Лабораторная работа №5

Дисциплина: Математическое моделирование

Дудырев Глеб Андреевич

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

# 1 Цель работы

Исследовать математическую модель Лотки-Волтьерры.

# 2 Задание

Для модели «хищник-жертва»:

Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: Найти стационарное состояние системы.

# 3 Теоретическое введение

Модель “Хищник-жертва” основывается на следующих предположениях [**book?**]:

1. Численность популяции жертв и хищников зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса (экспоненциальный рост с постоянным темпом), при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

В этой модели – число жертв, - число хищников. Коэффициент описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников. Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены и в правой части уравнения).

Найдём стационарное состояние системы. Для этого приравняем её правые части к нулю.

Из полученной системы получаем, что стационарное состояние системы будет в точке , . Если начальные значения задать в стационарном состоянии , , то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки.

# 4 Выполнение лабораторной работы

Для выполнения лабораторной работы будем использовать язык программирования Julia.

## 4.1 Реализация на Julia

Напишем код для решения системы ДУ, используя библиотеки DifferentialEquations, а затем построим графики с помощью библиотеки Plots.

# Используемые библиотеки  
using DifferentialEquations, Plots  
  
# Задание системы ДУ, описывающей модель Лотки-Вольтерры  
function LV(u, p, t)  
 x, y = u  
 a, b, c, d = p  
 dx = a\*x - b\*x\*y  
 dy = -c\*y + d\*x\*y  
 return [dx, dy]  
end  
  
# Начальные условия  
u0 = [4, 9]  
p = [-0.77, -0.077, -0.33, -0.033]  
tspan = (0.0, 50.0)  
  
# Постановка проблемы и ее решение  
prob = ODEProblem(LV, u0, tspan, p)  
sol = solve(prob, Tsit5())  
  
# Построение графика  
plot(sol, title = "Модель Лотки-Вольтерры", xaxis = "Время", yaxis = "Численность популяции", label = ["жертвы" "хищники"], c = ["green" "red"], box =:on)  
plot(sol, idxs=(1, 2), title = "Модель Лотки-Вольтерры", xaxis = "Жертвы", yaxis = "Хищники", label="Зависимость жертв от хищников",box =:on)

В результате получаем следующие графики изменения численности хищников и численности жертв (рис. 1), и зависимости численности хищников от численности жертв (рис. 2).

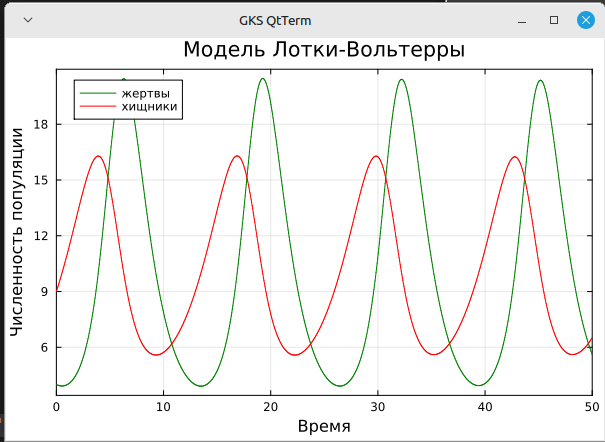


Рис. 1: График изменения численности хищников и численности жертв

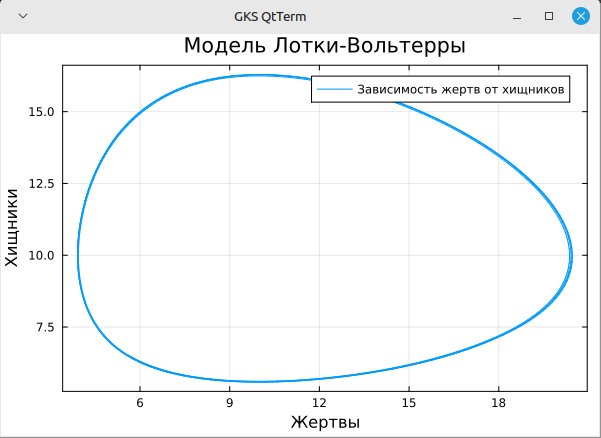


Рис. 2: График зависимости численности хищников от численности жертв

Графики периодичны, фазовый портрет замкнут, как и должно быть в жесткой модели Лотки-Вольтерры.

Далее найдем стационарное состояние системы по формуле:

В результате, , а .

Проверим, что эта точка действительно является стационарной, подставив в начальные условия.

u0\_c = [10, 10]  
prob2 = ODEProblem(LV, u0\_c, tspan, p)  
sol2 = solve(prob2, Tsit5())  
  
plot(sol2, xaxis = "Жертвы", yaxis = "Хищники", label = ["Жертвы" "Хищники"], c = ["green" "purple"], box =:on)  
plot((10, 10), seriestype=:scatter, xlims=(3, 15), ylims=(3, 15), box =:on, c = "blue", markersize=10, label = "Стационарная точка")

Получаем график из двух прямых, параллельных оси абсцисс, то есть численность жертв и хищников не меняется, как и должно быть в стационарном состоянии (рис. 3).

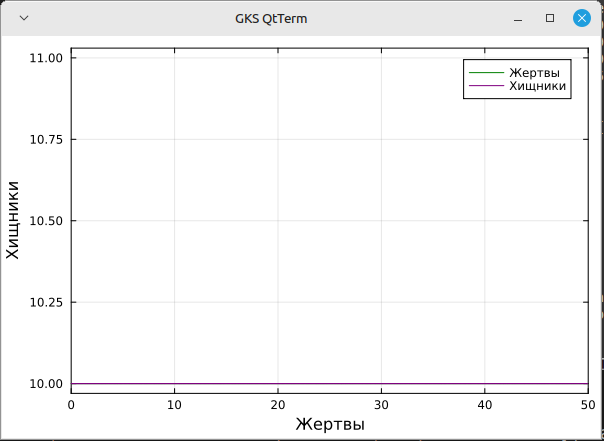


Рис. 3: График изменения численности хищников и численности жертв в стационарном состоянии

Фазовый портрет в стационарном состоянии выглядит следующим образом (рис. 4).

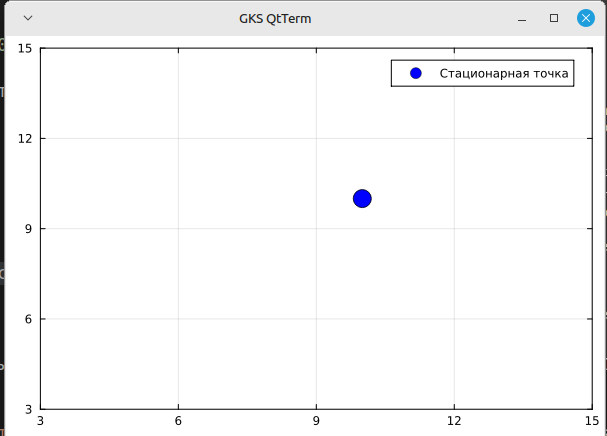


Рис. 4: График зависимости численности хищников от численности жертв в стационарном состоянии

# 5 Выводы

В результате выполнения лабораторной работы я построила математическую модель Лотки-Вольтерры на Julia.

# Список литературы