1 6. FORME LINIARE. FORME BILINIARE. FORME PATRATICE.

1.1 A. Teorie

Formele liniare sunt aplicatii definite pe spatii vectoriale peste un corp K avand codomeniul corpul K. Formele liniare sunt de fapt functii polinomiale de gradul intai omogene, iar formele biliniare si cele patratice sunt functii polinomiale de gradul al doilea omogene.

Peste tot in aceasta sectiune V este un spatiu vectorial peste corpul $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, iar $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este o baza in acest spatiu.

1.1.1 6.1. Forme liniare

Cele mai importante aplicatii ingineresti ale formelor liniare sunt in tehnicile de optimizare ale unor procese.

Reamintim ca, deoarece $(K, +)$ este un grup abelian, K este si el un spatiu vectorial peste corpul K, operatia externa de inmultire a scalarilor din K cu vectori din K fiind chiar operatia (interna) de inmultire din corpul K. Reamintim si faptul ca multimea $\mathcal{L}(V, K)$ este un spatiu vectorial peste corpul K (adunarea vectorilor $f, g \in \mathcal{L}(V, K)$ fiind definita prin $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, iar inmultirea scalarului $\alpha \in K$ cu vectorul f fiind definita prin $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$).

Definitia 6.1.1. *O aplicatie liniara $f : V \to K$ se numeste **forma liniara** a spatiului V (sau forma liniara pe spatiul V). Notam spatiul vectorial al formelor (adica $\mathcal{L}(V, K)$) cu V^* si il numim **spatiul dual** al spatiului vectorial V.*

Reamintim ca forma $f \in V^*$ este complet determinata daca cunoastem valorile $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n) \in K$, deoarece atunci pentru orice $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$ avem

$$f(v) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_n f(e_n).$$

*Scalarii $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n) \in K$ se numesc **coeficientii formei** f in baza B. Cum dimensiunea spatiului K/K* este 1 (deoarece sistemul $\{1\} \subset K$ este o baza pentru spatiul vectorial K/K) rezulta ca matricea unei forme relativ la o pereche de baze este o matrice linie cu n coloane si ca

$$V^* \simeq K^{1\times n}, \text{ iar } \dim V^* = n.$$

Definitia 6.1.2. B*aza duala* *a bazei B.* Construim, pornind de la baza B formele $e_i^* \in V^*$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ prin

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ daca } i = j \\ 0 \text{ daca } i \neq j \end{cases},$$

adica $e_i^*\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) := x_i$, pentru orice $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$. Sa aratam ca $B^* := \{e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*\}$ este o baza pentru V^*. Daca

$$x_1 e_1^* + x_2 e_2^* + \cdots + x_n e_n^* = \theta_{V^*}$$

rezulta ca $(x_1 e_1^* + x_2 e_2^* + \cdots + x_n e_n^*)(e_i) = \theta_{V^*}(e_i) = 0$, deci $x_i = 0$ pentru $i \in \{1, 2, ..., n\}$, adica B^* este un sistem de vectori liniar independent maximal.

Definitia 6.1.2. *Baza B^* se numeste **baza duala** a bazei B.*

Daca $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$ atunci $e_j^*(v) = x_j$, pentru $j \in \{1, ..., n\}$ iar daca $f \in V^*$ $f = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i^*$ atunci $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i^*(e_j) = y_j$. Am obtinut astfel formula de reprezentare a unei forme din urmatoarea propozitie.

Propozitia 6.1.1. *Daca $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este o baza in spatiul V, iar $B^* := \{e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*\}$ este baza duala atunci coordonatele vectorului $f \in V^*$ in baza B^* sunt $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)$, adica*

$$f = f(e_1)\, e_1^* + f(e_2)\, e_2^* + ... + f(e_n)\, e_n^*.$$

Avem urmatoarea formula de calcul a matricei de trecere dintre doua baze duale.

Propozitia 6.1.2. *Daca B, B_1 sunt doua baze in V atunci*

$$T_{B^* B_1^*} = \left(T_{BB_1}^T\right)^{-1}.$$

Exemplul 6.1.1. Fie $V := \mathbb{R}^2$ spatiul aritmetic bidimensional, $B_c = \{e_1, e_2\}$ baza canonica a acestuia si $T_{B^* B_c^*} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matricea formei $f \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$ in perechea de baze duale B^*, B_c^*. Sa determinam baza B si coordonatele formei f in baza B_c^* si baza B^*, stiind ca $f(x, y) = 2x + 3y$.

Din propozitia 6.1.2 avem $T_{B^* B_c^*} = \left(T_{BB_c}^T\right)^{-1}$; dar $\left(T_{BB_c}^T\right)^{-1} = \left(T_{BB_c}^{-1}\right)^T = T_{B_c B}^T$, deci $T_{B_c B} = T_{B^* B_c^*}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Am obtinut baza $B = \{v_1 = (1, -1), v_2 = (0, 1)\}$.

Din propozitia 6.1.1 avem $f = f(e_1)\, e_1^* + f(e_2)\, e_2^* = 2e_1^* + 3e_2^*$, deci coordonatele vectorului f in baza B_c^* sunt $2, 3$.

Deoarece

$$f_{B^*} = T_{B^* B_c^*} \cdot f_{B_c^*} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

rezulta ca $-1, 3$ sunt coordonatele vectorului f in baza B^*.

1.1.2

1.1.3 6.2. Forme biliniare

Formele biliniare sunt instrumente esentiale pentru definirea formelor patratice si pentru constructia spatiilor euclidiene - subiecte care vor fi studiate in continuare.

Definitia 6.2.1. ***Definitia formelor biliniare.*** *O aplicatie* $\varphi : V \times V \to K$ *se numeste* ***forma biliniara*** *(a spatiului* V*) daca ea este liniara in ambele variabile, adica*

(i) $\varphi(\alpha u + \beta v, w) = \alpha\varphi(u, w) + \beta\varphi(v, w)$

(ii) $\varphi(u, \alpha v + \beta w) = \alpha\varphi(u, v) + \beta\varphi(u, w)$

oricare ar fi $u, v, w \in V$ *si oricare ar fi* $\alpha, \beta \in K$. Notam cu $\mathcal{B}(V)$ multimea formelor biliniare ale spatiului V. Daca $\varphi \in \mathcal{B}(V)$ si

(iii) $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$

pentru orice $u, v \in V$ *spunem ca* φ *este o* ***forma biliniara simetrica***. Notam cu $\mathcal{B}_s(V)$ multimea formelor biliniare simetrice ale spatiului V.

Se verifica imediat urmatoarea caracterizare a formelor biliniare. Reamintim ca $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este o baza spatiul V/K.

Propozitia 6.2.1. ***Caracterizara formelor biliniare.*** *O aplicatie* $\varphi : V \times V \to K$ *este forma biliniara daca si numai daca pentru orice* $m, p \in \mathbb{N}^*$, *pentru orice* $v_1, ..., v_m, w_1 ..., w_p \in V$ *si pentru orice* $x_1, ..., x_m, y_1 ..., y_p \in K$ *avem* $\varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i v_i, \sum\limits_{j=1}^{p} y_j w_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{p} x_i y_j \varphi(v_i, w_j)$.

Observatia 6.2.1. Daca $\varphi \in \mathcal{B}(V)$ atunci

- φ este complet determinata daca cunoastem scalarii $a_{ij} := \varphi(e_i, e_j)$, pentru $i, j \in \{1, ..., n\}$ (intelegand prin aceasta ca expresia analitica a formei φ este determinata complet). Intr-adevar, daca $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, w = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j \in V$, atunci folosind biliniaritatea aplicatiei φ avem $\varphi(v, w) = \varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$. Matriceal avem
$$(\varphi(v, w)) = v_B^T \varphi_B w_B,$$
unde $\varphi_B := (\varphi(e_i, e_j))_{i,j=\overline{1,n}}$.

