Part I

ALGEBRA LINIARA

Teorie şi aplicaţii

1 2. SPAŢII VECTORIALE

1.1 TEORIE

În acest capitol introducem o nouă structură algebrică, asemănătoare cu cele studiate în clasa a XII-a. Modelul de referinţă este, aşa cum arată şi numele, spaţiul vectorilor.
Aşa cum aţi văzut în clasa a IX-a, vectorii se pot aduna (după regula paralelogramului; suma a doi vectori este un vector) şi se pot înmulţi cu scalari (produsul dintre un număr real şi un vector este un vector); matricele studiate la matematică se pot aduna (suma a două matrice de un anumit tip este o matrice de acelaşi tip) şi se pot înmulţi cu scalari (produsul dintre un număr şi o matrice este o matrice). Vom studia aici structuri dotate cu două operaţii: o adunare şi o înmulţire cu scalari, operaţii supuse unor reguli simple, generalizând astfel cele două exemple.

1. **Definiţia spaţiului vectorial.**

   Dacă $(V,+)$ este un grup abelian, $(K,+,\cdot)$ este un corp comutativ (de regulă $K=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sau $\mathbf{Z}_p$, unde p este un număr prim), iar

   $K\times V\to V, \quad (\alpha,v)\longmapsto \alpha v$

   este o operaţie care verifică axiomele:

   - $\alpha(v+w)=\alpha v+\alpha w$,
   - $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$,
   - $\alpha(\beta v)=(\alpha\beta)v$ şi
   - $1v=v$, (unde 1 este elementul neutru faţă de înmulţirea din K),

   pentru orice $\alpha,\beta\in K$ şi pentru orice $v,w\in V$ spunem că *pe V s-a definit o structură de spaţiu vectorial (sau liniar) peste corpul K, sau că V este spaţiu vectorial (liniar) peste corpul K*; în acest caz

   - elementele grupului V se numesc *vectori*;
   - elementele corpului K se numesc *scalari*;

- spunem că operaţia de adunare a vectorilor este o *operaţie internă* (deoarece suma a doi vectori este un vector);
- spunem că operaţia de înmulţire a scalarilor cu vectori este o *operaţie externă* (adică pentru orice element α al corpului K şi pentru orice element v al grupului V s-a definit produsul $\alpha v \in V$, sau, produsul dintre un scalar şi un vector este un vector);
- în lipsa altor precizări notăm cu θ elementul neutru al grupului $(V, +)$ (adică *vectorul nul), cu* $-v$ simetricul (opusul) vectorului v, cu 0 elementul neutru (*scalarul nul*) al grupului $(K, +)$, iar cu 1 elementul neutru al grupului $(K^*, \cdot)$, unde $K^* := K \setminus \{0\}$;
- notaţia V/K indică faptul că V este spaţiu liniar peste corpul K;
- când $K = \mathbb{R}$ spunem că V/K este *spaţiu vectorial real*, iar când $K = \mathbb{C}$ spunem că V/K este *spaţiu vectorial complex;*
- un spaţiu liniar format cu un singur vector (vectorul nul!) se numeşte *spaţiu trivial.*

Proprietăţi. Fie V/K un spaţiu vectorial, $\alpha \in K$ şi $v \in V$. Atunci:

(a) $0v = \theta$, adică produsul dintre scalarul nul şi un vector oarecare este vectorul nul;

(b) $\alpha\theta = \theta$, adică produsul dintre un scalar oarecare şi vectorul nul este vectorul nul;

(c) $(-1)v = -v$, adică produsul dintre scalarul -1 şi vectorul v este opusul vectorului v;

(d) $\alpha v = \theta \Rightarrow \alpha = 0$ sau $v = \theta$.

(e) Dacă $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ şi v_1, $v_2, ..., v_n \in V$ atunci $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n \in V$.
Un vector de forma $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$ cu $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ se numeşte *combinaţie liniară* a vectorilor v_1, $v_2, ..., v_n$.

2. **Exemple de spaţii vectoriale**.

(a) Mulţimea vectorilor legaţi, având acelaşi punct de aplicaţie, notat O, din spaţiul fizic $\mathcal{S}$, adică $V = \{\overrightarrow{OA} \,|\, A \in \mathcal{S}\}$, studiaţi la fizică. La matematică aţi studiat numai vectori în plan. În spaţiu, adunarea vectorilor $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ se defineşte ca şi în plan ţinând cont de faptul că punctele O, A, B sunt coplanare. (unde adunarea vectorilor necoliniari este definită prin regula paralelogramului (sau a triunghiului)

(b) *Spatiul aritmetic* $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$, unde $\mathbb{R}^n$ este mulţimea n-uplurilor de numere reale, i.e.: $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \,|\, x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$;

(notaţia consacrată în Computer Science pentru n-uplul $x \in \mathbb{R}^n$ este cea din $\mathbb{R}^{n\times 1} :=M_{n,1}(\mathbb{R})$, deci vom scrie uneori şi noi, prin abuz de notaţie, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$), iar adunarea vectorilor şi înmulţirea cu scalari sunt definite prin:

- $(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, ..., x_n +\ y_n)$ şi
- $\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1,\ \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$

pentru orice $(x_1, x_2, ..., x_n),\ (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ şi pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mai general:

(c) Spaţiul K^n/K, unde $(K, +, \cdot)$ este un corp comutativ; într-adevar, $K^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \,|\, x_1, x_2, ..., x_n \in K\}$ cu operaţiile, internă şi externă, definite ca la spaţiul aritmetic, adică

- $(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, ..., x_n +\ y_n)$ şi
- $\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1,\ \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$

pentru orice $(x_1, x_2, ..., x_n),\ (y_1, y_2, ..., y_n) \in K^n$ şi orice $\alpha, \beta \in K$, este un spaţiu liniar peste corpul K.

În particular, pentru corpul $K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, obţinem spaţiul vectorial al n-uplurilor de elemente din $\mathbb{Z}_2$ - numite *şiruri de n biţi* (ori *"stringuri" de n biţi)* $\mathbb{Z}_2^n = \{b = (b_1, b_2, ..., b_n) \,|\, b_i \in \mathbb{Z}_2,\ i = \overline{1, n}\}$;

suma şirurilor $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$, $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ este şirul $b + c = (b_1 \oplus c_1,\ b_2 \oplus c_2, ..., b_n \oplus c_n)$,

unde "$\oplus$" este adunarea modulo 2 (operatia XOR între biţi): $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$, $1 \oplus 1 = 0 + 0 = 0$,

iar şirul $\theta = (0, 0, ..., 0)$ este vectorul nul; produsul scalarului $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ cu şirul $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ este

$\alpha b = (\alpha \cdot b_1,\ \alpha \cdot b_2, ..., \alpha \cdot b_n)$, unde pe componente am folosit înmultirea modulo $2 : 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$ şi $1 \cdot 1 = 1$.

(d) Dacă A este o mulţime, iar $(K, +, \cdot)$ este un corp comutativ, atunci mulţimea $\mathcal{F}(A) = \{f : A \to K |\, f$ este funcţie$\}$ admite o structură de spaţiu vectorial peste K relativ la adunarea funcţiilor din $\mathcal{F}(A)$ (pentru $f, g \in \mathcal{F}(A)$ suma $f + g \in \mathcal{F}(A)$ este definită punctual prin $(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in A$), respectiv, înmulţirea cu scalari (pentru $f \in \mathcal{F}(A)$ şi $\alpha \in K$ produsul $\alpha f \in \mathcal{F}(A)$ se defineşte prin $(\alpha f)(x) = \alpha f(x),\ \forall x \in A$).

În electronică se studiază *spaţiul vectorial real al semnalelor în timp continuu* $\mathcal{F}(\mathcal{T})/\mathbb{R}$ şi *spaţiul vectorial complex al semnalelor în timp continuu* $\mathcal{F}(\mathcal{T})/\mathbb{C}$, unde $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ este, de regulă, un interval de numere reale.

Dacă impunem ca $\mathcal{T} \subset \mathbb{Z}$ atunci $\mathcal{F}(\mathcal{T})/\mathbb{R}$, respectiv $\mathcal{F}(\mathcal{T})/\mathbb{C}$ este spaţiu vectorial real, respectiv complex de *semnale discrete*.

Dacă $T = \mathbb{N}$, $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ este spaţiul şirurilor de elemente din K.

(e) Dacă A este o mulţime de numere reale atunci mulţimea $\mathcal{C}^0(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \,|\, f$ este funcţie continuă$\}$ înzestrată cu operaţiile de adunare a funcţiilor, respectiv, de înmulţire a acestora cu numere reale (adică operaţiile din $\mathcal{F}(A)/\mathbb{R}$) este spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$.

(f) Mulţimea $\mathcal{M}_{m,n}(K)$, unde $(K,+,\cdot)$ este un corp comutativ, devine un spaţiu liniar relativ la operaţiile de adunare a matricelor (operaţia internă) şi de înmulţire a acestora cu elemente din K (operaţia externă).

(g) Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, unde $(K,+,\cdot)$ este un corp comutativ. Mulţimea $Null(A)$ a soluţiilor sistemului liniar şi omogen $Ax = 0$ (cu coeficienţi din corpul K) furnizează spaţiul $Null(A)/K$ cu operaţiile din spaţiul $K^{n\times 1}/K$.

