

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №3
по дисциплине «Построение и анализ алгоритмов»
Тема: Потоки и сети

Студент гр. 8383

Бессуднов Г. И.

Преподаватель

Фирсов М.А.

Санкт-Петербург

2020

Цель работы.

Изучить принцип работы алгоритма Форда-Фалкерсона для нахождения максимального потока в сети на графах. Решить с их помощью задачи

Постановка задачи.

Найти максимальный поток в сети, а также фактическую величину потока, протекающего через каждое ребро, используя алгоритм Форда-Фалкерсона.

Сеть (ориентированный взвешенный граф) представляется в виде триплета из имён вершин и целого неотрицательного числа - пропускной способности (веса).

Входные данные:

N - количество ориентированных рёбер графа

v_0 - исток

v_n - сток

$v_i v_j \omega_{ij}$ - ребро графа

$v_i v_j \omega_{ij}$ - ребро графа

...

Выходные данные:

P_{\max} - величина максимального потока

$v_i v_j \omega_{ij}$ - ребро графа с фактической величиной протекающего потока

$v_i v_j \omega_{ij}$ - ребро графа с фактической величиной протекающего потока

...

В ответе выходные рёбра отсортируйте в лексикографическом порядке по первой вершине, потом по второй (в ответе должны присутствовать все указанные входные рёбра, даже если поток в них равен 0).

Sample Input:

7

a

f

a b 7

a c 6

b d 6

c f 9

d e 3

d f 4

e c 2

Sample Output:

12

a b 6

a c 6

b d 6

c f 8

d e 2

d f 4

e c 2

Вар. 5. Поиск не в глубину и не в ширину, а по правилу: каждый раз выполняется переход по дуге, имеющей максимальную остаточную пропускную способность. Если таких дуг несколько, то выбрать ту, которая была обнаружена раньше в текущем поиске пути.

Описание алгоритма.

Строится остаточная сеть, поток в каждом ребре устанавливается в 0. Далее по правилу индивидуализации происходит поиск пути в графе. Возможны два варианта:

1. Если путь был найден, тогда:

- 1.1. Вычисляется минимальная остаточная пропускная способность ребер в этом пути.
- 1.2. Это значение прибавляется к значению потока всех ребер в пути.
- 1.3. Это значение вычитается из значения потока у обратных ребер в пути.
- 1.4. Процесс поиска пути повторяется.
2. Если путь найден не был, то алгоритм заканчивает работу.

Описание структур данных и функций.

```
class Edge {
public:
    char start; //начальная вершина
    char end; //конечная вершина
    int flow; //поток через ребро
    int capacity; //пропускная способность
    int residualCapacity; //остаточная пропускная способность
    Colors color; //цвет ребра
    Edge(char start, char end, int capacity);
    void evaluateResidualCapacity();
};
```

Класс необходим для хранения информации о ребре. Содержит функцию `void evaluateResidualCapacity();` которая высчитывает остаточную пропускную способность ребра.

```
class Graph {
private:
    std::map<char, std::vector<Edge*>> graph; //граф
    std::map<char, std::vector<Edge*>>::iterator graphIt;
//итератор графа
public:
    //получение ребра по двум точкам
    Edge* operator()(char start, char end);
    Edge* findMaxEdge(char start);
```

```

    void pushEdge(Edge* edge);
    int maxFlow(char sink);
    void recolorize();
    void printGraph();
};

```

Класс необходим для хранения графа. Граф хранится в структуре `std::map<char, std::vector<Edge*>> graph;` как список смежности. В структуре `map` параметр `char` отвечает за вершину, а вектор, состоящий из `Edge` - это ребра, смежные с этой вершиной. Содержит функции:

`Edge* findMaxEdge(char start);` - необходима для поиска ребра с максимальной остаточной пропускной способностью из вершины `start`. Возвращает указатель на ребро, если оно было найдено и `nullptr`, если оно найдено не было.

`void pushEdge(Edge* edge);` - добавляет ребро в граф.

`int maxFlow(char sink);` - высчитывает максимальный поток, складывая потоки входящие в сток `sink`. Возвращает величину максимального потока.

`void recolorize();` - перекраска графа в черный.

