Logică și structuri discrete

Grafuri

Casandra Holotescu

casandra@cs.upt.ro

https://tinyurl.com/lecturesLSD

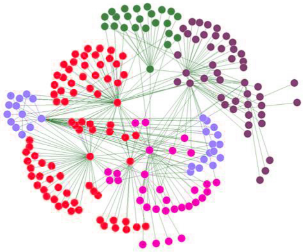
Teoria grafurilor și știința rețelelor

Teoria grafurilor:
studiul matematic al grafurilor
(reprezentând relații între obiecte)

Teoria grafurilor și știința rețelelor

Teoria grafurilor:
studiul matematic al grafurilor
(reprezentând relații între obiecte)

De aici a evoluat
știința rețelelor (network science):
studiul rețelelor complexe:
de calculatoare, telecomunicații,
energie, biologice, sociale...



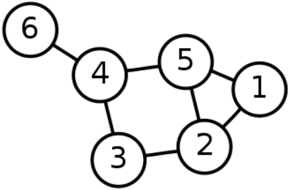
"studiul reprezentărilor ca rețele a fenomenelor fizice, biologice și sociale, ducând la *modele predictive* ale acestor fenomene".
[US National Research Council]

Imagine: `https://en.wikipedia.org/wiki/Social_network`

Grafuri: definiție. Grafuri și relații

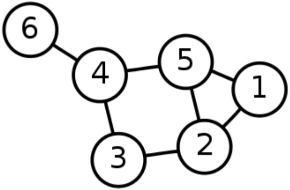
Definiția grafurilor

Informal, un graf reprezintă o mulțime de *obiecte* (*noduri*) între care există anumite *legături* (*muchii* sau *arce*).



Definiția grafurilor

Informal, un graf reprezintă o mulțime de *obiecte* (*noduri*) între care există anumite *legături* (*muchii* sau *arce*).



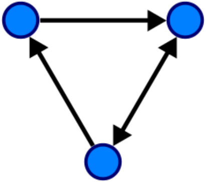
Formal, un graf e o pereche ordonată $G = (V, E)$, unde
V e mulțimea nodurilor și
E (mulțimea muchiilor) e o mulțime de perechi $(u, v) \in V \times V$

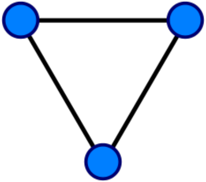
Imagine: `http://en.wikipedia.org/wiki/File:6n_graf.svg`

Grafuri orientate și neorientate

Un graf e *orientat* dacă muchiile sale sunt perechi *ordonate*

Un graf e *neorientat* dacă muchiile sale sunt perechi *neordonate* (nu contează sensul parcurgerii)





Imagini: `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Directed.svg`
`http://en.wikipedia.org/wiki/File:Undirected.svg`

Grafuri și relații

Mulțimea muchiilor unui graf formează o *relație* $E \subseteq V \times V$ pe mulțimea nodurilor.

Grafuri și relații

Mulțimea muchiilor unui graf formează o *relație* $E \subseteq V \times V$ pe mulțimea nodurilor.

Un graf *neorientat* poate fi reprezentat printr-o relație *simetrică*

$$\forall u, v \in V \,.\, (u, v) \in E \rightarrow (v, u) \in E$$

Grafuri și relații

Mulțimea muchiilor unui graf formează o *relație* $E \subseteq V \times V$ pe mulțimea nodurilor.

Un graf *neorientat* poate fi reprezentat printr-o relație *simetrică*

$$\forall u, v \in V \,.\, (u, v) \in E \rightarrow (v, u) \in E$$

Într-un graf *orientat*, E e o relație oarecare
(nu trebuie să fie simetrică, dar poate fi)

Reciproc, *orice relație binară* poate fi văzută ca un *graf orientat*
pentru $(u, v) \in E$ introducem o muchie $u \longrightarrow v$

Drumuri în graf

Drumuri în graf

Un *drum* (o cale) într-un graf e o *secvență de muchii* care leagă o *secvență de noduri* $x_0, \ldots x_n$ cu $n \geq 0$ astfel ca $(x_i, x_{i+1}) \in E$ pentru orice $i < n$.

$$x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow x_{n-1} \longrightarrow x_n$$

Drumuri în graf

Un *drum* (o cale) într-un graf e o *secvență de muchii* care leagă o *secvență de noduri* $x_0, \ldots x_n$ cu $n \geq 0$ astfel ca $(x_i, x_{i+1}) \in E$ pentru orice $i < n$.

$$x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow x_{n-1} \longrightarrow x_n$$

Putem defini un drum atât în grafuri orientate cât și neorientate

Un drum are un *nod inițial* x_0 și un *nod final* x_n.