3. **Subspaţii vectoriale.**

Aşa cum s-a analizat la grupuri noţiunea de subgrup, la inele noţiunea de subinel, ori la corpuri noţiunea de subcorp - şi aici, în cazul spaţiilor vectoriale, ne punem problema: în ce condiţii o submulţime S a unui spaţiu liniar V/K, este, la rândul ei, un spaţiu vectorial relativ la restricţiile operaţiillor, internă, respectiv, externă; dacă acest lucru se întâmplă spunem că S este *subspaţiu vectorial (liniar)* al spaţiului V; indicăm faptul că S este subspaţiu vectorial al spaţiului V prin notaţia $S \leq V$.

Exemplul 2.(e). arată că mulţimea funcţiilor continue pe mulţimea A, privită ca submulţime în $\mathcal{F}(A)$ este spaţiu vectorial relativ la operaţiile din spaţiul $\mathcal{F}(A)/\mathbb{R}$, deci, cu notaţia introdusă, avem $C^0(A) \leq \mathcal{F}(A)$.

Exemplul 2.(g). arată că, în spaţiul $K^{n\times 1}/K$, avem $Null(A) \leq K^{n\times 1}$; $Null(A)$ se numeşte *subspaţiul nul al matricei* A, iar ecuaţiile sistemului $Ax = 0$ se numesc *ecuaţiile subspaţiului* $Null(A)$.

Propoziţie. Fie S o submulţime nevidă din spaţiul V/K. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) $S \leq V$;

(b) pentru orice vectori $u, v \in S$ şi pentru orice scalar $\alpha \in K$ avem $u + v \in S$ şi $\alpha u \in S$;

(c) pentru orice vectori $u, v \in S$ şi pentru orice scalari $\alpha, \beta \in K$ avem $\alpha u + \beta v \in S$.

Aplicând inductiv afirmaţia (c) din propoziţia de mai sus, vom avea că o submulţime S a unui spaţiu vectorial V este subspaţiu dacă si numai dacă orice combinaţie liniară de vectori din S rămâne în S

Exerciţiul 1. Să verificăm că

$$S = \left\{ A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c \in \mathbb{R},\ a + 2b = c \right\} \leq \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}).$$

Folosim propoziţia de mai sus (punctul (c)). Considerăm doi vectori arbitrari $A(a,b,c)$, $A(a',b',c') \in S$ şi doi scalari arbitrari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

În combinaţia liniară $\alpha A(a,b,c) + \beta A(a',b',c') =$
$= A(\alpha a, \alpha b, \alpha c) + A(\beta a', \beta b', \beta c') = A(\alpha a + \beta a', \alpha b + \beta b', \alpha c + \beta c')$ avem, conform ipotezei, $\alpha c + \beta c' = \alpha(a+2b) + \beta(a'+2b') = \alpha a + \beta a' + 2(\alpha b + \beta b')$, ceea ce indică faptul că $\alpha A(a,b,c) + \beta A(a',b',c') \in S$. Prin urmare S este subspaţiu vectorial al spaţiului $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})/\mathbb{R}$.

Exemple de subspaţii vectoriale.

(a) Dacă θ este vectorul nul din spaţiul V/K atunci $\{\theta\} \leq V$; subspaţiul $\{\theta\}$ se numeşte *subspaţiul nul* al spaţiului V. De asemenea $V \leq V$. Subspaţiile $\{\theta\}$ şi V se numesc *subspaţii triviale* ale spaţiului V. Un subspaţiu S diferit de subspaţiile triviale se numeşte *subspaţiu propriu*.

   Subspaţiul S de la *Exerciţiul 1.* este un subspaţiu propriu al spaţiului $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})/\mathbb{R}$.

(b) Fie V spaţiul vectorial al vectorilor legaţi de origine în spaţiul 3D. Mulţimea S a vectorilor situaţi în planul xOy este un subspaţiu vectorial al lui V. Mai mult, orice plan ce conţine originea este subspaţiu al lui V

(c) Spaţiul C al şirurilor convergente de numere reale este un subspaţiu în spaţiul şirurilor de numere reale $\mathcal{F}(\mathbb{N})$. Într-adevăr, suma a două şiruri convergente este un şir convergent, iar produsul cu un scalar al unui şir convergent este tot un şir convergent. Spaţiul şirurilor de numere reale care tind la 0 este şi el un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{F}(\mathbb{N})$, dar şi al lui C, asta deoarece $x_n \longrightarrow 0,\ y_n \longrightarrow 0 \Rightarrow \alpha x_n + \beta y_n \longrightarrow 0$.

(d) Dacă $S = \{v_1, v_2, ..., v_m\} \subset V$, unde V este spaţiu vectorial peste corpul K, mulţimea tuturor combinaţiilor liniare ale vectorilor din S notată $span(S)$ este un subspaţiu vectorial al spaţiului V (deci $span(S) \leq V$) numit *subspaţiul generat de sistemul de vectori S*. Dacă $span(S) = V$, atunci S se numeşte *sistem de generatori pentru spaţiul V*.

(e) În particular, dacă $c_1, c_2, \ldots, c_m$ sunt coloanele unei matrici $A = [c_1|...|c_m]$ cu n linii şi m coloane, subspaţiul $Span(c_1, \ldots, c_n)$ al lui $\mathbb{R}^n$ îl numim spaţiul coloanelor matricii A şi îl vom nota $Col(A)$.

   O matrice A ca mai sus ne defineşte patru subspaţii vectoriale: $Null(A)$ şi subspaţiul generat de liniile sale $Lin(A) := Col(A^T)$ sunt subspaţii ale spaţiului vectorial $\mathbb{R}^m$ iar $Null(A^T)$ şi $Col(A)$ sunt subspaţii în $\mathbb{R}^n$. Aceste patru subspaţii se mai numesc cele patru subspaţii fundamentale definite de matricea A.

(f) Fie U şi W două subspaţii vectoriale ale spaţiului V/K. Atunci:

   i. $U \cap W \leq V$;

   ii. $U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\} \leq V$.
   Subspaţiul $U + W$ se numeste *suma subspaţiilor U şi W*. Analog se defineşte suma mai multor subspaţii.

iii. Dacă suma subspaţiilor U *şi* W are proprietatea:
$\forall v \in U+W\ \exists! u \in U$ şi $\exists!\ w \in W$ astfel încât $v = u + w$
atunci notăm suma $U + W := U \oplus W$ şi o numim *suma directă* a subspaţiilor U şi W. Dacă $V = U \oplus W$ spunem că U şi W sunt *subspaţii suplementare*. (Simbolul $\exists!$ este o prescutare a sintagmei *"există şi este unic(ă)")*. Mai general:

iv. Dacă $U_1, U_2, ..., U_m \leq V$, atunci suma subspaţiilor $U_1+U_2+...+U_m := U \leq V$; dacă, în plus,
$\forall v \in U\ \exists! u_i \in U_i, i = \overline{1,m}$ astfel încât $v = u_1+u_2+...+u_m$ subspaţiul U se numeşte *suma directă* a subspaţiilor $U_1, U_2, ..., U_m$ şi scriem $U = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_m := \overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} U_i$.

Exerciţiul 2. Fie $A(a, b, c) \in S$, unde S este subspaţiul de la Exerciţiul 1. Deoarece $A(a, b, c) = A(a, b, a + 2b) = aA(1, 0, 1) + bA(0, 1, 2)$ rezultă că $S = span\big(A(1, 0, 1), A(0, 1, 2)\big)$. Tehnica de obţinere a unui sistem de generatori pentru subspaţiul S- numită *parametrizare* (am utilizat legătura dintre parametrii a, b şi scalarul $c = a + 2b$)$-$ va fi folosită adesea în cele ce urmează.

Mai mult, observăm că $S = span\big(A(1, 0, 1)\big) + span\big(A(0, 1, 2)\big)$, iar dacă $A(a, b, c) \in span\big(A(1, 0, 1)\big)+span\big(A(0, 1, 2)\big)$ atunci $A(a, 0, a) \in span\big(A(1, 0, 1)\big)$, respectiv $A(0, b, 2b) \in span\big(A(0, 1, 2)\big)$ sunt unicele matrice din $span\big(A(1, 0, 1)\big)$ respectiv $span\big(A(0, 1, 2)\big)$ pentru care $A(a, b, c) = A(a, 0, a)+A(0, b, 2b)$. În consecinţă S este suma directă a subspaţiilor $span\big(A(1, 0, 1)\big)$ şi $span\big(A(0, 1, 2)\big)$.

De fapt avem $span\big(A(1, 0, 1)\big) \cap span\big(A(0, 1, 2)\big) = \left\{\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, condiţie care asigură faptul că $span\big(A(1, 0, 1)\big)$ şi $span\big(A(0, 1, 2)\big)$ sunt subspaţii suplementare pentru spaţiul vectorial S. În general are loc:

Propoziţie. Fie $U_1, U_2, ..., U_m$ subspaţii vectoriale ale spatiului V/K. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) $U_1 + U_2 + ... + U_m = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_m$;

(b) $U_i \cap (U_1 + U_2 + ...U_{i-1} + U_{i+1} + ... + U_m) = \{\theta\}$, pentru $i = \overline{1,m}$.