`void printGraph();` - печатать графа.

```

class PathFinder {
private:
    std::vector<std::pair<char, char>> currentPath; //путь
    std::vector<std::pair<char, char>>::iterator pathIt;
//итератор пути
    int minCapacity; //минимальная остаточная пропускная
    способность пути
    void constructPath(std::stack<Edge*> edgeStack, char start,
char end);
    void printPath();
    void setMinCapacity(std::stack<Edge*> edgeStack)
public:
    std::vector<std::pair<char, char>> getPath();

```

```

    int getMinCapacity();
    void findPath(Graph &graph, char start, char end);
    bool isPath();
};

```

Класс необходим для поиска путей в графе. Содержит функции:

`std::vector<std::pair<char, char>> getPath();` - возвращает найденный путь.

`int getMinCapacity();` - возвращает минимальную остаточную пропускную способность пути.

`void findPath(Graph &graph, char start, char end);` - нахождение пути в графе graph из start в end с условием индивидуализации.

`bool isPath();` - функция проверки нахождения пути. Возвращает 1, если путь был найден и 0, если нет.

```

class Network {
private:
    PathFinder pathFinder; //объект для нахождения путей
    Graph residualNetwork; //остаточная сеть
    int maxFlow; //максимальный поток
    char source; //исток
    char sink; //сток
public:
    Network();

    void printNetwork();
    void findMaxFlow();
};

```

Класс необходимый для работы с сетью. Содержит функции:

`void printNetwork();` - печать сети.

`void findMaxFlow();` - нахождение максимального потока в сети.

Сложность алгоритма по времени.

В основе алгоритма лежит поиск из варианта индивидуализации, сложность которого можно оценить как $O(|E|)$, так как в худшем случае будут пройдены все ребра. После каждой итерации к значению потока прибавляется как минимум 1, значит цикл будет длиться не больше чем сумма весов ребер, выходящих из истока, обозначим это число f . Итого сложность алгоритма по времени $O(|E| * f)$

Сложность алгоритма по памяти.

Программа хранит только ребра пути на каждой итерации алгоритма, поэтому сложность $O(|E|)$.

Тестирование.

Пример вывода результата работы программы представлен на рис. 1.

```

3
a
c
a b 7
a c 6
b c 4
Current path:
a<--->b
b<--->c
Minimum residual capacity: 4

Residual Network:
  Name  Flow  Capacity  Residual
a<--->b    4      7        3
a<--->c    0      6        6
b<--->c    4      4        0

<----->

Current path:
a<--->c
Minimum residual capacity: 6

Residual Network:
  Name  Flow  Capacity  Residual
a<--->b    4      7        3
a<--->c    6      6        0
b<--->c    4      4        0

<----->

<-----ANSWER----->
Max flow: 10

Residual Network:
  Name  Flow  Capacity  Residual
a<--->b    4      7        3
a<--->c    6      6        0
b<--->c    4      4        0

<----->

```

Рис. 1- Результат работы программы

№	Input	Output
1	7 a f a b 7 a c 6 b d 6 c f 9 d e 3 d f 4 e c 2	17 a b 5 a c 12 b c 5 c d 14 c e 3 d e 14
2	10 a f a b 16 a c 13 c b 4 b c 10	23 a b 12 a c 11 b c 0 b d 12 c b 0 c e 11

	b d 12 c e 14 d c 9 d f 20 e d 7 e f 4	d c 0 d f 19 e d 7 e f 4
3	3 a c a b 7 a c 6 b c 4	10 a b 4 a c 6 b c 4

Код программы приведен в приложении А.

Вывод.

