1 12. Supratete

1.1 A. TEORIE

1.1.1 12.1. Reprezentari analitice

Toate functiile considerate in cele ce urmeaza sunt diferentiabile.

Definitia 12.1.1. Suprafete date explicit. *Spunem ca $S \subset \mathbb{R}^3$ este o* ***suprafata data explicit*** *daca exista o functie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ astfel incat S sa fie graficul acestei functii, adica*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\right\}.$$

In acest caz scriem

$$S : z = f(x, y), \ \ (x, y) \in D$$

si spunem ca ***suprafata*** S ***este definita de ecuatia*** *(explicita)* $z = f(x, y)$. Desigur, in acest caz proiectia suprafetei S in planul xOy este domeniul de definitie D.

Daca $M(x_0, y_0, z_0) \in S$ atunci

$$\operatorname{grad}(f - z)(M) = f'_x(x_0, y_0)\,\bar{i} + f'_y(x_0, y_0)\,\bar{j} - \bar{k}$$

este o normala la planul tangent la suprafata S in punctul M.

Exemplul 12.1.1. Ecuatia $z = x^2 + y + 1$ defineste o suprafata a carei intersectie cu planul xOy (a carui ecuatie este $z = 0$) este parabola de ecuatii

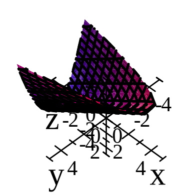
$$\begin{cases} y = -x^2 - 1 \\ z = 0 \end{cases},$$

intersectia cu planul yOz (a carui ecuatie este $x = 0$) este dreapta de ecuatii

$$\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases},$$

iar intersectia cu planul zOx (a carui ecuatie este $y = 0$) este parabola de ecuatii

$$\begin{cases} z = x^2 + 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$



$$z = x^2 + y + 1$$

Deoarece $\operatorname{grad}\left(x^2 + y + 1 - z\right)(0,0,0) = \overline{j} - \overline{k}$ rezulta ca planul tangent in origine la aceasta suprafata are ecuatia $y - z = 0$.

Un caz mai general de reprezentare analitica a unei suprafete este reprezentarea implicita.

Definitia 12.1.2. Suprafete date implicit. *Spunem ca $S \subset \mathbb{R}^3$ este o **suprafata data implicit** daca exista o functie $F : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel incat S sa fie locul geometric al punctelor unde aceasta functie se anuleaza, adica*

$$S = \{(x, y, z) \in A \mid F(x, y, z) = 0\}.$$

In acest caz scriem

$$S : F(x, y, z) = 0, \ \ (x, y, z) \in A$$

*si spunem ca **suprafata** S **este definita de ecuatia** $F(x, y, z) = 0$. Ecuatia $F(x, y, z) = 0$, $(x, y, z) \in A$ se mai numeste **ecuatia carteziana** a suprafetei S.*

Daca in punctul $M(x_0, y_0, z_0) \in S$ cel putin o derivata partiala a functiei F este nenula suprafata admite un plan tangent in M, iar gradientul functiei F in acest punct este o normala la planul tangent. Prin urmare planul tangent in M la S are ecuatia

$$(\overline{r} - \overline{r}_0) \operatorname{grad} F(M) = 0,$$

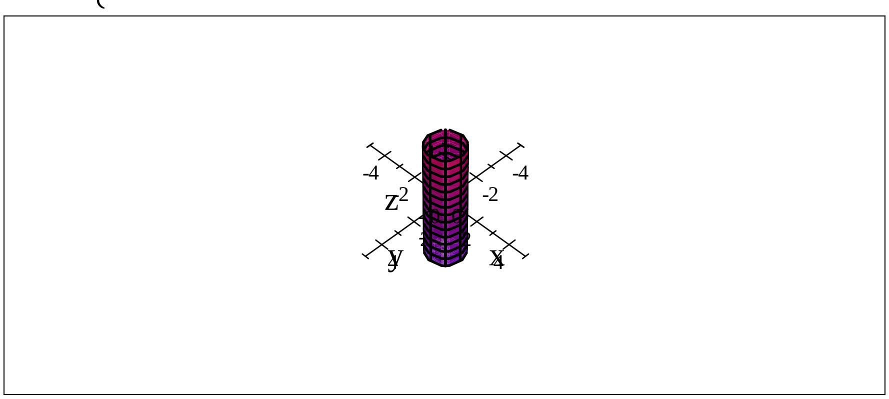
unde $\overline{r}$ este vectorul de pozitie al punctului curent, i.e. $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, iar $\overline{r}_0$ este vectorul de pozitie al punctului M, adica $\overline{r}_0 = x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k}$. Deci ***ecuatia carteziana a planului tangent*** este

$$(x - x_0) F'_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) F'_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Exemplul 12.1.2. Ecuatia $x^2 + y^2 - 1 = 0$ defineste o suprafata cilindrica; intersectia sa cu planul de ecuatie $z = k, k \in \mathbb{R}$ (plan paralel cu planul xOy) este cercul de ecuatii

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = k \end{cases},$$

iar intersectia sa cu planul yOz este reuniunea dreptelor paralele de ecuatii $\begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$, respectiv $\begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$.



$$x^2+y^2-1=0.$$

Definitia 12.1.2. Suprafete date parametric. *Spunem ca $S\subset\mathbb{R}^3$ este o **suprafata data parametric** daca exista o functie $r:\Delta\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ astfel incat S sa fie imaginea functiei r, adica*

$$S=\{r(u,v)\mid(u,v)\in\Delta\}.$$

*Variabilele u si v se numesc **parametri**. Daca x,y,z sunt componentele scalare ale functiei r, adica*

$$r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

atunci mai scriem

$$S:\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases},(u,v)\in\Delta.$$

Vectorul de pozitie in punctul curent al suprafetei este $\overline{r}(u,v)=x(u,v)\,\overline{i}+y(u,v)\,\overline{j}+z(u,v)\,\overline{k}$, $(u,v)\in\Delta$. Daca punctul $r(u_0,v_0)\in S$, iar $\overline{r}'_u(u_0,v_0)$ si $\overline{r}'_v(u_0,v_0)$ *sunt vectori liniari independenti,* atunci un ***vector normal la planul tangent i***n acest punct este $\overline{r}'_u(u_0,v_0)\times\overline{r}'_v(u_0,v_0)$, iar ***planul tangent la suprafata*** S in punctul $r(u_0,v_0)$ are ecuatia

$$(\overline{r}-\overline{r}(u_0,v_0))\cdot(\overline{r}'_u(u_0,v_0)\times\overline{r}'_v(u_0,v_0))=0,$$

unde $\overline{r}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$ este vectorul de pozitie al punctului curent din plan; echivalent, ecuatia planului tangent este

$$\begin{vmatrix}x-x(u_0,v_0) & y-y(u_0,v_0) & z-z(u_0,v_0)\\ x'_u(u_0,v_0) & y'_u(u_0,v_0) & z'_u(u_0,v_0)\\ x'_v(u_0,v_0) & y'_v(u_0,v_0) & z'_v(u_0,v_0)\end{vmatrix}=0.$$

