Logică și structuri discrete

Logică propozițională

Casandra Holotescu

casandra@cs.upt.ro

https://tinyurl.com/lecturesLSD

În cursul de azi

Cum codificăm probleme în logică propozițională?

Cum determinăm dacă o formulă e *realizabilă*?
algoritm folosit în rezolvarea multor probleme

Ce înseamnă o *demonstrație* logică?

Unde aplicăm logica booleană?

Calculatoarele sunt construite din *circuite logice*
⇒ realizează aceleași *funcții* ca în logică (ȘI, SAU, NU)

Numerele sunt reprezentate în calculator *în baza 2*
⇒ valori *boolene* / biți: (0 sau 1, F sau T)

Aritmetica pe numere e implementată prin circuite logice

```
unsigned add(unsigned a, unsigned b) {
  return b ? add(a^b, (a&b) << 1) : a;
}
```

```
let rec add a b =
  if b = 0 then a else add (a lxor b) ((a land b) lsl 1)
```

Mulțimile pot fi reprezentate prin *vectori* de valori *boolene*
pentru fiecare element: T/F, face sau nu parte din mulțime ?

⇒ reprezentăm noțiuni (reale sau matematice) în *logică booleană*

Aplicații: Căutare / explorarea stărilor / planificarea

Putem ajunge la o poziție câștigătoare într-un joc ?

Există un drum între două noduri într-un graf ?

Planificare = găsirea unui șir de *acțiuni* care duc la o *țintă*

de la ordonarea unor acțiuni între care există constrângeri
până la comportamentul unor roboți inteligenți / autonomi

În general: într-un sistem descris prin *stări* și *acțiuni* (tranziții),
cum găsim o cale de la o *stare inițială* la o *stare țintă* (finală) ?

Exemplu: jocul cu ordonarea a 3x3 piese

Se poate reface ordinea? Din câte mutări?

2		5
1	3	4
8	6	7

Numerotăm pozițiile:

```
123
456
789
```

Trebuie să codificăm *starea* (configurația): poziția pieselor

Putem alege un vector $\bar{v} = (p_1, p_2, \ldots, p_9)$, $p_i \in [0..8]$ (0 = liber)

fiecare valoare p_i poate fi reprezentată boolean (cu 4 biți)

$p_1 = 2 \wedge p_2 = 0 \wedge p_3 = 5 \wedge \ldots$

sau direct cu booleni p_{ij} = piesa i (1..8) e pe poziția j (1..9)

$\neg p_{11} \wedge \neg p_{12} \wedge \neg p_{13} \wedge p_{14} \wedge \ldots$ piesa 1 e pe poz. 4 (doar acolo)

$p_{21} \wedge \neg p_{22} \wedge \neg p_{23} \wedge \neg p_{24} \wedge \ldots$ piesa 2 e pe poz. 1

...

O *stare* poate fi descrisă printr-o *formulă propozițională*

Cum reprezentăm o mutare?

O mutare se face între 2 stări: *starea curentă* și *starea următoare*, reprezentate prin *vectori de stare* $\bar{v}$ și $\bar{v}'$, fiecare cu propozițiile sale:

$$\bar{v} = (p_{11}, p_{12}, ...) \quad \text{și} \quad \bar{v}' = (p'_{11}, p'_{12}, ...) \text{ și}$$

Sunt 12 perechi de poziții vecine: $\{(1,2),(1,4),\ldots(8,9)\}$

```
123
456
789
```

Introducem 12 propoziții: m_{12} = mutarea între poz. 1 și 2, etc.

Dacă facem mutarea m_{12}:

piesa de pe poz. 1 în $\bar{v}$ va fi pe poz. 2 în $\bar{v}'$ și reciproc

piesele de pe alte poziții (3, 4, ... 9) rămân pe loc

Reprezentarea unei mutări (cont.)

