1 10. PLANUL SI DREAPTA

1.1 A. TEORIE

1.1.1 10.1. Planul in $\mathbf{E}^3$

Majoritatea tehnicilor de proiectare apeleaza la geometria analitica. O problema de actualitate in care este folosita masiv geometria analitica este grafica pe calculator.

În cele ce urmează $\mathcal{R}_c = \left(O, \left\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}\right)$ este reperul canonic din $\mathbf{E}^3$, iar Ox, Oy, Oz sunt axele ortogonale asociate.

1. **Normala la plan**. Un vector $\overline{N}$ nenul din $\mathbf{E}^3$ se numeste *normală la planul* π dacă $\overline{N} \perp \overline{PQ}$, pentru orice două puncte $P, Q \in \pi$. In acest caz vom mai spune ca vectorul liber $\overline{N}$ este un *vector normal* la planul π sau ca $\overline{N}$ este *normala la planul* π.

2. **Planul determinat de un punct si de normala sa.** *Fie $M_0(a, b, c)$ un punct fixat si $\overline{N} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$ un vector nenul fixat. Planul ce trece prin M_0 si are normala $\overline{N}$ este locul geometric al punctelor $M(x, y, z)$ din spatiu pentru care $\overline{N} \cdot \overline{M_0 M} = \overline{0}$ si are ecuatia*

$$A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0.$$

Daca π este planul care are ecuatia $A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0$ convenim sa scriem

$$\pi: \; A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0$$

si sa spunem, prin abuz de limbaj, ca $A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$ este normala sa.

Exemplul 10.1.1. Sa determinam ecuatia planului π care este paralel cu planul

$$\alpha: \; 2x - 3y + z - 5 = 0$$

si care trece prin punctul $M(1, 1, 1)$. Remarcam ca $\overline{N} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ este o normala la planul α, deci si la planul π. Prin urmare ecuatia planului π este $2(x-1) - 3(y-1) + 1(z-1) = 0$, deci

$$\pi: \; 2x - 3y + z = 0.$$

3. **Ecuatia generala a planului.** *Ecuatia*

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

unde $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ se numeste ***ecuatia generala a planului****; coeficientii A, B, C reprezinta tocmai coordonatele unei normale la acest plan.*

Exemplul 10.1.2. Sa determinam $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel incat punctele $M_1(\alpha, 0, 1)$, $M_2(1, \alpha, 0)$, $M_3(0, 1, \alpha)$, $M_4(1, 1, 1)$ sa fie coplanare. Pentru aceasta consideram planul $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ care contine cele patru puncte. Atunci

$$\alpha A + B + D = 0, A + \alpha B + D = 0, B + \alpha C + D = 0, A + B + C + D = 0$$

trebuie sa fie un sistem compatibil. Din conditia de compatibilitate rezulta imediat ca $\alpha = 0$. Remarcam si faptul ca planul celor patru puncte este $x + y + z - 3 = 0$.

4. **Plane de coordonate.** *Planele*

   $xOy :\ z = 0$ (care are normala $\overline{k}$ si trece prin origine),

   $yOz :\ x = 0$ si

   $zOx :\ y = 0$

   se numesc ***plane de coordonate.***

5. **Ecuatia planului prin taieturi**. *Ecuatia planului care taie axele* Ox, Oy, Oz *in punctele* $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, *respectiv in* $(0, 0, c)$, *cu* $abc \neq 0$ *este*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

6. **Ecuatia planului care trece prin punctele necoliniare** $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, 3}$ *este:*

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

7. **Planul determinat de un punct si doua directii.** *Planul ce trece prin punctul* $M_0(a, b, c)$ *si este paralel cu vectorii nenuli si necoliniari* $l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$ *si* $l'\overline{i} + m'\overline{j} + n'\overline{k}$ *are ecuatia*

$$\begin{vmatrix} x - a & y - b & z - c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0.$$

8. **Unghiul diedru** *dintre planele* $\pi :\ Ax + By + Cz + D = 0$ *si* $\pi' : A'x + B'y + C'z + D' = 0$ *are masura unghiului dintre normalele lor i.e.*

$$\arccos \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

9. **Distanta de la punctul** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **la planul** $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ este, prin definitie *minimul distantelor de la punctul* M_0 *la punctul arbitrar* $M \in \pi$ si se poate calcula prin formula

$$d\left(M_0,\pi\right)=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Distanta dintre planele π **si** α este, prin definitie, minimul distantatelor dintre punctele arbitrare $M\in\pi$ si $P\in\alpha$.

Exemplul 10.1.3. Fie planele $\alpha: 2x-3y+z-5=0$ si $\pi:\ 3x-y-z+2=0$ si punctul $M_0\left(1,0,0\right)$.

