1 11. CURBE PLANE SI CURBE IN SPATIU

1.1 A. TEORIE

Toate functiile care intervin in cele ce urmeaza sunt diferentiabile.

1.1.1 11.1 Reprezentari

Curbe plane exprimate prin ecuatia explicita. Daca $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o functie, iar I este un interval, multimea punctelor $M(x, y)$ (din planul xOy) pentru care $y = f(x)$ se numeste *graficul functiei* f sau *curba de ecuatie* $y = f(x)$. Scriem

$$\Gamma : y = f(x), x \in I$$

si spunem ca Γ este data prin *ecuatia explicita* $y = f(x)$.

Daca $M(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$, atunci *panta tangentei* (i.e. tgα, unde α este unghiul facut de tangenta la grafic in punctul M cu semiaxa Ox) este $f'(x_0)$, iar *tangenta la grafic* in acest punct are ecuatia

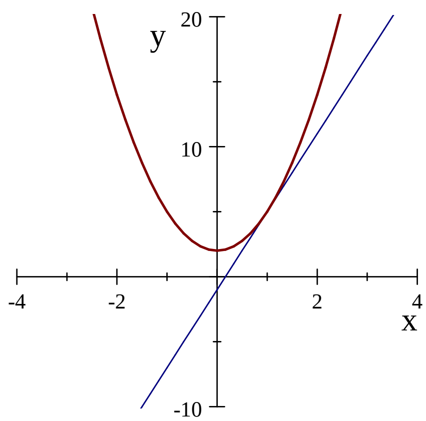
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Normala la curba in punctul $M(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ este perpendiculara pe tangenta in M la curba. Daca $f'(x_0) \neq 0$, aceasta normala are panta $-\frac{1}{f'(x_0)}$ iar ecuatia sa este

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

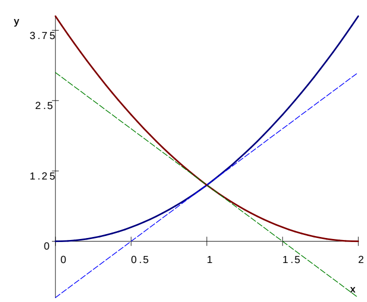
Unghiurile dintre curbele Γ_1 si Γ_2 intr-un punct de intersectie $M(x_0, y_0) \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ sunt definite ca unghiurile (suplementare) dintre tangentele la cele doua curbe in M. Prin abuz de limbaj folosim sintagma *unghiul dintre curbele* Γ_1 si Γ_2 in locul expresiei *unghiurile dintre curbele* Γ_1 si Γ_2.

Exemplul 11.1.1. Tangenta in punctul $(1, 5)$ la graficul functiei $f(x) = 3x^2 + 2$ are panta $f'(1) = 6$ si ecuatia acestei tangente este $y - 5 = 6(x - 1)$.



Normala in punctul $(1,5)$ la graficul functiei $f(x) = 3x^2 + 2$ are panta $-\frac{1}{6}$ si ecuatia acestei normale este $y - 5 = -\frac{1}{6}(x-1)$.

1. **Exemplul 11.1.2.** Unghiul dintre parabolele de ecuatii $y = (x-2)^2$ si $y = x^2$



$y = (x-2)^2$ and $y = x^2$

in unicul punct de intersectie - $(1,1)$ - are masura $arctg\frac{4}{3}$ (respectiv $\pi - arctg\frac{4}{3}$).

Curbe plane exprimate implicit. Daca $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o functie de clasa $C^n, n \geq 1$, atunci multimea punctelor $M(x,y)$ (din planul xOy) pentru care $F(x,y) = 0$ se numeste *curba de ecuatie* $F(x,y) = 0$. Scriem

$$\Gamma : F(x,y) = 0, (x,y) \in D$$

si spunem ca Γ este curba data *implicit* de ecuatia $F(x,y) = 0$, $(x,y) \in D$.

Daca $M(x_0,y_0) \in \Gamma$, iar $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$, conform teoremei functiilor implicite, ecuatia $F(x,y) = 0$ defineste intr-o vecinatate a punctului x_0 o unica functie $y = y(x)$ de clasa C^n pentru care $y(x_0) = y_0$ (pe acea vecinatate avem $F(x, y(x)) = 0$).

Atunci *panta tangentei* la curba Γ in M este

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)},$$

tangenta la curba Γ in acest punct are ecuatia

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$$

iar *normala la curba* Γ in acest punct -daca $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$ - are panta

$$-\frac{1}{y'(x_0)} = \frac{F'_y(x_0, y_0)}{F'_x(x_0, y_0)}.$$

Un *vector director al normalei* la curba Γ in $M \in \Gamma$ este gradientul functiei F in acest punct:

$$\overline{N} = gradF(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0)\,\bar{i} + F'_x(x_0, y_0)\,\bar{j}.$$

Unghiul dintre curbele Γ_1, Γ_2 date implicit intr-un punct de intersectie $M \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ este definit, ca in cazul curbelor date explicit, ca unghiul dintre tangentele la cele doua curbe in M.

O **curba de gradul doi**, adica o curba de ecuatie

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

unde $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R}$ si $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$, se numeste **conica**.

Exemplul 11.1.3. Sa se determine tangentele la curba

$$\Gamma : F(x, y) := x^3 - 3x^2y + y^3 - 1 = 0$$

paralele cu prima bisectoare.

Solutie. Prima bisectoare (de ecuatie $y = x$) are panta 1. Prin urmare trebuie sa determinam $M(x, y) \in \Gamma$ astfel incat $-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = 1$. Pentru a determina coordonatele unui asemenea punct trebuie sa rezolvam sistemul

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2y + y^3 - 1 = 0 \\ y^2 - 2xy = 0 \end{cases}.$$

Obtinem punctele $M_1(1, 0), M_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{2}{\sqrt[3]{3}}\right) \in \Gamma$ in care tangentele la curba Γ sunt

$$T_1 : y = x - 1,$$

respectiv

$$T_2 : y = x + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

1.1.2 11.2. Conice

Conicele, numite asa de vechii greci, sunt curbe (plane) obtinute prin sectionarea suprafetelor conice cu plane -*sectiuni conice*. Astazi ele sunt descrise ca graficele functiilor definite de ecuatii de gradul al doilea in planul xOy. Conicele au o importanta practica mare deoarece, printre altele, ele ofera o descriere comoda a traiectoriilor planetelor, satelitilor, ori a electronilor.

11.2.1. Conice pe ecuatie redusa.

Cercul. *Locul geometric al punctelor dintr-un plan aflate la o distanta constanta de un punct fix se numeste* ***cerc****.* Punctul fix se numeste ***centrul cercului,*** iar distanta constanta -pozitiva- se numeste ***raza cercului****.*

Ecuatia (canonica a) cercului *de raza* r *cu centrul in origine este*

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

iar **ecuatia cercului de raza** r **cu centrul in punctul** (α, β) este

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Convenim sa spunem ca ecuatia $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = -r^2$ (care nu are solutii reale) reprezinta un *cerc imaginar*.