$\boxed{p_{ij} = \text{piesa } i \text{ e pe poziția } j}$

(1) *Dacă* facem mutarea m_{12}:

piesa de pe poz. 1 în $\bar{v}$ va fi pe poz. 2 în $\bar{v}'$ și reciproc

$(m_{12} \to p'_{11} = p_{12})$	1 va fi pe poz. 1 doar dacă era pe poz. 2
$\wedge\ (m_{12} \to p'_{12} = p_{11})$	1 va fi pe poz. 2 doar dacă era pe poz. 1
$\wedge\ (m_{12} \to p'_{21} = p_{22})$	2 va fi pe poz. 1 doar dacă era pe poz. 2
$\wedge\ (m_{12} \to p'_{22} = p_{21})$	2 va fi pe poz. 2 doar dacă era pe poz. 1

...

Rescriem în CNF:

$$(\neg m_{12} \vee \neg p'_{11} \vee p_{12}) \wedge (\neg m_{12} \vee p'_{11} \vee \neg p_{12})$$
$$\wedge\ (\neg m_{12} \vee \neg p'_{12} \vee p_{11}) \wedge (\neg m_{12} \vee p'_{12} \vee \neg p_{11})$$
$$\wedge\ (\neg m_{12} \vee \neg p'_{21} \vee p_{22}) \wedge (\neg m_{21} \vee p'_{21} \vee \neg p_{22}) \ \ldots$$

Reprezentarea unei mutări (cont.)

p_{ij} =piesa i e pe poziția j

(1) *Dacă* facem mutarea m_{12}:
piesa de pe poz. 1 în $\bar{v}$ va fi pe poz. 2 în $\bar{v}'$ și reciproc

$(m_{12} \to p'_{11} = p_{12})$	1 va fi pe poz. 1 doar dacă era pe poz. 2
$\land\ (m_{12} \to p'_{12} = p_{11})$	1 va fi pe poz. 2 doar dacă era pe poz. 1
$\land\ (m_{12} \to p'_{21} = p_{22})$	2 va fi pe poz. 1 doar dacă era pe poz. 2
$\land\ (m_{12} \to p'_{22} = p_{21})$	2 va fi pe poz. 2 doar dacă era pe poz. 1

...

Rescriem în CNF:

$$(\neg m_{12} \lor \neg p'_{11} \lor p_{12}) \land (\neg m_{12} \lor p'_{11} \lor \neg p_{12})$$
$$\land\ (\neg m_{12} \lor \neg p'_{12} \lor p_{11}) \land (\neg m_{12} \lor p'_{12} \lor \neg p_{11})$$
$$\land\ (\neg m_{12} \lor \neg p'_{21} \lor p_{22}) \land (\neg m_{21} \lor p'_{21} \lor \neg p_{22}) \ \ldots$$

(2) *Dacă* facem mutarea m_{12}
piesele de pe alte poziții (3, 4, ... 9) rămân pe loc

$(\neg m_{12} \lor \neg p'_{13} \lor p_{13}) \land (\neg m_{12} \lor p'_{13} \lor \neg p_{13})$	piesa 1 pe poz. 3
$\land\ (\neg m_{12} \lor \neg p'_{23} \lor p_{23}) \land (\neg m_{12} \lor p'_{23} \lor \neg p_{23})$	piesa 2 pe poz. 3

...

la fel pentru toate cele *12 mutări*

Constrângeri pentru mutări

(3) Nu putem face ~~*două mutări*~~ odată.
Deci pentru orice două mutări distincte, $12 \cdot (12-1)/2$ perechi:

$$\neg(m_{12} \wedge m_{23}) \quad \text{adică} \quad (\neg m_{12} \vee \neg m_{23})$$
$$\neg(m_{12} \wedge m_{14}) \quad \text{adica} \quad (\neg m_{12} \vee \neg m_{14}) \qquad \ldots$$

Constrângeri pentru mutări

(3) Nu putem face *~~două mutări~~* odată.
Deci pentru orice două mutări distincte, $12 \cdot (12-1)/2$ perechi:

$$\neg(m_{12} \wedge m_{23}) \quad \text{adică} \quad (\neg m_{12} \vee \neg m_{23})$$
$$\neg(m_{12} \wedge m_{14}) \quad \text{adica} \quad (\neg m_{12} \vee \neg m_{14}) \qquad \ldots$$

(4) *Trebuie* să facem una din mutările asociate unei poziții libere:

$(\neg p_{11} \wedge \neg p_{21} \wedge \ldots \wedge \neg p_{81} \rightarrow m_{12} \vee m_{14})$ poz. 1 liberă
$\wedge\ (\neg p_{12} \wedge \neg p_{22} \wedge \ldots \wedge \neg p_{82} \rightarrow m_{12} \vee m_{23} \vee m_{25})\ \ldots$ poz. 2 liberă

sau în CNF:

$$(p_{11} \vee p_{21} \vee \ldots \vee p_{81} \vee m_{12} \vee m_{14})$$
$$\wedge\ (p_{12} \vee p_{22} \vee \ldots \vee p_{82} \vee m_{12} \vee m_{23} \vee m_{25}) \quad \ldots$$

Constrângeri pentru mutări

(3) Nu putem face ~~*două mutări*~~ odată.
Deci pentru orice două mutări distincte, $12 \cdot (12-1)/2$ perechi:

$$\neg(m_{12} \wedge m_{23}) \quad \text{adică} \quad (\neg m_{12} \vee \neg m_{23})$$
$$\neg(m_{12} \wedge m_{14}) \quad \text{adica} \quad (\neg m_{12} \vee \neg m_{14}) \qquad \ldots$$

(4) *Trebuie* să facem una din mutările asociate unei poziții libere:

$$(\neg p_{11} \wedge \neg p_{21} \wedge \ldots \wedge \neg p_{81} \rightarrow m_{12} \vee m_{14}) \qquad \text{poz. 1 liberă}$$
$$\wedge\ (\neg p_{12} \wedge \neg p_{22} \wedge \ldots \wedge \neg p_{82} \rightarrow m_{12} \vee m_{23} \vee m_{25}) \ldots \qquad \text{poz. 2 liberă}$$

sau în CNF:

$$(p_{11} \vee p_{21} \vee \ldots \vee p_{81} \vee m_{12} \vee m_{14})$$
$$\wedge\ (p_{12} \vee p_{22} \vee \ldots \vee p_{82} \vee m_{12} \vee m_{23} \vee m_{25}) \qquad \ldots$$

Putem face o mutare *doar* dacă una din cele două poziții e *liberă*:
e implicată de constrângerile de mai sus: *trebuie* făcută o mutare pentru o poziție liberă și nu putem face două mutări

Relația de tranziție

Constrângerile de mai sus definesc *legătura* dintre starea curentă (vectorul de propoziții $\bar{v}$) și starea următoare (vectorul $\bar{v}'$).

am introdus și propozițiile auxiliare m_{ij} (care nu țin de stare), dar le-am putea elimina

Legătură = *relație* . Nu e o ~~*funcție*~~ pentru că putem face mai multe mutări (2, 3 sau 4) și ajunge în mai multe stări succesor.

Combinând constrângerile (1)-(4) avem deci o formulă $R(\bar{v}, \bar{v}')$ care depinde de propozițiile p_{ij} din vectorul de stare $\bar{v}$ și p'_{ij} din $\bar{v}'$:

$R(\bar{v}, \bar{v}')$ e *relația de tranziție*: descrie cum evoluează sistemul.

Relația de tranziție poate fi descrisă printr-o formulă propozițională

Soluția problemei e un șir de mutări

Să presupunem că am reușit să ordonăm piesele în k mutări.
Avem deci $k+1$ stări (configurații): $\bar{v}^0 \to \bar{v}^1 \to \ldots \to \bar{v}^k$.

• *Starea inițială* $\bar{v}^0 = (p^0_{11}, p^0_{12}, \ldots)$ satisface o formulă:
$S_i(\bar{v}^0) = p^0_{14} \wedge p^0_{21} \wedge \ldots$ (1 pe poz. 4, 2 pe poz. 1, ...)

• *Starea finală* $\bar{v}^k = (p^k_{11}, p^k_{12}, \ldots)$ e descrisă tot printr-o formulă:
$S_f(\bar{v}^k) = p^k_{11} \wedge p^k_{22} \wedge \ldots$ (1 pe poz. 1, 2 pe poz. 2, ...)