1. Sa se determine punctul M aflat la intersectia dintre planele xOy, α si π.

2. Sa se determine distanta $d\left(M_0,\pi\right)$.

3. Sa se determine masura unghiului diedru dintre cele doua plane.

4. Sa se determine planul β care este perpendicular pe planele date si trece prin M_0.

5. Sa se determine distanta dintre planele date.

Solutie. 1. Sa determinam coordonatele x,y,z ale lui M. Cum $M\in xOy\cap\pi\cap\alpha$ rezulta ca x,y,z verifica sistemul

$$\left\{\begin{array}{c} z=0 \\ 3x-y-z+2=0 \\ 2x-3y+z-5=0\end{array}\right. .$$

Deci obtinem $M(-\frac{11}{7},-\frac{19}{7},0)$.

2. Avem $d\left(M_0,\pi\right)=\frac{\left|3+2\right|}{\sqrt{3^2+1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{11}}$.

3. Normala la planul π este $\overline{N_\pi}=3\overline{i}-\overline{j}-\overline{k}$, iar $\overline{N_\alpha}=2\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k}$ este normala la planul α. Prin urmare masura unghiului diedru este $\arccos\frac{6+3-1}{\sqrt{11}\sqrt{14}}=\arccos 4\sqrt{\frac{2}{77}}$.

4. O normala la planul β este

$$\overline{N_\beta}:=\overline{N_\alpha}\times\overline{N_\pi}=\left|\begin{array}{ccc}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -1\end{array}\right|=4\overline{i}+5\overline{j}+7\overline{k}.$$

Prin urmare ecuatia planului este $4\left(x-1\right)+5y+7z=0$, deci

$$\beta: 4x+5y+7z-4=0.$$

5. Deoarece planele date nu sunt paralele rezulta ca distanta dintre ele este nula.

Exemplul 10.1.4. Sa determinam distanta dintre planele $\alpha: x+y+z=1$ si $\beta: 2x+2y+2z=1$. Deoarece o normala la cele doua plane este $\overline{N}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$ si $\alpha\neq\beta$ rezulta ca planele sunt paralele. Sa luam un punct din planul α. Atunci distanta dintre cele doua plane este chiar distanta dintre punctul ales si planul β. Prin urmare luand $P(1,0,0) \in \alpha$ obtinem

$$d(\alpha,\beta) = d(P,\beta)\,\frac{|2-1|}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

1.1.2 10.2. Dreapta in $\mathbf{E}^3$

1. **Dreapta** d **ce trece prin punctul** $M_0(x_0,y_0,z_0)$ **si are directia** $\overline{d} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k} \neq \overline{0}$ *este locul geometric al punctelor* $M(x,y,z)$ *pentru care vectorul* $\overline{M_0M}$ *este coliniar cu vectorul* $\overline{d}$, *adica*

$$d = \left\{ M \mid \overline{M_0M} = t\overline{d}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vom spune ca $\overline{d} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$ *este* ***vector director*** *pentru dreapta* d; *coeficientii* l, m, n *se numesc* ***parametri directori*** *ai dreaptei* d; prin abuz de limbaj spunem uneori ca l, m, n *sunt parametrii directori ai dreptei* d. Deoarece $\overline{M_0M} = (x-x_0)\,\overline{i} + (y-y_0)\,\overline{j} + (z-z_0)\,\overline{k} = t\overline{d}$ daca si numai daca

$$x - x_0 = lt, y - y_0 = mt, z - z_0 = nt,$$

de aici obtinem imediat **ecuatiile parametrice ale dreptei** d **care trece prin punctul** $M_0(x_0,y_0,z_0)$ **si are directia** $\overline{d} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$:

$$d: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

Exemplul 10.2.1. Fie dreapta

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \quad ,t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

Sa determinam dreapta d' paralela cu d care trece prin origine. Deoarece $d \parallel d'$ rezulta ca un vector director pentru cele doua drepte este $\overline{d} = \overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$. Cum $O(0,0,0) \in d'$ rezulta ca ecuatiile parametrice ale dreptei d' sunt

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \quad ,t \in \mathbb{R}. \\ z = -3t \end{cases}$$

2. **Ecuatiile carteziene ale dreptei** d care trece punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ si are directia $\overline{d} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$ sunt

$$d: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}.$$

3. **Dreapta care trece prin punctele** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ si $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $(M_0 \neq M_1)$ are ecuatia

   (a) $d : \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$.

4. **Ecuatia generala a unei drepte determinata de doua plane (**neparalele) *este*

$$d : \left\{ \begin{array}{c} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array} \right.$$

   unde $A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k} \neq t\left(A'\overline{i} + B'\overline{j} + C'\overline{k}\right)$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$.

   Exemplul 10.2.2. Axa Oz este intersectia planelor yOz (de ecuatie $x = 0$) si zOx (de ecuatie $y = 0$). prin urmare **ecuatiile axelor de coordonate** sunt

$$Oz \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. , Ox \left\{ \begin{array}{c} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. , Oy \left\{ \begin{array}{c} z = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. .$$

   Exemplul 10.2.3. Sa determinam un plan π care trece prin origine si este perpendicular pe dreapta

$$d : \left\{ \begin{array}{c} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 3. \end{array} \right. .$$

   Deoarece $d \perp \pi$, un vector director al dreptei d este normala la planul π. Pe de alta parte planul de ecuatie $x - y + 2z = 0$ admite normala $\overline{d}_1 = \overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$, planul de ecuatie $2x + y - z = 3$ admite normala $\overline{d}_2 = 2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$, iar $\overline{d} = \overline{d}_1 \times \overline{d}_2 = -\overline{i} + 5\overline{j} + 3\overline{k} \perp \pi$. Prin urmare ecuatia planului π este $-x + 5y + 3z = 0$.

