1 7. SPATII VECTORIALE EUCLIDIENE

1.1 A. Teorie

Spatiile vectoriale euclidiene se constituie in cel mai firesc si cel mai uzitat suport matematic necesar descrierii si analizei fenomenelor cotidiene. Structura unui asemenea spatiu este, esential, mai bogata, acest fapt permitand diferite calcule care, intr-un spatiu vectorial fara structura suplimentara, nu sunt posibile: putem calcula lungimea unui vector, putem masura unghiul dintre doi vectori, putem, de asemenea sa aflam distanta dintre doi vectori. Regasirea informatiilor (information retrieval) este una din miile de aplicatii ale acestor spatii.

Pe tot parcursul capitolului spatiile vectoriale considerate sunt reale, adica aici $K = \mathbb{R}$.

1.1.1 7.1. Produse scalare

Intr-un spatiu vectorial putem aduna vectori (operatia interna) si putem inmulti scalari cu vectori (operatia externa). In plus putem compara doi vectori din urmatorul punct de vedere.

Definitia 7.1.1. Directii si sensuri comune pentru doi vectori. *Fie $V/\mathbb{R}$ un spatiu vectorial. Spunem ca vectorii $u, v \in V$ sunt **coliniari** (sau **au aceeasi directie**) daca exista un scalar nenul $\lambda \in \mathbb{R}^*$ astfel ca $v = \lambda u$. Daca, in plus, $\lambda > 0$ spunem ca cei doi vectori au **acelasi sens**, iar daca $\lambda < 0$ spunem ca u si v au **sens opus**.*

Exemplul 7.1.1. In spatiul $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ vectorii $u = (1, 2, 0)$ si $v = (13, 26, 0)$ au aceeasi directie si acelasi sens deoarece $v = 13u$ si $\lambda = 13 > 0$. In astfel de cazuri convenim sa scriem rapoartele de proportionalitate ale coordonatelor in forma $\frac{13}{1} = \frac{26}{2} = \frac{0}{0} = \lambda = 13$ chiar daca raportul al treilea nu are sens; identificam acest sir de egalitati cu urmatoarele egalitati care au sens: $13 = 1 \times 13$, $26 = 2 \times 13$, $0 = 0 \times 13$. Vectorii u si $-v$ au aceeasi directie dar au sens opus.

In spatiile vectoriale euclidiene avem, in plus fata de spatiile vectoriale, posibilitatea sa "inmultim" vectori. Produsul a doi vectori pe care il definim in continuare va fi un numar real, de aceea acestei inmultiri a vectorilor ii vom spune produs scalar.

Definitia 7.1.2. Definitia produsului scalar. *Fie $V/\mathbb{R}$ un spatiu vectorial n-dimensional si $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ o forma biliniara simetrica a carei forma patratica asociata este pozitiv definita. Atunci spunem ca (V, φ) este un **spatiu** (vectorial, liniar) **euclidian** iar φ este un **produs scalar** pe V. Daca $u,v \in V$ scalarul $\varphi(u, v)$ va fi notat cu uv (sau $u \cdot v$ sau $\langle u, v\rangle$); vom spune ca uv este **produsul scalar** al vectorilor u si v. Uneori vom spune ca $(V, \cdot)$ este spatiu euclidian intelegand prin aceasta ca aplicatia $\varphi(u, v) := uv$ defineste un produs scalar pe V.*

Din definitia precedenta, din definitia formei biliniare simetrice si din definitia formei patratice pozitiv definite rezulta urmatoarea caracterizare a produsului scalar.

Observatia 7.1.1. *Fie V un spatiu vectorial real si $V \times V \ni (u, v) \mapsto uv \in \mathbb{R}$ o functie. Atunci $(V, \cdot)$ este un spatiu vectorial euclidian daca si numai daca:*

1. *$uv = vu$ pentru orice $u, v \in V$ (simetria formei biliniare);*
2. *$(\alpha u + \beta v) w = \alpha uw + \beta vw$ pentru orice $u, v, w \in V$ si pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (liniaritatea in prima componenta a functiei $\cdot$);*
3. *$v \cdot v \geq 0$ pentru orice $v \in V$ si $v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = \theta_V$ (forma patratica asociata formei biliniare simetrice $\cdot$ este pozitiv definita).*

Exemplul 7.1.2. Definim pe $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ aplicatia $\varphi\left((x, y)\left(x', y'\right)\right) := xx' - xy' - x'y + 4yy'$. Sa aratam ca $\left(\mathbb{R}^2, \varphi\right)$ este un spatiu euclidian. Deoarece φ este o forma biliniara simetrica avand matricea $\varphi_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ in baza canonica, inseamna ca forma patratica care are drept polara forma φ are expresia analitica $f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2$. Dar $f(x, y) = (x - y)^2 + 3y^2 \geq 0$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, iar $f(x, y) = 0$ daca si numai daca $x = y = 0$; rezulta ca f este pozitiv definita. In consecinta φ este un produs scalar pe $\mathbb{R}^2$, deci $\left(\mathbb{R}^2, \varphi\right)$ este un spatiu euclidian.

Definitia 7.1.3. Definitia normei. Versor (vector unitar). *Fie $(V, \cdot)$ un spatiu euclidian. Numarul nenegativ*

$$\|v\| := \sqrt{v \cdot v}$$

*se numeste **norma** sau **lungimea** vectorului $v \in V$. Functia*

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$$

*se numeste **norma** (pe V), iar cuplul $(V, \|\cdot\|)$ se numeste **spatiu vectorial normat**. Mai spunem uneori ca spatiul euclidian V este un spatiu normat cu **norma indusa de produsul scalar** "$\cdot$". Un vector de lungime 1 se numeste **vector unitar** sau **versor**.*

Exemplul 7.1.3. In spatiul euclidian $\left(\mathbb{R}^2, \varphi\right)$ definit la exemplul precedent norma indusa de produsul scalar φ are expresia analitica $\|(x, y)\|_\varphi = \sqrt{\varphi\left((x, y), (x, y)\right)} = \sqrt{x^2 - 2xy + 4y^2}$. Deci, daca $e_1 = (1, 0)$ si $e_2 = (0, 1)$ sunt vectorii din baza canonica, norma lui e_1 este 1, iar norma (lungimea) lui e_2 este 2. Sa observam ca, definind $(x, y)\left(x', y'\right) := xx' + yy'$, cuplul $\left(\mathbb{R}^2, \cdot\right)$ este de asemenea spatiu euclidian; in acest spatiu lungimile celor doi vectori sunt egale cu 1.

Exemplul 7.1.4. Versorul unui vector. Daca $(V, \cdot)$ este un spatiu vectorial euclidian si v este un vector nenul din acest spatiu atunci

$$v_0 := \frac{1}{\|v\|} v$$

este un vector care are aceeasi directie si acelasi sens cu vectorul v. In plus $\|v_0\| = \sqrt{\frac{1}{\|v\|} v \cdot \frac{1}{\|v\|} v} = \frac{1}{\|v\|} \sqrt{v \cdot v} = 1$. Vectorul v_0 se numeste ***versorul vectorului*** v.

Exemplul 7.1.5. Produsul scalar standard si spatiul euclidian canonic $\mathbb{R}^n$. In spatiul $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ definim produsul vectorilor $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ si $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ prin

$$xy := x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n.$$

Sa aratam ca aplicatia defineste un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$. Fie $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ si $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ vectori arbitrari din $\mathbb{R}^n$ si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci

- $xy = yx$;
- $(\alpha x + \beta y) z = (\alpha x_1 + \beta y_1, ..., \alpha x_n + \beta y_n)(z_1, z_2, ..., z_n) = (\alpha x_1 + \beta y_1) z_1 + \cdots + (\alpha x_n + \beta y_n) z_n = \alpha (x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n) + \beta (y_1 z_1 + \cdots + y_n z_n) = \alpha xz + \beta yz$;
- $x \cdot x = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$ si $x \cdot x = 0$ daca si numai daca $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, adica $x = \theta_{\mathbb{R}^n}$.

Prin urmare, cu acest produs scalar *-numit* ***produsul scalar standard*** - $\mathbb{R}^n$ devine un spatiu vectorial euclidian. Il vom numi ***spatiul euclidian canonic*** (n-dimensional).