In *coordonate polare* cercul de ecuatie (carteziana) $C : x^2 + y^2 = r^2$ este $\rho = r$, iar ecuatiile $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, \varphi \in [0, 2\pi)$ se constituie intr-o *parametrizare* a curbei C.

O *parametrizare a cercului* de centru (α, β) si raza r este data de:

$$x = \alpha + r \cos \varphi, y = \beta + r \sin \varphi, \varphi \in [0, 2\pi).$$

Exemplul 11.2.1. Sa determinam centrul si raza cercului de ecuatie $C : x^2 + y^2 - x + 2y = 0$ si ecuatiile tangentei si normalei la cerc in origine. Pentru a determina centrul si raza cercului C reducem ecuatia acestuia la forma canonica. Avem $\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 + 2y + 1\right) = \frac{1}{4} + 1$, deci forma canonica este

$$C : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2,$$

centrul cercului este punctul $Q\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, iar raza sa este $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Gradientul functiei $F(x, y) := x^2 + y^2 - x + 2y$ in origine furnizeaza un vector director al normalei. Deoarece $gradF(0, 0) = -\bar{i} + 2\bar{j}$, normala in origine la cercul C are ecuatia $\frac{x}{-1} = \frac{y}{2}$, ori

$$N : y = -2x,$$

si, cum panta tangentei este $-\frac{1}{-2}$, ecuatia tangentei in origine la cercul C este

$$T : y = \frac{1}{2}x.$$

Determinati ecuatiile celor doua drepte prin alta metoda.

Parabola. Locul geometric al punctelor dintr-un plan echidistante fata de un punct fix si fata de o dreapta data din acest plan se numeste *parabola*. Punctul fix poarta numele de *focar al parabolei*, iar dreapta fixa se numeste *directoarea parabolei*.

Daca focarul F este pe directoarea d, parabola este dreapta perpendiculara in F pe d; spunem, in acest caz, ca parabola este *degenerata*.

Mai departe presupunem ca $F \notin d$. In acest caz parabola are o *axa de simetrie*; intersectia acesteia cu parabola se numeste *varful parabolei*.

Parabola de focar $F(0,p)$ si directoare $y = p$ are ecuatia

$$x^2 = 4py;$$

in acest caz axa Oy este axa de simetrie, iar varful parabolei este in origine.

Daca focarul parabolei este $F(p,0)$, si parabola este tangenta in varf la axa Oy, ecuatia parabolei este

$$y^2 = 2px,$$

directoarea are ecuatia $x = -\frac{p}{2}$, iar axa Ox este axa de simetrie.

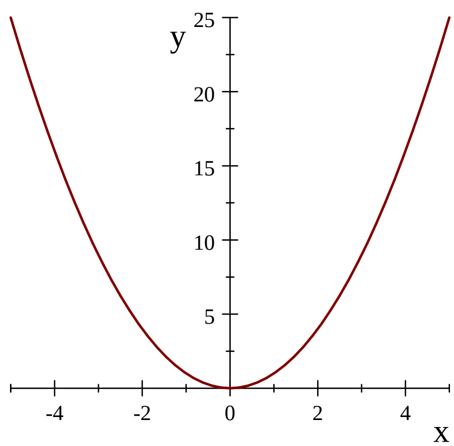
Ecuatia generala a parabolei, degenerata sau nedegenerata, este

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

unde

$$\delta := a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Exemplul 11.2.2. Parabola de ecuatie $y = x^2$ are urmatoarea reprezentare grafica.



$y = x^2$

Axa de simetrie este axa Oy, iar varful parabolei este chiar originea $O(0,0)$. Verificati ca $F\left(0,\frac{1}{4}\right)$ este focarul parabolei, iar $y + \frac{1}{4} = 0$ este ecuatia directoarei sale.

Elipsa. Locul geometric al punctelor dintr-un plan avand suma distantelor la doua puncte fixe din acest plan poarta numele de *elipsa.* Cele doua puncte fixe se numesc *focarele elipsei*. Elipsa are doua axe de simetrie ortogonale a caror intersectie se numeste *centrul elipsei*.

Ecuatia (canonica a) elipsei cu axele de simetrie chiar axele de coordonate este

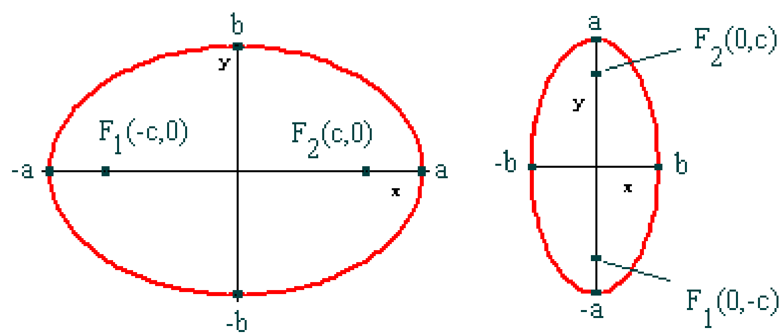
$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

numerele $a, b > 0$ se numesc *semiaxele elipsei*. Ecuatia tangentei in punctul $M(x_0, y_0) \in E$ la elipsa E este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Pentru $a = b$ elipsa E devine cerc.

Grafice. Daca F_1, F_2 sunt focarele elipsei, obtinem pentru $a > b$, respectiv $a < b$ graficele:



Elipsa cu axele de simetrie paralele cu axele de coordonate avand centrul in punctul (α, β) are ecuatia (carteziana)

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

si, in *coordonate polare generalizate*, ecuatiile parametrice

$$x = \alpha + a\cos\varphi, y = \beta + b\sin\varphi,\ \varphi \in [0, 2\pi).$$

Convenim sa spunem ca $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = -1$ este ecuatia unei elipse imaginare.

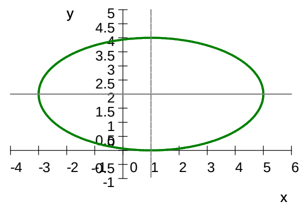
Forma generala a ecuatiei unei elipse, degenerata sau nedegenerata, este:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

unde

$$\delta := a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

Exemplul 11.2.3. Daca elipsa E are axele de simetrie paralele cu axele de coordonate, centrul $O'(1, 2)$ iar semiaxele sunt $a = 4$ si $b = 2$ atunci graficul ei este



$$\frac{(x-1)^2}{4^2}+\frac{(y-2)^2}{2^2}=1$$

Daca efectuam o rotatie de 45° inseamna ca trecem de la baza canonica B_c la baza $B=\left\{\cos\frac{\pi}{4}\bar{i}+\sin\frac{\pi}{4}\bar{j},-\sin\frac{\pi}{4}\bar{i}+\cos\frac{\pi}{4}\bar{j}\right\}$, adica facem o transformare ortogonala de matrice

$$T_{B_cB}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix};$$

atunci, daca $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si $v_B=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ avem $v_{B_c}=T_{B_cB}v_B$, deci $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\\ \frac{X+Y}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. Ecuatia elipsei E in reperul $\mathcal{R}=(O',B)$ este $\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}-1\right)^2+4\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}-1\right)^2=16$, sau, echivalent

$$5X^2+6XY+5Y^2-10\sqrt{2}X-6\sqrt{2}Y-22=0.$$

Hiperbola. Locul geometric al punctelor dintr-un plan avand diferenta distantelor la doua puncte fixe din acest plan poarta numele de *hiperbola.* Cele doua puncte fixe se numesc *focarele hiperbolei*. Hiperbola are doua axe de simetrie ortogonale al caror punct de intersectie este *centrul hiperbolei* si doua asimptote.