5. **Ecuatia fascicolului de plane care trec prin dreapta**

$$d : \left\{ \begin{array}{c} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0. \end{array} \right.$$

   este

$$\pi_{\alpha,\beta} : \alpha\left(Ax + By + Cz + D\right) + \beta\left(A'x + B'y + C'z + D'\right) = 0,$$

   unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

6. **Perpendiculara comuna a doua drepte.** Fie dreptele d_1 si d_2 care trec prin $M_1(x_1, y_1, z_1)$, respectiv prin $M_2(x_2, y_2, z_2)$ de vectori directori $\overline{d_1} = l_1\overline{i} + m_1\overline{j} + n_1\overline{k}$, respectiv $\overline{d_2} = l_2\overline{i} + m_2\overline{j} + n_2\overline{k}$ si produsul vectorial $\overline{d_1} \times \overline{d_2} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$. *Ecuatiile dreptei perpendiculare pe* dreptele d_1 si d_2 sunt:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

Distanta dintre dreptele d_1 si d_2 este, prin definitie, minimul distantelor dintre punctele arbitrare $M_1 \in d_1$ si $M_2 \in d_2$ si se poate calcula cu ajutorul formulei

$$d(d_1, d_2) = \frac{\left|\left(\overline{M_1 M_2}, \overline{d_1}, \overline{d_2}\right)\right|}{\left\|\overline{d_1} \times \overline{d_2}\right\|}.$$

Exemplul 10.2.4. Fie dreapta $d : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ si planul $\pi : -x + y - z = 3$. Sa se arate ca dreapta data este paralela cu planul dat, apoi sa se determine cea mai apropiata dreapta d' din planul π care este paralela cu dreapta d.

Rezolvare. Deoarece dreapta d este inclusa in planul $\alpha : x - y + z = 1$ si α este paralel cu π rezulta ca $d \parallel \pi$. Dreapta d' este chiar proiectia dreptei d pe planul π. O metoda de determinare a acestei proiectii este urmatoarea: din fascicolul de plane care trec prin d alegem planul perpendicular pe planul π; intersectia acestuia cu π este dreapta cautata. Fie deci

$$a(x + y + z - 3) + b(x - y + z - 1) = 0$$

fascicolul de plane ce trec prin d. Normala $(a + b)\,\overline{i} + (a - b)\,\overline{j} + (a + b)\,\overline{k}$ a unui plan din fascicol trebuie sa fie ortogonala pe normala planului $\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$ a planului π, deci $(a + b) - (a - b) + (a + b) = 0$, ori $a = -3b$. In consecinta dreapta cautata este

$$d' \begin{cases} -x + y - z = 3 \\ x - 2y + z = 4 \end{cases}.$$

Verificati corectitudinea rezultatului rezolvand problema prin alta metoda.

7. *Volumul V tetraedrului* $M_1 M_2 M_3 M_4$ este

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

unde $M_i(x_i, y_i, z_i), i = \overline{1, 4}$ sunt varfurile acestuia.

Exemplul 10.2.5. Sa determinam distanta $d(P, Oz)$, unde P este punctul de coordonate $(1, 2, 3)$. Deoarece $d(P, Oz) = d(P, P')$, unde P' este proiectia punctului P pe axa Oz, o metoda de determinare a distantei cautate este urmatoarea:

- scriem ecuatia planului π perpendicular pe Oz care trece prin P: cum $\overline{k}$ este normala la acest plan obtinem imediat ca

$$\pi : z - 3 = 0;$$

- deoarece proiectia $P' \in \pi \cap Oz$ obtinem $P'(0, 0, 3)$;

- distanta cautata este $d(P, Oz) = d(P, P') = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5}$.

Verificati rezultatul rezolvand problema prin alta metoda (de exemplu folosind proiectia punctului P in planul xOy).

Exemplul 10.2.6. Sa determinam planul π care trece prin punctul $P(1, 2, 3)$ si prin dreapta

$$d : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases} .$$

Din fascicolul de plane care trec prin dreapta data il vom alege pe acela care contine punctul P. Fascicolul cautat este

$$\pi_{\alpha,\beta} : \alpha(x - y) + \beta(x + z - 1) = 0.$$

Cum $P(1, 2, 3) \in \pi_{\alpha,\beta}$ avem $-\alpha + 3\beta = 0$. Planul care trece prin P si d are, asadar, ecuatia $3(x - y) + (x + z - 1) = 0$, ori

$$\pi : 4x - 3y + z = 4.$$

1.1.3 B. Probleme rezolvate

1. Fie $\alpha : x + 2y - z + 1 = 0$. Să se verifice dacă $A \in \alpha$, unde $A(-1, 2, 2)$ şi în caz contrar să se scrie ecuaţia unui plan $\alpha' \parallel \alpha$ cu $A \in \alpha'$
   REZOLVARE:
   Verificăm dacă coordonatele lui A satisfac ecuaţia planului. Avem $x_A + 2y_A - z_A + 1 = 2 \neq 0$, deci $A \notin \alpha$.