4. **Dependenţă şi independenţă liniară.**

Definiţie. Fie V/K un spaţiu vectorial.

(a) Vectorii $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ sunt *liniar dependenţi* dacă există n scalari $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$, *nu toţi nuli,* astfel încât
$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \theta$; $(*)$
mai spunem că mulţimea $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este un *sistem de vectori liniar dependenţi* (uneori -*sistem liniar dependent*), iar relaţia $(*)$

este o *relatie de dependenţă liniară* (pentru vectorii $v_1, v_2, ..., v_n$); dacă, de exemplu, am determinat scalarii $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, cu $\alpha_1 \neq 0$, care satisfac relaţia $(*)$ atunci $v_1 = -\alpha_1^{-1}(\alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n)$ este, de asemenea o *relaţie de dependenţă liniară;*

cu alte cuvinte, vectorii $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ sunt liniar dependenţi dacă (măcar) unul dintre vectorii $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ se scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi (faptul că în relaţia de dependenţă liniară $(*)$ măcar unul dintre coeficienţii α_i este nenul, ne permite să scriem vectorul corespunzător ca o combinaţie liniară a celorlalţi).

(b) vectorii $v_1, v_2, ..., v_n$ sunt *liniar independenţi* dacă nu sunt liniar dependenţi, i.e.

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \theta, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$;

(Implicaţia reciprocă:
$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \theta$
are loc întotdeauna, aşa încât condiţia de mai sus revine la următoarea:
o combinaţie liniară a vectorilor $v_1, v_2, ..., v_n$ este vectorul nul dacă şi numai dacă toţi scalarii $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sunt nuli); mai spunem, în acest caz, că $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este un *sistem de vectori liniar independenţi* (sau *sistem liniar independent*).

Altfel spus: considerăm în spaţiul V/K ecuaţia $(*)$ de necunoscute $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$.

- Dacă ecuaţia admite soluţii nebanale, atunci $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este un sistem de vectori liniar dependenţi.
- Dacă ecuaţia admite doar soluţia banală, atunci $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este un sistem de vectori liniar independenţi.

Observaţie. Orice sistem de vectori care conţine vectorul nul este un sistem liniar dependent.

Exemplu. În spaţiul vectorial al vectorilor legaţi din plan, doi vectori nenuli u şi v vor fi liniar independenţi dacă şi numai dacă sunt necoliniari, căci relaţia de dependenţa liniară $u = \alpha v$ implică faptul că ei sunt coliniari. În schimb trei vectori legaţi din plan u, v, w vor fi întotdeauna liniar dependenţi pentru că putem găsi αu coliniar cu u şi βv coliniar cu v astfel încât w să fie diagonala paralelogramului construit pe αu şi βv.

Exerciţiul 3. Fie $v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (1, -2, -1), v_3 = (2, 3, \alpha)$ trei vectori din spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$, unde α este un număr real. Să analizam dependenţa/independenţa sistemului $S = \{v_1, v_2, v_3\}$. Conform definiţiei, considerăm, în $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$, ecuaţia

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = \theta, \qquad (1)$$

unde $\theta = (0, 0, 0)$ şi necunoscutele sunt scalarii $x, y, z \in \mathbb{R}$; trebuie să aflăm dacă ecuaţia are doar soluţia banală $x = y = z = 0$ (ceea ce indică liniar independenţa vectorilor v_1, v_2, v_3) sau are mai multe soluţii (ceea ce înseamnă dependenţa liniară a sistemului $S = \{v_1, v_2, v_3\}$). Deoarece

$(1) \Leftrightarrow (x, x, 2x) + (y, -2y, -y) + (2z, 3z, \alpha z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x + y + 2z,\ x - 2y + 3z,\ 2x - y + \alpha z) = (0, 0, 0)$,

rezultă că relaţia (1) este echivalentă cu sistemul liniar omogen:

$$\begin{cases} x + \ \ y + 2z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - \ \ y + \alpha z = 0 \end{cases} \qquad (2).$$

Conform teoriei sistemelor liniare şi omogene, problema noastră este acum să determinăm rangul matricei sistemului:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix},$$

matrice care se obţine prin concatenarea coloanelor v_1^T, v_2^T, v_3^T. Avem două posibilităţi:

- dacă rangul este 3, sistemul este compatibil determinat, i.e. unica soluţie este $x = y = z = 0$ (soluţia banala), caz în care S este un sistem de vectori liniar independent;
- dacă rangul este mai mic decât 3, sistemul admite şi soluţii nebanale, deci S este un sistem de vectori liniar dependent, iar o relaţie de dependenţă liniară se poate determina cu ajutorul matricei scară reduse. (O relaţie de dependenţă liniară este dată de scrierea relaţiei $xv_1 + yv_2 + zv_3 = \theta$, cu (x, y, z) o soluţie nebanală a sistemului (2). O asemenea soluţie se poate obţine rezolvând sistemul (2), de exemplu, cu metoda lui Gauss-Jordan.)

Cu transformările elementare pe linii $-L_1 + L_2 \to L_2$ şi $-L_1 - L_2 + L_3 \to L_3$ obţinem

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 5 \end{pmatrix};$$

matricea obţinută are forma scară, furnizează rangul ($rang(A)$ =numărul pivoţilor) şi, implicit, tranşează natura sistemului S :

- dacă $\alpha \neq 5$ atunci $rang(A) = 3$, deci S este liniar independent;
- dacă $\alpha = 5$ atunci $rang(A) = 2$, deci S este liniar dependent; în acest caz, continuând cu transformările elementare $-\frac{1}{3}L_2 \to L_2$ apoi cu $-L_2 + L_1 \to L_1$ obţinem forma scară redusă a matricei A

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dfrac{7}{3} \\ 0 & \boxed{1} & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

observăm că a treia coloană se poate exprima ca o combinaţie liniară a coloanelor care conţin pivoţii:

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{7}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

observăm că şi în matricea A coloana a III-a se poate exprima ca o combinaţie liniară a primelor două coloane folosind de asemenea coeficienţii $\frac{7}{3}$, respectiv $-\frac{1}{3}$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{7}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_3 = \frac{7}{3} v_1 - \frac{}{1} 3v_2,$$

adică am obţinut o relaţie de dependenţă liniară a vectorilor daţi.

Aici am folosit o proprietate importantă a formei scară redusă:

$\boxed{\text{Forma scară redusă păstrează combinaţiile liniare de coloane ale unei matrice}}$

Mai precis, o coloană a unei matrice A se poate scrie combinaţie liniară de alte coloane ale matricii dacă şi numai dacă aceeaşi combinaţie liniară are loc şi între coloanele de pe aceleaşi poziţii ale formei scară redus ă S_A^0 a matricii A. Tehnica utilizată în acest exerciţiu este aplicabilă în K^n/K :

Criteriul practic de dependenţă în K^n/K. Vectorii $v_1, v_2, ..., v_m \in K^n$ sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă rangul matricei $A = (v_1^T \mid v_2^T \mid ... \mid v_m^T) \neq m$; mai mult, deoarece transformările elementare pe linie conservă rangul şi relaţiile de dependenţă liniară, dacă S_A este forma scară redusă a matricei A, atunci:

- dacă numărul de pivoţi din S_A coincide cu numărul de vectori, m, atunci vectorii sunt liniar independenţi;
- dacă numărul r de pivoţi din matricea S_A este diferit de numărul vectorilor (adică $r \neq m$), atunci vectorii $v_1, v_2, ..., v_m$ sunt liniar dependenţi; în cazul în care vectorul nul nu este printre vectorii daţi, atunci
  - (a) poziţiile pivoţilor sunt $(1, j_1), (2, j_2), ..., (r, j_r)$;
  - (b) vectorii $v_{j_1}, v_{j_2}, ..., v_{j_r}$ sunt liniar indepedenţi;
  - (c) ceilalţi vectori sunt combinaţii liniare ale vectorilor $v_{j_1}, v_{j_2}, ..., v_{j_r}$, combinaţii care se citesc din coloanele matricei S_A; de exemplu, dacă în matricea S_A avem coloana $S_{:j} = (\alpha_1, ..., \alpha_r, 0, ..., 0)^T$ (cu $j \notin \{j_1, ..., j_r\}$), atunci $v_j = \alpha_1 v_{j_1} + \alpha_2 v_{j_2} + ... + \alpha_r v_{j_r}$.

Exerciţiul 4. Fie $v_1 = (1, 1, 2, 1)$, $v_2 = (1, -2, -1, 2)$, $v_3 = (1, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 1, 1, 0)$, $v_5 = (0, 0, 1, 1)$ vectori în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4/\mathbb{R}$.

(a) Să se arate că $M = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ este sistem de vectori liniar dependenţi.

(b) Să se determine numărul maxim m de vectori liniar independenţi din mulţimea M şi să se indice o submulţime $M_m \subset M$ de m astfel de vectori.

(c) Este M_m unica submulţime de m vectori liniar independenţi din M?

(d) Să se exprime vectorii din $M \setminus M_m$ ca şi combinaţii liniare ale vectorilor din M_m. Sunt unice aceste exprimări?