- – Norma vectorului x este $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ si versorul vectorului nenul x este

  $$x_0 = \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{-\frac{1}{2}} x.$$

  – Conform **inegalitatii Cauchy- Buniakowski -Schwarz**,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2},$$

de unde rezulta ca

$$|xy| \leq \|x\| \|y\|.$$

Inegalitatea dovedita mai sus este valabila in general: *intr-un spatiu euclidian produsul scalar a doi vectori este mai mic sau egal cu produsul normelor celor doi vectori*, dupa cum rezulta din urmatoarea teorema.

Teorema 7.1.1. **Inegalitatea lui Schwarz.** *Fie V este un spatiu vectorial euclidian si $u, v \in V$. Atunci*

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\| .$$

Egalitatea are loc daca si numai daca cei doi vectori sunt coliniari.

Din definitia normei induse de un produs scalar rezulta imediat urmatoarele proprietati ale normei.

Observatia 7.1.2. **Proprietati ale normei.** *Fie V este un spatiu vectorial euclidian si $\|\cdot\|$ norma indusa de produsul scalar. Atunci*

1. $\|v\| \geq 0$ *pentru orice* $v \in V$*, iar* $\|v\| = 0$ *daca si numai daca* $v = \theta_V$;

2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ *pentru orice* $v \in V$ *si pentru orice* $\lambda \in \mathbb{R}$;

3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *pentru orice* $u, v \in V$ - ***inegalitatea triunghiului.***

Primele doua afirmatii sunt imediate. Deoarece $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \Leftrightarrow \|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2 \Leftrightarrow (u + v)(u + v) \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\| \Leftrightarrow uv \leq \|u\| \|v\|$, iar ultima inegalitate este chiar inegalitatea lui Schwarz, rezulta ca inegalitatea triunghiului este verificata.

Din inegalitatea lui Schwarz rezulta ca daca u si v sunt vectori nenuli, atunci $\left|\frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}\right| \leq 1$. Acest fapt permite definirea cosinusului unghiului dintre acesti vectori. Reamintim ca functia $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ este inversa restrictiei functiei cos la intervalul $[0, \pi]$.

Definitia 7.1.4. Masura unghiului dintre doi vectori. *Fie u si v doi vectori nenuli din spatiul vectorial euclidian V. Numarul* $\arccos \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$ *se numeste* ***masura unghiului dintre vectorii*** *u si v. Scriem* $\cos \widehat{u, v} = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$ *si, prin abuz de limbaj spunem uneori ca* $\arccos \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$ *este "unghiul vectorilor u si v". Daca* $\arccos \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{\pi}{2}$*, sau, echivalent,* $u \cdot v = 0$*, spunem ca* ***vectorii*** *u si v sunt* ***ortogonali, sau ca*** u este **perpendicular (ortogonal) pe** *v si scriem $u \perp v$.*

Exemplul 7.1.6. Fie $u = (1, 2, 3)$ si $v = (3, 2, 1)$ doi vectori din spatiul euclidean canonic tridimensional. Atunci $\|u\| = \|v\| = \sqrt{14}$ si $uv = 10$. prin urmare masura unghiului dintre cei doi vectori este $\arccos \frac{5}{7}$, iar masura unghiului dintre vectorii u si $-v$ este $\arccos \frac{-5}{7} = \pi - \arccos \frac{5}{7}$. Vectorul $w = (x, y, z)$ este perpendicular pe u daca si numai daca $x + 2y + 3z = 0$ si este perpendicular pe v daca si numai daca $3x + 2y + z = 0$; prin urmare multimea vectorilor ortogonali pe u si v este $\{(x, -2x, x) \,|x \in \mathbb{R}\} = \mathit{span}\{(1, -2, 1)\}$, adica un subspatiu unidimensional al spatiului $\mathbb{R}^3$, iar $\{u, v, (1, -2, 1)\}$ este o baza in $\mathbb{R}^3$.

Exemplul 7.1.7. **Regasirea informatiei (I R)**. Regasirea informatiei (information retrieval, pe scurt I R) este un proces de selectie. Sa presupunem ca avem documentele $D_1, D_2, ..., D_n$. Se pune problema gasirii documentelor relevante pentru o cerere c a unui solicitant. Grosso modo, tehnica de gasire este urmatoarea.

- Se face o selectie a termenilor din documente si se stabilesc m termeni $t_1, t_2, ..., t_m$.
- Fiecarui document D_j i se asociaza un vector $d_j = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ unde $d_{ij} \geq 0$ este ponderea termenului t_i in documentul D_j.
- Se construieste **matricea termenilor** (**document-term matrix**) $D = (d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_n)$, matrice care este utilizata la orice solicitare a unui utilizator.
- In cazul in care un utilizator face cererea c, acestei cereri i se asociaza de asemenea un vector $\overline{c} = (c_i) \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ unde $c_i \geq 0$ este ponderea termenului t_i in cererea c.
- Se calculeaza cosinusurile unghiurilor $\widehat{\overline{c}, d_1}\ \widehat{\overline{c}, d_2}, ..., \widehat{\overline{c}, d_n}$, adica $\frac{\overline{c}\cdot d_j}{\|\overline{c}\|\|d_j\|}$, $j = \overline{1,n}$ si se ordoneaza descrescator. Se obtine un sir de numere nenegative ordonat $\delta_{k_1} \geq \delta_{k_2} \geq \delta_{k_3} \geq \cdots$
- Se ofera utilizatorului documentele $D_{k_1}, D_{k_2}, D_{k_3}, ...$ in aceasta ordine. (De exemplu daca $\frac{\overline{c}\cdot d_j}{\|\overline{c}\|\|d_j\|} = 1$ atunci documentul D_j are cea mai mare relevanta in raport cu cererea c, deoarece vectorii $\overline{c}$, d_j sunt coliniari si au ocelasi sens; in acest caz $k_1 = j$.)

Lungimea vectorului $u - v$ este , prin definitie distanta dintre vectorii u si v

Definitia 7.1.5. Distanta dintre doi vectori. *Fie V un spatiu euclidian si $\|\cdot\|$ norma indusa de produsul scalar. Daca $u, v \in V$ atunci numarul nenegativ $d(u,v) := \|u - v\|$ se numeste **distanta dintre vectorii** u si v. Functia $d : V \times V \to \mathbb{R}_+$ definita prin $d(u,v) := \|u - v\|$ se numeste **metrica (sau distanta) indusa de norma** pe V, iar V, iar cuplul (V, d) se numeste **spatiu metric**.*

Din proprietatile normei obtinem imediat urmatoarele proprietati ale metricii induse de norma.

Observatia 7.1.3. **Proprietati ale metricii.** Fie V este un spatiu vectorial euclidian si d metrica indusa de norma sa. Atunci

1. $d(u,v) = 0$ daca si numai daca $u = v$;
2. $d(u,v) = d(v,u)$ pentru orice $u, v \in V$;
3. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$ pentru orice $u, v, w \in V$ - ***inegalitatea triunghiului***.

Ultima inegalitate rezulta imediat din inegalitatea triunghiului proprie normei:
$d(u,v) = \|u-v\| = \|u-w+w-v\| \leq \|u-w\| + \|w-v\| = d(u,w) + d(w,v)$.

Exemplul 7.1.7. Fie spatiul euclidian canonic $\mathbb{R}^n$ si $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ doi vectori din acest spatiu. Distanta

dintre ei este

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Observam ca daca $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este baza canonica, atunci $d(e_i, e_j) = \sqrt{2}$ daca $i \neq j$, ca lungimea fiecarui vector din baza este 1 (adica baza B este formata din versori) si ca $e_i e_j = \delta_{ij}$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$; in particular $e_i \perp e_j$ daca $i \neq j$.

1.1.2 7.2. Baze ortonormate

Bazele ortonormate sunt generalizari ale bazei canonice din spatiul euclidian canonic. Ele permit reprezentari numerice simple, si, de aceea sunt larg utilizate in inginerie, in special in grafica pe calculator.

Fie V un spatiu euclidian n-dimensional, $n > 1$.