Exemplul 12.1.3. O suprafata data explicit $S:z=f(x,y)\,,(x,y)\in D$ admite parametrizarea

$$S:\begin{cases}x=u\\ y=v\\ z=f(u,v)\end{cases},(u,v)\in D.$$

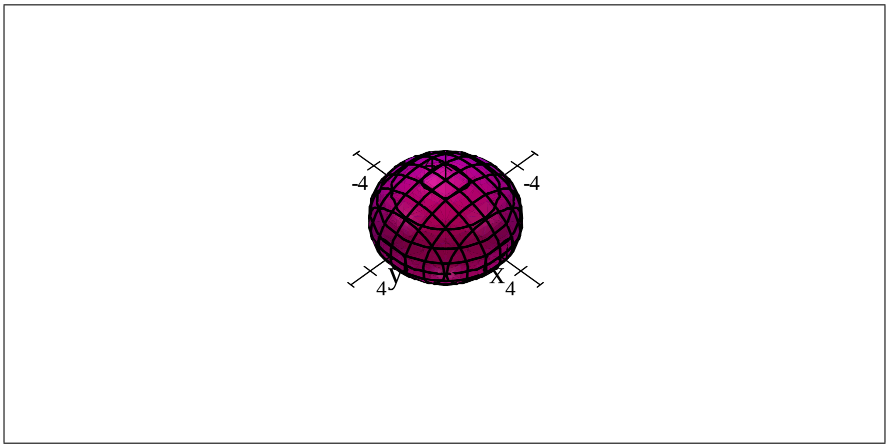
Exemplul 12.1.4. Suprafata cilindrica de la exemplul 12.1.2 poate fi parametrizata, folosind coordonatele polare, prin

$$\begin{cases}x=\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\\ z=s\end{cases},(\varphi,s)\in[0,2\pi)\times\mathbb{R}.$$

Exemplul 12.1.5. Fie R un numar pozitiv fixat si suprafata

$$S:\begin{cases}x=R\cos\varphi\sin\theta\\ y=R\sin\varphi\sin\theta\\ z=R\cos\theta\end{cases},(\varphi,\theta)\in[0,2\pi)\times[0,\pi]$$

data parametric. Observam ca daca $M(x,y,z)\in S$ atunci $x^2+y^2+z^2=R^2$, iar distanta de la acest punct la origine este R; deci S este o sfera centrata in origine de raza R.



$x^2 + y^2 + z^2 = 9$ sau $(3\cos\varphi\sin\theta, 3\sin\varphi\sin\theta, 3\cos\theta)$

Suprafata

$$S' : \begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\theta \end{cases}, (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

este semisfera de centru origine si raza R aflata deasupra planului xOy (deoarece $z \geq 0$).

Exemplul 12.1.6. Se da suprafata

$$S : \begin{cases} x = t\cos\varphi \\ y = 3t\sin\varphi \\ z = t \end{cases}, (\varphi, t) \in [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

1. Sa se determine ecuatia implicita a suprafetei S.

2. Sa se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel incat planul $\pi : x + az = 0$ sa fie tangent suprafetei S si sa se stabileasca punctul de tangenta.

Rezolvare. 1. Din formula fundamentala a trigonometriei rezulta ecuatia implicita a suprafetei

$$S : F(x, y, z) := x^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 - z^2 = 0.$$

2. Trebuie sa determinam un punct$(\alpha, \beta, \gamma) \in S \cap \pi$ in care gradientul functiei F sa fie coliniar cu normala la planul π, deci

$$\begin{cases} \alpha^2 + \frac{\beta^2}{9} - \gamma^2 = 0 \\ \alpha + a\gamma = 0 \\ \bar{i} + a\bar{k} \parallel 2\alpha\bar{i} + \frac{2\beta}{9}\bar{j} - 2\gamma\bar{k} \end{cases}.$$

Din ultima relatie rezulta ca $\beta = 0$ si $\gamma = -a\alpha$, iar din a doua relatie rezulta ca $a^2 = 1$. Originea nu este un punct de tangenta deoarece gradientul in origine este nul. Prin urmare obtinem ca $a \in \{-1, 1\}$. Daca $a = -1$ punctele de tangenta apartin multimii $\{(\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}^*\}$, iar daca $a = 1$ punctele de tangenta apartin multimii $\{(\alpha, 0, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}^*\}$.

1.1.2 12.2. Cuadrice

Fie $R_c = \left(O, \left\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}\right)$ reperul canonic din E^3.

O cuadrica este locul geometric al solutiilor unei ecuatii de gradul al doilea in necunoscutele x, y si z.

Definitia 12.2.1. Definitia unei cuadrice. ***Ecuatia generala a unei cuadrice*** *este:*

$$S : f(x, y, z) = 0$$

unde f este de forma

$$f(x, y, z) := a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz+$$
$$+2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44},$$

coeficientii sunt numere reale date si $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0.$

Schimband reperul (adica efectuand diferite translatii si rotatii asupra reperului canonic, ca si la conice), ecuatia cuadricei S se poate aduce la *forma canonica:*

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33}z^2 + a'_{44} = 0 \text{ sau } a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{34}z = 0.$$

Cuadricele sunt *sfere, elipsoizi, cilindri (circulari, eliptici, hiperbolici, parabolici), elipsoizi, paraboloizi (eliptici, hiperbolici), sau hiperboloizi (cu o panza ori cu doua panze)*, cazuri pe care le prezentam la punctele 1-6 de mai jos.

Pentru a trasa graficul cuadricei S este util sa reprezentam unele *sectiuni transversale, i.e.* curbe de intersectie ale aceastei suprafate cu planele de coordonate si cu plane paralele cu ele.

ECUATII DE CUADRICE IN FORMA REDUSA SI PARAMETRICA

1. *Sfere.* O *sfera* este locul geometric al punctelor echidistante fata de un punct fix. Punctul fix se numeste *centru*, iar distanta punctelor de pe sfera la centru se numeste *raza*.

   – *Sfera cu centrul in origine si raza R* are ecuatia

   $$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

   – *Sfera cu centrul in punctul $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ si raza R* are ecuatia

   $$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2.$$

   – *Ecuatia generala a sferei* este:

   $$x^2 + y^2 + z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

   sau, echivalent,

   $$(x + a_{14})^2 + (y + a_{24})^2 + (z + a_{34})^2 = a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{44}.$$

   Prin urmare, daca $a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{44} > 0$, raza ei este $\sqrt{a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{44}}$ iar centrul ei este $Q(-a_{14}, -a_{24}, -a_{34})$. Daca $a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{44} = 0$ atunci cuadrica se reduce la punctul $Q(-a_{14}, -a_{24}, -a_{34})$.

