1 7. SPATII AFINE EUCLIDIENE

1.0.1 A. TEORIE

Geometria afina are ca obiect studiul proprietatilor geometrice care raman neschimbate sub actiunea transformarilor liniare nesingulare si a translatiilor. Spatiile euclidiene afine ofera cadrul natural de lucru in grafica 3D si in modelarea geometrica.

1. **Spatiul afin euclidian $\mathbf{E}^n$**. *Consideram spatiul vectorial* $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$. *si o multime* P *ale carei elemente le numim puncte si le notam cu litere mari :* A, B, C *etc. Daca pentru orice pereche de puncte* $(A, B) \in \mathcal{P}\times\mathcal{P}$ *exista un unic vector notat* $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^n$, *iar functia* $\alpha : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}^n$, $\alpha(A, B) := \overrightarrow{AB}$ *verifica axiomele:*

   i. $\forall A \in \mathcal{P}$ *si* $\forall\ v \in \mathbb{R}^n$ *exista un unic punct* B *astfel ca* $v = \overrightarrow{AB}$ *si*

   ii. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \forall A, B, C \in \mathcal{P}$,

   spunem ca multimea $\mathcal{P}$ *impreuna cu aplicatia* α *este un* ***spatiu (punctual) afin n-dimensional***.

   Daca Q ∈P este un punct fixat, conform axiomei **i**. functia

   $$\mathcal{P} \to \mathbb{R}^n \text{ definita prin } A \longmapsto \overrightarrow{QA}$$

   este o bijectie; este motivul pentru care, *in continuare, luam*

   $$\mathcal{P} = \mathbb{R}^n,$$

   adica *elementele din* $\mathbb{R}^n$ *le consideram fie vectori, fie puncte, iar vectorul* $\overrightarrow{AB}$ *este definit ca diferenta* $\overrightarrow{AB} := B - A$; astfel, axioma **ii**. este egalitatea evidenta $(B - A) + (C - B) = C - A$. Daca, un plus, pe $\mathbb{R}^n$ s-a definit un *produs scalar* "$\cdot$" *atunci* $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ *se numeste* ***spatiu (punctual) afin euclidian (n- dimensional)*** *si se noteaza* E^n.

   Daca $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ este un punct din $\mathbb{R}^n$, in loc de $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ scriem $A(a_1, a_2, ..., a_n)$.

   In lipsa altor precizari "$\cdot$" este produsul scalar canonic.

   Proprietati.

   - $\overrightarrow{AA} = \theta = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$;
   - $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$
   - $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + ... + \overrightarrow{A_{k-1}A_k} = \overrightarrow{A_1A_k}$.

2. Un *reper (ortonormat)* in $\mathbf{E}^n$ este un cuplu R$=(O,\mathcal{B})$ unde $O\in\mathbb{R}^n$ este un punct fixat, numit *originea reperului*, iar $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ este o baza ortonormata a spatiului euclidian $(\mathbb{R}^n,\cdot)$. Asociem reperului R un sistem de (semi)*axe ortogonale* $Ox_1,Ox_2,...,Ox_n$, unde semiaxa Ox_i este multimea punctelor M cu proprietatea ca vectorul $\overrightarrow{OM}$ are aceeasi directie si acelasi sens cu vectorul e_i, adica

$$Ox_i=\left\{M\in\mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{OM}=\lambda e_i,\lambda\in[0,\infty)\right\}$$

(prin abuz de limbaj spunem ca axa Ox_i este multimea punctelor M cu proprietatea ca vectorul $\overrightarrow{OM}$ are aceeasi directie cu vectorul e_i).

Astfel daca A este un punct si $\overrightarrow{OA}=a_1e_1+a_2e_2+...+a_ne_n$, atunci $a_i=pr_{e_i}\left(\overrightarrow{OA}\right)$. Vectorul $\overrightarrow{OA}$ se numeste *vectorul de pozitie al punctului* A, iar coordonatele $a_1,a_2,...,a_n$ ale vectorului $\overrightarrow{OA}$ in baza $\mathcal{B}$ sunt, prin definitie, *coordonatele punctului A relativ la reperul* R *(sau la* sistemul de axe asociat). In plan, i.e. in $\mathbf{E}^2$ (sau in spatiu i.e. in $\mathbf{E}^3$), axele unui reper ortonormat se noteaza de regula cu Ox,Oy, (Ox,Oy,Oz) iar coordonatele unui punct arbitrar cu (x,y) (respectiv (x,y,z)).