Rezolvare. Folosim criteriul practic. Pentru aceasta formăm matricea A prin concatenarea matricelor coloană corespunzătoare vectorilor daţi, urmând sa o aducem la forma scară redusă; pentru că urmărim să obţinem o matrice superior triunghiulară, vom concatena vectorii daţi într-o ordine care ne uşurează prelucrarea prin transformări elementare. De exemplu, formăm matricea

$$A = (v_3^T \mid v_4^T \mid v_5^T \mid v_1^T \mid v_2^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Deoarece rangul matricei A este mai mic decât 5 rezultă că $M = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ este sistem de vectori liniar dependenţi.

(b) Pentru a determina numărul m aducem A la forma scară redusă; obţinem

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Forma scară redusă are 4 pivoţi, deci rangul matricei A este 4, iar $m = 4$. Pivoţii se găsesc pe primele patru coloane, prin urmare am obţinut submulţimea maximală de vectori liniar independenţi $M_4 = \{v_3, v_4, v_5, v_1\}$.

(c) De exemplu, matricea $(v_2^T \mid v_4^T \mid v_5^T \mid v_1^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

are, de asemenea, rangul egal cu 4; rezultă că şi submulţimea $\{v_1, v_2, v_4, v_5\} \neq M_4$ e formată din patru vectori liniar independenţi.

(d) Deoarece în forma scară redusă coloana a cincea se poate exprima în funcţie de celelalte coloane: $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot$

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ obţinem, corespunzčator, exprimarea ultimei coloane din matricea A în funcţie de primele patru coloane, deci $v_2 = v_3 - 3v_4 + 2v_5$. Exprimarea lui v_2 este unică; într-adevăr dacă $v_2 = \alpha v_3 + \beta v_4 + \gamma v_5 + \delta v_1$, (cu $\alpha, \beta, \gamma,\ \delta \in \mathbb{R}$) urmează că $\alpha v_3 + \beta v_4 + \gamma v_5 + \delta v_1 = v_3 - 3v_4 + 2v_5$, sau echivalent, $(\alpha - 1)v_3 + (\beta + 3)v_4 + (\gamma - 2)v_5 + \delta v_1 = \theta$; dar vectorii v_1, v_3, v_4, v_5 sunt liniar independenţi şi, în consecinţă scalarii care intervin în combinaţie sunt toţi nuli, adică $\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = 2$ şi $\delta = 0$.

Observaţie: Spaţiul scalarilor este esenţial în stabilirea liniar independenţiei, după cum putem vedea din exemplul de mai jos:
Exerciţiu (NR.) Studiaţi liniar independenţa vectorilor $v_1 = 1$ şi $v_2 = i$ în spaţiile vectoriale $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}/\mathbb{C}$.
Rezolvare: În $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ liniar independenţa revine la a studia dacă $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot i = 0,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ implică $\alpha = \beta = 0$. Egalând părţile reale, apoi pe cele imaginare în egalitatea de numere complexe $\alpha + i\beta = 0$ se obţine $\alpha = \beta = 0$, deci $1, i$ sunt liniar independenţi.
În $\mathbb{C}/\mathbb{C}$ liniar independenţa revine la la a studia dacă $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot i = 0,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ implică $\alpha = \beta = 0$. Acest lucru nu se întâmplă: de exemplu $\alpha = -i$, $\beta = 1$ stabilesc relaţia de dependenţă liniară $v_2 = i \cdot v_1$. Prin urmare, în acest spaţiu vectorial, vectorii v_1, v_2 nu sunt liniar independenţi.

Baze. Caracterizări.

Definiţie. Un sistem ordonat de vectori $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \subset V$ este o *bază* pentru spaţiul V/K dacă

(a) sistemul B este liniar independent;

(b) B este sistem de generatori (i.e. $span(S) = V$).

Exemple.

(a) În spaţiul aritmetic $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ mulţimea $\{(1,0,0,...,0), (0,1,0,...,0), ..., (0,0,0,...,0,1)\}$ este o bază numită *baza canonică*.

(b) Mai general, în spatiul K^n/K mulţimea $\{(1,0,0,...,0), (0,1,0,...,0), ..., (0,0,0,...,0,1)\}$ este o bază numită *baza canonică* (ca de obicei, 1 este elementul neutru al grupului abelian $(K^* = K \setminus \{0\}, \cdot)$.

(c) În spaţiul $\mathcal{M}_{m,n}(K)/K$ mulţimea $B = \left\{e_{ij} \mid i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\right\}$ unde

$$e_{11} = \begin{pmatrix}1 & 0 & ... & 0\\0 & 0 & ... & 0\\ & & ... & \\0 & 0 & ... & 0\end{pmatrix}, e_{12} = \begin{pmatrix}0 & 1 & ... & 0\\0 & 0 & ... & 0\\ & & ... & \\0 & 0 & ... & 0\end{pmatrix}, ..., e_{1n} = \begin{pmatrix}0 & 0 & ... & 1\\0 & 0 & ... & 0\\ & & ... & \\0 & 0 & ... & 0\end{pmatrix},$$

$$e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 \\ & & ... & \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, ..., e_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 \\ & & ... & \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, ..., e_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ & & ... & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

este o bază numită *baza canonică*

(d) În spaţiul $\mathbb{R}_n[x]/\mathbb{R}$ mulţimea $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ este o bază numită *baza canonică*.

Exerciţiul 5. La *Exerciţiul 1.* am văzut că $S = \left\{ A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a + 2b = c \right\}$ este un subspaţiu vectorial al spaţiului $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})/\mathbb{R}$; la *Exerciţiul 2.* am constatat (folosind tehnica parametrizării) că vectorii $A(1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(0,1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ generează spaţiul S. Deoarece $span\big(A(1,0,1)\big) \cap span\big(A(0,1,2)\big) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, rezultă că cei doi vectori sunt liniar independenţi. În consecinţă mulţimea $\{A(1,0,1), A(0,1,2)\}$ este o bază pentru spaţiul S.

Propoziţie. Fie V/K un spaţiu vectorial şi $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \subset V$ o bază a sa.

(a) Orice vector $v \in V$ se exprimă *în mod unic* ca o combinaţie liniară a vectorilor (ordonaţi, după indicii $1, 2, ...$) din bază, i.e. există şi sunt unici scalarii $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ astfel încât $v = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$; scalarii $x_1, x_2, ..., x_n$ se numesc *coordonatele vectorului v în baza B*.

(b) Orice altă bază a spaţiului V/K are acelaşi număr de vectori; numărul vectorilor dintr-o bază a spaţiului V/K se numeşte *dimensiunea* spaţiului vectorial V/K; vom scrie $\dim(V) = n$.

Există spaţii care conţin un număr infinit de vectori liniar independenţi (i.e. exista n vectori liniar independenti oricare ar fi $\in \mathbb{N}^*$). De exemplu vectorii $\{1, X, X^2, ..., X^n\}$ sunt liniar independenţi în spaţiul real al tuturor polinoamelor cu coeficienţi reali pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Obiectul Algebrei liniare este studiul spaţiilor finit dimensionale.

Exemple. Ţinând cont de bazele canonice prezentate mai sus rezultă că:

(a) dimensiunea spaţiului $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ este n;

(b) dimensiunea spaţiului K^n/K este n;

(c) dimensiunea spaţiului $\mathcal{M}_{m,n}(K)/K$ este nm;

(d) dimensiunea spatiului $\mathbb{R}_n[x]/\mathbb{R}$ este $n+1$;

(e) in $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ cu baza canonică este $\{1, i\}$, deci $\dim(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = 2$;

(f) spaţiul vectorilor din plan are baza canonica $\{\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\}$, deci dimensiunea acestuia este 2.

La *Exercițiul 5.* am arătat de fapt că $\dim(S) = 2$.

Teoremă. Fie V/K un spaţiu vectorial şi $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \subset V$ un sistem de vectori. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) sistemul B este o bază pentru spaţiul V/K;

(b) B este un *sistem maximal de vectori liniar independenţi*, adică sistemul $\{e_1, e_2, ..., e_n, u\}$ este liniar dependent, oricare ar fi vectorul $u \in V$;

(c) *orice* vector $v \in V$ se exprima *in mod unic* ca o combinaţie liniară a vectorilor din sistemul B.

5. *SCHIMBARI DE BAZE*

Am vazut ca intr-un spatiu vectorial exista, in general, mai multe baze (dintre exemplele date doar $\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2$ are o singura baza). Raspundem aici la intrebarea: *care este legatura dintre coordonatele unui vector relativ la doua baze?*

Fie $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ si $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ doua baze in spatiul V/K. Exprimam vectorii bazei B' in baza B : exista si sunt unici scalarii $a_{ij} \in K$ asfel ca $e'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ pentru orice $j \in \{1, ..., n\}$, adica

$e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + ... + a_{n1}e_n$

$e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{n2}e_n$

$\cdots$

$e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + ... + a_{nn}e_n$

Definitie. *Matricea* $T_{BB'} := (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ *se numeste* ***matricea de trecere*** *de la baza* B *la baza* B'.