• Stările succesive sunt legate prin mutări (*relația de tranziție*):

$$\boxed{S_i(\bar{v}^0) \wedge R(\bar{v}^0, \bar{v}^1) \wedge R(\bar{v}^1, \bar{v}^2) \wedge \ldots \wedge R(\bar{v}^{k-1}, \bar{v}^k) \wedge S_f(\bar{v}^k)}$$

Există soluție în k mutări *dacă și numai dacă* formula e *realizabilă.*

Soluția problemei

Putem rezolva deci problema (și multe altele) exprimând-o ca o problemă de *logică propozițională*:

Descriem o *stare* ca formulă propozițională.
 în particular, starea inițială S_i și cea țintă S_f

Descriem o *mutare* între stări ca formulă propozițională.
 relația de tranziție $R(\bar{v}, \bar{v}')$ între doi vectori de stare

$\Rightarrow$ Găsim un *plan* de lungime minimă căutând succesiv soluții pentru formule tot mai complexe: 1, 2, 3, ... pași

$S_i(\bar{v}^0) \wedge R(\bar{v}^0, \bar{v}^1) \wedge S_f(\bar{v}^1)$ 1 pas: $\bar{v}^0 \rightarrow \bar{v}^1$

$S_i(\bar{v}^0) \wedge R(\bar{v}^0, \bar{v}^1) \wedge R(\bar{v}^1, \bar{v}^2) \wedge S_f(\bar{v}^2)$ 2 pași: $\bar{v}^0 \rightarrow \bar{v}^1 \rightarrow \bar{v}^2$

etc.

În funcție de problemă, există și alți algoritmi, dedicați.
Aici am redus problema la o exprimare *simplă*, fundamentală:
determinarea realizabilității unei formule boolene (problema SAT)

Realizabilitatea unei formule propoziționale (satisfiability)

Se dă o formulă în *logică propozițională*.

Există vreo atribuire de valori de adevăr care o face adevărată ?
= e *realizabilă* (engl. *satisfiable*) formula ?

$$\begin{aligned} & (a \vee \neg b \vee \neg d) \\ \wedge\, & (\neg a \vee \neg b) \\ \wedge\, & (\neg a \vee c \vee \neg d) \\ \wedge\, & (\neg a \vee b \vee c) \end{aligned}$$

Găsiți o atribuire care satisface formula?

Formula e în *formă normală conjunctivă* (conjunctive normal form)
= conjuncție de disjuncții de *literali* (pozitiv sau negat)

Fiecare conjunct (linie de mai sus) se numește *clauză*

Reguli în determinarea realizabilității

Simplificăm problema, știind că vrem formula adevărată
(NU se aplică la simplificarea formulelor în formule echivalente!)

R1) Un literal *singur într-o clauză* are o singură valoare utilă:

în $a \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$ — a trebuie să fie T

în $(a \vee b) \wedge \neg b \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c)$ — b trebuie să fie F

(altfel formula are valoarea F)

Reguli pentru determinarea realizabilității (cont.)

R2a) Dacă un literal e T, *pot fi șterse clauzele* în care apare
(ele sunt adevărate, le-am rezolvat)

R2b) Dacă un literal e F, *el poate fi șters* din clauzele în care apare
(nu poate face clauza adevărată)

Exemplele anterioare se simplifică:

$$a \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \quad \stackrel{a=\mathsf{T}}{\rightarrow} \quad (b \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c)$$

$$(a \vee b) \wedge \neg b \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c) \quad \stackrel{b=\mathsf{F}}{\rightarrow} \quad a$$

(și de aici $a = T$, deci formula e realizabilă)

Reguli pentru determinarea realizabilității (cont.)