Definitia 7.2.1. Sisteme ortogonale. *O multime de vectori $M = \{v_1, v_2, ..., v_m\} \subset V$, unde $m > 1$, se numeste **sistem ortogonal** daca orice doi vectori diferiti din multime sunt ortogonali, i.e. $v_i v_j = 0$ (sau $v_i \perp v_j$) daca $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, ..., m\}$. Daca, in plus, vectorii din M sunt si unitari spunem ca M este un **sistem ortonormat**.*

Observatia 7.2.1. *Daca $M = \{v_1, v_2, ..., v_m\} \subset V$ este un sistem ortogonal atunci M este un sistem de vectori liniar independent.* Intr-adevar, daca luam o combinatie liniara nula a acestor vectori

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_m v_m = \theta, x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbb{R}$$

si inmultim scalar cu $v_i \in M$ ambii membri ai acestei egalitati, obtinem $x_i v_i v_i = x_i \|v_i\| = 0$, deci $x_i = 0$ pentru orice $i \in \{1, 2, ..., m\}$. In particular,*un sistem ortogonal de n vectori din spatiul n-dimensional V este baza in acest spatiu.*

Definitia 7.2.2. Baze ortonormate. *Un sistem ortogonal de n vectori din spatiul n-dimensional V se numeste **baza ortogonala**. O baza ortogonala formata cu vectori unitari se numeste **baza ortonormata**.*

Exemplul 7.2.1. Baza canonica din sptiul euclidian canonic $\mathbb{R}^n$ -vezi exemplul 7.1.5 - este formata din vectori unitari, ortogonali doi cate doi, deci este o baza ortonormata. In schimb, daca consideram produsul scalar din $\mathbb{R}^2$ definit la exemplul 7.1.3, avem $\varphi((1,0)(0,1)) := -2$, deci baza canonica din $\mathbb{R}^2$ nu este ortogonala in spatiul euclidian $(\mathbb{R}^2, \varphi)$.

Observatia 7.2.1. Daca $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este *o baza oarecare* a spatiului euclidian $(V, \cdot)$, iar $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$, $v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + ... + y_n e_n \in V$, atunci, in acord cu expresia analitica cunoscuta de la formele biliniare avem

$$uv = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (e_i e_j)$$

sau, matriceal

$$(uv) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1e_1 & e_1e_2 & \cdots & e_1e_n \\ e_1e_2 & e_2e_2 & \cdots & e_2e_n \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ e_1e_n & e_2e_n & \cdots & e_ne_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

In schimb, bazele ortonormate permit o reprezentare facila (asa numita *reprezentarea (exprimarea) Fourier)* a unui vector si formule simple, similare celor din spatiul euclidian canonic, de calcul al produsului scalar a doi vectori, respectiv al normei unui vector.

Observatia 7.2.2. **Coeficientii Fourier**. **Reprezentarea Fourier**. *Daca $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este o baza ortonormata in spatiul euclidian $(V, \cdot)$ atunci coordonatele unui vector $v \in V$ in aceasta baza sunt*

$$e_1 v, e_2 v, ..., e_n v.$$

Intr-adevar, daca $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$ si inmultim scalar cu $e_i \in B$, atunci avem $e_i v = x_i$, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$. *Prin urmare am obtinut urmatoarea reprezentare -**reprezentarea (exprimarea) Fourier** - a vectorului v in baza B :*

$$v = (e_1 v) e_1 + (e_2 v) e_2 + ... + (e_n v) e_n.$$

*Scalarii $e_1 v, e_2 v, ..., e_n v \in \mathbb{R}$ se numesc **coeficientii Fourier** ai vectorului v (in baza ortonormata B). In plus, daca $u = y_1 e_1 + y_2 e_2 + ... + y_n e_n$ este un alt vector din V, produsul scalar al celor doi vectori este*

$$uv = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

iar norma vectorului v este

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Exemplul 7.2.2. Fie $v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ si $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ in spatiul euclidian canonic $\mathbb{R}^3$. Deoarece $v_1 v_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} +$

$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$, $v_2v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{6}} = 0$ si $v_3v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{3}} = 0$ rezulta ca $B := \{v_1, v_2, v_3\}$ este o baza ortogonala in $\mathbb{R}^3$. Cum $\|v_1\| = \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 1$, $\|v_2\| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$ si $\|v_3\| = \sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{4}{6}} = 1$ urmeaza ca B este o baza ortonormata in $\mathbb{R}^3$. Exprimarea (unica) a vectorului $v = (1,2,3)$ in aceasta baza se face cu ajutorul coeficientilor Fourier: $x_1 = v_1v = \frac{-1+2+3}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}, x_2 = v_2v = \frac{1+2}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}, x_3 = v_3v = \frac{1-2+6}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$. prin urmare $v = \frac{4}{\sqrt{3}}v_1 + \sqrt{3}v_2 + \frac{5}{\sqrt{6}}v_3$.

Observatia 7.2.3. **Reprezentarea unui versor intr-o baza ortonormata**. Sa presupunem ca $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *este o baza* ortonormata in spatiul euclidian $(V, \cdot)$ si $v \in V$ este un versor. Coeficientii Fourier, i.e. coordonatele, vectorului v sunt $x_1 = ve_1, x_2 = ve_2, ..., x_n = ve_n$. Cum v este unitar, avem $x_1^2 + \cdots x_n^2 = 1$. Pe de alta parte cosinusul unghiului dintre vectorii v si e_i este $\cos\widehat{v, e_i} = \frac{ve_i}{\|v\|\|e_i\|} = x_i$. Prin urmare *coeficientii versorului v in baza ortonormata B sunt chiar cosinusurile unhiurilor dintre vectorul v si vectorii bazei B* :

$$v = (\cos\widehat{v, e_1})\, e_1 + (\cos\widehat{v, e_2})\, e_2 + \cdots + (\cos\widehat{v, e_n})\, e_n.$$

Definitia 7.2.3. Matrice ortogonala. *O matrice $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pentru care $T^TT = I_n$ se numeste **matrice ortogonala**.*

Exemplul 7.2.3. Matricea $T := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ este ortogonala, deoarece

$$T^TT = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observatia 7.2.1 *O matrice ortogonala T este inversabila, iar inversa ei coincide cu transpusa.* Intr-adevar, daca $T^TT = I_n$ atunci $detT^TT = 1$, deci $detT \in \{-1, 1\}$ si T este inversabila, iar din $T^TT = I_n$ rezulta ca $T^{-1} = T$. Daca B si B' sunt matrice ortonormate si cunoastem exprimarea vectorului v in baza B, atunci putem determina usor coordonatele acestui vector in baza B' :

$$v_{B'} = T_{B'B}v_B = T_{BB'}^{-1}v_B = T_{BB'}^Tv_B.$$

Reamintim ca matricea de trecere $T_{BB'}$ de la baza B la baza B', are pe coloane coordonatele vectorilor din baza B' exprimati in baza B. O asemenea matrice este inversabila iar legatura dintre coordonatele unui vector v in cele doua baze se exprima matriceal prin formula $v_B = T_{BB'}v_{B'}$ si $v_{B'} = T_{BB'}^{-1}v_B$. In cazul matricelor de trecere intre doua baza ortonormate formulele de se simplifica semnificativ din cauza urmatoarei proprietati.

Propozitia 7.2.1. **Matricea de trecere intre baze ortonormate.** *Matricea de trecere dintre doua baze ortonormate ale unui spatiu euclidian dimensional este ortogonala.*

Exemplul 7.2.3. Fie baza $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de la exemplul 7.2.2. Sa determinam matricea de trecere T_{BB_c} de la baza B la baza canonica B_c din $\mathbb{R}^3$. Cum cele doua baze sunt ortonormate matricea T_{BB_c} este ortogonala si, prin urmare

$$T_{BB_c} = T_{B_cB}^{-1} = T_{B_cB}^{T} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

1.1.3 7.3. Subspatii ortogonale

Fie V un spatiu euclidian si $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o baza a sa.

Definitia 7.3.1. Complementul ortogonal al unui vector. *Fie $v \in V$ un vector nenul. Multimea*

$$v^{\perp} := \{u \in V \mid uv = 0\}$$

se numeste ***complementul ortogonal al vectorului*** *v.*

Prin urmare $v^{\perp}$ contine totalitatea vectorilor *ortogonali pe vectorul v si vectorul nul. Daca $u, w \in v^{\perp}$ si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$* atunci

$$(\alpha u + \beta w)\, v = \alpha\,(uv) + \beta\,(wv) = 0,$$

deci $\alpha u + \beta w \in v^{\perp}$. Deci $v^{\perp}$ este un subspatiu liniar al spatiului V. Daca $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$ *atunci ecuatia subspatiului $v^{\perp}$* este

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0,$$

deci daca $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$ atunci subspatiul $v^{\perp}$ este izomorf cu $Null\,(A)$. In particular, dimensiunea complementului ortogonal al vectorului nenul v este $n-1$.