Prin urmare matricea de trecere este

$$T_{BB'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{21} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix};$$

ea are pe coloane coordonatele vectorilor $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ din "baza noua" B' -in aceasta ordine- in "baza veche" B. Matriceal avem

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix} = T^T_{BB'} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Analog construim matricea de trecere $T_{B'B}$ -de la baza B' la baza B si avem relatia matriceala

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = T^T_{B'B} \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix}.$$

Din cele doua relatii matriceale obtinem

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = T^T_{B'B} T^T_{BB'} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \text{ si } \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix} = T^T_{BB'} T^T_{B'B} \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix}.$$

Cum matricea de trecere $T_{BB} = T_{B'B'} = I_n$, iar exprimarea intr-o baza este unica, rezulta ca $T^T_{B'B} T^T_{BB'} = I_n = T^T_{BB'} T^T_{B'B}$, ori

$$T_{B'B} T_{BB'} = T_{BB'} T_{B'B} = I_n,$$

adica cele doua matrice de trecere sunt inversabile si

$$T^{-1}_{B'B} = T_{BB'}.$$

Daca $B'' = \{e''_1, e''_2, ..., e''_n\}$ este o alta baza in spatiul V/K atunci

$$\begin{pmatrix} e''_1 \\ e''_2 \\ \vdots \\ e''_n \end{pmatrix} = T^T_{B'B''} \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix} = T^T_{B'B''} T^T_{BB'} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

si

$$\begin{pmatrix} e''_1 \\ e''_2 \\ \vdots \\ e''_n \end{pmatrix} = T^T_{BB''} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

deci $T^T_{BB''} = T^T_{B'B''} T^T_{BB'} = (T_{BB'} T_{B'B''})^T$. Prin urmare

$$T_{BB''} = T_{BB'} T_{B'B''}.$$

Fie acum $v \in V$ un vector arbitrar. Conform teoremei precedente v se exprima in mod unic ca o combinatie liniara a vectorilor din baza B, si, de asemenea, ca o combinatie liniara unica a vectorilor din B'. Prin urmare exista si sunt unici scalarii $x_1, ..., x_n$ si $x'_1, ..., x'_n$ astfel ca

$$v = x_1 e_1 + ... + x_n e_n = x'_1 e'_1 + ... + x'_n e'_n.$$

Deoarece $e'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ pentru orice $j \in \{1, ..., n\}$, folosind cele doua exprimari ale lui v, avem

$$v = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j \right) e_i = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x'_j \right) e_1 + ... + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj} x'_j \right) e_n,$$

adica $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j$ pentru orice $i \in \{1, ..., n\}$. Matriceal obtinem

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{21} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Sa notam cu v_B respectiv cu $v_{B'}$ matricele coloana ale coordonatelor in cele doua baze, adica

$$v_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ si } v_{B'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Atunci relatia obtinuta poate fi scrisa pe scurt

$$v_B = T_{BB'} v_{B'}, \text{ sau, echivalent } v_{B'} = T_{BB'}^{-1} v_B.$$

Am obtinut urmatorul rezultat.

Teorema. *Fie B, B' si B'' baze in spatiul V/K. Atunci matricea de trecere de la baza B la baza B' este invesabila si inversa ei este matricea de trecere de la baza B' la baza B, adica*

$$T_{BB'}^{-1} = T_{B'B}.$$

Intre matricele de trecere ale celor trei baze avem legatura urmatoare:

$$T_{BB''} = T_{BB'} T_{B'B''}.$$

Daca $v \in V$ iar v_B este matricea coloana a coordonatelor vectorului v in baza B si $v_{B'}$ este matricea coloana a coordonatelor vectorului v in baza B' atunci

$$v_{B'} = T_{BB'}^{-1} v_B.$$

Exemplu. Sa consideram bazele B_c, $B = \left\{1 + X, X + X^2, X^2 + 1\right\}$ si $B' = \left\{1, X - 1, X^2 - 1\right\}$ din spatiul $\mathbb{R}_2[X]/\mathbb{R}$, unde B_c este baza canonica. Ne propunem sa determinam

(a) T_{B_cB}si T_{BB_c};

(b) $T_{B_cB'}$si $T_{B'B_c}$;

(c) $T_{BB'}$;

(d) coordonatele vectorului $f = 1 + X + X^2$ in bazele B si B'.

b. *Rezolvare.* a. Deoarece $B_c = \left\{1, X, X^2\right\}$ urmeaza ca, in baza canonica, vectorul $1+X$ are coordonatele 1,1,0 , vectorul $X+X^2$ are coordonatele 0,1,1 iar vectorul X^2+1 are coordonatele 1,0,1. Prin urmare matricea de trecere de la baza canonica la baza B este

$$T_{B_cB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cum $T_{BB_c} = T_{B_cB}^{-1}$ si $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$
rezulta ca

$$T_{BB_c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. **b.** Analog $T_{B_cB'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si $T_{B'B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   c. Folosim din nou teorema precedenta. Avem $T_{BB'} = T_{BB_c}T_{B_cB'} =$ $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1/2 & -1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

   d. coordonatele vectorului $f = 1+X+X^2$ in bazele B si B'. Cu notatiile din teorema precedenta avem $f_B = T_{BB_c} \cdot f_{B_c} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, deci coordonatele vectorului f in baza B sunt $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

   Similar $f_{B'} = T_{B'B_c} \cdot f_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, deci coordonatele vectorului f in baza B' sunt $3, 1.1$.

1.2 PROBLEME REZOLVATE

1. Folosind definiţia, să se arate că vectorii

$$u_1 = (1,1,2), u_2 = (2,1,1), u_3 = (-1,1,1) \in \mathbb{R}^3$$

   sunt liniar independen'ti.
   Rezolvare:

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = \theta$. Înlocuind, avem că relaţia e echivalentă cu

$$\alpha_1(1,1,2) + \alpha_2(2,1,1) + \alpha_3(-1,1,1) = (0,0,0)$$

şi făcând operaţiile în membrul stâng, cu

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0)$$

ceea ce ne conduce la sistemul omogen

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

matricea sistemului are determinantul $det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ \end{bmatrix} = 3 \neq 0$ deci sistemul omogen admite doar soluţia banală $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha 3 = 0$, aşadar vectorii u_1, u_2, u_3 sunt liniar independen'ti.

2. Folosind criteriul practic, să se arate că $S = \{u_1 = (1,2,0), u_2 = (1,2,3), u_3 = (0,1,1)\}$ reprezintă un sistem liniar independent de vectori din $\mathbb{R}^3$.
Rezolvare:
Construim matricea

$$A = [u_1^T | u_2^T | u_3^T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculăm $det(A) = -3 \neq 0$, deci conform criteriului practic, avem că S reprezintă un sistem liniar independent de vectori din $\mathbb{R}^3$

3. Sistemul

$$A = \{u_1 = (1,-2,1), u_2 = (-1,2,-1), u_1 = (2,1,7), u_4 = (1,1,4), u_5 = (-1,2,-1)\}$$

este un sistem liniar dependent de vectori din $\mathbb{R}^3$. Cum putem justifica acest lucru fără calcule? Să se extragă un subsistem $S' \subset S$, liniar independent.
Rezolvare:
Concatenăm cei cinci vectori pentru a construi matricea $A = [u_1^T | u_2^T | u_3^T | u_4^T | u_5^T]$.
Cum matricea A are numai trei linii, $rang(A) \leq 3$, deci vectorii din S nu pot fi liniar independenţi.

Prin operaţii pe linie, avem

$$A \overset{2L_1+L_2 \to L_2;\ -L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ \end{bmatrix} \overset{-L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \end{bmatrix} = S_A$$

În S_A, coloanele cu pivoţi sunt prima şi cea de-a treia, deci $S' = \{u_1, u_3\}$ reprezintă subsistemul căutat.

4. Să se arate că

$$\Big\{ A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Big\}$$

Reprezintă un sistem liniar independent de vectori din $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
Rezolvare:
Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4$, adică

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Făcând calculele în membrul stâng şi identificând elementele vom avea că relaţia de mai sus e echivalentă cu sistemul omogen:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \qquad\;\; = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \qquad\qquad\quad = 0 \\ \alpha_1 \qquad\qquad\qquad\quad\;\; = 0 \end{cases}$$

Sistemul fiind superior triunghiular, admite soluţie unică soluţia banală $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, deci $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ reprezintă un sistem liniar independent de vectori din $\mathbb{R}^{2\times 2}$

5. Să se arate că sistemul de vectori liniar independent S din problema 2 reprezintă o bază în $\mathbb{R}^3$ şi să se calculeze coordonatele vectorului $v = (-1, 1, 1)$ relative la baza S.
Rezolvare:
Din problema a doua ştim că vectorii sunt liniar independenţi. Dar cum $Card(S) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$, avem că formează un sistem liniar independent maximal, cu alte cuvinte formează o bază în $\mathbb{R}^3$.

Coordonatele pe care le căutăm sunt $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = v$. Dar înlocuind vectorii, această combinaţie liniară ne conduce la sistemul compatibil determinat

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\quad = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad\;\; 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Rezovându-l, găsim $x_1 = -1/3, x_2 = -2/3, x_3 = 3$

Alternativ, am fi putut calcula coordonatele construind matricea $A = [u_1^T | u_2^T | u_3^T | u_4^T | v]$. Forma ei scar'a redusă $S_A^0 = [c_1 | c_2 | c_3 | c_4]$ ar fi avut pivoţi pe primele trei coloane, iar c_4 s-ar fi scris combinaţie liniară de acestea $c_4 = x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3$. Apoi am fi folosit faptul că forma scară redusă păstrează combinaţiile liniare de coloane ale unei matrici.