- φ este omogena, cu gradul de omogenitate doi, deoarece $\varphi(tv, tw) = t^2\varphi(v, w)$ pentru orice $v, w \in V$ *si pentru orice* $t \in K$.

Definitia 6.2.2. ***Matricea unei forme biliniare***. *Fie $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o baza in V/K si forma $\varphi \in \mathcal{B}(V)$. Matricea $\varphi_B := (\varphi(e_i, e_j))_{i,j=\overline{1,n}} \in K^{n\times n}$ se numeste **matricea formei biliniare** φ in baza B.*

Observatia 6.2.2. Forma biliniara φ este simetrica daca si numai daca matricea ei intr-o baza oarecare este simetrica.

Exemplul 6.2.1. Fie $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Atunci $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ daca si numai daca exista o constanta reala a astfel incat $\varphi(x, y) = axy$ petru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Intr-adevar, daca $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ si $a := \varphi(1, 1)$ atunci, cum φ este liniara in ambele variabile avem $\varphi(x, y) = x\varphi(1, y) = xy\varphi(1, 1) = axy$.

Invers, daca $\varphi(x, y) := axy$ este imediata liniaritatea in ambele variabile pentru functia φ.

Exemplul 6.2.2. Fie $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi((x, y), (x', y')) := xx' + 2xy' - x'y + 3yy'$. Atunci $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ iar $\varphi_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ unde B_c este baza canonica din $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$. Expresia analitica exprimata matriceal este

$$(\varphi((x, y), (x', y'))) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Avand matricea unei forme intr-o baza, putem sa construim matricea acestei forme intr-o baza noua folosind matricea de trecere.

Propozitia 6.2.2. ***Schimbarea bazei.*** *Daca B, B' sunt doua baze in V/K, $\varphi \in \mathcal{B}(V)$ si $T_{BB'}$ este matricea de trecere de la baza B la baza B' atunci*

$$\varphi_{B'} = T^T_{BB'} \cdot \varphi_B \cdot T_{BB'}.$$

Exemplul 6.2.3. Fie $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ astfel ca $\varphi_{B_c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix}$, unde B_c este baza canonica din $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$. Sa determinam

1. $a \in \mathbb{R}$ astfel ca forma biliniara φ sa fie simetrica;
2. expresia analitica a formei biliniare φ;
3. matricea formei biliniare φ in baza $B = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (1, 0)\}$.

Rezolvare.

1. Conform observatiei 6.2.2 este suficient sa impunem ca φ_{B_c} sa fie simetrica. Deci $a = 1$.
2. Folosind formula matriceala de la observatia 6.2.1, daca $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, avem $(\varphi((x, y), (x', y'))) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix} = (yy')$. Prin urmare expresia analitica a formei biliniare φ este data de $\varphi((x, y), (x', y')) := yy'$.

3. Conform propozitiei precedente avem $\varphi_B = T_{B_cB}^T \cdot \varphi_{B_c} \cdot T_{B_cB} = T_{B_cB}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.4 6.3. Forme patratice

Formele patratice sunt folosite intr-o multime de tehnici statistice de analiza a unor fenomene concrete. De asemenea sunt utilizate in diverse probleme de optimizare, in special pentru a decide natura punctelor stationare. In esenta formele patratice sunt functii omogene de gradul al doilea.

Definitia 6.3.1. ***Definitia formei patratice si a polarei sale.*** *O aplicatie $f : V \to K$ se numeste* ***forma patratica*** *(a spatiului vectorial V/K) -scriem $f \in \mathcal{Q}(V)-$ daca exista o forma biliniara simetrica $\varphi : V \times V \to K$ si $f(v) = \varphi(v, v)$ oricare ar fi $v \in V$. In acest caz mai spunem ca f este* ***forma patratica asociata*** *formei biliniare simetrice φ, iar φ este* ***polara formei patratice*** *f. Daca B este o baza in spatiul V/K matricea φ_B se numeste* ***matricea formei patratice*** *f si se noteaza f_B.*

Exemplul 6.3.1. Daca φ este forma biliniara de la exemplul 6.2.3 atunci forma patratica asociata ei este $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, cu expresia analitica data de $f(x, y) := \varphi((x, y), (x, y)) = y^2$.

Expresia "polara formei patratice f" isi gaseste justificarea logica in urmatoarea propozitie: unei forme patratice ii corespunde o unica forma biliniara simetrica care este polara ei.

Propozitia 6.3.1. Constructia polarei unei forme patratice. *Fie $f : V \to K$ o formă pătratică. Atunci $\varphi : V \times V \to K$,*

$$\varphi(v, w) := \frac{1}{2}\left[f(v + w) - f(v) - f(w)\right]$$

defineste polara formei patratice f.

Observatia 6.3.1. Expresia analitica a unei forme patratice. Din observatia 6.2.1 deducem ca daca $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este o baza in V/K atunci forma patratica $f \in \mathcal{Q}(V)$ este are reprezentarea analitica

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

unde $a_{ij} = a_{ji}$, pentru orice $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Cu alte cuvinte, **aplicatia $f : V \to K$ este o forma patratica daca si numai daca exista scalarii $a_{ij} \in K$, cu $a_{ij} = a_{ji}$, pentru orice $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel incat daca $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$ atunci**

$$f(v) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... a_{nn}x_n^2 + 2(a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + ... a_{1n}x_1x_n + ... + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n)$$

Aici $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$, $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, unde φ este polara formei patratice f. Matriceal avem

$$(f(v)) = v_B^T f_B v_B,$$

unde $f_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Observatia 6.3.2. Tehnica dedublarii. Sa presupunem ca forma patratica $f \in \mathcal{Q}(V)$ are reprezentarea analitica $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ in baza $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Atunci f are matricea $f_B = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ iar polara sa φ are aceeasi matrice, i.e. $\varphi_B = f_B$. Prin urmare, cum $(\varphi(v, w)) = v_B^T \varphi_B w_B$, oricare ar fi $v, w \in V$, rezulta imediat ca expresia analitica a formei biliniare φ este data de

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Aceasta *metoda de constructie a expresiei analitice a polarei din expresia analitica a formei patratice se numeste* **dedublare**.

Exemplul 6.3.2. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := x^2 - 2xy + 3y^2$.

1. Sa se determine polara formei patratice f.

2. Sa se determine matricea f_B, unde $B = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (-1, 1)\}$.

3. Fie $g_1, g_2 \in (\mathbb{R}^2)^*$. Sa se arate ca $h \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, unde $h(x, y) := f(g_1(x, y), g_2(x, y))$ si sa se determine matricea h_{B_c} unde B_c este baza canonica din $\mathbb{R}^2$.

Rezolvare. 1. Folosim procedeul dedublarii. Fie $B_c = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ baza canonica din $\mathbb{R}^2$ si φ polara formei patratice f. Atunci $\varphi_{B_c} = f_{B_c}$ si $a_{11} = \varphi(e_1, e_1) = 1$ (coeficientul lui x^2), $a_{12} = \varphi(e_1, e_2) = \varphi(e_2, e_1) = \frac{-2}{2} = -1$ (jumatate din coeficientul lui xy), iar $a_{22} = \varphi(e_2, e_2) = 3$. Prin urmare $\varphi_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Expresia analitica a formei biliniare simetrice φ se obtine imediat din egalitatea matriceala $(\varphi(v, w)) = v_B^T \varphi_B w_B$: daca $v = (x, y), w = (x', y')$ atunci $(\varphi(v, w)) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (xx' - xy' - x'y + 3yy')$. De aceea $\varphi((x, y), (x', y')) = xx' - xy' - x'y + 3yy'$.