O hiperbola H pentru care axele de coordonate sunt axele de simetrie are ecuatia

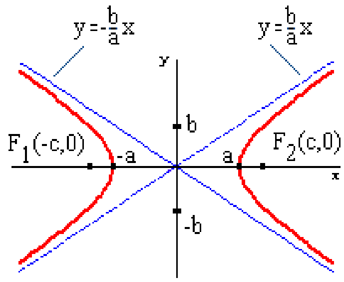
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

sau ecuatia

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1,$$

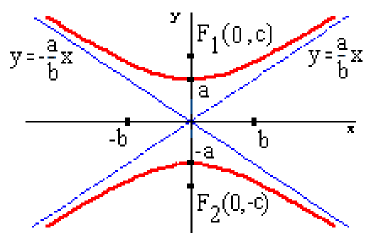
unde $a>0$, $\dot{b}>0$; aceste ecuatii sunt numite *ecuatiile canonice* (ale unei hiperbole). Daca $a=b$ atunci H este o *hiperbola echilatera*.

Grafice. Daca luam hiperbola de ecuatie $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, graficul ei este:



Varfurile acestei hiperbole sunt $(\pm a, 0)$, ecuatiile asimptotelor sunt $y = \pm \frac{b}{a} x$, iar focarele sunt $(\pm c, 0)$, unde $c^2 = a^2 + b^2$.

Daca luam hiperbola de ecuatie $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, graficul acesteia este:



Varfurile sunt $(0, \pm a)$, asimptotele au ecuatiile $y = \pm \frac{a}{b} x$, iar focarele sunt punctele $(0, \pm c)$, unde $c^2 = a^2 + b^2$.

O hiperbola cu centrul (α, β) si cu axele de simetrie paralele cu axele Ox, respectiv Oy-are ecuatia de forma:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = \pm\, 1.$$

Ecuatiile parametrice (in coordonate hiperbolice) ale hiperbolei de ecuatie canonica $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ sunt

$$x = a \cdot cht, y = b \cdot sht,\ t \in \mathbb{R},$$

unde $cht = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $sht = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ sunt functiile *cosinus hiperbolic*, respectiv *sinus hiperbolic*.

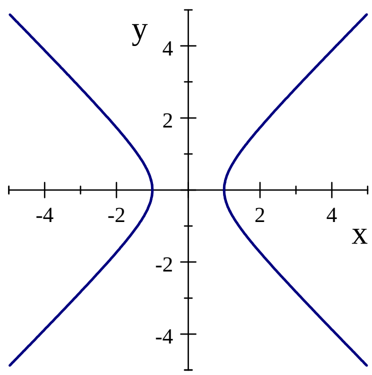
Forma generala a ecuatiei unei hiperbole, degenerata sau nedegenerata, este:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

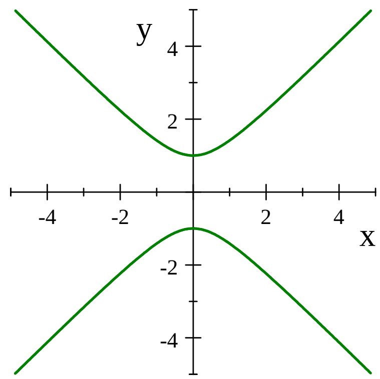
unde

$$\delta := a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0.$$

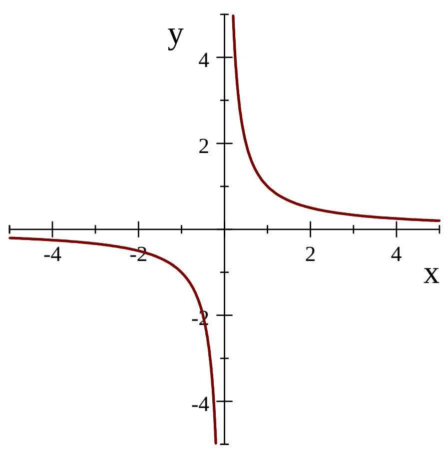
Exemplul 11.2.4. Hiperbolele echilatere de ecuatii $x^2 - y^2 = 0$, $y^2 - x^2 = 0$ si $xy = 1$ au graficele urmatoare.



$x^2 - y^2 = \ 1$



$y^2 - x^2 = 1$



$xy = 1$

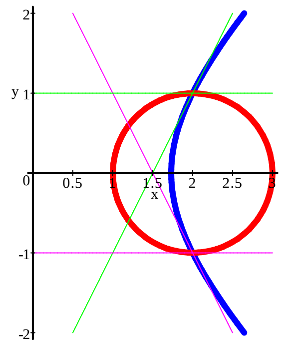
Exemplul 11.2.5. Cercul de ecuatie

$$\Gamma_1 : F\,(x, y) := x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$$

intersecteaza hiperbola echilatera

$$\Gamma_2 : G\,(x, y) := x^2 - y^2 - 3 = 0$$

in $M\,(2, 1)$.



$x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$
and $x^2 - y^2 - 3 = 0$

In acest punct derivatele F'_y si G'_y sunt nenule, $F'_x(2,1) = 0$, iar $-\frac{G'_x(2,1)}{G'_y(2,1)} = 2$; prin urmare unghiul ascutit dintre cerc si hiperbola in punctul $(2,1)$ are masura $arctg2$. Determinati masura unghiului obtuz dintre cerc si hiperbola in celalalt punct de intersectie.

11.2.2. Ecuatia generala a unei conice.

11.2.2.1. Ecuatii canonice. In cele ce urmeaza convenim sa numim *ecuatii canonice ale conicelor* urmatoarele ecuatii:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$ *-elipsa (cerc daca $a = b$);*
2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ - *elipsa imaginara;*
3. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *sau* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ - *hiperbole;*
4. $y^2 = ax$ sau $x^2 = ay$ - *parabole;*
5. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ - *reuniunea a doua drepte concurente;*
6. $y^2 = a^2$ - *reuniunea a doua drepte paralele;*
7. $y^2 = -a^2$ - *drepte imaginare;*
8. $y^2 = 0$ - *axa Ox; $x^2 = 0$ - axa Oy;*
9. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ - *punctul $O(0,0)$,*
   unde $a, b \neq 0$.