Propozitia 7.3.1. *Complementul ortogonal al unui vector nenul al spatiului euclidian n-dimensional V este un subspatiu vectorial de dimensiune $n-1$.*

Exemplul 7.3.1. Fie $v = (1, -2, 1) \in \mathbb{R}^3$. Sa determinam o baza a complementului ortogonal al acestui vector. Avem $v^{\perp} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (1, -2, 1) \cdot (x, y, z) = x - 2y + z = 0\right\} = \{(x, y, -x + 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = span\,\{(1, -1, 0), (0, 1, 2)\}$. Deci $\{(1, -1, 0), (0, 1, 2)\}$ este o baza a complementului ortogonal $v^{\perp}$.

Extindem definitia complementului ortogonal la un sistem de vectori.

Definitia 7.3.2. Complementul ortogonal al unui sistem de vectori. *Fie $S \subset V$. Multimea*

$$S^{\perp} := \{v \in V \mid uv = 0 \forall u \in S\}$$

se numeste complementul ortogonal al sistemului S.

Denumirea de *complement* este justificata de faptul ca reuniunea dintre un subspatiu si complementul sau ortogonal este intregul spatiu euclidian.

Propozitia 7.3.2. *Fie $S \subset V$. Atunci $S^{\perp} \leq V$. Daca $S \leq V$* atunci $S \cap S^{\perp} = \{\theta_V\}$, $S \cup S^{\perp} = V$ si $\dim S + \dim S^{\perp} = n$; daca, in plus, $B_S = \{s_1, s_2...., s_m\}$ este o baza in S si $m < n$ atunci

$$S^{\perp} := \left\{v \in V \mid s_i v = 0 i = \overline{1, m}\right\}$$

Exemplul 7.3.2. Sa determinam complementul ortogonal al subspatiului

$$S = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0, y + z - t = 0\right\}.$$

Deoarece $S = \{(x, y, x + y, x + 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x (1, 0, 1, 1) + y (0, 1, 1, 2) \mid x, y \in \mathbb{R}\} =$ *span* $\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 2)\}$ rezulta ca o baza in S este $B := \{s_1 = (1, 0, 1, 1), s_2 = (0, 1, 1, 2)\}$. Prin urmare $S^{\perp} = \left\{v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid vs_1 = 0, vs_2 = 0\right\}$, adica

$$S^{\perp} = \left\{v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z + t = 0, y + z + 2t = 0\right\}.$$

1.1.4 7.4. Proiectii ortogonale

Generalizarea proiectiei unui vector pe alt vector din plan este data in urmatoarea definitie.

Definitia 7.4.1. Proiectia unui vector. *Sa consideram ca S este un subspatiu al spatiului euclidian V si $v \in V$ un vector nenul. Numim **proiectia ortogonala a vectorului** v **pe subspatiul** S un vector notat $pr_S v \in S$ cu proprietatea ca vectorul $v - pr_S v$ este perpendicular pe toti vectorii subspatiului S, deci, pentru care*

$$(v - pr_S v) \cdot s = 0 \forall s \in S.$$

*Daca $w \in V$ un alt vector nenul vom spune ca vectorul notat $pr_w v$ este **proiectia vectorului** v **pe vectorul** w daca vectorii w* si *$pr_w v$* sunt coliniari iar *$v - pr_w v \perp w$, adica*

$$(v - pr_w v) \cdot w = 0.$$

Observatia 7.4.1. *Proiectia ortogonala a vectorului v pe vectorul w coincide cu proiectia ortogonala a vectorului v pe subspatiul generat de vectorul w,* adica

$$pr_w v = pr_{span\{w\}} v.$$

Intr-adevar, din definitia proiectiei $pr_w v$, daca $w' = \alpha w \in span\{w\}$ atunci $w' \cdot (v - pr_w v) = \alpha (w \cdot (v - pr_w v)) = 0$, deci $v - pr_w v \perp w'$ pentru orice $w' \in span\{w\}$, adica $pr_w v = pr_{span\{w\}} v$.

De altfel, putem obtine **expresia proiectiei** $pr_w v$ astfel:

- deoarece $pr_w v \in span\{w\}$, exista $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca $pr_w v = \alpha w$;
- deoarece $(v - pr_w v)\, w = 0$ rezulta ca $vw - \alpha \|w\|^2 = 0$, deci $\alpha = \frac{vw}{\|w\|^2}$ si

$$pr_w v = \frac{v \cdot w}{\|w\|^2} w.$$

Reamintim ca un vector din plan se poate scrie ca suma proiectiilor sale pe doua directii ortogonale. Proprietatea este valabila pe un spatiu euclidian arbitrar.

Observatia 7.4.2. Daca $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este o baza ortonormata in V si $v \in V$ atunci $pr_{e_i} v = (v \cdot e_i)\, e_i$, $i = \overline{1, n}$. Atunci, folosind exprimarea Fourier avem

$$v = pr_{e_1} v + pr_{e_2} v + \cdots + pr_{e_n} v.$$

Analog se arata urmatoarea proprietate.

Observatia 7.4.3. Descompunerea proiectiei ortogonale dupa vectorii unei baze ortonormate. Fie $B_S = \{s_1, s_2, ..., s_m\}$ o baza ortonormata in subspatiul $S \leq V$,unde $m < n = \dim V$ si $v \in V$. Atunci *proiectia ortogonala a vectorului v pe subspatiul S* este *suma proiectiilor ortogonale ale lui v pe vectorii bazei B_S*, adica

$$pr_S v = pr_{s_1} v + pr_{s_2} v + \cdots + pr_{s_m} v.$$

Exemplul 7.4.1. Fie $v = (1, 2, 3)\, , w = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ si $S = \{(x - y, y - z, z - x) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Sa se determine $pr_w v$ si $pr_S v$. Pentru prima proiectie avem

$$pr_w v = \frac{v \cdot w}{\|w\|^2} w = \frac{6}{3} w = (2, 2, 2)$$

Pentru cea de a doua remarcam intai ca

$$S = span\{v_1 = (1, 0, -1)\, , v_2 = (-1, 1, 0)\, , v_3 = (0, -1, 1)\}$$

si ca $v_1 + v_2 + v_3 = (0, 0, 0)$. Deci $B := \{v_1, v_2\}$ este o baza a subspatiului S. Cautam sa obtinem, plecand de la B, o baza ortonormata a subspatiului S. Luam, de exemplu, ca prim vector a bazei pe care dorim sa o costruim versorul vectorului v_1, deci luam $s_1 := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, acesta fiind un vector unitar din subspatiul S. Pentru cel de al doilea cautam o combinatie liniara a vectorilor v_2 si s_1 (in felul acesta obtinem un vector din S) care sa fie ortogonala pe s_1 si sa aiba norma egala cu 1. Fie asadar $v = v_2 - \lambda s_1$ si determinam scalarul λ din conditia de perpendicularitate

$$v \cdot s_1 = 0 \Leftrightarrow v_2 \cdot s_1 - \lambda \left\|s_1\right\|^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = v_2 \cdot s_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Atunci $v = v_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} s_1 = (-1,1,0) + \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$. Cum norma acestui vector este $\sqrt{\frac{1}{2}+1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ luam $s_2 := \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. Am obtinut baza ortonomata $B_S := \{s_1, s_2\}$ a

1.1.5 7.5. Procedeul de ortonormare Gram-Schmidt

Dupa cum am vazut in paragrafele precedente, determinarea unei baze ortonormate este extrem de profitabila pentru solutionarea unor probleme mai complicate. La exemplul 7.4.1, plecand de la o baza a unui spatiu am determinat o baza ortonormata pentru acel spatiu. Tehnica, numita procedeul de ortonormare Gram-Schmidt se poate aplica in orice spatiu euclidian.

Procedeul de ortonormare Gram-Schmidt.

Fie $(V, \cdot)$ un spatiu euclidian si $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o baza a sa, unde n este mai mare ca 1.

