

# Logică și structuri discrete

## Mulțimi

Casandra Holotescu

`casandra@cs.upt.ro`

`https://tinyurl.com/lecturesLSD`

## Mulțimi – aspecte teoretice

# Ce sunt mulțimile?

Mulțimea e un concept matematic *fundamental*.

Definiție informală:

O *mulțime* e o *colecție* de obiecte numite *elementele* mulțimii.

# Ce sunt mulțimile?

Mulțimea e un concept matematic *fundamental*.

Definiție informală:

O *mulțime* e o *colecție* de obiecte numite *elementele* mulțimii.

Două noțiuni distincte: *element* și *mulțime*

$x \in S$ : elementul  $x$  *aparține* mulțimii  $S$

$x \notin S$ : elementul  $x$  *nu aparține* mulțimii  $S$

Important:

Ordinea elementelor *nu* contează  $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$

Un element *nu* apare de mai multe ori  $\{1, 2, 3, 2\}$

## Moduri de definire a unei mulțimi

1. Prin *enumerarea* elementelor:

$$A = \{a, b, c\}, \quad D = \{1, 2, 3, 6\} = \text{mulțimea divizorilor lui } 6$$

Elementele mulțimii se scriu între acolade, separate prin virgulă.

# Moduri de definire a unei mulțimi

1. Prin *enumerarea* elementelor:

$$A = \{a, b, c\}, \quad D = \{1, 2, 3, 6\} = \text{mulțimea divizorilor lui } 6$$

Elementele mulțimii se scriu între acolade, separate prin virgulă.

2. Printr-o *proprietate* caracteristică

$$S = \{x \mid x \text{ are proprietatea } P(x)\}$$

$$D(n) = \{d \in \mathbb{N} \mid n \bmod d = 0\} \text{ (mulțimea divizorilor lui } n)$$

# Moduri de definire a unei mulțimi

1. Prin *enumerarea* elementelor:

$$A = \{a, b, c\}, \quad D = \{1, 2, 3, 6\} = \text{mulțimea divizorilor lui } 6$$

Elementele mulțimii se scriu între acolade, separate prin virgulă.

2. Printr-o *proprietate* caracteristică

$$S = \{x \mid x \text{ are proprietatea } P(x)\}$$

$$D(n) = \{d \in \mathbb{N} \mid n \bmod d = 0\} \text{ (mulțimea divizorilor lui } n)$$

3. *Inductiv* (vezi cursul 2)

# Submulțimi

$A$  e o *submulțime* a lui  $B$ :  $A \subseteq B$

dacă fiecare element al lui  $A$  e și un element al lui  $B$ .



# Submulțimi

$A$  e o *submulțime* a lui  $B$ :  $A \subseteq B$

dacă fiecare element al lui  $A$  e și un element al lui  $B$ .

$A$  e o *submulțime proprie* a lui  $B$ :  $A \subset B$

dacă  $A \subseteq B$  și există (măcar) un element  $x \in B$  astfel ca  $x \notin A$ .

# Submulțimi

$A$  e o *submulțime* a lui  $B$ :  $A \subseteq B$

dacă fiecare element al lui  $A$  e și un element al lui  $B$ .

$A$  e o *submulțime proprie* a lui  $B$ :  $A \subset B$

dacă  $A \subseteq B$  și există (măcar) un element  $x \in B$  astfel ca  $x \notin A$ .

Obs. Ca să demonstrăm  $A \not\subseteq B$  e suficient să găsim un element  $x \in A$  pentru care  $x \notin B$ .

(Pentru a arăta ca o afirmație e **falsă**, ajunge un *contraexemplu*).

# Submulțimi

$A$  e o *submulțime proprie* a lui  $B$ :  $A \subset B$

dacă  $A \subseteq B$  și există (măcar) un element  $x \in B$  astfel ca  $x \notin A$ .

Atenție!  $\in$  e o relație între un *element* și o mulțime.

$\subseteq$  și  $\subset$  sunt relații între *două mulțimi*.

# Submulțimi

$A$  e o *submulțime proprie* a lui  $B$ :  $A \subset B$

dacă  $A \subseteq B$  și există (măcar) un element  $x \in B$  astfel ca  $x \notin A$ .

Atenție!  $\in$  e o relație între un *element* și o mulțime.

$\subseteq$  și  $\subset$  sunt relații între *două mulțimi*.

Dacă  $A \subseteq B$  și  $B \subseteq A$ , atunci  $A = B$  (mulțimile sunt egale)

# Submulțimi

$A$  e o *submulțime proprie* a lui  $B$ :  $A \subset B$

dacă  $A \subseteq B$  și există (măcar) un element  $x \in B$  astfel ca  $x \notin A$ .

Atenție!  $\in$  e o relație între un *element* și o mulțime.

$\subseteq$  și  $\subset$  sunt relații între *două mulțimi*.