Lungimea unui drum e numărul de muchii.
în particular, poate fi zero (un nod x_0, fără niciun fel de muchii)

Drumuri și închiderea tranzitivă

Mulțimea tuturor drumurilor de *lungime nenulă* este *închiderea tranzitivă* a relației E:

$$E^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} E^k = E \cup E^2 \cup \dots$$

Drumuri și închiderea tranzitivă

Mulțimea tuturor drumurilor de *lungime nenulă* este *închiderea tranzitivă* a relației E:

$$E^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} E^k = E \cup E^2 \cup \ldots$$

relația E^k ($k \geq 1$) corespunde drumurilor de lungime k

$$E^2 = E \circ E = \{(u, v) \mid \exists w.(u, w) \in E \wedge (w, v) \in E\}$$
$$u \to w \to v$$

$$E^3 = E^2 \circ E = \{(u, v) \mid \exists w.(u, w) \in E \wedge (w, v) \in E^2\} \qquad \text{etc.}$$
$$u \to w \overset{2pasi}{\to} v \text{ adică } u \to w \to w' \to v$$

Cicluri în graf

Un *ciclu* e un drum de *lungime nenulă* în care nodurile de început și sfârșit sunt identice (aceleași).

Adeseori, lucrăm cu *cicluri simple*:
cicluri în care muchiile și nodurile *nu apar de mai multe ori*
(cu excepția nodului inițial care e și cel final).

Grafuri & componente conexe

Grafuri și componente conexe

Un graf e *conex* dacă are un drum *de la orice nod la orice nod*.
(definiție generală, depinde de noțiunea de *drum*
– în graf orientat sau neorientat)

Grafuri și componente conexe

Un graf e *conex* dacă are un drum *de la orice nod la orice nod*.
(definiție generală, depinde de noțiunea de *drum*
– în graf orientat sau neorientat)

Pentru grafuri *neorientate*:

O *componentă conexă* e un subgraf conex maximal.
deci are un drum între oricare două noduri
nu s-ar mai putea adăuga alte noduri păstrând-o conexă

Grafuri și componente conexe

Un graf e *conex* dacă are un drum *de la orice nod la orice nod*.
(definiție generală, depinde de noțiunea de *drum*
– în graf orientat sau neorientat)

Pentru grafuri *neorientate*:

O *componentă conexă* e un subgraf conex maximal.
deci are un drum între oricare două noduri
nu s-ar mai putea adăuga alte noduri păstrând-o conexă

Un graf cu n noduri și e muchii are $\geq n - e$ componente conexe.

Demonstrăm prin inducție după e.
$e = 0 \Rightarrow$ fiecare nod e o componentă conexă.
$e > 1$: ștergem o muchie $\Rightarrow$ obținem cel mult o componentă în plus

Grafuri orientate: slab conexe și tare conexe

Un graf *orientat* e *slab conex* dacă are un drum *neorientat* de la orice nod la orice nod,

Grafuri orientate: slab conexe și tare conexe

Un graf *orientat* e *slab conex* dacă are un drum *neorientat* de la orice nod la orice nod, și *tare conex* dacă are un drum *orientat* de la orice nod la orice nod.

Grafuri orientate: slab conexe și tare conexe

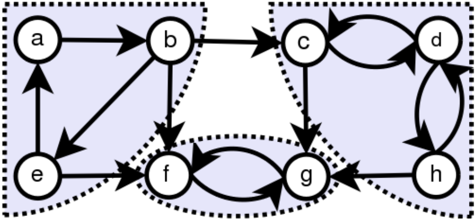
Un graf *orientat* e *slab conex* dacă are un drum *neorientat* de la orice nod la orice nod, și *tare conex* dacă are un drum *orientat* de la orice nod la orice nod.

O *componentă tare conexă* e un *subgraf* tare conex maximal.

Componentele tare conexe sunt *disjuncte*:

$R(u, v) : drum(u, v) \land drum(v, u)$ e o *relație de echivalență*, și componentele tare conexe sunt *clase de echivalență*.

Graful orientat din figură e *slab* conex. Are trei componente *tare* conexe.