6. Să se arate că polinoamele Bernstein[1] de grad doi $\{B_2^k(t) = C_2^k t^k (1-t)^{2-k}, k = 0, 1, 2$ Formează o bază în $\mathbb{R}^2[t]$ şi să se calculeze coordonatele polinomului $p(t) = 3 + 2t + t^2$ relative la aceast'a baz'a. Rezolvare:
Explicităm cele trei polinoame şi găsim $B_2^0(t) = 1 - 2t + t^2, B_2^1(t) = 2t - 2t^2, B_2^2(t) = t^2$ Fie $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha_0 B_2^0(t) + \alpha_1 B_2^1(t) + \alpha_2 B_2^2(t) = \theta$, sau explicitând, $\alpha_0(1-2t+t^2)+\alpha_1(2t-2t^2)+\alpha_2 t^2 = 0$. După ce desfacem parantezele, grupăm monoamele de acelaşi grad şi identificăm coeficienţii în cei doi membri, relaţia va fi echivalentă cu

$$\begin{cases} \alpha_0 - 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_0 + 2\alpha_1 \quad = 0 \\ \alpha_0 \qquad\qquad = 0 \end{cases}$$

Sistemul omogen fiind superior triunghiular va avea soluţie unică, mai precis doar soluţia banală $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Astfel, cele trei polinoame sunt liniar independente.

Pe de altă parte, în spaţiul vectorial $\mathbb{R}_2[t]$ avem baza canonică $\mathcal{B} = \{e_1(t) = 1, e_2(t) = t, e_3(t) = t^2\}$, deci $\mathbb{R}^2[t]$ are dimensiunea trei, valoare care coincide cu cardinalul mulţimii celor trei polinoame Bernstein. Adică acestea formează o bază.

Coordonatele pe care le căutăm sunt $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_0 B_2^0(t) + x_1 B_2^1(t) + x_2 B_2^2(t) = p(t)$. După ce explicităm polinoamele şi identificăm coeficienţii ca înainte, ajungem la un sistem de ecuaţii

$$\begin{cases} x_0 - 2x_1 + x_2 \quad = 1 \\ -2x_0 + 2x_1 \quad = 2 \\ x_0 \qquad\qquad = 3 \end{cases}$$

de unde găsim $x_0 = 3, x_1 = 4, x_2 = 6$

7. Să se determine câte o bază în cele patru subspaţii fundamentale ale lui $\mathbb{R}^2$ definite de matricea:
a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
Rezolvare:
a) Aducem la forma scar'a redus'a matricea A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 \\ \end{bmatrix} = S_A^0 = [c_1|c_2]$$

[1] aceste polinoame se folosesc pentru a defini curbele Bezier. Toate fonturile sunt desenate din arce de curbe Bezier, mai mult, softurile de proiectare de tip CAD folosesc astfel de curbe.

şi matricea A^T

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ & \end{bmatrix} \xrightarrow{-2L_1+L_2 \to L_2} \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \\ & \end{bmatrix} = S^0_{A^T} = [c'_1|c'_2]$$

Matricea S^0_A are pivot pe coloana c_1, deci prima coloană a matricii A reprezintă un sistem liniar independent, astfel $\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (0,1)^T\}$ este o bază în $Col(A)$.

Matricea $S^0_{A^T}$ are pivot pe coloana c'_2, deci a doua coloană a matricii A^T reprezintă un sistem liniar independent, astfel $\mathcal{B}'_1 = \{u'_1 = (1,2)^T\}$ este o bază în $Lin(A) = Col(A^T)$.

Pentru $Null(A)$ observăm că un vector $u = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $u \in Null(A^T) = Null(S^0_A)$ dacă şi numai dacă

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

Relaţia de mai sus reprezintă un sistem de o ecuaţie cu două necunoscute cu matrice de rang 1. x_1 va fi necunoscută principală şi $x_2 = \alpha$ necunoscută secundară. Obţinem $x_1 = -2\alpha$ şi deci $u \in Null(A) \iff u = (-2\alpha, \alpha)^T = \alpha(-2,1)^T$. Adică un vector u aparţine subspaţiului $Null(A)$ dacă şi numai dacă se scrie combinaţie liniară de vectorul $v_1 = (-2,1)^T$. Deci $Null(A) = Span(v_1)$. Dar un sistem format dintr-un singur vector nenul este un sistem liniar independent şi astfel $\mathcal{B}_2 = \{v_1 = (-2,1)^T\}$ reprezintă o bază în $Null(A)$.

Pentru $Null(A^T)$ observăm că un vector $u = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $u \in Null(A^T) = Null(S^0_{A^T})$ dacă şi numai dacă

$$x_2 = 0$$

Adic'a $u \in Null(A^T) \iff u = (\alpha, 0)^T = \alpha(1,0)^T$. Adică un vector u aparţine subspaţiului $Null(A^T)$ dacă şi numai dacă se scrie combinaţie liniară de vectorul $v'_1 = (1,0)^T$. Deci $Null(A^T) = Span(v'_1)$. Dar un sistem format dintr-un singur vector nenul este un sistem liniar independent şi astfel $\mathcal{B}'_2 = \{v'_1 = (1,0)^T\}$ reprezintă o bază în $Null(A^T)$.

8. Prin operaţii pe linie, matricea

$$A = [u_1|u_2|u_3|u_4|u_5] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ & & & & \end{bmatrix}$$

se transformă într-o matrice

$$B = [c_1|c_2|c_3|c_4|c_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \end{bmatrix}$$

În ce spaţiu vectorial este $Col(A)$ subspaţiu? Dar $Null(A)$? Să se determine câte o bază în aceste subspaţii.
Rezolvare:
$Col(A)$ este generat de coloanele matricii A şi cum fiecare coloană e vector din $\mathbb{R}^{4\times 1}$ înseamnă că $Col(A)$ e un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^{4\times 1}$. Pe de altă parte, $Null(A)$ reprezintă mulţimea soluţiilor sistemului omogen scris matricial $Ax = 0$. Matricea A, având cinci coloane, sistemul omogen va avea cinci necunoscute, deci va fi subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^{5\times 1}$.

Întrucât matricea B este o matrice scară redusă şi a fost obţinută din A prin operaţii elementare pe linie, înseamnă că este chiar forma scară redusă a matricii A. În B pivoţii se găsesc pe coloanele c_1 şi c_2, deci în A coloanele u_1 şi u_2 sunt liniar independente, celelalte putându-se scrie combinaţie liniară de ele. Astfel, o bază în $Col(A) = Span(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ este $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, -2, 1, 2)^T, u_2 = (2, -4, 1, 3)^T\}$.

Pentru că B este forma scară redusă a matricii A, sistemul omogen $Ax = 0$ are aceleaşi soluţii cu sistemul $Bx = 0$ dar al doilea e mai uşor de rezolvat. Deoarece în matricea B pivoţii sunt pe coloanele c_1 şi c_2, vom lua x_1 şi x_2 necunoscute principale, iar necunoscutele secundare le notăm cu parametri după cum urmează: $x_3 = \alpha, x_4 = \beta, x_5 = \gamma$. Înlocuind în sistem, avem

$$\begin{cases} x_1 \quad + \alpha + 3\beta + 5\gamma = 0 \\ \quad x_2 \quad - \beta - 3\gamma = 0 \end{cases}$$

deci $x_1 = -\alpha - 3\beta - 5\gamma, x_2 = \beta + 3\gamma$. Astfel, un vector $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \in Null(B) = Null(A)$ dacă şi numai dacă

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha - 3\beta - 5\gamma \\ \beta + 3\gamma \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

iar dacă notăm $v_1 = [-1, 0, 1, 0, 0]^T, v_2 = [-3, 1, 0, 1, 0]^T, v_3 = [-5, 3, 0, 0, 1]^T$, relaţia de mai sus ne spune că $Null(B) = Span(v_1, v_2, v_3)$. În plus, aceşti vectori sunt liniar independenţi şi astfel $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ reprezintă o bază în $Null(A)$.