11.2.2.2. Ecuatia generala a unei conice. Fie $\mathcal{R}_c = \left(O, \{\bar{\imath}, \bar{\jmath}\}\right)$ reperul canonic din $\mathbf{E}^2$ si $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1,3}$, cu $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Ecuatia generala a unei conice Γ este:

$$\Gamma : f(x,y) := a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

- *Numerele*

$$\Delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \eta := a_{11} + a_{22}$$

sunt invariante (i.e. nu se modifica) la transformari ortogonale si sunt numite **invariantii ortogonali** *ai conicei* Γ.

- Daca $\Delta = 0$ spunem ca Γ este o *conica degenerata*; in acest caz membrul intai al ecuatiei se descompune intr-un produs de factori de gradul intai si Γ este o pereche de drepte -reale, daca descompunerea este in $\mathbb{R}$, imaginare, daca factorii au coeficienti imaginari.

- Daca $\Delta \neq 0$ spunem ca Γ este o *conica nedegenerata.* In acest caz

- *daca* $\delta > 0$ *conica este o elipsa* (reala sau imaginara);
- *daca* $\delta < 0$ *conica este o hiperbola*;
- *daca* $\delta = 0$ *conica este o parabola*.

Convenim sa spunem ca Γ *este o conica* ***de tip elipsa*** *daca* $\delta > 0$, ***de tip hiperbola*** *daca* $\delta < 0$, *respectiv* ***de tip parabola*** *daca* $\delta = 0$.

Teorema de mai jos afirma ca o conica poate sa fie: elipsa (reala sau imaginara, in particular cerc), hiperbola, parabola, reuniunea a doua drepte (reale sau imaginare), o dreapta sau un punct.

Teorema 11.2.1. *Pentru orice conica exista un reper in care ecuatia sa are forma canonica.*

Reducerea la forma canonica. Ecuatia conicei Γ se poate aduce la forma canonica (daca nu este deja)-si *astfel* Γ *se poate reprezenta grafic*- printr-o transformare afina (rototranslatie). Distingem cazul conicelor cu centru si cazul conicelor fara centru.

Daca $\delta \neq 0$ conica Γ are un centru de simetrie $O'(x_0, y_0)$ - numit *centrul conicei*- iar (x_0, y_0) este unica solutie a sistemului

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}.$$

Conice cu centru.

In reperul $\mathcal{R}' = \left(O', \{\bar{i}, \bar{j}\}\right)$ -adica realizand *translatia* in centrul de simetrie O' (cu formulele $x' = x - x_0, y' = y - y_0$)- conica Γ are ecuatia

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Efectuand o *rotatie de unghi* θ a reperului $\mathcal{R}'$ (i.e. o transformare ortogonala pentru determinarea formei canonice a formei patratice $g(x', y') := a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2$) obtinem *reperul drept*

$$\mathcal{R} = \left(O', \left\{\cos\theta\bar{i} + \sin\theta\bar{j}, -\sin\theta\bar{i} + \cos\theta\bar{j}\right\}\right)$$

fata de care conica Γ are *ecuatia canonica*

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Reamintim ca λ_1, λ_2 sunt valorile proprii ale matricei $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, iar legatura dintre coordonatele (x', y') ale unui vector in reperul $\mathcal{R}'$ si coordonatele (X, Y) ale acestui vector in reperul $\mathcal{R}$ este urmatoarea:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Se arata ca unghiul de rotatie verifica ecuatia

$$a_{12}tg^2\theta + (a_{11} - a_{22})\, tg\theta - a_{12} = 0,$$

sau ecuatia

$$tg2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Daca $\Delta = 0$ atunci Γ este o conica degenerata; in acest caz ecuatia sa

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0$$

reprezinta doua drepte (reale, daca $\lambda_1\lambda_2 = \delta < 0$, imaginare, daca $\delta > 0$).

Daca $\Delta \neq 0$ atunci Γ este o conica nedegenerata; in acest caz

- daca $\lambda_1\lambda_2 = \delta > 0$ conica Γ este o elipsa (reala sau imaginara) sau un cerc (real sau imaginar), iar
- daca $\lambda_1\lambda_2 = \delta < 0$ conica Γ este o hiperbola.

Conice fara centru.

Daca $\delta = 0$ conica Γ nu are centru. Efectuand o transformare ortogonala -i.e. o *rotatie de unghi* θ a reperului canonic- pentru determinarea formei canonice a formei patratice $g(x, y) := a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$- obtinem un reper drept $\mathcal{R} = \left(O, \mathcal{B} = \left\{\cos\theta\bar{i} + \sin\theta\bar{j}, -\sin\theta\bar{i} + \cos\theta\bar{j}\right\}\right)$ fata de care conica Γ are ecuatia

$$\eta y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0$$

(se arata ca $a'_{13} = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{\eta}}$ si ca $tg\theta = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$), iar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Daca $\Delta = 0$ atunci conica Γ este *degenerata* in doua drepte reale, posibil confundate, sau imaginare.

Daca $\Delta \neq 0$ conica Γ este o *parabola* a carei ecuatie canonica $X^2 = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{\eta^3}}Y$ se obtine in reperul $\mathcal{R} = (O', \mathcal{B})$, unde originea O' este varful parabolei obtinut din intersectia parabolei cu axa de simetrie de ecuatie

$$a_{11}f'_x(x, y) + a_{12}f'_y(x, y) = 0 \text{ (sau } a_{12}f'_x(x, y) + a_{22}f'_y(x, y) = 0).$$

Exemplul 11.2.1. Sa reprezentam grafic conica

$$\Gamma : f(x, y) := x^2 + xy + 2y^2 + 3x - y + 1 = 0.$$

Deoarece

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{15}{4} \text{ si } \delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = \frac{7}{4} > 0$$

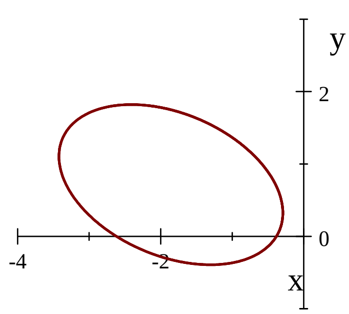
conica este o elipsa. Centrul acesteia se obtine rezolvand sistemul compatibil determinat