1. Recursiv, construim o baza ortogonala $B' = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, folosind vectorii bazei B :
   - intai alegem un vector din B; fie $v_1 := e_1$;
   - construim vectorul $v_2 = e_2 - \lambda v_1$, determinand scalarul λ astfel ca $v_2 \perp v_1$, adica rezolvand ecuatia de gradul intai $v_1 \cdot e_2 - \lambda \left\|v_1\right\|^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{v_1 \cdot e_2}{\left\|v_1\right\|^2}$; am obtinut astfel doi vectori ortogonali (deci liniar independent) v_1 si v_2.
   - repetam procedeul: construim vectorul $v_3 = e_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2$, determinand scalarii λ_1, λ_2 astfel ca $v_3 \perp v_1, v_2$, adica rezolvand sistemul liniar compatibil determinat $v_3 \cdot v_1 = 0, v_3 \cdot v_2 = 0$ am obtinut vectorii ortogonali v_1, v_2 si v_3. Continuam procedeul. In cele din urma, avand determinati vectorii ortogonali $v_1, v_2, ..., v_{n-1}$
   - construim vectorul $v_n = e_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_{n-1} v_{n-1}$, determinand scalarii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}$ astfel ca $v_n \perp v_1, v_2, ..., v_{n-1}$, adica rezolvand sistemul liniar compatibil determinat de $n-1$ ecuatii si $n-1$ necunoscute $v_n \cdot v_i = 0,\ i = \overline{1, n-1}$; am obtinut astfel baza ortogonala $B' = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$.
2. Luand versorii vectorilor $v_1, v_2, ..., v_n$, adica $w_i = \frac{1}{\|v_i\|} v_i, i = \overline{1, n}$ obtinem baza ortonormata $B_o = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$.

Exemplul 7.5.1. Sa se ortonormeze baza $B = \{e_1 = (1,1,0), e_2 = (0,1,1), e_3 = (1,0,1)\}$. Construim intai baza ortogonala $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$. Fie

$$v_1 = e_1 = (1,1,0)$$

. Determinam $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca $v_2 = e_2 - \lambda v_1 = (0,1,1) - \lambda(1,1,0) = (-\lambda, 1-\lambda, 1-\lambda) \perp v_1$. Avem $v_1 v_2 = 0 \Leftrightarrow -\lambda + 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$, iar

$$v_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

este acum un vector perpendicular pe v_1. Determinam acum $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ astfel ca pentru $v_3 = e_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2$ sa avem $v_1 \cdot v_3 = v_2 \cdot v_3 = 0$. Cum $v_3 = e_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 = (1,0,1) - \lambda_1(1,1,0) - \lambda_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(1 - \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2, -\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2, 1 - \frac{1}{2}\lambda_2\right)$, din conditiile de ortogonalitate obtinem

$$v_1 \cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 - \lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2} \text{ si}$$

$$v_2 \cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow -1 + \lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 - \lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 + 1 - \frac{1}{2}\lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = 0.$$

Prin urmare $v_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$. Deoarece $\|v_1\| = \sqrt{2}, \|v_2\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$si $\|v_3\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$, luand $w_1 = \frac{1}{\|v_1\|}v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $w_2 = \frac{1}{\|v_2\|}v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ si $w_3 = \frac{1}{\|v_3\|}v_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, am determinat baza ortonormata $B_o = \{w_1, w_2, w_3\}$.

Observatia 7.5.1.

1.2 B. Probleme rezolvate

1. Să se stabilească dacă următoarele forme biliniare pe R^2 reprezintă produse scalare: a) $q_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q_1(u,v) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$, $\forall u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2)$;
   a) $q_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q_1(u,v) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$, $\forall u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2)$.
   REZOLVARE:
   Forma biliniară q_1 are matricea

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ & \end{bmatrix}$$

   care e o matrice simetrică, deci q_1 e o formă biliniară simetrică. În plus, are valorile proprii $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$ pozitive, deci forma pătratică asociată e pozitiv definită. Aşadar q_1 este un produs scalar pe $\mathbb{R}^2$.

Pentru forma biliniară q_2 de la b), observăm că ea are matricea

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ & \end{bmatrix}$$

care e o matrice simetrică, deci q_2 e şi ea o formă biliniară simetrică. În plus, are valorile proprii $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ iar λ_2 nu e pozitivă, deci forma pătratică asociată nu e pozitiv definită. Deci q_2 nu este un produs scalar pe $\mathbb{R}^2$.

2. Calculaţi cosinusul unghiului $\angle(u, v)$ şi determinaţi versorul v_0 al vectorului v pentru vectorii $u = (1, 2, 3), v = (-1, 1, 2) \in (\mathbb{R}^3, \cdot)$. Unghiul dintre cei doi vectori este unul ascuţit sau obtuz?
REZOLVARE:
Calculăm produsul scalar $u \cdot v = 1(-1) + 2 + 6 = 7$ şi normele $||u|| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ şi $||v|| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$. Deci $\cos(\widehat{u,v}) = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{7}{2\sqrt{21}}$. Cosinusul fiind pozitiv, unghiul este ascuţit.

   Versorul v_0 al vectorului v îl calculăm prin $v_0 = \frac{1}{||v||}v = \frac{1}{\sqrt{6}}v = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$.

3. Arătaţi că

$$B = \{q_1 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, q_2 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, q_3 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}\}$$

   este o bază ortonormată în $(\mathbb{R}^{3\times 1}, \cdot)$.
REZOLVARE:
Calculăm produsele scalare $q_1 \cdot q_2 = q_1^T q_2 = [1/3, -2/3, 2/3] \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = 0$, $q_1 \cdot q_3 = q_1^T q_3 = [1/3, -2/3, 2/3] \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = 0$ şi $q_2 \cdot q_3 = q_2^T q_3 = [2/3, 2/3, 1/3] \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = 0$ şi vedem că vectorii din B sunt doi câte doi ortogonali. Dar orice sistem de vectori doi câte doi ortogonali este şi un sistem liniar independent. Cum $card(B) = 3 = dim(\mathbb{R}^{3\times 1})$, avem că vectorii din B formează un sistem liniar independent maximal de vectori doi câte doi ortogonali, adică o bază ortogonală în $(\mathbb{R}^{3\times 1}, \cdot)$.

   În plus, $||q_1|| = \sqrt{1/9 + 4/9 + 4/9} = 1$. Analog, $||q_2|| = ||q_3|| = 1$, deci B este o bază ortonormată în $(\mathbb{R}^{3\times 1}, \cdot)$.

4. Calculaţi coordonatele vectorului $u = [1, 2, 3]^T$ în raport cu baza ortonormată B de la problema 3.

REZOLVARE:
Vectorul u admite în raport cu baza ortonormată B reprezentarea Fourier

$$u = (q_1 \cdot u)q_1 + (q_2 \cdot u)q_3 + (q_3 \cdot u)q_3$$

Calculând produsele scalare din cele trei paranteze vom ob'tine că $u = q_1 + 6q_2 + 2q_3$, deci $u_B = [1, 6, 2]^T$.

5. Scrieţi matricile de trecere T_{B_cB} şi T_{BB_c}, unde B este baza de la problema 3 iar B_c este baza canonică din $\mathbb{R}^{3\times 1}$ şi folosiţi una din aceste matrici pentru a calcula coordonatele în baza B ale vectorului $v = [2, 1, -1]^T$.
REZOLVARE:
Întâi $T_{B_cB} = [q_{1_B}|q_{2_B}|q_{3_B}] = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$. Apoi, $T_{BB_c} = T^{-1}_{B_cB} = T^T_{B_cB}$ unde prima egalitate rezultă din proprietăţile matricilor de trecere iar a doua din faptul că matricea de trecere între două baze ortonormate e o matrice ortogonlă. Aşadar $T_{BB_c} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$.
Pentru coordonate, avem $v_B = T_{BB_c}v_{B_c} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 5/3 \\ -5/3 \end{bmatrix}$.