Daca $a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{44} < 0$ spunem, pri abuz de limbaj, ca avem o sfera imaginara.

– O *parametrizare (*cu parametrii t si z) *a sferei cu centrul in punctul* $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ *si raza* R este :

$$\begin{cases} x = a + \sqrt{R^2 - (c-z)^2} \cos t \\ y = b + \sqrt{R^2 - (c-z)^2} \sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi, c - r \le z \le c + r.$$

– Trecand la coordonatele sferice $(r, \varphi, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi]$: $x = \alpha + r\cos\varphi\sin\theta, y = \beta + r\sin\varphi\sin\theta, z = \gamma + r\cos\theta$, obtinem *ecuatiile parametrice (*cu parametrii φ si θ) *ale sferei cu centrul in punctul* $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ *si raza* R :

$$x = \alpha + R\cos\varphi\sin\theta, y = \beta + R\sin\varphi\sin\theta, z = \gamma + R\cos\theta, (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi].$$

– *Ecuatia sferei cu centrul in origine si raza* R *in coordonate sferice* este: $r = R$.
– *Aria sferei* de raza R este $4\pi R^2$.
– *Volumul sferei* de raza R este $\frac{4}{3}\pi R^3$.
– Un *cerc in spatiu* se poate descrie in mai multe feluri; de exemplu ca:
  * intersectia dintre o sfera si un plan, sau
  * intersectia dintre doua sfere.
– Daca $\mathcal{C}$ este un cerc dat prin intersectia a doua sfere

$$\mathcal{C} : \begin{cases} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2 \\ (x-\alpha_1)^2 + (y-\beta_1)^2 + (z-\gamma_1)^2 = R_1^2 \end{cases}$$

atunci *fasciculul de sfere* care trec prin $\mathcal{C}$ are ecuatia
$\alpha\left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - R^2\right] +$
$\beta\left[(x-\alpha_1)^2 + (y-\beta_1)^2 + (z-\gamma_1)^2 - R_1^2\right] = 0,$
unde α, β sunt doi parametri reali (desigur $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$), iar planul cercului se obtine prin scaderea membru cu membru a ecuatiilor celor doua sfere.

– Daca $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ este cercul (real) obtinut ca intersectie a sferei $\mathcal{S} : (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$ cu planul $\mathcal{P} : Ax + By + Cz + D = 0$, atunci centrul cercului se obtine intersectand planul $\mathcal{P}$ cu dreapta care trece prin $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ si este perpendiculara pe plan, adica $D : \frac{x-\alpha}{A} = \frac{y-\beta}{B} = \frac{z-\gamma}{C}$. Raza r a cercului se obtine din teorema lui Pitagora: $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, unde d este distanta de la originea sferei la plan.

Exemplul 11.2.1. Fie sfera

$$S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = 0$$

si planul

$$\pi : x - y + z = 0.$$

Se cer urmatoarele:

1. centrul Q si raza R ale sferei S;

2. centrul Q_c si raza r ale cercului $C := S \cap \pi$;

3. centrul si raza sferei S' ce trece prin punctul $P(1,2,3)$ si prin cercul C.

Rezolvare. 1. Deoarece, prin reducere la forma canonica, ecuatia sferei este $S : (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 = 2$, rezulta ca centrul este $Q(-1,1,0)$, iar raza este $R = \sqrt{2}$.

2. In planul ce trece prin Q si este perpendicular pe planul π avem triunghiul dreptunghic (in Q_c) QQ_cA, unde $A \in S$. Atunci distanta $d(Q,A) = R$, distanta $d(Q_c, A) = r$ si distanta $d(Q, Q_c) = d(Q, \pi) = \frac{|-1-1+0|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Din teorema lui Pitagora obtinem $r = \sqrt{R^2 - (d(Q,Q_c))^2} = \sqrt{2 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Centrul Q_c al cercului nostru este chiar proiectia lui Q pe planul π, proiectie pe care o obtinem intersectand dreapta Q_cQ cu planul π. Normala la planul π ne furnizeaza un vector director pentru dreapta Q_cQ si obtinem

$$Q_cQ : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}.$$

Cum $Q_c \in Q_cQ \cap \pi$, din rezolvarea sistemului rezulta $Q_c\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

3. Este suficient sa alegem din fascicolul de sfere ce trec prin C pe aceea care trece si prin P. Fascicolul este dat de

$$\mathcal{S} : \alpha\left(x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y\right) + \beta(x - y + z) = 0.$$

Din $P \in \mathcal{S}$ obtinem $\beta = -6\alpha$, iar sfera cautata este

$$S' : x^2 + y^2 + z^2 + -4x + 4y - 6z = 0.$$

Reducand la forma canonica obtinem $S' : (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 17$. In consecinta centrul acestei sfere este $Q'(2,-2,3)$, iar raza sa este $\sqrt{17}$.

2. *Elipsoizi.* O cuadrica cu ecuatia (carteziana) de forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

unde $a, b, c > 0$ sunt trei constante reale se numeste *elipsoid (real, raportat la axele de coordonate)* de *semiaxe* a, b, c.

– Sectiunile transversale ale elipsoidului sunt elipse. De exemplu, intersectia cu planul xOy (de ecuatie $z = 0$) este elipsa (din planul xOy) de ecuatie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; planul $z = k$ (paralel cu xOy) unde $|k| < |c|$ intersecteaza suprafata in elipsa de ecuatii

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}$$

planul de ecuatie $z = \pm c$ intersecteaza elipsoidul in punctul $(0, 0, \pm c)$, iar planul $z = k$ unde $|k| > |c|$ nu intersecteaza suprafata. Daca $a = b = c$ elipsoidul este o sfera de raza a.

– *Originea este centru de simetrie* pentru elipsoidul de ecuatie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ si se numeste *centrul elipsoidului*, iar axele de coordonate sunt axe de simetrie si se numesc *axele elipsoidului*; elipsoidul cu centrul in punctul $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ avand axele de simetrie paralele cu axele de coordonate are ecuatia

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1.$$

– Un *elipsoid imaginar* are ecuatia (redusa) de forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$; ecuatia $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ reprezinta originea.