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x + y + 3 = 0 \\ f'_y(x, y) = x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

unde $f(x, y) := x^2 + xy + 2y^2 + 3x - y + 1$. Obtinem $O'\left(-\frac{13}{7}, \frac{5}{7}\right)$, $\delta = \frac{7}{4} > 0$, si, dupa translatia $x = x' - \frac{13}{7}, y = y' + \frac{5}{7}$, ecuatia elipsei devine

$$x'^2 + x'y' + 2y'^2 = \frac{15}{7}.$$

Valorile proprii ale matricei $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$ asociate formei patratice $x'^2 + x'y' + 2y'^2$ sunt $\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$ si $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$. Baza dreapta ortonormata corespunzatoare este $B = \left\{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\bar{j}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\bar{i} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\bar{j}\right\}$. In reperul $\mathcal{R} = (O', B)$ elipsa noastra are forma canonica $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$, adica $\frac{3-\sqrt{2}}{2}X^2 + \frac{3+\sqrt{2}}{2}Y^2 = \frac{15}{7}$. Semixa $O'X$ are vectorul director $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\bar{j}$. Obtinem astfel reprezentarea grafica de mai jos.



$$x^2 + xy + 2y^2 + 3x - y + 1 = 0$$

Exemplul 11.2.2. Sa se reduca la forma canonica ecuatia familiei

$$\Gamma_{a,b,c} : ax^2 + 2bxy + ay^2 - 2cx - 2cy = 0,\ a^2 + b^2 \neq 0$$

si sa se discute tipul conicelor $\Gamma_{a,b,c}$.

Rezolvare. Invariantii $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & -c \\ b & a & -c \\ -c & -c & 0 \end{vmatrix} = 2c^2(b-a)$ si $\delta = a^2 - b^2$ ne dau informatiile asupra tipului de conice din familia $\Gamma_{a,b,c}$, si, in consecinta, asupra modalitatii de reducere la forma canonica.

1. Fie $a^2 - b^2 \neq 0$. Atunci conica $\Gamma_{a,b,c}$ are centrul dat de solutia sistemului

$$\begin{cases} 2ax + 2by - 2c = 0 \\ 2bx + 2ay - 2c = 0 \end{cases}.$$

Obtinem centrul $O'\left(\frac{c}{a+b}, \frac{c}{a+b}\right)$. Cum ecuatia caracteristica $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = 0$ are solutiile $\lambda_1 = a + b$ si $\lambda_2 = a - b$, iar baza dreapta corespunzatoare este $B := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j} \right\}$, forma canonica se obtine in raport cu reperul $\mathcal{R} = (O', B)$ si este $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$, adica

$$(a+b)\,X^2 + (a-b)\,Y^2 = \frac{2c^2}{a+b},$$

unde

$$\begin{cases} x = c + \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = c + \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y. \end{cases}$$

(a) Daca $c \neq 0$ atunci conica este nedegenerata, iar forma canonica a ecuatiei ei este

$$\frac{X^2}{\frac{2c^2}{(a+b)^2}} + \frac{Y^2}{\frac{2c^2}{a^2-b^2}} = 1.$$

Distingem doua situatii:

i. daca $a^2 - b^2 > 0$ atunci conica $\Gamma_{a,b,c}$ este o elipsa;

ii. daca $a^2 - b^2 < 0$ atunci conica $\Gamma_{a,b,c}$ este o hiperbola.

(b) Daca $c = 0$ conica $\Gamma_{a,b,c}$ este degenerata si are ecuatia $ax^2 + 2bxy + ay^2 = 0$. In plus

i. daca $a = 0$ atunci $\Gamma_{0,b,0} = Ox \cup Oy$;

ii. daca $a \neq 0$ atunci

A. - pentru $b^2 - a^2 < 0$ conica este $\{O(0,0)\}$;
- daca $b^2 - a^2 > 0$ atunci $\Gamma_{a,b,0}$ este reuniunea dreptelor de ecuatii $ax + \left(b + \sqrt{b^2 - a^2}\right) y = 0$ si $ax + \left(b - \sqrt{b^2 - a^2}\right) y = 0$.

2. Fie $a^2 - b^2 = 0$. Atunci conica $\Gamma_{a,b,c}$ este de tip parabola.

(a) Daca $a = b$ atunci conica este degenerata si este reuniunea dreptelor de ecuatii $x + y = 0$ si $a(x + y) = 2c$ (desigur, doar a doua bisectoare, daca $c = 0$).

(b) Daca $a = -b$ atunci ecuatia caracteristica asociata are radacinile $\lambda_1 = 0$ si $\lambda_2 = 2a$ si baza dreapta corespunzatoare este $B := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j} \right\}$. In reperul $\mathcal{R} = (O, B)$ ecuatia conicei este

$$Y^2 = \sqrt{2}\frac{c}{a}X$$

(parabola, daca $c \neq 0$, prima bisectoare, daca $c = 0$).

1.1.3 11.3. Curbe plane si curbe in spatiu exprimate parametric.

1. Daca $r : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (x(t), y(t))$, este o functie de clasa C^n, $n \geq 1$, iar I este un interval, multimea punctelor $M(x(t), y(t))$, $t \in I$, se numeste *curba (plana) data parametric.* Scriem

$$\Gamma : x = x(t), y = y(t), \text{ sau } r(t) = (x(t), y(t)), t \in I$$

si spunem ca Γ este data prin *ecuatiile parametrice* $x = x(t), y = y(t)$.
Daca $r : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, este o functie de clasa C^n, $n \geq 1$, iar I este un interval, multimea punctelor $M(x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, se numeste *curba (in spatiu) data parametric.* Scriem

$$\Gamma : x = x(t), y = y(t), z = z(t), \text{ sau } r(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I$$

sau

$$\overline{r}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}, t \in I$$

si spunem ca Γ este data prin *ecuatiile parametrice* $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.
Un *vector tangent la curba* Γ in punctul $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in \Gamma$ este

$$\overline{r}'(t_0) := x'(t_0)\overline{i} + y'(t_0)\overline{j} + z'(t_0)\overline{k}.$$

- Daca r reprezinta legea de miscare a punctului mobil $M(x(t), y(t), z(t))$ de-a lungul curbei Γ, vectorul $\overline{r}'(t_0)$ reprezinta *vectorul viteza* la momentul t_0 a acestui punct, iar

$$\overline{r}''(t_0) := x''(t_0)\overline{i} + y''(t_0)\overline{j} + z''(t_0)\overline{k},$$

daca $r \in C^2(I)$, este *vectorul acceleratie* a punctului mobil la momentul t_0.
- Lungimea curbei $\Gamma : r(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]$ este

$$l(\Gamma) := \int_a^b \left\|\overline{r'}(t)\right\| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