6. Construiţi două baze ortonormate în $(\mathbb{R}^2, \cdot)$, $B_1 = \{q_1, q_2'\}$ şi $B_2 = \{q_1, q_2''\}$ pentru care primul vector q_1 face un unghi θ de măsură $\frac{\pi}{6}$ cu vectorul e_1.
REZOLVARE:
q_1, fiind versor, coordonatele sale sunt cosinuşii directori, deci cosinusurile unghiurilor pe care acesta le face cu vectorii bazei canonice: $q_1 = (\cos\widehat{(q_1, e_1)}, \cos\widehat{(q_1, e_2)}) = (\cos\theta, \cos(\pi/2 - \theta)) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Pentru al doilea vector, avem două variante de a alege vectori ortogonali pe q_1 şi de aceeaşi normă, mai precis $q_2' = (-\sin\theta, \cos\theta)$ şi $q_2'' = (\sin\theta, -\cos\theta)$. Aşadar pentru $\theta = \pi/6$, $B_1 = \{q_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2), q_2' = (-1/2, \sqrt{3}/2)\}$ si $B_2 = \{q_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2), q_2'' = (1/2, -\sqrt{3}/2)\}$.

7. Dacă A este o matrice pătratică nesingulară, să se determine care din liniile l_i ale lui A şi coloanele c_j ale lui A^{-1} reprezintă vectori ortogonali.
REZOLVARE:
Când calculăm produsul $A \cdot B$ a două matrici, elementul c_{ij} din matricea produs este de fapt produsul scalar între linia i a matricii A şi coloana j a matricii B.

La matricea din enunţ, $AA^{-1} = I_n$ deci $l_i \cdot c_j = \delta_{ij}$, unde δ_{ij}, simbolul lui Kronecker este elementul de pe poziţia (i, j) din matricea unitate. Deci linia l_i a lui A şi coloana c_j a lui A^{-1} reprezintă vectori ortogonali dacă şi numai dacă $i \neq j$.

8. Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Să se arate că subspaţiile $Null(A)$ şi $L(A) = C(A^T)$ ale lui $\mathbb{R}^m$ sunt ortogonale.
REZOLVARE:
Fie $u \in Null(A)$ si $v \in L(A)$, oarecare. Din definiţiile celor două subspaţii, avem că $Au = \theta$, respectiv că există $x \in \mathbb{R}^m$ astfel încât $A^T x = v$ (scrierea matricială a faptului că v se poate scrie combinaţie liniară de coloanele lui A^T).

   Calculăm produsul scalar $v \cdot u = v^T u = (A^T x)^T u = x^T Au = x^T \theta = x \cdot \theta = 0$, deci cei doi vectori sunt ortogonali. Cum vectorii sunt arbitrar aleşi, rezultă că cele două subspaţii sunt ortogonale.

9. Să se dea exemplu de o matrice A pentru care $u = (1, 2, 1) \in L(A)$ şi $v = (1, -2, 1) \in Null(A)$, sau în cazul în care nu există o astfel de matrice, să se argumenteze inexistenţa ei.
REZOLVARE:
Din problema de mai sus, $Null(A) \perp L(A)$. Dar $u \cdot v = -4 \neq 0$, deci nu există matrici cu proprietatea cerută.

   Să se arate că dacă $Au \in Null(A^T)$, atunci $Au = \theta$, pentru orice matrice A.
REZOLVARE:
Dacă $Null(A) \perp L(A)$, atunci prin transpunere, avem că $Null(A^T) \perp C(A)$. Au este un vector din $C(A)$ şi $Null(A^T)$, dar intersecţia a două subspaţii ortogonale este formată doar din vectorul nul, deci $Au = \theta$.

10. Să se construiască prin procedeul Gram-Schmidt o bază ortonormată în $(\mathbb{R}^3, \cdot)$, pornind de la baza $B = \{u_1 = (1, -2, 2), u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = (2, 1, 3)\}$.
REZOLVARE:

    Construim intai baza ortogonala $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$. Fie

$$v_1 = u_1 = (1, -2, 2)$$

   . Determinam $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $v_2 = u_2 - \lambda v_1 = (-1, 1, 0) - \lambda\,(1, -2, 2) = (-1 - \lambda, 1 + 2\lambda, -2\lambda) \perp v_1$. Avem $v_1 v_2 = 0 \Leftrightarrow -3 - 9\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$, deci

$$v_2 = \left(-1 + \frac{1}{3}, 1 - \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

   este un vector ortogonal pe v_1. Determinam în continuare $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ astfel ca pentru $v_3 = u_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2$ sa avem $v_1 \cdot v_3 = v_2 \cdot v_3 = 0$. Cum $v_3 = u_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 = (2, 1, 3) - \lambda_1\,(1, -2, 2) - \lambda_2\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(2 - \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2, 1 + 2\lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_2, 3 - 2\lambda_1 - \frac{2}{3}\lambda_2\right)$, din conditiile de ortogonalitate obtinem

$$v_1 \cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow -9\lambda_1 + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{2}{3} \text{ si}$$

$$v_2 \cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow 3 - 3\lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = 1.$$

Deci $v_3 = (2, 2, 1)$. Împărţim fiecare vector la norma lui şi obţinem baza ortonormată $B_2 = \{q_1 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}), q_2 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}), q_3 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})\}$

11. Să se determine o bază în complementul ortogonal $u^\perp$ al vectorului $u = (1, -1, 2) \in (\mathbb{R}^3, \cdot)$.
REZOLVARE:
Fie $= (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, oarecare. $v \in u^\perp$ dacă şi numai dacă $v \cdot u = 0$, adică $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. Rezovând acest sistem de o ecuaţie cu trei necunoscute de rang 1, x_1 e necunoscută principală iar $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$ sunt necunoscute secundare. Astfel $x_1 = \alpha + 2\beta$ şi deci $v \in u^\perp \iff v = (\alpha + 2\beta, \alpha, \beta) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(2, 0, 1)$. Dacă notăm $v_1 = (1, 1, 0)$ şi $v_2 = (2, 0, 1)$, am arătat că $u^\perp = Span(v_1, v_2)$, iar cum aceşti vectori sunt liniar independenţi, $B_1 = \{v_1, v_2\}$ formează o bază în $u^\perp$.

12. Să se determine proiecţia ortogonală a vectorului $w = (1, 1, 1)$ pe subspaţiul $u^\perp$ din problema 12.
REZOLVARE:
Proiecţia ortogonală a lui w pe S o calculăm ca sumă a proiecţiilor pe vectorii unei baze ortonormate din S.

Pentru aceasta, aplicăm procedeul Gram-Schmidt bazei B_1 din S, găsită în rezolvarea problemei precedente. Construim vectorii ortogonali $o_1 = v_1 = (1, 1, 0)$, iar $o_2 = v_2 - \lambda v_1 = (2, 0, 1) - \lambda(1, 1, 0) = (2 - \lambda, -\lambda, 1)$. Dar $o_1 \cdot o_2 = 0$ dacă şi numai dacă $2 - 2\lambda = 0 \iff \lambda = 1$ de unde $o_2 = (1, -1, 1)$. Normând aceşti vectori, găsim baza ortonormată $B_2 = \{q_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), q_2 = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\}$.

Astfel, proiecţia cerută este $s = pr_S w = pr_{q1} w + pr_{q_2} w = (q_1 \cdot w)q_1 + (q_2 \cdot w)q_2 = \frac{2}{\sqrt{2}} q_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} q_2 = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$

13. Să se descompună vectorul $w = (1, 1, 1)$ în suma dintre un vector coliniar cu u din problema 12 şi un vector ortogonal pe u.
REZOLVARE:
Descompunerea este $w = pr_u w + pr_{u^\perp} w$. Proiecţia lui w pe $u^\perp$ e chiar proiecţia s calculată în problema precedentă. Mai rămâne să calculăm $s' = pr_u w =$.

Norma lui u este $||u|| = \sqrt{6}$ 'si deci acesta are versorul $u_0 = \frac{1}{||u||} u = \frac{1}{\sqrt{6}} u = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$.

Atunci $pr_u w = pr_{u_0} w = (u_0 \cdot w)u_0 = \frac{2}{\sqrt{6}} u_0 = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

//

1.3 C. Exercitii

2

2.1

1. Fie $u = (1, -1, 2, 3)$ si $v = (-2, 0, 3, 1)$ doi vectori din spatiul euclidian canonic $\mathbb{R}^4$.

   (a) Sa se determine versorii u° si v° ai vectorilor u si v.

   (b) Sa se calculeze masura unghiului dintre vectorii u si v.

   (c) Sa se determine un vector u_1 care are aceasi directie si acelasi sens ca u, de norma 13.

   (d) Sa se determine un vector unitar w ortogonal pe vectorii $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, u si v.