   Pentru că $\alpha' \parallel \alpha$, putem alege pentru α' acelaşi vector normal ca cel al planului α, adică $\bar{N}_\alpha = (1, 2, -1)$. Deci α' este planului determinat de punctul A şi vectorul normal $\bar{N}_\alpha$, astfel

   $$\alpha' : 1(x + 1) + 2(y - 2) - 1(z - 2) = 0$$

   sau echivalent, $alpha' : x + 2y - z - 1 = 0$.

2. Să se verifice dacă planul $\alpha_1 : -2x - 4y + 2z + 3 = 0$ este paralel cu planul α din problema precedentă.
   REZOLVARE:
   $\alpha \parallel \alpha_1$ dacă şi numai dacă $\bar{N}_\alpha$ şi $\bar{N}_{\alpha_1}$ sunt vectori coliniari, adică $\bar{N}_\alpha = \lambda\bar{N}_{\alpha_1}$ ceea ce e echivalent cu faptul că cei doi vectori au coordonate proporţionale. Verificăm acest lucru: $\frac{-2}{1} = \frac{-4}{2} = \frac{2}{-1}$ e adevărat, deci $\alpha \parallel \alpha_1$.

3. Să se verifice dacă $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, unde

   $$\alpha_1 : x + 2y + z - 1 = 0; \quad \alpha_2 : 2x - 4y + 2z - 2 = 0$$

REZOLVARE:
Cele două plane au normalele $\bar{N}_{\alpha_1} = (1, 2, 1)$ şi $\bar{N}_{\alpha_2} = (2, -4, 2)$. Calculăm produsul scalar $\bar{N}_{\alpha_1} \cdot \bar{N}_{\alpha_2} = 2-4+2 = 0$ şi vedem că normalele sunt vectori ortogonali, deci planele sunt perpendiculare.

4. Să se scrie ecuaţia planului (ABC) cu $A(1, 2, -1)$, $B(1, 2, 3)$ şi $C(2, 1, 1)$.
REZOLVARE:
Planul (ABC) este determinat de punctul A şi vectorii directori

$$\bar{AB} = \bar{OB} - \bar{OA} = (1-1, 2-2, 3+1) = (0, 0, 4)$$

şi

$$\bar{AC} = \bar{OC} - \bar{OA} = (1, -1, 2)$$

Atunci

$$(ABC) = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

adică $(ABC) : x + y - 3 = 0$

5. Fie $d : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{0}$, $A(1, 2, -1)$ şi planul $\alpha : 2x + y - z + 1 = 0$. Să se scrie ecuaţiile unei drepte $d_1 \parallel d$ cu $A \in d_1$ precum şi ale unei drepte d_2 cu $d_2 \perp \alpha$, $A \in d_2$.
REZOLVARE:
$d_1 \parallel d$, deci putem alege ca vector director al dreptei d_1 acelasi vector director ca cel al dreptei d, adică $\bar{v} = (1, 1, 0)$. Astfel d_1 e dreapta determinată de punctul A şi vectorul director $\bar{v}$, deci

$$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{0}.$$

Avem $d_2 \perp \alpha$ deci putem alege ca vector director al dreptei d_2, vectorul $\bar{N}_\alpha = (2, 1, -1)$ normal la planul α. Astfel d_2 e dreapta determinată de punctul A şi vectorul director $\bar{N}_\alpha$, deci

$$d_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

6. Fie $A(1, 2, 3)$ şi $B(-1, 1, 2)$. Să se scrie ecuaţiile dreptei AB.
REZOLVARE:
AB este dreapta determinată de punctul A şi de vectorul director $\bar{AB} = \bar{OB} - \bar{OA} = (-2, -1, -1)$. Deci

$$AB : \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}.$$

7. Să se scrie ecuaţia unui plan α, cu $\alpha \parallel d_1$, $\alpha \parallel d_2$ şi $A \in \alpha$, unde $A(1, 2, 3)$

$$d_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}, \quad d_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+1}{-1}$$

REZOLVARE:
$\alpha \parallel d_1$ deci $\bar{N}_\alpha$ va fi un vector ortogonal pe vectorul director $\bar{u} = (2, 1, 3)$ al dreptei d_1. Analog $\alpha \parallel d_2$ deci $\bar{N}_\alpha$ va fi un vector ortogonal pe vectorul director $\bar{v} = (1, -2, -1)$ al dreptei d_2. Aşadar $\bar{N}_\alpha$ este un vector simultan ortogonal pe $\bar{u}$ şi pe $\bar{v}$. Putem alege

$$\bar{N}_\alpha = \bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 5i + 5j - 5k$$

Astfel, α este planul determinat de punctul A şi de vectorul normal $\bar{N}_\alpha = (5, 5, -5)$. Deci

$$\alpha : 5(x-1) + 5(y-2) - 5(z-3) = 0$$

sau $\alpha : x + y - z = 0$. alternativ, se putea scrie ecuaţia planului α ca fiind determinat de punctul A şi vectorii directori $\bar{u}$ şi $\bar{v}$.