2. Din propozitia 6.2.2 avem $f_B = \varphi_B = T_{B_cB}^T \varphi_{B_c} T_{B_cB} = T_{B_cB}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Deoarece g_1, g_2 sunt doua forme liniare rezulta ca exista constantele $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \in \mathbb{R}$ astfel ca $g_1(x, y) := b_{11}x + b_{12}y$ si $g_2(x, y) := b_{21}x + b_{22}y$. Atunci

$h(x,y) = f(b_{11}x + b_{12}y, b_{21}x + b_{22}y) = (b_{11}x + b_{12}y)^2 - 2(b_{11}x + b_{12}y)(b_{21}x + b_{22}y) +$
$3(b_{21}x + b_{22}y)^2 = \left(b_{11}^2 - 2b_{11}b_{21} + 3b_{21}^2\right)x^2 + 2(b_{11}b_{12} - b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} + 3b_{21}b_{22})xy +$
$\left(b_{12}^2 - 2b_{12}b_{22} + 3b_{22}^2\right)y^2$ este expresia analitica a unei forme patratice iar
matricea sa in baza canonica este $h_{B_c} = \left(\begin{array}{cc} b_{11}^2 - 2b_{11}b_{21} + 3b_{21}^2 & b_{11}b_{12} - b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} + 3 \\ b_{11}b_{12} - b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} + 3b_{21}b_{22} & b_{12}^2 - 2b_{12}b_{22} + 3b_{22}^2 \end{array} \right.$

Am vazut ca daca $f \in \mathcal{Q}(V)$ atunci $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} a_{ij}x_i x_j$, pentru orice vector $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$. Cazul in care cea de-a doua suma din aceasta expresie analitica este nula pentru orice vector din V, deci daca $a_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$, este esential in aplicatii.

Definitia 6.3.2. *Daca matricea formei $f \in \mathcal{Q}(V)$ in baza $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ are forma diagonala atunci expresia analitica a formei f (adica $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$) se numeste **forma canonica a formei patratice** f.*

Se pune *problema existentei unei forme canonice pentru o forma patratica data* f, deci a unei baze in care f are forma canonica. Raspunsul este afirmativ: orice forma patratica admite o forma canonica, iar metoda lui Gauss ne indica si o tehnica de depistare a ei.

Teorema 6.3.1. **Determinarea formei canonice prin metoda Gauss.** *Fie $f \in \mathcal{Q}(V)$ o forma patratica nenula. Atunci exista o baza in care f are forma canonica. Algoritmul de constructie este urmatorul. Presupunem ca, data fiind baza $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, f are reprezentarea analitica $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} a_{ij}x_i x_j$ si presupunem ca exista $i \neq j$ astfel ca $a_{ij} \neq 0$. Avem doua cazuri posibile:*

1. *daca exista $i \in \{1, ..., n\}$ si $a_{ii} \neq 0$ grupam toti termenii care contin variabila x_i si formam un patrat perfect cu acestia.*

2. *Daca $a_{ii} = 0$ pentru orice $i \in \{1, ..., n\}$ atunci reducem problema la cazul* 1. *astfel: deoarece exista $a_{ij} \neq 0$ cu $i \neq j$ schimbam variabilele punand $x_i = x_i' + x_j'$ si $x_j = x_i' - x_j'$* (in acest caz $x_i x_j = x_i'^2 - x_j'^2$ si se poate aplica cazul 1.).

Aplicand succesiv algoritmul descris ajungem in cele din urma la o suma de patrate, i.e. $f(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii}y_i^2$, unde $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, adica la forma canonica. Legatura dintre vechile coordonate si noile coordonate ale vectorului arbitrar v

ne da matricea de trecere de la baza B la baza B_o in care f are forma canonica, deoarece stim ca $v_B = T_{BB_o} v_{B_o}$.

Exemplul 6.3.3. Fie $f \in \mathcal{Q}\left(\mathbb{R}^3\right)$, $f(x, y, z) = xy + yz + zx$. Sa se reduca la o forma canonica si sa se indice o baza in care are forma gasita.

Rezolvare. Aplicam metoda lui Gauss. Daca $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ este baza canonica din $\mathbb{R}^3$ matricea formei in aceasta baza este $f_{B_c} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Trebuie sa aplicam cazul 2 (deoarece $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$). Cum $a_{12} \neq 0$ luam $x = x_1 + y_1, y = x_1 - y_1, z = z_1$. Atunci $f(x, y, z) = x_1^2 - y_1^2 + 2x_1 z_1$ si aplicam cazul 1; formam un patrat perfect cu termenii care-l contin pe x_1 si obtinem forma canonica $f(x, y, z) = (x_1 + z_1)^2 - y_1^2 - z_1^2 = x_2^2 - y_2^2 - z_2^2$, unde $x_2 = x_1 + z_1, y_2 = y_1$ si $z_2 = z_1$. Cum $x_1 = \frac{x+y}{2}, y_1 = \frac{x-y}{2}, z_1 = z$, obtinem $x_2 = \frac{x+y+2z}{2}, y_2 = \frac{x-y}{2}, z_2 = z$. Matriceal, daca $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ este baza in care $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 = x_2 v_1 + y_2 v_2 + z_2 v_3$, avem

$$v_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T_{BB_c} \cdot v_{B_c}.$$

Deci matricea de trecere de la baza B la baza B_c este $T_{BB_c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, iar $T_{B_c B} = T_{BB_c}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Prin urmare baza in care f are forma canonica $f(x, y, z) = x_2^2 - y_2^2 - z_2^2$ este $B = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, -1, 0), v_3 = (-1, -1, 1)\}$. Daca dorim sa verificam rezultatul, tinem seama de faptul ca, pe de o parte $f_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ si, pe de alta parte, $f_B = T_{BB_c}^T f_{B_c} T_{BB_c}$. Dar $T_{B_c B}^T f_{B_c} T_{B_c B} =$
$T_{BB_c}^T \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, ceea ce trebuia demonstrat.

O alta tehnica de aducere la forma canonica este furnizata de urmatoarea teorema. Din pacate ea nu se poate aplica in orice caz.

Teorema 6.3.2. Determinarea formei canonice prin metoda Jacobi. *Fie $f \in \mathcal{Q}(V)$ o forma patratica a carei matrice in baza $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$*

este

$$f_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Daca determinantii construiti dupa regula nord-vest

$$\Delta_1 := |a_{11}|, \Delta_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \cdots, \Delta_n := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sunt nenuli, atunci exista o baza $B_o = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *in care* f *are forma canonica*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2.$$

In diferite aplicatii este important de stiut daca o forma patratica isi conserva semnul. Teorema de inertie si metoda lui Gauss dau informatii despre aceasta problema.