Dacă  $A \subseteq B$  și  $B \subseteq A$ , atunci  $A = B$  (mulțimile sunt egale)

dacă  $A$  e definită prin proprietatea  $P_A(x)$  și  $B$  prin  $P_B(x)$

demonstrăm  $A = B$  arătând

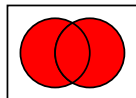
$$A \subseteq B: P_A(x) \Rightarrow P_B(x) \text{ și}$$

$$B \subseteq A: P_B(x) \Rightarrow P_A(x)$$

# Operații de bază

*Reuniunea* a două mulțimi:

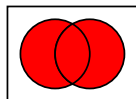
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$



# Operații de bază

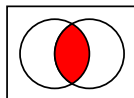
*Reuniunea* a două mulțimi:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$



*Intersecția* a două mulțimi:

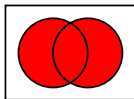
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$$



# Operații de bază

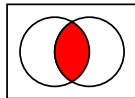
*Reuniunea* a două mulțimi:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$



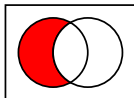
*Intersecția* a două mulțimi:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$$



*Diferența* a două mulțimi:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$$



Figurile: *diagrame Venn*

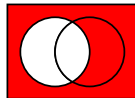


# Operații de bază

Uzual, discutăm într-un *context*: avem un *univers* (de discurs)  $U$  al **tuturor elementelor** la care ne-am putea referi.

*Complementul* unei mulțimi (față de universul  $U$ ):

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\} = U \setminus A \quad (\text{notat și } \bar{A})$$



Figurile: *diagrame Venn*

[https://en.wikipedia.org/wiki/Venn\\_diagram](https://en.wikipedia.org/wiki/Venn_diagram)

## Generalizarea reuniunii și intersecției

Dacă  $\mathcal{A}$  e o colecție de mulțimi, definim reuniunea a  $n$  mulțimi:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid x \in A_i \text{ cu } A_i \in \mathcal{A}\}$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup \dots \cup A_n \text{ (} n \text{ finit)}$$

și reuniune infinită de mulțimi:  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = A_0 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$

## Generalizarea reuniunii și intersecției

Dacă  $\mathcal{A}$  e o colecție de mulțimi, definim reuniunea a  $n$  mulțimi:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid x \in A_i \text{ cu } A_i \in \mathcal{A}\}$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup \dots \cup A_n \text{ (} n \text{ finit)}$$

și reuniune infinită de mulțimi:  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = A_0 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$

Intersecția a  $n$  mulțimi:

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid x \in A_i, \forall A_i \in \mathcal{A}\}$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap \dots \cap A_n \text{ (} n \text{ finit)}$$

și intersecție infinită de mulțimi:  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = A_0 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$

# Algebra Booleană a mulțimilor

Noțiune datorată matematicianului George Boole (sec. 19)  
Operațiile unei algebre Boolene (aici  $\cup$  și  $\cap$ ) satisfac legile:

*Comutativitate:*  $A \cup B = B \cup A$        $A \cap B = B \cap A$

*Asociativitate:*  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  și  
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

*Distributivitate:*  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  și  
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

*Identitate:* există două valori (aici  $\emptyset$  și universul  $U$ ) astfel ca:  
 $A \cup \emptyset = A$        $A \cap U = A$

*Complement:* orice  $A$  are un complement  $A^c$  (sau  $\overline{A}$ ) astfel ca:  
 $A \cup A^c = U$        $A \cap A^c = \emptyset$

# Algebra Booleană a mulțimilor (cont.)

Alte proprietăți (pot fi deduse din cele de mai sus):

*Idempotență*:  $A \cup A = A$        $A \cap A = A$

*Absorbție*:  $A \cup (A \cap B) = A$        $A \cap (A \cup B) = A$

*Dublu complement*:  $(A^c)^c = A$

*Complementele elementelor identitate*:  $\emptyset^c = U$        $U^c = \emptyset$

*Limită universală*:  $A \cup U = U$        $A \cap \emptyset = \emptyset$

*Legile lui de Morgan*:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

# Partiție a unei mulțimi

O *partiție* a unei mulțimi  $A$  e o **colecție de mulțimi**  $P_1, P_2, \dots$  astfel încât:

- ▶ mulțimile  $P_1, P_2, \dots$  sunt **nevide** și **mutual disjuncte**,  
adică  $P_i \cap P_j = \emptyset$ , pentru orice  $i \neq j$
- ▶  $A$  e reuniunea tuturor mulțimilor  $P_i$ : 
$$A = \bigcup_i P_i$$

# Cardinalul unei mulțimi

*Cardinalul* (cardinalitatea) unei mulțimi  $A$  e numărul de elemente al mulțimii. Îl notăm  $|A|$ .

Putem avea mulțimi *finite* sau *infinite*

Dacă  $A$  e o mulțime *finită* și  $P_1, \dots, P_N$  o partiție a ei, atunci

$$|A| = |P_1| + \dots + |P_n|$$

## Cardinalul reuniunii / intersecției / diferenței

*Legea reuniunii* (pt. mulțimi *finite*):

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

*Legea diferenței* (pt. mulțimi *finite*):

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$



## Cardinalul reuniunii / intersecției / diferenței

*Legea reuniunii* (pt. mulțimi *finite*):

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

*Legea diferenței* (pt. mulțimi *finite*):

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

Putem demonstra considerând cele 2x2 cazuri posibile:

$A \cap B$ ,  $A \cap B^c$ ,  $A^c \cap B$  și  $A^c \cap B^c$  formează o *partiție* a universului

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \text{ (partiție)} \Rightarrow |A| = |A \cap B| + |A \cap B^c|$$

$$\text{La fel, } |B| = |A \cap B| + |A^c \cap B|$$

$$\text{și } |A \cup B| = |A \cap B| + |A \cap B^c| + |A^c \cap B|$$

de unde, combinând, rezultă egalitățile de mai sus.