R3) Dacă *nu mai sunt clauze*, formula e realizabilă
(cu atribuirea construită)

Dacă obținem o *clauză vidă*, formula *nu e realizabilă*
(fiind vidă, nu putem s-o facem T)

$(a \vee b) \wedge a \wedge (a \vee \neg b \vee c) \quad \stackrel{a=\mathrm{T}}{\rightarrow} \quad (\mathrm{T} \vee b) \wedge \mathrm{T} \wedge (\mathrm{T} \vee \neg b \vee c) \xrightarrow{R2a}$
ștergem toate clauzele (conțin T, le-am rezolvat)
$\Rightarrow$ formulă realizabilă (cu $a = \mathrm{T}$)

$a \wedge (\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$
$\stackrel{a=\mathrm{T}}{\rightarrow} b \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c)$
$\stackrel{b=\mathrm{T}}{\rightarrow} c \wedge \neg c \quad \stackrel{c=\mathrm{T}}{\rightarrow} \quad \emptyset$ ($\neg c$ devine clauza vidă $\Rightarrow$ nerealizabilă)

Reguli pentru determinarea realizabilității (cont.)

Dacă *nu mai putem face reduceri* după aceste reguli ?

$a \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c) \quad \stackrel{a=T}{\rightarrow} \quad (b \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c)$??

R4) Alegem o variabilă și *despărțim pe cazuri* (încercăm):

- cu valoarea F
- cu valoarea T

O soluție pentru *oricare* caz e bună (nu căutăm o soluție anume).

Dacă *nicicare caz* nu are soluție, formula *nu e realizabilă*.

Un algoritm de rezolvare

Problema are ca date:

- lista clauzelor (formula)
- mulțimea variabilelor deja atribuite (inițial vidă)

Regulile 1 și 2 ne *reduc problema la una mai simplă*
(mai puține necunoscute sau clauze mai puține și/sau mai simple)

Regula 3 spune când ne oprim (avem răspunsul).

Regula 4 reduce problema la rezolvarea a *două probleme mai simple*
(cu o necunoscută mai puțin)

Reducerea problemei la *aceeași problemă cu date mai simple*
(una sau mai multe instanțe) înseamnă că problema e *recursivă*.

Obligatoriu: trebuie să avem și o *condiție de oprire*

Algoritmul Davis-Putnam-Logemann-Loveland (1962)

function solve(truelit: lit set, clauses: clause list)
(truelit, clauses) = simplify(truelit, clauses) (* R1, R2 *)
if clauses = lista vidă **then**
  return truelit; (* R3: realizabila, returneaza atribuirile *)
if clauses conține clauza vidă **then**
  raise Unsat; (* R3: nerealizabila *)
if clauses conține clauză cu unic literal a **then**
  solve (truelit $\cup\{a\}$, clauses) (* R1: a trebuie să fie T *)
else
  try solve (truelit $\cup\{\neg a\}$, clauses); (* R4: încearcă a=F *)
  with Unsat $\rightarrow$ solve (truelit $\cup\{a\}$, clauses); (* încearcă T *)

Rezolvitoarele (*SAT solvers/checkers*) moderne pot rezolva formule cu milioane de variabile (folosind optimizări)

Implementare: lucrul cu liste și mulțimi

Structuri de date:

- *lista* clauzelor (listă de liste de literali)
- *mulțimea* literalilor cu valoare T

Prelucrări:

- *căutarea* unui literal în mulțimea celor atribuite
- *adăugarea* unui literal la mulțimea celor atribuite
- *parcurgerea* literalilor dintr-o listă (clauză)
- *eliminarea* unui literal dintr-o listă (clauză)
- *eliminarea* unei clauze dintr-o listă (formula)

Cum reprezentăm un literal ?

un șir (numele variabilei) etichetat cu P (pozitiv) / N (negativ)

```
module L = struct
  type t = P of string | N of string (* pozitiv / negat *)
  let compare = compare  (* fct. std. Pervasives.compare *)
  let neg = function   (* negare = schimba eticheta *)
    | P s -> N s
    | N s -> P s
 end
```

(cod după Conchon et. al, Sat-Micro, 2008)

Sau reprezentăm o propoziție p_k prin indicele întreg $k \in \mathbb{N}^*$ și folosi numere negative pentru negație (formatul standard DIMACS)

```
module L = struct
  type t = int
  let compare = compare
  let neg x = -x
end

module S = Set.Make(L)  (* pentru multimi de literali *)
```