Reperul R$_c$ format din originea $O\,(0,0,...,0)$ si din baza canonica $\mathcal{B}_c$ se numeste *reperul canonic*.

Proprietati. *Fie trei puncte* $A\,(a_1,a_2,...,a_n)\,,B\,(b_1,b_2,...,b_n)\,,C\,(c_1,c_2,...,c_n)$ *din spatiul euclidian canonic* E^n *si* $\mathcal{R}_c$ *reperul canonic. Atunci:*

(a) *vectorul* $\overrightarrow{AB}$ *se poate exprima cu ajutorul vectorilor de pozitie ai punctelor A si B astfel:*

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA};$$

(b) *norma vectorului de pozitie* $\overrightarrow{OA}$ *(lungimea sa) este*:

$$\left\|\overrightarrow{OA}\right\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2};$$

(c) *distanta dintre punctele A si B este*:
$$d\,(A,B)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right\|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+...+(b_n-a_n)^2};$$

(d) *segmentul* $[AB]$ *este prin definitie*
$$[AB]:=\left\{\mathcal{P}\in\mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{O\mathcal{P}}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB},t\in[0,1]\right\}=$$
$$\{\mathcal{P}\,(a_1+tb_1,a_2+tb_2,...,a_n+tb_n)\mid t\in[0,1]\}$$

(e) *mijlocul segmentului* $[AB]$ *este punctul*

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},...,\frac{a_n+b_n}{2}\right);$$

(f) *masura unghiului $\widehat{BAC}$ (prin abuz de limbaj, spunem uneori "unghiul " in loc de "masura unghiului") dintre vectorii $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{AC}$ se determina din:*
cos $\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{(b_1-a_1)(c_1-a_1)+(b_2-a_2)(c_2-a_2)+...+(b_n-a_n)(c_n-a_n)}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+...}\sqrt{(c_1-a_1)^2+...}}$.

3. **Orientarea bazelor si a reperelor.** *Fie B, B' doua baze in $\mathbb{R}^n$ si $\mathcal{R}$,$\mathcal{R}'$ doua repere in E^n.*

   - *Bazele B si B' au **aceeasi orientare** (**sunt la fel orientate**) daca determinantul matricei de trecere $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ este pozitiv. Baza B este **dreapta (stanga)** daca este la fel orientata ca baza canonica.*
   - *Reperele $\mathcal{R}$ si $\mathcal{R}'$ au **aceeasi orientare** (sunt la fel orientate) daca bazele lor sunt la fel orientate.*
   - *Spunem ca baza B este **dreapta** daca este la fel orientata ca baza canonica; in caz contrar spunem ca este **baza stanga**.*
   - *Spunem ca reperul $\mathcal{R}$ este **drept** daca are aceeasi orientare ca reperul canonic; in caz contrar spunem ca este **reper stang**.*

4. *Schimbarea reperelor in* $\mathbf{E}^n$. Fie. R$= (O, \mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\})$ si R$' = (O', \mathcal{B}' = \{e_1', e_2', ..., e_n'\})$ doua repere in spatiul euclidian afin $\mathbf{E}^n$.

   Daca R$' = (O', \mathcal{B})$ (adica $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$) spunem ca reperul R$'$ s-a obtinut din reperul R prin *translatia* $\overrightarrow{OO'}$ (*pe directia vectorului* $\overrightarrow{OO'}$, sau *de-a lungul dreptei* OO'). In acest caz axele ortogonale $O'x_i', i = \overline{1,n}$ asociate reperului R$'$ sunt paralele si au aceasi directie cu axele $Ox_i, i = \overline{1,n}$ ale reperului R. Daca punctul O' are coordonatele $(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$ relativ la reperul R, iar punctul A are coordonatele $(a_1, a_2, ..., a_n)$ relativ la reperul R si coordonatele $(a_1', a_2', ..., a_n')$ relativ la reperul R$'$, atunci $a_i' = a_i - x_{0i}, i = \overline{1,n}.$

   Daca R$' = (O, \mathcal{B}')$, spunem ca reperul R$'$ s-a obtinut din reperul R prin *rotatii* (in jurul axelor $Ox_i, i = \overline{1,n}$ ale reperului R).