# Principiul includerii și excluderii

pentru mulțimi *finite*

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Mai general,

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

Demonstrație: prin inducție după  $n$

# Tupluri

Un *n-tuplu* e un șir de  $n$  elemente  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Proprietăți:

elementele nu sunt neapărat distincte  
ordinea elementelor în tuplu contează

Cazuri particulare:

*pereche*  $(a, b)$ ,

*triplet*  $(x, y, z)$ , etc.

# Produs cartezian

*Produsul cartezian* a două mulțimi e mulțimea perechilor

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Exemplu: mulțimea numerelor complexe poate fi văzută ca produs cartezian  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (putem găsi o *bijecție* între ele)

Produsul cartezian a  $n$  mulțimi e mulțimea  $n$  – *tupelor*

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in A_i, 1 \leq i \leq n\}$$

Dacă mulțimile sunt finite, atunci

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_n|$$

# Mulțimea submulțimilor

Mulțimea submulțimilor (engl. *power set*) a unei mulțimi  $S$ , notată  $\mathcal{P}(S)$  (uneori  $2^S$ ):

$$\mathcal{P}(S) = \{X \mid X \subseteq S\}$$

Exemplu, pentru  $S = \{a, b, c\}$ , avem

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

# Mulțimea submulțimilor

Mulțimea submulțimilor (engl. *power set*) a unei mulțimi  $S$ , notată  $\mathcal{P}(S)$  (uneori  $2^S$ ):

$$\mathcal{P}(S) = \{X \mid X \subseteq S\}$$

Exemplu, pentru  $S = \{a, b, c\}$ , avem

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Dacă  $S$  e finită, atunci  $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$

Există o bijecție între  $\mathcal{P}(S)$  și mulțimea funcțiilor  $f : S \rightarrow \{0, 1\}$   
dacă  $f(x) = 1$ ,  $x$  aparține submulțimii, altfel nu.  
numărul funcțiilor e  $|\{0, 1\}|^{|S|} = 2^{|S|}$

Mulțimi – numărabile & nenumărabile

# Mulțimi numărabile și nenumărabile

Informal: o mulțime e *numărabilă* dacă îi putem lista elementele  
 $\Leftrightarrow$  dacă putem asocia fiecărui element un număr (natural, diferit).



# Mulțimi numărabile și nenumărabile

Informal: o mulțime e *numărabilă* dacă îi putem lista elementele  
 $\Leftrightarrow$  dacă putem asocia fiecărui element un număr (natural, diferit).

O mulțime  $S$  e *numărabilă* dacă are cardinalul egal cu cardinalul unei submulțimi a numerelor naturale (deci  $|S| \leq |\mathbb{N}|$ ).

# Mulțimi numărabile și nenumărabile

Informal: o mulțime e *numărabilă* dacă îi putem lista elementele  
 $\Leftrightarrow$  dacă putem asocia fiecărui element un număr (natural, diferit).

O mulțime  $S$  e *numărabilă* dacă are cardinalul egal cu cardinalul unei submulțimi a numerelor naturale (deci  $|S| \leq |\mathbb{N}|$ ).

O mulțime  $S$  e *numărabilă* dacă  
    există o funcție injectivă  $f : S \rightarrow \mathbb{N}$   
    sau o funcție surjectivă  $g : \mathbb{N} \rightarrow S$   
și deci  $|S| \leq |\mathbb{N}|$

# Mulțimi numărabile

*Orice mulțime finită e numărabilă:*

$$|A| = n \Rightarrow A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

(indicii reprezintă corespondența cu  $\{1, 2, \dots, n\}$ )

# Mulțimi numărabile

*Orice mulțime finită e numărabilă:*

$$|A| = n \Rightarrow A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

(indicii reprezintă corespondența cu  $\{1, 2, \dots, n\}$ )

*Dar nu orice mulțime numărabilă e finită*

$\mathbb{N}$  e numărabilă: în definiție, luăm  $f$  funcția identitate

$\mathbb{Z}$  e numărabilă: putem enumera:  $0, -1, 1, -2, 2, \dots$

$$f(x) = 2x, \text{ pentru } x \geq 0,$$

$$f(x) = -2x - 1 \text{ pentru } x < 0$$

# Mulțimi numărabile

*Orice mulțime finită e numărabilă:*

$$|A| = n \Rightarrow A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

(indicii reprezintă corespondența cu  $\{1, 2, \dots, n\}$ )

*Dar nu orice mulțime numărabilă e finită*

$\mathbb{N}$  e numărabilă: în definiție, luăm  $f$  funcția identitate

$\mathbb{Z}$  e numărabilă: putem enumera:  $0, -1, 1, -2, 2, \dots$

$$f(x) = 2x, \text{ pentru } x \geq 0,$$

$$f(x) = -2x - 1 \text{ pentru } x < 0$$

*Definiție echivalentă:*  $S$  e numărabilă dacă e fie finită, fie există o bijecție între  $S$  și  $\mathbb{N}$  (e *infinit numărabilă*,  $|S| = |\mathbb{N}|$ ).