Simplificarea unei clauze

`tlits` = mulțimea literalilor (cunoscuți deja ca) adevărați

R2a: când găsim un literal adevărat, putem elimina clauza (e T)
$\Rightarrow$ nu mai continuăm prelucrarea, semnalăm *excepția* `Exit`
va fi tratată de funcția apelantă

Altfel, eliminăm un literal dacă e fals (R2b)
i.e., dacă apare negat în mulțimea celor adevărate, `tlits`
deci dacă nu apare negat în `tlits` îl păstrăm

```
let filter_clause tlits =
  List.filter (fun lit ->
    if S.mem lit tlits then raise Exit (* clauza adevarata *)
    else not (S.mem (L.neg lit) tlits)) (* retine daca nu e F *)
```

Simplificarea listei de clauze

Acumulăm cu `List.fold_left` o *pereche* de valori:
mulțimea literalilor adevărați `tlits`, lista clauzelor simplificate `clst`

```
let rec simplify truelits = List.fold_left
  (fun (tlits, clst) cl -> (* (lit,clauze) acumul.+clauza crt.*)
    try match filter_clause tlits cl with
     | [] -> raise Unsat (* clauza vida -> nerealizabila *)
     | [lit] -> simplify (S.add lit tlits) clst (*reia cu lit=T*)
     | rstcl -> (tlits, rstcl::clst) (* adauga clauza simplif.*)
    with Exit -> (tlits, clst) (* ignora clauza care a fost T *)
  ) (truelits, [])
```

Dacă `filter_clause` dă un unic literal, se adaugă la cele adevărate
și reluăm simplificarea clauzelor deja prelucrate

Dacă returnează lista vidă, toată formula e nerealizabilă

Dacă produce excepția `Exit`, eliminăm clauza (e adevărată)

Altfel, adăugăm clauza simplificată la listă

Verificarea propriu-zisă

Dacă simplificând obținem lista vidă de clauze, returnăm mulțimea literalilor adevărați (restul nu contează)

Altfel, cu primul literal din prima clauză încercăm ambele valori
dacă prima încercare dă excepția Unsat, încercăm și a doua

```
let sat =
  let rec sat1 tlits clist = match simplify tlits clist with
    | (tlits, (lit::cl)::clst) -> (* luam primul literal *)
      S.union tlits (* return.lit. deja T + aflati mai jos *)
        (try sat1 (S.singleton (L.neg lit)) (cl::clst) (*lit=F*)
        with Unsat -> sat1 (S.singleton lit) clst) (*sau lit=T*)
    | (tlits, _) -> tlits (* _ va fi []; return. literalii T *)
  in sat1 S.empty          (* initial nu stim lit. T *)

let res = sat [[1;2;-3]; [-1;3]; [1;-2]] |> S.elements
val res : S.elt list = [-3; -2; -1]
```

$(p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_3) \vee (\neg p_1 \vee p_2)$ e SAT cu $p_1 = p_2 = p_3 = F$

Complexitatea realizabilității

O formulă cu n propoziții are 2^n atribuiri
$\Rightarrow$ timp *exponențial* încercând toate

O atribuire dată se verifică în timp *liniar* (în dimensiunea formulei)
parcurgem formula o dată și obținem valoarea

În general, a *verifica* o soluție e (mult) mai simplu decât a o *găsi*.

P = clasa problemelor care pot fi *rezolvate* în timp polinomial (relativ la dimensiunea problemei)
căutare în tablou nesortat: liniar, $O(n)$
sortare $O(n \log n)$ (eficient), $O(n^2)$ (nu folosiți)
toate drumurile minime în graf $O(n^3)$

NP (nondeterministic polynomial time) = clasa problemelor pentru care o soluție ("ghicită", dată) poate fi *verificată* în timp polinomial

Probleme NP-complete

Unele probleme din clasa *NP* sunt mai dificile decât altele.