Teorema 6.3.3. Teorema de inertie. *Fie* V/K *un spatiu vectorial si* $f : V \to K$ *o forma patratica. Numarul termenilor pozitivi (si numarul termenilor negativi) din forma canonica a lui* f *este acelasi, indiferent de metoda prin care forma patratica a fost adusa la forma canonica.*

Definitia 6.3.3. *Fie* $f \in Q(V)$, *unde* $V/\mathbb{R}$ *este un spatiu* n*-dimensional. Daca intr-o forma canonica a formei patratice* f *numarul de termeni pozitivi este* p, *numarul de termeni negativi este* q, *iar* $o = n - p - q$ *(numarul de coeficienti nuli), vom numi tripletul* (p, q, o) ***signatura formei*** f. *Daca*

1. $f(v) > 0, \forall v \in V^*$ *(adica* $n = p$*) spunem ca* f *este* ***pozitiv definita****;*

2. $f(v) < 0, \forall v \in V^*$ *(adica* $n = q$*) spunem ca* f *este* **negativ definita;**

3. $f(v) \geq 0, \forall v \in V^*$ *si exista* $w \in V^*$ *astfel ca* $f(w) = 0$ *spunem ca* f *este* ***semidefinita pozitiv****;*

4. $f(v) \leq 0, \forall v \in V^*$ *si exista* $w \in V^*$ *astfel ca* $f(w) = 0$ *spunem ca* f *este* ***semidefinita negativ****;*

5. $\exists v, w \in V$ *astfel ca* $f(v) < 0$ *si* $f(w) > 0$ *spunem ca* f *este* ***nedefinita****.*

1.2 B. Probleme rezolvate

1.3 PROBLEME REZOLVATE

1. Forma liniară f a spaţiului $\mathbb{R}^4/\mathbb{R}$ are, în baza canonică, matricea $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Să se determine dimensiunea nucleului acestei forme.
Soluţia 1: Din matrice ştim că $f(1,0,0,0)=1$, $f(0,1,0,0)=-2$, $f(0,0,1,0)=3$ şi $f(0,0,0,1)=-4$, deci $f(x,y,z,t)=x-2y+3z-4t$. $(x,y,z,t)\in\ker f \Leftrightarrow x-2y+3z-4t=0$ care este un ,,sistem" cu o ecuaţie şi 4 necunoscute. Rangul matricei sistemului este 1, deci vom avea 3 necunoscute secundare, prin urmare spaţiul soluţiilor, $\ker f$, va avea dimensiunea 3.
Soluţia 2: Cum f nu este aplicaţia nulă, $\dim Im\, f=1$, prin urmare $\dim\ker f=\dim\mathbb{R}^4-\dim Im\, f=4-1=3$.

2. În spaţiul $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ considerăm forma liniară $f\in\left(\mathbb{R}^2\right)^*$ a cărei matrice în baza $B=\{v_1=(1,-1)\,,v_2=(0,2)\}$ este $\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$. Se cere:

   (a) expresia analitică a formei f;
   (b) dimensiunea nucleului formei f;
   (c) duala bazei B şi exprimarea formei f în această bază.
   Soluţie

      i. Din matrice ştim $f(1,-1)=2$ şi $f(0,2)=4$. Atunci $f(0,1)=\frac{1}{2}f(0,2)=2$, apoi $f(1,0)=f(1,-1)+f(0,1)=4$. În fine, $f(x,y)=xf(1,0)+yf(0,1)=4x+2y$.
      ii. $(x,y)\in\ker f\Leftrightarrow 4x+2y=0\Leftrightarrow y=-2x\Leftrightarrow(x,y)\in Span\{(1,-2)\}$, deci $\dim\ker f=1$.

      iii. Fie $B'=\{f_1,f_2\}$ baza duală a bazei $B=\{v_1,v_2\}$. Atunci f_1 este forma liniară care satisface $f_1(v_1)=1$ şi $f_1(v_2)=0$, iar f_2 este forma liniară care satisface $f_2(v_1)=0$ şi $f_2(v_2)=1$. Putem proceda ca mai sus, sau, echivalent, exprima vectorul arbitrar (x,y) în baza B: $(x,y)=x\cdot(1,-1)+\frac{x+y}{2}\cdot(0,2)$, apoi $f_1(x,y)=x\cdot f_1(1,-1)+\frac{x+y}{2}\cdot f_1(0,2)=x$, iar $f_2(x,y)=x\cdot f_2(1,-1)+\frac{x+y}{2}\cdot f_2(0,2)=\frac{x+y}{2}$.
      Este uşor de văzut că $f(x,y)=2f_1(x,y)+4f_2(x,y)$, deci matricea lui f în baza duală a lui B coincide cu matricea lui f în baza B.

3. Forma $\varphi\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^3\right)$ este definită prin $\varphi\left((x_1,x_2,x_3)\,,(y_1,y_2,y_3)\right)=x_1y_1+2x_2y_2+4x_3y_3-5x_3y_1-2x_2y_3$. Să se determine matricea sa în
a. baza canonică;
b. baza $\{(0,1,1)\,,(1,0,1)\,,(1,1,0)\}$.
Soluţie: Matricea formei biliniare φ în baza $B=\{v_1,v_2,v_3\}$, notată $[\varphi]_B$, are pe linia i coloana j elementul $\varphi(v_i,v_j)$, $i,j\in\{1,2,3\}$.
a. Avem $\varphi\big((1,0,0),(1,0,0)\big)=1$, $\varphi\big((1,0,0),(0,1,0)\big)=0$, $\varphi\big((1,0,0),(0,0,1)\big)=$

0, $\varphi\big((0,1,0),(1,0,0)\big) = 0$, $\varphi\big((0,1,0),(0,1,0)\big) = 2$, $\varphi\big((0,1,0),(0,0,1)\big) = -2$, $\varphi\big((0,0,1),(1,0,0)\big) = -5$, $\varphi\big((0,0,1),(0,1,0)\big) = 0$, $\varphi\big((0,0,1),(0,0,1)\big) = 4$, deci $[\varphi]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Observaţi că elementul a_{ij} al matricei lui φ <u>în baza canonică</u> este tocmai coeficientul lui $x_i y_j$, ceea ce permite scrierea directă a matricei lui φ în această bază.

b. Avem $\varphi\big((0,1,1),(0,1,1)\big) = 4$, $\varphi\big((0,1,1),(1,0,1)\big) = -3$, $\varphi\big((0,1,1),(1,1,0)\big) = -3$, $\varphi\big((1,0,1),(0,1,1)\big) = 4$, $\varphi\big((1,0,1),(1,0,1)\big) = 0$, $\varphi\big((1,0,1),(1,1,0)\big) = -4$, $\varphi\big((1,1,0),(0,1,1)\big) = 0$, $\varphi\big((1,1,0),(1,0,1)\big) = -1$, $\varphi\big((1,1,0),(1,1,0)\big) = 3$, deci $[\varphi]_B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Observaţie: Odată calculată matricea lui φ într-o bază B, matricea ei într-o a doua bază, B', poate fi determinată şi cu formula $[\varphi]_{B'} = T^t_{BB'} \cdot [\varphi]_B \cdot T_{BB'}$.

În cazul nostru, $[\varphi]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Să se arate că funcţia $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $\varphi\left((x,y),(x',y')\right) = xx' + 3x'y + 3yx' - 2yy'$ este o formă biliniară a spaţiului $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ şi să se scrie matricea ei în baza canonică. Este această formă simetrică? Care este matricea lui φ în baza $B = \{v_1 = (1,1),\ v_2 = (1,-1)\}$?

5. Forma biliniară φ a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ are matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ în baza B Care este forma sa analitică dacă
a. B este baza canonică;
b. $B = \{(1,1),(2,0)\}$.
Soluţie: a. Dacă notăm cu $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ din baza canonică, avem, din matrice, că $\varphi(e_1,e_1) = 1$, $\varphi(e_1,e_2) = 2$, $\varphi(e_2,e_1) = 3$, $\varphi(e_2,e_2) = 4$. Ca şi la aplicaţiile liniare unde valorile pe vectorii unei baze determinau în mod unic aplicaţia liniară, o aplicaţie biliniară poate fi determinată dacă se cunosc valorile ei pe *perechile* (e_i,e_j) de vectori dintr-o bază. Astfel, avem $\varphi\big((x,y),(x',y')\big) = \varphi(xe_1 + ye_2, x'e_1 + y'e_2) = x\varphi(e_1, x'e_1 + y'e_2) + y\varphi(y, x'e_1 + y'e_2) = x\big(x'\varphi(e_1,e_1) + y'\varphi(e_1,e_2)\big) + y\big(x'\varphi(e_2,e_1) + y'\varphi(e_2,e_2)\big) = xx'\varphi(e_1,e_1) + xy'\varphi(e_1,e_2) + x'y\varphi(e_2,e_1) + x'y'\varphi(e_2,e_2)$.
În cazul de faţă obţinem $\varphi\big((x,y),(x',y')\big) = xx' + 2xy' + 3x'y + 4yy'$.
Observaţie: Alternativ, se poate afla expresia analitică a formei biliniare φ cunoscând matricea sa în baza B şi aplicând direct formula: $\varphi\big((x,y),(x',y')\big) = (x\ y)_B \cdot [\varphi]_B \cdot^t (x'\ y')_B$, unde $(x\ y)_B$ reprezintă matricea linie formată cu coordonatele lui (x,y) în baza B. Astfel, în baza canonică, avem $(x\ y)_B = (x\ y)$ deci obţinem imediat expresia analitică a lui φ calculând