8. Fie $\alpha_1 : x + y - 2z - 1 = 0$, $\alpha_2 : 2x + y + z - 2 = 0$ şi $A(1, 2, -1)$. Să se scrie ecuaţiile unei drepte d, cu $A \in d$, $d \parallel \alpha_1$, $d \parallel \alpha_2$.
REZOLVARE:
METODA I:
Fie $\bar{u}$ vectorul director al dreptei d. Pentru că $d \parallel \alpha_1$ avem că $\bar{u} \cdot \bar{N}_{\alpha_1}$ şi pentru că $d \parallel \alpha_2$ avem că $\bar{u} \cdot \bar{N}_{\alpha_2}$, deci $\bar{u}$ este un vector simultan ortogonal pe $\bar{N}_{\alpha_1}$ şi pe $\bar{N}_{\alpha_2}$. Putem alege

$$\bar{u} = \bar{N}\alpha_1 \times \bar{N}_{\alpha_2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3i - 5j - k$$

Astfel, d e dreapta determinată de punctul A şi de vectorul director $\bar{u} = (3, -5, -1)$ şi în final găsim

$$d : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+1}{-1}.$$

METODA II:
Fie d' dreapta de intersecţie a celor două plane, $d' = \alpha_1 \cap \alpha_2$, deci

$$d' : \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ 2x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Rangul sistemului e 2 şi notăm $z = t$, necunoscută secundară. Sistemul devine

$$\begin{cases} x + y = 1 + 2t \\ 2x + y = 2 - t \end{cases}$$

de unde $x = 1 - 3t$ şi $y = 2 + 5t$. Am găsit astfel că ecuaţiile parametrice ale dreptei d' sunt

$$d' : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + 5t \\ z = \quad t \end{cases}$$

şi d' are direcţia dată de vectorul $\bar{u} = (-3, 5, 1)$. Dar $d \parallel \alpha_1$, $d \parallel \alpha_2$, deci $d \parallel d'$ şi putem alege pentru d acelaşi vector director u. Astfel

$$d : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+1}{1}$$

9. Sa̧ se determine proiecţia dreptei AB pe planul $\alpha : 2x + y - z + 1 = 0$, unde $A(1, 2, 3)$ şi $B(2, 1, -1)$.
REZOLVARE:
O dreaptă e determinată de două puncte. În particular, proiecţia dreptei AB pe planul α va fi determinată de proiecţiile A', B' ale punctelor A şi respectiv B pe planul α.

Proiecţia A' a lui A pe α este punctul de intersecţie dintre α şi dreapta d_1 ce conţine punctul A şi $d_1 \perp \alpha$. Dreapta va avea direcţia dată de $\bar{N}_\alpha = (2, 1, -1)$ şi va avea ecuaţiile parametrice:

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Punctul A' este obţinut pentru acel t pentru care x, y, z din ecuaţiile dreptei satisfac ecuaţia planului, adică pentru $2(1+2t)+(2+t)-(3-t)+1 = 0$, mai precis pentru $t = 1/3$. Înlocuind în ecuaţiile dreptei d_1, găsim $A'(5/3, 7/3, 8/3)$.

Analog, construim o dreaptă d_2 cu $B \in d_2$ şi $d_2 \perp \alpha$. Astfel, $B' = d_2 \cap \alpha$. Repetând raţionamentul de mai sus, găsim

$$d_2 : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

şi vom avea că punctul B' e obţinut pentru $t = -7/6$, deci $B'(-1/3, -1/6, 1/6)$.

Dreapta $A'B'$ e determinată de punctul A' şi de vectorul director $\bar{A'B'} = \bar{OB'} - \bar{OA'} = (-2, -5/3, -5/3)$, deci

$$A'B' : \frac{x - 5/3}{-2} = \frac{y - 7/3}{-5/3} = \frac{z - 8/3}{-5/3}$$

10. Să se determine simetricul punctului A faţă de planul α, unde A şi α sunt cele din problema precedentă.
REZOLVARE:
Dacă notăm cu A'' simetricul lui A în raport cu planul α, avem că proiecţia A' este mijlocul segmentului $[AA'']$, deci $A' = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A''$, adică

$$x_{A'} = \frac{x_A + x_{A''}}{2} \Rightarrow x_{A''} = 2x_{A'} - x_A = 2\frac{5}{3} - 1 = 7/3$$

apoi

$$y_{A'} = \frac{y_A + y_{A''}}{2} \Rightarrow y_{A''} = 2y_{A'} - y_A = 8/3$$

şi

$$z_{A'} = \frac{z_A + z_{A''}}{2} \Rightarrow z_{A''} = 2z_{A'} - z_A = 2\frac{5}{3} - 1 = 7/3$$