- Daca $\Gamma : r(t) = (x(t), y(t)), t \in I$ este o curba plana si $M_0(x(t_0), y(t_0)) \in \Gamma$, atunci reperul care are originea in acest punct si baza ortonormata formata din versorul $\overline{\tau}(t_0)$ al *vectorului tangent* $\overline{r}'(t_0) = x'(t_0)\overline{i} + y'(t_0)\overline{j}$, respectiv, versorul $\overline{n}(t_0)$ al *vectorului director al normalei* $\overline{N}(t_0) = -y'(t_0)\,\overline{i} + x'(t_0)\,\overline{j}$ in M_0, adica

$$\mathcal{R} = \left(M_0, \left\{\overline{\tau}(t_0) := \frac{\overline{r}'(t_0)}{\|\overline{r}'(t_0)\|}, \overline{n}(t_0) := \frac{\overline{N}(t_0)}{\|\overline{N}(t_0)\|}\right\}\right)$$

se numeste *reperul (mobil al) lui Frenet*. *Curbura curbei* Γ de clasa C^2 este

$$K(t) = \frac{\|\overline{r}'(t_0) \times \overline{r}''(t_0)\|}{\|\overline{r}'(t_0)\|^3} = \frac{|x'(t)\,y''(t) - x''(t)\,y'(t)|}{\sqrt{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^3}}.$$

- Daca $\Gamma : r(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I$ este o curba in spatiu si $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in \Gamma$, atunci reperul care are originea in acest punct si baza ortonormata formata din versorul $\overline{\tau}(t_0)$ al *vectorului tangent* $\overline{r}'(t_0)$, versorul $\overline{n}(t_0)$ al *vectorului normalei principale* $\overline{N}(t_0) := (\overline{r}'(t_0) \times \overline{r}''(t_0)) \times \overline{r}'(t_0)$ si versorul $\overline{b}(t_0)$ al *vectorului binormal* $\overline{B}(t_0) := \overline{r}'(t_0) \times \overline{r}''(t_0)$ adica

$$\mathcal{R} = \left(M_0, \left\{\overline{\tau}(t_0) := \frac{\overline{r}'(t_0)}{\|\overline{r}'(t_0)\|}, \overline{n}(t_0) := \frac{\overline{N}(t_0)}{\|\overline{N}(t_0)\|}, \overline{b}(t_0) = \frac{\overline{B}(t_0)}{\|\overline{B}(t_0)\|}\right\}\right)$$

se numeste *reperul (mobil al) lui Frenet*. *Curbura curbei* Γ de clasa C^2 este

$$K(t) = \frac{\|\overline{r}'(t_0) \times \overline{r}''(t_0)\|}{\|\overline{r}'(t_0)\|^3}.$$

Dreptele si planele definite de reperul lui Frenet formeaza *triedrul lui Frenet*: dreptele se numesc *tangenta, normala principala*, respectiv *binormala* in M_0, iar planele de coordonate in M_0 poarta numele de

(a) *plan osculator* -cel care are normala $\overline{b}(t_0)$,
plan normal - cel care are normala $\overline{\tau}(t_0)$ si
plan rectificant –cel care are normala $\overline{n}(t_0)$.

2. **Curbe in spatiu obtinute prin intersectia a doua suprafete.** Daca $F, G : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sunt functii de clasa $C^n, n \geq 1$, atunci multimea punctelor $M(x, y, z)$ pentru care $F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$ se numeste *curba de ecuatii* $F = 0, G = 0$ (deoarece ecuatia $F(x, y, z) = 0$ $(x, y, z) \in D$ defineste o suprafata si, analog, ecuatia $F(x, y, z) = 0$ $(x, y, z) \in D$ defineste o alta suprafata). Scriem
$\Gamma : F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in D$
si spunem ca Γ este data (*implicit)* prin sistemul $F = 0, G = 0$;
$\circ$ daca $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ si $\alpha := \frac{D(F,G)}{D(y,z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, conform teoremei functiilor implicite, sistemul $F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$ defineste pe o vecinatate V a punctului x_0 functiile implicite $y = y(x), z = z(x)$, pentru care $y(x_0) = y_0$ si $z(x_0) = z_0$, deci o curba exprimata in functie de parametrul $x : x = x, y = y(x), z = z(x), x \in V$, ori $r(x) = (x, y(x), z(x)), x \in V$,

care este o portiune din curba Γ; de pilda, daca notam $\beta := \frac{D(F,G)}{D(z,x)}(x_0, y_0, z_0)$ si $\gamma := \frac{D(F,G)}{D(x,y)}(x_0, y_0, z_0)$, cum $r'(x_0) = (1, y'(x_0), z'(x_0)) = \left(1, -\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\gamma}{\alpha}\right)$ ecuatiile tangentei in M_0 la curba Γ sunt $\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$, iar planul normal in acest punct are ecuatia $\alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) + \gamma(z-z_0) = 0$.

3. **Coordonate polare.** Functia de trecere de la *coordonatele carteziene* (x, y) la *coordonatele polare:* (ρ, φ) definita prin $[0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $(\rho, \varphi) \longmapsto (x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi)$ este o bijectie. Daca $\rho : I \subset [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ este o functie, curba Γ de ecuatii

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi, y = \rho(\varphi)\sin\varphi, \varphi \in I$$

se numeste curba exprimata in coordonate polare; scriem

$$\Gamma : \rho = \rho(\varphi), \varphi \in I.$$

1.2 B. Probleme rezolvate

1.3 C. Exercitii

1. Sa se identifice tipul si sa se schiteze graficul curbelor de ecuatii:
   (a) $x^2 = 0$;
   (b) $x^2 + y = 0$;
   (c) $x + y^2 = 0$;
   (d) $x^2 + y^2 = 0$;
   (e) $x^2 - y^2 = 0$;
   (f) $x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$
   (g) $x^2 + 2y = 1$;
   (h) $x^2 - 3x + 2 = 0$
   (i) $x^2 + 2y^2 = 1$;
   (j) $2x^2 + y^2 = 1$;
   (k) $x^2 + y^2 - x = 1$;
   (l) $x^2 + y^2 + 1 = 0$;
   (m) $x^2 - y^2 + 1 = 0$;
   (n) $x^2 - y^2 - 1 = 0$.
   (o) $xy = 0$;
   (p) $xy = 1$.
2. Stabiliti tipurile conicelor definite prin:
   (a) $x^2 + xy + y^2 + x + y + 1 = 0$;
   (b) $x^2 + 4xy + 4y^2 + x + y + 1 = 0$;

(c) $x^2 + 3xy + 2y^2 + x + y + 1 = 0$;

(d) $x^2 - 2xy + y^2 = 0$;

(e) $x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$;

(f) $x^2 + 2xy - 2y^2 + x + y + 1 = 0$.

3. Sa se reprezinte in coordonate polare curbele:

   (a) $x^2 + y = 0$;

   (b) $x + y^2 = 0$;

   (c) $x^2 + y^2 - x = 1$;

   (d) $x^2 - y^2 = 11$;

   (e) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$;

   (f) $xy = 1$.

4. Sa se discute tipurile de conica reprezentate de ecuatia $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.

5. Ce devin ecuatiile conicelor $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ in reperul $\mathcal{R} = \left(O'(1,-1), \left\{\bar{\imath}, \bar{\jmath}\right\}\right)$, unde

   $\Gamma_1 : x^2 + y^2 - x = 1$, $\Gamma_2 : x^2 - y^2 + x = 1$, $\Gamma_3 : x^2 + 4y^2 = 4$?