$\varphi\big((x,y),(x',y')\big) = (x\ y)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = xx' + 2xy' + 3x'y + 4yy'.$

b. Notând $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (2,0)$, avem, din matrice, că $\varphi(v_1,v_1) = 1$, $\varphi(v_1,v_2) = 2$, $\varphi(v_2,v_1) = 3$, $\varphi(v_2,v_2) = 4$. Exprimăm vectorii arbitrari (x,y) şi (x',y') în baza B: $(x,y) = a(1,1) + b(2,0)$ conduce la sistemul $\begin{cases} a+2b & = x\\ a & = y\end{cases}$ cu soluţia $a = y$, $b = \frac{y-x}{2}$. Aşadar, un vector arbitrar (x,y) are în baza B coordonatele $(x\ y)_B = \begin{pmatrix} y & \dfrac{x-y}{2}\end{pmatrix}$.

Procedând ca mai sus, obţinem că $\varphi\big((x,y),(x',y')\big) = \varphi\big(yv_1 + \frac{x-y}{2}\,v_2,\ y'v_1 + \frac{x'-y'}{2}\,v_2\big) = yy'\varphi(v_1,v_1) + y\cdot\frac{x'-y'}{2}\,\varphi(v_1,v_2) + \frac{x-y}{2}\cdot y'\varphi(v_2,v_1) + \dfrac{x-y}{2}\cdot\dfrac{x'-y'}{2}\,\varphi(v_2,v_2) = yy' + 2y\cdot\dfrac{x'-y'}{2} + 3\dfrac{x-y}{2}\cdot y' + 4\dfrac{x-y}{2}\cdot\dfrac{x'-y'}{2} = xx' + \dfrac{1}{2}\,xy' - \dfrac{1}{2}\,yy'.$

Observaţie: După ce stabilim coordonatele unui vector arbitrar (x,y) în baza B, anume $(x\ y)_B = \begin{pmatrix} y & \dfrac{x-y}{2}\end{pmatrix}$, putem aplica direct formula

$\varphi\big((x,y),(x',y')\big) = (x\ y)_B\cdot[\varphi]_B\cdot{}^t(x'\ y')_B = \begin{pmatrix} y & \dfrac{x-y}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y'\\ \dfrac{x'-y'}{2}\end{pmatrix} = xx' + \frac{1}{2}\,xy' - \frac{1}{2}\,yy'.$

6. Aflaţi expresia analitică a formei biliniare $\varphi : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dacă $\varphi\big((1,0),(1,1)\big) = 1$, $\varphi\big((1,1),(1,2)\big) = 2$, $\varphi\big((2,1),(1,0)\big) = 3$, $\varphi\big((0,1),(1,0)\big) = 4$.
Este întotdeauna posibilă determinarea expresiei analitice a unei forme biliniare $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dacă se cunosc valorile acesteia pe patru perechi de vectori din $\mathbb{R}^2$?
Soluţie: Dacă notăm cu $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ matricea lui φ în baza canonică, avem $\varphi\big((1,0),(1,0)\big) = a$, $\varphi\big((1,0),(0,1)\big) = b$, $\varphi\big((0,1),(1,0)\big) = c$, $\varphi\big((0,1),(0,1)\big) = d$, iar valorile date ale lui φ se traduc prin:
$1 = \varphi\big((1,0),(1,1)\big) = \varphi\big((1,0),(1,0)\big) + \varphi\big((1,0),(0,1)\big) = a + b,$
$2 = \varphi\big((1,1),(1,2)\big) = \varphi\big((1,0),(1,2)\big) + \varphi\big((0,1),(1,2)\big) = \varphi\big((1,0),(1,0)\big) + 2\varphi\big((1,0),(0,1)\big) + \varphi\big((0,1),(1,0)\big) + 2\varphi\big((0,1),(0,1)\big) = a + 2b + c + 2d,$
$3 = \varphi\big((2,1),(1,0)\big) = 2\varphi\big((1,0),(1,0)\big) + \varphi\big((0,1),(1,0)\big),$
$4 = \varphi\big((0,1),(1,0)\big) = c.$
Rezolvând acest sistem, găsim $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{3}{2}$, $c = 4$, $d = -\dfrac{9}{4}$.
Prin urmare, expresia analitică a lui φ este $\varphi\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = -\frac{1}{2}x_1y_1 + \frac{3}{2}x_1y_2 + 4x_2y_1 - \frac{9}{4}x_2y_2$.
În general se obţine un sistem liniar, cu patru ecuaţii şi patru necunoscute. Se pot da uşor exemple în care acest sistem este incompatibil (caz în care nu există o asemenea formă biliniară) sau compatibil nedeterminat (caz în care există o infinitate de forme biliniare cu proprietăţile date, prin

urmare ea nu poate fi determinată).

7. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât forma biliniară $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + ax_2y_1 + bx_2y_2$ să fie simetrică.
Soluţie: Trebuie ca $\varphi\big((y_1, y_2), (x_1, x_2)\big) = \varphi\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big)$, $\forall\, (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, adică $x_1y_1 + ax_1y_2 + 2x_2y_1 + bx_2y_2 = x_1y_1 + 2x_1y_2 + ax_2y_1 + bx_2y_2$, $\forall\, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Identificând coeficienţii (egalitatea celor două polinoame din $\mathbb{R}[x_1, x_2, y_1, y_2]$ revine la egalitatea coeficienţilor), deducem că $a = 2$, $b \in \mathbb{R}$ arbitrar.
La aceeaşi concluzie am fi putut ajunge rapid examinând matricea lui φ în baza canonică, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$. φ este simetrică dacă şi numai dacă matricea ei, în orice bază este simetrică (adică este egală cu transpusa sa).

8. Scrieţi forma pătratică f asociată formei biliniare simetrice φ dacă:
(a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 9x_2y_2$;
(b) $\varphi : \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(aX + b,\, cX + d) = ac - 2ad - 2bc$.
Soluţie:
(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) \overset{\text{def}}{=} \varphi\big((x_1, x_2), (x_1, x_2)\big) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 9y_2^2$;
(b) $f : \mathbb{R}_1[X] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(aX + b) \overset{\text{def}}{=} \varphi(aX + b,\, aX + b) = a^2 - 4ab$.