11. Să se determine proiecţia punctului $A(1,2,3)$ pe dreapta $d : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$, apoi să se calculeze distanţa de la punct la dreaptă
REZOLVARE:
Fie α planul $\alpha \perp d$, $A \in \alpha$. Atunci, punctul $A' = \alpha \cap d$ va fi proiecţia lui A pe d. Planul α esste determinat de punctul A şi de vectorul normal $\bar{N}_\alpha = (2,1,-1)$ care e vectorul director al dreptei d. Găsim $\alpha : 2x+y-z+1 = 0$. Scriem ecuaţiile dreptei d în formă parametrică:

$$d : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$$

şi punctul A' se obţine pentru acel t ce satisface $2(-1+2t)+t+(-2-t)-1 = 0$, deci pentru $t = 1/6$. Astfel $A'(-2/3, 1/6, -13/6)$.

Distanţa $d(A,d) = ||\bar{AA'}|| = \sqrt{(-\frac{1}{3}-1)^2 + (\frac{1}{6}-2)^2 + (-\frac{13}{6}-3)^2} = \sqrt{\frac{697}{12}}$

12. Fie $d_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$, $d_2 : \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ şi $A(1,2,3)$. Să se scrie ecuaţia unei drepte d astfel încât $A \in d$ şi d intersectează dreptele d_1 şi d_2.
REZOLVARE:
Fie α_1 planul ce conţine dreapta d_1 şi punctul A. Avemcă $A_1(-1,0,0)$ e un punct de pe dreapta d_1, care are direcţia dată de $u_1 = (1,-2,1)$. Atunci α_1 e determinat de punctul A_1 şi de vectorii directori liniar independenţi u_1 şi $\bar{A_1A} = \bar{OA} - \bar{OA_1} = (2,2,3)$. Deci

$$\alpha_1 : \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ & & \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha_1 : -8x - y + 6z - 8 = 0$$

Analog, fie α_2 planul ce conţine dreapta d_2 şi punctul A. Avemcă $A_1(-2,0,0)$ e un punct de pe dreapta d_2, care are direcţia dată de $u_2 = (-1,2,3)$.

Atunci α_2 e determinat de punctul A_2 şi de vectorii directori liniar independenţi u_2 şi $\bar{A_2A} = \bar{OA} - \bar{OA_2} = (3, 2, 3)$. Deci

$$\alpha_2 : \begin{vmatrix} x+2 & y & z \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha_1 : 3y - 2z = 0$$

Dar dar pentru că $d_1 \subset \alpha_1$ şi $A \in \alpha_1$, vom avea că $d \subset \alpha_1$, iar cum $d_2 \subset \alpha_2$ şi $A \in \alpha_2$, rezultă că $d \subset \alpha_2$. Deci $d \subset \alpha_1 \cap \alpha_2$, dar cum intersecţia a două plane distincte nu poate fi mai mult decât o dreaptă, rezultă că:

$$d : \begin{cases} -8x - y + 6z - 8 = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

13. Să se scrie ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor d_1 şi d_2 de la problema precedentă.
REZOLVARE:
Dacă d_1 conţine punctul $A_1(-1, 0, 0)$ şi are direcţia dată de $u_1 = (1, -2, 1)$ iar d_2 conţine punctul $A_2(-2, 0, 0)$ şi are direcţia dată de $u_2 = (-1, 2, 3)$, atunci perpendiculara comună d va avea direcţia dată de vectorul

$$w = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8i - 4j$$

şi intersectează cele două drepte date.

În particular, d e conţinută în planul α_1 determinat de punctul A_1 şi de vectorii directori u_1 şi w. Avem

$$\alpha_1 : \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & -2 & 1 \\ -8 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha_1 : x + 2y - 5z + 1 = 0$$

Analog, d e conţinută în planul α_2 determinat de punctul A_2 şi de vectorii directori u_2 şi w şi avem

$$\alpha_2 : \begin{vmatrix} x+2 & y & z \\ -1 & 2 & 3 \\ -8 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha_2 : 3x + 6y + 5z + 6 = 0$$

Deci $d = \alpha_1 \cap \alpha_2$, adică

$$d : \begin{cases} x - 2y - 5z + 1 = 0 \\ 3x + 65 + 5z + 6 = 0 \end{cases}$$

Alternativ, se puteau folosi direct formulele corespunzătoare.

14. Să se scrie eccuaţiile unei drepte d cu $A \in d$ şi d intersectează dreptele d_1, d_2, cu $d_1 : \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$ şi $d_2 : \begin{cases} x + y - z + 5 = 0 \\ x + y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$
REZOLVARE:
Evident, se poate rezolva ca şi problema 12. Dar cum ecuaţiile dreptelor d_1, d_2 sunt scrise ca intersecţie de plane, ne e mai uşor să folosim fascicole.