   Reperul R$' = (O, \mathcal{B}' = \{e_1', e_2'\})$ din $\mathbf{E}^2$ este drept daca si numai daca matricea de trecere de la baza canonica $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2\}$ la baza $\mathcal{B}'$ este

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

   unde θ este masura unghiului $(\widehat{e_1, e_1'})$, si este stang daca si numai daca matricea de trecere de la baza canonica la baza $\mathcal{B}'$ este

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Prin urmare o baza ortonormata $\{e_1', e_2'\}$ are aceeasi orientare ca baza canonica daca si numai daca unghiurile $\widehat{(e_1, e_1')}$ si $\widehat{(e_2, e_2')}$ au aceeasi masura.

Fie $\theta \in (\pi-, \pi]$ si reperul $\mathrm{R}' = (O, \mathcal{B}' = \{e_1' = (\cos\theta, \sin\theta), e_2' = (-\sin\theta, \cos\theta)\})$. Aplicatia liniara $\mathcal{R}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ care realizeaza legatura dintre reperul canonic si reperul R' are matricea $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ si se numeste *rotatie de unghi* θ (a reperului canonic). Daca $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, atunci $v = \|v\| (\cos\alpha, \sin\alpha)$, unde α este masura unghiului facut de v cu e_1 iar $\mathcal{R}_\theta(v) = \|v\| (\cos(\alpha+\theta), \sin(\alpha+\theta))$.

5. **Produs vectorial** *in spatiul euclidian canonic* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$. Fie $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ baza canonica si $u = x_1 \overrightarrow{i} + x_2 \overrightarrow{j} + x_3 \overrightarrow{k}$, $v = y_1 \overrightarrow{i} + y_2 \overrightarrow{j} + y_3 \overrightarrow{k}$ doi vectori. Vectorul notat $u \times v$ care se obtine prin dezvoltarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

dupa prima linie se numeste *produsul vectorial al vectorilor* u si v.

Proprietati ale produsului vectorial. *Fie u, v, w trei vectori din $\mathbb{R}^3$.*

(a) *Daca vectorii u, v sunt liniar independenti atunci produsul vectorial $u \times v$ este ortogonal pe vectorii u si v, iar sistemul $\{u, v, u \times v\}$ este o baza dreapta, adica produsul vectorial $u \times v$ este perpendicular pe planul determinat de vectorii u si v, iar sensul sau este dat de regula burghiului.*

(b) *Sistemul ortonormat $\{u, v, w\}$ este o baza dreapta daca si numai daca se verifica una dintre relatiile: $u \times v = w, v \times w = u, w \times u = v$.*

(c) *Norma produsului vectorial are valoarea $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin\widehat{(u, v)}$ si reprezinta aria paralelogramului construit pe vectorii u si v (adica $\|u\| \|v - pr_u v\|$).*

(d) *Produsul vectorial este anticomutativ, i.e. $u \times v = -v \times u$.*

(e) *$u \times v = \theta$ daca si numai daca unul dintre vectori este nul, sau cei doi vectori sunt coliniari (i.e. $u \parallel v$).*

6. **Produsul mixt**. *Fie u, v, w trei vectori din $\mathbb{R}^3$. Produsul mixt $(u, v, w) := (u \times v) \cdot w$ este egal cu determinantul matricei coordonatelor celor trei vectori, i.e.*

$$(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

unde $u = x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$, $v = y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3$ *si* $w = z_1e_1+z_2e_2+z_3e_3$; *daca* A, B, C *sunt trei puncte din* $\mathbb{R}^3$ *atunci produsul mixt* $\left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right) \times \overrightarrow{OC}$ *este volumul paralelipipedului construit pe vectorii* $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

Proprietati ale produsului mixt. *Fie* u, u', v, w *vectori din* $\mathbb{R}^3$ *si* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Atunci:*

(a) $(u, v, w) = (v, w, u) = (w, u, v)$.