9. Determinaţi polara formei pătratice $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2^2 + 5x_2x_3 + 6x_3^2$.
Soluţie: Pentru a determina expresia lui $\varphi\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big)$, putem folosi una din formulele
$\varphi(u, v) = \dfrac{f(u) + f(v) - f(u - v)}{2} = \dfrac{f(u + v) - f(u) - f(v)}{2}$, în care termenii din membrul drept sunt cunoscuţi, ceea ce permite determinarea, în principiu facilă, dar deseori laborioasă, a lui $\varphi(u, v)$.
În loc de aceasta, putem deduce expresia analitică a lui φ prin „dedublare", adică gândindu-ne din ce provine fiecare termen. Astfel, fiind extrem de uşor de văzut cum se poate obţine f pornind de la φ, să încercăm să facem demersul invers. Să analizăm fiecare termen din f şi să vedem din ce termen(i) provine. Constatăm că, în general, termenii de forma ax_i^2 provin dintr-un termen ax_iy_i din φ, în vreme ce un termen de forma x_ix_j provine din adunarea unor termeni de forma bx_iy_j şi cx_jy_i, cu $b + c = a$. Însă φ simetrică, deci coeficienţii lui x_iy_j şi x_jy_i trebuie să fie egali. Prin urmare un termen de forma x_ix_j în expresia lui f provine din adunarea termenilor $\frac{a}{2}\, x_iy_j$ şi $\frac{a}{2}\, x_jy_i$. În concluzie, găsim:
$\varphi\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) = x_1y_1 + (\frac{2}{2}\, x_1y_2 + \frac{2}{2}\, x_2y_1) + (\frac{3}{2}\, x_1y_3 + \frac{3}{2}\, x_3y_1) + 4x_2y^2 + (\frac{5}{2}\, x_2y_3 + \frac{5}{2}\, x_3y_2) + 6x_3y_3 = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + \frac{3}{2}\, x_1y_3 + \frac{3}{2}\, x_3y_1 + 4x_2y_2 + \frac{5}{2}\, x_2y_3 + \frac{5}{2}\, x_3y_2 + 6x_3y_3$.

10. Reduceţi la forma canonică formele pătratice de mai jos, precizând şi câte o bază în care se obţin:
(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 6xy$

(b) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2+2xy+3y^2+4xz+5z^2+6yz$
(c) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx$
(d) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2+y^2+4z^2-2xy-4yz+4zx$
(e) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 4x^2-yz$.
Soluţie:
a) Completăm $f(x,y) = x^2+6xy$ la un pătrat adunând $9y^2$; obţinem $f(x,y) = x^2+6xy+9y^2-9y^2 = (x+3y)^2-(3y)^2 = (x')^2-(y')^2$ unde, de exemplu, $\begin{cases} x' = & x+3y \\ y' = & 3y. \end{cases}$ (Nu este singura alegere posibilă: am fi putut de pildă alege $y' = -3y$, cu care am fi obţinut o altă bază în care se realizează forma pătratică.) Obţinem de aici imediat că $\begin{cases} x = & x'-y' \\ y = & \frac{1}{3}y', \end{cases}$ de unde vectorii din baza în care se realizează forma canonică se află citind coeficienţii lui x', respectiv y' : $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (-1, \frac{1}{3})$.
Desigur, atunci când am explicitat x şi y în funcţie de x' şi y' am inversat în fapt matricea sistemului:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

adică

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

b) Considerăm un ,,pătrat de pornire", de exemplu x^2, şi pornim grupările de la acesta (pornind gruparea de la $3y^2$ sau de la $5z^2$ s-ar fi ob'tinut alte baze, dar aceea'si formă canonică). Considerăm **toţi** termenii în care apare x: $x^2+2xy+4xz = x^2+2xy+2z)$ şi îi completăm la un pŭtrat, anume adăugând $(y+2z)^2$.
Avem $f(x,y,z) = x^2+2x(y+2z)+(y+2z)^2-(y+2z)^2+3y^2+5z^2+6yz = (x+y+2z)^2-y^2-4yz-4z^2+3y^2+5z^2+6yz = (x+y+2z)^2+2y^2+z^2+2yz$.
Scopul acestei manevre a fost să ,,scăpăm" de variabila x. De aici înainte avem de grupat la pŭtrate o formă pătratică de numai două variabile, y,z, anume $g(y,z) = 2y^2+z^2+2yz$. Iarăşi, alegem un pătrat, considerăm toţi termenii în care apare respectiva variabilă, apoi completăm la un pătrat. Putem scrie fie $g(y,z) = 2y^2+2yz+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z^2 = (\sqrt{2}y+\frac{1}{\sqrt{2}}z)^2+(\dfrac{1}{\sqrt{2}}z)^2$ (dacă pornim cu gruparea de la termenul y^2), fie, mai comod, $g(y,z) = z^2+2yz+y^2+y^2 = (z+y)^2+y^2$ (dacă pornim gruparea de la termenul z^2). Vom alege, desigur, cea de-a doua variantă pentru că ea duce la calcule mai frumoase.
Am găsit aşadar $f(x,y,z) = (x+y+2z)^2+(z+y)^2+y^2 = (x')^2+(y')^2+(z')^2$, unde $\begin{cases} x' = & x & +y & +2z \\ y' = & & y & +z \\ z' = & y & & . \end{cases}$ Inversând eventual matricea sistemului (sau, mai bine în cazul de faţă constatând succesiv că $y = z'$, $z = y'-z'$, apoi $x = x'-y-2z = x'-z'-2(y'-z') = x'-2y'+z'$)

obţinem $\begin{cases} x = & x' & -2y' & +z' \\ y = & & & z' \\ z = & y' & -z'. & \end{cases}$ O bază în care se obţine forma canonică este deci $B = \{(1,0,0), (-2,0,1), (1,1,-1)\}$.

(c) Probabil că unii dintre voi îşi amintesc de demonstraţia inegalităţii $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ în care se înmulţea cu 2, se trecea totul într-o parte şi se folosea că $f(x,y,z) = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$, unde f este chiar forma pătratică din exerciţiul de faţă. Dispunem, în aparenţă, de o foarte elegantă scriere a lui f ca sumă de pătrate, scriere pe care, dacă nu o ştiaţi din clasa a IX-a, o puteaţi descoperi acum. Notând $x' = x - y$, $y' = y - z$, $z' = z - x$, constatăm că nu putem scoate de aici x, y, z în funcţie de x', y', z' pentru că matricea $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nu este inversabilă. Care este explicaţia? Ei bine, scrierea aceea elegantă a lui f ca sumă de pătrate nu respectă o condiţie necesară, pe care tehnica ,,epuizării succesive a câte unei variabile" o asigură: cantităţile de sub pătrate trebuie să fie independente. Ori la noi $x' + y' + z' = 0$.

Să lăsăm deoparte scrierea ,,elegantă" şi să aplicăm algoritmul.

$f(x,y,z) = \underline{2x^2 - 2x(y+z)} + 2y^2 - 2yz + 2z^2 = \underline{2x^2 - 2x(y+z) + \frac{1}{2}(y+z)^2 -} \underline{\frac{1}{2}(y+z)^2} + 2y^2 - 2yz + 2z^2 = (\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z)^2 + \frac{3}{2}y^2 - 3yz + \frac{3}{2}z^2 = (\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z)^2 + (\sqrt{\frac{3}{2}}y - \sqrt{32}z)^2$.

Remarcaţi că forma canonică are signatura $(2,0,1)$ şi nu $(3,0,0)$ cum părea să indice ,,scrierea elegantă".

Vom alege $x' = \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z$, $y' = \sqrt{\frac{3}{2}}y - \sqrt{32}z$ şi $z' = ax + by + cz$ cu a, b, c alese cu singura restricţie ca matricea sistemului obţinut să fie inversabilă. Pentru comoditate, alegem $z' = z$. (Alte alegeri conduc la alte baze, la fel de bune.) Atunci obţinem succesiv $z = z'$, $y = \sqrt{23}y' + z'$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + z'$, deci o bază în care se obţine forma canonică este $B = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{23}, 0), (1,1,1)\}$.

(d) $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$. Alegem $x' = x + y + z$, apoi y', z' aproape la întâmplare; trebuie doar ca matricea sistemului care îi exprimă pe x', y', z' în funcţie de x, y, z să fie inversabilă. Dacă alegem $y' = y$, $z' = z$, avem $x = x' - y' - z'$, $y = y'$, $z = z'$, deci o bază în care se obţine forma canonică este $B = \{(1,0,0), (-1,1,0), (-1,0,1)\}$.