Imagine: `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Scc.png`

Determinarea componentelor conexe (graf neorientat)

Componentele conexe sunt *clase de echivalență*

Determinarea componentelor conexe (graf neorientat)

Componentele conexe sunt *clase de echivalență*
orice nod e în componenta proprie *reflexivitate*

Determinarea componentelor conexe (graf neorientat)

Componentele conexe sunt *clase de echivalență*

orice nod e în componenta proprie *reflexivitate*

un drum de la u la v e și drum de la v la u *simetrie*

Determinarea componentelor conexe (graf neorientat)

Componentele conexe sunt *clase de echivalență*

orice nod e în componenta proprie — *reflexivitate*

un drum de la u la v e și drum de la v la u — *simetrie*

$drum(u, v) \wedge drum(v, w) \rightarrow drum(u, w)$ — *tranzitivitate*

Determinarea componentelor conexe (graf neorientat)

Componentele conexe sunt *clase de echivalență*

orice nod e în componenta proprie — *reflexivitate*

un drum de la u la v e și drum de la v la u — *simetrie*

$drum(u, v) \wedge drum(v, w) \rightarrow drum(u, w)$ — *tranzitivitate*

Determinăm componentele conexe parcurgând muchiile grafului:

Determinarea componentelor conexe (graf neorientat)

Componentele conexe sunt *clase de echivalență*

orice nod e în componenta proprie — *reflexivitate*

un drum de la u la v e și drum de la v la u — *simetrie*

$drum(u, v) \wedge drum(v, w) \rightarrow drum(u, w)$ — *tranzitivitate*

Determinăm componentele conexe parcurgând muchiile grafului:

inițial, fiecare nod e în propria componentă

Determinarea componentelor conexe (graf neorientat)

Componentele conexe sunt *clase de echivalență*

- orice nod e în componenta proprie — *reflexivitate*
- un drum de la u la v e și drum de la v la u — *simetrie*
- $drum(u, v) \wedge drum(v, w) \rightarrow drum(u, w)$ — *tranzitivitate*

Determinăm componentele conexe parcurgând muchiile grafului:

- inițial, fiecare nod e în propria componentă
- pentru o muchie (u, v) *unim* componentele lui u și v

Drumuri Euleriene (în grafuri neorientate)

Gradul unui nod (într-un graf neorientat) e numărul de muchii care ating nodul.

Un *drum eulerian* e un *drum* care conține *toate* muchiile unui graf exact o dată.

Un *ciclu eulerian* e un *ciclu* care conține *toate* muchiile unui graf exact o dată.

Drumuri Euleriene (în grafuri neorientate)

Gradul unui nod (într-un graf neorientat) e numărul de muchii care ating nodul.

Un *drum eulerian* e un *drum* care conține *toate* muchiile unui graf exact o dată.

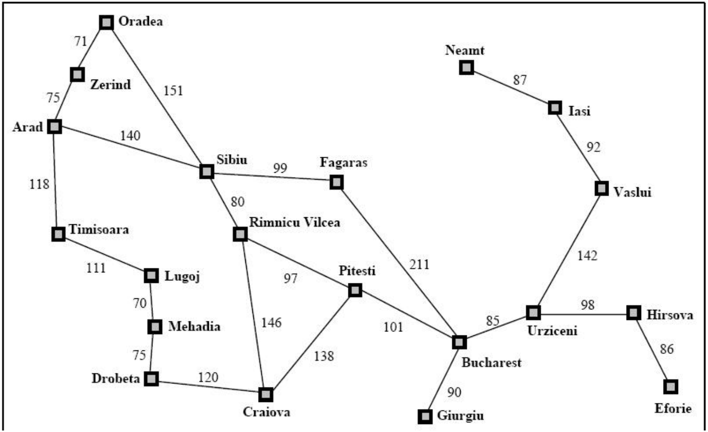
Un *ciclu eulerian* e un *ciclu* care conține *toate* muchiile unui graf exact o dată.

Un graf conex neorientat are un *ciclu* eulerian dacă și numai dacă *toate nodurile au grad par*.

Un graf conex neorientat are un *drum* (dar nu și un ciclu) eulerian dacă și numai dacă *exact două noduri au grad impar*.
(primul și ultimul nod din drum)

Exemple: hărțile ca și grafuri ponderate

Graf ponderat: fiecare muchie are asociată o valoare numerică numită *cost* (poate reprezenta lungime, capacitate, etc.)