## Numerele raționale sunt numărabile

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1/1 | 1/2 | 1/3 | 1/4 | ... |
| 2/1 | 2/2 | 2/3 | 2/4 | ... |
| 3/1 | 3/2 | 3/3 | 3/4 | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... |

*NU putem* număra elementele pe linii: deja prima linie e *infinită*, nu ajungem niciodată la a doua!

Enumerăm pe *diagonale*

(după valoare crescătoare a lui  $m + n$ , numărător + numitor):

1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 2/2, 3/1, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1, ...

⇒ fiecare element va fi numărat

## Numerele raționale sunt numărabile

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1/1 | 1/2 | 1/3 | 1/4 | ... |
| 2/1 | 2/2 | 2/3 | 2/4 | ... |
| 3/1 | 3/2 | 3/3 | 3/4 | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... |

*NU putem* număra elementele pe linii: deja prima linie e *infinită*, nu ajungem niciodată la a doua!

Enumerăm pe *diagonale*

(după valoare crescătoare a lui  $m + n$ , numărător + numitor):

1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 2/2, 3/1, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1, ...

⇒ fiecare element va fi numărat

Tehnică generală:

asociem fiecărui element o *mărime*: aici  $m+n$ ; lungimea la șiruri; etc  
așa încât cu fiecare mărime să avem un număr *finit* de elemente  
numărăm după mărime crescătoare ⇒ ajungem la fiecare element

# Construcții cu mulțimi numărabile

O mulțime e numărabilă dacă putem *enumera* elementele într-un șir:

Un șir e o funcție de la  $\mathbb{N}$  la mulțimea elementelor șirului  
(sau de la  $\{1, 2, \dots, n\}$  la elementele șirului, pentru un șir finit)



## Construcții cu mulțimi numărabile

O mulțime e numărabilă dacă putem *enumera* elementele într-un șir:

Un șir e o funcție de la  $\mathbb{N}$  la mulțimea elementelor șirului  
(sau de la  $\{1, 2, \dots, n\}$  la elementele șirului, pentru un șir finit)

*Reuniunea* a două mulțimi *numărabile* e *numărabilă*.

Enumerăm *alternativ* mulțimile (similar cu cazul lui  $\mathbb{Z}$ ):

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\},$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\} \quad (\text{le putem enumera})$$

$$\Rightarrow \text{formăm șirul } a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$$

(putem avea duplicate, oricum am enumerat toate elementele)

Prin inducție, reuniunea a *n* mulțimi *numărabile* e *numărabilă*.

# Construcții cu mulțimi numărabile

*Produsul cartezian*  $A \times B$  a două mulțimi *numărabile* e *numărabil*

Folosim aceeași construcție ca la numerele raționale:

|              |              |              |              |         |
|--------------|--------------|--------------|--------------|---------|
| $(a_1, b_1)$ | $(a_1, b_2)$ | $(a_1, b_3)$ | $(a_1, b_4)$ | $\dots$ |
| $(a_2, b_1)$ | $(a_2, b_2)$ | $(a_2, b_3)$ | $(a_2, b_4)$ | $\dots$ |
| $(a_3, b_1)$ | $(a_3, b_2)$ | $(a_3, b_3)$ | $(a_3, b_4)$ | $\dots$ |
| $\dots$      | $\dots$      | $\dots$      | $\dots$      | $\dots$ |

enumerăm perechile în ordine crescătoare a sumei indicilor:

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_3, b_1), \dots\}$$

Prin inducție, produsul cartezian a  $n$  mulțimi *numărabile* e *numărabil*.

# Realii sunt nenumărabili

*Construcția diagonală* a lui Cantor:

Reprezentăm numerele subunitare în baza 2: cifrele sunt 0 și 1

$$0.01101... = 0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + \dots$$

Presupunem prin absurd că realii din  $[0, 1)$  ar fi numărabili

$\Rightarrow$  enumerăm realii subunitari pe rânduri, după numărul de ordine

$$r_1 = 0. \quad d_{11} \quad d_{12} \quad d_{13} \quad \dots \quad 0.1011101...$$

$$r_2 = 0. \quad d_{21} \quad d_{22} \quad d_{23} \quad \dots \quad 0.0110010...$$

$$r_3 = 0. \quad d_{31} \quad d_{32} \quad d_{33} \quad \dots \quad 0.1101101...$$

$\dots \quad \dots \quad \dots$

# Realii sunt nenumărabili

*Construcția diagonală* a lui Cantor:

Reprezentăm numerele subunitare în baza 2: cifrele sunt 0 și 1

$$0.01101\dots = 0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + \dots$$

Presupunem prin absurd că realii din  $[0, 1)$  ar fi numărabili

$\Rightarrow$  enumerăm realii subunitari pe rânduri, după numărul de ordine

$$r_1 = 0. \quad d_{11} \quad d_{12} \quad d_{13} \quad \dots \quad 0.d_{11}d_{12}d_{13}\dots$$

$$r_2 = 0. \quad d_{21} \quad d_{22} \quad d_{23} \quad \dots \quad 0.d_{21}d_{22}d_{23}\dots$$

$$r_3 = 0. \quad d_{31} \quad d_{32} \quad d_{33} \quad \dots \quad 0.d_{31}d_{32}d_{33}\dots$$

$\dots \quad \dots \quad \dots$

Construim un număr real  $x = 0.d_1d_2d_3\dots$  cu următoarele cifre:

$d_i = 1 - d_{ii}$  (urmărind diagonală matricii, schimbăm  $0 \leftrightarrow 1$ )

Dar  $x$  diferă de toate numerele din tabel (diferă de  $r_i$  la poziția  $i$ )!

$\Rightarrow [0, 1)$  nenumărabilă;  $[0, 1) \subset \mathbb{R}$  deci  $\mathbb{R}$  e nenumărabilă !

# Limitele calculabilității

*Mulțimea programelor* care pot fi scrise e *numărabilă*:

alfabetul  $\Sigma$  al unui limbaj de programare e finit

programele au lungime finită (1, 2, 3, ... simboluri)

$\Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \dots$  e o reuniune numărabilă de mulțimi numărabile (chiar finite)  $\Rightarrow$  e numărabilă

# Limitele calculabilității

*Mulțimea programelor* care pot fi scrise e *numărabilă*:

alfabetul  $\Sigma$  al unui limbaj de programare e finit

programele au lungime finită (1, 2, 3, ... simboluri)

$\Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \dots$  e o reuniune numărabilă de mulțimi numărabile (chiar finite)  $\Rightarrow$  e numărabilă

Putem *calcula* orice număr real? în sensul de a scrie un program, care îl tipărește, cifră cu cifră, eventual rulând la infinit.

# Limitele calculabilității

*Mulțimea programelor* care pot fi scrise e *numărabilă*:

alfabetul  $\Sigma$  al unui limbaj de programare e finit

programele au lungime finită (1, 2, 3, ... simboluri)

$\Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \dots$  e o reuniune numărabilă de mulțimi numărabile (chiar finite)  $\Rightarrow$  e numărabilă

Putem *calcula* orice număr real? în sensul de a scrie un program, care îl tipărește, cifră cu cifră, eventual rulând la infinit.

NU, pentru că programele sunt numărabile, dar  $\mathbb{R}$  e *nenumărabilă* !  
 $\Rightarrow$  se pot formula mai multe probleme decât pot fi rezolvate!

# Teorema lui Cantor

Teorema lui Cantor: Pentru orice mulțime  $S$ ,  $|S| < |\mathcal{P}(S)|$ .

sau, echivalent: *Nu există bijectie* de la  $S$  la  $\mathcal{P}(S)$ .



## Teorema lui Cantor

Teorema lui Cantor: Pentru orice mulțime  $S$ ,  $|S| < |\mathcal{P}(S)|$ .

sau, echivalent: *Nu există bijectie* de la  $S$  la  $\mathcal{P}(S)$ .

Să presupunem că ar exista o bijectie  $f : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$ .

Formăm mulțimea:

$$Y = \{x \in S \mid x \notin f(x)\}$$

Cum  $Y \in \mathcal{P}(S)$ , și  $f$  e bijectie, există  $y \in S$  cu  $f(y) = Y$ .

# Teorema lui Cantor

Teorema lui Cantor: Pentru orice mulțime  $S$ ,  $|S| < |\mathcal{P}(S)|$ .

sau, echivalent: *Nu există bijecție* de la  $S$  la  $\mathcal{P}(S)$ .

Să presupunem că ar exista o bijecție  $f : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$ .

Formăm mulțimea:

$$Y = \{x \in S \mid x \notin f(x)\}$$

Cum  $Y \in \mathcal{P}(S)$ , și  $f$  e bijecție, există  $y \in S$  cu  $f(y) = Y$ .

Dacă  $y \in Y$ , cum  $Y = f(y)$  atunci  $y \in f(y)$ , și nu respectă condiția de construcție a lui  $Y$ , deci  $y \notin Y \Rightarrow$  contradicție.

Dacă  $y \notin Y$ , atunci  $y \notin f(y)$  și satisface condiția pentru  $Y$ , deci  $y \in Y \Rightarrow$  contradicție.

# Teorema lui Cantor

Teorema lui Cantor: Pentru orice mulțime  $S$ ,  $|S| < |\mathcal{P}(S)|$ .

sau, echivalent: *Nu există bijectie* de la  $S$  la  $\mathcal{P}(S)$ .

Să presupunem că ar exista o bijectie  $f : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$ .

Formăm mulțimea:

$$Y = \{x \in S \mid x \notin f(x)\}$$

Cum  $Y \in \mathcal{P}(S)$ , și  $f$  e bijectie, există  $y \in S$  cu  $f(y) = Y$ .

Dacă  $y \in Y$ , cum  $Y = f(y)$  atunci  $y \in f(y)$ , și nu respectă condiția de construcție a lui  $Y$ , deci  $y \notin Y \Rightarrow$  contradicție.