9. Construiţi o matrice A pentru care $u = (1, 2, 3)^T \in Null(A)$
Rezolvare:
$u \in Null(A) \iff Au = 0$ şi înmulţirea se poate efectua doar dacă matricea A are trei coloane. Deci vom căuta o matrice $A = [x, y, x] \in \mathbb{R}^{1\times 3}$. Avem că

$$Au = 0 \iff x + 2y + 3z = 0$$

iar ultima relaţie este un sistem de o ecuaţie cu trei necunoscute. Rangul matricii sistemul e 1, deci luăm x necunoscut'a principală iar necunoscutele secundare le notăm $y = \alpha, z = \beta$. Găsim $x = -2\alpha - 3\beta$ şi pentru $\alpha = \beta = 1$ vom avea $x = -5, y = 1, z = 1$, deci matricea $A = [-5, 1, 1]$

10. Construiţi o matrice A pentru care $Col(A) = Span(u = (1,1,2)^T)$ şi $Lin(A) = Span(v = (1,5))$
Rezolvare:
Evident, căutăm o matrice cu trei linii şi două coloane c_1, c_2. Pentru c'a $c_1, c_2 \in span(u = (1,1,2)^T)$, cele două coloane sunt de forma $c_1 = \alpha(1,1,2)^T, c_2 = \beta(1,1,2)$. Astfel

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \\ 2\alpha & 2\beta \\ \end{bmatrix}$$

dar cele trei linii trebuie să fie elemente din $Span(1,5)$, adică fiecare linie să fie multiplu de acest vector, atunci

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \\ 2 & 10 \\ \end{bmatrix}$$

11. Să se găsească ecuaţiile subspaţiului $S = Span(u_1 = (1,1,2), u_2 = (-1,1,2))$ al lui $\mathbb{R}^2$.
Rezolvare:
Fie $v = (x_1, x_2, x_3)$ un vector oarecare din $\mathbb{R}^3$. Construim matricea $A = [u_1^T | u_2^T | v]$ şi o aducem la forma scară:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 2 & 2 & x_3 \\ \end{bmatrix} \overset{-L_1+L_2 \to L_2;\ -2L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & x_1 \\ 0 & \boxed{2} & -x_1 + x_2 \\ 0 & 4 & -2x_1 + x_3 \\ \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\overset{-2L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & x_1 \\ 0 & \boxed{2} & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & -2x_2 + x_3 \\ \end{bmatrix} = S_A$$

Ultima coloană din S_A se poate scrie combinaţie liniară de primele două dacă şi numai dacă nu conţine pivot, adică dacă $-2x_2 + x_3 = 0$. Dar aceasta e şi condi'tia ca ultima coloană din A să se poată scrie combinaţie liniară de primele două, deci condiţia ca $v \in Span(u_1, u_2)$. Aşadar

$$S = \{v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | -2x_2 + x_3 = 0\}$$

12. În $\mathbb{R}^{2\times 2}$, mulţimea S a matricilor de rang unu este subspaţiu?
Rezolvare:
Matricile $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \end{bmatrix}$ şi $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ \end{bmatrix}$ au $rang(A) = rang(B) = 1$

dar $Rang(A+B) = Rang(I_2) = 2 \neq 1$, deci existą combinaţii liniare de elemente din S care nu dau un element din S, aşadar S nu este subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Să se determine dimensiunea substaţiului vectorial $S = \{v = [a, b+2c, a+b+2c]^T | a, b, c \in \mathbb{R}\}$ al lui $\mathbb{R}^{3\times 1}$

Rezolvare:

Observăm că $v = a[1,0,1]^T + b[0,1,1]^T + c[0,2,2]^T$ deci $S = Span(u_1 = [1,0,1]^T, u_2 = [0,1,1]^T, u_3 = [0,2,2]^T)$. Dar u_2 şi u_3 nu sunt liniar independenţi, pentru că $u_3 = 2u_2$. O bază în S va fi $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$, aşadar $dim(S) = 2$

1.3 PROBLEME PROPUSE

1. Arătaţi că într-un spaţiu vectorial:

   (a) există un singur vector nul;

   (b) oricare vector are un unic vector opus.

2. În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ se dau vectorii $u = (1,2,1)$, $v = (1,1,1)$, $w = (0,9,8)$.

   (a) Scrieţi baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$.

   (b) Exprimaţi vectorii daţi în baza canonică.

   (c) Determinaţi coordonatele vectorilor daţi în baza canonică.

   (d) Determinaţi vectorul $\widetilde{v} = 3v + 5u - w$; stabiliţi dacă următoarele sisteme de vectori sunt baze pentru spaţiul V :

      i. $\{u, v, w\}$;
      ii. $\{u, v, w, \widetilde{v}\}$;
      iii. $\{u, v, \widetilde{v}\}$;
      iv. $\{\theta, w, \widetilde{v}\}$;
      v. $\{v, w, \widetilde{v}\}$.

3. Să se arate că multimea matricelor cu elemente din corpul K i.e. $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ este un spaţiu vectorial peste corpul K, faţă de operaţia (internă) de adunare a matricelor, respectiv, faţă de operaţia (externă) de înmulţire a matricelor cu scalari.

4. Verificaţi că în spaţiul vectorial V/K :

   (a) $0v = \theta$, pentru orice $v \in V$, adică produsul scalarului 0 cu orice vector v este vectorul nul;

   (b) $\alpha\theta = \theta$, pentru orice $\alpha \in K$, adică produsul scalarului α cu vectorul nul este vectorul nul;

(c) $(-1)v = -v$ pentru orice $v \in V$, adică produsul dintre scalarul -1 şi vectorul v este opusul vectorului v;

(d) dacă $\alpha \in K$, $v \in V$ şi $\alpha v = \theta$, atunci $\alpha = 0$ sau $v = \theta$.

5. Să se arate că următoarele mulţimi se pot înzestra cu o structură de spaţiu liniar peste corpul numerelor reale:

   (a) $\{(a, 0, b+c, a+b+c) |\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$

   (b) $\{(a, -c, -b+c+d, a+b+c+d) |\ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

6. În spaţiul $\mathbb{R}^{3\times 1}/\mathbb{R}$ considerăm vectorii $v_1 = (9, 0, 1)^T$, $v_2 = (2, 2, 1)^T$, $v_3 = (0, 2, 1)^T$, $v_4 = (1, 1, 1)^T$.

   (a) Să se scrie combinaţia liniară $v = v_1 + 2(-13, 0, 1)^T + v_2 - v_3 + v_4$.

   (b) Să se determine coordonatele vectorilor consideraţi în baza canonică.

   (c) Să se determine rangul matricei $A = (v_1 \mid v_2 \mid v_3 \mid v_4)$.

   (d) Sunt vectorii consideraţi liniar independenţi?

   (e) Să se determine cel mai mare $n \leq 4$ pentru care multimea $\left\{v_i : i = \overline{1, n}\right\}$ este liniar independentă.

   (f) Să se determine mulţimea tuturor combinaţiilor liniare ale vectorilor

      i. v_1, v_2, v_3, v_4.

      ii. $v_1, v_2, ..., v_n$.

7. Să se arate că vectorii notaţi $v_1, v_2, ...$ formează o bază într-un spaţiu aritmetic, apoi determinaţi coordonatele vectorului v în baza respectivă:

   (a) $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 2)$, $v_3 = (1, 2, 3)$; $v = (6, 9, 14)$.

   (b) $v_1 = (2, 1, -3)$, $v_2 = (3, 2, -5)$, $v_3 = (1, -1, 1)$; $v = (6, 2, -7)$.

   (c) $v_1 = (1, 2, -1, -2,)$, $v_2 = (2, 3, 0, -1)$, $v_3 = (1, 2, 1, 4)$, $v_4 = (1, 3, -1, 1)$; $v = (7, 14, -1, 2)$.

   Răspunsuri. (a). $1, 2, 3$; (b). $1, 1, 1$; (c). $0, 2, 1, 2$.

8. Să se arate că vectorii notaţi $v_1, v_2, ...$, respectiv $v_1', v_2', ...$, formează baze într-un spaţiu aritmetic; exprimaţi vectorii $v_1, v_2, ...$ în cele două baze.

   (a) $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (2, 3, 3), v_3 = (3, 7, 1); v_1' = (3, 1, 4), v_2' = (5, 2, 1), v_3' = (1, 1, -6)$.

   (b) $v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 1, 1), v_3 = (1, 1, 2, 1), v_4 = (1, 3, 2, 3); v_1' = (1, 0, 3, 3), v_2' = (-2, -3. -5, -4), v_3' = (2, 2, 5, 4), v_4' = (2, 2, 5, 4)$.

   Răspunsuri.

   (a) $v_1 = -27v_1' - 71v_2' - 41v_3', v_2 = 9v_1' + 20v_2' + 9v_3', v_3 = 4v_1' + 12v_2' + 8v_3'$;

(b) $v_1 = 2v_1' + v_3' - v_4', v_2 = -3v_1' + v_2' - 2v_3' + v_4', v_3 = v_1' - 2v_2' + v_3' - v_4'$, $v_4 = v_1' - v_2' + v_3' - v_4'$.

9. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorul v să se poată exprima ca o combinaţie liniară a celorlalţi vectori daţi:

   (a) $v = (7, -2, \lambda)\,, v_1 = (2, 3, 5), v_2 = (3, 7, 8), v_3 = (1, -6, 1)$;

   (b) $v = (9, 12, \lambda)\,, v_1 = (3, 4, 2), v_2 = (6, 8, 7)$.

   Răspunsuri. (a). $\lambda = 15$; (b). $\lambda \in \mathbb{R}$.

10. * Fie V/K un spaţiu liniar de dimensiune n. Se ştie că, în general, într-un asemenea spaţiu există mai multe baze.

    (a) Să se arate că pentru $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$ spaţiul V are o infinitate de baze.

    (b) Să se dea câte un exemplu de spaţiu care are exact $0, 1, 2, 3$, respectiv 4 baze.

11. Determinaţi dimensiunile următoarelor spaţii vectoriale:

    (a) $\{(0, 0, 0)\}$

    (b) $\left\{ (a, a, a, a)^T \middle| \; a \in \mathbb{R} \right\}$

    (c) $\left\{ (a, 0, b + c, a + b + c)^T \middle| \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

    (d) $\left\{ (a, -c, -b + c + d, a + b + c + d)^T \middle| \; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

    (e) $\{ (0, a + c, c + d, a + b + c + d) |\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$.