6. Care sunt ecuatiile conicelor descrise mai jos (in reperul canonic) dupa o rotatie de unghi θ? $\Gamma_1 : x^2 + y^2 - x = 1$, $\Gamma_2 : x^2 - y^2 + x = 1$, $\Gamma_3 : x^2 + 4y^2 = 4$, $\Gamma_4 : 3x^2 - 6xy + 3y^2 = 1$.

7. Sa se reprezinte grafic conicele de ecuatii:

   (a) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$;

   (b) $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$;

   (c) $4x^2 - y^2 - 8x - 2y - 1 = 0$;

   (d) $y^2 - x + 3y + 5 = 0$.

8. Determinati unghiul de rotatie necesar aducerii conicei de ecuatie $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 - 10 = 0$ la forma canonica si identificati tipul ei.

   Raspuns. $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{20} = 1$.

9. Determinati forma canonica si schitati graficul conicelor:

   (a) $3x^2 - 6xy + 3y^2 + 2x = 7$;

   (b) $x^2 + xy + y^2 = 1$;

   (c) $xy - y^2 - 5y - 1 = 0$.

   (d) $2x^2 + 3xy + 2y^2 = 15$;

   (e) $x^2 - 3xy + y^2 = 5$;

   (f) $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$;

10. Ce efect are o rotatie cu $90°$ asupra ecuatiilor:

    (a) elipsei $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

    (b) hiperbolei $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

(c) cercului $C : x^2 + y^2 = a^2$;

(d) dreptei $D : y = mx$;

(e) dreptei $D_1 : y = mx + n$?

11.Ce efect are o rotatie cu $180°$ asupra ecuatiilor:

(a) elipsei $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

(b) hiperbolei $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

(c) cercului $C : x^2 + y^2 = a^2$;

(d) dreptei $D : y = mx$;

(e) dreptei $D_1 : y = mx + n$?

12.Descrieti natura curbelor de ecuatie $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, pentru orice coeficienti reali.

13.Exista o conica nedegenerata de ecuatie $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ cu proprietatile:

(a) este simetrica fata de origine;

(b) trece prin punctul $(1, 0)$;

(c) este tangenta la dreapta de ecuatie $y = 1$ in punctul $(-2, 1)$?

14.Aratati ca ecuatia $x^2 + y^2 = a^2$ se transforma in ecuatia $X^2 + Y^2 = a^2$ pentru orice rotatie a axelor de coordonate.

15.Schitati graficul conicei de ecuatie $xy + 2x - y = 0$.

16.Aratati ca in urma unei rotatii expresia $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ corespuzatoare ecuatiei $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ ramane neschimbata.

17.Scrieti ecuatiile parametrice ale semicercului de raza 13 cu centrul in $(1, -1)$ aflat in semiplanul determinat de inecuatia $x \geq 1$.

18.Pozitia $M(x, y)$ a unei particule care se deplaseaza in planul xOy este descrisa de ecuatiile: $x = \sqrt{t}, y = t, t \geq 0$. Identificati traiectoria acestei particule.

19.Sa se reprezinte grafic traiectoriile particulelor descrise parametric :

(a) $x = 2t - 1, y = -3t + 2, t \geq 0$;

(b) $x = 2t - 1, y = \sqrt{-3t}, t \leq 0$;

(c) $x = \sqrt{2t}, y = -3t + 2, t \geq 0$;

(d) $x = \cos t, y = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

(e) $x = \cos 2t, y = \sin 2t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

(f) $x = \cos(2\pi(1 - t)), y = \sin(2\pi(1 - t)), t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

(g) $x = -\sin t, y = \cos t, t \in [0, \pi]$;

(h) $x = 3\cos t, y = 2\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

(i) $x = 3\cos t, y = 2\sin t, t \in [-\pi, \pi]$;

(j) $x = tgt, y = \sec^2 t - 1, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

(k) $x = cosec\,(t)\,, y = ctg\,(t)\,, t \in (0, \pi)\,;$

(l) $x = 2t, y = \sqrt{t^2+1}, t \geq 1;$

(m) $x = \sqrt{2t}, y = \sqrt{t+1}, t \geq 1;$

(n) $x = t^2, y = \sqrt{t^4+1}t \geq 0;$

(o) $x = -cht, y = sht, -\infty < t < \infty;$

(p) $x = 2sht, y = 2cht, -\infty < t < \infty.$

20.Determinati lungimea astroidei: $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, t \in [0, 2\pi]\,.$

Raspuns. a. 6.

21.In punctul indicat determinati tangenta la curba si valoarea derivatei $\frac{d^2y}{dx^2}$

(a) $x = \cos t, y = \sin t, t = \frac{\pi}{6};$

(b) $x = 3\cos t, y = 2\sin t, t = \frac{\pi}{2};$

(c) $x = \frac{1}{t}, y = -2 + \ln t, t = 1;$

(d) $x = \cos t, y = 1 + \sin t, t = \frac{\pi}{2};$

(e) $x = 1 - \cos t, y = t - \sin t, t = \frac{\pi}{3}.$

22.Determinati normala in punctul indicat al curbei de ecuatii $x = x\,(t)\,, y = y\,(t)\,,$ implicit definite prin:

(a) $x = \sqrt{5-\sqrt{t}}, (t-1)\,y = \ln y, t = 1;$

(b) $xsint + 2x = t, y = t\sin t - 2t, t = \pi;$

(c) $x + 2\sqrt{x^3} = t + t^2, y\sqrt{t+1} + 2t\sqrt{y} = 4, t = 0;$

(d) $x^2 - 2tx + 2t^2 - 4 = 0, 2y^3 - 3t^2 - 4 = 0, t = 2.$

23.Calculati lungimea curbelor de ecuatii:

(a) $x = 1 - \cos t, y = t - \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$

(b) $x = \frac{t^2}{2}, y = \frac{3t^2}{2}, t \in \left[0, \sqrt{3}\right]\,;$

(c) $x = 8\cos t + 8t\sin t, y = 8\sin t - 8t\cos t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\,;$

(d) $x = \ln(\sec t + tgt) - \sin t, y = \cos t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$

24.Determinati coordonatele polare ale originii.

25.Figurati multimile de puncte ale caror coordonate polare ρ, φ verifica inegalitatile:

(a) $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3};$

(b) $1 \leq \rho \leq 2, \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3};$

(c) $1 \leq \rho \leq 2, \varphi = \frac{\pi}{3};$

(d) $\rho \leq 2, \varphi = \frac{\pi}{2};$

.

26.Rescrieti in coordonate carteziene si reprezentati grafic curbele de ecuatii polare:

(a) $\rho\sin\varphi = 1;$

(b) $\rho^2 = 4\rho\cos\varphi;$

(c) $\rho = \frac{4}{2\cos\varphi - \sin\varphi};$

(d) $\rho \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = 2$;

(e) $\rho = 2\cos\varphi - \sin\varphi$.