(e) $f(x,y,z) = \underline{4x^2} - 2yz = (2x)^2 - 2yz$, dar acum nu mai avem pătrat de la care să continuăm gruparea. (Această problemă poate apărea la început sau oricând pe parcursul aplicării algoritmului.) Vom face nişte schimbări auxiliare care să producă pătrate: alegem un termen de forma $x_i x_j$ (aici yz), iar variabilele implicate le scriem $x_i = y_i + y_j$, $x_j = y_i - y_j$, celelalte variabile rămânând neschimbate. în locul termenului $x_i x_j$ vom avea acum $y_i^2 - y_j^2$, prin urmare vom avea acum pătrat de la care să continuăm aplicarea algoritmului. La sfârşit, revenim la variabilele iniţiale.

Punând $y = y_1 + z_1$, $z = y_1 - z_1$, avem $f(x,y,z) = (2x)^2 + 2y_1^2 - 2z_1^2 =$

$(2x)^2 + (\sqrt{2}y_1)^2 - (\sqrt{2}z_1)^2 = (2x)^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z)^2 - (\frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z)^2$. Notăm $x' = 2x$, $y' = \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z$, $z' = \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z$; obţinem $x = \frac{1}{2}x'$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'$, deci o bază pentru forma canonică este $B = \{(\frac{1}{2}, 0, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\}$.

1.4 C. Exercitii

1. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x - y + 2z$. Sa se arate ca f este o forma liniara a spatiului $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ si sa se determine dimensiunea imaginii sale.

   Raspuns. 1.

2. Forma liniara f a spatiului $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ are, in baza canonica, matricea $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Sa se determine dimensiunea nucleului acestei forme.

   Raspuns. 2.

3. In spatiul $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ consideram forma liniara $f \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$ a carei matrice in baza $B = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (0, 1)\}$ este $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$. Se cere:

   (a) expresia analitica a formei f;

   (b) dimensiunea nucleului formei f;

   (c) duala bazei B si exprimarea formei f in aceasta baza.

   Raspuns. **a.** $f(x, y) = 3x - y$; **b.** 1. **c.** $B^* = \{v_1^* = e_2^*, v_2^* = e_1^* - e_2^*\}$, $f = 2v_1^* - v_2^*$ (unde cu $\{e_1, e_2\}$ am notat baza canonica din $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$).

4. Fie V/K un spatiu de dimensiune n. Sa se determine dimensiunea spatiului dual V^*.

5. Sa se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel incat functia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definita prin $f(x, y, z) = (a-1)x^2 + (a+b)xy + (b+1)y^2 + ax + by + cz$ sa fie o forma liniara a spatiului $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$, apoi sa se determine matricea sa in baza canonica.

   Raspuns. $a = 1, b = -1, c \in \mathbb{R}$; $[f] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & c \end{pmatrix}$.

6. Fie f o forma liniara a spatiului $\mathbb{R}_3[x]/\mathbb{R}$,care are matricea $[f] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ in baza canonica.

   (a) Sa se scrie forma analitica a aplicatiei f.

   (b) Sa se determine nucleul formei f si dimensiunea sa.

   (c) Sa se afle matricea acestei forme in baza $\left\{1, -2 + x, -3 + x^2, -4 + x^3\right\}$ prin doua metode.

   Raspuns. a. $f\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) = a + 2b + 3c + 4d$. **b.** $ker f = \left\{b(-2 + x) + c\left(-3 + x^2\right) + d\left(-4 + x^3\right) \mid b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$; 3. **c.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Fie V/K un spatiu, $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o baza a sa si $f : V \to K$ o functie. Sa se arate ca $f \in V^*$ daca si numai daca exista n elemente $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ astfel ca $f(v) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$, pentru orice vector $v = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n \in V$.

8. Sa se construiasca baza duala bazei B cand:

   (a) $B = \{13\}$ din spatiul $\mathbb{R}/\mathbb{R}$;

   (b) $B = \{(1, 3), (-1, 1)\}$ din spatiul $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$;

   (c) $B = \{1 + x, 1 - x\}$ din spatiul $\mathbb{R}_1[x]/\mathbb{R}$.

9. Fie forma $f \in \mathbb{R}_1[x]^*$ definita prin $f(a + bx) = a - 2b$. Sa se exprime f in baza duala bazei:

   (a) canonice;

   (b) $\{1 + x, 1 - x\}$.

10. Forma liniara $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ are matricea $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$ in baza $B = \left\{ \binom{1}{1}, \binom{0}{1} \right\}$. Sa se scrie:

    (a) expresia analitca a formei f;

    (b) coordonatele formei f in baza duala B^*.

    Raspuns. **a.** $f\left(\binom{a}{b}\right) = 3a - b$; **b.** $2, -1$.

11. Sa se arate ca $\left\{ f \in \mathbb{R}_2[x]^* \mid f\left(x + x^2\right) = 0 = f\left(-1 + x + x^2\right) \right\}$ este subspatiu vectorial al spatiului dual $\mathbb{R}_2[x]^*$ si sa se determine dimensiunea acestuia.

    Raspuns. 1.

12. Fie $I : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ functia definita prin $I(f) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$. Sa se arate ca $I \in \mathbb{R}_2[x]^*$ si sa se scrie aceasta forma in duala bazei canonice.

    Raspuns. $I = (\beta - \alpha) e_1^* + \frac{(\beta-\alpha)^2}{2} e_2^* + \frac{(\beta-\alpha)^3}{3} e_3^*$.

13. Sa se arate ca orice forma liniara este ori triviala ori surjectiva.

14. *Fie $I : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ forma definita la problema 12, si $x_0, x_1, x_2, x_3 \in [\alpha, \beta]$ patru numere distincte. Sa se arate ca exista $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ pentru care $I(f) = a_0f(x_0) + a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + a_3f(x_3)$.Generalizare. (Aceste reprezentare a formei I constituie fundamentul teoriei integrarii numerice).

15. *Fie f, g doua forme netriviale ale spatiului $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$. Sa se arate ca exista $c \in \mathbb{R}^*$ astfel ca $f = cg$ daca si numai daca cele doua forme au acelasi nucleu.

16. *Fie V un spatiu real de dimensiune n si f o forma liniara nenula a sa. Sa se arate ca exista o baza $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ in V astfel incat $f(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n) = x_1$, oricare ar fi $x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n \in V$.

    Indicatie. Se alege baza astfel incat $f(e_1) = 1$, $f(e_2) = 0, ..., f(e_n) = 0$.

17. Sa se arate ca functia $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita prin $\varphi((x, y), (x', y')) = 2xx' + xy' - yy'$ este o forma biliniara a spatiului $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ si sa se scrie matricea ei in baza canonica. Este aceasta forma simetrica?

    Raspuns. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

18. Forma biliniara φ a spatiului vectorial $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ are matricea $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ in baza $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$. Sa se determine forma sa analitica.

    Raspuns. $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \frac{1}{2}x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + x_2y_1$.

19. Fie V un spatiu real de dimensiune n. Sa se arate ca multimea formelor biliniare $\mathcal{B}(V)$ se poate inzestra cu o structura canonica de spatiu vectorial real si ca $\mathcal{B}(V) \simeq \mathbb{R}^{n \times n}$.

20. Fie V un spatiu real de dimensiune n. Sa se arate ca multimea formelor biliniare simetrice $B_s(V)$ este un subspatiu liniar al spatiului $\mathcal{B}(V)$. Care este $\dim B_s(V)$? Este adevarata afirmatia $B_s(V) \simeq \mathcal{Q}(V)$?

21. Forma biliniara φ a spatiului vectorial $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ are matricea $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ in baza canonica.

    (a) Sa se calculeze $\varphi((x, 0), (1, 2))$ si $\varphi((x, y), (x, y))$.