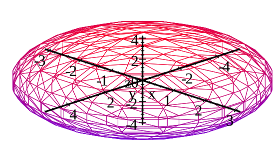
– *Ecuatiile parametrice (*cu parametrii t si s) *ale elipsoidului cu centrul in punctul* $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ *si semiaxele* a, b, c sunt:

$$\begin{cases} x = \alpha + \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - s^2}\cos t \\ y = \beta + \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - s^2}\sin t \\ z = \gamma + s \end{cases} \quad (s, t) \in [-c, c] \times [0, 2\pi).$$

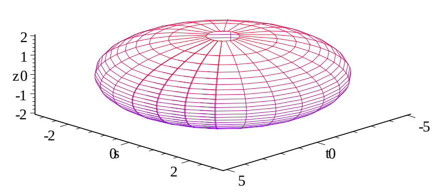
– *Ecuatiile parametrice (*cu parametrii φ si θ) *ale elipsoidului cu centrul in punctul* $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ *si semiaxele* a, b, c sunt:

$$\begin{cases} x = \alpha + R\cos\varphi\sin\theta \\ y = \beta + R\sin\varphi\sin\theta \\ z = \gamma + R\cos\theta \end{cases} \quad (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi].$$

– *Exemple de grafice de elipsoizi:*



$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1$$

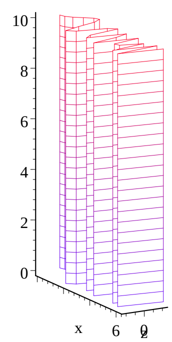


$$\left(\frac{5}{2}\sqrt{2^2 - s^2}\cos t, \frac{3}{2}\sqrt{2^2 - s^2}\cos t, s\right)$$

– *Volumul elipsoidului* (de semiaxe a, b, c) este $V = \frac{4}{3}\pi abc$.

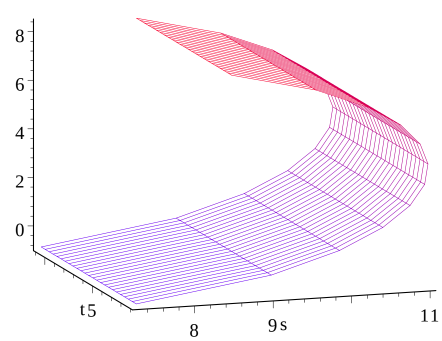
3. *Cilindri*. O suprafata obtinuta prin deplasarea unei drepte paralela cu o dreapta fixa si care intersecteaza (se sprijina pe) o curba fixa se numeste *cilindru (suprafata cilindrica*). Curba fixa (de sprijin) se numeste *directoare (curba directoare)*, iar dreapta mobila se numeste *generatoare (curba generatoare).*

– Daca ecuatia carteziana a unei suprafete nu contine una dintre variabilele x, y, ori z atunci suprafata descrisa de respectiva ecuatie este un cilindru cu generatoarea paralela cu axa Ox, respectiv Oy, respectiv Oz, iar directoarea este- ori poate fi aleasa - in planul de coordonate perpendicular pe generatoare.
Cilindrul de ecuatie
$$y = \sin x^2$$
are generatoarea paralela cu axa Oz si curba directoare curba din planul xOy de ecuatii $z = 0$, $y = \sin x^2$:



$\left(x, \sin x^2, z\right)$
directrix curve $y = \sin x^2$

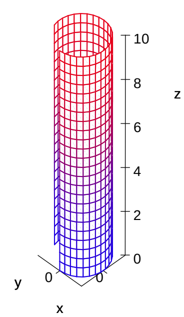
iar cilindrul de ecuatie
$$y = 6 + \sqrt{9 + 8z - z^2}$$
are generatoarea paralela cu axa Ox si directoarea in planul yOz :



$\left(s, 6 + \sqrt{(9 + 8t - t^2)}, t\right)$
directrix curve $y = 6 + \sqrt{(9 + 8z - z^2)}$

– *Cilindrii eliptici, parabolici*, respectiv *hiperbolici* sunt cazuri particulare de cuadrice care sunt totodata suprafete cilindrice.

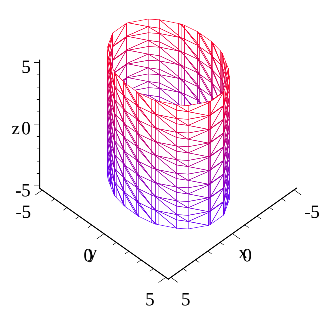
(a) *Cilindri circulari (drepti).* Ecuatia $x^2 + y^2 = R^2$, unde R este un numar pozitiv, defineste un *cilindru circular drept* deoarece curbele transversale din planele paralele cu planul xOy sunt cercuri de raza R; aici generatoarea este paralela cu axa Oz iar directoarea este, de pilda, cercul din planul xOy cu centrul in origine de raza R. Pentru cilindrul de ecuatie $x^2 + y^2 = 1$ axa Oz este axa de simetrie; graficul lui esteurmatorul



right circular cylinder $(\cos t, \sin t, s)$

(b) *Cilindri eliptici.* Un cilindru este *eliptic* daca directoarele din plane perpendiculare pe generatoare sunt elipse. Un cilindru eliptic care are ca axa de simetre axa Oz are ecuatia generala $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ecuatia $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ poate fi "citita" ca o elipsa planul xOy, ori intr-un plan paralel cu acesta, dar si ca cilindrul



directrix curve $16x^2 + 9y^2 = 144$

cu generatoarea paralela cu axa Oz, de directoare $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1, z = 0$.

Alte exemple de cilindri eliptici: cilindrul

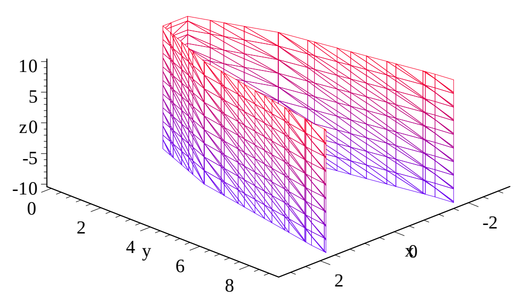
are ecuatia carteziana $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$, iar cilindrul

are ecuatia carteziana $\frac{x^2}{1^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$.

(c) *Cilindri parabolici.* Un cilindru pentru care sectiunile transversale din planele perpendiculare pe generatoare sunt parabole se numeste *cilindru parabolic*. Ecuatia (carteziana) generica este $y = ax^2$ (aici generatoarea este paralela cu axa Oz), iar forma parametrica a ecuatiei precedente este:

$$\begin{cases} x = t \\ y = at^2 \\ z = s \end{cases} .$$

Cilindrul de ecuatie $y = 3x^2$ are generatoarea paralela cu axa Oz, directoare este parabola de ecuatii $z = 0$, $y = 3x^2$, iar graficul este urmatorul:



$y = 3x^2$

Cilindrul dat parametric prin

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 2t^2 \end{cases} , s, t \in \mathbb{R},$$

are reprzentarea

si ecuatia carteziana $z = 2y^2$.

(d) *Cilindri hiperbolici.* Un cilindru pentru care sectiunile transversale din planele perpendiculare pe generatoare sunt hiperbole se numeste *cilindru hiperbolic*. Ecuatia (carteziana) generica este

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

iar iar forma parametrica a ecuatiei precedente este: $\begin{cases} x = acht \\ y = asht \\ z = s \end{cases}$.

4. *Paraboloizi*. Sectiunile transversale ale paraboloizilor sunt elipse sau hiperbole.