   Raspuns. **a.** $u^\circ = \left(\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{-1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}} \right)$, $v^\circ = \left(\frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{0}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right)$. **b.** $\arccos \frac{7}{\sqrt{210}}$. **c.** $u_1 = \left(\frac{13}{\sqrt{15}}, \frac{-13}{\sqrt{15}}, \frac{26}{\sqrt{15}}, \frac{39}{\sqrt{15}} \right)$. **d.** $w \in \left\{ \left(0, \pm \frac{7}{\sqrt{59}}, \pm \frac{1}{\sqrt{59}}, \mp \frac{3}{\sqrt{59}}, \right) \right\}$.

2. Forma $\varphi \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^3\right)$ este definita prin $\varphi\left((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\right) = x_1y_1 + ax_2y_2 + 4x_3y_3 + bx_3y_1 - cx_2y_3 + bx_1y_3$. Sa se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel ca $\left(\mathbb{R}^3, \varphi\right)$ sa fie spatiu euclidian si multimea vectorilor care se afla la distanta 1 de origine.

   Raspuns. $a \in (0, \infty), b \in (-2, 2), c = 0$; $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + ay^2 + 4z^2 + 2bxz = 1 \right\}$.

3. Determinati doi vectori ortogonali din spatiul euclidian canonic, ortogonali la randul lor pe vectorul $(1, 1, 1)$.

   Raspuns. De exemplu $u = (1, 0, -1) \perp (1, 1, 1)$ si $\{(1, 0, -1), (1, 1, 1)\}^\perp = \{(x, y, z) \mid x - z = 0 = x + y + z\} = \{(x, -2x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, iar $u = (1, 0, -1)$ si $v = (1, -2, 1)$ sunt doi asemenea vectori.

4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ doua matrice ortogonale (i.e $A^T A = I_n$ si $B^T B = I_n$).

   (a) Sa se arate ca $AA^T = I_n$.

   (b) Sa se arate ca determinantul matricei ortogonale A este egal cu 1 sau -1.

   (c) Sa se arate ca $A^{-1} = A^T$.

   (d) Sa se arate ca matricea AB este ortogonala.

   (e) Este adevarat ca matricea $A + B$ este ortogonala?

   (f) Sa se arate ca multimea matricelor ortogonale din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formeaza un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor nesingulare.

   (g) Formeaza multimea matricelor ortogonale din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un subspatiu vectorial?

5. Sa se arate ca daca matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ are coloanele unitare si ortogonale (in spatiul euclidian canonic $\mathbb{R}^{2\times 1}$) atunci ea este ortogonala, i.e. $A^T A = I_2$. Generalizare.

   Sa se proiecteze ortogonal primul vector pe cel de al doilea (in spatiul euclidian canonic adecvat):

   (a) $(2,1), (3,-2)$;
   (b) $(2,1), (3,0)$;
   (c) $(1,1,4), (1,2,-1)$;
   (d) $(1,1,4), (3,3,12)$.

   Raspuns. **a.** $\left(\frac{12}{13}, -\frac{8}{13}\right)$; **b.** $(1,0)$; **c.** $\left(\frac{-1}{6}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{6}\right)$; **d.** $(1,1,4)$.

6. Sa se determine $a, b \in (0,\infty)$ astfel incat matricea $\begin{pmatrix} a & a & -b \\ a & -b & a \\ -b & a & a \end{pmatrix}$ sa fie ortogonala.

   Raspuns. $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$

7. *Intr-un spatiu euclidian subspatiul U este inclus in subspatiul V. Aratati ca $V^\perp \le U^\perp$.

8. Completati multimea $\{u, v\}$ pana la o baza ortogonala in spatiul euclidian canonic $\left(\mathbb{R}^4, .\right)$, unde

   (a) $u = (1,-2,2,-3), v = (2,-3,2,4)$;
   (b) $u = (1,1,1,2), v = (1,2,3,-3)$.

   Raspuns. De exemplu cu vectorii: **a.** $(2,2,1,0)$, $(5,-2,-6,-1)$; **b.** $(1,-2,1,0), (25,4,-17,-6)$.

9. In ce se transforma o baza ortonormata daca aplicam procedeul de ortonormare Gram-Schmidt?

10. Fie $\begin{pmatrix} 4 & -23 & 17 \\ 11 & -43 & 30 \\ 15 & -54 & 37 \end{pmatrix}$ matricea unui operator al spatiului euclidian canonic $\mathbb{R}^3$. Sa se determine o baza ortonormata a unui subspatiu invariant de dimensiune 2 al acestui operator.

    Raspuns. e.g. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}$.

11. Completati multimea $\{u, v\}$ pana la o baza ortonormata in spatiul euclidian canonic adecvat, unde

    (a) $u = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), v = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$;
    (b) $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), v = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Raspuns. **a.** cu unul dintre vectorii $\pm\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$; **b**. de exemplu cu $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ si $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

12. *Fie $(V,\cdot)$ un spatiu euclidian si doi vectori nenuli $u,v\in V$. Aratati ca $u\cdot v=\|u\|\,\|v\|$ daca si numai daca vectorii u si v au aceeasi directie si acelasi sens.

13. Construiti o baza ortogonala a subspatiului generat de vectorii din spatiul canonic $\left(\mathbb{R}^4,.\right)$:

    (a) $(1,2,2,-1),(1,1,-5,3),(3,2,8,-7)$;

    (b) $(1,1,-1,-2),(5,8,-2,-3),(3,9,3,8)$.

    Raspuns. **a.** E.g. $(1,2,2,-1),(2,3,-3,2),(2,-1,-1,-2)$; **b**. $(1,1,-1,-2),(2,5,1,3)$.

14. Aratati ca ortogonalizand un sistem de vectori liniar independent S al spatiului euclidian canonic $(\mathbb{R}^n,.)$ obtinem un sistem S' pentru care $span\,(S)=span\,(S')$.

15. In spatiul euclidian canonic $\left(\mathbb{R}^3,.\right)$ consideram vectorul $u=(1,1,1)$. Sa se determine o baza ortonormata a subspatiului ortogonal $u^{\perp}$.

    Raspuns. E.g. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}$.

16. In spatiul euclidian canonic $\left(\mathbb{R}^3,.\right)$ consideram S multimea vectorilor care fac un unghi de masura $\frac{\pi}{4}$ cu vectorul $u=(1,1,1)$. Formeaza S un subspatiu vectorial al spatiului $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$?

    Raspuns. Nu; de exemplu $(0,0,0)\notin S$.

17. In spatiul euclidian $(\mathbb{R}_2[x],\langle,\rangle)$ distanta de la vectorul $p=1+x+x^2$ la vectorul nul este este 2, iar matricea produsului scalar $\langle,\rangle$ in baza canonica $\left\{1,x,x^2\right\}$ este $\begin{pmatrix}1 & ab & ab\\ a & 1 & ab\\ a & a & 1\end{pmatrix}$. Sa se determine subspatiul $p^{\perp}$ si o baza ortonormata a acestuia.

    Raspuns. $\left\{\alpha\left(1-x^2\right)+\beta\left(x-x^2\right)\mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$; de exemplu:$\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-x^2\right),-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(1-x\right)^2\right\}$.

18. Daca φ este o forma biliniara a spatiului n-dimensional V/K, in ce conditii cuplul (V,φ) este spatiu euclidian?

19. Determinati un sistem maximal de vectori ortonormati astfel incat primii doi vectori sa genereze spatiul coloanelor matricei $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\\ -2 & 4\end{pmatrix}$.

    Raspuns. $\left\{\begin{pmatrix}1/3\\ 2/3\\ -2/3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2/3\\ 1/3\\ 2/3\end{pmatrix},v\right\},\ v\in\left\{\pm\begin{pmatrix}2/3\\ -2/3\\ -1/3\end{pmatrix}\right\}$.

20. Folositi procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt pentru a determina doua baze ortonormate B° si $B^{\circ\circ}$ pornind de la baza $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ din spatiul euclidian canonic$\left(\mathbb{R}^3,.\right)$; care este matricea de trecere de la baza B° la baza $B^{\circ\circ}$?