    (b) Care este matricea formei φ in baza $\{(1, 1), (-1, 2)\}$.

    Raspuns. **a.** $\varphi((x, 0), (1, 2)) = 3x$, $\varphi((x, y), (x, y)) = x^2 + 3xy + y^2$. **b.** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

22. Fie V/K si V'/K doua spatii vectoriale de dimensiune n. Sa se arate ca $\mathcal{B}(V) \simeq \mathcal{B}(V)$.

23. Fie $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ definita prin $\varphi(f, g) = \int_\alpha^\beta f(x)\, g(x)\, dx$.

    (a) Sa se arate ca $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_2[x])$.

    (b) Sa se determine matricea formei φ in baza canonica din $\mathbb{R}_2[x]$.

    (c) Sa se determine matricea formei φ in baza $\left\{1, 1 - x, x - x^2, x^2 - 1\right\}$.

24. Consideram forma $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_1[x])$ a carei matrice in baza canonica $\{1, x\}$ este $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Sa se gaseasca expresia analitica a functiei φ.

(b) Sa se arate ca functia $f : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}$ definita prin $f(a+bx) = \varphi(a+bx, 1+x)$ este o forma liniara a spatiului $\mathbb{R}_1[x]/\mathbb{R}$ si sa se determine o baza a nucleului sau.

Raspuns. **a.** $\varphi(a+bx, a'+b'x) = 2aa' + ab' - bb'$. **b.** e.g. $\{1+3x\}$.

25. Fie V/K un spatiu, $\mathcal{B}(V)$ spatiul formelor biliniare, $\varphi \in \mathcal{B}(V)$ si $v \in V$.

    (a) Sa se arate ca $\varphi_{v1}, \varphi_{v2} \in V^*$, unde $\varphi_{v1}(u) = \varphi(u,v)$ si $\varphi_{v2}(u) = \varphi(v,u)$ pentru orice $u \in V$.

    (b) Sa se arate ca matricea formei biliniare φ este simetrica daca si numai daca $\varphi_{v1} = \varphi_{v2}$, pentru orice vector $v \in V$.

26. Fie V/K un spatiu, iar $\mathcal{B}(V)$ spatiul formelor biliniare.

    (a) Sa se arate ca $\mathcal{B}_s(V) \leq \mathcal{B}(V)$, unde $\varphi \in \mathcal{B}_s(V)$ daca si numai daca forma $\varphi \in \mathcal{B}(V)$ este simetrica.

    (b) Sa se arate ca $\mathcal{B}_a(V) \leq \mathcal{B}(V)$, unde $\varphi \in \mathcal{B}_a(V)$ daca si numai daca forma $\varphi \in \mathcal{B}(V)$ este antisimetrica, i.e. $\varphi(v,u) = -\varphi(u,v)$ pentru orice $u, v \in V$.

    (c) Fie $K = \mathbb{R}$. Pentru orice $\varphi \in \mathcal{B}(V)$ definim $\varphi_s(u,v) = \frac{1}{2}(\varphi(u,v) + \varphi(v,u))$ si $\varphi_a(u,v) = \frac{1}{2}(\varphi(u,v) - \varphi(v,u))$ pentru orice $u, v \in V$. Sa se arate ca $\varphi_s \in \mathcal{B}_s(V)$ si ca $\varphi_a \in \mathcal{B}_a(V)$.

    (d) Sa se arate ca $\mathcal{B}(V) = \mathcal{B}_s(V) \oplus \mathcal{B}_a(V)$, daca V este un spatiu real.

27. Forma $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ este definita prin $\varphi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 - x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_1 - 2x_2y_3$. Sa se determine matricea sa in baza $\{(1,1,1),(-1,1,1),(1,-1,1)\}$.

    Raspuns. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

28. Sa se determine numerele naturale n pentru care spatiile reale $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ si $\mathbb{R}^{2^n}$ sunt izomorfe.

    Raspuns. $n \in \{2, 4\}$.

29. Forma $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ este definita prin $\varphi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 - x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_1 - 2x_2y_3$.

    (a) Sa se arate ca functia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita prin $f(x) = \varphi(x,x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^3$ este o forma patratica, i.e. $f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^3)$.

    (b) Sa se scrie matricea formei patratice f (in baza canonica).

    (c) Sa se construiasca polara formei patratice f.

Raspuns. .**b.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}$. **c.** $\chi\left(\left(x_1,x_2,x_3\right),\left(y_1,y_2,y_3\right)\right) = x_1y_1 - x_2y_2 + 2x_3y_3 - \frac{1}{2}\left(x_1y_3 + x_3y_1\right) - \left(x_2y_3 + x_3y_2\right).$

30. Sa se arate ca urmatoarele functii din $\mathcal{Q}\left(\mathbb{R}^3\right)$ admit formele canonice indicate si sa se stabileasca signaturile lor.

    (a) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$;
    (b) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$;
    (c) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = y_1^2 + y_2^2$;
    (d) $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

    Raspuns. a. $(2,1,0)$, nedefinita; b. $(1,2,0)$, nedefinita; c. $(2,0,1)$, pozitiv semidefinita; d. $(0,3,0)$, negativ definita.

31. Folosind metoda Gauss sa se stabileasca signatura formelor patratice:

    (a) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;
    (b) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

    Raspuns. Nedefinite.

32. Fie $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi\left((x,y),(1,1)\right) = 0\right\}$, unde φ este polara formei patratice $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy$. Sa se arate ca $S \simeq \mathbb{R}$.

33. Sa se determine signatura formei patratice $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \mathbf{f}\left(x_1,x_2,x_3\right) = x_1^2 + ax_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$, unde $a \in \mathbb{R}$.

    Raspuns. $(3,0,0)$, daca $a > 5$; $(2,0,1)$ daca $a = 5$; $(2,1,0)$ daca $a < 5$.

34. Folosind metoda Jacobi sa se scrie forma canonica a formei patratice $q : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}$ definita prin $q(f) = \int_0^2 f(x)\,dx$.

    Raspuns. $\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2$.

35. Sa se indice o baza in care $f \in \mathcal{Q}\left(\mathbb{R}^4\right)$ are forma canonica:

    (a) $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$;
    (b) $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$.

    Raspuns. De exemplu: **a.** $y_1^2 - y_2^2$, cu transformarile de coordonate $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$, $x_2 = y_1 + y_2 - y_4$, $x_3 = y_3$, $x_4 = y_4$;deci noua baza este$\{(1,1,0,0),(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\}$. **b.** $3y_1^2 - y_2^2 + \frac{17}{3}y_3^2 - \frac{3}{17}y_4^2$; $\left\{(1,0,0,0),(0,0,1,0),\left(-\frac{1}{3},1,-2,0\right),\left(-\frac{1}{17},\frac{3}{17},-\frac{6}{17},1\right)\right\}$.

36. Sa se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel incat forma patratica $f \in \mathcal{Q}\left(\mathbb{R}^3\right)$, $f\left(x_1,x_2,x_3\right) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2ax_2x_3 + 2x_3x_1$ sa fie pozitiv definita.

    Raspuns. $a \in (0,1)$.

37. Sa se verifice legea de inertie a signaturii prin metoda Gauss, respectiv, cu metoda Jacobi pentru forma patratica $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ care are matricea $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

38. Fie V un spatiu vectorial real, V^* dualul sau si $W := V \times V^*$ spatiul produs.

    (a) Care sunt operatiile -interna si externa - pe W?

    (b) Care este dimensiunea spatiului W?

    (c) Aratati ca $W \simeq \mathbb{R}^{n\times n}$.

    (d) Fie $\varphi : W \times W \to \mathbb{R}, \varphi\left(\left(u, f\right), \left(v, g\right)\right) = g\left(u\right) + f\left(v\right)$. Aratati ca φ este o forma biliniara simetrica.