В ходе лабораторной работы был реализован на языке C++ алгоритм Форда-Фалкерсона для нахождения максимального потока сети.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ИСХОДНЫЙ КОД ПРОГРАММЫ

```
#include "pch.h"
#include <iostream>
#include <map>
#include <vector>
#include <stack>
#include <algorithm>
#include <iomanip>

//перечисление цветов
enum Colors { White, Black };

//класс ребра
class Edge {
public:
    char start; //начальная вершина
    char end; //конечная вершина
    int flow; //поток через ребро
    int capacity; //пропускная способность
    int residualCapacity; //остаточная пропускная способность
    Colors color; //цвет ребра

    Edge(char start, char end, int capacity) : start(start), end(end),
        capacity(capacity), residualCapacity(capacity) {
        color = Colors::Black;
        flow = 0;
    }

    void evaluateResidualCapacity() {
        residualCapacity = capacity - flow;
    }
};

//компаратор для сортировки ребер по остаточной пропускной способности
bool edgeComp(Edge* e1, Edge* e2) {
    return e1->residualCapacity > e2->residualCapacity;
}

//компаратор для сортировки ребер по имени
bool edgeCompOut(Edge* e1, Edge* e2) {
    return e1->end < e2->end;
}

//класс графа
class Graph {
private:
    std::map<char, std::vector<Edge*>> graph; //граф
    std::map<char, std::vector<Edge*>>::iterator graphIt; //итератор графа
public:
    //получение ребра по двум точкам
    Edge* operator()(char start, char end) {
        for (auto& edge : graph[start]) {
            if (edge->end == end) {
                return edge;
            }
        }
    }
};
```

```

        return nullptr;
    }

    //нахождение ребра с максимальной остаточной пропускной способностью
    Edge* findMaxEdge(char start);

    //функция добавления ребра в граф
    void pushEdge(Edge* edge) {
        graph[edge->start].push_back(edge);
        graph[edge->end];
    }

    //высчитывание максимального потока
    int maxFlow(char sink) {
        int maxFlow = 0;
        for (graphIt = graph.begin(); graphIt != graph.end(); graphIt++) {
            for (auto &edge : graphIt->second) {
                if (edge->end == sink) {
                    maxFlow += edge->flow;
                }
            }
        }

        return maxFlow;
    }

    //перекрасить граф в черный цвет
    void recolorize() {
        for (graphIt = graph.begin(); graphIt != graph.end(); graphIt++) {
            for (auto &edge : graphIt->second) {
                edge->color = Colors::Black;
            }
        }
    }

    //печать графа
    void printGraph() {
        std::cout << "Residual Network:\n" << std::endl;
        std::cout << std::setw(7) << "Name" << std::setw(7) << "Flow" <<
std::setw(10)
        << "Capacity" << std::setw(10) << "Residual" << std::endl;
        for (graphIt = graph.begin(); graphIt != graph.end(); graphIt++) {
            std::sort(graphIt->second.begin(), graphIt->second.end(),
edgeCompOut);
            for (auto &edge : graphIt->second) {
                if (edge->capacity > 0) {
                    std::cout << edge->start << "<--->" << edge->end;
                    std::cout << std::setw(7) << ((edge->flow > 0) ? edge->
flow : 0);

                    std::cout << std::setw(10) << edge->capacity;
                    std::cout << std::setw(10) << edge->residualCapacity <<
std::endl;
                }
            }
            std::cout << "\n<----->\n\n" << std::endl;
        }
    };

    Edge* Graph::findMaxEdge(char start) {

```

```

        if (graph[start].empty()) {
            return nullptr;
        }

        //сортировка ребер, исходящих из данной вершины
        std::sort(graph[start].begin(), graph[start].end(), edgeComp);

        for (auto &edge : graph[start]) {
            if (edge->color == Colors::Black && edge->residualCapacity > 0) {
                return edge;
            }
        }

        return nullptr;
    }

    //класс для нахождения пути
    class Pathfinder {
    private:
        std::vector<std::pair<char, char>> currentPath; //путь
        std::vector<std::pair<char, char>>::iterator pathIt; //итератор пути
        int minCapacity; //минимальная остаточная пропускная способность пути

        //воссоздание пути
        void constructPath(std::stack<Edge*> edgeStack, char start, char end);
        void printPath();
        //нахождение минимальной остаточной пропускной способности в пути
        void setMinCapacity(std::stack<Edge*> edgeStack) {
            minCapacity = edgeStack.top()->residualCapacity;
            while (!edgeStack.empty()) {
                if (edgeStack.top()->residualCapacity < minCapacity) {
                    minCapacity = edgeStack.top()->residualCapacity;
                }

                edgeStack.pop();
            }
        }

    public:
        std::vector<std::pair<char, char>> getPath() {
            return currentPath;
        }

        int getMinCapacity() {
            return minCapacity;
        }

        //функция нахождения пути
        void findPath(Graph &graph, char start, char end);

        bool isPath() {
            return !currentPath.empty();
        }
    };

    void Pathfinder::printPath() {
        std::cout << "Current path:" << std::endl;
        for (pathIt = currentPath.end() - 1; pathIt != currentPath.begin(); pathIt--) {
            std::cout << pathIt->first << "<--->" << pathIt->second << std::endl;
        }
        std::cout << pathIt->first << "<--->" << pathIt->second << std::endl;
    }