Fie
$$\pi_{a,b} : a(x + 2y + z - 1) + b(2x + y + 2z - 4) = 0 \qquad (1)$$
fascicolul de plane ce conţin dreapta d_1. Vrem să determinăm acel plan din fascicol care conţine punctul A. Observăm că pentru $b = 0$, planul $\pi_{a,0} : x + 2y + z - 1 = 0$ nu conţine punctul A, deci planul pe care îl căutăm are $b \neq 0$. Împărţind ecuaţia (1) cu b şi notând $c = b/a$, ecuaţia fascicolului devine $c(x + 2y + z - 1) + (2x + y + 2z - 4) = 0$, adică $(c+2)x+(2c+1)y+(c+2)z-(c+4) = 0$. α_1, planul din fascicol care conţine punctul A este cel pentru care $(c+2)+2(2c+1)+3(c+2)-(c+4) = 0$, adică cel cu $c = -6/7$. Rezultă că
$$\alpha_1 : 8x - 5y + 8z - 22 = 0$$
.

Repetăm raţionamentul pentru fascicolul de plane ce conţine dreapta d_2 şi găsim că planul ce conţine dreapta d_2 şi punctul A este $\alpha_2 : 3x + 3y - 13z + 30 = 0$. Dar $d = d_1 \cap d_2$, deci
$$\begin{cases} 8x - 5y + 8z - 22 = 0 \\ 3x + 3y - 13z + 30 = 0 \end{cases}$$

1.1.4 C. Exercitii

1. Gasiti planul care trece prin $P(-3, 0, 7)$ si este perpendicular pe $\overline{N} = 5\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$.

   Raspuns. $5x + 2y - z + 22 = 0$.

2. Determinati un set de ecuatii parametrice ale dreptei ce trece prin $P(-2, 0, 4)$ si este paralela cu $\overline{a} = 2\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k}$.

   Raspuns.E.g. $x = -2 + t, y = 2t, z = 4 - t$.

3. Aratati ca $x = -3 + 4t, y = 2 - 3t, z = -3 + 7t$ sunt ecuatii parametrice ale dreptei care trece prin $P(-7, 6, -10)$ si $Q(1, -1, 4)$.

4. Determinati punctul in care dreapta $x = \frac{8}{3} + 2t,\ y = -2t,\ z = 1 + t$ intersecteaza planul $3x + 2y + 6z = 6$.

   Raspuns. $\left(\frac{2}{3}, 2, 0\right)$.

5. Se dau planele de ecuatii : $3x - 2y + z = 0$ si $Ax + By + Cz + D = 0$. Sa se determine constantele $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ astfel incat planele date sa fie paralele, iar punctul $M(1, 1, 1)$ sa se gaseasca intr-unul dintre ele.

   Raspuns. $A = 3, B = D = -2, C = 1$.

6. Calculati distanta de la punctul $P(1, 1, 3)$ la planul $3x + 2y + 6z = 6$.

   Raspuns. $\frac{17}{7}$.

7. Aratati ca masura unghiului dintre planele de ecuatii $3x - 6y - 2z = 15$ si $2x + y - 2z = 5$ este $\arccos\left(\frac{4}{21}\right)$.

8. Fie punctul $P(1, -2, 2)$ si planul $\pi : x + 2y + 2z + 5 = 0$.

   (a) Sa se determine ecuatia planului ce trece prin P si este paralel cu π.

   (b) Sa se calculeze distanta dintre cele doua plane.

   Raspuns. **a.** $\alpha : x + 2y + 2z = 1$. **b**. $d(\pi, \alpha) = 2$.

9. Fie planele $\alpha : x - y = 5$ si $\beta : 2x - y + 2z = 0$.

   (a) Sa se determine ecuatia planului ce trece prin $P(3, 4, -2)$ si este perpendicular pe cele doua plane.

   (b) Sa se calculeze masura unghiului dintre planele α si β.

   Raspuns. **a.** $2x + 2y - z = 16$. **b**. $\frac{\pi}{4}$.

10. Care este ecuatia planului care trece prin mijlocul segmentului de capete $P(2, 1, -3)$ si $Q(0, -3, 3)$, este paralel cu dreapta $d : \frac{x-1}{2} = y - 4 = \frac{z-1}{-3}$ si este perpendicular pe planul $\pi : z = 5$?

    Raspuns. $x - 2y = 3$.

11. Care este ecuatia planului ce trece prin $P(2, 1, -3)$ si este perpendicular pe vectorul $\overline{OP}$?

    Raspuns. $2x + y - 3z = 14$.

12. Determinati ecuatii parametrice ale dreptei de intersectie a planelor $3x - 6y - 2z = 15$ si $2x + y - 2z = 5$.

13. Calculati distanta de la punctul P la dreapta d, unde:

    (a) $P(0, 0, 0)$, $d : x = t, y = 2t, z = 3t$;

    (b) $P(1, 2, 3)$, $d : x = t, y = 2t, z = 3t$;

    (c) $P(0, 0, 0)$, $d : x = y = z - 3$;

    (d) $P(1, 2, 3)$ $d : x + y - z - 3 = 0, x + 2y - z = 0$.