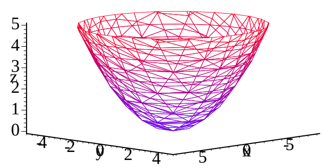
   (a) *Paraboloizi eliptici.* Ecuatia generica pentru un paraboloid eliptic este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c},$$

   iar ecuatiile parametrice corespunzatoare sunt

$$\begin{cases} x = a\sqrt{\left|\frac{s}{c}\right|}\cos t \\ y = b\sqrt{\left|\frac{s}{c}\right|}\sin t \\ z = s \end{cases}.$$

   Aici sectiunile din planele paralele cu xOy sunt elipse, celelalte sunt parabole. Exemple de paraboloizi eliptici:



$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = \frac{z}{2}$$

   (b) *Paraboloizi hiperbolici.* Ecuatia generica pentru un paraboloid eliptic este

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

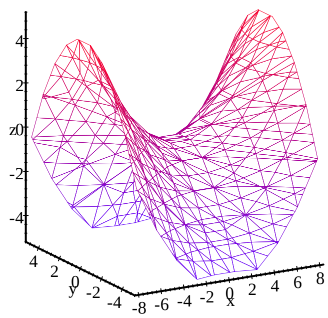
   iar ecuatiile parametrice corespunzatoare sunt

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = c\left(\frac{s^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2}\right) \end{cases}.$$

   Aici sectiunile din planele paralele cu xOy sunt hiperbole, celelalte sunt parabole.

   Daca $b = a$, efectuand o rotatie cu $45°$ in jurul axei Oz ecuatia paraboloidului are forma $2XY = a^2 Z$. Se observa ca aspectul curbei intr-o vecinatate a originii este de sa; de aici si denumirea de *punct sa* pentru origine (care este un punct stationar pentru functia $z = c\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2}\right)$, dar nu este punct de extrem).

Exemple de grafice de paraboloizi hiperbolici:



$$\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{3^2} = \frac{z}{2}$$

5. *Conuri eliptice*. Ecuatia standard pentru un *con eliptic* este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

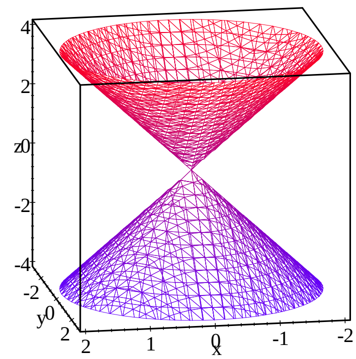
iar ecuatiile parametrice corespunzatoare sunt

$$\begin{cases} x = as\cos t \\ y = bs\sin t \\ z = cs \end{cases} .$$

Aici sectiunile din planele paralele cu xOy sunt elipse, celelalte sunt hiperbole, respectiv drepte simetrice fata de axe prin origine in planele de coordonate.

Orice conica se obtine sectionand un con cu un plan.

Exemple de grafice de conuri eliptice:



$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{5^2}=\frac{z^2}{3^2}$$

6. *Hiperboloizi*.

   (a) *Hiperboloizi cu o panza*. Ecuatia generica pentru un *hiperboloid cu o panza* este

   $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

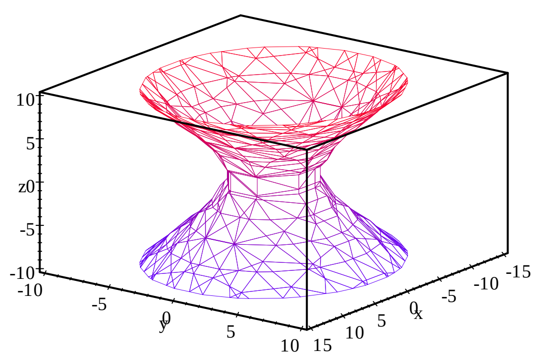
   iar ecuatiile parametrice corespunzatoare sunt

   $$\begin{cases} x=\dfrac{a}{c}\sqrt{c^2+s^2}\cos t \\ y=\dfrac{b}{c}\sqrt{c^2+s^2}\sin t \\ z=s \end{cases}.$$

   Aici sectiunile din planele paralele cu xOy sunt elipse, celelalte sunt hiperbole, iar suprafata are o singura panza. Axa Oz se numeste *axa hiperboloidului,* iar originea, *centrul* sau.

   Analog, cuadricele de ecuatii $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ si $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ sunt hiperboloizi cu o panza.

   Exemplu de grafic de hiperboloid cu o panza:



$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

(b) *Hiperboloizi cu doua panze*. Ecuatia generica pentru un *hiperboloid cu doua panze* este

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

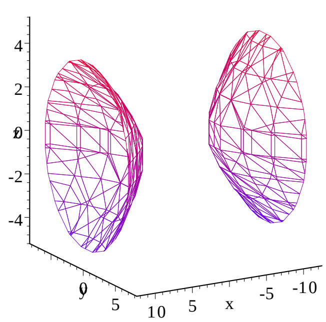
iar ecuatiile parametrice corespunzatoare sunt

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{c}\sqrt{s^2 - c^2}\cos t \\ y = \dfrac{b}{c}\sqrt{s^2 - c^2}\sin t \\ z = s \end{cases}.$$

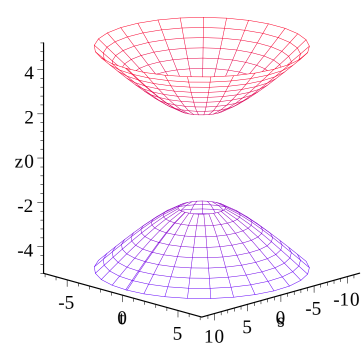
Aici sectiunile din planele paralele cu xOy sunt elipse (pentru $z = k$, unde $|k| > c$), celelalte sunt hiperbole, iar suprafata are doua panze.

Analog, cuadricele de ecuatii $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ si $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ sunt hiperboloizi cu doua panze.

Exemple de grafice de hiperboloizi cu doua panze:



$$\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{3^2} - \frac{z^2}{2^2} = 1$$



$$\left(\frac{5}{2}\sqrt{s^2 - 2^2}\cos t, \frac{3}{2}\sqrt{s^2 - 2^2}\sin t, s\right)$$

REDUCEREA LA FORMA CANONICA

Pentru a reduce la forma canonica

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33}z^2 + a'_{44} = 0 \text{ sau } a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{34}z = 0.$$

ecuatia generala a cuadricei

$S : f(x, y, z) := a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + +2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$

efectuam (ca si la conice) translatii si rotatii (i.e. transformari ortogonale) asupra reperului canonic.

Numerele

$$\Delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{13} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}, \text{ si } \delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

si matricele corespunzatoare sunt invariante (i.e. nu se modifica) la transformari ortogonale si sunt numite *invariantii ortogonali* (afini) ai cuadricei S. Daca $\Delta \neq 0$ spunem ca S este o *cuadrica nedegenerata*. Cuadricele nedegenerate (nevide) sunt elipsoizii (deci si sferele), hiperboloizii si paraboloizii. Celelalte cuadrice (pentru care $\Delta = 0$) se numesc *cuadrice degenerate*.