```

```

        std::cout << "Minimum residual capacity: " << minCapacity << "\n\n" << std::endl;
    }

void Pathfinder::constructPath(std::stack<Edge*> edgeStack, char start, char end) {
    char symb;
    symb = end;
    Edge *currentEdge;
    while (!edgeStack.empty()) {
        currentEdge = edgeStack.top();
        edgeStack.pop();
        currentPath.push_back(std::pair<char, char>(currentEdge->start,
currentEdge->end));
    }
    printPath();
}

//клас сети
class Network {
private:
    Pathfinder pathFinder; //объект для нахождения путей
    Graph residualNetwork; //остаточная сеть
    int maxFlow; //максимальный поток
    char source; //исток
    char sink; //сток

public:
    Network() : maxFlow(0) {
        int edgesAmount;
        std::cin >> edgesAmount;
        std::cin >> source;
        std::cin >> sink;

        char v1;
        char v2;
        int capacity;

        for (int i = 0; i < edgesAmount; i++) {
            std::cin >> v1 >> v2 >> capacity;
            residualNetwork.pushEdge(new Edge(v1, v2, capacity));
            residualNetwork.pushEdge(new Edge(v2, v1, 0));
        }

        void printNetwork();
        //функция нахождения максимального потока
        void findMaxFlow();
    };

void Network::printNetwork() {
    maxFlow = residualNetwork.maxFlow(sink);
    std::cout << "<_____ANSWER_____>" << std::endl;
    std::cout << "Max flow: " << maxFlow << "\n" << std::endl;
    residualNetwork.printGraph();
}

//нахождение пути в графе
void Pathfinder::findPath(Graph &graph, char start, char end) {
    //очистка предыдущего пути и перекраска графа
    currentPath.clear();
    graph.recolorize();
}

```

```

//стэк пути
std::stack<Edge*> edgeStack;

//кладем в стэк начальное значение для запуска алгоритма
Edge *currentEdge = graph.findMaxEdge(start);
if (currentEdge == nullptr) {
    currentPath.clear();
    return;
}

graph(currentEdge->start, currentEdge->end)->color = Colors::White;
edgeStack.push(currentEdge);

//если попложенное ребро является концом, то выходим
if (currentEdge->end == end) {
    setMinCapacity(edgeStack);
    constructPath(edgeStack, start, end);
    return;
}

for (;;) {
    currentEdge = graph.findMaxEdge(edgeStack.top()->end);
    //если не смогли найти ребро из данной вершины
    if (currentEdge == nullptr) {
        edgeStack.pop();
        //если стэк опустел, то пути нет
        if (edgeStack.empty()) {
            currentPath.clear();
            return;
        }
    } else {
        //ребро было найдено
        graph(currentEdge->start, currentEdge->end)->color = Colors::White;

        //если дошли до конца, то выходим
        if (currentEdge->end == end) {
            edgeStack.push(currentEdge);
            setMinCapacity(edgeStack);
            constructPath(edgeStack, start, end);
            return;
        }

        edgeStack.push(currentEdge);
    }
}

}

//поиск максимального потока
void Network::findMaxFlow() {
    for (;;) {
        //ищем путь
        pathFinder.findPath(residualNetwork, source, sink);

        //если путь не был найден, то цикл заканчивается
        if (!pathFinder.isPath()) {
            printNetwork();
            return;
        }
    }
}

```

```

        //если путь был найден, то изменяем поток и остаточную пропускную
        способность у ребер в пути
        for (auto& edge : pathFinder.getPath()) {
            residualNetwork(edge.first, edge.second)->flow +=
pathFinder.getMinCapacity();
            residualNetwork(edge.first, edge.second)-
>evaluateResidualCapacity();

            residualNetwork(edge.second, edge.first)->flow -=
pathFinder.getMinCapacity();
            residualNetwork(edge.second, edge.first)-
>evaluateResidualCapacity();

        }

        residualNetwork.printGraph();
    }

}

int main() {
    Network network;
    network.findMaxFlow();
}

```