    Raspunsuri. a. 0; b. 0; c. $\sqrt{6}$;

14. Determinati distanta de la planul de ecuatie $x + 2y + 3z = 4$ la planul de ecuatie $2x + 4y + 6z = 13$.

15. Determinati distanta de la planul de ecuatie $x + 2y + 6z = 10$ la dreapta de ecuatii $x = 2 + t, y = 1 + t, z = -\frac{1+t}{2}$.

16. Sa se determine care dintre cele trei drepte luate cate doua sunt paralele, sunt concurente, sau oblice (i.e. nici concurente, nici paralele).

    (a) $d_1 : x = 3 + 2t, y = -1 + 4t, z = 2 - t$; $d_2 : x = 1 + 4s, y = 1 + 2s, z = -3 + 4s$; $d_3 : x = 3 + 2r, y = 2 + r, z = -2 + 2r$.

    (b) $d_1 : x = 1 + 2t, y = -1 - t, z = 3t$; $d_2 : x = 2 - s, y = 3s, z = 1 + s$; $d_3 : x = 5 + 2r, y = 1 - r, z = 8 + 3r$.

17. Determinati punctele de intersectie ale dreptei $d : x = 1 + 2t, y = -1 - t, z = 3t$ cu planele de coordonate.

18. Care sunt ecuatiile dreptei din planul $z = 3$ care face un unghi de $\frac{\pi}{6}$ radiani cu vectorul $\bar{i}$ si un unghi de $\frac{\pi}{3}$ radiani cu vectorul $\bar{j}$?

19. Sa se scrie ecuatia planului care contine dreapta $d : \frac{x-2}{2} = y+1 = \frac{z}{3}$ si este paralel cu dreapta determinata de punctele $P\,(2, 1, 1)$ si $Q\,(-1, -2, -1)$.

    Raspuns. $x + y - z = 1$.

20. Sa se scrie ecuatia planului care contine dreapta $d : 2x = y + z, y - z + 2 = 0$ si este perpendicular pe planul care trece prin punctele $P\,(2, 0, 0)$, $Q\,(0, -1, 0)$ si $R\,(0, 0, -1)$.

    Raspuns. $y - z - 2 = 0$.

21. Sa se demonstreze ca dreapta care trece prin simetricul punctului $P\,(1, 1, 1)$ fata de dreapta $d : x - 2z + 4 = 0, y = z$ si este perpendiculara pe planul $\pi : 2x + y + z = 4$ are ecuatiile $y = z, 2x - y - z + 8 = 0$.

22. Dreapta care trece prin proiectia punctului $P\,(1, -1, 2)$ pe planul $\pi : x + y + z = 5$ si este paralela cu dreapta $d : z = -3, x - y = 3$ are ecuatiile $z = 3$ si $x - y = 2$?

23. Daca dreapta care se sprijina pe dreptele $d_1 : x + y - z + 2 = 0, y + z = 5x+9$, $d_2 : y = 2x+3, z = 3x+5$ si este paralela cu dreapta $d : 2x-y+2 = 0, 2x - z + 2 = 0$ are ecuatiile $D : 2x - y + 3 = 0, y - z + 1 = 0$ sa se afle distanta dintre punctele de intersectie dintre D si d_1, respectiv d_2.

    Raspuns. 3.

24. Justificati existenta perpendicularei comune a doua drepte disjuncte si neparalele.

25. Determinati perpendiculara comuna a dreptelor $d_1 : y-z = 7x-7, y+z = x + 3$ si $d_2 : y = -4x + 3, z = 3x - 5$ si distanta dintre ele.

    Raspuns. E.g. $x = 1, 4y - 3z = 2$; 5.

26. In *computer graphics* este nevoie sa reprezentam in plan obiectele din spatiu. Sa presupunem ca ochiul privitorului este in $Q(x_0, 0, 0)$ si vrem sa reprezentam punctul $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ca un punct $P(0, y, z)$ din planul yOz; realizam acest lucru proiectand P_1 pe plan. de-a lungul dreptei QP_1.

   (a) Determinati coodonatele punctului P in functie de x_0, x_1, y_1, z_1.

   (b) Examinati comportarea coordonatelor gasite cand $x_1 = 0$, cand $x_1 = x_0$ si cand $x_0 \to \infty$.

27. *O problema in *computer graphics* este depistarea *liniilor ascunse*. Sa presupunem ca ochiul tau este in $Q(4, 0, 0)$ si privesti o placa triunghiulara de varfuri $(1, 0, 1), (1, 1, 0)$ si $(-2, 2, 2)$. Segmentul ce uneste $(1, 0, 0)$ cu $(0, 2, 2)$ trece prin placa. Ce portiune din segment este ascunsa vederii tale de placa?