    Răspusuri. (a). 0; (b). 1; (c). 2; (d). 4; (d). 3.

12. Să se găsească câte o bază în fiecare din cele patru subspaţii fundamentale ale matricii

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ & & & & \end{bmatrix}$$

13. Să se determine matricea de trecere de la baza B la baza B' şi inversa ei unde:

    (a) $B = \{(1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1)\}\,,\; B' = \{(3, 1, 4), (5, 2, 1), (1, 1, -6)\}\,;$

    (b) $B' = \{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 3, 2, 3)\}, B = \{(1, 0, 3, 3), (-2, -3. - 5, -4), (2, 2, 5, 4), (2, 2$

14. Să se stabilească dimensiunea spaţiului $\mathbb{R}_n[x]/\mathbb{R}$ (spaţiul funcţiilor polinomiale de grad mai mic sau egal cu n), să se determine coordonatele vectorilor 1, $(x - a)$, $(x - a)^2$, ... ,$(x - a)^n$ în baza canonică, să se arate că vectorii 1, $(x - a)$, $(x - a)^2$, ... ,$(x - a)^n$ formează o bază în $\mathbb{R}_n[x]/\mathbb{R}$, apoi să se scrie matricele de trecere dintre cele doua baze.

15. Să se arate că în spaţiul $\mathbb{R}_3[x]/\mathbb{R}$ sistemul de vectori

    (a) $B = \{1, 2x, 2x^2, 2x^3\}$ este o bază, iar coordonatele vectorului $x + x^2$ sunt $(0, 1/2, 1/2, 0)$;

    (b) $B' = \{1 + x, 1 - x, x + x^2, x + x^3\}$ este o bază, iar coordonatele vectorului $x + x^2$ sunt $(0, 0, 1, 0)$.

    (c) $\mathcal{B}_3''^k(x) = C_3^k x^k (1-x)^{3-k},\ k = 0, 1, 2, 3\}$ este o bază iar coordonatele vectorului $x + x^2$ sunt $(0, 1/3, 3, 8)$

16. * Să se arate că următorul sistem de vectori (în ce spaţiu poate fi considerat?) este liniar independent: $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos nx, \sin nx\}$.

17. Stabiliţi care dintre următoarele mulţimi de vectori este subspaţiu al unui spaţiu vectorial real adecvat:

    (a) vectorii unui spaţiu liniar n dimensional care au coordonatele numere întregi;

    (b) vectorii legaţi cu acelaşi punct de aplicaţie (origine), O, din spaţiul fizic:

        i. care au vârfurile (extremităţile) pe axele de coordonate;
        ii. care au vârfurile pe o dreaptă dată;
        iii. ale căror vârfuri nu sunt pe o dreaptă dată;
        iv. care au vârfurile în primul cadran;

    (c) vectorii din $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ ale căror coordonate verifică ecuaţia: $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$;

    (d) vectorii din $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ ale căror coordonate verifică ecuaţia: $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$;

    (e) vectorii din $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ care sunt combinaţii liniare ale unor vectori daţi.

    Răspunsuri. (a). nu; (b).i. nu; ii. da, dacă şi numai dacă dreapta trece prin origine; iii. nu; iv. nu; (c). da; (d). nu, (e). da.

18. Enumeraţi toate subspaţiile spaţiului vectorilor din spaţiu.

    Răspuns. Tot spatiul; multimea vectorilor dintr-un plan care trece prin origine; multimea vectorilor de pe o dreaptă care trece prin origine; mulţimea formată din vectorul nul.

19. Descrieţi subspaţiile generate de vectorii indicaţi precizând spaţiul aritmetic în care se lucrează şi stabiliţi dimensiunea lor:

    (a) 1;

    (b) $(1, 1), (2, 2)$;

    (c) $(1, 2), (2, 1)$;

    (d) $(10, 0, -10), (21, 1, 1), (11, 1, 11)$.

Răspunsuri. (a). $\mathbb{R}, 1$ (b). $\{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, 1$ (c). $\mathbb{R}^2, 2$;
(d). $\{(10\alpha + 21\beta, \beta, \beta - 10\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, 2$.

20. Fie $\mathcal{M}_{n,n}(K)/K$. Arătati că mulţimea matricelor diagonale formează un subspaţiu liniar; care este dimensiunea acestuia?

21. În spaţiul funcţiilor reale peste corpul $\mathbb{R}$ analizaţi dimensiunea subspaţiului generat de vectorii

    (a) $\sin x$;
    (b) $\sin x, \sin^2 x$;
    (c) $\sin x, \sin^2 x, ..., \sin^n x$.

22. Determinaţi câte o bază pentru:

    (a) subspaţiul $\left\{ ax^2 + bx + c \middle| a + b = c \right\}$ al spaţiului $\mathbb{R}_3[x]/\mathbb{R}$;
    (b) subspaţiul matricelor de tip 2×2 de forma $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ (verificaţi, în prealabil că este subspaţiu);
    (c) subspaţiul matricelor din $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ care au primele două coloane nule.

23. Determinaţi câte o bază pentru subspaţiile polinoamelor $p \in \mathbb{R}_3[x]/\mathbb{R}$ având proprietatea:

    (a) $p(1) = 0$;
    (b) $p(1) = 0$şi $p(2) = 0$;
    (c) $p(1) = 0$, $p(2) = 0$ şi $p(3) = 0$;
    (d) $p(0) = 0$, $p(1) = 0$, $p(2) = 0$ şi $p(3) = 0$.

24. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$. Să se determine câte o bază pentru :

    (a) spaţiul generat de liniile sale;
    (b) spaţiul generat de coloanele sale;
    (c) $Null(A)$.

    Răspusuri. De exemplu:

    (a) $\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \right]$
    (b) $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right]$

(c) $\left[\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-4\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$.

25. Fie V mulţimea matricelor de tip 4×4 a căror matrice scară redusă are ultima linie nulă. Este V un subspaţiu în $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$?

26. Fie W/K un spaţiu vectorial , U şi V două subspaţii, iar $B_U = \{u_1, u_2, ...u_k\}$, respectiv $B_V = \{v_1, v_2, ...v_\ell\}$ baze ale acestora.

    (a) Să se arate că mulţimea $U \cap V$ este subspaţiu al spaţiului W.

    (b) Să se arate că mulţimea $U + V := \{u + v \mid u \in U,\, v \in V\}$ este subspaţiu al spaţiului W.

    (c) Să se arate că dacă $U \subset V$ şi $k = \ell$, atunci $U = V$.

    (d) * Determinaţi dimensiunea subspaţiului $U+V$ şi indicaţi o procedură concretă de obţinere a unei baze.

    Indicaţie. O bază pentru $U+V$ este formată dintr-o submulţime maximală de vectori liniar independenţi ai mulţimii $\{u_1, u_2, ...u_k, v_1, v_2, ...v_\ell\}$.

27. *Determinaţi câte o bază pentru suma, respectiv intersecţia subspaţiilor generate de mulţimile de vectori $v_1, ..., v_n$ şi $v'_1, ..., v'_n$:

    (a) $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (1, 1, -1), v_3 = (1, 3, 3)$; $v'_1 = (2, 3, -1), v'_2 = (1, 2, 2), v'_3 = (1, 1, -3)$.

    (b) $v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1, 1)$; $v'_1 = (1, 0, 1, 0), v'_2 = (0, 2, 1, 1), v'_3 = (1, 2, 1, 2)$.

    Răspusuri. (a). de exemplu, pentru sumă $\{v_1, v_2, v'_1\}$, iar pentru intersecţie $\{v\}$, unde $v = 2v_1 + v_2 = v'_1 + v'_3 = (3, 5, 1)$. (b). de exemplu, pentru sumă $\{v_1, v_2, v_3, v'_1\}$, iar pentru intersecţie $\{v''_1, v''_2\}$, unde $v''_1 = v_1 + v_2 + v_3 = v'_1 + v'_2 = (1, 2, 2, 1)$ şi $v''_2 = 2v_1 + 2v_3 = v'_1 + v'_3$.

28. Arătaţi că matricile $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ formează o bază în subspaţiul $\mathbb{R}^{2\times 2}_S$ al matricilor simetrice din spaţiul vectorial $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Relaţia

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \frac{2b}{2} \\ \frac{2c}{2} & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \frac{2b+c-c}{2} \\ \frac{2c+b-b}{2} & d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a & \frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{2} \\ \frac{b+c}{2} - \frac{b-c}{2} & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ -\frac{b-c}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

ne arată că orice matrice 2×2 se poate descompune în suma dintre o matrice simetrică şi una antisimetrică (adică o matrice A cu proprietatea că $A^T = -A$). Dacă notăm $\mathbb{R}_S^{2\times 2}$ mulţimea matricilor antisimetrice 2×2, atunci afirmaţia

$$\mathbb{R}^{2\times 2} = R_S^{2\times 2} + R_A^{2\times 2}$$

este falsă. De ce?

29. Care e subspaţiul vectorial al lui $\mathbb{R}^{2\times 2}$ generat de matricile cu elemente pozitive?
*R*ăspuns: Este $\mathbb{R}^{2\times 2}$ însuşi.

2