Dacă  $y \notin Y$ , atunci  $y \notin f(y)$  și satisface condiția pentru  $Y$ , deci  $y \in Y \Rightarrow$  contradicție.

Deci presupunerea e falsă, nu poate exista o bijectie.

$$\Rightarrow |S| < |\mathcal{P}(S)|$$

## Există oricâte infinituri

$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$  (deci  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  nu este numărabilă)

$|\mathbb{N}|, |\mathcal{P}(\mathbb{N})|, |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|, \dots$  sunt cardinalități infinite tot mai mari!

## Există oricâte infinituri

$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$  (deci  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  nu este numărabilă)

$|\mathbb{N}|, |\mathcal{P}(\mathbb{N})|, |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|, \dots$  sunt cardinalități infinite tot mai mari!

Există o bijecție între  $\mathcal{P}(S)$  și mulțimea funcțiilor  $f : S \rightarrow \{0, 1\}$ ,  
iar numărul funcțiilor e  $|\{0, 1\}|^{|S|} = 2^{|S|}$

$$\Rightarrow |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{|\mathbb{N}|}$$

## Există oricâte infinituri

$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$  (deci  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  nu este numărabilă)

$|\mathbb{N}|, |\mathcal{P}(\mathbb{N})|, |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|, \dots$  sunt cardinalități infinite tot mai mari!

Există o bijecție între  $\mathcal{P}(S)$  și mulțimea funcțiilor  $f : S \rightarrow \{0, 1\}$ ,  
iar numărul funcțiilor e  $|\{0, 1\}|^{|S|} = 2^{|S|}$

$$\Rightarrow |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{|\mathbb{N}|}$$

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0 \quad (\text{"aleph-zero" sau "aleph-null"})$$

$\aleph_0$  – cel mai mic cardinal infinit

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$$

$$|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| = 2^{|\mathcal{P}(\mathbb{N})|} = 2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}$$

...

Este demonstrat și că  $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$

Mulțimi în ML

# Funcția caracteristică: mulțimi și funcții boolene

Dacă fixăm universul  $U$  al elementelor, putem reprezenta orice mulțime  $S \subseteq U$  prin *funcția caracteristică*

$$f_S : U \rightarrow \mathbb{B}:$$

$$f_S(x) = \textit{true} \text{ dacă } x \in S, \quad \text{și } \textit{false} \text{ altfel (dacă } x \notin S)$$

Un limbaj funcțional poate reprezenta *date* (mulțimi) prin *funcții*



# Funcția caracteristică: mulțimi și funcții boolene

Dacă fixăm universul  $U$  al elementelor, putem reprezenta orice mulțime  $S \subseteq U$  prin *funcția caracteristică*

$$f_S : U \rightarrow \mathbb{B}:$$

$$f_S(x) = \text{true} \text{ dacă } x \in S, \quad \text{și } \text{false} \text{ altfel (dacă } x \notin S)$$

Un limbaj funcțional poate reprezenta *date* (mulțimi) prin *funcții*

Pornim de la mulțimea cu un singur element, a

```
let singleton a = fun x -> x = a (*adev. doar pt. a *)
```

singleton a are tipul 'a -> bool: *mulțimea e o funcție*

testul de element e *aplicarea funcției* la element: m x

```
let empty = fun _ -> false (*functie constanta *)
```

## Funcția caracteristică. Operațiile pe mulțimi

```
let singleton a = fun x -> x = a
```

mulțimea e o funcție

testul de element e *aplicarea funcției* la element:  $m\ x$

```
let empty = fun _ -> false
```

## Funcția caracteristică. Operațiile pe mulțimi

```
let singleton a = fun x -> x = a
```

mulțimea e o funcție

testul de element e *aplicarea funcției* la element:  $m\ x$

```
let empty = fun _ -> false
```

*Operațiile pe mulțimi* corespund direct la *operatorii booleani*

```
let add a m = fun x -> x = a || m x (*adauga elem *)
```

```
let union m1 m2 = fun x -> m1 x || m2 x
```

```
let inter m1 m2 = fun x -> m1 x && m2 x
```

```
let diff m1 m2 = fun x -> m1 x && not (m2 x)
```

## Mulțimi în ML: modulul Set

Nu există sintaxă specială  $\{1, 2\}$   $\{\text{"ana"}, \text{"bob"}, \text{"cora"}\}$

Întâi instanțiem un *modul* pentru lucru cu mulțimi (ex. de șiruri)

```
module S = Set.Make(String)
```

```
(* String: un modul standard *)
```

```
(* S are tipuri + functii standard, particularizate pt siruri
```

```
    val mem : elt -> t -> bool
        elt = tip element: string
```

```
    val cardinal : t -> int
        t = tip multime de string
```

```
    val elements : t -> elt list
    ...
    si multe alte functii *)
```

## Mulțimi în ML: modulul Set

```
let s0 = S.add "cora" (S.add "bob" (S.add "ana" S.empty))
```

```
let s1 = S.singleton "ana" |> S.add "bob" |> S.add "cora"
```

```
let s2 = S.of_list ["ana"; "are"; "mere" ]  
(*creeaza multime din lista*)
```

$x \mid> f$  înseamnă  $f \ x$  (util la compunere fără paranteze)

Funcțiile pe mulțimi *creează mulțimi noi*, nu modifică argumentele!