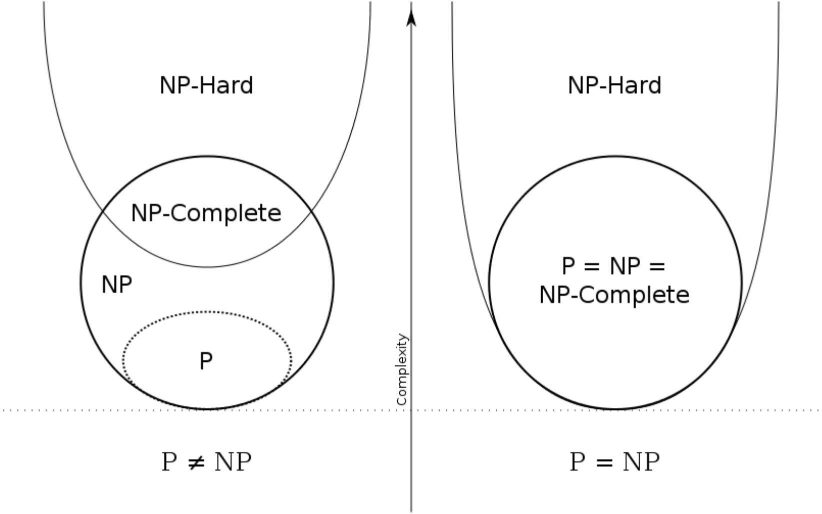
Probleme *NP-complete*: cele mai dificile probleme din clasa NP
dacă una din ele s-ar rezolva în timp polinomial,
orice altă problemă din NP s-ar rezolva în timp polinomial
$\Rightarrow$ am avea P = NP (se crede P $\neq$ NP)

Realizabilitatea (SAT) e prima problemă demonstrată a fi *NP-completă* (Cook, 1971). Sunt multe altele (21 probleme clasice: Karp 1972).

Cum demonstrăm că o problemă e NP-completă (grea) ?
reducem o problemă cunoscută din NP la problema studiată
$\Rightarrow$ dacă s-ar putea rezolva în timp polinomial problema nouă,
atunci ar lua timp polinomial problema cunoscută

P = NP?

Una din problemele fundamentale în informatică



Se crede că $P \neq NP$, dar nu s-a putut (încă) demonstra

Imagine: `http://en.wikipedia.org/wiki/File:P_np_np-complete_np-hard.svg`

Sintaxă și semantică

Pentru logica propozițională, am discutat:

Sintaxa: o formulă are *forma*:
propoziție sau ($\neg$ *formulă*) sau (*formulă* $\to$ *formulă*)

Semantica: calculăm *valoarea de adevăr* (înțelesul), pornind de la cea a propozițiilor

$$v(\neg\alpha) = \begin{cases} \mathsf{T} & \text{dacă } v(\alpha) = \mathsf{F} \\ \mathsf{F} & \text{dacă } v(\alpha) = \mathsf{T} \end{cases}$$

$$v(\alpha \to \beta) = \begin{cases} \mathsf{F} & \text{dacă } v(\alpha) = \mathsf{T} \text{ și } v(\beta) = \mathsf{F} \\ \mathsf{T} & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

Deducții logice

Deducția ne permite să demonstrăm o formulă în mod *sintactic* (folosind doar structura ei)

E bazată pe o *regulă de inferență* (de deducție)

$$\frac{A \qquad A \rightarrow B}{B} \qquad \textit{modus ponens}$$

(din A și $A \rightarrow B$ deducem/inferăm B; A, B formule oarecare)

și un set de *axiome* (formule care pot fi folosite ca premise/ipoteze)

A1: $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

A2: $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

A3: $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

în care α, β etc. pot fi înlocuite cu *orice* formule

Exercițiu: arătați că A1 - A3 sunt tautologii

Deducție (demonstrație)

Informal, o deducție (demonstrație) e o înșiruire de afirmații în care fiecare rezultă (poate fi derivată) din cele anterioare.