Pentru a reduce ecuatia cuadricei S la forma canonica putem parcurge urmatorii pasi.

1. Daca $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ (i.e. partea patratica este deja la forma canonica) efectuam o translatie.
2. Daca $a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0$
   (a) determinam valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ale matricei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ si vectorii proprii ortonormati corespuzatori acestor valori alesi astfel ca determinantul matricei de trecere T (de la baza canonica la noua baza) sa fie 1 (reper drept);
   (b) efectuam rotatia $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$;
   (c) formam patratele care contin x', y', z' (efectuam o translatie) si obtinem ecuatia canonica a cuadricei S.

Daca $\delta \neq 0$ cuadrica S este o *cuadrica cu centru*- centru in care se face translatia de la punctul **c**. In acest caz ecuatia canonica are forma

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0;$$

coordonatele centrului se obtin rezolvand sistemul $f'_x = 0, f'_y = 0, f'_z = 0$.

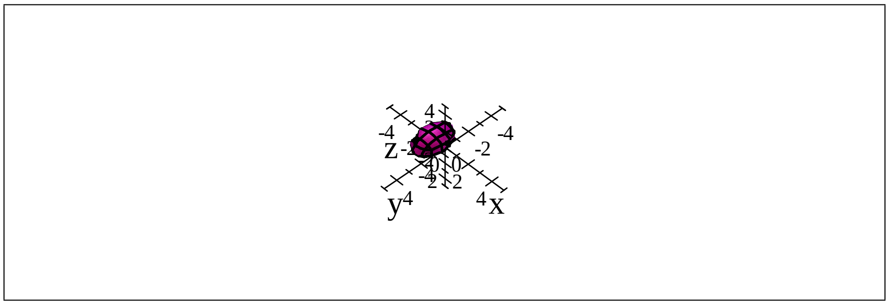
Exemplul 12.2.1. Sa se reduca la forma canonica ecuatia cuadricei

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - x + 2y - 6z + 1 = 0.$$

Rezolvare. Deoarece partea patratica este deja la forma canonica, efectuam doar o translatie, formand patratele care contin pe x, y, respectiv, pe z. Obtinem $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(z - 1\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6$. Prin urmare forma canonica este

$$\frac{X^2}{\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{Z^2}{\left(\frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

iar cuadrica este un elipsoid de semiaxe $\frac{\sqrt{23}}{2}, \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{3}}$ cu centrul $Q\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$.



$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - x + 2y - 6z + 1 = 0$$

Exemplul 12.2.2. Sa se reduca la forma canonica ecuatia cuadricei

$$3x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 2xy = 2.$$

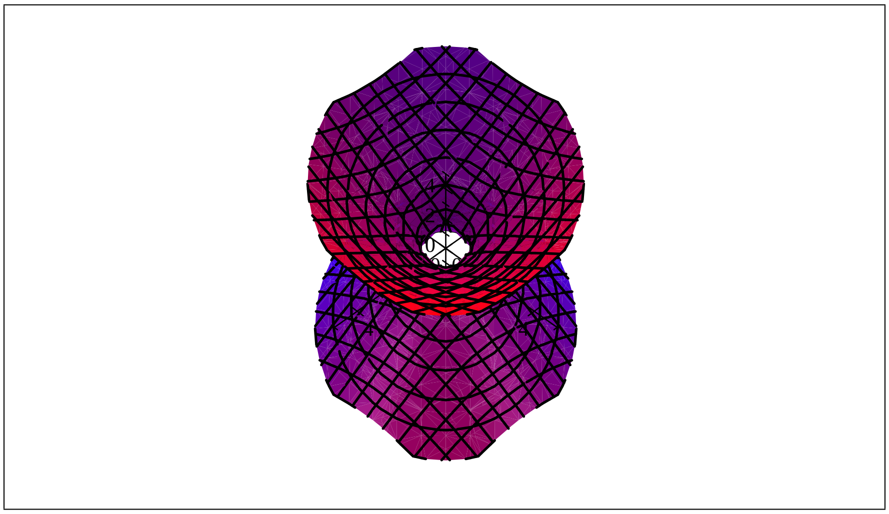
Rezolvare. Deoarece partea liniara (i.e. $a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z$) este nula este suficient sa efectuam o transformare ortogonala. Matricea formei patratice asociate fiind

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

obtinem ecuatia caracteristica $(\lambda + 3)(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$. Prin urmare forma canonica a ecuatiei este $-3X^2 + 2Y^2 + 4Z^2 = 2$, sau, echivalent,

$$-\frac{X^2}{\frac{2}{3}} + Y^2 + \frac{Z^2}{\frac{1}{2}} = 1,$$

iar cuadrica este un hiperboloid cu o panza. Daca dorim sa determinam reperul in care are aceasta forma, determinam o baza dreapta corespunzatoare acestor valor proprii: pentru $\lambda = -3$ alegem $\overline{v}_1$=$\overline{k}$, pentru $\lambda = 2$ alegem $\overline{v}_2$=$1\frac{}{\sqrt{2}i+\frac{1}{\sqrt{2}}j}$ si, in sfarsit, pentru $\lambda = 4$ alegem $\overline{v}_3$=-$1\frac{}{\sqrt{2}i+\frac{1}{\sqrt{2}}j}$. Obtinem reperul $\mathcal{R} = (O, \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\})$ in care cuadrica are forma canonica determinata.



$$3x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 2xy = 2$$

Exemplul 12.2.3. Sa se reduca la forma canonica ecuatia cuadricei

$$S : z^2 + 2xy + 2\sqrt{2}y + 2z + 2 = 0.$$

Rezolvare. Efectuam intai o transformare ortogonala pentru a reduce forma patratica $g(x, y, z) := z^2 + 2xy$ la forma canonica. Matricea formei patratice asociate este

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

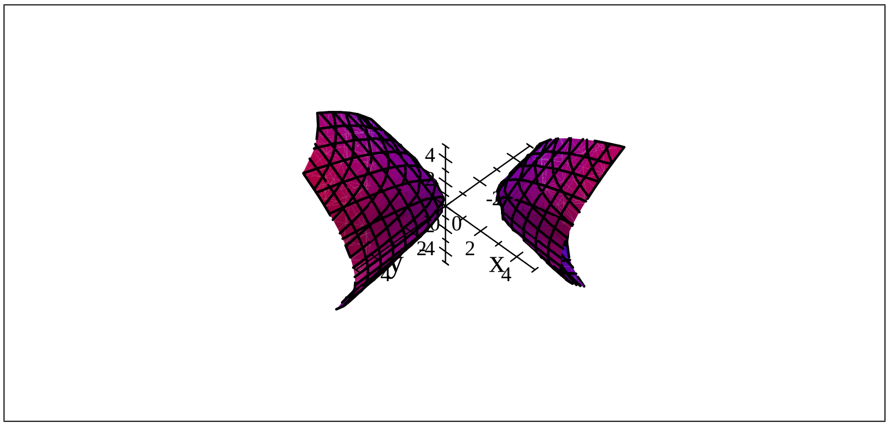
iar valorile proprii corespunzatoare sunt $\lambda_1 = -1$ si $\lambda_{2,3} = -1$. O baza dreapta asociata este $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}, \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}, \bar{k} \right\}$. Legatura dintre coordonatele curente in baza canonica B_c, respectiv in baza B este