Hartă (inexactă) din Russell & Norvig, Introduction to AI

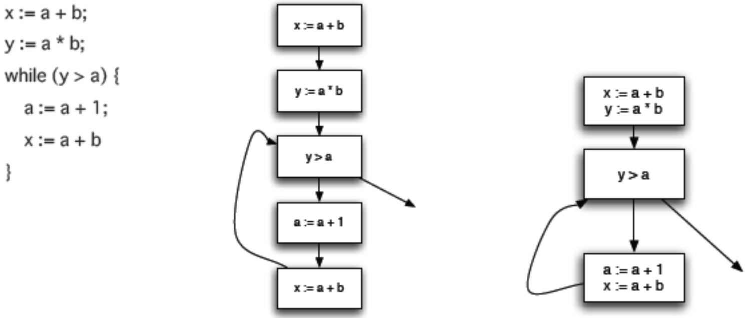
Exemple: Graful fluxului de control (control flow graph)

reprezentarea programelor în compilatoare, analizoare de cod, etc.

nodurile: *instrucțiuni*

sau *secvențe liniare* de instrucțiuni (*basic blocks*)

muchiile: descriu secvențierea instrucțiunilor (*fluxul de control*)



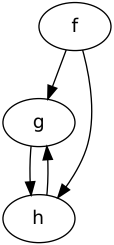
http://vinaytech.wordpress.com/2008/10/04/abstract-syntax-tree/

Exemple: Graful de apel al funcțiilor (call graph)

Introducem o muchie $f \longrightarrow g$ dacă funcția f apelează pe g

$\Rightarrow$ graful de apel e ciclic dacă există funcții (direct sau indirect) recursive

```
let rec g n =
  if n = 0 then 0 else 1 + h (n-1)
and h n =
  if n = 0 then 1 else 2 * g (n-1)
let f n = g n + h n
```



Reprezentare și parcurgeri

Reprezentarea grafurilor

Dacă identificăm nodurile prin numere (consecutive), putem reprezenta graful ca *matrice de adiacență* pătratică

$M[i,j] = 1$ dacă *există* muchie de la i la j

$M[i,j] = 0$ dacă *nu există* muchie de la i la j

Reprezentarea grafurilor

Dacă identificăm nodurile prin numere (consecutive), putem reprezenta graful ca *matrice de adiacență* pătratică

M[i,j] = 1 dacă *există* muchie de la i la j

M[i,j] = 0 dacă *nu există* muchie de la i la j

sau M[i,j] poate conține lungimea/costul muchiei (graf ponderat)

Reprezentarea grafurilor

Dacă identificăm nodurile prin numere (consecutive), putem reprezenta graful ca *matrice de adiacență* pătratică

M[i,j] = 1 dacă *există* muchie de la i la j

M[i,j] = 0 dacă *nu există* muchie de la i la j

sau M[i,j] poate conține lungimea/costul muchiei (graf ponderat)

Reprezentarea prin *liste de adiacență*

pentru fiecare nod u: lista/mulțimea nodurilor v cu muchii (u, v)

putem păstra informația într-un *dicționar*:

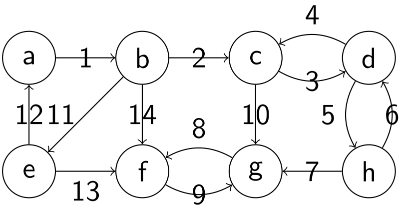
nod = cheie

valoare = lista/mulțimea nodurilor adiacente

Parcurgerea în adâncime (depth-first)

e o traversare în *preordine*
după vizitarea nodului se parcurg (recursiv)
toți vecinii (dacă nu au fost vizitați încă)
ca și cum vecinii ar fi introduși într-o *stivă*

Fie graful de mai jos, cu listele de adiacență ordonate după litere
Ordinea muchiilor parcurse de la *a* în adâncime e cea indicată:

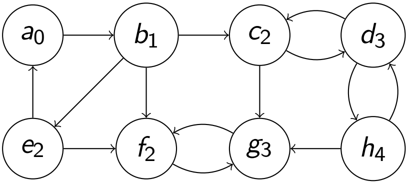


O implementare: funcție recursivă, acumulând mulțimea nodurilor vizitate

Parcurgerea prin cuprindere (breadth-first)

vizitează nodurile în ordinea distanței minime de nodul de plecare
(în "valuri" care se depărtează de la nodul de pornire)
nodurile încă nevizitate se pun într-o *coadă*

În figura de mai jos, se indică distanța minimă de la nodul a
(noduri cu distanță mai mare sunt parcurse mai târziu)



O implementare: funcție recursivă, acumulând:
mulțimea tuturor nodurilor vizitate
frontiera: mulțimea nodurilor noi atinse în runda curentă