \\ 2t & 1 - 2t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O baza în spaţiul soluţiilor sistemului este formată din:

$$\varphi_1(t) = e^t \begin{bmatrix} 1+2t & -2t \\ 2t & 1-2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1+2t \\ 2t \end{bmatrix},$$

$$\varphi_2(t) = e^t \begin{bmatrix} 1+2t & -2t \\ 2t & 1-2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} -2t \\ 1-2t \end{bmatrix},$$

iar soluţia generală este

$$\varphi(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare, autonome şi neomogene de ordinul I

Soluţia generală a unui sistem $\dot{x} = Ax + u(t)$, unde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ şi $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie continuă, este de forma:

$$\Psi(t) = \varphi(t) + \psi(t),$$

unde

$$\varphi(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \cdots + C_n\varphi_n(t),\ C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R},$$

este soluţia generală a sistemului omogen asociat, $\dot{x} = Ax$, $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ formând o bază în spaţiul soluţiilor sistemului $\dot{x} = Ax$, iar

$$\psi(t) = K_1(t)\varphi_1(t) + K_2(t)\varphi_2(t) + \cdots + K_n(t)\varphi_n(t)$$

este o soluţie particulară a sistemului neomogen $\dot{x} = Ax + u(t)$. Derivatele funcţiile $K_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, se determină rezolvând sistemul de ecuaţii liniare

$$\sum_{i=1}^{n} K_i'(t)\varphi_i(t) = u(t),$$

după care, prin integrare, se determină $K_i(t)$, aceasta fiind o primitivă a funcţiei $K_i'(t)$.

4. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n

• Determinarea sistemului de ecuaţii diferenţiale asociat ecuaţiei diferenţiale

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0. \tag{4}$$

• Determinarea unei baze în spaţiul soluţiilor ecuaţiei (4).

• Dacă $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ formează o bază în spaţiul soluţiilor ecuaţiei (4), să se scrie soluţia generală a acestei ecuaţii.

• Determinarea unei soluţii particulare $y(t)$ care satisface condiţiile iniţiale:

$$y(t_0) = y_0^1,\ y'(t_0) = y_0^2, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^n.$$

Probleme propuse

1. Să se determine o bază în spaţiul soluţiilor sistemului de ecuaţii diferenţiale

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x.$$

Ce reprezintă din punct de vedere geometric fiecare soluţie din bază? Scrieţi soluţia generală a sistemului.

2. Să se determine soluţia particulară $\varphi(t)$ a sistemului de ecuaţii diferenţiale

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x$$

ce satisface condiţia iniţială $\varphi(0) = (1,1)^T$, ştiind că o bază în spaţiul soluţiilor sistemului este formată din

$$\varphi_1(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} -2\cos(2t) \\ \cos(2t) + \sin(2t) \end{bmatrix},\ \varphi_2(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 2\sin(2t) \\ \cos(2t) - \sin(2t) \end{bmatrix}.$$

3. Polinomul caracteristic al matricei sistemului de ecuaţii diferenţiale

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} x$$

are rădăcinile $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$. Să se determine o bază în spaţiul soluţiilor sistemului.

4. Polinomul caracteristic al matricei sistemului de ecuaţii diferenţiale

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

are rădăcina dublă $\lambda_{1,2} = -1$, iar o bază în subspaţiul propriu S_{-1} este

$$B_{-1} = \left\{ v_1 = (2,-1,-1)^T, v_2 = (1,1,-2)^T \right\}.$$

A treia rădăcină a polinomului caracteristic al matricei sistemului este $\lambda_3 = 2$, iar un vector propriu corespunzător este $v_3 = (1,1,1)^T$. Să se scrie soluţiile din baza spaţiului soluţiilor sistemului corespunzătoare acestor perechi proprii şi soluţia generală a sistemului. Să se determine apoi soluţia particulară ce satisface condiţia iniţială $\varphi(0) = (-1,3,0)^T$.

5. Să se verifice că $\varphi(t) = \begin{bmatrix} t+1 \\ t \end{bmatrix}$ este o soluţie a sistemului de ecuaţii diferenţiale liniare şi neomogene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-t \\ -t \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Să se determine soluţia generală a acestui sistem de ecuaţii diferenţiale.

6. Să se determine o bază în spaţiul soluţiilor ecuaţiei diferenţiale

$$y''' + 7y'' + 17y' + 15y = 0.$$

Să se scrie sistemul de ecuaţii diferenţiale asociat. Din baza de soluţii ale ecuaţiei să se determine o bază în spaţiul soluţiilor sistemului de ecuaţii diferenţiale asociat.

7. Să se determine sistemul de ecuaţii diferenţiale asociat ecuaţiei diferenţiale

$$y''' - 3y'' + y' + 5y = 0.$$

Să se arate că $y(t) = e^{-t}$ este o soluţie a acestei ecuaţii şi apoi să se determine soluţia corespunzătoare a sistemului asociat.

8. Se consideră ecuaţia diferenţială $y'' + 9y = 0$. Să se determine sistemul de ecuaţii diferenţiale asociat, o bază în spaţiul soluţiilor acestui sistem şi apoi să se scrie soluţia generală a sistemului. Dacă soluţie generală a sistemului este

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

care este soluţia generală a ecuaţiei $y'' + 9y = 0$? Ce reprezintă coordonata $x_2(t)$ pentru soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date?

9. Se consideră ecuaţia diferenţială $y''' - 9y' = 0$. Să se determine soluţia particulară a acestei ecuaţii care satisface condiţiile iniţiale $y(0) = -1, y'(0) = 3, y''(0) = 1$.