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T_{B_cB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

deci $x = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}$, $z = z'$. Inlocuind obtinem $S : z'^2 - x'^2 + y'^2 - 2x' + 2y' + 2z' + 2 = 0$, ori

$$X^2 - Y^2 - Z^2 = 1,$$

unde $x' = X - 1, y' = Y - 1, z' = Z - 1$. In consecinta S este un hiperboloid cu doua panze care are ecuatia canonica $X^2 - Y^2 - Z^2 = 1$ in reperul $\mathcal{R} = (O'(1, 1, 1), B)$.



$$z^2 + 2xy + 2\sqrt{2}y + 2z + 2 = 0.$$

1.2 C. Exercitii

1. Sa se determine centrul si raza sferei de ecuatie, apoi sa se reprezinte grafic.
   (a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y = 0$;
   (b) $z = \pm\sqrt{2 - x^2 - y^2 + x}$;
   (c) $x = 3\cos\varphi\sin\theta, y = 1 + 3\sin\varphi\sin\theta, z = -1 + 3\cos\theta$.

   Raspuns. a. $\left(1, -\frac{1}{2}, 0\right), \frac{\sqrt{5}}{2}$; *b.* $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \frac{3}{2}$; *c.* $(3, 1, -1), 3$.

2. Sa se scrie ecuatia sferei de diametru OM, unde $M(1, 2, 3)$.

   Raspuns. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}$.

3. Determinati punctele suprafetei de ecuatie $z = x^3 + y^3$ in care normala este perpendiculara pe planul de ecuatie $3x + 3y - z + 11 = 0$.

   Raspuns. $(1, 1, 2), (-1, 1, 0), (1, -1, 0), (-1, -1, -2)$.

4. Sa se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel incat planul de ecuatie $y = \alpha$ sa fie tangent la sfera de ecuatie $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4z + 9 = 0$ si sa se arate ca $M(1, 2, 3)$ este un punct exterior sferei.

   Raspuns. $\alpha \in \{-2, 2\}$.

5. Fie sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$. Sa se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel incat dreapta de ecuatii $x = y = \alpha z$ sa fie
   (a) exterioara sferei;
   (b) tangenta sferei
   (c) secanta.

   Raspuns. a. $\dot{\alpha} \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; b. $\dot{\alpha} \in \{-1, 1\}$; c. $\dot{\alpha} \in (-1, 1)$.

6. Scrieti ecuatiile planului tangent in punctul curent la sfera, in fiecare dintre cele trei cazuri de la exercitiul 1.

   Daca punctul curent apartinand sferei este (a, b, c) atunci a. $2(a-1)(x-a) + (2b+1)(y-b) + 2c(z-c) = 0$; b. $(2a-1)(x-a) + 2b(y-b) + 2c(z-c) = 0$; c. $a(x-a) + (b-1)(y-b) + (c+1)(z-c) = 0$.

7. Sa se scrie ecuatiile planelor tangente la suprafata $S : x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 8$ in punctele de intersectie cu dreapta de ecuatii $x = y = z$.

   Raspuns. $2x + 2y + z + 10 = 0, 4x + 4y + 7z = 20$.

8. Determinati ecuatia sferei tangente la planul $\pi : x + y - 2z = 0$ in punctul $M(1, 1, 1)$ si la planul $\pi' : x + y - 2z = 13$.

   Raspuns. $\left(x + \frac{19}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{19}{2}\right)^2 + (z - 22)^2 = \frac{169}{24}$.

9. Scrieti ecuatia sferei de raza 1 aflata in primul octant (i.e. $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$), care este tangenta la planele de coordonate.

   Raspuns. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$.

10. Fie $S : \begin{cases} x = te^s \\ y = te^{-s} \\ z = t^{-2} \end{cases}$ .Determinati ecuatia implicita a suprafetei si numarul a astfel ca planul de ecuatie $x - y + az = 3$ sa fie tangent la S.

    Raspuns. $xyz = 1; a = -1$.

11. Determinati centrul si raza cercurilor obtinute prin intersectia planului de ecuatie $x + y + z = 0$ cu sferele definite la exercitiul 1.

    Raspuns. $a.\sqrt{\frac{7}{6}}, \left(\frac{5}{6}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\right); b.\sqrt{\frac{13}{6}}, \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right); c.\sqrt{6}, (2, 0, -2)$.

12. Determinati natura locului geometric a punctelor aflate la distanta egala de punctul $M(1, 1, 1)$ si de planul de ecuatie $x + y + z = 0$.

    Raspuns. elipsoid.

13. Determinati raza si centrul sferei care trece prin origine si prin punctele $A(1, 0, 0), B(0, 1, 1)$ si $C(0, 0, 1)$.

    Raspuns. $\frac{\sqrt{3}}{2}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

14. Determinati ecuatia sferei tangente la planul $\pi : x + y - 2z = 0$ in punctul $M(1, 1, 1)$ si la planul $\pi' : -x + 2y + z = 0$.

    Raspuns. $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(z - \frac{9}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$ si $\left(x - \frac{9}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{7}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{7}\right)^2 = \frac{24}{49}$.

15. Scrieti ecuatia sferei ce trece prin punctul $M(R, R, R)$ (unde $R > 0$) si cercul de ecuatii
    $$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = R \end{cases}.$$

    Raspuns. $x^2 + y^2 + z^2 = R(x + y + z)$.

16. Determinati centrul si raza sferei inscrise in tetraedrul definit de planele de ecuatii $3x - 2y + 6z = 18, x = 0, y = 0, z = 0$.

    Raspuns. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$.

17. Scrieti ecuatia suprafetei generate prin rotirea elipsei de ecuatii $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$ in jurul axei Oz si o parametrizare a ei.

    Raspuns. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; x = a\cos\varphi\sin\theta, y = a\sin\varphi\sin\theta, z = c\cos\theta, \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \pi]$.

18.Reprezentati grafic cuadricele de mai jos.