Riguros, definim:
Fie H o mulțime de formule (ipoteze). O *deducție* (demonstrație) din H e un șir de formule $A_1, A_2, \cdots, A_n$, astfel ca $\forall i \in \overline{1, n}$

1. A_i este o *axiomă*, sau
2. A_i este o *ipoteză* o formulă din H), sau
3. A_i rezultă prin *modus ponens* din A_j, A_k anterioare $(j, k < i)$

Spunem că A_n *rezultă* din H (e *deductibil*, e o *consecință*).
Notăm: $H \vdash A_n$

Exemplu de deducție

Demonstrăm că $A \to A$ pentru orice formulă A

(1) $A \to ((A \to A) \to A))$ A1 cu $\alpha = A, \beta = A \to A$

(2) $A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$
A2 cu $\alpha = \gamma = A, \beta = A \to A$

(3) $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ MP(1,2)

(4) $A \to (A \to A)$ A1 cu $\alpha = \beta = A$

(5) $A \to A$ MP(3,4)

Verificarea unei demonstrații e un proces simplu, mecanic
(verificăm motivul indicat pentru fiecare afirmație;
o simplă comparație de șiruri de simboluri).

Găsirea unei demonstrații e un proces mai dificil.

Alte reguli de deducție

Modus ponens e suficient pentru a formaliza logica propozițională dar sunt și alte reguli de deducție care simplifică demonstrațiile

$$\frac{p \rightarrow q \qquad \neg q}{\neg p}$$ *modus tollens (reducere la absurd)*

$$\frac{p}{p \vee q}$$ *generalizare (introducerea disjuncției)*

$$\frac{p \wedge q}{p}$$ *specializare (simplificare)*

$$\frac{p \vee q \qquad \neg p}{q}$$ *eliminare (silogism disjunctiv)*

$$\frac{p \rightarrow q \qquad q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$$ *tranzitivitate (silogism ipotetic)*

Deducția (exemplu)

Fie $H = \{a,\ \neg b \vee d,\ a \to (b \wedge c),\ (c \wedge d) \to (\neg a \vee e)\}$.
Arătați că $H \vdash e$.

(1) a	ipoteză, H_1
(2) $a \to (b \wedge c)$	ipoteză, H_3
(3) $b \wedge c$	modus ponens (1, 2)
(4) b	specializare (3)
(5) d	eliminare (4, H_2)
(6) c	specializare (3)
(7) $c \wedge d$	(5) și (6)
(8) $\neg a \vee e$	modus ponens (7, H_4)
(9) e	eliminare (1, 8)

Consecința logică (semantică)

Interpretare = atribuire de adevăr pentru propozițiile unei formule. O formulă poate fi adevărată sau falsă într-o interpretare.

Def.: O mulțime de formule $H = \{H_1, \ldots, H_n\}$ *implică* o formulă C (C e o *consecință logică* / consecință semantică a ipotezelor H) dacă orice interpretare care satisface (formulele din) H satisface C

Notăm: $H \models C$

Ca să stabilim consecința semantică trebuie să *interpretăm* formule (cu valori/funcții de adevăr)

$\Rightarrow$ lucrăm cu *semantica* (înțelesul) formulelor

Exemplu: arătăm $\{A \vee B, C \vee \neg B\} \models A \vee C$ Fie interpretarea v.
Cazul 1: $v(B) = \mathrm{T}$. Atunci $v(A \vee B) = \mathrm{T}$ și $v(C \vee \neg B) = v(C)$.
Dacă $v(C) = T$, atunci $v(A \vee C) = T$, deci afirmația e adevărată.
Cazul 2: $v(B) = \mathrm{F}$. La fel, reducem la $\{A\} \models A \vee C$ (adevărat).

Consistență și completitudine

$H \vdash C$: *deducție* (pur sintactică, din axiome și reguli de inferență)
$H \models C$: *implicație, consecință semantică* (valori de adevăr)
Care e legătura între ele ?

Logica propozițională e *consistentă și completă*:

Consistență: Dacă H e o mulțime de formule, și C este o formulă astfel ca $H \vdash C$, atunci $H \models C$ (Orice teoremă e validă; orice afirmație obținută prin deducție e întotdeauna adevărată).

Completitudine: Dacă H e o mulțime de formule, și C e o formulă astfel ca $H \models C$, atunci $H \vdash C$. (Orice tautologie e o teoremă, orice consecință semantică poate fi dedusă din aceleași ipoteze).

Ca să demonstrăm o formulă, putem arăta că e *validă*.
Pentru aceasta, verificăm că *negația ei nu e realizabilă*.
(am văzut algoritmul DPLL; vom discuta metoda rezoluției).