Limita şi continuitatea funcţiilor de mai multe variabile

1. Studiaţi dacă următoarele funcţii au limită în punctele indicate:

i) $f(x,y)=2x^2-3xy+7y^2$, în $(1,-1)$; ii) $f(x,y)=e^{-xy}$ în $(0,1)$;

iii) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{1+xy}$ în (0,0); iv) $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{2x}$ în (0,2);

v) $f(x,y)=\dfrac{\tan\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ în (0,0); vi) $f(x,y)=\dfrac{x^4-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$ în (0,0);

vii) $f(x,y)=(1+3x^2y)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ în (0,0);

viii) $f(x,y)=\dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{2xy}$ în (0,0); ix) $f(x,y)=\dfrac{xy-y^2}{x^2+y^2}$ în (0,0);

x) $f(x,y)=\dfrac{(x-2)(y-1)}{(x-2)^2+(y-1)^2}$ în (2,1); xi) $f(x,y)=\dfrac{2x+y^2}{y^2-2x}$ în (0,0);

xii) $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^4}{|x|+|y|}$ în (0,0).

2. Folosind teorema lui Heine să se arate că următoarele funcţii nu au limită în origine:

i) $f(x,y)=\dfrac{y^2+2x}{y^2-3x}$, $y^2\neq 3x$, ii) $f(x,y)=\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$, $(x,y)\neq(0,0)$,

iii) $f(x,y)=\dfrac{ye^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2+e^{-\frac{2}{x^2}}}$.

3. Să se cerceteze existenţa limitelor iterate şi a limitei în origine pentru funcţiile:

i) $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\cos\dfrac{1}{x}$, ii) $f(x,y)=\dfrac{2x-5y+x^2+y^2}{x+y}$,

iii) $f(x,y)=(1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

4. Să se discute după valorile parametrului α continuitatea funcţiilor:

$$\text{i) } f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{xy}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases};$$

ii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\tan(x^3+y^5)}{x^2+y^4}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

iii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{\sqrt{x^4+y^2}}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

iv) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy}{x^2+3y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

v) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^4}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

vi) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

vii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

viii) $f(x,y) = \begin{cases} (1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}, & \text{dacă } x > 0 \text{ şi } y > 0 \\ \alpha, & \text{dacă } x = 0 \text{ sau } y = 0 \end{cases}$.