(a) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 16;$
(b) $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 16;$
(c) $x^2 - 4y^2 - 9z^2 = 16;$
(d) $x^2 + 4y^2 = 16;$
(e) $x^2 + 9z^2 = 16;$
(f) $4y^2 + 9z^2 = 16;$
(g) $xy = 1;$
(h) $x^2 - z^2 = 0;$
(i) $y = x^2;$
(j) $z = x^2 + 4y^2;$
(k) $z^2 = x^2 + 4y^2;$
(l) $x^2 + 4y^2 = 2x.$

19.Reprezentati grafic cuadrica $S : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$. Determinati aria sectiunilor realizate de planele $y = 1$ si $z = 1$.

Raspuns. $\frac{45}{4}\pi;\ \frac{144}{25}\pi.$

20.Determinati ecuatia planului tangent si ecuatiile normalei in punctul M la suprafata S.

(a) $S : x = uv^2, y = u^2 v, z = uv,\ M(1, -1, -1);$
(b) $S : x = ue^{v^2}, y = e^{u^2} v, z = uv,\ M(0, 0, 0);$
(c) $S : z = xy,\ M(1, 1, 1);$
(d) $S : x^2 y + xy^3 - z^4 = 1,\ M(1, 1, 1).$

21.Scrieti ecuatia suprafetei generate de rotirea curbei de ecuatii $y = 0, z = x^2$ in jurul axei Oz;

Raspuns. $z = x^2 + y^2.$

22.Aratati ca locul geometric a punctelor echidistante fata de planul zOx si dreapta de ecuatii $y = 1, z = 0$ este suprafata cilindrica de ecuatie $z^2 - 2y + 1 = 0$. Reprezentati grafic aceasta suprafata.

23.Scrieti ecuatia planului ce trece prin centrul Q al suprafetei $x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x + 4z = 0$ si este perpendicular pe dreapta OQ.

Raspuns. $x - 2z = 5.$

24.Scrieti ecuatiile proiectiilor in planul xOy a suprafetelor definite la exercitiul 1.

Raspuns. a. $(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}, z = 0$; b. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$; c. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9.$

25.Reprezentati grafic locul geometric al punctelor M pentru care $d(M, O) = 2d(M, A),\ A(1, 2, 3).$

Raspuns. Sfera de centru $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, 4\right)$ si raza $\frac{4}{3}\sqrt{10}.$

26.Determinati suprafata simetrica suprafetei $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z = 0$ fata de planul $x + y + z = 25.$

Raspuns. $\left(x-\frac{55}{3}\right)^2+\left(y-\frac{52}{3}\right)^2+\left(z-\frac{46}{3}\right)^2=5.$

27.Determinati planele tangente sferei $S: x^2+y^2+z^2-2x+2z=0$ care trec prin dreapta de ecuatii $x=2, y=3$.

Raspuns. $14(x-2)-\left(4\pm\sqrt{30}\right)(y-3)=0.$

28.Gasiti centrul si raza cercului de ecuatii $x^2+y^2+z^2-10y=0$, $x^2+y^2+z^2+x-8y+2z-19=0$.

Raspuns. $(1,7,2)\,,4.$

29.Scrieti ecuatia planului ce trece prin centrul Q al suprafetei $x^2+y^2+z^2-2x+y-3z=0$ si este perpendicular pe dreapta OQ.

Raspuns. $2x-y+3z=7.$

30.Determinati ecuatia locului geometric al punctelor a caror distanta fata de origine este dublul distantei la punctul $(0,-3,0)$.

Raspuns. $x^2+(y+4)^2+z^2-4=0.$

31.Detarminati proiectia pe planul xOy a curbei de intersectie a sferei $x^2+y^2+z^2-4x+8y+8z=0$ cu planul ce trece prin centrul sferei si este perpendicular pe dreapta de ecuatii $x=0, y+z=0$.

Raspuns. $(x-z)^2+(y-z)^2=4(x-z)$.

32.Reprezentati grafic corpul marginit de suprafetele de ecuatii $x=y^2, z=0, z=4$,$x=4$ si scrieti ecuatiile diagonalelor fetei continute in planul $x=4$.

Raspuns. $x=4, z+y=2$ si $x=4, z-y=2$.

33.Determinati ecuatia suprafetei cilindrice a carei generatoare este paralela cu vectorul $\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$ si a carei directoare are ecuatiile $x^2+y^2=4x, z=0$.

Raspuns. $x^2+(y+4)^2+z^2-4=0.$

34.Determinati tipul cuadricei de ecuatie $19x^2+10y^2-29z^2-44xy+4yz+50zx-7\sqrt{6}x-14\sqrt{6}y-7\sqrt{6}z=0$ si o forma canonica.

Raspuns. paraboloid hiperbolic; e.g. $Z=X^2-Y^2$.

35.Determinati tipul cuadricei de ecuatie $x^2-y^2-4z^2+4yz+x-y+2z=0$ si o forma canonica.

Raspuns. planele de ecuatii $x-y+2z=0, x+y-2z+1=0$.

36.Determinati tipul cuadricei de ecuatie $5x^2-8y^2+5z^2-6xz+8=0$ si o forma canonica.

Raspuns. hiperboloid cu o panza; e.g. $\frac{X^2}{4}-Y^2+Z^2=1$.

37.Determinati tipul cuadricei de ecuatie $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0$ si o forma canonica.

Raspuns. elipsoid de centru $(2,1,-1)$; e.g. $2X^2+Y^2+3Z^2=2$.

38.Determinati aria elipsei obtinute proiectand curba de ecuatii $7x^2+6y^2+5z^2-4xy=16, z=1$ in planul $x0y$.

Raspuns. $\frac{11}{6}\pi$.

39.Determinati tipul cuadricei de ecuatie $9x^2 + 4y^2 + z^2 - 12xy - 4yz + 6zx + 7\sqrt{\frac{2}{3}}x + 14\sqrt{\frac{2}{3}}y + 7\sqrt{\frac{2}{3}}z = 0$ si o forma canonica.

Raspuns. cilindru parabolic; e.g. $Z = X^2$.

40.Sa sedetermine planele tangente suprafetei de ecuatie $2x^2+3y^2-z^2 = 1$ paralele cu planul de ecuatie $2x + 6y + z = 0$.

Raspuns. $2x + 6y + z = \pm\sqrt{13}$.

41.Sa se determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel incat cuadrica de ecuatie $\alpha xy + \alpha^2 zx + \beta yz + \alpha^2\beta^2 = 0$ sa fie un hiperboloid.

Raspuns. $\alpha\beta \neq 0$.

42.Sa se discute natura cuadricelor $S : 3x^2 + 2\alpha y^2 + z^2 + 12\alpha x - 2z + 1 = 0$.

Raspuns. Daca $\alpha \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ atunci S este hiperboloid cu o panza; daca $\alpha = -\frac{2}{3}$ atunci S este con; daca $\alpha \in \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ atunci S este hiperboloid cu doua panze; daca $\alpha = 0$ atunci $S = \emptyset$ (reuniunea a doua plane imaginare); daca $\alpha \in (0, \infty)$ atunci S este elipsoid.