(b) $(u, v, w) = -(v, u, w)$.

(c) $(\alpha u + \beta u', v, w) = \alpha (u, v, w) + \beta (u', v, w)$.

(d) $(u \times v) \times w = (u \cdot w) v - (v \cdot w) u$.

7. **Vectori liberi.** Fie O un punct fixat din spatiu. Spunem ca vectorii nenuli $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{CD}$ *au aceeasi directie* daca dreptele AB si CD sunt paralele sau coincid.

- Daca A, B sunt doua puncte distincte, multimea

$\overline{AB} := \{\overrightarrow{CD}$ |*vectorii* $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$ au aceeasi directie,acelasi sens si aceeasi lungime$\}$
se numeste *vector liber care are directia sensul si lungimea (norma) vectorului* $\overrightarrow{AB}$; daca $A = B$ prin definitie $\overline{AA} := \overline{0}$ este *vectorul liber nul*. Notam $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, ...$ vectorii liberi, iar daca $\overline{a} = \overline{AB}$, vectorul $\overrightarrow{AB}$ se numeste *reprezentant al vectorului liber* $\overline{a}$. Spunem ca vectorii liberi $\overline{a}$ si $\overline{b}$ sunt *coliniari* daca au aceeasi directie si *coplanari* daca reprezentantii lor sunt paraleli cu un plan.

- Notam cu $\mathcal{V}_3$ multimea vectorilor liberi. Fie $\overline{a}, \overline{b} \in \mathcal{V}_3$ si A, B punctele pentru care $\overline{a} = \overline{OA}$ si $\overline{b} = \overline{OB}$; *suma*

vectorilor liberi $\overline{a}$ si $\overline{b}$ are, prin definitie, reprezentantul $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, deci $\overline{a}+\overline{b} := \overline{OC}$. Daca $\lambda \in \mathbb{R}$, definim *produsul dintre scalarul* λ *si vectorul liber* $\overline{a}$ ca vectorul liber care are reprezentantul $\lambda\overrightarrow{OA}$. Cu aceste operatii $\mathcal{V}_3$ devine un *spatiu vectorial real izomorf cu spatiul* $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$.

- Cuplul $(\mathcal{V}_3, \cdot)$ este spatiu euclidian, unde "$\cdot$" este *produsul scalar canonic* definit prin $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$. Baza canonica a spatiului $(\mathcal{V}_3, \cdot)$ o notam cu $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$

//

1.0.2 B. Probleme rezolvate

1.1 C. Exercitii

1. Sa se figureze axele de coordonate ale reperului canonic, apoi sa se figureze reprezentanti ai vectorilor liberi $\overline{a}, \overline{b}$si $\overline{a} \times \overline{b}$ daca:

   (a) $\overline{a} = \overline{i}, \overline{b} = \overline{j}$;

   (b) $\overline{a} = \overline{i} - \overline{k}, \overline{b} = \overline{j}$;

   (c) $\overline{a} = \overline{i} - \overline{k}, \overline{b} = \overline{j} + \overline{k}$;

   (d) $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j}, \overline{b} = \overline{i} - \overline{j}$.

2. Pentru ce valori ale lui α vectorii $\overline{a} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + 8\overline{k}$ si $\overline{b} = \overline{i} - 3\overline{j} + \alpha\overline{k}$ sunt paraleli?

   Raspuns. $\alpha = 4$.

3. Sa se arate ca $\overline{a} \times \overline{b} = 2\overline{i} + 6\overline{j} - 10\overline{k}$, unde $\overline{a} = -4\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$ si $\overline{b} = 2\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$.

4. Determinati un vector perpendicular pe planul ce trece prin $P(1, -1, 0), Q(2, 1, -1), R(-1, 1, 2)$.

   Raspuns. E.g. $\overline{i} + \overline{j}$.

5. Determinati aria triunghiului care are varfurile $P(1, -1, 0)$, $Q(2, 1, -1)$ si $R(-1, 1, 2)$.

   Raspuns. $3\sqrt{2}$.