## Mulțimi în ML: modulul Set

OCaml necesită o funcție de *comparare* pe elementele unei mulțimi.  
⇒ trebuie un *modul* definind tipul element și funcția de comparare

```
(* trebuie definit un modul pentru intregi *)
module Int = struct
  type t = int
  let compare = compare
  (*Pervasives.compare, bun pt.orice tip*)
end
(* Char, String: similare, dar predefinite *)

module IS = Set.Make(Int)
(* IS: un modul Set particularizat pt Int *)
```

## Parcurgerea mulțimilor

Mulțimile nu au un element special (cum e capul listei)  
pentru obținerea unui element *oarecare* există

`choose : t -> elt`

⇒ e important să folosim **funcțiile de parcurgere**

```
val iter : (elt -> unit) -> t -> unit
```

```
val filter : (elt -> bool) -> t -> t
```

```
val fold : (elt -> 'a -> 'a) -> t -> 'a -> 'a
```

Ordinea parametrilor la fold e ca la `List.fold_right`:

```
f (elem, rez-partial)    multime    val-init-rez
```

# Parcurgerea mulțimilor

Putem defini de exemplu union folosind fold

```
let union s1 s2 = S.fold (fun e s -> S.add e s) s1 s2  
(* parcurge s1, adauga fiecare element, val.init. e s2 *)
```

```
let union = S.fold S.add  
(* f x y = g x y => f = g *)
```

Funcțiile pe mulțimi *creează mulțimi noi*, nu modifică argumentele!  
(la fel ca toate funcțiile studiate)



Mulțimi: formalizare și paradoxuri

# Mulțimile, fundament al matematicii

Georg Cantor (1874): teoria *naivă* a mulțimilor

Practic toată matematica poate fi formalizată în teoria mulțimilor (sau în logică, de care e strâns legată, după cum vom vedea).

# Mulțimile, fundament al matematicii

Georg Cantor (1874): teoria *naivă* a mulțimilor

Practic toată matematica poate fi formalizată în teoria mulțimilor (sau în logică, de care e strâns legată, după cum vom vedea).

Exemplu: o *pereche* (ordonată!) poate fi definită ca:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \quad (\text{Kazimierz Kuratowski, 1921})$$

# Mulțimile, fundament al matematicii

Georg Cantor (1874): teoria *naivă* a mulțimilor

Practic toată matematica poate fi formalizată în teoria mulțimilor (sau în logică, de care e strâns legată, după cum vom vedea).

Exemplu: o *pereche* (ordonată!) poate fi definită ca:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \quad (\text{Kazimierz Kuratowski, 1921})$$

*Numerele naturale* au fost formalizate de Giuseppe Peano (1889):

0 e un număr natural

dacă  $n$  e un număr natural,  $S(n)$  e un număr natural

(funcția succesor  $S$  e injectivă, și  $S(n) \neq 0$  pentru orice  $n$ )

Putem defini folosind mulțimi:  $0 \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \quad S(n) \stackrel{\text{def}}{=} n \cup \{n\}$

# Mulțimile, fundament al matematicii

Georg Cantor (1874): teoria *naivă* a mulțimilor

Practic toată matematica poate fi formalizată în teoria mulțimilor (sau în logică, de care e strâns legată, după cum vom vedea).

Exemplu: o *pereche* (ordonată!) poate fi definită ca:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \quad (\text{Kazimierz Kuratowski, 1921})$$

*Numerele naturale* au fost formalizate de Giuseppe Peano (1889):

0 e un număr natural

dacă  $n$  e un număr natural,  $S(n)$  e un număr natural

(funcția succesor  $S$  e injectivă, și  $S(n) \neq 0$  pentru orice  $n$ )

Putem defini folosind mulțimi:  $0 \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \quad S(n) \stackrel{\text{def}}{=} n \cup \{n\}$

Însă, pornind de la definiții *imprecise*, în limbaj natural, în teoria naivă a mulțimilor apar *paradoxuri*.

# Paradoxul lui Russell

Fie  $R$  mulțimea tuturor mulțimilor care nu se conțin pe ele însele:

$R = \{X \mid X \notin X\}$ .    *Mulțimea  $R$  se conține pe ea însăși?*

dacă  $R \in R$ , pentru a satisface condiția de definiție,  $R \notin R$ .

dacă  $R \notin R$ , atunci  $R$  satisface condiția, deci  $R \in R$ : **paradox!**

O formulare intuitivă (paradoxul bărbierului):

*Bărbierul bărbierește exact oamenii care nu se bărbieresc singuri.*

*Bărbierul se bărbierește pe el însuși sau nu ?*

# Paradoxul lui Russell

Fie  $R$  mulțimea tuturor mulțimilor care nu se conțin pe ele însele:

$R = \{X \mid X \notin X\}$ .    *Mulțimea  $R$  se conține pe ea însăși?*

dacă  $R \in R$ , pentru a satisface condiția de definiție,  $R \notin R$ .

dacă  $R \notin R$ , atunci  $R$  satisface condiția, deci  $R \in R$ : **paradox!**

O formulare intuitivă (paradoxul bărbierului):

*Bărbierul bărbierește exact oamenii care nu se bărbieresc singuri.*

*Bărbierul se bărbierește pe el însuși sau nu ?*

Motivul: în teoria naivă a mulțimilor, orice proprietate (predicat)

$P(x)$  poate defini o mulțime:

$\exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow P(x))$      $x$  e în  $y$  dacă și numai dacă  $P(x)$

Căutăm să obținem o echivalență între o propoziție și negația ei:

alegem  $P(x) : x \notin x$  și luăm  $x = y$  (în  $\forall x \dots$  putem alege orice  $x$ ).