27.Rescrieti in coordonate polare si reprezentati grafic curbele de ecuatii carteziene:

(a) $x = 1$;

(b) $x = 2y$;

(c) $x - 2y = 1$;

(d) $x^2 + y^2 = 4$;

(e) $x^2 - y^2 = 4$;

(f) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$;

(g) $x = y^2$;

(h) $xy = 9$;

(i) $x^2 + xy + y^2 = 4$.

28.Sa se scrie ecuatiile tangentelor la graficele curbelor de la problema precedenta care sunt paralele cu bisectoarea intai.

29.Aratati ca orice paralela la axa Oy are o ecuatie polara de forma $\rho = k\sec\varphi$.

30.Fie M un punct de coordonate polare (ρ, φ) .Determinati, in coordonate polare:

(a) simetricul lui M fata de axa Ox;

(b) simetricul lui M fata de axa Oy;

(c) simetricul lui M fata de origine.

31.Determinati punctele de intersectie ale curbelor:

(a) $\rho = 1 + \cos\varphi, \rho = 1 - \cos\varphi$;

(b) $\rho = 1 + \sin\varphi, \rho = 1 - \sin\varphi$;

(c) $\rho = 1, \rho = \sqrt{2\sin\varphi}$;

(d) $\rho^2 = \sqrt{2}\cos 2\varphi, \rho^2 = \sqrt{2}\sin 2\varphi$.

32.Indicati modalitati de parametrizare a ecuatiilor canonice ale conicelor nedegenerate.

33.Sa se figureze multimea solutiilor ecuatiilor:

(a) $\left(x^2 + y^2 - 4\right)\left(x^2 - y^2 - 4\right)\left(4x^2 + y^2 - 4\right) = 0$;

(b) $\left(x^2 + 2y^2 - 1\right)\left(x + y^2 - 4\right)(x + y) = 0$;

(c) $x^4 - \left(y^2 - 4\right)^2 = 0$.

34.Sa se figureze multimea solutiilor inecuatiilor:

(a) $4x^2 + y^2 - 4 \leq 0$;

(b) $x^2 - y^2 - 4 \leq 0$;

(c) $\left(x^2 + y^2 - 4\right)\left(4x^2 + y^2 - 4\right) \leq 0$;

(d) $\left(x^2 + 4y^2 - 4\right)\left(4x^2 + y^2 - 4\right) \geq 0$;

(e) $xy > 1$;

(f) $x^2 + xy + y^2 < 4$;

(g) $\left(x^2-y^2-4\right)\left(4x^2+y^2-4\right) \leq 0, x \geq 0, y \geq 0.$

35.Sa se figureze multimea solutiilor ecuatiilor:

(a) $\left(x^2+y^2-2x+4y-4\right)\left(4x^2-y^2-8x-2y-4\right)=0;$

(b) $\left(x^2-3xy+9y^2-4\right)\left(x^2-4x-y-1\right)=0.$

36.Sa se figureze multimea solutiilor ecuatiilor si sa se afle reperul lui Frenet in punctul indicat:

(a) $2x^2+2xy+5y^2+4x-16y=16, M(\alpha, 0);$

(b) $3x^2-2xy-2x+2y=5, M(0, \alpha).$

37.Fie familia de conice de ecuatie $\Gamma_\lambda : 4x^2+12\lambda xy+9y^2-4x-36y+4=0, \lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Sa sa discute natura conicelor.

(b) Sa se figureze locul geometric al centrelor conicelor acestei familii.

(c) Sa se reprezinte grafic conica Γ_0.

(d) Sa se reprezinte grafic conica Γ_1.

(e) Sa se reprezinte grafic conica Γ_{-1}.

(f) Sa se reprezinte grafic conica Γ_{-2}.

(g) Sa se reprezinte grafic conica $\Gamma_{\frac{1}{2}}$.

38.Sa se figureze curbele de ecuatii:

(a) $z=2, z=x^2+y^2;$

(b) $x^2+y^2+z^2=11, x^2+y^2=1;$

(c) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=2, z=1.$

39.Sa se determine ecuatia planului osculator in punctul curent la curba de ecuatii $x=t^2+1, y=t+1, z=t^3$.

Raspuns. $3tx+3t^2y-z+t^3+3t^2=3.$

40.Calculati curbura curbei de ecuatii $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t$ in punctul $t=0$.

Raspuns. $2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

41.Determinati triedrul lui Frenet pentru curbele descrise mai jos, in punctul $t=0$:

(a) $x=e^t, y=e^{-t}, z=\sqrt{2}t;$

(b) $x=3t^3, y=4t^2, z=t+1;$

(c) $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t.$

Raspuns. **a.** tangenta are ecuatiile $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$, binormala are ecuatiile $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$, normala principala are ecuatiile $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{0}$, planul normal are ecuatia $x-y+\sqrt{2}z=0$, planul osculator are ecuatia , iar planul rectificant are ecuatia $x+y=2$. **b.** tangenta are ecuatiile $\frac{x-3}{9}=\frac{y-4}{8}=\frac{z-1}{1}$, binormala are ecuatiile $\frac{x-3}{4}=\frac{y-4}{-9}=\frac{z-1}{36}$, normala principala are ecuatiile $9x+8y+z=60, 4x-9y+36z=12$, planul normal are ecuatia $9x+8y+z=60$, planul osculator are ecuatia $4x - 9y + 36z = 12$, iar planul rectificant are ecuatia $297(x-3) - 320(y-4) - 113(z-1) = 0$.

42.Sa se gaseasca punctele de pe curba $\overline{r}(t) = t^2\overline{i} + t^3\overline{j} + t^4\overline{k}, t \in \mathbb{R}$ in care tangenta este paralela cu planul de ecuatie $x - y + z = 0$.

43.Fie curba $\Gamma : y = 2x^3, z = x^4$, punctul A de abscisa $\alpha \neq 0$, punctul B de abscisa $\beta\,(\beta \neq \alpha, \beta \neq 0)$, P_A planul osculator in A si P_B planul osculator in B.

(a) Sa se determine conditia necesara si suficienta pentru ca planele P_A si P_B sa fie perpendiculare.

(b) Care este ecuatia planului P_B daca $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, iar $B \in P_A$?

Raspuns. **a.** $\alpha\beta = -\frac{1}{2}$. **b.** $2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 4z + 1 = 0$.

44.Fie curba $\Gamma : x = \frac{2(t-1)}{t^2+1}, y = \frac{2t+1}{t^2+1}, z = \frac{t+2}{t^2+1}, t \in \mathbb{R}$.

(a) Sa se determine lungimea arcului curbei Γ aflat intre punctele cele mai departate, respectiv celei mai apropiate de origine.

(b) Sa se determine distanta dintre punctele curbei Γ in care tangenta este perpendiculara pe planul de ecuatie $2x = y + 2z$.

Raspuns. **a.** $3\frac{\pi}{2}$. **b.** $2\sqrt{3}$.