6. Determinati aria triunghiului PQR si un versor perpendicular pe planul (PQR) cand:

   (a) $P(0, 0, 0), Q(1, 1, 1), R(1, 0, -1)$;

   (b) $P(-2, 0, 2), Q(1, 1, 1), R(1, 0, -1)$;

   (c) $P(1, 0, 0), Q(0, 1, 0), R(0, 0, 1)$;

   (d) $P(1, 0, 0), Q(0, 1, 0), R(0, 0, -1)$.

7. Fie punctele $A(1, 1, -1), B(0, 1, 2), C(2, 0, -1)$.

   (a) Sa se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel incat $a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

   (b) Sa se calculeze masura unghiului dintre vectorii $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{BC}$.

   (c) Sa se determine mijlocul segmentului $[AB]$.

   (d) Sa se determine centrul de greutate al triunghiului ABC.

   (e) Sa se calculeze $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$.

(f) Sa se calculeze aria triunghiului ABC.

Raspuns. a. $a = b = 1....$

8. In $\mathbf{E}^2$ reperul $\mathrm{R}' = (O'(x_0, y_0), \mathcal{B}' = \{e_1', e_2'\})$ s-a obtinut din reperul $\mathrm{R} = (O, \mathcal{B} = \{e_1, e_2\})$ printr-o translatie de-a lungul dreptei OO' si o rotatie de unghi θ. Determinati coordonatele (x', y') ale unui punct P relativ la reperul R in functie de coordonatele sale (x, y) relativ la reperul R'.

   Raspuns. $x' = x\cos\theta + y\sin\theta - x_0$, $y' = -x\sin\theta + y\cos\theta - y_0$.

9. Dovediti ca afirmatiile de mai jos sunt adevarate sau false intodeauna:

   (a) $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$;
   (b) $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$;
   (c) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$;
   (d) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AB}$;
   (e) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD}$;
   (f) $\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD}\right)$;
   (g) $\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD}\right)$;
   (h) $\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD}$.

10. Determinati:

    - $\overline{a} \cdot \overline{b}, \overline{a} \times \overline{b}, \|\overline{a}\|, \|\overline{b}\|$;
    - cosinusul unghiului dintre $\overline{a}$ si $\overline{b}$;
    - proiectia vectorului $\overline{b}$ pe vectorul $\overline{a}$

    in urmatoarele cazuri:

    (a) $\overline{a} = 2\overline{i} + 7\overline{j}, \overline{b} = \overline{k}$;
    (b) $\overline{a} = 2\overline{i} - 4\overline{j} + \sqrt{5}\overline{k}, \overline{b} = -2\overline{i} + 4\overline{j} - \sqrt{5}\overline{k}$;
    (c) $\overline{a} = \frac{3}{5}\overline{i} + \frac{4}{5}\overline{k}, \overline{b} = 5\overline{i} + 12\overline{j}$.

11. Scrieti $\overline{a} = 3\overline{j} + 4\overline{k}$ ca suma dintre un vector paralel cu $\overline{b} = \overline{i} + \overline{j}$ si unul perpendicular pe $\overline{b}$.

12. Scrieti $\overline{a} = \overline{j} + \overline{k}$ ca suma dintre un vector paralel cu $\overline{b} = \overline{i} + \overline{j}$ si unul perpendicular pe $\overline{b}$.

13. Vectorul $\overline{a} = \overline{i} + \left(\overline{j} + \overline{k}\right)$ este deja scris ca suma dintre un vector $\overline{a}_1$ paralel cu $\overline{i}$ si altul, $\overline{a}_2$, ortogonal pe $\overline{i}$. Aplicand tehnica de la exercitiul precedent pentru $\overline{b} = \overline{i}$ obtineti $\overline{a}_1 = \overline{i}$ si $\overline{a}_2 = \overline{j} + \overline{k}$? Este aplicabila aceasta tehnica pentru orice vectori nenuli $\overline{a}$ si $\overline{b}$?

14. Fie ABC un triunghi si M un punct arbitrar. Sa se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \alpha\overrightarrow{CB}$.