Obținem  $y \in y \Leftrightarrow y \notin y$ , paradox.

## Paradoxul lui Russell (cont.)

Poate fi *evitat* în mai multe feluri, impunând *restricții* asupra modului în care se poate defini o mulțime.

de ex.: Nu putem defini o mulțime doar printr-o proprietate  $P(x)$ , trebuie să *specificăm universul* din care își poate lua elementele:

$$R = \{X \mid X \subseteq U \text{ și } X \notin X\}$$

Dacă presupunem  $R \in R$ , din proprietatea care definește mulțimea, rezultă  $R \notin R$

(nu e un paradox, înseamnă doar că presupunerea a fost falsă).

Dacă  $R \notin R$ , rezultă doar că nu putem avea  $R \subseteq U$  *și*  $R \notin R$ .

Rezultă că  $\neg(R \subseteq U)$ , deci  $R$  nu e o mulțime (valid definită) în universul considerat.



# Teoria axiomatică a mulțimilor

O *axiomă* e o propoziție presupusă adevărată.

E un punct de plecare pentru un raționament.

*Sistemele axiomatiche* au fost dezvoltate pentru a evita paradoxurile din *teoria naivă* a mulțimilor (cu noțiuni definite în limbaj natural)

# Teoria axiomatică a mulțimilor

O *axiomă* e o propoziție presupusă adevărată.

E un punct de plecare pentru un raționament.

*Sistemele axiomatice* au fost dezvoltate pentru a evita paradoxurile din *teoria naivă* a mulțimilor (cu noțiuni definite în limbaj natural)

Cel mai răspândit: sistemul *Zermelo-Fraenkel* (1907..1930).

Câteva axiome:

## **Axioma extensibilității:**

*Două mulțimi sunt egale dacă și numai dacă au aceleași elemente*  
(dacă fiecare element al lui  $A$  e și un element al lui  $B$ , și reciproc)

$$\forall A \forall B (A = B \Leftrightarrow \forall C (C \in A \Leftrightarrow C \in B))$$

## **Axioma mulțimii vide** (existență):

*Există o mulțime care nu are niciun element*

$$\exists E \forall X \neg (X \in E)$$

...

## Axiome ale teoriei mulțimilor (cont.)

### **Axioma regularității (a fundației)**

Orice mulțime nevidă are un element  $x \in A$  disjunct de ea:  $x \cap A = \emptyset$

$$\forall X(X \neq \emptyset) \Rightarrow \exists Y(Y \in X \wedge \neg \exists Z(Z \in X \wedge Z \in Y))$$

## Axiome ale teoriei mulțimilor (cont.)

### **Axioma regularității (a fundației)**

Orice mulțime nevidă are un element  $x \in A$  disjunct de ea:  $x \cap A = \emptyset$

$$\forall X(X \neq \emptyset) \Rightarrow \exists Y(Y \in X \wedge \neg \exists Z(Z \in X \wedge Z \in Y))$$

Rezultă că nu există un șir infinit  $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$  astfel încât

$$A_0 \ni A_1 \ni \dots \ni A_n \ni \dots$$

(altfel  $\{A_0, A_1, \dots\}$  ar fi o astfel de mulțime)

Rezultă că nicio mulțime nu se poate avea ca element,  $X \notin X$ ,

altfel  $X \ni X \ni X \dots$  ar fi un astfel de șir

# Axiome ale teoriei mulțimilor (cont.)

## **Axioma regularității (a fundației)**

Orice mulțime nevidă are un element  $x \in A$  disjunct de ea:  $x \cap A = \emptyset$

$$\forall X(X \neq \emptyset) \Rightarrow \exists Y(Y \in X \wedge \neg \exists Z(Z \in X \wedge Z \in Y))$$

Rezultă că nu există un șir infinit  $A_0, A_1, \dots A_n \dots$  astfel încât

$$A_0 \ni A_1 \ni \dots \ni A_n \ni \dots$$

(altfel  $\{A_0, A_1, \dots\}$  ar fi o astfel de mulțime)

Rezultă că nicio mulțime nu se poate avea ca element,  $X \notin X$ ,  
altfel  $X \ni X \ni X \dots$  ar fi un astfel de șir

Intuitiv: orice mulțime e formată din elemente (posibil mulțimi)  
mai simple, care la rândul lor conțin elemente mai simple, până  
ajungem la elemente fundamentale

$\Rightarrow$  elimină paradoxul lui Russell