Raspuns. De exemplu, pornind de la vectorul $(1,1,0)$, respectiv de la vectorul $(0,1,1)$ obtinem $B^{\circ} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$, $B^{\circ\circ} = \left\{\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$, iar $T_{B^{\circ}B^{\circ\circ}} = T^T_{B_cB^{\circ}}T_{B_cB^{\circ\circ}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

21. *Fie $(V,\cdot)$ un spatiu euclidian n dimensional si $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ o baza a sa. Sa se arate ca $u\cdot v = x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$, $\forall u = x_1e_1+x_2e_2+...+x_ne_n$, $v=y_1e_1+y_2e_2+...+y_ne_n \in V$ daca si numai daca baza B este ortonormata.

22. *Fie $(V,\cdot)$ un spatiu euclidian, $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ o baza ortonormata a sa si $v \in V$ un vector nenul. Sa se arate ca v este versor daca si numai daca coordonatele sale in baza B sunt cosinusurile unghiurilor dintre v si vectorii bazei B.

23. *Sa se arate ca matricea de trecere dintre doua baze ortonormate ale unui spatiu euclidian n dimensional este o matrice ortogonala.

24. Fie spatiul euclidian canonic $\left(\mathbb{R}^4,.\right)$. Sa se determine o baza ortonormata a subspatiului generat de vectorii $(2,1,3,-1),(7,4,3,-3),(1,1,-6,0),(5,7,7,8)$.

Raspuns. e.g. $\{\left(\frac{2}{\sqrt{15}},\frac{1}{\sqrt{15}},\frac{3}{\sqrt{15}},\frac{-1}{\sqrt{15}}\right),\left(\frac{3}{\sqrt{17}},\frac{2}{\sqrt{17}},\frac{-3}{\sqrt{17}},\frac{-1}{\sqrt{17}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{127}},\frac{5}{\sqrt{127}},\frac{1}{\sqrt{127}},\frac{10}{\sqrt{127}}\right)\}$.

25. Consideram aplicatia $(,) : \mathbb{R}_2[x]\times\mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ definita prin $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

    (a) Sa se arate ca $(\mathbb{R}_2[x],(,))$ este un spatiu euclidian.

    (b) Sa se calculeze masura unghiurilor dintre vectorii $f=1$, $g=x$ si $h=1+x$.

    (c) Sa se defineasca un izomorfism de spatii vectoriale $\tau : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ si un produs scalar pe $\mathbb{R}^3$ astfel incat unghiurile triunghiului $\tau(f),\tau(g),\tau(h)$ sa aiba masurile $\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}$, respectiv 0.

Raspuns. **b.** $\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6},0$. **c.** e.g. $\tau\left(a+bx+cx^2\right)=(a,b,c)$; $\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = \left(\tau^{-1}(x_1,x_2,x_3),\tau^{-1}(y_1,y_2,y_3)\right)$.

26. Sa se verifice daca polara formei patratice $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ este produs scalar pe $\mathbb{R}^3$ si, in caz afirmativ, sa se calculeze masura unghiului dintre primii doi vectori ai bazei canonice (desigur, relativ la acest produs scalar).

(a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

(b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

(c) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

Raspuns. **a.** forma f nu este pozitiv definita; **b.** forma f nu este pozitiv definita; **c.** $\frac{\pi}{3}$.

27. Aratati ca, intr-un spatiu euclidian, un sistem de vectori ortogonali este un sistem liniar independent.

28. Pe spatiul vectorial al polinoamelor de grad mai mic sau egal cu doi definim forma $(,) : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ prin $(f, g) = a_0b_0 + 2a_1b_1 + a_2b_2$, unde $f = a_0 + a_1x + a_2x^2$ si $g = b_0 + b_1x + b_2x^2$.

    (a) Sa se arate ca $(\mathbb{R}_2[x], (,))$ este un spatiu euclidian.

    (b) Sa se gaseasca un vector f_0 aflat la distanta d fata de vectorii $f_1 = 2 + x + 5x^2$, $f_2 = 2 + x = x^2$, $f_3 = 4 + x + 5x^2$, $f_4 = 3 + 3x + 5x^2$ si sa se calculeze aceasta distanta.

    Raspuns. **b.** $f_0 = 3 + \frac{15}{8}x + 2x^2$; $d = \frac{3\sqrt{82}}{8}$.

29. Fie $(V, \cdot)$ un spatiu euclidian n-dimensional si $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice ortogonala. Sa se arate ca exista doua baze ortonormate $B, B' \subset V$ asfel incat T sa fie matricea de trecere de la baza B la baza B'.

30. *Fie $(V, \cdot)$ un spatiu euclidian, $V_1 \leq V$ si $V_2 \leq V$ doua subspatii astfel incat $dim\,(V_1) < dim\,(V_2)$. Aratati ca exista $v \in V_2$ ortogonal pe toti vectorii din V_1.

31. Sa se descompuna vectorul $v = (5, 2, -2, 2) \in \mathbb{R}^4$ in suma a doi vectori, unul din subspatiul S generat de vectorii $(2, 1, 1, -1)$ si $(1, 1, 3, 0)$, iar celalalt din complementul ortogonal $S^\perp$.

    Raspuns. $v = (3, 1, -1, -2) + (2, 1, -1, 4)$.

32. Sa se determine complementul ortogonal al subspatiului generat de vectorii $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $(2, 3, 4, 5, 6, 7)$, $(3, 4, 5, 6, 7, 8)$ in spatiul euclidian canonic $\mathbb{R}^6/\mathbb{R}$.

33. *Sa se arate ca in spatiul euclidian canonic $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ pentru orice subspatii $U, V \leq \mathbb{R}^n$:

    (a) $\left(U^\perp\right)^\perp = U$;

    (b) $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$;

    (c) $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$;

    (d) $(\mathbb{R}^n)^\perp = \mathbf{0}$;

    (e) $\mathbf{0}^\perp = \mathbb{R}^n$,

unde cu **0** am notat subspatiul nul, iar cu $U^{\perp}$ am notat complementul ortogonal al subspatiului U.

34. *Sa se demonstreze ca $U \cap U^{\perp} = \{\theta\}$, unde U este un subspatiu al unui spatiu euclidian V.

35. *Fie V un spatiu euclidian si $U \leq V$. Sa se arate ca orice vector $v \in V$ se exprima in mod unic ca suma unui vector $u \in U$ cu un vector $u' \in U^{\perp}$, adica $U \oplus U^{\perp} = V$.

36. *Sa se arate ca daca V este un spatiu euclidian n dimensional si U este un subspatiu al sau atunci $dim(U^{\perp}) = n - dim(U)$.

37. *Fie $(V, \cdot)$ un spatiu euclidian n dimensional si $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ o baza a subspatiului sau U. Sa se arate ca $U^{\perp} = \left\{v \in V \mid v \perp v_i, i = \overline{1, m}\right\} \cup \{\theta\}$.

38. Subspatiul V al spatiului euclidian canonic $\mathbb{R}^4$ este definit de ecuatiile:

    $2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$, $3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0$, $3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0$.

    (a) Determinati un numar minimal de ecuatii care sa defineasca complementul ortogonal $V^{\perp}$.

    (b) Descompuneti vectorul $u = (1, 1, 1, 1)$ in suma $v + v'$, cu $v \in V$ si $v' \in V^{\perp}$.

    Raspuns. **a.** E.g. $6y_1 - 9y_2 - y_3 = 0, y_2 + y_4 = 0$. **b.** $v = \left(\frac{12}{31}, \frac{22}{31}, \frac{-2}{31}, \frac{40}{31}\right)$, $v' = \left(\frac{19}{31}, \frac{9}{31}, \frac{33}{31}, -\frac{9}{31}\right)$.

39. Aratati ca daca v este un vector nenul dintr-un spatiu euclidian n-dimensional atunci exista o matrice $A \in \mathbb{R}^{1\times n}$ astfel incat subspatiul $v^{\perp}$ este izomorf cu $Null\,(A)$.

40. Demonstrati propozitia 7.2.2.

41. *Fie* V un spatiu euclidian si $S \leq V$. Aratati ca

    (a) orice vector $v \in V$ se exprima unic ca o suma de forma $v = s + s'$, unde $s \in S$ si $s' \in S^{\perp}$;

    (b) daca B este o baza in S iar B' este o baza $S^{\perp}$ atunci $B \cup B'$ este o baza in V. .

42. *Fie* V un spatiu euclidian si $S \leq V$ astfel ca $m := \dim S < \dim V := n$ si $B = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ o baza in S. Aratati ca

$$S^{\perp} = \left\{v \in V \mid ve_i = 0 i = \overline{1, m}\right\}.$$

//