15. Fie $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ trei vectori nenuli. Folosind produse scalare si produse vectoriale potrivite descrieti:

    (a) un vector ortogonal pe $\overline{a}$ si $\overline{b}$;

    (b) un vector ortogonal pe $\overline{a} \times \overline{b}$ si $\overline{c}$;

    (c) un vector ortogonal pe $\overline{a} \times \overline{b}$ si $\overline{a} \times \overline{c}$;

    (d) un vector ortogonal pe $\overline{a} \times \overline{b}$

16. Sa se determine formulele de calcul ale coordonatelor centrului de greutate al unui triunghi dat.

17. Fie O punctul de intersectie al diagonalelor paralelogramului $ABCD$ si M un punct arbitrar. Sa se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \alpha\overrightarrow{MO}$.

18. Fie ABC un triunghi. Sa se arate ca G este centrul de greutate al triunghiului ABC daca si numai daca $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

19. Sa se scrie toate bazele drepte care contin vectorii $u = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{j}, v = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{j}$.

20. Este adevarat ca $(u \times v) \times w = u \times (v \times w)$?

21. Care este lungimea proiectiei vectorului $\overline{a} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + 8\overline{k}$ pe vectorul $\overline{b} = 3\overline{i} - \overline{j}$?

22. Este produsul vectorial invariant la schimbarea bazei ortonormate?

23. Fie $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in \mathcal{V}_3$. Sa se arate ca $\left(\overline{a} \times \overline{b}\right)\left(\overline{c} \times \overline{d}\right) = \begin{vmatrix} \overline{a} \cdot \overline{c} & \overline{a} \cdot \overline{d} \\ \overline{b} \cdot \overline{c} & \overline{b} \cdot \overline{d} \end{vmatrix}$.

24. **Determinantul Gram** *al vectorilor* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$ *este scalarul*

$$d = \begin{vmatrix} \overline{a} \cdot \overline{a} & \overline{a} \cdot \overline{b} & \overline{a} \cdot \overline{c} \\ \overline{b} \cdot \overline{a} & \overline{b} \cdot \overline{b} & \overline{b} \cdot \overline{c} \\ \overline{c} \cdot \overline{a} & \overline{c} \cdot \overline{b} & \overline{c} \cdot \overline{c} \end{vmatrix}.$$

    Aratati ca:

    (a) $d = \left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)^2$;

(b) vectorii $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ sunt coplanari daca si numai daca determinantul lor Gram este nul.

25. Daca $\|\overline{a}\| = 2, \|\overline{b}\| = 3$ si unghiul dintre $\overline{a}$ si $\overline{b}$ are masura $\frac{\pi}{3}$ calculati $\|\overline{a} - 2\overline{b}\|$.

26. Pentru ce valori ale lui α aria paralelogramului determinat de vectorii $\overline{a} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + 8\overline{k}$ si $\overline{b} = \overline{i} - 3\overline{j} + \alpha\overline{k}$ este 1?

27. Determinati aria paralelogramului determinat de vectorii $\overline{a}$ si $\overline{b}$ si volumul paralelipipedului determinat de vectorii $\overline{a}$,$\overline{b}$ si $\overline{c}$, unde $\overline{a} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + 8\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}$ si $\overline{c} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$.

28. Calculati cosinusurile directoare ale vectorilor $\overline{a} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + 8\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}$ si $\overline{c} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$.

29. Vectorii $\overline{a}$,$\overline{b}$ si $\overline{c}$ sunt ortogonali doi cate doi, iar $\overline{d} = 5\overline{a} - 6\overline{b} + 3\overline{c}$.

    (a) Daca $\overline{a}$,$\overline{b}$ si $\overline{c}$ sunt versori calculati norma vectorului $\overline{d}$.

    (b) Daca $\|\overline{a}\| = 2, \|\overline{b}\| = 3$ si $\|\overline{c}\| = 4$ calculati norma vectorului $\overline{d}$.

30. Versorii $\overline{a}$,$\overline{b}$ si $\overline{c}$ sunt ortogonali doi cate doi, iar $\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$. Dovediti ca $\alpha = \overline{a} \cdot \overline{d}, \beta = \overline{b} \cdot \overline{d}$ si $\gamma = \overline{c} \cdot \overline{d}$ si stabiliti legatura cu exprimarea Fourier a unui vector.